



**ABRIR CAPÍTULO 6**

## CAPITULO 7

# SUPERFICIE MEDIA DEL OCEANO EN ZONAS MAS EXTENSAS

*En este capítulo se presenta un estudio de validación de datos altimétricos y su uso posterior en ajustes locales para eliminar la parte no corregida de error orbital. Pero en este caso, se hace sobre una zona en mar abierto, de mayores dimensiones que en el capítulo anterior. Con ello se pretende ver la validez de los resultados de las secciones precedentes así como determinar algunas diferencias entre ambos tipos de zonas en cuanto a tratamiento, validación y ajuste de modelos locales se refiere.*

### 7.1. NUEVA ZONA DE ESTUDIO. DATOS EMPLEADOS

Los estudios y conclusiones del capítulo anterior se han visto limitados a la extensión de la zona así como a su carácter de cuenca semicerrada con un equilibrio hidrológico peculiar. Si queremos dar más garantías a la validez y de un modo más genérico de los criterios sugeridos de validación y a la confrontación de métodos de ajuste local, es necesario hacer un estudio, en este caso sobre una zona de dimensiones mayores, en una cuenca abierta, donde aparezcan menos problemas de resonancias propios de cuencas poco profundas y en la que los modelos, tanto de marea como de superficie topográfica, se adecuen a la realidad de una forma más adecuada.

Para ello elegimos una zona en el Atlántico Norte, que incluye los Archipiélagos de Canarias, Azores y Madeira. La extensión de la zona es de  $20^{\circ} < \phi < 50^{\circ}$ ,  $315^{\circ} < \lambda < 355^{\circ}$ . Sobre ella se seleccionaron datos de la fase G del satélite ERS-1 (segunda fase multidisciplinar) de la misma fuente y análogas correcciones a los descritos en la sección 6.5.1. Corresponden a quince meses de misión (del 24 de marzo de 1995 al 2 de junio de 1996). Su distribución es dos años posterior, tras el ajuste a los datos TOPEX. El número total de datos seleccionados para el estudio es de 592083.

En la figura 7.1. aparece la distribución de datos durante un ciclo (35 días), así como las altitudes reproducidas, y en la figura 7.2. la superficie media del modelo OSU95 sobre la zona. En ambas se aprecia que la variación es mucho mayor que en el caso del Mar Mediterráneo.

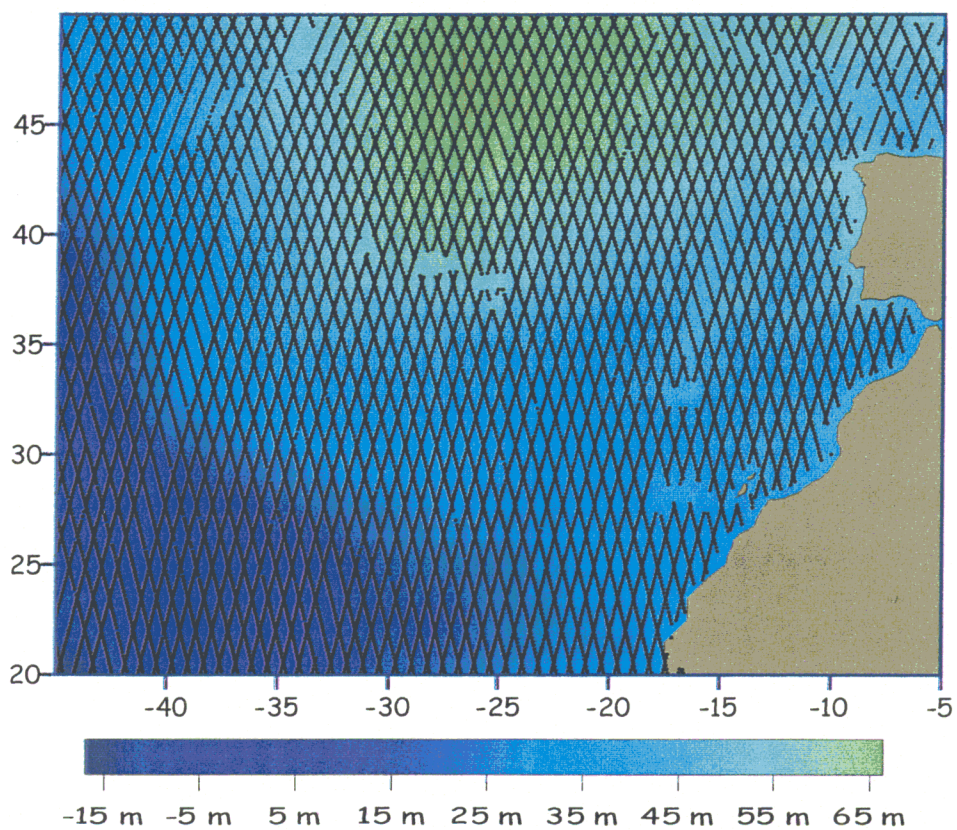


FIGURA 7.1: Disposición de medidas del altímetro durante un periodo de repetición.

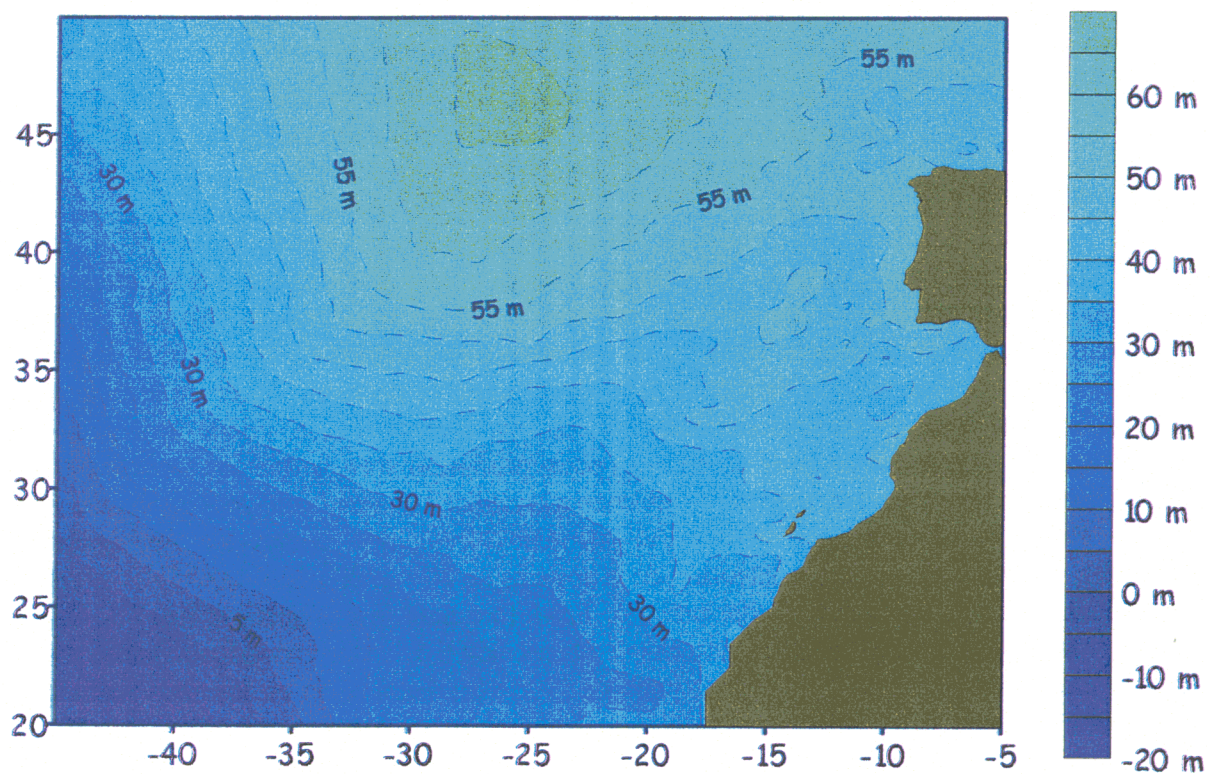


FIGURA 7.2: Curvas de nivel del OSUMSS95 sobre la zona de estudio.



## 7.2. VARIACIONES ESTACIONALES

Como se había señalado en (5.11), la diferencia entre geoide y superficie instantánea del mar tiene dos partes. La estática la aproximamos por la información contenida en el modelo OSU95 de superficie media. Así, para nosotros la parte variable será la diferencia entre el valor corregido proveniente del altímetro y el del modelo sobre el mismo punto. Por lo tanto, estas cantidades residuales serán consideradas como la variación del nivel del mar si damos por válida la superficie media modelo.

Una parte significativa de ellos corresponde a errores en el modelo de marea, cuya determinación sale de los objetivos de este trabajo. Pero como ya se describió de forma más extensa en 6.5.3, también reflejan cambios regulares debidos a variaciones estacionales de vientos y temperaturas. Estas variaciones vienen a ser más de la mitad del valor de los residuales. El resto representa los errores en el modelo medio tomado como parte estática, variaciones de periodo mayor que el estacional así como otras no regulares.

Para evaluar la cuantía en el caso de los datos considerados, separamos éstos en cuatro grupos según la estación del año a que correspondan. En cada uno de los grupos calculamos las altitudes residuales (o nuestra aproximación a la parte variable de la superficie topográfica del océano). La estadística de los resultados obtenidos aparece en la tabla 7.1. También resulta significativa la comparación presentada en la figura 7.3. no aparecen diferencias importantes al tomar o no el efecto barométrico inverso.

Se puede apreciar fácilmente que la variabilidad en la zona sigue el esquema general del Hemisferio Norte. En la tabla 7.1. vemos que el estudio estadístico de la superficie modelo no varía, como era previsible, de una estación a otra, mientras que las medias del altímetro y por lo tanto, las altitudes residuales, sí lo hacen de la forma esperada. Los valores extremos se mantienen del mismo orden.

Al comparar la tabla 7.1. con la 6.16, vemos que la tendencia en ambas es la misma (residuales positivos en verano y otoño, negativos en invierno y primavera). Las desviaciones típicas de ambas son iguales, mientras que el número de datos y la extensión de la zona es mucho mayor en

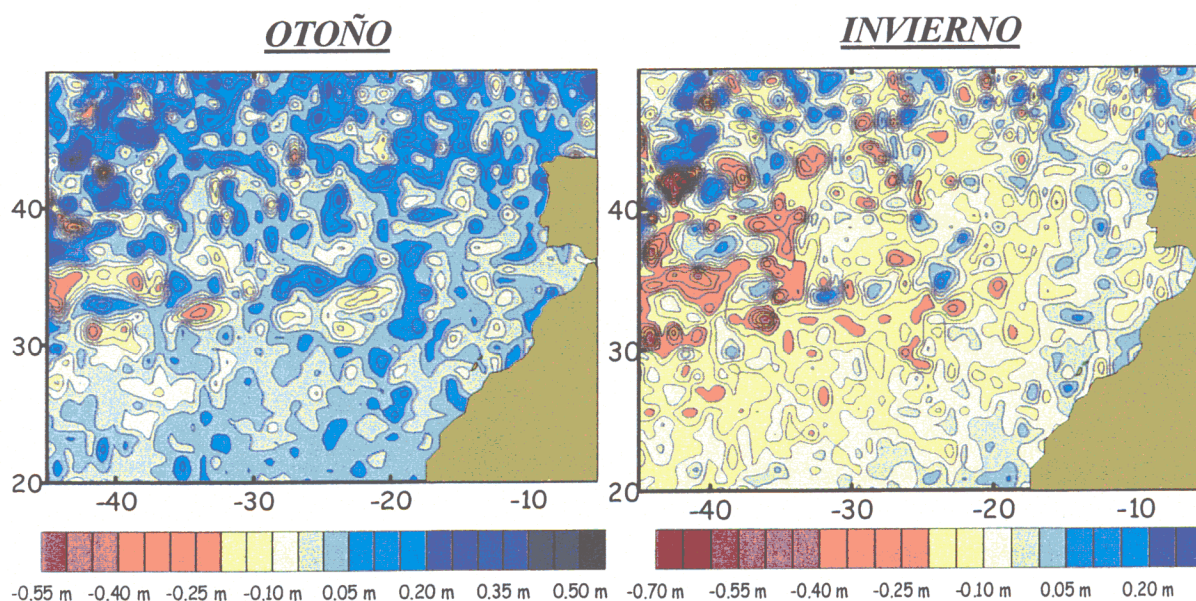


FIGURA 7.3: Variación del nivel del mar o altitudes residuales en dos estaciones del año distintas.



|                        | <b>MEDIA</b> | <b>D.T.</b> | <b>MINIMO</b> | <b>MAXIMO</b> |
|------------------------|--------------|-------------|---------------|---------------|
| <b>PRIMAVERA</b>       |              |             |               |               |
| <b>ALT.INSTANTANEA</b> | 19.6 m       | 23.10       | -17.18 m      | 66.84 m       |
| <b>SMM OSU95</b>       | 38.12 m      | 18.23       | -17.08 m      | 66.75 m       |
| <b>ALT.RESIDUAL</b>    | -3.12 cm     | 0.10 m      | -1.02 m       | 0.95 m        |
| <b>VERANO</b>          |              |             |               |               |
| <b>ALT.INSTANTANEA</b> | 28.23 m      | 22.99       | -17.06 m      | 66.73 m       |
| <b>SMM OSU95</b>       | 38.11 m      | 18.35       | -17.07 m      | 66.75 m       |
| <b>ALT.RESIDUAL</b>    | 3.51 cm      | 0.11        | -0.97 m       | 1.04 m        |
| <b>OTOÑO</b>           |              |             |               |               |
| <b>ALT.INSTANTANEA</b> | 33.01 m      | 21.49       | -17.08 m      | 66.78 m       |
| <b>SMM OSU95</b>       | 38.46 m      | 18.14 m     | -17.07 m      | 66.75 m       |
| <b>ALT.RESIDUAL</b>    | 2.68 cm      | 0.11        | -0.94 m       | 1.01 m        |
| <b>INVIERNO</b>        |              |             |               |               |
| <b>ALT.INSTANTANEA</b> | 32.55 m      | 21.65       | -17.87 m      | 66.73 m       |
| <b>SMM OSU95</b>       | 38.17 m      | 18.32       | -17.07 m      | 66.75 m       |
| <b>ALT.RESIDUAL</b>    | -5.17 cm     | 0.11        | -1.12 m       | 0.92 m        |

*TABLA 7.1: Parámetros estadísticos a lo largo de las estaciones.*

este caso. Las figuras de 6.17 a 6.20. muestran también unas variaciones más acusadas proporcionalmente en el mar Mediterráneo que las que aparecen representadas en la figura 7.3. Esto suele ocurrir en mares cerrados en los que por un lado, el volumen de agua es menor y afectan más las variaciones de temperatura, y por otro, las profundidades son menores y por lo tanto, el calentamiento afecta a una porción mucho más significativa de agua.

Como conclusión de estas variaciones, tendremos que para aplicaciones de cálculo de superficies medias del mar, es conveniente tomar un periodo de tiempo suficiente para promediarlas, a ser posible un número entero de años.

### 7.3. VALIDACION DE LOS DATOS

Los criterios enunciados en la sección 6.5.2. del capítulo anterior excluían una serie de datos. Pero al ser una zona muy pequeña y ser también pequeño el número de datos rechazados, no podíamos concluir relaciones claras y más generales sobre los criterios y las características de los puntos rechazados. Buscamos una mayor generalidad al contrastar los criterios en la zona actual.

### 7.3.1. Rugosidad de la superficie del mar

Al tratarse de medidas corregidas, deben reproducir una superficie suave. Como medida de rugosidad tomamos  $\Delta h/\Delta t$  entre dos medidas consecutivas. En el caso de océano abierto, el valor límite debe ser algo mayor que en el capítulo anterior, por la propia dinámica del mismo. De hecho, si analizamos la estadística de este parámetro en los quince meses de misión, vemos que la media es pequeña, pero obtenida de un conjunto de datos donde aparecen cantidades bastante grandes de uno y otro signo (ver tabla 7.2.). Nosotros tomaremos en este estudio  $\Delta h/\Delta t < 1$  m/s como indicativo de superficie suave.

Un criterio parecido aparece en la literatura para indicar la misma idea: diferencia de lecturas consecutivas pequeña. Nos parece más adecuada la introducción del parámetro  $\Delta h/\Delta t$  que contempla la posibilidad de pequeñas interrupciones en los datos al relacionar con el tiempo transcurrido en las medidas. Los detractores del criterio citan la correlación existente entre la superficie del mar y la batimetría. En los resultados del Mediterráneo aparecía una cantidad muy escasa de puntos que nos impidió decantarnos por una u otra opción: considerarlo un criterio válido o no.

En la zona del Atlántico se localizan 613 puntos por aplicación del criterio con un valor límite de 1 m/s (0,10% del total de los datos). De nuevo es una cantidad pequeña, pero la distribución de los puntos es bastante significativa. En los trece ciclos empleados los puntos se encuentran sobre las mismas zonas y todas ellas están asociadas a accidentes del fondo marino (figura 7.4).

Por un lado tenemos puntos situados en aguas someras cerca de las costas africana y portuguesa con profundidades de sólo 18 metros (bancos de L'Àmpere y Josephine), 33 metros (banco de Gorringer) y de 86 metros (banco de La Seine) en medio de aguas mucho más profundas. Es decir, se trata de unas zonas en las que se encuentran montañas submarinas con altas cotas.

El resto de los puntos está situado sobre la cornisa Cantábrica, donde hay un importante escalón que pasa de aguas poco profundas a otras que lo son mucho más a una distancia no muy grande de la costa. La placa continental es muy estrecha en la zona, por lo que este escalón resulta bastante pronunciado.

En todos los puntos que han aparecido con la aplicación del criterio, el modelo de superficie media reproduce la misma inclinación. Esto reitera el hecho de que no se trate de medidas erróneas, como ya se insinuaba al repetirse las mismas zonas en los trece ciclos. Por lo tanto las altitudes residuales son pequeñas en estos puntos.

Si la inclinación pronunciada en la superficie del mar se debe al efecto de las masas por debajo de ellas, afectará a todas las superficies equipotenciales, en concreto al geoide. Para comprobarlo tomamos varios geoides disponibles sobre la zona total o parcialmente. El primero, el geoide modelo EGM96 que se basa en datos tanto de altimetría como de gravimetría. Como segundo geoide elegimos uno gravimétrico sin altimetría (Arabelos et al, 1999) y un geoide modelo compensado para el Atlántico Central (Catalao y Sevilla, 1998). Hacemos una comparación cuyos

| MEDIA      | DESV.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|------------|-------------|------------|-----------|
| -0.009 m/s | 0.126       | -1.511 m/s | 1.799 m/s |

TABLA 7.2: Estadística de las  $\Delta h/\Delta t$  de los datos.

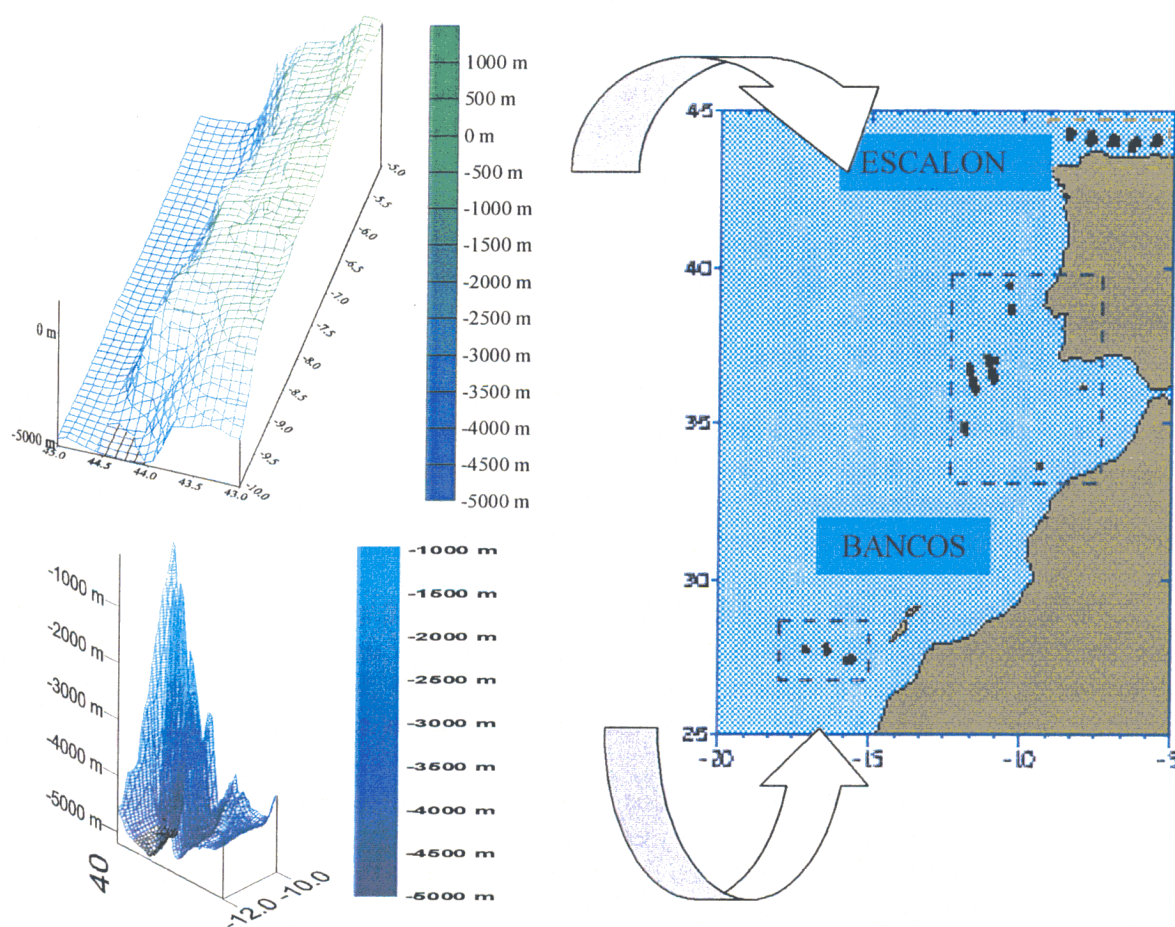


FIGURA 7.4: Zonas con puntos detectados y batimetrías correspondientes.

resultados aparecen en las figuras 7.5.y 7.6. Se aprecia que aunque existe un sesgo entre las tres superficies, todas ellas tienen una inclinación importante en la misma zona, lo que corrobora su dependencia de la batimetría. Por esta clara relación entre inclinación de la superficie y los accidentes del fondo marino, afirmamos que si se trata de datos corregidos, los puntos con valores grandes de  $\Delta h/\Delta t$  no son errores del altímetro y por lo tanto no es conveniente excluirlos en un proceso validatorio.

