UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra

ESTUDIO Y FACTORIZACIÓN DE IDEALES COMPLETOS EN ANILLOS LOCALES

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Eduardo Tostón Valdés

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-1811-6

ESTUDIO Y FACTORIZACION DE IDEALES COMPLETOS EN ANILLOS LOCALES

Eduardo Tostón Valdés

A mis padres, Alicia y Mateo, a mi hermano, Miguel, y a mi mujer, Julia, por su apoyo en los momentos difíciles, sin los cuales habría sido imposible esta Memoria.

A mi familia adoptiva de Valladolid, porque así me he sentido en su casa, por su afecto y su apoyo logístico.

Quisiera dar las gracias a:

Antonio Campillo porque su ayuda ha ido más allá de la técnica y científica.

Al Departamento de Álgebra de la UCM por su apoyo científico y literario.

Al Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la UVA por su apoyo logístico.

INDICE

Introducción

En el capítulo II del libro IV de Enriques-Chisini (1915) **[EC]** se hace un estudio de los sistemas de curvas planas que pasan por un conjunto finito de puntos base con multiplicidades asignadas. El conjunto de puntos base está formado por puntos del plano proyectivo (digamos puntos propios) y por puntos infinitamente próximos en los sucesivos entornos de algún punto propio. En particular, se dan condiciones necesarias y suficientes que hay que imponer en un conjunto finito de puntos infinitamente próximos a un punto propio de una superficie algebraica lisa con multiplicidades asignadas, para obtener gérmenes de curvas que pasen por dichos puntos con esas multiplicidades. Su análisis es puramente geométrico.

Veinte años más tarde, Zariski desarrolla una teoría arítmetica paralela a la teoría geométrica de puntos infinitamente próximos. En **[Z1]** , introduce el concepto de ideal completo, por analogía con la idea de sistema lineal completo, para estudiar los sistemas de gérmenes de curvas planas que pasan por un conjunto finito de puntos base con multiplicidades asignadas. Uno de los principales resultados es que los ideales completos del anillo local factorizan de forma única en producto de ideales completos simples (es decir, elementos irreducibles del semigrupo). Además deduce que un ideal completo es simple si y sólo si su elemento genérico es analíticamente irreducible, y la factorización de un ideal completo corresponde a la factorización de un elemento genérico en factores analíticamente irreducibles (**[Z1]** , teorema 11).

Podemos decir que existe una teoría aritmética de ideales completos con un tratamiento en términos de álgebra conmutativa, que ha sido desarrollada y utilizada en distintas épocas por el propio Zariski (**[Z-S]** , apéndices 5 y 7) y otros como Hoskin en **[Ho]** , Lipman en **[L1]** y **[L2]** , Deligne en **[D]** , G hner en **[G]** , Rees en **[R1]** , **[R2]** y **[R3]** , Spivakovsky en **[Sp]** y Cutkovsky en **[Cu1]** , **[Cu2]** y **[Cu3]** . En **[L1]** , Lipman considera la teoría de los ideales completos en anillos locales regulares de dimensión dos con singularidad racional, caracterizando dichos ideales completos por medio de ciertos divisores con soporte excepcional asociados y estudiando el problema de factorización en este contexto.

En general no hay factorización única, pero sí se puede recuperar la semifactorización en este caso (ver **[Cu2]**). Un trabajo reciente en el que se presenta esta teoría arítmetica es **[L2]** , en el cual extiende también la teoría al caso de ideales de soporte finito sobre anillos locales regulares de dimensión arbitraria. Aqu tampoco hay factorización única, pero se tiene una factorización única si se permiten exponentes enteros negativos.

Por otro lado, tenemos una teoría geométrica de ideales completos que, partiendo del estudio clásico de los italianos, ha sido elaborada por Casas en **[Cs]** , Lejeune-Jalabert en **[Lj]** , Lipman en **[L3]** y **[L4]** , Campillo, Gonzalez-Sprinberg y Lejeune-Jalabert en **[C-G-L]** y **[C-G]** y Reguera en **[Re]** . En general, reuniendo la información de las teorías algebraica y geométrica se observa como la totalidad de los resultados de Zariski para el caso de superficies lisas no se tienen para otra clase de ideales que hayan sido estudiados.

Como principal resultado de esta Memoria, encontramos una clase amplia de ideales completos en los que los resultados de Zariski en dimensión dos se pueden generalizar a dimensión arbitraria. Para esta clase de ideales, se deduce de forma natural que la estructura de semigrupo formado por dichos ideales es la de un semigrupo libre y revisamos los resultados que aparecen en **[Z-S]** y en **[L2]** extendiendolos de forma completa a nuestro caso.

Una vez probada la utilidad de los ideales completos monomiales de la clase citada, es una pregunta natural averiguar cual es la complejidad algebraica de los mismos, queriendo decir con ello, entender sus sistemas minimales de generadores y las relaciones y sicigias de orden superior asociados a ellos. Así damos también un algoritmo que nos permite encontrar un sistema minimal de generadores monomiales para estos ideales completos. Dicho algoritmo determina de forma natural una biyección entre el conjunto minimal de generadores monomiales y el conjunto minimal de generadores de una potencia adecuada del ideal maximal, dicho de otra forma, el primer número de Betti de un ideal de esta familia coincide con el primer número de Betti de una potencia adecuada del ideal maximal. Recuerdese que, en general, no es fácil precisar los sistemas minimales de generadores de un ideal monomial.

Finalmente, mediante un estudio homológico, construimos la resolución minimal para los ideales de la clase citada, lo que nos permite encontrar sus números de Betti y sus módulos de sicigias.

La clase aludida es una subclase de la clase de ideales completos de soporte finito monomiales que ha sido estudiada en **[C-G-L]** . Por tanto nuestro tratamiento esta realizado en este contexto.

En el primer capítulo introducimos los conceptos de valoración y anillo de valoración, así como la relacción de dominación para la cual los anillos de valoración son los elementos maximales. Introducimos el concepto de valoración que es la contraparte aritmética del concepto de anillo de valoración.

A continuación estudiamos el concepto de ideal completo tal y como lo hizo Zariski en **[Z1]** o **[Z-S]** explicitando algunas caracterizaciones de los ideales completos de un dominio integramente cerrado y su relacción con los conceptos de valoración y de anillos de valoración. Para establecer esta relación utilizaremos el anillo de Rees de un ideal. Este anillo tiene una gran importancia en geometría ya que el esquema proyectivo asociado a dicho anillo es lo que se conoce como la explosión a lo largo de dicho ideal. Prestaremos atención al resultado bien conocido de que este anillo es integramente cerrado si y solamente si todas las potencias del ideal de partida son ideales completos.

En la segunda sección de este capítulo mostraremos el transfondo geométrico de los conceptos que hemos visto en la primera sección, asociando a cada ideal completo de soporte finito un divisor con soporte excepcional y probando que dicha asociación es inyectiva (ver **[L1]**). Para ello utilizamos el concepto de explosión de un anillo local.

En la tercera sección introducimos otro problema geométrico, en este caso de caracter global, que nos conduce también al estudio de la completitud de las potencias de un ideal completo y nos motiva a realizar dicho estudio. Este problema es el de saber cuantas variedades existen entre dos variedades relacionadas por un morfismo dado por la composición de explosiones sucesivas de puntos en la situación tórica.

Para ello estudiamos los conos característicos. Las células de estos conos nos determinan cuantas variedades intermedias existen entre dos variedades dadas. El estudio del cono característico nos lleva a la conclusión de que si además de querer saber cuántas variedades intermedias hay, queremos determinar dichas variedades, es preciso resolver también el problema de encontrar un ideal completo de soporte finito cuyo divisor asociado está en una de las células en consideración y cuyas potencias también sean completas. Como se verá en esta

Memoria tal hecho no será posible, en general, excepto para la clase de ideales que consideramos en la Memoria.

Debido a que una valoración es una aplicación (de hecho un homomorfismo) del grupo multiplicativo de un cuerpo en un grupo ordenado, es decir, un grupo dotado de una relacción de orden que cumple que si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a+c \leq b+d$, en el capítulo dos estudiamos con detalle el concepto de grupo ordenado.

En la primera sección mostramos el concepto de valor absoluto generalizado y cómo a través de él llegamos al de subgrupos aislados. El número de subgrupos aislados de un grupo ordenado se le denomina rango. Nosotros nos concentramos en los grupos ordenados de rango finito, ya que son los que revisten importancia para nosotros porque son los que aparecen en la teoría de valoraciones.

A partir de los resultados obtenidos sobre grupos ordenados, tratamos el siguiente problema: Dado un anillo local regular, $(A, \mathcal{M})$, de dimensión d, un sistema regular de parámetros $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$, un grupo ordenado, Γ y d elementos de Γ, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d$ con $\gamma_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, d)$ ¿Existe una valoración v tal que:

(i) $v(x_j) = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, d)$

(ii) $v\left(\sum \lambda_k M_k\right) = \min_k \left(v(M_k)\right)$ donde M_k son monomios en las $x_1, x_2, \ldots, x_d$ y las $\lambda_k \notin \mathcal{M}$?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Esta propiedad es, de hecho, bien conocida y utilizada en la práctica en multitud de construcciones. Sin embargo, está tratada de manera confusa en la literatura, por ello la hemos considerado aquí. La forma de construir dicha valoración es a través de una cierta filtración del anillo A.

Las valoraciones que cumplen (ii) se llaman valoraciones monomiales relativas a los parámetros $x_1, x_2, \ldots, x_d$ y probamos que para los ideales que poseen un sistema de generadores formados por monomios en $x_1, x_2, \ldots, x_d$, llamados ideales monomiales, bastan únicamente estas valoraciones para determinar su cierre entero.

En la segunda sección de este capítulo introducimos el concepto de región de Newton que nos servirá para caracterizar el cierre completo de un ideal monomial y estudiamos con detenimiento las regiones de Newton que aparecen en el estudio de los ideales completos de soporte finito. Esta acabará siendo una base técnica importante de la Memoria.

Mostraremos cómo el número de valoraciones monomiales que se necesitan para determinar el cierre entero de un ideal monomial es finito y que dichas valoraciones se corresponden biyectivamente con las caras del poliedro de Newton asociado a dicho ideal monomial de soporte finito.

En el capítulo tres introducimos el que llamaremos “semigrupo tórico especial" , es decir, el semigrupo de ideales completos monomiales de soporte finito cuyos elementos constituyen la clase de ideales anteriormente referida. Se tratará de un semigrupo maximal en el que los resultados de Zariski para dimensión dos se pueden extender.

En la primera sección de este capítulo vemos la relacción que existe entre las cadenas tóricas, es decir, sucesiones de puntos en los que cada punto es una T-órbita de dimensión cero de la variedad obtenida por explosión en el punto anterior, siendo T un toro algebráico.

Podemos codificar cada cadena tórica por una serie de enteros positivos y utilizando dicha codificación y la relacción existente entre ideales monomiales completos de soporte finito se encuentra una codificación de los ideales completos de soporte finito a través de árboles orientados con índices en las ramas y pesos en los vértices cumpliendo unas determinadas condiciones llamadas desigualdades de proximidad.

A cada uno de los vértices que aparecen en el árbol anteriormente mencionado le podemos asociar una valoración monomial de tal suerte que todas estas valoraciones monomiales bastarán para determinar el cierre entero del ideal monomial de soporte finito de partida.

Utilizando este hecho encontramos una serie de propiedades aritméticas de dichas valoraciones en las que se basan muchos de los resultados del resto de la Memoria.

Damos, también, en esta sección una serie de contraejemplos que nos demuestran que no podemos esperar que el producto de ideales monomiales completos de soporte finito es completo, ni siquiera sus potencias y que tampoco la transformada estricta de uno de estos ideales es, en general, completa. Llamamos la atención al lector sobre el hecho de que la localización de estos contraejemplos no ha sido tarea fácil, ya que, a priori, los especialistas suponían que no existían y era un problema abierto el de probar que la teoría de Zariski era cierta para la clase de todos los ideales completos de soporte finito. La localización de los contraejemplos ha ayudado a definir la clase especial tórica.

En la sección dos de este capítulo estuadiamos con detenimiento aquellos ideales determinados únicamente por un tipo especial de valoraciones monomiales, que llamamos valoraciones monomiales de tallo i (donde i corresponde al índice del parámetro x_i), que será n parte importante en el desarrollo y definición del semigrupo tórico especial (de hecho se puede definir como el semigrupo generado por algunos de estos ideales, que en **[C-G-L]** se refieren como ideales soportados sobre cadenas). Nos detendremos especialmente en la determinación de condiciones bajo las cuales el producto de dos ideales de esta clase son completos y daremos un ejemplo en el que se muestra que, en general, el producto de este tipo de ideales no es completo.

En la sección tres se definen los ideales de Lipman como los ideales asociados a unas determinadas parejas de puntos infinitamente próximos. Estos ideales seran todos de tallo i y serán los elementos irreducibles en el semigrupo torico especial.

A continuación probamos que en el semigrupo determinado por estos ideales se cumplen los principales resultados de la teoría de Zariski y que tenemos factorización única en función de los ideales de Lipman.

Para terminar la sección damos una caracterización de los elementos del semigrupo tórico especial en función de los pesos del cluster asociado (según terminología de **[C-G-L]**) y también un algoritmo para la construcción de un sistema minimal de generadores monomiales de los ideales del semigrupo tórico especial. Este algoritmo establece una biyección entre dichos generadores y los generadores minimales de una potencia adecuada del ideal maximal (ideal que también está contenido en el semigrupo tórico especial).

En el último capítulo se hace un estudio homológico en busqueda de las sicigias y los números de Betti de los ideales del semigrupo tórico especial. Este estudio resultará que se puede generalizar a otros ideales completos monomiales de soporte finito (aquellos que cumplan una serie de condiciones precisas) encontrandose una resolución minimal de dichos ideales. En las secciones siguientes se utilizará esta resolución para determinar los números de Betti (que coinciden con los de una potencia adecuada del maximal) y precisar los módulos de sicigias de los ideales del semigrupo tórico especial.

En la primera sección, damos la resolución minimal de un ideal que sea un elemento del semigrupo tórico especial utilizando un argumento muy similar al usado por Eliahou y Kervaire en **[E]** . Eliahou y Kervaine utilizarón este razonamiento para encontrar una resolución minimal de los llamados ideales estables con respecto a un orden monomial, $\leq$, que son aquellos ideales para los cuales si u y v son dos monomios de igual grado tales que $u \leq v$ y v está en el ideal entonces también lo está u.

La analogía que se encuentra entre los ideales estables y los elementos del grupo tórico especial es que estos últimos son una especie de "pegado" de ideales estables.

Para encontrar esta resolución minimal, cambiaremos el anillo en el que trabajamos por el anillo de polinomios de $\mathbb{Z}$ sobre d variables transcendentes, siendo d la dimensión del anillo local regular de partida, y tras realizar un producto tensorial de la resolución minimal obtenida con el anillo de partida, lograr de esta forma la resolución minimal en el anillo local regular de dimensión d.

En la sección dos utilizamos la resolución minimal anteriormente encontrada para determinar los números de Betti de los ideales pertenecientes al semigrupo tórico especial. Obtenemos explícitamente tales números y observamos que sólo dependen de la dimensión del anillo y del orden del ideal, por lo que todos los números de Betti de un ideal perteneciente al semigrupo tórico especial coinciden, como ya se ha mencionado, con los de una potencia adecuada del ideal maximal.

Para terminar esta sección calculamos las sicigias de un ideal perteneciente al semigrupo tórico especial.

Capítulo1
Ideales completos. Conos característicos y explosiones

En dimensión dos el trabajo de Zariski en **[Z-S]** y **[Z2]** ha dado lugar a una interesante teoría sobre los ideales completos. El propio Zariski planteó el problema de extender esta teoría con sus consecuencias algebro-geométricas a dimensión superior. En dimensión superior a dos, se consiguen generalizar las definiciones de los conceptos y resultados interesantes en casos particulares, pero hasta ahora no se ha conseguido una generalización suficientemente satisfactoria de los resultados. Esta Memoria pretende analizar, desde otra perspectiva más, la dificultad de este problema de generalización, exhibiendo una clase de ideales completos, amplia pero muy particular, a la que sí se pueden extender la totalidad de los resultados de la teoría de Zariski de forma que adquieran las mismas expresiones y utilidades.

Estimamos que la ausencia en la literatura de clases de ideales con dicha propiedad (de hecho nosotros construimos la primera) explica la complicación del problema planteado por Zariski.

Por razones de dotar a la Memoria de carácter autocontenido introducimos en este capítulo algunos conceptos, tanto algebraicos como geométricos, que han estado en el orígen del problema o bien necesitaremos más tarde, as como el tramiento de la cuestión que pretendemos resolver en esta Memoria.

En la primera sección de este capítulo recordamos los conceptos de cierre integro y de anillos de valoración y explicitamos la íntima relacción que existe entre ellos, pudiendose definir el cierre integro de un dominio como la intersección de los anillos de valoración que contienen a dicho dominio. Utilizando el concepto de divisores de cero, se prueba que en realidad basta una subfamilia de anilllos de valoración, llamados anillos de valoración discreta.

También se recuerda el concepto de valoración que es el equivalente aritmético del concepto algebraico de anillo de valoración, pudiendose asignar a cada anillo de valoración una valoración y a cada valoración un anillo de valoración.

A continuación se introduce la noción de cierre entero de un ideal, concepto básico a lo largo de la Memoria, tal y como lo introdujo Zariski y se relacciona dicho concepto con el de valoración.

Para establecer esta relación, que queremos poner de manifiesto porque da lugar, en el fondo, a la principal razón geométrica del estudio de los ideales completos, ultilizaremos el concepto de anillo de Rees de un ideal. Este anillo es de gran importancia en geometría, ya que el esquema proyectivo asociado a él es lo que se conoce como explosión a lo largo de dicho ideal. Se tiene que este anillo de Rees es integramente cerrado si y solamente si todas las potencias del ideal de partida son completas, lo que justifica un estudio sobre cuando las potencias de un ideal completo, es decir integramente cerrado, son completas.

En la sección tres introducimos el problema que nos conduce al estudio de la completitud de las potencias de un ideal. Se trata calcular cuántas variedades normales existen entre dos variedades dadas, Z y X, también normales y relacionadas por un morfismo propio y birracional.

Tras precisar la noción de cono sobre un espacio vectorial, consideramos, a continuación, para cada par de variedades Z y X con la relación anterior, dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, uno dual al otro, $A^1(Z/X)$ y $A_1(Z/X)$, que son, respectivamente, los espacios generados por las clases de equivalencia numérica de divisores de Cartier relativos y de curvas completas relativas. Aquí ciclo de dimensión arbitraria i relativo quiere decir un ciclo de dimensión i sobre Z que se contrae en X. Recuérdese que un divisor es un ciclo de codimensión uno, mientras que una curva es un ciclo de dimensión uno.

Introducimos, a continuación, en $A_1(Z/X)$ el cono generado por todas las curvas relativas irreducibles. Dicho cono se llama cono de curvas y es denotado por $NE(Z/X)$. El cono de curvas es el ingrediente principal de la teoría de Mori, ya que a partir de él se ha podido formular el estudio de las contraciones utilizadas en dicha teoría (son contraciones a variedades normales que tienen sólo singularidades de un tipo concreto llamadas log-terminales). A partir del cono de curvas, por dualidad, se construye en $A^1(Z/X)$ el cono dual de $NE(Z/X)$ que se llama el cono semiamplio $P(Z/X)$. El cono semiamplio, cuyo interior es el llamado cono amplio (es decir, el generado por las clases de equivalencia numérica de divisores amplios) fue extensamente estudiado por Kleiman en los años 60 (**[Kl]**). Finalmente nos fijaremos en un subcono del cono semiamplio, $\widetilde{P}(Z/X)$, llamado el cono característico que es el cono generado por los divisores inversibles en Z que son generados por sus secciones globales. El cono característico fue estudiado por Hironaka, siendo este objeto el que permite estudiar las variedades intermedias. Sin embargo, de la estructura del cono característico se sabe muy poco y hallarla es un problema abierto (muy cotizado debido a sus importantes aplicaciones).

1.1 Dependencia entera e ideales completos

En primer lugar, revisaremos de forma autocontenida algunos resultados sobre clausura integra que luego utilizaremos al hablar de estos ideales. Puede consultarse **[Z-S]** , **[En]** y **[Ka]** para una ampliación de detalles.

DEFINICION 1.1 *Sea $A \subsetneq B$ una extensi n de anillos y $x \in B$. Decimos que x es entero sobre A si existe un $n \in \mathbb{N}$, mayor que 0 y $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$ tales que:*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

Al conjunto de todos los elementos de B enteros sobre A, se le denotar por $\overline{A}$. Es claro que $\overline{A}$ es un subanillo de B ya que la condición de que x es entero sobre A es equivalente a que $A[x]$ sea un A-módulo de tipo finito. Al anillo $\overline{A}$ se le llama clausura entera de A en B. Además es fácil ver que si A es un dominio y x es un elemento de A que no es una unidad entonces tampoco es una unidad en $\overline{A}$.

PROPOSICION 1.1 *Sea $A \subsetneq B$ una extensión de anillos, donde B es un dominio y $x \in B$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *x es entero sobre A.*

(ii) *Existe un A-módulo, C, finitamente generado tal que $xC \subseteq C$*

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si x es entero sobre A entonces basta con tomar $C = A[x]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que C está generado como A-módulo por $y_1, \ldots, y_n$. Como $xC \subseteq C$ se tiene que:

$$xy_i = \sum \lambda_{i,j} y_j$$

donde $\lambda_{i,j} \in A$. Ahora pasando todo al lado izquierdo de la ecuación y aplicando la teoría de ecuaciones lineales se ha de tener que:

$$\begin{vmatrix} x - \lambda_{1,1} & -\lambda_{1,2} & \cdots & -\lambda_{1,n} \\ -\lambda_{2,1} & x - \lambda_{2,2} & \cdots & -\lambda_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda_{n,1} & \cdots & \cdots & x - \lambda_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando el determinante tenemos la ecuación que prueba que x es entero.

El caso especialmente importante en la Memoria es el caso en el que A es un dominio de integridad y $B = \mathcal{K}$ es su cuerpo de fracciones. En este caso la noción de dependencia entera esta ligada a la de anillos de valoración. Revisaremos con detalle este concepto a continuación.

DEFINICION 1.2 *Sea V un dominio de integridad y $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, decimos que V es un anillo de valoración si dado $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$, se tiene que o bien $x \in V$ o $x^{-1} \in V$.*

DEFINICION 1.3 *Dados dos subanillos locales A y B de un cuerpo K con ideales maximales respectivos $\mathcal{M}_A$ y $\mathcal{M}_B$ se dice que B domina a A si $A \subseteq B$ y $\mathcal{M}_B \cap A = \mathcal{M}_A$.*

EJEMPLO 1.1 *Sea K un cuerpo arbitrario. Consideremos el anillo $A = K[X, Y, Z]$. Claramente A es un dominio de integridad y por tanto contenido en un cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$. Sea v la aplicación de A en $\mathbb{N}$ tal que a cada polinomio le asocia el mínimo de los grados de los monomios que lo forman y sea $V = \left\{ \frac{P(X,Y,Z)}{Q(X,Y,Z)} \in \mathcal{K} \ / \ v(P) \geq v(Q) \right\}$.*

El conjunto V así definido hereda de K la estructura de anillo como consecuencia directa de las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas sobre $\mathcal{K}$ de la forma habitual. Por otra parte V es, claramente, un anillo de valoración, ya que si tenemos un elemento de $\mathcal{K}$ que no está en V lo podemos expresar de la forma $\frac{P(X,Y,Z)}{Q(X,Y,Z)}$ con $v(P) < v(Q)$ y por tanto su inverso está en V.

PROPOSICION 1.2 *Sea V un dominio de integridad y $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *V es un anillo de valoración.*
2. *El conjunto de ideales principales de V está totalmente ordenado por la inclusión.*
3. *El conjunto de ideales de V está totalmente ordenado por la inclusión.*
4. *V es maximal entre todos los anillos locales contenidos estrictamente en $\mathcal{K}$, estando este conjunto ordenado por la relación ' B domina a A'.*

Demostración

Veamos que 1. implica 2. Sean $x, y \in V$ tales que $xV \not\subseteq yV$, probaremos que entonces $yV \subseteq xV$. En efecto tenemos dos posibilidades:

- $\underline{y = 0}$: entonces hemos acabado.
- $\underline{y \neq 0}$: entonces $xy^{-1} \notin V$ y como V es un anillo de valoración, tenemos que $yx^{-1} \in V$, o lo que es lo mismo que $yV \subseteq xV$.

Probemos ahora que 2. implica 3. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dos ideales de V tales que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{b}$, probaremos entonces que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{b}$ podemos encontrar $x \in \mathfrak{a}$ y $x \notin \mathfrak{b}$, con lo que $yV \subseteq xV$ $\forall y \in \mathfrak{b}$ y por tanto $\mathfrak{b} \subseteq xV \subseteq \mathfrak{a}$.

Probemos que 3. implica 4. Claramente V tiene que tener al menos un ideal maximal (ya que el cero es no invertible en V). Supongamos que hay dos ideales maximales, digamos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, entonces $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ o bien $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, lo que no lleva a que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ por maximalidad.

En particular, tenemos que V es un anillo local; al ideal maximal de V lo denotaremos a partir de ahora por $\mathcal{M}$.

Sea $(V', \mathcal{M}')$ un anillo local que domine a V y sea $x \in V'$, $x \neq 0$, entonces $x = \frac{a}{b}$, con $a, b \in V$ y ahora por 3. tenemos dos posibilidades:

1. $\underline{aV \subseteq bV}$: Entonces se tiene trivialmente que $x \in V$.
2. $\underline{bV \subseteq aV}$: Entonces $x^{-1} \in V$; ahora si $x^{-1} \in \mathcal{M}$ se tiene que $x^{-1} \in \mathcal{M}'$ porque V' domina a V, lo cual es una contradicción y entonces se debe tener que $x^{-1} \notin \mathcal{M}$, por lo que $x \in V$.

Nos queda probar únicamente que 4. implica 1. Sea $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$; supongamos que $x, x^{-1} \notin V$. Consideremos ahora los anillos $V' = V[x]$ y $V'' = V[x^{-1}]$; supongamos también que $\mathcal{M}[x] =$ $= V'$ y que $\mathcal{M}[x^{-1}] = V$”. Entonces tenemos ecuaciones de la forma:

$$1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{1}$$

$$1 = b_0 + b_1 x^{-1} + \ldots + b_m x^{-m} \tag{2}$$

donde los $a_j, b_k \in \mathcal{M}$ y donde podemos suponer, sin perdida de generalidad, que m y n son los valores mínimos que podemos encontrar de forma que tengamos ecuaciones del tipo (1) y del tipo (2). Ahora se nos presentan dos posibilidades:

1. $\underline{m \leq n}$: Multiplicando a la ecuación (2) por x^n tenemos que:

$$(1 - b_0)x^n = b_1 x^{n-1} + \ldots + b_m x^{n-m}$$

y como $(1 - b_0)$ es una unidad se tiene que:

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \ldots + w_m x^{n-m}$$

donde los $w_k \in \mathcal{M}$. Llevando esto a (1) nos queda una expresión polinómica en x con los coeficientes en el ideal maximal de V igual a 1, de grado menor que n, lo que contradice la minimalidad de n.

2. $\underline{m > n}$: Multiplicando a la ecuación (1) por x^{-m} nos queda que:
$$(1-a_0)x^{-m} = a_1x^{-m+1} + \ldots + a_nx^{n-m}$$
y como $(1-a_0)$ es una unidad se tiene que:
$$x^{-m} = p_1x^{-m+1} + \ldots + p_nx^{n-m}$$
donde los $p_j \in \mathcal{M}$ y llevando esto a (2) nos queda una expresión polinómica en x^{-1} con los coeficientes en el maximal de V igual a 1, de grado menor que m, lo que contradice la minimalidad de m.

Con lo que tenemos que o $\mathcal{M}[x^{-1}] \neq V''$ o bien $\mathcal{M}[x] \neq V'$. Podemos, pues, suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{M}[x] \neq V'$ y como $\mathcal{M}[x]$ es un ideal de V', distinto de V', entonces debe existir un ideal maximal $\mathcal{M}'$ de V' tal que $\mathcal{M}[x] \subseteq \mathcal{M}'$. Consideremos ahora el anillo local $B = V'_{\mathcal{M}'}$ cuyo ideal maximal es $\mathcal{M}'B$, tenemos que $\mathcal{M}'B \cap V = (\mathcal{M}'B \cap V') \cap V = \mathcal{M}' \cap V$. Ahora bien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}' \cap V$ (ya que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ y $\mathcal{M} \subseteq V$). Si $\mathcal{M}' \cap V = V$ entonces $1 \in \mathcal{M}'$ lo cual es absurdo ya que $\mathcal{M}'$ es un ideal maximal de V'. Así $\mathcal{M}B \cap V = \mathcal{M}$ y B es un anillo local que domina a V. Por la maximalidad de V tenemos que $V = B$ y de aqu $x \in V$ y por tanto V es un anillo de valoración.

Ahora recordaremos la relación entre clausura entera y los anillos de valoración que dominan al dominio A.

LEMA 1.1 *Sea A un dominio, $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, $x \notin \overline{A}$, $A' = A[x^{-1}]$. Entonces existe al menos un ideal maximal $\mathcal{M} \subseteq A'$ tal que $x^{-1} \in \mathcal{M}$; además para cada uno de estos ideales maximales se tiene que $\mathcal{M} \cap A$ es un ideal maximal de A.*

Demostración

Como $x \notin \overline{A}$, se tiene que $x \notin A'$ (ya que en caso contrario tendríamos una relación de dependencia entera en A de x). Por tanto existe un ideal maximal en A' que contiene a x^{-1}, ya que no es una unidad en A'.

Sea $\mathcal{M}$ un tal maximal de A', entonces todo elemento de $A'/\mathcal{M}$ tiene un representante en A y por tanto si $\tau \in A$, tal que $\tau \notin \mathcal{M} \cap A$, se tiene que existe un $y \in A$ tal que $y\tau = 1 + m$, donde $m \in \mathcal{M}$ y de esto se deduce que $m \in \mathcal{M} \cap A$, y por tanto $A = (\tau, \mathcal{M} \cap A)$, es decir $\mathcal{M} \cap A$ es un ideal maximal de A.

PROPOSICION 1.3 *Sea A un anillo local, tal que $A \subsetneq \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es su cuerpo de fracciones. Entonces existe al menos un anillo de valoración distinto de $\mathcal{K}$ que domina a A.*

Demostración

Consideremos la familia $\mathcal{F}_A$ formada por todos los anillos locales contenidos en $\mathcal{K}$, pero distintos de $\mathcal{K}$ que dominan a A, ordenemos parcialmente a continuación los elementos de $\mathcal{F}_A$ por medio de la relación de dominación (el hecho de que la dominación sea una relación de orden parcial es evidente). Veamos a continuación que $\mathcal{F}_A$ junto con esta relación de orden parcial forman un sistema inductivo.

Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_A$ totalmente ordenado por la relación de dominación veamos que $\mathcal{G}$ tiene una cota superior en $\mathcal{F}_A$. Llamemos $W = \cup_\tau A_\tau$, donde τ es un índice tal que al variarlo recorremos todo $\mathcal{G}$. Veamos que W es una cota superior de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{F}_A$. Es obvio que W es un anillo, por tanto necesitamos ver que es un anillo local que domina a todos los elementos de $\mathcal{G}$. En efecto, consideremos los elementos no invertibles de W. Evidentemente son todos aquellos $x \in W$ tales que $x^{-1} \notin W$.

Veamos que dichos elementos forman un ideal. Sean x, y dos elementos no invertibles de W. Supongamos ahora que $(x+y)^{-1} \in W$, entonces debe existir un $A_\tau \in \mathcal{G}$ tal que $(x+y)^{-1} \in A_\tau$; por otra parte como $x, y \in W$, y W es un anillo, entonces $x + y$ está también en W, con lo cual existe un $A_{\tau'} \in \mathcal{G}$ tal que $x + y \in A_{\tau'}$ (observemos que podemos elegir este τ' de forma que $x, y \in A_{\tau'}$); ahora como $\mathcal{G}$ está totalmente ordenado con la relación de dominación entonces uno de ellos está contenido en el otro, podemos suponer que $A_{\tau'} \subseteq A_\tau$ y entonces tenemos que $x+y \notin \mathcal{M}_\tau$, siendo $\mathcal{M}_\tau$ el maximal de A_τ; ahora como x e y son no invertibles en W, entonces también lo deben ser en A_τ, es decir, $x, y \in \mathcal{M}_\tau$, con lo que $x + y \in \mathcal{M}_\tau$, contradicción; luego $x + y$ es no invertible.

Sea ahora, x un elemento no invertible de W y sea $y \in W$; por estar $\mathcal{G}$ ordenado totalmente por la relación de dominación podemos encontrar un A_τ en $\mathcal{G}$ tal que $x, y \in A_\tau$; ahora $x \in \mathcal{M}_\tau$ con lo cual $xy \in \mathcal{M}_\tau$ y entonces $(xy)^{-1} \notin A_\tau$, y por tanto tampoco está en ninguno de los elementos de $\mathcal{G}$ contenidos en A_τ; para los que contienen a A_τ tenemos que los maximales de dichos anillos contienen al maximal de A_τ (por la relación de dominación) y entonces $(xy)^{-1}$ no está en ninguno de los contienen a A_τ y por tanto xy es no invertible en W. Así los elementos no invertibles forman un ideal y entonces W es un anillo local.

Veamos que W domina a todos los elementos de $\mathcal{G}$. En primer lugar probaremos que todos los elementos no invertibles son iguales a $\cup_\tau \mathcal{M}_\tau$.

Supongamos que $x \in W$ y que x no es invertible en W, es decir, que $x^{-1} \notin W$, con lo que x^{-1} no está en ningún anillo de $\mathcal{G}$; como $x \in W$, entonces existe un τ tal que $x \in A_\tau$, con lo que $x \in \mathcal{M}_\tau$ y por tanto x está en la unión de todos los maximales. Por otro lado, supongamos que $x \in W$ y que $x^{-1} \in W$, entonces debe existir un τ tal que $x, x^{-1} \in A_\tau$, y entonces $x \notin \mathcal{M}_\tau$, ahora por la relación de dominación tenemos que x no está en el maximal de ninguno de los anillos en $\mathcal{G}$ que contengan a A_τ; para los que están contenidos en A_τ tenemos que x no está en el maximal (ya que en caso contrario, estaría en el de A_τ) con lo que tenemos que el maximal de W es igual a la unión de todos los maximales de $\mathcal{G}$.

Veamos finalmente ahora que W domina a todos los elementos de $\mathcal{G}$. Sea B un elemento de $\mathcal{G}$ y sea $\mathcal{M}$ su maximal entonces tenemos que para los maximales de los anillos que contengan a B al cortarlos con B nos da $\mathcal{M}$ y para los maximales de los anillos de $\mathcal{G}$ que están contenidos en B, nos da el ideal maximal del anillo menor que naturalmente está contenido en $\mathcal{M}$ y por tanto la unión de todos estos elementos es $\mathcal{M}$ y entonces W domina a B. Que $W \neq \mathcal{K}$ es evidente porque W domina a todos los elementos de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{K}$ evidentemente no lo hace.

Con todo esto tenemos que $\mathcal{F}_A$ es un sistema inductivo y claramente $A \in \mathcal{F}_A$, por lo tanto aplicando el Lema de Zorn hay al menos un maximal en $\mathcal{F}_A$. Ahora, por el teorema anterior este maximal es un anillo de valoración.

