

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS GEOLÓGICAS
Departamento de Geodinámica



**MODELIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS
FINITOS Y SHP DE LOS GEOMATERIALES
FLUIDIFICADOS: APLICACIÓN A LOS
DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS DE LADERA**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Bouchra Haddad

Bajo la dirección del doctor:
Manuel Pastor Pérez

Madrid, 2007

- **ISBN: 978-84-669-3128-1**



DEPARTAMENTO DE GEODINÁMICA
Facultad de Ciencias Geológicas
Universidad Complutense de Madrid

**MODELIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS Y
SPH DE LOS GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS:
APLICACIÓN A LOS DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS DE LADERA**

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL
BOUCHRA HADDAD
Madrid, 2007

Director:

Dr. Manuel Pastor Pérez
Departamento de Matemáticas e informática
Aplicadas a la Ingeniería Civil
ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid/
Departamento de Ingeniería Computacional
Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas. CEDEX

Tutor:

Dr. Javier de Pedraza Gilsanz
Departamento de Geodinámica
Facultad de Ciencias Geológicas
Universidad Complutense de Madrid



DEPARTAMENTO DE GEODINÁMICA

Facultad de Ciencias Geológicas

Universidad Complutense de Madrid

**MODELIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS Y
SPH DE LOS GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS:
APLICACIÓN A LOS DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS DE LADERA**

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

BOUCHRA HADDAD

Madrid, 2007

Director:

Dr. Manuel Pastor Pérez

Departamento de Matemáticas e informática

Aplicadas a la Ingeniería Civil

ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Madrid/

Departamento de Ingeniería Computacional

Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas. CEDEX

Tutor:

Dr. Javier de Pedraza Gilsanz

Departamento de Geodinámica

Facultad de Ciencias Geológicas

Universidad Complutense de Madrid

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero dar las gracias a mi director de tesis, Manuel Pastor Pérez, por sus cualidades profesionales y su carácter excelente. También le doy las gracias: por haberme dado la oportunidad de pertenecer a su grupo de investigación; por tener una visión del potencial humano del doctorando que va más allá de la formación básica que éste haya recibido; por ser el padre de las líneas de investigación desarrolladas dentro del departamento de Ingeniería Computacional, así como de los programas de cálculo Geoflow2D y SPH, sobre los cuales se basa esta tesis doctoral; por haberme demostrado a lo largo de estos años paciencia, comprensión y ayuda incondicional. Por todo lo anterior y mucho más siempre podrá contar con mi más profunda amistad.

A Javier de Pedraza Gilsanz, tutor de esta tesis, por su disponibilidad, sus consejos, y por facilitar la realización de esta tesis doctoral. Asimismo, quiero darle las gracias por haberme dado la oportunidad de comenzar mi carrera de investigación dentro de su equipo de investigación y en el marco del proyecto Europeo Trident (*Three-dimensional restitution via internet of digital elevation network in towns*).

A Manuel Quecedo, José Antonio Fernández, María Isabel Herreros y Elena González por sus aportaciones a la investigación de la propagación de los deslizamientos rápidos, así como al programa de elementos finitos Geoflow2D en el cual se basa parte de esta tesis.

A David Palacios y a Esperanza Muñoz por facilitarme la información necesaria para la modelización de los lahares del Popocatépetl (México).

A Leonardo Cascini, Giuseppe Sorbino y Sabatino Cuomo, profesores de la Universidad de Salerno, por habernos facilitado la información necesaria para la simulación de la propagación de los deslizamientos ocurridos en Italia en 1998.

A José María Bodoque del pozo, por la revisión crítica de los aspectos lingüísticos de esta memoria doctoral, y sobre todo por su amistad y el apoyo que me ha demostrado en los momentos difíciles. Por todo ello que encuentre aquí mi profundo agradecimiento y que cuente siempre con mi amistad.

A Elena González, María Isabel Herreros, José Antonio Fernández y Pablo Mira por la ayuda que me han prestado y por la disponibilidad que me han demostrado. Asimismo, quisiera agradecerles

junto a Esther, Mokhtar, Ángel, Laura, Sabatino, Valentina, Susana, Diego, y todos los compañeros del departamento de Ingeniería Computacional, el ambiente agradable del cual he disfrutado a lo largo de estos años.

También, quiero dar las gracias a mis compañeros del laboratorio de Geotecnia por el tiempo que me han dedicado, para ensayar las muestras del popocatepetl, y sobre todo quisiera agradecerles su disponibilidad y simpatía.

A Belén Benito, profesora de la EUIT de topografía, por los conocimientos que adquirí durante la estancia que realicé en su departamento y por las colaboraciones establecidas entre su departamento y el departamento de Ingeniería Computacional del CEDEX.

Igualmente, quiero dar las gracias a todos los organismos y personas que nos han apoyado durante todos estos años. Al CEDEX, por poner sus medios a mi disposición para la realización de esta tesis, y al Ministerio de Ciencia y Tecnología por financiar el proyecto ANDES (REN2001-0266-C02-01) y por la ayuda económica prestada al concederme una beca de Formación de Personal Investigador. A la Dirección General de Obras hidráulicas (Ministerio de Medio Ambiente) por financiar el proyecto “Prevención de riesgos hídricos naturales e inducidos por obras hidráulicas”, al IGME por el proyecto “GALAHAD”, a la Fundación Agustín de Betancourt por las colaboraciones que tiene establecidas con el departamento de Ingeniería Computacional, al Ministerio de Educación y Ciencia por el proyecto ANDROS, a la Unión Europea por el proyecto DIGA, a la Comunidad de Madrid por el proyecto GATARVISA. En definitiva, porque también todos ellos han contribuido a hacer posible esta tesis.

A mis ex-compañeros de trabajo del departamento de Geodinamica de La UCM, de Geosys S.L. y del IGME. Especialmente, a Eduardo Chicharro, Juan Rodríguez, José Francisco Martín Duque, Miguel Ángel Sanz y Andrés Díez. A mis compañeros de la UCLM: Rosa María Carrasco, Javier de la villa y José Muñoz.

En resumen, quiero que en estas líneas encuentre mi profundo reconocimiento y mi más sincera gratitud todo aquel que haya contribuido a mi formación, así como todos los que hicieron posible que esta tesis doctoral vea luz.

A todas mis amigas y amigos, sobre todo a los que tuve la suerte de conocer en los últimos años y han enriquecido tanto mi vida, especialmente a Touria, Saida, Maha, Hanan, y un largo etcétera. Gracias por ser tan estupendos. A mis compañeros de la Asociación de Estudiantes Marroquíes por hacer que el camino sea más llevadero.

A mis hermanas y hermanos, cuñados y cuñadas por el apoyo y el cariño que me han manifestado.

A mis sobrinas y sobrinos que han llenado mi vida de ilusión y alegría.

Finalmente, quiero dedicar esta tesis a mis padres por haber creído en que el saber puede cambiar la suerte de las personas, por sus enormes sacrificios, paciencia y amor. Que sea esta tesis un pequeño reconocimiento a su lucha. Gracias por haberme enseñado a ser feliz independientemente de las circunstancias.

Bouchra Haddad

RESUMEN

Los deslizamientos constituyen uno de los procesos geológicos con mayor repercusión socioeconómica en el mundo. Por ello, la comunidad científica se ha volcado en estudiar y analizar este fenómeno con todas las herramientas desarrolladas hasta el momento. En este contexto, la modelización numérica, como herramienta de estudio y análisis, tiene por objeto reproducir este tipo de fenómenos minimizando el número de simplificaciones a considerar. Dada la complejidad del fenómeno, la simulación del mismo ha dado lugar a dos líneas de investigación; la primera trata la iniciación del movimiento y tiene por objetivo reproducir la rotura del geomaterial. Una vez desencadenado el deslizamiento, el comportamiento del geomaterial se asemeja al de un fluido y el problema puede ser descrito en el marco de la dinámica de fluidos. Este cambio de condiciones ha dado lugar a una segunda línea de investigación que se ha especializado en la simulación de la propagación del movimiento. Esta tesis se enmarca dentro de esta segunda línea de investigación, pues presenta una metodología para la modelización numérica de los geomateriales fluidificados aplicable a la simulación de la propagación de los deslizamientos rápidos de ladera.

Este fenómeno se ha descrito mediante un modelo matemático general basado en las ecuaciones de Biot. A partir de este modelo y teniendo en cuenta las características de la propagación de los deslizamientos rápidos, se han integrado las ecuaciones del modelo según la dirección vertical del flujo, obteniéndose de este modo un modelo integrado en profundidad acoplado. El modelo obtenido se completa mediante una ecuación adicional (ley reológica), que refleja el comportamiento del geomaterial considerado. El sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer orden que componen el modelo se ha resuelto mediante dos métodos numéricos alternativos; los Elementos Finitos y el SPH. La técnica de los elementos finitos se aplica a una formulación euleriana del modelo integrado en profundidad, utilizando el algoritmo de Taylor Galerkin para los términos convectivos junto con el algoritmo de Runge Kutta de 4º orden para la integración de las fuentes. La aplicación de esta técnica a dominios de gran extensión requiere un gran esfuerzo computacional. Para solventar esta limitación, se ha aplicado el método sin malla *Smoothed Particle Hydrodynamics*, o SPH, pues permite resolver y discretizar las ecuaciones del modelo integrado en profundidad en su formulación cuasi-lagrangiana.

El modelo SPH ha sido implementado en un programa de cálculo mediante el lenguaje de programación de Fortran 90. Posteriormente, ha sido validado mediante la reproducción del problema de Riemann, así como a partir de la simulación de la avalancha de material granular que tuvo lugar en Valpola (Italia) en 1987. Igualmente, se ha aplicado tanto el programa de los elementos finitos implementado en Geoflow2D como el SPH para simular los lahares acontecidos en el popocatépetl en México, habiendo sido contrastados los resultados de ambos modelos con los datos recogidos durante las campañas de campo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
---------------------	----------

CAPÍTULO I :

DESlizAMIENTOS (<i>LANDSLIDES</i>): DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS	9
1.1. INTRODUCCIÓN	9
1.2. LOS DESlizAMIENTOS (<i>SENSU LATO</i>)	14
1.2.1. DEFINICIÓN Y TERMINOLOGÍA	14
1.2.3. CAUSAS Y MECANISMOS DE ENCADENANTES	25
1.3. LOS DESlizAMIENTOS RÁPIDOS	28
1.3.1. FLUJOS DE DERRUBIOS Y COLADAS DE BARRO	30
1.3.2. AVALANCHAS GRANULARES	41
1.3.3. FLUJOS DESlizANTES:	46
1.4. ESTUDIO Y ANÁLISIS DE LOS DESlizAMIENTOS	49
1.4.1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	49

1.4.2. LA MODELIZACIÓN NUMÉRICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE LOS DESPLAZAMIENTOS RÁPIDOS:	52
BIBLIOGRAFÍA	56

CAPÍTULO 2:

<u>MODELOS INTEGRADOS EN PROFUNDIDAD PARA LA FASE DE PROPAGACIÓN</u>	69
2.1. INTRODUCCIÓN	69
2.2. PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS GEOMATERIALES	71
2.2.1. POROSIDAD:	73
2.2.2. GRADO DE SATURACIÓN:	74
2.2.3. DENSIDAD (ρ):	75
2.2.4. COEFICIENTE DE COMPRESIBILIDAD:	76
2.2.5. COEFICIENTE DE DILATACIÓN VOLUMÉTRICA:	77
2.2.6. VELOCIDAD RELATIVA DE DARCY:	78
2.2.7. TENSIONES EFECTIVAS:	79
2.2.8. LA VISCOSIDAD:	82
2.3. MODELO GENERAL:	83
2.3.1. DESCRIPCIÓN EULERIANA VERSUS DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA:	85
2.3.2. ECUACIONES DE BALANCE:	88
2.3.3. LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS O REOLÓGICAS:	94
2.3.4. LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS:	94
2.4. EL MODELO V-P_w	95

2.4.1. BALANCE DE MASA:	95
2.4.2. BALANCE DEL MOMENTO LINEAL:	100
2.5. PROPAGACIÓN Y CONSOLIDACIÓN:	103
2.6. MODELOS INTEGRADOS EN PROFUNDIDAD:	111
2.6.1. INTRODUCCIÓN:	111
2.6.2. INTEGRACIÓN EN PROFUNDIDAD DEL MODELO PROPAGACIÓN –CONSOLIDACIÓN:	115
2.6.3. SISTEMAS DE REFERENCIA A EMPLEAR:	123
BIBLIOGRAFÍA	126

CAPÍTULO 3

COMPORTAMIENTO DE GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS: MODELOS REOLÓGICOS 129

3.1. INTRODUCCIÓN:	129
3.2. MECANISMOS DE FLUIDIFICACIÓN:	132
3.3. LOS REÓMETROS Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS.	134
3.4. MODELOS REOLÓGICOS	141
3.4.1. INTRODUCCIÓN	141
3.4.2. MARCO GENERAL	142
3.4.3. FLUIDOS NEWTONIANOS	147
3.4.4. FLUIDOS DE BAGNOLD	148
3.4.5. FLUIDOS DE BINGHAM	150
3.4.6. EL MODELO VISCOPLÁSTICO GENERALIZADO DE CHEN & LING	154

3.5.	MODELOS REOLÓGICOS INTEGRADOS EN PROFUNDIDAD:	159
3.5.1.	INTRODUCCIÓN	159
3.5.2.	EL MODELO DE DESLIZAMIENTO INFINITO	161
3.5.3.	FLUIDOS NEWTONIANOS	166
3.5.4.	FLUIDOS DE BINGHAM	168
3.5.5.	EL MODELO FRICCIONAL	178
	BIBLIOGRAFÍA	181

CAPÍTULO 4

	MODELIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE SISTEMAS HIPERBÓLICOS	187
4.1.	INTRODUCCIÓN:	187
4.2.	MODELIZACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS:	190
4.3.	APROXIMACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE EDP HIPERBÓLICAS:	
	CONCEPTOS BÁSICOS	192
4.3.1.	ECUACIÓN MODELO: TRANSPORTE CONVECTIVO EN 1D.	192
4.3.2.	LA APROXIMACIÓN CLÁSICA DE GALERKIN:	194
4.3.3.	ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS.	202
4.4.	ESQUEMAS NUMÉRICOS ESTABLES EN ELEMENTOS FINITOS: EL MÉTODO DE TAYLOR GALERKIN.	211
4.4.1.	EL ALGORITMO DE TAYLOR GALERKIN PARA LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE CONVECTIVO EN 1D:	211
4.4.2.	ECUACIONES Y SISTEMAS CUASI-LINEALES. FORMAS CONSERVATIVAS.	214

4.4.3.	EL ALGORITMO DE DOS PASOS DE TAYLOR GALERKIN	218
4.4.4.	TÉRMINOS DIFUSIVOS Y TÉRMINOS TIPO FUENTE.	219
4.4.5.	EL MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE 4º ORDEN.	221
	BIBLIOGRAFÍA	224

CAPÍTULO 5

MODELIZACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LOS DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS MEDIANTE SPH 227

5.1.	INTRODUCCIÓN:	227
5.2.	APROXIMACIONES INTEGRALES DE FUNCIONES Y SUS DERIVADAS:	229
5.2.1.	ASPECTOS GENERALES	229
5.2.2.	APROXIMACIONES INTEGRALES DE FUNCIONES	230
5.2.3.	NÚCLEOS, PROPIEDADES BÁSICAS Y EJEMPLOS:	232
5.2.4.	APROXIMACIONES INTEGRALES DE LAS DERIVADAS Y DE LOS OPERADORES DIFERENCIALES:	235
5.2.5.	PROPIEDADES DE LAS APROXIMACIONES INTEGRALES:	238
5.2.6.	APROXIMACIONES INTEGRALES DE LAS ECUACIONES DE BALANCE DE MASA Y MOMENTO LINEAL:	239
5.3.	DISCRETIZACIÓN DE LAS APROXIMACIONES INTEGRALES DE LAS FUNCIONES Y SUS DERIVADAS:	242
5.3.1.	APROXIMACIÓN DISCRETIZADA DE LAS FUNCIONES.	242
5.3.2.	APROXIMACIÓN DISCRETIZADA DE LAS DERIVADAS Y LOS OPERADORES DIFERENCIALES.	248

5.3.3.	ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS APROXIMACIONES SPH _____	252
5.3.4.	DISCRETIZACIÓN SPH DE LAS LEYES DE BALANCE (MASA Y MOMENTO LINEAL)_	253
5.3.5.	LEYES REOLÓGICAS _____	257
5.4.	DISCRETIZACIÓN SPH DE LAS ECUACIONES INTEGRADAS EN PROFUNDIDAD: _	260
5.4.1.	INTRODUCCIÓN. ECUACIONES INTEGRADAS EN PROFUNDIDAD PARA DESIZAMIENTOS RÁPIDOS. _____	260
5.4.2.	DISCRETIZACIÓN SPH _____	263
	BIBLIOGRAFÍA _____	269

CAPÍTULO 6

	<u>MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE LOS FLUJOS GRANULARES: AVALANCHA DE VALPOLA (ITALIA) _____</u>	<u>273</u>
6.1.	INTRODUCCIÓN: _____	273
6.2.	ÁREA DE ESTUDIO: _____	275
6.3.	EVENTO DEL 28 DE JULIO DE 1987: _____	278
6.4.	VALIDACIÓN DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SPH: _____	284
6.5.	DATOS DE PARTIDA Y ELABORACIÓN DE LA MALLA SPH: _____	288
6.6.	RESULTADOS: _____	291
	<u>BIBLIOGRAFÍA _____</u>	<u>302</u>

CAPÍTULO 7

<u>MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE LOS LAHARES DEL POPOCATÉPETL</u>	305
7.1. INTRODUCCIÓN: _____	305
7.2. ÁREA DE ESTUDIO: _____	307
7.3. LAHARES DEL POPOCATÉPETL Y DATOS DE PARTIDA: _____	310
7.3.1. EL LAHAR DEL 1 DE JULIO DE 1997: _____	310
7.3.2. EL LAHAR DEL 22 DE ENERO DEL 2001: _____	312
7.3.3. DATOS DE PARTIDA: _____	316
7.4. SIMULACIÓN DE LOS LAHARES DEL POPOCATÉPETL MEDIANTE SPH: _____	320
7.4.1. ELABORACIÓN DE LA MALLA Y CONDICIÓN INICIAL: _____	320
7.4.2. RESULTADOS: _____	321
7.5. SIMULACIÓN DE LOS LAHARES DEL POPOCATÉPETL MEDIANTE GEOFLOW2D: _____	343
7.5.1. ELABORACIÓN DE LA MALLA Y LA CONDICIÓN INICIAL: _____	343
7.5.2. RESULTADOS: _____	345
BIBLIOGRAFÍA: _____	352
<u>CONCLUSIONES</u>	355
<u>APÉNDICE</u>	365

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Corte de línea ferroviaria debido a un flujo de derrubios en la Provincia de Yunnan (China).	11
Figura 1.2. Daños a edificaciones por impacto de bloques en pilares (Cortesía del Prof. Zhang Sucheng)	12
Figura 1.3. Fotos de las ciudades de Lourdes (Filipinas) y Armero (Colombia) después del paso de los lahares de 1991 y 1985.	13
Figura 1.4. Tipos principales de movimientos de ladera (URL, 2007).	24
Figura 1.5. Flujo de barro ocurrido en julio 2003 en Timosea Peak west of Owens Lake. California	33
Figura 1.6. Esquema de una colada de barro (Dikau, et al. 1996)	35
Figura 1.7. Flujo de derrubios ocurrido en enero de 1997 en Sierra Nevada. California	36
Figura 1.8. Ejemplo de la contribución de los deslizamientos de laderas a los flujos de derrubios (Du et al., 1987)	38
Figura 1.9. Lahar ocurrido en marzo de 1990 en Alaska	40
Figura 1.10. Clasificación de Lahares según Thouret & Lavigne 2000.	41
Figura 1.11. Avalancha de Valtellina (Italia,1987)	42
Figura 1.12. Avalancha de rocas ocurrida en Randa el Valle Matter. (Suiza)	43
Figura 1.13. Vista del flujo deslizante de Aberfan.	46
Figura 1.14. Flujo deslizante en Santa Tecla, El Salvador (2001)	48

Figura 2.1. Esquema de un suelo trifásico. _____	72
Figura 2.2. Esquema de una muestra representativa del suelo. _____	73
Figura 2.3. Esquema de los distintos estados de saturación del suelo. _____	75
Figura 2.4. Esquema de las distintas fases de deslizamientos. _____	84
Figura 2.5. Esquema de un volumen de control. _____	89
Figura 2.6. Sistema de referencia empleado en el modelo _____	115
Figura 2.7. Aproximación de la curvatura _____	125
Figura 3.1. Reblandecimiento y licuefacción de los geomateriales _____	133
Figura 3.2. Flujo tangencial simple (la velocidad es constante a lo largo del eje X) __	136
Figura 3.3. El reómetro de Bagnold (Bagnold, 1954) _____	137
Figura 3.4. Tensión tangencial vs. velocidad de deformación tangencial para distintas concentraciones lineales. _____	138
Figura 3.5. Presión dispersiva para diferentes concentraciones lineales. _____	139
Figura 3.6. Reómetro de caída vertical y reómetro de planos inclinados. (MIDI, 2004) _____	140
Figura 3.7. El criterio de Mohr-Coulomb para flujos incompresibles de Chen & Ling en condiciones de deformación plana para el caso límite. $d \rightarrow 0$ _____	158
Figura 3.8. Deslizamiento infinito _____	162
Figura 3.9. Estructura del flujo de un fluido de Bingham en condiciones tangenciales simples _____	169
Figura 3.10. Perfil de tensión tangencial _____	170
Figura 3.11. Perfil de velocidad _____	171
Figura 3.12. Aproximaciones alternativas del término de fricción con el fondo para un fluido de Bingham (Pastor et al., 2004). _____	174
Figura 3.13. Factor de corrección para un fluido de Bingham . _____	176

Figura 4.1. Transporte convectivo de una sustancia por una corriente uniforme	193
Figura 4.2. Malla de elementos finitos 1D para el problema de transporte convectivo	194
Figura 4.3.a. Evolución de la concentración de la sustancia en función del tiempo en los nodos 3 y 5.	199
Figura 4.3.b. Concentración de la sustancia en la malla en los pasos de tiempo 0, 6 y 12.	200
Figura 4.4. Malla de diferencias finitas	202
Figura 4.5. El patrón de los esquemas de diferencias finitas FTCS y FTBS	206
Figura 4.6. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema FTBS.	207
Figura 4.7. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema FTCS.	208
Figura 4.8. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema Lax Wendroff	210
Figura 5.1. Núcleos (Kernels) para aproximar la delta de Dirac	231
Figura 5.2. Núcleos en 1D: (a) Gaussiano (b) Spline cúbico	235
Figura 5.3. Malla SPH para modelizar un lahar en Italia	243
Figura 5.4. Nodos e integración numérica en la malla SPH	244

Figura 6.1. La avalancha de ValPola	275
Figura 6.2. Localización de la avalancha de ValPola en la región de valtellina (Norte de Italia)	276
Figura 6.3. Geología de la ladera Este del monte de Zandila (Azzoni et al., 1992)	277
Figura 6.4. Varios escenarios de las catástrofes naturales acontecidas en Valtellina en 1987	279
Figura 6.5. Vista de la zona de iniciación del movimiento después del evento	281
Figura 6.6. Mapa geomorfológico de la zona afectada (Azzoni et al., 1992)	283
Figura 6.7. Condición inicial para el problema de Riemann	285
Figura 6.8. Comparación de la solución SPH con la solución analítica del problema de Riemann sobre fondo seco (Pastor, 2007).	286
Figura 6.9. Comparación de la solución SPH con la solución analítica del problema de Riemann sobre fondo mojado (Pastor, 2007).	287
Figura 6.10. Topografía de la avalancha de Val Pola a escala 1/10.000 (Erismann & Abele, 2001)	288
Figura 6.11. Malla tridimensional de la topografía de Valpola antes del evento de 1987.	289
Figura 6.12. Malla tridimensional de la topografía de Valpola después del evento de 1987.	290
Figura 6.13. Situación inicial de la propagación	290
Figura 6.14. Alturas del material en el tiempo inicial.	291

Figura 6.15. Alturas del material en varios pasos del tiempo (t=8s, 16s, 24s.).	292
Figura 6.16. Alturas del material en varios pasos del tiempo (t=32s, 40s, 44s.).	293
Figura 6.17. Alturas del material en varios pasos del tiempo (t=52s, 56s, 60s.).	294
Figura 6.18. Evolución de las distancias recorridas, las velocidades y la altura del material en función del tiempo.	295
Figura 6.19. Desplazamiento vertical del material en función de su desplazamiento horizontal a lo largo del tiempo.	296
Figura 6.20. Trayectoria del nodo 76656	297
Figura 6.21. Trayectoria del nodo 75965	298
Figura 6.22. Perfil longitudinal AA'.	298
Figura 6.23. Propagación de la avalancha de ValPola según XZ (perfil AA').	299
Figura 6.24. Evolución de la altura del material a lo largo del perfil AA'.	300
Figura 7.1. El volcán Popocatepetl (cortesía de D. Palacios)	306
Figura 7.2. Localización del cinturón volcánico Trans-Mexicano (CVTM) y de los volcanes activos en el territorio mexicano.	308
Figura 7.3. Gráfico de localización de la barranca Tenenpanco-Huiloac (Muñoz, 2004).	310
Figura 7.4. Trayectoria del lahar de 1997 (Muñoz, 2004).	311
Figura 7.5. Parte del trayecto del lahar de 2001	313
Figura 7.6. Trayectoria del lahar de 2001 (E. Muñoz, 2004).	314
Figura 7.7. Depósito del lahar de 2001 sobre el depósito del lahar de 1997 (cortesía de D. Palacios)	315
Figura 7.8. Tronco arrastrado por el lahar de 2001 (cortesía de D. Palacios).	316
Figura 7.9. Levantamiento topográfico de detalle en el canal Tenenpanco-Huiloac (cortesía de D. Palacios)	317
Figura 7.10. Modelo digital del terreno elaborado a partir de la topografía disponible (surfer 8).	317

Figura 7.11. Ficha de datos de partida de las simulaciones del Popocatepetl.	319
Figura 7.12. Malla tridimensional elaborada por SPH.	320
Figura 7.13. Situación inicial de la propagación.	321
Figura 7.14. Alturas del material en función del tiempo (caso1).	323
Figura 7.15. Evolución de las distancias recorridas por el centro y el frente de la masa en función del tiempo (caso1).	324
Figura 7.16. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso1).	324
Figura 7.17. Alturas del material en función del tiempo (caso2).	325
Figura 7.18. Evolución de las distancias recorridas por el centro en función de la tensión de fluencia del material (caso1 - caso2).	326
Figura 7.19. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función de la tensión de fluencia del material (caso1 - caso2).	326
Figura 7.20. Alturas del material en función del tiempo (caso3).	327
Figura 7.21. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso3).	328
Figura 7.22. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso3).	328
Figura 7.23. Evolución de las distancias recorridas por el centro en función de la tensión de fluencia del material (caso3 – caso3b).	329
Figura 7.24. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función de la tensión de fluencia del material (caso3 – caso3b).	329
Figura 7.25. Alturas del material en función del tiempo (caso4).	330
Figura 7.26. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso3- caso4).	331
Figura 7.27. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso4).	331
Figura 7.28. Alturas del material en función del tiempo (caso5).	332

Figura 7.29. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso 5)	333
Figura 7.30. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso5).	333
Figura 7.31. Alturas del material en función del tiempo (caso6).	334
Figura 7.32. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso6).	335
Figura 7.33. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso6).	335
Figura 7.34. Comparación de la evolución de las distancias recorridas por el frente de la masa en función del tiempo.	336
Figura 7.35. Comparación de la evolución de la altura del material en función del tiempo para los distintos casos estudiados.	337
Figura 7.36. Comparación de la evolución de la velocidad en función del tiempo para los distintos casos estudiados.	337
Figura 7.37. Evolución del frente de propagación del lahar mediante SPH (caso 1)	339
Figura 7.38. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 3940m	339
Figura 7.39. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2970m	340
Figura 7.40. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2950m	340
Figura 7.41. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 3940m .	341
Figura 7.42. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2970m.	341
Figura 7.43. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2950m.	341
Figura 7.44. Áreas de inundación obtenidas por SPH (caso 1)	342
Figura 7.45. Condición inicial de la modelización con Geoflow2D.	343
Figura 7.46. Malla de elementos finitos empleada en la simulación (3D).	344

Figura 7.47. Alturas del material en función del tiempo (caso 1).	345
Figura 7.48. Evolución del frente de propagación.	346
Figura 7.49. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 3940m .	346
Figura 7.50. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2970m.	347
Figura 7.51. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2950m.	347
Figura 7.52. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 3940m .	348
Figura 7.53. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2970m.	348
Figura 7.54. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2950m.	349
Figura 7.55. Áreas de inundación obtenidas por Geoflow 2D.	349
Figura 7.56. Comparación de áreas de inundación obtenidas por SPH y Geoflow2D.	350

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1.: correlación entre clasificaciones de deslizamientos de tipo flujos (Hungar, 2001)	20
Tabla 1.2.: La clasificación abreviada de movimientos de ladera (Varnes, 1978)	22
Tabla 1.3.: velocidad de los movimientos de ladera (Cruden & Varnes, 1996)	29
Tabla 2.1. Flujo másico a través del volumen de control	90
Tabla 7.1.: valores de la densidad, la tensión de fluencia y la viscosidad según autores (Jan, 1997)	321
Tabla 7.2.: valores de la densidad, la tensión de fluencia y la viscosidad en distintos emplazamientos (Jin & Fread, 1997)	322
Tabla 7.3.: casos de estudio	322
Tabla 7.4.: comparación de las velocidades obtenidas por SPH con las velocidades teóricas estimadas.	338
Tabla 7.5. Comparación del coste del cálculo mediante Geoflow2D y SPH.	351

INTRODUCCIÓN

Los deslizamientos son procesos gravitacionales que representan una reacción del terreno ante un cambio de condiciones producido por procesos naturales, o por la acción antrópica.

La combinación de estos procesos con situaciones y objetos vulnerables, convierten a este fenómeno en un riesgo natural que se ha manifestado en forma de catástrofes naturales a lo largo de la historia de la humanidad. A este respecto, cabe destacar el incremento de las pérdidas debidas a estos movimientos, como consecuencia del aumento continuo de la población mundial que obliga a poblar zonas susceptibles a la ocurrencia de deslizamientos.

Según Cruden & Varnes (1996), los deslizamientos más catastróficos corresponden a las clases clasificadas como rápidas o extremadamente rápidas. Su peligrosidad radica en la capacidad que tienen de recorrer largas distancias en un tiempo muy pequeño y alcanzar zonas inicialmente consideradas fuera de peligro.

El único modo para reducir dichas pérdidas es tener un mejor conocimiento sobre este fenómeno, así como desarrollar técnicas más fiables de predicción de sus efectos potenciales en combinación con el diseño de medidas de protección adecuadas.

En los últimos años, la modelización numérica ha consolidado su papel como herramienta de estudio y análisis de este tipo de fenómenos, gracias a la evolución rápida de la potencia de los ordenadores, así como a la mejora de los métodos numéricos y la innovación y creación de nuevas metodologías.

Dicha modelización se tiene que hacer en dos fases; en la primera, se estudia la iniciación del deslizamiento mediante un modelo de elementos finitos no lineales, con acoplamiento de presiones intersticiales, obteniéndose la superficie de rotura, la masa movilizada y las condiciones en el momento de la rotura. Estos resultados se emplean como *Input* para el estudio de la segunda fase que consiste en analizar la propagación del movimiento, obteniéndose como resultado el trayecto de la propagación, las distancias recorridas, la velocidad, la altura del material, etc.

La observación a escala microscópica de los suelos y rocas permite entender ciertos fenómenos, pero sobre todo muestra una geometría muy variada y, por tanto, demuestra la dificultad de su análisis. Esta dificultad pone en evidencia las limitaciones de un estudio puramente microscópico, y justifica la necesidad de introducir una aproximación de medio continuo, para poder estudiar el comportamiento macroscópico de los medios porosos. Asimismo, durante la propagación de los deslizamientos, el geomaterial se mueve y se deforma de manera continua. Por tanto, su comportamiento se asemeja al de un fluido y el problema puede ser descrito en el marco de la dinámica de fluidos.

Las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos están basadas en las leyes de conservación, puesto que éstas junto con las ecuaciones constitutivas (llamadas

reológicas en el caso de los fluidos), determinan de forma completa el comportamiento de un sistema físico. De este modo, se obtiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que puede formularse tanto dentro de un marco euleriano como lagrangiano.

Los modelos obtenidos pueden ser aplicados a un gran número de situaciones generales usuales en geotecnia. En el caso de los deslizamientos de laderas, debido a su geometría y condiciones del flujo, pueden realizarse algunas aproximaciones adicionales interesantes. Un aspecto importante a tener en cuenta es que durante los deslizamientos rápidos de ladera aparecen dos fenómenos: La consolidación, o disipación de presiones intersticiales, y propagación del deslizamiento (Iverson & Denlinger, 2001; Pastor et al., 2002).

Asimismo, para describir adecuadamente la evolución del sistema pueden ser imprescindibles las tres variables del espacio (aproximación tridimensional). No obstante, podría ser suficiente una aproximación unidimensional, si predomina la influencia de una variable espacial. Como resultado, los modelos matemáticos para la fase de propagación de los movimientos rápidos de ladera, pueden consistir en:

“Formulaciones 3D completas”, “Modelos integrados en profundidad”: en los que se aplica una simplificación en la estructura vertical del flujo, integrando las ecuaciones de balance en profundidad; y “modelos 1D simplificados”.

Los modelos tridimensionales son completos, pero muy caros en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Por otro lado, los modelos integrados en profundidad son más eficientes, ya que nos proporcionan una buena relación coste-fiabilidad de resultados, que justifica su idoneidad para simular gran parte de los problemas de movimientos rápidos de ladera.

Los deslizamientos rápidos ocurren en terrenos con curvaturas importantes, o grandes pendientes, siendo las velocidades paralelas a la base del deslizamiento en cada punto.

Por lo tanto, es de suma importancia que el modelo integrado en profundidad tenga en cuenta los efectos de la curvatura del terreno.

Para determinar de forma completa el comportamiento del suelo, además de las ecuaciones de balance, el modelo matemático debe ser completado mediante una ecuación adicional, que relacione los tensores de tensiones, o sus incrementos, con los relativos a las deformaciones o sus velocidades. Se trata de las ecuaciones constitutivas que en mecánica de fluidos suelen ser denominadas modelos reológicos, siendo los más empleados el fluido Newtoniano, el de Bingham y el friccional.

Las ecuaciones del modelo integrado en profundidad que describe la propagación de un deslizamiento rápido se pueden resolver mediante los métodos numéricos disponibles, siendo el método de los elementos finitos más adecuado para las formulaciones eulerianas, mientras que el método SPH es más adecuado para la formulación cuasi-lagrangiana.

Puesto que el objetivo de esta tesis es el estudio y modelización numérica de la fase de propagación de los deslizamientos rápidos de ladera, los capítulos de esta memoria abordan los distintos aspectos de esta problemática anteriormente mencionados:

El capítulo 1:

Una vez presentada la incidencia socioeconómica de este fenómeno tanto en el mundo como en España, se intenta clarificar la terminología y definiciones relacionadas con los deslizamientos *Sensu lato (s. l.)*. Asimismo, se hace una revisión de las clasificaciones de deslizamientos encontradas en la bibliografía y se presentan las causas y mecanismos desencadenantes de este fenómeno.

A continuación, se presentan y definen los deslizamientos rápidos objeto de este trabajo. Estos movimientos, se clasifican en base a criterios mecánicos agrupándoles en;

1) Flujos de derrubios y coladas de barro, 2) Avalanchas granulares, y 3) Flujos deslizantes.

Por último, se presenta una revisión bibliográfica de la evolución de los estudios de deslizamientos en general y de su modelización en particular.

Capítulo 2:

En primer lugar se describen las propiedades físicas más destacadas de los componentes de los geomateriales. Seguidamente, se introducen las descripciones euleriana y lagrangiana, y se define el concepto de la derivada material.

Aplicando el concepto de conservación a las distintas fases del medio poroso, se escriben las ecuaciones de balance para el esqueleto sólido y las fases fluidas. Dichas ecuaciones junto con las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones cinemáticas, definen el modelo general. Éste se simplifica suponiendo que las velocidades relativas de las fases fluidas y sus aceleraciones son pequeñas, y que el suelo está saturado. De este modo, se deriva un modelo V-pw formulado en función de las velocidades del esqueleto sólido y las velocidades del fluido relativas al esqueleto (velocidad de Darcy).

A continuación, se presentarán los modelos denominados de “propagación - consolidación”, donde se supone que la disipación de presiones intersticiales tiene lugar únicamente en la dirección de la normal al terreno, y se describen los modelos integrados en profundidad, donde el modelo tridimensional se transforma en uno bidimensional mediante integración en profundidad.

Además, se presentan las formulaciones, tanto euleriana como cuasi-lagrangiana del modelo matemático integrado en profundidad que describe la propagación de un deslizamiento rápido.

Capítulo 3:

En este capítulo se presentan los modelos reológicos más relevantes capaces de describir el comportamiento de los suelos fluidificados. En este contexto, en una primera fase se describen los mecanismos de licuefacción o fluidificación, que causan la transformación del suelo de un material con comportamiento sólido a un material con comportamiento fluido. En paralelo, se describen algunos aparatos y procedimientos de laboratorio que permiten determinar las propiedades de los materiales fluidificados, así como algunos aspectos básicos del comportamiento de estos materiales.

Seguidamente, se introduce un marco general dentro del cual se pueden describir leyes reológicas como la de los fluidos Newtonianos, los fluidos de Bagnold y los fluidos tipo Bingham.

Finalmente, se integran estos modelos en profundidad al objeto de determinar los términos de “tensiones integradas en profundidad” y “fuerzas de fricción con el fondo”. Esto es debido a que las ecuaciones reológicas obtenidas no se pueden utilizar directamente en los modelos integrados en profundidad presentados en el capítulo anterior.

Capítulo 4:

En este capítulo, se presenta el método de los Elementos Finitos (EF) que pertenece junto con el método de las Diferencias Finitas (DF) a los llamados “Métodos numéricos con malla”, ya que la información se encuentra estructurada en “mallas”.

Para presentar una visión global de los esquemas de resolución en EF, así como de las dificultades que hay que afrontar, se estudia el caso de una ecuación hiperbólica simple (transporte convectivo en 1D). Dicha ecuación se aproxima mediante el método clásico de Galerkin. A continuación, se utiliza el método de las DF con el fin de reflejar, tanto los conceptos básicos de las simulaciones (estabilidad y/o inestabilidad condicionada o incondicionada, grados de precisión y difusión numérica), así como las inestabilidades numéricas que son intrínsecas al uso de ciertos esquemas. Seguidamente, se presentan los esquemas estables de EF implementados en el programa de GEOFLOW2D, para resolver las ecuaciones del problema de propagación de los deslizamientos rápidos.

Capítulo 5:

En este capítulo se presentan los conceptos básicos del método SPH haciendo hincapié en su aplicación a la modelización de deslizamientos rápidos. Por ello, en primer lugar se presentan las aproximaciones integrales de las ecuaciones de balance de masa y momento lineal. A continuación, se presenta la discretización SPH de las leyes de balance así como de la ley reológica empleada. Por último, se muestra el procedimiento seguido para la discretización, mediante el método SPH del modelo integrado en profundidad acoplado.

Capítulo 6:

En este capítulo, se presenta la validación del programa de cálculo SPH mediante un estudio comparativo entre la solución analítica del problema de Riemann en condiciones secas y mojadas y lecho horizontal con la solución numérica obtenida mediante SPH. Asimismo, se estudia la propagación de la avalancha de Valpola (Italia) mediante el método SPH utilizando como reología la de un material friccional.