### 7.3.2. Criterio alternativo

En el capítulo anterior se enunció como criterio alternativo a éste la búsqueda de puntos en los que se tengan inclinaciones de la superficie medida que no aparezcan en el modelo, es decir,  $(\Delta h - \Delta_{media})/\Delta t = \Delta h_{res}/\Delta t$  grandes. En la tabla 7.3. se muestra la estadística de esta cantidad para los datos. En este ejemplo usamos como valor límite 45 cm/s, valor cercano a la mitad del rango de variación. Aplicándolo de tal forma se localizan 102 puntos (0.02% del total) sobre una zona que va cambiando ligeramente al ir cambiando de ciclo (si se alcanzasen siempre en el mismo punto, podríamos pensar que el modelo medio empleado no reproduce bien una inclinación existente en la realidad). El criterio así enunciado pretende localizar variaciones de nivel del mar debidas a su propia dinámica (al no aparecer en la parte estática). De hecho, los mayores valores aparecen justo en una zona relacionada con corrientes (figura 7.7).



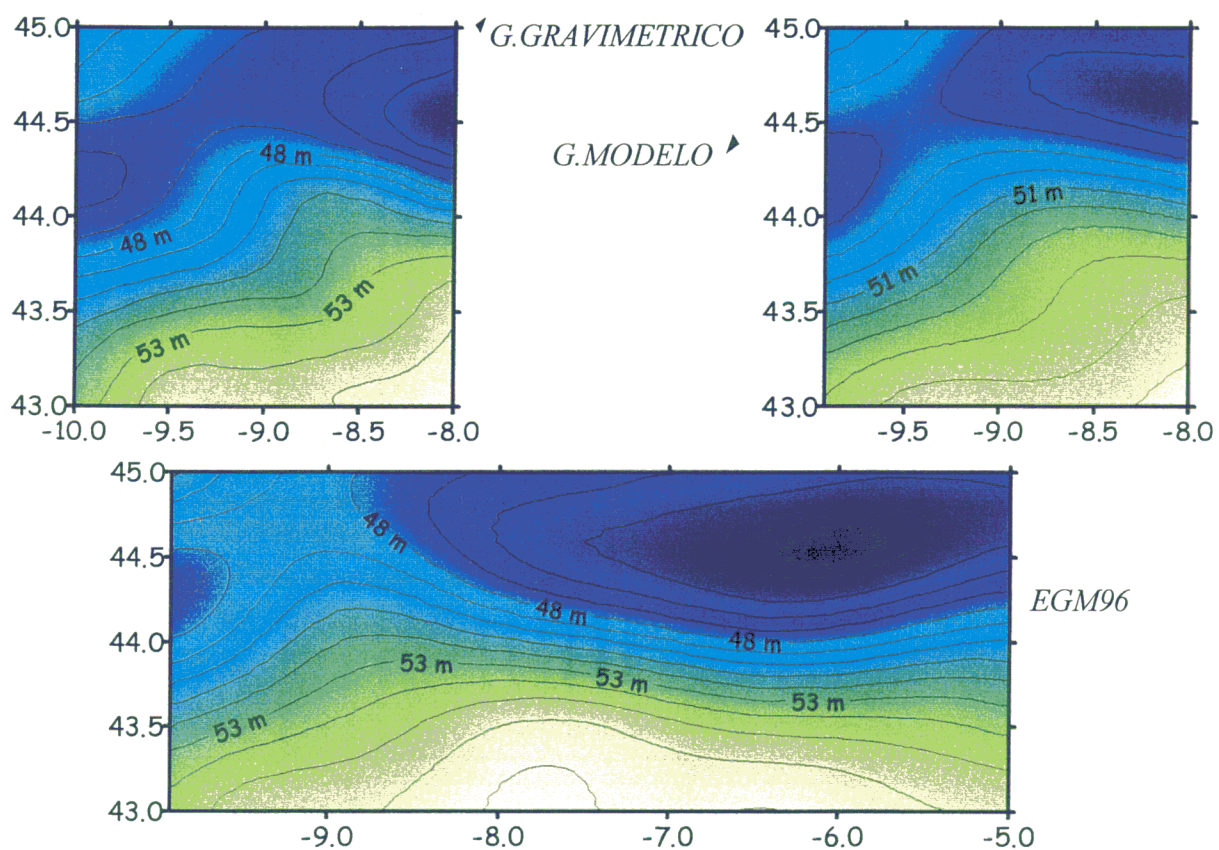


FIGURA 7.5: Geoides comparados en la zona del Cantábrico.

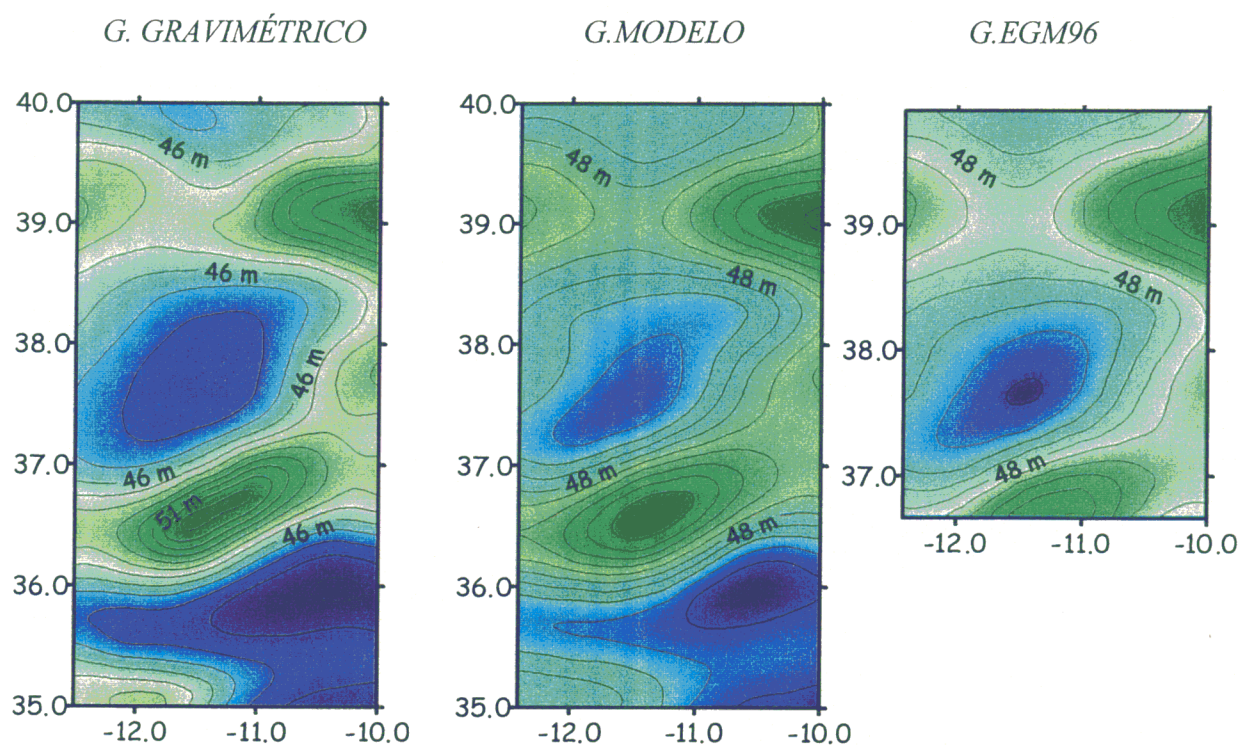


FIGURA 7.6: Geoides comparados en una zona de bancos.

|                     | MEDIA | D.T        | MINIMO     | MAXIMO    | RANGO    |
|---------------------|-------|------------|------------|-----------|----------|
| SIN CORREGIR E.B.I. | 0 m/s | 0,039 cm/s | -56.5 cm/s | 52.3 cm/s | 1.15 m/s |
| CORREGIDO E.B.I.    | 0 m/s | 0,054 cm/s | -1.12 m/s  | 1.25 m/s  | 2.37 m/s |

TABLA 7.3: Estadística de las  $\Delta h_{RES}/\Delta t$  de los datos.

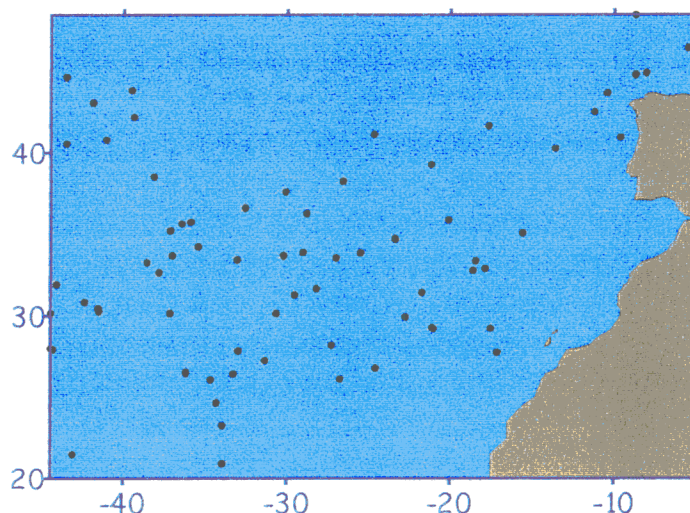


FIGURA 7.7: Puntos rechazados con  $\Delta h_{res}/\Delta t > 45$  cm/s.

La parte más al oeste corresponde con parte de la zona de propagación de la Corriente del Golfo, mientras que la más amplia se asocia a la Corriente de Azores. También incluye el giro anticiclónico de la Corriente de Canarias. Algunos autores (Cipollini et al, 1997) han detectado con diversos medios la presencia en la zona de ondas *Rossby* amplificadas por la interacción con la Corriente de Azores. Son las responsables de la intensificación hacia el oeste de la circulación oceánica. Al propagarse perturban las densidades, lo que provoca cambios en la altura de la superficie del mar, que son los que se podrían haber detectado con el criterio.

### 7.3.3. Adaptabilidad a la superficie media modelo

Como último criterio de validación, localizamos los puntos en los que la medida deducida del altímetro difiere del valor de superficie media asignada por el modelo en más de 70 centímetros (más del doble del valor medio de los residuales, ver tabla 7.4). De nuevo se repiten los puntos de uno a otro ciclo del satélite. El total de puntos detectados con este criterio es de 418 (0,08% del total). La amplia mayoría de ellos se encuentra (figura 7.8.) en una zona singular respecto de varios factores: velocidades de vientos, alturas de las olas y modelos de marea, como veremos.

|                         | MEDIA    | D.T    | MINIMO  | MAXIMO |
|-------------------------|----------|--------|---------|--------|
| RESIDUALES SIN CORREGIR | -31,2 cm | 0,10 m | -1.02 m | 0.95 m |
| RESIDUALES CORREGIDOS   | -31,2 cm | 0,10 m | -2.02 m | 0.95 m |

TABLA 7.4: Estadística de las  $h_{RES}$  de los datos.



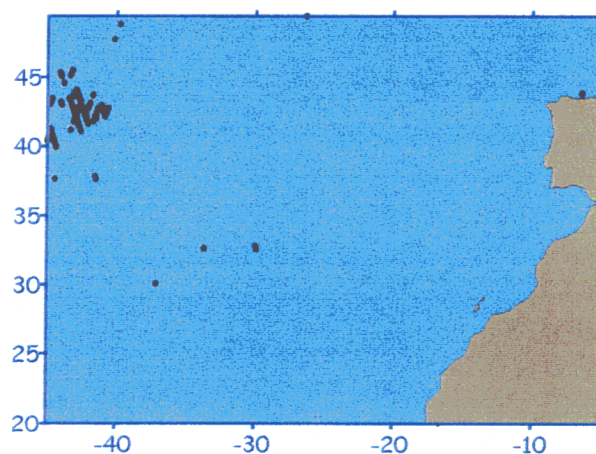


FIGURA 7.8: Puntos rechazados con  $h_{res} > 70$  cm.

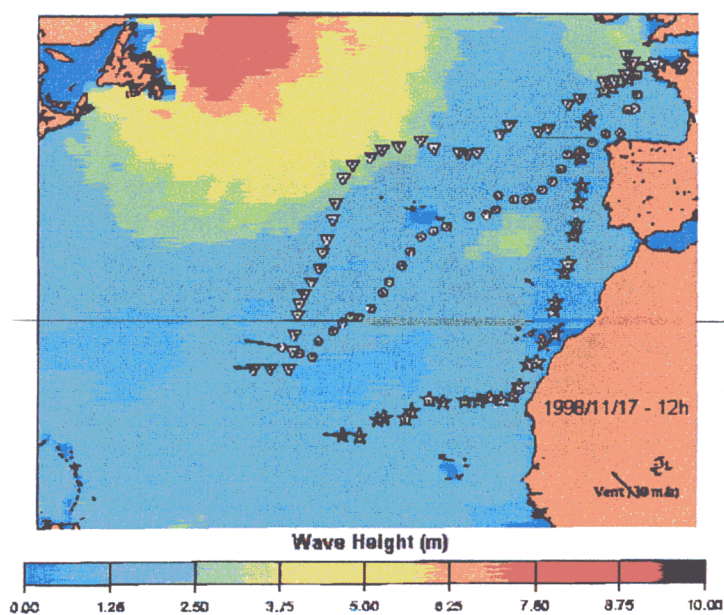


FIGURA 7.9: Alturas de ola (CNES).

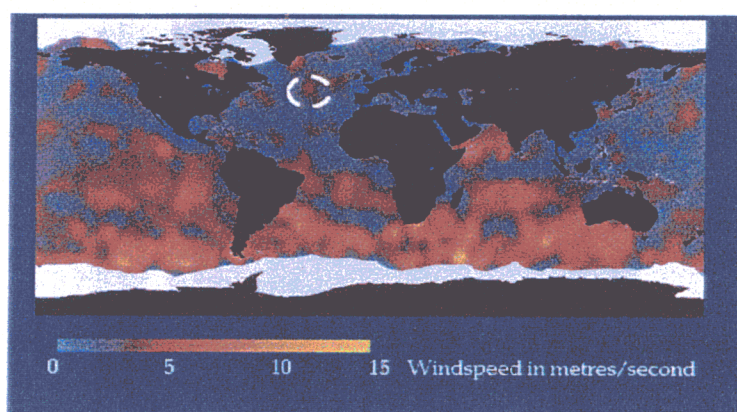


FIGURA 7.10: Velocidades de viento suavizadas determinadas a partir de datos del radiómetro en varios ciclos del ERS-1 (CNES).



### 7.3.3.1. Modelos de marea

Los modelos globales de los principales constituyentes en la parte norte del Océano Atlántico muestran un área bien definida de puntos anfídomos en las proximidades de la zona en la que aparecen los puntos detectados por este criterio. Este sistema ha sido detectado por distintos autores en la misma posición geográfica (Schwiderski, 1980).

Para cada componente, la posición del correspondiente anfídromo cambia ligeramente, pero siempre en la misma zona, como se puede ver en las figuras 7.11 y 7.12. Alrededor de ellos las mareas giran en sentido antihorario. En los puntos de estas características la amplitud es cero ya que las ondas de marea se cancelan, y a partir de él, aumenta de forma bastante rápida de modo que las isolíneas de amplitud lo encuadran.

En consecuencia, la evaluación precisa del desplazamiento vertical alrededor de este tipo de puntos debido a la marea oceánica es bastante difícil.

En la figura 7.12. se tiene la distribución espacial de la corrección por marea en un instante sobre la zona en donde se encuentran los puntos rechazados. También aparece en ella la posición de los puntos anfídomos de las principales ondas.

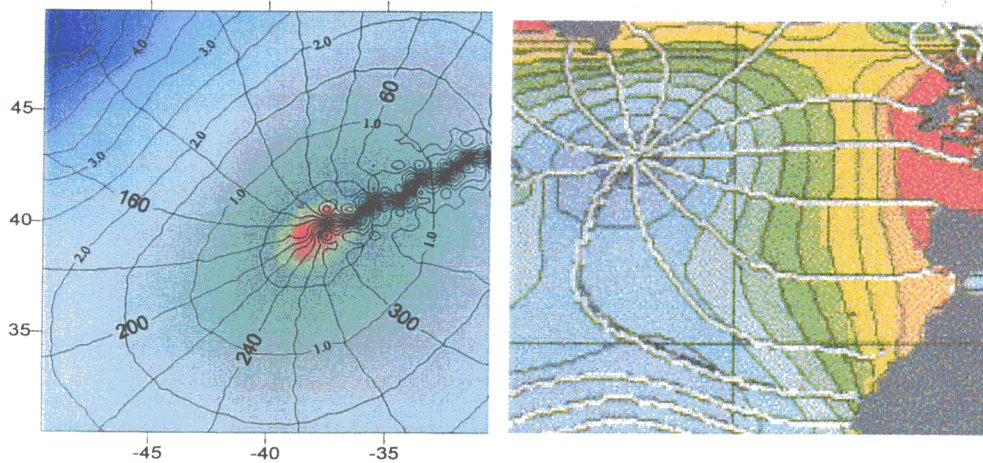


FIGURA 7.11: Posición de los anfídomos de los constituyentes O1 y M2 respectivamente.

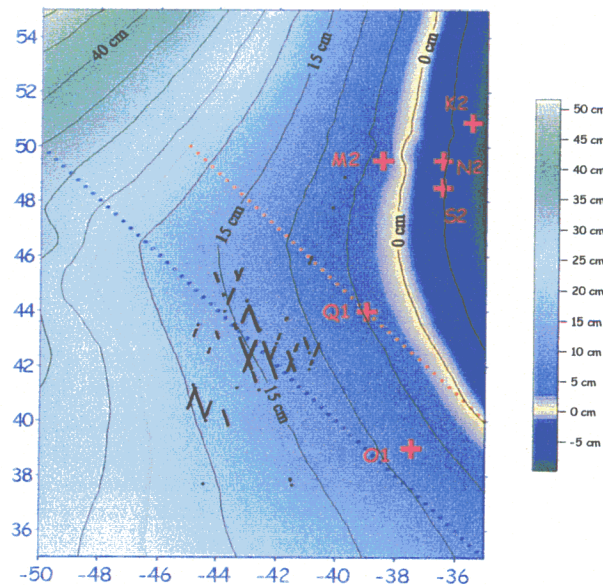


FIGURA 7.12: Predicción de corrección de marea y posición de los anfídomos de los armónicos más importantes. Los puntos negros representan a los datos rechazados.

Para ver los efectos de la corrección de marea sobre una zona de estas condiciones, se calcularon los desplazamientos verticales producidos por marea oceánica en una región que incluye a la tratada con los puntos rechazados. Se han evaluado estos desplazamientos a intervalos de diez horas usando para ello una combinación de nueve armónicos: Q1, O1, P1, K1, N2, M2, S2 y MF. Los resultados se muestran en la figura 7.13 donde se ve claramente la variación de las fases y cómo las mareas giran en sentido antihorario como ya se especificó.

