



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5314278685

TI-1993/18

CARLOS CABRILLO GARCIA

**GENERACIÓN DE LUZ COMPRIMIDA
MEDIANTE INTERACCIONES NO LINEALES
HASTA DE TERCER ORDEN**

MEMORIA

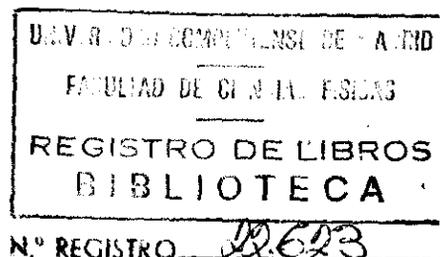
para optar al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

Director:

Dr. FRANCISCO JAVIER BERMEJO BARRERA
Profesor de Investigación
INSTITUTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, CSIC

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Físicas
Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear
MADRID 1993

TI-1993/18



A mi Familia.
Sin su apoyo durante todos
estos años no hubiera sido
posible la realización
de esta tesis.

Agadecimientos:

Nunca podré agradecer lo suficiente al profesor Francisco Javier Bermejo el esfuerzo e interés que ha puesto en la dirección de esta tesis doctoral. Realmente ha sido una suerte inmerecida haberle tenido como director.

Tampoco hubiera sido posible sin el apoyo y ayuda de mis compañeros de trabajo. En los primeros años, los del edificio Roca Solano, Marta, Carlos y Carmen. Desde el principio y hasta que partió para tierras lejanas, David. Abdellah, en los dos años que pasó con nosotros. Los “colegas” de óptica cuántica, Kurosh, Jesús y Priscila y los de líquidos Mar y Federico.

No he mencionado a propósito a Rodolfo, Antonio, Robín, Leonor, y Cristina porque merecen mención especial ya que ellos no sólo han sido gran parte del necesario apoyo para llevar adelante el trabajo, sino que también han contribuido de forma directa en diferentes partes de esta tesis.

Por último quisiera agradecer a mi tutor, el profesor Jose Campos Gutierrez, todas las molestias que se ha tomado para preparar la defensa de esta memoria.

Indice

1	Introducción	5
1.1	Presentación	5
1.2	Estados no clásicos del campo electromagnético	6
1.3	Antecedentes: amplificación sensible a la fase	9
1.4	Generación experimental de estados no clásicos del campo electromagnético	12
1.5	Situación previa a 1985	13
1.6	Detección experimental de estados comprimidos	13
1.6.1	Experimentos en generación paramétrica degenerada	17
1.6.2	Generación de segundo armónico (SHG)	18
1.6.3	Generación paramétrica no degenerada	18
1.6.4	Generación por no linealidades de orden superior	19
1.7	Perspectivas	20
2	Campo electromagnético en interacción con un medio material no lineal	23
2.1	Introducción	23
2.2	Ecuaciones de evolución. Aproximación de amplitud lentamente variable	23
2.3	Medio con respuesta no lineal	26
3	Cavidades resonantes	31
3.1	Introducción	31
3.2	Efecto de la cavidad	32
3.3	Reglas de conmutación	39

3.4	Correlaciones de los campos	42
3.5	Validez de las aproximaciones	46
3.5.1	Desarrollo en serie	46
3.5.2	Aproximación lineal en la relación entre r y t	49
3.5.3	Independencia de r con la frecuencia	49
3.5.4	Relación entre ω y ω_n	51
3.5.5	Resultados experimentales	51
4	El método de cálculo	53
4.1	Introducción	53
4.2	Relación entre la matriz de correlación del campo saliente y la del campo interno	54
4.3	El espectro de compresión de ruido	56
4.4	Cálculo de la matriz espectral del campo interno	58
5	Modelo inicial	61
5.1	Introducción	61
5.2	Hamiltoniano de interacción	62
5.3	Estados estacionarios	63
5.4	Obtención de la varianza y del espectro de fluctuaciones	69
5.5	Resultados	73
6	Extensión del modelo inicial	83
6.1	Introducción	83
6.2	Estados estacionarios	84
6.2.1	Ecuaciones de evolución y puntos fijos	84
6.3	Obtención de la varianza y del espectro de fluctuaciones	92
6.4	Resultados	93
7	Conclusiones	111

<i>Indice</i>	3
A Escala Física	115
B Publicaciones	117
C Artículos preliminares	119

Capítulo 1

Introducción

1.1 Presentación

El objeto de la presente memoria radica en la modelización teórica de dispositivos ópticos los cuales, por medio de interacciones no lineales entre el campo de radiación y un medio material adecuado, permitan la reducción del ruido en una de las cuadraturas del campo electromagnético por debajo de los límites característicos de un haz de luz láser perfectamente coherente. Tales estados del campo, denominados genéricamente como “Squeezed States” (adoptaremos la traducción de Estados Comprimidos), han sido generados con éxito en el laboratorio, como se describe de forma somera en secciones subsiguientes, existiendo un importante número de posibles aplicaciones (ver p. ej. ref. [1]) en campos tan dispares como la construcción de giróscopos ultrasensibles o su empleo en medidas de alta precisión o espectroscopía.

Sin embargo, desde su puesta en evidencia en el laboratorio en 1985, la generación de luz con estas características estadísticas no ha avanzado mucho más allá de la preparación de estados comprimidos correspondientes a un campo de vacío en los que el valor medio del campo es nulo. La preparación de haces con intensidades útiles para los propósitos antes mencionados encuentra un número de dificultades importantes (ver más abajo) por lo que nuestro propósito ha estado centrado en la modelización realista de un dispositivo

con características que pudieran permitir en el futuro su implementación práctica.

En los apartados que siguen, describiremos de forma breve las características más relevantes de estos objetos físicos, su relación con fenómenos observados en otras ramas de la ciencia dentro del régimen puramente clásico, así como los avances en la preparación en el laboratorio de este tipo de radiación óptica.

1.2 Estados no clásicos del campo electromagnético

La electrodinámica clásica puede dar cuenta de la mayor parte de la fenomenología del campo electromagnético a frecuencias ópticas en términos de una representación sinusoidal del campo eléctrico, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cos(\omega t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \text{sen}(\omega t)$, asociada a una onda luminosa monocromática. La utilidad de ésta representación se debe al hecho de que la solución general de la ecuación de ondas (equivalente a las ecuaciones de Maxwell si no fuentes) se obtiene como combinación lineal de ondas monocromáticas. Clásicamente no hay límite a la precisión con la que se pueden determinar $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$. Sin embargo, desde el punto de vista cuántico $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ pasan a ser operadores sobre un espacio de Hilbert que por desgracia no conmutan y, que por tanto, están sometidos a una relación de incertidumbre. Dicho en otras palabras, no existen autoestados del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ que presenten dispersión nula en todas las componentes de éste. Utilizando la representación habitual en Óptica cuántica,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon} \right)^{1/2} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r})a(t) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r})a^\dagger(t) \right],$$

lo más parecido a un autoestado de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ es un autoestado de $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Dada la definición de $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, estos estados, llamados coherentes, son también estados propios de $a(t)$ y se suelen denotar por $|\alpha(t)\rangle$ de forma que $a(t)|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle$. Si definimos las llamadas cuadraturas del campo como $a(t) \equiv [x(t) + iy(t)] \exp(-i\omega t)$, entonces,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = - \left(\frac{2\hbar\omega}{\epsilon} \right)^{1/2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})| [\text{sen}(\varphi(\mathbf{r}))x(t) + \cos(\varphi(\mathbf{r}))y(t)], \quad (1.1)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = - \left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})| [\text{sen}(\varphi(\mathbf{r}))x(t) + \text{cos}(\varphi(\mathbf{r}))y(t)] \quad (1.2)$$

dónde $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| \exp(i\varphi(\mathbf{r}))$. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ está determinado por las condiciones de contorno. En el caso en que $\varphi(\mathbf{r}) = 0$, por ejemplo los modos estacionarios de un Fabry-Perot, se obtiene,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon} \right)^{1/2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})| [\text{sen}(\omega t)x(t) - \text{cos}(\omega t)y(t)].$$

La desigualdad de Heisenberg para las cuadraturas toma la forma,

$$\langle (\Delta x(t))^2 \rangle \langle (\Delta y(t))^2 \rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (1.3)$$

Es fácil comprobar que para un estado coherente se cumple $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle = \langle (\Delta y(t))^2 \rangle = 1/4$, minimizando la desigualdad, lo que confirma la idea de que son lo más parecido a un estado clásico de la radiación. El propio vacío, $|0\rangle$, es un estado coherente. Puesto que todos los estados coherentes presentan la misma dispersión en x e y se pueden entender como estados clásicos perfectamente determinados con un ruido superpuesto proveniente de las fluctuaciones del vacío. En el plano xy (el espacio de fases de un modo de radiación) las líneas de isoprobabilidad para éstas variables correspondientes a un estado coherente son círculos concéntricos. Por esta razón se suelen representar en este plano por un círculo de radio $1/4$ (el valor de la varianza) centrado en la amplitud media. Durante décadas fueron considerados como verdaderos límites en cuanto al mínimo ruido alcanzable. Sin embargo, la desigualdad (1.3) permite reducir la dispersión en una de las cuadraturas a costa de aumentar la varianza en la otra. Por lo tanto, al menos en una de las cuadraturas la varianza puede ser inferior a $1/4$. Siempre que las medidas se puedan restringir a dicha cuadratura se puede superar el límite de ruido dado por el vacío. Las líneas de isoprobabilidad para estos estados en el espacio de fases han de estar "aplastadas" o "comprimidas" en la dirección x o en la y respecto del círculo que representa el estado coherente. Es por esto por lo que se conocen como estados aplastados o comprimidos. Nosotros utilizaremos la última denominación. Estrictamente hablando estados comprimidos son aquellos en los que las líneas de isoprobabilidad en el plano xy

son elipses y no cualquier línea cerrada que corte el círculo del correspondiente estado coherente.

Las propias ecuaciones (1.1) y (1.2) sugieren generalizar el concepto de cuadratura para cualquier dirección del espacio de fases mediante una rotación,

$$x(\theta, t) = \cos(\theta)x(t) + \text{sen}(\theta)y(t), \quad (1.4)$$

$$y(\theta, t) = -\text{sen}(\theta)x(t) + \cos(\theta)y(t). \quad (1.5)$$

En general habrá "compresión" de ruido en una dirección θ del espacio de fases, si $\langle(\Delta x(\theta, t))^2\rangle < 1/4$.

La evolución libre de una onda monocromática del campo electromagnético viene gobernada por la ecuación $\dot{a}(t) = -i\omega a(t)$. Como veremos el campo interacción con un medio adecuado da lugar a generalizaciones de esta ecuación. Particularmente interesante es el caso,

$$\dot{a} = -i\omega a - isa^\dagger e^{-2\omega t},$$

$$\dot{a}^\dagger = i\omega a^\dagger + isa e^{i2\omega t}.$$

Sin entrar en consideraciones sobre que tipo de sistema físico puede dar lugar a estas ecuaciones, es fácil demostrar que,

$$\begin{aligned} \langle(\Delta x(t))^2\rangle &= \langle(\Delta x(0))^2\rangle e^{2st} = \frac{1}{4}e^{2st}, \\ \langle(\Delta y(t))^2\rangle &= \langle(\Delta y(0))^2\rangle e^{-2st} = \frac{1}{4}e^{-2st}, \end{aligned}$$

de forma que valores negativos de s conllevarán una reducción de ruido en la cuadratura x , ocurriendo lo mismo en la y para $s > 0$. Vemos así como la "compresión" de ruido se puede conseguir mediante una dinámica adecuada del campo electromagnético. Los mecanismos capaces de redistribuir las fluctuaciones de la forma arriba descrita serán analizados de forma somera en párrafos siguientes.

Más interesante aun que la varianza es conocer su distribución espectral. El vacío como tal, presenta toda su la energía uniformemente distribuida en frecuencias. Considerado como ruido tiene, por tanto, un espectro de fluctuaciones plano. Un estado

comprimido ha de presentar un espectro de fluctuaciones que en algún momento ha de estar por debajo del de el vacío. Asignándole a éste energía nula, definiremos en el capítulo 4 un espectro de fluctuaciones que será negativo siempre que haya compresión del ruido cuántico (el del vacío). Este espectro, que denominaremos espectro de compresión de ruido, representa la densidad espectral de la reducción de ruido cuántico.

Finalmente, el concepto de compresión de ruido se puede extender a otros observables. Un caso particularmente interesante es el del número de fotones. Para un estado coherente se tiene que $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = \langle (\Delta n)^2 \rangle$ presentando una estadística de Poisson. Un estado cuya varianza en el número de fotones esté por debajo de su valor medio se conoce como subpoissoniano. El caso límite es un estado número. Este tipo de estados son muy interesantes en los dispositivos de detección directa en los que no se discrimina la fase. Por supuesto, la reducción de la dispersión en el número de fotones necesariamente conlleva un aumento de la indeterminación en la fase. Tanto los estados comprimidos como los subpoissonianos presentan propiedades estadísticas que no son reproducibles mediante la física estadística clásica. Pertenecen por ello, a la categoría más general de estados no clásicos del campo electromagnético.

Existen trabajos de revisión relativamente recientes concernientes a ambos tipos de estados, de los cuales el trabajo de Loudon y Knight [4] merece ser destacado para el caso de los estados comprimidos y el de Teich y Saleh [5] para el de reducción de varianza en el número de fotones. En la exposición que sigue nos concentraremos en la descripción y preparación experimental de estados del primer tipo, ya que el segundo tipo de fenómenos constituye de por sí una subespecialidad aparte que merece ser tratada separadamente.

1.3 Antecedentes: *amplificación sensible a la fase*

El origen físico de la amplificación de señales dependiendo de la fase se hace patente mediante la consideración de un oscilador clásico amortiguado descrito por la ecuación de movimiento,

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.6)$$

en donde x puede corresponder al desplazamiento de una masa puntual M ligada por un muelle con constante de fuerza $\omega_0^2 M$ o al voltaje en un circuito LCR paralelo en el cual $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ y $\kappa = (RC)^{-1}$ [6]. La solución de tal ecuación es obviamente una oscilación sinusoidal amortiguada con una constante de amortiguamiento igual a $\kappa/2$. Si a tal oscilador se le añade un término que produce una modulación de frecuencia ω_p de la constante de fuerza (o de su equivalente eléctrico) la ecuación resultante,

$$\ddot{x} + \kappa\dot{x} + (\omega_0^2 + 2\alpha \sin \omega_p t)x = 0, \quad (1.7)$$

es formalmente idéntica a la investigada por Rayleigh en su estudio de resonancias parásitas en tubos de órgano. Consideraremos por su analogía más próxima el caso de un circuito LCR como el mencionado anteriormente en el cual la capacidad del condensador esta modulada sinusoidalmente con una amplitud de modulación ΔC mucho menor que el término independiente del tiempo C_0 . Identificando $\omega_0^2 = (LC_0)^{-1}$ y $\alpha = \omega_0^2 \Delta C / 2C_0$ se puede reescribir la ecuación anterior como,

$$\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \frac{1}{LC_0} \left[1 + \frac{\Delta C}{C_0} \sin \omega_p t \right] x = 0, \quad (1.8)$$

para la cual buscaremos soluciones de tipo $x(t) = \text{Re}[2ae^{i(\omega t + \phi)}e^{st}]$ con ambos a y s reales. La substitución de tales soluciones en la ecuación anterior conduce a la igualdad [6],

$$\begin{aligned} & - (\omega - is)^2 e^{i[(\omega - is)t + \phi]} + i\kappa(\omega - is)e^{i[(\omega - is)t + \phi]} \\ & + \omega_0^2 e^{i[(\omega - is)t + \phi]} + \text{c.c.} \\ & = - \frac{\omega_0^2 \Delta C}{C_0} \frac{e^{i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}}{2i} \left[e^{i[(\omega - is)t + \phi]} + e^{-i[(\omega + is)t + \phi]} \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

la cual se cumple si $\omega_p - \omega = \omega \implies \omega_p = 2\omega$ y $e^{i\phi} = e^{-i\phi} \implies \phi = 0$ o π ; es decir, la frecuencia del campo de bombeo (modulación) ha de ser doble que la correspondiente a la señal y la fase relativa de ésta con respecto a la de modulación ha de tomar valores 0 o π . Igualando la suma de términos imaginarios con los mismos factores exponenciales en la ecuación anteriormente escrita, resulta, para valores de la frecuencia cerca de la resonancia $\omega \approx \omega_0$,

$$2s = \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0} - \kappa, \quad (1.10)$$

lo que sirve para definir la condición de umbral de oscilación como $\kappa = \omega_0 \Delta C / 2C_0$. Encontramos además el estado estacionario para $s = 0, \omega = \omega_0$. Parece pues claro que una señal con fase $\phi = n\pi/2, n = 0, 1, 2..$ sufrirá una atenuación con una constante de decaimiento $2s = -\kappa - \Delta C / 2C_0$ (un desfase en $\Delta\phi = \pi/2$ es equivalente a un cambio en π en la frecuencia doble lo que conllevaría un cambio de signo en la ecuación (1.10)), mientras que aquellas con una diferencia de fase $n\pi$ se verán amplificadas.

Aunque el fenómeno de *amplificación sensible a la fase* resultaba conocido en algunas áreas de la tecnología (ingeniería de radio), su explotación con vistas a la reducción de ruido no parece haber sido considerada hasta fechas relativamente recientes. Una *verificación experimental del comportamiento arriba expuesto* corresponde a un circuito electrónico [8] el cual muestra la reducción de ruido clásico por debajo del ruido de fondo en una de las cuadraturas del campo mientras que se amplifica el ruido en la otra. Aunque este último resultado sea enteramente explicable en términos puramente clásicos, resulta ilustrativo, ya que la generación de estados comprimidos en el régimen cuántico corresponden en lo fundamental al mismo tipo de mecanismo.

Desde un punto de vista más formal, la característica fundamental de un sistema de *deamplificación de ruido sensible a la fase*, corresponde a la existencia de diferentes direcciones en el espacio de fase con estabilidad relativa muy dispar. El análisis de la estabilidad de un sistema óptico no lineal es generalmente factible si puede llevarse a cabo una *linearización alrededor del estado estacionario* de forma que pueda encontrarse un análogo semiclásico descriptible en términos de ecuaciones diferenciales estocásticas sencillas (p. ej. ecuaciones de Langevin con ruido blanco aditivo). A partir de éstas, y considerando que el ruido presente es lo suficientemente pequeño como para que pueda ser tratado como una perturbación, es posible llevar a cabo un análisis de la estabilidad de tal sistema dinámico mediante el examen de los autovalores de la matriz formada por los coeficientes de las ecuaciones relevantes. Bajo tal aproximación, ha sido puesto en evidencia (ver p. ej. la ref. [7]) que la *supresión perfecta del ruido* en una de las cuadraturas tendrá lugar cuando un parámetro de control relevante (en nuestro caso estará definido por una relación entre la intensidad de el campo de bombeo y las pérdidas) se

acerque lo suficiente a un punto crítico (la condición de umbral dada más anteriormente). En tal situación se encuentra que en tal punto (un punto de bifurcación en la teoría de sistemas dinámicos) alguno de los autovalores relevantes se hace imaginario puro, lo que puede implicar la deamplificación completa del ruido en la cuadratura asociada al mismo, mientras que el ruido se hace infinito en la ortogonal. Aunque tal resultado, de por sí, es parcialmente artificial debido a la linearización de la cual se ha partido (el análisis completo del problema conllevaría la solución de ecuaciones de evolución no lineales), su validez en regiones del espacio de fases no muy cercanas al punto crítico está firmemente establecida.

Conviene hacer notar sin embargo el hecho de que, si bien no parece discutible el que la máxima compresión de ruido tenga lugar en un punto crítico, tal condición limita severamente la posible aplicabilidad de tal resultado, como consecuencia del incremento asintótico de ruido en la cuadratura no comprimida. Resulta por tanto relevante el buscar regiones de compresión de ruido notable en zonas alejadas de los márgenes de estabilidad soslayando así los efectos perniciosos del incremento de ruido en la cuadratura ortogonal.

En capítulos posteriores haremos uso de la metodología aquí delineada esquemáticamente, y expondremos con detalle las relaciones existentes entre la estabilidad de los sistemas ópticos que nos ocupan y sus características en cuanto a reducción de ruido.

1.4 Generación experimental de estados no clásicos del campo electromagnético

Presentamos a continuación una descripción somera de los avances en la producción experimental de estados de campo electromagnético a frecuencias ópticas cuya descripción no es posible en términos de la electrodinámica clásica (al menos en sus formulaciones más comúnmente aceptadas). Dividiremos para ello el período reciente usando como demarcación el año 1985 en el que la primera observación experimental de luz comprimida fue descrita en la literatura.

1.5 Situación previa a 1985

La mayor parte de los experimentos realizados desde el advenimiento de las fuentes láser se concentraban en el estudio de la estadística de fotones de los campos emitidos por éstos así como de las correlaciones (efectos de interferencia) de los mismos, las cuales admitían por lo general una interpretación en términos de la electrodinámica clásica. De hecho, hasta quizás 1983, cuando Mandel [9] puso en evidencia las dificultades de una descripción puramente clásica de los efectos de interferencia de cuarto orden que implicaban la probabilidad condicionada de detección de dos fotones simultáneamente (las correlaciones de órdenes inferiores pueden ser tenidas en cuenta clásicamente), el tratamiento cuántico del campo electromagnético a frecuencias ópticas era considerado por buena parte de los experimentalistas (con excepción de aquellos involucrados en medidas espectroscópicas) como un mero ejercicio académico.

La posibilidad de generar estados del campo de radiación en los cuales la varianza en una de las cuadraturas fuese menor que la correspondiente al límite cuántico estándar (para luz láser perfectamente coherente tal valor es de $1/4$) había sido apuntada ya en 1976 por Yuen y otros [10], quienes postularon que tal límite no era una consecuencia directa del principio de indeterminación ya que únicamente el producto de las varianzas de ambas cuadraturas, y no sus valores individuales, esta confinado por tal prescripción.

Las dificultades experimentales involucradas en la detección de las fluctuaciones cuadráticas medias en las cuadraturas del campo eran considerables (una exposición sumaria puede verse en la ref. [2]), lo que explica el considerable lapso de tiempo transcurrido entre su predicción teórica y su detección en el laboratorio.

1.6 Detección experimental de estados comprimidos

La mayor parte de los experimentos realizados entre 1985 y 1988 fueron llevados a cabo por medio de dispositivos ópticos no lineales operando por debajo del umbral de encendido, por lo cual los estados detectados correspondían a estados de vacío comprimido.

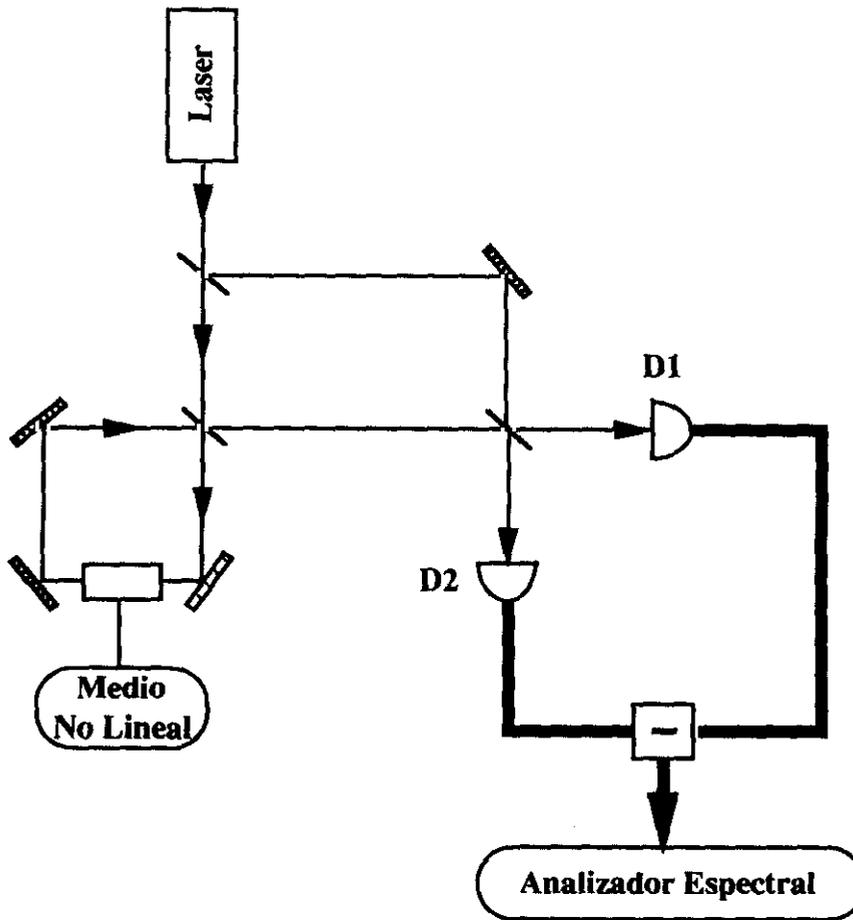


Figura 1.1: Montaje experimental típico de un experimento de compresión de ruido cuántico.

Consideraremos como dispositivo típico para la detección en el laboratorio de radiación de estas características un detector homodino compensado como el que se describe esquemáticamente en la figura 1.1, en el que el campo resultante de la interacción con algún medio no lineal encerrado en la cavidad que se muestra en la figura, es recombinado en el divisor de haz con una señal intensa $\mathcal{E}_{OL}(r, t)$ proveniente por lo general de la misma fuente que aporta el haz de bombeo sobre el medio no lineal, y que proporciona una referencia de fase. Denominaremos a este segundo haz "Oscilador Local" (OL), de acuerdo con la terminología empleada experimentalmente. Su ecuación de evolución es expresable mediante un término monocromático más una fluctuación la cual, en términos

clásicos, tiene un promedio temporal nulo, como,

$$\mathcal{E}_{OL}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\hbar\omega}{\epsilon} \right)^{1/2} [E_{OL}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi_{OL}) + \frac{1}{2} \Delta E_{OL}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.11)$$

El campo señal lo denotaremos por,

$$\mathcal{E}_S(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon} \right)^{1/2} [\Delta E_S^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \Delta E_S^{(-)}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.12)$$

El divisor de haz (50/50) que se muestra en la figura 1.1 combina los campos señal y OL como superposición lineal de forma que los campos eléctricos incidentes en los detectores D_1 y D_2 vienen dados por (ver capítulo 3),

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{\mathcal{E}_{OL}(t) - \mathcal{E}_S(t)}{\sqrt{2}} = E_1^{(+)}(t) + E_1^{(-)}(t), \\ E_2(t) &= \frac{\mathcal{E}_{OL}(t) + \mathcal{E}_S(t)}{\sqrt{2}} = E_2^{(+)}(t) + E_2^{(-)}(t), \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} E_1^{(+)}(t) &= [E_1^{(-)}(t)]^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ E_{OL}^{(+)}(t) + \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon} \right)^{1/2} [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) - \Delta E_S^{(+)}(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} E_2^{(+)}(t) &= [E_2^{(-)}(t)]^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ E_{OL}^{(+)}(t) + \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon} \right)^{1/2} [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) + \Delta E_S^{(+)}(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

en donde la dependencia espacial ha sido omitida habida cuenta de que tanto la señal como el OL mantienen la misma polarización, la diferencia de signos en las dos ecuaciones viene dictada por consideraciones de balance de energía, y los términos de orden superior (p. ej. $E^{(+)^2}(t)$) se hacen irrelevantes ya que oscilarían a frecuencias ópticas mucho mayores que la anchura de banda de los fotodetectores usados para el propósito que nos concierne. Corresponde ahora el calcular la corriente eléctrica en cada detector, los cuales responderán emitiendo un fotoelectrón por cada fotón incidente sobre una sección σ . Las expresiones para los operadores de corriente eléctrica son del tipo,

$$I_1(t) = \frac{2e\sigma}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_1^{(-)}(t) E_1^{(+)}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e c \sigma}{2} \left\{ \frac{A^2}{V} + \frac{A}{\sqrt{V}} \left[[\Delta E_{OL}^{(-)}(t) - \Delta E_S^{(-)}(t)] e^{-i(\omega t + \phi_{OL})} \right. \right. \\
&+ \left. [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) - \Delta E_S^{(+)}(t)] e^{i(\omega t + \phi_{OL})} \right] \\
&+ \left. [\Delta E_{OL}^{(-)}(t) - \Delta E_S^{(-)}(t)] [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) - \Delta E_S^{(+)}(t)] \right\}, \\
I_2(t) &= \frac{2e\sigma}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_2^{(-)}(t) E_2^{(+)}(t) \\
&= \frac{e c \sigma}{2} \left\{ \frac{A^2}{V} + \frac{A}{\sqrt{V}} \left[[\Delta E_{OL}^{(-)}(t) + \Delta E_S^{(-)}(t)] e^{-i(\omega t + \phi_{OL})} \right. \right. \\
&+ \left. [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) + \Delta E_S^{(+)}(t)] e^{i(\omega t + \phi_{OL})} \right] \\
&+ \left. [\Delta E_{OL}^{(-)}(t) + \Delta E_S^{(-)}(t)] [\Delta E_{OL}^{(+)}(t) + \Delta E_S^{(+)}(t)] \right\},
\end{aligned}$$

en donde e y c representan la carga del electrón y la velocidad de la luz y se ha reemplazado $E_{LO}(\mathbf{r})$ por A/\sqrt{V} , siendo A una amplitud adimensional lo suficientemente grande como para hacer irrelevantes los últimos términos de las dos ecuaciones anteriores. El detector homodino compensado que se muestra en la figura 1.1 substraee las corrientes que provienen de los dos fotodetectores de forma coherente, promediando, por tanto, a cero las posibles fluctuaciones del oscilador local, es decir,

$$I(\phi_{OL}) = I_1(t) - I_2(t) = -\frac{e c \sigma A}{\sqrt{V}} [\Delta E_S^{(-)}(t) e^{-i(\omega t + \phi_{OL})} + \Delta E_S^{(+)}(t) e^{i(\omega t + \phi_{OL})}]. \quad (1.15)$$

Expresando el campo señal en función de las cuadraturas,

$$I(\phi_{OL}) = \frac{2e c \sigma A^2}{\sqrt{V}} [x(t) \cos(\phi_{OL}) + y(t) \text{sen}(\phi_{OL})] = \frac{2e c \sigma A^2}{\sqrt{V}} x(t, \phi_{OL}), \quad (1.16)$$

que es precisamente lo que andábamos buscando. Mediante la electrónica edecuada podemos medir la correlación, el espectro de fluctuaciones o la varianza de ésta corriente. Experimentalmente, la mayor parte de las medidas descritas en la literatura conciernen a exploraciones de la dependencia del voltaje proveniente del ruido con respecto a la fase del oscilador local para una frecuencia fija del orden de unos pocos MHz y anchuras de banda del orden de 0.1 MHz. Con el dispositivo apagado (el campo señal $\mathcal{E}_S(\mathbf{r}, t)$ se bloquea) se miden las fluctuaciones del campo de vacío que no muestran sensibilidad alguna a la fase del OL. Por el contrario, al permitir la entrada de señal se observan oscilaciones que

para algunos valores de ϕ_{OL} toman valores por debajo de la línea de vacío medida con anterioridad, lo que constituye una prueba de que la señal entrante corresponde a un estado comprimido.

1.6.1 Experimentos en generación paramétrica degenerada

La primera observación experimental de compresión de ruido fue realizada mediante generación paramétrica en mezcla de cuatro ondas (4WM) sobre vapor de sodio contenido en una cavidad óptica [11, 12]. En este tipo de experimento, se crean dos fotones en los haces que emergen de la cavidad concurrentemente a la aniquilación de otros dos fotones de los dos haces de bombeo. Las frecuencias correspondientes a las dos señales de salida denotadas por ω_1 y ω_2 eran en este caso idénticas (generación paramétrica degenerada). El objeto de confinar el vapor de sodio a una cavidad óptica era el magnificar los efectos de la interacción no lineal, permitiendo por tanto la amplificación paramétrica hasta un nivel medible.

Debido a que tal sistema operaba por debajo de la intensidad umbral, el efecto de tal dispositivo no lineal no era sino una redistribución del ruido en cuadraturas de manera analoga a la amplificación paramétrica de un sistema similar al descrito anteriormente.

Por medio de técnicas de este tipo la máxima reducción de ruido que fue reseñada en el experimento pionero de Slusher y otros [11, 12] fue de aproximadamente un 25%, encontrando severas dificultades para superar este valor debido, entre otras causas, al movimiento térmico de los átomos. En un futuro próximo, las posibilidades de mejorar el rendimiento de esta técnica se basan en la utilización de átomos atrapados por campos laser contrapropagantes en vez de vapores atómicos [13].

De forma casi concurrente, se llevaron a cabo una serie de experimentos, en donde la interacción no lineal tenía lugar en un cristal con una susceptibilidad de segundo orden ($\chi^{(2)}$) lo suficientemente elevada ($LiNbO_3$) [14]. El cristal fue colocado en una cavidad óptica resonante con el campo de bombeo y con el subarmónico. El haz de la señal emergente se combinaba en un separador de haz con parte del haz de bombeo y la

señal resultante era detectada después de haber substraído la intensidad en ambos haces empleando un esquema similar al de la Figura 1.1.

La máxima reducción de ruido usando esta técnica alcanzaba un 63% cuando el sistema era operado en condiciones cercanas a las correspondientes al umbral de oscilación paramétrica.

1.6.2 Generación de segundo armónico (SHG)

Los procesos de generación de segundo armónico pueden considerarse como inversos de la generación paramétrica degenerada. En este caso, un medio no lineal caracterizado por una susceptibilidad $\chi^{(2)}$ lo suficientemente elevada, es excitado por un haz de bombeo con frecuencia ω_1 y a su vez un campo con frecuencia $\omega_0 = 2\omega_1$ es generado por la interacción no lineal. El interés en el estudio de estos sistemas radica en el hecho de que, además de producir campos de salida de intensidad no nula, tanto el segundo armónico como el campo de bombeo pueden ser comprimidos simultáneamente.

Predicciones recientes [15] han indicado la posibilidad de obtener una reducción completa del ruido en una de las cuadraturas del campo correspondiente al armónico. Sin embargo, un número de problemas experimentales han redundado en reducciones de ruido bastante modestas (de un 13% [16]), aunque estudios más recientes usando cavidades monolíticas (los espejos de la cavidad se forman por deposición directa sobre el cristal) han alcanzado valores de hasta un 40% de reducción [17].

1.6.3 Generación paramétrica no degenerada

Al contrario que en el caso degenerado, los fotones emitidos por los dos haces emergentes difieren en sus frecuencias o en sus polarizaciones, lo que hace posible su detección por separado. El proceso de generación paramétrica hace que la emisión de cuantos de radiación se realice de forma simultáneamente, a consecuencia de lo cual, los fotones emitidos han de mostrar fuertes correlaciones entre los dos haces. Este hecho, hizo pensar en la posibilidad de conseguir fuertes reducciones de ruido mediante la combinación de

los dos haces. De hecho, se ha conseguido una reducción de un 75% [18] usando este tipo de configuración experimental.

Por otro lado y desde época reciente, se vienen realizando esfuerzos notorios en sistemas de estas características con vistas a la producción de haces coherentes idénticos en las fluctuaciones de la intensidad. Sin embargo, la cavidad introduce decorrelaciones notables entre los dos haces lo que hace que la reducción efectiva de ruido se produzca únicamente para un rango de frecuencias comparable a la anchura de banda de la propia cavidad. Por otro lado, todos los procesos que dan lugar a absorción o dispersión (scattering) ejercen una influencia perniciosa sobre la correlación de los haces. Con todo, reducciones de ruido (en este caso 100% representa correlación perfecta) de aproximadamente un 82% han sido descritas en la bibliografía [19].

1.6.4 Generación por no Linearidades de orden superior

Desde el comienzo de la búsqueda experimental activa de mecanismos capaces de generar luz comprimida, se hizo patente el hecho de que en modo alguno el medio no lineal adecuado habría de exhibir únicamente no linearidades de segundo orden $\chi^{(2)}$ elevadas, sino que el empleo de medios pasivos caracterizados por susceptibilidades de ordenes más elevados ($\chi^{(3)}$ y superiores) podría reportar ventajas considerables. De hecho, casi simultáneamente a la realización de los primeros experimentos por 4WM en vapor de sodio o los de generación paramétrica en un medio no lineal, fue ensayada la generación de luz comprimida por medio de efecto Kerr óptico en una fibra óptica [20]. Desafortunadamente, la reducción de ruido en tal sistema se veía fuertemente compensada por los efectos perniciosos de fenómenos de segundo orden tales como la dispersión Brillouin guiada (GAWBS), cuya eliminación se hace difícil incluso enfriando la fibra a 2K. Existían además predicciones teóricas (ver p. ej. ref. [21]), basadas en cálculos de naturaleza cualitativa (sin considerar las pérdidas que por fuerza han de producirse ya sea por disipación en el medio no lineal o por las características de transmisión de los espejos si aquél se encuentra confinado en una cavidad) que predecían la posibilidad de generar luz comprimida brillante

por medio de la interacción con un medio Kerr (o con efectos de órdenes superiores), eliminando algunas de las desventajas de los sistemas empleados hasta aquel momento, ya que tales no linealidades conllevarían una compresión de ruido muy notoria, alcanzable en tiempos de interacción entre el bombeo y el medio no lineal muy cortos. Sin embargo, cálculos más realistas, como los descritos en los apéndices de la presente memoria, en los cuales los efectos de atenuación son considerados explícitamente, demuestran que tales efectos desaparecen en etapas posteriores de la evolución del sistema, llegando por tanto a características de compresión de ruido, como mucho comparables a las alcanzables con técnicas como las descritas someramente en subsecciones anteriores. Sin embargo, y como se demostrará en capítulos posteriores, el empleo de materiales con no linealidades de tercer orden (efecto Kerr óptico) presenta, bajo ciertas condiciones de operación, ventajas muy substanciales para la generación de luz comprimida con intensidades útiles, lo cual constituye el foco de atención de los trabajos que aquí se exponen.

1.7 Perspectivas

La generación de estados comprimidos ha experimentado desde su puesta en evidencia en 1985 [11, 12] un avance considerable (una revisión de los logros experimentales puede encontrarse en la ref. [22].), y alguna de sus aplicaciones, en particular en la espectroscopía atómica he sido puesta de manifiesto recientemente [23]. Sin embargo la producción en el laboratorio de luz comprimida brillante continúa constituyendo un reto tanto desde el punto de vista experimental como de la predicción teórica y modelado de sistemas realistas.

Si bien desde un punto de vista teórico puede resultar viable el modelado de sistemas que exhiban las características que se persiguen, ya que a partir de mapas de estabilidad lineal puede predecirse el comportamiento dinámico del sistema de interés y optimizar su capacidad de reducción de ruido diseñando sistemas con varios puntos de bifurcación, la utilidad práctica de este tipo de aproximaciones es muy limitada por las razones expuestas en secciones anteriores.

El objeto central de esta memoria lo constituye el estudio de modelos de generación de luz comprimida brillante mediante interacciones de un haz láser con un medio no lineal caracterizado por susceptibilidades $\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$ relativamente elevadas. De acuerdo con lo expuesto en el anterior párrafo, se dedicará una atención especial al análisis de la estabilidad lineal de los sistemas a explorar, previamente al estudio de las propiedades estadísticas de los campos de radiación emergentes de tales dispositivos.

Se estudiarán, también, las condiciones óptimas en cuanto al rango de parámetros se refiere, de los distintos modelos y su posible relevancia para la implementación práctica de un dispositivo de estas características. Finalmente, dada la relevancia de los resultados obtenidos se han calculado las potencias de bombeo y los ordenes de magnitud de las susceptibilidades necesarios (apéndice A).

Capítulo 2

Campo electromagnético en interacción con un medio material no lineal

2.1 Introducción

En este capítulo se trata cuánticamente la interacción del campo electromagnético con un medio material caracterizado por una respuesta no lineal. Nos centraremos en un tratamiento en modos discretos, ya que como veremos, el sistema incluirá una cavidad resonante dentro de la cual la discretización adquiere pleno sentido.