Capítulo 7:

En este capítulo, se presenta la aplicación tanto del programa de elementos finitos GEOFLOW2D, así como los derivados por el método SPH al estudio de un ejemplo representativo de los flujos de derrubios y coladas de barro. Se trata de los lahares ocurridos en el Popocatépetl (México). Para simular esta clase de movimiento se recurre a una reología de Bingham.

Conclusiones:

Se presentan las conclusiones y aportaciones de esta tesis doctoral y se proponen futuras líneas de investigación.

CAPÍTULO 1

DESLIZAMIENTOS (*LANDSLIDES*):

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS

1.1. Introducción:

Términos generales como “movimientos en masa”, “movimientos de ladera” o “deslizamientos”, en el sentido amplio de la palabra, abarcan una gama de movimientos, que van desde los extremadamente lentos, como son los denominados reptaciones cuyas velocidades son del orden de centímetros por año, hasta movimientos muy rápidos, con velocidades que pueden alcanzar 60 km/h, como ocurre en los flujos de derrubios, coladas de barro, flujos deslizantes y avalanchas granulares.

La incidencia socioeconómica de los deslizamientos en el mundo ha sido analizada por Brabb & Harrods (1989). El autor atribuye a las grandes catástrofes (con más de 100 muertos) causadas por estos fenómenos, entre el año 1000 y la fecha de la publicación

de su artículo, más de 280.135 pérdidas humanas, lo cual les convierte en el tercer riesgo natural detrás de los terremotos e inundaciones en lo que a víctimas mortales se refiere. Durante el período 1990- 1995, estos movimientos supusieron 7.953 muertos en el mundo en sucesos con al menos 10 víctimas mortales, los cuartos tras las tormentas ciclónicas, los terremotos y las inundaciones, aunque bastante alejados de las cifras de éstos (Ayala & Olcina, 2002).

En España, el mayor desastre humano fue el producido por una caída en unos acantilados yesíferos en 1874 en Azagra (Navarra), con numerosos muertos. Actualmente, cada año, contando las víctimas de aludes, los deslizamientos producen de media unos 6 muertos en España (Ayala & Olcina, 2002).

Según la OEA (Organización de Estados Americanos), los daños económicos medios anuales en el período 1960 - 1989, para América Latina y Caribe, fueron de unos 100 millones de USD (*United State Dollar*), siendo en Canadá de 50 millones de USD, 6 en Suecia, 20 en Noruega y 15 en Nueva Zelanda (Schuster, 1996a). Los daños directos estimados en España a través del ITGE de 1989 a 1995 los sitúan, medidos por el coste de estabilización, en unos 36 millones de euros al año de media (Ayala & Olcina, 2002).

En este sentido, los deslizamientos rápidos causan múltiples destrozos, entre los que pueden mencionarse los siguientes:

(i) Pérdidas de vidas humanas, casas y fábricas en asentamientos humanos próximos a cañones, quebradas y valles activos.

(ii) Destrucción de tierras de labor y cultivos

(iii) Destrucción parcial de líneas de comunicación, carreteras, ferrocarriles, canales, etc. (figura 1.1.).



Figura 1.1. Corte de línea ferroviaria debido a un flujo de derrubios en la Provincia de Yunnan (China).

Como ejemplo, de movimientos rápidos catastróficos pueden citarse los flujos de derrubios acontecidos en Venezuela en diciembre de 1999 que causaron 19.000 pérdidas humanas. Asimismo, los bloques de gran tamaño arrastrados por dichos flujos dañaron seriamente los pilares de edificios al chocar con ellos causando la destrucción total o parcial de éstos (figura 1.2..).



Figura 1.2.. Daños a edificaciones por impacto de bloques en pilares (Cortesía del Prof. Zhang Sucheng)

En el caso de los lahares, el riesgo que representan se ve incrementado debido a la alta concentración demográfica que suele existir en las zonas donde se producen. Como ejemplo, considérese el caso del Nevado del Ruiz en Colombia, donde una erupción volcánica relativamente pequeña (0.01 Km^3) generó lahares de gran magnitud (0.1 Km^3). Éstos recorrieron unas distancias superiores a 100 Km, matando a 23.000 personas y destruyendo 5.000 casas. En la ciudad de Armero, a 70 km del volcán todas las estructuras que el lahar encontró en su camino fueron destruidas (figura 1.3..). En contraste, una gran erupción como la ocurrida en 1991 en el Monte Pinatubo en

Filipinas (10 Km³ de piroclastos frescos) dio lugar a lahares de tamaño relativamente pequeño, los cuales durante 3 años removilizaron 3Km³ de piroclastos frescos, inundando a más de 400 km² de campos y pueblos y obligando a más de 50.000 personas a abandonar sus hogares (figura 1.3..).



Figura 1.3.. Fotos de las ciudades de Lourdes (Filipinas) y Armero (Colombia) después del paso de los lahares de 1991 y 1985.

Las distintas disciplinas han abordado este problema desde su propio punto de vista y con sus propias herramientas. Como resultado se ha puesto en evidencia la necesidad de una visión multidisciplinaria para abarcar todo el ámbito de los movimientos de ladera tanto en su globalidad como en su detalle.

1.2. Los Deslizamientos (*sensu lato*):

1.2.1. Definición y terminología:

Utilizado en su significado amplio, el término “deslizamientos” (*landslides*) remonta a 1838, y probablemente el primer intento de clasificación ha sido realizado por J. D. Dana en 1862 (Cruden, 2003). Sin embargo, a pesar de que los deslizamientos han sido objeto de estudios e investigaciones durante más de un siglo, sigue habiendo ambigüedad en la terminología, definiciones y clasificaciones con ellos relacionadas.

En términos geológicos estrictos, estos movimientos constituyen una parte del proceso de denudación, que a su vez forma parte del ciclo de relieve (Denudación, sedimentación, petrogénesis y exposición). La literatura especializada se refiere a ellos utilizando términos como: rotura de ladera (*Slope failure* “Ward, 1945”); deslizamientos (*Landslides*, “Varnes, 1958”); pérdida de masa (*Mass wasting* “Yatsu, 1966”); movimientos en masa (*mass movement* “Hutchinson, 1968”); movimientos de ladera (*slope movements* “Varnes, 1978”) y procesos gravitacionales (Pedraza et al., 1996). En el recuadro 1, se dan las definiciones correspondientes a éstos términos.

Recuadro1:

Denudación (*denudation*): es un término antiguo que se refiere al desgaste de la masa de terreno a través del tiempo geológico. Engloba tanto la erosión como la meteorización.

Movimiento en masa (*Mass movement*): son movimientos gravitacionales ladera abajo de suelo o roca sin la intervención de la escorrentía como agente de transporte.

Perdida de masa (*Mass wasting*): suele aparecer como un sinónimo del movimiento en masa. Sin embargo, se trata de un concepto geomorfológico, a menudo utilizado en combinación con el ciclo de erosión. Se emplea para referirse a la reducción de masa de los interfluvios y diferenciar dicha pérdida de masa de la erosión fluvial. En definitiva, incluye la acción de todos los procesos erosivos no-lineales actuando en las vertientes entre dos talwegs.

Inestabilidad de Vertiente o de ladera (*Slope Instability*): se refiere a la predisposición de las laderas a experimentar movimientos en masa. Se puede determinar por el análisis de equilibrio de la ladera o por el análisis del registro histórico de su evolución.

Deslizamientos (*Landslide*): se trata del término más universal y más difundido como término que engloba la mayor parte de los movimientos en masa. Se ha utilizado, en general, para designar una categoría de movimiento en masa que excluye las reptaciones (*creep*) y las subsidencias. Según, Skempton y Hutchinson (1969) "el término genérico *landslide*, abarca los movimientos ladera abajo, de masas de rocas y/o suelos, resultantes de la rotura en los límites de la masa en movimiento". No obstante, este término puede incluir muchos movimientos donde casi todos los desplazamientos ocurren más bien por flujo que por deslizamiento propiamente dicho.

Movimientos de ladera (*Slope Movements*): éste término ha sido utilizado por Varnes (1978) para denominar a los movimientos en masa en las vertientes considerándole aparentemente genérico y neutral.

Rotura de ladera (*Slope failure*). Es otro término genérico muy utilizado. Está libre de connotaciones sobre el mecanismo de rotura, y más preciso para los movimientos de ladera en taludes artificiales (Terzaghi, 1950). Sin embargo, se utiliza más bien para referirse al proceso de rotura del material, que a un rasgo particular del terreno.

Procesos gravitacionales (Pedraza et al., 1996): desplazamiento de materiales en las vertientes, sin intervenir ningún soporte activo o medio para movilizarlos, es decir, impulsados por su propio peso; corresponde, por tanto, a una "autotraslación" bajo la acción directa de la gravedad que, en estas circunstancias, deberá considerarse un agente específico más.

Cada uno de los términos arriba mencionados presenta alguna limitación terminológica. En este sentido, algunos autores (Crozier, 1973; Varnes, 1978) consideran inadecuado el uso de la denominación "deslizamientos" como término

genérico, porque evoca un tipo específico de movimiento que se produce a lo largo de una superficie de rotura bien definida. Por otro lado, Pedraza et al. (1996) considera que las denominaciones movimientos de ladera (procesos de vertiente) y movimientos en masa (procesos o fenómenos en masa), conllevan problemas conceptuales que, lejos de facilitar la terminología, frecuentemente la complican (ver recuadro 2). Objeciones similares se han formulado para los demás términos.

Recuadro 2: (extracto del libro: Geomorfología: Principios, Métodos y Aplicaciones. Pedraza, et al. 1996)

(...)

Mediante la denominación **procesos de vertiente**, pretenden destacar la relación causa-efecto entre determinadas fisonomías (terrenos de cierta inclinación) y algunos fenómenos. La vertiente es una morfología compleja, sometida a la acción conjunta de la dinámica gravitacional, pluvio-fluvial y periglacial, fundamentalmente. Dado que todas las acciones periglaciares dependientes de la inclinación del terreno, deben asimilarse a las gravitacionales (caídas, deslizamientos o similar) o de arroyada (escorrentía nival, nivo-pluvial y pluvio-nival), sólo estos dos grupos de procesos tienen clara concomitancia con la “vertiente”. Esta precisión limita al mínimo los procesos inequívocamente asociados a dichas morfologías y, aun así, son tan variados, que constituyen un grupo heterogéneo de acciones cuyo único nexo está en la necesidad de una inclinación del terreno para su desarrollo.

Con **procesos** o **fenómenos en masa**, intentan significar el desplazamiento no selectivo en contraposición al transporte sobre “medios fluidos”, como agua y viento. Si bien es cierto que los fenómenos de autotraslación en su mayoría tienen un carácter masivo, no siempre es así; concretamente la caída de materiales es frecuente que se produzca individualizada y secuencialmente (no masiva), originando concentraciones de derrubios al pie de los escarpes.

(...)

Con todo, el término “deslizamientos” es el más universal y difundido, para designar a la mayor parte de los movimientos en masa. Por ello, en esta memoria se ha optado por utilizarlo como denominación genérica a éste fenómeno.

Las definiciones del término “deslizamiento” (*landslide*) más destacadas que se han presentado son las siguientes:

“movimiento ladera abajo perceptible de una masa relativamente seca de tierra, roca, o una mezcla de ambos.” (Sharpe, 1938)

“un desplazamiento rápido, de una masa de roca, suelo residual o sedimentos que cubren la ladera, sobre dicha ladera el centro de gravedad de la masa avanza hacia abajo y hacia el exterior (“*outward o downward*”).” (Terzaghi, 1950)

“significa el movimiento ladera abajo y hacia el exterior de los materiales que forman la vertiente compuestos de roca, suelos, rellenos artificiales, o la combinación de éstos materiales”. (Varnes, 1958)

“movimientos rápidos de rocas deslizando, estando separadas de la parte estacionaria subyacente de la ladera por un plano de separación definido” (Záruba & Mencl, 1969)

“es un término general que cubre una amplia variedad de morfologías y procesos de movimientos en masa. Engloba el transporte ladera abajo, moderadamente rápido a rápido, causado por las tensiones volumétricas gravitacionales. Frecuentemente, el material desplazado se mueve sobre una zona relativamente estrecha o una superficie de rotura”. (Gary et al., 1972) (Coates, 1977)

“el movimiento de una masa de rocas, derrubios o tierra ladera abajo”. (Cruden, 1991)

Los deslizamientos presentan una problemática para las comunidades, las administraciones locales, y las compañías de seguros (Aleotti & Chowdury, 1999). Por ello, se ha buscado una definición legal de ellos. Ésta ha sido proporcionada en la cláusula 2 del proyecto de ley de seguros de Nueva Zelanda en 1989, la cual establece que:

deslizamiento significa desplome de una masa de tierra por causas distintas al hundimiento, contracción o compactación del suelo; que incluye el movimiento en cualquier colina, montículo, orilla, ladera, acantilado de suelo, roca o masa de ambos

que antes del movimiento formaban una parte integral de la colina, montículo, orilla, ladera o acantilado. (Griffiths, 1999)

De éstas definiciones podemos concluir que el término deslizamientos puede ser equivalente al de movimientos en masa, excluyendo de éstos los movimientos a gran escala de origen tectónico, los que involucran la subsidencia o otras formas de hundimiento de la superficie de la tierra, además de todos los fenómenos de transporte en masa y avalanchas de nieve.

1.2.2. Clasificación de los deslizamientos:

La clasificación es una herramienta potente por su capacidad de transmitir ideas. Las clasificaciones establecen conceptos, y de ahí proviene su validez y su peligro. El objetivo de una clasificación es ofrecer una terminología no ambigua. Sin embargo, su proliferación en los últimos años en casos ha llevado a un resultado contrario al esperado (Crozier, 1986).

Los movimientos en masa presentan infinidad de modalidades, lo cual dificulta una clasificación unitaria de los mismos. En este contexto, y aunque en todos los casos haya unos principios comunes, puede decirse que hay tantas clasificaciones como grupos u objetivos (investigación, aplicación, riesgos, etc.); así puede citarse los de autores como: Sharpe, 1938; Ward, 1945; Campbell, 1951; Varnes, 1958; Beverage & Culbertson, 1964; Yatsu, 1966; Hutchinson, 1968; Skempton & Hutchinson, 1969; Zaruma & Menci, 1969; Crozier, 1973; Varnes, 1978; Hansen, 1984; Bradley & McCutcheon, 1985; Pierson & Costa, 1987; Sheko, 1988; Hutchinson, 1988, etc.

Los criterios más utilizados para llevar a cabo dichas clasificaciones son: a) el mecanismo desencadenante; b) el tipo de material y / o el tipo de movimiento; c) la

composición de los sedimentos; d) la proporción de la fracción sólida; e) la velocidad; f) la duración; g) la pendiente; h) el comportamiento del material; i) los procesos físicos durante el flujo; j) las características de la cuenca; k) la morfología del material desplazado o la de la superficie del movimiento; l) las propiedades geotécnicas.

A partir de esos criterios, muchos autores han generado clasificaciones generales: es el caso de la de Sharpe (1938) que se basa en el tipo de movimiento y el agente de transporte. Clasificaciones con nomenclaturas similares a la de Sharpe han sido formuladas por Ladd (1935) y Ward (1945). Hansen (1984) proporcionó una buena clasificación y descripción de los deslizamientos basada en factores como el clima, el tamaño del material, y la geología; estos factores han sido utilizados como principales por otros muchos autores.

Frente a las anteriores, otras clasificaciones se han basado en las variables que definen la magnitud del evento (volumen total, la descarga máxima, el área inundada...) y aplicar así los trabajos a fines específicos. Pierson (1987), incluye una clasificación de este tipo para diferenciar los tiempos de recorrido de los lahares. De este modo, utilizando la correlación positiva existente entre la velocidad y la magnitud de los flujos de derrubios diferencia lahares moderados ($102 - 103 \text{ m}^3/\text{s}$), grandes ($103 - 104 \text{ m}^3/\text{s}$), muy grandes ($104 - 106 \text{ m}^3/\text{s}$), y extremadamente grandes ($> 106 \text{ m}^3/\text{s}$).

En resumen, puede decirse que no existe una universal, y todas las clasificaciones disponibles pueden dar lugar a dudas tanto en la terminología como en las características atribuidas a cada tipo de movimiento. Las clasificaciones más aceptadas hoy en día son las de Varnes (1958, 1978) y la de Hutchinson (1968, 1988). Hungr, et al., (2001), intenta correlacionar la terminología utilizada por ambos autores (Tabla 1.1.), haciendo el esfuerzo de dar definiciones más precisas.

VARNES (1987)	HUTCHINSON (1988)	HUNGR et al. (2001)
Flujos de arena húmeda y de limos (<i>wet sand, silt flow</i>)	Flujo deslizante (<i>flow slide</i>)	Flujos deslizantes de arenas y limos (<i>sand, silt flow slide</i>)
Flujos de tierra (<i>rapid earth flow</i>)	Flujo deslizante (arcilla) (<i>flow slide "clay"</i>)	Flujos deslizantes de arcillas (<i>clay flow slide</i>)
Flujo de loess (<i>Loess flow</i>)	Flujo deslizante (loess) (<i>flow slide "loess"</i>)	Flujo deslizante de loess (<i>loess flow slide</i>)
Flujo de arena seca (<i>dry sand flow</i>)	-----	Deslizamiento de arena seca (<i>dry sand slide</i>)
Flujo de tierra (<i>earth flow</i>)	Deslizamiento de barro (<i>mudslide</i>)	Flujo de tierra (<i>earth flow</i>)
-----	Flujo de barro (<i>mud flow</i>)	Flujo de barro (<i>mud flow</i>)
Avalancha de derrubios (<i>debris avalcnche</i>)	Flujo de derrubios de laderas (<i>Hillslope debris flow</i>)	Avalancha de derrubios (<i>debris avalcnche</i>)
Flujo de derrubios (<i>debris flow</i>)	Flujo de derrubios (<i>debris flow</i>)	Flujo de derrubios (<i>debris flow</i>)
-----	Flujos hiperconcentrados (Hyperconcentrated flow)	Inundación de derrubios (debris flood)
Avalancha de rocas (<i>Rock avalcnche</i>)	sturzstorm	Avalancha de rocas (<i>Rock avalcnche</i>)

Tabla 1.1.: correlación entre clasificaciones de deslizamientos de tipo flujos (Hungr, 2001)

Sobre la base de los objetivos planteados en cada caso, se debe de trabajar con una clasificación u otra. Así, la de Hutchinson se puede denominar como una “clasificación geotécnica” y es adecuada para el análisis de estabilidad, ya que los tipos de movimientos reflejan diferencias geotécnicas relevantes (Crozier,1986).

Las clasificaciones generales, por su parte, son idóneas para las fases iniciales del análisis, así como en estudios multiobjetivo. En este sentido, destaca la de (Varnes, 1978; Cruden & Varnes, 1996), que ha sido adoptada por las sociedades internacionales de Geotecnia "*International Geotechnical Societies*". UNESCO Working party on World Landslide Inventory" (WP/WLI) (UNESCO, 1993).

Esta clasificación, cataloga los movimientos de ladera según el mecanismo y tipo de rotura en (Tabla 1.2.):

TIPO DE MOVIMIENTO			TIPO DE MATERIAL		
			ROCA	SUELO	
				Grosos predominantes	Finos predominantes
DESPRENDIMIENTOS			Desprendimiento de rocas	Caída de derrubios	Caída de tierra
VUELCOS			Vuelco de rocas	Desplome de derrubios	Desplome de tierra
DESPLAZAMIENTOS	ROTACIONALES	Pocas unidades	Hundimiento de rocas	Derrumbe de derrubios	Derrumbe de tierra
	TRASLACIONALES		Deslizamiento de bloque rocoso	Deslizamiento de bloque de derrubios	Deslizamiento de bloque de tierra
		Muchas unidades	Deslizamiento rocoso	Deslizamiento de derrubios	Deslizamiento de tierra
EXTENSIONES LATERALES			Extensión lateral en rocas	Extensión lateral en derrubios	Extensión lateral en tierra
FLUJOS			Flujos de roca (reptación profunda)	Flujos de derrubios	Flujos de tierra
				(reptación de suelo)	
COMPLEJOS			Combinación de por lo menos dos tipos principales de movimiento		

Tabla 1.2.: La clasificación abreviada de movimientos de ladera (Varnes, 1978)

1. **Desprendimiento:** se define por el movimiento de una porción de suelo o roca, en forma de bloques aislados o bien masivamente, que en gran parte de su trayectoria desciende en caída libre, volviendo a entrar en contacto con el terreno (Corominas, 1989a). (Figura 1.4..)

2. Los **vuelcos** son movimientos de rotación hacia el exterior de una unidad o de un conjunto de bloques. El movimiento de rotación se produce alrededor de un eje pivotante situado por debajo del centro de gravedad de la masa movilizada. (Figura 1.4..)
3. Los **deslizamientos** (*sensu stricto*) son movimientos descendentes relativamente rápidos de una masa de suelo o de roca: Estos movimientos tienen lugar a lo largo de una o varias superficies definidas, que son visibles o que pueden ser inferidas razonablemente o bien corresponder a una franja relativamente estrecha, considerándose que la masa movilizada se desplaza como un bloque único. Según la trayectoria descrita, los deslizamientos pueden ser rotacionales o traslacionales. (Figura 1.4..)
4. El movimiento dominante en las **expansiones laterales** es la extrusión plástica lateral, acomodada por fracturas de cizalla, o de tracción, que en ocasiones pueden ser de difícil localización. (Figura 1.4..)
5. Los **flujos** o **coladas** son movimientos de una masa desorganizada con abundante presencia de agua, y donde no todas las partículas se desplazan a la misma velocidad, ni sus trayectorias tienen porque ser paralelas. El material se comporta como un fluido, sufriendo una deformación continua, sin presentar superficies de rotura definidas (**deformación difusa**). Como resultado, la masa movilizada no conserva su forma en su movimiento descendente, adoptando a menudo morfologías lobuladas. (Figura 1.4..)
6. Los **movimientos complejos**: ésta terminología ha sido utilizada para describir la combinación de distintos tipos de movimientos en masa; es decir cuando determinado movimiento evoluciona hacia otro tipo a medida que la masa se mueve ladera abajo. De este modo, se distinguen de los movimientos

compuestos ya que éstos indican que distintos movimientos ocurren simultáneamente en distintas partes de la masa movilizada. Según Dikau et al., (1996) las avalanchas rocosas y los flujos deslizantes se inscriben dentro de los movimientos complejos.



Figura 1.4.. Tipos principales de movimientos de ladera (URL, 2007).

1.2.3. Causas y mecanismos desencadenantes:

La susceptibilidad de que se produzcan deslizamientos está condicionada por la estructura geológica, la litología, las propiedades geomecánicas del material (resistencia al corte, deformabilidad, grado de alteración y fracturación, etc.), las condiciones hidrogeológicas y el relieve de un área determinada. En este contexto, las regiones montañosas son las zonas más propensas a los movimientos en masa, ya que hace falta cierta pendiente para que se produzcan estos procesos gravitacionales. Sin embargo, es suficiente una pendiente bastante baja para que algunos tipos de movimientos tengan lugar como es el caso de las coladas de barro.

Los factores condicionantes antes mencionados definen la predisposición del terreno a sufrir deslizamientos, representando éstos una reacción del terreno ante la actuación de un factor desencadenante.

Los factores desencadenantes, tanto si son procesos naturales como si son debidos a la acción antrópica, someten al terreno a un cambio de condiciones. Dichos cambios pueden afectar a las propiedades del material (degradación, alteración, etc.), a la geometría, por erosión o por la actividad humana (p. ej. excavación), etc. Asimismo, los cambios en las tensiones efectivas, inducidos por variación de las tensiones totales o de las presiones intersticiales juegan un papel determinante.

Dentro de los factores desencadenantes destaca el papel destabilizador del agua. Ésta, bajo sus distintas manifestaciones (lluvias, inundaciones, cambios del nivel de agua por llenado de embalses, etc.), somete a los geomateriales a altas presiones intersticiales, y en consecuencia reduce sus resistencias al corte. Por otro lado, el agua aumenta el peso del terreno que de éste modo se ve sujeto a mayores esfuerzos de corte. Además, tiene un efecto erosivo que provoca el debilitamiento químico o físico

del terreno. En éste sentido, cabe mencionar la meteorización y fracturación del material causada por los procesos de hielo-deshielo estacionales.

La manifestación más relevante del agua, en lo que a estabilidad de laderas se refiere, es sin duda las fuertes lluvias capaces de desencadenar movimientos superficiales, desprendimientos de bloques rocosos, reactivaciones de antiguos deslizamientos, así como el desencadenamiento de nuevos deslizamientos o de movimientos de gran magnitud.

El tipo y magnitud de los movimientos desencadenados por las lluvias dependen de las características de éstas (volumen, intensidad, distribución), así como del régimen climático del área afectada.

En España, diversos autores han establecido relaciones causa-efecto entre los factores lluvia antecedente e intensidad-duración de un chubasco. Así, Corominas & Moya (1999) determinaron para la cuenca alta del río Llobregat (Pirineos Orientales), que de no existir lluvia antecedente al evento en cuestión, se requieren chubascos de 190 mm en 24 horas para que se formen superficies de rotura, siendo necesarias precipitaciones superiores a 300 mm en un periodo de 24-48 horas, para que tengan lugar deslizamientos generalizados de carácter superficial. Por el contrario, el desencadenamiento de deslizamientos por lluvia antecedente, requiere de una precipitación acumulada de 200 mm durante varias semanas. Si se da esta circunstancia, un chubasco de intensidad moderada (p.e. una precipitación total en 24 horas igual a 40 mm) puede dar lugar a coladas de barro, así como a deslizamientos de tipo rotacional y traslacional, afectando a formaciones geológicas de litología arcillosa y limo-arcillosa.

Ferrer & Ayala (1996), realizaron el mapa de susceptibilidad a la ocurrencia de movimientos en masa inducidos por lluvia. Los criterios empleados fueron la máxima precipitación en 24 horas (para flujos y deslizamientos superficiales) y la infiltración neta anual (para nuevos deslizamientos y reactivaciones de antiguos movimientos profundos). Además, Ferrer & Ayala (1997), mediante al análisis de los datos de precipitación para las fechas anteriores a los movimientos (días, semanas y meses previos), establecieron a nivel español los umbrales generales de precipitación, que dan lugar al desencadenamiento de las inestabilidades naturales de nueva generación, así como los relativos a las reactivaciones de deslizamientos acontecidos en el pasado.

Por otro lado, en las regiones sísmicamente activas los terremotos suelen representar el factor desencadenante principal de los distintos tipos de deslizamientos (desprendimientos, deslizamientos *sensu stricto*, flujos, avalanchas rocosas, etc.). Las ondas sísmicas pueden producir movimientos en una gama muy amplia de condiciones. De hecho, son capaces de desestabilizar tanto terrenos con pendientes pronunciadas como áreas con laderas suaves o incluso prácticamente planas. Asimismo, cuando las sacudidas sísmicas afectan a materiales sueltos éstos experimentan procesos de licuefacción.

Las áreas volcánicas, por su parte, son propensas a los deslizamientos provocados, entre otras causas, por la fusión de nieve y de hielo debida a la actividad volcánica, y por los eventos extremos de lluvia. Los movimientos que tienen lugar en éstas áreas suelen ser de gran magnitud y alcanzan altas velocidades. Esto se explica por la predisposición de los materiales volcanoclásticos (cenizas, piroclastos) a ser movilizadas y por su estado metaestable.

La actividad humana constituye uno de los factores desencadenantes que aunque actuando de forma puntual (taludes, presas, edificios, etc.), sus consecuencias suelen ser bastante espectaculares. La manipulación del equilibrio natural por parte del hombre tanto por los cambios de la geometría y pendiente del terreno (desmontes y terraplenes), como por los cambios de las condiciones hidrogeológicas (presas, irrigación, etc.) o por cambios en las fuerzas estáticas (excavación y sobrecargas), pueden provocar distintas tipologías de inestabilidades induciendo nuevos deslizamientos y acelerando y/o activando antiguos movimientos.

1.3. Los Deslizamientos Rápidos:

En el diagrama representativo de Sharpe (1938), este autor aplicó una escala de medida de la velocidad del movimiento, según la cual éste podía ser imperceptible o perceptible. En este último caso, hablaba de movimiento lento, rápido o muy rápido. Varnes (1978), propuso una escala de movimiento explícita, en la que, la velocidad oscila de muy lenta a muy rápida (Tabla 1.3.). Dicha escala, la modificó posteriormente con la colaboración de Cruden (1996). Además de cambiar las velocidades típicas de los movimientos (por ejemplo, la velocidad típica de los movimientos muy rápidos pasó de 3m/s a 5m/s), Cruden & Varnes (1996) definieron para cada clase de movimiento los daños potenciales correspondientes. (Tabla 1.3.)

Dentro de los deslizamientos rápidos y específicamente los flujos en masa, la literatura especializada presenta todo un abanico de términos (flujos, transporte sólido, flujos hiperconcentrado, flujos o coladas de barro (mudflows), flujos de derrubios (Debris flows), lahares, flujos granulares, deslizamientos, avalanchas rocosas, avalanchas de derrubios, etc.). De modo que a veces es difícil distinguir un fenómeno de otro, por causa de sus características peculiares, debido a la falta de consenso sobre una clasificación específica.

clase	Descripción	Velocidad (mm/seg)	Valores típicos	Daños probables
7	Extremadamente rápidos	5×10^3	5 m/s	Violento y catastrófico. Destrucción de edificios por impacto de la masa deslizada. Número elevado de muertos.
6	Muy rápidos	5×10^1	3 m/min	Es difícil escapar. Algunos muertos. Destrucción de edificios y estructuras.
5	Rápidos	5×10^{-1}	1,8 m/h	Es posible escapar. Destrucción de edificios y estructuras.
4	Moderado	5×10^{-3}	13 m/mes	Algunas estructuras pueden mantenerse temporalmente.
3	Lento	5×10^{-5}	1,6 m/año	Pueden aplicarse medidas correctoras. Las estructuras y edificios pueden mantenerse.
2	Muy lento	5×10^{-7}	16 mm/año	Las estructuras permanentes no resultan dañadas en general.
1	Extremadamente lento			Imperceptible si no es con instrumentación. Es posible la construcción con precauciones

Tabla 1.3.: velocidad de los movimientos de ladera (Cruden & Varnes, 1996)

Puesto que el objetivo de éste trabajo es la modelización numérica de los deslizamientos rápidos, la clasificación con la que se va a trabajar se basa en criterios mecánicos, los cuales nos permiten agrupar estos movimientos en:

- Flujos de derrubios y coladas de barro (*Debris-flow & Mudflow*).
- Avalanchas granulares.
- Flujos deslizantes.

A continuación, se definen y se presentan éstas tres tipologías.

1.3.1. Flujos De Derrubios y Coladas De Barro (*Debris-flow & Mudflow*):

Se trata de un fenómeno intermedio entre los flujos hiperconcentrados y los deslizamientos *sensu stricto* s. s., diferenciándose claramente de ambos por: a) la velocidad; b) el tipo de depósitos; c) el tipo de flujo (Coussot, 1996).

Estos flujos se diferencian de los flujos hiperconcentrados y las arroyadas por:

1. Su naturaleza transitoria, ya que se presentan en forma de oleadas periódicas. Esta peculiaridad ha sido explicada en la bibliografía de distintos modos (Engelund & Wan, 1984; Davies, 1986; Trowbridge, 1987; Coussot, 1992; Wang et al., 1993): Inestabilidad hidráulica típica de flujos suficientemente rápidos en laderas abruptas, comportamiento peculiar del material que da lugar a flujos inestables, oleadas originadas por una secuencia de procesos de erosión-transporte.
2. El número de fases desde el punto de vista mecánico: la velocidad relativa entre dos elementos próximos (agua y sólido) dentro de la masa fluyente es pequeña en el caso de los flujos de derrubios y de barro (Pierson, 1986), por lo que toda la masa experimenta grandes deformaciones casi continuas. Por lo tanto estos flujos involucran una mezcla de agua-derrubios, que se podría aproximar a una fase única. Éste no es el caso de los flujos hiperconcentrados y las arroyadas normales, donde el perfil de velocidad de las partículas gruesas es muy distinto al del agua circundante. A pesar de que en algunas ocasiones, éste caso se puede encontrar en los flujos de derrubios, sin embargo la fracción sólida transportada de este modo es

despreciable. En efecto, bloques de unos metros pueden ser transportados en la masa en la cual parecen flotar.

3. La estructura del depósito: los depósitos resultantes no presentan una segregación significativa, ya que los materiales de los flujos de derrubios poseen altas densidades, son muy viscosos, y durante el movimiento se ven sometidos a altos esfuerzos de corte quedando mezclados los distintos grupos texturales (Costa, 1984; Coussot, 1992). No obstante, en muchos casos la concentración de los bloques grandes es más importante en el frente de dichas oleadas. Por otro lado, los depósitos contienen una distribución de tamaño de granos que abarca desde las arcillas hasta los grandes bloques (Johnson, 1970; Takahashi, 1981; Pierson, 1986; Phillips & Davies, 1991; Coussot, 1992).
4. La proporción de la fracción sólida: La proporción de la fracción sólida en los flujos hiperconcentrados oscila entre 1 y 25 %, mientras que en los flujos de derrubios y de barro representa el 50% al 90%. La diferencia es menos acentuada, cuando se comparan el frente y cuerpo de un flujo de derrubios monofásico con su cola representada por un flujo hiperconcentrado bifásico (Coussot & Meunier, 1996)

Por otro lado, éstos flujos se diferencian de los deslizamientos s.s. (*sensu stricto*) y las avalanchas granulares por:

1. Velocidad: hay una clara diferencia entre la velocidad media de los flujos de derrubios que oscila entre 0.5 y 10 m/s (Sharp & Nobles, 1953; Johnson, 1970; Morton & Campbell, 1974; Khang, 1980; Pierson, 1980; Takahashi, 1981; Ishikawa, 1982; Hong et al., 1985; Pierson, 1986), la velocidad de los deslizamientos s. s. (inferior a unos centímetros por día) y la de las avalanchas de derrubios que superan los 10 m/s (Kobayashi, 1992; Evans, 1993). Además los flujos de derrubios están saturados en agua por lo que el papel que desempeña ésta es primordial.

Mientras que en el caso de las avalanchas la proporción de agua (si existe) con respecto al aire es pequeña.

2. Tipo de movimiento: los deslizamientos s. s. tienen lugar principalmente a favor de superficies o planos de rotura. La masa experimenta pequeñas deformaciones y la estructura inicial del material puede ser parcialmente observada en el depósito final. Éste se presenta en forma de un aglomerado de piezas más o menos grandes de material no deformado. Mientras que la estructura inicial de los depósitos resultantes de los flujos de derrubios y de barro ha sido borrada y cambiada durante el movimiento. La masa inicial de éstos experimenta grandes deformaciones durante su largo recorrido.
3. Aspecto del depósito: los rasgos morfológicos de los flujos de derrubios han sido estudiados por Johnson & Rodine (1984). Entre otras observaciones, éstos autores subrayaron que por causa de la tensión de fluencia, las partes laterales del flujo tenderán a detenerse cuando la fuerza a la cual están sometidos disminuye. Esta observación ha sido utilizada por Johnson & Rodine (1984) para demostrar que la aproximación cuasi-estática (es decir el uso del modelo de coulomb para reproducirlos) es inapropiada para estudiarlos y debe de ser reemplazada por una aproximación de la mecánica de fluidos.

Dentro de éste grupo podemos diferenciar dos tipos de movimientos según la granulometría del material: las coladas de barro o tierra y los flujos de derrubios.

- ***Coladas de barro o tierra:***

Se trata de flujos constituidos por un material relativamente cohesivo, que contiene un mínimo de 50% de partículas del tamaño de arenas, limos y arcillas (Varnes, 1978; Campbell et al., 1989). La densidad del material movilizado oscila entre 0,5 y 1,5 t/m³. Puesto que este tipo de movimiento en masa se produce en materiales finos fácilmente

movilizables, las velocidades alcanzadas pueden ser bastante altas (varios metros por segundo), recorriendo de éste modo varios kilómetros a favor de la red de drenaje, incluso cuando las pendientes son bajas.



Figura 1.5.. Flujo de barro ocurrido en julio 2003 en Timosea Peak west of Owens Lake. California

Las condiciones óptimas para el desencadenamiento de éste tipo de deslizamiento son: la disponibilidad de materiales adecuados, pendientes abruptas, y factores desencadenantes (eventos extremos de lluvia o sismicidad). Las áreas fuente típicas son (Dikau et al., 1996):

- Laderas abruptas (25° - 40°) formadas por materiales en los que predominan las fracciones más finas (arcillas) no consolidadas o poco consolidadas.
- Laderas volcánicas afectadas o no por erupciones volcánicas.
- Permafrost en áreas alpinas.
- Cabeceras en torrentes de montaña.
- Las zonas de contacto con farallones de roca o canchales.

El comportamiento de estos flujos es normalmente visco-plástico (Dikau et al., 1996) y el umbral para el cese del movimiento es función de la viscosidad y resistencia al corte del material. Además, Las coladas de barro o flujos cohesivos, se caracterizan por su tendencia a fluir a impulsos, concentrando la rotura en los límites de la masa movilizadora y formando tapones rígidos alrededor de su centro.

En síntesis, el patrón que siguen se divide en tres fases: a) colapso en zona de la cabecera; b) flujo rápido a favor de la red de drenaje; c) depósito del material en forma de lóbulos de acumulación (Figura 1.6.).

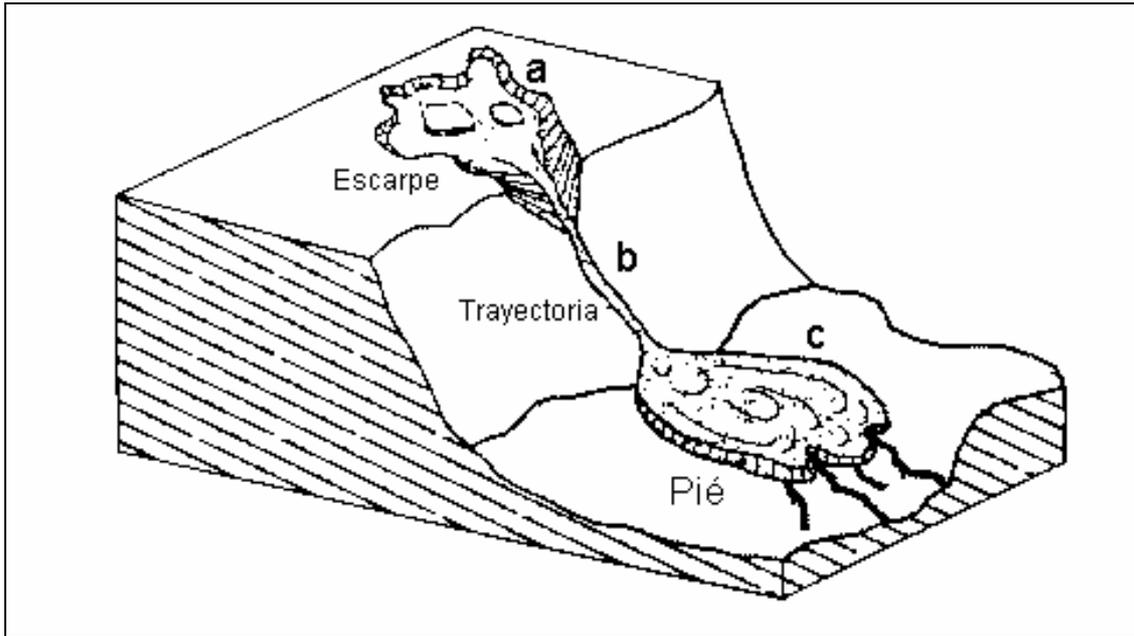


Figura 1.6.. Esquema de una colada de barro (Dikau, et al. 1996)

- ***Flujos de derrubios:***

Se trata de coladas formadas por material fino (arena, limos y arcillas), y material grueso (gravas y cantos rodados) con un contenido variable de agua. Dichas coladas se mueven ladera abajo, normalmente en forma de oleadas inducidas por la gravedad y el colapso instantáneo (Dikau et al., 1996).