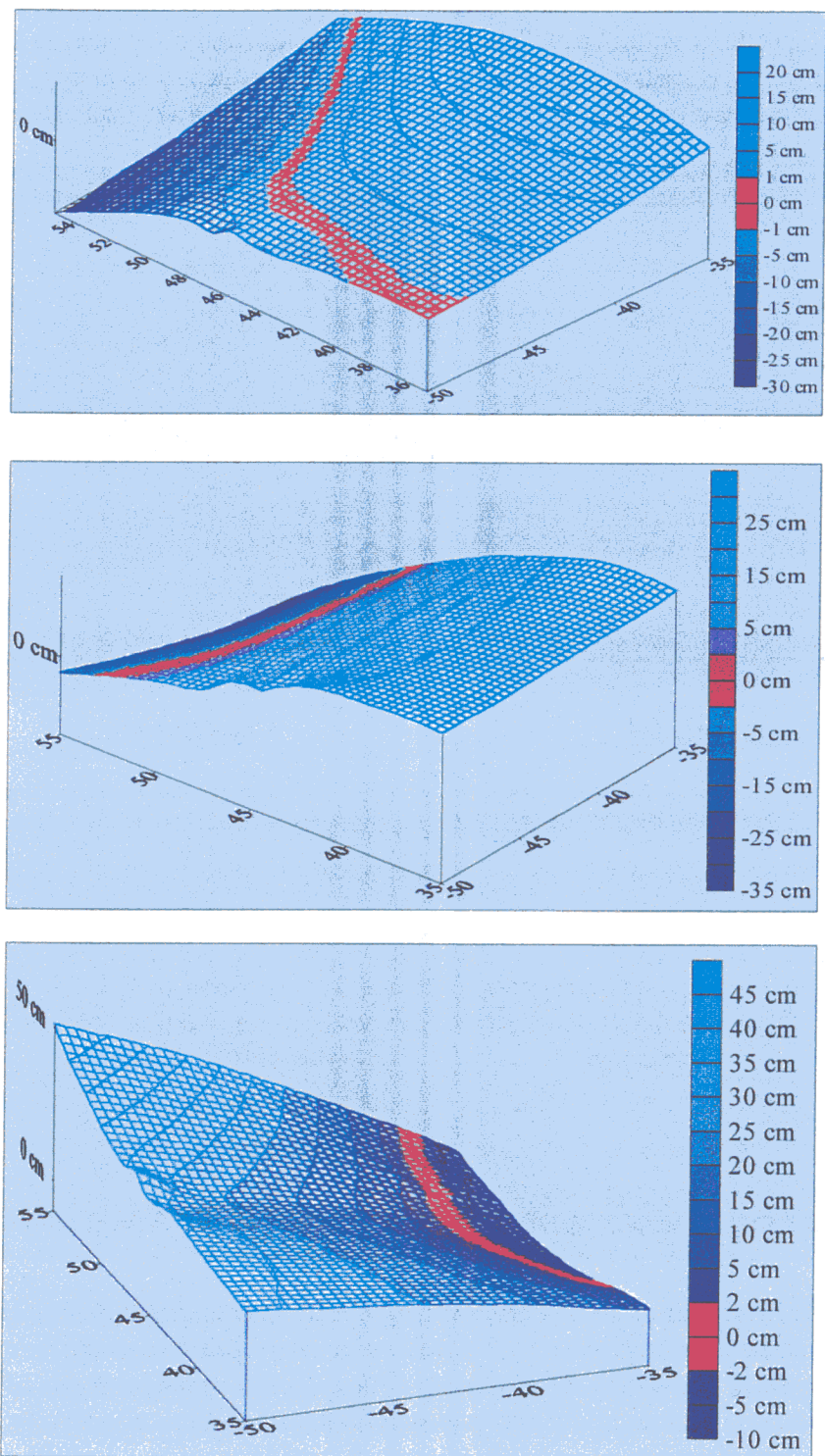
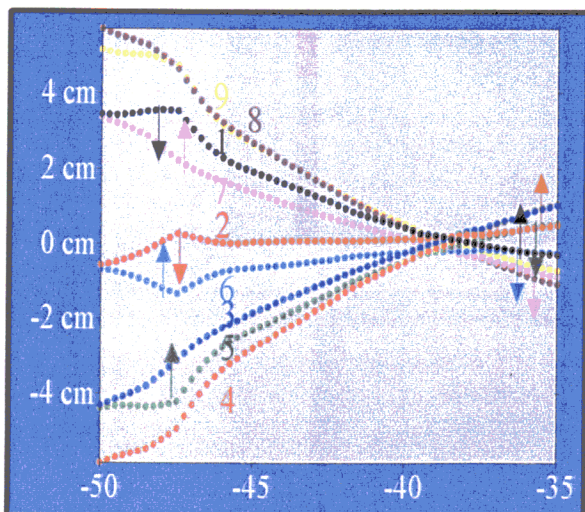


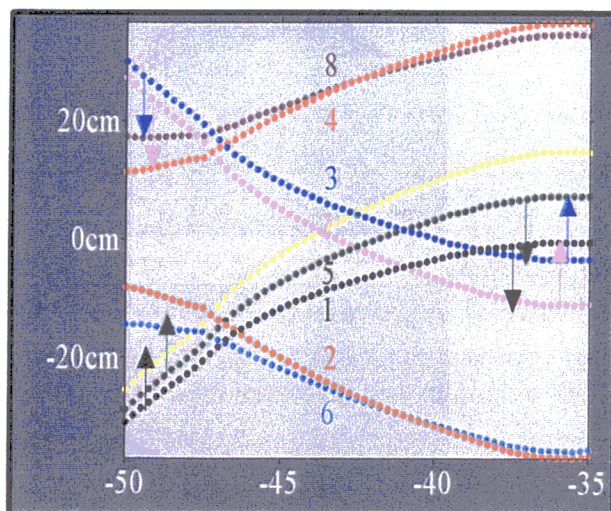
FIGURA 7.13: Predicción de corrección de marea a cada diez horas.



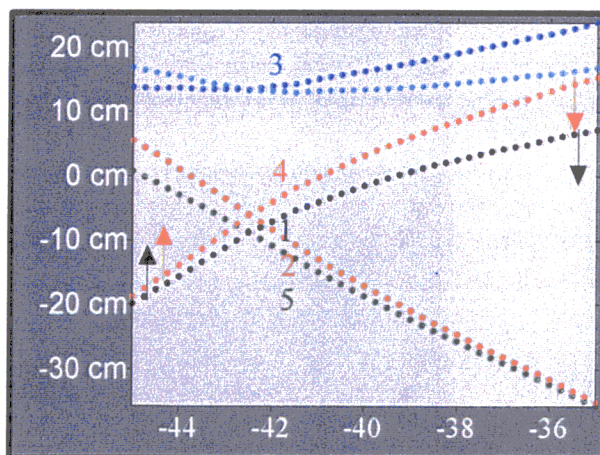
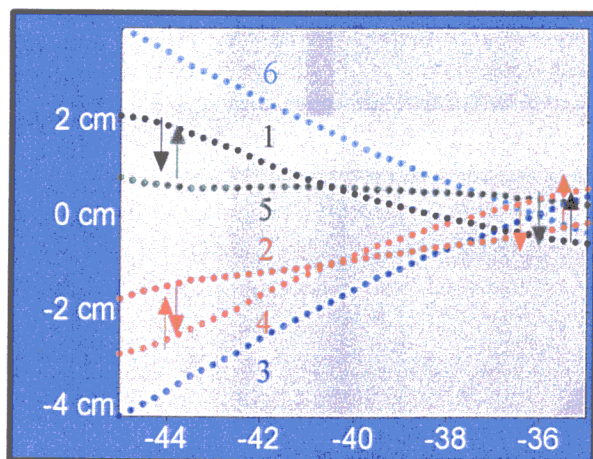
Si en lugar de calcular todas las amplitudes mencionadas juntas, se procede a la predicción del desplazamiento vertical debido a cada uno de los principales constituyentes de forma independiente, se aprecia el efecto del punto anfídromo. En particular resulta destacable la constatación del cambio de fase en  $180^\circ$  alrededor del punto. En la figura 7.12 teníamos dos perfiles cruzando la zona de puntos rechazados. Sobre ellos se calculó el efecto de la marea por componentes a intervalos de tres y cuatro horas. Por la presencia del anfídromo y el efecto de cambio de fase que produce, en la figura 7.14 vemos que en un mismo instante, la tendencia a un lado del punto es producir elevación mientras que al otro lado la tendencia se invierte. En esta figura está representado este efecto para la onda M2 (mayor amplitud) y para O1 dado que la posición de su anfídromo es muy cercana a la zona donde se han rechazado puntos.



Constituyente O1



Constituyente M2



*FIGURA 7.14: Las gráficas de arriba corresponden a las predicciones de marea sobre el perfil coloreado en azul en la Figura 7.12. Cada color corresponde a una predicción y se diferencian entre ellas tres horas. En el sentido de las flechas se advierte que al seguir el mismo orden de colores, en un lado del punto el sentido es ascendente mientras que en el otro es descendente. Lo mismo tenemos en las gráficas inferiores pero para el perfil de la figura 7.12 que aparece en color naranja. En este caso las predicciones se han repetido a intervalos de cuatro horas.*



### 7.3.4. Estudio de los trazos que atraviesan islas

Al igual que en el capítulo anterior, en el marco del proceso de validación, se quiso prestar un interés especial a los trazos que atraviesan islas. En este caso, como se conocían los resultados en el Mediterráneo, probamos sólo con los trazos que atraviesan el archipiélago Canario. Al representar para ellos la relación entre latitud del punto subsatélite y la altitud deducida de la medida, vemos que al igual que en el Apéndice II del capítulo anterior, las medidas a lo largo de los trazos se repiten con bastante exactitud de uno a otro ciclo (recuérdese que la precisión al haber ajustado los datos a los del satélite TOPEX se sitúa al nivel del centímetro, luego no pueden o deben aparecer diferencias tan grande como en los primeros datos analizados). Los gráficos de tales relaciones se muestran en el Apéndice I de este capítulo.

También repetimos para ellos la comparación entre esta relación y la que existiría en el caso de un geoide gravimétrico (Sevilla et al, 1997) y el geoide modelo EGM96 en los mismos puntos. Los resultados se muestran en el Apéndice II. Vemos que alrededor de los huecos que corresponden al paso del satélite por la isla, la desviación de las medidas no es mayor. Esta será la razón por la que no eliminamos los puntos más cercanos a costa. A la vista de los gráficos se aprecia que en la validación hecha antes de distribuir los datos, ya se han rechazado las medidas de poca calidad efectuadas en las proximidades de la costa. Además existe más concordancia con el geoide gravimétrico que con el modelo.

### 7.3.5. Resultados de la validación

Con los criterios descritos en 7.3.2 y 7.3.3. eliminamos 526 puntos. 108 de ellos (20,53%) corresponden al criterio enunciado en este trabajo, relacionados con la dinámica de la superficie del mar. El resto, 418 (79,47%), corresponden a puntos que no se adecuan a la superficie media modelo. Los puntos que consideramos no afectados de errores son 591557, cuya estadística aparece en la tabla 7.5.

|            | MEDIA   | D.T.    | MINIMO   | MAXIMO  |
|------------|---------|---------|----------|---------|
| SUPERFICIE | 25,83 m | 23,36 m | -17,18 m | 66,84 m |
| SUP.MEDIA  | 38,19 m | 18,26 m | -17,08 m | 66,75 m |

TABLA 7.5: Estadística de los datos validados.

## 7.4. AJUSTE COLINEAL

Aunque en océano abierto los efectos estacionales están algo más atenuados, de nuevo vuelve a ser conveniente seleccionar datos que correspondan, en lugar de a los quince meses originales de misión, a un año, a fin de promediar las variaciones de periodo menor descritas en la sección 7.2. Al hacerlo el total de datos es 496159. La estadística de los mismos aparece en la tabla 7.6. Al compararla con la tabla 7.1. es fácil apreciar que los residuales medios son significativamente menores tal y como esperábamos, aunque los valores extremos en todos los casos son similares.

Promediamos los datos correspondientes a los distintos pasos de satélite por el mismo trazo a lo largo de un año. Con este procedimiento, también se consigue una significativa reducción de los datos (49369). La estadística de los residuales sin y con la corrección de efecto barométrico

|                   | <b>MEDIA</b> | <b>D.T.</b> | <b>MINIMO</b> | <b>MAXIMO</b> |
|-------------------|--------------|-------------|---------------|---------------|
| <b>SUPERFICIE</b> | 38,132 m     | 18,26 m     | -17,177 m     | 66,835 m      |
| <b>SUP.MEDIA</b>  | 38,147 m     | 18,26 m     | -17,076 m     | 66,747 m      |
| <b>RESIDUALES</b> | -1,49 cm     | 10 cm       | -69,9 cm      | 69,9 cm       |

*TABLA 7.6: Estadística de los datos seleccionados correspondientes a un año de misión.*

|                           | <b>MEDIA</b> | <b>D.T.</b> | <b>MINIMO</b> | <b>MAXIMO</b> |
|---------------------------|--------------|-------------|---------------|---------------|
| <b>RES.SIN CORRECCION</b> | 0,9 cm       | 5,7 cm      | -49 cm        | 65,5 cm       |
| <b>RES. CORREGIDOS</b>    | -2 cm        | 6,2 cm      | -58,4 cm      | 62,9 cm       |

*TABLA 7.7: Estadística de los residuales promediados.*

inverso se muestra en la tabla 7.7. En la misma se aprecia el efecto de suavizado que el promedio hace sobre los datos. La media de las diferencias con valores corregidos es mayor, lo que indica que la superficie media está sin corregir.

Con este proceso se ha eliminado gran parte del error orbital no corregido de los datos. De este modo, restituyendo a las cantidades obtenidas la contribución del modelo de superficie media OSU95, se determina una superficie media en la zona para el tiempo de las observaciones, en la medida de lo posible libre de error orbital. La estadística de tal superficie aparece en la tabla 7.8 y en la figura 7.15, se muestra con líneas de nivel a cada 5 metros. Las diferencias al considerar o no efecto barométrico inverso son pequeñas puesto que el valor de tal corrección al promediarse es poco significativo (tabla 7.9).

| <b>MEDIA</b> | <b>D.T.</b> | <b>MINIMO</b> | <b>MAXIMO</b> |
|--------------|-------------|---------------|---------------|
| 38,01 m      | 18,29 m     | -17,03 m      | 66,73 m       |

*TABLA 7.8: Estadística de la superficie media.*

| <b>MEDIA</b> | <b>D.T.</b> | <b>VARIANZA</b> | <b>MINIMO</b> | <b>MAXIMO</b> |
|--------------|-------------|-----------------|---------------|---------------|
| -2,86 cm     | 2,95 cm     | 0,087           | -11,9 cm      | 15,2 cm       |

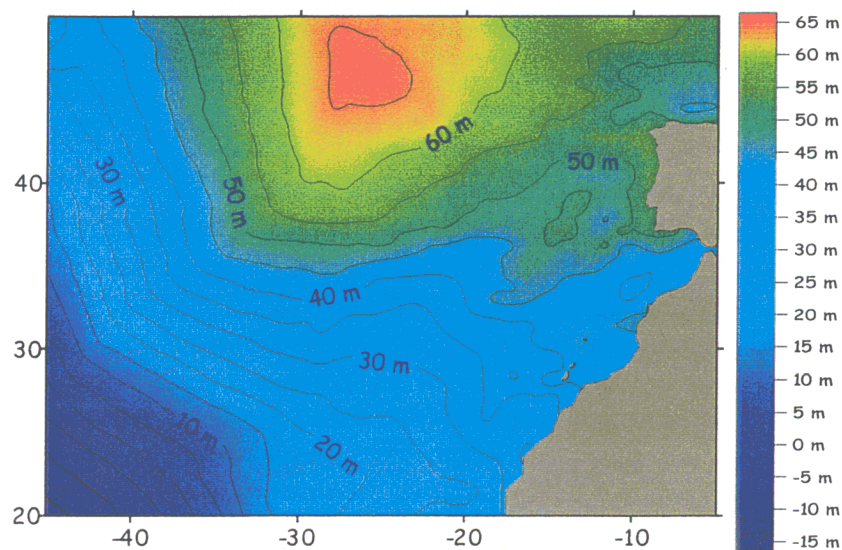
*TABLA 7.9: Diferencias entre tomar o no efecto barométrico inverso.*

## 7.5. AJUSTE CROSSOVER

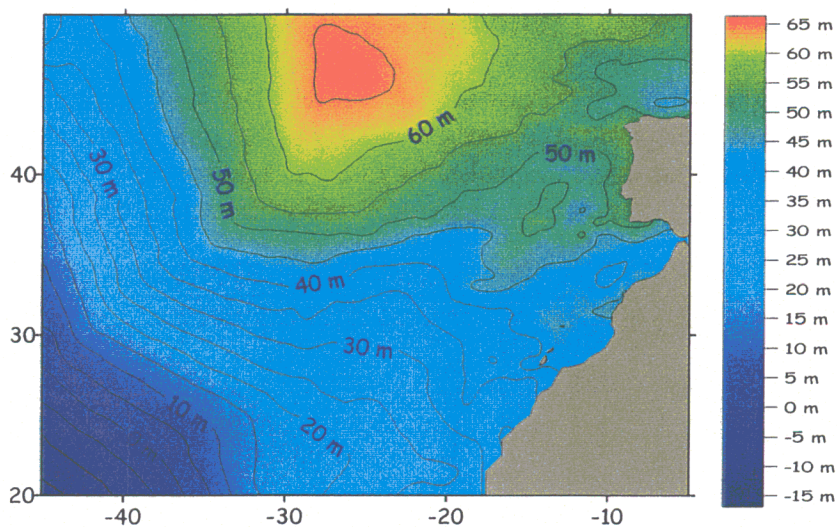
Con los 49269 datos resultantes, se aplica un ajuste *crossover* con dos parámetros por arco, como parece ser lo más adecuado dada la extensión de la zona. Los puntos están distribuidos en 128 trazos subsatélites, 68 ascendentes y los otros 60 descendentes. Así, el número total de parámetros del ajuste es 256.

Hay un total de 1230 puntos de cruce, con lo que sí se verifican las condiciones de redundancia. Pero en algunos trazos hay pocos puntos de cruce por lo que la determinación de los parámetros será menos precisa.





A) SIN CORREGIR EFECTO BAROMÉTRICO INVERSO



B) CORREGIDO EL EFECTO BAROMÉTRICO INVERSO

FIGURA 7.15: Superficies medias contorneadas a intervalos de 5 metros.

|                                         | MEDIA   | D.T.   | MINIMO   | MAXIMO |
|-----------------------------------------|---------|--------|----------|--------|
| SIN CORREGIR EFECTO BAROMETRICO INVERSO |         |        |          |        |
| <b>SESGO</b>                            | 0,2 cm  | 4 cm   | -15,3 cm | 6,6 cm |
| <b>INCLINACIÓN</b>                      | -0,016  | 0,067  | -0,662   | 0,094  |
| CORREGIDO EFECTO BAROMÉTRICO INVERSO    |         |        |          |        |
| <b>SESGO</b>                            | -0,2 cm | 3,8 cm | -13,3 cm | 8 cm   |
| <b>INCLINACIÓN</b>                      | -0,013  | 0,054  | -0,464   | 0,186  |

TABLA 7.10: Estadística de los parámetros obtenidos en el ajuste.

|                    | MEDIA | D.T.   | MINIMO   | MAXIMO  |
|--------------------|-------|--------|----------|---------|
| RES.SIN CORRECCION | 0 cm  | 3,5 cm | -28,5 cm | 43,3 cm |
| RES. CORREGIDOS    | 0 cm  | 3,9 cm | -23,6 cm | 41,1 cm |

TABLA 7.11: Estadística de los residuales ajustados.

Las diferencias obtenidas varían una vez aplicado el ajuste, pasando de un valor medio de casi un centímetro y valores extremos de 20 centímetros, a tener media cero. La estadística de los parámetros obtenidos aparece en la tabla 7.10. En los dos ajustes llevados a cabo, los valores no son muy grandes, aunque un poco más al emplear corrección por efecto barométrico inverso. Aún así, las diferencias entre los dos resultados son menores que las obtenidas en el capítulo anterior. Los residuales tras el ajuste quedan significativamente menores y más centrados como se aprecia al comparar las tablas 7.11 y 7.7.

### 7.6. SUPERFICIE MEDIA LIBRE DE ERRORES

Se obtiene la superficie media del mar libre de errores orbitales al restituir la parte estática que proporciona el OSU95MSS a los residuales ajustados y por lo tanto corregidos de los efectos orbitales que aún afectaban a los datos originales. La estadística de las superficies así obtenidas se muestra en la tabla 7.12 y sus curvas de nivel a intervalos de 5 metros en la figura 7.16.

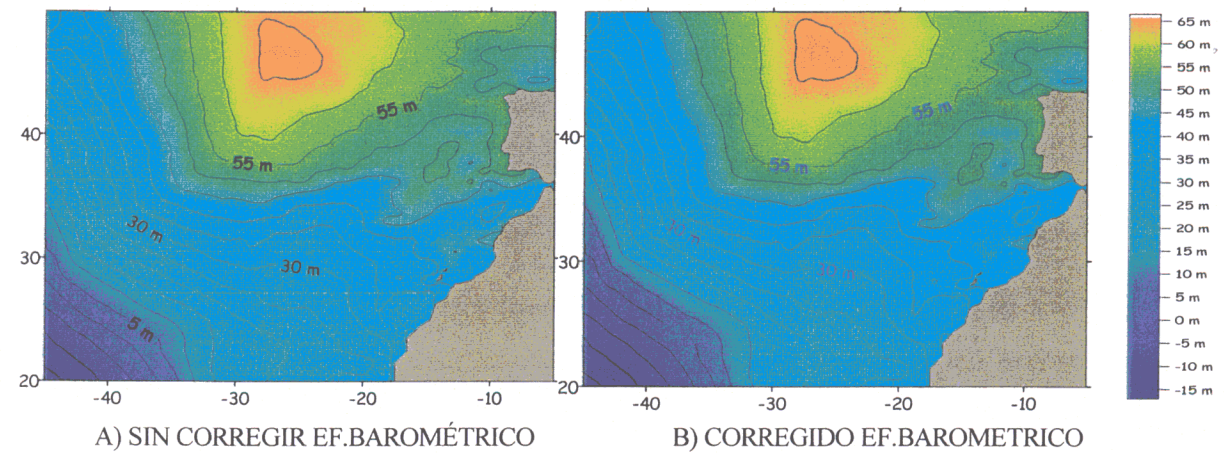


FIGURA 7.16: Curvas de nivel de las superficies medias.

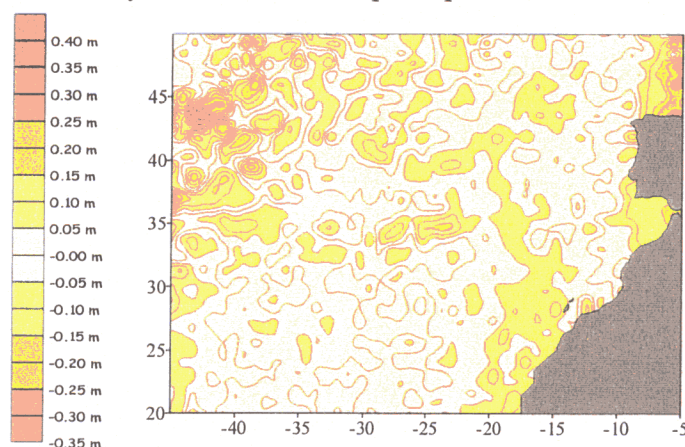
|                                                 | MEDIA    | D.T.     | MINIMO   | MAXIMO   |
|-------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| <i>Sup. Media sin corregir ef. barométrico</i>  | 37,999 m | 18,285 m | -17,09 m | 66,755 m |
| <i>Sup. Media con ef. barométrico corregido</i> | 37,999 m | 18,29 m  | -17,10 m | 66,71 m  |
| <i>Diferencia entre sups. Medias</i>            | 0 cm     | 0,13 m   | -15 cm   | 11,1 cm  |

TABLA 7.12: Estadística de las superficies obtenidas y de la diferencia entre ambas.