2.2 Ecuaciones de evolución. Aproximación de amplitud lentamente variable

Una onda plana polarizada linealmente propagándose en el sentido positivo del eje z con periodicidad L y sección A admite el siguiente desarrollo en modos discretos:

$$E(t, z) = i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2\varepsilon_0 LA}} \left[a_n(t) \exp(i \omega_n z/c) - a_n^\dagger(t) \exp(-i \omega_n z/c) \right],$$

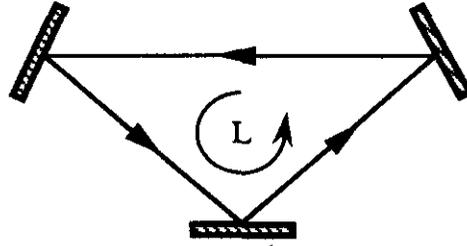


Figura 2.1: Cavidad en anillo

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío y

$$a_n(t + \tau) = a_n(t) \exp(-i \omega_n \tau).$$

Las condiciones de contorno periódicas necesarias para este desarrollo en modos corresponden a una cavidad en anillo como la de la figura 2.1. Formalmente podemos escribir

$$a_n(t + \tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [H_0, \] \tau\right) a_n(t),$$

donde H_0 es el hamiltoniano del campo electromagnético libre expresado en función de los operadores de creación y destrucción

$$H_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar \omega_n a_n^\dagger a_n.$$

En Óptica cuántica es habitual mantener este formalismo para tratar la interacción del campo substituyendo H_0 por un hamiltoniano de la forma $H_0 + H_I$, donde H_I daría cuenta de esta última. Así se garantiza que el carácter cuántico no se pierda durante la evolución puesto que los conmutadores se conservan bajo una evolución hamiltoniana. Para que esto sea posible es necesario que la interacción siga permitiendo un desarrollo en modos (es decir se pueda hacer separación de variables para resolver las ecuaciones de evolución), lo cual generalmente no ocurre. Sin embargo, en muchas situaciones de interés la interacción es lo suficientemente débil como para que podamos mantener este formalismo aunque de forma aproximada. Veamos cómo. Supongamos que el desarrollo en modos sigue siendo válido, es decir

$$E(t, z) = i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2 \epsilon_0 L A}} \left[a_n(t) \exp[-i \omega_n (t - z/c)] - a_n^\dagger(t) \exp[i \omega_n (t - z/c)] \right], \quad (2.1)$$

donde se cumple

$$a_n(t + \tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [\ , H_I] \tau\right) a_n(t).$$

y por tanto

$$\frac{d a_n(t)}{d t} = -\frac{i}{\hbar} [a_n(t), H_I].$$

Obsérvese que nos hemos colocado directamente en una imagen de interacción. Por definición el término exponencial se entiende como el desarrollo en serie de Taylor

$$a_n(t + \tau) = \left\{ \mathbb{1} - \frac{i \tau}{\hbar} [\ , H_I] + \frac{\tau^2}{2 \hbar^2} [[\ H_I], H_I] - \dots \right\} a_n(t),$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad. Supongamos que τ es el tiempo en el que el campo da una vuelta dentro de la cavidad $L/c \equiv 2\pi/\omega_c$ y que la interacción es lo suficientemente débil como para que la serie de Taylor hasta segundo orden sea una buena aproximación.

En ese caso basta despejar para obtener

$$\frac{a_n(t + \tau) - a_n(t)}{\tau} \simeq -\frac{i}{\hbar} [a_n(t), H_I].$$

El lado derecho de esta ecuación no es más que la derivada temporal del operador destrucción según la expresión exacta. Por tanto bajo esta aproximación se cumple que

$$\frac{a_n(t + \tau) - a_n(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{d a_n(t)}{d t} d t \simeq \frac{d a_n(t)}{d t}.$$

Es decir, las variaciones temporales que induce H_I se pueden promediar durante un tiempo τ sin cometer un error significativo. Teniendo en cuenta que ω_c es la frecuencia del modo más bajo, las variaciones inducidas por H_I son mucho más lentas que las oscilaciones de cualquiera de los modos de la cavidad. Así pues, la evolución de los operadores $a_n(t)$ no es más que una modulación en amplitud de una onda monocromática portadora de frecuencia ω_n . En el caso de campo libre los operadores a_n son constantes y están determinados por las condiciones iniciales. En este caso de interacción débil se puede considerar que en cada instante de tiempo el campo es solución de la ecuación de ondas libre, admitiendo por tanto un desarrollo en modos propios de la cavidad y traspasando el efecto de la interacción a las condiciones iniciales, que por tanto ya no son constantes sino

que evolucionan con el tiempo, aunque muy lentamente en comparación con las oscilaciones de cualquiera de los modos libres asociados a la cavidad. De esta forma el desarrollo en modos, estrictamente válido para el campo libre, se puede mantener siempre que la interacción sea lo suficientemente débil. Desde el punto de vista espectral, debido a que las variaciones de $a_n(t)$ son prácticamente constantes en intervalos temporales del orden de τ , la transformada de Fourier de $a_n(t)$ está confinada a frecuencias más bajas que la propia de la cavidad, ω_c , que es precisamente el incremento en frecuencias que hay entre un modo y el siguiente. Esta aproximación se conoce como aproximación de amplitud lentamente variable (desde ahora ALV). Para que tal aproximación sea aplicable ha de cumplirse que el truncamiento del desarrollo de Taylor no elimine términos significativos, es decir

$$|[a_n(t), H_I]| \gg \frac{\pi}{\hbar\omega_c} |[a_n(t), H_I], H_I| .$$

Esta aproximación es habitual en el tratamiento de la óptica no lineal clásica (ver por ejemplo [34, 24, 35]) si bien se suele plantear en términos de una variación espacial de la amplitud, no temporal como se presenta aquí.

Por último, al mantener la evolución del campo formalmente como la libre y haber trasladado la interacción a las condiciones iniciales podemos mantener la cuantización canónica del caso libre, sin necesidad de comenzar desde el principio planteando un nuevo Lagrangiano con su correspondiente momento generalizado asociado.

2.3 Medio con respuesta no lineal

En muchas situaciones prácticas el campo interactúa con un medio macroscópico del que sólo tenemos una descripción fenomenológica a través de su susceptibilidad. Esta descripción elimina la interacción con otros campos que surgiría necesariamente en un enfoque microscópico riguroso, reduciéndola a un autoacoplo del propio campo electromagnético. Dicho autoacoplo da lugar a una bien conocida ecuación no lineal en derivadas parciales (ver por ejemplo [34, 24, 35]) en general intratable. Sin embargo, si la suscep-

tibilidad es lo suficientemente débil como para que se cumpla la aproximación ALV se pueden obtener resultados físicamente relevantes. Bajo esta suposición el efecto del medio se puede entender como un acoplo entre modos, de tal forma que se establece una transferencia de energía entre estos. Por otro lado el medio es en general anisótropo, con lo que ya no se conserva la polarización (momento angular) en la evolución. Sin embargo, como es bien sabido, por cada dirección de propagación existen dos polarizaciones lineales propias que sí se conservan durante la evolución. Limitándonos a estas polarizaciones lineales podemos mantener la formulación escalar del problema. Además, el vector de onda deja de conservarse en la interacción, pues ya no es está directamente asociado con el momento mecánico (en principio conservado suponiendo el medio homogéneo). Es decir, la polarización generada por la interacción de n ondas de vector de onda \mathbf{k}_n no genera necesariamente una onda cuyo vector de onda sea la suma de los \mathbf{k}_n . Esto supone, como veremos, que el rendimiento en la transferencia de energía entre modos es casi nulo en los casos en los que el vector de onda no se conserve, debido a que la interferencia entre los diferentes modos involucrados no está en fase. Es necesario por tanto, si se requiere un rendimiento aceptable, establecer las condiciones experimentales necesarias para que se cumpla la conservación del vector de ondas (ver, por ejemplo [34]). Por último hay que tener en cuenta la dispersión lineal, por lo que debemos asociar a cada modo un vector de onda dado por $k_n = n(\omega_n)\omega_n/c$, siendo $n(\omega_n)$ el índice de refracción correspondiente a la frecuencia ω_n y dirección de polarización dada.

Supongamos un medio con respuesta instantánea al campo eléctrico de tal forma que la polarización es una función analítica del propio campo dada por la serie

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots)$$

donde $\chi^{(n)}$ es la susceptibilidad de orden n (tensores de orden n). En general la respuesta del medio no se puede considerar instantánea, lo que se traduce en que las susceptibilidades dependen de la frecuencia [24]. Sin embargo este caso ideal nos permite determinar el sistema de unidades (un tipo de MKS, ver apéndice A de [35]).

Puesto que lo que pretendemos es encontrar un hamiltoniano efectivo para la evolución

del campo electromagnético, la constante del movimiento asociada ha de ser la energía debida al trabajo realizado por el campo sobre el medio, es decir la energía libre. El promedio temporal de dicha energía correspondiente a la interacción de un medio no lineal con un conjunto de ondas cuasimonocromáticas fue obtenido por Pershan en 1963, precisamente suponiendo que las susceptibilidades no lineales son suficientemente débiles como para poder aplicar la aproximación ALV [36]. Posteriormente Shen generalizó el resultado para el caso de dispersión no lineal [37]. Supongamos que en un medio no lineal transparente interaccionan $n + 1$ ondas cuasimonocromáticas con polarización lineal en la dirección del eje x definidas por

$$E_n = \mathcal{E}_n(t) \exp[-i(\omega_n t + k_n)z] - \mathcal{E}_n^*(t) \exp[i(\omega_n t - k_n)z].$$

Puesto que tenemos escalas temporales muy diferentes, en general podemos promediar temporalmente las magnitudes a tiempos mucho mayores que el mayor de los $1/\omega_n$ y a la vez mucho menores que el tiempo característico de variación de los $\mathcal{E}_n(t)$. Dicho promedio temporal de la densidad de energía almacenada debido a la interacción de las $n + 1$ ondas con el medio viene dado por

$$\bar{U}^{(n)} = n\epsilon_0 \mathcal{E}_{n+1}^* \chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_{n+1} = \omega_1 + \dots + \omega_n) \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n \exp(-i\Delta^{(n)}kz) + c.c.,$$

donde $\Delta^{(n)}k = k_{n+1} - k_1 - \dots - k_n$, $\chi_{1\dots 1}^{(n)}$ es la componente de $\chi^{(n)}$ en la dirección del eje x . En esta expresión las frecuencias pueden ser negativas, entendiéndose en ese caso que la amplitud asociada es \mathcal{E}_n^* . Es decir, puede haber por ejemplo susceptibilidades de la forma $\chi^{(3)}(\omega = -\omega + \omega + \omega)$ que acoplan las amplitudes $\mathcal{E}^* \mathcal{E}^* \mathcal{E} \mathcal{E}$. Para el cálculo de esta expresión se ha utilizado la simetría de permutación total de la susceptibilidad no lineal ([37]). Es decir, se ha supuesto que

$$\chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_l = \overbrace{\omega_p + \dots + \omega_q}^n) = \chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_p = \overbrace{\omega_l - \dots - \omega_q}^n),$$

para cualquier p y l . Por el contrario, nosotros estamos interesados en el hamiltoniano y no en la cantidad conservada en sí, por lo que tenemos que poner explícitamente todas

las relaciones funcionales entre los diferentes \mathcal{E}_n y \mathcal{E}_n^* , con lo que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}^{(n)} = & \frac{n\epsilon_0}{n+1} \left[\mathcal{E}_{n+1}^* \chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_{n+1} = \omega_1 + \dots + \omega_n) \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n + \dots \right. \\ & \left. \dots + \mathcal{E}_n^* \chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \mathcal{E}_{n+1} \mathcal{E}_1^* \dots \mathcal{E}_{n-1}^* \right] \exp(-i\Delta^{(n)}kz) + c.c., \end{aligned}$$

Integrando esta expresión sobre el volumen de interacción se obtiene el promedio temporal de la energía libre. Suponiendo que la susceptibilidad es constante en todo el volumen de interacción sólo tenemos que integrar el último término de la derecha, obteniéndose

$$\int_V \exp(-i\Delta^{(j)}kz) dx dy dz = Al \exp(-i\Delta^{(j)}kz_m) \frac{\text{sen}(\Delta^{(j)}kl/2)}{\Delta^{(j)}kl/2} \equiv Al F(\Delta^{(j)}k),$$

donde l es la longitud del medio no lineal y z_m la coordenada de su centro.

Hay varios comentarios pertinentes respecto de estos resultados. En primer lugar, se está suponiendo que la dispersión no lineal es despreciable de forma tal que $|\omega_p \partial \chi^{(j)} / \partial \omega_p| \ll |\chi^{(j)}|$ [34]. Por otra parte, las susceptibilidades únicamente son totalmente simétricas en frecuencias si no son resonantes. En el caso de que no sea así los términos resonantes dominan sobre el resto. Finalmente, $F(\Delta^{(j)}k)$ da cuenta de la interferencia de los distintos modos. Presenta un máximo central que rápidamente decae, de forma que la longitud de interacción máxima en la que ésta es efectiva es del orden de $2\pi/\Delta^{(j)}k$, denominada longitud de coherencia. En la práctica suele ser necesario disponer el montaje experimental de forma que $\Delta^{(j)}k = 0$. De esta manera la interferencia es en fase y el rendimiento no depende de la longitud de interacción.

Supongamos ahora que las n ondas que interaccionan son n de los modos cuánticos (2.1) de la cavidad. El hamiltoniano de interacción se obtiene substituyendo los \mathcal{E}_n por los correspondientes operadores creación:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}^{(n)} = & -\frac{Al\epsilon_0 n}{n+1} \left(\frac{-\hbar}{2\epsilon_0 LA} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_{n+1} = \omega_1 + \dots + \omega_n) \{a_{n+1}^\dagger a_1 \dots a_n\}_0 + \dots \right. \\ & \left. \dots + \chi_{1\dots 1}^{(n)}(\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \{a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger a_1^\dagger \dots a_{n-1}^\dagger\}_0 \right] \exp(-i\Delta^{(n)}kz) + c.c., \end{aligned}$$

donde $\{\dots\}_0$ significa orden simétrico, al cual nos debemos atener porque en general $\bar{\mathcal{H}}^{(n)}$ puede contener términos de orden superior (por ejemplo $a^\dagger a a^\dagger a$) que no estén en orden

30 *Capítulo 2. Campo electromagnético en interacción con un medio material no lineal*

normal, cuya contribución a la energía del vacío sea nula y que sin embargo influyan en las ecuaciones de evolución. Así mientras en el caso libre el orden que escojamos para el Hamiltoniano no influye en la forma de las ecuaciones de evolución, en este caso hay que escoger el orden simétrico para estar seguro de que se tienen en cuenta todos los términos relevantes en la evolución.

Por último puede haber susceptibilidades no lineales no nulas de distintos órdenes, con lo que el hamiltoniano de interacción será la suma de todos ellos

$$H_I = \sum_n \bar{\mathcal{H}}^{(n)}. \quad (2.2)$$

Debido al orden simétrico la energía del vacío no está acotada. Para obtener un Hamiltoniano en el que el vacío tenga energía nula basta redefinir el origen de ésta restando $\langle 0|H|0 \rangle$, que al ser constante no altera las ecuaciones de evolución.

Capítulo 3

Cavidades resonantes

3.1 Introducción

En muchas situaciones prácticas, el medio material se encierra en una cavidad resonante. Por resonante queremos decir que la reflectividad es lo suficientemente alta como para que se seleccionen predominantemente las frecuencias múltiplo de la frecuencia propia de la cavidad. De esta forma se consigue un mayor rendimiento al pasar el campo propagante múltiples veces por el medio material. Al mismo tiempo se reduce la anchura de línea, especialmente si el medio es activo y se consiguen oscilaciones automantenidas (caso del láser y del OPO). Desde el punto de vista puramente cuántico las condiciones de contorno impuestas por los espejos alteran la estructura del vacío dando lugar a efectos cuánticos nuevos (efecto Casimir) y a drásticas alteraciones en otros. En particular la presencia de una cavidad aumenta notoriamente la reducción efectiva de ruido cuántico del campo externo en los dispositivos de generación de luz comprimida [38]. Por todo ello el modelo que estudiaremos en los próximos capítulos incluirá la presencia de una cavidad. En lo que sigue se expone un método original para el tratamiento del campo el electromagnético en cavidades.

3.2 Efecto de la cavidad

Tal como hemos expuesto en el capítulo anterior, dado un Hamiltoniano efectivo plausible y siempre que la interacción sea suficientemente débil, la aproximación ALV nos permite plantear las ecuaciones de evolución del sistema. La resolución de dichas ecuaciones es en general extremadamente complicada. Sin embargo, para determinados valores iniciales (ondas monocromáticas) y sin condiciones de contorno, se pueden obtener resultados físicamente relevantes (caso de la Óptica no lineal clásica). La presencia de una cavidad supone la imposición de condiciones de contorno tanto en los espejos totalmente reflectantes como en los espejos con transmisión finita. Las condiciones de contorno complican notoriamente el problema imposibilitando el tratamiento habitual. El planteamiento que seguiremos aquí nos llevará a demostrar que al menos en determinado límite, se puede plantear un problema dinámico sin condiciones de contorno equivalente al problema inicial. No obstante, la evolución dejará de ser conservativa, apareciendo un término fuente estocástico. Como veremos, bajo ciertas condiciones el término fuente se comporta como ruido blanco Gaussiano, lo que nos permitirá aplicar las técnicas habituales de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas cuánticas.

Nos restringiremos por simplicidad al caso de la figura 3.1, es decir a una cavidad en anillo con un único espejo con transmisión finita que llamaremos espejo ES (Entrada y Salida), colocado en el origen de coordenadas $z = 0$. Los resultados son inmediatamente generalizables al caso de más de un espejo con transmisión no nula. Por otro lado, como ya hemos comentado, resultados anteriores [38] demuestran que esta configuración es la que produce la máxima reducción de ruido cuántico. Las condiciones de contorno en ES implican en particular, la conservación del momento lineal y de la energía. La conservación del momento impone el trazado de rayos en el espejo. La conservación de la energía supone la igualdad entre la intensidad entrante en el espejo y la saliente. Cuánticamente el operador intensidad se define como el vector de Poynting en orden normal [40]. En el caso de ondas planas dicho operador intensidad es proporcional a $E^{(-)}E^{(+)}$ [40]. De este modo se reproduce la expresión de la intensidad observada por efecto fotoeléctrico.

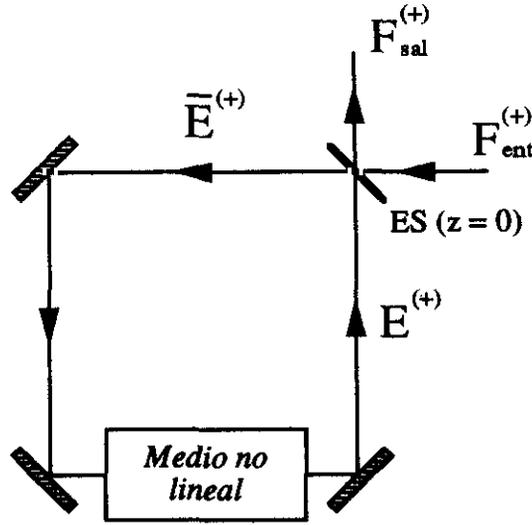


Figura 3.1: Campos entrantes y salientes en una cavidad en anillo

Por tanto los operadores $E^{(+)}$ entrantes y salientes en ES han de estar relacionados por una transformación unitaria. La forma específica de dicha transformación depende del tipo de espejo y no afecta a los resultados finales. En particular, usaremos coeficientes de reflexión (r) y de transmisión (t) reales. En este caso el coeficiente de reflexión ha de cambiar de signo de un lado a otro de ES, con lo que utilizando la notación de la figura 3.1 se obtiene

$$\bar{E}^{(+)}(t, 0) = rE^{(+)}(t, 0) + tF_{ent}^{(+)}(t, 0) \quad (3.1)$$

$$F_{sal}^{(+)}(t, 0) = tE^{(+)}(t, 0) - rF_{ent}^{(+)}(t, 0), \quad (3.2)$$

Supondremos a partir de ahora que r y t son independientes de la frecuencia, para posteriormente relajar esta restricción. Empezaremos estudiando el efecto de la cavidad vacía. Los espejos totalmente reflectantes imponen la condición de contorno

$$\bar{E}^{(+)}(t, 0) = E^{(+)}\left(t + \frac{2\pi}{\omega_c}, 0\right), \quad (3.3)$$

donde $\omega_c = 2\pi c/L$ es la frecuencia propia de la cavidad, siendo c la velocidad de la luz y L la longitud recorrida en una vuelta dentro de la cavidad. Substituyendo (3.3) en (3.1) se obtiene

$$E^{(+)}\left(t + \frac{2\pi}{\omega_c}, 0\right) = rE^{(+)}(t, 0) + tF_{ent}^{(+)}(t, 0). \quad (3.4)$$

Definiendo la transformada de Fourier por

$$E^{(+)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(t, 0) \exp(i\omega t) dt,$$

donde ω está definida en toda la recta real, y aplicándola a ambos miembros de (3.4) y despejando $E^{(+)}(\omega)$ posteriormente se obtiene

$$E^{(+)}(\omega) = \frac{t}{\exp(-i2\pi \frac{\omega}{\omega_c}) - r} F_{\text{ent}}^{(+)}(\omega) \equiv T(\omega) F_{\text{ent}}^{(+)}(\omega). \quad (3.5)$$

Desarrollemos en serie el denominador de $T(\omega)$ alrededor de las frecuencias resonantes $\omega_n = n\omega_c$, para n entero, hasta primer orden en ω :

$$\exp(-i2\pi n) \exp(-i \frac{2\pi}{\omega_c} (\omega - \omega_n)) - r \simeq 1 - r - i \frac{2\pi}{\omega_c} (\omega - \omega_n), \quad |\omega - \omega_n| \ll \omega_c. \quad (3.6)$$

Definiendo la función paso de Heaviside como

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases},$$

y la función ventana por

$$\Xi_{\Delta x}(x) = \theta(x + \frac{\Delta x}{2}) - \theta(x - \frac{\Delta x}{2}),$$

se obtiene

$$T(\omega) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) t}{1 - r - i \frac{2\pi}{\omega_c} (\omega - \omega_n)}, \quad |\omega - \omega_n| \ll \omega_c. \quad (3.7)$$

En principio esta expresión sólo es válida alrededor de las frecuencias de resonancia. Sin embargo en el caso en que $r \simeq 1$ (límite de buena cavidad) los valores significativos de la función de transferencia $T(\omega)$ se acumulan alrededor de las frecuencias de resonancia, de tal forma que ésta toma únicamente valores apreciables en el intervalo en el que el desarrollo es válido. Al mismo tiempo, la aproximación de primer orden de $T(\omega)$ también está confinada a un entorno alrededor de las frecuencias de resonancia de forma tal que en este límite la aproximación es buena en todo el intervalo de anchura ω_c . En la próxima

sección estudiaremos con detalle la validez de dicha aproximación. Si descomponemos (3.7) en parte real e imaginaria

$$T(\omega) \simeq t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \left[\frac{1-r}{(1-r)^2 + \left[\frac{2\pi}{\omega_c}(\omega - \omega_n)\right]^2} + i \frac{\frac{2\pi}{\omega_c}(\omega - \omega_n)}{(1-r)^2 + \left[\frac{2\pi}{\omega_c}(\omega - \omega_n)\right]^2} \right],$$

se comprueba que las funciones ventana son necesarias para garantizar la convergencia de $T(\omega)$ ya que de lo contrario la parte imaginaria sería divergente al tener el carácter de la serie $1/n$. Físicamente esto supone un efecto filtrante por parte de la cavidad en el límite de buena cavidad.

Dada la expresión (2.1) la transformada de Fourier del campo interno viene dada por

$$E^{(+)}(\omega) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar \omega_n}{2\epsilon_0 AL} \right)^{1/2} a_n(\omega - \omega_n).$$

Así mismo, el campo entrante tiene como transformada

$$F_{ent}^{(+)}(\omega) = i \theta(\omega) \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 c A} \right)^{1/2} a_{ent}(\omega).$$

Substituyendo estas expresiones en (3.5) usando (3.7) e igualando término a término, se obtiene para $\omega \geq 0$, $\omega_n \geq 0$,

$$\left(\frac{\omega_n}{L} \right)^{1/2} a_n(\omega - \omega_n) = \frac{t}{t^2/2 - i \frac{2\pi}{\omega_c}(\omega - \omega_n)} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \left(\frac{\omega}{c} \right)^{1/2} a_{ent}(\omega), \quad (3.8)$$

donde hemos utilizado $1-r \simeq t^2/2$ cuando $r \simeq 1$. En las ecuaciones (3.1) y (3.2) hemos supuesto implícitamente que los coeficientes de reflexión y de transmisión de ES no dependen de la frecuencia. A la vista de (3.8) realmente sólo es necesario que sean constantes alrededor de las frecuencias de resonancia de los modos relevantes, pudiendo ser diferentes para cada modo. Teniendo en cuenta que $\omega_c = 2\pi c/L$ y definiendo

$$\Gamma_n(\omega) \equiv \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^{1/2} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) a_{ent}(\omega), \quad (3.9)$$

y $\gamma \equiv \frac{\omega_c t^2}{4\pi}$ tenemos

$$-i(\omega - \omega_n) a_n(\omega - \omega_n) = -\gamma a_n(\omega - \omega_n) + \sqrt{2\gamma} \Gamma_n(\omega) \quad \omega \geq 0, \omega_n \geq 0. \quad (3.10)$$

La antitransformada de $\Gamma_n(\omega)$ en la variable $(\omega - \omega_n)$ es

$$\Gamma_n(t) = \frac{\exp(i\omega_n t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{1/2} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) a_{ent}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.11)$$

Nótese que para el rango de frecuencias ópticas $\omega/\omega_n \cong 1$ dentro del soporte de la función $\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n)$, hecho que posteriormente utilizaremos.

Alternativamente podemos expresar $\Gamma_n(\omega)$ como

$$\Gamma_n(\omega) = -i \left(\frac{2\varepsilon_0 c A}{\hbar \omega_n}\right)^{1/2} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) F_{ent}^{(+)}(\omega).$$

Es decir, cada $\Gamma_n(\omega)$ es un filtrado de ancho de banda ω_c centrado en la frecuencia ω_n , del campo entrante. El efecto filtrante de la cavidad (recuérdese que las funciones ventana son estrictamente necesarias para garantizar la convergencia de la serie) hace que cada modo interno sólo se acople con un único $\Gamma_n(t)$. De la misma forma podemos definir

$$\Lambda_n(\omega) \equiv \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{1/2} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) a_{sal}(\omega). \quad (3.12)$$

De forma análoga a lo hecho con Γ_n ,

$$\Lambda_n(t) = \frac{\exp(i\omega_n t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{1/2} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) a_{sal}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.13)$$

Dada su definición, cada $\Lambda_n(t)$ se puede medir independientemente mediante la aplicación de un filtro adecuado al campo saliente.

Por simplicidad de notación definimos $\varepsilon \equiv \omega - \omega_n$. Dado que en (3.10) tanto ω como ω_n están definidas únicamente en la semirecta real positiva, la antitransformada respecto de ε del lado izquierdo de (3.10) viene dada por

$$-i \int_{-\omega_n}^{\infty} \varepsilon a_n(\varepsilon) \exp(-i\varepsilon t) dt.$$

Dada la presencia de la función ventana en (3.8), el límite inferior de integración se puede extender hasta $-\infty$ ya que el soporte de $a_n(\varepsilon)$ está dentro del intervalo de integración, con lo que

$$-i \int_{-\omega_n}^{\infty} \varepsilon a_n(\varepsilon) \exp(-i\varepsilon t) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon a_n(\varepsilon) \exp(-i\varepsilon t) dt = \frac{d a_n(t)}{dt}.$$

Aplicando la antitransformada a ambos lados de 3.10 obtenemos

$$\frac{d a_n(t)}{dt} = -\gamma a_n(t) + \sqrt{2\gamma} \langle \Gamma_n(t) \rangle + \sqrt{2\gamma} \Delta \Gamma_n(t), \quad (3.14)$$

donde el símbolo Δ delante de un operador denota el operador menos su valor medio.

La ecuación (3.14) incluye el efecto de la cavidad directamente. Gracias a la linealización de las ecuaciones algebraicas en el espacio de frecuencias que definen las condiciones de contorno, hemos podido expresar éstas mediante una ecuación diferencial de primer orden en la representación temporal. Las soluciones de (3.14) sin condiciones de contorno son las mismas que las de la ecuación de ondas libre con las condiciones de contorno impuestas por la cavidad dentro del rango de validez de las aproximaciones que hemos supuesto. La ecuación (3.14) es una ecuación disipativa, lo que sugiere que el último término de la derecha sea ruido estocástico (tipo fuerza de Langevin) que permita establecer un teorema de fluctuación disipación. Como comprobaremos en las siguientes secciones efectivamente es así. Desde los primeros tiempos de la teoría del laser [41, 42] se añadieron fenomenológicamente términos disipativos a las ecuaciones de evolución con el fin de simular el efecto de las condiciones de contorno, de por sí engorrosas en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Los resultados son independientes del mecanismo de pérdidas elegido: resistencia óhmica, interacción con un baño de fonones, interacción con un haz atómico, etc, reproduciéndose bien los resultados experimentales. Una verdadera derivación de los términos disipativos desde las condiciones de contorno no fue posible hasta los trabajos de 1973 de Lang, Scully y Lamb [43] y Lang y Scully [44], en los que se deduce (3.14) (incluyendo la evolución propia de un laser) y se demuestra la naturaleza estocástica del último término de ésta. Para ello utilizaron un planteamiento en modos discretos (modos del Universo) en el que el campo externo es cuantizado en una cavidad suficientemente grande cuya longitud se hace tender a infinito al final de los cálculos. Por el contrario, en nuestra deducción el campo externo se expresa directamente en función de modos continuos. Posteriormente, en 1984, Collet y Gardiner [38] identificaron de

forma heurística, el reservorio introducido fenomenológicamente en los primeros años de la teoría del laser con el campo electromagnético externo, aparentemente sin conocer los trabajos de Lang, y Scully y Lamb, aplicando el formalismo así obtenido al cálculo del espectro de fluctuaciones en cuadraturas del oscilador paramétrico por debajo del umbral. Paralelamente Gardiner y Savage [39] resolvieron este mismo caso exactamente, es decir sin desarrollar en serie $T(\omega)$. En el límite de buena cavidad obtuvieron el mismo resultado que en [38] lo que supuso un fuerte soporte para la validez del formalismo. En el trabajo de Collet y Gardiner un único modo de la cavidad interacciona con todos los del campo electromagnético externo desarrollado en modos continuos. Como hemos visto la convergencia de $T(\omega)$ implica un ancho de banda finito para el acoplo entre los modos internos y el campo externo. Al no imponer este ancho de banda finito Collet y Gardiner han de restringirse, artificialmente, a un único modo interno. El trabajo aquí presentado establece desde primeros principios, la validez y los límites de esta teoría y la generaliza a todos los modos de la cavidad. Por último, Gea-Banacloche y otros [45] reprodujeron los resultados del formalismo de Collet y Gardiner utilizando el desarrollo en modos del Universo dando, al mismo tiempo, una imagen intuitiva de como la presencia de la cavidad afecta a la reducción de ruido cuántico.

Una vez que el efecto de la cavidad se expresa de forma dinámica, la inclusión de un medio en interacción con el campo es inmediata. Basta ver que la ecuación (3.3) pasa a ser

$$E^{(+)}(t, 0) = \exp \left\{ \frac{-i}{\hbar} [\ , H_I] \frac{2\pi}{\omega_c} \right\} \bar{E}^{(+)}(t - \frac{2\pi}{\omega_c}, 0),$$

con lo que el incremento diferencial producido por el medio no lineal viene dado por

$$d a_n(t) = \frac{-i}{\hbar} [a_n(t), H_I] dt,$$

obteniéndose finalmente

$$\boxed{\frac{d a_n(t)}{dt} = -\gamma a_n(t) - \frac{i}{\hbar} [a_n(t), H_I] + \sqrt{2\gamma} \langle \Gamma_n(t) \rangle + \sqrt{2\gamma} \Delta \Gamma_n(t).} \quad (3.15)$$

El efecto de H_I es introducir un acoplo entre los modos internos produciendo una transferencia de energía de unos a otros, en general sensible a la fase (el acoplo es a través de las amplitudes, no de las intensidades). El ritmo de esta transferencia es mucho más lento que el inverso de la frecuencia de cada uno de ellos, de tal forma que en cada instante el campo es solución de la ecuación de ondas libre (aproximación ALV). La presencia de la cavidad viene expresada por el decaimiento γ y la entrada de las fluctuaciones del vacío externo a través del espejo ES. Esta ecuación es el resultado central de este capítulo.

3.3 Reglas de conmutación

Si la deducción de la ecuación (3.15) ha sido consistente se han de conservar los conmutadores de los modos internos a tiempos iguales. Conviene por tanto comprobarlo explícitamente para contrastar la validez de la ecuación. Realmente sólo necesitamos calcular los conmutadores correspondientes a (3.14) puesto que la evolución Hamiltoniana conserva las relaciones de conmutación a tiempos iguales.

En primer lugar utilizando (3.10) y puesto que $[a_{ent}(\omega), a_{ent}(\omega')] = 0$ es inmediato comprobar que $[a_n(\omega), a_m(\omega')] = 0$ y por tanto $[a_n(t), a_m(t')] = 0$. Así pues, en el caso general en que $H_I \neq 0$, $[a_n(t), a_m(t)] = 0$.

Por otro lado teniendo en cuenta que

$$\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_m) = \delta_{n,m} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n)$$

y que $f(x)\delta(x) = f(0)$ los operadores Γ_n cumplen

$$[\Gamma_n(\omega), \Gamma_m^\dagger(\omega')] \simeq \delta_{n,m} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \delta(\omega - \omega')$$

donde hemos utilizado las reglas de conmutación del campo entrante (libre) y $\omega/\omega_n \cong 1$ dentro del soporte de la función $\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n)$. Denotando como antes $\varepsilon \equiv \omega - \omega_n$ y utilizando (3.10) se deduce inmediatamente que

$$\frac{[a_n(\varepsilon), a_m^\dagger(\vare')]}{\delta_{n,m}} = \frac{2\gamma}{(\gamma - i\vare)(\gamma + i\vare')} \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \delta(\varepsilon - \vare').$$

Tomando la transformada de Fourier

$$[a_n(t), a_m^\dagger(t')] = \frac{\delta_{n,m}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \varepsilon^2} \Xi_{\omega_c}(\varepsilon) \exp\{-i\varepsilon(t - t')\} d\varepsilon.$$

A tiempos iguales la integración es inmediata obteniéndose

$$[a_n(t), a_m^\dagger(t)] = \delta_{n,m} \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_c}{2\gamma} \right) \simeq \delta_{n,m}, \quad r \simeq 1$$

lo que demuestra que se mantienen las reglas de conmutación a tiempos iguales.

Para el cálculo del espectro de fluctuaciones en las cuadraturas del campo saliente, que es lo que en última instancia nos interesa, necesitaremos los conmutadores entre los modos del campo interno y los de los campos externos. En primer lugar tenemos que

$$[a_m(t), \Gamma_n(t')] = 0, \quad t' > t, \quad (3.16)$$

como consecuencia directa de (3.15) al ser ésta una ecuación diferencial y por tanto causal. Invertiendo el sentido del vector de ondas (inversión temporal) tenemos

$$[a_m(t), \Lambda_n(t')] = 0, \quad t > t'. \quad (3.17)$$

Aplicando la transformada de Fourier (siempre dentro de la aproximación de ancho de banda estrecho) a la condición de contorno (3.2), multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n)$ y teniendo en cuenta las definiciones de $\Gamma_n(\omega)$ y de $\Lambda_n(\omega)$ es inmediato obtener

$$\Gamma_n(\omega) = t \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{1/2} a_n(\omega - \omega_n) - r \Lambda_n(\omega).$$

Si ahora se aplica la antitransformada de Fourier en la variable $\omega - \omega_n$, en el límite de buena cavidad se obtiene

$$\Gamma_n(t) + \Lambda_n(t) = \sqrt{2\gamma} a_n(t).$$

Como ya hemos comentado en el límite de alta reflectividad y debido al efecto filtrante de a cavidad, solamente es necesario que la reflectividad sea constante en cada ventana de frecuencias $\Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n)$. En el siguiente apartado demostraremos que esta hipótesis

se cumple en la práctica. Podemos pues generalizar esta ecuación suponiendo una reflectividad distinta para cada modo (en la práctica los modos físicamente relevantes son muy pocos)

$$\Gamma_n(t) + \Lambda_n(t) = \sqrt{2\gamma_n} a_n(t). \quad (3.18)$$

Aplicando el conmutador con $a_m(t)$ a ambos miembros de la ecuación

$$[a_m(t), \Gamma_n(t')] + [a_m(t), \Lambda_n(t')] = \sqrt{2\gamma_n} [a_m(t), a_n(t')],$$

con lo que, teniendo en cuenta (3.16) y (3.17),

$$[a_m(t), \Gamma_n(t')] = \theta(t - t') \sqrt{2\gamma_n} [a_m(t), a_n(t')], \quad (3.19)$$

$$[a_n(t), \Lambda_n(t')] = \theta(t' - t) 2\gamma [a_n(t), a_n(t')]. \quad (3.20)$$

Estas ecuaciones son consecuencia directa de las condiciones de contorno en ES y del principio de causalidad. De hecho las podemos generalizar fácilmente a los propios campos de la siguiente forma. La evolución del campo electromagnético libre es causal. Las condiciones de contorno (3.1) y (3.2) son sólo una aproximación y en principio la reflectividad de ES depende de la frecuencia, es decir la respuesta del espejo no es instantánea. Sin embargo no parece lógico suponer que ésta dependa de los campos futuros violando el principio de causalidad. Bajo esta hipótesis ha de cumplirse que

$$[E^{(+)}(t), F_{ent}^{(+)}(t')] = 0, \quad t < t',$$

y por inversión temporal

$$[E^{(+)}(t), F_{sal}^{(+)}(t')] = 0, \quad t > t'.$$

Utilizando como antes (3.2) se obtiene

$$[E^{(+)}(t), F_{ent}^{(+)}(t')] = \theta(t - t') \frac{t}{r} [E^{(+)}(t), E^{(+)}(t')],$$

$$[E^{(+)}(t), F_{sal}^{(+)}(t')] = \theta(t' - t) t [E^{(+)}(t), E^{(+)}(t')],$$

ecuaciones que son válidas para cualquier reflectividad del espejo, supuesta independiente de la frecuencia.

3.4 Correlaciones de los campos

Para hamiltonianos de interacción cuadráticos en a y a^\dagger la ecuación de evolución (3.15) es lineal. Las soluciones estacionarias se pueden calcular por tanto con facilidad utilizando por ejemplo, la transformada de Fourier. Bastaría utilizar la ecuación (3.2) para calcular el campo saliente en función del entrante resolviendo completamente el problema. Esto no es posible para Hamiltonianos más generales en los que las ecuaciones de evolución ya no son lineales. En su lugar veremos como el ruido entrante se puede considerar blanco, lo que después de linealizar alrededor de los estados estacionarios, reduce el problema a un proceso de Ornstein-Uhlenbeck para el que el cálculo del espectro de fluctuaciones está bien establecido.

En todas las situaciones experimentales el sistema es iluminado por luz procedente de un láser. Con buena aproximación el estado generado por un láser se puede considerar coherente. De hecho todo el desarrollo experimental de la óptica cuántica está basado en esta suposición. Ciertamente es una aproximación (dependiendo del tipo y la calidad del láser) puesto que no se tienen en cuenta efectos como la difusión de fase o vibraciones de la cavidad resonante. Tampoco se tiene en cuenta que el sistema también está iluminado por la radiación térmica del ambiente. Sin embargo su influencia en las frecuencias ópticas dentro de las temperaturas habituales de trabajo es totalmente despreciable (6×10^{-45} fotones de frecuencia 4×10^{15} rad/s a 300 K). En cualquier caso, estos efectos siempre se pueden incluir en las correlaciones del último término de (3.15) aunque puede suponer la imposibilidad de una resolución analítica del problema.

La autocorrelación antinormal del término de ruido en (3.15) viene dada por

$$\langle \Delta \Gamma_m(t) \Delta \Gamma_n^\dagger(t') \rangle = \frac{\exp\{i(\omega_m t - \omega_n t')\}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_m) \Xi_{\omega_c}(\omega' - \omega_n) \langle \Delta a_{ent}(\omega) \Delta a_{ent}^\dagger(\omega') \rangle \exp\{-i(\omega t - \omega' t')\},$$

donde de nuevo hemos supuesto que $\omega/\omega_n \simeq 1$. Para un estado coherente tenemos

$$\langle \Delta a_{ent}(\omega) \Delta a_{ent}^\dagger(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') + \langle \Delta a_{ent}^\dagger(\omega') \Delta a_{ent}(\omega) \rangle = \delta(\omega - \omega'),$$

donde hemos utilizado las reglas de conmutación del campo electromagnético y el hecho de que el sistema está iluminado por un estado coherente y por tanto autoestado de a_{ent} .

Substituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \Delta \Gamma_m(t) \Delta \Gamma_n^\dagger(t') \rangle &= \frac{\exp\{i(\omega_m t - \omega_n t')\}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Xi_{\omega_c}(\omega - \omega_n) \exp\{-i\omega(t - t')\} \\ &= \delta_{m,n} \frac{\text{sen}[\omega_c(t - t')]}{\pi(t - t')}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Así pues la ecuación de evolución (3.15) se puede interpretar como una ecuación estocástica con ruido de color. En la teoría de Collet y Gardiner [38] la correlación es directamente una delta de Dirac al no haber tenido en cuenta el efecto filtrante de la cavidad. El tiempo de correlación de una variable estocástica x se define como [46]

$$\tau_c = \frac{1}{\sigma_s^2} \int_0^\infty \langle \Delta x(t) \Delta x(0) \rangle_s dt,$$

donde σ^2 es la varianza y el subíndice s se refiere al estado estacionario. En nuestro caso se obtiene

$$\tau_c = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} dt = \frac{\pi}{2\omega_c} = \frac{\tau}{4}.$$

Como hemos visto, tanto las variaciones temporales inducidas por H_I como por γ son mucho más lentas que τ y por tanto podemos suponer la idealización matemática de ruido blanco

$$\langle \Delta \Gamma_m^\dagger(t) \Delta \Gamma_n(t') \rangle = 0, \quad (3.22)$$

$$\langle \Delta \Gamma_m(t) \Delta \Gamma_n^\dagger(t') \rangle = \delta_{m,n} \delta(t - t'). \quad (3.23)$$

A la vista de estas ecuaciones el acoplo de un estado coherente externo con un modo del campo interno es formalmente idéntico al acoplo con una fuente exterior clásica más un reservorio térmico cuántico a temperatura absoluta nula.

Obsérvese que aún siendo el estado del campo entrante un autoestado de $a_{ent}(\omega)$ (dispersión nula), la correlación (3.21) no se anula debido a que un sólo modo del campo interno se acopla con un conjunto denso de modos externos. Podríamos haber supuesto un desarrollo en modos discretos de periodicidad L , tanto para el campo interno como para el externo, conformándonos únicamente con soluciones del campo con dicha periodicidad. En ese caso las condiciones de contorno (3.1) y (3.2) se cumplirían para cada modo por separado, pudiéndose establecer una ecuación equivalente a (3.15) pero con los Γ_n substituidos por auténticos modos discretos. Estos autoestados no producirían fluctuaciones internas debido a que el término fuente de (3.15) correspondería a un solo modo y por tanto, a una única frecuencia y necesitamos un conjunto suficientemente amplio de frecuencias involucradas para introducir aleatoriedad. Sin embargo, si suponemos que existe un vacío estocástico clásico por cada modo discreto externo, podemos introducir correlaciones tipo delta de Dirac. De esta forma se justifica la aproximación semiclassical de Reynaud y Heidmann [47], en la que el campo entrante se trata como modos discretos clásicos a los que arbitrariamente se les asigna las correlaciones en orden simétrico correspondientes a modos continuos cuánticos. Por último, el planteamiento de Carmichael [48], en el que un único modo interno se acopla con los infinitos modos discretos externos (con longitud de cuantización la de la cavidad), puede dar cuenta de las correlaciones (3.22) y (3.23), pero no de las ecuaciones de evolución correctas para los modos internos cuando hay más de uno involucrado ya que, al interaccionar todos con el mismo reservorio (el campo externo), aparecen acoplos espúreos entre ellos. Esto es irrelevante para los resultados obtenidos en [48] dado que se centran en las correlaciones del campo saliente.

Por nuestro lado, en cuanto a estas mismas correlaciones supondremos que realizamos una medida filtrante sobre el campo saliente de forma que medimos las correlaciones de cada $\Lambda_n(t)$ aisladamente. De hecho, en las realizaciones prácticas la medida también

es filtrante con un ancho de banda del orden de ω_c . Utilizando la condición de contorno (3.18) y suponiendo que el campo entrante está en un estado coherente se obtiene directamente

$$\begin{aligned}\langle \Delta \Lambda_m(t) \Delta \Lambda_n(t') \rangle &= 2\sqrt{\gamma_m \gamma_n} \langle \Delta a_m(t) \Delta a_n(t') \rangle - \sqrt{2\gamma_n} \langle \Delta \Gamma_m(t) \Delta a_n(t') \rangle = \\ &= 2\sqrt{\gamma_m \gamma_n} \langle \Delta a_m(t) \Delta a_n(t') \rangle + \sqrt{2\gamma_n} \langle \Delta a_n(t'), \Delta a_m(t) \rangle.\end{aligned}$$

Haciendo uso de (3.19) esta ecuación adopta la forma

$$\langle \Delta \Lambda_m(t) \Delta \Lambda_n(t') \rangle = 2\sqrt{\gamma_m \gamma_n} \langle \Delta a_m(t) \Delta a_n(t') + \theta(t' - t) [\Delta a_n(t'), \Delta a_m(t)] \rangle.$$

Este resultado se puede expresar de forma compacta mediante el símbolo de orden temporal de Dyson, \mathcal{T}

$$\langle \Delta \Lambda_m(t) \Delta \Lambda_n(t') \rangle = 2\sqrt{\gamma_m \gamma_n} \langle \mathcal{T}(\Delta a_m(t) \Delta a_n(t')) \rangle. \quad (3.24)$$

Finalmente, se tiene que para un estado coherente del campo entrante ya que todos los términos que contienen al campo entrante se anulan,

$$\langle \Delta \Lambda_m^\dagger(t) \Delta \Lambda_n(t') \rangle = 2\sqrt{\gamma_m \gamma_n} \langle \Delta a_m^\dagger(t) \Delta a_n(t') \rangle. \quad (3.25)$$

A la vista de estos resultados es claro que las correlaciones de cada Λ_n , es decir, cuando $n = m$, solamente portan información relativa a un único modo del campo interno. Bajo las condiciones en las que la aproximación ALV es válida, los modos $a_n(t)$ son espectralmente disjuntos, por lo que las medidas tomadas filtrando sobre el campo saliente los modos $\Lambda_n(t)$ adquieren pleno sentido.

Hasta aquí hemos establecido como podemos tener en cuenta la presencia de la cavidad transformando las condiciones de contorno en términos dinámicos sobre las propias ecuaciones de evolución en igualdad de condiciones con el tratamiento hamiltoniano habitualmente utilizado para modelar el efecto del medio no lineal. En particular hemos demostrado que el efecto del vacío exterior se puede reducir a un término de ruido blanco añadido al campo interno y hemos hallado la relación entre las correlaciones del campo saliente medido y las del campo interno, todo lo cual nos permitirá calcular el espectro de fluctuaciones de las cuadraturas del campo saliente. Sin embargo antes de continuar debemos analizar las diferentes aproximaciones realizadas y su rango de validez.

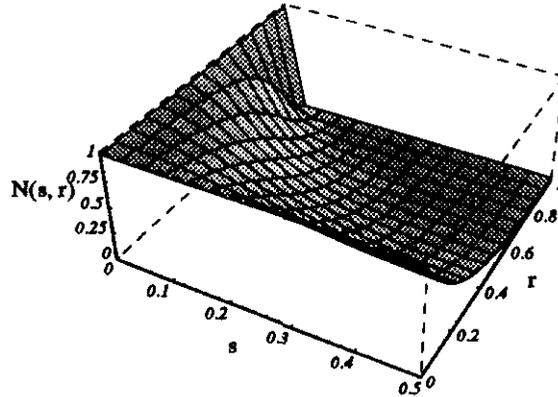


Figura 3.2: Superficie $N(s, r)$. El máximo es 1 para cualquier r al haber normalizado por $|T(0, r)|^2$.

3.5 Validez de las aproximaciones

3.5.1 Desarrollo en serie

Dado que tanto $T(\omega)$ como su aproximación racional, que llamaremos $R(\omega)$, son periódicas, únicamente necesitamos comparar un periodo centrado en una ω_n dada. Siendo a su vez simétricas respecto de ω_n , nos basta estudiar el semiperiodo positivo. Para ello definiremos el parámetro adimensional $s \equiv (\omega - \omega_n)/\omega_c$, que en dicho semiperiodo varía entre 0 y 0.5. Puesto que $T(\omega)$ y $R(\omega)$ son funciones complejas, estudiaremos, por simplicidad, el modulo al cuadrado de cada una de ellas. En el caso de $T(\omega - \omega_n)$ se tiene para el modulo al cuadrado en función de s y de r (ecuación (3.5))

$$|T(s, r)|^2 = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi s)}, \quad (3.26)$$

donde hemos utilizado $t^2 = 1 - r^2$. Normalizando por su valor en el origen se obtiene

$$N(s, r) \equiv \frac{|T(s, r)|^2}{|T(0, r)|^2} = \frac{(1 - r)^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi s)}.$$

Como se puede observar en la figura 3.2, $N(s, r)$ presenta un pico estrecho alrededor del cero para valores de r cercanos a 1. La anchura de este pico aumenta monótonamente

de 0 a ∞ según r disminuye. De la misma forma para la aproximación racional tenemos,

$$|R(s, r)|^2 = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + (2\pi s)^2}, \quad (3.27)$$

con lo que una vez normalizada queda

$$M(s, r) \equiv \frac{(1 - r)^2}{(1 - r)^2 + (2\pi s)^2},$$

que de nuevo presenta un pico central con una anchura que aumenta monótonamente según decrece r (figura 3.3).

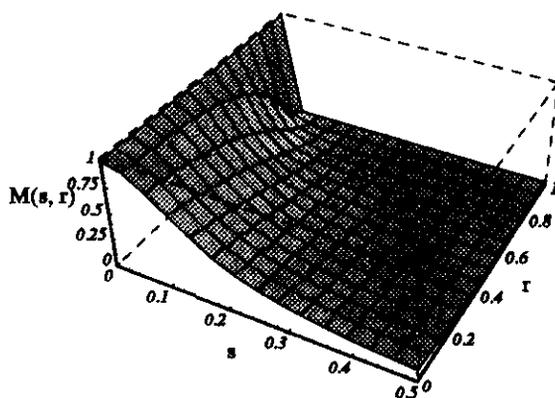


Figura 3.3: Superficie $M(s, r)$. El máximo es 1 para cualquier r al haber normalizado por $|R(0, r)|^2$.

Tanto $N(s, r)$ como su aproximación $M(s, r)$ se acumulan alrededor del cero para valores de r cercanos a 1. Tomaremos como semianchura del pico central la coordenada s_r que corresponde a un 90 % del área total de $T(s, r)$ para un r dado. La integral de $T(s, r)$ viene dada por (ver por ejemplo [49])

$$\int_0^s \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi x)} dx = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{1+r}{1-r} \tan(\pi s) \right].$$

El área total es independiente de r tomando el valor 0.5. El área normalizada es, por tanto

$$\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{1+r}{1-r} \tan(\pi s) \right].$$

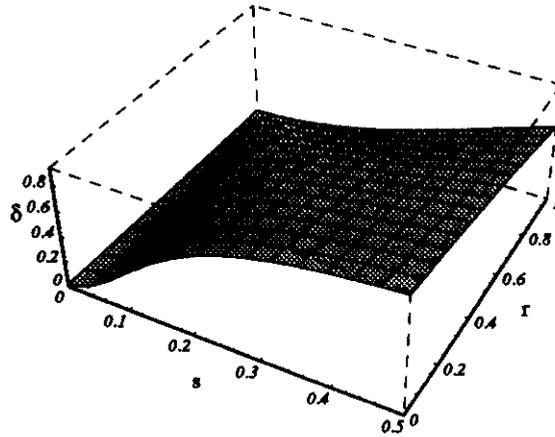


Figura 3.4: *Superficie de error relativo.*

Asignándole el valor 0.9 se obtiene para el intervalo en el que $|T(\omega, r)|^2$ es relevante,

$$s_r = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{1-r}{1+r} \tan(0.45\pi) \right].$$

$R(s, r)$ será una buena aproximación si el intervalo en el que la aproximación lineal de la exponencial es buena cae dentro de s_r . Tomando un valor de 0.01 para este intervalo (lo que supone dos órdenes de magnitud entre el término lineal y el cuadrático en el desarrollo de la exponencial) e igualándolo a s_r , se obtiene para r un valor límite

$$r_l = \frac{\tan(\pi 0.45) - \tan(\pi 0.01)}{\tan(\pi 0.45) + \tan(\pi 0.01)} = 0.96$$

en el que la aproximación es buena.

Después de un poco de álgebra, usando (3.26) y (3.27), se obtiene para el error relativo

$$\delta \equiv \left| \frac{|R(s)|^2 - |T(s)|^2}{|T(s)|^2} \right| = \left| \frac{2r(1 - \cos(2\pi s)) - (2\pi s)^2}{(1-r)^2 + (2\pi s)^2} \right|$$

La figura 3.4 muestra $\delta(s, r)$. Como se puede observar el error relativo nunca alcanza el 100 %. En particular para el valor límite r_l y hasta s_r , el error relativo máximo es de tan sólo el 3 % (figura 3.6).

Por último la figura 3.5 muestra $N(s, r_l)$ y $M(s, r_l)$. Como se puede observar el ajuste es excelente. Téngase en cuenta que en 3.5 el rango de s es $(-0.02, 0.02)$. Si se utiliza

todo el rango de definición la diferencia está por debajo de la resolución de la figura. De hecho, como veremos, el límite $r_t = 0.96$ es demasiado estricto.

3.5.2 Aproximación lineal en la relación entre r y t

La segunda aproximación que hacemos es suponer que t es suficientemente pequeño como para que sea válido el desarrollo

$$r = \sqrt{1 - t^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}t^2 \implies 1 - r \simeq \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(1 - r^2).$$

Para el error relativo tenemos en este caso

$$\varepsilon_r(r) = \frac{|1 - r - \frac{1}{2}(1 - r^2)|}{1 - r} = \frac{1}{2}(1 - r),$$

con lo que $\varepsilon_r(0.96) = 0.02$. Es decir, un 2 % de error relativo, menor que el valor máximo de δ en la semianchura de $|T(s, 0.96)|^2$ y por tanto, compatible con la aproximación anterior.

3.5.3 Independencia de r con la frecuencia

Así mismo es necesario para la obtención de 3.15, que r no dependa de la frecuencia dentro del soporte de la función ventana. Teniendo en cuenta las altas reflectividades que estamos manejando, un espejo multicapa parece el más adecuado [50]. Un espejo de este tipo presenta una reflectividad constante alrededor de una frecuencia dada en un ancho de banda de unos 70 nm, ancho de banda que se puede incrementar hasta unos 300 nm utilizando multicapas de diferentes dieléctricos [50]. Dado un incremento en longitudes de onda $\Delta\lambda$ el correspondiente incremento en frecuencias angulares viene dado por

$$\Delta\omega = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_i \lambda_f},$$

donde c es la velocidad de la luz y $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$. Usando $\Delta\lambda = 70 \text{ nm}$ y una longitud de onda central de $10 \mu\text{m}$ (característica de los pozos cuánticos) se obtiene $\Delta\lambda \simeq 1.4 \times 10^{12}$. Para una cavidad centimétrica ($L = 10^{-2} \text{ m}$), $\omega_c \simeq 2 \times 10^{11}$ y por tanto considerar r

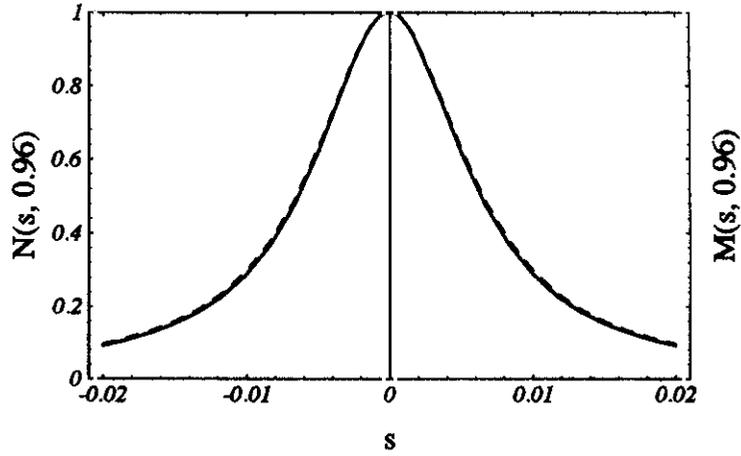


Figura 3.5: Comparación entre $N(s, r_1)$ (línea continua) y $M(s, r_1)$ (línea de trazos).

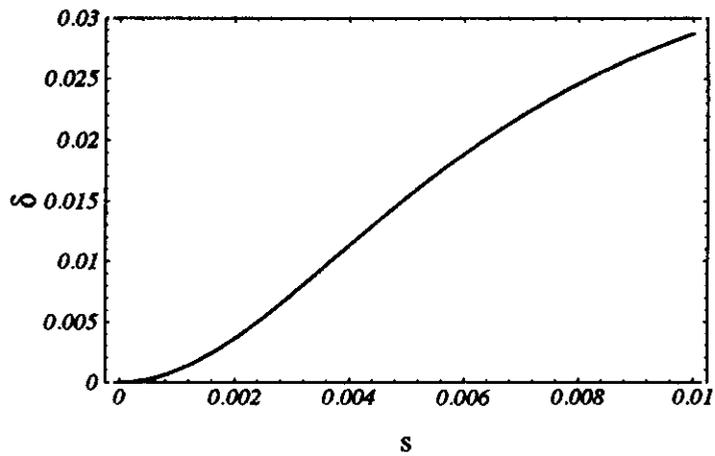


Figura 3.6: Error relativo para $r = 0.96$ (r_1). Obsérvese que el rango de la abcisa es precisamente s_r .

constante en un ancho de banda ω_c es una magnífica aproximación. Obsérvese que para frecuencias mayores la aproximación es aún mejor.

3.5.4 Relación entre ω y ω_n

En el cálculo de los conmutadores a tiempos iguales y en el de las correlaciones, hemos supuesto que $\omega/\omega_n \simeq 1$ dentro del soporte de la correspondiente función ventana. El error relativo máximo (i.e., en el extremo del intervalo de anchura ω_c donde la función ventana no se anula) viene dado por

$$\epsilon_n = \left| \frac{\omega_n}{\omega_n + \frac{\omega_c}{2}} - 1 \right| = \frac{1}{2n + 1}.$$

Un error relativo de alrededor del 1 % corresponde a $n = 50$. Teniendo en cuenta que estamos en frecuencias ópticas o a lo sumo infrarrojas (como antes, $\lambda \simeq 10 \mu m$) y que la cavidad tiene un tamaño del orden del *cm*, todo lo cual implica como mínimo un n del orden de 1000, la aproximación es excelente.

3.5.5 Resultados experimentales

En último término la mejor forma de establecer los límites de una determinada teoría es comparar sus predicciones con los experimentos. Los resultados aquí expuestos coinciden con los del formalismo de Collet y Gardiner [38] y están ampliamente contrastados con las medidas experimentales. Particularmente interesante es el trabajo de de Milburn y otros [20]. En él se estudia experimentalmente la utilidad del efecto Kerr en fibras ópticas para la generación de luz comprimida. En particular en la segunda parte se trata el caso de una cavidad en anillo. En dicho experimento no se estudia ruido cuántico, sino ruido clásico introducido por un dispositivo experimental adecuado. Para nuestros fines esto es irrelevante puesto que ninguna de las aproximaciones que aquí hemos comentado dependen del carácter cuántico de la radiación. En el experimento se mide el espectro de fluctuaciones de las cuadraturas del campo saliente para distintos valores de la fase del oscilador local, mostrando un muy buen acuerdo con la teoría. Este resultado es un

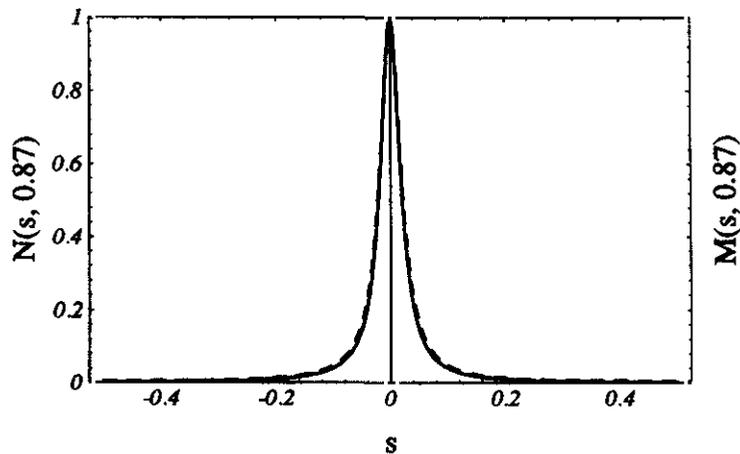


Figura 3.7: Comparación entre $N(s, r)$ (línea continua) y $M(s, r)$ (línea de trazos) para $r = 0.87$.

tanto sorprendente si se tiene en cuenta que la cavidad está realizada con fibra óptica consiguiéndose tan sólo una reflectividad del 75 % en intensidad ($r = 0.87$). En principio parece un valor muy bajo para el buen funcionamiento de las aproximaciones realizadas. Sin embargo, s_r vale en este caso 0.03 lo que sigue permitiendo el desarrollo en serie. Además, dentro de la zona relevante el máximo valor de δ no llega al 10 %. En la figura 3.7 se muestran las correspondientes funciones $N(s, 0.87)$ y $M(s, 0.87)$ en todo su rango de definición. Como se puede apreciar el ajuste sigue siendo aceptable, si bien ahora la resolución de la figura permite diferenciar entre las dos curvas. Por otro lado el $\epsilon_r(0.87)$ es del 7 %, error que también se puede considerar aceptable. En definitiva, si bien en un principio puede parecer una aproximación muy cruda el desarrollo lineal en el espacio de las frecuencias, la forma de $T(\omega)$ garantiza que el formalismo se pueda considerar aceptable hasta valores de la reflectividad del orden del 75 % en intensidad.

Capítulo 4

El método de cálculo

4.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos establecido dos resultados esenciales para el cálculo del ruido en cuadraturas (la varianza) y su densidad espectral (el espectro de fluctuaciones) del campo saliente: la ecuación de evolución (3.15) y las relaciones (3.24) y (3.25). Resolviendo la primera con el campo entrante como término fuente y utilizando las segundas, la densidad espectral del campo saliente es “inmediata”. Sin embargo, la ecuación (3.15) no es precisamente manejable. Es una ecuación sobre operadores, es no lineal y para acabar de complicar las cosas es diferencial estocástica. Después de un primer apartado de definiciones veremos en este capítulo cómo eliminar uno a uno estos inconvenientes: convertiremos el problema sobre operadores en uno equivalente sobre funciones de variable compleja mediante una proyección en el espacio de fases, linealizaremos alrededor de los puntos fijos estables y, gracias al tercer resultado esencial del capítulo anterior (las correlaciones (3.22) y (3.23)), la ecuación diferencial estocástica se reducirá a un proceso de Orstein-Uhlenbeck para el cual el cálculo del espectro de fluctuaciones está resuelto.

4.2 Relación entre la matriz de correlación del campo saliente y la del campo interno

Con el objeto de hacer la notación más compacta utilizaremos la siguiente convención: las variables en negrita representarán un vector sobre los modos de la cavidad de la forma

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_n(t) \\ a_n^\dagger(t) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

En esta representación cada modo lleva asociado un subespacio de dimensión dos. Todas las transformaciones que no conecten modos entre sí vendrán dadas en esta representación como matrices diagonales por cajas de dimensión dos. Así, el efecto de la reflectividad finita de los espejos viene dado por la matriz diagonal \mathbf{G}

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{c|cc|c} \ddots & & & \\ \hline & 0 & & 0 \\ & \gamma_n & 0 & \\ & 0 & \gamma_n & \\ \hline & 0 & & \ddots \end{array} \right),$$

donde los puntos suspensivos indican que se repite el mismo tipo de matriz dos por dos y los ceros representan las matrices nulas necesarias para completar la matriz cuadrada.

Utilizando esta notación las ecuaciones (3.22) y (3.23) se pueden expresar en una única ecuación matricial. Dada la definición de los Λ_n (3.13) y puesto que el campo saliente es libre, es evidente que $\Delta\Lambda_m(t)$ y $\Delta\Lambda_n(t')$ conmutan. Al mismo tiempo, (3.23) está directamente en orden normal. Si denotamos por $::$ el orden normal (operadores creación a la derecha) tenemos entonces

$$:C: \equiv \langle : \Delta\Lambda(t)\Delta\Lambda^\dagger(t') : \rangle = 2\sqrt{\mathbf{G}} \langle : \mathcal{T}(\Delta\mathbf{a}(t)\Delta\mathbf{a}^\dagger(t')) : \rangle \sqrt{\mathbf{G}}.$$

Las correlaciones que realmente nos interesan son la de la parte real e imaginaria de cada

4.2. Relación entre la matriz de correlación del campo saliente y la del campo interno 55

operador $a_n(t)$ (las cuadraturas). Definiendo la transformación unitaria,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|cc|c} \ddots & & & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & -i & i \\ \hline 0 & & & 0 & \ddots \end{array} \right),$$

las cuadraturas vienen dadas por

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} U a.$$

Tenemos entonces para las cuadraturas del campo saliente la matriz de correlaciones

$$\langle : \Delta X_{sal}(t) \Delta X_{sal}^\dagger(t') : \rangle = U \sqrt{G} \langle : T(\Delta a(t) \Delta a^\dagger(t')) : \rangle \sqrt{G} U^\dagger.$$

En el proceso de medida registramos el espectro o las correlaciones de un único modo Λ_n , filtrando éste del resto. Matemáticamente proyectamos sobre el subespacio bidimensional del modo n . Al mismo tiempo, cambiando la fase del oscilador local podemos medir la correlación de las cuadraturas en cualquier dirección θ del subespacio de fases (el espacio $x_n \times y_n$) del modo n . Es decir, realizamos una rotación de ángulo θ en el subespacio del modo. La composición de estas dos operaciones junto con U define la transformación T ,

$$\begin{aligned} R_\theta F_n U &= \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbf{1} & & & 0 & 0 \\ \hline & & & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ & & & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \hline 0 & & & 0 & \mathbf{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & & & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc|c} \ddots & & & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & -i & i \\ \hline 0 & & & 0 & \ddots \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & & & 0 & 0 \\ \hline & & & \exp(-i\theta) & i \exp(-i\theta) \\ & & & \exp(i\theta) & -i \exp(i\theta) \\ \hline 0 & & & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv T(\theta) \end{aligned}$$

$T(\theta)$ es unitaria dentro del subespacio bidimensional correspondiente al modo dado. La matriz de correlación final es, por tanto,

$$\langle : \Delta \mathbf{x}_{sal}(t, \theta) \Delta \mathbf{x}_{sal}^\top(t', \theta) : \rangle = 2\gamma_n T(\theta) \langle : T(\Delta \mathbf{a}(t) \Delta \mathbf{a}^\dagger(t')) : \rangle T^\dagger(\theta), \quad (4.1)$$

donde hemos utilizado la \mathbf{x} minúscula para indicar que ahora la matriz de correlación está restringida al subespacio de dimensión dos del modo n .

4.3 El espectro de compresión de ruido

En un estado estacionario (estable) del sistema la matriz de correlación únicamente depende de t y de t' a través de su diferencia (ver, por ejemplo, [27, 75]) que denotaremos por τ . El teorema de Wiener-Khinchin establece una proporcionalidad entre la densidad espectral de las fluctuaciones (la “varianza por intervalo de frecuencia”) o espectro de fluctuaciones con la transformada de Fourier de la correlación ([75], pág. 17, [27], pág. 61) y referencias que en el segundo se dan). Nosotros seguiremos la definición compleja simétrica de la transformada de Fourier dada en el capítulo anterior, con lo que la matriz espectral de fluctuaciones viene dada por:

$$: S_{sal}(\omega, \theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle : \Delta \mathbf{x}_{sal}(0, \theta) \Delta \mathbf{x}_{sal}^\top(\tau, \theta) : \rangle \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Los elementos de la diagonal de esta matriz son los espectros de fluctuaciones de las cuadraturas en la dirección θ . El elemento $: S_{sal}(\omega, \theta)_{1,1} :$ se corresponde con la cuadratura x en dicha dirección, y el $: S_{sal}(\omega, \theta)_{2,2} :$ con la y , o lo que es lo mismo, con la x en la dirección $\theta + \pi/2$.

La máxima reducción de ruido cuántico posible a una frecuencia dada es aquella que anule el ruido del vacío a dicha frecuencia. Para evaluarla vamos a incluir el vacío, excluido en el orden normal. O lo que es lo mismo, hacer los cálculos en orden simétrico. Para cada modo tenemos,

$$\langle \{ \Delta \Lambda_n(t) \Delta \Lambda_n^\dagger(t') \}_0 \rangle = 2 \langle : \Delta \Lambda_n(t) \Delta \Lambda_n^\dagger(t') : \rangle + \langle [\Lambda_n(t), \Lambda_n^\dagger(t')] \rangle,$$

donde $\{ \quad \}_0$ indica orden simétrico. El cálculo del valor medio del conmutador es formalmente idéntico al de la correlación (3.23) ya que $\langle \Delta a_{ent}(\omega) \Delta a_{ent}^\dagger(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') = [a_{sal}(\omega), a_{sal}^\dagger(\omega')]$ y por lo tanto,

$$\langle \{ \Delta \Lambda_n(t) \Delta \Lambda_n^\dagger(t') \}_0 \rangle = 2 \langle : \Delta \Lambda_n(t) \Delta \Lambda_n^\dagger(t') : \rangle + \delta(t - t').$$

Tenemos entonces que $\{C\}_0 = :C: + C_{vac}$ donde

$$C_{vac} = \left(\begin{array}{c|cc} \ddots & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta(t-t') \\ \hline 0 & \delta(t-t') & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array} \right).$$

Es muy fácil comprobar que $UC_{vac}U^\dagger = \mathbb{1}\delta(t-t')$ con lo que

$$\langle \{ \Delta \mathbf{x}_{sal}(0, \theta) \Delta \mathbf{x}_{sal}^\top(\tau, \theta) \}_0 \rangle = \langle : \Delta \mathbf{x}_{sal}(0, \theta) \Delta \mathbf{x}_{sal}^\top(\tau, \theta) : \rangle + \mathbb{1}\delta(\tau),$$

y por lo tanto

$$\{S_{sal}(\omega, \theta)\}_0 = :S_{sal}(\omega, \theta): + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}.$$

La máxima reducción de ruido cuántico supone la anulación del espectro en orden simétrico, es decir $:S(\omega, \theta): = -1/\sqrt{2\pi}$. Nosotros seguiremos el convenio de Collet y Gardiner [38] por el que la máxima reducción de ruido corresponde a $-1/4$. Así pues, definimos el espectro de compresión de ruido cuántico como

$$S(\omega, \theta) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{8}} : S_{sal}(\omega, \theta)_{1,1} : . \quad (4.2)$$

Finalmente, aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación (4.1) se establece la misma relación entre las matrices espectrales del campo saliente y del campo interno que para las correspondientes correlaciones. Multiplicando por el factor de normalización se obtiene:

$$:S_{sal}(\omega, \theta): = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \gamma_n \mathbf{T}(\theta) :S(\omega): \mathbf{T}^\dagger(\theta). \quad (4.3)$$

4.4 Cálculo de la matriz espectral del campo interno

Ya hemos comentado en el capítulo anterior cómo la acción filtrante de la cavidad evita que aparezcan interacciones entre los distintos modos debidas únicamente al espejo ES. En el lenguaje que aquí estamos utilizando, la ecuación (3.14) no conecta los subespacios de cada modo entre sí. Las únicas conexiones entre los distintos subespacios pueden venir a través del hamiltoniano de (3.15). Por tanto, sólo los modos de los cuales es función el hamiltoniano son relevantes para el cálculo. Suponiendo que el número de modos relevantes (los modos involucrados en el hamiltoniano) es N reducimos el problema al cálculo de una matriz de dimensión $2N \times 2N$.

Las correlaciones (3.22) y (3.22) permiten interpretar $\Delta\Gamma_n(t)$ como una fuerza de Langevin cuántica en el límite $\bar{n} = 0$ ([28], pag. 427, [29], pag. 296) y por tanto, a la ecuación (3.15) como una ecuación de Heisenberg-Langevin cuántica. La ecuación maestra para la matriz densidad reducida equivalente viene dada por [58, 28, 30, 60]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_I + H_{ent}, \rho] + \sum_{n=1}^N \gamma_n (2a_n \rho a_n^\dagger - a_n^\dagger a_n \rho - \rho a_n^\dagger a_n), \quad (4.4)$$

donde

$$H_{ent} = i\hbar \sum_{n=1}^N \sqrt{2\gamma_n} (a_n^\dagger \langle \Gamma_n(t) \rangle - a_n \langle \Gamma_n^*(t) \rangle),$$

se introduce ad hoc para tener en cuenta el valor medio no nulo de $\Gamma_n(t)$ y las sumas se hacen sobre los modos relevantes. Las componentes de ρ en la base supercompleta de los estados coherentes determinan la denominada representación P de Glauber-Shudarsan [31, 32, 33]:

$$\rho = \int d^2 \bar{\alpha} P(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) |\bar{\alpha}\rangle \langle \bar{\alpha}|,$$

donde $\bar{\alpha}$ denota el equivalente a \mathbf{a} en variables complejas y $|\bar{\alpha}\rangle$ son los estados coherentes multimodo $a_n |\bar{\alpha}\rangle = \alpha_n |\bar{\alpha}\rangle$. Con el fin de simplificar la notación denotaremos las componentes de $\bar{\alpha}$ por z_j , con lo que las pares corresponden a α_n y las impares a α_n^* . Utilizando la correspondencia entre operadores en el espacio de Hilbert y operadores diferenciales sobre el espacio de $\bar{\alpha}$ ([30], pag. 384) se obtiene una ecuación de Fokker-

Planck para $P(\bar{\alpha})$.

$$\frac{\partial P(\bar{\alpha})}{\partial t} = \left(\sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial z_j} F_j(\bar{\alpha}) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_{i,j}(\bar{\alpha}) \right) P(\bar{\alpha}), \quad (4.5)$$

donde nos hemos restringido al subespacio de los modos relevantes. Como toda ecuación de Fokker-Planck tiene su ecuación de Langevin asociada ahora ya sobre el cuerpo de los números complejos:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \bar{F}(\bar{\alpha}) + \mathbf{B}(\bar{\alpha}) \bar{\eta}(t), \quad (4.6)$$

con

$$\mathbf{B}(\bar{\alpha}) = \sqrt{\mathbf{D}(\bar{\alpha})}, \quad \langle \bar{\eta} \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{i,j} \delta(t - t').$$

La ventaja de utilizar la representación P frente a la de Wigner o a la Q es que da directamente los promedios de operadores en ordenación normal y temporal de Dyson ([60], pag. 185), es decir

$$\langle : \mathcal{T}(\Delta \mathbf{a}(t) \Delta \mathbf{a}^\dagger(t')) : \rangle = \langle \Delta \bar{\alpha}(t) \Delta \bar{\alpha}^\dagger(t') \rangle.$$

Sin embargo, aunque (4.6) es mucho más sencilla que (3.15), sigue siendo no lineal y por tanto irresoluble en general. La idea, debida a Collet y a Walls ([73]) es suponer que el ruido cuántico dado por $D(\bar{\alpha})$ es lo suficientemente pequeño (salvo en las proximidades de puntos críticos) como para que siga manteniendo la estabilidad de la parte determinista (la ecuación sin D). Podemos entonces linealizar alrededor de los puntos estables deterministas $\bar{\alpha}_e$. Haciendo $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_e + \delta\bar{\alpha}$ y quedándonos únicamente con los términos lineales en $\delta\bar{\alpha}$ se obtiene,

$$\frac{d\delta\bar{\alpha}}{dt} = \mathbf{A}(\bar{\alpha}_e) \delta\bar{\alpha} + \mathbf{B}(\bar{\alpha}_e) \bar{\eta}(t). \quad (4.7)$$

\mathbf{A} es una matriz $2N \times 2N$ denominada matriz de deriva. Esta ecuación es la de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck complejo con coeficientes constantes. Una simple adaptación a nuestro caso complejo de la fórmula habitual del espectro de un proceso de este tipo ([30], pág. 111) nos conduce a:

$$: \mathbf{S}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathbf{A} + \omega)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger (\mathbf{A}^\dagger - i\omega)^{-1}.$$

En la práctica conviene utilizar un tiempo adimensional dado por $\tau = \gamma_n t$. Dividiendo (4.7) por γ_n , tenemos

$$\frac{d\delta\bar{\alpha}}{d\tau} = A\delta\bar{\alpha} + B\bar{\eta}(\tau).$$

donde

$$A = \gamma_n A, \quad B = \sqrt{\gamma_n} B$$

y $\bar{\eta}(\tau)$ se ha redefinido de forma que

$$\langle \eta_i(\tau) \eta_j(\tau') \rangle = \delta_{i,j} \delta(\tau - \tau').$$

Substituyendo en la matriz espectral:

$$: S(\omega) := \frac{1}{\gamma_n \sqrt{2\pi}} (A + \omega_n)^{-1} D (A^\dagger - i\omega_n)^{-1},$$

donde $\omega_n = \omega/\gamma_n$ y para mantener la nomenclatura habitual hemos definido $D \equiv BB^\dagger$.

Finalmente la matriz espectral del campo saliente es:

$$: S_{sal}(\omega_n, \theta) := \frac{1}{2} \mathbf{T}(\theta) (A + \omega_n)^{-1} D (A^\dagger - i\omega_n)^{-1} \mathbf{T}^\dagger(\theta). \quad (4.8)$$

En cuanto a la varianza del campo interno, la calculamos integrando el espectro. Veamos cómo. Sea $: S(\omega, \theta) := \mathbf{T}(\theta) : S(\omega) :$. Entonces la varianza viene dada por:

$$\sigma^2(\theta) - \frac{1}{4} = : \sigma^2(\theta) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} : S_{1,1}(\omega, \theta) : d\omega = \frac{2\gamma_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} : S_{1,1}(\omega_n, \theta) : d\omega_n,$$

donde simplemente hemos realizado el cambio a la variable ω_n y hemos tenido en cuenta el factor de normalización. Pero precisamente el factor $2\gamma_n$ es el adecuado para la definición del espectro de compresión de ruido cuántico (4.2). Por lo tanto

$$\sigma^2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_n, \theta) d\omega_n + \frac{1}{4}. \quad (4.9)$$

Capítulo 5

Modelo inicial

5.1 Introducción

En el año 1986 [55] Tombesi propuso un hamiltoniano efectivo bajo cuya evolución se acortaba el tiempo de interacción necesario para conseguir una supresión de ruido dada respecto del correspondiente a un amplificador paramétrico degenerado convencional. En dicho trabajo, en el que no se incluyen pérdidas ni se cuantiza el modo de bombeo, se utiliza un método perturbativo analítico que sólo es válido en los primeros pasos de la evolución temporal. Posteriormente Gerry y Rodrigues [56] demostraron utilizando un método numérico que la reducción de ruido en el régimen transitorio desaparecía antes de lo que el análisis perturbativo sugería. García Fernández et al. [57] incluyeron pérdidas, lo que permitió el estudio del régimen estacionario mostrando que la supresión de ruido en cuadraturas no era inferior a la del amplificador paramétrico convencional. Recientemente Cabrillo y otros [70] estudiaron el comportamiento transitorio completo del modelo con pérdidas corroborando los resultados de Gerry y Rodrigues. A pesar de que los mínimos que se alcanzan en la varianza de la cuadratura comprimida no están por debajo de los que se obtienen en el amplificador paramétrico degenerado ni en el comportamiento transitorio ni en el estacionario, el acortamiento del tiempo de interacción que se observa en el inicio de la evolución sugiere la posibilidad de una mejoría en el espectro de fluctuaciones de la

cuadratura comprimida. En esta Tesis Doctoral se pretende precisamente obtener dicho espectro de fluctuaciones utilizando un modelo más realista que incluya cuantización en el modo de bombeo; con este fin seguiremos el programa trazado en el capítulo anterior.

5.2 Hamiltoniano de interacción

Contrariamente a lo utilizado en los capítulos precedentes y por razones puramente prácticas, usaremos en este capítulo y en los próximos la notación \hat{a} para los operadores, las correspondientes letras latinas para las variables proyectadas sobre el mapa de fases, y las griegas para las variables clásicas renormalizadas por las constantes físicas del problema.