Figura 1.7.. Flujo de derrubios ocurrido en enero de 1997 en Sierra Nevada. California

Se desencadenan, por la ocurrencia de eventos extremos de lluvia, o por la fusión repentina del manto nival, pudiendo llegar a movilizar un volumen importante de material (Hutchinson, 1988). La frecuencia de ocurrencia de estos eventos está controlada por la tasa de acumulación de material en los canales, así como la recurrencia de los eventos climáticos desencadenantes. La duración e intensidad de las lluvias, junto con la cantidad de lluvia antecedente al evento desencadenante, son los factores principales que controlan el desencadenamiento éstos flujos. Caine (1980), utilizando datos correspondientes a 73 deslizamientos superficiales y flujos de derrubios, encontró un umbral de intensidad de lluvia (I) – duración de lluvia (D) expresado por:

$$I = 14.82 D^{-0.39} \quad (I \text{ en mm/h y } D \text{ en horas})$$

Este umbral es válido para duraciones de eventos comprendidos entre diez minutos y diez días. Sidle et al. (1985) añadieron el efecto de la lluvia antecedente por medio de nuevas líneas críticas, mostrando la humedad necesaria para la saturación del suelo. Bajo condiciones antecedentes relativamente secas, estiman que se necesitan 125 mm de lluvia para llegar a la saturación y el desencadenamiento del flujo.

Muchos flujos de derrubios comienzan como deslizamientos traslacionales o rotacionales (Johnson & Rodine, 1984). Las roturas tienen lugar en las caras escarpadas de laderas (superiores a 15-20°) por afluencias relativamente rápidas de grandes cantidades de agua (Costa, 1984). En la Figura 1.8., se puede contemplar un ejemplo de la contribución de los deslizamientos s.s. al flujo de derrubios, aportando una cantidad importante de material.



Figura 1.8.. Ejemplo de la contribución de los deslizamientos de laderas a los flujos de derrubios (Du et al., 1987)

El mecanismo exacto que provoca que la rotura de una ladera evolucione a un flujo de derrubios no está muy claro. No obstante, puede explicarse por la dilatancia, y la incorporación de agua adicional a través de las grietas de tracción que aparecen con el deslizamiento, causando la pérdida de estructura y la licuefacción (Costa, 1984).

Los depósitos resultantes están bien graduados, presentando un pequeño contenido en arcilla, por lo general inferior al 5%. La concentración de sólido por volumen esta en

el rango de 25-86% aproximadamente, y la proporción de sólidos por peso es de 35-90% (Costa, 1984). Los flujos de derrubios pueden tener viscosidades que superan las 100 Pa.s y densidades que van de 2.0 a 2.4 g/cm³ (Sharp & nobles, 1953; costa, 1984).

Parte de los derrubios gruesos forman crestas laterales (*levees*) a ambos lados del trayecto. Cuando se produce una ruptura de pendiente, los flujos de derrubios de baja viscosidad pierden su capacidad portante dando lugar a la formación de abanicos aluviales (Costa, 1984). Por el contrario, los flujos de derrubios muy viscosos pueden transportar grandes cantos rodados, árboles e incluso coches.

- ***Lahares:***

Cuando se originan en laderas volcánicas, los flujos de derrubios y coladas de barro contienen materiales volcanoclásticos y se denominan **LAHARES**. La comunidad científica define a éstos como flujos rápidos de una mezcla de agua y derrubios altamente concentrados, que tienen lugar en laderas volcánicas (Thouret & Lavigne, 2000). Estos autores presentaron una clasificación de los lahares basada en el mecanismo desencadenante así como en el tiempo que ha transcurrido entre la erupción volcánica y el evento desencadenado (Figura 1.10.).



Figura 1.9.. Lahar ocurrido en marzo de 1990 en Alaska

Los mecanismos desencadenantes de los lahares se pueden clasificar en dos grupos: Por un lado, un aporte repentino de grandes volúmenes de agua. Dicha agua puede provenir de (1) la fusión del manto nival o glacial, (2) drenaje de lagos volcánicos debido a la rotura de los cráteres, (3) las erupciones subglaciales a su vez pueden formar lagos subglaciales, (4) y por último las fuertes lluvias que tienen lugar después de la erupción. Y por otro lado los lahares pueden estar inducidos por avalanchas de rocas o por deslizamientos s.s. además del mecanismo desencadenante la iniciación de los lahares requiere de una adecuada fuente de agua, material fácilmente movilizable, y laderas abruptas en el área fuente. Cabe mencionar, que en la bibliografía se hace uso de éste término no solo para designar los flujos de derrubios y de lodos originados en laderas volcánicas, sino también para referirse a flujos hiperconcentrados siendo la diferencia principal entre ambos la proporción de agua que contienen. En este sentido, se propone que el límite entre éstos flujos sea del orden de 50% a 60% de proporción de la fracción sólida en la mezcla.



Figura 1.10.. Clasificación de Lahares según Thouret & Lavigne 2000.

1.3.2. Avalanchas Granulares:

Se trata de una oleada extremadamente rápida, de grandes masas de rocas o derrubios que tiene su génesis en el colapso de laderas o acantilados. Los aludes de roca, se pueden producir como consecuencia de un deslizamiento rocoso de gran envergadura (gran escala) o del desprendimiento del cuerpo rocoso, que como resultado de las tensiones generadas durante el movimiento se convierte en una masa de derrubios, que continúa avanzando a modo de avalancha. Otra forma de desencadenarse éste fenómeno es por la movilización repentina de los depósitos de derrubios, debido a la caída de una masa rocosa en equilibrio precario o por actividad sísmica.



Figura 1.11.. Avalancha de Valtellina (Italia,1987)

La velocidad de estas avalanchas supera los 10 m/s (Kobayashi, 1992; Evans, 1993). La distancia recorrida es del orden de Kilómetros y el volumen depositado puede exceder de $1 \times 10^6 \text{m}^3$, cubriendo una superficie total de más de 0.1Km^2 . La masa total depende de cada caso, pero puede llegar a ser del orden de varios millones de metros cúbicos. Como consecuencia, este tipo de movimiento puede llegar a ser extremadamente costoso en lo que a vidas humanas se refiere. Ejemplos de este tipo de movimiento son las avalanchas de rocas que tuvieron lugar en Valtellina (Italia, 1987) y en Randa (Suiza, 1991) (ver Figura 1.11.. y Figura 1.12..).

Según Davies (1982) las características principales de los aludes de roca son:

- La altura de caída y/o la distancia recorrida por la masa de rocas/derrubios permite al material en movimiento alcanzar altas velocidades.
- Una vez desencadenado el movimiento y cuando la velocidad es lo suficientemente alta, tiene lugar la rotura en la base de la masa, produciéndose como resultado la dilatación y reducción de la fricción interna; de este modo, la masa de derrubios puede fluir y recorrer distancias considerables, incluso a favor de pendientes suaves.
- Cuando la velocidad disminuye y la rotura en la base no es la suficiente, como para mantener la dilatación, la fricción interna se incrementa y la masa se detiene.
- Generalmente, la masa de derrubios atraviesa grandes distancias debido a un coeficiente de fricción efectiva particularmente bajo, entre la ladera y la masa rocosa en caída.

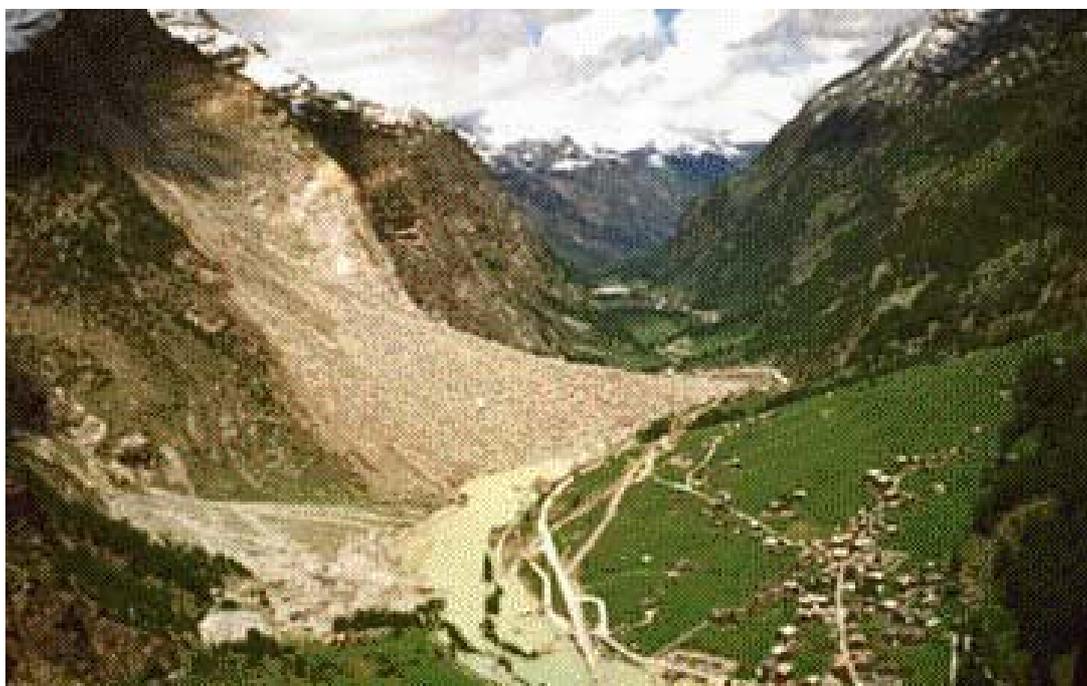


Figura 1.12.. Avalancha de rocas ocurrida en Randa el Valle Matter. (Suiza)

Como ha sido explicado con anterioridad, estas avalanchas se diferencian de los flujos de derrubios y coladas de barro tanto por el papel que desempeña el agua como por las velocidades que llegan a alcanzar. Por otro lado, cabe mencionar que el término desprendimientos queda reservado a los movimientos de caídas y/o de vuelcos de bloques o masas rocosas. Éstos movimientos se diferencian claramente de las avalanchas por: a) los volúmenes involucrados, puesto que los desprendimientos involucran volúmenes relativamente pequeños; b) el mecanismo de rotura, ya que los desprendimientos resultan de roturas graduales a favor de planos de discontinuidad preexistentes.

El recorrido de las avalanchas se divide en tres partes: a) una zona de iniciación: es la parte más escarpada con unas pendientes del orden de 30 a 45° o incluso más. En esta zona se produce la rotura y la avalancha acelera moviéndose ladera abajo y incorporando material adicional a su paso; b) el trayecto: durante el cual la velocidad permanece más o menos constante, la pendiente media es menos acentuada y la incorporación de material es menos importante; c) la zona de acumulación: se caracteriza por el cese del movimiento de forma brusca o gradual. La pendiente de esta zona es inferior a 20°.

Por otro lado, el volumen inicial puede incrementarse por sucesivas caídas, por el desmoronamiento de la masa rocosa, así como por la incorporación de materiales a lo largo del trayecto del movimiento. Esta incorporación es debida a la desestabilización y erosión del fondo.

Cuando tiene lugar la rotura de una ladera formada por rocas, los bloques de mayor tamaño pueden romperse, formándose bloques más pequeños. Se evoluciona así hacia

un material tipo fluido friccional. Cuando el material está en reposo, su estado puede considerarse sólido, y las tensiones en su seno pueden obtenerse empleando ecuaciones constitutivas adecuadas a materiales granulares así como técnicas numéricas p. ej. elementos finitos. En este estado, dos partículas vecinas seguirán siéndolo cuando varíen las tensiones. Una vez que el material empieza a fluir, en la avalancha las trayectorias de estas partículas vecinas pueden llegar a divergir, siendo su comportamiento similar al de un fluido clásico.

El análisis del mecanismo de este movimiento incluye dos etapas: el estudio de la rotura inicial, la cual puede ocurrir, tanto por deslizamiento como por caída; y el análisis de la fluidización posterior.

Hoy en día, a pesar de los estudios llevados a cabo hasta la fecha, no hay una explicación universalmente aceptada, que permita explicar la excesiva movilidad de las avalanchas granulares. La bibliografía especializada recoge varias explicaciones en relación con el mecanismo de las avalanchas. Así, Kent (1965) habla de la fluidización de las partículas causado por la incorporación de aire; Shreve (1968a, 1968b) plantea la existencia de una banda de aire atrapado, en la cual ocurre el deslizamiento; Hsü (1975) señala que la baja resistencia a fricción puede ser reducida por el efecto flotante del polvo en suspensión, que actúa como un medio que separa los bloques en movimiento. Melosh (1980) propone la hipótesis de fluidización acústica. Estas hipótesis han sido discutidas en varias publicaciones (Hsü, 1975; Hungr & Morgenstern 1984b; Hungr, 1990; Legros, 2002) contrastándolas con la realidad del campo.

1.3.3. Flujos Deslizantes:

El término flujo deslizante fue introducido a mediados de la década de los sesenta del siglo pasado, con el fin de describir una categoría de flujos procedentes de escombreras potencialmente inestables, al ser, en general, depósitos poco compactados. De este modo, los expertos británicos utilizaron el término *flow slide* (flujo deslizante) para describir el movimiento en masa que se desencadenó en Aberfan el 21 de Octubre de 1966. El deslizamiento se produjo en un talud formado por el vertido de residuos de una mina de carbón. En su propagación alcanzó el pueblo de Aberfan, causando 144 muertos. Los residuos del talud no habían sido compactados, habiéndose construido mediante simple vertido. En el momento de producirse la rotura, la altura del talud era de 67 m, y estaba asentado sobre un terreno cuya pendiente media era del 12%. El mecanismo de rotura ha sido descrito por Bishop, Hutchinsón, Penman y Evans (1969), encontrándose asimismo una descripción muy completa en los trabajos “The stability of tips and spoil heaps”, de Bishop (1973) y “A sliding- consolidation model for flow slides”, de Hutchinson (1986).



Figura 1.13.. Vista del flujo deslizante de Aberfan.

En estos trabajos los autores coinciden en que la rotura fue causada por un aumento de la presión intersticial en el pie del talud, que probablemente llegó a estar saturado, a diferencia de la zona superior del mismo. Bishop comenta que "...los trabajos de rescate se complicaron por el flujo de agua que apareció tras el deslizamiento en la base del deslizamiento..." Una vez que se produjo la rotura, el flujo deslizante se propagó ladera abajo 275 m, dividiéndose a continuación en dos lóbulos que se denominaron norte y sur. Este último fue el mayor de los dos, y alcanzó el pueblo, mientras que el lóbulo norte se detuvo tras llegar a un terraplén. El flujo deslizante de Aberfan se propagó una distancia de unos 600 m, y se cree que esta cifra hubiera podido ser mayor si no hubiera encontrado al pueblo en su camino. La velocidad estimada es de unos 4.5 a 9 m/s.

Estos flujos representan un tipo de deslizamientos rápidos en los que el material es un suelo con una tendencia importante a compactar. En general, se trata de suelos de baja densidad, con una estructura metaestable, como ocurre con residuos mineros depositados en balsas, suelos de origen volcánico, rellenos hidráulicos, etc. La tendencia de estos materiales a compactar bajo tensiones cortantes genera presiones intersticiales en el fluido intersticial (agua o aire), que hacen que la trayectoria de tensiones efectivas se curve hacia el origen, disminuya la presión hidrostática efectiva de confinamiento p' y aumente el ángulo de rozamiento efectivo movilizado. En casos límite, p' puede llegar a valores próximos a cero y el suelo se comporta entonces como un fluido viscoso, fenómeno conocido como licuación o licuefacción. En caso de que esto ocurra, los edificios cimentados en estos materiales, se hundieron en ellos, como ocurrió en Niigata (Japón) durante el terremoto de 1966.

La licuefacción puede producirse también en materiales parcialmente saturados, como por ejemplo ocurrió en los suelos de origen volcánico de Las Colinas (El Salvador),

durante el terremoto de Enero de 2001. En este caso, una hipótesis razonable que puede explicar el flujo deslizante que se produjo, es que el terremoto causó el colapso del material, cuya tendencia a compactar hizo que aparecieran presiones de aire intersticial elevadas. Estas llevaron al material a un estado de licuefacción, y al ser el tiempo de propagación menor que el de disipación de estas presiones, las mismas se mantuvieron el tiempo suficiente para que el deslizamiento se propagara ladera abajo unos seiscientos metros. Este caso de licuefacción seca o sin agua es similar a otro mencionado por Bishop, quien describe un caso publicado por Calembert y Dantinne que ocurrió en Jupille (Bélgica) en 1964. El deslizamiento se produjo en este caso en cenizas volantes. La figura 1.14.. muestra una vista aérea del flujo deslizante seco que se produjo en Santa Tecla, localidad de Las Colinas en El Salvador, como consecuencia del terremoto de Enero de 2001.



Figura 1.14.. Flujo deslizante en Santa Tecla, El Salvador (2001)

Se puede dar el caso de que tenga lugar un deslizamiento en la cabecera del flujo deslizante pero, en general, hay pocos indicadores de rotura en las etapas posteriores del movimiento. Estos flujos no solo fluyen muy rápidamente, sino que también consolidan en poco tiempo. Asimismo, solidifican al dejar de moverse, creando de este modo un riesgo adicional en el área de deposición.

Estos movimientos son extremadamente difíciles de distinguir, puesto que algunos rasgos, tanto los referentes a la pendiente como a la forma, se asemejan a los que se dan en coladas de barro, o flujos de derrubios.

Los flujos deslizantes generalmente duran unos minutos aunque pueden continuar mostrando una actividad remanente varios días después de que el evento haya tenido lugar.

En definitiva, se trata de un colapso estructural del material que forma la ladera, con una fluidización momentánea. En la literatura especializada, este proceso suele venir referido como un evento de alta magnitud en términos de velocidad y de destrucción.

Las diferentes causas de los flujos deslizantes son la rotura inicial rotacional en la cabecera, las vibraciones o choques, las lluvias intensas, los depósitos flojos de las escombreras, la desaparición de un soporte lateral y la carga rápida.

1.4. Estudio y Análisis de los Deslizamientos:

1.4.1. Revisión bibliográfica:

Los deslizamientos han sido reconocidos y estudiados por parte de muchos autores (Takahashi, 1981; Li et al., 1983 Costa, 1984; costa & Williams, 1984; Jonson & Rodino,

1984; Davies, 1986; Pierson, 1986; Qian & Wan, 1986; O'Brien & Julián, 1988; Van Steijn, 1988; Meunier, 1991; Whipple & Dunne, 1992 entre otros) desde diferentes puntos de vista: observaciones de campo, características de los flujos, comportamiento de los materiales, etc.

Los avances realizados durante la primera mitad del siglo 20 fueron limitados en lo que a estudios de deslizamientos se refiere. Más adelante, se crearon programas que han fomentado la elaboración de una mejor evaluación e interpretación del riesgo de deslizamientos (como por ejemplo Flood Insurance Programs, Disaster Assistance programs, etc). Nuevos factores clasificatorios han sido implementados en el reconocimiento de los deslizamientos. En este sentido, cabe mencionar las propiedades morfológicas presentadas por Crozier (1973) y Blong (1973). Muy relevante ha sido el trabajo de Varnes (1978) y más adelante el de Campbell et al. (1985). De los trabajos recientes es de destacar libros como "Landslides Recognition" de Dikau y Brundsen y otros autores (1996), así como el informe sobre "Investigación y evaluación de los deslizamientos" de Turner & Shuster (1996). La evaluación de deslizamientos ha sido sobre todo cualitativa utilizando las observaciones de campo o medidas cuantitativas básicas.

Por otro lado, una de las tareas más comunes después de un evento de este estilo, es remover el material desplazado con el fin de reestablecer el tráfico, el suministro de electricidad, etc. O desminuir el peligro que representan para los propietarios de los terrenos. Durante este proceso rara vez se procede a un inventario de las variables cuantitativas. Sin embargo, varios países europeos han empezado a establecer una documentación sistemática y coordinada de los desastres en zonas montañosas, lo cual facilitará futuras investigaciones, así como la mitigación del coste efectivo de dichos desastres (Huebel et al., 2002). Con todo ello, la observación directa de la mayoría de los deslizamientos especialmente los movimientos rápidos es una tarea difícil de llevar

acabo. Por lo que pocas observaciones de campo en el momento del desarrollo de estos eventos, están disponibles para comprobar los modelos teóricos.

El desarrollo de nuevas tecnologías en las últimas décadas ha causado un gran cambio en los estudios de deslizamientos. Este es el caso de la teledetección, incluyendo tanto las fotos aéreas como las imágenes de satélite que han sido aplicadas al estudio de deslizamientos a escala regional. Simonett et al., (1970), Scully (1973), Mc Donald & Grubbs (1975), Anderson et al., (1976), y Sauchyn & trench (1978) establecieron sus clasificaciones de los deslizamientos basándose en la interpretación de las fotos-aéreas y de las imágenes de satélite. Estas mejoras en el tratamiento digital de imágenes se aplicó con éxito al caso de los deslizamientos, pudiendo mencionarse los trabajos de Heath & Dowling (1980) y Stephens (1988) para delimitar las áreas de deslizamientos (Huang et. al, 1990).

Además, se han diseñado nuevas estrategias para mejorar el tiempo de respuesta del público frente al riesgo de deslizamientos (Solana & Kilburn, 2003) y para la implementación de políticas apropiadas para la gestión y reducción de dicho riesgo (Kilburn & Pasuto, 2003).

Aleotti & Chowdury (1999) presentaron una serie de métodos cualitativos y cuantitativos para la evaluación de deslizamientos. Los autores utilizaron los SIG para implementar una metodología destinada a diferenciar los usos no restringidos y restringidos en lo que a riesgo de deslizamientos se refiere.

Manetti et al., (2002) utilizaron la tecnología GPS (Global Positioning System) para el control remoto de los pequeños movimientos que muestran los deslizamientos, hundimientos, así como estructuras como los edificios, las presas y puentes.

En un estudio bibliográfico efectuado por Vulliet & Dewarrat (2001) basado en 350 artículos publicados entre 1994 y 2001, que tratan los movimientos en masa desde las siguiente perspectivas: (1) modelización de la iniciación y la deformación, (2) efectos del tiempo; (3) acoplamiento; (4) propagación de flujos rápidos y caída de bloques; (5) aproximación probabilística; (6) aplicaciones del dimensionamiento de técnicas de refuerzo los autores concluyen que los temas más estudiados en este periodo de tiempo son: la modelización de ruptura y deformación (modelos de calculo en plasticidad y elasto-plasticidad), el dimensionamiento de técnicas de refuerzo, así como los métodos probabilísticas.

Es de destacar la importancia de los estudios multidisciplinarios, ya que en el riesgo de deslizamientos confluyen varias áreas del conocimiento como la geología, la geomorfología, la dinámica de fluidos, la modelización numérica, la teledetección, la geodesia, y la sociología.

1.4.2. La modelización numérica como herramienta de análisis de los deslizamientos rápidos:

La diferencia fundamental que existe entre los tipos de deslizamientos rápidos objeto de éste trabajo desde el punto de vista mecánico radica en el acoplamiento entre el fluido intersticial (agua y aire) y el esqueleto sólido, y más concretamente en la relación de dos escalas de tiempo: consolidación o disipación de presiones intersticiales y propagación del deslizamiento (Pastor et al., 2005).

En el caso de las avalanchas de materiales granulares, existe un acoplamiento con el aire intersticial, pero la escala de tiempo de disipación de las presiones generadas es mucho más pequeña que la de propagación del deslizamiento. Esto corresponde a un

tipo que podríamos denominar “drenado”, y se estudia sin tener en cuenta el acoplamiento entre fluido y esqueleto sólido.

En el otro extremo se encuentran los deslizamientos para los que el tiempo de propagación es mucho más pequeño que el de disipación de presiones intersticiales. Se trata de un caso “no drenado”, y se suele estudiar considerando un único material con unas propiedades reológicas especiales. Este es el caso de las coladas de barro.

Finalmente, está el caso donde el acoplamiento es importante, con escalas de tiempos similares en propagación y consolidación. Este es el caso, en general, de los flujos de derrubios, de algunos lahares y de los flujos deslizantes. Aquí es fundamental tener en cuenta el acoplamiento entre los fluidos intersticiales y el esqueleto sólido.

Desde un punto de vista ingenieril, es muy importante:

(i) Predecir las condiciones que darán lugar a movimientos de ladera, de forma que se puedan evitar mediante técnicas apropiadas (refuerzo y mejora de suelos, etc.)

(ii) Predecir las características de los movimientos que se propagan, como masa de material, velocidad, distancia alcanzada, recorrido, etc., de forma que se puedan proyectar medidas de protección como diques, presas o canales.

En la actualidad, existen modelos matemáticos, constitutivos y numéricos fiables, aunque su uso no se ha difundido suficientemente. Se siguen empleando herramientas clásicas, como los círculos o superficies de deslizamiento, modelos de elementos finitos basados en criterios de rotura como el de Mohr Coulomb, etc. En todos estos casos, no se pueden predecir de forma fiable ni la rotura ni la propagación.

Los tres tipos de movimientos rápidos antes mencionados, tienen en común el hecho de que en todos ellos el material en movimiento se comporta como un fluido. Una vez iniciada la propagación, la masa de material movilizado se mueve con una velocidad que depende del tipo de problema.

En muchos casos, haciendo hipótesis adicionales sobre la estructura del flujo, es posible llevar a cabo una integración de las ecuaciones que describen el movimiento según un eje vertical. De esta manera se llega a modelos denominados “integrados en profundidad”, similares a los de “onda en profundidades reducidas” empleados en ingeniería de costas. Estos modelos bidimensionales pueden integrarse en secciones transversales al movimiento en casos en que el flujo esté encauzado en canales, cañones, o valles estrechos. Se llega así a modelos unidimensionales.

Respecto de las ecuaciones integradas en profundidad, existen dos formulaciones alternativas, lagrangiana y euleriana, que presentan ventajas e inconvenientes. Las formulaciones lagrangianas han sido empleadas en casos unidimensionales, aunque en estos momentos y debido al desarrollo de los denominados métodos sin malla (*meshless*), como el SPH, están empezando a utilizarse más. Los primeros modelos son los debidos a Savage & Hutter (1991), Hutter & Koch (1991), Hungr (1995), Rickenmann & Koch (1997). Estos modelos incorporaban, de una forma relativamente sencilla, aspectos como la existencia de un coeficiente K_0 activo o pasivo, definido de forma análoga a como se hace en Mecánica del Suelo. A esto hay que añadir que al ser unidimensionales, no es complicado formularlos en sistemas de coordenadas curvilíneas que se ajustan al terreno. Sin embargo, estas formulaciones lagrangianas presentan inconvenientes serios en casos bidimensionales, como la separación en ramales del flujo al llegar a un obstáculo, o la unión de corrientes para formar una única masa. Por ello, muchos investigadores han empleado formulaciones eulerianas, donde el fluido se mueve en una malla fija. Este es el caso de los trabajos presentados por Laigle & Coussot (1994) y Pastor et al., (2002).

En situaciones reales, es necesario saber cuál es la masa que forma el deslizamiento, así como las condiciones iniciales del mismo una vez que la rotura se ha producido, especialmente la distribución de la presión intersticial en la base. Más aún, hay que poder predecir si el deslizamiento evolucionará hacia un deslizamiento rápido tipo flujo deslizante, o su velocidad se reducirá hasta estabilizarse.

Hoy en día, es difícil contestar con precisión a estas preguntas. La dificultad fundamental que aparece es el cambio de fase de sólido a líquido, y viceversa. Para ello es necesario un modelo consistente, que englobe como casos particulares el sólido y el fluido, y en la actualidad este problema no está resuelto aún. De hecho, la mayoría de los casos que se presentan en la literatura científica describen modelos de flujos deslizantes que han tenido lugar en el pasado, con lo cual no se predice si el deslizamiento inicial se acelerará o tenderá a estabilizarse. En estos casos, se conoce la masa movilizada, y pueden obtenerse los datos necesarios relativos a las propiedades del material, presiones intersticiales, tensiones iniciales, etc.

Una de las conclusiones de Pastor et al., 2002 respecto a la modelización numérica de los deslizamientos es la necesidad de resolver el problema en dos fases sucesivas. En la primera, se emplea un modelo de elementos finitos no lineales, con acoplamiento de presiones intersticiales, y se obtiene la superficie de rotura, la masa movilizada, y las condiciones en el momento de la rotura. Estos datos se emplean en un segundo modelo con el que se estudia la propagación del deslizamiento.

Bibliografía

Aleotti, P. & Chowdury, R., (1999) *Landslide hazard assessment: summary review and new perspectives*. Bull. Eng. Geol. Env., vol. 58, pp 21- 44.

Anderson, A., Schulz, T., & Nock, D., (1976) *Satellite data for subsurface mine Inventory*, Report X-923-76-199, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, pp. 13.

Ayala-Carcedo, F. J., & Olcina, J., (2002) *Riesgos Naturales*, Ariel, Barcelona, 1512 pp.

Beverage, J. P. & Culbertson, J. K., (1964) *Hyperconcentrations of suspended sediment*, J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 90, pp. 117-126.

Bishop, A. W., (1973) *The stability of tips and spoil heaps*. Quarterly Journal of Engineering Geology, Vol. 6, pp. 335- 376.

Bishop, A. W., Hutchinson, J. N., Penman, A. D. M., & Evans, H. E., (1969) *Geotechnical investigations into the causes and circumstances of the disaster of 21st October 1966. A selection of technical reports submitted to the Aberfan Tribunal*, (ed. Welsh Office), pp 1- 80. London HMSO.

Blong, R. J., (1973) *A numerical classification of selected landslides of the debris slide-avalanche-flow type*. Eng. Geol., vol. 7, pp. 99- 114.

Brabb, E. E. & Harolds, B., (1989). *Landslides: Extent and economic significance*, Balkema, Rotterdam.

Bradley, J. B. & McCutcheon, S. C., (1985) *The effects of high sediment concentration on transport processes and flow phenomena*, Int. Symp. Erosion, debris Flow and Disaster Prevention, Tsukuba, Japan, pp. 219-225.

Brunsdon, D., (1988) *Slope instability, planning and geomorphology in the United Kingdom*. In *Geomorphology in Environmental Planning* (Ed. J. M. Hooke). Wiley, Chichester, pp. 105-119.

Caine, N., (1980) *The rainfall intensity – duration control of shallow landslides and debris flows*. *Geografiska Annaler*, 62A, 23 – 27.

Campbell, D. A., (1951) *Types of erosion prevalent in New Zealand*, Association Internationale d'Hydrologie Scientifique, Assemblée Générale de Bruxelles, Tome II, pp. 82- 95.

Campbell, R. H., Varnes, D. J., Fleming, R. W., Hampton, M. A., Prior, D. B., Sangrey, D. A., Nichols, D. R., & Brabb, E. E., (1989) *Landslide classification for identification of mud flows and other landslides*. In *Landslides in a Semi – arid Environment* (Eds P. M. Sadler and D. M. Morton), Publications of the Inland Geological Society, 2, 1 – 28.

Chen, C. L., & Ling, C. H., (1996) *Granular- flow rheology role of shear – rate number in transition regime*. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 (5), pp 469 – 480.

Coates, D. R., (1977) *Landslide*. The Geological Society of America. Reviews in Engineering Geology, Vol. III.

Corominas, J., & Garcia Yagüe, A., (1997) *Terminología de los movimientos de ladera*. IV Simposio nacional sobre taludes y laderas inestables. Vol. IV, 1051 – 1072. Granada.

Corominas, J., (1989a) *Clasificación y reconocimiento de los movimientos de ladera*. En: J. Corominas (Ed.) *Estabilidad de taludes y laderas naturales*. Monografía nº 3. Sociedad Española de Geomorfología. Barcelona. 1 – 30 pp.

Corominas, J., Moya, J., (1999) *Reconstructing recent landslide activity in relation to rainfall in the Llobregat River basin, Eastern Pyrenees, Spain*. *Geomorphology*, 30(1-2): 79-93.

Costa, J. E., (1984) *Physical geomorphology of debris flows*. In *Developments and Applications of Geomorphology* (Eds J. E. Costa and P. J. Fleisher). Springer- Verlag, 268 – 317.

Costa, J. E., (1991) *Nature, mechanics and mitigation of the Val Pola Landslide, Valtellina, Italy*. *Z. Geomorph, N. F.* 35, 1, pp 15 – 38.

Costa, J. E. & Williams, G. P., (1984) *Debris-flow dynamics (videotape)*. U. S. Geol. Surv. Open-file Rep., 84-6606, 22.5min.

Coussot, P., (1992) *Rheology of debris flows- study of concentrated dispersions and suspensions*. Ph. D. Thesis. INPG. Grenoble, France.

Coussot, P., & Menuenier, M., (1996) *Recognition, Classification and mechanical description of debris flows*. *Earth-Science Reviews* 40. pp. 209- 227.

Crozier, M. J., (1973) *Techniques for the morphometric analysis of landslips*. *Zeitschrift für Geomorphologie*, 17, pp. 78 – 101.

Crozier, M. J., (1986) *Landslides: causes, consequences & environment*. Routledge, London.

Cruden, D. M., (1991) *A simple definition of a landslide*. *Bulletin of the International Association of engineering Geology*. Vol. 43. pp. 27-29.

Cruden, D. M., (2003) *The first classification of landslides?* *Environmental & Engineering Geosciences*, Vol. IX, No. 3, pp. 197-200.

Cruden, D. M. & Varnes, D. J., (1996) *Landslide Types and Processes*. In *Landslides – Investigation and Mitigation* (pp. 36 - 75). Ed. By Turner, K. A. and Schuster, R. L., Transportation Research Board, National Research Council. Special Report 247.

Davies, T. R. H., (1982) *Spreading of rock avalanche debris by mechanical fluidization*. Rock Mech., 15, pp. 9 – 24.

Dikau, R., Brunsden, D., Schrott, L. & Ibsen, M-L., (1996) *Landslide Recognition: Identification, Movement and Causes*. John Wiley & Sons.

Du, R. H., Kang, Z. C., & Chen, X. Q., (1987) *Comprehensive investigation, prevention and planning of debris flow in Xiaojiang watershed*, Yunnan Science and Technology Press, Chongqing, China.

Engelund, R. & Wan, Z., (1984) *Instability of hyperconcentrated flow*. J. Hydraul. Eng., Vol 110, pp. 219-233.

Evans, S. G., (1993) *The field documentation of highly mobile rock and debris avalanches in the Canadian cordillera*. Pierre Beghin International Workshop on rapid gravitational mass movement, Cemagref, Grenoble.

Ferrer M & Ayala F., (1996) *Landslides climatic susceptibility map of Spain*. In: Landslides. Proc. 8.^a Int. Conf. And Field trip on landslides. Chacón, Irigaray & Fernández Eds. pp. 323-333.

Ferrer M & Ayala F., (1997) *Relaciones entre desencadenamiento de movimientos y condiciones meteorológicas para algunos deslizamientos de España*. IV Simposio Nacional sobre Taludes y Laderas Inestables. Granada. Vol I. pp.185-198.

Gary, M., MacAfee, R., Jr., & Wolf, C. L., eds. (1972) *Glossary of Geology*. Am. Geol. Inst., pp. 805.

Griffiths, S. J., (1999) *Proving the occurrence and cause of a landslide in a legal context*. Bulletin of Engineering Geology and Environment, vol. 58.

Hansen, M. J., (1984) *Strategies for Classification of Landslides*. In Slope Instability. Ed. By Brundsen, D. & Prior, D. B. John Wiley & Sons Ltd, pp. 1-25.

Heath, W., & Dowling, J. W., (1980) *Examples of the use of terrestrial photogrammetry in highway engineering*, Transport and road research lab, crowthorue, England, pp. 19.

Hong, X. Y., Wang, L. X., Zhu, J. C., Sun, B. P., Wang, Q. T. & Xiao, H. M., (1985) *The debris flow in Han Yu torrent of Mi Yun county of Beijing*. In: Int. Symp. Erosion, Debris Flows and Disaster Prevention, Sept. 3-5, 1985, Tsukuba, Japan, pp. 191-193.

Hooke, R. L. B., (1987) *Mass movement in semi- arid environment and the morphology of alluvial fans*. In Slope stability (Eds M. G. Anderson and K. S. Richards). Wiley, pp. 505-529.

Hsü, K. J., (1975) *Catastrophic debris streams (struzstorms) generated by rockfall*. Geol. Soc. Am. Bull., 86, pp. 129 – 140.

Huang, S. L., Chen, B. K., & Speck, R. C., (1990) *Assessment of mapping accuracy of landslides using image classification techniques*. The 11th Asian Conference on remote sensing, Guangzhou, China.

Huebel, J., Kienholz, H., & Loipersberger, A., (2002). *DOMODIS-Documentation of Mountain Disasters: State of the discussion in the European Mountain Areas*, Handbuch a. Schriftenreihe 1; Internationale Forschungs-gesellschaft INTERPRAEVENT, klagenfurt, Austria.

Hungr, O., (1990) *Mobility of rock avalanche*. Reports of the National Research Institute for Earth Science and Disaster.

Hungr, O., (1995) *A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows and avalanches*. Can. Geotech. Joun. 32, pp 233- 238.

Hungr, O., Evans, S. G., Bovis, M. J., Hutchinson, J. N., (2001). *A review of the classification of landslides in the flow type*. Environmental and Engineering Geosciences, VII (3), pp. 221-228.

Hungr, O. & Morgenstern, N. R., (1984). *High velocity ring shear tests on sand*. Géotechnique, 34, pp. 415-421.

Hutchinson, J. N., (1968) *Mass movement*. In Encyclopaedia of Geomorphology, Encyclopaedia of Earth Sciences (Ed. R. W. Fairbridge), Series III, Reinhold, New York, Amsterdam, London.

Hutchinson, J. N., (1986) *A sliding – consolidation model for flow slides*. Can. Geotech. J. 23, pp 115 – 126.

Hutchinson, J. N., (1988) *Morphological and geotechnical parameters of landslides in relation to geology and hydrogeology*. In Landslides, Proc. 5th. Int. symp. on Landslides (Ed. C. Bonnard), vol. 1, pp. 3 – 35.

Hutter, K. & Koch, T., (1991) *Motion of a granular avalanche in an exponentially curved chute: experiments and theoretical predictions*, Phil. Trans R. Soci London, A 334, pp 93 – 138.

Innes, J., (1985) *Lichenometric dating of debris flow deposits on alpine colluvial fans in southwest Norway*. Earth Surface Processes and Landforms, 10, pp. 519 – 524.

Ishikawa, (1982) *Movements of debris flows*. Techn. Mem. PWRI, 1872, Japan.

Jackson, L. E., Kostaschulk, R. A. & MacDonald, G. M., (1987) *Identification of debris flow hazard on alluvial fans in the Canadian Mountains*. Geol. Soc. Am. Rev. Eng. Geol., VII, pp. 115 – 124.

Jacob, M., (2005) *A size classification for Debris Flows*. Engineering Geology 79, pp. 151-161.

Jeyapalan, J. K., Duncan, J. M., & Seed, H. B., (1983) *Investigation of flow failures of tailing dams*. Journal Geotech. Engng. ASCE, 109 pp 172- 189.

Jin, M., & Fread, D. L., (1997) *One – dimensional routing of mud / debris flows using NWS FLDWAV model*. Debris-flow hazards mitigation: Mechanics, prediction and assessment (ed. C. L. Chen), pp 687 – 696. New York, ASCE.

Johnson, A. M., (1970) *Physical Processes in Geology*. Freeman and Cooper.