COROLARIO 1.1 *Sea A un dominio, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A y $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los anillos de valoración contenidos estrictamente en $\mathcal{K}$ que contienen a A, entonces*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}} V$$

Demostración

Sea $x \in \overline{A}$, entonces tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in A$ tales que:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{3}$$

Tomemos un anillo de valoración V que contenga a A y tal que $x \notin V$. Entonces $x^{-1} \in V$ (de hecho x^{-1} está en el maximal de V). Ahora multiplicando (3) por x^{-n}, tenemos que 1 está en el ideal maximal de V, lo cual es una contradicción.
Si $x \notin \overline{A}$, podemos construir el anillo $A' = A[x^{-1}]_{\mathcal{M}}$; donde $\mathcal{M}$ es un ideal maximal de $A'' = A[x^{-1}]$ que contiene a x^{-1} (ver lema 1.1). Por la proposición 1.3 existe un anillo de valoración V que domina a A' y por tanto que cumple que x^{-1} está en el maximal de V, con lo que $x \notin V$ y hemos terminado.

PROPOSICION 1.4 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un dominio local, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A y $\mathcal{S}'$ el conjunto de todos los anillos de valoración contenidos estrictamente en $\mathcal{K}$ que dominan a A, entonces*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}'} V$$

Demostración
Es evidente que $\overline{A} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{S}'} V$. Tomemos $x \notin \overline{A}$ y sea $R = A[x^{-1}]$. Por el lema 1.1 existe un ideal maximal $M \subseteq R$ tal que $x^{-1} \in M$. Sea $R_1 = R_M$. Claramente R_1 es un anillo local y por tanto existe un anillo de valoración V que lo domina. Sea M' el ideal maximal de V, entonces tenemos que $M' \cap A = (M' \cap R_1) \cap A = MR_M \cap A = (MR_M \cap R) \cap A = M \cap A = \mathcal{M}$, donde la última igualdad se tiene por el lema 1.1, y por tanto $V \in \mathcal{S}'$.
Ahora bien, x^{-1} está en el maximal de V y por tanto $x \notin V$.

Veremos ahora algunos hechos que nos permitiran refinar más aún los últimos resultados. Para un estudio más exaustivo ver **[Ka]**

DEFINICION 1.4 *Dado un anillo A, un subconjunto de A, digamos T, se dice que es multiplicativamente cerrado si dados $x, y \in T$ se tiene que $xy \in T$.*

Un subconjunto multiplicativamente cerrado, T, de A se llama saturado si dado $x \in T$ se tiene que todos los divisores de x están tambi n en T.

DEFINICION 1.5 *Dado un anillo, A, un subconjunto multiplicativamente cerrado de A, T, y un ideal de A, I, decimos que I no corta a T si $I \cap T = \varnothing$*

PROPOSICION 1.5 *Sea A un anillo, T un subconjunto multiplicativamente cerrado de A entonces los ideales maximales entre los que no cortan a T son ideles primos.*

Demostración

La existencia de tales ideales maximales está garantizada por el lema de Zorn. Para probar que son ideales primos, tomemos un ideal, I, maximal entre los que no cortan a T. Supongamos que $ab \in I$ debemos probar que o a o b están en I. En caso contrario el ideal (I, a) generado por I y por a es estrictamente mayor que I y por tanto corta a T. Luego existe un elemento $t_1 \in T$ de la forma $t_1 = i_1 + xa$, donde $i_1 \in I$ y $x \in A$. De forma similar tenemos un $t_2 \in T$ con $t_2 = i_2 + yb$. Pero entonces

$$t_1 t_2 = (i_1 + xa)(i_2 + yb)$$

y los cuatro términos del producto anterior est n en I (los tres primeros porque un factor está en I y el cuarto porque ab está en I). Por lo tanto $t_1 t_2 \in I$, absurdo.

PROPOSICION 1.6 *Dado un subconjunto, T, de un anillo A, es equivalente*

(i) *T es un subconjunto multiplicativamente cerrado de A saturado*

(ii) *El complementario de T en A es la unión de ideales primos de A.*

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Tomemos x en el conplementario de T en A. El ideal $(x)A$ no interseca con T ya que T es saturado. Podemos entonces, aplicando el lema de Zorn, extender $(x)A$ a un ideal maximal con respecto a la no intersección con T. Por la proposición anterior dicho ideal, I, es un ideal primo. Por lo tanto todo x que no está en T lo hemos insertado en ideal primo disjunto con T, lo que prueba (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es evidente de las definiciones.

DEFINICION 1.6 *Dado un anillo A y un A-módulo B, se dice que $x \in A$, es un divisor de cero de B si existe un $y \in B$, $y \neq 0$ tal que $xy = 0$.*

Al conjunto de todos los divisores de cero de B lo denotaremos por $\mathcal{Z}(B)$.

A los elementos de B que no están en $\mathcal{Z}(B)$ se les llama no divisores de cero.

OBSERVACION 1.1 *El conjunto de no divisores de cero de un A-módulo B es un subconjunto multiplicativamente cerrado saturado y por tanto $\mathcal{Z}(B)$ es la unión de un conjunto de primos de A.*

DEFINICION 1.7 *Dado un anillo A, un A-módulo B y un ideal, $I \subseteq \mathcal{Z}(B)$, llamamos primos maximales de I en B a cualquier ideal de A maximal con respecto a 'estar contenido en $\mathcal{Z}(B)$'. En el caso en el que no se especifique el A-módulo se entenderá que dicho A-módulo es $\frac{A}{I}$*

DEFINICION 1.8 *Sea A un anillo, B un A-módulo no nulo y $b \in B$ un elemento no nulo definimos $anul(b) = \{a \in A$ con $ab = 0\} \subseteq \mathcal{Z}((b)A)$*

PROPOSICION 1.7 *Sea A un anillo noetheriano, B un A-módulo no nulo finitamente generado. Entonces existe solamente un número finito de primos maximales en A y cada uno de ellos es el anulador de un elemento no nulo de B.*

Demostración

Consideremos el conjunto de todos los anuladores de elementos de B. Cada anulador, por la condición de cadena ascendente, está contenido en un anulador maximal. Evidentemente $\mathcal{Z}(B)$ es la unión de todos estos anuladores maximales.
Veamos que estos anuladores maximales son primos: sea $I = anul(x)$ maximal. Dados $ab \in I$ tal que $a \notin I$ debemos probar que $b \in I$. Como $a \notin I$ entonces $ax \neq 0$ y además $anul(ax) \supseteq I$. Ahora bien por maximalidad de I tenemos que $anul(ax) = I$ y como $b(ax) = 0$ entonces $b \in I$.
Probemos ahora que solamente hay una cantidad finita. Llamemos a estos anuladores maximales $\{Q_i\}$ y sea $Q_i = anul(a_i)$. Consideremos el A-módulo generado por los $\{a_i\}$; como este módulo está contenido en B es un módulo finitamente generado y por tanto estará generado por una cantidad finita de ellas digamos por $a_1, \ldots, a_n$. Si tuvieramos más primos tendríamos la siguiente ecuación

$$a_{n+1} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

donde los $x_i \in A$ y de aquí se deduce que$Q_{n+1} \supseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$. Por lo tanto para algún j, ($j = 1, \ldots, n$), se tiene que $Q_{n+1} \supsetneq Q_j$ lo cual contradice la máximalidad de Q_j. Por tanto solo existe una cantidad finita de anuladores maximales.

Para completar la prueba de esta proposició n solamente nos queda probar que cualquier ideal, J, contenido en $\mathcal{Z}(B)$ está contenido en alguno de los ideales $Q_1, \ldots, Q_n$.
Sea t el menor número natural tal que $J \subseteq Q_{i_1} \cup \cdots \cup Q_{i_t}$. Para simplificar la notación supongamos que son los t primeros. Entonces para cada k con $1 \leq k \leq t$ tenemos que $J \nsubseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_{k-1} \cup Q_{k+1} \cup \cdots \cup Q_t$. Podemos, entonces, encontrar, para cada k, un elemento x_k que est en J pero que no está en la lado izquierdo de la anterior desigualdad. Cada uno de estos $x_k \in Q_k$ y no estar en ninguno de los otros. Consideremos ahora el elemento de J, $y = x_1 + x_2 x_3 \cdots x_n$. Ahora bien, y no está en ninguno de los anuladores maximales, contradicción.

PROPOSICION 1.8 *Sea A un dominio. Entonces $A = \cap A_Q$, donde la intersección se toma entre todos los primos maximales de los ideales principales.*

Demostración
Tomemos $u \in \cap A_Q$ y escribamos $u = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in A)$. Sea I el conjunto de todos los $y \in A$ con $ya \in (b)A$. Si $I = A$ entonces $a \in (b)A$ y $u \in A$ y hemos terminado. Si $I \neq A$ tenemos que $I \subseteq \mathcal{Z}\left(\dfrac{A}{(b)A}\right)$. Podemos expandir I a un primo maximal Q de $(b)A$ y entonces $u \in A_Q$ y por tanto $u = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{e}$ ($c \in A$ y $e \notin Q$). La ecuación $ea = bc$ prueba que $e \in I \subseteq Q$, absurdo.

Nuestro objetivo ahora es probar que, en el caso de que A además sea integramente cerrado, tenemos que los A_Q son anillos de valoración discreta, es decir, anillos de valoración en los que el maximal es un ideal principal.

PROPOSICION 1.9 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un dominio local entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

(i) A es un anillo de valoración discreta

(ii) $\mathcal{M}$ es un ideal principal.

Demostración
(i) $\Rightarrow$ (ii) Es trivial. (ii) $\Rightarrow$ (i) Consideremos $Q = \cap_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}^i$ y sea $\mathcal{M} = (x)A$. Tenemos entonces que $\mathcal{M}Q = xQ = Q$. Ahora como A es un anillo noetheriano y Q un ideal de A tenemos que Q está finitamente generado. Supongamos que $Q \neq 0$ y tomemos un siste-

ma minimal de generadores de A (en el sentido de que no podemos eliminar ninguno de los elementos de dicho sistema de generadores) digamos, $y_1, \ldots, y_n$. Ahora como $\mathcal{M}Q = Q$ tenemos que $y_1 = b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n$ donde los $b_j \in \mathcal{M}$ ($j = 1, \ldots, n$). Entonces $(1 - b_1)y_1 = = b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n$ pero como $1 - b_1$ es una unidad en A y entonces podemos eliminar y_1 del anterior sistema de generadores, contradicción.

Con esto hemos demostrado dado $z \in \mathcal{M}$ existe un k tal que x^k es un divisor de z pero x^{k+1} no divide a z y por tanto que $z = \lambda x^k$ con $\lambda \notin \mathcal{M}$.

Ahora estamos en condiciones de probar que A es un anillo de valoración. Tomemos $\frac{a}{b} \notin A$, tenemos que ver que $\frac{b}{a} \in A$. Por lo anteriormente visto $a = \lambda_1 x^{k_1}$ y $b = \lambda_2 x^{k_2}$ donde λ_1, $\lambda_2 \notin \mathcal{M}$. Como $\frac{a}{b} \notin A$ tenemos que $k_1 < k_2$ y por tanto $\frac{b}{a} \in A$.

DEFINICION 1.9 *Sea A un dominio con cuerpo de fracciones $\mathcal{K}$ e $I \subseteq A$ un ideal, se define el inverso de I, y lo se denota por I^{-1}, al conjunto de todos los $b \in \mathcal{K}$ tales que $bI \subseteq A$.*

Se dice que I es inversible si $II^{-1} = A$.

PROPOSICION 1.10 *Sea A un dominio, entonces cualquier ideal invertible es finitamente generado, más aún, si A es un anillo local entonces es principal.*

Demostración

Para la demostración de la primera parte de la proposición tomemos un ideal $I \subseteq A$ que sea invertible entonces $II^{-1} = A$ y tenemos $a_i \in I$ y $b_i \in I^{-1}$ tales que $\sum a_i b_i = 1$. Tomemos ahora $x \in I$ entonces $x = \sum a_i(xb_i)$ y por tanto los a_i generan I.

Para la segunda parte de la demostración observemos que alguno de los productos $a_i b_i$ es necesariamente una unidad en A, digamos por ejemplo que $a_1 b_1$. Ahora para cada i se tiene que $a_i = a_1(b_1 a_i)(a_1 b_1)^{-1}$ y entonces I está generado solamente por a_1.

DEFINICION 1.10 *Se dice que un ideal I en un anillo A tiene grado 1 si contiene un no divisor de cero x tal que $I \subseteq \mathcal{Z}\left(\frac{A}{(x)A}\right)$.*

OBSERVACION 1.2 *En un dominio los primos maximales para un ideal principal tienen grado* 1. *Sea un primo maximal* Q *para el ideal* $(x)A$*, todo ello contenido en un dominio* A. *Bastará con probar que* $x \in Q$. *Supongamos lo contrario, entonces consideremos el ideal* (Q, x). *Evidentemente dicho ideal está contenido en* $\mathcal{Z}\left(\dfrac{A}{(x)A}\right)$ *pero contiene estrictamente a* Q*, lo que es una contradicción por la maximalidad de* Q.

PROPOSICION 1.11 *Sea* I *un ideal de grado* 1 *en un dominio noetheriano* A. *Entonces* I^{-1} *contiene propiamente a* A.

Demostración

Como I tiene grado 1 existe un no divisor de cero x tal que $I \subseteq \mathcal{Z}\left(\dfrac{A}{(x)A}\right)$. Podemos extender I a un primo maximal de $(x)A$. Dicho primo maximal es el anulador de un elemento $y \notin (x)A$ y entonces $Iy \subseteq (x)A$. Por tanto $\dfrac{y}{x}$ est en I^{-1}, pero no está en A.

PROPOSICION 1.12 *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local. Supongamos que* A *es integramente cerrado y que* $\mathcal{M}$ *tiene grado* 1. *Entonces* $\mathcal{M}$ *es un ideal principal.*

Demostración

Por la proposición anterior, $\mathcal{M}^{-1}$ contiene propiamente a A. Por otra parte tenemos que $\mathcal{M} \subseteq \subseteq \mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} \subseteq A$ y entonces debe ser igual a $\mathcal{M}$ o a A. Pero si $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}^{-1}$ es integro sobre A (proposición 1.1) y ya que A es integramente cerrado, se tiene que $\mathcal{M}^{-1} = A$, lo que contradice la última proposición y por tanto $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = A$ y por la proposición 1.10 es un ideal principal.

PROPOSICION 1.13 *En un dominio noetheriano integramente cerrado* A *se tiene que para todo ideal primo* Q *de grado* 1, A_Q *es un anillo de valoración discreta.*

Demostración

Como Q tiene grado 1 se tiene que existe un $0 \neq x \in Q$ tal que $Q \subseteq \mathcal{Z}\left(\dfrac{A}{(x)A}\right)$. Tomemos Q' un primo maximal de $(x)A$ que contenga a Q. Entonces Q' es un anulador de un elemento $y \notin (x)A$ y por tanto $yQ' \subseteq (x)A$.

Consideremos el anillo $A_1 = A_{Q'}$. Ahora $Q'A_{Q'}$ es todavia de grado 1, ya que el mismo x funciona. El punto clave es ver que $y \notin (x)A_1$. Pero esto es fácil de ver ya que si $y = \left(\dfrac{a}{s}\right) x$

con $a, s \in A$ y $s \notin Q'$ tenemos que $sy = ax$ y entonces $s \in Q'$. Contradicción.
Ahora como $Q'A_{Q'}$ tiene grado 1 y es el ideal maximal de un anillo local, integramente cerrado, tenemos que es un ideal principal y por tanto, por la proposición 1.9 es un anillo de valoración discreta.
Por otra parte por lo visto en la demostración de la proposición 1.9 tenemos que en un anillo de valoración discreta el único primo es el ideal maximal y por tanto $Q' = Q$.

PROPOSICION 1.14 *Sea A un dominio, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A y $\mathcal{S}_{dis}$ el conjunto de todos los anillos de valoración discreta contenidos estrictamente en $\mathcal{K}$ que contienen a A, entonces*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}_{dis}} V$$

Demostración
Claramente tenemos que $\overline{A} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{S}_{dis}} V$. Tomemos $x \notin \overline{A}$ y consideremos el anillo $A_1 = = A[x^{-1}]$. x^{-1} no es una unidad en A_1, ya que en este caso tendríamos una relacción de dependencia integra de x sobre A y por lo tanto tampoco lo es sobre $R = \overline{A_1}$. Consideremos un primo maximal del ideal $(x^{-1})R$, digamos Q. Por el teorema anterior R_Q es un anillo de valoración discreta que pertenece a $\mathcal{S}_{dis}$.Por otra parte como $x^{-1} \in Q$ tenemos que $x^{-1} \in QR_Q$ y entonces $x \notin R_Q$.

PROPOSICION 1.15 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un dominio local, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A y $\mathcal{S}'_{dis}$ el conjunto de todos los anillos de valoración discreta contenidos estrictamente en $\mathcal{K}$ que dominan a A, entonces*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}'_{dis}} V$$

Demostración
Claramente tenemos que $\overline{A} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{S}'_{dis}} V$. Tomemos $x \notin \overline{A}$ y consideremos el anillo $R = = A[x^{-1}]$. En R consideremos el ideal $M = x^{-1}R + \mathcal{M} \neq A_1$ ya que si $1 \in M$ tendr amos una ecuación de dependencia entera de x sobre A. Claramente M es un ideal maximal y por tanto primo.
Tomemos un sistema de generadores de M, digamos $r_1, \ldots, r_n$ y los anillos $R_i =$

$= R\left[\frac{r_1}{r_i}, \cdots, \frac{r_n}{r_i}\right]$. Observemos que $MR_i = (r_i)R_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$
Veremos ahora que para algún valor de i se tiene que $MR_i \cap R = M$. Supongamos que esto es falso y entonces tenemos que para cada i $(i = 1, \ldots, n)$ podemos encontrar un elemento en R, digamos ζ_i, tal que $\zeta_i \notin M$ y $\zeta_i \in MR_i$. Sea $\zeta = \zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_n$. Entonces $\zeta \notin M$ y $\zeta \in (r_i)R_i$ para todo $i.(i = 1, 2, \ldots, n)$.
Para cada i se tiene que $\zeta = \dfrac{r_i\gamma_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{(r_i)^{v_i}}$ donde γ_i es una forma homogénea en $r_1, \ldots, r_n$ de grado v_i con coeficientes en R.
Sea $v = \max(v_i)$ entonces se tiene que $\zeta(r_i)^{v-1} = \psi_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ donde ψ_i es una forma homogénea de grado v con coeficientes en R. De aqui se sigue que el producto de ζ por cualquier monomio en $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de grado $N = nv$ es igual a una forma de grado $N+1$ en $r_1, r_2, \ldots, r_n$ con coeficientes en R, es decir, $\zeta M^N \subseteq M^{N+1}$.
Pasando ahora al anillo $R'' = R_M$ esta última relacción nos dice que $(MR'')^N = (MR'')^{N+1}$
Aplicando ahora un razonamiento similar al seguido en la proposición 1.9 tenemos que $MR'' = = 0$, lo cual es absurdo.
Sabemos pues, que para algún R_i se tiene que $(r_i)R_i \cap R = M$ y por tanto, r_i no es una unidad en R_i y entonces tampoco en $\overline{R_i}$. Sea Q un primo maximal para el ideal principal $(r_i)\overline{R_i}$. Consideremos el anillo $A' = \left(\overline{R_i}\right)_Q$. Este anillo es un anillo de valoración discreta y además $x^{-1} \in QA'$, luego $x \notin A'$.
Para terminar la prueba nos basta con probar que A' es un elemento de $\mathcal{S}'_{dis}$, para ello debemos ver que $QA' \cap A = \mathcal{M}$.
Ahora bien, como $QA' \cap A = (QA' \cap R_i) \cap A \supseteq (r_i)R_i \cap A = ((r_i)R_i \cap R) \cap A = M \cap A \supseteq \supseteq \mathcal{M}$ y QA' es un ideal propio y $\mathcal{M}$ es un ideal maximal entonces $QA' \cap A = \mathcal{M}$.

La noción de anillo de valoración es la contraparte algebraica del concepto “aritmético’de valoración. Si K es un cuerpo y Γ un grupo abeliano ordenado (es decir un grupo provisto de una relación de orden total, tal que si $a, b, c, d \in \Gamma$ con $a \leq b$ y $c \leq d$ se tiene que $a + c \leq \leq b+d$), entonces por una valoración sobre K con grupo de valores Γ se entiende una aplicación $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ tal que:

(i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)\ \forall x, y \in K$

(iii) $v(x + y) \leq \max(v(x), v(y))\ \forall x, y \in K$

Si v es una valoración, entonces el conjunto $A_v = \{x \in K \,/\, v(x) \geq 0\}$ es un anillo de valoración de K cuyo ideal maximal es $\mathcal{M}_v = \{x \in K \,/\, v(x) > 0\}$. Más aún la imagen por v de $A_v - \{0\}$ es un semigrupo Ω de $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma \,/\, a \geq 0\}$ que se puede identificar, vía la aplicación v, con el conjunto de ideales de R_v ordenados por la inclusión. Con más precisión la correspondencia que asocia a cada $a \in \Omega$ el ideal $I_a = \{x \in A_v \,/\, v(x) \geq a\}$ es biyectiva y define un isomorfismo de semigrupos ordenados entre Ω y el semigrupo de los ideales de A_v donde la operación del semigrupo entre ideales es el producto.

Recíprocamente, si V es un anillo de valoración entonces su semigrupo ordenado de ideales es cancelativo, es decir, es un subsemigrupo de un grupo abeliano Γ, y la aplicación v que asigna a cada $x \in V$, $x \neq 0$ el ideal principal xV es la restricción a V de una valoración sobre K valorada en Γ, tal que $V = A_v$. Cuando Γ se toma como el mínimo grupo abeliano que contiene a Ω o al semigrupo de ideales, según el caso, se dirá que v es una valoración normalizada. De esta forma los anillos de valoración se corresponden uno a uno con las clases de isomorfismos de valoraciones normalizadas sobre K, donde isomorfismo entre dos valoraciones $v : K \longrightarrow \Gamma$, $v' : K \longrightarrow \Gamma'$ significa que existe un isomorfismo de grupos ordenados $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ tal que $\varphi \circ v = v'$.

Observemos que si V es además de valoración discreta entonces el grupo de valores debe ser isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Dado un anillo local $(A, \mathcal{M})$ y una valoración v, decimos que v domina a A si su anillo de valoración $(A_v, \mathcal{M}_v)$ cumple que $A_v \supseteq A$ y que $\mathcal{M}_v \cap A = \mathcal{M}$. Si solo se da la primera condición decimos que v está centrada en A.

Después de la revisión anterior sobre anillos de valoración, vamos a introducir a continuación la noción de dependencia entera sobre un ideal que será el objeto básico de estudio en esta Memoria.

DEFINICION 1.11 *Sea A un anillo conmutativo, $z \in A$ e I un ideal de A. Decimos que z es entero sobre I si existe un $n \in \mathbb{N}, n > 0$ y $a_i \in I^i$ tales que:*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

EJEMPLO 1.2 *Veremos ahora, que en general, que hay elementos enteros que no están en el ideal de partida. Consideremos el mismo anillo A que en el ejemplo 1.1 y sea I el ideal de A generado por los monomios $\{X^5, X^2 Z, XY^2\}$. Tomemos $z = X^3 Y$, entonces, evidentemente, $z \notin I$ y z es integro sobre I, ya que*

$$z^2 - (X^5)(XY^2) = 0$$

DEFINICION 1.12 *Sea A un anillo conmutativo e I un ideal de A, entonces al anillo $B(I, A) = = A[It] \subseteq A[t]$, es llamado el anillo de Rees de A con respecto a I. $B(I, A)$ es un subanillo graduado de $A[t]$ cuyo $Proj$ es el esquema explosión de Spec(A) con centro en el ideal I.*

Observemos que, evidentemente, si A es un dominio de integridad entonces también lo son los anillos de Rees de A con respecto a cualquier ideal de A, pues están contenidos en un anillo que trivialmente es un dominio.

El anillo de Rees nos sirve para transladar los resultados antes obtenidos sobre anillos completos y cierres integros de anillos a la dependencia entera sobre ideales.

El siguiente resultado aclara esta relacción:

PROPOSICION 1.16 *Sea A un anillo conmutativo, I un ideal de A y $x \in A$, entonces x es entero sobre I si y solamente si xt es entero sobre $B(I, A)$.*

Demostración

Sea

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \; a_i \in I^i$$

una ecuación de dependencia entera de x sobre I. Multiplicando por t^n obtenemos

$$(xt)^n + (a_1 t)(xt)^{n-1} + \ldots + (a_n t^n) = 0 \; a_i t^i \in B(I, A) \tag{4}$$

y por tanto xt es entero sobre $B(I, A)$.

Supongamos ahora que xt es entero sobre $B(I, A)$, entonces tenemos una ecuación homogénea de dependencia entera del tipo de (4) y como t^n es un no divisor de cero en $A[t]$, tenemos el resultado requerido de que x es entero sobre I.

COROLARIO 1.2 *Sea A un dominio e I un ideal de A, entonces $\overline{I}$ es un ideal de A.*

DEFINICION 1.13 *Sea A un dominio, y sea I un ideal de A, se dice que I es completo o íntegramente cerrado si $I = \overline{I}$.*

La notación de ideal íntegramente cerrado proviene del álgebra y de la similitud con los anillos integramente cerrados; por el contrario la notación de ideal completo procede de la gemetría, ya que es la contraparte algebráica del concepto de sistema lineal completo. La analogía entre estos dos conceptos se debe a la relacción de la clausura integra con las valoraciones disponibles en el caso de los dominios.

EJEMPLO 1.3 *Sigamos con el anillo A considerado en los ejemplos 1.1 y 1.2 y sea I el ideal de A generado por los monomios $X^iY^jZ^k$ tales que se tiene $20i + 15j + 12k \geq 60$. Observemos que $P(X,Y,Z) \in I$ si y solamente si P se puede escribir como una combinaci n lineal con coeficientes en K de monomios en I.*

Tomemos un $z \in A$ integro sobre I, veamos que $z \in I$. Si al expresar z como combinación lineal de monomios con coeficientes no nulos en K y tales que todos los monomios que aparezcan sean distintos, tenemos que todos los monomios que aparecen están en I entonces hemos acabado. Si algún monomio no está en I entonces tenemos que hay una ecuación de dependencia integra del tipo:

$$z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \; a_l \in I^l$$

Consideremos el monomio que aparece en la expresión de z como combinación lineal de monomios distintos con coeficientes no nulos es el mínimo en el orden lexicográfico entre todos aquellos que minimizan $20i + 15j + 12k$. Claramente la potencia enésima de dicho monomio aparece en z^n y además no se anula con ninguno de los monomios que aparecen en los polinomios a_lz^{n-l} ya que todos ellos tienen el valor de $20i + 15j + 12k$ estrictamente mayor, lo cual es imposible.

NOTACION 1.1 *Sea A un dominio noetheriano, $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, v una valoración sobre $\mathcal{K}$, e I un ideal de A entonces denotamos por $v(I)$ al mínimo de los valores $v(x)$, donde $x \in I$.*

PROPOSICION 1.17 ***(Criterio valorativo de la dependencia entera)*** *Sea A un dominio noetheriano, $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, I un ideal de A, $\mathcal{S}_{dis}$ el conjunto de todas las valoraciones discretas de $\mathcal{K}$ cuyo anillo de valoración contiene a A entonces*

$$\overline{I} = \bigcap_{v \in \mathcal{S}_{dis}} \{x \in A \,/\, v(x) \geq v(I)\}$$

Demostración

Supongamos que $x \in \overline{I}$, entonces tenemos que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \; a_i \in I^i$$

Si $v \in \mathcal{S}_{dis}$ se nos presentan dos posibilidades:

1. $\underline{v(x) = \infty}$: Entonces no hay nada que probar.
2. $\underline{v(x) < \infty}$: Supongamos que $v(x) < v(I)$, entonces tenemos que
$$v(a_i x^{n-i}) = v(a_i) + (n-i)v(x) \geq iv(I) + (n-i)v(x) > nv(x)$$
por tanto $nv(x) = v(x^n) = v(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = v(0) = \infty$, contradicción.

Al revés, sea $x \in A$ y supongamos que para toda valoración discreta cuyo anillo de valoración contenga a A se cumple que $v(x) \geq v(I)$; tomemos una valoración discreta w del cuerpo de fracciones de $B(I,A)$ cuyo anillo de valoración contenga a $B(I,A)$, entonces w restringida a $\mathcal{K}$ nos da una valoración discreta de $\mathcal{K}$ cuyo anillo de valoración contiene a A, entonces $w(xt) =$ $= w(x) + w(t) \geq w(I) + w(t) = w(It) \geq 0$ y entonces por la proposición 1.14 se tiene que $xt \in$ $\in \overline{B(I,A)}$, y por la proposición 1.16 $x \in \overline{I}$.

PROPOSICION 1.18 ***(Criterio valorativo de la dependencia entera)*** *Sea $(A, \mathcal{M})$ un dominio local, $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, I un ideal de A, $\mathcal{S}'_{dis}$ el conjunto de todas las valoraciones discretas de $\mathcal{K}$ cuyo anillo de valoración domina a A entonces*

$$\overline{I} = \bigcap_{v \in \mathcal{S}'_{dis}} \{x \in A \,/\, v(x) \geq v(I)\}$$

Demostración

Supongamos que $x \in \overline{I}$, entonces tenemos que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \; a_i \in I^i$$

Si $v \in \mathcal{S}'_{dis}$ se nos presentan dos posibilidades:

1. $\underline{v(x) = \infty}$: Entonces no hay nada que probar.
2. $\underline{v(x) < \infty}$: Supongamos que $v(x) < v(I)$, entonces tenemos que

$$v(a_i x^{n-i}) = v(a_i) + (n-i)v(x) \geq iv(I) + (n-i)v(x) > nv(x)$$

   por tanto $nv(x) = v(x^n) = v(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = v(0) = \infty$, contradicción.

Al revés, supongamos que $x \notin \overline{A}$ y consideremos el anillo $A' = A[x^{-1}I]$. Tomemos el ideal maximal de A', M, $M = x^{-1}IA' + \mathcal{M}$.

Consideremos el anillo $A'' = (A')_M$. Por la demostración de la proposición 1.15 existe una valoración discreta que domina a A''. Sea v dicha valoración. Como $x^{-1}IA' \subseteq M$ tenemos que $v(x^{-1}IA') > 0$ y entonces $-v(x) + v(I) > 0 \Leftrightarrow v(x) < v(I)$.

Sólo nos queda probar que v domina a A, ahora bien, como $\mathcal{M} \subseteq M$ tenemos que $v(\mathcal{M}) > 0$ y tenemos el resultado pedido.

COROLARIO 1.3 *Sea A un dominio noetheriano, v una valoración de su cuerpo de fracciones centrada en A, I un ideal de A, entonces tenemos que $v(I) = v(\overline{I})$.*

Demostración

Como $I \subseteq \overline{I}$, entonces es evidente que $v(\overline{I}) \leq v(I)$; por otra parte por la demostración de la proposición 1.17 se tiene que todos los elementos de $\overline{I}$ tienen valoración mayor o igual que $v(I)$, con lo cual, $v(\overline{I}) = v(I)$.

COROLARIO 1.4 *Sea A un dominio, I un ideal de A, entonces $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$.*

Claramente siempre se tiene que $\overline{I} \subseteq \overline{\overline{I}}$, con lo cual nos basta probar la inclusión contraria. Sea $x \in \overline{\overline{I}}$, entonces para toda valoración discreta v cuyo anillo de valoración contenga a A se tiene que $v(x) \geq v(\overline{I}) = v(I)$ y por tanto $x \in \overline{I}$.

PROPOSICION 1.19 *Sea A un dominio, I un ideal de A, entonces*

$$\overline{B(I,A)} = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n}$$

Demostraci n

Sea $\overline{A}$ el cierre integro de A, entonces como $A' = \overline{A}[t]$ es integro, se debe tener que $\overline{B(I,A)} \subseteq$ $\subseteq A'$, con lo que se le puede dar a $\overline{B(I,A)}$ una estructura de anillo graduado.

Basta pues probar que $\overline{B(I,A)} \cap \overline{A}t^n = \overline{I^n}t^n$. Claramente se tiene que $\overline{I^n}t^n \subseteq \overline{B(I,A)} \cap$ $\cap \overline{A}t^n$. Supongamos ahora que tenemos un elemento $at^n \in \overline{B(I,A)} \cap \overline{A}t^n$. Como $at^n \in$ $\in \overline{B(I,A)}$ entonces existe una ecuación homogénea de dependencia entera y dividiendo por t^{nr}, donde r es el grado de la ecuación homogenea, obtenemos una ecuación de dependencia entera de a sobre I^n y por tanto $a \in \overline{I^n}$.

COROLARIO 1.5 *Sea A un dominio, I un ideal de A, entonces $B(I,A)$ es un anillo integramente cerrado si y solamente si I^n es completo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración

Es evidente de la proposición anterior.

Dado un dominio A y un ideal I en A podemos definir la explosión normalizada a lo largo de I como el esquema normalizado de la explosión con centro en I, es decir, que el último corolario se puede parafrasear diciendo que la explosión normal con centro I coincide con la explosión con centro I si y solamente si todas las potencias de I son completas.

EJEMPLO 1.4 *Puede ocurrir que un ideal I sea completo y, sin embargo, sus potencias no lo sean. En efecto, consideremos el anillo A utilizado en los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3 e I el ideal de A definido en el ejemplo 1.3. Consideremos $z = X^2Y^3Z^3 \in A$. Claramente $z \in \overline{I^2}$ ya que*

$$z^2 - [(X^3)(Y^4)][(Z^5)(XY^2Z)] = 0$$

pero $z \notin I^2$ puesto que no se puede poner como producto de dos elementos de I ya que en cualquier factorización de z como producto de dos monomios no triviales aparecen como factores algunos de los siguientes $X, Y, Z, X^2, XY, XZ, Y^2, YZ, Z^2, X^2Y, X^2Z, XY^2, XYZ,$ $XZ^2, Y^3, Y^2Z, YZ^2, Z^3, XYZ^2, XZ^3, Y^3Z, Y^2Z^2, YZ^3$ y ninguno pertenece a I.

Un problema importante en geometría es conocer condiciones suficientes para que las potencias de un ideal completo sean completas, es decir, para que la explosión de un ideal completo sea un esquema normal. En esta Memoria trataremos este problema para la clase concreta de ideales completos a la que está dedicada la misma.

El esquema proyectivo asociado al anillo graduado normal $\overline{B(I,A)}$ se denomina la explosión normalizada del ideal I. Nótese que la explosión normalizada de un ideal es la composición de la explosión de dicho ideal con la normalización. Las condiciones del corolario 1.5 son la condiciones necesarias y suficientes para que la explosión de un ideal coincida con su explosión normalizada.

1.2 Divisores excepcionales e ideales completos

En la sección anterior, hemos considerado las nociones de explosión y explosión normalizada. En geometría algebraica estos conceptos son importantes, ya que aparecen en el estudio de las variedades intermedias a dos relacionadas entre sí por un morfismo proyectivo.

Iniciaremos aquí un estudio geométrico de dichos objetos, ya definidos algebraicamente, en la situación particular en que el morfismo que relaciona las dos variedades es una sucesión de explosiones en puntos cerrados no singulares.

Fijemos una variedad algebraica lisa X, es decir, un esquema reducido e irreducible de tipo finito sobre un cuerpo perfecto y un punto cerrado no singular (a partir de ahora, todos los puntos serán entendidos de esta forma), P.

DEFINICION 1.14 *Cualquier punto P' en cualquier variedad Z obtenida de X por una sucesión finita de explosiones en puntos cerrados no singulares, se dice un punto infinitamente próximo a P si P es la imagen de P' vía las aplicaciones asociadas a dichas explosiones y se denota por $P \leq P'$.*

DEFINICION 1.15 *Una constelación de puntos infinitamente próximos a P (o una constelación con origen en P) es un conjunto finito de puntos infinitamente próximos a P, $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ tales que $m \geq 1$, $P_1 = P$ y para $1 \leq i \leq m-1$, cada P_{i+1} es un punto sobre la variedad Z_i obtenida de Z_{i-1} como explosión con centro P_i (Z_0 es la variedad inicial X).*
Cuando tenemos que cada P_{i+1} es infinitamente próximo a P_i, entonces decimos que la constelación $\mathcal{C}$ es una cadena.