El hamiltoniano de interacción propuesto por Tombesi consiste en una generalización del hamiltoniano del amplificador paramétrico degenerado al incluir un término extra correspondiente a una susceptibilidad no lineal de tercer orden, precisamente el que se utiliza para modelar la biestabilidad óptica dispersiva [77] (efecto Kerr óptico degenerado). Se trata de un material cuyas únicas susceptibilidades no nulas son $\chi^{(2)}(\omega_o = 2\omega_o - \omega_o)$ y $\chi^{(3)}(\omega_o = \omega_o - \omega_o + \omega_o)$. Hay pues dos modos relevantes en la interacción: $\hat{a}_{\omega_o}(t)$ y $\hat{a}_{2\omega_o}(t)$. Por simplicidad llamaremos \hat{a} al operador creación asociado al modo de frecuencia ω_o y \hat{b} al asociado al modo $2\omega_o$. Al substituir la susceptibilidad en la ecuación (2.2) obtenemos un hamiltoniano de hasta cuarto orden en los operadores creación y destrucción. El término de cuarto orden, dado por $\{\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}\}_0$, reordenado normalmente adopta la forma $\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + c_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes. La constante c_2 no altera la evolución y el término $c_1 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ no es más que una corrección a la dispersión lineal, es decir a la frecuencia de resonancia. No variamos esencialmente, por tanto, la física del problema si retenemos únicamente el primer término, obteniéndose

$$H_I = \frac{i\hbar}{2}(\kappa(\hat{a}^\dagger)^2 \hat{b} - \kappa^* \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger) + \frac{\hbar\zeta}{2}(\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2. \quad (5.1)$$

De esta manera utilizamos, en cuanto al término de cuarto orden se refiere, la prescripción más comúnmente empleada para modelar el efecto Kerr óptico [77]. Las constantes de

interacción (ecuación (2.2)) valen

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar\omega_o^3}{\varepsilon_o LA} \right)^{1/2} \left(\frac{l}{L} \right) \chi^{(2)}(\omega_o = 2\omega_o - \omega_o) \\ \zeta &= \left(\frac{3\hbar\omega_o^2}{8\varepsilon_o LA} \right) \left(\frac{l}{L} \right) \chi^{(3)}(\omega_o = \omega_o - \omega_o + \omega_o)\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que el montaje experimental es tal que $\Delta^{(2)}\mathbf{k} = 0$ (conservación del vector de onda).

5.3 Estados estacionarios

Ecuaciones de evolución y puntos fijos

La parte determinista de la ecuación (4.6) asociada al Hamiltoniano (5.1) es

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= -a + \left(\frac{\kappa}{\gamma_a} \right) ba^* - i \left(\frac{\zeta}{\gamma_a} \right) a^* a^2, \\ \frac{db}{d\tau} &= -r b - \left(\frac{\kappa}{2\gamma_a} \right) a^2 + \frac{E}{\gamma_a},\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde $r = \gamma_b/\gamma_a$ y $E = \sqrt{2\gamma_a}\langle\Gamma_{2\omega_0}(t)\rangle$ (ecuación (3.15)). Supondremos que el campo entrante está en un estado coherente monocromático de frecuencia $2\omega_0$, es decir

$$a_{ent}|\alpha(\omega)\rangle = \alpha(\omega)|\alpha(\omega)\rangle\tag{5.3}$$

con $\alpha(\omega) = \sqrt{2\pi}E_{ent}\delta(\omega - 2\omega_0)$. De esta forma $E = \sqrt{2\gamma_a}\langle\Gamma_{2\omega_0}(t)\rangle = \sqrt{2\gamma_a}E_{ent}$ es constante. En la práctica la luz de un laser monomodo de frecuencia $2\omega_0$ es una buena aproximación a este estado.

Por simplicidad de manejo introduciremos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\frac{\kappa^2}{2\gamma_a\gamma_b}} \exp(i\theta/2) a, \quad \beta = \frac{\kappa}{\gamma_a} \exp(i\theta/2) b, \\ \lambda &= \frac{\kappa|E|}{\gamma_a\gamma_b}, \quad \Lambda = 2\frac{\zeta\gamma_b}{\kappa^2},\end{aligned}$$

donde θ es la fase de E , con lo que las ecuaciones (5.2) quedan redefinidas de la forma

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\alpha + \beta\alpha^* - i\Lambda\alpha^*\alpha^2, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\beta}{d\tau} = -\beta - \alpha^2 + \lambda.$$

Igualando a cero el lado izquierdo (supuesto $r \neq 0$) las ecuaciones para los puntos fijos son

$$0 = -\alpha_f + \beta_f\alpha_f^* - i\Lambda\alpha_f^*\alpha_f^2, \quad (5.5)$$

$$0 = -\beta_f - \alpha_f^2 + \lambda.$$

Despejando β_f de la segunda ecuación tenemos

$$\beta_f = \lambda - \alpha_f^2. \quad (5.6)$$

Substituyendo en la primera ecuación se obtiene la solución trivial

$$\alpha_f = 0, \quad \beta_f = \lambda. \quad (5.7)$$

Por otro lado substituyendo β_f en la primera se cumple

$$\alpha_f^2(1 + |\alpha_f|^2(1 + i\Lambda)) = \lambda|\alpha_f|^2,$$

que separando en parte real e imaginaria

$$|\alpha_f|^2 + 1 - \lambda \cos 2\phi + i(|\alpha_f|^2\Lambda + \lambda \operatorname{sen}2\phi) = 0,$$

y por tanto

$$|\alpha_f|^2 = \lambda \cos 2\phi - 1, \quad (5.8)$$

$$\Lambda|\alpha_f|^2 = -\lambda \operatorname{sen}2\phi,$$

donde ϕ es la fase de α_f . Eliminando $|\alpha_f|^2$ queda

$$\Lambda \lambda \cos 2\phi - \Lambda = -\lambda \operatorname{sen} 2\phi,$$

donde elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, substituyendo $\operatorname{sen}^2 2\phi$ por $1 - \cos^2 2\phi$ y haciendo $x \equiv \lambda \cos 2\phi$ se obtiene

$$(\Lambda^2 + 1)x^2 - 2\Lambda^2 x + \Lambda^2 - \lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{\Lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^2 + \Lambda^2(\lambda^2 - 1)}}{\Lambda^2 + 1},$$

y por tanto

$$|\alpha_f|^2 = x - 1 = \frac{-1 + \sqrt{\lambda^2 + \Lambda^2(\lambda^2 - 1)}}{\Lambda^2 + 1}, \quad (5.9)$$

ecuación válida solamente para $\lambda \geq 1$. Por otro lado utilizando

$$\cos 2\phi = \frac{1 - \tan^2 \phi}{1 + \tan^2 \phi},$$

se obtiene para la fase

$$\tan \phi = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \Lambda^2(\lambda^2 - 1)}}{\Lambda(\lambda + 1)}, \quad (5.10)$$

donde de nuevo $\lambda \geq 1$.

Substituyendo (5.8) en (5.6) obtenemos

$$\beta_f = \lambda - \frac{|\alpha_f|^2}{\lambda} (|\alpha_f|^2 + 1) - i \frac{\Lambda}{\lambda} |\alpha_f|^4 \quad (5.11)$$

Análisis de estabilidad

La estabilidad de estos puntos fijos depende de la parte real de los autovalores de las matrices de deriva correspondientes. Linealizando la ecuación (5.2) alrededor de los puntos fijos, la matriz de deriva para cada uno de ellos queda de forma

$$A = \begin{pmatrix} -(1 + i2\Lambda|\alpha_f|^2) & \lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda) & \sqrt{2r} \alpha_f^* & 0 \\ \lambda - (\alpha_f^*)^2(1 - i\Lambda) & -(1 - i2\Lambda|\alpha_f|^2) & 0 & \sqrt{2r} \alpha_f \\ -\sqrt{2r} \alpha_f & 0 & -r & 0 \\ 0 & -\sqrt{2r} \alpha_f^* & 0 & -r \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Desarrollando el determinante $|A - kI|$ e igualando a cero se obtiene la siguiente ecuación para los autovalores de A

$$(k+r)^2[(k+1)^2 - g^2] + 2r(k+r)(k+1)|\alpha_f|^2 + 4r^2|\alpha_f|^4 = 0, \quad (5.13)$$

donde $g^2 = |\lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)|^2 - 4\Lambda^2|\alpha_f|^4$. Si tomamos (5.13) como una ecuación de segundo grado en $(k+r)$, su discriminante viene dado por $4r^2g^2|\alpha_f|^2$, que no depende de k , obteniéndose como soluciones formales para $(k+r)$

$$k+r = \frac{-2r|\alpha_f|^2}{k+1 \pm k},$$

de tal forma que (5.13) se descompone en dos ecuaciones de segundo grado dadas por

$$(k+r)(k+1) \pm g(k+1) + 2r|\alpha_f|^2 = k^2 + (1+r \pm g)k + r(1 \pm g) + 2r|\alpha_f|^2 = 0, \quad (5.14)$$

donde

$$g = +\sqrt{|\lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)|^2 - 4\Lambda^2|\alpha_f|^4}. \quad (5.15)$$

Resolviendo (5.14) los autovalores vienen dados por

$$k_1, k_2 = -\frac{1}{2}(r+1-g) \pm \frac{1}{2}[(-r+1-g)^2 - 8r|\alpha_f|^2]^{1/2} \quad (5.16)$$

$$k_3, k_4 = -\frac{1}{2}(r+1+g) \pm \frac{1}{2}[(-r+1+g)^2 - 8r|\alpha_f|^2]^{1/2}. \quad (5.17)$$

Para la solución trivial ($\alpha_f = 0$), $g = \lambda$, con lo que los autovalores son simplemente

$$\left. \begin{aligned} k_1, k_2 &= \pm\lambda - 1 \\ k_3, k_4 &= -r \end{aligned} \right\} \alpha_f = 0, \quad (5.18)$$

Por simple inspección de los autovalores se desprende que la solución trivial es estable para $\lambda < 1$ e inestable para $\lambda > 1$, supuesto $r \neq 0$. En $\lambda = 1$ y en $r = 0$ se anulan dos de los autovalores, indicando que en ambos casos se produce una inestabilidad de tipo nodo hiperbólico [74].

En el caso no trivial, mucho más complicado, g puede ser imaginario puro. Conviene estudiar por separado dicha posibilidad. Desarrollando la ecuación (5.13) tenemos

$$k^4 + (s + s^*)k^3 + (t + t^* + |s|^2)k^2 + (st^* + ts^*)k + |t|^2 = 0,$$

donde $s = 1 + r \pm g$ y $t = r(2|\alpha_f|^2 + 1 \pm g)$. Aplicando el criterio de Hurwitz [61] y después de un poco de álgebra se obtiene el siguiente conjunto de desigualdades que han de cumplirse para que el estado sea estable

$$\begin{aligned} |t|^2 &> 0 \\ s + s^* &> 0 \\ |t|^2(s + s^*) + st + s^*t^* &> 0 \\ (st^* + ts^*)(s + s^*) + (t - t^*)^2 &> 0. \end{aligned}$$

La primera es automáticamente satisfecha. Dado que por hipótesis g es imaginario puro, la segunda se cumple ($2(1+r) > 0$) independientemente del valor de éste. Substituyendo s y t en la tercera se obtiene

$$2(1+r)[(1+r)^2 + r(1+2|\alpha_f|^2)] + |g|^2(2+r) > 0,$$

que de nuevo se cumple sea cual sea el valor de g . Finalmente la cuarta desigualdad se reduce a

$$(1+r)^2(1+2|\alpha_s|^2) + |g|^2 > 0,$$

con lo que en el caso en que g sea imaginario puro el estado es estacionario con independencia del valor de g .

Si g es real positivo el criterio de Hurwitz se simplifica mucho, dado que podemos aplicarlo directamente a las ecuaciones de segundo grado (5.14), reduciéndose simplemente a que el término independiente y el coeficiente lineal deben ser ambos positivos ([61]). Es decir,

$$\begin{aligned} 1 + r - g > 0 &\implies g < 1 + r \\ r(1 + 2|\alpha_f|^2 - g) > 0 &\implies g < 1 + 2|\alpha_f|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, substituyendo (5.6) en la primera de las ecuaciones (5.5) se obtiene

$$\alpha_f = [\lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)]\alpha_f^* \implies |\lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)|^2 = 1$$

con lo que $g = \sqrt{1 - 4\Lambda^2|\alpha_f|^4} < 1$, y por tanto las soluciones no triviales son estables. Si denotamos por los subíndices e e i los puntos fijos estables e inestables respectivamente

tenemos en definitiva

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_e &= 0 \\
 \beta_e &= \lambda
 \end{aligned} \right\} \lambda < 1,$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_i &= 0 \\
 \beta_i &= \lambda \\
 &y \\
 |\alpha_e|^2 &= \frac{-1 + [\lambda^2 + \Lambda^2(\lambda^2 - 1)]^{1/2}}{1 + \Lambda^2} \\
 \tan \phi_e &= \frac{\lambda - [\lambda^2 + \Lambda^2(\lambda^2 - 1)]^{1/2}}{\Lambda(\lambda + 1)} \\
 \beta_e &= \lambda - \frac{|\alpha_e|^2}{\lambda} (|\alpha_e|^2 + 1) - i \frac{\Lambda}{\lambda} |\alpha_e|^4
 \end{aligned} \right\} \lambda > 1.$$
(5.19)

Obsérvese que, por ser $\tan^{-1} \phi$ una función bivaluada entre 0 y 2π , al crecer λ desde cero pasamos de un único estado estacionario, el origen, a dos estados estables por encima de $\lambda > 1$ simétricamente dispuestos respecto del origen, que pasa a ser inestable. Es decir, en el valor $\lambda = 1$, que como hemos demostrado corresponde a una inestabilidad del tipo nodo hiperbólico, se produce una bifurcación “pitchfork” supercrítica [74, 78]. Al mismo tiempo el modo subarmónico presenta fotones reales solamente a partir de $\lambda > 1$. Por tanto, el valor $\lambda = 1$ es también el umbral de encendido del modo subarmónico.

Hay dos observaciones importantes respecto de los resultados obtenidos. En primer lugar, tanto la amplitud como la fase del modo subarmónico dependen de λ . Puesto que λ está directamente relacionado con la intensidad del bombeo exterior, esto supone la posibilidad de una fuente de luz coherente modulable simultáneamente en amplitud y fase a través de una modulación convencional de la intensidad del bombeo. Mediante una técnica de detección adecuada podría ser de utilidad en telecomunicaciones. Sin embargo, se sale de los fines de esta tesis el profundizar más en este aspecto.

En segundo lugar, como hemos visto, $|\lambda - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)|^2 = 1$, impidiendo el término de cuarto orden que $|\beta_e|^2 = |\lambda - \alpha_f^2|^2 = 1$, con lo que el modo de bombeo no queda enclavado en su valor en el umbral como ocurre en el oscilador paramétrico habitual. El término

de cuarto orden, por tanto, produce una disminución del rendimiento en la conversión subarmónica que habrá que tener en cuenta a la hora de comparar resultados [71].

5.4 Obtención de la varianza y del espectro de fluctuaciones

La resolución práctica de la ecuación (4.8) pasa por la inversión de la matriz $A + i\omega_\alpha$. En la base en la que A es diagonal la inversión es inmediata, pero presenta el problema adicional de calcular la matriz de cambio de base y su inversa. Sin embargo, este método separa la dependencia en ω_α en términos formalmente iguales permitiendo una integración analítica simple en dicha variable. Es por ello por lo que seguiremos este camino en vez una inversión directa. Nos ceñiremos al caso $\lambda > 1$ ya que para la solución trivial y en la aproximación lineal el problema se reduce al de un amplificador paramétrico degenerado por debajo del umbral, amplitísimamente estudiado en la literatura.

Sea V_i^j la componente i ésima del autovector de A correspondiente al autovalor k_j . En ese caso $(A - k_j) V^j = 0$, que explícitamente conduce a

$$\begin{aligned} -(1 + i2\Lambda|\alpha_e|^2 + k_j) V_1^j + [\lambda - \alpha_e^2(1 + i\Lambda)] V_2^j + \sqrt{2r} \alpha_e^* V_3^j &= 0 \\ [\lambda - (\alpha_e^*)^2(1 - i\Lambda)] V_1^j - (1 - i2\Lambda|\alpha_e|^2 + k_j) V_2^j + \sqrt{2r} \alpha_e V_4^j &= 0 \\ -\sqrt{2} \alpha_e V_1^j - (r + k_j) V_3^j &= 0 \\ -\sqrt{2} \alpha_e^* V_2^j - (r + k_j) V_4^j &= 0 \end{aligned}$$

Despejando V_3^j y V_4^j de las dos últimas ecuaciones, substituyendo en las dos primeras y utilizando (5.14) se obtiene

$$\begin{aligned} V_1^j &= -\frac{\lambda - \alpha_e^2(1 + i\Lambda)}{\mp g + i2\Lambda|\alpha_e|^2} V_2^j \\ V_3^j &= \frac{\sqrt{2r} \alpha_e}{k_j + r} V_1^j \\ V_4^j &= \frac{\sqrt{2r} \alpha_e^*}{k_j + r} V_2^j \end{aligned}$$

donde el signo $-$ corresponde a $j = 1, 2$ y el signo $+$ a $j = 3, 4$. La matriz P de cambio de base es tal que $P^{-1}AP$ es diagonal con elementos los autovalores de A , y se construye a partir de los autovectores de la forma

$$P = V^1 \sqcup V^2 \sqcup V^3 \sqcup V^4 \quad (5.20)$$

donde \sqcup indica yuxtaposición de vectores columna. Para simplificar la notación introduciremos las siguientes definiciones

$$t_{\mp} \equiv \frac{\lambda - \alpha_e^2(1 + i\Lambda)}{\mp g + i2\Lambda|\alpha_e|^2}, \quad \xi_j \equiv k_j + r, \quad f \equiv -\sqrt{2r} \alpha_e,$$

con lo que tomando arbitrariamente $V_2^j = 1$

$$P = \begin{pmatrix} t_- & t_+ & t_- & t_+ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ ft_- \xi_1^{-1} & ft_+ \xi_2^{-1} & ft_- \xi_3^{-1} & ft_+ \xi_4^{-1} \\ f^* \xi_1^{-1} & f^* \xi_2^{-1} & f^* \xi_3^{-1} & f^* \xi_4^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Para invertir P se ha utilizado el método de eliminación de Gauss dando como resultado

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_1}{\xi_1 - \xi_3} & \frac{t_+ \xi_1}{\xi_1 - \xi_3} & \frac{\xi_1 \xi_3}{f(\xi_1 - \xi_3)} & -\frac{t_+ \xi_1 \xi_3}{f^*(\xi_1 - \xi_3)} \\ \frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_4} & -\frac{t_- \xi_2}{\xi_2 - \xi_4} & -\frac{\xi_2 \xi_4}{f(\xi_2 - \xi_4)} & \frac{t_+ \xi_2 \xi_4}{f^*(\xi_2 - \xi_4)} \\ \frac{\xi_3}{\xi_1 - \xi_3} & -\frac{t_+ \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{f(\xi_1 - \xi_3)} & \frac{t_+ \xi_1 \xi_3}{f^*(\xi_1 - \xi_3)} \\ -\frac{\xi_4}{\xi_2 - \xi_4} & \frac{t_- \xi_4}{\xi_2 - \xi_4} & \frac{\xi_2 \xi_4}{f(\xi_2 - \xi_4)} & -\frac{t_- \xi_2 \xi_4}{f^*(\xi_2 - \xi_4)} \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Los elementos de la matriz $(A + i\omega_a)^{-1}$, expresados a través del cambio de base son

$$(A + i\omega_a)_{ij}^{-1} = P_{il} \frac{\delta_{lm}}{k_m + i\omega_a} P_{mj}^{-1} = \frac{P_{im} P_{mj}^{-1}}{k_m + i\omega_a},$$

donde δ_{lm} es la delta de Kronecker y se suma sobre los índices repetidos. Substituyendo en la fórmula (4.8) del capítulo anterior) y teniendo en cuenta que la segunda fila de P

está compuesta por unos

$$S(\omega_a, \theta)_{11} = \frac{1}{2} [\nu(\omega_a) + 2 \operatorname{Re} \mu(\omega_a) \cos 2\theta - 2 \operatorname{Im} \mu(\omega_a) \operatorname{sen} 2\theta], \quad (5.23)$$

con

$$\begin{aligned} \nu(\omega_a) &= \frac{P_{ij}^{-1} D_{jl} (P_{lm}^{-1})^*}{2\pi(k_i + i\omega_a)(k_m^* - i\omega_a)} (P_{1i} P_{1m}^* + 1), \\ \mu(\omega_a) &= \frac{P_{ij}^{-1} D_{jl} (P_{lm}^{-1})^*}{2\pi(k_i + i\omega_a)(k_m^* - i\omega_a)} P_{1i}, \end{aligned}$$

donde de nuevo se suma sobre índices repetidos, Re y Im significan parte real e imaginaria respectivamente y P_{ij}^{-1} denota el elemento ij de la matriz P^{-1} .

Como ya hemos comentado, en el capítulo anterior la matriz de difusión D se obtiene fácilmente aplicando las reglas de correspondencia entre operadores en el espacio de Hilbert y operadores diferenciales en el espacio de fases. En nuestro caso para la representación P de Glauber-Shudarsan los únicos terminos no nulos de D son

$$D_{12} = D_{21}^* = \lambda - \alpha_e^2(1 + i\Lambda).$$

Comparando con el caso de biestabilidad dispersiva pura [77] y el oscilador paramétrico [73] se observa cómo nuestro caso es una composición de los dos con la única diferencia, debida a nuestra formulación manifiestamente real, de no ser D diagonal. Por el contrario, en la representación de Wigner (simétrica) se invierten los papeles, siendo diagonal nuestra formulación. Por otro lado obsérvese que al ser los elementos no nulos de D conjugados entre si, ν es real como se comprueba directamente conjugando e intercambiando los índices mudos.

La varianza cumple según lo que hemos visto (ecuación (4.9))

$$\sigma^2(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [\nu + 2(\operatorname{Re} \mu \cos 2\theta - \operatorname{Im} \mu \operatorname{sen} 2\theta)] + \frac{1}{4}, \quad (5.24)$$

donde ν y μ son las correspondientes expresiones integradas en ω_a . El denominador de dichas expresiones se integra fácilmente descomponiéndolo en fracciones simples

obteniéndose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi(k_i + i\omega_a)(k_m^* - i\omega_a)} d\omega_a = \frac{\pi \operatorname{sig}(\operatorname{Re} k_i) + \pi \operatorname{sig}(\operatorname{Re} k_m)}{2\pi(k_i + k_m^*)} = -\frac{1}{k_i + k_m^*},$$

donde sig denota signo y se ha tenido en cuenta que la parte real de los autovalores es negativa para estados estacionarios. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nu &= -\frac{P_{ij}^{-1} D_{jl} (P_{lm}^{-1})^*}{2\pi(k_i + k_m^*)} (P_{1i} P_{1m}^* + 1), \\ \mu &= -\frac{P_{ij}^{-1} D_{jl} (P_{lm}^{-1})^*}{2\pi(k_i + k_m^*)} P_{1i}. \end{aligned}$$

La ecuación (5.24) aún no es lo que buscamos, puesto que sólo estamos interesados en la varianza mínima. Derivando (5.24) tenemos

$$\left. \frac{d\sigma^2(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -2(\operatorname{Re} \mu \operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{Im} \mu \cos 2\theta) = 0 \implies \tan 2\theta_0 = -\frac{\operatorname{Im} \mu}{\operatorname{Re} \mu}.$$

Derivando por segunda vez

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \sigma^2(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} &= -4(\operatorname{Re} \mu \cos 2\theta_0 - \operatorname{Im} \mu \operatorname{sen} 2\theta_0) = \\ &= -4 \left(\frac{(\operatorname{Im} \mu)^2}{\pm \sqrt{(\operatorname{Im} \mu)^2 + (\operatorname{Re} \mu)^2}} + \frac{(\operatorname{Re} \mu)^2}{\pm \sqrt{(\operatorname{Im} \mu)^2 + (\operatorname{Re} \mu)^2}} \right) = -4(\pm |\mu|). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Esta expresión es proporcional al término encerrado entre paréntesis en (5.24). Eligiendo el signo $-$ para que la segunda derivada sea negativa, dividiendo por -4 y substituyendo directamente en (5.24) se obtiene

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\nu - 2|\mu|) + \frac{1}{4}}. \quad (5.26)$$

El correspondiente espectro de compresión de ruido cuántico (fórmula (4.2)) viene dado por

$$S_0(\omega) = \frac{1}{2} \left[\nu(\omega_a) - \frac{2}{\sqrt{(\operatorname{Im} \mu)^2 + (\operatorname{Re} \mu)^2}} (\operatorname{Im} \mu(\omega_a) \operatorname{Im} \mu + \operatorname{Re} \mu(\omega_a) \operatorname{Re} \mu) \right]. \quad (5.27)$$

$S_0(\omega)$ representa el espectro medido en la dirección del mapa de fases en la que la varianza es mínima, y el área es la “varianza en orden normal” ($\sigma^2 - 1/4$).

De la misma forma utilizando los valores de μ y ν sin integrar en frecuencias en la segunda línea de (5.25) y substituyendo directamente en (5.23) se obtiene finalmente

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [\nu(\omega_a) - 2|\mu(\omega_a)|] . \quad (5.28)$$

Este espectro, que representa la máxima reducción de ruido posible a cada frecuencia, no siempre coincide con $S_0(\omega)$.

5.5 Resultados

Varianza

Como ya hemos comentado en el capítulo segundo, dada la resolución espectral de las medidas experimentales no tiene mucho interés práctico el conocimiento de la varianza. Sin embargo, su estudio puede ayudarnos a entender el comportamiento físico del sistema y más concretamente las características y origen de la reducción de ruido cuántico.

En nuestro caso, el sistema tiene tres parámetros libres, λ (amplitud efectiva del bombeo), r (asimetría en las reflectividades de los dos modos relevantes) y Λ (relación efectiva entre los términos de cuarto y de segundo orden). Utilizaremos el inverso de λ en vez del propio λ para estudiar la varianza, ya que de esta manera el comportamiento por encima del umbral está restringido al intervalo $(0, 1]$. La varianza del oscilador paramétrico degenerado ($\Lambda = 0$) queda completamente determinada por la superficie $\sigma^2(\lambda^{-1}, r)$, puesto que en ese caso éstos son los dos únicos parámetros libres. Para estudiar el efecto del término de cuarto orden hemos calculado esta superficie para cuatro valores de Λ diferentes, incluyendo el caso correspondiente al oscilador paramétrico degenerado. El resultado se muestra en la figura 5.1. La figura 5.1 a corresponde al oscilador paramétrico conven-

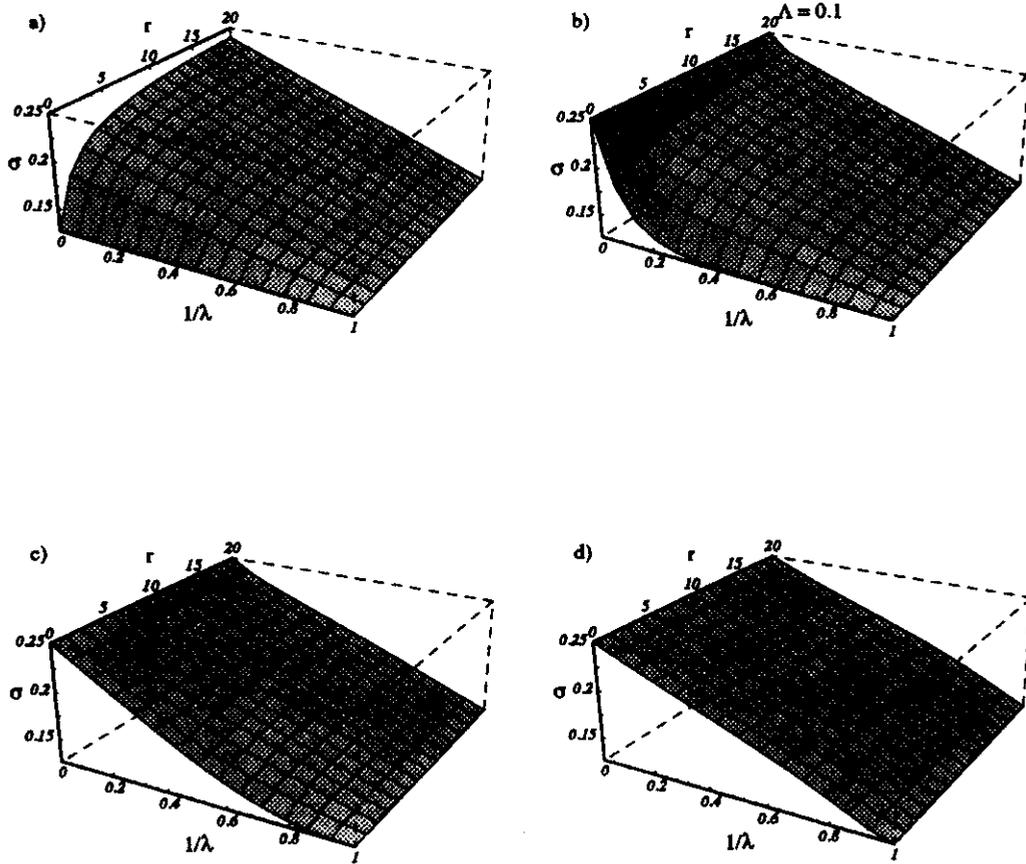


Figura 5.1: Superficie $\sigma^2(\lambda^{-1}, r)$ para diferentes valores de Λ . **a** $\Lambda = 0$; **b** $\Lambda = 0.1$; **c** $\Lambda = 1$; **d** $\Lambda = 5$.

cional por encima del umbral. Antes de analizar el efecto del término de cuarto orden son pertinentes algunos comentarios sobre el caso correspondiente al oscilador paramétrico convencional. En la representación que hemos escogido, en la que la dependencia con la amplitud del bombeo va como $1/\lambda$, fijado un valor de r la varianza es una línea recta cuya pendiente está determinada por la asimetría en las pérdidas (r). Dicha pendiente es negativa aumentando su valor absoluto según aumenta r . El valor más favorable es $r = 0$ (pendiente nula) en el que la reducción de ruido es máxima ($\sigma^2 = 0.125$) e independiente del valor de la amplitud del bombeo. Sin embargo, conviene recordar que tanto en este caso como en el umbral ($\lambda = 1$) el sistema se encuentra en una inestabilidad y por tanto la aproximación lineal no es aplicable. En general la máxima reducción de ruido cuántico estará cerca de las inestabilidades, pero no en ellas (ver por ejemplo [57]). En cualquier caso una clara asimetría en las pérdidas favorece la reducción de ruido y en particular en el sentido contrario al habitualmente utilizado en los osciladores paramétricos convencionales ($r \gg 1$), es decir, grandes pérdidas en el bombeo (espejo prácticamente transparente) y muy pocas en el modo subarmónico (espejo muy reflectante alrededor de la frecuencia del modo subarmónico). Finalmente se observa una compresión "residual", entendiendo por este término que el estado del estado sigue siendo comprimido incluso en el límite de intensidad de bombeo muy alta.

El efecto del término de cuarto orden se ilustra en el resto de los casos. Como se puede observar en ningún caso mejora la reducción de ruido cuántico respecto del caso a. Es más, la compresión residual desaparece. Esto último se puede demostrar analíticamente utilizando los resultados de [57], puesto que en el límite de intensidad de bombeo muy alta obviamente la aproximación de bombeo no despoblado es válida. Basta tomar dicho límite en las ecuaciones (4.11) de [57] ($\mu \Rightarrow 1$ en la notación de [57]). Desafortunadamente hay una errata en la segunda ecuación (4.11) de [57], si bien no afecta al límite $\mu \Rightarrow 1$. Las dos ecuaciones (4.11) publicadas finalmente son exactamente iguales. En realidad la segunda debería llevar un signo positivo entre los dos términos encerrados entre corchetes. En la reproducción del artículo que se ofrece en el apéndice A, las ecuaciones presentadas son las correctas. Es fácil comprobar que en dicho límite ambas cuadraturas (la máxima y

la mínima) tienden a 0.25 obteniéndose un estado coherente y, por tanto, no comprimido. Por último se observa cómo la dependencia en r va desapareciendo según crece Λ , es decir, la asimetría en las pérdidas va perdiendo importancia.

Así pues, el término de cuarto orden es pernicioso en cuanto a la varianza se refiere, empeorando claramente los resultados del oscilador paramétrico convencional.

Espectro de fluctuaciones

Para estudiar el espectro de fluctuaciones vamos a fijar un valor de la amplitud del bombeo de $\lambda = 1.5$. De esta forma el sistema no está muy alejado del umbral, permitiendo una reducción de ruido cuántico apreciable, y al mismo tiempo lo está lo suficiente como para que la intensidad de salida sea significativa, al menos en el caso correspondiente al oscilador paramétrico convencional. Como hemos visto con la varianza, la asimetría en las pérdidas parece tener una gran importancia en el caso $\Lambda = 0$. Por ello vamos a comparar los espectros correspondientes a Λ igual a 0, 1, 5 y 10 para cuatro valores diferentes de r (0.1, 1, 10 y 100). Los resultados se muestran en la figura 5.2. Se observa inmediatamente que al menos para los casos en los que r es alto, se obtiene una mejoría substancial en la máxima reducción de ruido alcanzable. No se observa una diferencia substancial entre el caso $r = 10$ y $r = 100$, por lo que podemos concluir que para valores de r mayores el comportamiento es parecido. Como ya hemos comentado los montajes prácticos habituales usan configuraciones en las que r es muy alto. Parece pues que el término de cuarto orden es beneficioso para este tipo de configuraciones, al menos desde el punto de vista espectral. Sin embargo, conviene tomar con precaución esta afirmación ya que, como hemos visto en el capítulo anterior, la teoría aquí presentada necesita reflectividades en los espejos de al menos el 75 % en intensidad, mientras que en los montajes prácticos la cavidad es prácticamente transparente a la frecuencia del modo de bombeo. Por otro lado, en todos los casos el ancho de banda del espectro aumenta al aumentar Λ , lo que es también beneficioso y supone que, si bien el máximo valor de compresión corresponde al oscilador paramétrico convencional en los casos en los que r es

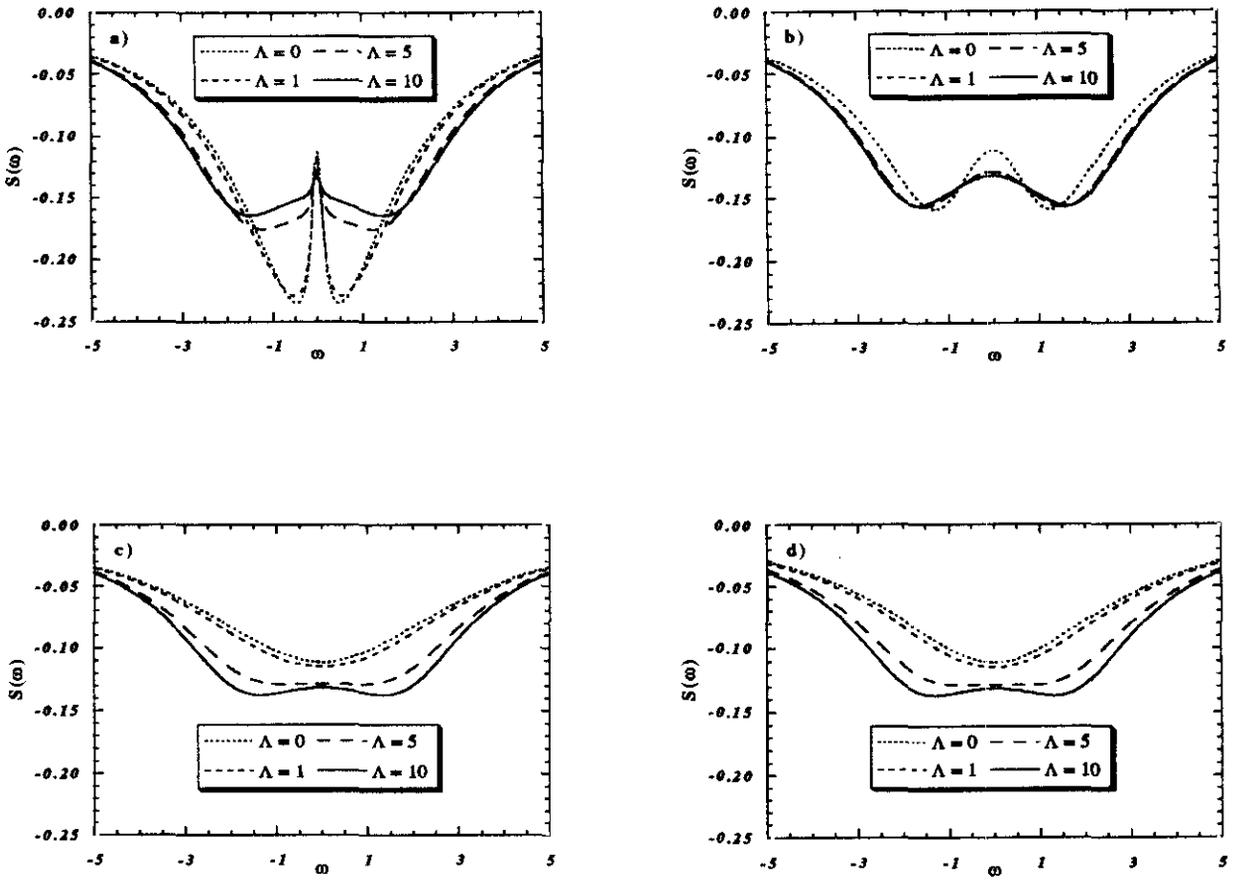


Figura 5.2: Diferentes espectros de fluctuaciones $S(\omega)$ para cuatro valores de r . En todos los casos $\lambda = 1.5$. **a** $r = 0.1$; **b** $r = 1$; **c** $r = 10$; **d** $r = 100$.

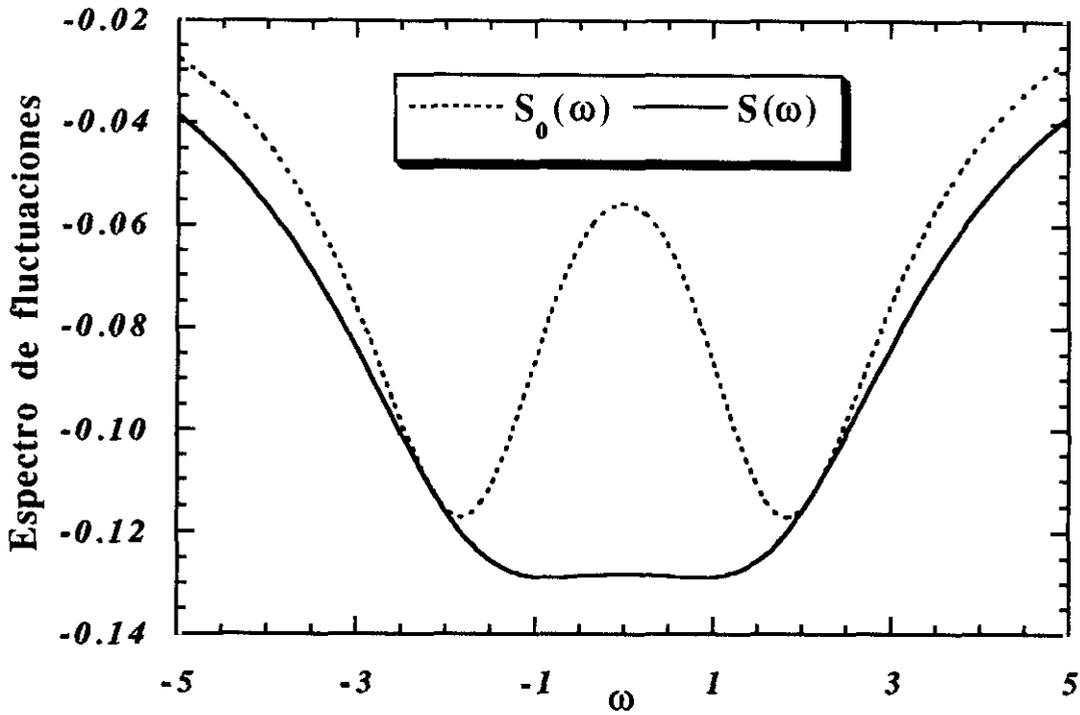


Figura 5.3: Comparación entre $S(\omega)$ y $S_0(\omega)$ para $\lambda = 1.5$, $\Lambda = 5$ y $r = 10$.

bajo, existen determinados intervalos de frecuencia en los que el término de cuarto orden produce mayor reducción de ruido. De esta forma se manifiesta claramente el efecto del término de cuarto orden confirmando, al menos para valores altos de r , nuestra sospecha de que debería mejorar la distribución espectral de ruido.

Un efecto colateral del término de cuarto orden es que $S(\omega)$ y $S_0(\omega)$ (ecuaciones (5.28) y (5.27) respectivamente) no coinciden. En la figura 5.3 se muestra una comparación entre $S(\omega)$ y $S_0(\omega)$. Como se puede observar, los mínimos de los dos espectros no coinciden y por tanto $S_0(\omega)$ nunca alcanza el valor óptimo. Sin embargo, sigue estando por debajo del caso $\Lambda = 0$ en el que ambos espectros se identifican.

Los resultados que hasta aquí hemos mostrado caracterizan la relación entre la entrada (λ) y la reducción de ruido. Si bien ésta es la forma habitual de presentar los resultados, no tiene en cuenta la disminución de la eficiencia en la conversión paramétrica anteriormente mencionada. Este efecto es especialmente importante si lo que pretendemos es una generación de luz comprimida intensa. Para tenerlo en cuenta vamos a comparar los

resultados con el correspondiente oscilador paramétrico con el mismo valor de $|\alpha|^2$. Debemos pues determinar, dado un valor Λ , el λ necesario para que un oscilador paramétrico ($\Lambda = 0$) genere el mismo valor de $|\alpha|^2$.