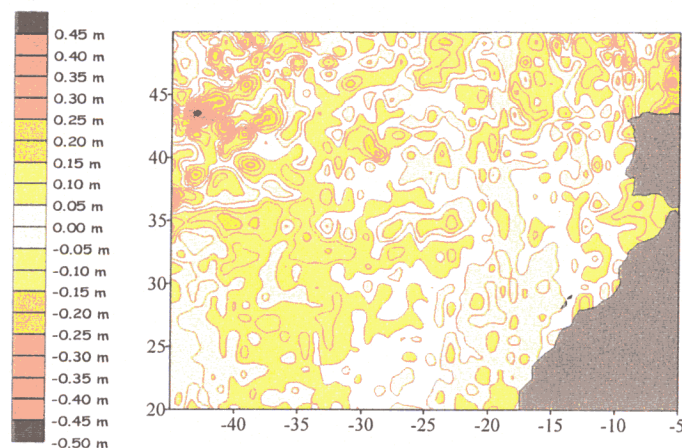
Ambas son prácticamente iguales como también se ve en la tabla. Apreciamos que al contrario que en el capítulo anterior, los valores corregidos de efecto barométrico inverso, tienen un buen comportamiento en el ajuste y no dan lugar a rugosidades en la predicción final.



Las diferencias entre las superficies medias presentadas son las existentes entre los residuales ajustados (tabla 7.11) y los promediados (tabla 7.7). Los valores de estas diferencias, pese a que la zona es mucho mayor que la del capítulo anterior, son menores (tabla 7.13). El ajuste funciona de forma más adecuada y los parámetros minimizan en general las diferencias *crossover*. En cualquier caso, se siguen alcanzando valores mayores al usar datos corregidos de efecto barométrico inverso. En la figura 7.17. se muestran las diferencias a intervalos de 5 centímetros. Las mayores están en los bordes y zonas conflictivas para aplicación del modelo de ajuste.



A) SIN CORREGIR EFECTO BAROMÉTRICO INVERSO



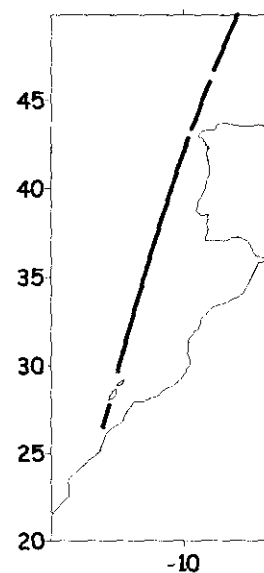
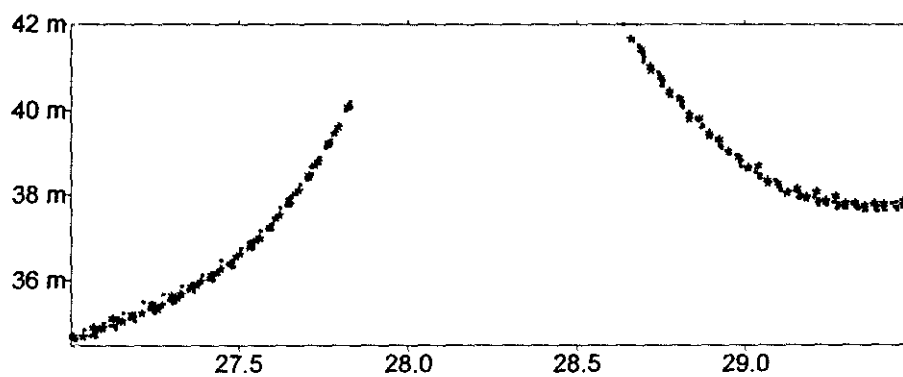
B) CORREGIDO EL EFECTO BAROMÉTRICO INVERSO

FIGURA 7.17: Diferencias entre los dos tipos de ajustes.

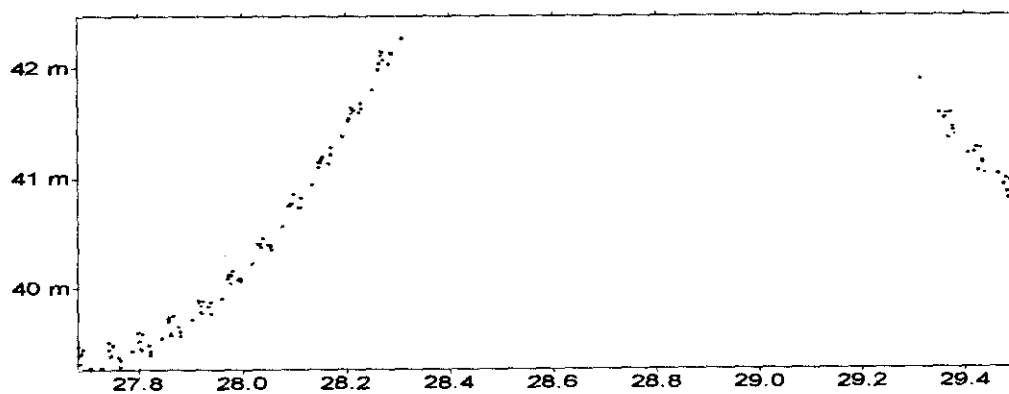
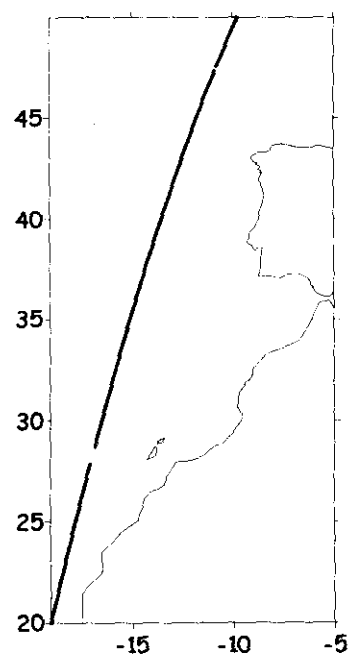


**7.7. APENDICE I: REPETITIVIDAD DE TRAZOS  
SUBSATELITES QUE ATRAVIESEN CANARIAS**

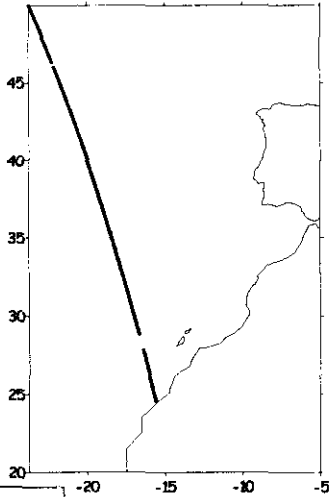
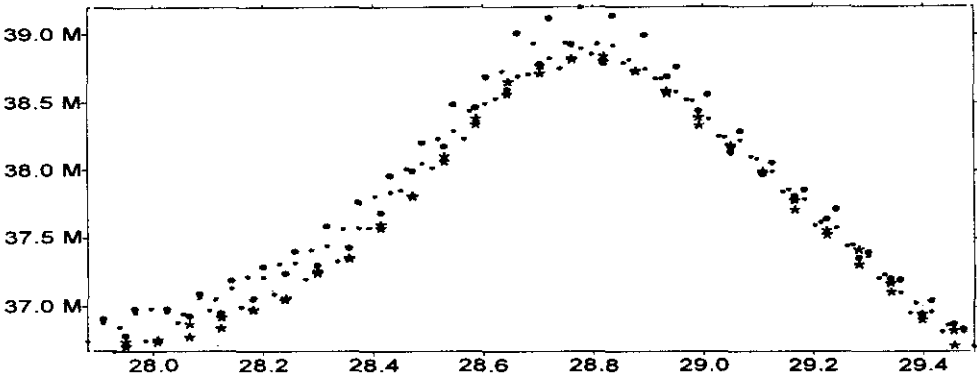
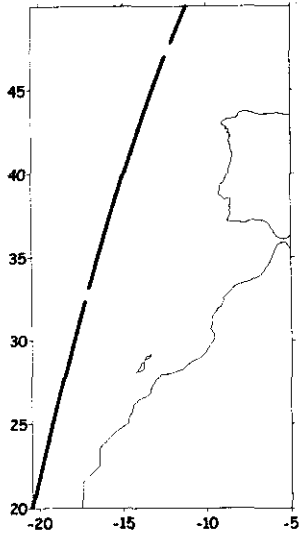
**TRAZO 209**



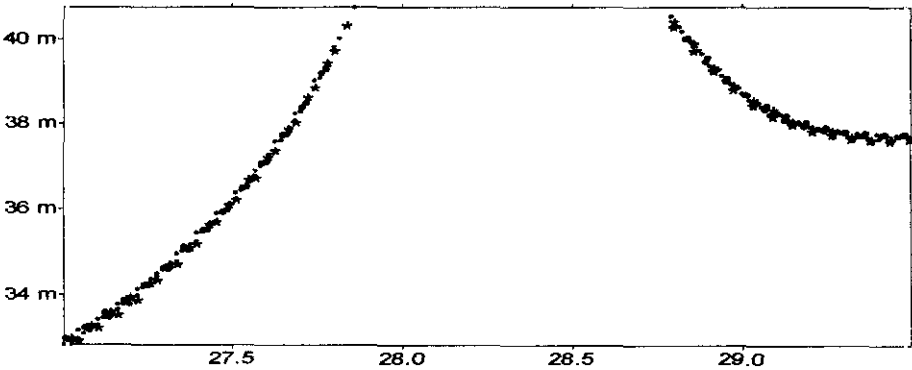
**TRAZO 216**



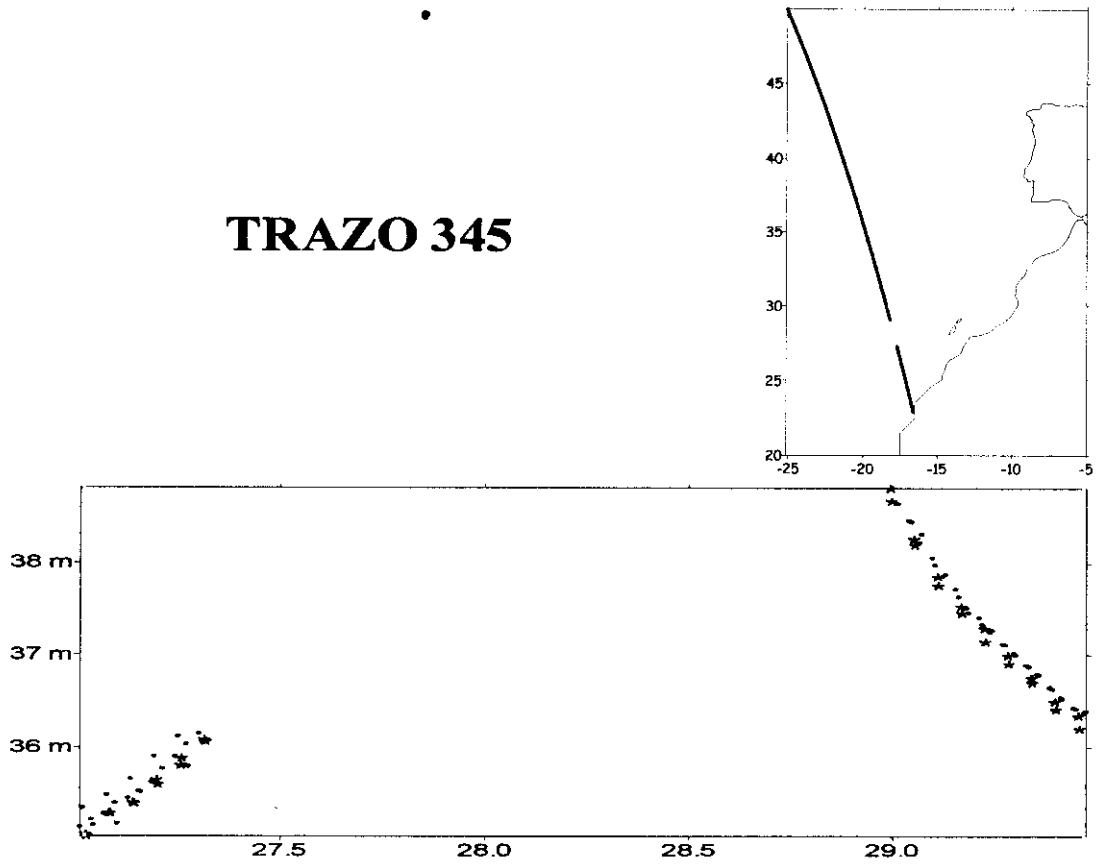
**TRAZO 252**



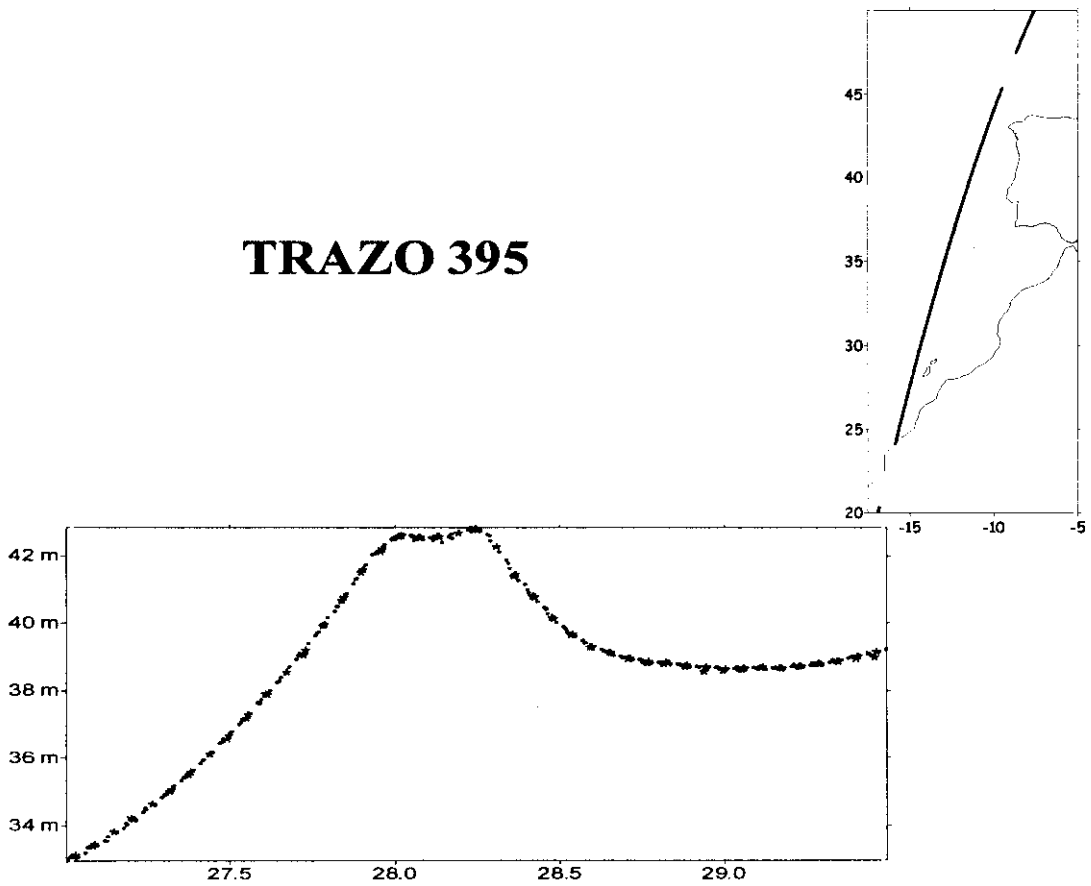
**TRAZO 302**



## TRAZO 345

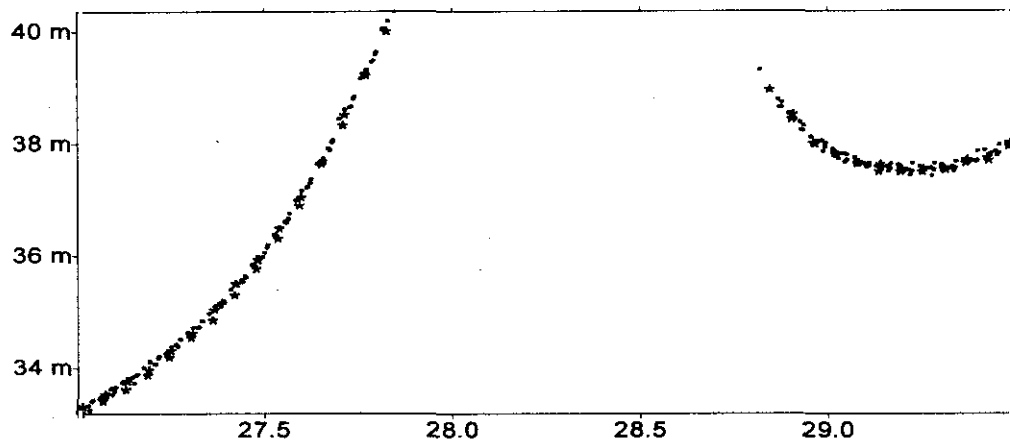
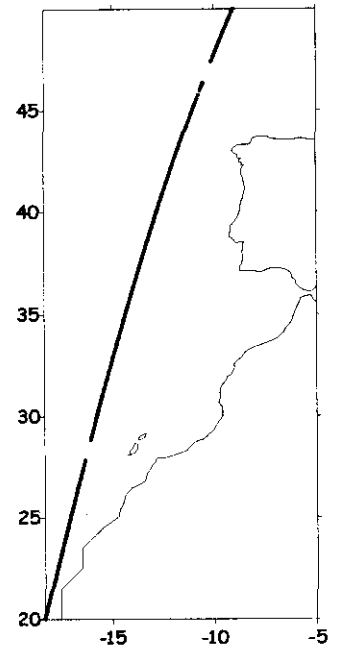


## TRAZO 395

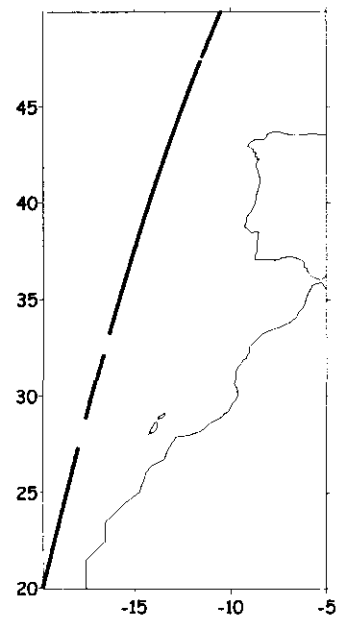
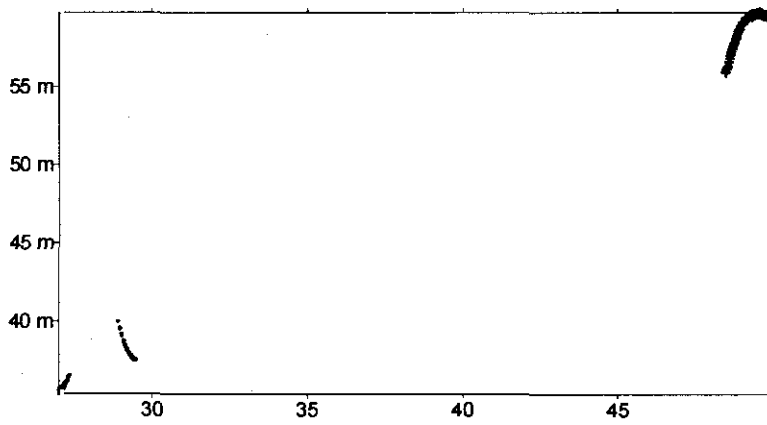