Por tanto una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ con origen en P define una cadena de explosiones

$$Z = Z_m \xrightarrow{\pi_m} Z_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-1}} \ldots \xrightarrow{\pi_2} Z_1 \xrightarrow{\pi_1} Z_0 = X$$

donde los π_i son los morfismos asociados a las explosiones Z_{i-1} con centro en P_i y $\pi_{\mathcal{C}}$ es la composición de todos estos morfismos. Para simplificar y cuando no haya posible confusión denotaremos a $\pi_{\mathcal{C}}$ por π.

Siguiendo la terminología de **[C-G-L]** y **[Re]** a la variedad Z se le llama cielo asociado a $\mathcal{C}$ o simplemente cielo.

DEFINICION 1.16 *Sea $\mathcal{C}$ una constelación $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, entonces definimos por $B_j \subseteq Z_j$ al divisor excepcional de la explosión π_j en el punto P_j. Denotaremos por E_j al transformado estricto de B_j en Z y $E_j^* = (\pi_m \circ \pi_{m-1} \circ \ldots \circ \pi_{j+2} \circ \pi_{j+1})^* (B_j)$ si $j = 1, \ldots, m-1$ y $E_m^* = = B_m$*

DEFINICION 1.17 *Un cluster $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{s})$ es un par consistente de una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ y una sucesión $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ de enteros no negativos. El entero s_i es llamado el peso (o multiplicidad virtual) de P_i en el cluster.*

DEFINICION 1.18 *Dado un cluster $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{s})$ podemos asociarle un divisor sobre el cielo de la constelación dado por*

$$D_{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{m} s_j E_j^*$$

DEFINICION 1.19 *Dado un ideal $I \subseteq \mathcal{O}_X$ y una constelación $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ se define el peso s_i en P_i y la transformada débil de I en P_i, $I_i = I_{P_i}$, inductivamente de la siguiente forma:*

$$I_1 = I, \qquad s_1 = ord_{P_1}(I_1)$$

$$I_i = (x)^{-s_{i-1}} I_{i-1} A_{P_i}, \qquad s_i = ord_{P_i}(I_i)$$

donde A_{P_i} es el anillo local correspondiente al punto P_i y x es un elemento general del ideal maximal de $A_{P_{i-1}}$ y ord_{P_i} es la función orden con respecto al ideal maximal del anillo correspondiente a dicho punto.

DEFINICION 1.20 *Un ideal $I \subseteq \mathcal{O}_{X,P}$ se dice que es de soporte finito o finitamente soportado existe sólamente una cantidad finita de puntos infinitamente próximos de X, tales que $I_Q \neq A_Q$. Un punto infinitamente próximo Q de P es un punto base de I si se cumple $I_Q \neq A_Q$*

Claramente dado un ideal de soporte finito podemos construir un cluster, donde los puntos que aparecen son los puntos base del ideal y donde el peso de cada punto es la multiplicidad del ideal (o de sus transformados) en dicho punto.

Ahora veremos que hay una correspondencia inyectiva entre ideales completos de soporte finito y divisores con soporte excepcional, para lo cual necesitamos algunas nociones algebraicas que introduciremos a continuación.

En álgebra conmutativa los puntos los veremos como anillos locales regulares y la relación entre cada una de ellos es que si P y Q son puntos infinitamente próximos entonces existe una cadena de transformaciones cuadráticas que nos permiten obtener a partir del anillo asociado a P el anillo asociado a Q.

Por todas estas razones recordaremos la definión de lo que es una de dichas transformaciones y veremos algunos resultados sobre ellas que utilizaremos en lo sucesivo. Para una ampliación de detalles ver **[A]**

DEFINICION 1.21 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión $d > 1$, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema minimal de generadores del ideal maximal y v una valoración del cuerpo de fracciones de A al que llamaremos $\mathcal{K}$. Supongamos que hemos ordenado los elementos x_i de forma que $v(x_1) \leq v(x_i)$ con $i = 1, \ldots, d$. Sea $R = A[x_2/x_1, \ldots, x_d/x_1]$, $Q' = R \cap \mathcal{M}_v$ (donde $\mathcal{M}_v$ es el ideal maximal del anillo de valoración asociado a v) y $R' = R_{Q'}$ entonces a R' se le llama la transformación cuadrátrica de A a lo largo de v.*

LEMA 1.2 *Sea (A, M) un anillo local regular de dimensión $d > 1$ y sea v una valoración de su cuerpo de fracciones, entonces, con la notación de la definición anterior R' es un anillo local regular de dimensión $t \leq d$*

Demostración

Con la notación de la definición 1.21 es fácil ver, que $R^* = R/(x_1)R \approx$ $\approx (A/\mathcal{M})[x_2, \ldots, x_d]$.

Sea $Q^* = Q'/(x_1)R$ y consideremos el anillo $R^*_{Q^*}$. Este anillo es un anillo local con maximal $Q^* R^*_{Q^*}$ y además podemos elegir $y_1, \ldots, y_h$ con $h \leq d - 1$ de forma que $(y_1, \ldots, y_h)R^*_{Q^*} =$ $= Q^* R^*_{Q^*}$.

Sean $z_1, \ldots, z_h$ elementos en R de forma que su clase con respecto a $(x_1)R$ sea igual a $y_1 \ldots y_h$ respectivamente. Tenemos entonces que claramente $Q' R_{Q'} = (x_1, z_1, \ldots, z_h)R'$ y por tanto

$$t = alt(Q' R'_{Q'}) = alt(Q^*) + 1 = h + 1$$

con lo que R' es un anillo local regular. Por otra parte como $h \leq d-1$ tenemos que la dimensión de R' es menor o igual que la dimensión de A.

Observemos que si v es una valoración que domina a un anillo local $(A, \mathcal{M})$ y R' es la transformación cuadrática de A a lo largo de v entonces dicha valoración domina también a R'.

DEFINICION 1.22 *Dado un anillo local $(A, \mathcal{M})$ y una valoración v que domina a A, se define la A-dimensión de v como el grado de trascendencia de la extensión de cuerpos $[A_v/\mathcal{M}_v : A/\mathcal{M}]$ donde A_v es el anillo de valoración asociado a v y $\mathcal{M}_v$ es el maximal de dicho anillo.*

PROPOSICION 1.20 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión $d > 1$, v una valoración que domine a A, R' la transformación cuadrática de A a lo largo de v, t la dimensión de R', d' la A-dimensión de v y d^* la R'-dimensión de v entonces $d - t = d' - d^*$.*

Demostración

Con la notación de la demostración del lema 1.2, es evidente, que la diferencia $d' - d^*$ es igual al grado de transcendencia de la extensión de cuerpos $[R_{Q'}/PR_{Q'} : A/\mathcal{M}] = [R^*{}_{Q^*}/Q^*R^*{}_{Q^*} : A/\mathcal{M}]$, al tenerse que $R_{Q'}/Q'R_{Q'} = R^*{}_{Q^*}/Q^*R^*{}_{Q^*}$, pero dicho grado de transcendencia es claramente igual a $d - 1 - h = d - t$.

LEMA 1.3 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión $d > 1$ y sea v una valoración que domina a A, entonces son equivalentes:*

(i) v es la valoració n $\mathcal{M}$-ádica de A

(ii) la transformada de A a lo largo de v es un anillo de valoración

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por la proposición 1.9 y el lema 1.2 basta ver que el ideal maximal de la transformada de A a lo largo de v es un ideal principal.

Consideremos el anillo $R = A[x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_d/x_1]$ donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ es un sistema regular de parámetros de A. Claramente tenemos que $Q' = M_v \cap R = M[x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_d/x_1] = x_1R$, por lo que $Q'R_{Q'}$ es principal como se quer a ver.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A organizado de forma que $v(x_1) \leq v(x_i)$ para cualquier i $(i = 1, \ldots, d)$ y R como antes.

Denotemos por w la valoración $\mathcal{M}$-ádica de A y sean $Q' = \mathcal{M}_v \cap R$ y $Q'' = \mathcal{M}_w \cap R = = (x_1)R$, donde $\mathcal{M}_v$ y $\mathcal{M}_w$ son los maximales de los anillos de valoración asociados a v y w respectivamente.

Claramente se tiene que $Q'' \subseteq Q'$. Si $Q'' \neq Q'$ entonces $Q''R_{Q'}$ es un ideal primo de $R_{Q'}$ distinto del maximal, lo cual es absurdo, ya que $R_{Q'}$ es un anillo de valoración y por tanto $Q' = Q''$ y entonces $R_{Q'} = R_{Q''}$ y por tanto dichas valoraciones son iguales.

El siguiente resultado es bien conocido, pero, aparece de una manera muy confusa en la literatura por lo que se le presta atención aquí.

PROPOSICION 1.21 *Sea v una valoración discreta que domina a un anillo local regular (A, M) de dimensión $d > 1$, entonces la cadena de transformaciones cuadráticas a lo largo de v es finita.*

Demostración

Supongamos que no es cierto, entonces tenemos una cadena infinita

$$A = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots$$

donde cada A_{i+1} $(i \in \mathbb{N})$ es la transformación cuadrática de A_i a lo largo de v.

Por el lema 1.2 tenemos que existe un j tal que $t = \dim(A_j) = \dim(A_{j+1}) = \dim(A_{j+2}) = \cdots$

Fijemos ahora un sistema regular de parámetros para A_j, digamos, $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$. Obtenemos de forma natural un sistema de parámetros para A_{j+1} dado por:

$$\left\{\frac{x_1}{x_s}, \frac{x_2}{x_s}, \ldots, \frac{x_{s-1}}{x_s}, x_s, \frac{x_{s+1}}{x_s}, \ldots, \frac{x_t}{x_s}\right\}$$

donde $v(x_s) < v(x_r)$ $(r = 1, 2, \ldots, t)$ $(1 \leq s \leq t)$. Utilizando este método se obtienen sistemas de parámetros para los A_{j+h} con $h \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por m_h al valor mínimo de v sobre el sistema regular de parámetros correspondiente a A_{j+h} y M_h al valor máximo de v sobre el mismo sistema regular de parámetros.

Entonces tenemos que:

(i) $0 < m_h < M_h$ $\forall h \in \mathbb{N}$

(ii) $M_h < M_{h+1}$ $\forall h \in \mathbb{N}$

pero esto es imposible, ya que tanto M_h como m_h están en $\mathbb{N}$.

Con las técnicas algebraicas que hemos descrito, estamos ahora en condiciones de volver a la situación geométrica para completar y obtener los resultados deseados. Para ello, recordaremos brevemente, nuestras intenciones y objetivos.

Dado un ideal completo de soporte finito le hemos asociado anteriormente un cluster y por medio de dicho cluster un divisor con soporte excepcional. Veremos a continuación que esta asociación es inyectiva, es decir, si tenemos dos ideales completos de soporte finito distintos, nos gustaría saber si los clusters asociados son distintos o no.

Observemos que si (A, M) es un anillo local regular e $I \subseteq A$ es un ideal completo de soporte finito y v es una valoración discreta de A, entonces para conocer el valor $v(I)$ nos basta con saber los pesos de I en todos los puntos infinitamente próximos a A. En efecto, si v es tal que la cadena de transformaciones cuadráticas que lleva desde A al primer anillo para el cual v coincide con la valoración asociada a su maximal, tiene algún anillo que es la localización en un primo no maximal entonces en dicho anillo su transformada débil es igual al total, ya que en caso contrario, en todos los infinitos maximales que contienen a dicho primo se tiene que la transformada débil es distinta del total y por tanto I no es de soporte finito. Si dicha cadena está formada por anillos que son la localización en maximales, entonces conocemos los ordenes necesarios y volviendo hacia atrás tenemos que conocemos también el valor de $v(I)$.

Con lo cual es evidente que si los clusters asociados a dos ideales completos y de soporte finito son iguales es porque dichos ideales son el mismo y tenemos una aplicación inyectiva entre ideales completos de soporte finito y divisores excepcionales.

DEFINICION 1.23 *Mantengamos las notaciones anteriores. Sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{C}, \underline{s}\}$ un cluster, decimos que el cluster es idealístico si existe un ideal completo (necesariamente único) de soporte finito que realiza dicho cluster, es decir, si existe un ideal completo de soporte finito I tal que $I\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D_{\mathcal{A}})$, donde $X(\mathcal{C})$ es el cielo de $\mathcal{C}$ y $D_{\mathcal{A}}$ es el divisor asociado a $\mathcal{A}$.*

Fijada una constelación, $\mathcal{C} = \{P_1, \dots P_m\}$, podemos definir una operación entre todos los clusters con dicha constelación de puntos: dados dos clusters con la misma constelación definimos su suma como el cluster que tiene la misma constelación y como pesos la suma de los pesos.

Con la anterior operación los clusters idealísticos, fijada la constelación de puntos, forman un semigrupo, ya que la valoración de la complección del producto de ideales es igual a la suma de cada una de las valoraciones de dichos ideales.

La operación anterior, suma de clusters, corresponde a la operación sobre el conjunto de ideales completos dada por $I * J = \overline{IJ}$. En efecto, es evidente, por las definiciones que el divisor asociado a $I * J$ es suma de los divisores asociados a I y a J.

1.3 Conos característicos

Expondremos ahora una visión geométrica de los ideales completos en el contexto de los llamados conos de curvas características, (**[Cu3]** y **[Kl]**) que nos darán una visión general de los resultados. Sea $X = Spec(A)$, donde (A, M) es un anillo local regular, Z una variedad normal y f una aplicación proyectiva birracional $f : Z \longrightarrow X$.

DEFINICION 1.24 *Sea $\mathcal{L}$ un fibrado lineal (es decir, un fibrado vectorial de rango 1) de Z, se dice que es numéricamente equivalente a cero si $(C \cdot \mathcal{L}) = 0$ para toda curva cerrada e integra $C \subseteq f^{-1}(P)$, donde P es el origen de X, es decir, es el punto cerrado asociado al ideal maximal de X. Al conjunto de los fibrados lineales numéricamente equivalentes a cero los denotamos por $Num^1(Z/X)$. Se trata de un subgrupo del grupo abeliano $Pic(Z)$ módulo equivalencia lineal.*

NOTACION 1.2 *Denotaremos por $N^1(Z/X)$ al cociente $Pic(Z)/Num^1(Z/X)$. Notese que $N^1(Z/X)$ es un grupo abeliano sin torsión, es decir, un retículo.*

DEFINICION 1.25 *Decimos que un subconjunto cerrado de dimensión 1, $Y \subseteq Z$ es relativo si cada una de sus componentes irreducibles tiene dimensión 1 y además proyecta en el punto cerrado de X. Un 1-ciclo relativo es un ciclo $\sum s_i C_i$ donde cada C_i es un subconjunto relativo irreducible y cada s_i es un entero.*
Al grupo abeliano de los 1-ciclos correlativos lo denotaremos por $F_1(Z/X)$.

DEFINICION 1.26 *Dado un elemento $T \in F_1(Z/X)$ decimos que es numéricamente equivalente a cero si $\forall \mathcal{L} \in Pic(Z)$ se tiene que $(\mathcal{L} \cdot T) = 0$. Al subgrupo de los 1-ciclos numéricamente equivalentes a cero los denotaremos por $Num_1(Z/X)$ y al grupo abeliano cociente $F_1(Z/X)/Num_1(Z/X)$ lo denotaremos por $N_1(Z/X)$.*

Nótese que debido al teorema de Neron-Severi $N_1(Z/X)$ y $N^1(Z/X)$ son grupos abelianos de rango finito y libres de torsión que son duales mutuamente ya que la intersección de 1-ciclos y fibrados lineales da lugar a una paridad no degenerada

$$N_1(Z/X) \times N^1(Z/X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

que define la citada dualidad.

NOTACION 1.3 *Siendo Z y X como antes denotamos por:*

$$A^1(Z/X) = N^1(Z/X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

$$A_1(Z/X) = N_1(Z/X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

PROPOSICION 1.22 *$A^1(Z/X)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, además si $E_1, \ldots, E_t$ son los divisores excepcionales primos de Z, entonces $\{E_1, \ldots, E_t\}$ generan $Pic(Z)$ y son una $\mathbb{R}$-base de $A^1(Z/X)$.*

Demostración

Dado $\mathcal{L} \in Pic(Z)$ tenemos divisores primos D_j en Z no excepcionales y enteros a_i y b_j tales que $\mathcal{L} \approx \mathcal{O}_Z((\sum_i a_i E_i) + (\sum_j b_j D_j))$. Sea $D'_j = f(D_j)$. Observemos que $\mathcal{O}_X(\sum_j b_j D'_j)) \approx A$. Tenemos, pues, que $\mathcal{L} \approx \mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{O}_X(-\sum_i b_i D'_j)) = \mathcal{O}_Z(\sum_i c_i E_i)$ para ciertos enteros c_i, con lo que los divisores excepcionales primos generan $Pic(Z)$ y por tanto $A^1(Z/X)$, con lo que $A^1(Z/X)$ es de dimensión finita.

Nos queda solamente probar que no hay una relación de dependencia entre los E_i. Sea $n = = \dim(A)$ y supongamos que existen $a_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_i a_i E_i$ es numéricamente equivalente a cero. Sea $\mathcal{L}$ un fibrado lineal muy amplio sobre Z y sean $T_1, \ldots, T_{n-2}$ el lugar geométrico de los ceros de $n-2$ secciones globales generales independientes de $\Gamma(Z, \mathcal{L})$. Sea $W = T_1 \cdots T_{n-2}$; entonces W es no singular de dimensión 2 y cada $E_i \cdot W$ es una curva integral por el teorema de Bertini, que llamaremos C_i, pero $\sum_i a_i E_i$ es numéricamente equivalente a cero y claramente se tiene que $(E_j \cdot C_i) = 0$ si $i \neq j$ y $(E_i \cdot C_i) \neq 0$, con lo que claramente

$$0 = ((\sum_i a_i E_i) \cdot C_j) = a_j (E_j \cdot C_j)$$

y por tanto $a_j = 0$ para todo j y hemos probado que $\{E_1 \ldots E_t\}$ es una base de $A^1(Z/X)$

DEFINICION 1.27 *Dado K un subconjunto de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V decimos que K es un cono convexo si cumple que:*

1. $K + K \subseteq K$
2. $aK \subseteq K$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Nótese que K es de hecho un subconjunto convexo de V.

DEFINICION 1.28 *Dado un conjunto C de elementos de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, llamamos cono generado por dicho conjunto a las combinaciones lineales finitas de coeficientes positivos de elementos de C.*
Evidentemente por el cono generado por C entendemos el menor cono que contiene a C.

DEFINICION 1.29 *Dado un morfismo birracional proyectivo $f : Z \longrightarrow X$ como antes, el cono de curvas $NE(Z/X)$ se define como el cono generado por las im genes en $A_1(Z/X)$ de las curvas relativas irreducibles.*

OBSERVACION 1.3 *Las imágenes de todas las curvas efectivas son, obviamente, elementos de $NE(Z/X)$. Más aún, $NE(Z/X)$ genera a $A_1(Z/X)$ como grupo, es decir se tiene que $A_1(Z/X) = NE(Z/X) - NE(Z/X)$*

DEFINICION 1.30 *El cono semiamplio $P(Z/X)$ es el dual en $A^1(Z/X)$ respecto del producto de intersección de $NE(Z/X)$, es decir, es el conjunto de todos los $D \in A^1(Z/X)$ tales que $(D \cdot C) \geq 0\ \forall C \in NE(Z/X)$; por $\overset{\circ}{P}(Z/X)$ denotaremos su interior topológico, es decir, $\overset{\circ}{P}(Z/X) = int(P(Z/X))$*

OBSERVACION 1.4 *Si K es un cono, entonces $int(K)$, es también un cono. En efecto, sean $u, v \in int(K)$, entonces existen entornos abiertos del cero, digamos, U, V tal que $u+U, v+V \subseteq$ $\subseteq int(K)$. Por otra parte, supongamos que $u + v \notin int(K)$, entonces para cualquier entorno de cero, en particular para $U \cap V$, existe un elemento $z \in U \cap V$ tal que $u+v+z \notin K$; pero esto es una contradicción ya que $u + v + z = (u + z) + v$, $u + z \in u + U \subseteq int(K) \subseteq K$ y K es un cono. La otra condición se cumple trivialmente ya que si $u \in int(K)$ entonces existe un entorno del cero U tal que $u + U$ está contenido en $int(K)$. Ahora claramente si $a > 0$, $au \in int(K)$, ya que sino para cualquier entorno del cero, en particular para aU existe un elemento, digamos $z = au + az'$, con $z' \in U$ tal que $z \notin K$, pero esto es absurdo ya que $z = a(u + z')$, que está en K, al ser K un cono y $u + z'$ un elemento de K.*

Kleiman (**[Kl]**) muestra, de hecho, que $\overset{\circ}{P}(Z/X)$ es el cono cuyos puntos retículares son exactamente aquellos que corresponden a divisores amplios, que a su vez son los divisores dados por fibrados lineales $\mathcal{L}$ tales que $(\mathcal{L} \cdot C) > 0$ para toda curva relativa C.

Introduciremos ahora el llamado cono característico de f, que nos servirá para contabilizar las variedades normales intermedias a Z y a X, es decir, variedades normales W para las que hay una factorización de Stein de f.

DEFINICION 1.31 *En $A^1(Z/X)$ definimos el cono característico de f, como el cono generado por las imágenes en $A^1(Z/X)$ de los haces inversibles generados por sus secciones globales, es decir, por las imágenes de los divisores asociados a ideales completos $I \subseteq A$ tales que $I\mathcal{O}_Z$ es inversible. Siguiendo a* **[L1]** *, denotaremos a este cono por $\widetilde{P}(Z/X)$*

OBSERVACION 1.5 *Observemos que claramente $\overset{\circ}{P}(Z/X) \subseteq \widetilde{P}(Z/X) \subseteq P(Z/X)$, (ya que si D es un haz amplio, entonces una potencia suya suficientemente grande está generada por sus secciones globales y por otro lado todo haz generado por secciones globales es semiamplio) y por tanto $\overset{\circ}{P}(Z/X) \subseteq int(\widetilde{P}(Z/X)) = \overset{\circ}{P}(Z/X)$, por lo que tenemos que $int(\widetilde{P}(Z/X)) = = \overset{\circ}{P}(Z/X)$.*

DEFINICION 1.32 *Decimos que (g, W, h) es una factorización de Stein (o simplemente una factorización) de f si W es una variedad normal y existen dos morfismos birracionales $g : Z \longrightarrow W$ y $h : W \longrightarrow X$ con $f = h \circ g$, g sobreyectiva y h proyectiva.*

El estudio de las factorizaciones de f, o bien, el estudio de las variedades W (llamadas variedades sandwiched en **[C-G]**) es el motivo de la consideración del cono característico $\widetilde{P}(Z/X)$. Nótese que una factorización está determinada por el conocimiento de la variedad intermedia W ya que es bien sabido que si existe un morfismo birracional entre dos variedades entonces éste es único.

Si a cada variedad intermedia W se le asocia el cono $\widetilde{P}(W/X)$ y se tiene en cuenta que existe una aplicación lineal inyectiva canónica $A^1(W/X) \longrightarrow A^1(Z/X)$ (sugerida por la asignación a cada fibrado lineal $\mathcal{L}_W$ sobre W del fibrado $h^*\mathcal{L}_W$), mediante la cual el cono característico $\widetilde{P}(W/X)$ se identifica con un cierto subcono de $\widetilde{P}(Z/X)$. Resulta así que se tiene una correspondencia entre las variedades intermedias y ciertos subconos de $\widetilde{P}(Z/X)$.

DEFINICION 1.33 *Dado un cono K en un espacio vectorial de dimensión finita V con $V = = K - K$, se definen las células de K por recurrencia sobre la dimensión de V. En primer lugar se define una única célula de K de dimensión igual a la de V que es el cono $int(K)$. Ahora las células de los subconos maximales de $K - int(K)$ son las células de dimensiones menores que la dimensión de V.*
Si V tiene dimensión 1, la situación es trivial ya que K ha de ser una semirecta y entonces las células son la semirecta abierta y, en el caso de que K sea cerrado el origen. Esto sugiere que en el extremo opuesto a $int(K)$, para un cono dado K, se tendrán, eventualmente, células 1-dimensionales que son arístas y el propio origen como célula 0-dimensional.

Los subconos de $\widetilde{P}(Z/X)$ que aparecen como imagenes de los conos característicos de las variedades intermedias son las células topológicas del cono característico. Con más precisión se tiene el siguiente teorema debido a Kleiman (**[Kl]**).

TEOREMA 1.1 *En las condiciones anteriores, existe una biyección entre las variedades intermedias W entre Z y X (o factorizaciones de $f\colon\ Z \longrightarrow X$) y células del cono característico $\widetilde{P}(Z/X)$, que asocia a W la imágen en $\widetilde{P}(Z/X)$ del interior del cono característico $\widetilde{P}(W/X)$.*

Nótese que la anterior correspondencia da en situaciones extremas el siguiente resultado: a la variedad intermedia Z le corresponde el cono $\overset{\circ}{P}(Z/X)$ mientras que a la variedad intermedia X le corresponde el origen de $A^1(Z/X)$.

Más aún si W y W' son dos variedades intermedias entonces la célula correspondiente a W está contenida en la clausura de la célula correspondiente a W' si y sólo si existe un morfismo birracional $W' \longrightarrow W$.

Así se tiene un isomorfismo de conjuntos ordenados entre el conjunto de variedades intermedias (para el orden dado por la dominación birracional; es decir, existencia de un morfismo birracional de una variedad a otra) y el de células topológicas del cono característico (para la relacción de orden “estar contenida en la adherencia de’).

Existen ejemplos de morfismos f que muestran que los conjuntos de variedades intermedias y de células topológicas puede ser infinito (ver **[C-G]** y **[Cu3]**).

Los siguientes están tomados de **[C-G]** y de **[Cu3]** respectivamente y son ejemplos de morfismos obtenidos por explosión sucesiva de los puntos de ciertas constelaciones.

EJEMPLO 1.5 *Consideremos la cadena $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_{10}\}$ donde $P_2, \ldots, P_{10}$ son puntos consecutivos sobre el punto $P_1 = (0, 0, 1)$ origen de la cúbica $yz^2 = x^2z + x^3$ contenida en el divisor excepcional de la explosión en P_1 del espectro de un anillo local regular $R_1 = \mathcal{O}_{X,P_1}$ de dimensión 3, siendo X una variedad lisa 3-dimensional. Sea $Z \to X$ el morfismo obtenido por composición de las sucesivas explosiones en los puntos $P_1, \ldots, P_{10}$.*

Veremos ahora que, en este caso, se tienen infinitas variedades intermedias. Para ello debemos encontrar curvas irreducibles C tales que $C \cdot C = -1$ y $C \cdot K_{E_o} = -1$, donde E_0 es la transformada débil en Z del divisor excepcional de la primera explosión y K_{E_o} es el divisor canónico de E_0.

Ahora la primera de las condiciones nos dice que se debe tener que:

$$\sum_{i=2}^{10} {e_i}^2 = n^2 + 1$$

donde e_i es la multiplicidad en cada uno de los puntos P_i y n es el grado de la curva C.

La segunda condición nos dice que se debe tener que:

$$\sum_{i=2}^{10} e_i = 3n - 1$$

Ahora si para cada $t \in \mathbb{N}$ tomamos $n = 3t^2 + 3$, $e_2 = t^2 + t$, $e_3 = t^2 + 2$, $e_4 = e_5 = \cdots = = e_9 = t^2 + 1$ y $e_{10} = t^2 - t$, se satisfacen las dos ecuaciones y entonces tenemos infinitas curvas irreducibles (ya que se corresponden con rayos extremales en $NE(E_0/X)$) que son variedades intermedias a las dadas.

EJEMPLO 1.6 *El siguiente ejemplo es muy similar en el desarrollo aritmético al anterior, aunque geométricamente son distintos. Consideremos el espectro de un anillo local regular de dimensión 3 y a continuación explotaremos dicho esquema en el punto correspondiente al ideal maximal del citado anillo local, P_1. A continuación tomemos los nueve puntos de intersección $P_2, \ldots, P_{10}$ de dos cúbicas generales en el divisor excepcional y explotaremos dicho esquema en estos puntos. Como antes se tiene el morfismo $Z \to X$ obtenido por composición de las sucesivas explosiones en los puntos $P_1, \ldots, P_{10}$.*

Para encontrar infinitas variedades intermedias procedemos como en el caso anterior buscando curvas que cumplan las anteriores igualdades y utilizando la misma aritmética (tomando los e_i con la misma función de t y haciendo t suficientemente grande) llegamos a que en este caso también se tienen infinitas variedades intermedias.

OBSERVACION1.6 *En el enunciado del teorema1.1 se describe la célula asociada a una varieiedad intermedia W. Tambié n es posible describir la asignación inversa ya que si K' es una célula de K entonces la correspondiente variedad intermedia es la variedad obtenida por la explosi n normalizada de cualquier ideal completo $I \subseteq A$ tal que $I\mathcal{O}_Z$ sea inversible y cuyo divisor asociado tenga imágen en $A^1(Z/X)$ dentro del cono K'. Nó tese que el ideal I no es en absoluto único, al contrario, los ideales dados por $I\mathcal{O}_Z$ tienen clase de equivalencia numérica que son puntos reticulares de la célula y obviamente se dispone de infinitos puntos reticulares si la dimensión de la célula no es 0.*

Hay dos preguntas naturales en este contexto cuyas soluciones conforman dos problemas abiertos que consideraremos en esta Memoria.

La primera es determinar las condiciones bajo las cuales existe un número finito de variedades intermedias para el morfismo f.

La segunda es: suponiendo que ya que hayan caracterizado las células, calcular explicitamente ideales completos cuya explosión de lugar a la variedad intermedia correspondiente a cada célula. Nótese que aquí se requiere no sólo encontrar un ideal completo I sino que también sus potencias I^n sean completas, ya que se pide obtener directamente la variedad intermedia por explosión de dicho ideal sin que sea ya, entonces, necesaria la normalización.

Una respuesta parcial al primer problema está dado en **[C-G]** mediante una condición suficiente.

TEOREMA 1.2 *(Ver* **[C-G]** *) Existe una aplicación inyectiva entre el conjunto de células del cono caracter stico y el conjunto de células del cono semiamplio. En particular si el cono de curvas $NE(Z/X)$ es poliédrico entonces el número de variedades intermedia es finito.*

OBSERVACION 1.7 *Para garantizar que el cono $NE(Z/X)$ es poliédrico es suficiente que lo sean los conos de curvas efectivas $NE(E_i/X)$ de las componentes irreducibles E_i del divisor excepcional $f^{-1}(P)$ de f.*
Por ejemplo, en **[C-G]** *se muestran constelaciones cuya explosión da lugar a conos de curvas poliédricos imponiendo condiciones a los E_i. Así, por ejemplo, si $\dim(A) = 3$ y la constelación es tal que cada punto tiene a lo sumo 8 puntos infinitamente próximos se tiene que $NE(Z/X)$ es poliédrico y por tanto $\widetilde{P}(Z/X)$ tiene un número finito de células.*

Para el segundo problema, la principal dificultad en la práctica es encontrar un divisor D en una célula dada K' tal que $\mathcal{O}_Z(-D)$ esté generado por sus secciones globales. Aún cuando esta dificultad este resuelta, el problema es, todavia, encontrar un D adecuado para que los ideales $f_*(\mathcal{O}_Z(-nD))$ sean las potencias del ideal $I = f_*(\mathcal{O}_Z(-D))$.

El objetivo de esta Memoria es determinar, condiciones suficientes en el caso de cadenas tóricas, para determinar si el divisor elegido D es generado por sus secciones globales y si el ideal $f_*(\mathcal{O}_Z(-nD))$ es una potencia de I. O dicho de otro modo, intentaremos solventar el segundo problema, al menos parcialmente, en el caso de cadenas tóricas (es decir, puntos infinitamente próximos que son órbitas $0-$dimensionales para la acción obvia del toro sobre un espacio afín provisto de una referencia).

Capítulo2
Ideales monomiales completos, polígonos de Newton y valoraciones monomiales.

En el anterior capítulo hemos explicado el objetivo último de esta Memoria. Para aproximarnos a dicho objetivo hemos de estudiar los ideales completos, y en particular, aquellos ideales completos que tienen soporte sobre una cadena tórica, llamados ideales monomiales. También hemos mostrado que el cierre íntegro de un ideal I, en un anillo local regular, A, está formado por todos los elementos, x, en dicho anillo que cumplen que para cualquier valoración v positiva sobre A, $v(x) \geq v(I)$; hemos visto que dicho conjunto es igual al que se tiene cuando se considera solamente las valoraciones que dominan a A y cuando se consideran únicamente los divisores primos.

Pondremos énfasis, ahora, en la propiedad de que si I es un ideal monomial, basta con considerar una clase especial de valoraciones que denominaremos monomiales. Para ello comenzaremos estudiando los grupos ordenados, es decir, grupos dotados de una relación de orden $\leq$ que cumple que si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$, siendo $+$ la operación del grupo. La razón por la que se consideran esta clase de grupos es porque una valoración no es más que un homomorfismo entre el grupo multiplicativo de un cuerpo y un grupo ordenado.

En la sección primera repasamos el concepto de rango. As comenzamos introduciendo la función valor absoluto generalizada que ayudar a definir el concepto de subgrupos aislados de un grupo ordenado. A partir de ellos y observando que la relación de inclusión es una relación de orden total para estos subgrupos definimos los subconjuntos $\mathcal{A}_k = \{\gamma \in \Gamma_k \, / \, \gamma \notin \Gamma_{k-1}\}$, donde Γ_j son los subgrupos aislados del grupo ordenado Γ. Para cada uno de estos subconjuntos se obtendrá que en ellos se tiene siempre la propiedad arquimediana del orden, aunque no se dé totalmente en el grupo Γ. Ello permite entender el concepto de rango cuyo valor es el número de componentes arquimedianas que tiene un grupo ordenado dado.

A partir de aquí y considerando únicamente grupos ordenados finitamente generados, ya que son los que aparecen en las valoraciones monomiales, se tiene la operativa propiedad de que los conjuntos $\{\gamma \in \mathcal{S} \;/\; \gamma > \delta\}$ tienen un elemento mínimo, siendo $\delta \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ el semigrupo determinado por un conjunto de generadores positivos del grupo ordenado Γ.

Esta propiedad nos permitirá construir una filtración del anillo local regular de dimensión d, A, que nos proporcionará la posibilidad de construir una valoración monomial (de su cuerpo de fracciones) en la que hemos fijado de antemano el valor de dicha valoración en un sistema de parámetros regulares de nuestro anillo local regular. También probamos que el graduado con respecto a una valoración es isomorfo a un anillo de polinomios en las indeterminadas correspondientes a las imágenes del sistema de parámetros regulares del anillo A si y solamente si dicha valoración es una valoración monomial.

A continuación mostramos la propiedad que nos interesa, que para el caso de un ideal monomial bastan las valoraciones monomiales que dominan a A para encontrar su cierre ntegro.

A partir de aqui la teoría de la clausura entera de ideales monomiales se puede desarrollar fácilmente y queda teóricamente entendida. Por ello en este capítulo incluimos la teoría de valoraciones necesaria para explicar la situación que nos interesa con el fin de poder desarrollar con propiedad el estudio de los ideales monomiales de soporte finito. En el resto del capítulo se ofrece la relación entre el cierre entero de ideales monomiales y los poliedros de Newton siendo dicha relación esencial para los resultados de esta Memoria en los capítulos siguientes.