Johnson, A. M. & Rahn, P. H., (1970) *Mobilisation of debris flows*. Z. Geomorphologie N. F, suppl. – Bd, 9, pp. 168 – 186.

Johnson, A. M. & Rodine, J. R. (1984). *Debris flows*. In Slope Instability (Eds D. Brunsten and D. B. Prior). pp. 257 – 361.

Kent, P. E. (1965). *The transport mechanism in catastrophic rock fall*. J. Geol., 74, pp. 79 – 83.

Khang, Z., (1980) *Motion characteristics of debris flow at Jiangjia gully, Yunnan Province, China*. Int. Res. Training Center Erosion and Sedimentation Rep., China, pp. 40.

Kilburn, Ch. R. J. & Pasuto, A., (2003) *Major risk from rapid, large volume landslides in Europe*. Geomorphology, Vol. 54, pp. 3-9.

- Kobayashi, Y., (1992) *Travel dynamics of large debris avalanche*, Vol. 2, Interpraevent, Bern, pp. 275-284.
- Ladd, G. E., (1935) *Landslides, subsidence and rockfalls*. Bull. Am. Railway Eng. Ass., Vol. 37, pp. 1091-1162.
- Laigle, D. & Coussot, P., (1994) *Numerical simulation of debris flows*. Houille Blanche, Vol. 3, pp. 50-56.
- Legros, F., (2002) *The mobility of long-runout landslides*. Engineering Geology, vol. 63, pp. 301-331.
- Li, J., Yuan, J., Bi, C., Luo, D., (1983) *The main features of the mudflow in Jiang-Jia Ravine*. Z. Geomorphol., Vol. 27, pp. 325-341.
- Manetti, L., Frapolli, M., & Knecht, A., (2002) *Permanent, autonomous monitoring of landslide movement with GPS*. 1st European Conference on Landslides, pp. 24- 26, Prague, Czech Republic.
- Mc Donald, H. C. & Grubbs, R. C., (1975) *Landsat imagery analysis: An aid for predicting landslide prone areas for highway construction*, NASA Earth Resource Survey Sym., Vol. 1-b, pp. 769-778, Houston, Texas.
- Melosh, H. J. (1980). *Acoustic fluidization: a new geological process?*. J. Geophys. Res., vol. 84, pp. 7513 – 7520.
- Meunier, M., (1991) *Stream hydraulics*. Collection Etudes, Série Montagne (1). Cemagref, France.
- Morton, D. M. & Campbell, R. H., (1974) *Spring mudflows at Wrightwood, Southern California*. Q. J. Eng. Geol., vol. 7, pp. 377-384.

O'Brien, J. S. & Julien, P. Y., (1988) Laboratory analysis of mudflows properties. J. Hydraul. Eng., Vol. 114, pp. 877-887.

Pastor, M., Quecedo, M., Fernández Merodo, J.A., Herreros, M.I., Gonzalez, E., & Mira, P., (2002) *Modelling mailing dams and mine waste dumps failures*, Geotechnique, Vol. 52, n°8, pp. 579-591.

Pastor, M., Quecedo, M., Herreros, M.I., Gonzalez, E., Haddad, B., Fernández Merodo, J.A., & Mira, P., (2005) *Modelling of fast landslides and waves induced by them in reservoirs and other water bodies*, Rivista Italiana Di Geotecnica, pp. 46-62.

Pedraza, J. (ed.)(1996) *Geomorfología. Principios, métodos y aplicaciones*, Edit. Rueda, Madrid, 414 pp.

Phillips, C. J. & Davies, T. R. H., (1991) *Determining rheological parameters of debris flow material*. Geomorphology, Vol.4, pp. 101- 110.

Pierson, T. C., (1980) *Erosion and deposition by debris flows at Mt. Thomas, North Canterbury, New Zealand*. Earth Surf. Processes, Vol. 5, pp. 227-247.

Pierson, T. C., (1986) *Flow behaviour of chanelized debris flows, Mount St Helens, Washington*. In: A. D. Abrahams (Eds.), Hillslope Processes. Allen and Unwin, Boston, pp. 269- 296.

Pierson, T. C. & Costa, J. E., (1987) *A rheologic classification of subaerial sediment- Water Flows*. Geological Society of America, Reviews in Engineering Geology, Vol. VII.

Qian, N. & Wan, Z., (1986) *A critical review of the research on the hyperconcentrated flow in China*. Int. res. Training Centre on Erosion and Sedimentation Publ., China.

Sauchyn, D. J. & Trench, N. R., (1978) *Landsat Applied to landslide mapping*, P. E. & R. S. Vol. 44, No. 6, pp. 735- 741.

Savage, S. B. & Hutter, K., (1991) *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to run out*. Acta Mech. Part I: Analysis. 86, pp. 201-223.

Schuster, R. L., (1996a) *Socioeconomic significance of landslides*. En: Landslides. Investigation and mitigation. Transportation Research Board. Spec. Rep 247. Turner and Schuster Eds. Chapter 2.

Scully, J., (1973) *Landslides in the Pierce Shale in Central South Dakota, South Dakota Department of Highway*, pp. 737.

Sharpe, C. F. S. (1938). *Landslides and Related Phenomena*. Columbia Univ. Press, NY, 137 pp.

Sharp, R. P. & Nobles, L. H. (1953). *Mudflow of 1941 at Wrightwood, southern California*. Geol. Soc. Am. Bull., 64, pp. 547 – 560.

Sheko, A. I., (1988) *Mudflows*, In: Landslides and Mudflows, Vol. 1, Ch.3, UNESCO-UNEP, Moscow, USSR, pp. 54-74.

Shreve, R. L. (1968a). *The Blackhawk Landslide*. Geol. Soc. Am., Spec. Paper, 108.

Shreve, R. L. (1968b). *Leakage and fluidization in air –layer lubricated avalanches*. Geol. Soc. Am. Bull., 79, pp. 653 – 658.

Sidle, R. C., Pierce, A. J. & O'Loughin, C. O. (1985). *Hillslope stability and land use*. Am. Geophys. Çun. Water Resources Monograph, 11, pp. 1- 140.

Simonett, D. S., Schuman, R.L., & Williams, D. L., (1970) *The use of air photos in a study of landslides in New Guinea*, Kansas University, pp. 62.

Skempton, A. W., & Hutchinson, J., (1969) *Stability of natural slopes and embankment foundation*. In, Proc., Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Sociedad Mexicana de Mecana de Suelos, Mexico City State of the Art Volum, pp. 291-340.

Solana, C.M. & Kilburn, Ch. R. J., (2003) *Public awareness of landslide hazards: the Barranco de Tirajana, Gran Canaria, Spain*. *Geomorphology*, Vol. 54, pp. 39-48.

Stephens, P. R., (1988) *Use of satellite data to map landslides*, 9th Asian Conf. on Remote Sensing, Bangkok, Thailand, pp. J11.1-J11.7.

Takahashi, T., (1981) *Debris flow*. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 13, pp. 57-77.

Terzaghi, K. (1952). *Mechanisms of landslides*. *Geol. Soc. Am., Berkey Volume*, pp. 83-123.

Thouret, J.C., & Lavigne, F., (2000) *Lahars: occurrence, deposits and behaviour of volcano-hydrologic flows. Volcaniclastic rocks from magmas to sediments*, Edited by Hervé Leyrit and Christian Montenat. Gordon and Breach Science Publishers, pp.151-174.

Trowbridge, J. H., (1987) *Instability of concentrated free surface flows*. *J. Geophys. Res.*, Vol. 92 (C9), pp. 9523-9530.

Turner, K. A. & Schuster, R. L., (1996) *Transportation research board*, National Research Council. Special Report 247.

URL (2007): <http://pubs.usgs.gov/fs/2004/3072/images/fig3grouping-2LG>

Vallejo, L., I., Ferrer, M., Ortuño, L., & Oteo, C., (2002) *Ingeniería Geológica*, Edit. Pearson Educación, Madrid, 744 pp.

Van Steijn, H., (1988) *Debris flows involved in the development of Pleistocene stratified slope deposit*. Z. Geomorphol. N. F., Vol. 71, pp. 45-58.

Varnes, D. J. (1958). *Landslides types and processes*. In *Landslides and Engineering Practice* (Ed. E. B. Eckel). Highway Research Board Spec. Rep. 29, pp. 20 - 47.

Varnes, D. J. (1978). *Slope movements: type and processes*. In *Landslides Analysis and control* (Ed. E. B. Eckel). Transp. Res. Board, spec. Rep. 176, pp. 11-33.

Vulliet, L., & Dewarrat, X., (2001) *Nouveautés dans l'analyse des pentes en mouvements- une étude bibliographique de 1994 à 2001*. Rapport interne LMS, EPFL, Lausanne. Suiza .

Wang, Z., Lin, B., Zhang, X., (1993) *Instability of non-Newtonian open channel flow*. In: W. Kron (Eds.), *contribution to Non-stationary sediment transport*. I. H. W., Univ. Karlsruhe, Germany, pp. 1- 23.

Ward, W. H. (1945). *The stability of natural slopes*. Geographical J., 105, pp.170 –197.

Whipple, K. & Dunne, T., (1992) *The influence of debris-flow rheology on fan morphology, Owens Valley, California*. Geol. Soc. Am. Bull., Vol. 104, pp. 887-900.

WP/WLI (International Geotechnical Societies' UNESCO Working Party for World Landslide Inventory) (1993). *A suggested method for describing the activity of a landslide*. Bull. Int. Assoc. eng. Geol., vol. 47, pp. 53-57.

Yatsu, E., (1966) *Rock control in geomorphology*. Sozosha, Japan.

Záruba, Q. & Mencl, V., (1969) Landslides and their control. II. Eds. Academia, Prague.

CAPÍTULO 2

MODELOS INTEGRADOS EN PROFUNDIDAD PARA LA FASE DE PROPAGACIÓN

2.1. Introducción:

Los suelos y rocas son geomateriales con poros que pueden estar llenos de agua, aire y otros fluidos. Se trata, por lo tanto, de materiales **multifase**, cuyo comportamiento está regido por el **acoplamiento** entre sus fases. La **presión intersticial** de los fluidos que rellenan los huecos juega un papel fundamental en el comportamiento global de estos materiales, y de hecho, puede llegar a causar su rotura. Si consideramos el suelo como

una **mezcla**, podremos formular para cada componente ecuaciones de conservación (i) de masa, (ii) de momento lineal, y (iii) constitutivas.

Un aspecto fundamental es la elección del **tipo de formulación**, ya que puede ser euleriana, lagrangiana y mixta. Esta última opción es la empleada usualmente en Geotecnia y Mecánica del Suelo, donde se emplea una formulación lagrangiana para el esqueleto sólido y una formulación euleriana para el fluido intersticial. Se considera, pues, el movimiento del fluido relativo al esqueleto sólido, y suele hacerse una hipótesis adicional suponiendo que las **aceleraciones relativas de las fases líquidas son muy pequeñas**.

El primer modelo matemático que describió el **acoplamiento** entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial fue propuesto por **Biot** (1941, 1955). Se trataba de un modelo para **materiales elásticos lineales**. Este modelo inicial fue mejorado posteriormente por otros investigadores, siendo de destacar el trabajo del profesor Zienkiewicz y su equipo en la Universidad de **Swansea**, quienes extendieron la teoría a **materiales no lineales** y a **grandes deformaciones** (1980, 1984, 1990a, 1990b, 2000). Son también de destacar las contribuciones de Lewis & Schrefler (1998), Coussy (1995) y de Boer (2000), entre otros.

Se puede concluir, a la vista de los trabajos mencionados, que la comunidad geotécnica ha tenido a su disposición un marco teórico para comprender el comportamiento de los suelos y rocas teniendo en cuenta el acoplamiento con el fluido intersticial. De hecho, los análisis que se llevan a cabo hoy en día son acoplados, empleando programas de cálculo en elementos finitos o diferencias finitas donde se han implementado estos modelos.

La situación es sin embargo distinta en el caso de la **propagación** de deslizamientos rápidos de laderas, donde es claro que existe un importante acoplamiento entre el esqueleto sólido y el agua y aire intersticiales. No es frecuente analizar la propagación de un deslizamiento rápido empleando un modelo acoplado. De hecho, el primer modelo –con grandes simplificaciones– que ha sido propuesto en esta área es el de **Hutchinson** (1986), que combinó para un bloque que se desliza ladera abajo un modelo mecánico de movimiento con la ecuación de **consolidación** unidimensional. Más recientemente, Iverson & Denlinger (2001) y Pastor et al., (2002) han propuesto formulaciones más completas. Se describe a continuación la formulación propuesta por estos últimos autores.

Existen diferentes alternativas para describir el acoplamiento entre el sólido y el fluido intersticial. En este trabajo se ha elegido el marco teórico que proporciona la **teoría de mezclas**, puesto que es más general que el empleado en mecánica del suelo, y puede aplicarse tanto a la iniciación del movimiento como a la propagación del deslizamiento.

2.2. Propiedades Físicas De Los Geomateriales:

Un suelo es un material heterogéneo y su composición es típicamente la de una mezcla: partículas sólidas yuxtapuestas y un fluido intersticial (agua o aire) que llena los poros (Figura 2.1.).

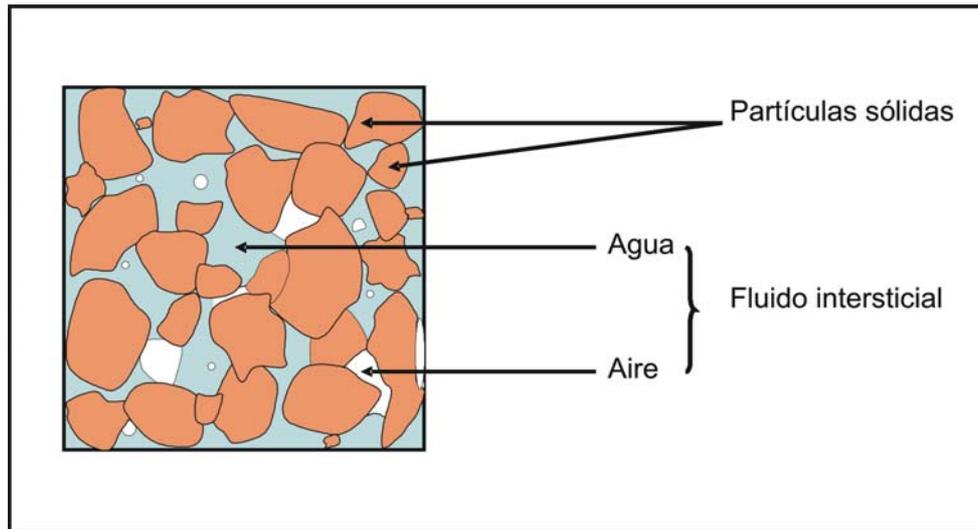


Figura 2.1. Esquema de un suelo trifásico.

Dicha mezcla se puede analizar desde distintos niveles (subatómico, atómico, molecular, microscópico o macroscópico). Cada uno de estos niveles lleva asociado un número de variables fundamentales, a partir de las cuales se pueden definir otras variables que miden ciertas propiedades. La observación a escala microscópica del suelo permite entender ciertos fenómenos, pero sobre todo muestra una geometría muy variada y, por tanto, demuestra la dificultad de su análisis. Esta dificultad pone en evidencia las limitaciones de un estudio puramente microscópico, y justifica la necesidad de introducir una aproximación de medio continuo, para poder estudiar el comportamiento macroscópico de los medios porosos.

Seguidamente, se describen las propiedades físicas más destacadas de los componentes de éste material trifásico.

2.2.1. Porosidad (n):

La porosidad representa la fracción de huecos en la mezcla es decir, el cociente entre el volumen de huecos (V_v) y el volumen total (V_t) (Figura 2.2.).

$$n = \frac{V_v}{V_t} = \frac{V_v}{V_v + V_s} \quad (2.1)$$

Siendo V_s el volumen ocupado por el esqueleto sólido.

Partiendo de esta definición de la porosidad, se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$V_s = (1 - n) V_t \quad (2.2)$$

$$V_v = V_a + V_w = nV_t \quad (2.3)$$

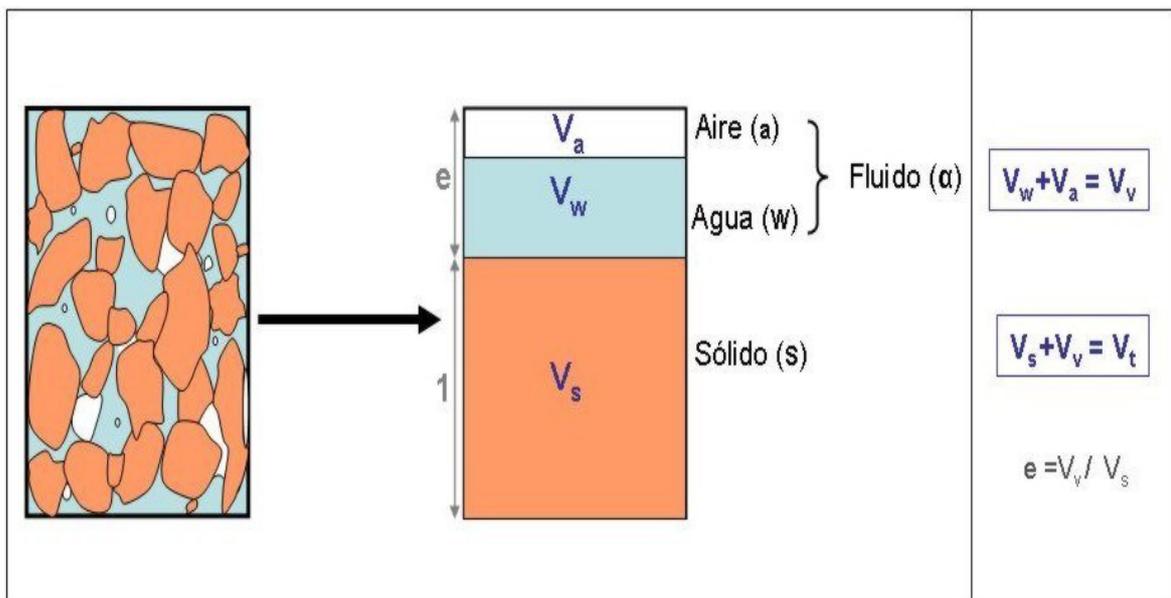


Figura 2.2. Esquema de una muestra representativa del suelo.

2.2.2. Grado de saturación:

Los huecos pueden estar rellenos de aire (a), de agua (w), o de ambos. Suponiendo que las fases fluidas (α) no son miscibles, se puede definir el grado de saturación, S_α , para la fase α , como la fracción del total de volumen de huecos ocupada por esa fase.

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_v} \quad (2.4)$$

En el caso de que los fluidos sean aire y/o agua, que es el caso más frecuente, denominaremos S_w y S_a a las fracciones de agua y de aire de los huecos.

$$S_w = \frac{V_w}{V_v} \quad ; \quad S_a = \frac{V_a}{V_v} \quad (2.5)$$

Cumpléndose que:

$$S_w + S_a = 1 \quad (2.6)$$

Por tanto, según el grado de saturación de la mezcla se puede hablar de:

Suelo saturado, cuando $S_a = 0$ y $S_w = 1$, de modo que los huecos están ocupados exclusivamente por agua.

En el otro extremo están los suelos secos con $S_a = 1$ y $S_w = 0$.

Finalmente, se habla de suelo semisaturado, cuando el espacio intersticial está ocupado tanto por agua como por aire. (Figura 2.3.)

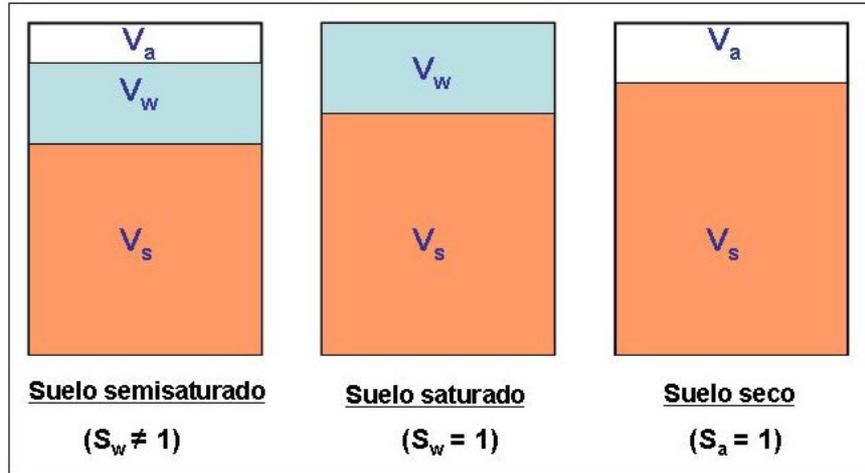


Figura 2.3. Esquema de los distintos estados de saturación del suelo.

En algunos casos especiales podría considerarse como un fluido intersticial una mezcla de agua con partículas finas. En este caso, se recurriría a un modelo reológico apropiado, para describir el comportamiento de dicho fluido.

2.2.3. Densidad (ρ):

En general, se denomina $\rho^{(\alpha)}$ a la densidad de la fase fluida (α), quedando definida como la masa por unidad de volumen total correspondiente a esta fase.

Si se denomina ρ_α a la densidad del fluido de esta fase, la densidad de ésta será:

$$\rho^{(\alpha)} = nS_\alpha \rho_\alpha \quad (2.7)$$

La densidad del aire (ρ_a) está fuertemente influida por la presión. En comparación, la densidad del agua es casi constante ($\rho_w = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3$), aumentando sólo 1% cuando la presión se multiplica por un factor de 220.

En el caso de la fase sólida se tiene que:

$$\rho^{(s)} = (1 - n)\rho_s \quad (2.8)$$

La densidad de las partículas sólidas (ρ_s) es constante, y su valor suele estar en torno a 2650 kg/m^3 .

2.2.4. Coeficiente de compresibilidad:

El coeficiente de compresibilidad expresa la disminución de volumen debido al aumento de la presión (p) en el caso de los fluidos, o de la tensión efectiva (σ') en el caso del esqueleto sólido.

Los coeficientes de compresibilidad correspondientes a las tres fases se expresan como:

- Compresibilidad del aire:

$$c_a = -\frac{1}{V_a} \frac{\partial V_a}{\partial p} \quad (2.9)$$

- Compresibilidad del agua:

$$c_w = -\frac{1}{V_w} \frac{\partial V_w}{\partial p} \quad (2.10)$$

- Compresibilidad del esqueleto sólido debida a la presión del agua (p_w):

$$c_s = -\frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial p_w} = -\frac{1}{(1-n)V_t} \frac{V_t \partial(1-n)}{\partial p_w} = \frac{1}{1-n} \frac{\partial n}{\partial p_w} \quad (2.11)$$

2.2.5. Coeficiente de dilatación volumétrica:

El coeficiente de dilatación expresa la variación de volumen debida a los cambios de temperatura (T).

Los coeficientes de dilatación correspondientes a las tres fases se expresan como:

- Coeficiente de dilatación del aire:

$$\alpha_a = \frac{1}{V_a} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \quad (2.12)$$

- Coeficiente de dilatación del agua:

$$\alpha_w = \frac{1}{V_w} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \quad (2.13)$$

- Coeficiente de dilatación del esqueleto sólido:

$$\alpha_s = \frac{1}{V_s} \left(\frac{\partial V_s}{\partial T} \right) \quad (2.14)$$

2.2.6. Velocidad relativa de Darcy:

La velocidad relativa de Darcy (ω^α), o velocidad de la fase fluida respecto del esqueleto sólido, relaciona la velocidad de la fase fluida (v^α), con la velocidad del sólido (v^s), expresándose como sigue:

$$\omega^\alpha = nS_\alpha (v^\alpha - v^s) \quad (2.15)$$

Con:

$$\omega^\alpha = nS_\alpha \omega_\alpha \quad (2.16)$$

La relación (2.15) nos permite expresar la velocidad de la fase fluida (v^α), en función de la velocidad de la fase sólida (v^s):

$$v^\alpha = \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} + v^s \quad (2.17)$$

Por otro lado, la ley de Darcy (1856), establece que en condiciones de flujo laminar la velocidad media del agua a través de una sección de suelo saturado es proporcional al gradiente hidráulico, es decir:

$$\omega_w = -k_w \nabla(h_w) \quad (2.18)$$

donde:

ω_w ; es la velocidad de Darcy

h_w ; es la carga hidráulica

k_w ; es el tensor de permeabilidad del medio poroso que en caso de un medio isótropo es una constante.

Por otro lado se tiene que:

$$h_w = z + \frac{p_w}{\gamma_w} \quad (2.19)$$

Donde:

z ; es la altura respecto de un plano de referencia.
 p_w ; es la presión de agua
 γ_w ; es el peso específico

La ley de Darcy se puede generalizar para medios semisaturados, relacionando el coeficiente de permeabilidad con el grado de saturación, o con la presión capilar, también definida como succión (Gardner, 1958; Brooks & Corey, 1966; Brutsaert, 1968; Van Genuchten, 1980).

2.2.7. Tensiones efectivas:

El tensor de tensiones totales viene dado por la expresión:

$$\sigma = \sigma^{(s)} + \sum_{\alpha=1}^{nfases} \sigma^{(\alpha)} \quad (2.20)$$

Siendo $\sigma^{(s)}$ y $\sigma^{(\alpha)}$ los tensores de tensiones parciales de Cauchy correspondientes a la fase sólida y al fluido de la fase (α).

Estas tensiones parciales $\sigma^{(s)}$ y $\sigma^{(\alpha)}$, se pueden relacionar con las tensiones en estos materiales de una manera relativamente sencilla, ya que:

$$\sigma^{(s)} = (1 - n)\sigma_s \quad (2.21)$$

y

$$\sigma^{(\alpha)} = nS_\alpha \sigma_\alpha \quad (2.22)$$

Por otro lado, los tensores de tensiones parciales $\sigma^{(\alpha)}$, pueden descomponerse, como es habitual en Mecánica de Medios Continuos, en una componente hidrostática y otra desviadora.

De este modo se tiene que:

$$\sigma^{(\alpha)} = -nS_\alpha p_\alpha \mathbf{I} + nS_\alpha \mathbf{s}_\alpha \quad (2.23)$$

Donde: $\mathbf{s}_\alpha = \text{dev}(\sigma_\alpha)$ es la parte desviadora de $\sigma^{(\alpha)}$ e \mathbf{I} el tensor identidad de segundo orden.

En el caso de que el fluido intersticial sea agua, la componente desviadora puede despreciarse, de modo que:

$$\sigma^{(w)} = -nS_w p_w \mathbf{I} \quad (2.24)$$

En las expresiones anteriores, se han tomado como positivas las componentes del tensor de tensiones de tracción, de acuerdo con el criterio de signos habitualmente empleado en mecánica de medios continuos.

A continuación se define una presión media en los poros \bar{p} :

$$\bar{p} = \sum_{\alpha=1}^{nfases} p^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{nfases} S_{\alpha} p_{\alpha} \quad (2.25)$$

En el caso general, cuando las tres fases (sólido, agua y aire) están presentes (suelo no saturado), se tiene que:

$$\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma^{(w)} + \sigma^{(a)} \quad (2.26)$$

Con:

$$\begin{aligned} \sigma^{(s)} = (1-n)\sigma_s \quad ; \quad \sigma^{(w)} = -nS_w p_w \mathbf{I} \quad y \quad \bar{p} = S_w p_w + S_a p_a \\ \sigma^{(a)} = -nS_a p_a \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Un caso particular a destacar de los suelos no saturados es aquél donde la presión del aire en los poros es nula. En este escenario las ecuaciones (2.26) (2.27) resultan:

$$\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma^{(w)} \quad (2.28)$$

Con:

$$\sigma^{(s)} = (1-n)\sigma_s \quad ; \quad \sigma^{(w)} = -nS_w p_w \mathbf{I} \quad y \quad \bar{p} = S_w p_w \quad (2.29)$$

Se Habla de un suelo saturado cuando el material es bifásico y está saturado en agua ($S_w = 1$). En este caso las ecuaciones (2.26)(2.27) resultan:

$$\sigma = \sigma^{(s)} + \sigma^{(w)} \quad (2.30)$$

Con:

$$\sigma^{(s)} = (1 - n)\sigma_s \quad ; \quad \sigma^{(w)} = -np_w \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \bar{p} = p_w \quad (2.31)$$

Por otro lado, el tensor de tensiones efectivas viene dado por la expresión:

$$\sigma = \sigma' - \bar{p}\mathbf{I} + n \sum_{\alpha=1}^{n\text{fase}} S_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} \quad (2.32)$$

En el caso de que la tensión desviadora en el fluido intersticial sea nula, se puede definir la tensión efectiva σ' como:

$$\sigma' = \sigma + \bar{p}\mathbf{I} \quad (2.33)$$

2.2.8. La viscosidad:

La viscosidad mide la resistencia a la deformación de un fluido, de modo que es equivalente al modulo de elasticidad en el caso de los sólidos.

- *Viscosidad dinámica (μ_w):*

La velocidad de deformación de un fluido causa una tensión tangencial τ_{yx} proporcional a la viscosidad dinámica y a la velocidad de deformación. Tiene dimensiones [M/LT]:

$$\tau_{yx} = \mu_{\alpha} \frac{dv_x}{dy} \quad (2.34)$$

- **Viscosidad cinemática (ν):**

la viscosidad cinemática se define como el cociente entre la viscosidad dinámica del fluido y su densidad. Tiene unidades $[L^2/T]$.

$$\nu_{\alpha} = \frac{\mu_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \quad (2.35)$$

2.3. Modelo General:

Los movimientos de ladera en general y los flujos en particular se pueden descomponer en (Figura 2.4.):

1. Una **fase de iniciación** durante la cual el material llega a un estado de no-equilibrio o rotura.
2. Una **fase de propagación** durante la cual se produce el movimiento del material en busca de un nuevo equilibrio.

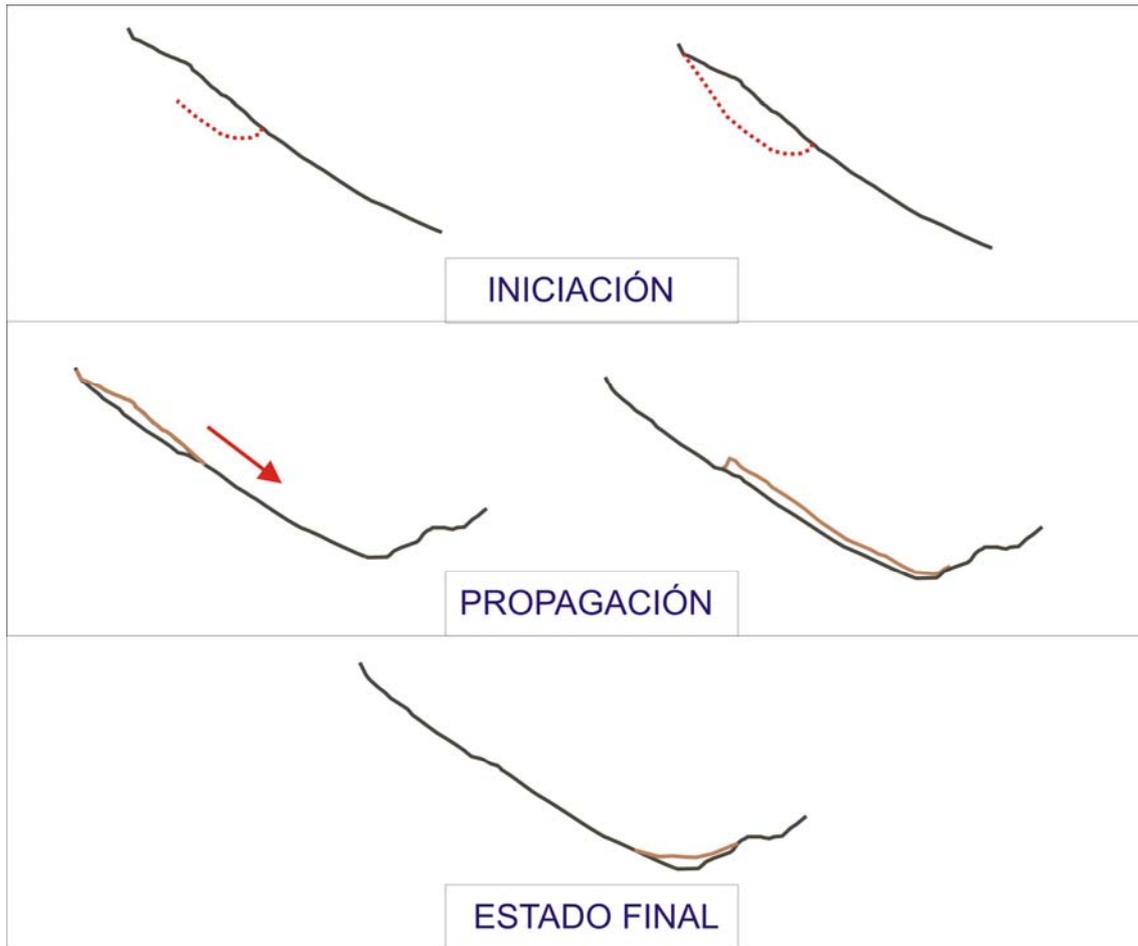


Figura 2.4. Esquema de las distintas fases de deslizamientos.

Este trabajo está enfocado al estudio y modelización de la fase de propagación de los movimientos rápidos de ladera, especialmente los flujos y avalanchas.

En esta fase el material se mueve y se deforma de manera continua. Por tanto, su comportamiento se asemeja al de un fluido y el problema puede ser descrito en el marco de la dinámica de fluidos.

Las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos están basadas en las leyes de conservación, puesto que estas junto con las ecuaciones constitutivas (llamadas reológicas en el caso de los fluidos), determinan de forma completa el comportamiento de un sistema físico. Dichas leyes se pueden formular dentro de un marco euleriano o

lagrangiano. El modelo general que se presenta puede formularse de cualquiera de estas dos formas. Por lo que antes de abordarlo, se introducen las descripciones euleriana y lagrangiana, además se define el concepto de la derivada material.

2.3.1. Descripción euleriana versus descripción lagrangiana:

El movimiento de un material queda determinado cuando se conocen, tanto las posiciones iniciales X de cada una de sus partículas como sus posiciones x en el tiempo t .

Existen dos alternativas para describir el movimiento:

- *La formulación lagrangiana:*

En la descripción lagrangiana, llamada también descripción material, las posiciones y desplazamientos están definidos en función de las posiciones iniciales, es decir:

$$X = X(x, t) \quad (2.36)$$

$$u(X, t) = x(X, t) - X \quad (2.37)$$

Siendo:

X : posición inicial en el tiempo t_0 .

x : posición en el tiempo t .

u : el vector desplazamiento.

La velocidad de cada partícula, según la descripción lagrangiana, se expresa como:

$$v(X,t) = \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = \frac{\partial x(X,t)}{\partial t} \quad (2.38)$$

En el marco de esta descripción, se sigue la posición de cada partícula del material en movimiento. Por ello, esta formulación es más adecuada para resolver los problemas de la mecánica de sólidos, aunque se utiliza en algunos análisis numéricos de flujos, sobre todo en los modelos unidimensionales.

• ***La formulación euleriana:***

En este caso las posiciones y desplazamientos están definidos en función de las posiciones actuales. De este modo se puede escribir que:

$$x = x(X,t) \quad (2.39)$$

$$u(x,t) = x(t) - X(x,t) \quad (2.40)$$

La descripción euleriana, denominada también descripción espacial, es más apropiada en mecánica de fluidos, ya que el sistema de coordenadas está fijado en el espacio mientras se observa el movimiento del material.

En este caso, la velocidad se expresa como:

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} v \quad (2.41)$$

O en forma indicial:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \quad (2.42)$$

En lo que a aceleración se refiere se puede escribir que:

$$a(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} v \quad (2.43)$$

• **Derivada material:**

La derivada material, llamada también derivada total del tiempo, derivada sustancial, o derivada global $\frac{D}{Dt}$, representa la velocidad de cambio para una partícula fija del fluido y se define como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \text{grad} \quad (2.44)$$

Es decir:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} v_j \quad (2.45)$$

O de forma compacta:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \cdot \text{grad} \phi \quad (2.46)$$

Por lo tanto, es una combinación de:

- la derivada local $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, que representa la cantidad de cambio en el tiempo en un punto fijo.
- las derivadas convectivas $v_i \text{ grad } \Phi$, que representan el cambio debido al movimiento de la partícula del fluido de una posición a otra, donde las propiedades de flujo son espacialmente distintas.

Cuando aparecen los efectos convectivos en las leyes básicas que involucran la masa, el momento o la energía, las ecuaciones en derivadas parciales que describen el material se hacen no lineales y, por lo tanto, son de resolución más compleja.

2.3.2. Ecuaciones de balance:

Las leyes de conservación establecen que durante la evolución de un flujo, se conservan un número de propiedades (la masa, el momento generalizado y la energía). Como resultado, la variación de la cantidad conservada en un volumen dado es debida al efecto de los flujos entrantes y salientes, de los términos tipo fuente o sumidero y difusivos.

- ***Balance de masa:***

Si se considera un volumen de control infinitesimal (dx, dy, dz) formado por dos caras según cada dirección del espacio (Figura 2.5.), se tiene una región fija en el espacio donde puede existir flujo a través de sus fronteras.

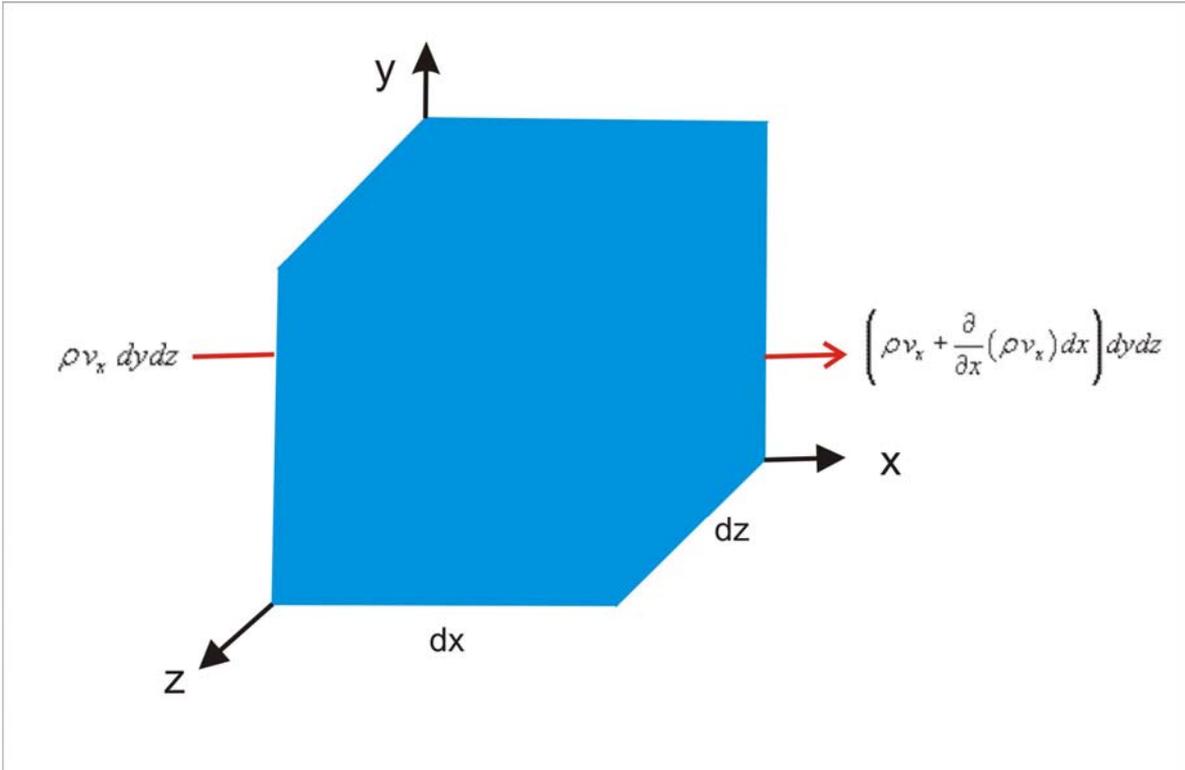


Figura 2.5. Esquema de un volumen de control.