## TRAZO 438

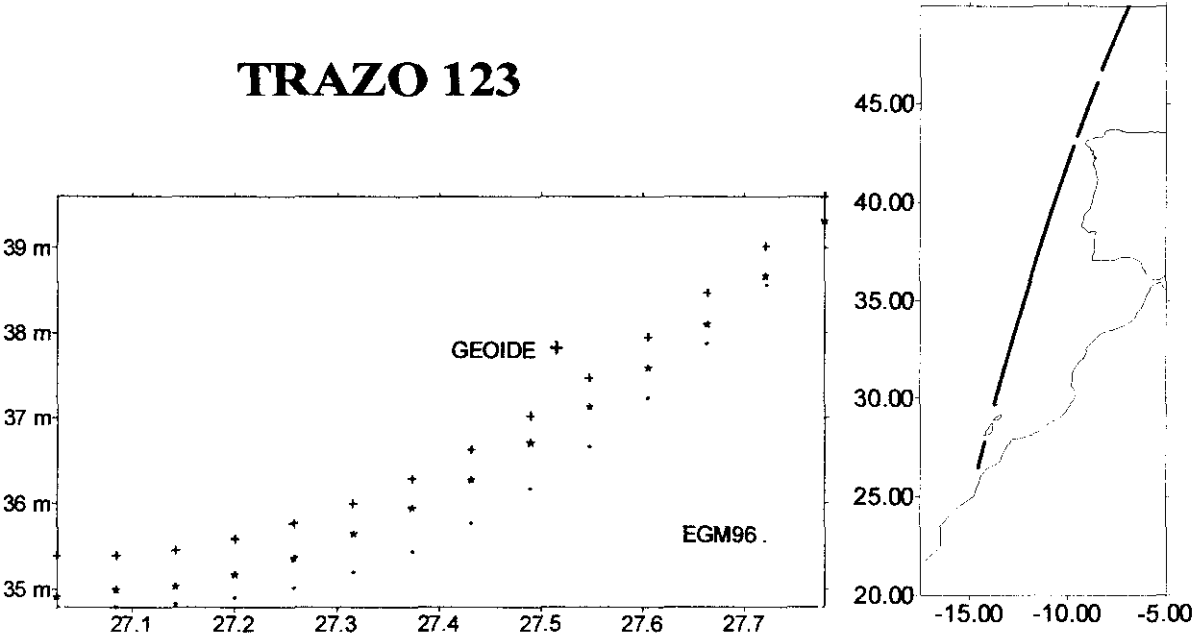


## TRAZO 481

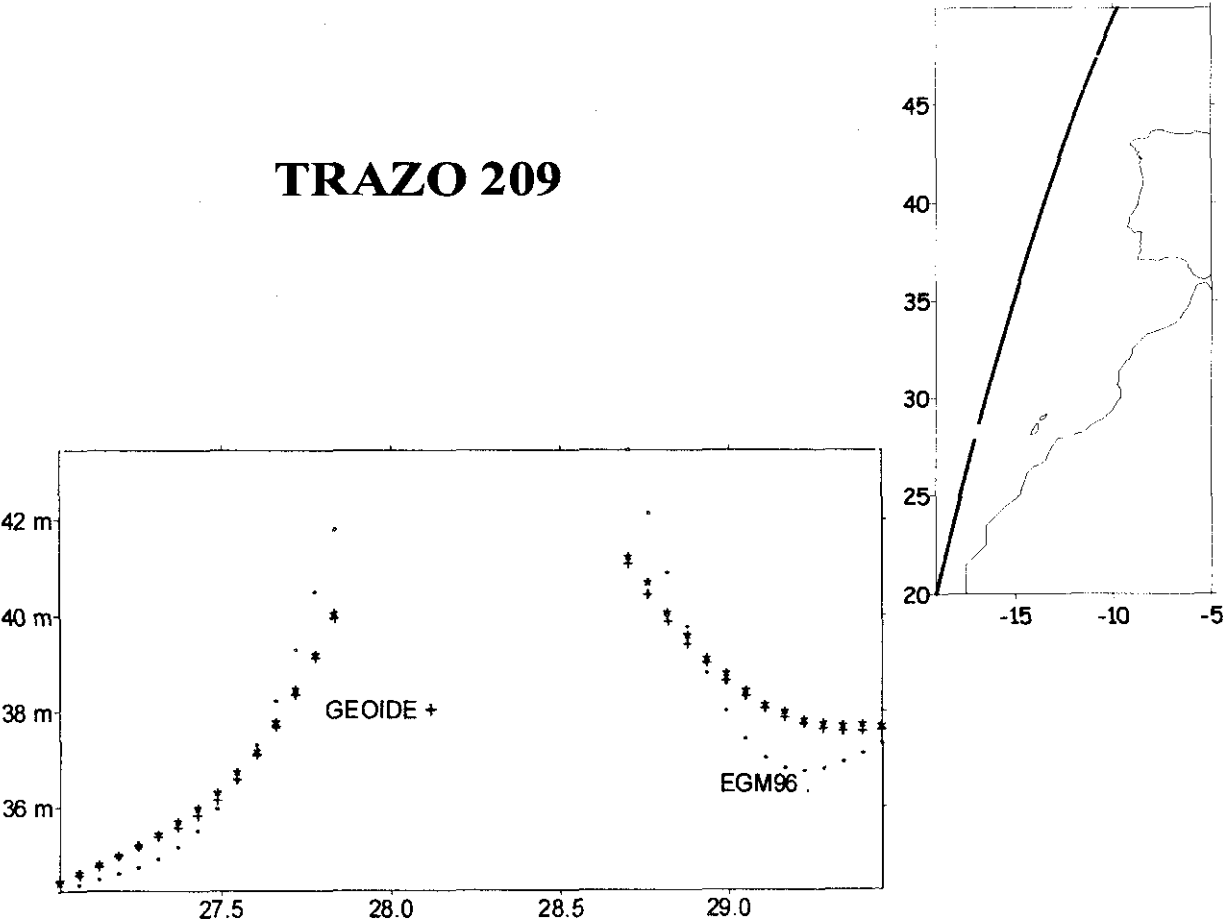


**7.8. APENDICE II: CONTRASTACION CON GEOIDE GRAVIMÉTRICO Y MODELO EGM96**

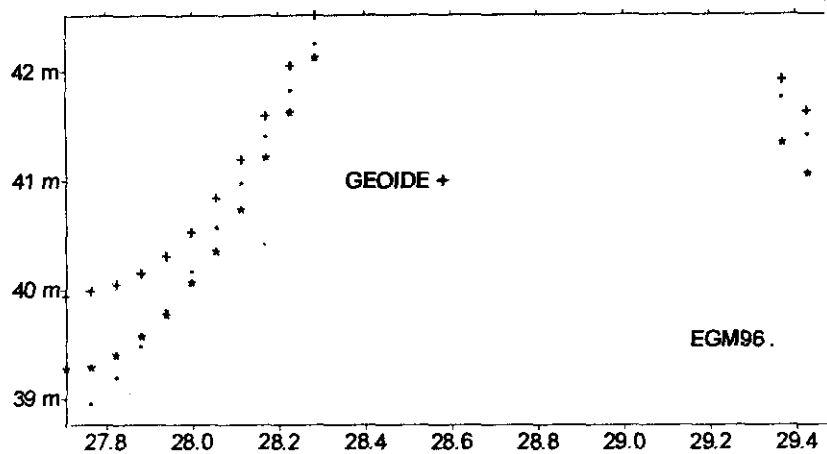
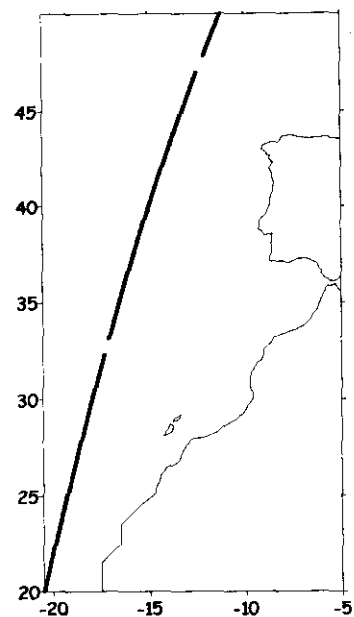
**TRAZO 123**



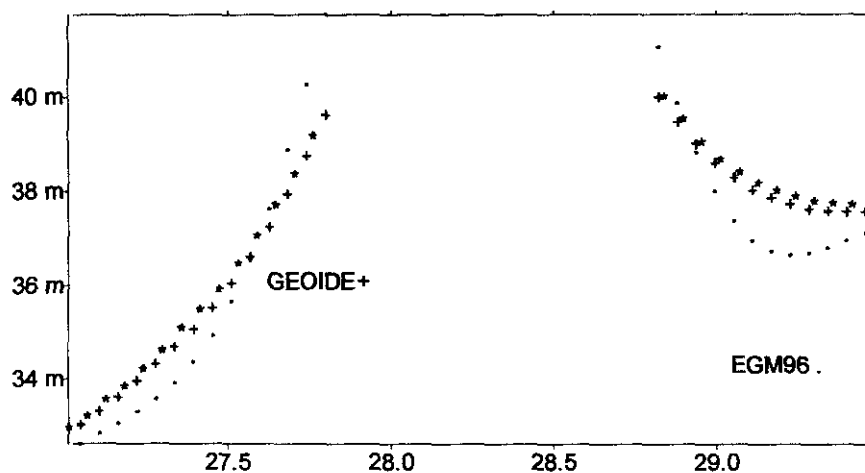
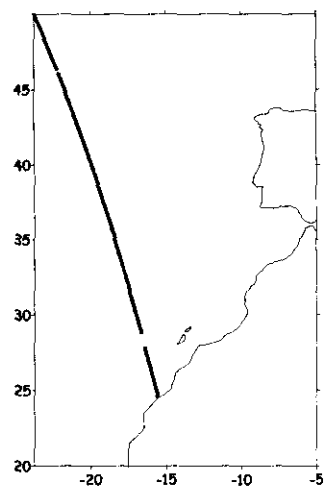
**TRAZO 209**



## TRAZO 252

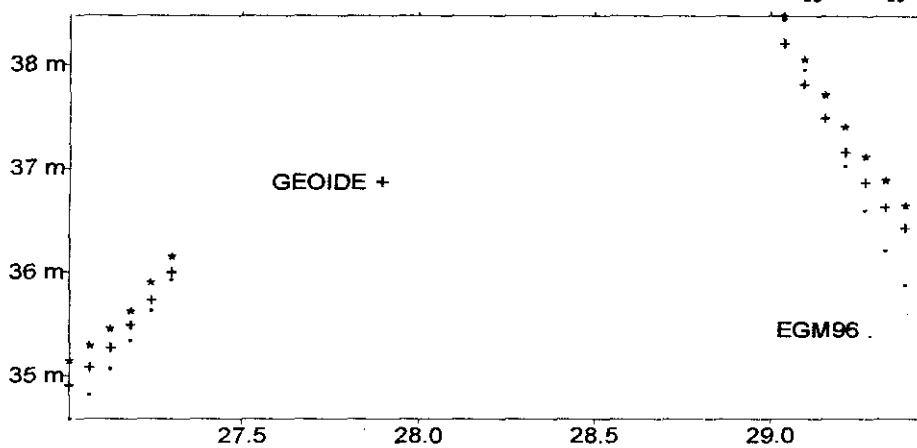
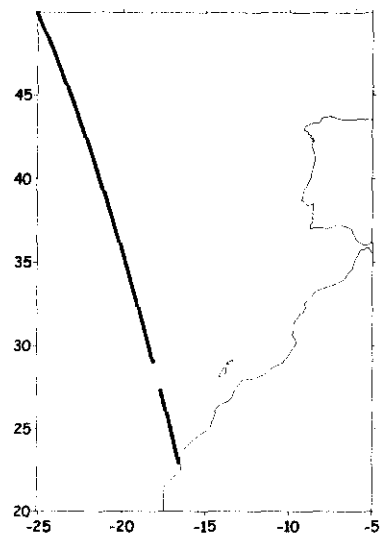


## TRAZO 302

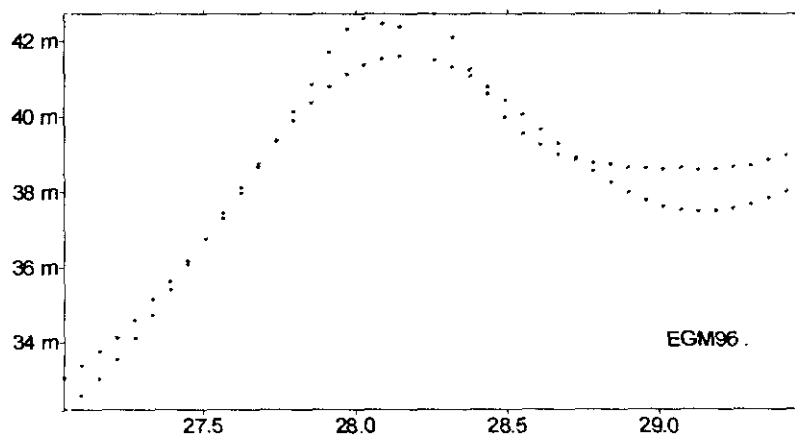
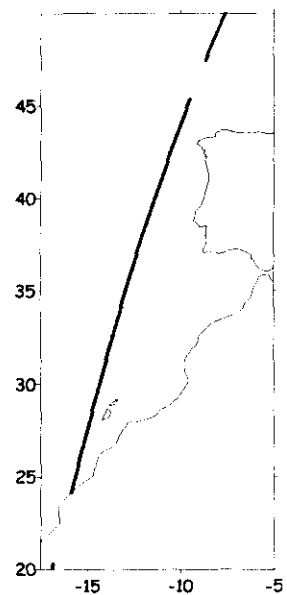




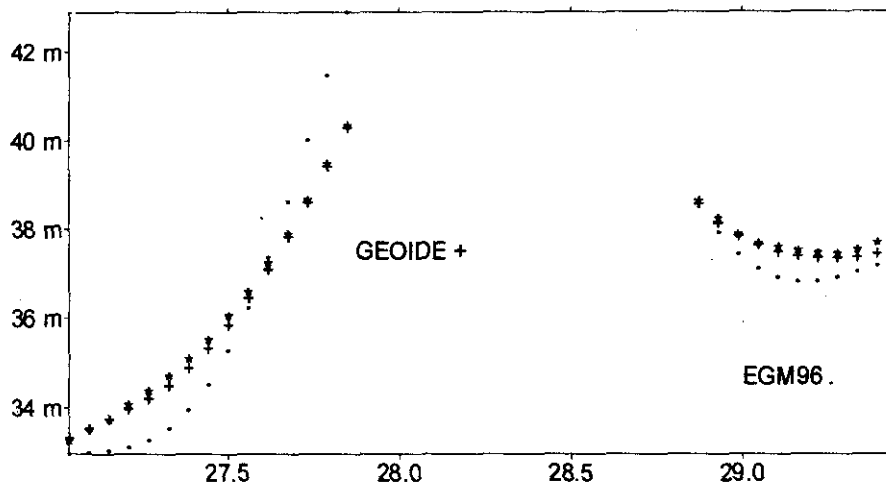
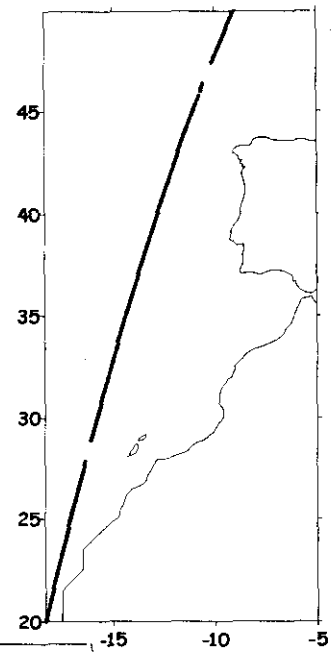
## TRAZO 345



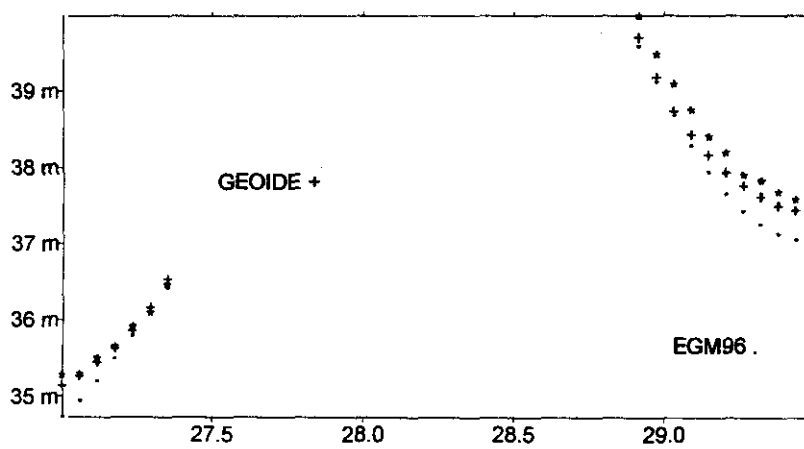
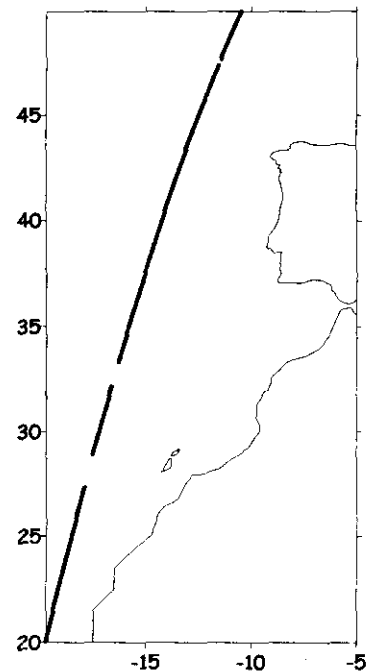
## TRAZO 395



## TRAZO 438



## TRAZO 481



## 7.9. CONCLUSIONES

1. En este capítulo se han estudiado las variaciones estacionales en un mar abierto durante un año de misión del satélite ERS-1. Éstas son significativamente menores a las obtenidas en el capítulo anterior en una cuenca semicerrada. Aún así, resulta siempre más adecuado hacer un estudio de superficies medias usando ciclos de años completos.

2. Se contrastan los criterios de validación descritos en el capítulo anterior y se puede ver su relación con las zonas. La rugosidad de la superficie medida nos determina zonas donde existen importantes accidentes batimétricos. Por la correlación entre ambas superficies, la inclinación detectada por el altímetro, es real y no un error. De hecho, aparece también en geoides disponibles sobre las zonas de estudio. Como criterio alternativo a éste se definió la rugosidad de la superficie medida que no esté presente en la superficie media tomada como modelo de parte estacionaria. Mediante su aplicación, se detectan zonas relacionadas con áreas de circulación oceánica. Así, los residuales obtenidos corresponden a la parte dinámica y no son válidas para estudios geodésicos. Si en los distintos ciclos siempre se detectaran los mismos puntos, podría tratarse de puntos en los que la superficie media no está bien determinada. La zona es la misma pero los puntos van variando mostrando que en efecto corresponden con la propagación de las olas. Por último las zonas donde las medidas no se adaptan a los valores asociados en el modelo de la superficie media corresponden a áreas singulares respecto de diversos parámetros (modelos de marea, propagación de vientos, alturas significativas de la ola...). Con todo ello reafirmamos la validez de los criterios descritos para localizar distintos tipos de zonas problemáticas.

3. Se repiten los estudios sobre ajustes locales encaminados a determinar la superficie media del mar del capítulo anterior. De nuevo quedan diferencias algo mayores entre los dos tipos de ajustes cuando se considera la corrección por efecto barométrico inverso, aunque las diferencias son mucho menores que las obtenidas en el Mediterráneo. La aplicación del método es más adecuada al verificarse ampliamente la redundancia en el número de observaciones.

4. Con los resultados de los apéndices I y II concluimos la validez de los datos incluso cerca de las islas. Por la comparación local con dos geoides disponibles sobre la zona vemos que los valores de las medidas de la superficie del mar se mantienen dentro de niveles realistas.



## CAPITULO 8

# ANALISIS CONJUNTO DE SUPERFICIE MEDIA DEL MAR Y GEOIDE. SUPERFICIE TOPOGRAFICA DEL MAR

*En este capítulo se presenta una comparación entre los resultados de los capítulos 3 y 6. La superficie media del mar obtenida en éste último, se aproxima pero no coincide totalmente con una superficie equipotencial del campo de la gravedad. Esta será la causa de las principales diferencias obtenidas al compararlas, que identificaremos como superficie topográfica del mar.*

*Puesto que en tales diferencias también aparecerá la parte correspondiente a los errores de las medidas del altímetro, de los datos gravimétricos y de los métodos empleados, vamos a suponer carentes de error a los primeros. Se elige la superficie media del mar construida con datos ajustados a TOPEX, que son los más precisos y en los que esta suposición resulta más adecuada. A las diferencias resultantes las vamos a filtrar a fin de separar la parte de largas longitudes de onda que se atribuirá a la señal de la superficie topográfica del mar, de los errores, tanto de los datos gravimétricos como los introducidos en el método de determinación del geoide.*

*Este filtrado se va a hacer usando distintos modelos propuestos en el trabajo, que concluirá con una comparación de los mismos.*

### 8.1. SUPERFICIE TOPOGRÁFICA DEL MAR

En el proceso descrito en los capítulos anteriores, se han promediado las altitudes residuales del mar, tras la eliminación de los correspondientes modelos, durante un año, con lo que se consigue eliminar las variaciones estacionales. Con los ajustes *crossover* o colineal, según el caso, se elimina la parte no modelada del error orbital. El resultado al restituir los modelos OSU es a lo que llamábamos superficie media del mar (al menos durante el periodo de tiempo involucrado en el cálculo). Es decir, la superficie del mar libre de errores orbitales y de aquellos otros que pudieran responder al mismo modelo.

Esta superficie no tiene por qué ser una superficie equipotencial del campo de la gravedad (es decir, no coincide con el geoide). Esto es lo que provoca la discrepancia entre datums locales

referidos a ella. La separación entre ambas superficies es la superficie topográfica del mar, que puede llegar a alcanzar valores de 2 metros, aunque lo usual es que se mantenga en torno a los 50 centímetros. Se debe principalmente a los efectos de deshielo de los casquetes polares, vientos, corrientes oceánicas, presión y cambios de densidad del agua y de temperatura.

La superficie topográfica del mar (en adelante STM), se descompone en una parte permanente o casi permanente, constante durante un periodo de tiempo, y otra parte que depende del tiempo o variaciones periódicas, por ejemplo, en el caso de superficie instantánea, las señaladas en los capítulos anteriores como estacionales. La parte de variaciones de corto periodo queda entonces eliminada al considerar superficies medias sobre un intervalo de tiempo más largo.

Según esto, se consigue una estimación de la STM al sustraer el geoide a la superficie altimétrica ajustada. En nuestro caso, elegimos como geoide el gravimétrico determinado en el capítulo 3. La STM que se obtiene la tomaremos como estacionaria al haber eliminado variaciones de periodo menores a un año. Las de periodos más largos permanecen, pero éstas son de cuantía significativamente menor. De hecho, la señal estacionaria y cuasiestacionaria es del orden de 1-2 metros (la atribuida a la circulación oceánica estacionaria) mientras que el aumento global de largo periodo del nivel medio es de 1-2 milímetros por año (Heck y Rummel, 1989). En cualquier caso, dado que la corrección de marea efectuada puede tener errores en algunas ondas de largo periodo, estimamos que el error cometido al considerar la superficie como estacionaria será mayor.

La precisión de la STM que se obtiene de este modo, está en relación con la de la gravimetría empleada en el cálculo del geoide y en la determinación de la órbita. Por este motivo, vamos a seleccionar la superficie media obtenida a partir de datos ERS-1 ajustados a TOPEX, que tienen una determinación de la órbita de precisión bastante mayor (del orden de la de los datos TOPEX, 2 centímetros). Pese a estas limitaciones de la precisión, este método nos parece el más conveniente para hacerlo en la zona considerada.