Si denotamos por $\lambda(0)$ el caso $\Lambda = 0$, tenemos que $|\alpha|^2 = \lambda(0) - 1$, con lo que $\lambda(0) = |\alpha|^2 + 1$. Substituyendo el valor de $|\alpha|^2$ (ecuación (5.19)) se obtiene

$$\lambda(0) = \frac{\Lambda^2 + [\lambda(\Lambda)^2 + \Lambda^2(\lambda(\Lambda)^2 - 1)]^{1/2}}{1 + \Lambda^2},$$

donde $\lambda(\Lambda)$ se refiere al caso general $\Lambda \neq 0$. Tomando Λ los valores 1, 5 y 10 y $\lambda(\Lambda) = 1.5$ en todos los casos (al igual que en la figura 5.2) los correspondientes valores de $\lambda(0)$ que se obtienen son aproximadamente 1.435, 1,184 y 1.101. En la figura 5.4 se muestran los respectivos espectros comparados con sus contrapartidas para el oscilador paramétrico óptico convencional (OPO). Dado que los mejores resultados se obtienen para valores altos de r , en todos ellos se ha tomado $r = 10$. En ningún caso el término de cuarto orden supone una mejora en la reducción de ruido máxima respecto del OPO. Sin embargo, el espectro sigue siendo más ancho, por lo que para algunas frecuencias supone un ligerísimo incremento en la reducción de ruido. La diferencia con respecto al OPO empeora según aumenta el valor de Λ . Es decir, la eficiencia de la conversión paramétrica disminuye más rápidamente que la mejora en la compresión de ruido.

En resumen, el término de cuarto orden no ejerce ningún efecto beneficioso atendiendo solamente a la varianza. Por el contrario, fijada la entrada, sí produce una interesante redistribución espectral del ruido de manera que, si la relación entre las reflectividades de los dos modos relevantes es la adecuada, al menos para determinados anchos de banda se produce una mejora substancial en la reducción de ruido cuántico. En nuestra opinión este hecho está íntimamente relacionado con la disminución del tiempo de interacción necesario para alcanzar una reducción de ruido dado durante las primeras etapas del comportamiento transitorio del sistema (ver Apéndice B y referencias en él). Sin embargo, se produce también una disminución en la eficiencia de la conversión paramétrica, de manera que la comparación con el oscilador paramétrico convencional con el mismo número de fotones en el estado estacionario en ningún caso es ventajosa. Esto supone

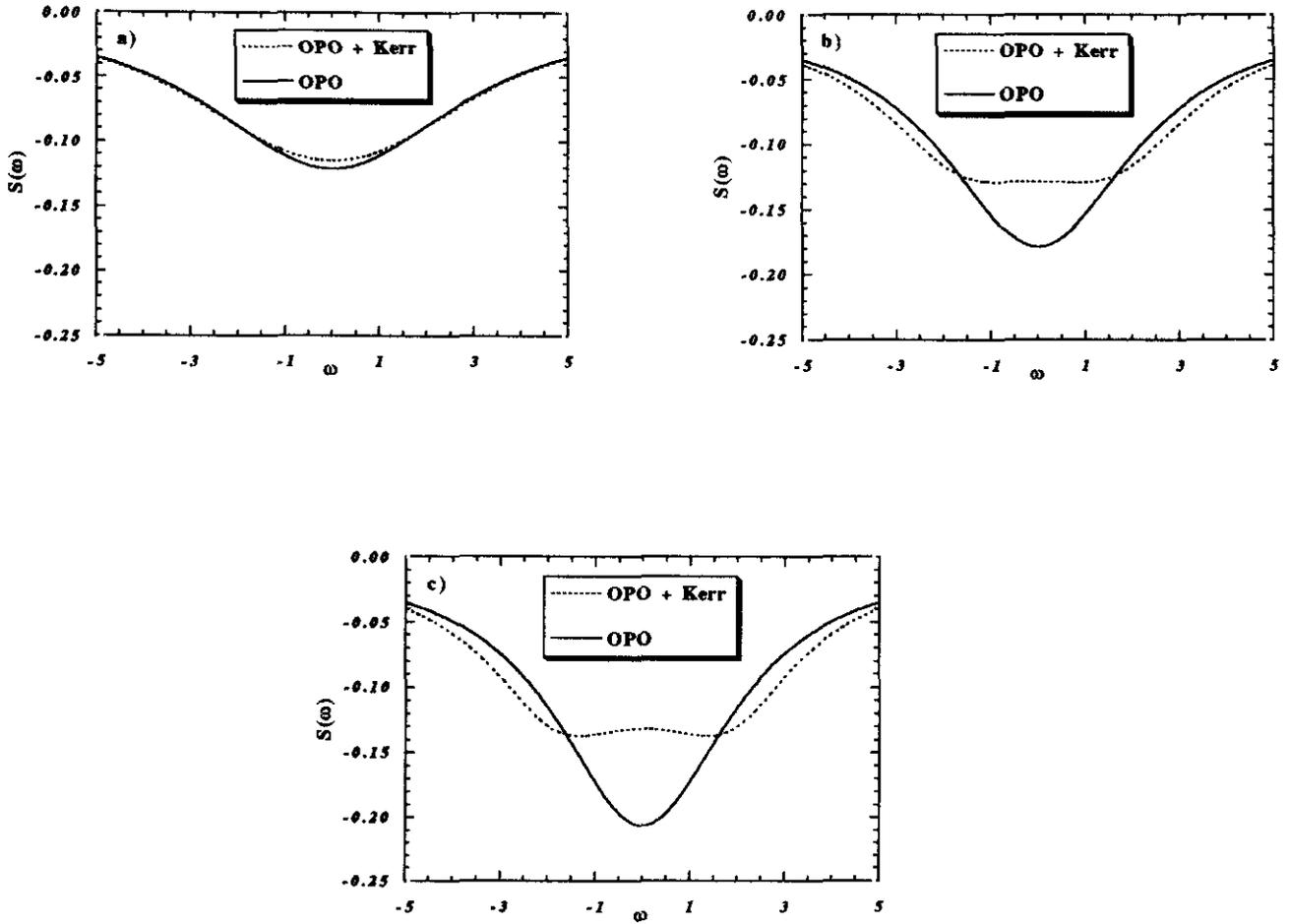


Figura 5.4: *Diferentes espectros comparados con el del Oscilador Paramétrico Óptico (OPO) con el mismo valor de $|\alpha|^2$. En todos los casos $r = 10$ y $\lambda(\Lambda) = 1.5$. a $\Lambda = 1$, $\lambda(0) = 1.435$; b $\Lambda = 5$, $\lambda(0) = 1.184$; c $\Lambda = 10$, $\lambda(0) = 1.101$.*

que el sistema no es adecuado para la producción de luz comprimida intensa.

En conclusión, si bien hemos descubierto un efecto dinámico que produce una interesante redistribución espectral del ruido cuántico, es necesario seguir investigando con el objeto de poder compensar la disminución de la eficiencia en la conversión paramétrica que éste produce, si queremos conseguir un hamiltoniano efectivo apto para la generación de luz comprimida intensa.

Capítulo 6

Extensión del modelo inicial

6.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos propuesto y estudiado un nuevo modelo, especificado por su hamiltoniano de interacción efectivo, consistente en una extensión del oscilador paramétrico obtenida añadiendo un término de interacción característico de la biestabilidad óptica dispersiva (efecto Kerr óptico). Hemos obtenido resultados muy interesantes en lo que se refiere a la distribución espectral de ruido cuántico. Sin embargo, al mismo tiempo, la eficiencia de la conversión paramétrica disminuye drásticamente. Se trata entonces de compensar esta disminución sin destruir la reducción de ruido lograda. La idea más inmediata es simplemente introducir una señal de entrada en el modo subarmónico. Podría pensarse que al introducir una nueva señal introducimos también una nueva fuente de ruido, lo que estropearía los resultados conseguidos. Sin embargo, obsérvese que si la señal es coherente, no introducimos ningún ruido extra respecto del vacío y sólo debemos preocuparnos de las consecuencias dinámicas del nuevo término, puesto que es la dinámica del sistema la que comprime el ruido que en él entra. Por otro lado, estudios anteriores demuestran que la inclusión de una señal coherente en el modo de interés puede mejorar ostensiblemente la reducción de ruido cuántico ([68]). Finalmente es una extensión sencilla del modelo que, si bien altera los puntos fijos y su estabilidad, no afecta

a los cálculos realizados en la aproximación lineal. Al mismo tiempo generaliza de forma ostensible el sistema incluyendo la generación de segundo armónico, de subarmónico (oscilador paramétrico), combinación de ambos, y las combinaciones de todos ellos con el efecto Kerr óptico. Por todo ello extenderemos el hamiltoniano efectivo para incluir una entrada coherente en el modo de frecuencia ω . Por lo demás seguiremos el mismo esquema de exposición que en el capítulo anterior.

6.2 Estados estacionarios

6.2.1 Ecuaciones de evolución y puntos fijos

Puesto que la única diferencia respecto del caso anterior es iluminar la cavidad con un laser más en la frecuencia ω , el Hamiltoniano de interacción sigue siendo el mismo. El estado del campo entrante viene determinado en este caso por una distribución espectral dada por $\alpha(\omega) = \sqrt{2\pi}[E_1\delta(\omega - \omega_0) + E_2\delta(\omega - 2\omega_0)]$ con lo que las nuevas ecuaciones de evolución adoptan la forma

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= -a + \left(\frac{\kappa}{\gamma_a}\right)ba^* - i\left(\frac{\zeta}{\gamma_a}\right)a^*a^2 + \frac{E_a}{\gamma_a}, \\ \frac{db}{d\tau} &= -rb - \left(\frac{\kappa}{2\gamma_a}\right)a^2 + \frac{E_b}{\gamma_a},\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde ahora $E_a = \sqrt{2\gamma_a}E_1$ y $E_b = \sqrt{2\gamma_b}E_2$ y como antes $\tau = \gamma_a t$ y $r = \gamma_b/\gamma_a$. Redefiniendo las variables de forma análoga al capítulo anterior

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa^2}{2\gamma_a\gamma_b}} \exp(-i\theta_b/2) a, \quad \beta = \frac{\kappa}{\gamma_a} \exp(-\theta_b) b,$$

$$\lambda_b = \frac{\kappa|E|}{\gamma_a\gamma_b}, \quad \lambda_a = \frac{\kappa|E|}{\gamma_a\gamma_b} \exp[i(\theta_a - \theta_b/2)], \quad \Lambda = 2\frac{\zeta\gamma_b}{\kappa^2},$$

donde θ_a y θ_b son las fases de E_a y E_b respectivamente. Las ecuaciones (6.1) dan lugar a

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\alpha + \beta\alpha^* - i\Lambda\alpha^*\alpha^2 + \sqrt{\frac{r}{2}}\lambda_a,$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{-\beta - \alpha^2 + \lambda_b}{\dots} \quad (6.2)$$

Igualando a cero la parte izquierda, β_f es formalmente idéntico al caso anterior ($\beta_f = \lambda_b - \alpha_f$). Substituyendo su valor en la ecuación para α_f se obtiene

$$\alpha_f |\alpha_f|^2 (1 + i\Lambda) - \lambda_b \alpha_f^* + \alpha_f + \sqrt{\frac{r}{2}} \lambda_a = 0.$$

Como era de esperar la solución trivial desaparece para valores de λ_a no nulos, con lo que deja de haber un umbral de encendido. Multiplicando por λ_a^* en ambos miembros de la ecuación el término independiente pasa a ser real:

$$\alpha_f |\alpha_f|^2 \lambda_a^* (1 + i\Lambda) - \lambda_b \lambda_a^* \alpha_f^* + \lambda_a^* \alpha_f + \sqrt{\frac{r}{2}} |\lambda_a|^2 = 0.$$

Si a esta ecuación le sumamos su compleja conjugada e intercambiamos los términos $\lambda_b \lambda_a^* \alpha_f^*$ y su conjugado se obtiene

$$\text{Re} \left\{ \alpha_f [|\alpha_f|^2 \lambda_a^* (1 + i\Lambda) - \lambda_b \lambda_a + \lambda_a^*] \right\} = -\sqrt{\frac{r}{2}} |\lambda_a|^2,$$

donde Re denota parte real. De la misma forma, restando la ecuación conjugada se tiene

$$\text{Im} \left\{ \alpha_f [|\alpha_f|^2 \lambda_a^* (1 + i\Lambda) + \lambda_b \lambda_a + \lambda_a^*] \right\} = 0,$$

donde como es habitual Im denota parte imaginaria. Denotando por ϕ el argumento de α_f y definiendo $\theta \equiv \theta_a - \theta_b/2$ lo que corresponde al argumento de λ_a , se obtiene

$$\begin{aligned} & \cos(\phi) |\alpha_f| \left[\cos(\theta) (|\alpha_f|^2 - \lambda_b + 1) + \text{sen}(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2 \right] - \\ & \text{sen}(\phi) |\alpha_f| \left[\cos(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2 - \text{sen}(\theta) (|\alpha_f|^2 + \lambda_b + 1) \right] = -\sqrt{\frac{r}{2}} |\lambda_a|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} & \cos(\phi) \left[\cos(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2 - \text{sen}(\theta) (|\alpha_f|^2 - \lambda_b + 1) \right] + \\ & \text{sen}(\phi) \left[\cos(\theta) (|\alpha_f|^2 + \lambda_b + 1) + \text{sen}(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Con el fin de facilitar el manejo de las ecuaciones definimos

$$p \equiv \cos(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2 - \text{sen}(\theta) (|\alpha_f|^2 + 1) \quad (6.5)$$

$$q \equiv \cos(\theta) (|\alpha_f|^2 + 1) + \text{sen}(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2, \quad (6.6)$$

con lo que las ecuaciones (6.3) y (6.4) adoptan la forma

$$\cos(\phi)|\alpha_f|(q - \cos(\theta)\lambda_b) - \text{sen}(\phi)|\alpha_f|(p - \text{sen}(\theta)\lambda_b) = -\sqrt{\frac{r}{2}}|\lambda_a| \quad (6.7)$$

$$\cos(\phi)(p + \text{sen}(\theta)\lambda_b) + \text{sen}(\phi)(q + \cos(\theta)\lambda_b) = 0. \quad (6.8)$$

Eliminando $\text{sen}(\phi)$ se obtiene

$$\cos(\phi)|\alpha_f|(p^2 + q^2 - \lambda_b^2) = -\sqrt{\frac{r}{2}}|\lambda_a|(q + \cos(\theta)\lambda_b). \quad (6.9)$$

De la misma forma eliminando $\cos(\phi)$ tenemos

$$\text{sen}(\phi)|\alpha_f|(p^2 + q^2 - \lambda_b^2) = -\sqrt{\frac{r}{2}}|\lambda_a|(p + \text{sen}(\theta)\lambda_b), \quad (6.10)$$

con lo que

$$\text{sen}(\phi) = \sqrt{\frac{r}{2}} \frac{|\lambda_a|}{|\alpha_f|} \frac{p + \text{sen}(\theta)\lambda_b}{p^2 + q^2 - \lambda_b^2}, \quad (6.11)$$

$$\cos(\phi) = -\sqrt{\frac{r}{2}} \frac{|\lambda_a|}{|\alpha_f|} \frac{q + \cos(\theta)\lambda_b}{p^2 + q^2 - \lambda_b^2}, \quad (6.12)$$

y por tanto

$$\tan(\phi) = -\frac{p + \text{sen}(\theta)\lambda_b}{q + \cos(\theta)\lambda_b}, \quad (6.13)$$

que coincide con la obtención directa a partir de (6.8). Es también fácil comprobar que la substitución de (6.11) y (6.12) en la ecuación (6.7) produce una identidad. Si ahora imponemos $\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ se tiene que

$$r|\lambda_a|^2 [p^2 + q^2 + \lambda_b^2 + 2\lambda_b(p \text{sen}(\theta) + q \cos(\theta))] = 2|\alpha_f|^2(p^2 + q^2 - \lambda_b^2)^2.$$

Si bien en general trataremos de utilizar explícitamente la notación $|\alpha_f|^2$, para expresar de forma sencilla la ecuación que cumple, denotaremos en lo sucesivo $|\alpha_f|^2$ por n , ya que coincide con el número de fotones medio normalizado al valor en el umbral de el OPO. Dadas las definiciones (6.5) y (6.6) se obtiene

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (n+1)^2 + \Lambda^2 n^2, \\ p \text{sen}(\theta) + q \cos(\theta) &= \Lambda n \text{sen}(2\theta) + (n+1) \cos(2\theta), \end{aligned}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$2n \left[(n+1)^2 + \Lambda^2 n^2 - \lambda_b \right]^2 = r |\lambda_a|^2 \left\{ (n+1)^2 + \Lambda^2 n^2 + \lambda_b^2 + 2\lambda_b [(n+1) \cos(2\theta) + \Lambda n \operatorname{sen}(2\theta)] \right\}. \quad (6.14)$$

Puesto que no existe solución analítica general para las raíces de un polinomio de quinto grado excepto en casos particulares n sólo se puede calcular numéricamente. Por supuesto existen casos analíticamente resolubles. En particular, haciendo $\lambda_a = 0$ el lado derecho de (6.14) se anula, obteniéndose como raíces las halladas en el capítulo anterior. De la misma forma, tomando $\Lambda = 0$ es fácil comprobar que (6.14) es equivalente a las propuestas en [76] para la generación de sub/segundo armónico. El hecho de que no tengamos una expresión analítica para n no supone un gran inconveniente, debido a que necesitamos comparar los resultados teniendo en cuenta el efecto de la disminución en la conversión subarmónica. Ello obliga a usar $|\alpha_e|^2(n)$ como parámetro en función del cual se dan los resultados. Si sustituimos 6.5 y (6.6) en (6.13) la tangente de ϕ adopta la forma

$$\tan(\phi) = -\frac{\Lambda |\alpha_f|^2 - \tan(\theta) (|\alpha_f|^2 - \lambda_b + 1)}{(|\alpha_f|^2 + \lambda_b + 1) + \tan(\theta) \Lambda |\alpha_f|^2}. \quad (6.15)$$

Suponiendo $|\alpha_f|^2$, λ_b , y Λ como parámetros fijados, recorriendo θ entre 0 y π , barreos todo el recorrido posible de $\tan(\phi)$. Por cada valor de ésta hay dos posibles valores de ϕ , uno correspondiente a α_f y el otro a $-\alpha_f$, sólo uno de ellos compatible con $|\lambda_a| > 0$ en (6.3). Únicamente en el caso de que $\lambda_a = 0$, los dos valores son físicamente posibles, siendo el sistema biestable (capítulo anterior). El recorrido de ϕ es de longitud π , con saltos también de π , de tal forma que los signos de $\cos(\phi)$ y $\operatorname{sen}(\phi)$ sean los adecuados para que se cumpla $|\lambda_a| \geq 0$ en (6.11) y (6.12). Por lo que se refiere a la reducción de ruido en sí, los resultados no dependen del signo α_e , por lo que estas discontinuidades en ϕ no producen discontinuidades ni en el espectro ni en la varianza. Es fácil entender que así sea, puesto que los cálculos linealizados son independientes de λ_a y en el caso $\lambda_a = 0$ las ecuaciones son simétricas respecto al origen.

Análisis de estabilidad

Las nuevas ecuaciones de evolución (6.2) sólo se diferencian en una constante de las del capítulo anterior (ecuaciones 5.4), con lo que la matriz de deriva A es formalmente la misma. De todo el análisis de estabilidad desarrollado anteriormente la única hipótesis que en general no se cumple es $|\lambda_b - \alpha_f^2(1 + i\Lambda)|^2 = 1$, lo que implica que las desigualdades $g < 1 + r$; $g < 1 + 2|\alpha_f|^2$ ya no son ciertas para todo g real. La intersección de ambas condiciones viene dada por

$$g < 1 + 2|\alpha_f|^2 : |\alpha_f|^2 \leq \frac{r}{2} \quad (6.16)$$

$$g < 1 + r : |\alpha_f|^2 > \frac{r}{2}. \quad (6.17)$$

La frontera de estabilidad en el espacio de parámetros se obtiene cambiando las desigualdades por igualdades. Si sustituimos el primer segmento de dicha frontera ($g = 1 + 2|\alpha_f|^2$) en la fórmula (5.16) tenemos que $k_1 = k_2 = 0$, con lo que este segmento corresponde a un inestabilidad del tipo nodo hiperbólico (ver [74]). El segundo sector ($g = 1 + r$) implica que $Re k_1 = Re k_2 = 0$; $Im k_1 = -Im k_2 \neq 0$, lo que supone una bifurcación de Hopf (ver [74]), estableciéndose oscilaciones automantenidoas para $g > 1 + r$. Puesto que estamos interesados en fuentes de intensidad constante nos mantendremos siempre por debajo de esta frontera. En el caso contrario el análisis matemático sería distinto al aquí presentado, válido únicamente para puntos estables.

Si desarrollamos la expresión (5.15) obtenemos

$$g^2 = \lambda_b^2 - \lambda_b Re [\alpha_f^2(1 + i\Lambda)] + |\alpha_f|^4(1 - 3\Lambda^2) = \lambda_b^2 - \lambda_b n(1 + \Lambda^2) \cos(\xi) + n^2(1 - 3\Lambda^2),$$

con $\xi \equiv 2\phi + \arctan(\Lambda)$ y donde de nuevo hemos utilizado la notación $n \equiv |\alpha_f|^2$. Como función de n , g^2 es una parábola. Dicha parábola degenera en una recta cuando $\Lambda = 1/\sqrt{3}$. Dos de los tres coeficientes de la parábola dependen únicamente de un solo parámetro, caracterizando el valor en el origen (λ_b) y el comportamiento asintótico (Λ). Sin embargo, la pendiente en el origen e incluso su signo (determinado por $\cos(\xi)$) dependen de forma complicada de los parámetros del sistema. En particular depende de ϕ , que como veremos, al contrario que λ_b y Λ , no va a estar fijado en los cálculos.

	$\lambda_b < 1$	$\lambda_b \geq 1$
$\Lambda \leq 1/\sqrt{3}$	eHi	i iheHi iHeHi
$\Lambda > 1/\sqrt{3}$	e ehihe ehiHe eHiHe ehiheHiHe	ihe iHe ehiheHi

Tabla 6.1: Categorías de estabilidad clasificadas según la estabilidad inicial y final.

En el mejor de los casos $\cos(\xi) = 1$, con lo que al menos es necesario que $\Lambda \geq \sqrt{11} \simeq 3.32$. Luego tampoco son posibles las clases ehi ni ehiheHi, ya que implican $\Lambda \leq 1/\sqrt{3}$, quedando las 12 categorías que se muestran en la tabla 6.1 clasificadas según su estabilidad inicial y asintótica. La tabla 6.1 es la máxima información que podemos obtener sobre la estabilidad del sistema atendiendo únicamente a los valores de λ_b y Λ . De ella se hace ya aparente una importantísima ventaja del término de cuarto orden: permite estabilizar puntos fijos que de otra forma serían inestables, introduciendo al mismo tiempo nuevas categorías que posteriormente nos serán de utilidad. En la figura 6.1 se muestra un ejemplo de cada una de las clasificaciones de la tabla 6.1.

Deliberadamente no se ha incluido el caso límite $\Lambda = 1/\sqrt{3}$, ya que al degenerar en una recta, la estabilidad asintótica está determinada por la pendiente en el origen, que como ya hemos comentado no está fijada en los cálculos.

6.3 Obtención de la varianza y del espectro de fluctuaciones

De nuevo todo el desarrollo del capítulo anterior es perfectamente válido y por tanto los resultados son formalmente los mismos. Sin embargo, la presencia de λ_a varía la dependencia de α_f en función de los parámetros añadiendo dos grados de libertad más (el módulo y la fase de λ_a) para unos valores dados de λ_b , r y Λ .

Siguiendo la filosofía de utilizar $|\alpha_e|^2$ como parámetro variable hemos calculado dos tipos de resultados diferentes fijando en ambos casos λ_b , r y Λ , y optimizando en el resto de las variables.

Por un lado, utilizando (5.26) se ha calculado la varianza mínima, σ_m^2 , en función de $|\alpha_e|^2$ (el subíndice e expresa como antes que el punto fijo es estable). La minimización de la varianza para cada valor de $|\alpha_e|^2$ se realiza en la fase de α por simple inspección numérica, haciendo variar ésta entre 0 y π . Abarcamos así todo el recorrido de θ , sin preocuparnos de las ya comentadas discontinuidades que se producen en ϕ . Es decir, en algunas zonas ϕ es incompatible con $\lambda_a \geq 0$ pero la varianza calculada es la correcta.

Por otro lado hemos calculado la máxima compresión de ruido cuántico S_m , también como función de $|\alpha_e|^2$. Para ello hemos obtenido el espectro de fluctuaciones $S(\omega)$ utilizando (5.28) y de nuevo hemos minimizado por simple inspección numérica tanto en la frecuencia como en ϕ (la fase de α), para cada valor de $|\alpha_e|^2$. El limitarse a una única frecuencia está perfectamente justificado dada la resolución de los espectrómetros. De hecho las medidas experimentales usualmente se refieren a una frecuencia fija [12, 52, 20, 53, 54, 69, 67].

6.4 Resultados

Varianza

Empezaremos por estudiar el caso $\lambda_b = 0$, es decir, la generación de segundo armónico y sus alteraciones producidas por un Λ no nulo. La determinación de la región de estabilidad es especialmente simple en el caso de que $\lambda_b = 0$. Substituyendo $\lambda_b = 0$ en la definición de g se tiene que $g = |\alpha_f|^2 \sqrt{1 - 3\Lambda^2}$. En la generación de segundo armónico pura Λ es nulo y g se reduce a $|\alpha_e|^2$. A la vista de la tabla 6.1 la única categoría posible es la **eHi**. La bifurcación de Hopf que se produce en $|\alpha_e|^2 = r + 1$ ha sido ampliamente estudiada en la literatura (ver [76], por ejemplo). La gráfica 6.2 a corresponde precisamente a este caso con pérdidas iguales en ambos modos ($r = 1$). La línea acaba en la inestabilidad de Hopf, donde la reducción de ruido es máxima (ver la introducción y las referencias que allí se citan). El resto de los casos corresponden a valores no nulos de Λ . Como se puede observar, el efecto de Λ únicamente es beneficioso para valores bajos de $|\alpha_e|^2$. De hecho las curvas c y de d están muy cerca del límite de efecto Kerr óptico puro (fórmula (3.15) de [73]). Sin embargo, el término de cuarto orden desplaza la bifurcación de Hopf hacia valores más altos de $|\alpha_e|^2$; en particular, cuando $\Lambda \geq 1/\sqrt{3} \simeq 0.577$ la bifurcación desaparece, es decir, no sólo hay estabilidad asintótica sino que ésta abarca todo el recorrido de $|\alpha_e|^2$. En otras palabras, para $\Lambda = 1/\sqrt{3}$ se produce una transición de **eHi** a **e**. En general Λ tiene un efecto estabilizador, lo que hace difícil ajustar los parámetros para conseguir clases intermedias como **ehiHe**. La gráfica 6.2 b corresponde a $\Lambda = 0.6$. Nótese que al estar cerca del valor límite $1/\sqrt{3}$ se consigue un valor aceptable de la varianza, que no se separa demasiado de la generación de segundo armónico, y con la ventaja frente a ésta de que nunca presenta oscilaciones automantenidas. En este caso de $\lambda_b = 0$ el valor de r desplaza la bifurcación de Hopf en un sentido u otro cambiando la escala de las gráficas, pero no afecta especialmente a la forma de éstas.

Para ilustrar el efecto de un λ_b no nulo, la figura 6.3 se muestran los resultados correspondientes a la figura 6.2 pero con una entrada en el modo 2ω dada por $\lambda_b = 1.5$. Este caso es especialmente interesante porque incluso el sistema con $\Lambda = 0$ (generación de

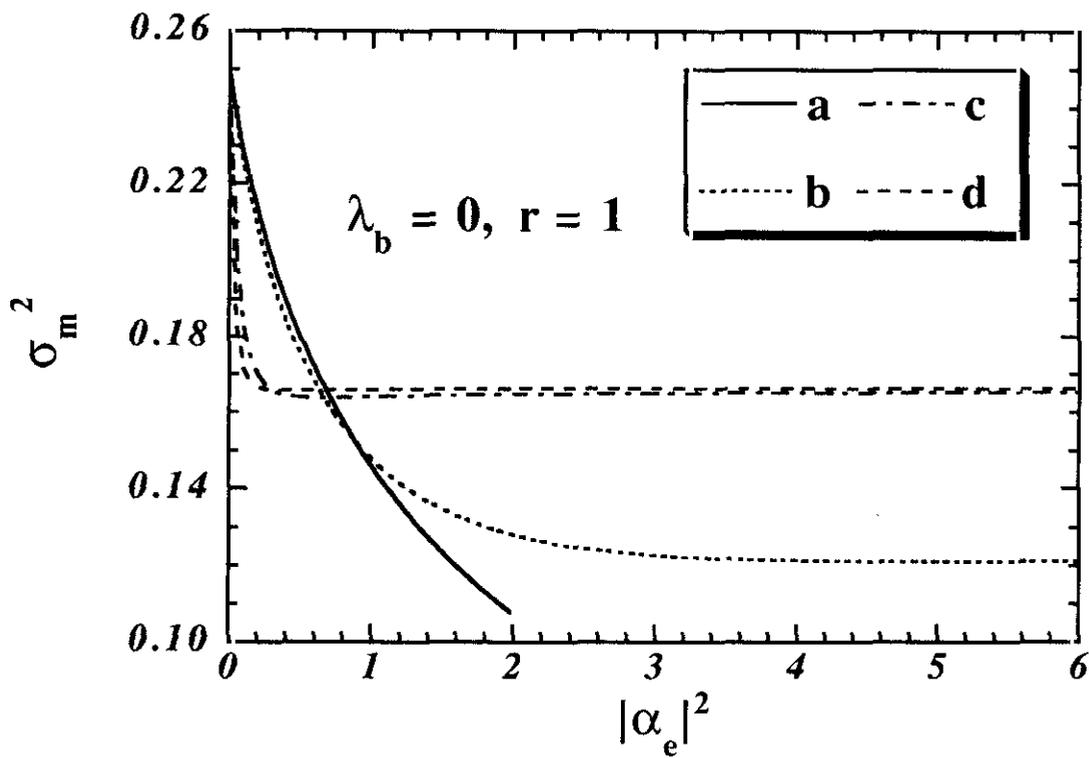


Figura 6.2: Varianza mínima en función de $|\alpha_e|^2$ para cuatro valores diferentes de Λ ; **a**, $\Lambda = 0$; **b**, $\Lambda = 0.6$; **c**, $\Lambda = 5$; **d**, $\Lambda = 10$. En todos los casos $\lambda_b = 0$ y $r = 1$.

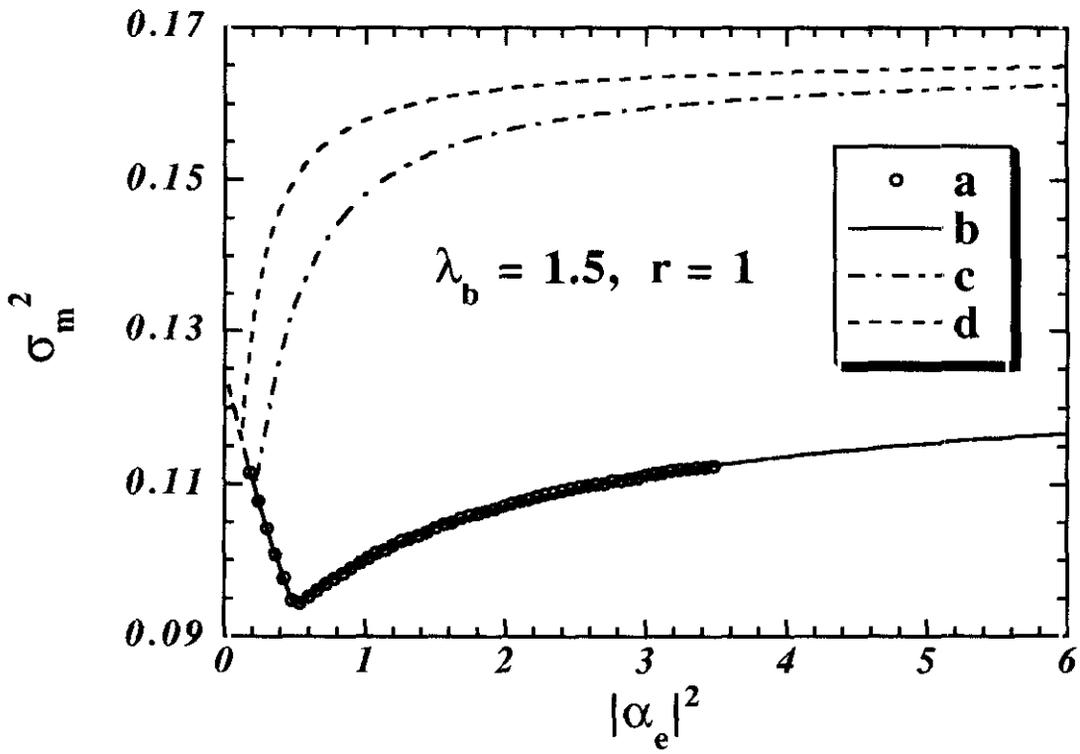


Figura 6.3: Varianza mínima en función de $|\alpha_e|^2$ para cuatro valores diferentes de Λ ; **a**, $\Lambda = 0$; **b**, $\Lambda = 0.6$; **c**, $\Lambda = 5$; **d**, $\Lambda = 10$. En todos los casos $\lambda_b = 1.5$ y $r = 1$.

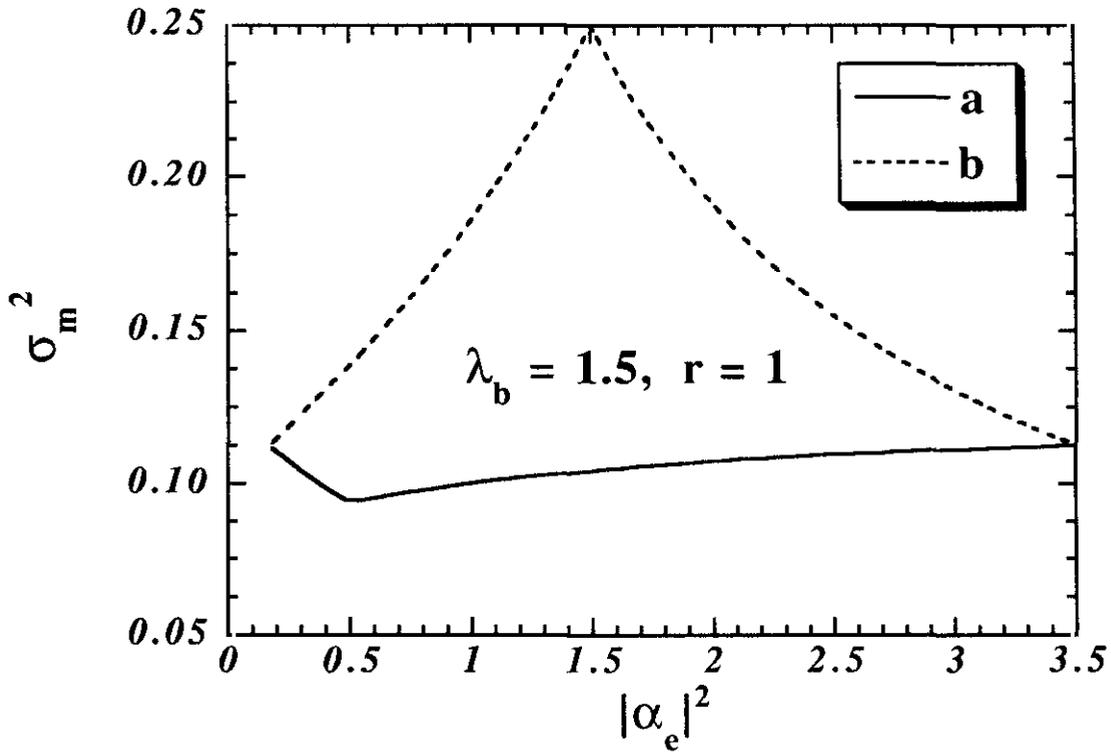


Figura 6.4: Comparación entre la varianza minimizada en la fase, curva **a**, y la varianza para $\phi = 0$, curva **b**, en función de $|\alpha_e|^2$ para la generación de sub/segundo armónico. En ambos casos $\lambda_b = 1.5$ y $r = 1$.

sub/segundo armónico) ha sido muy poco estudiado en la literatura en lo que concierne a la reducción de ruido cuántico. En [51] se estudia la relación entre la varianza de las cuadraturas y las fluctuaciones de la intensidad, pero no se tiene en cuenta la dependencia con la fase de la reducción de ruido. En [73] se calcula el espectro para el sistema general, pero solamente se analizan los resultados separando la generación de subarmónico y de la de segundo armónico. La importancia de la elección de la fase, al menos lejos de las inestabilidades, queda ilustrada en la figura 6.4, en donde se comparan la varianza minimizada en la fase de α_e (σ_m^2) y la varianza para $\phi = 0$ en el caso de la generación de sub/segundo armónico. La curva 6.4 **a** no se corresponde con ninguna fase fija, siendo ϕ diferente en cada punto. Que nosotros sepamos dicha curva no ha sido calculada hasta

ahora a pesar de que representa uno de los sistemas dinámicos más convencionales en la óptica cuántica. De por sí, ya es un resultado muy interesante, al conseguirse una reducción de ruido entre dos inestabilidades por debajo incluso de la que se alcanza en una de ellas. Esta dependencia con la fase no está presente cuando $\lambda_b = 0$, puesto que en ese caso $\theta = \theta_a$ es una fase arbitraria.

Al ser $\lambda_b > 1$ todas las curvas comienzan en valores no nulos de $|\alpha_e|^2$ puesto que inicialmente el sistema es inestable. Como quiera que $r + 1 = 2 < \lambda_b$ todas ellas son del tipo **ihe** excepto la generación de sub/segundo armónico pura que es del tipo **iheHi**. La línea recta inicial presente en todas las curvas corresponde al intervalo en el que la estabilidad depende de la fase ϕ . El término de cuarto orden no supone una mejoría en ninguno de los casos ni en ningún intervalo de $|\alpha_e|^2$. Sin embargo, el caso $\Lambda = 0.6$ es aún más interesante que antes. Como se puede observar, aunque sigue sin producir una varianza menor que la mejor de las opciones ($\Lambda = 0$), genera el interesantísimo efecto de eliminar la bifurcación de Hopf sin aumentar apreciablemente la varianza.