2.1 Grupos ordenados, valoraciones monomiales e ideales monomiales completos

Comenzaremos el estudio de los ideales monomiales completos con una revisión del concepto de grupo ordenado y de sus principales propiedades. Esto nos llevará a algunas consecuencias sobre las valoraciones monomiales, tales como su existencia sobre cualquier grupo ordenado, una vez fijados los valores de dicha valoración sobre un sistema de parámetros.

A partir de ahora Γ será un grupo totalmente ordenado con un orden '$\leq$', y denotaremos por Γ_+ al conjunto $\Gamma_+ = \{\alpha \in \Gamma \,/\, \alpha > 0\}$. El conjunto Γ_+ es cerrado para la suma, es decir, si $\alpha, \beta \in \Gamma_+$, entonces $\alpha + \beta \in \Gamma_+$. En efecto como $\alpha, \beta \in \Gamma_+$, entonces $\alpha, \beta > 0$, por tanto se tiene que $\alpha + \beta > 0$ y $\alpha + \beta \in \Gamma_+$. Ahora se define, $sig : \Gamma \to \{-1, 1\}$ como la aplicación dada por:

$$sig(\gamma) = \begin{cases} -1 & \text{si } \gamma < 0 \\ \\ 1 & \text{si } \gamma \geq 0 \end{cases}$$

A $sig(\gamma)\gamma$ se le denota por $|\gamma|$.

Sea $\Delta \subseteq \Gamma$, decimos que Δ es un segmento de Γ si para todo $\alpha \in \Delta$ se tiene que $\forall \beta \in \Gamma$ tal que $|\beta| \leq |\alpha|$ se cumple que $\beta \in \Delta$. Sea $\mathcal{SG}$ el conjunto de todos los segmentos de Γ, entonces $\mathcal{SG}$ está totalmente ordenado por la inclusión. En efecto, sean $\Delta, \Delta' \in \mathcal{SG}$ y supongamos que $\Delta \nsubseteq \Delta'$ y que $\Delta' \nsubseteq \Delta$, entonces existe un α tal que $\alpha \in \Delta$ y $\alpha \notin \Delta'$; por otra parte existe un β tal que $\beta \in \Delta'$ y $\beta \notin \Delta$. Ahora podemos suponer sin perdida de generalidad que $|\alpha| \leq |\beta|$ y entonces $\alpha \in \Delta'$.

Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ un segmento de Γ. Se dice que Δ es un subgrupo aislado de Γ si Δ es un subgrupo propio de Γ. Al conjunto de todos los subgrupos aislados de $(\Gamma, \leq)$ lo denotamos por $\mathcal{GA}$; a su cardinal se le llama rango de Γ y se le denota por $rang(\Gamma)$.

A partir de ahora supondremos que $rang(\Gamma) = r$ es finito, ya que es el caso interesante para nosotros en la Memoria.

Sean $0 = \Gamma_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_{r-1}$ los grupos aislados de Γ y sea $\Gamma_r = \Gamma$ entonces para $1 \leq j \leq r$ definimos los conjuntos $\mathcal{A}_j = \{\gamma \in \Gamma_j \,/\, \gamma \notin \Gamma_{j-1}\}$, $\mathcal{A}_0 = 0$. Se tiene, entonces que

$$\Gamma_k = \bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{A}_j \quad 0 \leq k \leq r$$

En efecto, para $k = 0$ es trivial. Supongamos que $k > 0$, entonces tenemos trivialmente que $\mathcal{A}_j \subseteq \Gamma_k$, $0 \leq j \leq k$ y por tanto $\cup_{j=0}^{k} \mathcal{A}_j \subseteq \Gamma_k$; tomemos ahora un $\delta \in \Gamma_k$ se presentan dos posibilidades:

1. $\underline{\delta = 0}$: En este caso $\delta \in \mathcal{A}_0$.
2. $\underline{\delta \neq 0}$: Consideramos entonces la siguiente sucesión descendente de grupos:

$$\Gamma_k \supsetneq \Gamma_{k-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \Gamma_1 \supsetneq \Gamma_0 = 0$$

Se tiene trivialmente que $\delta \in \Gamma_k$ y $\delta \notin \Gamma_0$, con lo cual debe existir un l, con $k \geq l \geq 0$, tal que $\delta \in \Gamma_l$ y $\delta \notin \Gamma_{l-1}$, y por tanto $\delta \in \mathcal{A}_l$.

De todo lo anterior se deduce fácilmente que si $i \neq j$, entonces $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing$.

PROPOSICION 2.1 *Sean* $\Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_{r-1}$ *todos los grupos aislados de* $(\Gamma, \leq)$ *y* $\Gamma_r = \Gamma$ *entonces si* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *tales que* $\alpha, \beta > 0$ *y* $\beta \geq \alpha$*, entonces* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_j$ *para algún* j*, con* $0 < j \leq r$*, si y solamente si existe un* $m \in \mathbb{N}$*, tal que* $m\alpha \geq \beta$*.*

Demostración

Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_j$ y que no existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que $m\alpha \geq \beta$. Consideremos $\Delta =$ $= \{\gamma \in \Gamma \,/\, \exists n \in \mathbb{N}$ con $n\alpha \geq |\gamma|\}$. Claramente Δ es un grupo aislado de Γ, pero $\Gamma_{j-1} \subsetneq \Delta \subsetneq \Gamma_j$ ya que $\beta \notin \Delta$ y $\alpha \in \Delta$; absurdo.

Supongamos ahora que $\alpha \in \mathcal{A}_j$ y que existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que $m\alpha \geq \beta \Rightarrow m\alpha \in \Gamma_j \Rightarrow \beta \in \Gamma_j$, pero como $\beta > \alpha$ entonces $\beta \notin \Gamma_{j-1}$ (ya que en caso contrario $\alpha \in \Gamma_{j-1}$). Por lo tanto $\beta \in \mathcal{A}_j$.

COROLARIO 2.1 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado de rango finito* r *y sean* $\alpha, \beta \in$ $\in \Gamma_+$, $\alpha \in \Gamma_i$ *y* $\beta \in \mathcal{A}_j$ *con* $j > i$*, entonces tenemos que* $\beta > \alpha$*.*

Demostración

Supongamos que $\beta \leq \alpha$ entonces tenemos que $|\beta| = \beta \leq \alpha = |\alpha|$ y por tanto $\beta \in \Gamma_i$ con lo que $\beta \in \mathcal{A}_k$ con $1 \leq k \leq i < j$ y se tiene entonces que $k \neq j$ y que $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_j \neq \varnothing$; contradicción.

DEFINICION 2.1 *Sea* Γ *un grupo, dados* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Gamma$ *decimos que son racionalmente dependientes cuando existen enteros* $s_1, \ldots, s_m$ *no todos ellos nulos tales que* $\sum_{j=1}^{m} s_j \alpha_j = 0$*, en caso contrario decimos que son racionalmente independientes.*

OBSERVACION 2.1 *Sea Γ un grupo, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Gamma$ son racionalmente independientes si y solamente si $\alpha_1 \otimes 1, \ldots, \alpha_m \otimes 1$ son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes en $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

DEFINICION 2.2 *Sea Γ un grupo definimos el rango racional de Γ como el máximo número de elementos racionalmente independientes en Γ (el rango racional puede ser infinito) y lo denotaremos por $rang\,rac(\Gamma)$.*

OBSERVACION 2.2 *Si Γ es un grupo finitamente generado, entonces su rango racional es finito y es igual al máximo número de elementos racionalmente independientes en cualquier sistema finito de generadores.*

NOTACION 2.1 *Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado de rango finito, digamos por ejemplo r, entonces denotamos a los grupos aislados de $(\Gamma, \leq)$ por Γ_j $0 \leq j \leq r-1$. Teniendo en cuenta que en esta ordenación se ha de tener que $\Gamma_i \subsetneq \Gamma_j \Leftrightarrow i < j$.*

PROPOSICION 2.2 *Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, entonces tenemos que $rang\,rac(\Gamma) \geq rang(\Gamma)$.*

Demostración

Si el $rang\,rac(\Gamma)$ es infinito entonces la desigualdad que debemos probar se tiene trivialmente. Podemos suponer entonces que $rang\ rac(\Gamma)$ es finito; sea $\mathcal{GA}$ el conjunto de todos los subgrupos aislados de $(\Gamma, \leq)$ y supongamos que el cardinal de $\mathcal{GA}$ es mayor que $rang\,rac(\Gamma) = m$; tomemos $\Gamma_{i_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_{i_s}$ un subconjunto de $\mathcal{GA}$ tal que $s > m$ y sea $\Gamma_{i_{s+1}} = \Gamma$; sean $\alpha_j \in \Gamma$, $j = 1, \cdots s$ tales que $\alpha_j \in \Gamma_{i_j}$ y $\alpha_j \notin \Gamma_{i_{j-1}}$; supongamos ahora que tenemos que $\sum_{j=1}^{s} m_j \alpha_j = 0$, donde los m_j son enteros no todos nulos; sea ahora $g = \max\{j \,/\, m_j \neq 0\}$; entonces se tiene que $\sum_{j=1}^{s} m_j \alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{g} m_j \alpha_j = 0$ y por tanto $m_g \alpha_g = \sum_{j=1}^{g-1} -m_j \alpha_j$, por lo que $m_g \alpha_g \in \Gamma_{i_{g-1}}$ y como $\Gamma_{i_{g-1}}$ es un grupo aislado y $m_g \neq 0$ entonces tenemos que $\alpha_g \in \Gamma_{i_{g-1}}$, lo cual es una contradicción; con lo que los elementos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ son racionalmente independientes y por tanto $m = rang\,rac(\Gamma) \geq s > m$, lo cual es una contradicción obteniéndose el resultado deseado.

COROLARIO 2.2 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado finitamente generado, entonces el rango de* Γ *es finito y además es menor o igual que el cardinal de cualquier conjunto finito de generadores de* Γ.

Demostración

Por el último lema tenemos que $(\Gamma, \leq)$ es de rango racional finito y dicho rango racional es menor o igual que el cardinal de cualquier conjunto finito de generadores de Γ; ahora por la última proposición tenemos que el rango de $(\Gamma, \leq)$ es menor que el rango racional y se tiene el resultado pedido.

NOTACION 2.2 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado y sean* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$*, denotaremos por* $\mathcal{S}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_d}$ *o sencillamente por* $\mathcal{S}$ *cuando no se preste a confusión al semigrupo generado por* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$*, es decir, el conjunto de expresiones de la forma* $m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \cdots + m_d\gamma_d$ *con* $m_1, \ldots, m_d$ *enteros no negativos.*

LEMA 2.1 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado, finitamente generado y sean* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in$ $\in \Gamma_+$ *tales que* $\Gamma = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{Z}\,\gamma_j$*; fijemos un* $\delta \in \Gamma_+$*, entonces si* $\delta \in \mathcal{A}_k$ *existe* $\min\{\gamma = \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}} s_j\gamma_j \,/\, \gamma > \delta$ *y* $s_j \in \mathbb{N}\ \forall j\}$.

Demostración

Utilizando la proposición 2.1 para cada γ_j definimos m_j de la siguiente forma:

$$m_j = \begin{cases} \min\{t \in \mathbb{Z}_+ \,/\, t\gamma_j > \delta\} & \text{si } \gamma_j \notin \Gamma_{k-1} \\ \\ 0 & \text{si } \gamma_j \in \Gamma_{k-1} \end{cases}$$

Definimos ahora el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B} = \{\gamma = \sum_{j=1}^{d} s_j\gamma_j \,/\, s_j \leq m_j\ \forall j\ y\ \gamma > \delta\}$$

Ahora como $\Gamma = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{Z}\,\gamma_j$, existe algún γ_j tal que $\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}$(ya que sino $\Gamma = \Gamma_{k-1}$) y como $m_j\gamma_j \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \neq \emptyset$; por otra parte de la definición se tiene, claramente, que el cardinal de $\mathcal{B}$ es finito y entonces, como Γ es un grupo totalmente ordenado, existe $\min\{\gamma \in \mathcal{B}\}$; denotemos a dicho mínimo por M.

Tomemos ahora un $\gamma = \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}} s_j \gamma_j$ con $s_j \in \mathbb{N}\ \forall j$ y tal que $\gamma > \delta$; tenemos dos casos:

1. Existe un l tal que $s_l > m_l$: Entonces:

$$\gamma = \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}} s_j \gamma_j = \left[\sum_{\substack{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1} \\ j \neq l}} s_j \gamma_j + (s_l - m_l)\gamma_l \right] + m_l \gamma_l$$

   y por tanto $\gamma > m_l \gamma_l \geq M$.

2. $s_l \leq m_l\ \forall l$: $\gamma \in \mathcal{B}$ y por tanto $M \leq \gamma$.

   Con todo esto tenemos que:

$$M = \min\{\gamma = \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}} s_j \gamma_j \,/\, \gamma > \delta \text{ y } s_j \in \mathbb{N}\ \forall j\}$$

   que es el resultado deseado.

NOTACION 2.3 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado y finitamente generado* $(rang(\Gamma) = r)$*; sean* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$ *tales que* $\Gamma = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{Z}\gamma_j$*; fijemos un* $\delta \in \mathcal{A}_k$ *con* $0 \leq k \leq r$*,* $\delta \geq 0$ *entonces definimos por* δ^+ *por:*

$$\delta^+ = \begin{cases} \min\{\gamma = \sum_{\gamma_j \notin \Gamma_{k-1}} s_j \gamma_j \,/\, \gamma > \delta \text{ y } s_j \in \mathbb{N}\ \forall j\} & \text{si } \delta \neq 0 \\ \min\{\gamma_j\} & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2.1 *El siguiente ejemplo muestra que el valor de* δ^+ *depende fuertemente de los generadores* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ *elegidos.*

Sea $\Gamma = \mathbb{Z}$*. Si consideremos* Γ *generado por* $\{1\}$ *y* $\delta = 1$ *entonces* $\delta^+ = 1$*, pero si en lugar de esto lo consideremos generado por* $\{3, 4\}$*,* $\delta^+ = 3$*.*

LEMA 2.2 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado de rango finito* $(rang(\Gamma) = r)$*,* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$ *y* $\delta = \sum_{j=1}^{d} t_j \gamma_j$ *con* $t_j \in \mathbb{N}$*,* $\delta \neq 0$*, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. $\delta \in \mathcal{A}_k$
2. $k = \max\{m \,/\, \exists s, 1 \leq s \leq d,$ *con* $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0\}$

Demostración

Si $\max\{m \,/\, \exists s,\ 1 \leq s \leq d,$ con $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0\} < k$, entonces tenemos que $\delta = \sum_{\gamma_j \in \Gamma_{k-1}} t_j \gamma_j$, y por tanto $\delta \in \Gamma_{k-1}$; lo cual es una contradicción. Por ello tenemos que

$k \geq \max\{m \,/\, \exists s\ 1 \leq s \leq d$ con $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0\}$; supongamos que k es mayor que el anterior máximo, entonces existe un $m > k$ y un $s \in \mathbb{N}$ con $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0$ y por tanto se tiene que $\gamma_s \leq \delta$, lo cual implica que $\gamma_s \in \Gamma_k$, pero esto es absurdo y se tiene que $k = \max\{m \,/\, \exists s, 1 \leq s \leq d,$ con $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0\}$. Esto muestra que 1. implica 2.

Veamos ahora, por último, que 2. implica 1.Sea $k = \max\{m \,/\, \exists s\ 1 \leq s \leq d$ con $\gamma_s \in \mathcal{A}_m$ y $t_s \neq 0\}$, entonces $\delta = \sum_{\gamma_j \in \Gamma_k} t_j \gamma_j$ y existe un l tal que $\gamma_l \in \mathcal{A}_k$ y $t_l \neq 0$, con lo cual se tiene trivialmente que $\delta \in \Gamma_k$ y $\delta \notin \Gamma_{k-1}$(ya que sino $\gamma_l \leq \delta \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \gamma_l \in \Gamma_{k-1}$) o lo que es lo mismo que $\delta \in \mathcal{A}_k$.

TEOREMA 2.1 *Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado finitamente generado con $rang(\Gamma) = r$; sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$ generadores de Γ y $\mathcal{S}$ el semigrupo generado por dichos elementos; fijemos $\delta \in \mathcal{S}$ tal que $\delta \geq 0$, entonces existe $\min\{\gamma \in \mathcal{S} \,/\, \gamma > \delta\}$, es decir el elemento mínimo del conjunto $\{\gamma \in \mathcal{S} \,/\, \gamma > \delta\}$.*

Demostración

En esta demostración supondremos las sumas vacias iguales a 0.Para $\delta = 0$, entonces se tiene trivialmente que dicho mínimo existe y es igual a δ^+.

Podemos pues suponer que $\delta \neq 0$ y por tanto existe un $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\delta \in \mathcal{A}_k$; como $\delta \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}_k$, entonces por el Lema 2.2 tenemos que $\delta = \sum_{\gamma_j \in \Gamma_k} s_j \gamma_j$ con $s_j \in \mathbb{N}\, \forall j$.

Definimos a continuación el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B} = \left\{ \epsilon = \sum_{\gamma_l \in \mathcal{A}_k} t_l \gamma_l \,/\, t_l \in \mathbb{N}\ \forall l,\ \epsilon \leq \delta \text{ y } \delta - \epsilon \in \Gamma_{k-1} \right\}$$

Veremos a continuación que $\mathcal{B}$ es no vacio y de cardinal finito; para ver que $\mathcal{B}$ es no vacio basta con dar algún elemento de $\mathcal{B}$; ahora es trivial comprobar que $\sum_{\gamma_j \in \mathcal{A}_k} s_j \gamma_j \in \mathcal{B}$, ya que $\sum_{\gamma_j \in \mathcal{A}_k} s_j \gamma_j \leq \delta$ y además $\delta - \sum_{\gamma_j \in \mathcal{A}_k} s_j \gamma_j = \sum_{\gamma_j \in \Gamma_{k-1}} s_j \gamma_j \in \Gamma_{k-1}$.

Para ver que $\mathcal{B}$ tiene cardinal finito procederemos de la siguiente forma: observemos que para cada $\gamma_j \in \mathcal{A}_k$ tenemos que existen enteros m_j tales que $m_j \gamma_j > \delta$, con lo que el cardinal de $\mathcal{B}$ está acotado por el número $\prod_{\gamma_j \in \mathcal{A}_k} m_j$ y por tanto es de cardinal finito.

Construyamos ahora el conjunto:

$$\mathcal{C} = \left\{ \epsilon + (\delta - \epsilon)^+ / \epsilon \in \mathcal{B} \right\} \cup \left\{ \delta^+ \right\}$$

Evidentemente el cardinal de $\mathcal{C}$ es igual al cardinal de $\mathcal{B}$ más uno y por tanto $\mathcal{C}$ es finito y no vacio y existe un valor mínimo en $\mathcal{C}$, digamos c.

Veamos que c es el valor buscado; para ello tomemos un $z = \sum_{j=1}^{d} t_j\gamma_j > \delta \;\Rightarrow\; z \in \mathcal{A}_l$ con $l \geq k$.

Si $l > k$ trivialmente $z > c$, por lo que podemos suponer que $l = k$ y entonces tenemos dos posibilidades

(i) $\sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j > \delta$: Entonces $z \geq \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j \geq \delta^+ \geq c$.

(ii) $\sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j \leq \delta$: Como $\delta - \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j < \sum_{\gamma_j\in\Gamma_{k-1}} t_j\gamma_j \;\Rightarrow\; \delta - \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j \in \Gamma_{k-1}$

y por tanto $\sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j \in \mathcal{B}$ y además $\sum_{\gamma_j\in\Gamma_{k-1}} t_j\gamma_j \geq \left(\delta - \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j\right)^+$ y entonces

$$c \leq \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j + \left(\delta - \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j\right)^+ \leq \sum_{\gamma_j\in\mathcal{A}_k} t_j\gamma_j + \sum_{\gamma_j\in\Gamma_{k-1}} t_j\gamma_j = z$$

y tenemos el resultado buscado.

DEFINICION 2.3 *Sea* $(\Gamma,\leq)$ *un grupo totalmente ordenado y finitamente generado* $(rang(\Gamma) = r)$*, sean* $\gamma_1,\ldots,\gamma_d \in \Gamma_+$ *tales que* $\Gamma = \sum_{j=1}^{d}\mathbb{Z}\gamma_j$ *y sea* $\mathcal{S}$ *el semigrupo generado por dichos elementos; fijemos un* $\delta \in \mathcal{S}$ *con* $\delta \geq 0$ *entonces definimos* δ_+ *por:*

$$\delta_+ = \min\{\gamma \in \mathcal{S} \,/\, \gamma > \delta\}$$

Ahora utilizaremos los resultados obtenidos sobre grupos ordenados para construir una filtración de un anillo local regular que nos conduzca a un tipo especial de valoraciones llamadas monomiales que nos servirán para calcular el cierre entero de un ideal monomial, es decir, un ideal generado por monomios en un sistema regular de parámetros fijo.

DEFINICION 2.4 *Sea* v *una valoración de un anillo local regular* $(A,\mathcal{M})$*,* $\mathcal{P} = \{x_1,\ldots,x_d\}$ *un sistema regular de parámetros, decimos que* v *es una valoración monomial si dado* $X = \sum_j \lambda_j m_j$*, donde* λ_j *son unidades en* A *y* m_j *monomios en* $\mathcal{P}$ *se tiene que* $v(X) = \inf_j\{v(m_j)\}$.

La pregunta que nos hacemos a continuación es la siguiente: Dado un grupo ordenado $(\Gamma,\leq)$, un anillo local regular $(A,\mathcal{M})$, un sistema regular de parámetros $\mathcal{P} = \{x_1,\ldots,x_d\}$ y $\gamma_1,\ldots,\gamma_d \in \Gamma_+$ Podemos construir una valoración monomial $v : K \to \Gamma\cup\{\infty\}$, donde K es el cuerpo de fracciones de A, tal que $v(x_j) = \gamma_j$?

Para responder a esta pregunta contruiremos una filtración de ideales de A que nos permitir encontrar la valoración deseada.

DEFINICION 2.5 *Sea $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$ y sea $\mathcal{S}$ el semigrupo generado por dichos elementos, entonces para cada $\delta \in \mathcal{S} - \{0\}$ definimos*

$$L_\delta = \{\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j} \;/\; \sum_{j=1}^{d} a_j\gamma_j \geq \delta\}$$

y $F_\delta = L_\delta A$.
Para $\delta = 0$, definimos $F_\delta = \{1\}$ y $L_\delta = A$.

DEFINICION 2.6 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, $(G, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in G_+$, sean Γ y $\mathcal{S}$ el grupo y el semigrupo respectivamente generados por dichos elementos, entonces definimos para $1 \leq j \leq rang(\Gamma) = r$, p_j el ideal generado por los elementos x_k con $\gamma_k \notin$ $\notin \Gamma_{j-1}$. A los ideales del conjunto $\mathcal{D} = \{\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots, \mathsf{p}_r\}$ los llamaremos primos asociados con $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$.*

DEFINICION 2.7 *Con la notación de la definición anterior llamamos rango de A con respecto a $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ o m s sencillamente rango de A cuando no haya confusión posible, al cardinal de $\mathcal{D}$ y lo denotaremos por $rang_{\gamma_1,\ldots,\gamma_d}(A)$ o $rang(A)$.*

OBSERVACION 2.3 *El rango de A con respecto a $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ es siempre finito, positivo y menor o igual que $rang(\Gamma)$, siendo $\Gamma = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{Z}\,\gamma_j$.*

OBSERVACION 2.4 *Observemos que hay casos en que la desigualdad comentada en la observación anterior es estricta. Sea $(G, \leq) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico habitual y sea A un anillo local regular de dimensión 2, por ejemplo $\mathbb{C}[X_1, X_2]_{(x_1,x_2)}$ y tomemos $\gamma_1 = (1, 3)$ y $\gamma_2 = (1, 2)$, con lo cual se tiene que $G = \Gamma$ y por tanto $rang(\Gamma) = 2$; ahora tenemos que $\mathsf{p}_1 = (x_1, x_2)$ y $\mathsf{p}_2 = (x_1, x_2)$, con lo que $rang(A) = 1 < 2 = rang(\Gamma)$*

LEMA 2.3 *Sea* $(G, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado,* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local regular de dimensión* d*,* $\{x_1, \ldots, x_d\}$ *un sistema regular de parámetros de* A*, sean* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in G_+$ *y sea* $\mathcal{S}$ *y* Γ *el semigrupo y el grupo respectivamente generados por dichos elementos, entonces con las notaciones de la definición 2.5 se tiene que:*

1. *Si* $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ *y* $\alpha \geq \beta$ *entonces* $F_\alpha \subseteq F_\beta$
2. *Si* $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ *entonces* $F_\alpha F_\beta \subseteq F_{\alpha+\beta}$
3. *Sea* $\alpha \in \mathcal{S}$ $\alpha \neq 0$*, entonces si* $\alpha \in \mathcal{A}_j$ *tenemos que* $\sqrt{F_\alpha} = \mathfrak{p}_j$
4. *Sea* $\alpha \in \mathcal{S}$*, si definimos* $L_\alpha^+ = \{\prod_{j=1}^d x_j^{a_j} \;/\; \sum_j I_j \gamma_j > \alpha\}$*, entonces* $F_{\alpha_+} = L_\alpha^+ A$
5. *Si* $G \neq \{0\} \;\Rightarrow\; \bigcap_{\alpha \in \mathcal{S}} F_\alpha = (0)$

Demostración

1. y 2. son evidentes de la definición de los F_α. Para probar 3. observemos que si x_k es un generador de $\mathfrak{p}_j$, entonces $\gamma_k \notin \Gamma_{j-1}$, y por tanto existe un $m_k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m_k \gamma_k > \alpha$ y entonces $x_k^{m_k} \in L_\alpha$, con lo que trivialmente $\mathfrak{p}_j \subseteq \sqrt{F_\alpha}$; por otra parte sea $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in L_\alpha$, es decir, que tenemos que $\sum_{s=1}^d a_s \gamma_s \geq \alpha$ y por tanto algún γ_s en la expresión anterior tiene $a_s \neq 0$ y además $\gamma_s \notin \Gamma_{j-1}$ y entonces $x_s \in \mathfrak{p}_j$ con lo que $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in \mathfrak{p}_j$, así pues tenemos que $\mathfrak{p}_j \supseteq F_\alpha$ y por tanto $\mathfrak{p}_j \supseteq \sqrt{F_\alpha}$ y tenemos por doble inclusión la igualdad deseada.

Para probar 4. basta con ver que $L_{\alpha_+} = L_\alpha^+$; veremos esta igualdad por el procedimiento habitual de la doble inclusión:

- $\underline{L_{\alpha_+} \subseteq L_\alpha^+}$: Sea $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in L_{\alpha_+}$ entonces tenemos que $\sum_{s=1}^d a_s \gamma_s \geq \alpha_+ > \alpha$ y así pues $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in L_\alpha^+$.
- $\underline{L_\alpha^+ \subseteq L_{\alpha_+}}$: Sea $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in L_\alpha^+$ entonces tenemos que $\sum_{s=1}^d a_s \gamma_s > \alpha$, con lo que $\sum_{s=1}^d a_s \gamma_s \geq \alpha_+$; as pues $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s} \in L_{\alpha_+}$.

Con todo esto hemos probado el punto 4.

Sea ahora $\beta = \max_{s=1,\ldots d} \{\gamma_s\}$ y $\tau_m = m\beta, m \in \mathbb{N}$, entonces cada monomio en L_{τ_m} tiene grado mayor que m, por tanto $F_{\tau_m} \subseteq \mathcal{M}^m$ y $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{S}} F_\alpha \subseteq \bigcap_{m=1}^\infty F_{\tau_m} \subseteq \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{M}^m = = (0)$.

LEMA 2.4 *Sea* $(\Gamma, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado,* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local regular de dimensión* d*,* $\{x_1, \ldots, x_d\}$ *un sistema regular de parámetros de* A*,* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$ *y sea* $m = rang_{\gamma_1,\ldots,\gamma_d}(A)$*, entonces* $\forall y \in \mathcal{M},\ y \neq 0$ *se tiene que existe un polinomio* $\sum_I \lambda_I x^I$*, donde* $\lambda_I \notin \mathcal{M}$ *tal que* $y - \sum_I \lambda_I \underline{x}^I \in \mathfrak{a}$*; siendo* $\mathfrak{a}$ *es el ideal de* A *generado por todos los monomios* $\prod_{s=1}^d x_s^{a_s}$ *tales que* $\sum_{s=1}^d a_s\gamma_s > \sum_{s=1}^d i_s\gamma_s$ *para algún* I*.*

Demostración

Llamaremos $\mathfrak{p}_{m+1} = (0)A$.

Haremos la demostración por inducción en d.

- $d = 1$. En este caso se tiene que $x = \lambda {x_1}^{m'} + y'$, donde m' es el orden de y con respecto al ideal maximal de A, λ es una unidad e $y' \in \mathcal{M}^{m'+1} \subseteq \mathfrak{a}$.
- $d > 1$. Como tenemos que $y \in \mathfrak{p}_1$ e $y \notin \mathfrak{p}_{m+1}$, entonces existe un k tal que $y \in \mathfrak{p}_k$ y $y \notin \mathfrak{p}_{k+1}$.
  a. Si $\mathfrak{p}_{k+1} \neq (0)A$, entonces tenemos, aplicando la hipótesis de inducción a $y + \mathfrak{p}_{k+1}$ y al anillo $A' = \frac{A}{\mathfrak{p}_{k+1}}$, que
  $$y = \sum_I \lambda_I \underline{x}^I + y'$$
  donde los $\underline{x}^I \notin \mathfrak{p}_{k+1}$ e $y' \in \mathfrak{p}_{k+1} \subseteq \mathfrak{a}$.
  b. Si $\mathfrak{p}_{k+1} = (0)A$, consideremos
  $$t = \max\left\{j \in \mathbb{N} \,/\, y \in {\mathfrak{p}_k}^{j}\right\}$$
  $$\alpha = \min\{\gamma_j \,/\, x_j \in \mathfrak{p}_k\}$$
  $$\beta = \max\{\gamma_j \,/\, x_j \in \mathfrak{p}_k\}$$
  Ahora existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $t\beta < (r+1)\alpha$ e y se puede expresar como
  $$y = \sum_I \beta_I \underline{x}^I + y' \tag{5}$$
  donde $\underline{x}^I$ es un monomio en los generadores de $\mathfrak{p}_k$ de grado t, $y' \in \mathfrak{p}_k^{t+1}$ y los $\beta_I \notin \mathfrak{p}_k$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\beta_I + \mathfrak{p}_k$ y al anillo $A'' = \frac{A}{\mathfrak{p}_k}$, en el caso de que $\beta_I \in \mathcal{M}$, cada uno de los β_I se puede poner de la siguiente forma:
  $$\beta_I = \sum_M \lambda_{I,M} \underline{x}^M + {y_I}''$$
  donde $\underline{x}^{M(I)}$ es un monomio en los generadores del maximal que no están en $\mathfrak{p}_k$, $\lambda_{I,M}$ son unidades e ${y_I}'' \in \mathfrak{q}$, siendo $\mathfrak{q}$ el ideal de A generado por los monomios mayores que los

que aparecen en la expresión de β_I.

Llevando la ecuación (5) a la ecuación (6) tenemos que:

$$y = \sum_{I,M} \lambda_{I,M} x^{I+M(I)} + z + y'$$

con $z \in \mathfrak{a}$ y donde los distintos monomios no se anulan ya que son el producto de dos factores primos entre s .

Ahora repitiendo este razonamiento a y' y así todas las veces que hagan falta obtendremos un polinomio con las características pedidas más un elemento en $(\mathfrak{p}_k)^{r+1} \subseteq \mathfrak{a}$ y un elemento que está en $\mathfrak{a}$, debido a que $t\beta < (r+1)\alpha$, por construcción.

Veremos ahora unos resultados sobre los ideales monomiales, es decir, los ideales generados por los productos de un sistema regular de parámetros en un anillo local regular.

NOTACION 2.4 *Dado un anillo local regular $(A, \mathcal{M})$ y un elemento de A, x denotamos por $\overline{x}$ a la imagen de x en el graduado de A con respecto al ideal maximal.*

OBSERVACION 2.5 *Tanto los ideales F_α como los ideales $\mathfrak{p}_j$ son ideales monomiales.*

LEMA 2.5 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular noetheriano, v la valoración $\mathcal{M}$-ádica de A, $y_1, \ldots, y_s \in A$ $s > 1$ tales que $m = v(y_i)$, entonces $v(\sum_{i=1}^s y_i) > m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^s \overline{y_i} = 0$.*

Demostración

Supongamos que se cumple que $\sum_{i=1}^s \overline{y_i} = 0$, entonces utilizando el hecho que la inyección canónica es lineal se tiene $\overline{\sum_{i=1}^s y_i} = 0$ y utilizando la inyectividad de la aplicación canónica de $\mathcal{M}^m/\mathcal{M}^{m+1}$ en B se sigue que $\sum_{i=1}^s y_i + \mathcal{M}^{m+1} = 0$ y por tanto $\sum_{i=1}^s y_i \in \mathcal{M}^{m+1}$, con lo cual $v(\sum_{i=1}^s y_i) > m$.

Supongamos que $v(\sum_{i=1}^s y_i) > m$, entonces $\sum_{i=1}^s y_i \in \mathcal{M}^{m+1}$ y por tanto $\sum_{i=1}^s y_i + \mathcal{M}^{m+1} = 0$, con lo cual $\overline{\sum_{i=1}^s y_i} = 0$ y aplicando la linealidad de la aplicación canónica de $\mathcal{M}^m/\mathcal{M}^{m+1}$ en B tenemos que $\sum_{i=1}^s \overline{y_i} = 0$.

LEMA 2.6 *Sea $(A,\mathcal{M})$ un anillo local regular noetheriano, v la valoración $\mathcal{M}$-ádica de A, $I \subsetneq$ $\subsetneq A$ un ideal monomial de A, $\{x_1,\ldots,x_d\}$ un sistema regular de parámetros y $S =$ $= \{\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{i_j} = u_i\}$ un sistema monomial de generadores de I, entonces si $z \in I$ se tiene que existen $\gamma_i \in A$ tales que:*

$$z = \sum_i \gamma_i u_i$$

donde los $u_i \in S$ y donde $v(z) \leq v(\gamma_i u_i)$

Demostración

Como $z \in I$ tenemos que existen $\alpha_i \in A$ tales que:

$$z = \sum_i \alpha_i u_i \tag{6}$$

donde los α_i son no nulos; consideremos ahora $N = \min(v(\alpha_i u_i))$ y $M = \sum_{v(\alpha_i u_i)=N} \alpha_i u_i$ Observemos ahora que $N \leq v(z)$, ya que en caso contrario tendríamos que todos los sumandos en que podemos expresar z tendr an valoración mayor que la valoración de z, lo cual es una contradicción. Una vez hecha esta observación se hará la demostración por inducción en $t = v(z) - N$:

1. $\underline{t = 0}$: Entonces $v(z) = N$ y hemos acabado.
2. $\underline{t > 0}$: En este caso tenemos que $v(M) > N$, ya que si $v(M) = N$ tendríamos que $v(z) = N$ y que $t = 0$. Ahora aplicando el lema anterior tenemos que:

   $$\sum_{v(\alpha_i u_i)=N} \overline{\alpha_i}\overline{u_i} = 0$$

   Ahora si B es el anillo graduado de A con respecto al maximal, entonces cada $\overline{\alpha_i}$ es un elemento homogéneo en B de grado $v(\alpha_i) = a_i$ y por tanto cada α_i cumple que $\overline{\alpha_i} =$ $= \sum \overline{c_{J,i}}\overline{(\underline{x})}^{J,i}$, donde los J,i son multi-índices con $\|J,i\| = a_i$ y donde cada $\overline{c_{J,i}}$ es un elemento no nulo de $A/\mathcal{M}$.