Otras determinaciones de la STM serían:

1. Tenemos que la superficie media del mar está descompuesta como:

$$SMM = N + H_{STMEDIA} \quad (8.1)$$

siguiendo el mismo esquema que en (5.9).  $H_{STMEDIA}$  se determina de modo que verifique las leyes de dinámica de fluidos. Es decir, que siga modelos geostrofos o casi geostrofos, cuyo estudio sale de las pretensiones de este trabajo.

2. Tomar como geoide altimétrico  $N$  al proporcionado por el modelo de geopotencial que había sido sustraído previamente al ajuste más la parte de residuales ajustados correspondiente al modelo de error orbital. A este proceso le vemos dos inconvenientes principales. Primero, suponemos que los residuales que intervienen en el ajuste tienen una parte correspondiente a geoide y otra a superficie topográfica del mar. Con ellos se ha determinado un modelo de error orbital que se añade sólo al geoide. La justificación de esto se encuentra al considerar que el error orbital, por propia naturaleza, está relacionado sólo con el campo de la gravedad (y por lo tanto con el geoide) y no con la superficie topográfica del mar, por lo que se añade sólo a éste. Como desventaja de este razonamiento, en este trabajo se presenta que, puesto que hay una parte de error orbital correlado geográficamente, no se obtiene por ajuste de diferencias *crossover*. Si se añade a  $N_{OSU}$  sólo el modelo de error orbital determinado y no los residuales enteros, esta parte no la tenemos.

El otro problema es que el modelo de STM empleado, que ahora sería prácticamente toda la determinación de tal superficie, el OSU, por tratarse de un modelo global, se supone que no tiene un buen comportamiento en una cuenca semicerrada con particular respuesta hidrológica como es la que estamos tratando.

3. La parte estacionaria o cuasiestacionaria de la STM debe tener media cero al promediar

sobre todas las regiones de océano. Esta propiedad, basada en oceanografía y teoría del potencial, tiene variantes como que lo que ha de ser cero es la suma ponderada de los cuadrados de sus valores globalmente. En cualquier caso, por su carácter global, no es aplicable para determinar STM a partir del resultado de altimetría al hacer el estudio en una zona tan local.

El conocimiento de la STM tiene gran importancia en estudios oceanográficos puesto que a partir de ella se pueden calcular velocidades de la superficie geostrófica usando ecuaciones básicas de hidrodinámica. También, en combinación con medidas apropiadas de densidades del agua y de profundidades, sirve para determinar modelos tridimensionales de circulación.

## 8.2. PRIMERA DETERMINACION DE LA STM EN LA ZONA

Por sustracción directa de los geoides obtenidos en el capítulo 3 a las superficies medias del mar del 6, obtenemos una aproximación a la STM estática. Se trata de una primera estimación ya que al hacer esto estamos incluyendo como parte de la STM los errores de las dos superficies.

Para su cálculo, seleccionamos de las cuadrículas obtenidas en el capítulo 3, aquellos puntos que están en el mar. Con los geoides gravimétricos, hacemos predicción en los puntos subsatélite de las superficies medias que entran dentro de los límites considerados.

Para hacer esto directamente antes se debe comprobar que los elipsoides de referencia con que se ha trabajado en una y otra determinación, son iguales como ocurre en este caso ( $a, 6387,1363$  m,  $\alpha, 0,003352813178$ ). Si no fuera así, habría que calcular el valor de  $\delta N$  obtenido al cambiar de datum, para añadirlo a la incertidumbre de la superficie obtenida por sustracción directa.

### 8.2.1. Superficie sin ajuste *crossover*

Hacemos las selecciones e interpolaciones descritas tomando los resultados obtenidos en la sección 6.5.4. La estadística de las cuatro superficies se muestra en la tabla 8.1 y las diferencias entre ellas en la tabla 8.2. La aproximación a STM obtenida está representada en la figura 8.1. con líneas de nivel a intervalos de 20 centímetros.

En desviación típica la variación es algo grande pero no así en media. En cualquier caso, los resultados obtenidos son físicamente consistentes de acuerdo con estimaciones similares en zonas próximas (Arabelos y Tziavos, 1996). En la zona con mayores diferencias se producían distintas anomalías. Por un lado, había menos profusión de datos gravimétricos. Por otro, los residuales obtenidos a partir de las medidas del altímetro son bastante grandes (ver figura 6.15). Además es una zona asociada a movimientos producidos por el giro de Alborán y el transporte de agua por la Corriente del norte del Mediterráneo y Balear (figura 8.2), que se describieron con más detalle en el capítulo 6.

|                                   | MEDIA   | D.T.    | MIN     | MAX     |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| SUP.MEDIA SIN CORREGIR E.B.I.     | 49,15 m | 57,8 cm | 48,38 m | 50,32 m |
| SUP.MEDIA CORREGIDA DE E.B.I.     | 49,13 m | 58,2 cm | 48,28 m | 50,30 m |
| GEOIDE COLOCACION (datos marinos) | 49,33 m | 48 cm   | 48,3 m  | 50,24 m |
| GEOIDE COLOCACION (datos mixtos)  | 49,33 m | 48 cm   | 48,28 m | 50,21 m |

TABLA 8.1: Estadística de las superficies empleadas para la determinación de la STM.

|                        | MEDIA    | D.T.    | MIN     | MAX    |
|------------------------|----------|---------|---------|--------|
| SMM SIN CORREGIR-G.MAR | -20,4 cm | 39,6 cm | -0,82 m | 0,91 m |
| SMM CORREGIDA-G. MIXTO | -19,7 cm | 39,7 cm | -0,81 m | 0,94 m |
| SMM SIN CORREGIR-G.MAR | -18 cm   | 39,1 cm | -0,79 m | 0,93 m |
| SMM CORREGIDA-G.MIXTO  | -17,3 cm | 39,2 cm | -0,78 m | 0,96 m |

TABLA 8.2: Diferencias obtenidas entre ellas.

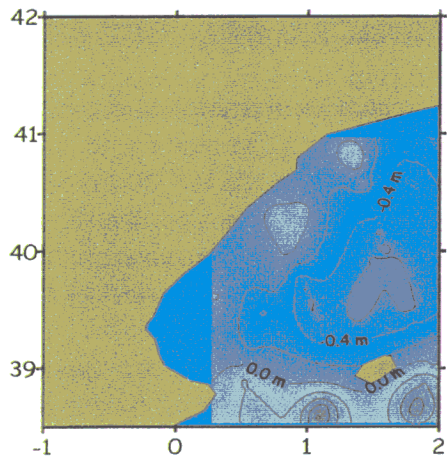


FIGURA 8.1: Superficie topográfica del mar.

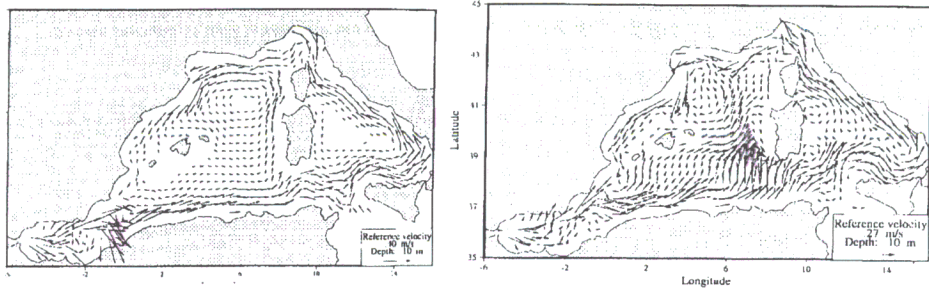
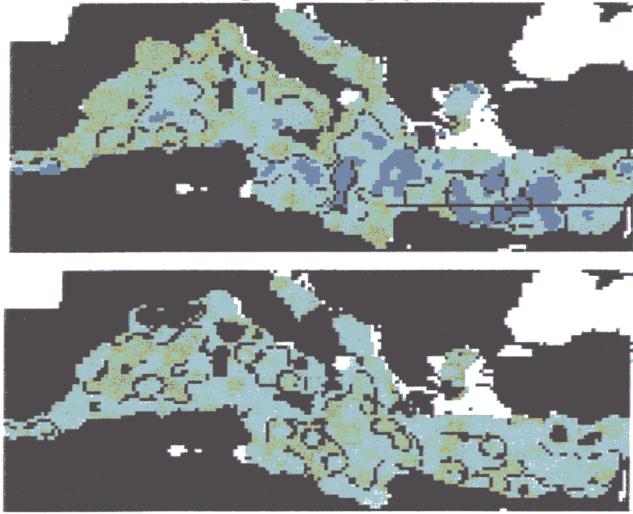


FIGURA 8.2: Dinámica principal en el Mediterráneo (Ayoub et al., 1996, Beckers et al., 1997).



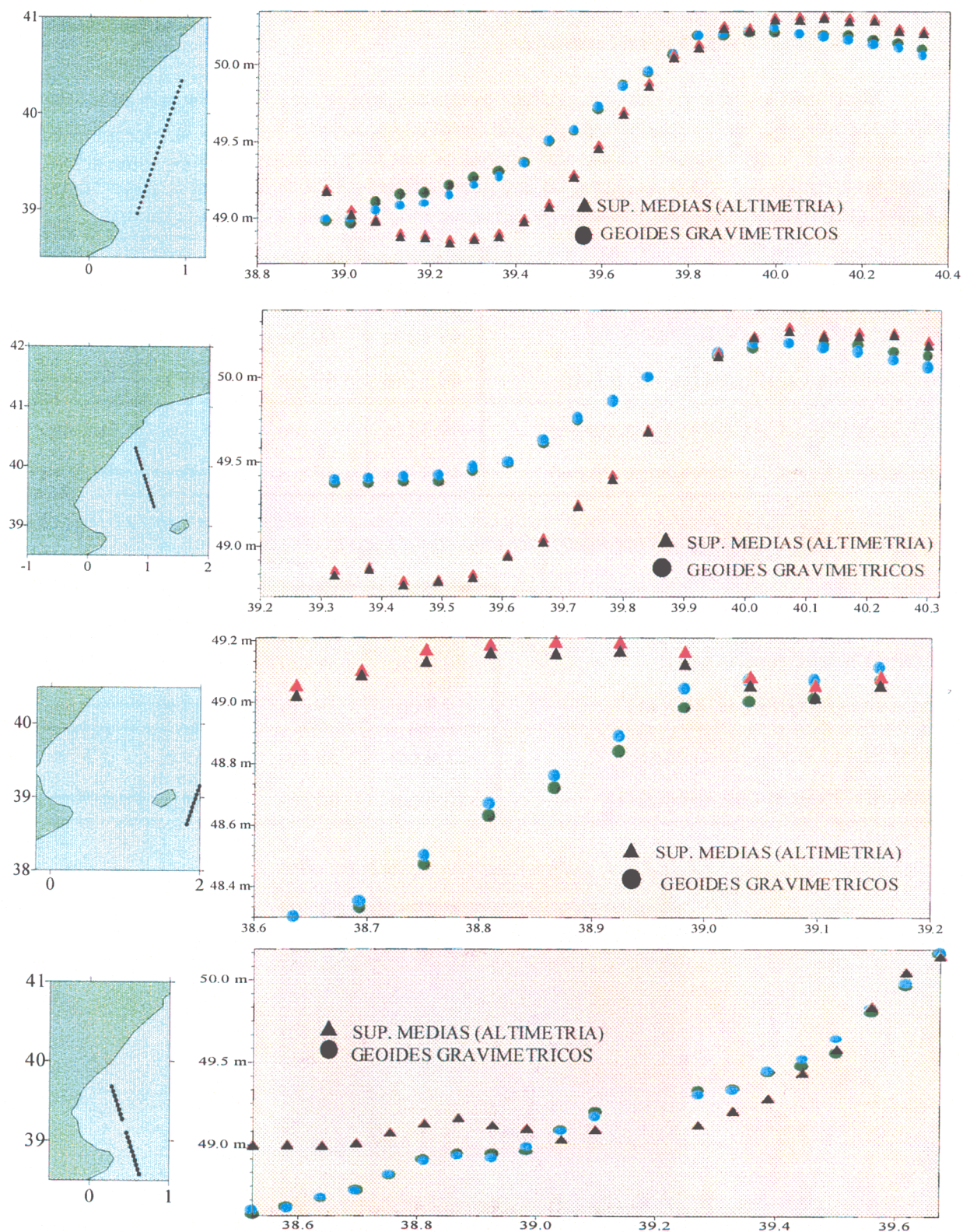


FIGURA 8.3: Estudio de la STM a lo largo de algunos trazos del satélite.

La STM a lo largo de cada trazo subsatélite en la zona, se muestra en la figura 8.3. Como se podía anticipar de las medias, en general el geoide en la zona es más alto que la superficie media.



### 8.2.2. Superficie con ajuste *crossover*

Repetimos los mismos cálculos, usando en esta ocasión la superficie obtenida en la sección 6.5.6. Las correspondientes estadísticas aparecen ahora en las tablas 8.3 y 8.4, y la STM se muestra en la figura 8.4. Los resultados de los dos apartados son muy similares entre sí, puesto que las diferencias entre los dos tipos de ajuste, no llegaban a afectar a la zona de estudio, como se vio en el capítulo 6. Se encontraban en trazos que son más exteriores que los que cruzan el área.

|                                   | MEDIA   | D.T.  | MIN     | MAX     |
|-----------------------------------|---------|-------|---------|---------|
| SUP.MEDIA SIN CORREGIR E.B.I.     | 49,12 m | 60 cm | 48,35 m | 50,28 m |
| SUP.MEDIA CORREGIDA DE E.B.I.     | 49,12 m | 59 cm | 48,37 m | 50,29 m |
| GEOIDE COLOCACION (datos marinos) | 49,33 m | 48 cm | 48,3 m  | 50,24 m |
| GEOIDE COLOCACION (datos mixtos)  | 49,33 m | 48 cm | 48,28 m | 50,21 m |

TABLA 8.3: Estadística de las superficies empleadas para la determinación de la STM.

|                          | MEDIA    | D.T.  | MIN     | MAX    |
|--------------------------|----------|-------|---------|--------|
| SMM CORREGIDA-G.MAR      | -20,6 cm | 39 cm | -0,88 m | 0,77 m |
| SMM CORREGIDA-G. MIXTO   | -19,9 cm | 39 cm | -0,87 m | 0,8 m  |
| SMM SIN CORREGIR-G.MAR   | -21,4 cm | 39 cm | -0,89 m | 0,76 m |
| SMM SIN CORREGIR-G.MIXTO | -20,6 cm | 40 cm | -0,88 m | 0,79 m |

TABLA 8.4: Diferencias obtenidas entre ellas.

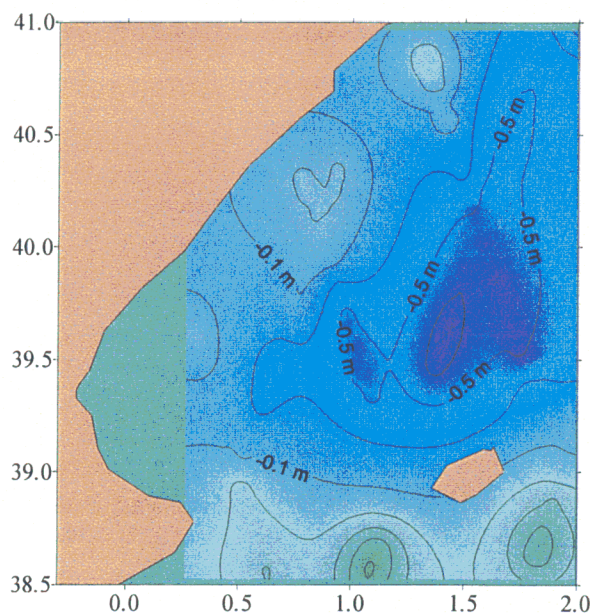


FIGURA 8.4: Superficie topográfica media del mar.



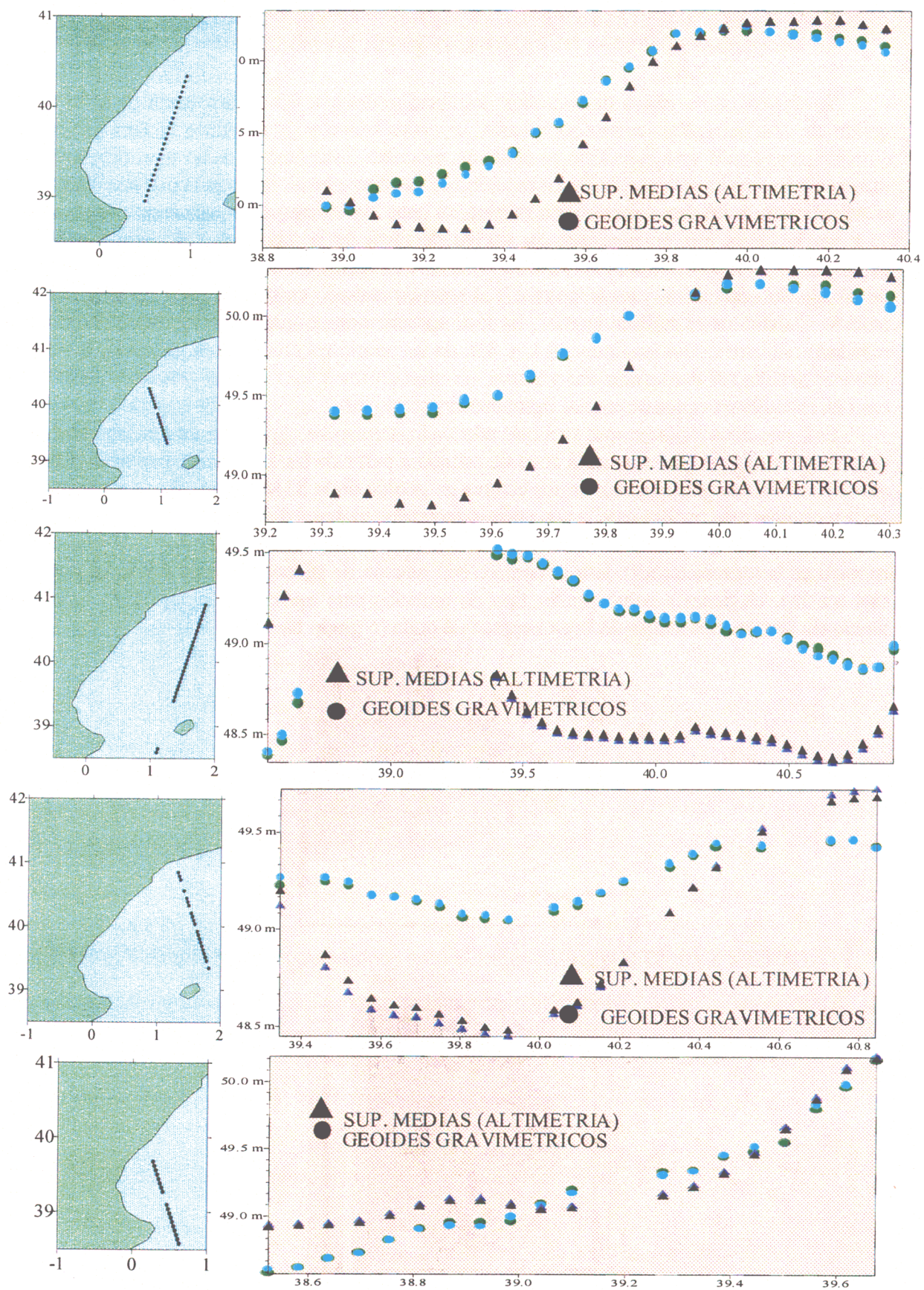


FIGURA 8.5: Estudio de la STM a lo largo de algunos trazos del satélite.

### 8.3. MODELOS DE STM DEPENDIENTES DE LA POSICIÓN GEOGRÁFICA

Se dispone de modelos de superficie topográfica del mar como los descritos en el capítulo quinto de esta memoria desarrollados hasta un cierto orden y grado. Pero cerca de la costa, el comportamiento de esta superficie es bastante irregular. Este hecho, unido a la falta general de datos costeros en la elaboración de los modelos de carácter global, hace que no reproduzcan bien a la superficie en áreas de profundidades inferiores a unos 2000 metros como es la que nos ocupa.

En la figura 8.6. se muestran las curvas de nivel de la superficie calculada usando en la expresión (5.3) los coeficientes del modelo OSU91A de superficie topográfica del mar para la zona de trabajo del capítulo 6, y en la figura 8.7 el mismo resultado cuando se usan los coeficientes del modelo EGM96 en el subárea interior. Es fácil apreciar que no guardan ninguna similitud con los resultados mostrados en las figuras 8.1. y 8.4. de las secciones precedentes. Además, la superficie obtenida resulta ser demasiado lisa y suave, alcanzando unos valores muy pequeños incluso en el caso de EGM96 en el que se emplea hasta orden y grado 20.

Esto nos lleva a pensar que será más adecuado desarrollar algún tipo de modelo local para la superficie topográfica del mar en la zona de estudio a partir de las diferencias obtenidas. Buscamos que tal modelo nos permita separar los errores de geode de la STM o parte de mayor longitud de onda y que sea más realista para la zona que los modelos globales disponibles.

En términos generales, la STM se puede desarrollar en serie de armónicos esféricos según se exponía en la expresión (5.3). Los armónicos son función de las coordenadas  $\phi$  y  $\lambda$  del punto. Por este motivo, elegiremos como primer tipo de modelos para aproximar la superficie topográfica, funciones de tales cantidades de larga longitud de onda (o grado bajo).



FIGURA 8.10: STM OSU91A sobre la zona contorneada a intervalos de 5 centímetros.

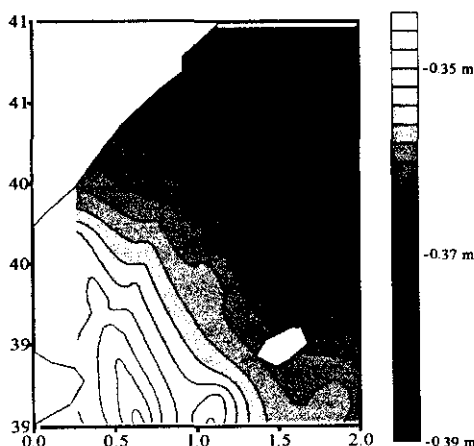


FIGURA 8.11: STM EGM96 sobre la zona contorneada a intervalos de 2 milímetros.