La figura 6.5 muestra los dos últimos casos de la figura 6.3 con $r = 5$. De nuevo las discontinuidades en la derivada señalan el fin y el comienzo de las zonas donde la estabilidad depende de la fase ϕ . En este caso la influencia de Λ es claramente apreciable, dependiendo por tanto ésta del valor de r . En principio, el mejor resultado corresponde a la generación de sub/segundo armónico pura. Sin embargo, hay una diferencia esencial entre ambos casos que todavía no hemos tenido en cuenta: en el máximo de reducción de ruido para $\Lambda = 0$ (figura 6.5 a) el sistema está en la bifurcación de Hopf puesto que el cruce de ésta depende de la fase y al optimizar la reducción de ruido, el sistema se sitúa en el valor de ϕ que produce el estado estable más cercano a la inestabilidad donde dicha reducción es máxima. Sin embargo, para $\Lambda = 0.6$ dicha bifurcación no existe. Por tanto, mientras que el caso convencional con $\Lambda = 0$ necesariamente la varianza máxima se tiene que disparar haciendo que el sistema no pueda ser implementado prácticamente, no tiene porque suceder así cuando $\Lambda = 0.6$. En la misma figura se representa la varianza máxima ($\sigma_{\lambda_I}^2$) confirmando está hipótesis. Para calcular dicha varianza no hay más que cambiar el signo negativo de (5.26) por uno positivo. Como se puede apreciar en la zona de máxima

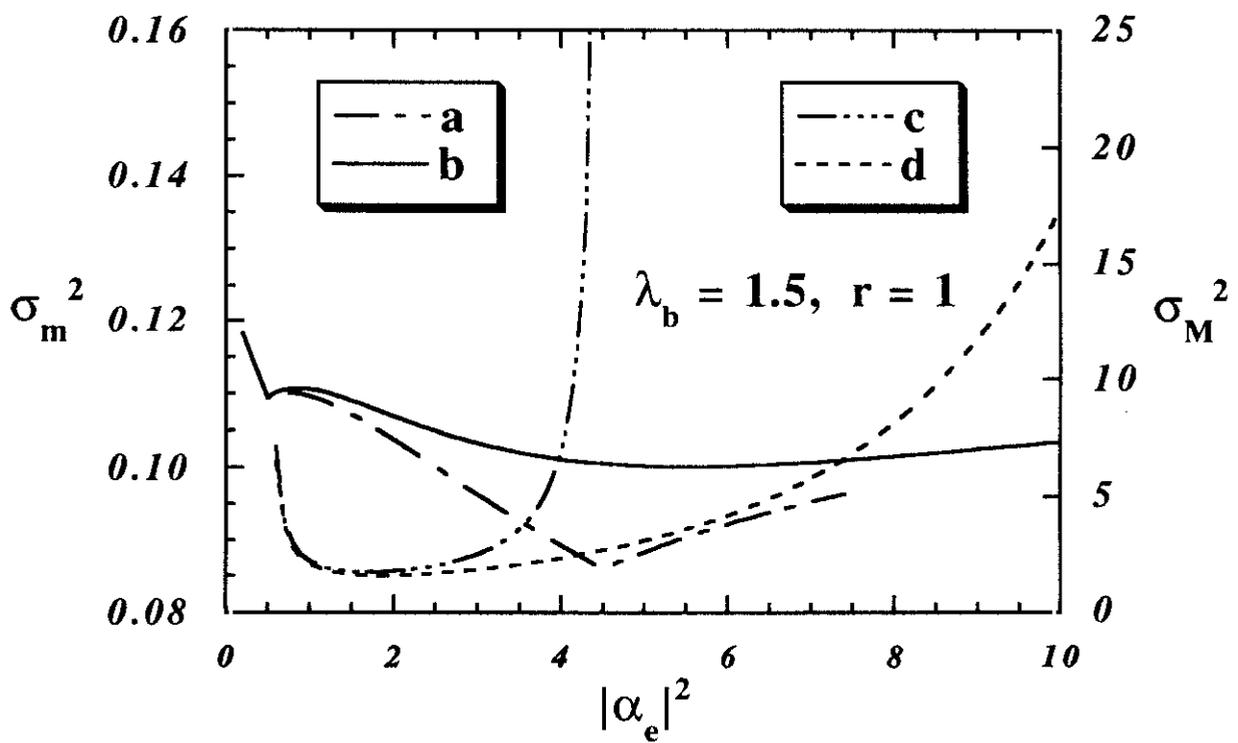


Figura 6.5: Varianza mínima, σ_m , y máxima, σ_M , en función de $|\alpha_e|^2$ para dos valores diferentes de Λ ; **a**, $\Lambda = 0$; **b**, $\Lambda = 0.6$; En ambos casos $\lambda_b = 1.5$ y $r = 5$.

reducción de ruido σ_{Λ}^2 diverge para el sistema convencional, manteniéndose en niveles aceptables cuando $\Lambda = 0.6$. Es decir, ajustando Λ podemos acceder a zonas que en la práctica son inaccesibles para los sistemas convencionales. El aumentar o disminuir tanto λ_b (e incluso tomar el valor crítico $\lambda_b = 1$) como r no supone una mejora substancial a estos resultados. Creemos que ya con estos ejemplos, queda patente la versatilidad que adquiere el sistema al incluir el término de efecto Kerr, permitiendo un control de las inestabilidades sin perjudicar en exceso el valor de la varianza. No es necesario comentar la importancia de las inestabilidades a la hora de la implementación práctica de cualquier dispositivo.

La variación de λ_b (incluyendo el umbral $\lambda = 1$) o r con respecto a los ejemplos aquí presentados no mejora substancialmente los resultados ya mostrados.

Hasta aquí hemos estudiado la varianza entre dos inestabilidades de distinto tipo. Conviene estudiar la situación entre dos inestabilidades del mismo tipo. La única categoría que presenta una zona de estabilidad entre dos inestabilidades del mismo tipo es la iHeHi. En el mejor de los casos se consiguen reducciones de ruido comparables a las ya calculadas como el caso mostrado en la figura 6.6. Sin embargo, la varianza máxima se mantiene en niveles muy altos, no admitiendo esta categoría comparación con las anteriores configuraciones en cuanto a posibilidades prácticas se refiere.

Espectro de fluctuaciones

Siguiendo un enfoque paralelo al del apartado anterior en la figura 6.7 se presenta S_m en función de $|\alpha_e|^2$ con los valores de los parámetros correspondientes a los casos de la figura 6.2. El resultado es el opuesto al de la varianza: S_m mejora notoriamente según crece el valor de Λ . Esta mejora es más espectacular para valores de r mayores como se puede comprobar en la figura 6.8. Es lógico que sea así puesto que como vimos en el apartado anterior, para valores altos de Λ el sistema se comporta como una célula de efecto Kerr óptico puro. Para valores suficientemente altos de r la compresión de ruido debida el efecto Kerr es mayor que la debida a la generación de segundo armónico. Es

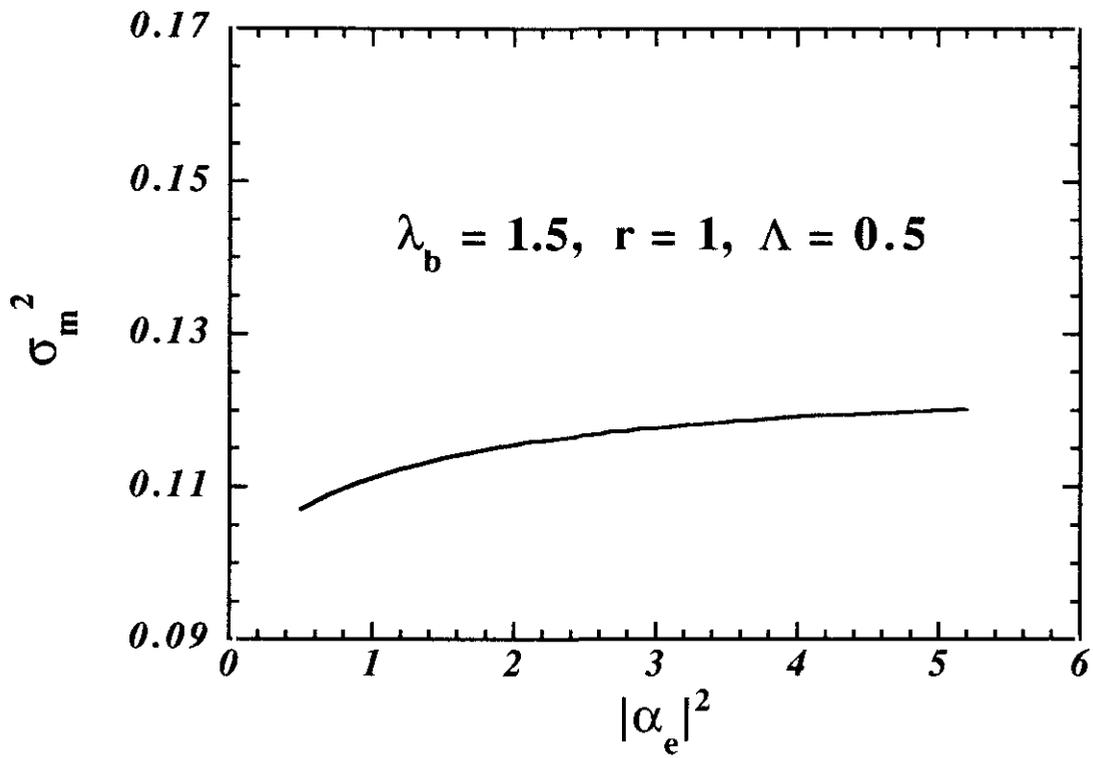


Figura 6.6: Varianza mínima en función de $|\alpha_e|^2$ para $\lambda_b = 2$, $\Lambda = 0.3$ y $r = 0.5$.

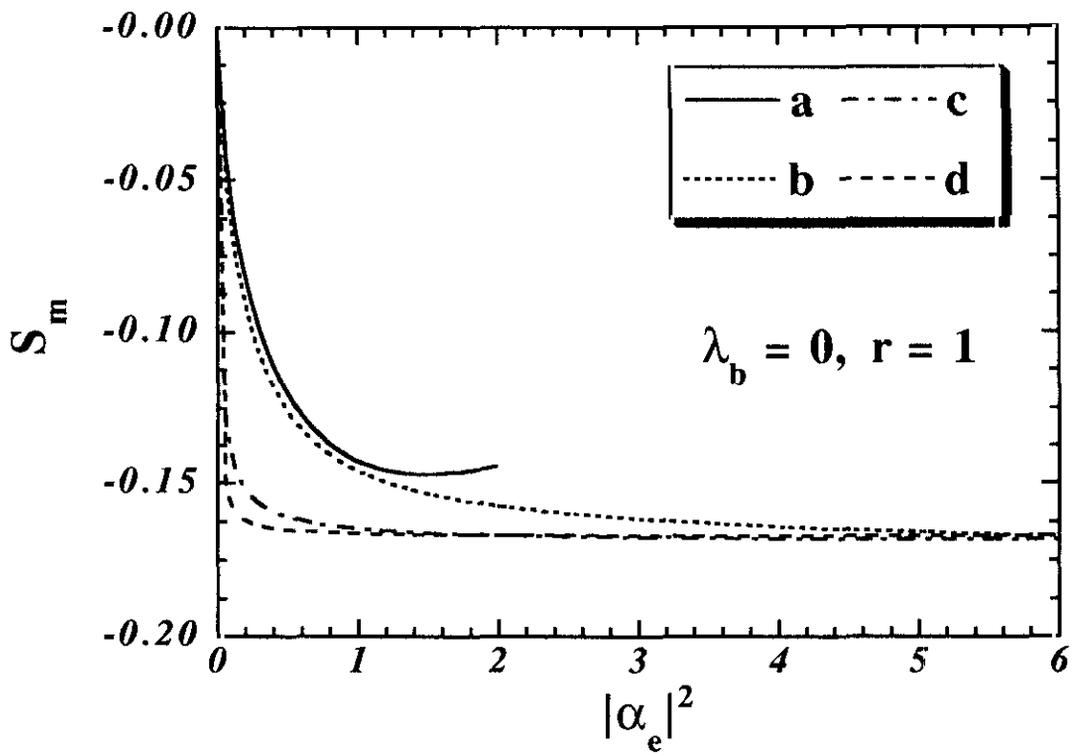


Figura 6.7: *Compresión de ruido máxima, S_m , en función de $|\alpha_e|^2$ para cuatro valores diferentes de Λ ; a, $\Lambda = 0$; b, $\Lambda = 0.6$; c, $\Lambda = 5$; d, $\Lambda = 10$. En todos los casos $\lambda_b = 0$ y $r = 1$.*

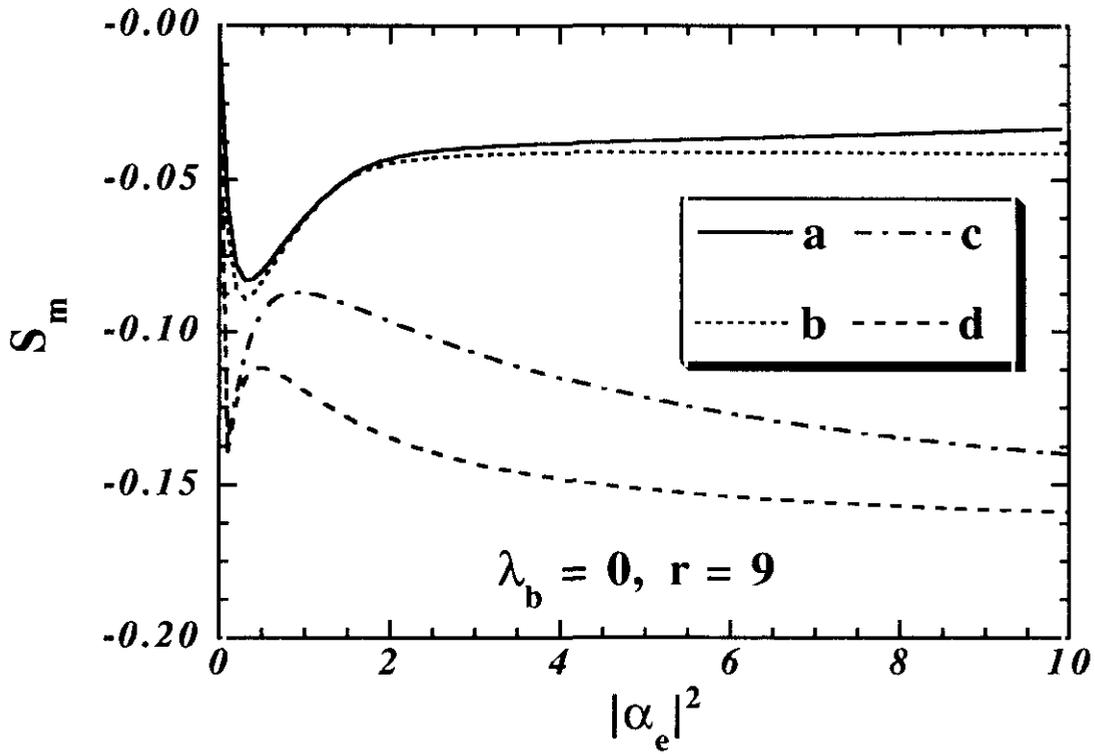


Figura 6.8: Compresión de ruido máxima, S_m , en función de $|\alpha_e|^2$ para cuatro valores diferentes de Λ ; **a**, $\Lambda = 0$; **b**, $\Lambda = 0.6$; **c**, $\Lambda = 5$; **d**, $\Lambda = 10$. En todos los casos $\lambda_b = 0$ y $r = 9$.

una mejora engañosa en el sentido de que puede producirse incluso un mejor resultado con una célula Kerr habitual. En cualquier caso la reducción de ruido es modesta.

Para acercarnos a la compresión perfecta podemos seguir la misma estrategia que en el apartado anterior. Collet y Walls [73] ya demostraron que en la generación de segundo armónico se puede alcanzar compresión perfecta en determinadas frecuencias cuando $r \Rightarrow 0$. En este límite la bifurcación se acerca lo más posible al origen, alcanzándose en $|\alpha_c|^2 = 1$. El efecto de Λ ha de ser pernicioso por debajo de un cierto valor de r en el que la reducción de ruido debida al efecto Kerr sea comparable a la producida en la generación de segundo armónico. Sin embargo, podemos utilizarlo para soslayar la inestabilidad y conseguir grandes reducciones de ruido sin que la varianza máxima diverja. Por lo que hemos visto con la varianza, $\Lambda = 0.6$ debe producir los efectos deseados. Efectivamente es así, como se puede comprobar en la figura 6.9. En la misma figura se representa la varianza máxima. Si bien en las curvas mostradas $r = 0.001$, el límite práctico $r \Rightarrow 0$ se alcanza mucho antes, de tal forma que los resultados son prácticamente iguales para $r = 0.02$. Como se puede apreciar inmediatamente el resultado es excelente. Se alcanza una compresión de ruido del 98.4/para valores de σ_M bajos ($\simeq 3$) sin que a su vez la pendiente se haya disparado. Al desaparecer la inestabilidad, se pueden obtener una compresión tan alta como la anterior con número de fotones muy alto (para $|\alpha_c|^2 = 10$, σ_M^2 no llega a 8). Podría pensarse en mejorar este resultado pasando al régimen de amplificación y así partir de un vacío comprimido directamente. Por ejemplo, para $\lambda_b = 0.5$, un valor en principio alejado del umbral de oscilación $\lambda_b = 1$, la compresión inicial es de $S_m = 0.22$. Sin embargo, σ_M , es muy sensible a un valor no nulo de λ_b , divergiendo en la práctica (i.e., numéricamente oscila de forma incontrolada alrededor de valores muy altos) incluso antes que en la generación de segundo armónico ($|\alpha_c|^2 \simeq 0.5$). Para obtener valores σ_M aceptablemente cercanos a los que se consiguen con $\lambda_b = 0$ la compresión inicial es muy reducida.

Inyectando una señal en el modo 2ω dada por $\lambda = 1.5$ el sistema se comporta como un oscilador. El efecto del término de cuarto orden es en este régimen espectacular tal como se reproduce en la figura 6.10. En este caso ya no es posible interpretar los

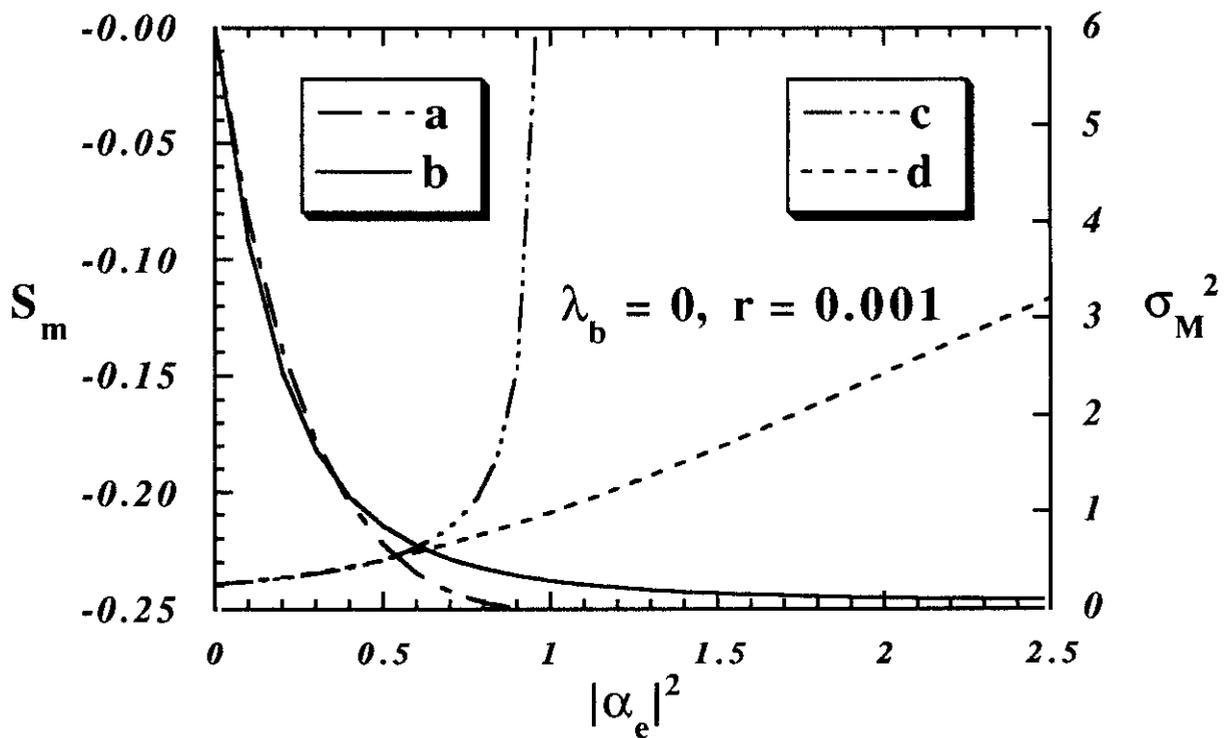


Figura 6.9: Compresión de ruido máxima S_m y varianza máxima σ_M^2 en función de $|\alpha_e|^2$ para $\Lambda = 0, \mathbf{a}$, $\Lambda = 0.6, \mathbf{b}$. En ambos casos $\lambda_b = 0$ y $r = 0.001$.

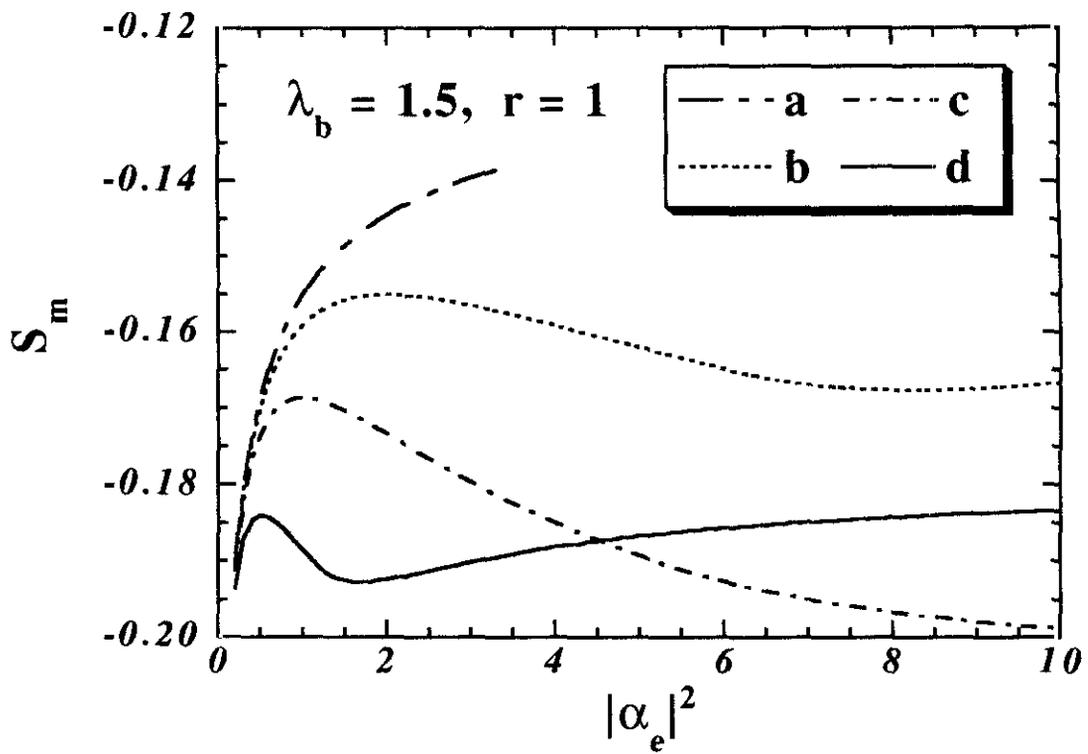


Figura 6.10: Compresión de ruido máxima, S_m , en función de $|\alpha_e|^2$ para cuatro valores diferentes de Λ ; **a**, $\Lambda = 0$; **b**, $\Lambda = 0.5$; **c**, $\Lambda = 1$; **d**, $\Lambda = 2$. En todos los casos $\lambda_b = 1.5$ y $r = 1$.

resultados como una tendencia hacia un proceso de efecto Kerr óptico puro, puesto que éste produce un valor de S_m mucho mayor. La aparición del mínimo que se observa en la curva de S_m hay que interpretarla como un proceso totalmente nuevo resultante de la competencia de otros tres: generación de subarmónico, generación de segundo armónico y automodulación de fase del modo ω . Dicho mínimo se desplaza hacia valores crecientes de $|\alpha_e|^2$ según aumenta el valor de Λ , para alcanzar en un momento dado lo que parece un valor límite (alrededor de 1) en el que el mínimo es asintótico. Por encima de este valor límite el mínimo regresa hacia el origen, pero con una reducción de ruido general mucho mayor. Finalmente, si se sigue aumentando el valor de Λ el mínimo desaparece y S_m alcanza el valor correspondiente a un efecto Kerr puro. Desde el punto de vista numérico el caso $\Lambda = 1$ es asintótico, alcanzándose una compresión residual (asintótica) de más del 80% (-0.2).

El comportamiento de este sistema es sorprendente e inesperado desde varios puntos de vista. En primer lugar es sorprendente que la reducción de ruido aumente al aumentar el número de fotones. Como veremos esto no sucede en el resto de los sistemas paramétricos convencionales que el modelo incluye como casos límite. Más sorprendente aún es que en determinada configuración, la máxima reducción se alcanza cuando el número de fotones se hace infinito y que ésta sea realmente alta (80%). Si bien esta reducción ocurre dentro de un determinado ancho de banda, no deja de sorprender que un sistema dinámico maximice una propiedad, en principio puramente cuántica, precisamente en límite más macroscópico. Es doblemente inesperado si además, como hemos visto en el caso $\lambda a = 0$, el término de cuarto orden destruye la compresión residual del OPO convencional. Por otro lado, la curva b de la figura 6.10 pertenece a la categoría *iheHi* y por tanto ha de terminar en una bifurcación de Hopf, estando muy cerca del umbral de estabilidad asintótica ($\Lambda \simeq 0.577$). El cálculo de σ_M oscila aleatoriamente alrededor de valores muy altos, indicando que se mantiene muy cerca de la frontera de inestabilidad en todo momento. No parece extraño que la reducción de ruido aumente en este caso. Por el contrario, en las curvas c y d Λ crece alejándose de la frontera de inestabilidad y, sin embargo, la compresión del ruido aumenta grandemente. Es decir,

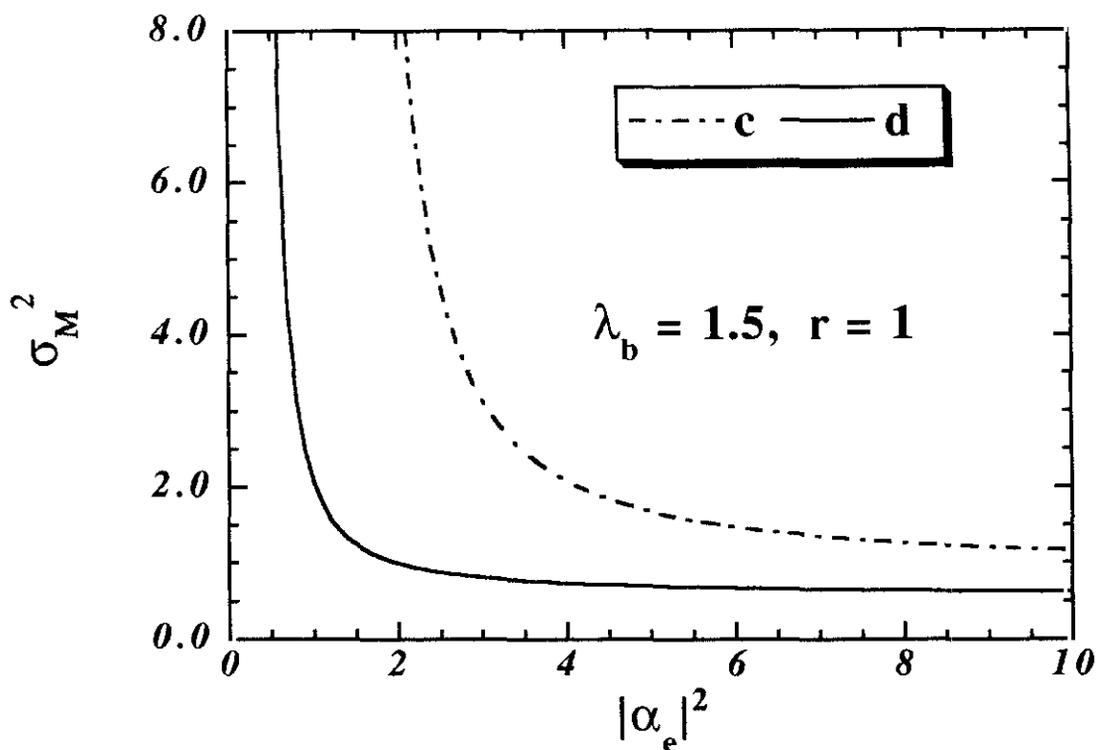


Figura 6.11: Varianza máxima, σ_M , en función de $|\alpha_e|^2$ para los casos *c* y *d* de la figura anterior.

al alejarse el estado del sistema de las inestabilidades, tanto de la de nodo hiperbólico inicial como de la de Hopf, la compresión de ruido aumenta. Podría pensarse que quizá haya alguna inestabilidad que no hubiésemos tenido en cuenta, asociada con el mínimo de las curvas. Es fácil comprobar que no es así puesto que la varianza máxima únicamente diverge en la inestabilidad inicial e incluso rápidamente alcanza valores por debajo de 1, tal y como se muestra en la figura 6.11.

Las figuras 6.12 muestran una comparación del sistema con los límites correspondientes a los sistemas convencionales, junto con un caso alejado de la zona de parámetros de la figura anterior ($\lambda_b = \frac{4}{5}, \Lambda = 7, 5$). El rango de $|\alpha_e|^2$ escogido es la región de estabilidad de la generación de segundo armónico. En la figura 6.12 (a) se puede comprobar como la generación de sub/segundo armónico (curva e de la figura 6.12 (a)) es el mejor de los

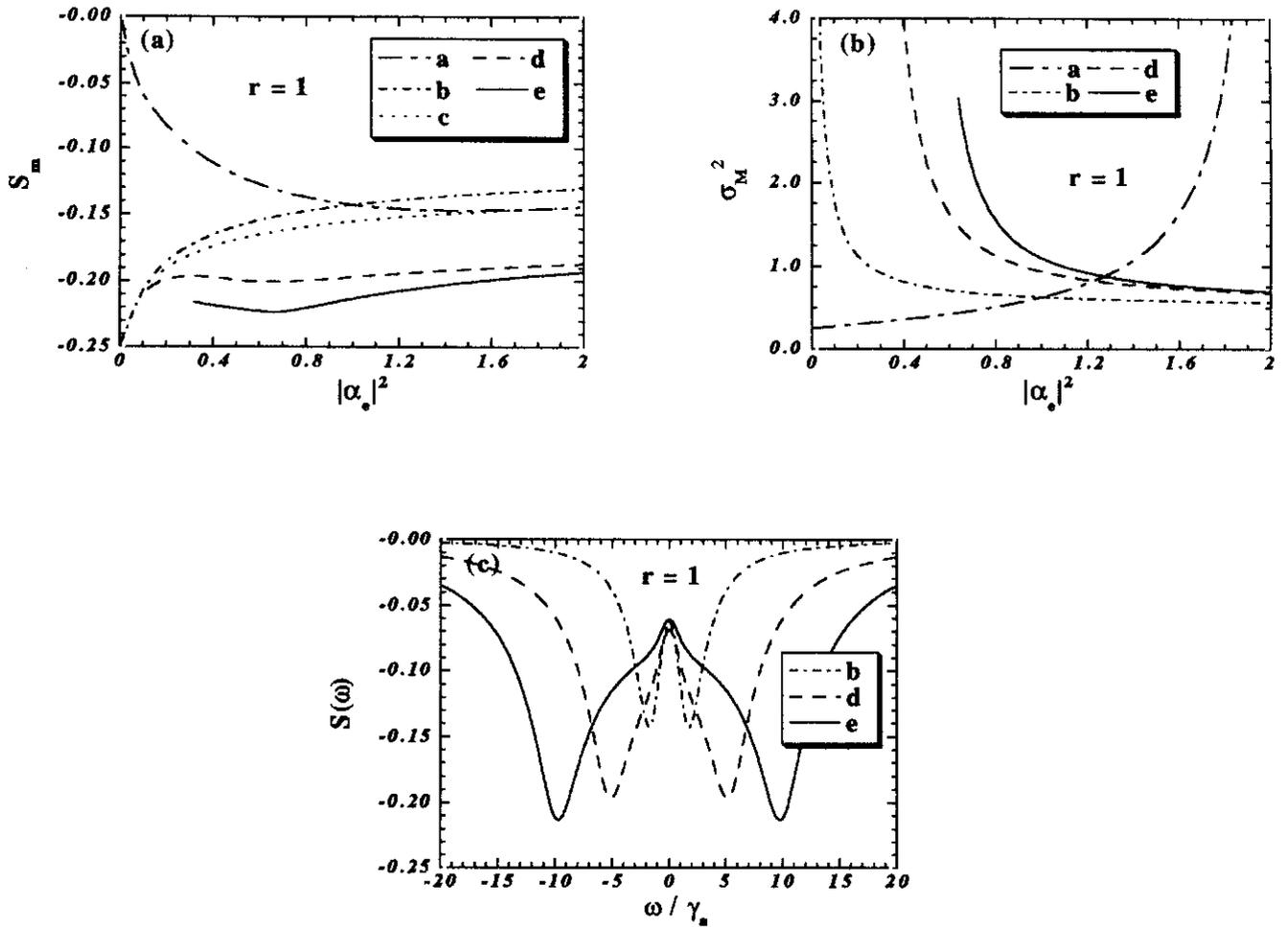


Figura 6.12: Comparación del modelo con sus correspondientes límites convencionales. Figura (a), compresión de ruido máxima, S_m , en función de $|\alpha_e|^2$ para la generación de segundo armónico, **a**, el OPO, **b**, generación de sub/segundo armónico ($\lambda_b = 1.5$), **c**, $\lambda_b = 1.5$ y $\Lambda = 3.5$, **d** y $\lambda_b = 4$ y $\Lambda = 7.5$, **d**. En todos los casos $r = 1$. Figura (b), varianza máxima, σ_M , en función de $|\alpha_e|^2$ para los casos **a**, **b**, **d** y **e** de la figura (a). Figura (c), espectro de compresión, $S(\omega)$, en $|\alpha_e|^2 = 1$ para los casos **b**, **d** y **e** de la figura (a). El espectro del caso **a** coincide con el **b**.

casos convencionales. Obsérvese cómo se comporta como el OPO para valores bajos del número de fotones y como la generación de segundo armónico al acercarse a la bifurcación de Hopf. De esta forma se mantiene cerca de la frontera de inestabilidad maximizando la compresión de ruido cuántico. Sin embargo, se mantiene demasiado cerca provocando que la varianza máxima se dispare perdiendo el sistema la utilidad práctica. Es por ello que la correspondiente $\sigma - M$ no aparece en la figura 6.12 (b). Los espectros han sido calculados en $|\alpha_c|^2 = 1$ donde las varianzas máximas (figura 6.12 (b)) son bajas en todos los casos. Como se puede observar el término de cuarto orden no sólo mejora grandemente la profundidad del mínimo del espectro sino que además éste es mucho más ancho.

Por último siguiendo paralelamente a los casos del apartado anterior, en la clase **iHeHi** se puede conseguir compresión de ruido prácticamente perfecta pero, al contrario que en el caso $\lambda_b = 0$, la varianza máxima diverge.

No es necesario insistir en la relevancia de estos resultados. El haber planteado un modelo teórico que presente compresiones de ruido altas (por encima del 80%) sin estar asociadas a inestabilidades (recuérdese que aparecen máximos de reducción de ruido sin que se observe aumento de la varianza máxima) e incluso compresión prácticamente perfecta sin que la varianza máxima diverja (caso $\lambda_b = 0$) es un primer paso necesario en la consecución de fuentes de luz comprimida de utilidad práctica.

Capítulo 7

Conclusiones

Enumeramos finalmente de manera sucinta las principales conclusiones resultantes de los trabajos recogidos en la presente memoria.

- Hemos construido, desde primeros principios, un formalismo adecuado para el cálculo del espectro de fluctuaciones fuera de una cavidad óptica (el único accesible experimentalmente), aplicable para el análisis de experimentos de compresión de ruido por medio de interacciones de haces coherentes con medios no lineales. La presente formulación, fundamenta y al mismo tiempo permite discernir las inconsistencias de buena parte de las construcciones reportadas hasta la fecha en la literatura, las cuales necesitan introducir consideraciones heurísticas, tales como la adición de términos disipativos a las ecuaciones de evolución, o la cuantización del campo externo en modos discretos (modos del Universo). La derivación aquí presentada, no solamente establece desde primeros principios el rango de validez de las aproximaciones involucradas, sino que permite un tratamiento adecuado de aquellas situaciones donde es necesario considerar más de un modo de la cavidad.
- Como resultado de los trabajos previos descritos en los apéndices, los cuales involucraban en análisis de un sistema modelo que incluía interacciones de segundo orden (*generación paramétrica*) y cuarto orden (*efecto Kerr o biestabilidad ópticos*) han quedado establecidos los siguientes hechos : a) Al contrario que las prediccio-

nes efectuadas por otros autores basadas en modelos no realistas (sin inclusión de efectos disipativos), la estadística de fotones de los campos emergentes bajo condiciones estacionarias, muestran que éstos no poseen características de estados de mínima incertidumbre (su distribución de fotones es superpoissoniana); b) Cuando el sistema opera por encima del nivel de encendido, la reducción de ruido de tal dispositivo es comparable a la alcanzable con un dispositivo convencional (que incluyera únicamente interacciones de segundo orden), aunque la interacción de cuarto orden permite, al contrario que en el caso paramétrico, el controlar la duración del período durante el cual tal reducción es máxima, y c) Se ha evidenciado, en casos de disipación débil, la presencia de oscilaciones dobles muy marcadas en la evolución temporal de varias magnitudes tales como las varianzas de las cuadraturas, no presentes en el dispositivo estándar. Tal fenómeno, observado en otros sistemas físicos, tiene su origen en predominio de la dispersión temporal de los tiempos de encendido respecto de cualquier otro tipo de dispersión.

- El estudio del efecto del término de cuarto orden sobre el espectro de fluctuaciones en un dispositivo caracterizado por interacciones de segundo y cuarto orden, ha evidenciado una redistribución en frecuencia del ruido en cuadraturas, cuando el dispositivo opera por encima del nivel de encendido. En otras palabras, por medio del término de cuarto orden resulta posible el controlar las regiones de frecuencia espectral en las que la reducción de ruido es máxima. Tal resultado es potencialmente de interés desde un punto de vista experimental, ya que una buena parte de los efectos deletéreos se acumulan a frecuencias próximas a la central. Sin embargo, tanto la varianza como la eficiencia de conversión paramétrica no experimentan cambios significativos que hiciesen a un dispositivo de estas características ventajoso con respecto a uno convencional. De hecho, el término de cuarto orden provoca una disminución considerable en la eficiencia del subarmónico en comparación con el sistema de segundo orden estándar.

- Con vistas a mejorar el rendimiento del sistema modelo en consideración, se ha estudiado el caso en el cual una señal intensa es inyectada en una cavidad anular como la descrita en capítulos anteriores. Como resultado del análisis del espectro de fluctuaciones en cuadratura se ha evidenciado que : a) Al contrario que en el sistema estándar en el cual la máxima compresión de ruido tiene lugar en el punto de encendido, el modelo analizado muestra, para ciertos valores de la relación entre no linealidades de segundo y tercer orden, una reducción de ruido muy considerable (del orden de un 83%) para número de fotones altos. Por el contrario, los dispositivos convencionales exhiben una reducción extrema en la eficiencia de compresión de ruido para intensidades superiores a la necesaria para alcanzar el umbral; b) Los parámetros correspondientes a las regiones donde tal reducción de ruido es máxima caracterizan regiones del mapa de fases alejadas de puntos de inestabilidad, cerca de los cuales el trabajo experimental resulta extremadamente dificultoso y c) En contraposición con un sistema paramétrico convencional, la compresión de ruido en una cuadratura no lleva asociada un crecimiento desmesurado del mismo en la cuadratura ortogonal.
- Finalmente, se ha podido establecer la escala física correspondiente a los parámetros óptimos del modelo estudiado. Como resultado se encuentra, como se describe en los apéndices, que tanto las necesidades de potencia de inyección como los valores requeridos para ambas susceptibilidades no lineales se encuentran dentro de los rangos alcanzables en la actualidad empleando como medio material superestructuras tipo Pozo Cuántico Múltiple.

Como conclusión general, el estudio de un sistema modelo como el descrito en la presente memoria, en condiciones más cercanas a la realidad física que aquellas exploradas con anterioridad por otros autores, nos ha conducido a establecer un modelo teórico para un sistema óptico no lineal capaz de producir luz comprimida con intensidades usables en un importante número de aplicaciones. Queda fuera de los propósitos de la presente memoria el dictaminar si tal sistema pudiera ser fácilmente implementado en la práctica,

aunque el análisis del régimen de parámetros requerido para su operación en condiciones óptimas indica su factibilidad, usando para ello tecnología existente en la actualidad.

Apéndice A

Escala Física

El objeto del presente apéndice radica en el establecimiento del régimen de parámetros necesarios para que un modelo como el descrito en capítulos anteriores pudiera operar.

Tal como se ha expuesto, el dispositivo modelado en esta memoria requiere valores de las constantes ópticas no lineales $\chi_{2\omega}^{(2)}$ and $\chi_{\omega,-\omega,\omega}^{(3)}$ que, además de compensar los efectos disipativos (pérdidas por transmisión a través de los espejos, posible absorción intrínseca en el medio no lineal o fluctuaciones del índice de refracción inducidas térmicamente), aporten la fuerza de interacción requerida. Si bien existen materiales con valores relativamente altos de $\chi^{(2)}$ [6, 24] (del orden de 10^{-19} unidades MKS), así como otros con susceptibilidades de tercer orden también elevadas, el requerimiento de disponer de un medio no lineal con valores elevados para ambas constantes podría parecer no realista. Sin embargo, avances recientes en la tecnología de pozos cuánticos múltiples (MQW) han evidenciado la posibilidad de construir mediante técnicas de deposición, materiales con las características requeridas para las susceptibilidades [25, 26]. En particular, el caso de resonancia doble descrito en la ref.[25] merece especial atención ya que ambas no linealidades $\chi_{2\omega}^{(2)}$ y $\chi_{\omega,-\omega,\omega}^{(3)}$ muestran valores muy elevados. Si bien en nuestro caso particular necesitaríamos conocer el valor de $|\chi_{\omega,-\omega,\omega}^{(3)}|$ para el cual no parecen haberse reportado medidas experimentales, es posible hacer algunas estimaciones siguiendo aproximaciones similares a las empleadas para el cálculo de $\chi_{2\omega}^{(2)}$. El resultado estimado para esta mag-

nitid predice un valor de $|\chi_{\omega, -\omega, \omega}^{(3)}| \simeq 1.4 \times 10^{-13} (m/V)^2$ en condiciones de resonancia (122.2 meV). Si consideramos ahora el valor experimental de la constante de segundo orden $|\chi_{2\omega}^{(2)}| (7.5 \times 10^{-8} m/V)$ y fijamos los valores de $\Lambda = 3.5$, $r = 1$, para una cavidad de 1 cm, obtendremos un valor de $\gamma_a \simeq 2 \times 10^8 s^{-1}$, lo que implicaría reflectividades de $R \simeq 99\%$, perfectamente conseguibles hoy día. Bajo estas condiciones, la longitud efectiva de interacción es $\simeq 87 \mu m$ y la longitud de coherencia $\simeq 120 \mu m$, lo cual alivia parcialmente la necesidad de trabajar bajo condiciones de ajuste de fase (conservación de momento) demasiado rígidas. Por otro lado el parámetro γ correspondiente a la absorción en este material es cinco órdenes de magnitud menor que γ_a , lo que hace que pueda ser despreciado.