   Podemos ahora elegir $\lambda_{J,i}$ unidades en A tales que $\overline{\lambda_{J,i}} = \overline{c_{J,i}}$ con:

   $$\sum \lambda_i u_i = 0$$

   donde $\lambda_i = \sum \lambda_{J,i} \underline{x}^{J,i}$.

   Entonces tenemos trivialmente que $\alpha_i = \lambda_i + \delta_i$ con $v(\delta_i) > a_i$ y por tanto

   $$M = \sum \delta_i u_i$$

   y sustituyendo en (7) tenemos que z se puede poner como sumandos de la forma pedida siendo la valoración de cada uno de ellos mayor que N y ahora por hipótesis de inducción tenemos el resultado deseado.

PROPOSICION 2.3 *Sea* $(G, \leq)$ *un grupo totalmente ordenado,* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local regular de dimensión* d*,* $\{x_1, \ldots, x_d\}$ *un sistema regular de parámetros de* A*, sean* $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in G_+$*, sea* $\mathcal{S}$ *y* Γ *el semigrupo y el grupo respectivamente generados por dichos elementos y sea* $z \in A$*,* $z \neq 0$*, entonces tenemos que existe* $\max\{\gamma \in \mathcal{S} \,/\, z \in F_\gamma\}$.

Demostración

Si z es una unidad, entonces claramente tenemos que dicho máximo es 0.

Podemos pues suponer que z no es unidad.

Con la misma notación del Lema 2.4 tenemos que:

$$z = \sum_I \lambda_I \underline{x}^I + y$$

donde $y \in \mathfrak{a}$

Sea ahora $\alpha = \min\{\sum_{j=1}^d I_j\gamma_j \,/\, (I_1, \ldots, I_d) = I$ para algún $I\}$; claramente tenemos que $z \in$ $\in F_\alpha$; para ver que este es el máximo buscado nos basta con ver que $z \notin F_{\alpha_+}$ y para esto recurriremos a la reducción al absurdo. Supongamos que $z \in F_{\alpha_+}$; por otra parte como $y \in F_{\alpha_+}$ esto ocurre si y solamente si $z' = \sum_I \lambda_I \underline{x}^I \in F_{\alpha_+}$ y de nuevo esto se tiene si y solamente si $z'' = \sum_{\Sigma I_j\gamma_j = \alpha} \lambda_I \underline{x}^I \in F_{\alpha_+}$.

Ahora bien, si $z'' \in F_{\alpha_+}$, entonces se tiene que:

$$z'' = \sum_J \beta_J \underline{x}^J$$

donde los monomios cumplen que $\sum_{k=1}^d J_k\gamma_k > \alpha$, y donde $ord_{\mathcal{M}}(\beta_J x^J) \geq ord_{\mathcal{M}}(z'')$ con lo cual al tomar la imagen de z'' en $grad_{\mathcal{M}}(A)$ tenemos que el resultado es un polinomio en el que todos los monomios que aparecen cumplen que $\sum_{l=1}^d s_l\gamma_l > \alpha$, pero por la otra definición de z'' tenemos que dicha imagen en un polinomio en el que todos de los monomios que lo forman cumple que $\sum_{t=1}^d r_t\gamma_t = \alpha$, lo cual es una contradicción al ser $grad_{\mathcal{M}}(A)$ un anillo de polinomios.

DEFINICION 2.8 *Sea A un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$, sea $\mathcal{S}$ el semigrupo generado por dichos elementos y sea $x \in A$, $x \neq 0$, entonces definimos $v^*(x)$ por:*

$$v^*(x) = \max\{\alpha \in S \,/\, x \in F_\alpha\}$$

LEMA 2.7 *Sea A un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$, sea $\mathcal{S}$ el semigrupo generado por dichos elementos, $z \in A$, $z \neq 0$ y v^* como en la definición anterior, entonces tenemos existe un polinomio $\sum_{\Sigma I_j \gamma_j = v^*(z)} \lambda_I \underline{x}^I$, tal que $\lambda_I \notin \mathcal{M}$ y tal que $z - \sum_{\Sigma I_j \gamma_j = v^*(z)} \lambda_I \underline{x}^I \in F_{v^*(z)_+}$*

Demostración

Se obtiene trivialmente considerando en el polinomio del lema 2.4 solamente aquellos monomios que cumplen que $\sum_{j=1}^{d} I_j \gamma_j = v^*(z)$.

PROPOSICION 2.4 *Sea A un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, $(\Gamma, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in \Gamma_+$, sea $\mathcal{S}$ el semigrupo generado por dichos elementos y sea v^* como en la definición 2.8, entonces tenemos que:*

1. *Si $x, y \in A - \{0\}$ tales que $x \neq -y$ entonces $v^*(x + y) \geq \min\{v^*(x), v^*(y)\}$*
2. *Sea $z = \prod_{j=1}^{d} x_j^{I_j}$ entonces $v^*(z) = \sum_{j=1}^{d} I_j \gamma_j$*
3. *Sea $z = \sum_I \lambda_I x^I$ con $\lambda_I \notin \mathcal{M}$ entonces $v^*(z) = \min\{v^*(x^I)\}$*
4. *Si $z, y \in A - \{0\}$ entonces tenemos que $v^*(zy) = v^*(z) + v^*(y)$*

Demostración

1. Trivialmente se tiene que $x \in F_{v^*(x)}$ y que $y \in F_{v^*(y)}$; sea ahora $\alpha = = \min\{v^*(x), v^*(y)\}$, entonces tenemos que $x, y \in F_\alpha$ y como F_α es un ideal, $x + y \in F_\alpha$ y por tanto $v^*(x + y) \geq \alpha = \min\{v^*(x), v^*(y)\}$

2. Sea $\alpha = \sum_{j=1}^{d} I_j \gamma_j$. Es evidente que $z \in F_\alpha$; para probar que $v^*(z) = \alpha$ nos basta ver que $z \notin F_{\alpha_+}$ y para esto utilizaremos la reducción al absurdo. Supongamos, pues, que $z \in F_{\alpha_+}$

entonces tenemos que:

$$z = \sum_J \beta_J \underline{x}^J$$

donde $\sum_{k=1} j_k \gamma_k \geq \alpha_+ > \alpha$ y donde $ord_{\mathcal{M}}(\beta_J x^J) \geq ord_{\mathcal{M}}(z)$.
Ahora tenemos que:

$$\prod_{j=1}^{d} \overline{x_j}^{I_j} = \bar{z} = \sum_{o(\beta_J x^J)=o(z)} \overline{\beta_J}\, \overline{\underline{x}^J}$$

lo cual es una contradicción por ser el $grad_{\mathcal{M}}(A)$ un anillo de polinomios en las $\{\overline{x_j}\}$.
3. Sea $\alpha = \min\{v^*(\underline{x}^I)\}$. Claramente se tiene que $z \in F_\alpha$; veamos ahora que $z \notin F_{\alpha_+}$. Haremos la demostración por reducción al absurdo y supondremos, pues, que $z \in F_{\alpha^+}$, con lo que se tiene que:

$$z = \sum_J \beta_J \underline{x}^J$$

donde los $\beta_J \in A$, con $\sum_{k=1}^{d} J_k \gamma_k \geq \alpha_+ > \alpha$ y donde $ord_{\mathcal{M}}(\beta_J \underline{x}^J) \geq ord_{\mathcal{M}}(z)$. Tomando imágenes en $grad_{\mathcal{M}}(A)$ usando la misma notación para dichas imágenes tantas veces vista, tenemos que:

$$\sum_{o(\underline{x}^I)=o(z)} \overline{\lambda_I}\, \overline{\underline{x}^I} = \bar{z} = \sum_{o(\beta_J \underline{x}^J)=o(z)} \overline{\beta_J}\, \overline{\underline{x}^J}$$

lo cual es una contradicción al ser $grad_{\mathcal{M}}(A)$ un anillo de polinomios en las $\{\overline{x_j}\}$.
4. Sean

$$\alpha = v^*(z)$$
$$\beta = v^*(y)$$
$$\gamma = \min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}$$

con lo que tenemos trivialmente que $z \in F_\alpha$ y que $y \in F_\beta$ y por tanto $zy \in F_\alpha F_\beta \subseteq F_{\alpha+\beta}$ por el Lema 2.3, con lo cual tenemos que $v^*(zy) \geq v^*(z) + v^*(y)$. Ahora por el Lema 2.10 tenemos que existen dos polinomios en las x_j con coeficientes unidades en A tales que:

$$z = \sum_I \epsilon_I \underline{x}^I + z'$$
$$y = \sum_J \delta_I \underline{x}^I + y'$$

donde $v^*(\underline{x}^I) = v^*(z)$, $v^*(\underline{x}^J) = v^*(y)$, $v^*(z') > \alpha$, $v^*(y') > \beta$ y $\epsilon_I, \delta_J \notin \mathcal{M}$, con lo que se tiene trivialmente que:

$$zy = \left(\sum_I \epsilon_I \underline{x}^I\right)\left(\sum_J \delta_J \underline{x}^J\right) + w'$$

donde $v(w') > \alpha + \beta$. Ahora para cada I y para cada J definimos $M = I + J$ y $\phi_M = \sum_{I+J=M} \epsilon_I \delta_J$ con lo que nos queda que:

$$zy = \sum_M \phi_M \underline{x}^M + w' \tag{7}$$

Ahora bien todos los M para los que $\phi_M \in \mathcal{M} = F_\gamma$ se tiene que $\phi_M \underline{x}^M \in F_{\alpha+\beta+\gamma}$ con lo que:

$$zy = \sum_{\substack{M \\ \phi_M \notin \mathcal{M}}} \phi_M \underline{x}^M + w'' \tag{8}$$

siendo

$$w'' = w' + \sum_{\substack{M \\ \phi_M \in \mathcal{M}}} \phi_M \underline{x}^M$$

y por tanto se tiene que $v^*(w'') > \alpha + \beta$; ahora ordenando los elementos del sistema de parámetros con el orden lexicográfico habitual tenemos ordenados todos los monomios; ahora es fácil ver que el menor en este orden de los que aparecen en la expresión (7) cumple que el elemento ϕ_M por el que va multiplicado es una unidad en A y por tanto la suma que aparece en (8) es no vacía y por la parte 3. se tiene que:

$$v^*(\sum_{\substack{M \\ \phi_M \notin \mathcal{M}}} \phi_M \underline{x}^M) = \alpha + \beta$$

Ahora bien $zy \in F_{(\alpha+\beta)^+}$ si y solamente si $\sum_{\phi_M \notin \mathcal{M}} \phi_M x^M \in F_{(\alpha+\beta)^+}$ lo cual es una contradicción por 3.

TEOREMA 2.2 *Sea A un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A, $(G, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, $\gamma_1, \ldots, \gamma_d \in G_+$, Γ y $\mathcal{S}$ el grupo y el semigrupo, respectivamente, generados por dichos elementos, entonces existe una única valoración monomial de $\mathcal{K}$ que domina a A tal que $v(x_i) = \gamma_i$ $i = 1, \ldots, d$.*

Además dicha valoración monomial cumple que el semigrupo de valores en A es $\mathcal{S}$ y el grupo de valores es Γ

Demostración

Por lo visto en la Proposición 2.4 tenemos que v^* se puede extender a una valoración monomial v y claramente por el apartado 2. de dicha proposición $v(x_j) = \gamma_j \; j = 1, \ldots, d$, con lo cual tenemos probada la existencia

Para la unicidad supongamos que tenemos otra valoración monomial de $\mathcal{K}$ que domina a A, w, tal que $w(x_i) = \gamma_i \; i = 1, \ldots, d$; veamos que v y w coinciden sobre los elementos de $A - \{0\}$ con lo que tendremos que ambas valoraciones son iguales.

Sea $z \in A - \{0\}$; se nos presentan dos casos:

1. $\underline{z \notin \mathcal{M}}$: Como ambas valoraciones dominan a A entonces se tiene trivialmente que $v^*(z) =$ $= v(z) = w(z) = 0$.
2. $\underline{z \in \mathcal{M}}$: En este caso utilizando el Lema 2.4 tenemos que:
$$z = \sum_I \lambda_I x^I + x'$$
donde $\lambda_I \notin \mathcal{M}$, $x' \in F_{v(x)^+}$ y $v(x^I) = v(z)$. Ahora como w y v coinciden sobre los monomios de grado 1, coinciden sobre todos los monomios y por tanto se tiene que $w(F_{v(z)^+}) = v(F_{v(z)^+}) > v(z)$ y que $v(x^I) = w(x^I)$; por otra parte como w es una valoración monomial tenemos que:
$$v(z) = v(\sum_I \lambda_I x^I) = w(\sum_I \lambda_I x^I) = w(z)$$
y por tanto que $v(z) = w(z)$.

Con todo esto hemos llegado a que existe una única valoración monomial que domina a A, una vez fijados los valores de los elementos del sistema de parámetros elegido; las otras proposiciones que contiene el teorema son triviales por construcción.

DEFINICION 2.9 *Sea A un dominio noetheriano, $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de A, v una valoración de $\mathcal{K}$ centrada en A, $(\Gamma, \leq)$ su semigrupo de valores en A, entonces para cada $\alpha \in \Gamma$ definimos*

$$J_\alpha = \{x \in A \,/\, v(x) \geq \alpha\}$$
$$J_\alpha^+ = \{x \in A \,/\, v(x) > \alpha\}$$

OBSERVACION 2.6 *Observemos que como v está centrada en A los conjuntos anteriormente definidos son trivialmente ideales de A.*

DEFINICION 2.10 *Sea A un dominio noetheriano, $\mathcal{K}$ su cuerpo de fracciones, v una valoración de $\mathcal{K}$ centrada en A, $v(A)$ el semigrupo de valores en A, entonces definimos $gr_v(A)$ como el anillo*

$$\bigoplus_{\alpha \in v(A)} \frac{J_\alpha}{J_\alpha^+}$$

OBSERVACION 2.7 *Observemos que para las valoraciones monomiales que hemos construido (y que por el teorema 2.2 son todas las valoraciones monomiales posibles que dominan a A) se tiene que $F_\alpha = J_\alpha$ y que $J_\alpha^+ = F_{\alpha^+}$*

TEOREMA 2.3 *Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros, $\mathcal{K}$ cuerpo de fracciones, $\mathbb{K}$ su cuerpo residual, $(G, \leq)$ un grupo totalmente ordenado, y v una valoración de $\mathcal{K}$ en G que domina a A, y sean $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}$ las imágenes del anterior sistema de parámetros en $gr_v(A)$, entonces tenemos que las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *v es una valoración monomial para $\{x_1, \ldots, x_d\}$.*
2. *$gr_v(A) = \mathbb{K}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}]$.*

Demostración

Al grupo de valores de v lo denotaremos por Γ. Veamos que 1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que v es monomial, entonces por el teorema 2.2 tenemos que el semigrupo de valores en A está generado por las imágenes por v del sistema de parámetros fijado; a dichas imágenes las denotaremos respectivamente por $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$.

Para tener la igualdad de 2. necesitamos encontrar un isomorfismo ϕ de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d]$ en $gr_v(A)$ tal que $\phi(X_j) = \overline{x_j}$ $j = 1, \ldots, d$, donde las X_j son indeterminadas.

Sea $P(X_1, \ldots, X_d) = \sum_I (\lambda_I + \mathcal{M}) x^I$ un elemento cualquiera de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d]$, entonces para cada $\alpha \in v(A)$ definimos:

$$P_\alpha(X_1, \ldots, X_d) = \sum_{\Sigma I_j \gamma_j = \alpha} (\lambda_I + \mathcal{M}) \underline{x}^I$$

donde supondremos la suma igual a 0 si ésta es vacía.

Ahora nos encontramos en condiciones de definir el isomorfismo ϕ:

$$\begin{array}{rcl}\phi : \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_d] & \longrightarrow & gr_v(A) \\ P(X_1,\ldots,X_d) & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha\in v(A)} P_\alpha(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d})\end{array}$$

Es evidente de la propia definición de ϕ que éste es un homomorfismo de anillos. Para ver que es un isomorfismo nos basta pues con probar que es inyectivo y supreyectivo.

- ϕ es inyectiva: Sean $P(X_1,\ldots,X_d), Q(X_1,\ldots,X_d) \in \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_d]$ tales que $Q(X_1,\ldots,X_d) \neq P(X_1,\ldots,X_d)$, entonces existe un $\alpha\in\Gamma$ de forma que $P_\alpha(X_1,\ldots,X_d) \neq$ $\neq Q_\alpha(X_1,\ldots,X_d)$, ya que, en caso contrario, es trivial que $P(X_1,\ldots,X_d) = Q(X_1,\ldots,X_d)$. Con todo esto tenemos que existen índices J con $\sum_{k=1}^d j_k\gamma_k = \alpha$ y unidades en A, a_J tales que:

$$P_\alpha(X_1,\ldots,X_d) - Q_\alpha(X_1,\ldots,X_d) = \sum_J (a_J + \mathcal{M})\underline{x}^J$$

  y por tanto tenemos que:

$$P_\alpha(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d}) - Q_\alpha(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d}) = \sum_J (a_J + \mathcal{M})\overline{\underline{x}}^J$$

  pero como v es monomial tenemos que la suma de la derecha es distinta de 0 con lo cual $P_\alpha(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d}) \neq Q_\alpha(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d})$ y entonces $\phi(P)\neq\phi(Q)$ y tenemos que ϕ es inyectiva.

- ϕ es sobreyectivo: Sea $\oplus_{\alpha\in\Gamma}\overline{z_\alpha}$ con $z_\alpha\in F_\alpha$. Para los α tales que $v(z_\alpha)>\alpha$ (lo cual ocurre con todos excepto una cantidad finita) hacemos $P_\alpha(X_1,\ldots,X_d)=0$ y para aquellos z_α tales que $v(z_\alpha)=\alpha$ se nos presentan dos casos:

  - $\alpha = 0$: Entonces z_α es una unidad y hacemos $P_0(X_1,\ldots,X_d) = z_0$.
  - $\alpha\neq 0$: Entonces $z_\alpha\in\mathcal{M}$ y $z_\alpha\neq 0$, ya que $v(z_\alpha)=\alpha\neq\infty$, con lo cual por el Lema 2.4 se tiene que:

$$\overline{z_\alpha} = \sum_{\substack{I \\ \Sigma I_j\gamma_j=\alpha}} (\lambda_I + \mathcal{M})\overline{\underline{x}}^I$$

    Por lo que basta tomar

$$P_\alpha(X_1,\ldots,X_d) = \sum_{\substack{I \\ \Sigma I_j\gamma_j=\alpha}} (\lambda_I + \mathcal{M})\underline{x}^I$$

    Si hacemos $P = \sum_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$ se tiene que $\phi(P) = \oplus_{\alpha\in\Gamma}\overline{z_\alpha}$ y por tanto ϕ es sobreyectiva.

    Para ver que $gr_v(A) = \mathbb{K}[\overline{x_1},\ldots,\overline{x_d}]$, sólo nos queda por comprobar que $\phi(X_j) = \overline{x_j}$ $j=1,\ldots,d$, pero esto es evidente por la definición de ϕ.

Veamos que 2. $\Rightarrow$ 1. Sea $z = \sum_I \lambda_I x^I$ donde los λ_I son unidades en A y sea $\alpha = \min\{v(x^I)\}$ tenemos que probar que $v(z) = \alpha$ o lo que es lo mismo que $z \in J_\alpha$ y que $z \notin J_\alpha^+$. Como por la observación 2.6 se tiene que tanto J_α y J_α^+ son ideales de A entonces tenemos que claramente $z \in J_\alpha$ y que $z \in J_\alpha^+$ si y solamente

$$y = \sum_{\substack{I \\ v(x^I)=\alpha}} \lambda_I \underline{x}^I \in J_\alpha^+ \tag{9}$$

Ahora bien tomando imágenes en $gr_v(A)$ tenemos que $y \in J_\alpha^+$ si y solamente si se tiene que:

$$\sum_{\substack{I \\ v(x^I)=\alpha}} \overline{\lambda_I} \overline{\underline{x}}^I = 0$$

y como $gr_v(A)$ es igual a $\mathbb{K}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}]$ tenemos que esto es equivalente a decir que $\overline{\lambda_I}$ es cero para todo I, o lo que es lo mismo que $\lambda_I \in \mathcal{M}$, lo cual es una contradicción a menos que la suma en (9) sea vacía, lo cual es imposible ya que $\alpha = \min\{v(x^I)\}$.

A continuación veremos que para calcular el cierre completo de los ideales monomiales solamente necesitamos las valoraciones monomiales.

DEFINICION 2.11 *Dado $I \subseteq A$ decimos que I es un ideal monomial si existe un sistema finito de generadores de I formado por monomios en $\mathcal{P}$.*

TEOREMA 2.4 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial y sea $\mathcal{V}'$ el conjunto de todas las valoraciones monomiales que dominan a A. Entonces se tiene que:*

$$\overline{I} = \bigcap_{v \in \mathcal{V}'} \{z \in A \,/\, v(z) \geq v(I)\}$$

Demostración

Sea $J = \bigcap_{v \in \mathcal{V}'} \{z \in A \,/\, v(z) \geq v(I)\}$ Claramente tenemos que $\overline{I} \subseteq J$. Sea z tal que $z \notin \overline{I}$, y $z \in J$, entonces existe una valoración que domina a A, w, tal que $w(z) < w(I)$. Consideremos ahora la valoración monomial que domina a A tal que $v(x_j) = w(x_j)$; claramente tenemos que $v(I) = w(I)$, por otra parte por el lema 2.4 tenemos que:

$$z = \sum_K \lambda_K \underline{x}^K + y$$

donde $v(\underline{x}^K) = v(z)$ e $y \in F_{v(z)^+}$. Por tanto tenemos que $w(z) \geq v(z)$ y ahora como $z \in J$

tenemos que $w(z) \geq v(z) \geq v(I) = w(I)$; absurdo.

Así pues, se tiene que si I es un ideal monomial nos bastan las valoraciones monomiales para describir la clausura entera del idea. Esta situación nos presenta un puente entre el álgebra conmutativa y la combinatoria. Dicho puente se puede precisar aún mucho más con la ayuda de las regiones y poliedros de Newton. Así, en la siguiente sección introduciremos las regiones de Newton de un ideal monomial, que nos permitirán probar que en el caso en que además de ser monomial, dicho ideal sea de soporte finito, nos bastan unas valoraciones monomiales que dominen a A muy concretas, de hecho con un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$.

2.2 Regiones de Newton e ideales monomiales radicales para el maximal.

En lo que queda de capítulo identificaremos la estructura vectorial de $\mathbb{R}^d \supseteq \mathbb{Q}^d \supseteq \mathbb{Z}^d \supseteq \mathbb{N}^d$ con la estructura de espacio afín con origen de coordenadas en el punto $O = (0, \ldots, 0)$ y a cada elemento de $\mathbb{R}^d$ lo llamamos punto.

Bajo esta identificación podemos transladar las operaciones del espacio vectorial a la estructura afín de la forma siguiente:

(i) Dado un punto $P \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $T = \lambda P$ como el único punto que cumple que $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT}$.

(ii) Dados $P, Q \in \mathbb{R}^d$ definimos $T' = P + Q$ como el único punto que cumple que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = = \overrightarrow{OT}$

Un conjunto de puntos en $(\mathbb{R}^+)^d$, digamos $P_1, \ldots, P_m$, $P_i \neq O, 1 \leq i \leq m$, se dice de rango máximo si los vectores $\left\{\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_m}\right\}$ generan $\mathbb{R}^d$ como espacio vectorial. Claramente se tiene que $d \leq m$.

Dado un conjunto de puntos en $\mathbb{N}^d \subseteq \mathbb{R}^d$ de rango máximo $\{P_1, \ldots, P_m\}$ definimos la región de Newton, $\mathcal{R}$, asociada a los puntos $\{P_1, \ldots, P_m\}$ como $convex(\cup_{i=1}^m [P_i + (\mathbb{R}^+)^d])$ y a los puntos $\{P_1, \ldots, P_m\}$ se les llama generadores de $\mathcal{R}$.

Es evidente que si $P \in \mathcal{R}$ y $Q \in (\mathbb{R}^+)^d$ entonces $P + Q \in \mathcal{R}$ y que si tenemos dos regiones de Newton $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ tales que $\mathcal{R} \cap \mathbb{N}^d = \mathcal{R}' \cap \mathbb{N}^d$ se tiene que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$

Consideremos un conjunto de puntos $\{P_1, \ldots, P_m\}$ en $\mathbb{N}^d$ tales que $P_i \neq O$ y además existe uno sobre cada uno de los ejes canónicos de $\mathbb{R}^d$. Claramente $\left\{\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_m}\right\}$ generan $\mathbb{R}^d$ como un espacio vectorial y por tanto los puntos $\{P_1, \ldots, P_m\}$ son de rango máximo y podemos construir con ellos una región de Newton.

Este será el caso interesante en esta Memoria y por tanto a partir de ahora nos limitaremos a regiones de Newton que tengan un conjunto de generadores que cumplan esta condición.

Se puede ver que la región de Newton $\mathcal{R}$ generada por los puntos $\{P_1, \ldots, P_m\}$ se puede describir como los puntos de la forma:

$$\mathcal{R} = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \;/\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \geq 1,\; \lambda_i \geq 0 \;\forall i = 1, \ldots, m\}$$

Además se prueba que si $Q \in \mathcal{R} \cap \mathbb{Q}^d$ entonces los λ_i anteriores se pueden elegir en $\mathbb{Q}$.

Esta propiedad será básica en nuestro estudio del cierre completo de ideales monomiales de soporte finito.

Otra de las propiedades que cumple estas regiones de Newton es que la suma de dos regiones de Newton es una región de Newton y además se puede generar por la suma de los generadores de cada una de ellas.

A esta operación entre regiones de Newton la denotaremos por $+$.

DEFINICION 2.12 *Sea $(A,\mathcal{M})$ un anillo local regular, $\mathcal{P}=\{x_1,\ldots,x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, sea $I \subsetneq A$ un ideal generado por monomios en $\mathcal{P}$ tal que $\sqrt{I}=\mathcal{M}$ y S un sistema de generadores monomial de I, entonces a la región de Newton generada por los puntos $P_i=(P_{1,i},\ldots,P_{d,i})$ tales que $\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{P_{j,i}} \in S$ se le denota por $\mathcal{R}_S$.*

Observemos que para que esta definición tenga sentido es necesario es necesario que el conjunto de los P_i tenga rango máximo, pero esto es evidente ya que I es radical para el maximal.

PROPOSICION 2.5 *Sea $(A,\mathcal{M})$ un anillo local regular, $\mathcal{P}=\{x_1,\ldots,x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A, sea $I \subsetneq A$ un ideal generado por monomios en $\mathcal{P}$ tal que $\sqrt{I}=\mathcal{M}$ y $S=\{u_j\}$ y $S'=\{w_k\}$ dos sistemas monomiales de generadores de $I \Rightarrow \mathcal{R}_S=\mathcal{R}_{S'}$. A dicha región de Newton se le llama región de Newton asociada a I y se le denota por $\mathcal{R}_I$.*

Demostración

En primer lugar observemos que basta con probar que $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_{S'}$, ya que por simetría se tendrá el resultado pedido.

Sea $Q=(a_1,\ldots,a_d)$ tal que $\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j} \in S$, entonces se tiene que:

$$\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j} = \sum \lambda_k w_k$$

donde $\lambda_k \in A$ y $ord(\lambda_k w_k) \geq \sum a_j$. Ahora tomando clases en el graduado con respecto al maximal tenemos que existe un elemento de S', digamos $\prod_{j=1}^{d} x_j^{i_j}$, que cumple que $i_j \leq$ $\leq a_j \; \forall j=1,\ldots,d$, con lo que tenemos que $(a_1,\ldots,a_d) \in P+(\mathbb{R}^{+})^{d}$ para algún $P \in \mathcal{R}_{S'}$, y entonces $\mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_{S'}$.

NOTACION 2.5 *A partir de este momento, si no se expecifica ninguna otra cosa, A será un anillo local regular noetheriano de dimensión d con maximal $\mathcal{M}$, $\mathcal{P} = \{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros, B ser el anillo graduado de A con respecto al maximal, v la valoración $\mathcal{M}$-ádica de A, e I un ideal monomial de A cuyo radical será el maximal.*

TEOREMA 2.5 *Sea $I \subsetneq A$, entonces*

$$\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{b_j} \in \overline{I} \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_d) \in \mathcal{R}_I \cap \mathbb{N}^d$$

Demostración

Supongamos que $z = \prod_{j=1}^{d} {x_j}^{b_j} \in \overline{I}$, entonces para algún m natural y positivo tenemos que

$$z^m = \sum_{j=1}^{m} a_j z^{m-j} \tag{10}$$

donde $a_j \in I^j$ y donde $ord_{\mathcal{M}}(a_j z^{m-j}) \geq ord_{\mathcal{M}}(z^m)$.

Esto nos da una relacción del tipo (10) de dependencia integra de $\overline{z}$ sobre J, siendo J el ideal en $B = gr_{\mathcal{M}}(A)$ generado por las imagenes de los monomios que forman parte de I y por tanto $\overline{z}$ es integro sobre J.

Elijamos m de tal forma que sea minimal entre todos los naturales positivos para los que podemos establecer una relacción de depencia de $\overline{z}$ sobre J, digamos

$$\overline{z}^m + \overline{a_1}\ \overline{z}^{m-1} + \ldots + \overline{a_m} = 0$$

Como $\overline{z}$ es un monomio, entonces podemos encontrar una relación de dependencia sobre J de grado m donde podemos suponer que los $\overline{a_j}$ son el producto de un elemento de $A/\mathcal{M}$ por un monomio y en la cual se debe tener por minimalidad de m que $\overline{a_m} \neq 0$.

Ahora ya que B es un anillo de polinomios y debido a la minimalidad de m es necesario que $\overline{a_m} = \lambda \overline{z}^m$, con $\lambda \notin \mathcal{M}$ y ya que z^m es un monomio entonces se ha de tener que $z^m \in I^m$ y por lo tanto tenemos que $m(b_1, \ldots, b_d) = t_1 P_1 + \ldots + t_h P_h + Q$, donde los puntos P_j corresponden a monomios generadores de I y por tanto estan en $\mathcal{R}_I$, los $t_j \in \mathbb{N}$ con $\sum t_j = m$ y $Q \in \mathbb{N}^d$, por lo que $(b_1, \ldots, b_d) \in \mathcal{R}_I \cap \mathbb{N}^d$.

Si $(b_1, \ldots, b_d) \in \mathcal{R}_I \cap \mathbb{N}^d$ entonces existen números naturales t_j y m tales que $m(b_1, \ldots, b_d) =$ $= t_1 P_1 + \ldots + t_h P_h + Q$ con $\sum t_j = m$, donde cada P_j corresponde a un monomio en I y $Q \in$ $\in \mathbb{N}^d$ por lo que $z^m \in I^m$ y se tiene entonces una ecuación de dependencia íntegra en I y $z \in \overline{I}$.

Nótese que tiene sentido hablar de sistemas minimales de generadores monomiales ya que tanto I como $\mathcal{M}$ son ideales monomiales y por lo tanto también lo es $I\mathcal{M}$. Ahora por el lema de Nakayama los sistemas de generadores con menor número de elementos son aquellos que forman una base del espacio vectorial $\frac{I}{I\mathcal{M}}$. M s a n un conjunto de elementos de I es un sistema de generadores si y solamente si es un sistema de generadores de $\frac{I}{I\mathcal{M}}$.

Observemos ahora que la región de Newton asociada a un ideal I, $\mathcal{R}_I$, es un poliedro de dimensión máxima y por tanto se puede poner como la intersección de regiones dadas por desigualdades del tipo $\sum_{j=1}^{d} a_j X_j \geq b$. Ahora si buscamos el conjunto minimal de dichas regiones, vemos que los a_j deben ser no negativos, ya que si algún $a_k < 0$ entonces existir a un $t \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que el punto $t\overrightarrow{e_k}$ está en $\mathcal{R}_I$ y además $ta_k < b$. Esto nos dice además que $b \geq 0$, ya que en caso contrario se tendría una región superflua. Ahora si $b = 0$ las desigualdades no superfluas son las del tipo $X_j \geq 0$ y si $b > 0$ tenemos que los $a_j > 0$ puesto que en otro caso cualquiera podríamos razonar como antes y encontrar puntos de la región de Newton que no cumplirían dichas desigualdades.

Consideremos ahora el conjunto de puntos $P_1, \ldots, P_m$ el conjunto de puntos que nos han servido para generar la región de Newton $\mathcal{R}_I$. Si ahora tenemos que existe un k tal que:

$$P_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \lambda_j P_j$$

con $\lambda_j \geq 0$ y $\sum \lambda_j \geq 1$, entonces podemos eliminar dicho punto del conjunto de generadores y tendríamos la misma región de Newton. Además estos puntos que no podemos eliminar son, necesariamente, vértices de la región de Newton.

Al revés, si tenemos un vértice de la región de Newton en consideración debe estar siempre en todo sistema de generadores de dicha región y por tanto tenemos que los a_j y los b son números naturales, en el caso de regiones de Newton provinientes de ideales monomiales.

Ahora a cada una de dichas desigualdes esenciales distintas de las del tipo $X_j \geq 0$ se le puede asociar una valoración monomial que domine a A de la siguiente forma $v(x_j) = a_j$ y entonces tenemos que $v(I) = b$. Al conjunto de dichas valoraciones las llamaremos valoraciones esenciales de I y las denotaremos por $\mathcal{VE}(I)$.

Es fácil ver que para cualquiera de estas valoraciones esenciales se tiene que el grupo de valoración es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$ (de hecho es una consecuencia trivial del algoritmo de la división en $\mathbb{N}$)

PROPOSICION 2.6 *Sea $I \subseteq A$ entonces se tiene que:*

$$\overline{I} = \bigcap_{v \in \mathcal{VE}(I)} \{x \in A \,/\, v(x) \geq v(I)\}$$

Además $\overline{I}$ es el ideal de A generado por todos los monomios cuyos puntos asociados están en $\mathcal{R}_I$.

Demostración

Sea D igual a $\bigcap_{v \in \mathcal{VE}(I)} \{x \in A / v(x) \geq v(I)\}$ y J el ideal de A generado por todos los monomios cuyos puntos asociados están en $\mathcal{R}_I$. Es evidente entonces que $J \subseteq \overline{I} \subseteq D$.
Sea $z \in D$. Entonces, como el cardinal de $\mathcal{VE}(I)$ es finito, existe un $t \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier valoración, v, en $\mathcal{VE}(I)$ se tiene $tv(\mathcal{M}) > v(I)$, y por tanto los puntos obtenidos por medio de los exponentes de los monomios de grado t están todos en $\mathcal{R}_I$ y se tiene que $\mathcal{M}^t \subseteq J$.
Por otra parte es evidente que

$$z = \sum_M \lambda_M \underline{x}^M + y$$

donde $y \in \mathcal{M}^t$ y donde λ_M es una unidad en A y $\|M\| < t$ con lo que para ver que $z \in J$ es bastante con probar que $\sum_M \lambda_M \underline{x}^M$ está en J. Ahora ya que $z \in D$ se tiene que para cualquier $v \in \mathcal{VE}(I)$, $v(z) \geq v(I)$. Ahora como $v(y) > v(I)$, entonces tenemos que $\sum_M \lambda_M \underline{x}^M \in D$, pero como las valoraciones de $\mathcal{VE}(I)$ son monomiales, entonces se tiene que cada uno de los $\underline{x}^M \in D$ y en J, con lo que se tiene que $J \subseteq \overline{I} \subseteq D \subseteq J$ y por tanto $J = \overline{I} = D$.