Para cada uno de los modelos seleccionados, se ha hecho un análisis en los términos descritos a continuación. En primer lugar, se ha construido la matriz de diseño del modelo a partir de las observaciones disponibles, que en nuestro caso eran los puntos en los que se tenían diferencias entre geoides y superficies determinadas a partir de altimetría por satélite, así como el valor de las mismas. Éstas, a su vez, harán de vector de observaciones o  $b$  en un modelo de la forma:

$$Ax - t = v$$

En esta expresión,  $x$  vector de parámetros a determinar, estará formado por los valores de los coeficientes del modelo elegido que ajustan mejor a las diferencias obtenidas en la sección anterior. Se construye una matriz y un vector de observaciones para cada estimación de la STM (superficie con y sin corrección por efecto barométrico inverso, una vez sustraído el valor de geoide calculado con datos de gravimetría sólo marina o bien mezclados con terrestres), tanto para superficies medias construidas a partir de ajuste colineal de trazos, como para las que se obtuvieron por ajuste *crossover*. Esto hace que se disponga de ocho sistemas diferentes para cada modelo.

En cada uno de ellos se practicó un ajuste mínimos cuadrados para obtener los parámetros de la transformación.

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T t$$

Cada uno de los ajustes tiene asociada una estimación de la varianza a priori de peso unidad o varianza a posteriori, dada por la expresión:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{v}^T \hat{v})}{m - n}, E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$$

Donde  $v$  es el residual,  $v^T v$  es  $x^T A^T A x - 2t^T A x + t^T t$ ,  $t = A^T b$ ,  $m$  es el número de ecuaciones del sistema, es decir, en nuestro caso, de puntos en donde tenemos determinada la diferencia entre superficies, y finalmente,  $n$  es el número de parámetros que describen el modelo elegido. La varianza a posteriori nos proporciona un primer indicativo de la precisión obtenida en el ajuste, apropiado para las comparaciones de los mismos, junto con los errores individuales de los parámetros.

A partir de estos ajustes independientes, se obtuvieron los parámetros de la transformación que podríamos llamar general, como media ponderada de los determinados en cada ajuste mínimo cuadrático. Esta media se hace para elegir un modelo único que funcione para todos los datos. Se usó como peso el valor inverso del error medio cuadrático de cada uno de los sistemas usados.

La calidad de cada ajuste se examinó por un análisis de residuales. Así, se estudiaron las diferencias obtenidas entre la superficie determinada al añadir la STM estimada por el modelo a los geoides gravimétricos y la superficie media altimétrica. El mejor o más adecuado de los ajustes combinaría un error medio pequeño, con unas diferencias también de valor reducido.

En general los modelos empleados en este estudio, como se verá en el análisis detallado posterior, proporcionan un error medio cuadrático bastante pequeño. Reducen en media las diferencias entre las dos superficies ( $N_{\text{gravimétrico}} + \text{STM}_{\text{estimada}}$  y SMM calculada a partir de altimetría por satélites) pero mantienen algunas grandes que si damos el modelo por válido habrían de corresponderse con los errores de la superficie.

La superficie topográfica que resulta de emplear ajustes con pocos parámetros tiene isolíneas muy suaves y poco accidentadas como se aprecia en el estudio que prosigue (figuras 8.8, 8.10, 8.12 y 8.14). Estas líneas se parecen a las que describen los modelos globales en la zona. Sólo con la inclusión de un mayor número de parámetros, la superficie topográfica estimada reproduce los accidentes que se mostraban en las figuras 8.1 y 8.4.

### 8.3.1. Modelos de tres parámetros

#### 8.3.1.1. $A+B\phi+C\lambda$

##### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A                 | B                   | C                  | $\sigma_0^2$       |
|-------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| 9.197656643032165 | -13.328135849900190 | -7.164400964948115 | 0.3527935789962555 |
| 9.780529914480297 | -14.201857613612160 | -5.715216661365652 | 0.3537614220541678 |
| 9.211948782457172 | -13.354723632237770 | -8.141190643319817 | 0.3556103922306281 |
| 9.794822053007003 | -14.228445395952230 | -6.692006339736551 | 0.3565420401524785 |

Parámetros promediados:

| A            | B              | C             |
|--------------|----------------|---------------|
| 9.4958208815 | -13.7776531574 | -6.9272470015 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -18,81 cm | 18 cm    | -59.582 cm | 15,487 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO | MAXIMO  |
|-------|----------|--------|---------|
| 0 cm  | 35,1 cm  | -63 cm | 87,4 cm |

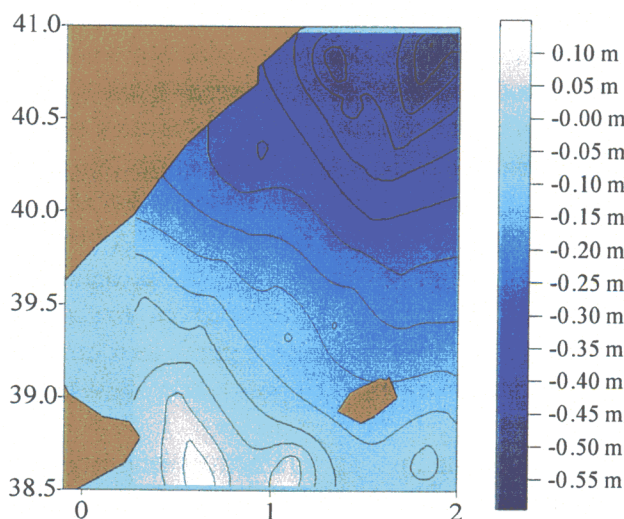


FIGURA 8.8: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

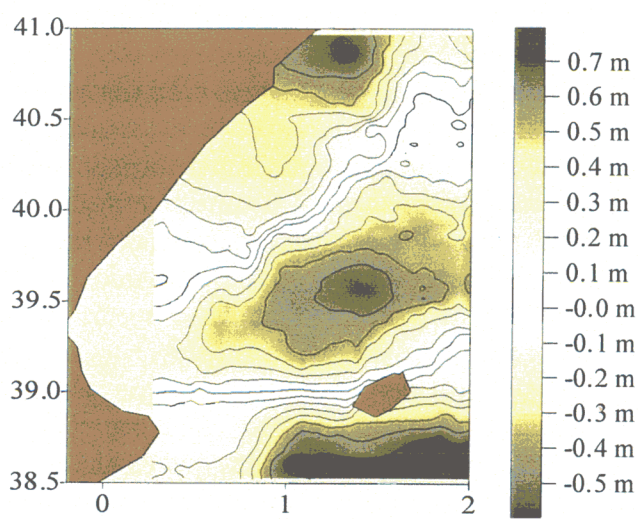


FIGURA 8.9: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.

## (B) AJUSTE CROSSOVER

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A                 | B                   | C                  | $\sigma_0^2$       |
|-------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| 8.005865850867650 | -11.576498096675930 | -9.884382324910732 | 0.3575358611120489 |
| 8.588739121416124 | -12.450219860388580 | -8.435198021327992 | 0.3591989844694029 |
| 7.881650920939785 | -11.425267729240340 | -8.575914918382367 | 0.3514490717406238 |
| 8.464524191487589 | -12.298989492951880 | -7.126730614799953 | 0.3529644447957224 |

Parámetros promediados:

| A            | B              | C             |
|--------------|----------------|---------------|
| 8.2340051834 | -11.9361118124 | -8.5015040613 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -20.64 cm | 17 cm    | -59,585 cm | 11,386 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0 cm  | 35,1 cm  | -67,6 cm | 77,8 cm |

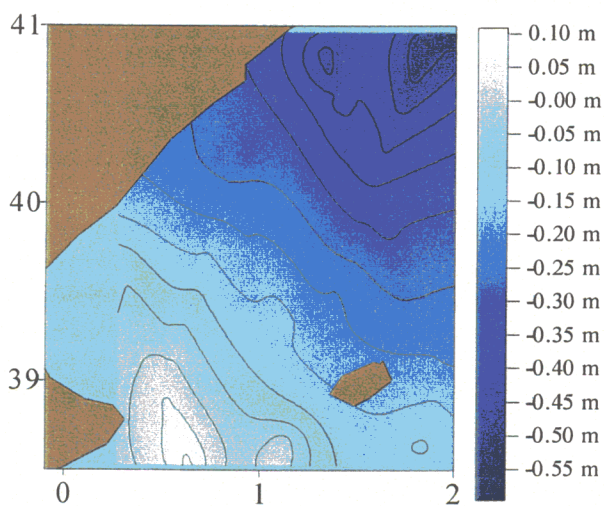


FIGURA 8.10: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

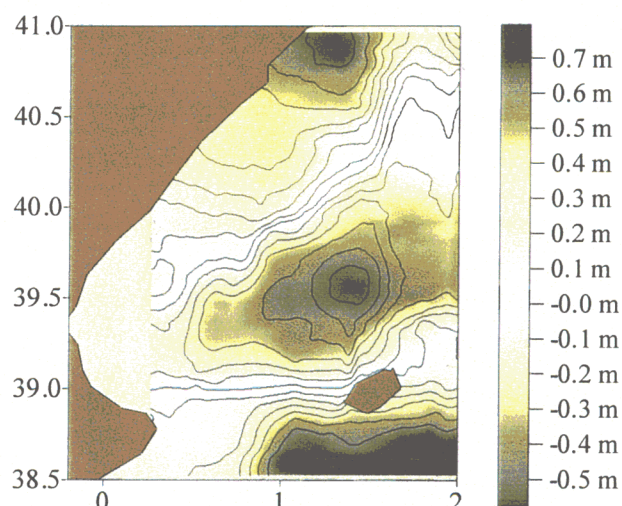


FIGURA 8.11: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.

El error de los sistemas es bastante pequeño. La STM modelo se aproxima en media bien a las diferencias de la tabla 8.2. lo que hace que las medias de las nuevas diferencias sean pequeñas (cero). Pero aún permanecen algunas grandes lo que hace que la desviación típica sólo disminuya ligeramente.



### 8.3.1.2. $A+B\cos(\phi)+C\cos(\lambda)$

#### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A                   | B                  | C                   | $\sigma_0^2$       |
|---------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| -313,25025749858470 | 21,527528110513230 | 296,577899462543400 | 0,3549022173998626 |
| -243,20330591220410 | 22,798095283142180 | 225,542874280363300 | 0,3556167133064885 |
| -357,32979286927730 | 21,661973556845620 | 340,540830017067500 | 0,3580136336661788 |
| -287,28284127078950 | 22,932540729569160 | 269,505804822780200 | 0,3586802847907660 |

Parámetros promediados:

| A               | B             | C              |
|-----------------|---------------|----------------|
| -300,2050948468 | 22,2291285829 | 282,9811281127 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -18,81 cm | 17,2 cm  | -60,984 cm | 14,919 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0 cm  | 35,3 cm  | -64,6 cm | 85,8 cm |

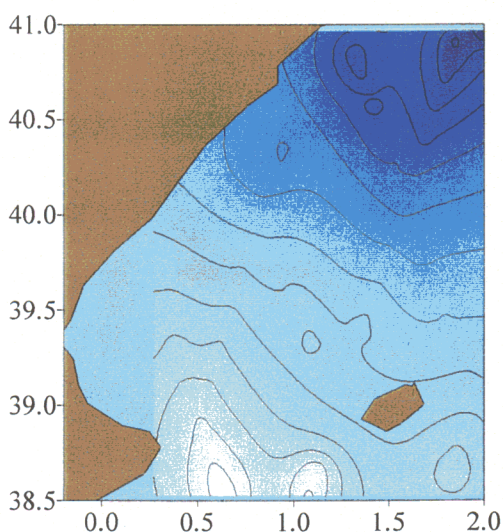


FIGURA 8.12: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

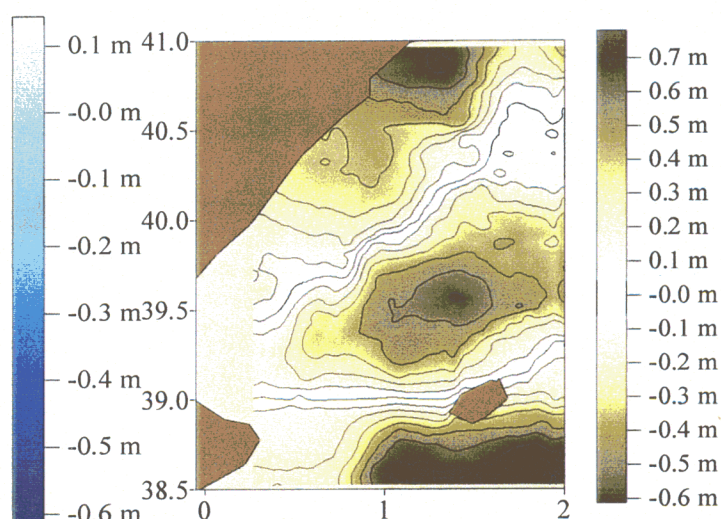


FIGURA 8.13: Diferencias entre superficie altimétrica y geode más STM estimada.



## B) AJUSTE CROSSOVER

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A                   | B                  | C                 | $\sigma_0^2$       |
|---------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| -432.192441733554   | 19.07103278981231  | 417.4063519462943 | 0.3604613417895246 |
| -362.1454901397228  | 20.34159996250673  | 346.3713267575949 | 0.3618196957963106 |
| -369.9073832798749  | 18.733655500254830 | 355.3727572914213 | 0.354037772139446  |
| -299.86043169163173 | 20.004222672912870 | 284.3377321055159 | 0.3552435459546086 |

Parámetros promediados:

| A               | B             | C              |
|-----------------|---------------|----------------|
| -365.8063224392 | 19,5349591201 | 350.6539535361 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TIPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -20,64 cm | 16 cm    | -61,371 cm | 10,896 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TIPICA | MINIMO   | MAXIMO   |
|-------|----------|----------|----------|
| 0 cm  | 35,4 cm  | -69,4 cm | 77,25 cm |

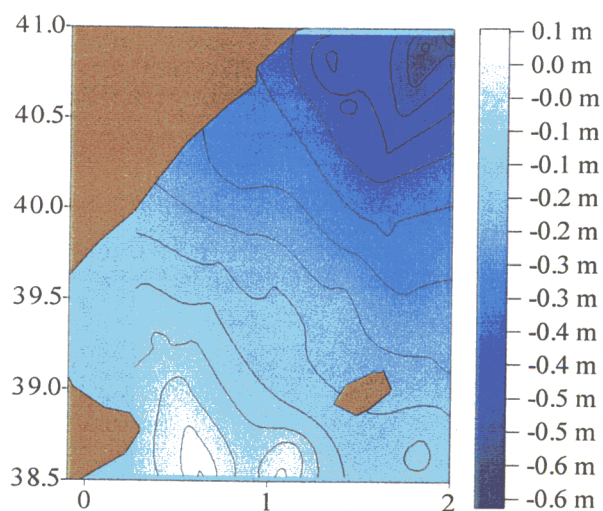


FIGURA 8.14: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

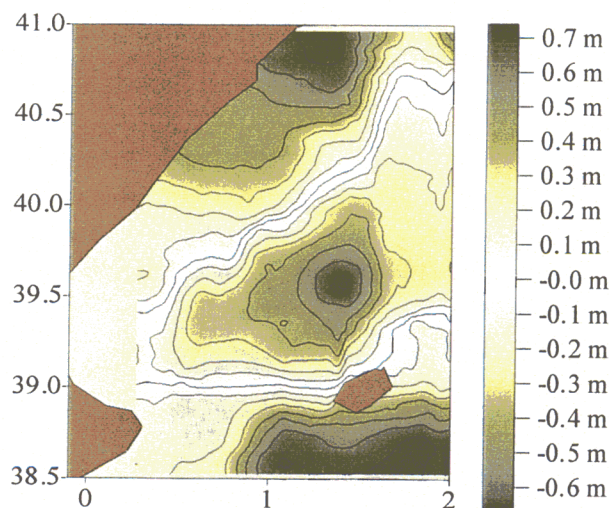


FIGURA 8.15: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.

Al alcanzarse valores mayores de los parámetros, el error es comparativamente más pequeño. La segunda parte de la comparación funciona de forma similar a como lo hacía en el ajuste anterior. Las diferencias entre N+STM y la superficie altimétrica siguen siendo en zonas casi del mismo orden que antes de proceder al ajuste.

### 8.3.2. Modelo de seis parámetros

$$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2$$

#### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A          | B            | C          | D           | E           | F          | $\sigma_0^2$ |
|------------|--------------|------------|-------------|-------------|------------|--------------|
| 1389.47967 | -4070.423433 | 1975.12207 | 2981.166134 | -2927.39333 | 584.223260 | 0.132630     |
| 1380.54618 | -4044.431151 | 1991.64909 | 2962.259868 | -2952.39013 | 638.057115 | 0.137308     |
| 1402.51521 | -4107.841638 | 1965.25221 | 3008.024183 | -2916.32760 | 612.927200 | 0.133847     |
| 1393.58172 | -4081.849356 | 1981.77923 | 2989.117917 | -2941.32439 | 666.761055 | 0.138471     |

Parámetros promediados:

| A            | B            | C            | D            | E            | F            |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1391.5786823 | -4076.277129 | 1978.3305730 | 2985.2451829 | -2934.168757 | 624.96729006 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -18,82 cm | 37 cm    | -72,605 cm | 90,179 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0cm   | 13,3 cm  | -26,7 cm | 37,7 cm |

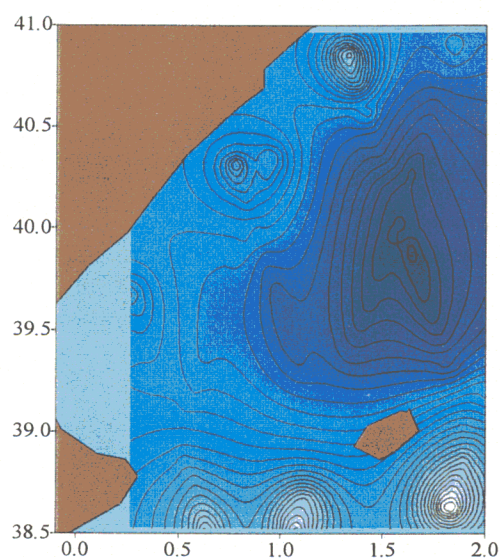


FIGURA 8.16: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

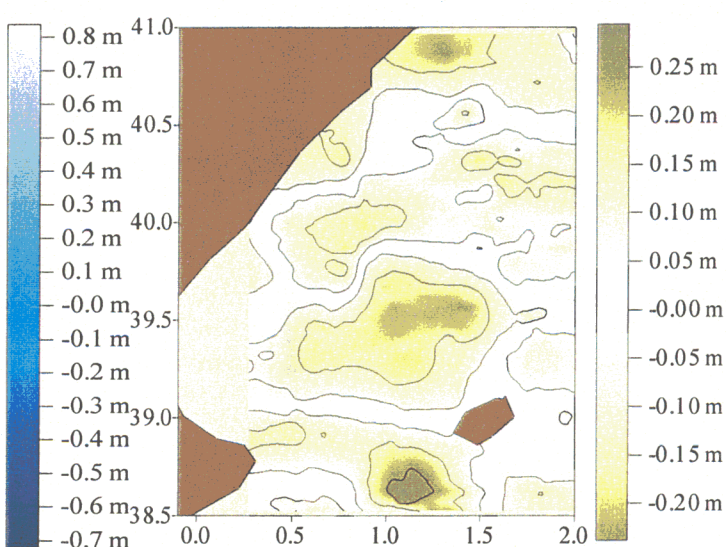


FIGURA 8.17: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.



## (B) AJUSTE CROSSOVER

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A          | B            | C         | D            | E            | F         | $\sigma_0^2$ |
|------------|--------------|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|
| 1379.96700 | -4046.893987 | 2027.3056 | 2967.2168880 | -3017.656373 | 762.85223 | 0.140444     |
| 1371.03350 | -4020.901704 | 2043.8327 | 2948.3106219 | -3042.653172 | 816.68608 | 0.146292     |
| 1343.86136 | -3940.827034 | 1971.1908 | 2889.2909073 | -2934.045958 | 765.22171 | 0.144826     |
| 1334.92786 | -3914.834751 | 1987.7179 | 2870.3846411 | -2959.042756 | 819.05563 | 0.150022     |

Parámetros promediados:

| A             | B           | C            | D            | E             | F           |
|---------------|-------------|--------------|--------------|---------------|-------------|
| 1357.78516699 | -3981.85413 | 2007.7473601 | 2919.5261248 | -22988.697051 | 790.4252043 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -20,65 cm | 36 cm    | -74.554 cm | 83,035 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0 cm  | 14,2 cm  | -31,8 cm | 42,5 cm |

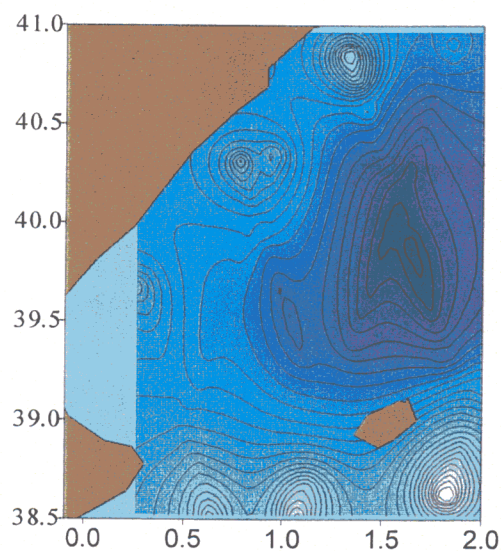


FIGURA 8.18: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

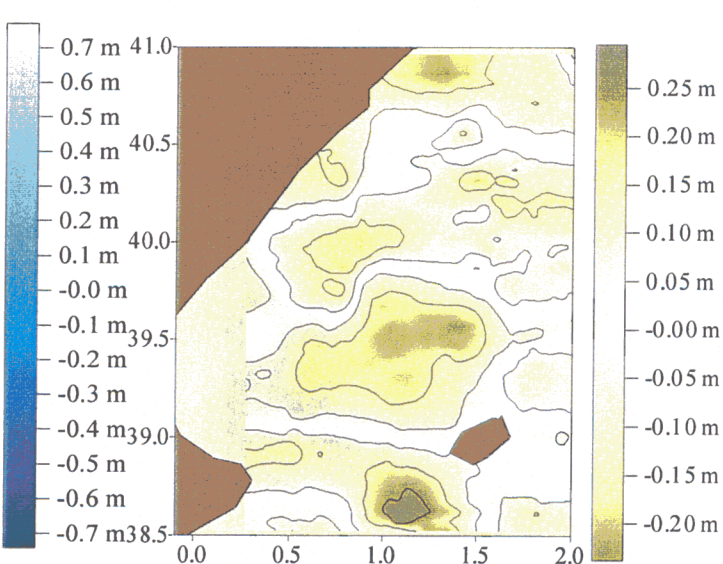


FIGURA 8.19: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.