Analizaremos ahora de forma breve las características requeridas para la potencia de inyección. Para un $\lambda_b = 1.5$, que corresponde al caso d de la figura 6.12 (a) en donde se logra una compresión de ruido del 80%, se necesitan potencias de $\simeq 120 mW$ a la frecuencia 2ω y $\simeq 190 mW$ a ω . Como resultado obtendríamos una potencia de salida de $\simeq 30mW$ a frecuencia ω . Parece entonces claro que tales potencias son perfectamente alcanzables usando láseres comerciales estándar.

Cabe recalcar finalmente el hecho de que la estimación arriba descrita se refiere únicamente al MQW descrito en las refs.[25, 26], el cual no ha sido diseñado para aplicaciones del tipo que nos ocupan. Parece pues esperable que un dispositivo específicamente diseñado para el propósito de nuestro interés, mostraría un rendimiento más elevado.

Apéndice B

Publicaciones

La presente memoria ha dado lugar a las siguientes publicaciones,

1. C.Cabrillo, P.García Fernández, F.J. Bermejo, P. Colet, R. Toral, M. San Miguel, Squeezing Behaviour of a Degenerate Parametric Amplifier with Fourth-Order Interactions : Stationary and Transient Statistics, en *Non-Linear Dynamics and Quantum Phenomena in Optical Systems*, R. Corbalán, R. Vilaseca (Eds.), Springer Proceedings in Physics **55**, Springer Berlin 1991, pag. 131.
2. C.Cabrillo, F.J. Bermejo, P.García Fernández, R. Toral, P. Colet, M. San Miguel, *Transient behavior of a parametric amplifier with an added fourth-order interaction*, Physical Review, **A43**, 3216 (1992).
3. C.Cabrillo, F.J. Bermejo, *Control of the Squeezing Spectrum by means of a Fourth-Order Interaction*, Physics Letters **A170**, 300 (1992).
4. C. Cabrillo, F.J. Bermejo, *Large Quadrature Squeezing at High Intensities*, Physical Review **A48**, (volumen 1 Sept. 1993), (1993).
5. C.Cabrillo, F.J. Bermejo, *A Reconsideration of the Input-Output formalisms for the calculation of the Spectrum of Squeezing in optical cavities*, Journal of the Optical Society of America, Series B (enviado).

Apéndice C

Artículos preliminares

En lo que sigue se presentan los artículos preliminares en los que se fundamentó la presente tesis.

Squeezing resulting from a fourth-order interaction in a degenerate parametric amplifier with absorption losses

P. García Fernández

*Instituto de Estructura de la Materia, Consejo Superior de Investigaciones Científicas,
Serrano 123, 28006 Madrid, Spain*

P. Colet, R. Toral, and M. San Miguel

*Departamento Física Teórica, Universidad de Baleares, Ctra. Valldemosa,
07071 Palma de Mallorca, Spain*

F. J. Bermejo

*Instituto de Estructura de la Materia, Consejo Superior de Investigaciones Científicas,
Serrano 123, 28006 Madrid, Spain*

(Received 7 November 1990)

The squeezing properties of a model of a degenerate parametric amplifier with absorption losses and an added fourth-order nonlinearity have been analyzed. The approach used consists of obtaining the Langevin equation for the optical field from the Heisenberg equation provided that a linearization procedure is valid. The steady states of the deterministic equations have been obtained and their local stability has been analyzed. The stationary covariance matrix has been calculated below and above threshold. Below threshold, a squeezed vacuum state is obtained and the nonlinear effects in the fluctuations have been taken into account by a Gaussian decoupling. In the case above threshold, a phase-squeezed coherent state is obtained and numerical simulations allowed to compute the time interval, depending on the loss parameter, on which the system jumps from one stable state to the other. Finally, the variances numerically determined have been compared with those obtained from the linearized theory and the limits of validity of the linear theory have been analyzed. It has become clear that the nonlinear contribution may perhaps be profitably used for the construction of above-threshold squeezing devices.

I. INTRODUCTION

The possibility of producing strong, amplitude-squeezed light by means of fourth-order interaction processes such as those responsible for the optical Kerr effect has been recently analyzed by Tanas and Kielich.¹ These authors have pointed out that the squeezing effect caused by these higher-order nonlinearities can be remarkably high (up to 98% in noise reduction) provided that the incident light is sufficiently high. On the other hand, a model of a two-photon system with an added fourth-order nonlinearity has been studied² and it was shown that it was able to produce enhanced squeezing with respect to the usual parametric devices. The model referred above can be useful to model traveling-wave devices due to the shorter times required to produce strong noise suppression. The purpose of the present paper is to explore the squeezing properties of a model of a degenerate parametric amplifier (the two-photon system) where absorption losses due to the coupling at the "phonon bath" of the nonlinear material are explicitly taken into account, and where a fourth-order interaction also takes place.

The outline of the paper is as follows: the derivation of the Langevin equations is briefly described in Sec. II and a stability analysis of the deterministic limit is given in

Sec. III. The fluctuations around the steady states are analyzed in Sec. IV and the main conclusions are given in Sec. V.

The model that we have considered consists in an intense laser beam at frequency 2Ω —the pump beam—that illuminates a suitable nonlinear medium. The pump beam is assumed to be intense enough so that the undepleted pump approximation holds. The analysis was performed with the following effective Hamiltonian² ($\hbar=1$):

$$H = \Omega a^\dagger a + \frac{1}{2} f(t) (a^\dagger)^2 + \frac{1}{2} f^*(t) a^2 + \frac{\Gamma}{2} (a^\dagger)^2 a^2 + H_L, \quad (1.1)$$

where $f(t) = i\kappa(t)e^{2i(\varphi - \Omega t)}$, $\kappa(t)$ is an arbitrary real function of time and the second-order process is characterized by the function $\kappa(t)e^{2i(\varphi - \Omega t)}$. The fourth-order term is known to describe optical bistability, and the coupling Γ is proportional to the third-order susceptibility tensor of the nonlinear medium. This Hamiltonian could describe an optically bistable two-photon medium.

Absorption losses in the nonlinear material are included by means of the usual terms in the Hamiltonian³

$$H_L = \sum_j \omega_j b_j^\dagger b_j + \sum_j \chi_j (b_j a^\dagger + b_j^\dagger a). \quad (1.2)$$

The Heisenberg equations for a and b_j lead to an elimina-

tion of the heat-bath modes using the Wigner-Weisskopf approximation.

II. LANGEVIN FORMULATION

Although some attempts have been made in order to deal with k -photon anharmonic oscillator models,⁴ the derivation of closed-form expressions for the computation of field statistics is still an open problem. The approach taken in this paper uses a recent suggestion⁵ that enables us to obtain the Langevin equations for the optical fields from the Heisenberg equations provided that a linearization is introduced on heuristic grounds.

The Heisenberg equation for the annihilation operator can be linearized if the fluctuation is small in comparison with the average value. In this case we can separate in the annihilation operator the deterministic (c -number) part \bar{a} from the part δa , carrying the quantum fluctuations, in the form

$$a = (\bar{a} + \delta a) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\Omega t - \varphi)} . \quad (2.1)$$

The neglect of quadratic terms in δa transforms the nonlinear Heisenberg equation into a linear one. Then we may replace the Heisenberg operator δa by the stochastic process $\delta \alpha$ to obtain the Langevin equation

$$\begin{aligned} \delta \dot{a} = & -i(\Omega - i\gamma)\delta a - if(t)\delta a^* \\ & - i\Gamma \bar{a}(2\bar{a}^* \delta a + \bar{a} \delta a^*) + L(t) , \end{aligned} \quad (2.2)$$

where γ is the damping constant and $L(t)$ is a complex white noise with mean and correlations

$$\begin{aligned} \langle L(t) \rangle = \langle L(t)L(t') \rangle &= 0 , \\ \langle L(t)L^*(t') \rangle &= 2D\delta(t-t') . \end{aligned} \quad (2.3)$$

The diffusion constant D is essentially the spectral density at frequency Ω of the heat bath

$$2D = \gamma(1 + 2\bar{n}) , \quad (2.4)$$

and \bar{n} depends on the temperature of the reservoir. On the other hand, the linearization procedure will only be valid if the deterministic part \bar{a} verifies

$$\dot{\bar{a}} = -i(\Omega - i\gamma)\bar{a} - if(t) - i\Gamma \bar{a}^* \bar{a}^2 . \quad (2.5)$$

The solution of Eq. (2.2) is a Wigner probability density with an associated Fokker-Planck equation which is the same as obtained by the usual procedure starting from the quantum evolution equation of the density matrix transformed to the W representation. Changing from the complex stochastic process $\alpha(t)$ to the real processes $x(t)$ and $y(t)$ through

$$\alpha(t) = [x(t) + iy(t)] e^{-2i(\Omega t - \varphi)} , \quad (2.6)$$

the Langevin equation before linearization becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (-\gamma + \kappa)x + \Gamma y(y^2 + x^2) + L_x , \\ \dot{y} = & (-\gamma - \kappa)y - \Gamma x(y^2 + x^2) + L_y , \end{aligned} \quad (2.7)$$

where $L_{x,y}(t)$ are real Gaussian white noises of zero mean and correlations

$$\langle L_i(t)L_j(t') \rangle = D\delta_{ij}\delta(t-t') , \quad i, j = x, y . \quad (2.8)$$

We take the semiclassical model (2.7) as the basis of our subsequent analysis.

III. DETERMINISTIC EQUATIONS AND LINEAR STABILITY ANALYSIS

By introducing the dimensionless time $\tau = t(\gamma + \kappa)$, Eqs. (2.7) adopt the simpler form:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = & \mu x + \nu y(x^2 + y^2) + \tilde{L}_x , \\ \frac{dy}{d\tau} = & -y - \nu x(x^2 + y^2) + \tilde{L}_y , \end{aligned} \quad (3.1)$$

where we have introduced the dimensionless constants

$$\mu = \frac{\kappa - \gamma}{\kappa + \gamma} , \quad \nu = \frac{\Gamma}{\gamma + \kappa} . \quad (3.2)$$

As the gain κ and loss γ parameters are positive definite, μ is confined to values in the interval $[-1, 1]$. \tilde{L}_x and \tilde{L}_y are real Gaussian noises with zero mean and correlations given by

$$\langle \tilde{L}_i(\tau)\tilde{L}_j(\tau') \rangle = \bar{D}_{ij}\delta(\tau - \tau') , \quad (3.3)$$

where the coefficients of the (diagonal) diffusion matrix \bar{D} are given by $\bar{D}_{ij} = \bar{d}\delta_{ij}$; $\bar{d} \equiv D/(\gamma + \kappa)$. We now find the steady states of the deterministic version of Eqs. (3.1) above. Straightforward algebra shows that these stationary solutions verify

$$\frac{x_s^2}{y_s^2} = \frac{1}{\mu} . \quad (3.4)$$

The system has a switch-on threshold for $\mu = 0$: For $\mu < 0$ the zero intensity solution $(x_s, y_s) = (0, 0)$ is the only one allowed. For $\mu > 0$, in addition to this trivial solution, there also exists two nonzero intensity stationary solutions given by

$$x_s = \pm \frac{\mu^{1/4}}{\sqrt{\nu(1+\mu)}} , \quad y_s = -\sqrt{\mu}x_s . \quad (3.5)$$

Using standard techniques, the local stability of the stationary solutions is analyzed by considering small variations around them, i.e., $x = x_s + \delta x$, $y = y_s + \delta y$. From Eq. (3.1) (without the noise term) we finally obtain

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} , \quad (3.6)$$

where the drift matrix A is given by

$$A = \begin{pmatrix} \mu + 2\nu y_s x_s & \nu(x_s^2 + 3y_s^2) \\ -\nu(3x_s^2 + y_s^2) & -1 - 2\nu x_s y_s \end{pmatrix} . \quad (3.7)$$

Stability is governed by the eigenvalues of the matrix A , which are

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \mu - 1 \pm [(\mu + 1)^2 + 8(\mu + 1)\nu x_s y_s - 12\nu^2(x_s^2 + y_s^2)^2]^{1/2} \} . \quad (3.8)$$

In the case of the zero-intensity solution $(x_s, y_s) = (0, 0)$

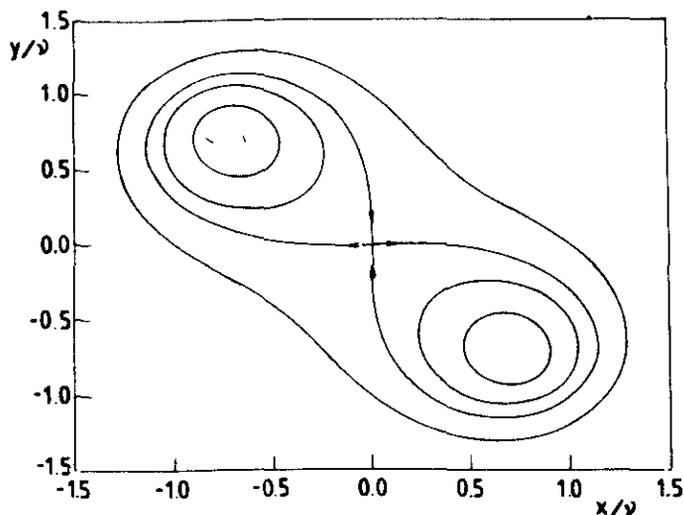


FIG. 1. Phase-space orbits of constant energy given by the Hamiltonian (3.1). From the smallest orbit to the largest one, the corresponding energies are -0.8 , -0.4 , 0 , 1.0 .

we have $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = \mu$, such that this solution is stable below threshold ($\mu < 0$). Above threshold the zero-intensity solution becomes unstable. On the other hand, for the nonvanishing intensity solutions (3.5) we get from (3.8)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\mu - 1 \pm \sqrt{(\mu - 1)^2 - 16\mu}]. \quad (3.9)$$

For $0 < \mu < 1$ the two eigenvalues have a negative real part, such that the nonzero intensity solutions are locally stable. As these two stable solutions coexist simultaneously, the global behavior is bistable. This result implies that the system presents a supercritical pitchfork bifurcation for $\mu = 0$.⁶ The limiting situation $\mu = 1$, not considered in the previous analysis, can be discussed by noticing that, in this case of vanishing damping, the deterministic part of the system (3.1) becomes Hamiltonian,

$$\dot{x} = x + \nu y(y^2 + x^2) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad (3.10)$$

$$\dot{y} = -y - \nu x(y^2 + x^2) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x},$$

with

$$H(x, y) = xy + \frac{\nu}{4}(x^2 + y^2)^2. \quad (3.11)$$

In absence of fluctuations the system describes closed orbits of constant energy in the phase space as shown in Fig. 1. For initial conditions that correspond to negative values for the energy the system orbits around one of the steady states whereas for positive energies the orbits enclose the two steady states.

IV. FLUCTUATIONS AROUND STEADY STATES

Small fluctuations $\delta x, \delta y$ around the steady states can be calculated from the linearized version of the stochastic equations (3.1),

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{L}_x \\ \tilde{L}_y \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

where the drift matrix A is written out in Eq. (3.7). The stationary covariance matrix $\sigma_{ij} \equiv \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$ can be calculated in the linear approximation solving the matrix equation⁷

$$A\sigma + \sigma A^T = -\bar{D}. \quad (4.2)$$

A. Below threshold

According to (3.7), below threshold, the stationary mean values of x and y vanish and the covariance matrix becomes diagonal:

$$\sigma_{11} = \langle x^2 \rangle = \frac{\bar{d}}{2\mu} = \frac{\gamma(1+2\bar{n})}{4(\gamma-\kappa)}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{22} = \langle y^2 \rangle = \frac{\bar{d}}{2} = \frac{\gamma(1+2\bar{n})}{2-4(\gamma+\kappa)}.$$

It should be noted that in this case the linearization has completely eliminated the effect of the fourth-order term on the fluctuations, and the previous result is independent of Γ .

The zero-point fluctuations are $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{4}$. The fluctuations in the y component can be smaller than the zero-point ones provided that the gain verifies $\kappa > 2\gamma\bar{n}$. In that case the y component is squeezed. Since the fluctuations are about the steady-state value $(x_s, y_s) = (0, 0)$, this is a squeezed vacuum state. Note that the product of the mean squares is

$$\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle = \frac{1}{16} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \kappa^2} (1+2\bar{n})^2, \quad (4.4)$$

that is greater than $\frac{1}{16}$. Thus, the state is not a minimum

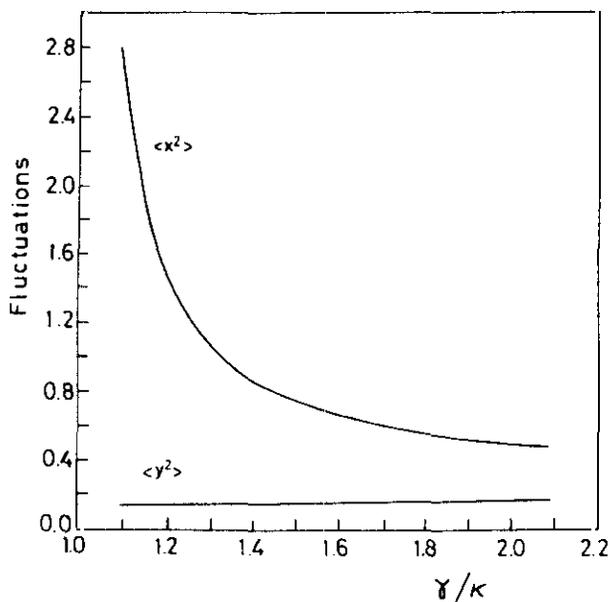


FIG. 2. Dependence of the fluctuations below threshold on the damping constant for $\bar{n} = 0$, $\kappa = 1$.

uncertainty state.

Figure 2 shows the dependence of the fluctuations on the ratio between the damping constant γ and the gain κ at zero temperature $\bar{n}=0$. One can see that as we approach the threshold $\gamma/\kappa \rightarrow 1$, the squeezing in y increases whereas the fluctuations for x diverge. Near threshold the linearization around the stationary value is no longer valid. As a first approximation, nonlinear effects in the fluctuations can be taken into account by a Gaussian decoupling which consists in making in (3.1) the substitutions

$$x^2 \rightarrow \langle x^2 \rangle, \quad y^2 \rightarrow \langle y^2 \rangle, \quad (4.5)$$

where $\langle x^2 \rangle$ and $\langle y^2 \rangle$ are the fluctuations in the linear approximation as given by Eq. (4.2). The resulting expression has the same formal structure as Eq. (4.1) with a drift matrix given by

$$A = \begin{bmatrix} \mu & \frac{\bar{d}v}{2\mu}(\mu-1) \\ -\frac{\bar{d}v}{2\mu}(\mu-1) & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Using (4.2) it is possible to calculate the covariance matrix. It turns out that the fluctuations in the x and y components become in this approximation

$$\langle x^2 \rangle = \frac{D}{2\gamma} \frac{\gamma^2 + \gamma\kappa + [\Gamma D \gamma / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}{\gamma^2 - \kappa^2 + [\Gamma D \gamma / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}, \quad (4.7)$$

$$\langle y^2 \rangle = \frac{D}{2\gamma} \frac{\gamma^2 - \gamma\kappa + [\Gamma D \gamma / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}{\gamma^2 - \kappa^2 + [\Gamma D \gamma / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}. \quad (4.8)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{D}{2} \frac{\gamma \{ 1 + [\Gamma D / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2 \} \mp \kappa \sqrt{1 + [\Gamma D / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}}{\gamma^2 - \kappa^2 + [\Gamma D \gamma / (\gamma^2 - \kappa^2)]^2}. \quad (4.9)$$

It can be shown that the minimum fluctuations λ_1 are always larger than the fluctuations for $\langle y^2 \rangle$ given by (4.3), so that the effect of the nonlinear terms is to reduce the squeezing. According to the linear theory squeezing is maximized at threshold. However, the nonlinearities, whose effect is to decrease the squeezing, become also important close to threshold. There exists then a competition between these two effects so that for a fixed value of Γ there is an optimum operating point to get the largest squeezing. For physical values of Γ , $\Gamma \sim 10^{-2}, 10^{-3}$, this point is very close to, but not at, the threshold.

In order to analyze the system of equations given in (2.7), a set of computer simulations of the classical trajectories have been carried out.⁸

The trajectories move around the trivial stationary solution. An example of these trajectories is shown in Fig. 4 for $\gamma/\kappa=1.02$, $\Gamma/\kappa=2 \times 10^{-2}$, and $\bar{n}=0$. It can be seen that the stationary probability distribution shows a strong asymmetry on both directions, this being a sig-

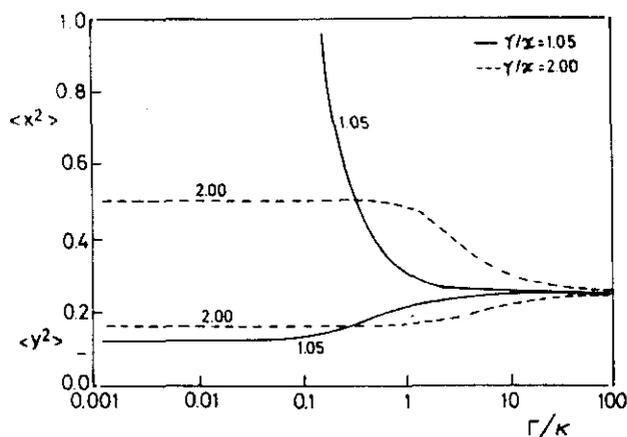


FIG. 3. Dependence of the fluctuations below threshold on the fourth-order coupling for $\gamma/\kappa=1.05$ (—) and 2.0 (---).

Near threshold the nonlinearities become important. In fact for $\kappa \rightarrow \gamma$ we have $\langle y^2 \rangle \rightarrow D/(2\gamma) = (1 + 2\bar{n})/4$, so the squeezing in the y component vanishes even for $T=0$. For physical values of Γ the effect of the nonlinear terms becomes important only close to the threshold as shown in Fig. 3 for zero temperature. However, now the correlation matrix σ is not diagonal. The appropriate linear combination of x and y (that is, the appropriate phase of the electric field) which gives the minimum fluctuations can be obtained diagonalizing σ . In fact, the eigenvalues of σ are the values of the minimum and maximum fluctuations. In this case we have

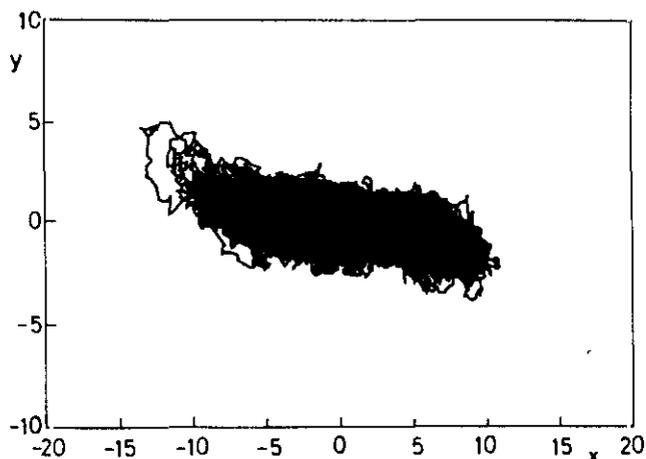


FIG. 4. Trajectory numerically determined from Eq. (2.7) for $\gamma/\kappa=1.02$, $\Gamma/\kappa=2 \times 10^{-2}$, and $\bar{n}=0$.

nature of squeezing. It has also been seen that as γ increases (i.e., $\gamma/\kappa=1.1$), the spherical symmetry is restored.

B. Above threshold

For $\mu > 0$, linearizing around the nontrivial stationary solutions (3.5) leads to Eq. (4.1) but with a drift matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \mu \frac{\mu-1}{\mu+1} & \sqrt{\mu} \frac{3\mu+1}{\mu+1} \\ -\sqrt{\mu} \frac{\mu+3}{\mu+1} & \frac{\mu-1}{\mu+1} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Solving Eq. (4.2) we find that the eigenvalues of the resulting covariance matrix are

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\bar{d}}{16(1-\mu)\mu(1+\mu)^2} [B - (\mu^2 - 1)B^{1/2}], \\ \sigma_{22} &= \frac{\bar{d}}{16(1-\mu)\mu(1+\mu)^2} [B + (\mu^2 - 1)B^{1/2}], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$B = \mu^4 + 16\mu^3 + 30\mu^2 + 16\mu + 1.$$

Again, the linearization process gives fluctuations which are independent of the fourth-order coupling, Γ . Figure 5 plots σ_{11} and σ_{22} versus γ/κ . As $\gamma \rightarrow \kappa$ the fluctuations given by σ_{11} become unbounded and the ones given by σ_{22} tend to $\bar{d}/2$. Note that since (x_s, y_s) is real and not zero, the state may be described as phase-squeezed coherent.

According to (4.11) the maximum squeezing is obtained at threshold. But as in the case below threshold, close enough to it the linearization around the steady

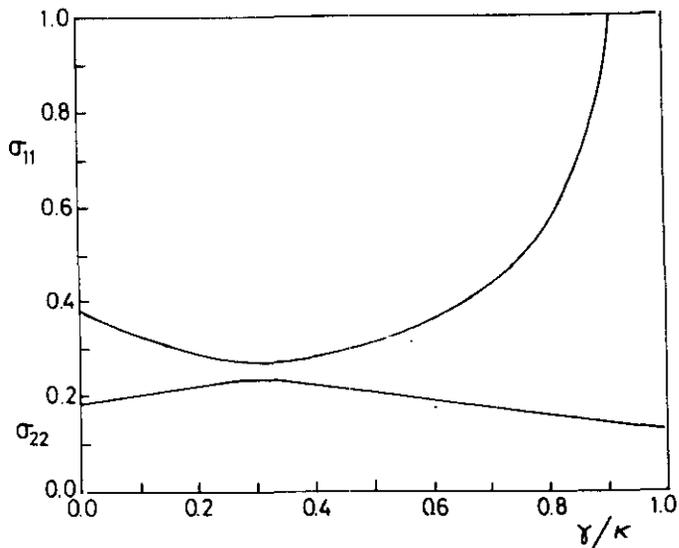


FIG. 5. Dependence of the fluctuations above threshold on the damping constant for $\bar{n}=0$, $\kappa=1$.

state is no longer valid. In this case the situation is even worse due to the fact that in this region the two nontrivial stationary states (3.5) are close enough for the existence of a noticeable probability of transition between the two states. This fact will be extensively discussed at the end of this section.

Introducing now a Gaussian correction, we found an effective drift matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \mu \frac{\mu-1}{\mu+1} & \sqrt{\mu} \frac{1+3\mu}{\Gamma+\mu} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})\nu \\ -\sqrt{\mu} \frac{\mu+3}{\mu+1} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})\nu & \frac{\mu-1}{\mu+1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

As in the previous case the correlation matrix can be calculated using (4.2). In Fig. 6 is shown the dependence of the minimum and maximum fluctuations above threshold on the fourth-order coupling for various values of the damping constant and $\bar{n}=0$. It can be seen that the corrections introduced by the Gaussian approximation in the stationary correlations far from the threshold are practically negligible. Near threshold this approximation leads to a reduction of the squeezing. However, it should be noted that this Gaussian approximation does not take into account the jumps between the stationary states, which are more important near threshold, so it will not provide accurate results.

Numerical simulation allows us to compute the time interval, which depends on γ , on which the system jumps from one stable state to the other one. In Fig. 7 we show an example of a trajectory for $\gamma/\kappa=0.9$, $\Gamma/\kappa=2 \times 10^{-2}$, and $\bar{n}=0$. For this value of γ/κ , it can be seen that the two stationary stable states are appreciably separated.

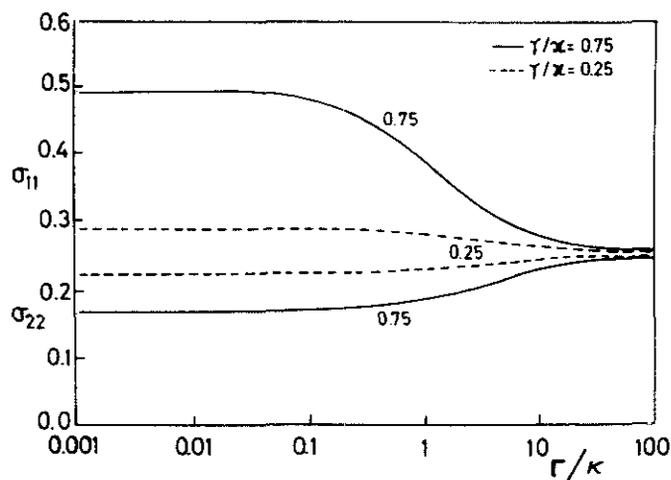


FIG. 6. Dependence of the fluctuations above threshold with Gaussian corrections on the fourth-order coupling for $\bar{n}=0$. The values of γ/κ are 0.75 (—), 0.25 (---).

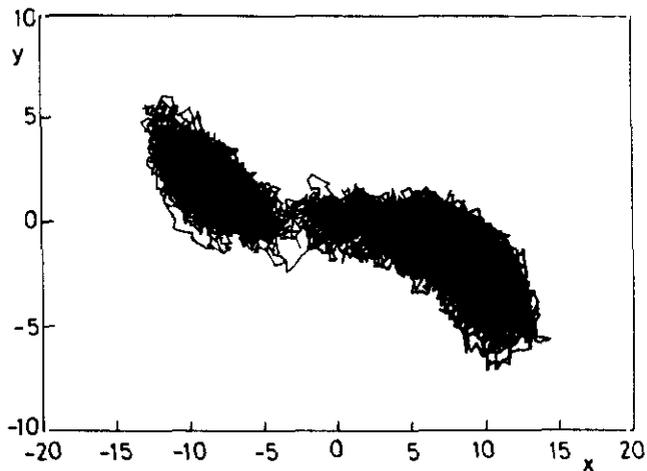


FIG. 7. Trajectory numerically determined from Eq. (2.7) for $\gamma/\kappa=0.9$, $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-2}$, and $\bar{n}=0$.

The probability of jumping between the two stable states decreases strongly with γ , in fact, for $\gamma/\kappa\sim 0.6$, jumps do not occur in observable times. A stationary probability distribution peaked around the two stationary stable states can be observed. As γ approaches threshold (i.e., $\gamma/\kappa=0.98$), the two minima get closer and the jumps between them are more frequent, giving rise to a very broad structureless probability distribution function.

We have also considered the role of the strength of the nonlinearity. Decreasing the fourth-order coupling (i.e., $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-3}$), in the case above threshold, the two minima are further separated and the jumps between the stable states occur less frequently. In fact, for $\gamma/\kappa=0.9$, jumps do not occur in observable times for $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-3}$.

In Fig. 8 we compare the variances σ_{11} and σ_{22} numerically determined with the variances obtained from the linearized theory. It can be observed that for $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-2}$ (represented by circles in the figure), and above threshold, the value of σ_{22} increases near threshold. This is due to the vicinity of the two minima for this value of Γ . If Γ decreases (i.e., $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-3}$, represented by squares in the figure), the jumps between minima are very rare and the agreement with the linearized theory (continuous line) is excellent. This analysis makes clear the limits of validity of the linear analysis in the bistability domain.

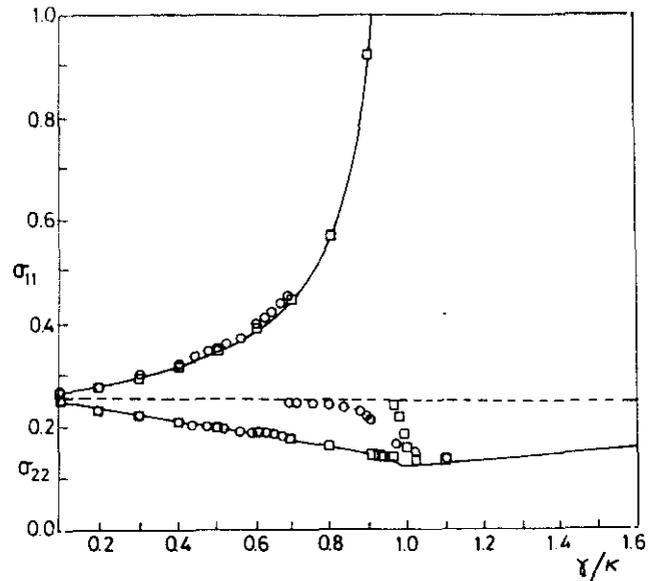


FIG. 8. Comparison between the variances numerically determined (\circ corresponds to $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-2}$, \square to $\Gamma/\kappa=2\times 10^{-3}$) and the variances determined from the linearized theory (solid line).

V. CONCLUSIONS

The role played by a fourth-order nonlinearity in a degenerate parametric amplifier has been studied in the present paper. As a result, it has become clear that the nonlinear contribution may perhaps be profitably used for the construction of above-threshold (bright) squeezing devices. In such a respect it is worth remarking that up to very recent times,⁹ the production of squeezed fields different from that of squeezed vacuum has presented a large number of experimental difficulties. Although some other squeezing mechanisms for the generation of intense squeezed light have also been proposed¹⁰ based on non-parametric devices, their experimental implementation seems to pose a large number of problems. On the other hand, the present results may indicate a way to control the adverse effects due to mode-hopping encountered in the operation above threshold of current parametric oscillators,¹¹ since as it has been shown, the hopping rate can be controlled by a suitable choosing of the strength of the nonlinearity. Finally, the possibility of generating "oversqueezing" due to transient effects as suggested by Tombesi² is being considered at the present moment and will be reported in due time.

¹R. Tanas and S. Kielich, *Quantum Opt.* **2**, 23 (1990).

²P. Tombesi, in *Quantum Optics IV*, edited by J. D. Harvey and D. F. Walls (Springer, Berlin, 1986), p. 81.

³J. Perina, *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* (Kluwer Academic, Norwell, MA, 1984), Chap 7.

⁴C. C. Gerry, *Phys. Lett. A* **124**, 237 (1987).

⁵T. W. Marshall and E. Santos, *Phys. Rev. A* **41**, 1582 (1990); P. Kinsler and P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 236 (1990); P. D. Drummond and P. Kinsler, *Phys. Rev. A* **40**, 4813

(1989); H. J. Carmichael and M. Wolinsky, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1836 (1988).

⁶J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1986).

⁷C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1985), Chap 4.

⁸Simulations are performed following the method indicated by J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz, and J. D. Gunton,

Phys. Rev. A **26**, 1589 (1982). In all simulations we consider $\Gamma=0.01, 0.001$. The time step of integration is $h=0.01$.

⁹J. Mertz, A. Heidman, C. Fabre, E. Giacobino, and S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **64**, 2897 (1990).

¹⁰F. A. M. de Oliveira and P. L. Knigh, in *Dynamics of Non-*

Linear Optical Systems, edited by L. Pesquera and F. J. Bermejo (World-Scientific, Singapore, 1986), p. 46.

¹¹L. A. Wu, M. Xiao, and H. J. Kimble, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 1465 (1987).

Transient behavior of a parametric amplifier with an added fourth-order interaction

C. Cabrillo, F. J. Bermejo, and P. Garcia-Fernandez

Instituto de Estructura de la Materia, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Serrano 123, 28006 Madrid, Spain

R. Toral, P. Colet, and M. San Miguel

Departamento de Física, Universitat de les Illes Balears, 07071 Palma de Mallorca, Spain

(Received 11 June 1991)

The dynamical properties of an optical parametric amplifier with an added fourth-order (Kerr-effect term) nonlinearity are studied by means of a computer simulation of a semiclassical nonlinear Langevin formulation. The transient statistics above threshold are analyzed in detail, and the relevance of the present results for the production of squeezed light in traveling-wave devices is finally discussed.

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.65.Ky, 42.50.Md

I. INTRODUCTION

The possibility of achieving strong noise suppression in an optical parametric amplifier by means of an added Kerr-effect ($\chi^{(3)}$) nonlinearity was pointed out by Tombesi [1] and further considered by Gerry and Rodrigues [2] some time ago. The rationale behind it was the fact that such a higher-order nonlinearity could well shorten the interaction time required to achieve the sought reduction in noise compared with the usual $\chi^{(2)}$ devices. An effective Hamiltonian was postulated comprising both the usual terms appearing in the description of a conventional optical parametric amplifier and an added fourth-order term which was found to enhance the squeezing properties of the model device at least in the initial stages of the evolution. A previous work [3] was devoted to the study of the stability of a more realistic model where noise sources arising from the coupling to a phonon bath were explicitly taken into account. The presence of the nonlinear contribution was found to be responsible for the appearance of a pitchfork bifurcation at threshold leading to bistable behavior above this point. In this paper the temporal evolution of such a model system is analyzed in detail. Because of the semiclassical nature of the treatment, which was carried out in a Wigner-representation frame, the transient behavior could be analyzed by means of a computer simulation of the coupled stochastic equations (provided that the analysis is not carried out in the vicinity of the instability point).

The squeezing characteristics both during the transient evolution and once the steady states above threshold have been reached have been studied in order to compare the noise reduction with those attainable by means of purely Kerr-effect interactions. In this latter respect, the interest was focused on the characterization of the statistics of the output field since it was shown previously [4,5] that "amplitude-squeezed" states could be produced by systems which are describable by means of anharmonic-oscillator Hamiltonians, such as those currently used to study the dynamics of fourth- and higher-order Kerr non-

linearities.

The outline of the paper is as follows. The field statistics of the stationary states above threshold is considered first in Sec. II. The transient behavior as well as some considerations about the underlying assumptions are then examined in Secs. III and IV. Finally the main conclusions and the relevance of the present findings are commented in Sec. V.

II. STUDY OF THE SQUEEZING FEATURES OF THE STATIONARY STATES ABOVE THRESHOLD

In order to study the interaction of an intense laser beam of frequency 2Ω —the pump beam—with the suitable nonlinear medium, one should be able to solve the Heisenberg equations associated to the corresponding effective Hamiltonian. This is in general a difficult and still open problem. In this paper and following the work described in Ref. [3], we make use of a semiclassical approach based on a Wigner (symmetric) phase-space representation [6]. This approach allows the representation of the evolution of the system in terms of two coupled real stochastic differential equations, provided that a certain linearization is valid. The resulting equations are then more convenient for computational purposes than their Heisenberg-Langevin counterparts. The details of the method are given in Ref. [3]. We give here only a brief outline of the main results.

The evolution of the annihilation operator is replaced by a complex stochastic process $\alpha = x(t) + iy(t)$. Removing the oscillatory motion of $\alpha(t)$, $x(t)$ and $y(t)$ (the quadratures of the optical field) satisfy the following Langevin equations:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (-\gamma + \kappa)x + \Gamma y(y^2 + x^2) + L_x, \\ \frac{dy}{dt} &= (-\gamma - \kappa)y - \Gamma x(y^2 + x^2) + L_y, \end{aligned} \quad (1)$$

where γ and κ are the loss and gain parameters, respec-

ely, and Γ is the strength of the nonlinear (fourth-order) term of the Hamiltonian. Rewriting the above equations in terms of the dimensionless time $\tau = (\gamma + \kappa)t$, we get

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu x + \nu y(y^2 + x^2) + \tilde{L}_x, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -y - \nu x(y^2 + x^2) + \tilde{L}_y,$$

where we have introduced the dimensionless constants

$$\mu = \frac{\kappa - \gamma}{\kappa + \gamma}, \quad \nu = \frac{\Gamma}{\gamma + \kappa} \tag{3}$$

and \tilde{L}_x and \tilde{L}_y are real Gaussian white noises of zero mean and correlations given by

$$\langle \tilde{L}_i(t) \tilde{L}_j(t') \rangle = \bar{D} \delta_{ij} \delta(t - t'), \tag{4}$$

where \bar{D} is defined by

$$2\bar{D} = \frac{\gamma}{\gamma + \kappa} (1 + 2\bar{n}) \tag{5}$$

and \bar{n} depends on the temperature of the reservoir. The semiclassical equations (2) are the basis of our subsequent analysis.