COROLARIO 2.3 *Sea $I, J \subsetneq A$ ideales monomiales de A cuyo radical es el maximal. Consideremos un sistema regular de parámetros de A, $\{x_1, \ldots, x_d\}$, entonces $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_J$ si y solamente si $\overline{I} = \overline{J}$.*

PROPOSICION 2.7 *Sea $\mathcal{B}_A = \{I \subseteq A \,/\, I$ es un ideal monomial completo cuyo radical es $\mathcal{M}\}$, entonces existe una biyección entre $\mathcal{B}_A$ y el conjunto $\mathcal{A}_d$ de las regiones de Newton en dimensión d.*

Demostración. Consideremos la aplicación $\phi : \mathcal{B}_A \longrightarrow \mathcal{A}_d$, dada de la siguiente manera: si $I \in \mathcal{B}_A$, entonces $\phi(I) = \mathcal{R}_I$; por el corolario anterior tenemos que ϕ es inyectiva.

Para probar que ϕ es sobreyectiva tomemos una región de Newton cualquiera, digamos $\mathcal{R}$ entonces consideremos el ideal J generado por los monomios $\prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j}$ tales que $(a_1, \ldots, a_d) \in \in \mathcal{R} \cap \mathbb{N}^d$, donde $\{x_1, \ldots, x_d\}$ es un sistema regular de parámetros de A; entonces por la definición de región de Newton tenemos que el radical de I es el maximal de A y por definición tenemos que I es monomial, por otra parte es evidente que $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}$, y además I es completo por el corolario 2.3.

DEFINICION 2.13 *En $\mathcal{B}_A$ se puede definir un producto $*$ de la siguiente forma: dados $I, J \in \mathcal{B}_A$, definimos $I * J = \overline{IJ}$.*

OBSERVACION 2.8 *La operación anteriormente definida sobre $\mathcal{B}_A$ cumple que $\phi(I * J) = = \phi(I) + \phi(J)$, es decir, $\mathcal{R}_{I*J} = \mathcal{R}_I + \mathcal{R}_J$*

Capítulo3
El semigrupo tórico especial

En los anteriores capítulos hemos tenido una visión general de los ingredientes que tienen que ver con la teoría de Zariski de ideales completos, con el énfasis puesto en la consideración de dicha teoría en dimensiones superiores. En este capítulo, se verá en primer lugar que dicho intento es irrealizable, siempre y cuando pretendamos extender la teoría de Zariski a todos los ideales completos , pero que si tratamos con un subconjunto de ideales completos la teoría de Zariski se extiende a dimensiones superiores.

Este conjunto de ideales, es lo que hemos demoninado el semigrupo tórico especial de un anillo local regular. Decimos semigrupo en vez de subconjunto ya que se tratará de un subsemigrupo del semigrupo de ideales completos con la operación $*$.

En la primera sección estudiaremos la relación que existe entre las constelaciones tóricas, es decir, sucesiones de T-órbitas de dimensión cero en variedades tóricas obtenidas a partir de la primera por sucesivas explosiones en dichas órbitas.

En primer lugar podemos establecer una biyección entre cada sucesión de enteros con unas determinadas condiciones y una cadena tórica. Por otra parte a cada constelación tórica se le puede asociar un grafo en el que los vértices se corresponden con los puntos de la constelación y dos vértices están unidos si y solamente si uno es la imagen de otro por las aplicaciones canónicas y no existe otro punto intermedio que la imagen del de índice menor vía dichas aplicaciones.

Utilizando estos dos conceptos se tiene una codificación de las constelaciones tóricas como árboles d-narios, donde d es la dimensión de la constelación tórica. Los pesos de estos árboles determinan la elección de una T-órbita.

A partir de esta asociación observamos que las valoraciones monomiales de Rees de un ideal monomial, que como ya hemos visto son valoraciones en los enteros, alcanzan el mínimo de los valores en un sistema de parámetros en un único par metro. El ndice en el cual se da este mínimo determina la clase de dicha valoración.

Probamos, a continuación, una serie de propiedades aritméticas que cumplen estas valoraciones y que nos permitiran, en sucesivas secciones y capítulos, extender completamente la teoría de Zariski a los ideales del semigrupo tórico especial.

Se muestra que si un cluster cumple la desigualdades de proximidad entonces existe un ideal monomial completo de soporte finito que realiza dicho cluster. A través de este hecho mostramos que existe una biyección entre el conjunto de ideales monomiales completos de soporte finito y el conjunto de árboles d-narios con pesos en los vértices que cumplen las desigualdades de proximidad.

Obtenemos en esta sección, a continuación, utilizando la técnica de los árboles, una serie de contrejemplos, que nos permiten probar, a diferencia de lo que hasta ahora se creía, que no se puede extender los resultados de la teoría de Zariski a todos los ideales monomiales completos de soporte finito.

En la segunda sección estudiaremos en profundidad una clase especial de ideales monomiales completos de soporte finito, aquellos que sus únicas valoraciones de Rees distintas de la función orden con respecto al maximal son valoraciones monomiales de clase i, es decir, son ideales cuyo árbol asociado tiene una única rama saliendo desde la raíz y dicha rama esta etiquedata con el número i. Estos ideales los denotamos ideales monomiales completos de clase i.

Probamos en esta sección que el producto de ideales monomiales completos de soporte finito de distinta clase es completo y que la transformada estricta de estos ideales es también un ideal completo. Desgraciadamente el producto de dos ideales de la misma clase no es, en general, completo, como se ve en el último ejemplo de esta sección.

Llegados a este punto, en la siguiente sección, introducimos el semigrupo tórico especial, que es el semigrupo generado por unos ideales monomiales completos de soporte finito de clase i, que llamaremos ideales esenciales y que están en biyección con el conjunto de puntos infinitamente próximos a uno dado.

Probamos que para los ideales del semigrupo tórico especial se puede extender la teoría de Zariski a dimensiones superiores y damos una caracterización de estos ideales en función de los pesos del árbol asociado a dicho ideal.

A continuación damos una biyección entre los generadores minimales de un ideal perteneciente al semigrupo tórico especial y los generadores minimales de una potencia adecuada del maximal, lo que nos permite encontrar los generadores de dicho ideal. Recordaremos aquí la dificultad que existe, en general, para determinar los generadores minimales de un ideal, siendo esta dificultad ya perceptible en el caso monomial.

3.1 Clusters tóricos e ideales monomiales completos de soporte finito.

En **[C-G-L]** se establece una biyección entre los ideales completos de soporte finito y los árboles con origen y con pesos cumpliendo las desigualdades de proximidad, con lo que en teoría basta con dar un árbol cumpliendo estas condiciones para tener un ideal completo de soporte finito. All también se obtiene que a cada uno de los vértices del rbol se le puede asociar una valoración de forma que bastan estas valoraciones para poner a dicho ideal como intersección de ideales de valoración.

Haremos, a continuación, un resumen de los resultados obtenidos en **[C-G-L]** que utilizaremos más adelante.

Sea $N \cong \mathbb{Z}^d$ un retículo de dimensi n $d \geq 2$, $N^* = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ el retículo dual, K un cuerpo y Δ un abanico en $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, es decir, una familia de conos racionales cumpliendo que toda cara de un cono en Δ está en Δ y que la intersección de dos conos en Δ es un cara de cada uno de ellos.

Denotaremos por X_Δ a la variedad tórica sobre K asociada a Δ, junto con la acción de un toro algebraico $T \cong (K^*)^d$. La variedad X_Δ es unión de abiertos afines, uno para cada cono de Δ cuyo álgebra de coordenadas es el álgebra del semigrupo de puntos de coordenadas enteras que está en el interior del cono dual.Hay una biyección canónica entre las órbitas de T en X_Δ y los conos de Δ; a cada cono $\tau \in \Delta$ le corresponde una T-órbita $\mathbb{O}_\tau$ isomorfa a $Spec[\tau^\perp \cap N^*]$, donde $\tau^\perp$ denota el conjunto de formas lineales que se anulan sobre τ. Se tiene que $\dim \mathbb{O}_\tau = co\dim \tau$ y que $\mathbb{O}_\tau \subset \overline{\mathbb{O}_{\tau'}}$ si y solamente si $\tau' \subset \tau$, donde $\overline{\mathbb{O}_{\tau'}}$ es la clausura de $\mathbb{O}_{\tau'}$ (ver **[O]** , **[Ke]** o **[F]**). Fijemos una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_d\}$ de N. Sea $\Lambda = \langle \mathcal{B} \rangle$ el cono regular de dimensión d en $N_{\mathbb{Q}}$ generado por $\mathcal{B}$, esto es, aquel cuyos vectores extremales son los elementos de $\mathcal{B}$, $X_0 \cong K^d$ la variedad tórica af n asociada al abanico Δ_0 formado por todas las caras de Λ, Q_0 la T-órbita cerrada en X_0 y $\sigma_1 : X_1 \longrightarrow X_0$ la explosión con centro en Q_0. La variedad X_1 es la variedad tórica asociada al abanico Δ_1, la subdivisón minimal de Δ_0 que contiene el rayo (cono de dimensión 1) generado por $u = \sum v_i$.

Para cada entero i, $1 \leq i \leq d$, sea $\mathcal{B}_i$ la base ordenada de N que se obtiene reemplazando v_i por u en la base $\mathcal{B}$ y $\Lambda_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$ el cono regular generado por $\mathcal{B}_i$. El divisor excepcional

$B_0 = \sigma_1^{-1}(P_1)$ es la clausura en X_1 de la T-órbita definida por el rayo generado por u. Cada T-órbita de dimensión 0 en X_1 se corresponde con el cono Λ_i, $1 \leq i \leq d$.

DEFINICION 3.1 *Una constelación tórica de puntos infinitamente próximos a P_1 es una constelación $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ tal que cada P_j es una T-órbita de dimensión cero en la variedad tórica X_{j-1} obtenida por blowing-up en $P_{j-1} \in X_{j-2}$, $2 \leq j \leq m$.*

La elección de un punto P_2 de una cadena tórica $\mathcal{C}$ es equivalente a la elección de un entero a_1, $1 \leq a_1 \leq d$, que determina el cono Λ_{a_1} del abanico Δ_1. La subdivisión Δ_2 de $\Delta_1$correspondiente al blowing-up en P_2 se obtiene reemplazando Λ_{a_1} (y sus caras) en Δ_1 por los conos $\Lambda_{a_1,i} = \langle \mathcal{B}_{a_1,i} \rangle$ (y sus caras), $1 \leq i \leq d$, donde $\mathcal{B}_{a_1,i}$ es la base de N obtenida por la substitución en $\mathcal{B}_{a_1}$ de su i-ésimo vector por $\sum v$, $v \in \mathcal{B}_{a_1}$.

La elección de un punto P_3 es equivalente a la elección de un entero a_2, $1 \leq a_2 \leq d$, que determina el cono Λ_{a_1,a_2}. Por inducción sobre d obtenemos la siguiente codificación de las cadenas tóricas:

PROPOSICION 3.1 *Sea m un entero positivo. La aplicación que asocia a cada sucesión de enteros $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ tal que $1 \leq a_i \leq d$, $1 \leq i \leq m-1$, la cadena tórica $\{P_1, \ldots, P_m\}$, donde P_1 es la T-órbita correspondiente al cono $\Lambda = \langle \mathcal{B} \rangle$, y P_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, es la T-órbita correspondiente al cono $\Lambda_{a_1,\ldots,a_i}$ del abanico Δ_i, es una biyección entre el conjunto de sucesiones de $m-1$ enteros entre 1 y d, y el conjunto de cadenas tóricas de dimensión d con m puntos.*

OBSERVACION 3.1 *A cada constelación (no necesariamente tórica) $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ se le puede asociar un grafo $C_{\mathcal{C}}$ en el que los vértices del grafo se corresponden con los puntos de la constelación y los vértices correspondientes a los puntos P_i y P_j, $i < j$, están unidos si y solamente si P_i es la imagen de P_j por las aplicaciones canónicas y no existe k, $i < k < j$, tal que P_k sea la imagen de P_j vía dichas aplicaciones.*

Utilizando este grafo y la codificación anterior para las cadenas tóricas tenemos la siguiente codificación para las constelaciones tóricas.

PROPOSICION 3.2 *Llamamos árbol d-nario a un árbol con una raíz tal que cada vértice tiene a lo sumo d vértices adyacentes. Hay una biyección natural entre el conjunto de constelaciones tóricas de dimensión d con origen y el conjunto de árboles d-narios finitos con origen, con los lados pesados con enteros positivos menores o iguales que d, tales que dos lados con el mismo origen tienen distintos pesos.*

OBSERVACION 3.2 *Naturalmente los pesos de los árboles n-narios determinan la elección de una T-órbita de dimensión, como en el caso de las cadenas.*

DEFINICION 3.2 *Dado un punto Q en una constelación tórica $\mathcal{C}$ de dimensión d y enteros no negativos a, b, t tales que $1 \leq a \leq d$, $1 \leq b \leq d$, $a \neq b$, sea $Q(a, b^t)$ el punto terminal de la cadena con origen en Q y codificada por $(a, b, \ldots, b)$ donde b aparece t veces (ver proposición 3.1). Si $t = 0$, escribiremos $Q(a)$. El punto $Q(a, b^t)$ puede no estar en $\mathcal{C}$. Un punto P infinitamente próximo a Q se llama linealmente próximo a Q, y se escribe P ³ Q, si $P = Q(a, b^t)$ con a, b y t como antes.*

Una constelación tórica $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ define un morfismo $f : Z \longrightarrow X$, donde X es la variedad en la que elegimos P_1 y S es la variedad obtenida tras las sucesivas explosiones en los puntos de $\mathcal{C}$.

Podemos preguntarnos cuántas variedades intermedias existen entre Z y X. Para ello construiremos los conos, ver sección 1.3, $NE(Z/X)$, $P(Z/X)$ y $\widetilde{P}(Z/X)$. Se nos presentan tal y como ya se vio al hablar de estos conos dos problemas:

- Determinar las células del cono $\widetilde{P}(Z/X)$.
- Una vez caracterizadas estas células determinar ideales en $\mathcal{O}_{X,P_1}$ que nos permitan a través de la explosión en dichos ideales obtener las variedades intermedias.

El primer problemas se resuelve en **[C-G-L]** , al menos en el caso en el que estos conos son regulares, a través de la siguiente proposición:

PROPOSICION 3.3 *(Ver* **[C-G-L]** *). Si $\mathcal{C}$ es una constelación tórica de puntos infinitamente próximos sobre Z y $f : Z \longrightarrow X$ es el morfismo determinado por explosión de $\mathcal{C}$, entonces se tiene que:*

1. *El cono de curvas $NE(Z/X)$ es poliédrico.*
2. *El cono semiamplio y el característico coinciden, es decir, $P(Z/X) = \widetilde{P}(Z/X)$ siendo poliédricos ambos por 1.*
3. *Si D es un divisor cuya clase reticular está en $P(Z/X)$ entonces $\mathcal{O}_Z(-D)$ está generado por sus secciones globales.*
4. *Se pueden dar condiciones necesarias y suficientes para que $NE(Z/X)$ sea un cono simplicial. Esta condiones garantizan que $NE(Z/X)$ es de hecho regular y de aquí , $P(Z/X)$ y $\widetilde{P}(Z/X)$ son también regulares. Dichas condiciones equivalentes son*
   a. *Los elementos extremales de $P(Z/X)$ son los divisores D_Q con $Q \in \mathcal{C}$ dado por:*
   $$D_Q = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_{PQ} E_P^*$$
   donde E_P^* es la imagen en Z del divisor excepcional de la explosión en P, $m_{QQ} = 1$, $m_{PQ} = 0$ si $P \nleq Q$ y $m_{PQ} = \sum_{\substack{R \in \mathcal{C} \\ R \quad P}} m_{PR}$ si $P \leq Q$ y $P \neq Q$
   b. *El grafo asociado a $\mathcal{C}$ es binario, es decir, de cada vértice s lamente salen dos ramas y para cada $Q \in \mathcal{C}$ y pesos a, b y c tales que $a \neq b$ y $\{Q(a), Q(b), Q(a,c)\} \subseteq \mathcal{C}$. entonces $b = c$.*

Observemos que estas condiciones se satisfacen en particular si $\mathcal{C}$ es una cadena de puntos infinitamente próximos, es decir, una sucesión de puntos cada uno en el divisor excepcional de la explosión del anterior.

Nosotros en esta Memoria intentaremos dar condiciones suficientes para determinar si un ideal monomial completo cuyo divisor asociado está en una determinada c lula de $\widetilde{P}(Z/X)$ cumple que sus potencias también completas, es decir, intentaremos dar condiciones necesarias para resolver el segundo de los problemas planteados. Una vez determinado el problema a resolver pasaremos a ver con un poco más de detenimiento las cadenas tóricas.

Sea $P = P_1$ la T-órbita cerrada de X e $I \subset \mathcal{O}_{X,P}$ un ideal monomial, es decir, un ideal T-invariante. La propiedad de que I sea de soporte finito puede ser caracterizada en términos de su politopo de Newton $\mathcal{N}$ definido con relacción al sistema local de parámetros de $\mathcal{O}_{X,P}$ inducido por una base $\mathcal{B}$ del ret culo N. El politopo de Newton $\mathcal{N}$ de un ideal monomial I es la unión de la caras acotadas del cierre convexo (en $N^*_{\mathbb{Q}}$) de $m + \Lambda^{\vee}$, cuando m recorre el conjunto de exponentes de monomios en I. El politopo de Newton induce un abanico $\Delta_{\mathcal{N}}$, en $N_{\mathbb{Q}}$, que es una subdivisión de Λ (**[Ke]**). La caracterización viene expresada en la siguiente proposición:

PROPOSICION 3.4 *El ideal monomial I es de soporte finito si y sólo si existe una subdivisión regular Υ de $\Delta_{\mathcal{N}}$ tal que Υ es obtenida por una sucesión de subdivisiones de Λ correspondientes a la explosión de una sucesión $\mathcal{C}$ de T-órbitas de dimensión 0.*

Demostración

Se sigue inmediatamente del hecho de que la variedad tórica X_I asociada a $\Delta_{\mathcal{N}}$ es la explosión normalizada con centro en I.

OBSERVACION 3.3 *Un ideal monomial I es completo (es decir, integramente cerrado) si y solamente si contiene todos los monomios cuyo exponente es un punto del retículo N^* en la región $\mathcal{N} + \Lambda^{\vee}$ (ver proposición 2.6)*

OBSERVACION 3.4 *Todo ideal monomial de soporte finito es necesariamente radical para el maximal, ya que en caso contrario, existe un índice digamos k tal que $\forall t \in \mathbb{N}$ se tiene que $(x_k)^t$ no está en dicho ideal y por tanto las sucesivas explosiones en la dirección x_k nos dan lugar a transformaciones estrictas de dicho ideal distintas del total y por tanto no es de soporte finito.*

OBSERVACION 3.5 *Las caras del politopo de Newton de un ideal monomial completo de soporte finito I están en correspondencia 1-1 con las valoraciones de Rees del ideal I, es decir, con las componentes irreducibles del divisor excepcional de la explosión normalizada con centro en I.*

DEFINICION 3.3 *Un cluster $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ es tórico si la constelación $\mathcal{C}$ es tórica. Si I es un ideal monomial de soporte finito, su cluster asociado $\mathcal{A}_I$ es tórico para la constelación de puntos base del ideal.*

OBSERVACION 3.6 *Recordemos que un cluster $\mathcal{A}$ es idealístico si existe un ideal de soporte finito I tal que $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}$.*

Veremos ahora que condiciones debe cumplir un cluster para ser idealístico. Para ello introduciremos una serie de definiciones que nos permitirán establecer unas condiciones sobre los pesos del ideal que llamaremos desigualdades de proximidad. Estas desigualdades ser n una condición necesaria y suficiente para que el cluster $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ sea idealístico.

DEFINICION 3.4 *Sea C el árbol orientado con lados pesados asociado a una constelación tórica $\mathcal{C}$ con un origen, $Q \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un cluster tórico entonces definimos:*

$$M_Q(a,b) = \sum_{t \geq 0} m_{Q(a,b^t)}$$

DEFINICION 3.5 *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un cluster y $Q \in \mathcal{C}$ denotamos por $\mathcal{A}_Q$ el subcluster de $\mathcal{A}$ cuya constelación $\mathcal{C}_Q$ está dada por Q y los puntos de $\mathcal{C}$ infinitamente próximos a Q con los pesos que tienen en $\mathcal{A}$.*

PROPOSICION 3.5 *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un cluster de dimensión d que cumple que para cada $Q \in \mathcal{C}$ se tiene que:*

$$M_Q(a,b) + M_Q(b,a) \leq m_Q \tag{DP}$$

con $1 \leq a < b \leq d$, $\mathcal{B}$ una base ordenada del retículo N que induce un sistema local de parámetros en el anillo local R_Q para cada $Q \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{N}_Q$ el politopo de Newton con respecto a este sistema local de parámetros determinado por el conjunto G_Q definido de la manera siguiente:

(i) *Si no existe ningún punto infinitamente pr ximo a Q, definimos G_Q como los vértices de el poliedro de Newton de la m_Q-ésima potencia del ideal maximal de R_Q.*

(ii) *Si existe algún punto infinitamente próximo a Q, supongamos que tenemos definido $G_{Q(a)}$ para cada $Q(a) \in \mathcal{C}$ y que $G_{Q(a)} = \{0\}$ si $Q(a) \notin \mathcal{C}$, $1 \leq a \leq d$, entonces sea*

$$G_Q = \bigcup_{1 \leq a \leq d} WT_a^{-1}(G_{Q(a)})$$

donde $WT_a : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^d$ es la transformación dada por:

$$(t_{1,\ldots}, t_d) \rightarrow (t_1, \ldots, t_{a-1}, \sum_{1 \leq i \leq d} t_i - m_Q, t_{a+1}, \ldots, t_d)$$

Consideremos la familia de conjuntos G_Q obtenida por inducción descendente para cada uno de los puntos $Q \in \mathcal{C}$ y sea $\mathcal{N}_Q$ el politopo de Newton determinado por G_Q, entonces el *cluster del ideal monomial completo* $I_Q \subset R_Q$ *definido por* $\mathcal{N}_Q$ *es* $\mathcal{A}_Q$ *para cada* $Q \in \mathcal{C}$ *. En particular, si* P_1 *es la raíz de* $\mathcal{C}$*, entonces* $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}$ *para* $I = I_{Q_0}$.

Demostración

Si Q no tiene ningún punto en $\mathcal{C}$ infinitamente próximo a l, entonces el resultado sobre el ideal monomial completo I_Q es fácilmente verificable.

Si Q tiene algún punto en $\mathcal{C}$ infinitamente próximo a l, consideremos $m = m_Q$, $M_{a,b} = M_Q(a,b)$, $M_{a,a} = m_{Q(a)}$ para $1 \leq a \leq d$, $1 \leq b \leq d$, $a \neq b$. Supongamos que $G_a = G_{Q(a)}$ ha sido obtenido de manera anteriormente descrita y que $I_a = I_{Q(a)}$ cumple que $\mathcal{A}_{I_a} = \mathcal{A}_{Q(a)}$, $1 \leq a \leq d$.

Sea $\{v_i\}$, $1 \leq i \leq d$, la base standard de $\mathbb{Z}^d$, x_i las coordenadas, K_a el símplex con vertices $O, M_{a,1}v_1, \ldots, M_{a,d}v_d$ y H_b el conjunto definido por $\sum_i \frac{x_i}{M_{b,i}} \geq 1$ y por $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq d$. Para cada i, $1 \leq i \leq d$, el punto $M_{a,i}v_i \in G_a$, $1 \leq a \leq d$, ya que I_a es un ideal finitamente soportado cuyo cluster es $\mathcal{A}_{Q(a)}$. Y por tanto, $G_a \subseteq K_a$.

Como $a \neq b$, utilizando las desigualdades de proximidad (DP) y de una computación directa sobre los vértices de K_a tenemos que $WT_b(WT_a^{-1}(K_a)) \subseteq H_b$.

Ahora, sea $G = G_Q$ definido como en (ii) y J el ideal generado por los monomios cuyos exponentes son puntos en G. Es fácil ver que $G \subseteq \{\sum x_i \geq m\}$ y que hay puntos en G que satisfacen que $\sum x_i = m$, con lo que $ord_Q(J) = m$.

Sea $J(b)$ la transformada débil de J en $R_{Q(b)}$. El ideal $J(b)$ está generado por los monomios cuyos exponentes pertenecen a $WT_b(G)$. Por definición de G tenemos que:

$$WT_b(G) = \bigcup_{1 \leq a \leq d} WT_b(WT_a^{-1}(G_a)) = G_b \cup \left(\bigcup_{a \,/\, 1 \leq a \leq d,\, a \neq b} WT_b(WT_a^{-1}(G_a)) \right)$$

La inclusión $WT_b(WT_a^{-1}(G_a)) \subseteq WT_b(WT_a^{-1}(K_a))$ se cumple, ya que $G_a \subseteq K_a$ y por tanto $WT_b(WT_a^{-1}(G_a)) \subseteq H_b$ si $a \neq b$. Ya que los puntos con coordenadas enteras de H_b son exponentes de monomios en I_b (recordemos que I_b es completo), tenemos que $J(b) \subseteq I_b$. Por otra parte, como $J(b)$ contiene los monomios cuyos exponentes pertenecen a G_b, entonces $\overline{J}(b) = \overline{J(b)} = I_b$, con lo que basta hacer $I_Q = \overline{J}$ para tener el resultado deseado.

TEOREMA 3.1 *Sea* $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ *un cluster tórico de dimensión* d*, entonces* $\mathcal{A}$ *es idealístico si y solamente si cumple las desigualdades de proximidad (DP) (ver* **[C-G-L]** *).*

Demostración

Si $\mathcal{A}$ es idealístico y $D_{\mathcal{A}}$ el divisor asociado a dicho cluster, entonces existe un ideal completo I tal que $I\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D_{\mathcal{A}})$.

Sea Q un punto de $\mathcal{C}$. Consideremos la recta proyectiva l que une los puntos $Q(a)$ y $Q(b)$, $1 \leq a < b \leq d$, y sea $\bar{l}$ la transformada estricta de l en $X(\mathcal{C})$, entonces tenemos que

$$0 \leq D_{\mathcal{A}} \cdot \bar{l} = \left(\sum_{P \to Q} e_P(l) m_P - m_Q \right)$$

Ahora los únicos puntos infinitamente próximos a Q para los cuales $e_P(l) \neq 0$ son aquellos que son de la forma $Q(a, b^t)$ y $Q(b, a^t)$ para $t \geq 0$. Para estos puntos la multiplicidad es igual a 1 ya que tanto l como sus transformadas estrictas son suaves, con lo que se tienen las desigualdades (DP).

Si se cumplen las desigualdades de proximidad (DP) entonces el cluster es idealistico por la proposición 3.5.

OBSERVACION 3.7 *De todo lo anteriormente expuesto se tiene que existe una biyección entre el conjunto de ideales monomiales completos de soporte finito en un anillo local regular de dimensión d y el conjunto de árboles d-narios con origen con los lados pesos con enteros positivos entre 1 y d y tales que dos lados con el mismo origen tienen distintos peso y con pesos en los vértices cumpliendo las desigualdades de proximidad. (DP)*

De esta biyección y del estudio que hemos hecho de las regiones de Newton se pueden deducir algunas propiedades importantes de las valoraciones de Rees de los ideales monomiales completos de soporte finito que utilizaremos a lo largo de la Memoria y una clasificación de dichas valoraciones de Rees.

PROPOSICION 3.6 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito y $v \neq ord_A$ una valoración de Rees de I, entonces existe $1 \leq i \leq d$ tal que $\forall j \neq i$ $v(x_i) < v(x_j)$.*

Demostración

Consideremos el cluster asociado a I, $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$. Sea $C_{\mathcal{C}}$ el árbol asociado a la constelación $\mathcal{C}$ y sea i el índice de la primera rama del camino que une el punto asociado a v con el origen y

B la transformación cuadrática de A con $\mathcal{M}(A)B = (x_i)B$; ya que v domina B entonces

$$\forall j \neq i \; v(x_j) = v(x_j/x_i) + v(x_i) > v(x_i)$$

DEFINICION 3.6 *A las valoraciones monomiales que son valoraciones de Rees para algún ideal de monomial completo de soporte finito les llamaremos valoraciones monomiales de soporte finito y al conjunto de ellas lo denotaremos por $\mathcal{V}$*

Estas valoraciones se pueden asociar de forma biyectiva con los puntos infinitamente próximos al origen de X, P; de hecho estas valoraciones son las valoraciones $\mathcal{M}_Q$-ádicas del anillo local asociado a estos puntos, donde $\mathcal{M}_Q$ es el ideal máximal de estos anillos.

DEFINICION 3.7 *Sea $v \in \mathcal{V}$, entonces v es de clase $i \neq 0$ si $v \neq ord_A$ y $\forall j \neq i \; v(x_i) < v(x_j)$ Decimos que v es de clase 0 si $v = ord_A$.*

DEFINICION 3.8 *Sea $v \in \mathcal{V}$, y $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito entonces:*

1. *Si v es de clase $i \neq 0$ consideremos el origen de la constelación asociada a I, P, entonces definimos*
$$P_v(I) = \sum_{t \geq 0} m_{P(i^t)}$$
donde $P(i^t)$ es el punto en que termina la subcadena tórica que empieza en P y es codificada por $(i, \ldots, i)$ donde i aparece t veces.
2. *Si v es de clase 0 entonces $P_v(I) = ord_A(I)$*

LEMA 3.1 *Sea $v \in \mathcal{V}$, $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito, y $M = \prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j}$ entonces:*

1. *Si v es de clase $i \neq 0, ord_A(M) - a_i \geq ord_A(I)$ entonces $v(M) \geq v(I)$.*
2. *Si $ord_A(M) \geq P_v(I)$ entonces $v(M) \geq v(I)$.*

Demostración

Sea $l(v)$ la longitud del camino que va desde el origen hasta el punto asociado a v, en el árbol de la constelación asociada a I. Haremos la prueba por inducción en $l(v)$.

- Si $l(v) = 0$, entonces $v = ord_A$ y por lo tanto solo necesitamos probar 2., pero 2., en este caso, es trivial.
- Si $l(v) > 0$ entonces existe $i \neq 0$ tal que v es de clase i. Sea B la transformación cuadrática de A con $\mathcal{M}(A) = (x_i)B$, sea $N = \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{d} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{a_j}\right)(x_i)^{ord_A(M)-ord_A(I)} \in B$ y sea I^B la transformación débil de I en B. Si probamos que $v(N) \geq v(I_B)$ entonces:

$$v(M) - ord_A(I)v(x_i) = v(N) \geq v(I_B) = v(I) - ord_A(I)v(x_i)$$

  y tendremos el resultado deseado.

  a. Para 1., si v en B tiene clase i entonces $ord_B(N) - ord_A(M) + ord_A(I) \geq ord_A(I) \geq$ $\geq ord_B(I_B)$ y por la hipótesis de inducción tenemos que $v(N) \geq v(I_B)$. Si v tiene clase $j \neq i$ en B $ord_B(N) \geq ord_A(I) \geq P_v(I_B)$ por las desigualdades de proximidad. Entonces por la hipótesis de inducción tenemos que $v(N) \geq v(I_B)$.

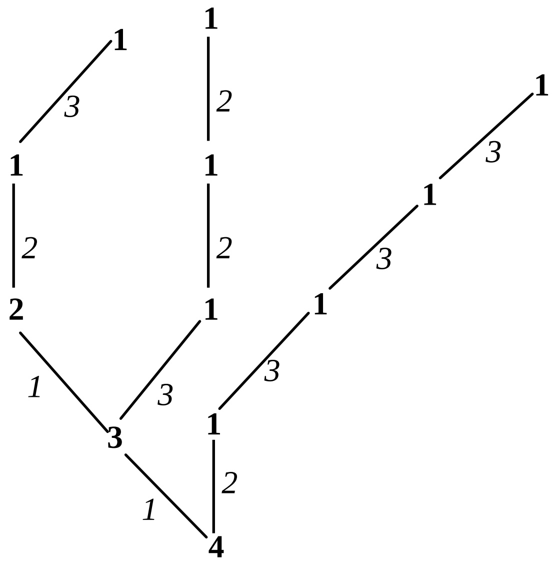
  b. Para 2.

  I Si v tiene clase i en B, entonces $ord_B(N) \geq ord_A(M) - ord_A(I) \geq P_v(I) -$ $- ord_A(I) = P_v(I_B)$, y por la hipótesis de inducción tenemos que $v(N) \geq v(I_B)$.

  II Si v no tiene clase i en B entonces $P_v(I) = ord_A(I) + ord_B(I_B)$
  Si $v = ord_B$, tenemos que $v(N) = ord_B(N) \geq ord_A(M) - ord_A(I) \geq ord_B(I_B) =$ $= v(I_B)$
  Si v tiene en B clase $j \neq i, 0$ entonces $ord_B(N) - a_j \geq ord_A(M) - ord_A(I) \geq$ $\geq ord_B(I_B)$ y se tiene por la hipótesis de inducción que $v(N) \geq v(I^B)$.

Utilizando las técnicas anteriormente estudiadas, veremos que el producto de ideales completos de soporte finito no es en general completo, que la transformada débil de un ideal monomial completo de soporte finito no es completa y que tampoco las potencias de un ideal monomial completo de soporte finito son, en general, completas, con lo que tenemos que los resultados de la teorí a de Zariski sobre ideales completos no son generalizables a dimensiones superiores a 2. Recuerdese que la teoría de Campillo, González-Springer y Monique Llejeune muestra que, no obstante, estos ideales satisfacen propiedades análogas a los de la teoría de Zariski. Nuestra observación anterior quiere decir que habría tres propiedades importantes (las ya citadas) que no admiten generalización. Este hecho muestra la importancia de encontrar condiciones sobre los ideales completos monomiales de soporte finito, o sobre los divisores asociados a dichos ideales, que nos permitan saber si las potencias de dicho ideal son completas para la resolución de nuestro problema.

EJEMPLO 3.1 *Sea A un anillo local regular de dimensión 3 y sea $\{x, y, z\}$ un sistema regular de parámetros de A. Sea $I \subseteq A$ el ideal asociado al rbol:*



El ideal asociado a este árbol es $I = < xy^3, z^4, x^3z^2, x^2y^2z, x^2yz^2, x^2z^3, xy^2z^2, xyz^3, y^5, y^4z, y^3z^2, y^2z^3, x^4y^2, x^4yz, x^7, x^6y, x^6z > A$.
Claramente se tiene que $t = x^3yz^5$ pertenece $I * I$, ya que:

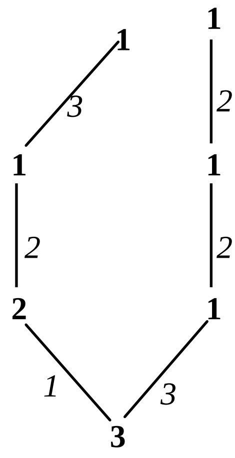
$$t^3 - \left[(xy^3)(x^2z^3)\right](x^3z^2)^2(z^4)^2 = 0$$

es decir, existe una ecuación de dependencia entera sobre I^2. Sin embargo $t \notin I^2$, ya que como $ord_A(I) = 4$ entonces para ponerlo como el producto de dos elemento de I éstos deberán ser uno de grado 4 y otro de grado 5, pero la única posibilidad es $z^4(x^3yz)$ pero $x^3yz \notin I$, como se puede ver a través de los generadores de I.

OBSERVACION 3.8 *Si tenemos un ideal $I \subseteq A$ y B es la transformada cuadrática para la cual se tiene que $\mathcal{M}(A)B = (x_i)B$, entonces el árbol asociado al completado de I_B es, evidentemente, el que se obtiene del asociado a I al que se le han suprimido todas las ramas que salen del origen que no estan etiquetadas con i y al que se le ha eliminado el punto asociado a A, ya* *que todo punto base de I_B es un punto base de I y los puntos base de I que no infinitamente próximos a B no son puntos base de I_B.*

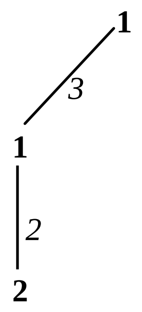
Veamos que, en general, la transformada débil de un ideal completo finitamente soportado no es completo.