Aplicando el principio de conservación de masa, el balance de masa que pasa a través de este volumen de control en un instante dt puede expresarse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum (\rho A v_i)_{\text{saliente}} - \sum (\rho A v_i)_{\text{entrante}} = 0 \quad (2.47)$$

Donde:

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$; es la masa acumulada por unidad de tiempo y volumen.

$dV = dx dy dz$; es el volumen.

Por otro lado, si ρv_x representa el vector del flujo másico entrante según la dirección x ,

el flujo másico saliente según la misma dirección es $\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx$.

En la tabla 2.1. se representa el flujo másico entrante y saliente, que atraviesa las seis caras del volumen de control por unidad de tiempo:

Dirección	Flujo másico entrante	Flujo másico saliente
X	$\rho v_x dydz$	$\left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx \right) dydz$
Y	$\rho v_y dxdz$	$\left(\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dy \right) dxdz$
Z	$\rho v_z dxdy$	$\left(\rho v_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dz \right) dxdy$

Tabla 2.1. Flujo másico a través del volumen de control

Por lo tanto, en ausencia de fuentes y sumideros el exceso de salidas menos las entradas por unidad de tiempo es:

$$\begin{aligned} \sum (\rho Av_i)_{saliente} - \sum (\rho Av_i)_{entrante} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dxdydz \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dV + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dV + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dV \end{aligned} \tag{2.48}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.47) se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dV + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) dV + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) dV = 0 \quad (2.49)$$

De manera que la ecuación de conservación de masa para un volumen de control infinitesimal se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2.50)$$

Los tres últimos términos de esta ecuación equivalen a la divergencia del vector $\rho \mathbf{V}$, por lo que dicha ecuación se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.51)$$

Obteniéndose:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.52)$$

Y utilizando la definición de la derivada material (2.45) se tiene que:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.53)$$

A esta ecuación también se le llama ecuación de continuidad, ya que no requiere hipótesis alguna, excepto la de que la densidad y la velocidad son funciones continuas.

En el caso de que el flujo sea incompresible $\rho = \text{cte}$, la ecuación anterior se resume a:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.54)$$

Aplicando el concepto de conservación de la masa a las distintas fases del medio poroso, se pueden escribir las ecuaciones de balance de masa para el esqueleto sólido y las fases fluidas del modo que sigue:

$$\frac{D^{(s)}\rho^{(s)}}{Dt} + \rho^{(s)}\operatorname{div} \mathbf{v}^{(s)} = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{D^{(\alpha)}\rho^{(\alpha)}}{Dt} + \rho^{(\alpha)}\operatorname{div} \mathbf{v}^{(\alpha)} = 0 \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\rho^{(s)} = (1-n)\rho_s \quad (2.57)$$

$$\rho^{(\alpha)} = nS_\alpha\rho_\alpha \quad (2.58)$$

Y desarrollando las ecuaciones (2.55) y (2.56) se obtiene:

$$\frac{D^{(s)}n}{Dt} = (1-n) \left[\frac{1}{\rho_s} \frac{D^{(s)}\rho_s}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}^s \right] \quad (2.59)$$

$$\frac{D^{(\alpha)}n}{Dt} = -n \left[\frac{1}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^{(\alpha)}\rho_\alpha S_\alpha}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}^\alpha \right] \quad (2.60)$$

• ***Balance del momento lineal:***

La conservación del momento lineal en mecánica de fluidos equivale a la segunda ley de Newton en mecánica de medios continuos. Esta última establece que la fuerza neta a la cual está sometido un elemento del fluido equivale a su masa multiplicada por su aceleración. La fuerza neta consiste en las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie. Las primeras actúan en toda la masa del volumen de control, y se deben a las fuerzas externas (p.ej. gravedad). Mientras que las segundas son las tensiones σ_{ij} , que actúan en las caras del volumen de control. En el caso particular de un medio poroso las fuerzas netas que actúan sobre un volumen de control son además de las fuerzas exteriores (\mathbf{b}) y del tensor de tensiones de Cauchy ($\sigma^{(s)}$ y $\sigma^{(\alpha)}$), las fuerzas debidas a la interacción de la matriz sólida con el fluido intersticial ($\mathbf{R}_\alpha = -\mathbf{k}_\alpha^{-1} \omega_\alpha$).

Por lo tanto, el balance del momento lineal de los componentes del medio poroso es, para el caso del fluido intersticial:

$$\rho^{(\alpha)} \frac{D^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)}}{Dt} = \rho^{(\alpha)} \mathbf{b} + \text{div} \sigma^{(\alpha)} - \mathbf{k}_\alpha^{-1} \omega^{(\alpha)} \quad (2.61)$$

Y para el esqueleto sólido:

$$\rho^{(s)} \frac{D^{(s)} \mathbf{v}^{(s)}}{Dt} = \rho^{(s)} \mathbf{b} + \text{div} \sigma^{(s)} + \mathbf{k}_\alpha^{-1} \omega^{(\alpha)} \quad (2.62)$$

Donde:

\mathbf{b} ; término de las fuerzas exteriores.

$\sigma^{(s)}$; tensor de tensiones parciales de Cauchy correspondiente a la fase sólida.

$\sigma^{(\alpha)}$; tensor de tensiones parciales de Cauchy correspondiente a la fase fluida.

k_{α} ; la permeabilidad de la fase α .

$\omega^{(\alpha)}$; la velocidad relativa de darcy.

2.3.3. Las ecuaciones constitutivas o reológicas:

Para determinar de forma completa el comportamiento del suelo, además de las ecuaciones de balance, el modelo matemático se tiene que completar con las ecuaciones constitutivas para todas las fases. En estas ecuaciones, se relacionan los tensores de tensión, o su velocidad de variación, con los tensores de deformación, o de velocidad de deformación.

En el caso de los fluidos, los modelos se denominan reológicos, siendo los más empleados el fluido Newtoniano, de Bingham y friccional.

Estas ecuaciones se detallan en el capítulo 3, que está dedicado a los modelos reológicos.

2.3.4. Las ecuaciones cinemáticas:

Las ecuaciones cinemáticas relacionan las deformaciones, o sus velocidades de variación, con los desplazamientos o las velocidades.

$$D^{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^{\alpha}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{\alpha}}{\partial x_i} \right) \quad (2.63)$$

Donde D representa el tensor velocidad de deformación.

2.4. El Modelo V- p_w :

El comportamiento de un suelo está regido por el acoplamiento entre las distintas fases que lo componen. En este marco se suscribe el modelo matemático “u- p_w ” propuesto por el profesor Zienkiewicz y su equipo en la Universidad de Swansea, (C.T. Chang, P. Bettess, T. Shiomi, A.H.C. Chan, M. Pastor, O.K. Paul y B. Schrefler), quienes extendieron la teoría de Biot (1941, 1955) a materiales no lineales y a grandes deformaciones (1980, 1984, 1990a, 1990b, 2000). El modelo “u- p_w ”, está formulado en desplazamientos del esqueleto sólido y en presiones intersticiales, mientras que el modelo “V- p_w ” que se describe a continuación está formulado en velocidades en vez de desplazamientos.

2.4.1. Balance de masa:

Teniendo en cuenta la definición de derivada material (2.45), y restando las ecuaciones de balance de masa de las fases sólida (2.59) y fluida (2.60) obtenidas:

$$-\text{div} \left\{ n \left(v^\alpha - v^s \right) \right\} = (1-n) \frac{1}{\rho_s} \frac{D^{(s)} \rho_s}{Dt} + n \frac{1}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^{(\alpha)} \rho_\alpha S_\alpha}{Dt} + \text{div } v^s \quad (2.64)$$

Introduciendo la velocidad relativa de Darcy (2.15) se obtiene:

$$\text{div} \left(\frac{\omega^\alpha}{S_\alpha} \right) + \frac{(1-n)}{\rho_s} \frac{D^{(s)} \rho_s}{Dt} + \frac{n}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^{(\alpha)} \rho_\alpha S_\alpha}{Dt} + \text{div } v^s = 0 \quad (2.65)$$

Por otro lado, restando las definiciones de las derivadas materiales correspondientes a la fase sólida y fluida, e introduciendo la velocidad de Darcy de la fase fluida, se puede expresar $D^{(\alpha)}$ en función de $D^{(s)}$ de la siguiente forma:

$$\frac{D^{(\alpha)}\Phi}{Dt} = \frac{D^{(s)}\Phi}{Dt} + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \text{grad } \Phi \quad (2.66)$$

Sustituyendo la expresión (2.66) en la ecuación (2.65) se tiene:

$$\text{div} \left(\frac{\omega^\alpha}{S_\alpha} \right) + \frac{(1-n)}{\rho_s} \frac{D^{(s)}\rho_s}{Dt} + \frac{n}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^{(s)}\rho_\alpha S_\alpha}{Dt} + \frac{n}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \text{grad}(\rho_\alpha S_\alpha) + \text{div } v^s = 0 \quad (2.67)$$

Se consideran los granos del esqueleto sólido compresibles y se desprecian los efectos térmicos. En este caso:

La ecuación constitutiva de la fase sólida se puede expresar como (Fernández Merodo, 2001; Mira, 2002):

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D^{(s)}\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{D^{(s)}\bar{p}}{Dt} \quad (2.68)$$

Donde K_s es la rigidez volumétrica de los granos del esqueleto sólido.

Por otro lado, considerando la presión efectiva del fluido:

$$\bar{p} = S_w p_w + S_a p_a \quad (2.69)$$

Se cumple que:

$$\frac{1}{K_s} \frac{D^{(s)}\bar{p}}{Dt} = \frac{1}{K_s} \left\{ S_w \frac{D^{(s)}p_w}{Dt} + p_w \frac{D^{(s)}S_w}{Dt} + \frac{D^{(s)}(S_a p_a)}{Dt} \right\} \quad (2.70)$$

Teniendo en cuenta el coeficiente de almacenamiento específico del sólido

$$C_s = n \frac{DS_w}{Dp_w} \quad (2.71)$$

Se obtiene:

$$\frac{D^{(s)}S_w}{Dt} = \frac{D^{(s)}S_w}{Dp_w} \frac{Dp_w}{Dt} = \frac{C_s}{n} \frac{D^{(s)}p_w}{Dt} \quad (2.72)$$

Y como consecuencia, la ecuación (2.68) se escribe como:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D^{(s)}\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \left\{ S_w \frac{D^{(s)}p_w}{Dt} + p_w \frac{C_s}{n} \frac{D^{(s)}p_w}{Dt} + \frac{D^{(s)}(S_a p_a)}{Dt} \right\} \quad (2.73)$$

Para las fases fluidas se supone que la variación de la densidad, se debe únicamente a los cambios en la presión intersticial:

$$\frac{1}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^{(s)}\rho_\alpha S_\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{D^{(s)}\rho_\alpha}{Dt} + \frac{1}{S_\alpha} \frac{D^{(s)}S_\alpha}{Dt} = \frac{1}{K_\alpha} \frac{D^{(s)}p_\alpha}{Dt} + \frac{1}{S_\alpha} \frac{D^{(s)}S_\alpha}{Dt} \quad (2.74)$$

Sustituyendo (2.73) y (2.74) en la ecuación (2.67), se obtendrá la ecuación del balance de masa sin influencia de la temperatura para suelo semisaturado:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left(\frac{\omega^\alpha}{S_\alpha} \right) + \frac{(1-n)}{K_s} \left\{ S_w \frac{D^{(s)} p_w}{Dt} + p_w \frac{C_s}{n} \frac{D^{(s)} p_w}{Dt} + \frac{D^{(s)} (S_a p_a)}{Dt} \right\} + \\ & + \frac{n}{K_\alpha} \frac{D^{(s)} p_\alpha}{Dt} + \frac{n}{S_\alpha} \frac{D^{(s)} S_\alpha}{Dt} + \frac{n}{\rho_\alpha S_\alpha n S_\alpha} \omega^\alpha \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha) + \operatorname{div} v^s = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Por otro lado, asumiendo que la presión del aire es nula $p_a = 0$, la ecuación (2.75) se escribe como:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} v^s + \operatorname{div} \left(\frac{\omega^w}{S_w} \right) + \frac{(1-n)}{K_s} \left\{ S_w \frac{D^{(s)} p_w}{Dt} + p_w \frac{D^{(s)} S_w}{Dt} \right\} + \\ & + \frac{n}{K_w} \frac{D^{(s)} p_w}{Dt} + \frac{n}{S_w} \frac{D^{(s)} S_w}{Dt} + \frac{n}{\rho_\alpha S_\alpha n S_\alpha} \omega^\alpha \operatorname{grad}(\rho_\alpha S_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Se denomina:

$$\frac{1}{Q} = \left[\frac{1-n}{K_s} S_w + \frac{n}{K_w} \right] \quad (2.77)$$

Y

$$\frac{1}{G} = \left[\frac{1-n}{K_s} p_w + \frac{n}{S_w} \right] \quad (2.78)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (2.76), y despreciando el último término de la misma por ser muy pequeño, se obtiene:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\omega^w}{S_w} \right) + \operatorname{div} v^s + \frac{1}{Q} \frac{D p_w}{Dt} + \frac{1}{G} \frac{D S_w}{Dt} = 0 \quad (2.79)$$

La ecuación de balance de masa de la mezcla, se obtiene sumando las ecuaciones de balance de las distintas fases:

$$\frac{D^{(s)}\rho^s}{Dt} + \rho^s \operatorname{div} v^s + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \frac{D^{(\alpha)}\rho^\alpha}{Dt} + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \rho^\alpha \operatorname{div} v^\alpha = 0 \quad (2.80)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.66) podemos escribir:

$$\frac{D^{(\alpha)}\rho^\alpha}{Dt} = \frac{D^{(s)}\rho^\alpha}{Dt} + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \operatorname{grad} \rho^\alpha \quad (2.81)$$

Se obtiene:

$$\frac{D^{(s)}\rho^s}{Dt} + \rho^s \operatorname{div} v^s + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \left[\frac{D^{(s)}\rho^\alpha}{Dt} + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \operatorname{grad} \rho^\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} v^\alpha \right] = 0 \quad (2.82)$$

Reemplazando la expresión de la velocidad de la fase fluida en función de la velocidad de la fase sólida (2.17) en la ecuación (2.82) se llega a:

$$\frac{D^{(s)}}{Dt} \left[\rho^s + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \rho^\alpha \right] + \left[\rho^s + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \rho^\alpha \right] \operatorname{div} v^s + \sum_{\alpha=1}^{nfase} \left[\rho^\alpha \operatorname{div} \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \operatorname{grad} \rho^\alpha \right] = 0 \quad (2.83)$$

Despreciando los últimos dos sumandos, por ser muy pequeños en comparación con el resto de los términos de la ecuación (2.83), se obtiene:

$$\frac{D^{(s)}\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v^s = 0 \quad (2.84)$$

Donde ρ es la densidad de la mezcla. En el caso de que está se puede considerar constante, el balance de masa de la mezcla se reduce a:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^s = 0 \quad (2.85)$$

2.4.2. Balance del momento lineal:

Sumando las ecuaciones de balance del momento lineal de las distintas fases (2.61) y (2.62), se obtiene:

$$\left(\rho^s + \sum_{\alpha=1}^{n\text{fase}} \rho^\alpha \right) \frac{D^{(s)} \mathbf{v}^s}{Dt} = \left(\rho^s + \sum_{\alpha=1}^{n\text{fase}} \rho^\alpha \right) \mathbf{b} + \operatorname{div} \left(\boldsymbol{\sigma}^s + \sum_{\alpha=1}^{n\text{fase}} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \right) \quad (2.86)$$

Por lo que el balance del momento lineal de la mezcla:

$$\rho \frac{D^{(s)} \mathbf{v}^s}{Dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.87)$$

Por otro lado, desarrollando la ecuación de balance de momento lineal de la fase fluida:

$$\rho^{(\alpha)} \frac{D^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)}}{Dt} = \rho^{(\alpha)} \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} - \mathbf{k}_\alpha^{-1} \mathbf{w}^{(\alpha)} \quad (2.61)$$

y teniendo en cuenta la expresión:

$$\frac{D^{(\alpha)} \Phi}{Dt} = \frac{D^{(s)} \Phi}{Dt} + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \operatorname{grad} \Phi \quad (2.66)$$

Se obtiene:

$$\rho^\alpha \frac{D^{(s)}v^\alpha}{Dt} + \rho^\alpha \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \text{grad } v^\alpha = \rho^\alpha b + \text{div } \sigma^\alpha - \frac{nS_\alpha \omega_\alpha}{k_\alpha} \quad (2.88)$$

Sustituyendo (2.17) en la ecuación (2.88) se tiene:

$$\rho^\alpha \left[\frac{D^{(s)}v^s}{Dt} + \frac{D^{(s)}}{Dt} \left(\frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \right) + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \text{grad} \left[v^s + \frac{\omega^\alpha}{nS_\alpha} \right] \right] = \rho^\alpha b + \text{div } \sigma^\alpha - \frac{nS_\alpha \omega_\alpha}{k_\alpha} \quad (2.89)$$

Se puede comprobar que el segundo y el tercer sumando del término de la izquierda pueden despreciarse, por no ser su valor comparable con el del primer sumando. Esto sucede cuando la aceleración de las fases fluidas es pequeña, o cuando existe un producto de ωv .

La ecuación anterior se reduce a:

$$\rho^\alpha \frac{D^{(s)}v^s}{Dt} = \rho^\alpha b + \text{div } \sigma^\alpha - \frac{nS_\alpha \omega_\alpha}{k_\alpha} \quad (2.90)$$

con:

$$\text{div } \sigma^\alpha = -nS_\alpha \text{grad } p_\alpha \quad (2.91)$$

Y

$$\rho^{(\alpha)} = nS_\alpha \rho_\alpha \quad (2.7)$$

De ahí puede obtenerse el valor de la velocidad relativa:

$$\omega^\alpha = k_\alpha \left(-\rho_\alpha \frac{D^{(s)}v^s}{Dt} - \text{grad } p_\alpha + \rho_\alpha b \right) \quad (2.92)$$

En el caso de un suelo saturado sin efectos viscosos, esta expresión se escribe como:

$$\omega^w = k_w \left(-\rho_w \frac{D^{(s)}v^s}{Dt} - \text{grad } p_w + \rho_w b \right) \quad (2.93)$$

Mientras que para un suelo seco tenemos:

$$\omega^a = k_a \left(-\rho_a \frac{D^{(s)}v^s}{Dt} - \text{grad } p_a + \rho_a b \right) \quad (2.94)$$

En el caso de suelos saturados, reemplazando la expresión (2.93) en la ecuación (2.79) se obtiene:

$$\text{div} \left\{ k_w \left(-\text{grad } p_w + \rho_w b - \rho_w \frac{D^s v^s}{Dt} \right) \right\} + \text{div } v^s + \frac{1}{Q} \frac{D^s p_w}{Dt} = 0 \quad (2.95)$$

Los términos de divergencia de aceleraciones y fuerzas de masa se consideran pequeños en comparación con los demás y no se incluyen en el análisis. Esta aproximación se suele hacer frecuentemente en ingeniería geotécnica.

Por ello, despreciando los términos $\frac{1}{Q} \frac{Dp_w}{Dt}$, $-\text{div} \left(k_w \rho_w \frac{\partial^2 v^s}{\partial t^2} \right)$ y $\text{div}(k_w \rho_w b)$, se

llega a:

$$\text{div} (-k_w \text{grad } p_w) + \text{div } v^s = 0 \quad (2.96)$$

La ecuación (2.95) se escribe para suelos secos como sigue:

$$\operatorname{div} \left\{ k_a \left(-\operatorname{grad} p_a + \rho_a b - \rho_a \frac{D^s v^s}{Dt} \right) \right\} + \operatorname{div} v^s + \frac{1}{Q} \frac{D^s p_a}{Dt} = 0 \quad (2.97)$$

En resumen, si suponemos que las velocidades relativas de las fases fluidas y sus aceleraciones son pequeñas, el modelo v - p_w puede formularse en función de las velocidades del esqueleto sólido y las velocidades del fluido relativas al esqueleto (velocidad de Darcy). Si además, se supone que el suelo está saturado, el modelo que resulta consta de las siguientes ecuaciones:

- Balance de masa y momento lineal del agua intersticial:

$$\operatorname{div} (-k_w \operatorname{grad} p_w) + \operatorname{div} v^s = 0 \quad (2.96)$$

- Balance del momento lineal de la mezcla:

$$\rho \frac{D^{(s)} v^s}{Dt} = \rho b + \operatorname{div} \sigma \quad (2.87)$$

Las ecuaciones constitutivas y cinemáticas son las mismas que las del modelo general.

2.5. Propagación y Consolidación:

En los epígrafes anteriores se han considerado modelos, que pueden ser aplicados a un gran número de situaciones generales usuales en geotecnia. En el caso de los deslizamientos de laderas, debido a su geometría y condiciones del flujo, pueden

realizarse algunas aproximaciones adicionales interesantes, que se describen a continuación.

En primer lugar, se presentarán los modelos denominados de “propagación - consolidación”, donde se supone que la disipación de presiones intersticiales tiene lugar únicamente en la dirección de la normal al terreno, para a continuación pasar a describir los modelos integrados en profundidad. En éstos, el modelo tridimensional se transforma en uno bidimensional mediante integración en profundidad.

El punto de partida es las ecuaciones de balance para un material saturado descritas con anterioridad:

$$\rho \frac{D^{(s)} v^s}{Dt} = \rho b + \text{div } \sigma \quad (2.87)(2.96)$$

$$\text{div } (-k_w \text{grad } p_w) + \text{div } v^s = 0 \quad (2.96)$$

en las que no se ha considerado el término $\frac{1}{Q} \frac{Dp_w}{Dt}$.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que durante los movimientos rápidos de ladera aparecen dos fenómenos:

- Consolidación y disipación de las presiones intersticiales generadas.
- Propagación.

Para profundizar en el conocimiento de las propiedades de estas ecuaciones, se escribirán a continuación en modo adimensional, de acuerdo con lo propuesto por Hutter & Koch (1991), introduciendo una longitud característica del deslizamiento L y una profundidad H , así como el cociente entre ambas $\varepsilon = H/L$. Esta magnitud que se ha introducido valdría 0.05 para un deslizamiento de L igual a 10^2 m y H 5 m.

Como magnitudes características del deslizamiento, que se emplearán para la obtención de las ecuaciones adimensionales, se emplearán:

- Una longitud característica L , y una profundidad característica H . En muchos casos se podrá considerar pequeño el cociente entre ambas $\varepsilon = H/L$, denominándose este tipo de deslizamiento “superficial”.
- Como escala de tiempo se tomará $T = \sqrt{L/g}$.
- Las velocidades se escalarán con $v = \sqrt{gL}$.
- Finalmente, las tensiones y presiones serán referidas a una presión $\rho_0 g H$, donde ρ_0 es una densidad de referencia.

Los ejes x_1 y x_2 se tomarán en un plano de pendiente similar a la media del terreno, o alternativamente, a un plano horizontal, siendo el eje x_3 normal a este plano.

El modelo v - p_w se formula en forma adimensional, introduciendo las magnitudes

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_1 &= x_1/L & \hat{x}_2 &= x_2/L & \hat{x}_3 &= x_3/H \\
 \hat{v}_1 &= v_1/\sqrt{gL} & \hat{v}_2 &= v_2/\sqrt{gL} & \hat{v}_3 &= v_3/\varepsilon\sqrt{gL} \\
 \hat{\sigma} &= \sigma/\rho_0 g H & \hat{p}_w &= p_w/\rho_0 g H & &
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Utilizando estas magnitudes, se obtiene:

$$\begin{aligned} k_w \text{grad } p_w &= k_w \left[\frac{dp_w}{d\hat{x}_1} \frac{d\hat{x}_1}{dx_1} + \frac{dp_w}{d\hat{x}_2} \frac{d\hat{x}_2}{dx_2} + \frac{dp_w}{d\hat{x}_3} \frac{d\hat{x}_3}{dx_3} \right] \\ &= k_w \rho_0 g \left[\varepsilon \frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_1} + \varepsilon \frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_2} + \frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_3} \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(-k_w \text{grad } p_w) &= -k_w \rho_0 g \left[\frac{d}{dx_1} \left(\varepsilon \frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_1} \right) + \frac{d}{dx_2} \left(\varepsilon \frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_2} \right) + \frac{d}{dx_3} \left(\frac{d\hat{p}_w}{d\hat{x}_3} \right) \right] \\ &= \frac{-k_w \rho_0 g}{H} \left[\varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_1^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_2^2} + \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_3^2} \right] \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\text{div } \mathbf{v}^s = \frac{dv_1}{dx_1} + \frac{dv_2}{dx_2} + \frac{dv_3}{dx_3} = \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{d\hat{v}_1}{d\hat{x}_1} + \frac{d\hat{v}_2}{d\hat{x}_2} + \frac{d\hat{v}_3}{d\hat{x}_3} \right] = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{div } \hat{\mathbf{v}}^s \quad (2.101)$$

Sustituyendo las expresiones (2.100) y (2.101) en la ecuación(2.96), se obtiene:

$$\text{div } \hat{\mathbf{v}}^s = \left[\frac{\sqrt{L/g}}{H/k_w \rho_0 g} \right] \left[\varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_1^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_2^2} + \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_3^2} \right] \quad (2.102)$$

De este modo, las ecuaciones adimensionales para los balances de masa y de momento lineal son:

$$\text{div } \hat{\mathbf{v}}^s = \theta \left[\varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_1^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_2^2} + \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_3^2} \right] \quad (2.103)$$

En esta ecuación se ha introducido una nueva magnitud adimensional θ dada por

$$\theta = \left(\frac{\sqrt{L/g}}{H/(k_w \rho_0 g)} \right) \quad (2.104)$$

Tomando para L y H valores típicos de estas magnitudes, y suponiendo que la permeabilidad es tal que $k_w \rho_0 g$ es del orden de 10^{-n} ms^{-1} , puede comprobarse fácilmente que θ será del orden de 10^{-n} . Valores típicos de este parámetro son 10^{-9} para arenas, 10^{-7} para limos, 10^{-5} para arenas finas y 10^{-1} para gravas.

En el caso de deslizamientos superficiales, se pueden despreciar los términos en ε^2 . Por lo tanto, la ecuación (2.103) puede escribirse como:

$$\text{div } \hat{v}^s = \theta \frac{d^2 \hat{p}_w}{d\hat{x}_3^2} \quad (2.105)$$

donde únicamente aparecen derivadas con respecto a la normal al terreno, que es la dirección principal de disipación de las presiones intersticiales.

Por otro lado, la componente según x_3 de la ecuación de balance de momento lineal de la mezcla (2.87) es:

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial t} = -1 + \left[\varepsilon \frac{d\hat{\sigma}_{13}}{d\hat{x}_1} + \varepsilon \frac{d\hat{\sigma}_{23}}{d\hat{x}_2} + \frac{d\hat{\sigma}_{33}}{d\hat{x}_3} \right] \quad (2.106)$$

Para obtener esta ecuación se ha supuesto que la gravedad actúa según x_3 y que, por lo tanto, $\hat{b}_3 = -\hat{g} = -1$. Si se considera además que ε es pequeño, la ecuación se simplifica, resultando:

$$-1 + \frac{\partial \hat{\sigma}_{33}}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad (2.107)$$

o, en función de las tensiones efectivas:

$$-1 + \frac{\partial \hat{\sigma}'_{33}}{\partial \hat{x}_3} - \frac{\partial \hat{p}_w}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad (2.108)$$

Las ecuaciones (2.105), (2.107) y (2.108) expresadas dimensionalmente resultan:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \\ -\rho g + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \\ -\rho g + \frac{\partial \sigma'_{33}}{\partial x_3} - \frac{\partial p_w}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Si se asume la hipótesis de que el campo de velocidades puede descomponerse como:

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}_0 + \hat{\mathbf{v}}_1 \quad (2.110)$$

y se supone que el campo de presiones intersticiales puede a su vez, descomponerse en:

$$\hat{p}_w = \hat{p}_{w0} + \hat{p}_{w1} \quad (2.111)$$

donde p_{w0} es una presión hidrostática, que varía linealmente entre un valor nulo en la superficie hasta ρgh en la base del deslizamiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{v}_0 + \operatorname{div} \hat{v}_1 &= \theta \left(\frac{\partial^2 \hat{p}_{w0}}{\partial \hat{x}_3^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}_{w1}}{\partial \hat{x}_3^2} \right) \\ \operatorname{div} \hat{v}_0 + \operatorname{div} \hat{v}_1 &= \theta \frac{\partial^2 \hat{p}_{w1}}{\partial \hat{x}_3^2} \end{aligned} \quad (2.112)$$

De aquí, pueden obtenerse las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{v}_0 &= 0 \\ \operatorname{div} \hat{v}_1 &= \theta \frac{\partial^2 \hat{p}_{w1}}{\partial \hat{x}_3^2} \end{aligned} \quad (2.113)$$

De esta forma, se puede identificar el campo de velocidades v_1 , como la componente correspondiente a la consolidación unidimensional, siendo v_0 el campo de velocidades que corresponde a la propagación. Este resultado tiene una importancia extraordinaria, y clarifica las hipótesis que deben hacerse al modelar estos problemas.

En primer lugar, la incompresibilidad que se suele suponer al material no es una propiedad reológica del mismo, sino una consecuencia directa del acoplamiento entre el fluido intersticial y el esqueleto sólido. De hecho, esto explica el comportamiento “sin drenaje” que se reproduce en algunos reómetros, donde se observa que la presión depende de la velocidad de deformación cortante.

Las variaciones de p_{w1} debidas a la consolidación provocarán cambios en el tensor hidrostático σ'_{33} , que dará lugar a una deformación volumétrica del esqueleto sólido dada por:

$$\operatorname{div} v_1 = \frac{1}{K_T} \frac{Dp_w}{Dt} \quad (2.114)$$

donde K_T es el modulo de rigidez del esqueleto sólido, se llega a:

$$\frac{1}{K_T} \frac{Dp_w}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \quad (2.115)$$

Expresión en la que p_w depende de x_1, x_2, x_3 y t .

En resumen, el modelo de propagación- consolidación consiste en el siguiente conjunto de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\rho \frac{Dv_0}{Dt} = \rho b + \text{div } \sigma \quad (2.116)$$

$$\text{div } v_0^{(s)} = 0 \quad (2.117)$$

$$\frac{1}{K_T} \frac{Dp_w}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \quad (2.118)$$

Estas ecuaciones se completan con:

- las ecuaciones constitutivas o reológicas, que relacionan tensiones y deformaciones en el seno del material
- relaciones cinemáticas entre deformaciones y velocidades.

2.6. Modelos Integrados En Profundidad:

2.6.1. Introducción:

Un modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico, y en particular el sistema de un flujo, sólo se puede definir después de considerar el nivel de aproximación requerido, para alcanzar un nivel de precisión aceptable para un número de variables, tanto dependientes como independientes, que en su conjunto describen el sistema y su comportamiento. De este modo, para describir adecuadamente la evolución del sistema pueden ser imprescindibles las tres variables del espacio (aproximación tridimensional). No obstante, podría ser suficiente una aproximación unidimensional, si predomina la influencia de una variable espacial. Asimismo, el nivel espacial de la aproximación podría ser: uni-, bi- o tri-dimensional.

Como resultado, los modelos matemáticos para la fase de propagación de los movimientos rápidos de ladera, se pueden clasificar en tres grupos:

Formulaciones 3D completas, donde las ecuaciones de balance de masa y balance de momento lineal están resueltas en un dominio que cambia con el tiempo.

Modelos integrados en profundidad: en los que se aplica una simplificación en la estructura vertical del flujo, integrando las ecuaciones de balance en profundidad. De ahí surgen las ecuaciones llamadas “Integradas en profundidad” o “Ecuaciones de aguas someras”.

El modelo integrado en profundidad, se puede simplificar aún más, integrando las ecuaciones en las secciones transversales. De modo que se consiguen **modelos 1D simplificados**.

Los modelos tridimensionales son completos, pero muy caros en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Mientras que los modelos integrados en profundidad son más eficientes, ya que nos proporcionan una buena relación coste-fiabilidad de resultados, que justifica su idoneidad para simular gran parte de los problemas de movimientos rápidos de ladera.

Para obtener dicho modelo, se parte de las ecuaciones obtenidas para materiales saturados con densidad constante, sin influencia térmica:

$$\rho \frac{Dv_0}{Dt} = \rho b + \text{div } \sigma \quad (2.116)$$

$$\text{div } v_0^{(s)} = 0 \quad (2.117)$$

$$\frac{1}{K_T} \frac{Dp_w}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \quad (2.118)$$

A continuación, para simplificar la notación, no se escribirán en las ecuaciones los subíndices "0" del campo de velocidades y "1" en el campo de presiones.

Si se tiene en cuenta la condición de incompresibilidad del material, la ecuación (2.116) puede ser escrita en forma conservativa como:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) + \rho b_i \quad (2.119)$$

Estas ecuaciones se integran en la dirección normal al terreno, haciendo uso de la regla de Leibnitz y de la descomposición de Reynolds.

La regla de Leibnitz que se aplicara para integrar las ecuaciones en profundidad establece que:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} F(r, s) dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b F(r, s) dr - F(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a, s) \frac{\partial a}{\partial s} \quad (2.120)$$

Donde a y b son funciones diferenciables de s, y $F(r, s)$, y $\frac{\partial F(r, s)}{\partial s}$ son continuas en r y en s.

Por otro lado, según la descomposición de Reynolds una variable se descompone en su valor medio y su fluctuación en altura:

$$a = \bar{a} + a' \quad (2.121)$$

Donde el valor promediado es:

$$\bar{a} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} a(x_3) dx_3 \quad (2.122)$$

En algunos casos, como ocurre con los flujos de derrubios, existen variaciones de tipo turbulento que se superponen a un estado promediado en el tiempo. Si se integran las ecuaciones del modelo en un tiempo representativo T, se obtiene un término adicional,

equivalente a las tensiones de Reynolds, denominado σ_{ij}^R , que viene dado por la expresión:

$$\sigma_{ij}^R = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\rho v_i' v_j') dt \quad (2.123)$$

y que, a su vez, se añade a las tensiones promediadas en el tiempo.

En la expresión anterior, v_i' representa las fluctuaciones de la velocidad v_i , alrededor de su media temporal \bar{v}_i .

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_i(x_1, x_2) + v_i'(x_1, x_2, x_3) \quad (2.124)$$

Por tanto, el tensor de tensiones $\bar{\sigma}_{ij}$ con la contribución de las tensiones de Reynolds es:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 - \frac{\rho}{h} \int_z^{z+h} v_j' v_i' dx_3 \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{h} \left(\int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 - \rho \int_z^{z+h} v_j' v_i' dx_3 \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

A partir de ahora, se supondrá que el tensor de tensiones σ_{ij} , incluye las tensiones de Reynolds, y por sencillez se simplificará la notación, asumiendo que las tensiones son valores promediados.

Se empleará aquí el sistema de referencia dado en la Figura 2.6., donde se han representado algunas magnitudes relevantes de este problema.

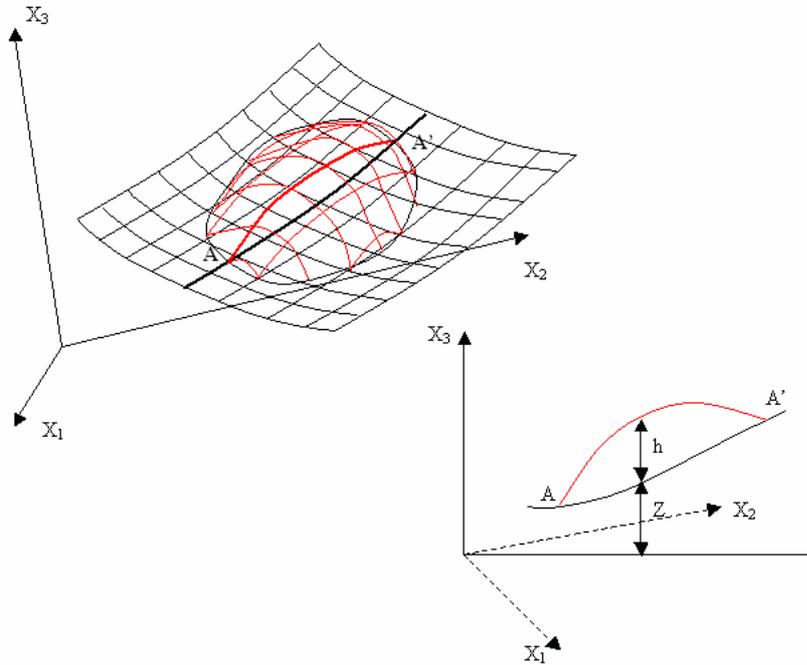


Figura 2.6. Sistema de referencia empleado en el modelo

2.6.2. Integración en profundidad del modelo propagación –consolidación:

- *Propagación:*

Al aplicar la regla de Leibnitz a la ecuación de balance de masa del modelo de propagación:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v_j = 0 \quad (2.126)$$

Se obtiene:

$$\int_z^{z+h} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_z^{z+h} v_j dx_3 - \left[v_j \frac{\partial(z+h)}{\partial x_j} - v_3 \Big|_{z+h} \right] + \left[v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} - v_3 \Big|_z \right] = 0 \quad (2.127)$$

Desarrollando esta ecuación y teniendo en cuenta el valor promedio de la velocidad, así como la impermeabilidad del fondo ($v_3|_z = 0$) y que $\frac{D}{Dt}(h+z) = v_3$, se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial t} (h+z) - \frac{\partial}{\partial t} (z) = 0 \quad (2.128)$$

Y, por lo tanto, la ecuación de balance de masa integrada en profundidad resulta:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_j) = 0 \quad \text{con } j=1,2} \quad (2.129)$$

donde \bar{v}_j es la componente según X_j de la velocidad promediada en profundidad.

Por otro lado, integrando la ecuación de balance de momento lineal a lo largo de X_3 :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) + \rho b_i \quad (2.130)$$

Se obtiene:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+h} v_i dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{z+h} v_i v_j dx_3 \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \quad (2.131)$$

donde t_i^A and t_i^B son las tensiones, que actúan en la superficie y en la base del deslizamiento respectivamente, y que están dadas por:

$$\begin{aligned}
 t_i^A &= - \left[\sigma_{ij} \frac{\partial(z+h)}{\partial t} - \sigma_{3j} \right]_{z+h} = -\sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j \Big|_{z+h} \\
 t_i^B &= \left[\sigma_{ij} \frac{\partial z}{\partial t} - \sigma_{3j} \right]_z = \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j \Big|_z
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

siendo σ_{ij} el tensor de tensiones promediado en profundidad, el cual puede escribirse como:

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \bar{s} \tag{2.133}$$

Donde \bar{s} y $-\bar{p}I$ representan respectivamente las partes desviadora y isotropa del tensor de tensiones promediado en profundidad.