A degenerate parametric amplifier operating above threshold gives rise (when pump depletion is accounted for) to two stationary states symmetrically located with respect to the origin [7,8]. In a Wigner-representation scheme, the fluctuations can be graphically represented in the quadrature phase space by means of an error ellipse so that the quadrature noise components are just the projections of the ellipse contour on the two axes [9,10]. In this case, the orientation of the error ellipse is such that its main (larger) principal axis lies along the x axis (i.e., the phase-sensitive noise amplification makes this quadrature the most amplified one and the converse is true for the other component). Such particular redistribution of the noise is a general feature of an optical parametric amplifier and does not depend upon the relationship between pump and loss.

It is worth noticing that the bistable behavior of our model system arises from the fourth-order interaction term, and not from the pump depletion (not considered in this model). The only feature that remains in our case is the symmetry with respect to the origin. In fact, eqs. (2) give rise above threshold (i.e., $\mu > 0$ and in addition to the trivial solution $x = y = 0$) to two stationary states symmetrically located with respect to the origin. Namely, the stationary states (x_s, y_s) are given by

$$x_s = \pm \frac{\mu^{1/4}}{\sqrt{\nu(1 + \mu)}}, \quad y_s = -\sqrt{\mu} x_s. \tag{6}$$

As a result, the stationary states are not in the x axis and the principal axes of the error ellipses are not parallel to the coordinate axes. It is interesting, then, to study the orientation of the error ellipse seeking special directions of the ellipse main axis, i.e., perpendicular to the

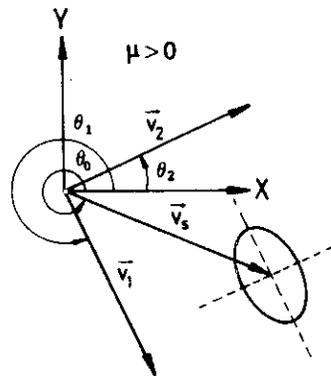


FIG. 1. The different angles and vectors involved in the problem. The coordinates x and y are the quadratures of the electric field and the ellipse represents the error contour in a symmetric phase-space representation of a steady state above threshold.

position vector of the stationary state (pure “amplitude squeezing”) or parallel to it (pure “phase squeezing”).

The error ellipse in the stationary states is defined from the variance matrix $\sigma(\sigma_x \equiv \sigma_{11} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \sigma_{xy} \equiv \sigma_{12} = \sigma_{21} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle, \sigma_y \equiv \sigma_{22} = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2)$. This is obtained by allowing small fluctuations δx and δy around the steady states and considering the linearized version of the stochastic equations (2)

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{L}_x \\ \tilde{L}_y \end{pmatrix}, \tag{7}$$

where A is the drift matrix. The variance matrix σ is then the solution of the following equation [11]:

$$A\sigma + \sigma A^T = -\bar{D} \underline{I}. \tag{8}$$

As it was shown in Ref. [3], the drift matrix A depends only on the μ parameter. So σ only depends upon μ and \bar{D} . Taking $\tilde{\sigma} = \sigma \bar{D}^{-1}$ we have

$$A\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma} A^T = -\underline{I}. \tag{9}$$

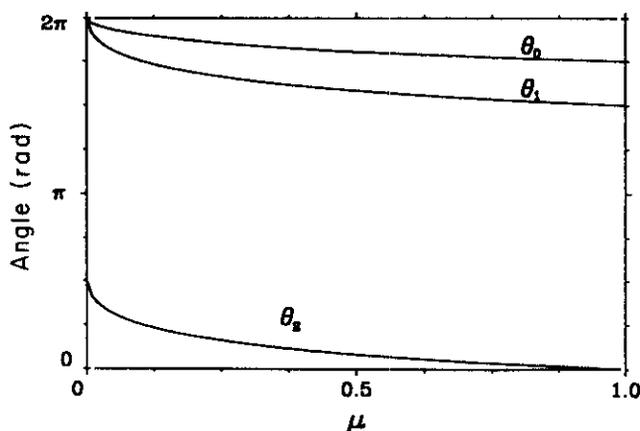


FIG. 2. The angles illustrated in Fig. 1 vs the parameter μ .

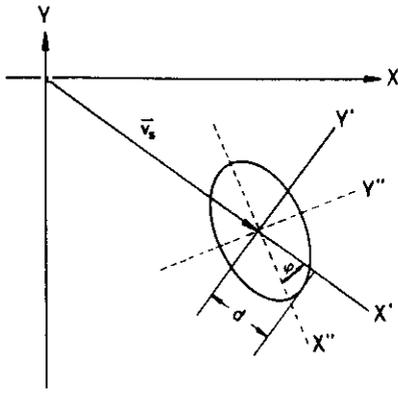


FIG. 3. Illustration of the projection of the error ellipse onto the position-vector direction.

Therefore $\bar{\sigma}$ only depends on μ and has the same principal axes as σ since \bar{D} is a real number. The position vector of the stationary state \mathbf{V}_s , only depends on the A matrix and, therefore, only on the parameter μ .

Figure 1 illustrates the different angles involved in the problem. \mathbf{V}_1 and \mathbf{V}_2 are eigenvectors of $\bar{\sigma}$ in the maximum- and minimum-variance directions, respectively. The expressions for the different angles are

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arctan \left(\frac{V_{sy}}{V_{sx}} \right), \\ \theta_1 &= \arctan \left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}} \right), \\ \theta_2 &= \arctan \left(\frac{V_{2y}}{V_{2x}} \right),\end{aligned}\quad (10)$$

where the values for the angles are considered to be within the interval $[0, 2\pi]$. A numerical evaluation of this expression has been done. The representation of the different angles against μ is shown in Fig. 2. A \mathbf{V}_1 vector parallel or antiparallel to \mathbf{V}_s , would represent an intersection between the curves $\theta_0(\mu)$ or $\theta_0(\mu) - \pi$ with $\theta_1(\mu)$ and a \mathbf{V}_2 vector parallel or antiparallel to \mathbf{V}_s , would represent an intersection with $\theta_2(\mu)$. So, the model considered here does not show pure "phase" or "amplitude squeezing." However it is still possible that the projection of the error ellipse onto the \mathbf{V}_s direction be less than $\frac{1}{2}$ which would represent a value smaller than that of a coherent

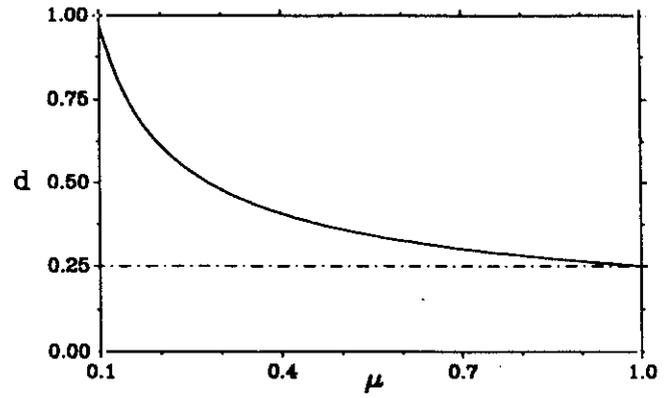


FIG. 4. The projection of the error ellipse onto the position-vector direction vs the parameter μ .

state and, therefore, a state of sub-Poissonian light. The equation for the error ellipse in the x'' and y'' axes shown in Fig. 3 is

$$\frac{(x'')^2}{\sigma_{11}^2} + \frac{(y'')^2}{\sigma_{22}^2} = 1, \quad (11)$$

where σ_{11} and σ_{22} are in this frame the maximum and minimum variances of the state. Transforming the (x'', y'') axes to the (x', y') axes by a rotation of angle φ we obtain the equation in the (x', y') frame with a general form

$$a(\varphi)(y')^2 + b(\varphi)x'y' + c(\varphi)(x')^2 - 1 = 0. \quad (12)$$

Taking (12) as a second-degree equation for y' the solution has the general form

$$y' = \frac{-b(\varphi)x' \pm \sqrt{\Delta(\varphi, x')}}{2a(\varphi)}, \quad (13)$$

where $\Delta(\varphi, x')$ is equal to $[b(\varphi)x']^2 - 4a(\varphi)[c(\varphi)(x')^2 - 1]$. In order to obtain the x' values for which y' is single valued, the following condition must hold:

$$\Delta(\varphi, x'_p) = 0. \quad (14)$$

In this way we obtain

$$d = |x_p| = \left(\frac{\left(\frac{\cos \varphi}{\sigma_{22}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\sigma_{11}} \right)^2}{\left[\left(\frac{\cos \varphi}{\sigma_{22}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\sigma_{11}} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\cos \varphi}{\sigma_{11}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{\sigma_{22}} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{\sigma_{22}^2} - \frac{1}{\sigma_{11}^2} \right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \right)^{1/2}$$

Since φ , σ_{11} , and σ_{22} only depend on μ , d must have the same dependence. Figure 4 shows a plot of d versus μ . It is clear that the produced states are not of sub-Poissonian character since $d(\mu)$ never goes below the 0.25 value.

III. TRANSIENT BEHAVIOR

The numerical simulation uses a stochastic first-order Euler scheme as explained in the Appendix of Ref. [12].

The Gaussian white noise has been generated by means of the Box-Muller-Wiener transformation [13] and an integration step of 10^{-3} has been used. The temporal dependence is given by the dimensionless time $\tau = (\gamma + \kappa)t$.

We have not considered thermal fluctuations ($\bar{n} = 0$) and γ/κ (loss-pump ratio), Γ/κ (fourth- to second-order strength ratio) as independent parameters in all calculations. The statistical averages were taken over 10 000 trajectories when dealing with quadrature statistics and 20 000 for photon-number statistics.

A. Below threshold

Figure 5 shows the temporal dependence of the quadrature variances (σ_{22} is the minimum quadrature variance and σ_{11} is the maximum quadrature variance hereafter). For values of Γ/κ within the range $[0.02, 0.002]$ used in this work no influence of the nonlinear term has been found within our numerical precision. Therefore the transient behavior in this regime is essentially governed by the pure two-photon interaction.

B. Above threshold

As stated above, the nonlinear term included in our model system leads to the appearance of bistable behavior above threshold. In what follows we will briefly describe the transients.

Making use of the symmetry with respect to the origin of the evolution equations, averages over trajectories leading to the same final state were taken. As a consequence, the stationary variances calculated in this manner are the same as those reported in Ref. [3]. All the simulations presented here have 500 "measures" with a time step $\Delta\tau = 0.15$.

It was clear from the outset that two different regimes could be defined depending on the value of the parameter γ/κ . While oscillations do not appear for large enough values of γ/κ , a rich oscillatory behavior was present when small enough values of the parameter γ/κ were used. Since both regimes exhibit a rather distinctive phenomenology they are, in what follows, considered separately.

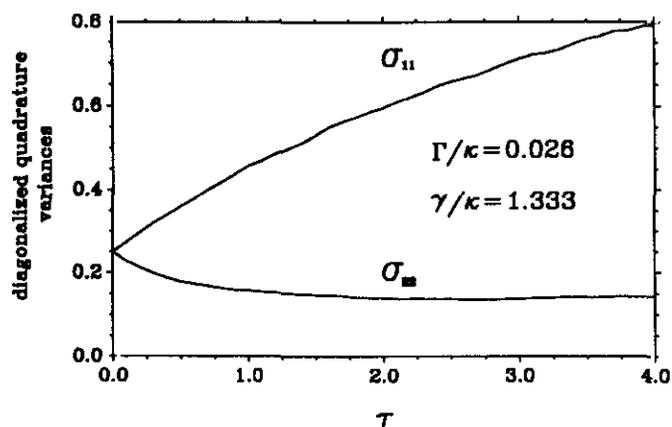


FIG. 5. Evolution of the maximum and minimum quadrature variances below threshold.

1. Overdamped regime

Figure 6 shows the evolution of the minimum variance for different values of the parameters. All the curves show an "oversqueezing" region [1,2] which corresponds to a pure two-photon interaction [no influence of the nonlinear term around the (0,0) unstable point]. The value of σ_{22} in this region coincides with the linearized theory around the unstable point [14,15] (second formula of Eq. (4.3) in Ref. [3]).

Figure 6(a) displays the influence of the Γ/κ parameter. We have chosen $\gamma/\kappa = 0.64$ to ensure that no jumps between stationary states occur [3]. A larger value of Γ/κ involves an approach to the stationary states that implies a reduction of the two-photon interaction region and a quieter transient.

Figure 6(b) shows the dependence with γ/κ . A larger value of γ/κ implies also an approach of the stationary states, but in this case the "oversqueezing" and stationary values of σ_{22} get closer while γ/κ increases, reaching the same value in the limit $\gamma/\kappa = 1$. Therefore in this case an increase of γ/κ implies a larger period of oversqueezing, a larger value of σ_{22} in this region, and a quieter transient.

In Fig. 7 we show a transient with a coherent initial state other than the vacuum. This initial state is such that $|\alpha(0)|\Gamma/(\gamma + \kappa) = 1$ is satisfied. In this way it reproduces the most favorable initial condition used by Tombesi [1]. The result shows how the squeezing is

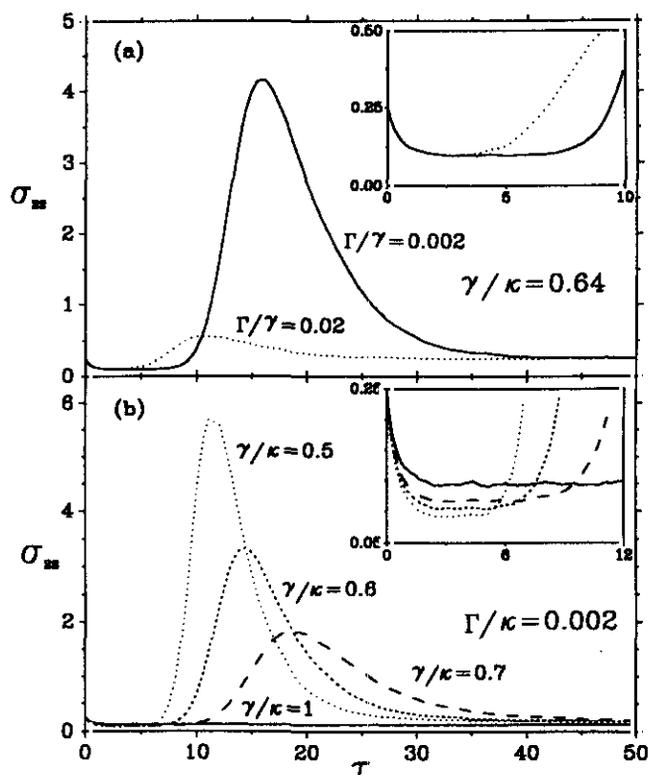


FIG. 6. Evolution of the minimum quadrature variance above threshold for a coherent-vacuum initial state. The dependence with respect to the parameter Γ/κ is shown in (a) and with respect to the parameter γ/κ in (b). The insets show the initial stages of the evolution.

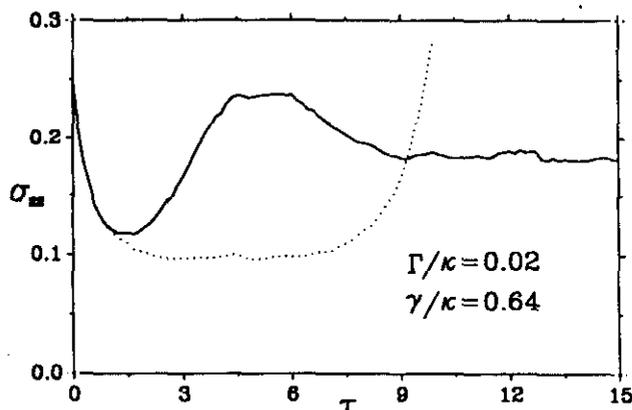


FIG. 7. Evolution of the minimum quadrature variance for a nonvacuum initial state compared with the same for a coherent-vacuum initial state. Solid line: coherent initial state such that $|\alpha(0)|\Gamma/(\gamma + \kappa) = 1$. Dotted line: coherent-vacuum initial state.

revoked before it reaches a value smaller than that of a pure two-photon interaction as Gerry and Rodrigues have shown for a lossless case [2].

2. Oscillatory regime

When γ/κ tends to small enough values, damped oscillations appear on the different calculated variables. Besides the diagonalized variances for the quadratures, the average photon number and variance have been obtained, allowing a clearer vision of the oscillations. Considering that a Wigner (symmetric) representation in the phase space has been used and taking into account the commutation relations between quadrature operators we have

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{x}^2 + i[\hat{x}, \hat{y}] + \hat{y}^2 \rangle \\ &= (x^2)_{cl} + (y^2)_{cl} - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &= (x^4)_{cl} + (y^4)_{cl} - [(x^2)_{cl} + (y^2)_{cl}]^2 \\ &\quad + 2(x^2 y^2)_{cl} - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

where $\langle \rangle$ and $()_{cl}$ indicate quantum and classical averages, respectively.

The evolution of the mean photon number and variance is shown in Fig. 8. Two cases, one in the overdamped regime and one in the oscillatory regime, are displayed. Figure 9 shows the diagonalized variances for the quadratures for the coherent vacuum as initial state.

The oscillations in the quadrature quantities show an interesting double structure which is not present in the standard parametric amplifier [15]. A closer look at a display of several trajectories (Fig. 10) reveals a large temporal dispersion in the starting times (the times in which each trajectory reaches an observable value of the photon number). This temporal dispersion seems to be constant, i.e., each trajectory seems approximately to be just a shifted replica of one of them. A passage-time (PT) statistic has been computed for twelve different photon-number reference values scanning the first peak in the

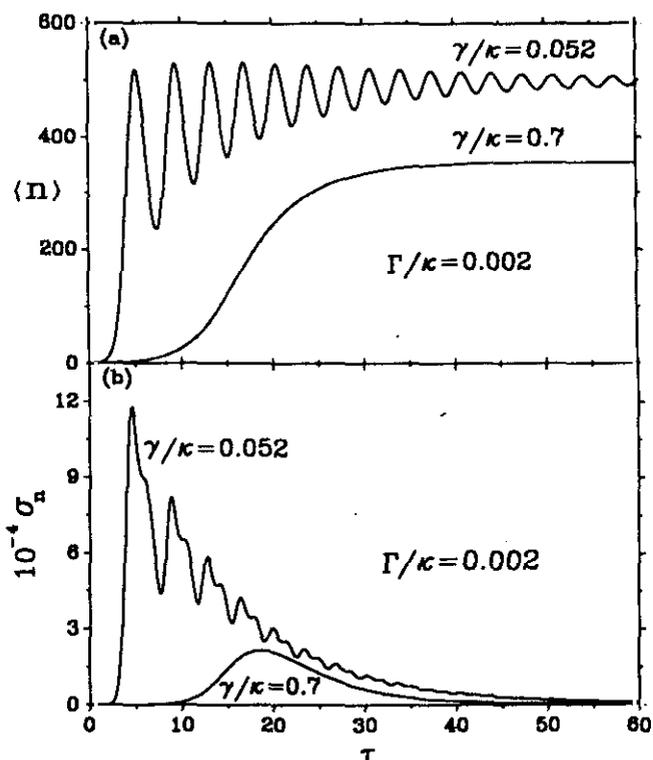


FIG. 8. Evolution in the oscillatory regime compared with the same in the overdamped regime for photon-number average (a) and the photon-number variance (b) (coherent-vacuum initial state).

evolution. A value of 1.50 for the passage-time variances has been obtained in all cases. This means that, at least, there is no dispersion in the width of the first peak. Assuming that only PT dispersion occurs (i.e., all curves have exactly the same shape), it is not difficult to understand the double-peak structure if we interpret the dispersion in a variable as the projection of an oscillatory band of constant width (the PT variance) onto the axis corresponding to the considered variable. If the PT-probability distribution is symmetric with respect to the most likely trajectory, the position of the local mini-

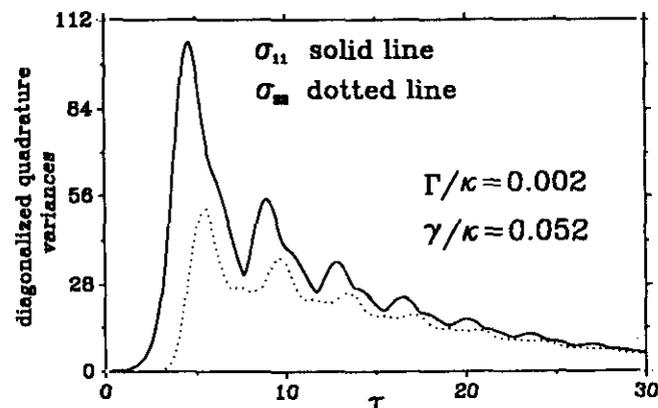


FIG. 9. Evolution of the quadrature variances in the oscillatory regime (coherent-vacuum initial state).

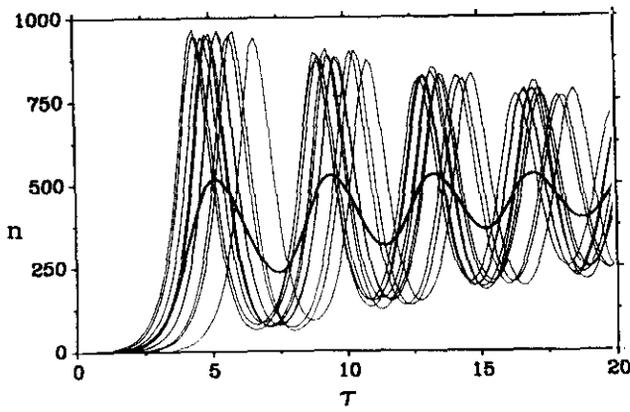


FIG. 10. Ten switching events for the photon number corresponding to the oscillatory case of Fig. 8(a). The thick line represents the average value.

um in the variance will coincide with that of the local maximum of the average of the corresponding variable [16,17]. Since in our case the local maximum is located before the local minimum of the variance we conclude that the PT-probability distribution is not symmetric with respect to the most likely trajectory. In general this structure will appear in regions in which PT dispersion is dominant and roughly constant. This can occur, at least at the beginning of the evolution, if the starting times show large dispersion. Our model system has a two-dimensional real phase space and bistability with equal probabilities for both stationary states. Because of the two-dimensional and real character of our model, if there is an oscillatory regime it must have a conservative limit and both generalized position and momentum must oscillate around steady states. This implies that the starting directions in the unstable point cannot aim at the stationary points. Therefore the deterministic flow around the unstable point can produce a large dispersion in the starting times. This is not the case of the standard parametric amplifier [15] in which the larger dimensionality of the phase space allows the stationary states to

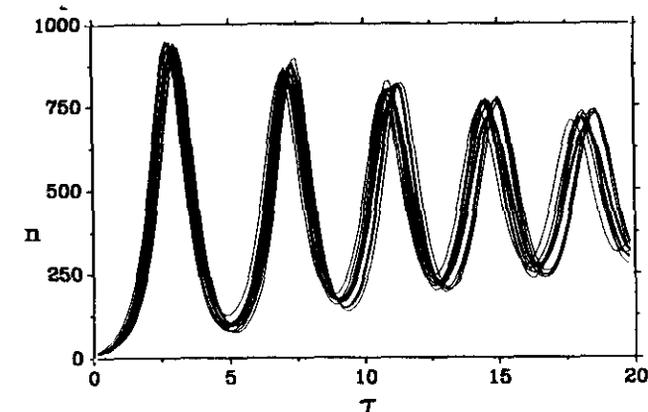


FIG. 11. Ten switching events for the photon number with the same parameter values as in Fig. 10 but with an initial coherent state such that $\langle x(0) \rangle = 21$, and $\langle y(0) \rangle = -5.3$. The thick line represents the average value.

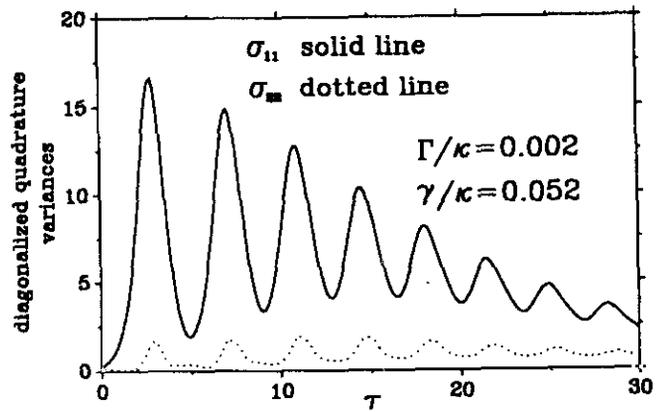


FIG. 12. Evolution of the quadrature variances for the case of Fig. 11.

settle onto the starting directions of the unstable state.

Figure 11 shows the same switching events for the photon number as Fig. 10 but with an initial state different from the vacuum. As can be clearly seen upon inspection of the figure, the input of a nonvacuum state results in a smaller dispersion of the initial times. At the same time a dispersion on the oscillation frequencies appears due to the influence of the fourth-order term at the initial time (self-phase-modulation [4,5,18]). The double structure in the variances now tends to disappear as is shown in Fig. 12.

It should also be noted that the oscillations occur around an exponential decay and not around a horizontal line as in the standard parametric amplifier. Again this is due to the noncoincidence of the starting directions with those which stationary states settle onto.

IV. ADEQUACY OF THE MAIN APPROXIMATION

For a correct application of the semiclassical phase-space representation used herein it is necessary that the quantum fluctuations are appreciably smaller than the mean value. As we have computed statistical quantities over the whole evolution, an analysis of the region where the approximation holds must be done. Following Tombesi we use as a criterium for the validity of the approximation the smallness of the parameter

$$S(\tau) = \left| \frac{(\alpha^2)_{cl} - (\alpha)_{cl}^2}{(\alpha)_{cl}} \right|, \tag{16}$$

which has the expression in quadrature variables

$$S(\tau) = \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2}{(\alpha)_{cl}^2 + (\beta)_{cl}^2} \right)^{1/2}, \tag{17}$$

where σ_x , σ_y , and σ_{xy} are the components of the variance matrix at each τ . Figure 13 shows $S(\tau)$ for several cases. Comparing the $S(\tau)$ curves with the corresponding counterparts for the variances it is observed that the approximation is not valid in the regions around the maximum of the variances as can be expected. Therefore the results should be taken as qualitative in these regions.

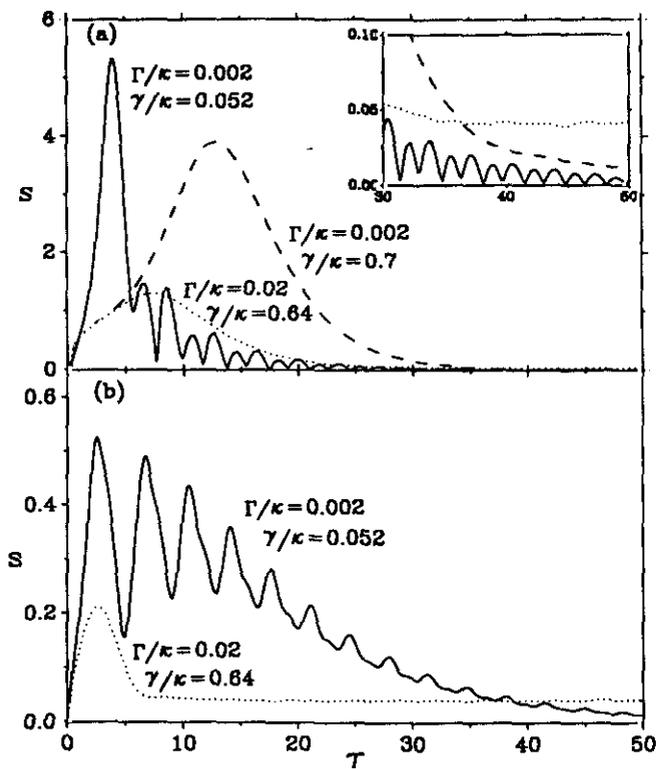


FIG. 13. Evolution of the parameter S (variance-average relation) for a coherent-vacuum initial state (a) and for a non-vacuum initial state (b). The inset shows the evolution below the value $S = 0.1$.

In cases where the initial state is the vacuum, the over-squeezing region does not present a small enough value of S . However, in this region there is no influence of the fourth-order term and the method is exact [6]. Setting $\Gamma/\kappa = 0$ in the simulations, no discrepancy with the cases $\Gamma/\kappa \neq 0$ has been found in these regions within our numerical precision. The same holds for the simulations made below threshold. In the oscillatory case, $S(\tau)$ takes small enough values in regions in which the characteristic oscillatory behavior is observed. Therefore, we can conclude that this behavior is not a consequence of the approximation taken.

It should be noticed that we have not taken into account the depletion in the pump which is expected to be important near threshold (some region in the over-damped regime). In due time a complete study of the model system including depletion in the pump will be reported.

V. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We have considered here the squeezing properties of a model device which includes two- and four-photon interactions as well as a realistic account of beam losses. Such a model exhibits bistable behavior above threshold leading to a steady regime which shows quadrature squeezing. A detailed analysis of the stationary statistics has evidenced that the attained states do not have minimum uncertainty relations and show super-Poissonian photon statistics.

The study of the transient behavior above threshold when the initial state is a coherent vacuum has evidenced that the fourth-order term does not exert any effect at the first stages of the evolution, and therefore the results are comparable to those attained by a conventional parametric amplifier [15]. At these first stages the squeezing is the maximum attainable with a parametric amplifier since it shows the same dependence with respect to the pump-loss relation as in the case below threshold. It has to be noticed that the model herein studied enables the possibility of controlling the duration of this initial "over-squeezing" region in a pump-independent way since it is governed not only by the pump-loss relation but also by the relative values between the pump and the Kerr-effect term. On the other hand, for the case of nonvacuum initial states, the present results confirm the numerical calculations carried out by Gerry and Rodrigues [2] for a lossless case regarding the disappearance of the "over-squeezing" effect before it attains a value corresponding to a two-photon interaction. An oscillatory behavior has been found for low-loss cases. In particular, the time evolution of the variances shows a characteristic double-peak structure similar to those found in recent papers [16,17] on semiconductor-laser gain switching. A close look at several sets of trajectories has shown that the appearance of such double structure is caused by the large temporal dispersion, at least when the initial state is a coherent vacuum. For cases where the trajectories depart from a nonzero coherent state, a noticeable frequency dispersion is readily seen. Such an effect is caused by the fourth-order term and can be considered to be an analogue to the observed self-phase-modulation exhibited in optical fibers [18] under circumstances where the Kerr-effect term plays a dominant role.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported in part by Grant No. TIC-90/80 (DGICYT, Spain).

- [1] P. Tombesi, in *Quantum Optics IV*, Proceedings of the Fourth International Symposium, Hamilton, New Zealand, 1986, edited by J.D. Harvey and P.F. Walls (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [2] C.C. Gerry and S. Rodrigues, *Phys. Rev. A* **36**, 5444 (1987).
- [3] P. García-Fernández, P. Colet, R. Toral, M. San Miguel,

- and F.J. Bermejo, *Phys. Rev. A* **43**, 4923 (1991).
- [4] C.C. Gerry, *Phys. Lett. A* **124**, 237 (1987).
- [5] R. Tanaš and S. Kelich, *Quantum Opt.* **2**, 23 (1990).
- [6] T.W. Marshall and E. Santos, *Phys. Rev. A* **41**, 1582 (1990).
- [7] P. D. Drummond, K. J. McNeil, and D. F. Walls, *Opt. Acta* **27**, 321 (1980); **28**, 221 (1981).

- [8] G. Milburn and D. F. Walls, *Opt. Commun.* **39**, 401 (1981).
- [9] H. J. Carmichael, G. J. Milburn, and D. F. Walls, *J. Phys. A* **17**, 469 (1984).
- [10] R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **34**, 709 (1987).
- [11] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1985), Chap. 4.
- [12] J. M. Sancho, M. San Miguel, S.L. Katz, and J. D. Gunton, *Phys. Rev. A* **26**, 1589 (1982).
- [13] M. Kalos and P. Whitlock, *Monte-Carlo Methods. Volume 1: Basics* (Wiley, New York, 1986).
- [14] M. Wolinsky and H.J. Carmichel, *Opt. Commun.* **55**, 138 (1985).
- [15] H. J. Carmichael and M. Wolinsky in *Quantum Optics IV* (Ref. [1]).
- [16] A. Mecozzi, P. Spano, and A. Sapia, *Opt. Lett.* **15**, 1067 (1990).
- [17] S. Balle, P. Colet, and S. San Miguel, *Phys. Rev. A* **43**, 498 (1991).
- [18] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, San Diego, 1989), Chap. 4.

Bibliografía

- [1] H.P. Yuen en *Photons and Quantum Fluctuations*, E.R. Pike, H. Walter (Eds.), Adam Hilger, Bristol 1988, p. 1.
- [2] M.D. Levenson, R.M. Shelby, en *Quantum Optics IV*, J.D. Harvey, D.F. Walls (Eds.), Springer Proceedings in Physics vol 12, Springer Berlin 1986, p. 2.
- [3] F. Haake, M. Wilkens, en *Photons and Quantum Fluctuations*, E.R. Pike, H. Walter (Eds.), Adam Hilger, Bristol 1988, p. 217.
- [4] R. Loudon, P.L. Knight, *J.Mod.Optics* **34**, 709 (1987).
- [5] M.C. Teich, B.E.A. Saleh, *Progress in Optics*, **26**, E. Wolf (Ed.), North-Holland, Amsterdam 1988, p. 1.
- [6] A. Yariv *Quantum Electronics*, Wiley, N.York 1988, p. 407.
- [7] N.B. Abraham en *Dynamics of Non-Linear Optical Systems*, L. Pesquera, F.J. Bermejo (Eds.), World Scientific, Singapore 1989, p. 29.
- [8] M.F. Bocko, J. Battiato, *Phys.Rev.Lett.* **60**, 1763 (1988).
- [9] L. Mandel, *Phys.Rev.* **A28**, 929 (1983).
- [10] H.P. Yuen, *Phys.Rev.* **A13**, 2226 (1976).
- [11] R. E. Slusher et al, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985).
- [12] R. E. Slusher *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* **B4**, 1453 (1987).

- [13] Ver p.ej. C. Fabre, S. Reynaud, en *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Session LIII, Elsevier, Amsterdam 1992, p.677.
- [14] L.A. Wu, H.J. Kimble, J.L. Hall, H. Wu, Phys.Rev.Lett. **57**, 2520 (1986), L.A. Wu, Xiao Min, H.J. Kimble, J.Optical Soc.Am. **B4**, 1465 (1987).
- [15] P.Garcia-Fernandez, L. Lugiato, F.J. Bermejo, P.L. Galatola, Quantum Optics **2**, 49 (1990).
- [16] S.F. Pereira, Xiao Min, H.J. Kimble, J.L Hall, Phys.Rev. **A40**, 1385 (1989).
- [17] A. Sizmann, R.J. Horowicz, G. Wagner, G. Leuchs, Opt.Comm. **80**, 138 (1990)
- [18] O. Aytur, P. Kumar, Phys.Rev.Lett. **65**, 1551 (1990).
- [19] E. Giacobino, T. Debuisschert, J. Mertz, L. Hilico, A. Heidmann, S. Reynaud , C. Fabre, en *Quantum Measurements in Optics*, P. Tombesi, D.F. Walls (Eds.), NATO ASI Series **B282**, Plenum, N.York, 1992, p. 183.
- [20] G. J. Milburn *et al.*, J. Opt. Soc. Am. **B4**, 1476 (1987).
- [21] A. Mecozzi, P. Tombesi, en la referencia anterior, p. 321.
- [22] Volumen especial de la revista Applied Physics **B55** (1992).
- [23] E. Polzik, J.Carri, H.J. Kimble, Phys.Rev.Lett. **68**, 320 (1992).
- [24] P. N. Butcher and D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [25] C. Sirtori et al, Appl. Phys. Lett. **60**, 151 (1992).
- [26] C. Sirtori et al, Phys. Rev. Lett. **68**, 1010 (1992).
- [27] N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981).

- [28] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons, New York, 1973)
- [29] H. Haken, *Light: Volume 1* (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [30] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Speinger, Berlin, 1883)
- [31] R. J. Glauber, Phys. Rev. 130, 2529 (1963).
- [32] R. J. Glauber, Phys. Rev. 130, 2566 (1963).
- [33] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. 10, 277 (1963)
- [34] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley-Interscience, New York, 1984).
- [35] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic press, San Diego, 1992).
- [36] P. S. Pershan, Phys. Rev. 130, 1919 (1963).
- [37] Y. R. Shen, Phys. Rev. 167, 818 (1968).
- [38] M. J. Collet and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A 30, 1386 (1984).
- [39] C. W. Gardiner and C. M. Savage, Opt. Commun. 50, 173 (1984).
- [40] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- [41] W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 134, 1429 (1964).
- [42] M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 159, 208 (1967).
- [43] R. Lang, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A1, 1788 (1973).
- [44] R. Lang and M. O. Scully, Opt. Commun. 9, 33 (1973).
- [45] J. Gea-Banacloche et al, Phys. Rev. A41, 369 (1990).
- [46] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989).

- [47] S. Reynaud and A. Heidmann, *Opt. Commun.* 71, 209 (1989).
- [48] H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Am.* B4, 1588 (1987).
- [49] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic press, New York, 65) 1992).
- [50] G. Hernandez *Fabry-Perot Interferometers* (Cambridge University press, Cambridge, 1986).
- [51] G. J. Milburn and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* 27, 392 (1983).
- [52] L. Wu *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* B4, 1465 (1987).
- [53] L. A. Orozco *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* B4, 1490 (1987).
- [54] M. W. Maeda, P. Kumar, J. H. Shapiro *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* B4, 1501 (1987).
- [55] P. Tombesi in *Quantum Optics IV*, proceedings of the Fourth International Symposium, Hamilton, New Zealand, edited by J.D. Harvey and P.F. Walls (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1986).
- [56] C.C. Gerry and S. Rodrigues, *Phys. Rev. A* 36, 5444 (1987).
- [57] P. García-Fernandez, P. Colet, R. Toral, M. San Miguel, F.J. Bermejo, *Phys. Rev. A* 43, 4923 (1991).
- [58] M. O. Scully and K. G. Whitney in *Progress in Optics* Vol 10, edited by E. Wolf (North-Holland Publishing Company, Amsterdam London 1972).
- [59] H. Haken, *Light* Vol. 1, Waves, Photons, Atoms, (North-Holland, Amsterdam Oxford New York Tokyo 1986), chap. 9.
- [60] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer, Berlin Heidelberg, 1991), chap. 3.
- [61] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis* (Tata McGraw-Hill, New York 1974)

- [62] S. Chaturvedi, C. W. Gardiner, I. S. Matheson, and D. F. Walls, *J. Stat. Phys.* 17, 469 (1977)
- [63] H. J. Carmichael and M. Wolinsky in *Quantum Optics IV*, proceedings of the Fourth International Symposium, Hamilton, New Zealand, edited by J.D. Harvey and P.F. Walls (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1986).
- [64] A. Mecozzi and P. Tombesi in *Squeezed and Nonclassical Light*, NATO ASI Series B, 190, edited by P. Tombesi and E. R. Pike (1989).
- [65] *Quantum Aspects of Optical Communications*, C. Bendjaballah et al (Eds.) (Springer-Verlag, Berlin 1991).
- [66] Y. Yamamoto, S. Machida, S. Saito, N. Imoto, T. Yanagawa, M. Kitagawa, G. Björk, in *Progress in Optics*. vol. 28, p 89, E. Wolf (Ed.) Elsevier, Amsterdam 1990.
- [67] D. M. Hope et al, *Phys. Rev. A* 46, R1181 (1992).
- [68] F. A. M. de Oliveira and P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* 61, 830 (1988).
- [69] S. F. Pereira, H. J. Kimble, and J. L. Hall, *Phys. Rev. A* 38, 4931 (1988).
- [70] C. Cabrillo, F.J. Bermejo, P. Garcia-Fernandez, R. Toral, P. Colet, M. San Miguel, *Phys. Rev. A* 45, 3216 (1992).
- [71] C. Cabrillo and F. J. Bermejo, *Phys. Lett. A* 170, 300 (1992).
- [72] P. Tombesi, *Phys. Rev. A* 39, 4288 (1989).
- [73] M. J. Collet and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* 32, 2887 (1985).
- [74] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1986).
- [75] C. W. Gardiner and M. J. Collet, *Phys. Rev. A* 31, 3761 (1985).
- [76] P. D. Drummond K.J. McNeil and D. F. Walls, *Opt. Acta* 27, 321 (1980).

- [77] P. D. Drummond and D. F. Walls, *J. Phys. A* 13, 725 (1980).
- [78] G. Ioos and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, New York 1990).

Reunido el Tribunal que suscribe
 en el día de la fecha acordó cali-
 ficar la presente Tesis Doctoral
 con la censura de -

Apto "cum laude" por unanimidad

Madrid, 14 de Octubre 1993

[Handwritten signature]

[Handwritten signature]

[Handwritten signature]

E. Sant

[Handwritten signature]