EJEMPLO 3.2 *Consideraremos un anillo local $(A, \mathcal{M}(A))$ de dimensión 3 y un sistema regular de parámetros de dicho anillo $\{x, y, z\}$ y el ideal correspondiente al siguiente árbol:*



Es decir, $I =< xz^2, y^3, x^3y, x^3z, x^2yz, xy^2z, y^2z^2, yz^3, z^4, x^5 > A$.

El cierre integro de la transformada débil de I en la transformación cuadrática B en la que $\mathcal{M}(A)B = (x)B$ está asociado al árbol:



Ahora $(z/x)(y/x)^2$ no está I_B, ya que $xyz, xy^2, y^2z \notin I$, pero,

$$(z/x)^2(y/x)^4 - \left((z/x)^2(y/x)\right)\left((y/x)^3\right) = 0$$

con lo que $(z/x)(y/x)^2 \in \overline{I_B}$ y por tanto la transformada débil de un ideal completo de soporte finito no es completo, al contrario de lo que ocurre dimensión dos.

De todo esto se deduce que en dimensión superior a dos no tenemos ninguna de la buenas propiedades que se dan en dimensión dos como consecuencia de la teoría de Zariski sobre ideales completos.

A continuación trataremos de restringir los ideales monomiales completos de soporte finito para los cuales podemos transladar los resultados de la teoría de Zariski para ideales completos. Como ya hemos visto anteriormente, estos ideales formarán un semigrupo que llamaremos el semigrupo tórico especial de un anillo local regular.

Recordemos, también, que el segundo problema planteado en esta sección estaría resuelto si conseguimos encontrar en cada célula de $\widetilde{P}(Z/X)$ divisores cuyo ideal asociado pertenezca a este semigrupo.

3.2 Ideales monomiales completos de soporte finito de tallo i

Como hasta ahora hemos visto los ideales monomiales completos de soporte finito en dimensión $d > 2$ no tienen las propiedades que necesitamos en nuestro estudio de las variedades intermedias a dos dadas. Nuestro objetivo es, ahora, determinar que condiciones deben cumplir estos ideales, o equivalentemente los divisores asociados, o el árbol d-nario asociado, para que se tengan estas propiedades.

Antes de alcanzar nuestro objetivo estudiaremos un conjunto de ideales completos de soporte finito, llamados ideales de tallo i, ya que sus propiedades nos ayudaran a construir un subsemigrupo (el semigrupo tórico especial) en el cual se den todas estas propiedades.

Estos ideales tienen algunas propiedades importantes tales como que su transformada débil es completa, pero, desgraciadamente, el producto de dos de estos ideales no es, en general, completo ni poseen una estructura algebraica compatible con el producto $*$, por ejemplo, no forman un subsemigrupo del semigrupo de ideales completos de soporte finito.

Fijaremos un anillo local regular $(A, \mathcal{M})$ de dimensión d y un sistema regular de parámetros de A, $\{x_1, \ldots, x_d\}$.

DEFINICION 3.9 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito, decimos que I es de tallo $i \neq 0$ si el árbol asociado a I tiene al menos dos puntos y adem s todas las valoraciones asociadas a dichos puntos distintas de ord_A son de clase i, es decir, si el árbol asociado a I tiene una sóla rama partiendo del origen que está etiquetada con i.*

Nuestro objetivo es, ahora, probar que el producto de ideales completos de soporte finito de tallo i es completo bajo determinadas condiciones. Veremos antes unos casos particulares que nos ayudarán a la hora de ver el caso general.

PROPOSICION 3.7 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito de tallo $i \neq 0$, entonces $I * \mathcal{M} = I\mathcal{M}$.*

Demostración

Sea $M = \prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j}$ un generador minimal de $I * \mathcal{M}$ y $v \in \mathcal{V}$ de clase i.

- Si $a_i \neq 0$ entonces sea $N = \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}} {x_j}^{a_j}\right)(x_i)^{a_i-1}$, entonces
$$v(N) = v(M) - v(x_i) \geq v(I) + v(\mathcal{M}) - v(x_i) = v(I)$$
y por tanto $N \in I$.
- Si $a_i = 0$, entonces existe k tal que $a_k \neq 0$; sea $N = \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}} {x_j}^{a_j}\right)(x_k)^{a_k-1}$, ya que $ord_A(N) - a_i \geq ord_A(I)$, por el lema 3.1 $v(N) \geq v(I)$, y $N \in I$.

LEMA 3.2 *Sean $I, J \subseteq A$ dos ideales monomiales completos de soporte finito, I de tallo $i \neq 0$ y J un ideal cuyas valoraciones esenciales no sean de clase i; sea $M = \prod_{j=1}^{d} {x_j}^{a_j}$ y v una valoración de clase i entonces si $ord_A(M) - a_i \geq ord_A(I)$ y $ord_A(M) \geq ord_A(I * J)$ entonces $v(M) \geq v(I * J)$*

Demostración

Como $ord_A(M) - a_i \geq ord_A(I)$ entonces existen $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, d)$ $(j \neq i)$ tales que $b_j \leq a_j$ y con $\sum b_j = ord_A(I)$; sea $X = \prod x_j^{b_j}$ e $Y = \left(\prod_{j\neq i} x_j^{a_j - b_j}\right) x_i^{a_i}$. Por el lema 3.1 $v(X) \geq v(I)$ y además

$v(Y) \geq [ord_A(M) - ord_A(I)]\, v(x_i) \geq [ord_A(I * J) - ord_A(I)]\, v(x_i) = ord_A(J) v(x_i) = v(J)$

Luego $v(M) = v(X) + v(Y) \geq v(I) + v(J) = v(I * J)$

LEMA 3.3 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito de tallo $i \neq 0$, y sea $J \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito de tallo $j \neq 0, i$, entonces $I * J = IJ$.*

Demostración

Sea $M = \prod_{j=1}^{n} {x_j}^{a_j}$ un generador minimal de $I * J$, entonces tenemos tres casos:

1. Si $\underline{a_i \geq ord_A(J) = r}$: Sea $N = {x_i}^r$ y $N' = M/N$, por el lema 3.1 $v(N) \geq ord_A(J)$ para toda $v \in \mathcal{V}$ de clase j y entonces $N \in J$; además si $w \in \mathcal{V}$ es de tallo i:
$$v(N') = v(M) - v(N) \geq v(I) + v(J) - rv(x_i) = v(I) + rv(x_i) - rv(x_i) = v(I)$$
y $N' \in I$.

2. Si $\underline{a_j \geq ord_A(I)}$ entonces por un razonamiento similar tenemos el resultado deseado.

3. Si $\underline{a_j < ord_A(I) = s \text{ y } a_i < ord_A(J) = r}$ entonces existen $b_m \leq a_m$ $m \neq i, j$ tales que $\sum_m b_m + a_i = r$. Sea $N = (\prod_m {x_m}^{b_m}) {x_i}^{a_i}$. Ahora por el lema 3.1 $N \in$ $\in J$, y $N' = M/N \in J$, ya que $ord_A(N') - 0 \geq ord_A(I)$.

LEMA 3.4 *Si $I_1, I_2, I_3 \subseteq A$ son tres ideales monomiales completos de soporte finito de tallo i_j, con $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$ e $i_j \neq 0$ entonces $I_1 I_2 I_3$ es un ideal completo.*

Demostración

Sea $X = \prod_m {x_m}^{a_m}$ un generador minimal de $J = I_1 * I_2 * I_3$, y $b_j = ord_A(I_j)$.

Para simplificar, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $i_j = j$, y que $b_1 \leq b_2, b_3$; Sea $c_m = \sum_{l \neq m} b_l$, donde $b_l = 0$ si $l \neq 1, 2, 3$.

- Si existe un $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $a_j \geq c_j$ entonces si $X' = {x_j}^{c_j}$ e $Y = X/X'$, entonces por el lema 3.1 $X' \in \prod^*_{m \neq j} I_m$ y si v es una valoración de tipo j

$$v(Y) = v(X) - v(X') \geq v(J) - c_j v(x_j) = v(I_j)$$

  y, por tanto, $Y \in I_j$ y $X \in I_1 I_2 I_3$.

- Si $\forall j \in \{1, 2, 3\}$ $a_j < c_j$, entonces tenemos que $ord_A(I) = ord_A(X)$, ya que en caso contrario X no sería un generador minimal.

  Tenemos 3 casos:

  a. $\underline{a_3 > b_2 \text{ y } a_2 > b_3}$: Evidentemente $b_2 + b_3 \geq b_2 + b_3 - a_1$ y por hipótesis tenemos que $b_2 + b_3 - a_1 \geq 0$. Existen, entonces, $D_2, D_3 \in \mathbb{N}$ con $D_2 \leq b_2$ y $D_3 \leq b_3$ tales que $D_2 + D_3 = b_2 + b_3 - a_1$.

  Sea $X' = {x_1}^{a_1} {x_2}^{D_3} {x_3}^{D_2}$ e $Y = {x_2}^{a_2 - D_3} {x_3}^{a_3 - D_2} \prod_{j \neq 1,2,3} {x_j}^{a_j}$.Ya que $a_2 - D_3 + a_3 - D_2 + \sum_{j \neq 1,2,3} a_j = b_1$ tenemos que $Y \in I_1$. Probaremos ahora que $X' \in I_2 * I_3$; observemos que:

$$D_2 + a_1 = b_2 + b_3 - D_3 \geq b_2$$
$$D_3 + a_1 = b_2 + b_3 - D_2 \geq b_3$$

  y entonces por el lema 3.2 y el lema 3.3 tenemos el resultado deseado.

b. $\underline{a_3 \leq b_2 \text{ y } a_2 > b_3 \text{ o } a_3 > b_2 \text{ y } a_2 \leq b_3}$: Probaremos el primer caso y por simetría tendremos el segundo.

Por hipótesis tenemos que $a_1 \leq b_3 + b_2$ y que $\sum_{j\neq 1,2} a_j + b_3 \geq b_2 + b_3 - a_1 \geq 0$ y entonces existen $D_j \leq a_j$ y $e \leq b_3$ $D_j, e \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j\neq 1,2} D_j + e = b_2 + b_3 - a_1$.

Definimos $X' = x_1{}^{a_1} x_2{}^{e} \prod_{j\neq 1,2} x_j{}^{D_j}$ y $Y = x_2{}^{a_2-e} \prod_{j\neq 1,2} x_j{}^{a_j-D_j}$.

Claramente $X = X'Y$ y adem s, $Y \in I_1$. Ahora

$$\sum_{j\neq 1,2} D_j + a_1 = b_2 + b_3 - e \geq b_2$$

$$\sum_{j\neq 1,2,3} D_j + e + a_1 = b_2 + b_3 - D_3 \geq b_2 + b_3 - a_3 \geq b_3$$

y entonces por el lema 3.2 y el lema 3.3 tenemos el resultado deseado.

c. $\underline{a_3 \leq b_2 \text{ y } a_2 \leq b_3}$: Sabemos por hipótesis que $\sum_{j\neq 1} a_j \geq b_1$ y entonces existen números naturales D_j tales que $D_j \leq a_j$, y $\sum_{j\neq 1} D_j = b_1$. Consideremos $X' = \prod_{j\neq 1} x_j{}^{D_j}$ e $Y = x_1{}^{a_1} \prod_{j\neq 1} x_j{}^{a_j-D_j}$.

Claramente tenemos que $X' \in I_1$. Además

$$\sum_{j\neq 1,2} (a_j - D_j) + a_1 = \sum_{j\neq 2} a_j + D_2 - b_1 = \sum_{j} b_j - a_2 + D_2 - b_1 = b_2 + (b_3 - a_2) + D_2 \geq b_2$$

$$\sum_{j\neq 1,3} (a_j - D_j) + a_1 = \sum_{j\neq 3} a_j + D_3 - b_1 = \sum_{j} b_j - a_3 + D_3 - b_1 = b_3 + (b_2 - a_3) + D_3 \geq b_3$$

y entonces por el lema 3.1 y el lema 3.2 tenemos el resultado deseado.

PROPOSICION 3.8 *Sea $I_t, t \in \mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, d\}$ ideales, tales que I_t es un ideal monomial completo de tallo i entonces $\prod_{t\in\mathcal{I}} I_t$ es un ideal completo.*

Demostración

Sea $J = \prod^{*}_{t\in\mathcal{I}} I_t$ y $X = \prod_m x_m{}^{a_m}$ un generador minimal de J. Sea $b_j = = ord_A(I_j)$, y $c_j = \sum_{i\neq j} b_i$, donde $b_i = 0$, si $i \notin \mathcal{I}$. Para simplificar la notación, podemos suponer que $1 \in \mathcal{I}$, y que $b_1 \leq b_t$, $\forall t \in \mathcal{I}$. Haremos la prueba por inducción en $l = |\mathcal{I}|$.

Si $l = 1$ es trivial; si $l = 2$ entonces, es el lema 3.3, si $l = 3$ es el lema 3.4. Podemos suponer que $l > 3$.

- Si existe un $j \in \mathcal{I}$ tal que $a_j \geq c_j$ entonces sea $X' = {x_j}^{c_j}$ e $Y = X/X'$. Por el lema 3.1 $X' \in \prod_{m\neq j}^{*} I_m$ y si v es una valoración de tallo j entonces
$$v(Y) = v(X) - v(X') \geq v(J) - c_j v(x_j) = v(I_j)$$
y por tanto $Y \in I_j$ y $X \in \prod_m I_m$.
- Si $\forall j \in \mathcal{I}\ a_j < c_j$, entonces $ord_A(I) = ord_A(X)$ ya que en caso contrario X no es un generador minimal de I. Tenemos dos casos:

  a. $\underline{\exists j \in \mathcal{I}\ j \neq 1 \text{ tal que } \sum_{\substack{l\in\mathcal{I}\\ l\neq 1 l\neq j}} b_l < a_j}$: Sea $r \in \mathcal{I}$ con $r \neq 1, j$, $X' = {x_j}^{b_r}$ e $Y = X/X'$. Por el lema 3.1 $X' \in I_r$ y si $s \neq r, j$ y $s \in \mathcal{I}$ entonces
$$\sum_{\substack{l\neq j\\ l\neq s}} a_l + a_j - b_r > \sum_{\substack{l\neq j\\ l\neq s}} a_l + \sum_{\substack{l\neq 1\\ l\neq j\\ l\neq r}} b_l \geq b_s$$
  Si v es una valoración monomial de tallo j entonces
$$v(Y) = v(X) - v(X') \geq v(J) - b_t v(x_j) = v(\prod_{t\neq r}^{*} I_t)$$
  y por tanto $Y \in \prod_{t\neq r}^{*} I_t$, y $X \in \prod_t I_t$ por hipótesis de inducci n.

  b. $\underline{\forall j \in \mathcal{I}\ j \neq 1 \text{ tenemos que } \sum_{\substack{l\in\mathcal{I}\\ l\neq j\\ l\neq 1}} b_l \geq a_j}$: Por hipótesis tenemos que $\sum_{l=2}^{d} a_l \geq b_1$ entonces existen números naturales D_j con $2 \leq j \leq d$ tales que $D_j \leq a_j$ y con $\sum_{j=2}^{d} D_j = b_1$. Sea $X' = \prod_{j=2}^{d} {x_j}^{D_j}$ e $Y = {x_1}^{a_1}\left(\prod_{j=2}^{d} {x_j}^{a_j - D_j}\right)$. Evidentemente $X = X'Y$ y claramente $X' \in I_1$, as que sólo necesitamos probar que $Y \in \prod_{\substack{j\in\mathcal{I}\\ j\neq 1}}^{*} I_j$; pero esto se tiene por el lema 3.2 ya que si $s \neq 1$ se tiene que

$$a_1 + \sum_{j\neq 1,s} (a_j - D_j) = \sum_{j\neq s} a_j - b_1 + D_s = \sum_{j\neq 1} b_j - a_s + D_s = b_s + D_s + \left(\sum_{j\neq 1,s} b_j - a_s\right) \geq b_s$$

LEMA 3.5 *Si $I \subseteq A$ es un ideal monomial completo de soporte finito de tallo $i \neq 0$, y si B es una transformación cuadrática de A en x_i, y $Z = (\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} (x_j/x_i)^{a_j}) {x_i}^{a_i}$ es un generador minimal de $\overline{I_B}$ entonces*
$$a_i \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} a_j - ord_A(I)$$

Demostración

Supongamos que $a_i < \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} a_j - ord_A(I)$, entonces existen $b_j \leq a_j$ con $j \neq i$ tales que $\sum_j b_j = ord_A(I)$. Sea $Z' = \prod_j {x_j}^{b_j} \in I$ por el lema 3.1; y por la definición de tranformada débil de I en B, $Z" = Z'/{x_i}^r \in I_B$, donde $r = ord_A(I)$, pero $Z"$ es un divisor de Z ya que $Z" = \prod_j \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{b_j}$; contracción.

COROLARIO 3.1 *Si $I \subseteq A$ es un ideal monomial completo de soporte finito de tallo $i \neq 0$, y si B es una transformación cuadrática de A entonces I_B es completo.*

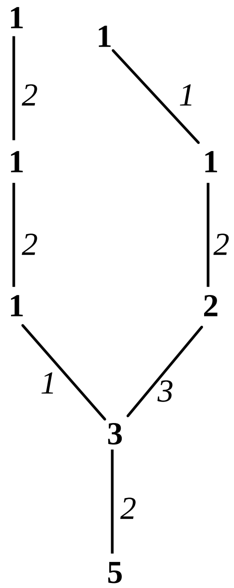
Demostración

Sea B la transformación cuadr tica de A en x_j.

- Si $\underline{i \neq j}$ entonces $I_B = B$, y el resultado es trivial.
- Si $\underline{i = j}$ entonces sea $Z = (\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} (x_j/x_i)^{a_j}){x_i}^{a_i}$ un generador minimal de $\overline{I_B}$.Sea $Z' =$ $= (\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} {x_j}^{a_j}){x_i}^t$, donde $t = a_i + ord_A(I) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} a_j$; por el lema 3.4 $Z' \in A$. Por otro lado, $Z' = {x_i}^{ord_A(I)} Z$ y $ord_A(I) \leq ord_A(Z')$ entonces $Z' \in I$ y por tanto $Z \in I_B$.

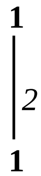
En el siguiente ejemplo, veremos que no podemos esperar que el producto de dos ideales del mismo tallo sea completo, si este tallo es distinto de 0.

EJEMPLO 3.3 *Sea A un anillo local regular de dimensión 3, $\{x, y, z\}$ un sistema regular de parámetros y sea I el ideal asociado al árbol:*



es decir, $I =< x^5, x^4y, x^4z, x^3yz, x^3z^2, x^2y^2z, x^2yz^2, x^2z^3, xyz^3, xz^4, z^5, x^3y^3, xy^3z^2, y^3z^3,$ $y^2z^4, x^2y^5, xy^5z, y^5z^2, xy^7, y^8, y^7z > A$.

Sea J *el ideal asociado al árbol:*



es decir, $J =< x, y^2, z > A$.

Entonces $t = xy^6z \in I * J$ *ya que:*

$$t^2 - [z(x^2y^2z)][y^2(y^8)] = 0$$

pero $y^6z, xy^4z, xy^6 \notin I$, *y entonces,* $t \notin IJ$.

3.3 El semigrupo tórico especial de un anillo local regular

Recordemos que si fijamos un punto P (visto algebraicamente, un anillo local regular de dimensión d $(A, \mathcal{M})$), ver sección 1.3, a cada punto infinitamente próximo a P, Q, se le puede asociar un divisor dado por:

$$D_Q = \sum_{Q' \leq P} m_{QQ'} E^*_{Q'}$$

donde $E^*_{Q'}$ es la imagen del divisor excepcional de la explosión en Q' por el morfimo que va de la variedad obtenida por las explosiones sucesivas en la cadena de puntos infinitamente próximos que va de A a B a la variedad en la que se encuentra A, $m_{QQ} = 1$, $m_{QQ'} = 0$ si $Q \not\leq Q'$ y $m_{QQ'} = \displaystyle\sum_{Q''.\ Q} m_{QQ''}$ si $Q \leq Q'$. Cada uno de estos divisores cumple las desigualdades de proximidad y por tanto tiene en A asociado un único ideal monomial completo de soporte finito que llamaremos $\mathcal{P}_{P,Q}$. Estos ideales se llamarán ideales de Lipman.

OBSERVACION 3.9 *Los ideales de Lipman son ideales de tallo $i \neq 0$ si $P \neq Q$, y de tallo 0 si $P = Q$*

DEFINICION 3.10 *Decimos que $I \in \mathcal{S}(A)$ si I es igual al $*$-producto de ideales de Lipman. Llamamos a $\mathcal{S}(A)$ el semigrupo tórico especial de A.*

OBSERVACION 3.10 *Claramente $\mathcal{S}(A)$ y la operación $*$ forman un semigrupo; éste es el mayor semigrupo con la operación $*$ contenido en los ideales monomiales completos de soporte finito en el que tenemos factorización única con factores que sean ideales de Lipman.*

Veremos que en $\mathcal{S}(A)$ el $*$-producto es igual al producto usual.

LEMA 3.6 *Sean $\mathcal{P}_{P,Q_j}$ ideales de Lipman con $j \in \mathcal{I}$ y $|\mathcal{I}| < \infty$ tales que todos ellos son ideales de tallo i, entonces $\prod_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{P}_{P,Q_j}$ es un ideal completo.*

Demostraci n

Sea $J = \prod^*_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{P}_{P,Q_j}$ y X un generador minimal de J; haremos la prueba por inducción en $l = \max(l(\mathcal{P}_{P,Q_j}))$, donde $l(\mathcal{P}_{P,Q_j})$ es la longitud del camino que une P con Q_j.

- Si $l = 0$ entonces todos los ideales esenciales son el ideal maximal, y el producto usual es una potencia del ideal maximal, que es completo.

- Si $l > 0$ entonces existe $i \neq 0$ tal que todos los ideales tienen tallo i; sea B la transformación cuadrática de A tal que $\mathcal{M}B = (x_i)B$ y Q'' el punto asociado a B.
  Ya que $\prod_{j\in\mathcal{I}} \mathcal{P}_{Q'',Q_j}$ es completo, por la hipótesis de inducción, entonces tenemos que $J_B =$ $= \prod_{j\in\mathcal{I}} \mathcal{P}_{Q'',Q_j}$.
  Si $r = ord_A(J)$ entonces por el lema 3.5 $X/x_i^r = \prod_{j\in\mathcal{I}} x_j$ con $x_j x_i^{r_j} \in A$ donde x_j está en la transformada débil de $\mathcal{P}_{P,Q_j}$ y $r_j = ord_A(\mathcal{P}_{P,Q_j})$, con lo que $X = \prod_{j\in\mathcal{I}}(x_j)x_i^{r_j}$ y por tanto $X \in \prod_{j\in\mathcal{I}} \mathcal{P}_{P,Q_j}$ y este producto es completo.

COROLARIO 3.2 *Sea $I = \prod_{j\in\mathcal{I}} \mathcal{P}_{P,Q_j}$ entonces I es completo, e $I \in \mathcal{S}(A)$.*

Demostración

$\overline{I} = \prod^*_{j\in\mathcal{I}} P_{P,Q_j}$; reordenando los factores, si es necesario, $\overline{I}$ es el $*$-producto de ideales completos de tallo distinto, y entonces por la proposición 3.8, este producto es igual al producto usual, pero cada factor es el producto de ideales de Lipman del mismo tallo y entonces por el lema 3.6 este producto es igual al producto usual y tenemos el resultado pedido.

PROPOSICION 3.9 *Si $I \in \mathcal{S}(A)$ entonces $\exists!\ n_P \geq 0$ tales que*

$$I = \prod_{Q\leq P} \mathcal{P}_{Q,P}{}^{n_Q}$$

Demostración

Es trivial por el anterior resultado y por la factorización única establecida en **[L2]** .

PROPOSICION 3.10 *Si $I \in \mathcal{S}(A)$ y Q es un punto infinitamente próximo a P entonces I_Q es un ideal completo.*

Demostraci n. Por **[L2]** y el corolario 3.1 la transformada débil de un ideal de Lipman es un ideal de Lipman, y entonces si

$$I = \prod_{R\leq P} \mathcal{P}_{P,R}{}^{n_R}$$

tenemos que

$$I_Q = \prod_{R\leq Q} \mathcal{P}_{Q,R}{}^{n_R} = \overline{I_Q}$$

TEOREMA 3.2 *Si $I, J \in \mathcal{S}(A)$ entonces IJ es un ideal completo.*

Demostración

Por la factorización única y la anterior proposición 3.9 $\exists n_Q, m_Q \geq 0$ tales que $I = \prod \mathcal{P}_{P,Q}{}^{n_Q}$ y $J = \prod \mathcal{P}_{P,Q}{}^{m_Q}$. Ahora, por la factorización única y la proposición 3.9 tenemos que $I * J = = \prod \mathcal{P}_{P,Q}{}^{m_Q + n_Q} = IJ$.

Este teorema da a $\mathcal{S}(A)$ la estructura de semigrupo con el producto usual de ideales.

Vemos ahora una caracterización de los ideales en $\mathcal{S}(A)$ en función de los pesos del árbol asociado a I.

PROPOSICION 3.11 *Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial completo de soporte finito, $I \in \mathcal{S}(A)$ si y sólo si, para todo P en el árbol asociado a I tenemos que:*

$$m(P) \geq \sum_{i=1}^{d} m(P,i)$$

donde $m(P,i) = m(P(i)) + \sum_{j \neq i} \sum_{t \geq 1} m(P(i,j,t))$, $m(P(i))$ es el peso del sucesor de P en el lado etiquetado con i, y $m(P(i,j,t))$, es el peso del sucesor de $P(i,j,t-1)$ en el lado etiquetado con j si $t > 1$, y si $t = 1$ es el peso del sucesor de $P(i)$ en el lado etiquetado con j.

Demostración

Ya que $m(P) \geq \sum_{i=1}^{d} m(P,i)$ es una desigualdad lineal, es bastante probarla para el caso de ideales de Lipman, pero en este caso son las desigualdades de proximidad.

Si I es un ideal monomial completo de soporte finito e I cumple las desigualdades $m(P) \geq \geq \sum_{i=1}^{d} m(P,i)$ entonces $\overline{I_Q} \in \mathcal{S}(B)$ (siendo B el anillo local regular asociado a Q), por hipótesis de inducción en el número de puntos base de I. Entonces $I = \mathcal{M}^t \prod^* \mathcal{P}_{P,R}{}^{n_R}$, donde $(\mathcal{P}_{Q,R})^{n_R}$ esté en la factorización de $\overline{I_Q}$ para algún Q que esté en el primer vecindario infinitesimal de P y $t = ord_A(I) - ord_A(\prod^* \mathcal{P}_{A,C}{}^{n_C}) \geq 0$, y entonces $I \in \mathcal{S}(A)$.

PROPOSICION 3.12 *Si $I \in \mathcal{S}(A)$ existe una biyección entre los generadores minimales de I y los generadores minimales de $\mathcal{M}^b$, donde $b = ord_A(I)$.*

Demostración

Podemos suponer que $b \neq 0$, ya que si $b = 0$ la proposición es trivial.

Como $I \in \mathcal{S}(A)$ existen I_j, $j \in \mathcal{I} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ ideales monomiales completos de soporte finito de tallo j tales que $I = \prod_{j \in \mathcal{I}}^* I_j$; sea $b_j = ord_A(I_j)$ y definimos para cada $j \in \mathcal{I}$ $c_j =$

$= \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} b_i$ y $c_j = b$ si $j \notin \mathcal{I}$.
Sea $X = \prod_{i=1}^{d} {x_i}^{a_i}$ un generador minimal de I

- Si existe un $a_j > c_j$ para algún $j \in \mathcal{I}$ entonces $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} a_i < b_j\,(*)$ ya que si $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} a_i \geq b_j$ tenemos que $X' = X/x_j \in I$ por el lema 3.1, y entonces X no es un generador minimal de I.
- Podemos definir
$$\phi(X) = (\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} {x_i}^{a_i}){x_j}^{t}$$
donde $t = b - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} a_i$.
- Si para todo $j \in \mathcal{I}$ $a_j \leq c_j$ y $ord_A(X) > b$ entonces si k es tal que $a_k \neq 0$ $X' = X/x_k \in I$ por el lema 3.1 y X no es un generador minimal . Entonces si $\forall j \in \mathcal{I}$ $a_j \leq c_j$ tenemos que $ord_A(X) = ord_A(I)$ y podemos definir $\phi(X) = X$.

Observos que ϕ está bien definida, ya que si existen $i, j \in \mathcal{I}$ $i \neq j$ tales que $a_i > c_i$, $a_j > c_j$, entonces $X' = X/x_i \in I$ por el lema 3.1.
Ahora construiremos la inversa. Para ello consideremos $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ la aplicación tal que $\tau(x)$ es el menor número en $\mathbb{N}$ mayor o igual a x.
Sea $X = \prod_{i=1}^{d} {x_i}^{a_i}$ tal que $\sum_{i=1}^{d} a_i \geq b$

- Si existe un $j \in \mathcal{I}$ con $a_j > c_j$ entonces consideraremos el número $t = \max((v(I) - -v(X))/v(x_j))$ donde el máximo es tomado en todas las valoraciones de clase j asociadas a I; sea $t' = \tau(t)$, entonces $\Phi(X) = X{x_j}^{t'}$. Es f cil ver que $\Phi(X)$ es un generador minimal de I y que $\phi \circ \Phi(X) = X$.
- Si $\forall j \in \mathcal{I}$ tenemos $a_j \leq c_j$ entonces $v(X) \geq v(I)$ para toda valoración monomial asociada a I, y entonces $X \in I$. En este caso definimos $\Phi(X) = X$

Es fácil ver, ahora, que $\phi \circ \Phi(X) = X$ y que $\Phi \circ \phi = Id$.

OBSERVACION 3.11 *Observemos que la anterior proposición es cierta cuando I es el $*$-producto de ideales de tallo j, donde dos ideales distintos tienen tallo distinto, y no sólo cuando $I \in$ $\in \mathcal{S}(A)$.*

COROLARIO 3.3 *Si $I \in \mathcal{S}(A)$ y $b = ord_A(I)$ entonces el número de generadores minimales de I es igual a el número de generadores minimales de $\mathcal{M}(A)^b$.*

Esta biyección nos da un algoritmo para encontrar los generadores minimales de I, si conocemos las valoraciones monomiales asociadas a I, y una factorización de I en productos de ideales de tipo i, donde dos ideales distintos tienen distitnto tipo.

Una vez estudiado en profundidad el semigrupo tórico especial de un anillo local regular podemos volver al problema objetivo de esta Memoria, dar condiciones suficientes para saber si un ideal monomial completo de soporte finito cumple que sus potencias también son completas. Evidentemente, de los resultados obtenidos en esta sección este problema se resuelve diciendo que dicho ideal debe estar en el semigrupo tórico especial.

Podemos ahora preguntarnos dada una constelación tórica que condiciones debe cumplir dicha constelación para que todos los ideales monomiales completos cuyo soporte sea dicha constelación estén en el semigrupo tórico especial. La respuesta a dicha pregunta se tiene comparando las desigualdades de proximidad que deben cumplir todos los ideales monomiales con soporte en la constelación con las desigualdades que deben cumplir los ideales que pertenecen al semigrupo tórico especial del origen de la constelación. Evidentemente para que las desigualdes de proximidad garantizen que se cumplen también las desigualdades que caracterizan el semigrupo tórico especial, la constelación debe cumplir las mismas condiciones que se han dado, ver sección 3.1, para que el cono de curvas sea regular. Dicho de otra forma el cono de curvas es regular si y solamente si se tiene que todos los ideales soportados sobre la constelación están en el semigrupo t rico especial.

En terminos de los conos característicos el semigrupo tórico se puede interpretar como un subcono de $\widetilde{P}(Z/X)$ (El generado por los divisores asociados a los ideales de Lipman). En el caso regular en el cual el cono característico es poliedrico estos dos conos coinciden (y por tanto todos los ideales soportados sobre la constelación están en el semigrupo tórico especial). Ya que los divisores asociados a los ideales de Lipman son, en este caso, los vectores extremales, podemos fácilmente encontrar las células (no son más que los conos abiertos generados por un subconjunto cualquiera de dichos elementos extremales). De esta forma podemos saber cuantas variedades intermedias existen. Para ello sólo hay que tener en cuenta que hay 2^m células, donde m es el número de puntos. Como dos de estas células (la de dimensión 0 y la de dimensión máxima respectivamente) corresponden a la variedades X y Z, entonces el número total de variedades intermedias es $2^m - 2$. Aún más, podemos encontrar de forma explicita estas variedades, ya que basta con elegir un ideal en cada célula (como todos están en el semigrupo tórico, todos nos producen variedades normales) y explotarlos. Además los ideales de Lipman son los elementos extremales del cono caracter stico y por tanto cada célula de dimensión r se caracteriza por las combinaciones lineales con coeficientes positivos de r de estos elementos extremales, por lo cual tenemos localizandas todas las variedades intermedias, al menos, en el caso tórico y regular.

Capítulo4
Estudio homológico de los ideales del semigrupo tórico especial

En este capítulo, para completar nuestro estudio de los ideales pertenecientes al semigrupo tórico especial, realizaremos un estudio homológico de dichos ideales que tendrá como finalidad la determinación de las sicigias de la resolución minimal y el cálculo de los números de Betti. Para ello, en la primera sección, construiremos una resolución minimal de dichos ideales, considerados como A-módulos.

Para encontrarla, lo haremos, de hecho, globalmente. Es decir, sustuiremos nuestro anillo local regular de dimensión d por el anillo de polinomios en d variables con coeficientes enteros, que llamaremos R. Podemos transladar nuestro ideal monomial a este nuevo anillo considerando el ideal generado por los mismos monomios pero en las nuevas indeterminadas.

Una vez conseguida la resolución minimal para este nuevo anillo obtendremos la del anillo local regular realizando un producto tensiorial como $\mathbb{Z}$-módulos por el anillo de partida.

Para determinar esta resolución minimal utilizaremos un razonamiento similar al utilizado en **[El]** , con las debidas modificaciones. Estas modificaciones consisten en dividir los generadores del ideal monomial de soporte finito en $d+1$ clases distintas, de forma que en cada una de ellas, con un orden especial, podamos utilizar la derivación propia de los ideales estables. Observamos que estos razonamientos están basados en el hecho de que para todo ideal perteneciente al semigrupo tórico especial existe una factorización en ideales monomiales completos de soporte finito de clase i, con todos los factores de distinta clase. No obstante existen ideales completos de soporte finito para los cuales existe esta factorización, pero que no pertenecen al semigrupo tórico especial; para estos ideales también se tendr a la resolución minimal anteriormente mencionada.

Una vez establecida dicha resolución, en la sección segunda, determinamos los números de Betti de los ideales del semigrupo tórico especial. La determinación, una vez conocida la resolución minimal, ha resultado muy simple ya que, con un razonamiento muy sencillo, se puede mostrar que coincide con el rango de los módulos libres encontrados.

Observamos que dichos números de Betti sólo dependen, a parte del índice, de la dimensión y del orden del ideal del semigrupo tórico especial, por lo cual coinciden con los de la potencia del maximal que tiene el mismo orden que el ideal considerado. Damos, en esta misma sección, también una fórmula combinatoria que nos permite encontrar dichos números.

En la tercera sección calculamos los módulos de sicigias de un ideal perteneciente al semigrupo tórico especial. Para ello utilizamos de forma esencial que la resolución minimal que hemos encontrado es una resolución exacta. En función de esta resolución damos los módulos de sicigias del ideal considerado, como las imágenes por cada derivación de los módulos libres que componen la resolución minimal.