Los errores siguen siendo bastante pequeños. Al aumentar el número de parámetros, las diferencias disminuyen hasta alcanzar una desviación típica que es la mitad de la de los casos anteriores. La superficie que reproducen es más rugosa.



### 8.3.3. Modelo de diez parámetros

$$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2+G\phi^3+H\phi^2\lambda+I\phi\lambda^2+J\lambda^3$$

#### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A         | B          | C          | D         | E         | F          | G          | H          | I          | J         | $\sigma_0^2$ |
|-----------|------------|------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|-----------|--------------|
| 21184.025 | -89774.560 | -2436.101  | 126658.40 | 9400.0924 | 1502.9424  | -59485549  | -8536.8384 | -5127.4726 | 56657.304 | 0.1122105    |
| 20827.735 | -88262.577 | -1314.7893 | 124518.73 | 6487.3235 | -2712.8784 | -58474.775 | -6693.8930 | 1955.4839  | 45665.585 | 0.1195216    |
| 21382.747 | -90679.365 | -852.43636 | 128004.29 | 4720.7417 | 2707.3241  | -60159.469 | -5086.9912 | -6774.2953 | 55560.520 | 0.1141180    |
| 21026.179 | -89158.383 | 268.87584  | 125864.63 | 1807.9724 | -1508.4965 | -59148.696 | -3244.0455 | 308.66110  | 44568.802 | 0.1212257    |

Parámetros promediados:

| A          | B         | C       | D         | E        | F      | G         | H         | I        | J        |
|------------|-----------|---------|-----------|----------|--------|-----------|-----------|----------|----------|
| 21109.8354 | -89486.33 | -1107.0 | 126289.32 | 5667.198 | 57.636 | -59330.11 | -5932.309 | -2512.36 | 50787.03 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO    | MAXIMO   |
|-----------|----------|-----------|----------|
| -18,82 cm | 38 cm    | -69,13 cm | 92,67 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0 cm  | 11,3 cm  | -34,7 cm | 35,7 cm |

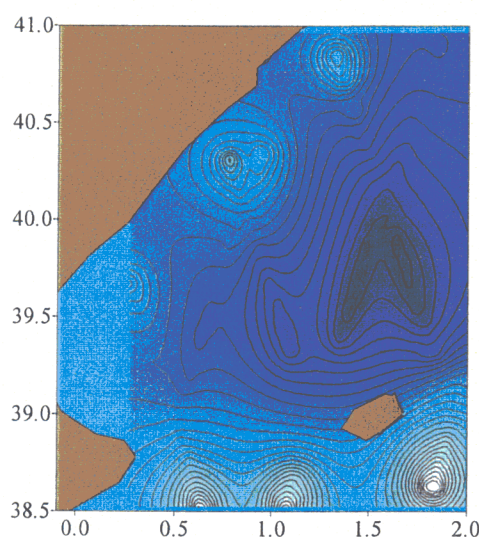


FIGURA 8.20: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

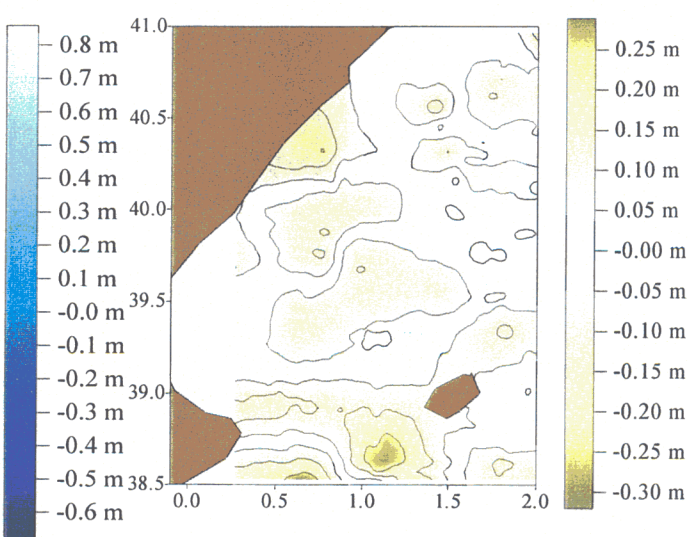


FIGURA 8.21: Diferencias entre superficie altimétrica y geode más STM estimada.

## (B) AJUSTE CROSSOVER

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A         | B          | C          | D         | E         | F          | G          | H          | I         | J         | $\sigma_0^2$ |
|-----------|------------|------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------|
| 14333.714 | -59520.381 | -18351.616 | 82115.125 | 56540.859 | -11052.868 | -37622.557 | -43509.196 | 15742.194 | 29939.053 | 0.1261636    |
| 13977.146 | -58008.398 | -17230.303 | 79975.458 | 53628.090 | -15268.689 | -36611.783 | -41666.250 | 22825.151 | 18947.334 | 0.1341482    |
| 14313.515 | -59394.764 | -20944.679 | 81865.79  | 65034.884 | -27985.384 | -37463.714 | -50353.575 | 39566.014 | 39411.513 | 0.1299402    |
| 13956.947 | -57882.781 | -19823.367 | 79726.125 | 62122.115 | -32201.205 | -36452.941 | -48510.629 | 46648.971 | 28419.794 | 0.137106     |

Parámetros promediados:

| A        | B         | C        | D        | E        | F         | G         | H        | I       | J        |
|----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|---------|----------|
| 14150.59 | -58724.15 | -19086.9 | 80953.02 | 59318.69 | -21457.31 | -37053.32 | -45992.3 | 30940.2 | 29276.58 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO    |
|-----------|----------|------------|-----------|
| -20,66 cm | 37 cm    | -69,218 cm | 77,639 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|-------|----------|----------|---------|
| 0 cm  | 12,7 cm  | -34,8 cm | 40,9 cm |

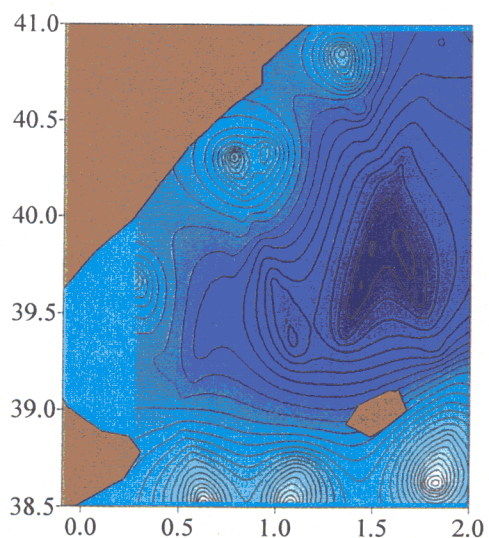


FIGURA 8.22: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

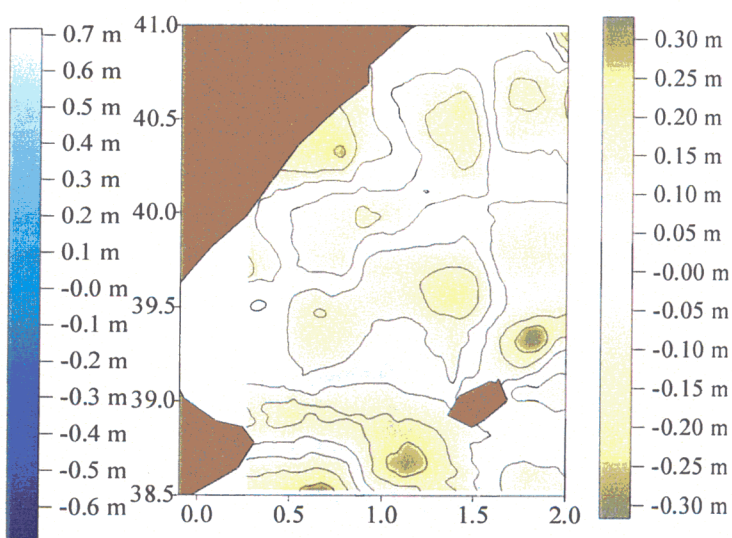


FIGURA 8.23: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada

Continúa la tendencia de aumentar los valores de STM con la inclusión de mayor número de parámetros y por lo tanto, disminuyen los de las diferencias tras añadir la estimación del modelo. Las mayores siguen estando en la parte inferior de la zona, aunque son menos y de valor menor.



### 8.3.4. Modelo de once parámetros

$$A+B\cos(\phi)+C\sin(\phi)+D\cos(\lambda)+E\sin(\lambda)+F\cos(\phi)\sin(\phi)+G\cos(\lambda)\sin(\lambda)+H\cos^2(\phi)+I\sin(\phi)\cos(\lambda)+J\sin(\lambda)\cos(\phi)+K\cos^2(\lambda)$$

#### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A         | B        | C        | D         | E         | F        | G          | H          | I          | J       | K       | $\sigma_0^2$ |
|-----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|------------|------------|------------|---------|---------|--------------|
| -70646.02 | 54839.19 | 113283.8 | 170230.65 | 313809.71 | 42816.13 | -322459.7  | -131591.1  | -245939.11 | 11245.7 | -185.46 | 0.3285       |
| -91753.98 | 122159.3 | 114714.2 | 150083.01 | 298514.39 | 11122.05 | -306406.74 | -156825.1  | -216145.23 | 10249.5 | -156.41 | 0.3178       |
| -20082.28 | -75858.0 | 97364.08 | 212975.13 | 369635.25 | 111800.3 | -379600.76 | -93762.10  | -306681.36 | 12998.1 | -263.57 | 0.3311       |
| -41352.56 | -8440.95 | 96912.52 | 184145.78 | 344580.78 | 75080.75 | -353858.79 | -111585.30 | -264253.90 | 12085.3 | -250.05 | 0.3137       |

Parámetros promediados:

| A         | B        | C         | D         | E        | F        | G          | H          | I          | J        | K       |
|-----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|------------|------------|------------|----------|---------|
| -56154.55 | 23817.77 | 105559.78 | 170107.29 | 331437.9 | 59871.96 | -340377.62 | -123636.75 | -257882.95 | 11635.66 | -213.72 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO  |
|-----------|----------|------------|---------|
| -24,21 cm | 47 cm    | -93,759 cm | 93,3 cm |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA  | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|--------|----------|----------|---------|
| 5,4 cm | 17,9 cm  | -47,8 cm | 44,0 cm |

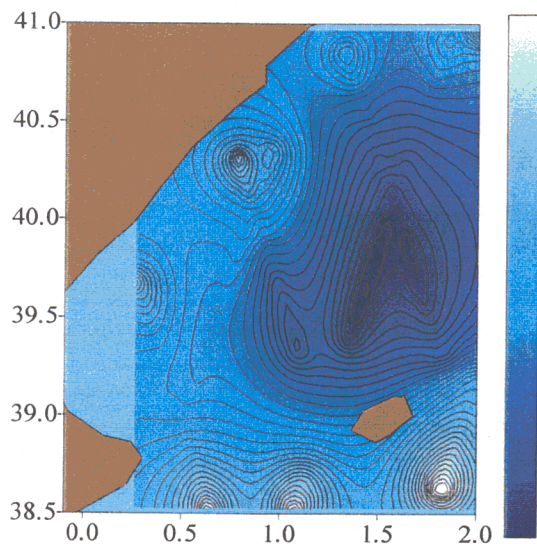


FIGURA 8.24: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

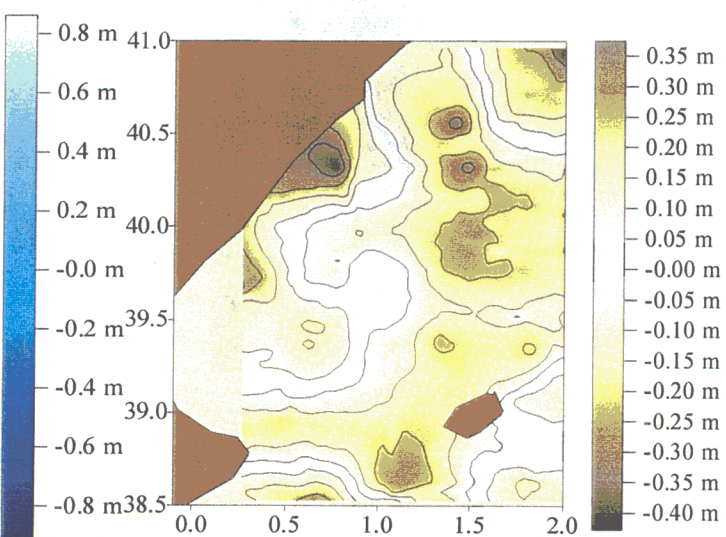


FIGURA 8.25: Diferencias entre superficie altimétrica y geode más STM estimada.



## (B) AJUSTE CROSSOVER

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A        | B        | C        | D         | E         | F        | G          | H          | I          | J       | K        | $\sigma_0^2$ |
|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|------------|------------|------------|---------|----------|--------------|
| 148143.9 | -396745. | -3025.47 | 279785.04 | 451626.52 | 284256.9 | -464194.52 | -5821.31   | -401559.37 | 16447.0 | -494.49  | 0.2899       |
| 89072.19 | -332249. | 48212.34 | 239295.83 | 308830.86 | 220913.1 | -320359.93 | 20435.57   | -350582.01 | 15031.3 | -260.33  | 0.3365       |
| 123035.1 | -374117. | 23691.77 | 280848.61 | 432023.78 | 267926.7 | -444544.55 | -5741.1944 | -405485.60 | 16369.7 | -438.466 | 0.3393       |
| 56579.85 | -303831. | 78869.83 | 201871.96 | 162019.62 | 178906.6 | -172565.77 | 53800.933  | -304999.25 | 13684.9 | -14.7991 | 0.3138       |

Parámetros promediados:

| A        | B        | C        | D         | E         | F         | G          | H        | I          | J        | K        |
|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|----------|------------|----------|----------|
| 105025.7 | -352583. | 36161.88 | 250674.69 | 339715.24 | 238689.20 | -351513.04 | 15546.13 | -365905.47 | 15392.69 | -304.155 |

Superficie topográfica modelo:

| MEDIA     | D.TÍPICA | MINIMO     | MAXIMO   |
|-----------|----------|------------|----------|
| -25,76 cm | 50 cm    | -1,01778 m | 90,572 m |

Nuevas diferencias con la superficie altimétrica tras añadir el modelo de STM:

| MEDIA  | D.TÍPICA | MINIMO   | MAXIMO  |
|--------|----------|----------|---------|
| 5,1 cm | 22,7 cm  | -44,2 cm | 57,8 cm |

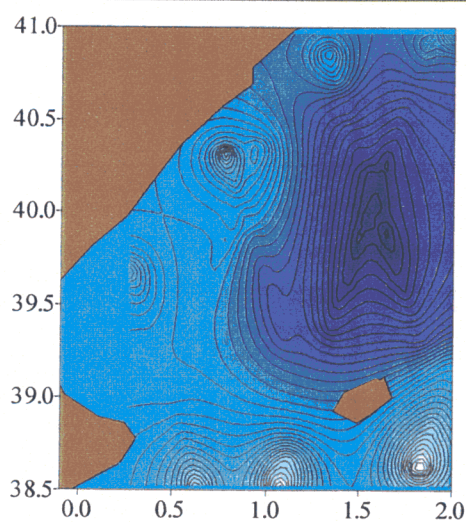


FIGURA 8.26: STM modelo contorneada a intervalos de cinco centímetros.

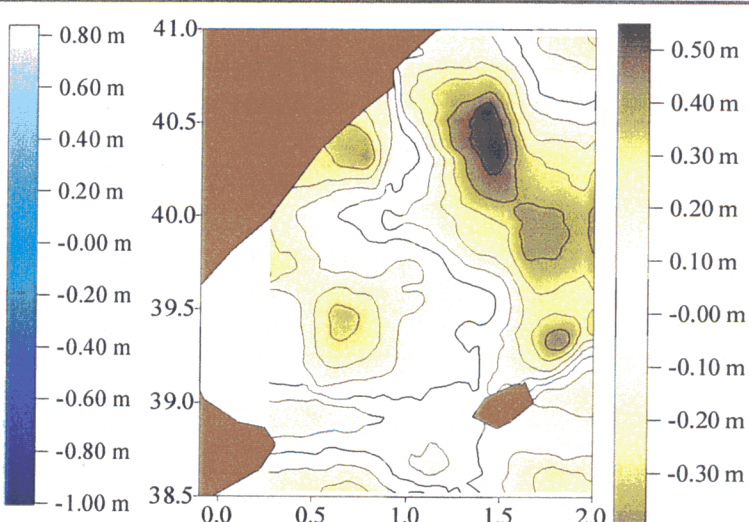


FIGURA 8.27: Diferencias entre superficie altimétrica y geoide más STM estimada.

Los parámetros son mayores, por lo que aunque los errores aumentan ligeramente, comparativamente son de la misma magnitud. La STM toma valores más extremos que en las otras ocasiones, y las diferencias aumentan respecto a los otros ajustes. Además aumentan en partes de la zona en las que no aparecían antes.

### 8.3.5. Modelo de veintiún parámetros

$$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2+G\phi^3+H\phi^2\lambda+I\phi\lambda^2+J\lambda^3+K\phi^4+L\phi^3\lambda+M\phi^2\lambda^2+N\phi\lambda^3+O\lambda^4+P\phi^5+Q\phi^4\lambda+R\phi^3\lambda^2+S\phi^2\lambda^3+T\phi\lambda^4+U\lambda^5$$

#### (A) AJUSTE COLINEAL

Parámetros obtenidos en los ajustes independientes:

| A               | B               | C                | D               | E               |              |
|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|--------------|
| -111047.6078804 | 492560.52778124 | 8298958.7116432  | -728094.2753262 | -2.6758573844E7 |              |
| -90483.71180266 | 402402.26320648 | 7270056.6313705  | -596289.0502166 | -2.3803655015E7 |              |
| -77415.72225689 | 345383.97772812 | 7331720.4600792  | -513377.3981027 | -2.4273007367E7 |              |
| -56851.82899445 | 255225.70096945 | 6302818.1248664  | -381572.2504696 | -2.1318084011E7 |              |
| F               | G               | H                | I               | J               |              |
| -3.5553539718E8 | 358669.103163   | 9680328.1091213  | 1.6298752738E8  | -1.007008309E9  |              |
| -3.0602702604E8 | 294417.928038   | 9975117.4929847  | 1.4077100780E9  | -9.225956919E8  |              |
| -3.1960030473E8 | 254238.0565445  | 1.1161093901E7   | 1.4722702437E9  | -1.0052431306E9 |              |
| -2.7010194549E8 | 189986.8928146  | 1.1455878149E7   | 1.2501040149E9  | -9.2083051496E8 |              |
| K               | L               | M                | N               | O               | P            |
| 0               | 3.95545011237E7 | -2.48838928E9    | 3.05228419E9    | -1.2676905E9    | -3.2814907E7 |
| 0               | 3.13657299119E7 | -2.25750071E9    | 3.03974106E9    | -1.2346028E9    | -2.7356564E7 |
| 0               | 3.25889763244E7 | -2.1551831776E9  | 2.78082542E9    | -1.0530139E9    | -2.7794903E7 |
| 0               | 2.44002058386E7 | -1.924294728E9   | 2.76828231E9    | -1.0199262E9    | -2.2336561E7 |
| Q               | R               | S                | T               | U               | $\sigma^2$   |
| 0               | 1.26516984E9    | -2.30609168349E9 | 1.80017994E9    | 2.36480238E8    | 0.1961039246 |
| 0               | 1.15220334E9    | -2.29156944681E9 | 1.74590335E9    | 3.12037056E8    | 0.0624531426 |
| 0               | 1.09822070E9    | -2.08964942312E9 | 1.48006770E9    | 3.15604217E8    | 0.2096736985 |
| 0               | 9.85254272E8    | -2.07512472504E9 | 1.42579114E9    | 3.91160962E8    | 0.1511103404 |

Parámetros promediados:

| A             | B          | C          | D          | E            | F           | G          |
|---------------|------------|------------|------------|--------------|-------------|------------|
| -80369.931222 | 358253.87  | 7266108.8  | -532059.54 | -2.399740E7  | -3.13283E8  | 263274.316 |
| H             | I          | J          | K          | L            | M           | N          |
| 1.082086E9    | 1.442817E7 | -9.76717E8 | 0.0        | 3.141093E7   | -2.21168E9  | 2.950053E9 |
| O             | P          | Q          | R          | S            | T           | U          |
| -1.1705864E9  | -2.72569E7 | 0          | 1.128439E9 | -2.2214068E9 | 1.6519191E9 | 3.167322E8 |

**ABRIR CAPÍTULO 8 - 8.4**