Por su parte, la presión isotropa integrada en profundidad viene dada por:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho gh \tag{2.134}$$

Teniendo en cuenta, la descomposición de la velocidad, el tensor de tensiones de Reynolds (2.125) y la relación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+h} v_i dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} (h \bar{v}_i) \tag{2.135}$$

La relación (2.131) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_i\bar{v}_j) &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} [h(-\bar{p}\delta_{ij} + \bar{s}_{ij})] + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right] \end{aligned} \quad (2.136)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2.133) y (2.134), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\bar{v}_i\bar{v}_j + \frac{1}{2}gh^2\delta_{ij} \right) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{s}_{ij}h) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right] \quad (2.137)$$

Según el eje X_3 , la ecuación (2.136) da lugar a:

$$t_3^B = -\frac{\partial}{\partial x_3}(h\bar{\sigma}_{3j}) - t_3^A - \rho b_3 h \quad (2.138)$$

En resumen, el submodelo de propagación integrado según X_3 se expresa con notación indicial como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_j) &= 0 \quad \text{con } j=1,2 \\ \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\bar{v}_i\bar{v}_j + \frac{1}{2}gh^2\delta_{ij} \right) &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{s}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right] \quad \text{con } j=1,2 \\ t_3^B &= -\frac{\partial}{\partial x_3}(h\bar{\sigma}_{3j}) - t_3^A - \rho b_3 h \end{aligned}$$

(2.139)

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma conservativa:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S \quad (2.140)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 U^T &= (h, h\bar{v}_1, h\bar{v}_2) \\
 F_1^T &= \left(h\bar{v}_1, \left(h\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{11} \right), \left(h\bar{v}_2\bar{v}_1 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{21} \right) \right) \\
 F_2^T &= \left(h\bar{v}_1, \left(h_1\bar{v}_1\bar{v}_2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{12} \right), \left(h\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{22} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.141}$$

Finalmente, el término de fuentes es:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1h \\ b_2h \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ h\bar{s}_{11} \\ h\bar{s}_{12} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ h\bar{s}_{12} \\ h\bar{s}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t_{1A} + t_{1B} \\ t_{2A} + t_{2B} \end{pmatrix} \right] \tag{2.142}$$

- **Consolidación:**

Se ha considerado la existencia de una capa saturada de altura h_s en el fondo del flujo del material (Hungry, 1995). Por tanto, la disminución de la presión intersticial estará causada por la consolidación vertical de esta capa.

La ecuación en derivadas parciales de la consolidación es:

$$\frac{1}{K_T} \frac{Dp_w}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \tag{2.143}$$

Siendo el coeficiente de consolidación:

$$C_v = \frac{k_w}{\gamma_w c} = K_T k_w \tag{2.144}$$

donde:

- C_v , coeficiente de consolidación
- k_w , permeabilidad
- γ_w , peso específico del fluido
- c , compresibilidad del material
- K_T , rigidez volumétrica del esqueleto sólido

Introduciendo el coeficiente de consolidación, la ecuación de la consolidación es:

$$\frac{\partial p_w}{\partial t} + v_i \frac{\partial p_w}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(C_v \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \quad (2.145)$$

que coincide con la obtenida en la teoría de Terzaghi- Fröhlich.

Dicha ecuación puede ser integrada en profundidad, obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_w h) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v}_i \bar{p}_w h) = c_v \left. \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right|_{z+h} - c_v \left. \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right|_z \quad (2.146)$$

La presión intersticial puede aproximarse mediante la expresión:

$$p_w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^{nf} N_j^{(3)}(x_3) p_{wj}(x_1, x_2, t) \quad (2.147)$$

en la que $N_j^{(3)}(x_3)$ son funciones de forma, que se han empleado para aproximar la variación de la presión según x_3 . Entre las distintas alternativas existentes, se han elegido en este trabajo funciones de tipo armónico que satisfagan las condiciones de contorno. En el caso de que éstas sean presión nula en superficie y flujo nulo en la base del deslizamiento, la aproximación que se construye es:

$$N_j^{(3)}(x_3) = \cos\left(\frac{2j-1}{2h}\pi(x_3 - z)\right) \quad j=1\dots nf \quad (2.148)$$

Por sencillez, se tomará una única componente, llegando así a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_{w1}h) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{v}_k P_{w1}h) = -\frac{\pi^2}{4h^2}c_v P_{w1} \quad (2.149)$$

donde P_{jw} depende de x_1 , x_2 y t . Esta ecuación de disipación de presiones intersticiales se incorpora al modelo general (2.140), que consta ahora de una ecuación adicional y una incógnita más. De este modo, el sistema queda como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = S \quad (2.150)$$

donde

$$\begin{aligned} U^T &= (h, h\bar{v}_1, h\bar{v}_2, hP_{w1}) \\ F_1^T &= \left(h\bar{v}_1, \left(h\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{11} \right), \left(h\bar{v}_2\bar{v}_1 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{21} \right), hP_{w1}\bar{v}_1 \right) \\ F_2^T &= \left(h\bar{v}_1, \left(h_1\bar{v}_1\bar{v}_2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{12} \right), \left(h\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}gh^2\delta_{22} \right), hP_{w1}\bar{v}_2 \right) \end{aligned} \quad (2.151)$$

y

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1h \\ b_2h \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ h\bar{s}_{11} \\ h\bar{s}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ h\bar{s}_{12} \\ h\bar{s}_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ t_{1A}+t_{1B} \\ t_{2A}+t_{2B} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\pi^2}{4h^2}c_v P_{w1} \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

Es importante destacar que ahora aparece un término de fuente adicional debido a la disipación de presiones intersticiales.

Asumiendo que las tensiones en la superficie son nulas y que las tensiones en el fondo vienen dadas por:

$$t^B = -\rho gh \text{ grad } Z - \tau_b \quad (2.153)$$

el modelo (2.139) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\bar{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \rho \text{div}(h\bar{v} \otimes \bar{v}) + \text{grad}\left(\frac{1}{2}\rho gh^2\right) &= \rho bh + \text{div}(h\bar{s}) - \rho gh \text{ grad } Z - \tau_b \\ \frac{\partial}{\partial t}(P_{w1}h) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{v}_k P_{w1}h) &= -\frac{\pi^2}{4h^2} c_v P_{w1} \end{aligned} \quad (2.154)$$

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales al que se ha llegado representa una formulación euleriana obtenida integrando en profundidad las ecuaciones de balance de masa, las del momento lineal, además de la ecuación unidimensional de la consolidación.

Es fácil ver, que, suponiendo un volumen ficticio que corresponda a la columna integrada en profundidad, y que se mueva con su velocidad promediada \bar{v} , las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \frac{Dh}{Dt} + h \operatorname{div}(\bar{v}) &= 0 \\
 \rho \frac{D(h\bar{v})}{Dt} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\rho gh^2\right) &= \rho bh + \operatorname{div}(h\bar{s}) - \rho gh \operatorname{grad}Z - \tau_b - \rho h \bar{v} \operatorname{div}(\bar{v}) \\
 \frac{\partial}{\partial t}(P_{w1}h) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{v}_k P_{w1}h) &= -\frac{\pi^2}{4h^2} c_v P_{w1}
 \end{aligned}
 \tag{2.155}$$

Estos sistemas de ecuaciones se pueden resolver mediante los distintos métodos numéricos disponibles (diferencias finitas, elementos finitos, volumen finito o métodos sin malla como el SPH). En los capítulos 4 y 5 se presenta la discretización mediante la técnica de elementos finitos y SPH del modelo integrado en profundidad que se ha presentado en este capítulo.

2.6.3. Sistemas de referencia a emplear:

En el modelo integrado en profundidad, se supone que las velocidades son paralelas al plano x_1, x_2 . Sin embargo, en ocasiones estos deslizamientos rápidos ocurren en terrenos con curvaturas importantes, o grandes pendientes, siendo las velocidades paralelas a la base del deslizamiento en cada punto. Para tener en cuenta estos efectos, una alternativa que propusieron Savage & Hutter (1991) es emplear un modelo unidimensional lagrangiano. En este modelo, los autores llegaron a la conclusión de que los efectos de la curvatura del terreno son importantes, ya que causan variaciones considerables de las tensiones verticales, las cuales a su vez modifican la fuerza de rozamiento con el fondo en el caso de fluidos de tipo friccional.

Estas ecuaciones fueron resueltas también por Hungr (1995), quien empleó un modelo lagrangiano de diferencias finitas unidimensional. La masa del deslizamiento se divide en una serie de bloques en contacto entre sí, que se pueden deformar durante la propagación del deslizamiento. El efecto de la curvatura del terreno, se tuvo en cuenta

empleando una componente adicional centrífuga a la fuerza normal, de forma que la fuerza de rozamiento a aplicar es esta fuerza normal modificada multiplicada por la tangente del ángulo de rozamiento con el fondo.

Para problemas bidimensionales, Pastor et al., (2002, 2003,2004) han empleado dos métodos alternativos. El primero consiste en emplear un sistema de referencia en coordenadas curvilíneas asociadas al terreno. En este método, los ejes están orientados según la normal al terreno, siendo los otros dos ejes perpendiculares a este (Quecedo & Pastor, 2003).

Como alternativa más sencilla, se emplea en este trabajo una aproximación consistente en aumentar la tensión normal empleando la fuerza centrífuga. La tensión tangencial en el fondo es, pues,

$$|t_B| = \left(g + \frac{v^2}{R} \right) h \cdot \operatorname{tg} \phi \quad (2.156)$$

Donde R es el radio de curvatura principal, según la dirección de propagación del deslizamiento en el punto considerado.

Este radio de curvatura R se calcula mediante la formula:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \Big|_M = \frac{L \cos^2 \alpha + M \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + N \operatorname{sen}^2 \alpha}{E \cos^2 \alpha + F \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + G \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{L + M\lambda + N\lambda^2}{E + F\lambda + G\lambda^2} \quad (2.157)$$

donde:

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{tg} \alpha, L = \bar{n}X_{uu}, M = \bar{n}X_{uv}, N = \bar{n}X_{vv}, \\ E &= X_u X_u, F = X_u X_v, G = X_v X_v \end{aligned} \quad (2.158)$$

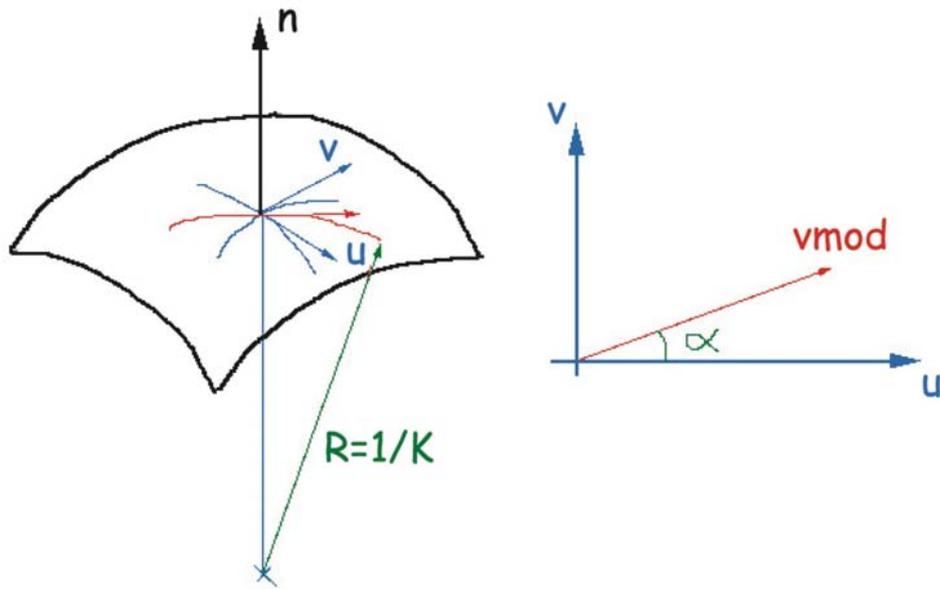


Figura 2. 7. Aproximación de la curvatura

Tomando ahora: $u \equiv x$ y $v \equiv y$, se obtiene:

$$\bar{n} = \frac{(-Z_x, -Z_y, 1)}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}}$$

$$X_u = (1, 0, Z_x) \quad X_v = (0, 1, Z_y) \quad (2.159)$$

$$X_{uu} = (0, 0, Z_{xx}) \quad X_{uv} = (0, 0, Z_{xy}) \quad X_{vv} = (0, 0, Z_{yy})$$

donde los valores de E, F, G, L, M y N vienen dados por:

$$E = (1 + Z_x^2) \quad F = (Z_x Z_y) \quad G = (1 + Z_y^2)$$

$$L = \frac{Z_{xx}}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}} \quad M = \frac{Z_{xy}}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}} \quad N = \frac{Z_{yy}}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}} \quad (2.160)$$

Bibliografía:

Biot, M.A. (1941), *General theory of three-dimensional consolidation*. J.Appl.Phys. 12, pp. 155-164.

Biot, M.A. (1955), *Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid*. J.Appl.Phys. 26, pp. 182-185

Brooks, R .M. & Corey, A. T. (1966), *Properties of porous media affecting fluid flow*. Jnl. Irrig. Drain.Div. Am. Soc. Civ. Engrs, 92, 2, pp. 61-88.

Brutsaert, N. (1968), *The permeability of a porous medium determined from certain probability laws for pore size distribution*. Water Ressour. Res., 4 , pp. 434- 45 2.

Coussy,O. (1995), *Mechanics of Porous Media*, John Wiley and Sons, Chichester.

De Boer, R. (2000), *Theory of porous media*, Springer-Verlag, Berlin.

Fernández Merodo, J. A. (2001), *Une approche à la modélisation de glissement et des effondrements de terrain: initiation et propagation*, Ecole Centrale de Paris.

Gardner, W.R. (1958), *Some steady state solution of the unsaturated moisture flow equations with application to evaporation from a water table*. Soil Sci., 85, 4 228-232.

Hungr, O. (1995), *A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows and avalanches*, Can.Geotech.J. 32, pp 610-623.

Hutchinson, J.N. (1986). *A sliding-consolidation model for flow slides*, Can.Geotech.J., 23, 115-126

Hutter, K. & Koch, T. (1991). *Motion of a granular avalanche in an exponentially curved chute: experiments and theoretical predictions*, Phil. Trans. R. Soc.London, A 334, pp 93-138.

Iverson, R.I., & Denlinger, R.P. (2001), *Flow of variably fluidized granular masses across three dimensional terrain. 1. Coulomb mixture theory*, J. Geophys. Res. 106, N0.B1, 537-552

Lewis, R.L. & Schrefler, B.A. (1998), *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, J.Wiley and Sons.

Mira, P. (2002), *Análisis por Elementos Finitos de Problemas de Rotura en Geomateriales*, Ph.D.Thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Pastor, M., Quecedo,M., Fernández Merodo, J.A., Herreros, M.I., González, E. & Mira, P. (2002), *Modelling Tailing Dams and mine waste dumps failures*, Geotechnique, Vol.LII, N.8, 579-592.

Quecedo, M. & Pastor,M. (2003), *Finite Element modelling of free surface flows on inclined and curved beds*. Journal of Computational Physics Vol. 189, Issue 1, pp. 45-62.

Quecedo, M., Pastor, M., Herreros, M.I., & Fernández Merodo, J.A. (2004), *Numerical Modelling of the propagation of fast landslides using the finite element method*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 59:, pp. 755-794.

Savage, S.B. & Hutter, K. (1991). *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis*, Acta Mechanica 86, pp. 201-223.

Van Genuchten, M.T. (1980), *A closed-form equation for predicting the hydraulic connectivity of unsaturated soils*. Soil. Sci. Soc. Am. J. 44, pp. 892-898 .

Zienkiewicz, O.C., C.T.Chang & P.Bettess (1980), *Drained, undrained, consolidating dynamic behaviour assumptions in soils*. Geotechnique 30, pp. 385-395.

Zienkiewicz, O.C. & Shiomi, T. (1984), *Dynamic behaviour of saturated porous media: The generalised Biot formulation and its numerical solution*. Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech., 8, pp. 71-96.

Zienkiewicz, O.C., Chan, A.H.C., Pastor, M., Paul, D.K & Shiomi, T. (1990a) *Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. I. Fully saturated problems* Proc.R.Soc.Lond. A 429, pp. 285-309.

Zienkiewicz, O.C, Xie, Y.M., Schrefler, B.A., Ledesma, A. & Bicanic, N . (1990b) *Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. II. Semi-saturated problems*. Proc.R. Soc.Lond. A 429, pp. 311-321.

Zienkiewicz, O.C., Chan, A.H.C., Pastor, M., Shrefler, B.A., & Shiomi, T. (2000), *Computational Geomechanics*, J.Wiley and Sons

CAPÍTULO 3

COMPORTAMIENTO DE GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS: MODELOS REOLÓGICOS

3.1. Introducción:

El modelo matemático descrito en el capítulo anterior debe ser completado mediante una ecuación adicional, que relacione los tensores de tensiones o sus incrementos con los relativos a las deformaciones o sus velocidades. Se trata de las ecuaciones constitutivas que en mecánica de fluidos suelen ser denominadas modelos reológicos.

En el caso del análisis de la iniciación del deslizamiento, se ha dedicado un gran esfuerzo a desarrollar modelos constitutivos precisos capaces de describir los aspectos más relevantes de su comportamiento. Hoy en día, hay todo un abanico de modelos y

como ejemplos se pueden citar: a) los modelos elastoplásticos, b) viscoplasticos, c) hipoplástico, d) plasticidad generalizada, etc. No obstante, no existe ningún modelo capaz de reproducir el comportamiento de las mezclas de suelo bajo todos los estados de esfuerzo que se generan en un deslizamiento rápido (desde su iniciación hasta su parada, pasando por su propagación). Además, una vez se haya producido la fluidificación del suelo los modelos a utilizar son distintos a aquellos utilizados para reproducir la fase de iniciación del movimiento.

Básicamente, existen dos líneas de investigación dedicadas al estudio del comportamiento de los geomateriales fluidificados. La primera fue iniciada por Takahashi (1978). Este autor considera que el material que forma los flujos de derrubios está constituido por partículas dispersas en un fluido viscoso. Bajo esta premisa, Takahashi asume la aplicabilidad de la teoría de Bagnold (1954) referente a flujos rápidos de partículas esféricas uniformes. El modelo de Bagnold es válido para describir el comportamiento de los flujos extremadamente rápidos de masas secas formadas por partículas sin cohesión, ya que en este escenario prevalecen los efectos de las colisiones. Sin embargo, su uso no es aconsejable en el caso de mezclas de agua y suelo, tal y como los flujos de derrubios (Coussot & Meunier, 1996). Igualmente, la teoría inicial de Bagnold es incapaz de predecir o proporcionar información respecto a la tensión de fluencia de los flujos de derrubios que, por otro lado, según las observaciones de campo es una de las características principales de estos eventos. La tensión de fluencia está asociada a la red de interacciones entre las partículas arcillosas que se forma a través del material (M'Ewen & Pratt, 1957; Michaels & Bolger, 1962; Firth & Hunter, 1976; Van Olphen, 1977; Coussot et al., 1993; Coussot & Piau, 1994a). Esta red debe romperse para que el flujo tenga lugar. Por lo tanto, la tensión de fluencia corresponde a la tensión mínima que hay que superar para que haya flujo. Este hecho, explica los grandes espesores de los depósitos de flujos de derrubios que pueden llegar a observarse incluso en altas pendientes. Sobre la base de este comportamiento, se ha iniciado una segunda línea de investigación que considera estos flujos como fluidos viscoplásticos. A este respecto, se han propuesto varios modelos

que han sido desarrollados a partir de: a) los datos experimentales obtenidos con los reómetros (Wan, 1982; Locat & Demers, 1988; O'Brien & Julien, 1988; Coussot & Piau, 1994a, 1995c; Wang et al., 1994) para la fracción fina de los Flujos de Derrubios o con reómetros de gran escala, b) la información resultante de las consideraciones teóricas (Chen, 1988; Julien & Lan, 1991), c) las observaciones de campo (Fink et al., 1981; Johnson & Rodine, 1984; Pierson, 1986; Whipple & Dunne, 1992). El modelo viscoplástico más utilizado es el modelo de Bingham (Bingham & Green, 1919), inicialmente propuesto para los FD por Johnson (1970) y Daido (1971). Sin embargo, trabajos recientes (Nguyen & Boger, 1983; Coussot & Piau, 1994a, 1995b, c; Atapattu et al., 1995) han propuesto utilizar el modelo de Herschel- Bulkley (Herschel & Bulkley, 1926), que es más sofisticado que el anterior.

En este capítulo se presentan los modelos reológicos más relevantes capaces de describir el comportamiento de los suelos fluidificados. En este contexto, en una primera fase se describen los mecanismos de licuefacción o fluidificación, que causan la transformación del suelo de un material con comportamiento sólido a un material con comportamiento fluido. En paralelo, se describen algunos aparatos y procedimientos de laboratorio que permiten determinar las propiedades de los materiales fluidificados, así como algunos aspectos básicos del comportamiento de estos materiales. Seguidamente, se introduce un marco general dentro del cual se pueden describir leyes reológicas como la de los fluidos Newtonianos, los fluidos de Bagnold y los fluidos tipo Bingham. Finalmente, se integran estos modelos en profundidad al objeto de determinar los términos de "tensiones integradas en profundidad" y "fuerzas de fricción con el fondo". Esto es debido a que las ecuaciones reológicas obtenidas no se pueden utilizar directamente en los modelos integrados en profundidad presentados en el capítulo anterior.

3.2. Mecanismos de fluidificación:

En términos generales, durante la fase de iniciación del movimiento se pueden distinguir dos tipologías principales de rotura: “los deslizamientos *s. s.*” y “los flujos”. En el primer caso, la masa de suelo se comporta como un cuerpo rígido que se mueve a lo largo de una superficie de rotura definida donde se localizan los esfuerzos. Esta superficie de rotura es la que se analiza de forma habitual en los estudios geotécnicos, y corresponde al fenómeno de localización de la deformación plástica. Mientras que en el segundo caso, la rotura tiene lugar de forma “difusa” en un espesor más amplio de suelo. En este contexto, cabe destacar el trabajo realizado por Darve y sus colaboradores de Grenoble, quienes han propuesto e investigado este mecanismo (Darve & Laouafa, 2001). Igualmente, son destacables los trabajos del grupo de investigación de Manuel Pastor (Pastor et al., 2002; Fernández-Merodo et al., 2004). Evidentemente se pueden dar situaciones mucho más complejas, tales como procesos mixtos donde la licuefacción se ha desarrollado en una zona limitada, o deslizamientos que al recibir aportes de agua durante su propagación presentan un comportamiento similar al de una rotura difusa. En general, los deslizamientos más catastróficos suelen estar relacionados con la licuefacción de depósitos flojos poco compactados. Por lo tanto, es de suma importancia relacionar los mecanismos de rotura “localizada” y “difusa” con las propiedades constitutivas del geomaterial.

Los deslizamientos rápidos se caracterizan por una aceleración de la masa del suelo supuestamente causada por una pérdida de resistencia. A su vez, esta pérdida de resistencia a menudo se relaciona con el reblandecimiento (*softening*) del material. Para analizar este fenómeno se han considerado tres ensayos triaxiales (ver figura 3.1.): (i) ensayo triaxial con consolidación previa y con drenaje (CD) de arena densa; (ii) ensayo triaxial con consolidación previa y sin drenaje (CU) de arena muy floja; y (iii) ensayo triaxial con consolidación previa y sin drenaje (CU) de arcilla sobreconsolidada.

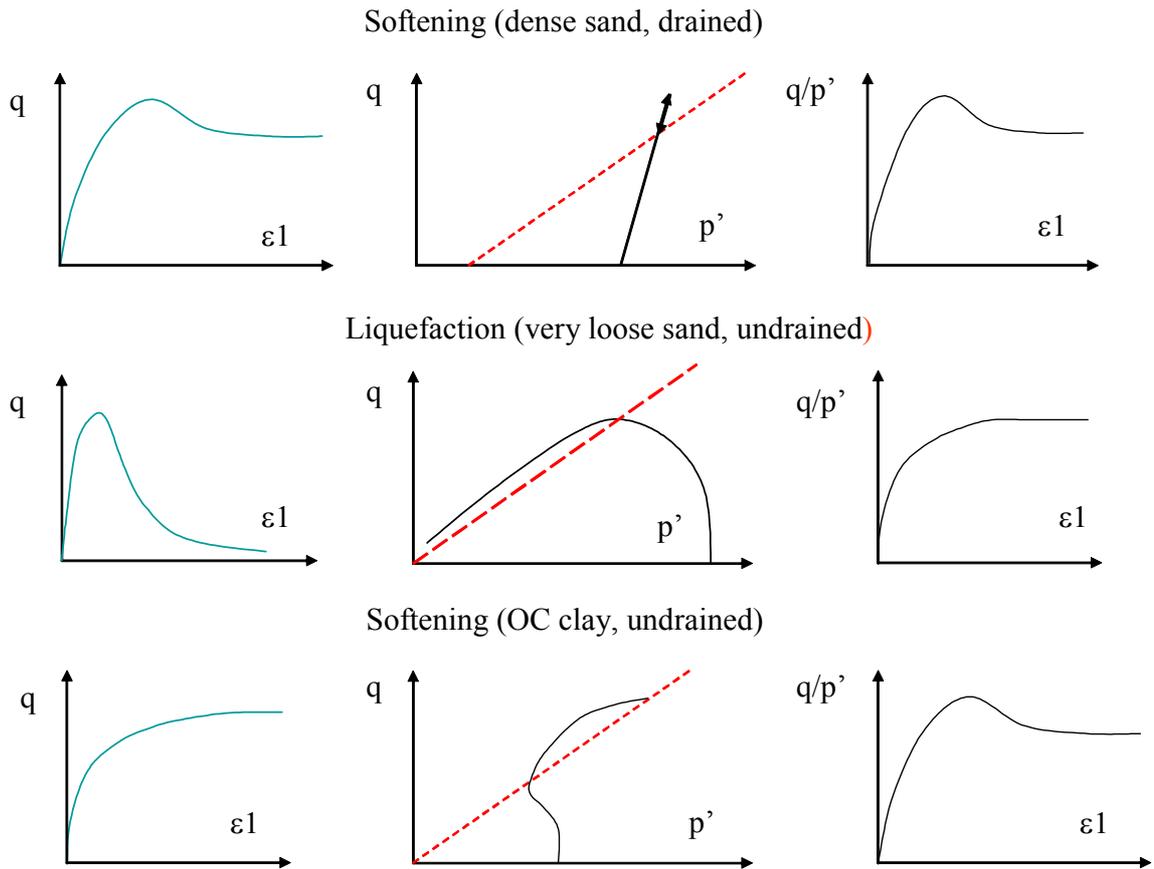


Figura 3.1. Reblandecimiento y licuefacción de los geomateriales (Pastor, et al. 2005)

En la figura 3.1. se representan: (a) las tensiones desviadoras en función de la deformación axial, (b) el recorrido de esfuerzos en el espacio p' - q , y (c) la resistencia movilizada (q/p') versus la deformación axial.

La resistencia movilizada (q/p') representa el parámetro más significativo a la hora de analizar la respuesta del suelo. Si se compara (q/p') en los tres casos de la figura 3.1., se constata que la pérdida de resistencia (reblandecimiento) sólo se da en los ensayos CD de arena densa, y CU de la arcilla ligeramente sobreconsolidada, mientras que el ensayo CU de arena muy floja muestra un aumento continuo de la resistencia movilizada (q/p'). Además, el pico de la deformación desviadora es mucho más acentuado en este último caso. Como resultado, se puede concluir que la mayoría de

los deslizamientos rápidos están causados por la licuefacción en lugar de por el reblandecimiento del material.

En efecto, la licuefacción es a menudo responsable de los mecanismos de rotura difusa y de los deslizamientos rápidos, mientras que el reblandecimiento está más bien asociado a los mecanismos de rotura localizada, tales como los deslizamientos traslacionales o rotacionales. Por lo tanto, a la hora de simular estos eventos es de suma importancia tener en cuenta el incremento de presiones intersticiales que causa la licuefacción de los depósitos flojos metaestables.

3.3. Los reómetros y el comportamiento de los geomateriales fluidificados.

Las técnicas experimentales que tienen como finalidad investigar el comportamiento reológico de los geomateriales fluidificados proporcionan resultados que han sido obtenidos bajo condiciones controladas. Por lo tanto, juegan un papel primordial tanto en la elaboración de las ecuaciones constitutivas de estos materiales como en evaluar la validez de las leyes constitutivas propuestas.

Los **reómetros** son aparatos diseñados con el objetivo de reproducir flujos simples. La mayoría de estos aparatos pretenden obtener la viscosidad del fluido (o la relación entre la tensión tangencial y la velocidad de deformación tangencial). La utilización de los reómetros para inferir el comportamiento de los deslizamientos rápidos se enfrenta a varias dificultades, tal y como ensayar un volumen representativo. En este sentido, cabe citar los flujos de derrubios que muestran una distribución de tamaños muy amplia incluyendo bloques de gran tamaño. Con el fin de hacer frente a esta circunstancia se han diseñado aparatos a gran escala capaces de contener un volumen de material del orden de 1m^3 (Phillips & Davies, 1991; Major & Pierson, 1992; Coussot

& Piau, 1995b). Sin embargo, si se pretende simular el comportamiento de un geomaterial que incluye tamaños del orden de un metro mediante un reómetro cilíndrico el diámetro de éste debe ser de al menos 120m con un hueco de 30m y una profundidad de 300 m. Además, debe tener una capacidad igual o superior a 4106 m³ de material (Coussot & Meunier, 1996). Un ensayo de estas características es difícil de implementar, como consecuencia el comportamiento reológico de la masa se obtiene, se extrapola o se estima mediante métodos indirectos que abarcan la teoría y los ensayos llevados a cabo con materiales finos o con la fracción fina del deslizamiento. En este contexto, el estudio de un flujo de materiales granulares de orden milimétrico incluidos en un fluido viscoso puede proporcionar información útil sobre las características básicas del flujo. A su vez, las ecuaciones constitutivas para masas que contienen grandes bloques pueden desarrollarse o validarse mediante los datos obtenidos, tanto en canales de laboratorio a gran escala como en deslizamientos rápidos reales.

Por otra parte, el desarrollo de modelos reológicos se ve dificultado por las limitaciones que presentan los reómetros para la aplicación de la tensión total y de los campos de deformación. Sin embargo, las condiciones de tensión en el caso de los geomateriales fluidificados son bastante simples y la mayoría de las simplificaciones están justificadas no por las limitaciones de los ensayos si no por la falta de datos.

En una primera aproximación para obtener las características básicas del modelo conviene utilizar la tensión tangencial simple y la velocidad de deformación. En estas condiciones de flujo tangencial simple, el fluido está sometido a corte en el plano XZ y la velocidad es paralela al eje X (figura 3.2.). Seguidamente, se pueden llevar a cabo ensayos más complejos para mejorar el conocimiento que se tiene del problema.

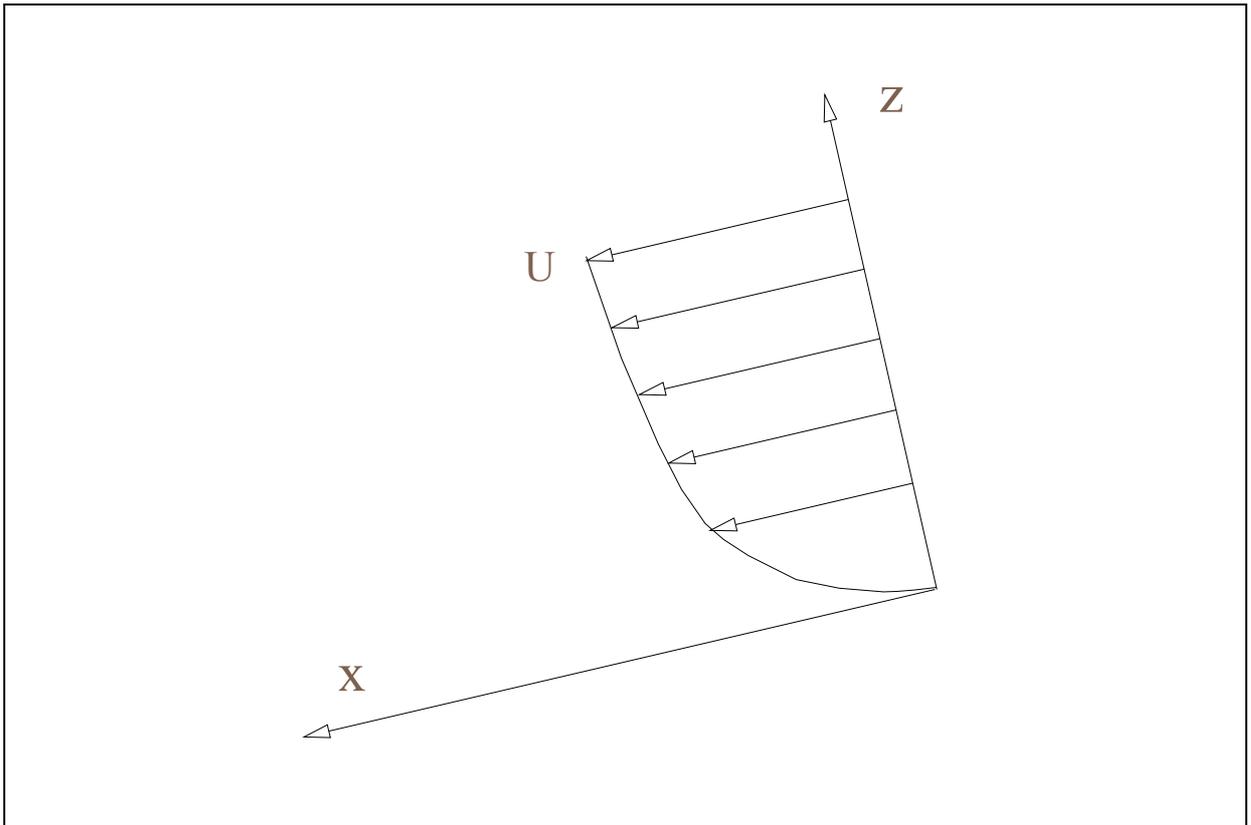


Figura 3.2. Flujo tangencial simple (la velocidad es constante a lo largo del eje X)

El primer reómetro destinado al estudio de flujos granulares fue diseñado por Bagnold (Bagnold, 1954). Tal como se muestra en la figura 3.3., el mismo está formado por dos tambores; uno interno que permanece inmóvil, mientras que el exterior efectúa un movimiento de rotación de modo que se genera un flujo tangencial simple de Couette. El material granular utilizado en este ensayo consiste en partículas esféricas de una mezcla de parafina, cera y estearato con una densidad igual a la del agua.

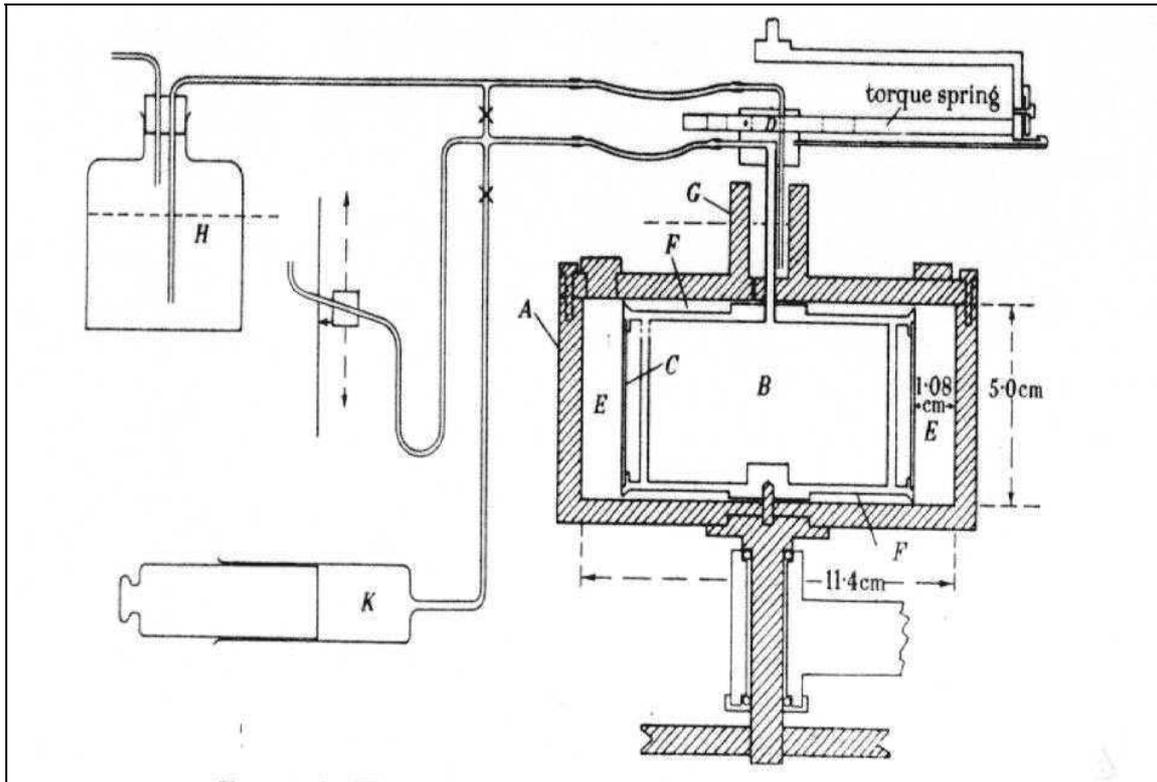


Figura 3.3. El reómetro de Bagnold (Bagnold, 1954)

En el reómetro de Bagnold se puede estudiar la influencia de la concentración de las partículas, la velocidad de deformación tangencial y la viscosidad del fluido. Además Bagnold demostró en su trabajo que existen dos regímenes de movimiento: a) el régimen inercial donde predominan los efectos de las colisiones entre las partículas, y b) el régimen macro viscoso, donde los efectos de la viscosidad son los dominantes. Por otro lado, el esfuerzo de corte provoca una presión adicional de tipo dispersivo proporcional a la tensión tangencial. La transición entre los regímenes macro-viscoso e inercial se produce en el rango $N_B = 40 - 450$ correspondiente al número adimensional de Bagnold. Este último viene definido por:

$$N_B = \frac{\lambda^{1/2} \rho c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)}{\mu} \quad (3.1)$$

Donde: c es el diámetro de las esferas; y λ es la concentración lineal que viene dada por:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{C_{\max}}{C} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \quad (3.2)$$

C y C_{\max} son respectivamente la concentración y la concentración máxima posible que en el caso de las esferas corresponde a $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.74$.

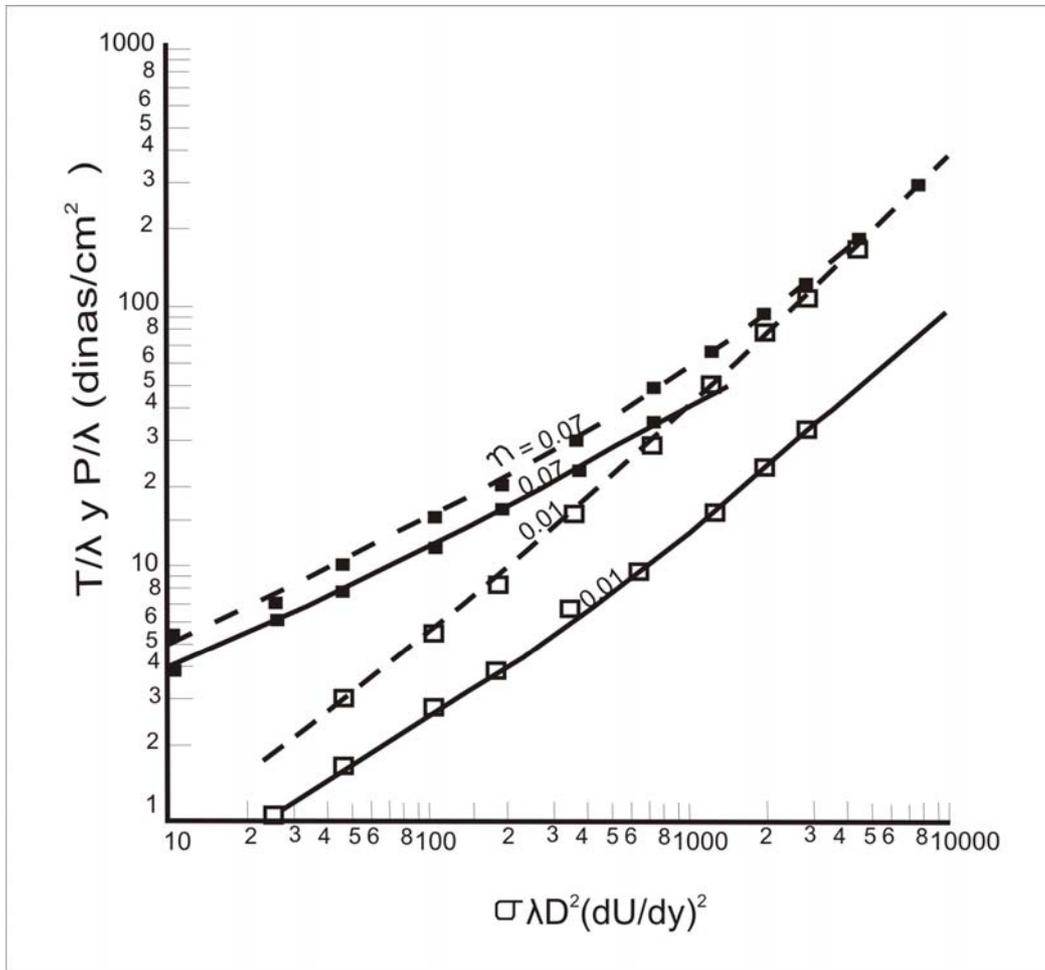


Figura 3.4. Tensión tangencial vs. velocidad de deformación tangencial para distintas concentraciones lineales.