4.1 Una resolución minimal para los ideales pertenecientes al semigrupo tórico especial.

En esta sección estudiaremos una resolución minimal para los ideales del semigrupo tórico especial que, en secciones siguientes de esta Memoria, utilizaremos para calcular las sicigias y los números de Betti de dichos ideales.

Para la construcción de la resolución minimal seguiremos un razonamiento similar, aunque con las necesarias y lógicas transformaciones para adaptarlo a nuestro caso, al seguido por Eliahou y Kervaire en **[El]** .

La relacción entre los ideales estables, y los elementos del semigrupo tórico especial se establece a través de la biyección que existe entre los generadores de los ideales del semigrupo tórico especial y una potencia del ideal maximal adecuada, que pertenece a los ideales estables.

Podemos entender los ideales del semigrupo tórico especial, como un 'pegado' de ideales estables con una zona de transición que garantiza que el 'pegado' se lleva a cabo de forma coherente, en los que hemos utilizado para definirlos unos ordenes distintos al habitual para los números $\{1, ..., d\}$ donde d es la dimensión del anillo A.

Con estas ideas veremos como se transforma el razonamiento hecho en por Eliahou y Kervairey y como dicho razonamiento nos conduce a la resolución minimal de los ideales del semigrupo tórico especial.

DEFINICION 4.1 *Dado un anillo local $(A, \mathcal{M})$ y un A-módulo B, decimos que (L_i, d_i) es una resolución minimal de B si (L_i, d_i) es una resolución de B y además $d_i(L_i) \subseteq \mathcal{M}L_{i-1}$.*

En esta sección de la Memoria cambiaremos un poco la notación con el fin de hacerla má s simple.

Sea $(A, \mathcal{M})$ un anillo local regular de dimensión d, $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros de A e I un elemento del semigrupo tórico especial de A.

Consideremos el anillo $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, φ el homomorfismo canónico de R en A que cumple que $\varphi(X_j) = x_j$, entonces consideremos el ideal en R generado por los elementos $u = \varphi^{-1}(w)$ donde w recorre los elementos de un sistema minimal de generadores de I formado por monomios en $x_1, \ldots, x_d$. Por simplicidad a tal sistema de generadores lo llamaremos a partir de ahora le llamaremos sistema minimal de generadores de I y a sus elementos generadores minimales.

Por el siguiente teorema debido a J. Eagon y M.Hochster en **[E]** tenemos que basta encontrar una resolución minimal de J para tener una resolucin minimal de I.

TEOREMA 4.1 *Con la notación anteriormente introducida si (L_i, d_i) es una resolución minimal de J entonces $(L_i \otimes_R A, d_i \otimes_R Id)$ es una resolución minimal para I.*

Como I está en el semigrupo tórico especial existen ideales I_i $i = 0, \ldots, d$ tales que $I = \prod I_i$ y para los que se cumple que cada I_i es de tipo i si $I_i \neq A$. Estos ideales nos dan también una factorización de J en los ideales $J_i = \varphi^{-1}(I_i)$.

Existe, por lo ya visto en la sección tres del capítulo cuatro, una biyección entre los generadores minimales de J y los generadores minimales de M^t con $t = ord_M(I)$, siendo $M = = (X_1, \ldots, X_d)R$. Dicha biyección será denotada por ϕ.

DEFINICION 4.2 *Sea $X = \prod_{j=1}^{d} X_j^{a_j}$ un monomio. El orden $<_i$ es tal que $1 <_i \ldots <_i i-1 <_i$ $<_i i+1 <_i \ldots <_i d-1 <_i d <_i i$. Claramente el orden $<_d$ es igual al orden natural. Cada $<_i$ induce un orden lexicográfico inverso. $\max_i(X)$ ($\min_i(X)$) es el maximo (minimo) índice en el orden $<_i$ con exponente en X no nulo. Para simplificar, escribiremos, algunas veces, $\max(X)$ $(\min(X))$ en lugar de $\max_d(X)$ $(\min_d(X))$*

DEFINICION 4.3 *Con la notación ya vista, definimos $b_j = ord_A(I_j)$ y $c_j = \sum_{i \neq j} b_i$.*

DEFINICION 4.4 *Sea u un generador minimal de J y $\phi(u) = \prod_{j=1}^{d} X_j^{a_j}$, decimos que u es de clase $i \neq 0$ existe un i tal que $a_i > c_i$.*
Si u no es de clase i para ning n $i \neq 0$, entonces decimos que u es de clase 0.

DEFINICION 4.5 *$e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo posible si $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$ y u es un generador minimal de J.*
Si $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo posible, entonces $ord[e(j_1, \ldots, j_s; u)] = s$.
$C_s = \oplus e(j_1, \ldots, j_s; u)R$, donde $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo posible de orden s y $C_{-1} = J$

DEFINICION 4.6 *Dado* $e(j_1,\ldots,j_s;u)$*, con* $\phi(u)=\prod_{m=1}^{d} X_m{}^{a_m}$ *denotamos por* u_i *a:*

1. $\phi^{-1}(\phi(u)X_{j_i}/X_j)$ si la clase de u es $j\neq 0$ y $j\neq j_i$.
2. $\phi^{-1}(\phi(u)X_{j_i}/X_{\max(u)})$ si la clase de u es 0, $a_{j_i}<c_{j_i}$ y $j_i<\max(u)$.
3. u en otro caso.

DEFINICION 4.7 *Definimos* $D_s(e(j_1,\ldots,j_s;u))$ *por*

$$\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\left(X_{j_i}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u)-y_ie(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u_i)\right)\ \textit{si}\ s\neq 0$$

donde $X_{j_i}u=y_iu_i$

u *si* $s=0$

LEMA 4.1 *Si* $s>1$ *entonces* $(u_r)_t=(u_t)_r$

Demostración

Sea $\phi(u)=\prod_{m=1}^{d}X_m{}^{a_m}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $t<r$. Por la proposición 3.12 es suficiente probar que $\phi((u_r)_t)=\phi((u_t)_r)$

1. u es de clase $j\neq 0$, $a_j>c_j+1$, y $j_t,j_r\neq j$ entonces

$$\phi((u_r)_t)=\frac{\phi(u)X_{j_r}}{X_j}\frac{X_{j_t}}{X_j}$$

$$\phi((u_t)_r)=\frac{\phi(u)X_{j_t}}{X_j}\frac{X_{j_r}}{X_j}$$

2. u es de clase $j\neq 0$, $a_j=c_j+1$, $j_t,j_r\neq j$ y $j_r\geq\max(u)$ entonces

$$\phi((u_r)_t)=\frac{\phi(u)X_{j_r}}{X_j}\frac{X_{j_t}}{X_{j_r}}=\frac{\phi(u)X_{j_t}}{X_j}$$

$$\phi((u_t)_r)=\frac{\phi(u)X_{j_t}}{X_j}$$

3. u es de clase $j \neq 0$, $a_j = c_j + 1$, $j_t, j_r \neq j$ y $j_r < \max(u)$ entonces

$$\phi((u_r)_t) = \frac{\phi(u) X_{j_r}}{X_j} \frac{X_{j_t}}{X_{\max(u)}}$$

$$\phi((u_t)_r) = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_j} \frac{X_{j_r}}{X_{\max(u)}}$$

4. u es de clase $j \neq 0$, y uno de ellos, por ejemplo, j_r es igual a j, entonces

$$\phi((u_r)_t) = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_j}$$

$$\phi((u_t)_r) = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_j}$$

5. si u es de clase 0, $a_{j_r} < c_{j_r}$, $a_{j_t} < c_{j_t}$, $\max(u/X_{\max(u)}) \leq j_r < \max(u)$, entonces

$$\phi((u_r)_t) = \frac{\phi(u) X_{j_r}}{X_{\max(u)}} \frac{X_{j_t}}{X_{j_r}} = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_{\max(u)}}$$

$$\phi((u_t)_r) = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_{\max(u)}}$$

6. u es de clase 0,$a_{j_r} < c_{j_r}$, $a_{j_t} < c_{j_t}$, $e = \max(u/X_{\max(u)}) > j_r$

$$\phi((u_r)_t) = \frac{\phi(u) X_{j_r}}{X_{\max(u)}} \frac{X_{j_t}}{X_e}$$

$$\phi((u_t)_r) = \frac{\phi(u) X_{j_t}}{X_{\max(u)}} \frac{X_{j_r}}{X_e}$$

7. si u es de clase 0 y uno de ellos, por ejemplo, j_r cumple que $a_{j_r} = c_{j_r}$, entonces

$$\phi((u_r)_t) = \phi(u_t)$$

$$\phi((u_t)_r) = \phi(u_t)$$

8. si u es de clase 0 y $j_r \geq \max(u)$, entonces

$$\phi((u_r)_t) = \phi(u_t)$$

$$\phi((u_t)_r) = \phi(u_t)$$

y tenemos el resultado deseado.

PROPOSICION 4.1 (C_*, D_*) *es un complejo*

Demostración

Necesitamos probar que $D_{s-1}D_s(e(j_1, \ldots, j_s; u)) = 0$.

- Si $s = 1$, entonces es trivial.
- Si $s > 1$, entonces definimos:

$$D_s{}^1(e(j_1, \ldots, j_s; u)) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i X_{j_i} e(j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_s; u)$$

$$D_s{}^2(e(j_1, \ldots, j_s; u)) = -\sum_{i=1}^{s} (-1)^i y_i e(j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_s; u_i)$$

Ahora tenemos que:

$$D_{s-1}{}^1 D_s{}^1(e(j_1, \ldots, j_s; u)) = D_{s-1}{}^1 \left(\sum_{i=1}^{s} (-1)^i X_{j_i} e(j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_s; u) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^{i+m} X_{j_i} X_{j_m} e(j_1, \ldots, j_{m-1}, j_{m+1}, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_s; u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=i+1}^{s}(-1)^{i+m-1}X_{j_i}X_{j_m}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_s;u)=0$$

Por otro lado:

$$\left(D_{s-1}{}^{1}D_s{}^{2}+D_{s-1}{}^{2}D_s{}^{1}\right)(e(j_1,\ldots,j_s;u))=$$

$$=D_{s-1}{}^{1}\left(\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i+1}y_ie(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u_i)\right)+$$

$$+D_{s-1}{}^{2}\left(\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i}X_{j_i}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{i-1}(-1)^{i+m+1}y_iX_{j_m}e(j_1,\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=i+1}^{s}(-1)^{i+m}y_iX_{j_m}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_s;u_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{i-1}(-1)^{i+m+1}y_mX_{j_i}e(j_1,\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u_m)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=i+1}^{s}(-1)^{i+m}y_mX_{j_i}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_s;u_m)=0$$

y

$$D_{s-1}{}^{2}D_s{}^{2}(e(j_1,\ldots,j_s;u))=D_{s-1}{}^{2}\left(\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i+1}y_ie(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;u_i)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{i-1}(-1)^{i+m+2}y_{i,m}e(j_1,\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_s;(u_i)_m)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=i+1}^{s}(-1)^{i+m+1}y_{i,m}e(j_1,\ldots,j_{i-1},j_{i+1},\ldots,j_{m-1},j_{m+1},\ldots,j_s;(u_i)_m)=0$$

ya que $(u_i)_m=(u_m)_i$ e $y_{m,i}=y_{i,m}$ con lo que (C_*,D_*) es un complejo.

DEFINICION 4.8 *Sea $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ un símbolo posible y $\phi(u) = \prod_{m=1}^{d} {X_m}^{a_m}$ entonces $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo inadmisible si:*

1. u tiene clase $j \neq 0$ y existe k tal que $j_k = j$.
2. u tiene clase 0 y $j_s \geq \max(u)$
3. u tiene clase 0 y existe k tal que $a_{j_k} = c_{j_k}$

DEFINICION 4.9 *Sea $N_s = \oplus e(j_1, \ldots, j_s; u)R$ donde $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo inadmisible con orden s, si $s > 0$, y $N_0 = N_{-1} = 0$*

Claramente $D_s(N_s) \subseteq N_{s-1}$, y entonces si $L_* = C_*/N_*$, y d_* es la derivación inducida, entonces tenemos que (L_*, d_*) es un complejo.

DEFINICION 4.10 *Sea $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ un símbolo posible, decimos que $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo admisible, si no es un símbolo inadmisible.*

OBSERVACION 4.1 *Trivialmente tenemos que $L_s \approx \oplus e(j_1, \ldots, j_s; u)R$, donde $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo admisible.*

DEFINICION 4.11 *Sea u, v generadores minimales de J, decimos que $u < v$ si*

1. La clase de u es menor que la clase de v
2. La clase de u es igual a la clase de v, esta clase no es igual a cero y u es menor que v en el orden lexicográfico inverso inducido por el orden $<_i$, donde i es la clase de u.
3. La clase de u es igual a la clase de v, esta clase es igual a cero y u es menor que v en el orden lexicográfico inverso inducido por el orden natural en $\mathbb{N}$.

OBSERVACION 4.2 *Si $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ es un símbolo admisible $u_r < u$.*

DEFINICION 4.12 *Sean $e(j_1, \ldots, j_s; u), e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$ dos símbolos admisibles, entonces decimos que $e(j_1, \ldots, j_s; u) < e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$ si*

1. $u < v$
2. $u = v$ y $(j_1, \ldots, j_s) < (j'_1, \ldots, j'_s)$ en orden lexicogrífico inducido por el orden natural en $\mathbb{N}$.

LEMA 4.2 *Sea* $a = e(j_0, \ldots, j_s; u) \in L_{s+1}$, *con* $s \geq 0$, *entonces* $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ *es el mayor símbolo en* $d(a)$.

Demostración
Trivial.

DEFINICION 4.13 *Sea* $a = ze(j_1, \ldots, j_s; u)$, *donde* z *es un monomio en* $X_1, \ldots, X_n$ *y* $e(j_1, \ldots, j_s; u)$ *es un símbolo admisible, entonces decimos que* a *es normal si* $z = 1$ *o si*

1. $s = 0$, la clase de u es $j \neq 0$ y $\min_j(z) = j$
2. $s = 0$, la clase de u es 0, y $\min(z) \geq \max(u)$ o $\nexists j < \max(u)$ tal que el exponente de X_j en $\phi(u)$ no es igual a c_j, y $X_j \mid z$.
3. $s > 0$, la clase de u es $j \neq 0$ y $\min_j(z) = j$ o $\min_j(z) \geq j_1$
4. $s > 0$, la clase de u es 0, y $\min(z) \geq j_1$ o $\nexists j < j_1$ tal que el exponente de X_j en $\phi(u)$ no es igual a c_j, y $X_j \mid z$.

DEFINICION 4.14 *Un elemento de* L_s *es normal si es combinación lineal de símbolos normales o es igual a* 0.

LEMA 4.3 *Si* $f \in L_s$ *no es normal, entonces* f *es equivalente módulo* $Img\,(d_{s+1})$ *a un elemento normal.*

Demostración
Supongamos que $f = ze(j_1, \ldots, j_s; u)$, donde z es un monomio. Entonces, por la definición de elemento normal, existe m tal que $z/x_m \in A$, y $a = z/x_m e(m, j_1, \ldots, j_s; u) \in \in L_{s+1}$, $d(a) = -f+$ símbolos en L_s menores que f, y entonces podemos sustituir f módulo $Img\,(d_{s+1})$ por elementos má pequeños, y así sucesivamente. Pero este proceso tiene un fin porque hay sólo una cantidad finita de símbolos y entonces tenemos que llegar a un elemento normal.

LEMA 4.4 *Sea* $a = ze(j_1, \ldots, j_s; u) \in L_s$, *un elemento normal y sea* $b = ye(j'_1, \ldots, j'_s; v)$, *donde* z *e* y *son monomios, tales que el mayor elemento en* $d(a)$ *aparece en* $d(b)$, *entonces* $e(j_1, \ldots, j_s; u) \leq e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$.

Demostración

Sea $u = \prod_{i=1}^{d} {X_i}^{a_i}$, y $v = \prod_{i=1}^{d} {X_i}^{g_i}$, entonces tenemos varios casos:

1. $s = 0$ y la clase de u es $j \neq 0$: entonces $z = {X_j}^n$. Tenemos que $y = {X_j}^e v'$, donde $X_j \nmid v'$, y $uz = vy$. Si $n \leq e$ entonces $u = v$; si $n > e$, se tiene que ${X_j}^{n-e} u = vv'$; entonces la clase de v es j y $g_j = (n-e) + a_j > a_j$ luego $u < v$.
2. $s = 0$, la clase de u es 0 y $\min(z) \geq \max(u)$: Tenemos que $uz = yv$. Podemos suponer que la clase de v es 0 y $\max(u) \geq \max(v)$, ya que en caso contrario no hay nada que probar. Si $\max(u) > \max(v)$ entonces $v \mid u$, y esto es absurdo. Si $\max(u) = \max(v)$ tenemos dos casos:
   a. $\forall k < \max(u)$ $a_k = g_k$, entonces $a_{\max(u)} = g_{\max(v)}$ y $u = v$.
   b. $\exists k < \max(u)$ tal que $a_k > g_k$ entonces $a_{\max(u)} < g_{\max(v)}$ y $u < v$.
3. $s = 0$, la clase de u es 0, $t = \min(z) < \max(u)$, y el exponente de X_t en $\phi(u)$ es igual a c_t: Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que la clase de v es 0, y entonces tenemos que $X_t \mid y$. Sea $z = (X_t)^n v'$, entonces tenemos dos casos:
4. $y = (X_t)^e v"$, donde $X_t \nmid v"$ y $\min(v') \geq \max(u)$. Podemos suponer que $\max(u) \geq$ $\geq \max(v)$; Entonces $n \leq e$, y $uv' = v" {X_t}^{e-n} v$, y estamos en el caso 2.
5. $z = (X_t)^n (X_{t'})^{n'} h$, donde $t' = \min(\frac{z}{(X_t)^n}) < \max(u)$ y $\min(h) \geq \max(u)$, entonces $y = (X_t)^e (X_{t'})^{e'} h'$ con $X_t, X_{t'} \nmid h', n \leq e, n' \leq e'$ y estamos en 2 otra vez.

Si $s > 0$ entonces podemos suponer por la observación 4.2, que $u = v$.

1. $s > 0$, la clase de u es $j \neq 0$, y $z = {X_j}^n$, entonces $zX_{j_1} = yX_{j'_r}$ $(*)$ y $e(j_2, \ldots, j_s; u) =$ $= e(j'_1, \ldots, j'_{r-1}, j'_{r+1}, \ldots, j'_s; u)$ $(**)$. Por $(*)$, y ya que $j'_r \neq j$ tenemos que $j'_r = j_1$ y entonces $r = 1$, y $e(j_1, \ldots, j_s; u) = e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$
2. $s > 0$, la clase de u es $j \neq 0$, y $z = {X_j}^n v'$, con $\min(v') \geq j_1$ y $X_j \nmid v'$. Tenemos de nuevo las igualdades $(*)$ y $(**)$, y por tanto se tiene que $j'_r \geq j_1$. Si $r > 1$ entonces $j_r = j'_{r-1} <$ $< j'_r$, y $e(j_1, \ldots, j_s; u) \leq e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$. Si $r = 1$ entonces trivialmente $e(j_1, \ldots, j_s; u) \leq$ $\leq e(j'_1, \ldots, j'_s; v)$.
3. $s > 0$, la clase de u es 0, y $\min(z) \geq j_1$, entonces tenemos $(*)$ y $(**)$, y estamos en el último caso.
4. $s > 0$, la clase de u es 0, $\min(z) < j_1$ y existe k tal que el exponente de X_k en $\phi(u)$ es igual

a c_k y $z = {X_k}^e v'$ con $\min(v') \geq j_1$. Otra vez tenemos $(*)$ y $(**)$, y ya que $j_r' \neq k$ se tiene que $j_r' \geq j_1$ y estamos en el caso 2.

5. $s > 0$, la clase de u es 0, $\min(z) < j_1$ y existen k, k' tales que el exponente de X_k en $\phi(u)$ es igual a c_k y el de $X_{k'}$ es igual a $c_{k'}$ y $z = {X_k}^e X_{k'}^{e'} v'$ con $\min(v') \geq j_1$. De nuevo tenemos $(*)$ y $(**)$, y ya que $j_r' \neq k, k'$ entonces se tiene que $j_r' \geq j_1$ y de nuevo estamos en el final del caso 2.

LEMA 4.5 *Si $f \in ker(d_s)$ es un elemento normal, entonces $f = 0$.*

Demostración

Sea $f \in ker(d_s)$, f un elemento normal, $f \neq 0$; c el mayor símbolo en f, y a el mayor símbolo en $d(c)$; entonces por el lema 4.4 a no puede cancelarse contra ningún otro término en $d(f)$. Y por tanto $d(f) \neq 0$.

PROPOSICION 4.2 $ker(d_s) = Img(d_{s+1})$

Demostración

Sea $f \in ker(d_s)$, entonces $\exists g$ normal, tal que $f = g + Img(d_{s+1})$; y por tanto $0 = d(f) = d(g)$, y por el lema 4.5 $g = 0$, y $f \in Img(d_{l+1})$, con lo que $ker(d_l) = Img(d_{l+1})$.

OBSERVACION 4.3 *Esta proposición nos dice que (L_*, d_*) es una resolución de J, y ya que $d_s(L_s) \subseteq (X_1, \ldots, X_d)L_{s-1}$, entonces $(L_* \otimes_R A, d_* \otimes_R Id)$ es una resolución minimal de I.*

OBSERVACION 4.4 *No necesitamos que $I \in \mathcal{S}(A)$, tenemos la misma resolución minimal si I es un $*$-producto de ideales de clase j, donde dos ideales con la misma clase son el mismo.*

4.2 Los números de Betti de los ideales del semigrupo tórico especial

Fijaremos como en todo lo anterior un anillo local regular $(A, \mathcal{M})$ de dimensión d, un sistema regular de parámetros de dicho anillo $\{x_1, \ldots, x_d\}$ y un ideal $I \in \mathcal{S}(A)$.

A partir de ahora llamaremos k al cuerpo $\dfrac{A}{\mathcal{M}}$. Definimos el i-ésimo número de Betti de I, $B_i(I)$, como la k-dimensión del espacio vectorial $Tor_i(k, I)$.

En la sección anterior encontramos una resolución minimal para estos ideales, $(L_* \otimes_R A)$, donde $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$. Podemos, pues, utilizar dicha resolución para calcular $Tor_i(k, I)$.

Ahora al ser una resolución minimal entonces $[d_i \otimes_R A] \otimes_A Id \equiv 0$ y por tanto el i-ésimo número de Betti de I es igual al rango de $L_i \otimes_R A$, o lo que es lo mismo, al rango de L_i, por lo que es evidente que $B_i(I) = 0$ si $i \geq d$

TEOREMA 4.2 *Sea $I \in \mathcal{S}(A)$ entonces $B_i(I) = B_i(\mathcal{M}^a)$, donde $a = ord_A(I)$*

Demostración

Haremos la demostración por inducción en $t = \#\tilde{A}$, donde $\tilde{A} = \{j /$ hay en el árbol asociado a I una rama etiquetada con j saliendo del origen$\}$

- Si $t = 0$; entonces I es una potencia del ideal maximal, y la proposición es trivial.
- Si $t > 0$; Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $d \in \tilde{A}$, ya que esto se consigue reordenando los elementos del sistema regular de parámetros fijo, con lo que tendríamos otra resolución minimal. Pero los números de Betti no dependen de la resolución minimal elegida, puesto que son la dimensión de $Tor_i(k, I)$, y estos espacios vectoriales no dependen de la resolución elegida.

  Sea I' el ideal monomial completo de soporte finito asociado al árbol que obtenemos eliminando la rama etiqueda con d; si $I = I_0 * \ldots * I_d$, donde $I_j = A$ si $j \notin \tilde{A}$, e I_j es un ideal de clase j si $j \in \tilde{A}$, una factorización de I en ideales de clase j entonces $I' = (I_0 * \mathcal{M}^b) * I_1 * \ldots * I_{d-1}$, donde $b = ord_A(I_d)$. Usando esta factorización tenemos que $e(j_1, \ldots, j_i; u) \in L_i(I) \Leftrightarrow e(j_1, \ldots, j_i; \sigma(u)) \in L_i(I')$, donde σ es la biyección entre el conjunto minimal de generadores de I, y el conjunto minimal de generadores de I', y entonces $L_i(I) \approx L_i(I')$, y aplicando la hipótesis de inducción $B_i(I) = B_i(I') = B_i(\mathcal{M}^a)$.

LEMA 4.6 *Si* $0 \leq q < n$, $d \geq 1$, *y* $n \geq 1$, *entonces*

$$\sum_{m=q+1}^{n} \binom{d+m-2}{m-1}\binom{m-1}{q} = \binom{d+n-1}{d+q}\binom{d+q-1}{q}$$

Demostración

Haremos la demostración por inducción en n. Si $n = 1$ entonces $q = 0$ y esta igualdad es trivial. Sea $n > 1$ entonces

- $q < n-1$ tenemos que:

$$\sum_{m=q+1}^{n} \binom{d+m-2}{m-1}\binom{m-1}{q} = \sum_{m=q+1}^{n-1} \binom{d+m-2}{m-1}\binom{m-1}{q} + \binom{d+n-2}{n-1}\binom{n-1}{q} =$$

$$= \binom{d+n-2}{d+q}\binom{d+q-1}{q} + \binom{d+n-2}{n-1}\binom{n-1}{q} = \frac{(d+n-2)!\,(d+q-1)!}{(d+q)!\,(n-2-q)!\,q!\,(d-1)!} +$$

$$+ \frac{(d+n-2)!}{(d-1)!\,(n-1-q)!\,q!} = \frac{(d+n-2)!(d+q-1)!(n-1-q)+(d+n-2)!(d+q)!}{(d+q)!\,(n-1-q)!\,q!\,(d-1)!} =$$

$$= \frac{(d+n-2)!\,(d+q-1)!(n-1+d)}{(d+q)!\,(n-1-q)!\,q!\,(d-1)!} = \frac{(d+n-1)!\,(d+q-1)!}{(d+q)!\,(n-1-q)!\,q!\,(d-1)!} =$$

$$= \binom{d+n-1}{d+q}\binom{d+q-1}{q}$$

- si $q = n-1$, la proposición es trivial

COROLARIO 4.1 *Sea* $(A, \mathcal{M})$ *un anillo local de dimensión* d*, sea* I *un ideal monomial completo de soporte finito y* $a = ord_A(I)$ *entonces su* i*-ésimo número de Betti* $(0 \leq i < d)$ *es*

$$B_i(I) = \binom{d+a-1}{a+i}\binom{a+i-1}{i}$$

Demostración

Por el teorema anterior es suficiente probar que

$$B_i(\mathcal{M}^a) = \binom{d+a-1}{d+i}\binom{a+i-1}{i}$$

Probaremos esta igualdad contando el n mero de generadores minimales u de $\mathcal{M}^a$ con un $m = \max(u)$ dado. Este número es $\binom{a+m-2}{m-1}$, porque la división por x_m nos da una biyección entre este conjunto y el conjunto de monomios en $x_1, \ldots, x_m$ de grado $a-1$. Ahora para cada u, en estas condiciones, se tienen $\binom{m-1}{i}$ elementos admisibles, y entonces:

$$B_i(I) = \sum_{m=i+1}^{d} \binom{a+m-2}{m-1}\binom{m-1}{i} = \binom{d+a-1}{a+i}\binom{a+i-1}{i}$$

OBSERVACION 4.5 *Si* $\dim(A) = 2$ *entonces por* **[L2]** *tenemos que si* I *is un ideal monomial completo de soporte finito entonces* $I \in \mathcal{S}(A)$*; y podemos aplicar los resultados de esta sección sin ningún problema.*

EJEMPLO 4.1 *Consideremos un anillo local regular de dimensión* 3, A, *un sistema regular de parámetros* $\{x, y, z\}$ *de* A *y el ideal* $I = \langle x^2, y, z\rangle A$.

Entonces tenemos que:

$L_0 \otimes_R A = e(x^2)A \oplus e(y)A \oplus e(z)A$ y por lo tanto $B_0(I) = 3 = \binom{3+1-1}{1+0}\binom{1+0-1}{0}$

$L_1 \otimes_R A = e(2; x^2)A \oplus e(3; x^2)A \oplus e(2; z)A$ y $B_1(I) = 3 = \binom{3+1-1}{1+1}\binom{1+1-1}{1}$

$L_2 \otimes_R A = e(2, 3; x^2)A$ y $B_2(I) = 1 = \binom{3+1-1}{1+2}\binom{1+2-1}{2}$

4.3 Los módulos de sicigias de los ideales del semigrupo tórico especial

DEFINICION 4.15 *Sea R un anillo, M un R-módulo y L un R-módulo libre tal que exista una aplicación suprayectiva de L en M. Al núcleo de esta aplicación se le denomina un primer módulo de sicigias de M.*

El t-ésimo módulo de sicigias se define inductivamente como el primer módulo de sicigias del $(t-1)$-módulo de sicigias de M.

Fijemos ahora, un anillo local regular de dimensión s, $(A, \mathcal{M})$, y un ideal de $\mathcal{S}(A)$, I.

Utilizando la anterior resolución minimal para un ideal del semigrupo tórico especial de un anillo local regular podemos calcular fácilmente los módulos de sicigias correspondientes a dicho ideal I.

El resultado obtenido se encuentra en el siguiente teorema:

TEOREMA 4.3 *Con la notación de la sección 1 de este mismo capítulo se tiene que el j-ésimo módulo de sicigias de I es $(d_j \otimes_R Id)(L_j \otimes_R A)$.*

Demostración

Lo haremos por inducción en j.

- Para $j = 1$ tenemos que $d_0 \otimes_R Id$ es una aplicación suprayectiva de $L_0 \otimes_R A$ en I y por tanto un primer módulo de sicigias de I es el nú cleo de dicha aplicaci n, pero como es parte de una resolución de I este núcleo es igual a $(d_1 \otimes_R Id)(L_1 \otimes_R A)$.
- Para $j > 1$. Por hipótesis de inducción el $(j-1)$-ésimo módulo de sicigias de I es igual a $(d_{j-1} \otimes_R Id)(L_{j-1} \otimes_R A)$ y entonces un j-ésimo módulo de sicigias de I es el núcleo de $d_{j-1} \otimes_R Id$, es decir, $(d_j \otimes_R Id)(L_j \otimes_R A)$.

EJEMPLO 4.2 *Consideremos un anillo local regular de dimensión* 3*, un sistema regular de parámetros de dicho ideal* $\{x, y, z\}$ *y el ideal monomial completo de soporte finito,* I*, generado por* x^2, y, z*.*

Tenemos que:

$(d_1 \otimes_R Id)(e(2; x^2) \otimes_R 1) = y[e(x^2) \otimes_R 1] - x^2[e(y) \otimes_R 1]$

$(d_1 \otimes_R Id)(e(3; x^2) \otimes_R 1) = z[e(x^2) \otimes_R 1] - x^2[e(z) \otimes_R 1]$

$(d_1 \otimes_R Id)(e(2; z) \otimes_R 1) = y[e(z) \otimes_R 1] - z[e(y) \otimes_R 1]$

Por lo tanto un primer módulo de sicigias es el generado por $y[e(x^2) \otimes_R 1] - x^2[e(y) \otimes_R 1]$, $z[e(x^2) \otimes_R 1] - x^2[e(z) \otimes_R 1]$, $y[e(z) \otimes_R 1] - z[e(y) \otimes_R 1]$.

BIBLIOGRAFIA

[A] S.S. Abhyankar, *On the valuations centered in a local domain*, Amer. J. Math., **78**, 321-348, (1956)

[C-G-L] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg and M.Lejeune-Jalabert, *Clusters of infinitely near points*, Math Annalen, **306**, 169-194, (1996)

[C-G] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, *On the characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points.* Briskoru Anniverersary Volume. Progress in Math. Volumen 162, (1998)

[Cu1] S.D. Cutkosky, *Factorization of complete ideals*. Journal Algebra, **115**, 144-149, (1988)

[Cu2] S.D. Cutkosky, *On unique and almost unique factorization of omplete ideals II*. Inv. Math., **98**, 59-74, (1989)

[Cu3] S.D. Cutkosky, *Complete Ideals in Algebra and Geometry*. Contemporany Mathematics, **159**, 27-39, (1994)

[Cs] E. Casas-Alvero, *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*. Math. Ann., **287**, 429-454, (1990)

[D] P. Deligne, *Intersections sur les surfaces r li res in "Groupes de Monodromie . . . (SGA 7,II)* ", Lecture Notes in Math., no 340, Springer-Verlag, (1973)

[E] J. Eagon and M. Hochster, *R-sequences and indeterminates*, Quart. J. Math., **25**, 6171, (1974)

[EC] F. Enriques y O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle fuzioni algebriche*. Bologna. Zanichelli (1915)

[El] S. Eliahou and M. Kervaire, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, Journal of Algebra, **129**, 1-25, (1990)

[En] O. Ender, *Valuation theory.* Springer-Verlag (1972)

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press (1993)

[G] H. G hner, *Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings*, J. Algebra, **34**, 403429, (1975)

[He] M. Herman, S. Ikeda y U. Orbanz, *Equimultiplicity and Blowing up*. Springer-Verlag (1980)

[Ho] M.A. Hoskin, *Zero-dimensional valuation ideals associated with plane curve branches,* Proc. London Math. Soc (3), **6**, 7099, (1956)

[Ka] I. Kaplansky, *Conmutative rings*. The University of Chicago Press,(1974)

[Ke] G. Kempf, F. Knusdsen, D. Mumford, B. Saint Donat. *Toroidal embeddings I*, Lectures notes in Mathematics

[Kl] S.L. Kleiman, *Toward a numerical theory of ampleness*, Annals of Math, **84**, 293-344, (1966)

[L1] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. Ins. Hautes tudes Sci., **36**, 195279, (1969)

[L2] ¯, *On complete ideals in regular local rings. Algebraic Geometry and Conmutative Algebra, vol I, in honor of Massayoshi Nagata*. Kinokuniya, Tokyo, 203-231, (1988)

[L3] ¯, *Proximity inequalities for complete ideals in two dimensional regular local rings*. Conmutative Algebra week, Mount Holyoke Colllege, (1992)

[L4] ¯, *Adjoints and polars of simple complete ideals in two dimensial local regular rings*. Algebra and Algebraic Geometry, Tenerife, (1992)

[Lj] M. Lejeune-Jelabert, *Linear systems with near base conditions and complete ideals in dimension two*, Preprint (1992)

[N] D.G. Northcott, *Lessons on rings, modules and multiplicities*. Ed. Cambridge at the University Press, (1968)

[O] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergebnisse der Math., **15**, Springer-Velarg, (1988)

[R1] D. Rees, *Valuations associated with ideals*. J. London Math. Soc.(2), **31**, 221-228 (1956)

[R2] D. Rees, *Valuations associated with a local ring*. J. London Math. Soc.(2), **31**, 228-235 (1956)

[R3] D. Rees, *Hilbert functions and pseudo-rational local rings of dimension two*. J. London Math. Soc.(2), **24**, 467-479 (1981)

[Re] A. Regera L pez, *Proximidad, c mulos e ideales completos sobre singularidades racionales de superficie*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, (1993)

[Sp] M. Spivakovsky, *Sur la cohomologie de variet s alg braiques*. J. Math. Pures et Appl., **36**, (1981)

[Z1] O.Zariski, *Polynomial ideals defined by infinity near base points*, Amer. J. Math, **60**, 151 204, (1937)

[Z2] ¯, *The reduction of the sindularities of an algebraic surface.* Ann. of Math. (3), **40,** 639-689, (1939)

[Z3] ¯, *Algebraic Surfaces (second supplemented edition)*. Springer-Verlag, (1960)

[Z-S] O. Zariski and P. Samuel, *Conmutative Algebra. Volume II*. D. Van Nostrand Company, Inc., (1960)