En las figuras 3.4. y 3.5. se reproducen los resultados experimentales obtenidos por Bagnold. En las mismas, se representan la tensión tangencial y la normal para diferentes valores de la concentración lineal. Asimismo, en dichas figuras se demuestra que las tensiones normal y tangencial son funciones de la velocidad de deformación tangencial (ver figuras 3.4. y 3.5.).

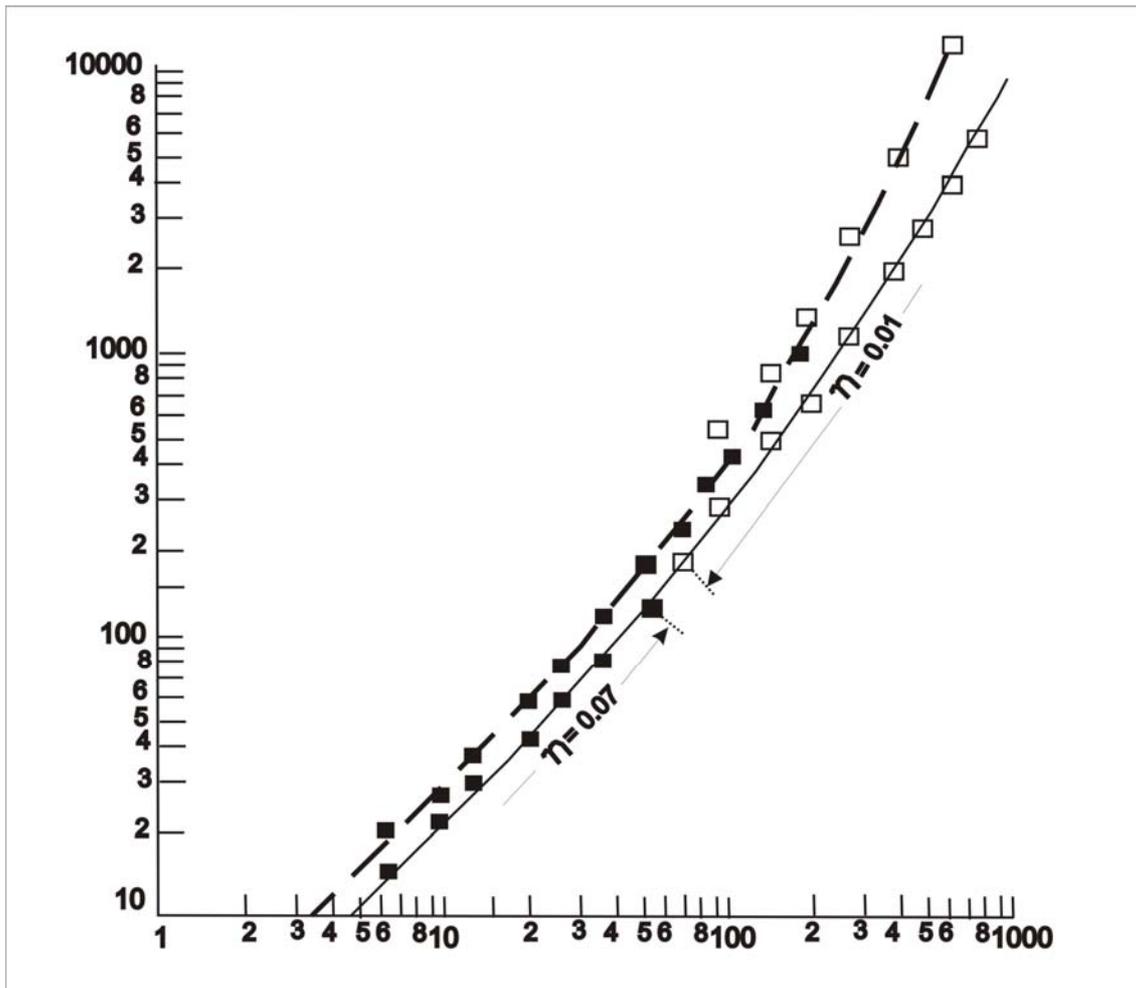


Figura 3.5. Presión dispersiva para diferentes concentraciones lineales.

(σ : densidad; λ : concentración lineal; D: diámetro de las partículas; T: tensión tangencial; P: tensión normal)

Otros aparatos experimentales que merecen mencionarse son el reómetro de Hanes & Inman (1985) y el reómetro de Johnson & Martosudarmo (1997).

Los reómetros arriba mencionados aproximan los flujos tangenciales simples con un grado de precisión razonable. Sin embargo, los investigadores prefieren los reómetros con campos de tensión y deformación más complejos, tales como es el caso de los reómetros con tambores rotativos, de planos inclinados, etc. La figura 3.6. muestra dos reómetros de este tipo. Para más detalle, se aconseja consultar el trabajo del grupo MIDI (2004) donde se describen estos aparatos, además de los aspectos básicos del comportamiento observado.

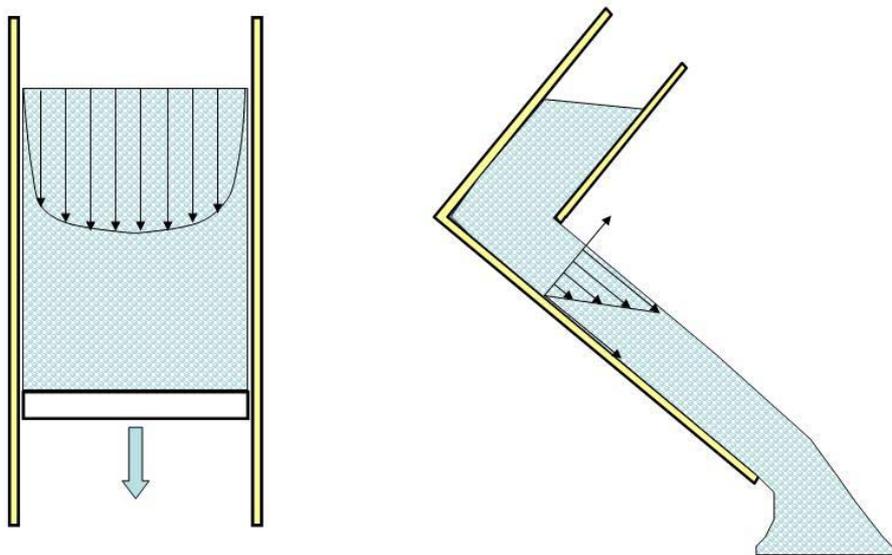


Figura 3.6. Reómetro de caída vertical y reómetro de planos inclinados. (MIDI, 2004)

3.4. Modelos reológicos

3.4.1. Introducción:

Una vez desencadenado el movimiento el comportamiento del material se asemeja al de un fluido. La modelización de éste es una tarea compleja que depende del tipo de la mezcla considerada. Por ejemplo, el escenario simple definido por un flujo de material granular con presiones intersticiales nulas, se puede considerar como una mezcla monofásica. Sin embargo, en este mismo flujo puede presentarse el fenómeno de segregación inversa según el cual la fracción más gruesa se mueve hacia la parte superior del cuerpo en movimiento quedando inutilizada la hipótesis de fase única. Dicha hipótesis es aún menos apropiada en el caso de geomateriales cuyo fluido intersticial es una mezcla en sí (barro por ejemplo).

Como primera aproximación, los investigadores trataron de caracterizar el comportamiento de la mezcla en su conjunto formulando modelos específicos. Para ello, se desprecia el movimiento relativo del fluido intersticial con respecto al esqueleto sólido. Como mejora de esta primera aproximación se considera que la mezcla está formada por dos fases: un esqueleto sólido y un espacio intersticial ocupado por el agua o el barro. Además, cuando la resistencia al corte es despreciable el tensor de tensiones de la mezcla puede descomponerse en presión intersticial y tensión efectiva.

En esta sección se presentan algunos modelos reológicos relevantes (Newtoniano, Bingham, etc.) proporcionando los valores de sus parámetros siempre que estén disponibles. La mayoría de estos modelos se formulan en términos de tensiones totales para una sola fase, pudiéndose generalizar para incluir las tensiones del fluido. En este contexto, parece razonable considerar el material como monofásico en el caso de las

coladas de barro, y bifásico en el caso de los flujos de derrubios. La diferencia entre ambos consiste en la capacidad de la fase fluida de infiltrarse a través del sólido.

La elección de un modelo reológico u otro no es una tarea trivial. De hecho, distintos modelos pueden proporcionar resultados similares. Un ejemplo de ello es el flujo deslizando de Aberfan donde las presiones intersticiales existentes en la parte basal de la masa deslizada desempeñaron un papel primordial. Dicho flujo puede modelizarse, tanto con un modelo de Bingham como con un modelo de fluido friccional con disipación de presión de poros. Sin embargo, la última aproximación representa mejor lo ocurrido.

3.4.2. Marco general:

Suponiendo que el fluido es isótropo y empleando el “teorema de representación”, el tensor de tensiones (σ) puede expresarse según Malvern (1969) en función del tensor velocidad de deformación (d) de la siguiente forma:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 d + \Phi_2 d^2 \quad (3.3)$$

Donde p es la presión termodinámica, I es el tensor identidad, d es la velocidad de deformación, y Φ_k $k = 0..2$ son funciones escalares de los invariantes de d :

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{1d}, I_{2d}, I_{3d}) \quad (3.4)$$

Los invariantes de d se definen como:

$$I_{kd} = \frac{1}{k} \text{tr}(d^k) \quad (3.5)$$

Es decir:

$$I_{1d} = \text{tr}(d); \quad I_{2d} = \frac{1}{2} \text{tr}(d^2); \quad I_{3d} = \frac{1}{3} \text{tr}(d^3) \quad (3.6)$$

En la mayoría de los modelos se asume que el flujo es incompresible, es decir:

$$\sum \varepsilon_i = 0 \quad (3.7)$$

Sabiendo que:

$$I_{1d} = \text{tr}(d) = \sum \varepsilon_i \quad (3.8)$$

Como resultado, en el caso de un material incompresible se tiene que: $I_{1d} = 0$. Esto es consistente, tanto con la descomposición del deslizamiento en propagación y consolidación vertical como con el hecho de que el suelo experimenta una rotura a volumen constante. Sin embargo, hay que tener presente que se trata de una hipótesis que precisa de ciertas suposiciones para cumplirse. En resumen, suponiendo que el flujo es incompresible y despreciando I_{3d} se puede escribir:

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{2d}) \quad (3.9)$$

Cabe señalar que la expresión anterior no es válida para la fase de iniciación del deslizamiento y su aplicación a este caso puede llevar a errores considerables.

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, el tensor de tensiones (σ) puede descomponerse en su componente hidrostática (\hat{p}) y desviadora (s) de la siguiente manera:

$$\sigma = -\hat{p}I + s \quad (3.10)$$

Siendo:

$$\hat{p} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3} \left(-3p - 3\Phi_0 + \Phi_2 \text{tr}(d^2) \right) = p + \Phi_0 - \frac{2}{3} \Phi_2 I_{2d} \quad (3.11)$$

Por su parte, la componente desviadora puede obtenerse como:

$$s = -\frac{2}{3}\Phi_2 I_{2d} I + \Phi_1 d + \Phi_2 d^2 \quad (3.12)$$

Siendo el flujo isocórico, la componente hidrostática del tensor velocidad de deformación es nula. Es decir que “d” sólo posee una parte desviadora.

$$d = \text{dev}(d) \quad (3.13)$$

De modo que se puede escribir:

$$s = -\frac{2}{3}\Phi_2 I_{2d} I + \Phi_1 \text{dev}(d) + \Phi_2 d^2 \quad (3.14)$$

Por lo tanto, el tensor (σ) puede expresarse como:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \text{dev}(d) + \Phi_2 d^2 \quad (3.15)$$

O de forma alternativa:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \text{dev}(d) + \Phi_2 \{\text{dev}(d)\}^2 \quad (3.16)$$

A continuación se consideran dos casos particulares de movimiento: a) el flujo tangencial simple; b) el flujo bidimensional en condiciones de deformación plana.

- ***Flujo tangencial simple:***

Se considera un flujo tangencial simple que tiene lugar en el plano $x_1 x_3$, siendo el campo de velocidades del tipo:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(x_3) \\ v_2 &= v_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

En este caso, d y d^2 vienen dados por:

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Como resultado, se obtiene:

$$I_{2d} = \frac{1}{2} \text{tr}(d^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \quad (3.20)$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones resulta:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Phi_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

De este modo, se establecen los componentes del tensor de tensiones para un flujo tangencial simple:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = \sigma_{33} &= -p - \Phi_0 + \frac{1}{4} \Phi_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \\
 \sigma_{22} &= -p - \Phi_0 \\
 \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \frac{1}{2} \Phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Donde $\Phi_k = \Phi_k(I_{2d}) \quad k = 0..2$

Observando las expresiones recogidas en (3.22) se puede concluir que la velocidad de deformación $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)$ influye tanto en las tensiones de corte σ_{13} y σ_{31} como en las tensiones normales σ_{11} y σ_{33} . Esta contribución se denomina “tensión dispersiva”.

La expresión de los componentes de la tensión (3.22) se utiliza para extender a condiciones de tensión más generales los resultados obtenidos en los reómetros de flujo tangencial simple.

• **Flujo bidimensional:**

Asumiendo que el flujo tiene lugar en el plano x_1x_3 , se obtiene:

$$d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & 0 & 2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}
 \tag{3.23}$$

Con $d_{11} + d_{33} = 0$.

De este modo, se puede deducir:

$$d^2 = \begin{pmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & d_{13}(d_{11} + d_{33}) \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{13}(d_{11} + d_{33}) & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Como consecuencia, el tensor de tensiones viene dado por:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix} + \Phi_2 \begin{pmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Y los componentes del tensor σ se expresan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - \Phi_0 + \Phi_1 d_{11} + \Phi_2 (d_{11}^2 + d_{13}^2) \\ \sigma_{33} &= -p - \Phi_0 + \Phi_1 d_{33} + \Phi_2 (d_{33}^2 + d_{13}^2) = -p - \Phi_0 - \Phi_1 d_{11} + \Phi_2 (d_{11}^2 + d_{13}^2) \\ \sigma_{22} &= -p - \Phi_0 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \Phi_1 d_{13} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

De nuevo se puede comprobar que (i) la tensión de corte depende sólo de d_{13} , y (ii) los términos de tensión dispersiva dependen de $\Phi_2 (d_{11}^2 + d_{13}^2)$.

3.4.3. Fluidos Newtonianos:

El fluido Newtoniano corresponde al modelo reológico más simple, caracterizándose por un sólo parámetro constitutivo: la viscosidad del fluido (μ).

De este modo, en el caso de un flujo tangencial simple la resistencia al corte (σ_{13}) viene dada por:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (3.27)$$

Los valores típicos de la viscosidad con unidades Pa.s en el sistema MKS son:

Material	μ (Pa.s)
Aire	10^{-6}
Agua	10^{-3}
Barro	10^{-2}

Los valores anunciados en la tabla pueden variar con la temperatura.

Al comparar (3.27) y (3.22), se puede deducir la siguiente relación:

$$\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \Phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (3.28)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\Phi_1 = 2\mu \quad (3.29)$$

En consecuencia, la expresión general del modelo newtoniano resulta:

$$\sigma = -pI + 2\mu \text{dev}(d) \quad (3.30)$$

3.4.4. Fluidos de Bagnold:

Bagnold (1954) propuso un modelo que explica el comportamiento observado en su reómetro. Dicho modelo es válido para condiciones de flujo tangencial simple. El ensayo de Bagnold se lleva a cabo con volumen constante e identifica dos regimenes diferentes de flujo dependiendo de si predomina el efecto de la viscosidad o el de las

colisiones. Estos regimenes se denominan: régimen “macro- viscoso”; y régimen “inercial”.

Para el régimen inercial, Bagnold definió las siguientes expresiones de las tensiones tangencial y normal donde las compresiones se consideran negativas:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= a_i \sin \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \\ \sigma_{33} &= p + a_i \cos \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2\end{aligned}\quad (3.31)$$

Donde: p es la presión termodinámica introducida en (3.3).

$$a_i = 0.042, \quad \tan \alpha_i = 0.4, \quad \text{estas expresiones son válidas para } \lambda \geq 12.$$

Las ecuaciones (3.31) demuestran que la tensión normal, σ_{33} , depende de la velocidad de deformación, $\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$. Esta componente se denomina “presión dispersiva”, pudiendo observarse bajo condiciones isocóricas (volumen constante).

Al comparar las expresiones precedentes con la expresión (3.22), se obtienen los componentes del tensor σ para un fluido de Bagnold.

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -p - \Phi_0 + \frac{1}{4} \Phi_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 = -p - a_i \cos \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \frac{1}{2} \Phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \sigma_{13}^{turb} + a_i \sin \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2\end{aligned}\quad (3.32)$$

Como resultado, se llega a:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= 0 \\ \Phi_1 &= 2a_i \sin \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = 4a_i \sin \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 (I_{2d})^{\frac{1}{2}} \\ \Phi_2 &= -4a_i \cos \alpha_i \rho \lambda^2 c^2\end{aligned}\quad (3.33)$$

Y utilizando los valores de I_{2d} para flujos tangenciales simples definidos en (3.20), se puede obtener el modelo reológico general del fluido de Bagnold:

$$\begin{aligned}\sigma &= -pI + \Phi_1 \text{dev}(d) + \Phi_2 d^2 \\ \sigma &= -pI + \left\{ 4a_i \sin \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 (I_{2d})^{\frac{1}{2}} \right\} \text{dev}(d) - \left\{ 4a_i \cos \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \right\} d^2\end{aligned}\tag{3.34}$$

De nuevo, conviene subrayar que el modelo de Bagnold ha sido obtenido para un fluido granular, bajo condiciones de volumen constante, por lo que su generalización debe hacerse con cautela.

3.4.5. Fluidos de Bingham:

Mientras los fluidos Newtoniano y Bagnold se deforman en cuando estén sujetos al esfuerzo de corte. El modelo de Bingham introduce un umbral de tensión tangencial que es preciso superar para que el flujo tenga lugar. Esto corresponde al concepto de “tensión de fluencia (τ_y)” y explica algunos fenómenos que se manifiestan en eventos tipo FD tales como son la parada repentina del flujo o la formación de tapones.

En condiciones de flujo tangencial simple la ley de Bingham se escribe como:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) &= \frac{1}{\mu} (\sigma_{13} - \tau_y) & \sigma_{13} > \tau_y \\ &= 0 & \sigma_{13} \leq \tau_y\end{aligned}\tag{3.35}$$

O bien:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\tag{3.36}$$

Sobre la base de la metodología seguida en los casos anteriores, se identifican los componentes de la ley reológica general de Bingham. De modo que partiendo de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -p - \Phi_0 + \frac{1}{4}\Phi_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 = -p \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \frac{1}{2}\Phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \tau_y + \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\end{aligned}\quad (3.37)$$

Se llega a:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \Phi_2 = 0 \\ \Phi_1 &= 2 \frac{1}{(\partial v_1 / \partial x_3)} \left(\tau_y + \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)\end{aligned}\quad (3.38)$$

Obteniendo:

$$\Phi_1 = \frac{2\tau_y}{(\partial v_1 / \partial x_3)} + 2\mu \quad (3.39)$$

Reemplazando en la expresión anterior el valor de I_{2d} para flujos tangenciales simples dado en (3.20):

$$\Phi_1 = \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu \quad (3.40)$$

Por lo tanto, El modelo de Bingham para condiciones generales de flujo se expresa como:

$$\sigma = -pI + \left(\frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu \right) \text{dev}(d) \quad (3.41)$$

En el marco de los deslizamientos rápidos, la reología de Bingham se ha utilizado para modelizar mezclas de suelos granulares finos con alto contenido de agua. De este modo, se puede encontrar en la bibliografía rangos de valores típicos para los

parámetros de este modelo (tensión de fluencia (τ_y) y viscosidad (μ)). En este sentido, Rickenmann & Koch (1997) simularon los flujos de derrubios que tuvieron lugar en los valles de Kamikamihori (Japón) y Saas (Suiza), utilizando valores de τ_y y μ en los rangos 100-800Pa y 400 – 800 Pa.s respectivamente. Además, estos autores demostraron que las velocidades de propagación obtenidas con el modelo de Bingham son más altas que las previstas por otros modelos.

En la misma línea, cabe mencionar los valores presentados en el trabajo de Jan (1997):

Author	$\rho(Kg/m^3)$	$\tau_y(Pa)$	$\mu(Pa.s)$
Jan		100 to 160	40-60
Johnson	2000 to 2400	60; 170 to 500	45
Sharp& Nobles	2400		20-60
Pierson	2090	130-240	210-810

Jin & Fread (1997) por su parte presentaron los siguientes valores para distintos eventos:

Site	$\rho(Kg/m^3)$	$\tau_y(Pa)$	$\mu(Pa.s)$
Anhui	1570	38	2.1
Aberfan	1764	4794	958
Rudd Creek	1575	956	958

En las últimas décadas, el modelo original de Bingham ha sido mejorado para considerar efectos, tales como por ejemplo los componentes de la viscosidad no lineal. Esta generalización se basa en la siguiente ley de tensión tangencial simple:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^n \quad (3.42)$$

Donde η representa el tipo de modelo reológico elegido tomando el valor $\eta = 1$ en el caso de que este sea el modelo de Bingham.

Cuando se trata de problemas tridimensionales la ley anterior toma la forma:

$$\sigma = -pI + \left\{ \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu(4I_{2d})^{\frac{\eta-2}{2}} \right\} \text{dev}(d) \quad (3.43)$$

Un caso particular de (3.42) corresponde a la ley de Herschel – Bulkley descrita por Laigle & Coussot (1994) con $\eta = 1/3$. Estos autores utilizaron esta ley para simular el comportamiento de coladas de barro y flujos de derrubios.

Por su parte, la ley propuesta por Julien y Lan (1991) supone una mejora para las condiciones de flujos tangenciales simples:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \nu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \quad (3.44)$$

Donde:

$$\nu = \rho l_m^2 + \hat{a}_i \rho_s \lambda^2 d_s^2 \quad (3.45)$$

Siendo:

l_m : es la longitud de la mezcla. Este parámetro puede aproximarse como $0.4h$ donde h es la profundidad del flujo.

\hat{a}_i : es un parámetro del material. Su valor se toma como 0.01 en la mayoría de los casos y corresponde a $a_i \sin \alpha_i$ en el modelo de Bagnold.

A su vez, el modelo (3.44) puede generalizarse a situaciones tridimensionales de la siguiente manera:

$$\sigma = -pI + \left(\frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu + 4\nu\sqrt{I_{2d}} \right) \text{dev}(d) \quad (3.46)$$

3.4.6. El modelo viscoplástico generalizado de Chen & Ling:

Chen & Ling (1996) proponen un modelo capaz de englobar a muchos modelos reológicos como casos particulares. La idea de partida de este modelo es generalizar las siguientes relaciones válidas para condiciones de flujos tangenciales simples:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= s + \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^{\eta_1} \\ \sigma_{33} &= -p + \frac{1}{3} \mu_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^{\eta_2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

En la expresión anterior s representa la tensión de fluencia de Mohr- Coulomb:

$$s = c \cos \phi + p \sin \phi \quad (3.48)$$

Donde c corresponde a la cohesión y ϕ es el ángulo de fricción.

Los autores propusieron expresiones específicas para los parámetros del modelo μ_1 , μ_2 , η_1 y η_2 .

Empleando la misma metodología utilizada en los modelos precedentes se puede escribir:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \\ \Phi_2 &= \frac{4}{3}\mu_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^{\eta_2-2} = \frac{4}{3}\mu_2 (4I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}}\end{aligned}\quad (3.49)$$

De modo que la ley general resulta:

$$\sigma = -pI + \left\{ \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \right\} d + \left\{ \frac{4}{3}\mu_2 (I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}} \right\} d^2 \quad (3.50)$$

Teniendo en cuenta que $d = \text{dev}(d)$ para flujos tangenciales simples se obtiene:

$$\sigma = -pI + \left\{ \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \right\} \text{dev}(d) + \left\{ \frac{4}{3}\mu_2 (I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}} \right\} d^2 \quad (3.51)$$

Los reómetros disponibles simulan flujos tangenciales simples en cuyo caso el tercer invariante del tensor velocidad de deformación es nulo. Esto justifica que la ley (3.51) no dependa de este invariante.

Es primordial comprobar la consistencia de las condiciones cuando la velocidad de deformación es muy pequeña ($d \rightarrow 0$). En este caso los términos de la relación (3.51) se anulan excepto $\frac{s}{\sqrt{I_{2D}}}$ y el término de presión. Obteniéndose en el límite:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = -pI + \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} d \quad (3.52)$$

Puesto que $\frac{s}{\sqrt{I_{2d}}}$ es un escalar, la tensión depende de la dirección del tensor velocidad

de deformación. Para un **flujo tangencial simple** se tiene:

$$\sqrt{I_{2d}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \quad (3.53)$$

Los componentes del tensor de tensiones vienen dados por:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{33} = -p \\ \sigma_{13} &= s = c \cos \phi + p \sin \phi\end{aligned}\tag{3.54}$$

La expresión (3.54) sólo satisface el criterio de Mohr- Coulomb si $\phi = 0$. Asimismo, es preciso eliminar ciertas inconsistencias del modelo para relacionar los resultados obtenidos con las aproximaciones clásicas de la mecánica de sólidos o de suelos. En este sentido, Chen y Ling proponen relajar las condiciones de flujo tangencial simple, en el que $d_{11} = 0 \quad d_{33} = 0$.

En condiciones de **deformación plana** la expresión (3.25) se escribe como:

$$\sigma = -pI + \Phi_1 \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}\tag{3.55}$$

Con:

$$\Phi_1 = \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{n-1}{2}}\tag{3.56}$$

Donde

$$\sqrt{I_{2d}} = \sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}\tag{3.57}$$

Y con la condición de incompresibilidad $d_{11} + d_{33} = 0$

Los componentes del tensor de la tensión en estas condiciones son:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p + (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} \\ \sigma_{33} &= -p + (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{33}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} \\ \sigma_{13} &= (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{13}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}}\end{aligned}\tag{3.58}$$

Teniendo en cuenta el ángulo β :

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} &= \cos \beta \\ \lim_{d \rightarrow 0} \frac{d_{13}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} &= \sin \beta\end{aligned}\tag{3.59}$$

La expresión (3.58) se expresa como:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p - (c \cos \phi + p \sin \phi) \cos \beta \\ \sigma_{33} &= -p + (c \cos \phi + p \sin \phi) \cos \beta \\ \sigma_{13} &= (c \cos \phi + p \sin \phi) \sin \beta\end{aligned}\tag{3.60}$$

Tal y como se contempla en la figura Figura 3.7. los componentes (3.60) cumplen el criterio de Mohr- coulomb:

$$(\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{13}^2 = (c \cos \phi + p \sin \phi)^2 = s^2\tag{3.61}$$

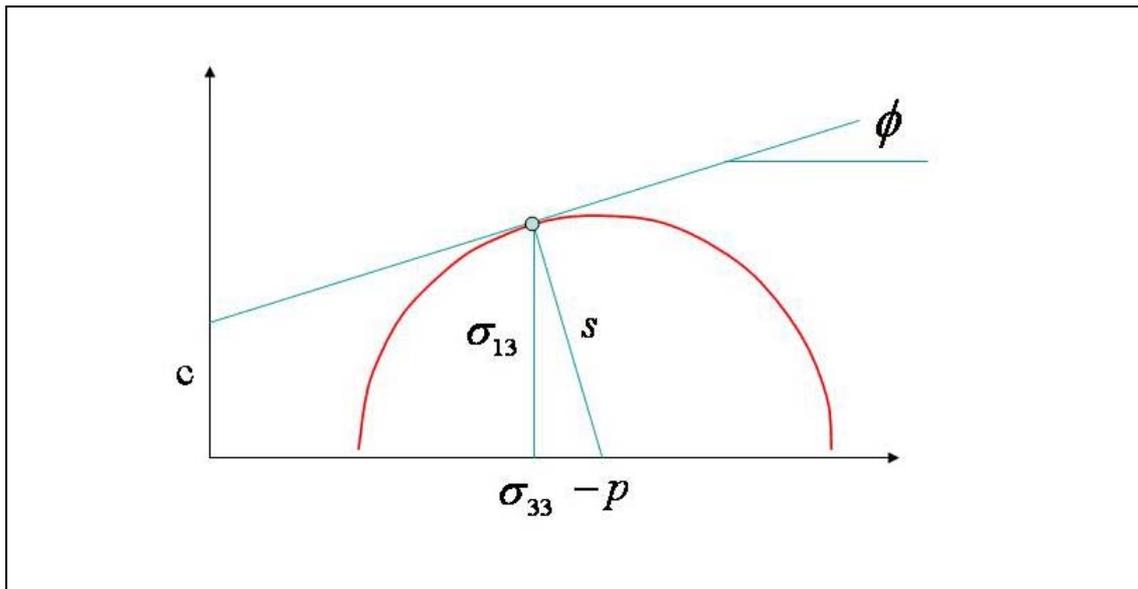


Figura 3.7. El criterio de Mohr-Coulomb para flujos incompresibles de Chen & Ling en condiciones de deformación plana para el caso límite. $d \rightarrow 0$

Cabe destacar que el llamado “estado activo” ($|\sigma_{11}| < |\sigma_{33}|$) corresponde a $\cos \beta > 0$ o lo que es lo mismo $d_{11} > 0$, mientras que el “estado pasivo” ($|\sigma_{11}| > |\sigma_{33}|$) viene dado por $\cos \beta < 0$ y $d_{11} < 0$.

De forma más general estos resultados pueden interpretarse mediante el proceso de fluidificación o licuefacción. Así, la rotura del suelo se produce en el estado crítico sin cambios de volumen. Por su parte, la velocidad de deformación cumple la condición de incompresibilidad estando cerca del límite $d \rightarrow 0$. Cuando la velocidad y la velocidad de deformación se incrementan la tensión abandona la superficie de fluencia, y el comportamiento del material se rige por las ecuaciones generales (3.51).

Dentro de este marco general se pueden emplazar otros modelos como por ejemplo el modelo propuesto por Johnson (1996). También cabe mencionar el modelo general propuesto por Hutter y colaboradores (Hutter et al., 1996) quienes propusieron la descomposición del tensor de la tensión de la fase granular en sus componentes estática y dinámica:

$$\begin{aligned}\sigma^{static} &= -p^{static} I + 2\mu^{static} d \\ \sigma^{dynamic} &= -p^{dynamic} I + 2\mu^{dynamic} d + 4\eta d^2\end{aligned}\quad (3.62)$$

3.5. Modelos reológicos integrados en profundidad:

3.5.1. Introducción:

Los deslizamientos rápidos son fenómenos tridimensionales complejos, que pueden describirse mediante modelos alternativos con diferente grado de precisión. En general, las ecuaciones de balance del momento lineal de los componentes de la mezcla incluyen las tensiones parciales que hay que especificar. En este sentido, se han presentado en la sección anterior varios modelos reológicos que permiten determinar el tensor de tensiones en función del tensor velocidad de deformación. No obstante, como ya ha sido explicado con anterioridad las aproximaciones 3D son complejas y caras en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Como alternativa, se han propuesto los modelos integrados en profundidad en los que las velocidades y las tensiones están integradas a lo largo del eje vertical. Las ecuaciones obtenidas están formuladas en términos de profundidad del flujo, velocidades y tensiones promediadas, incluyendo además las tensiones en la superficie y en el fondo. De este modo, se ha obtenido en el capítulo 2 la ecuación de balance del momento lineal integrada en profundidad:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + (1+\alpha)\frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_i\bar{v}_j) = b_i h + \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{ij}) + |N^A|t_i^A + |N^B|t_i^B}\quad (3.63)$$

O en su forma alternativa:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h\bar{v}_i\bar{v}_j - \frac{1}{2}\rho b_3 h^2 \delta_{ij}\right) \\ = \alpha \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_i\bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{ij}^*) + b_i h + |N^A|t_i^A + |N^B|t_i^B\end{aligned}}\quad (3.64)$$

Donde:

- (i) t_i^B corresponde a las tracciones en el fondo.
- (ii) α es el factor de corrección definido como:

$$\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3 = \alpha \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (3.65)$$

Cumpléndose la siguiente relación entre v_i^* y la velocidad integrada en profundidad:

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_i(x_1, x_2) + v_i^*(x_1, x_2, x_3) \quad (3.66)$$

(iii) los tensores de tensiones integrados en profundidad $\bar{\sigma}_{ij}$ y $\bar{\sigma}_{ij}^*$ se obtienen según la descomposición:

$$\sigma_{ij} = -p^* \delta_{ij} + \sigma_{ij}^* \quad (3.67)$$

Siendo:

$$p^* = \rho b_3 (h - x_3) \quad (3.68)$$

Una vez realizada la integración en profundidad se obtiene:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^* \quad (3.69)$$

Con:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 h \quad (3.70)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \int_z^{z+h} \sigma_{ij}^* dx_3$$

Al transformar las ecuaciones tridimensionales en el modelo bidimensional simplificado, mediante el proceso de integración en profundidad, se pierde la información sobre la estructura vertical del flujo. Por ello, resulta difícil determinar el

factor α definido en (3.65), las tracciones en el fondo t_i^B y las tensiones integradas en profundidad (3.69).

A este respecto, una solución posible frecuentemente utilizada consiste en asumir que el flujo en un punto y tiempo dados, con profundidad y velocidades promediadas dadas, tiene la misma estructura vertical que un flujo uniforme. Esto corresponde al modelo de deslizamiento infinito puesto que éste asume que la masa en movimiento tiene una profundidad constante y se mueve a velocidad constante a lo largo de una pendiente uniforme. En este sentido, el modelo de deslizamiento infinito puede utilizarse para: (i) determinar las condiciones de desencadenamiento del deslizamiento, y (ii) proporcionar una estimación preliminar de la trayectoria y de las velocidades del movimiento.

A continuación, se explican los conceptos asociados al modelo de deslizamiento infinito, así como la metodología utilizada para obtener la fricción con el fondo y las tensiones integradas en profundidad.

3.5.2. EL modelo de deslizamiento infinito:

En la figura 3.8. se representa un deslizamiento infinito y se introducen la notación y las variables principales que se utilizaran en el análisis. Además, se considera una columna de material de longitud unitaria y profundidad h con la estructura de un flujo tangencial simple.

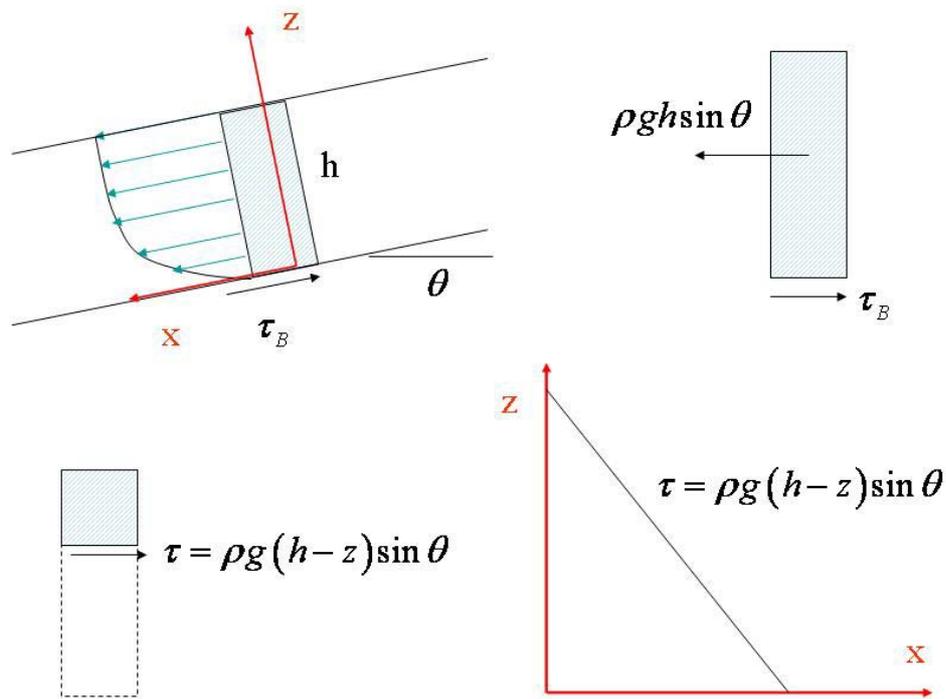


Figura 3.8. Deslizamiento infinito

Puesto que la aceleración a lo largo del eje x es nula puede expresarse el equilibrio de la columna de la figura 3.8. de la siguiente manera:

$$\rho g h \sin \theta = \tau_B \quad (3.71)$$

Donde ρ es la densidad de la mezcla, g es la aceleración de la gravedad, θ es la pendiente y τ_B es la fricción con el fondo.

A partir de la ecuación de equilibrio de la parte de la columna que se extiende entre la superficie y la profundidad $(h-z)$, se obtiene la tensión tangencial en función de z :

$$\tau = \rho g (h - z) \sin \theta = \tau_B \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (3.72)$$

De este modo, la tensión tangencial se distribuye de forma lineal siendo su valor equivalente a cero en la superficie y tomando un valor máximo en el fondo que viene dado por la ecuación (3.71). Por otro lado, la tensión tangencial se relaciona con la velocidad de deformación mediante los modelos reológicos descritos con anterioridad. Asimismo, la integración de dicha relación permite obtener el perfil de velocidades que, a su vez, proporciona la velocidad integrada en profundidad. Por último, la tensión tangencial en el fondo se obtiene una vez eliminado el ángulo de la pendiente. A continuación, se aplica esta metodología a los modelos reológicos de la sección precedente.

De este modo, una vez obtenida la velocidad $v(\xi)$ siendo $\xi = \frac{z}{h}$, se puede expresar la velocidad en función de la velocidad promediada:

$$v(\xi) = \bar{v} f(\xi) \quad (3.73)$$

Donde $f(\xi)$ es una función que depende del modelo reológico utilizado.

Obteniendo:

$$v(\xi) = \bar{v} + v^*(\xi) \quad (3.74)$$

Y

$$v^*(\xi) = \bar{v} (f(\xi) - 1) \quad (3.75)$$

A partir de la ecuación anterior (3.75) se pueden expresar los componentes de la velocidad como:

$$v_i^* = \bar{v}_i (f(\xi) - 1) \quad v_j^* = \bar{v}_j (f(\xi) - 1) \quad (3.76)$$

Como consecuencia, se puede obtener el factor de corrección α de la ecuación (3.65):

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_0^1 (f(\xi) - 1)^2 d\xi \quad (3.77)$$

De este modo, el factor α se obtiene a partir de la información proporcionada por el modelo de deslizamiento infinito.

Por otro lado, para relacionar el tensor velocidad de deformación con las tensiones integradas en profundidad se parte de la ley reológica general (3.15):

$$\sigma = -pI + \Phi_0 I + \Phi_1 \text{dev}(d) + \Phi_2 d^2 \quad (3.15)$$

Donde

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{2D}) \quad (3.9)$$

Si la ecuación (3.15) se integra en profundidad se llega a:

$$\bar{\sigma} \neq -\bar{p}I + \bar{\Phi}_0 I + \bar{\Phi}_1 \text{dev}(\bar{d}) + \bar{\Phi}_2 \bar{d}^2 \quad (3.78)$$

Es decir, la ecuación integrada en profundidad no se cumple salvo que se tratase de una ecuación lineal. Para que así sea, Φ_2 tiene que anularse y Φ_1 tiene que ser constante. En estas condiciones se puede escribir:

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \Phi_1 \text{dev}(\bar{d}) \quad (3.79)$$

Los componentes del tensor velocidad de deformación d_{ij} promediados se obtienen de la siguiente manera:

En primer lugar, se considera el caso $i, j = 1, 2$, donde:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2h} \left(\int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_3 + \int_z^{z+h} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_3 \right) \quad (3.80)$$

En el marco del flujo tangencial simple (o deslizamiento infinito) considerado se utiliza

un sistema de referencia donde la integral $\frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_3$ viene dada por:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial x} dz = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v dz - v \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_h \right\} \quad (3.81)$$

De manera que,

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial x} dz = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (3.82)$$

La expresión anterior puede generalizarse como:

$$\frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_3 = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad \frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \quad (3.83)$$

Sustituyendo en (3.80) se tiene:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (3.84)$$

Por otro lado, el componente \bar{d}_{33} se obtiene como sigue:

$$\bar{d}_{33} = \frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 = \frac{1}{h} (v_3|_{Z+h} - v_3|_Z) \approx \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.85)$$

Por último, suponiendo que el flujo corresponde a un deslizamiento infinito los componentes \bar{d}_{i3} con $i = 1, 2$, se calculan como:

$$\bar{d}_{i3} = \frac{1}{h} \left\{ \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 + \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_3}{\partial x_i} dx_3 \right\} \quad (3.86)$$

El segundo término de la expresión anterior es equivalente a cero ya que v_3 no depende de x_i . Por lo tanto:

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.87)$$

A partir de la expresión (3.87) se calculara el término \bar{d}_{13} para cada modelo reológico.

3.5.3. Fluidos Newtonianos

El punto de partida es la ecuación de tensión tangencial para fluidos Newtonianos (3.27):

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.88)$$

Reemplazando (3.72) en (3.88) se obtiene:

$$\tau_B \left(1 - \frac{z}{h}\right) = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.89)$$

Integrando la ecuación (3.89) se llega a la expresión de la velocidad:

$$v = \frac{\tau_B}{\mu} \left(z - \frac{z^2}{2h}\right) = \frac{\tau_B h}{\mu} \left(1 - \frac{z}{2h}\right) \frac{z}{h} \quad (3.90)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es nula en el fondo, la velocidad integrada en profundidad resulta:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v(z) dz = \frac{\tau_B h}{3\mu} \quad (3.91)$$

Como consecuencia, la tensión tangencial en el fondo viene dada por:

$$\tau_B = \frac{3\mu \bar{v}}{h} \quad (3.92)$$

Sobre la base de estos resultados puede deducirse que el deslizamiento infinito de un fluido Newtoniano (i) se desencadena con una pendiente distinta de cero, y (ii) no se detiene hasta que dicha pendiente se anula.

En este caso, el factor de corrección α dado por la expresión (3.77) puede escribirse como:

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_z^{z+h} (f(\xi) - 1)^2 dx_3 \quad (3.93)$$

La función $f(\xi)$ se determina del siguiente modo:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\tau_B h}{\mu} \left(1 - \frac{z}{2h}\right) \frac{z}{h} = 3\bar{v} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2}\right) \\ v^* &= \bar{v} \left(-1 + \xi - \frac{\xi^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_z^{z+h} \left(-1 + \xi - \frac{\xi^2}{2}\right)^2 d\xi = 0.2 \quad (3.95)$$

A su vez, el término \bar{d}_{13} viene dado por (3.87):

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.87)$$

Utilizando la ley reológica y la linealidad del perfil de la tensión tangencial se llega a:

$$\bar{d}_{13} = \frac{3\bar{v}_i}{2h} \quad (3.96)$$

3.5.4. Fluidos de Bingham

- *Reología y estructura del flujo*

La ley reológica que rige el comportamiento del fluido de Bingham viene dada por (3.36):

$$\tau = \tau_y + \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.97)$$

En la figura 3.9. se presenta la estructura del flujo de Bingham. En ésta se pueden contemplar dos zonas. Así, la parte superior también denominada “tapón” queda delimitada por los puntos S y P siendo la tensión tangencial movilizada más pequeña que τ_y . Por lo tanto, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, es decir, la velocidad es constante en esta región. En la parte inferior delimitada por los puntos P y B, la tensión movilizada es mayor que τ_y . Se trata de la zona de corte, cumpliéndose en ella:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\mu} (\tau - \tau_y) \quad (3.98)$$

Para una pendiente dada puede averiguarse que la altura del tapón depende de la tensión de fluencia τ_y . Asimismo, el momento de cese del movimiento de un fluido de Bingham corresponde a cuando la altura sea menor que una altura límite equivalente a $\frac{\tau_y}{\rho g \sin \theta}$. El flujo se reanudara cuando se produzca un aporte de material, de tal forma que la altura sea más grande que este valor crítico.

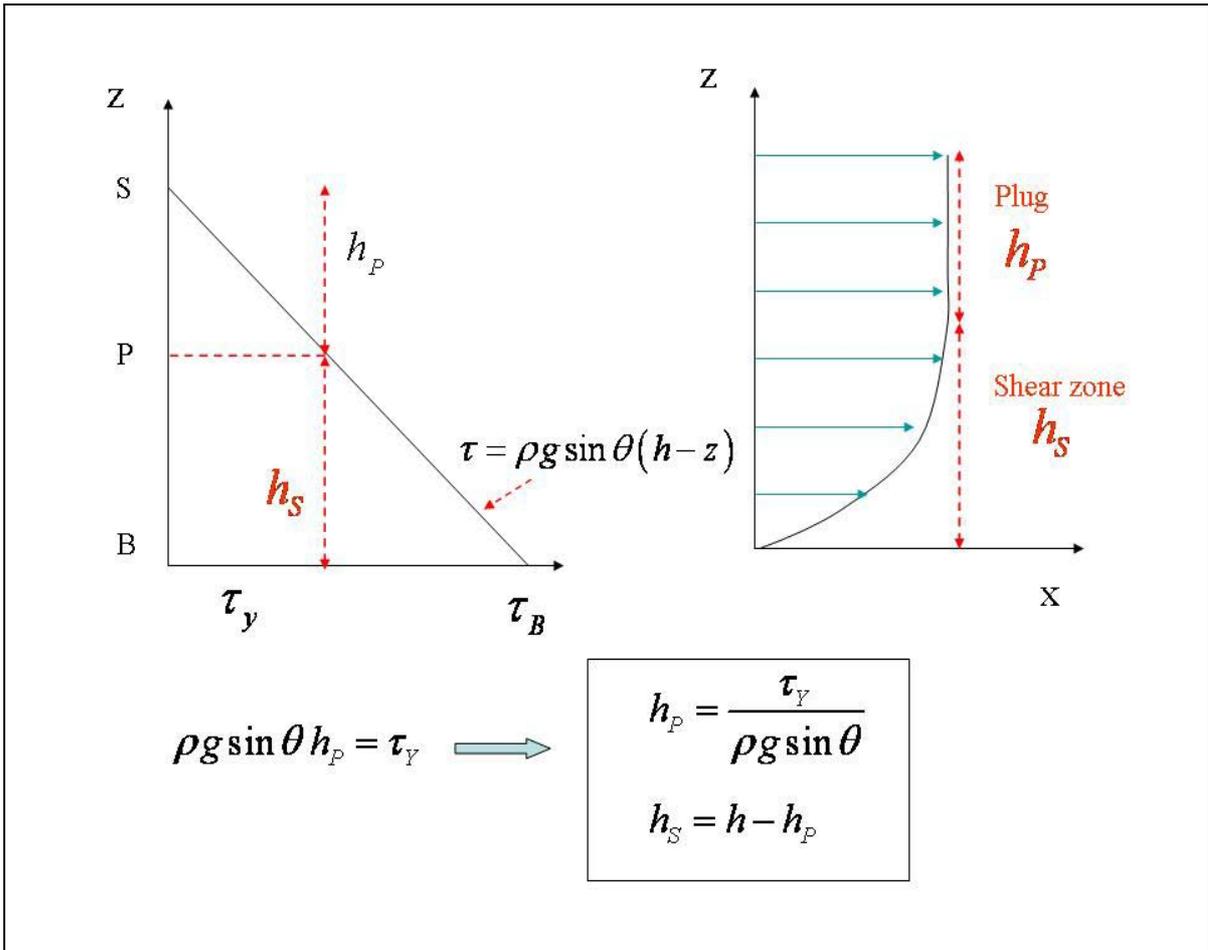


Figura 3.9. Estructura del flujo de un fluido de Bingham en condiciones tangenciales simples

De acuerdo con la figura 3.9. se obtienen las siguientes relaciones para un fluido de Bingham:

$$h_P = \frac{\tau_y}{\rho g h \sin \theta} = h \frac{\tau_y}{\tau_B} \quad (3.99)$$

$$h_S = h \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

A continuación, se define la altura relativa del tapón (*plug*) como:

$$\eta = \frac{h_P}{h} = \left(1 - \frac{h_S}{h} \right) = \left(1 - \frac{\tau_Y}{\tau_B} \right) \quad (3.100)$$

Por otro lado, considerando las relaciones geométricas entre los triángulos $P B_1 B_2$ y $P S_1 S_2$ de la figura 3.10. se puede escribir:

$$\frac{h_s - z}{h_s} = \frac{\tau - \tau_Y}{\tau_B - \tau_Y} \quad (3.101)$$

De manera que:

$$\tau - \tau_Y = (\tau_B - \tau_Y)(1 - \xi) \quad (3.102)$$

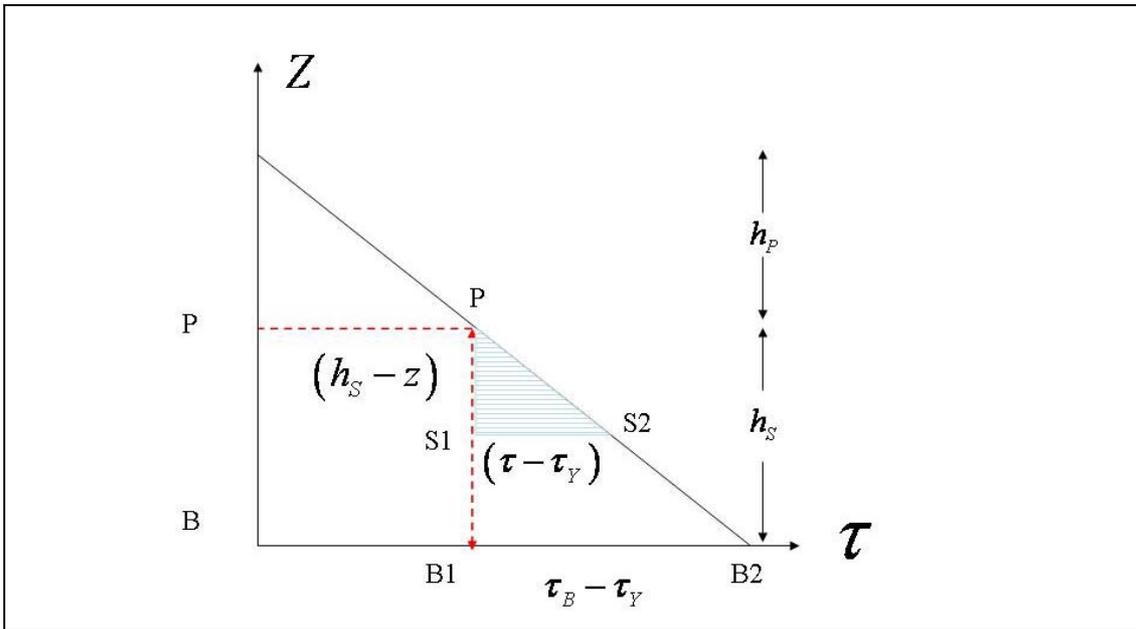


Figura 3.10. Perfil de tensión tangencial

Teniendo en cuenta la relación anterior se llega a:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau - \tau_Y = (\tau_B - \tau_Y)(1 - \xi) \quad (3.103)$$

Integrando la ecuación (3.103) con respecto a z se obtiene:

$$v = \frac{\tau_B - \tau_Y}{\mu} h_s \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \quad (3.104)$$

Por su parte, la velocidad del tapón corresponde a $\xi = 1$ es decir:

$$v_p = \frac{\tau_B - \tau_Y}{\mu} h_S \quad (3.105)$$

De este modo, la velocidad puede expresarse como:

$$v = 2v_p \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \quad (3.106)$$

Para obtener la velocidad integrada en profundidad, se considera el perfil de velocidad dibujado en la figura 3.11..

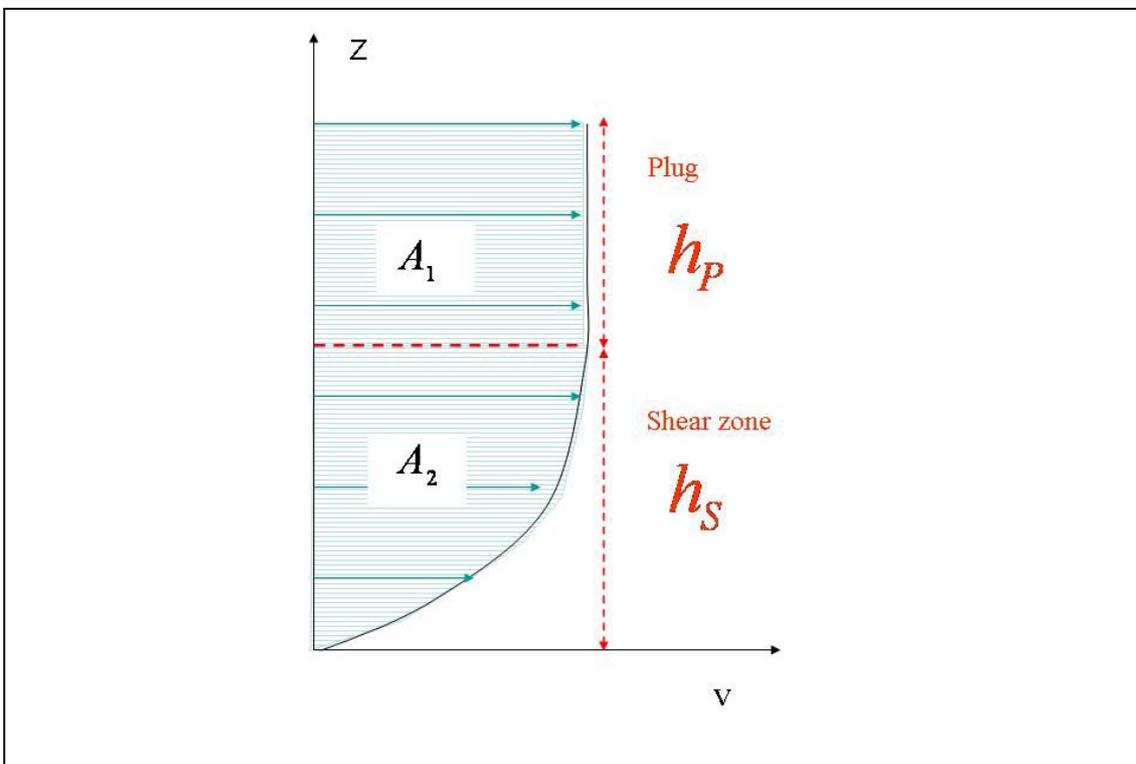


Figura 3.11. Perfil de velocidad

De este modo, partiendo de una simple consideración geométrica puede calcularse la velocidad integrada como:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{h_s} v dz + \int_{h_s}^{h_p} v dz \right\} = \frac{1}{h} (A_1 + A_2) \quad (3.107)$$

Donde las áreas A_1 y A_2 corresponden a un rectángulo y una parábola de segundo orden. De este modo, se tiene que:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \left(\eta h v_p + \frac{2}{3} (1 - \eta) h v_p \right) = \frac{v_p}{3} (\eta + 2) \quad (3.108)$$

• **Fricción con el fondo:**

Reemplazando (3.100) y (3.105) en (3.108) se llega a una forma más adecuada de expresar la velocidad integrada en profundidad:

$$\bar{v} = \frac{\tau_B h}{6\mu} \left(1 - \frac{\tau_Y}{\tau_B} \right)^2 \left(2 + \frac{\tau_Y}{\tau_B} \right) \quad (3.109)$$

La ecuación (3.109) puede reescribirse como:

$$\frac{6\mu\bar{v}}{h\tau_Y} \eta = (1 - \eta)^2 (2 + \eta) \quad (3.110)$$

Por otro lado, se considera el número adimensional “ a ” definido como:

$$a = \frac{6\mu\bar{v}}{h\tau_Y} \quad (3.111)$$

Dicho número está relacionado con el número de Bingham mediante la siguiente expresión:

$$B = \frac{4h\tau_Y}{\mu\bar{v}} = \frac{24}{a} \quad (3.112)$$

Introduciendo el número adimensional a la expresión de velocidad integrada en profundidad puede reescribirse en forma de polinomio de tercer grado:

$$P_3(\eta) := \eta^3 - (3 + a)\eta + 2 = 0 \quad (3.113)$$

Por lo tanto, para obtener la fricción con el fondo hay que calcular la raíz de $P_3(\eta)$, donde $\eta = h_p / h$, que pertenece al intervalo $[0,1]$. Seguidamente, el término de la fricción con el fondo se obtiene mediante la relación:

$$\tau_B = \tau_Y \frac{h}{h_p} = \frac{\tau_Y}{\eta} \quad (3.114)$$

Utilizando la formula de Cardano se llega a las siguientes expresiones de las raíces del polinomio $P_3(\eta)$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \\ \eta_{2,3} &= -\frac{\eta_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{\eta_1}} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Con:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ R &= \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{a}{3}\right)^3 < 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Por lo tanto, la solución define tres valores complejos. Ésto justifica que el término de la fricción se obtenga buscando la raíz que pertenece al intervalo $[0,1]$, mediante un método iterativo como el de Newton-Raphson, o bien utilizando alguna de las aproximaciones que se encuentran en la literatura (Jin & Fread,1997; Fread, 1988; Jeyapalan, et al., 1983). La figura 3.12. compara la precisión de estas aproximaciones representando la altura relativa del “tapón” en función del número adimensional “a”.

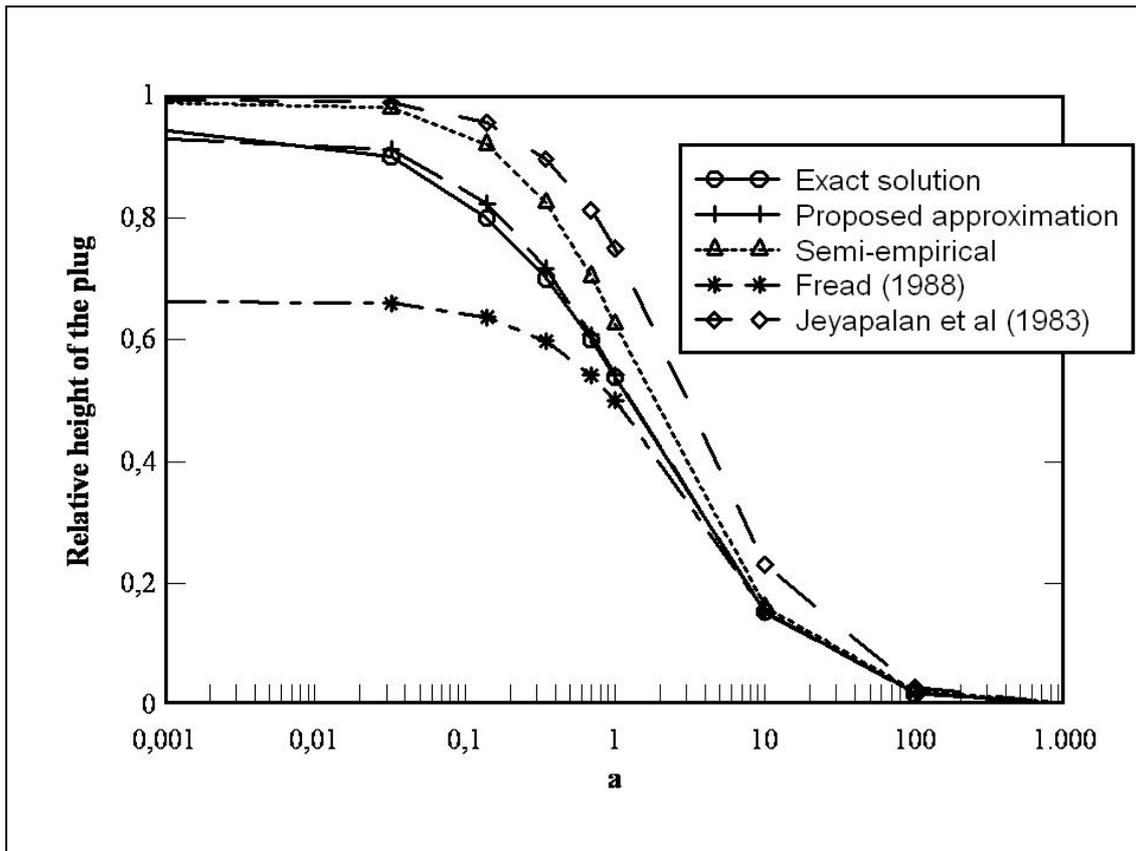


Figura 3.12. Aproximaciones alternativas del término de fricción con el fondo para un fluido de Bingham (Pastor et al., 2004).

En este sentido, Pastor et al. (2004) propusieron una aproximación simple y precisa basada en utilizar la técnica de economización de polinomios. Dicha técnica consiste en obtener el polinomio de segundo orden $P_2(\eta)$, correspondiendo este a la mejor aproximación a $P_3(\xi)$ en el intervalo $[0,1]$. En este caso el error “ $E = P_3(\eta) - P_2(\eta)$ ” viene dado por:

$$E = \frac{1}{3!} \frac{d^3 P_3(\eta)}{d\eta^3} \Pi(\eta) \tag{3.117}$$

Donde:

$$\Pi(\eta) = (\eta_0 - \eta)(\eta_1 - \eta)(\eta_2 - \eta) \tag{3.118}$$

Siendo η_0, η_1 y η_2 los puntos utilizados para la interpolación es decir los puntos donde ambos polinomios coinciden. El error máximo se minimiza haciendo coincidir η_0, η_1 y η_2 con las raíces del polinomio de Tchebichef T_3 :

$$T_3(t) = 4t^3 - t^2 \quad \text{con } t \in [-1, 1] \quad (3.119)$$

O bien:

$$T_3(\eta) = 32\eta^3 - 48\eta^2 + 18\eta - 1 \quad \eta \in [0, 1]$$

De este modo, la expresión (3.117) resulta:

$$E = \eta^3 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{9}{16}\eta - \frac{1}{16} \quad (3.120)$$

Obteniéndose:

$$P_2(\eta) = P_3(\eta) - E = \frac{3}{2}\eta^2 - \left(\frac{57}{16} + a\right)\eta + \frac{65}{32} \quad (3.121)$$

El error máximo en el intervalo $[0, 1]$ es equivalente a $1/32$.

Por lo tanto, la aproximación propuesta consiste en resolver la ecuación de segundo orden:

$$\frac{3}{2}\eta^2 - \left(\frac{57}{16} + a\right)\eta + \frac{65}{32} = 0 \quad (3.122)$$

Observando la figura 3.12. se puede concluir que la aproximación propuesta por Pastor, et al., 2004 proporciona una excelente precisión en todo el rango de valores de "a".

- ***El factor de corrección:***

Partiendo de la definición original del factor de corrección:

$$\alpha \bar{v}^2 = \frac{1}{h} \int_0^h (v - \bar{v})^2 dz \quad (3.123)$$

Se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{h} \frac{\int_0^h v^2 dz}{\bar{v}^2} - 1 \quad (3.124)$$

Al sustituir en la expresión anterior (3.124) las definiciones de velocidad y velocidad promediada (3.106) y (3.108) y desarrollando la relación obtenida se llega a:

$$\alpha = \frac{3}{5} \left\{ \frac{(7\eta + 8)}{(\eta + 2)^2} \right\} - 1 \quad (3.125)$$

En la figura 3.13. se pueden contemplar los valores del factor de corrección en función de la altura relativa del "tapón".

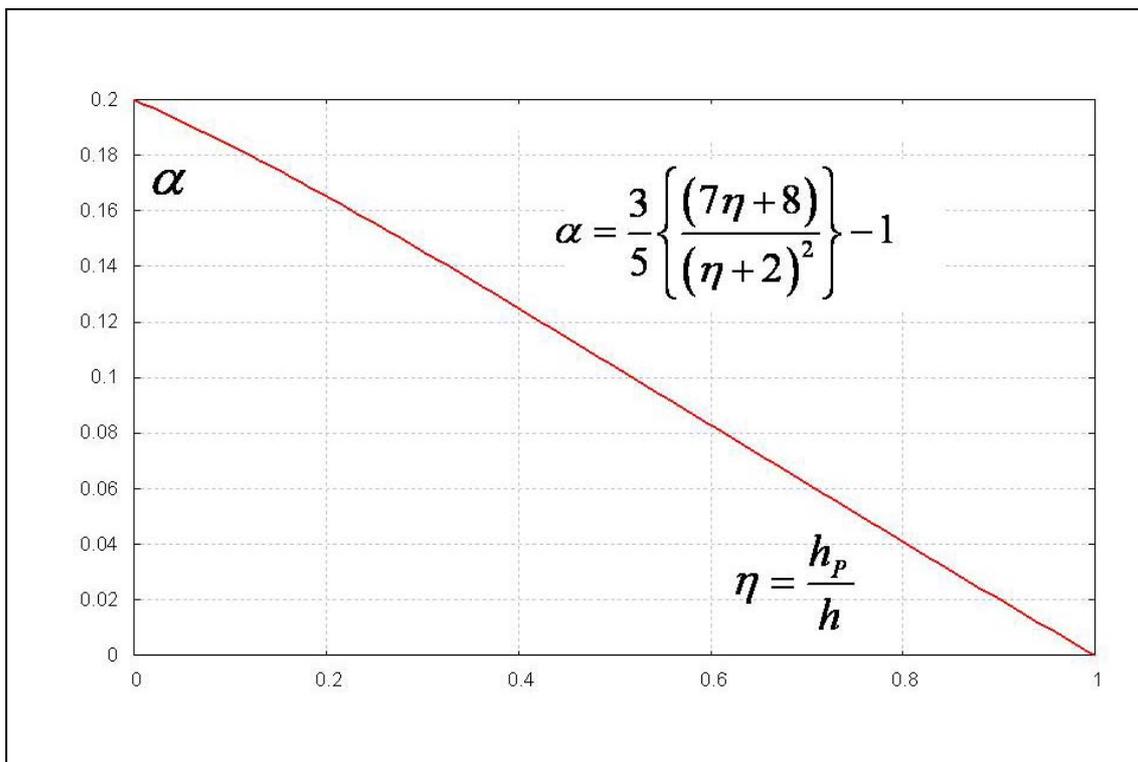


Figura 3.13. Factor de corrección para un fluido de Bingham .

Finalmente, se puede concluir que la variación del factor de corrección según la altura relativa es lineal tomando un valor máximo de 0.2 para el caso $\tau_y = 0$ es decir cuando el fluido es newtoniano y siendo su valor equivalente a cero cuando $h_p = h$.

- **Tensiones integradas en profundidad:**

El tensor de tensiones integrado en profundidad viene dado por:

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \left(\frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2D}}} + 2\mu \right) \text{dev}(\bar{d}) \quad (3.126)$$

Con la presión promediada:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 (Z + h - x_3) \quad (3.127)$$

Por su parte, el tensor velocidad de deformación integrado en profundidad viene dado por las expresiones (3.84), (3.85) y (3.87):

$$\begin{aligned} \bar{d}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (3.128) \\ \bar{d}_{33} &= \frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 = \frac{1}{h} (v_3|_{Z+h} - v_3|_Z) \approx \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \bar{d}_{13} &= \frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned}$$

Utilizando la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\tau_B - \tau_Y}{\mu} (1 - \xi) \quad z \leq h_S \quad (3.129) \\ &= 0 \quad h_S < z \leq h \end{aligned}$$

Se determina el último término de la expresión (3.128):

$$\bar{d}_{13} = \frac{\tau_B}{2\mu} (1 - \eta) \quad (3.130)$$

3.5.5. El modelo friccional:

La mayoría de los códigos integrados en profundidad disponibles utilizan leyes reológicas simples debido a la dificultad que supone implementar modelos, tal y como el viscoplástico generalizado de Cheng & Ling. A este respecto, un modelo simple de particular interés que se obtiene a partir del modelo de Cheng & Ling es el modelo friccional en el cual se desprecian la cohesión y los términos viscosos.

En este caso, la distribución vertical de la tensión tangencial y resistencia tangencial vienen dadas por:

$$\tau(z) = \rho g (h - z) \sin \theta \quad (3.131)$$

Y

$$s(z) = \rho'_d g (h - z) \cos \theta \quad (3.132)$$

Puesto que ambas distribuciones son lineales si las magnitudes (3.131) y (3.132) son iguales en el fondo también lo serán a lo largo de la profundidad del deslizamiento. De modo que se cumple:

$$\tan \theta = \frac{\rho'_d}{\rho} \quad (3.133)$$

En este caso no es posible obtener la distribución de la velocidad sin información adicional. Por ello, los modelos puramente friccionales integrados en profundidad no pueden incluir un factor de corrección del momento lineal.

Por otro lado, tampoco es posible obtener la distribución vertical de la tensión tangencial puesto que la ley de fricción con el fondo se aproxima mediante:

$$\tau_b = -\rho'_d g h \tan \phi \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \quad (3.134)$$

En algunos casos, el suelo fluidificado fluye sobre un fondo constituido de otro material. En este caso, si el ángulo de fricción entre ambos materiales δ es menor que el ángulo de fricción del suelo fluidificado, se tiene que la ley de fricción con el fondo resulta:

$$\tau_b = -\rho'_d g h \tan \phi_b \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \quad (3.135)$$

Donde el ángulo de fricción con el fondo ϕ_b corresponde a:

$$\phi_b = \min(\delta, \phi) \quad (3.136)$$

En este modelo simplificado se puede incluir el efecto de la presión intersticial en el fondo:

$$\tau_b = -(\rho'_d g h \tan \phi_b - p_w^b) \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \quad (3.137)$$

De la ecuación anterior se puede concluir que la presión intersticial tiene un efecto similar al de una disminución del ángulo de fricción.

Los modelos friccionales pueden complementarse mediante información tomada en los canales del flujo acerca de la fricción con el fondo. En este sentido, cabe mencionar la ecuación de Chezy-Manning:

$$\tau_i^b = -\rho \frac{g n^2 |\bar{v}|}{h^{7/3}} \bar{v}_i \quad (3.138)$$

Donde n corresponde al número de Manning y g a la gravedad.

Otro modelo interesante que ha demostrado ser idóneo para simular el comportamiento de las avalanchas de rocas es el fluido Voellmy (Hungry, 1995 y Evans et al., 2001). En este caso, la ley de fricción con el fondo se escribe de la siguiente manera:

$$\tau_b = - \left\{ \left(\rho'_d g h \tan \phi_b - p_w^b \right) \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} + \rho g \frac{|\bar{v}|}{\zeta} \bar{v}_i \right\} \quad (3.139)$$

Este modelo introduce un término de fricción debido a la disipación de la turbulencia. Por su lado, el coeficiente de turbulencia ζ tiene en cuenta el espesor de la capa del fondo donde tiene lugar la mayor parte de la deformación tangencial en los materiales granulares.

En el caso de los fluidos friccionales, algunos autores (Hutter et al., 1993) consideran un parámetro K_0 que a semejanza de la mecánica de suelos relaciona las tensiones verticales y horizontales. Sin embargo, estimar el valor de este parámetro no es una tarea sencilla puesto que puede cambiar con el aumento de la velocidad de corte.

Bibliografía:

Atapattu, D. D., Chhabra, R. P. & Uhlherr, P. H. T., (1995) *Creeping sphere motion in Herschel- Bulkeley fluids: flow field and drag*, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol. 59, pp. 245-265.

Bagnold, R.A., (1954) *Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear*, Proc.Royal Society A, 225, pp.49-63.

Bingham, E. C. & Green, H., (1919) *Paint, a plastic material and not a viscous liquid: the measurement of its mobility and yield value*, Proc. Am. Soc. Test. Mater., 19, pp. 640- 664.

Chen, C.-L., (1988) *General solutions for viscoplastic debris flow*, J. Hydraul. Eng., 114, pp. 259-282.

Chen, C.L. & Ling, C.H. (1996) *Granular-Flow Rheology: Role of Shear-Rate Number in Transition Regime*, J.Engng.Mech. ASCE, 122, 5, pp. 469-481.

Coussot, P. & Meunier, M., (1996) *Recognition, classification and mechanical description of debris flows*, Earth-Science Reviews 40, pp.209-227.

Coussot, P. & Piau, J.-M., (1994a) *On the behaviour of the fine mud suspensions*, Rheol. Acta, 33, pp.175-184.

Coussot, P. & Piau, J.-M., (1995b) *A large-scale field coaxial cylinder rheometer for the study of the rheology of natural coarse suspensions*, J. Rheol., 39, pp.105-124.

Coussot, P. & Piau, J.-M., (1995c) *The effects of an addition of force-free particles on the rheological properties of fine suspensions*, Can. Geotechn. J., 32: pp. 263-270.

Coussot, P., Leonov, A.I. & Piau, J.-M., (1993) *Rheology of concentrated dispersed systems in a low molecular weight matrix*, J. Non-Newt. Fluid Mech., 46: pp. 179-217.

Daido, A., (1970) *On the occurrence of mud-debris flow*. Disaster Prevention Res. Inst. Bull., Kyoto Univ., 21: pp. 135- 169.

Darve, F. & Laouafa, F., (2001) *Modelling of slope failure by a material instability mechanism*, Computers and Geotechnics 29, 301-325.

Evans, S.G., Hungr, O., & Clague, J.J., (2001) *Dynamics of the 1984 rock avalanche and associated distal debris flow on Mount Cayley, British Columbia, Canada; Implications for the landslide hazard assessment on dissected volcanoes*. Engineering Geology, 61: pp. 29-51.

Fernández Merodo, J.A., Pastor, M., Mira, P., Tonni, L., Herreros, M^a.I., González, E., & Tamagnini, R., (2004) *Modelling of diffuse failure mechanisms of catastrophic landslides*, Comp.Methods Appl. Mech.Engrg., 193, pp.2911-2939.

Fink, J. H., Malin, M. C., D'Alli, R. E. & Greenley, R., (1981) *Rheological properties of mudflows associated with the spring 1980 eruptions of Mount St. Helens volcano, Washington*. Geophys. Res. Lett., 8. pp.43-46.

Firth, B. A. & Hunter, R. J., (1976) *Flow properties of coagulated suspensions*, J. Colloid Interface Sci., 57: 248-275.

Fread, D. L. (1988). *The NWS DAMBRK model: Theoretical background and user documentation*. HRL-258, Hydrological Research Laboratory, National Weather Service, Silver Spring, Maryland 20910.

Hanes, D.M. & Inman, D.L., (1985) *Observations of rapidly flowing granular fluid materials*, J.Fluid Mech. 150, pp.357-380.

Herschel, W. H. & Bulkely, R., (1926) *Über die viskosität und Elastizität von solen*. Am. Soc. Test. Mater., 26, pp. 621-633.

Hungr, O., (1995) *A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows and avalanches*. Can. Geotech. J. 32, pp 233- 238.

Hutter, K., Siegel, M., Savage, S. B., & Nohguchi, Y., (1993) *Two-dimensional spreading of a granular avalanche down a inclined plane. Part I*, acta Mechanica, Vol. 100, pp. 37-68.

K.Hutter, B.Svendsen & D.Rickenmann, (1996) *Debris Flow modelling: A review*. Continuum Mech.Thermodyn, 8, 1-35.

Jan, C.D., (1997) *A study on the numerical modelling of debris flows*, in Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, C-I.Chen (Ed.), pp.717-726.

Jeyapalan, J.K., Duncan, J.M., Seed, H.B., (1983) *Investigation of flow failures of tailing dams*. J. Geotech. Engng., ASCE, 109, pp. 172-189.

Jin, M. & Fread, D.L. (1997) *One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV model*, in C.L.Chen (Ed.), Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, ASCE, pp. 687-696.

Johnson, A.M., (1970) *Physical processes in Geology*. Freeman, Cooper, san Francisco.

Johnson, A.M., (1996) *A model for grain flow and debris flow*, U.S.Geological Survey Open-File Report 96-728, 1996 Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, C-l.Chen (Ed.), pp 687-696.

Johnson, A. M., & Rodine, J. R., (1984) *Debris flow*. In: D. Brunsten & D. B. Prior (Editors), *Slope Instability*. Wiley, New York, Ch. 8.

Johnson, A.M. & Martosudarmo, S.Y., (1997) *Discrimination between inertial and macro-viscous flows of fine-grained debris with a rolling-sleeve viscometer*, in *Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, C-l.Chen (Ed.), pp.229-238.

Julien, P.Y. & Lan, Y. (1991) *Rheology of hyperconcentrations*, *J. Hydr.Engng. ASCE*, 117, 3, pp. 346-353.

Laigle, D. & Coussot, P., (1994) *Numerical simulation of debris flows*. *Houille Blanche*, Vol. 3, pp. 50-56.

Locat, J. & Demers, D., (1988) *Viscosity, yield stress, remolded strength, and liquidity index relationships for sensitive clays*, *Can. Geotech. J.*, 25, pp. 799-806.

M'Ewen, M. B. & Pratt, M. I., (1957) *The gelation of montmorillonite. Pat I: the formation of structural framework in sols of Wyoming bentonite*. *Trans. Faraday Soc.*, 53, pp. 535-547.

Major, J. J. & Pierson, T. C., (1992) *Debris flow rheology: Experimental analysis of fine-grained slurries*. *Water Resour. Res.*, 28, pp. 841-857.

Malvern, L.E., (1969) *Introduction to the Mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall.

Michaels, A. S. & Bolger, J. C., (1962) *The plastic flow behaviour of flocculated kaolin suspensions*. Ind. Eng. Chem. Fundam., 1, pp. 153-162.

G.R.MIDI, (2004) *On dense granular flows*, The European Physical Journal E, Vol. 14 No. 4, pp. 341-366.

Nguyen, Q. D. & D. V. Boger, (1983) *Yield stress measurement for concentrated suspensions*, J. Rheol., 27: pp. 321-349.

O' Brien, J.S. & Julien, P. Y., (1988) *Laboratory analysis of mudflows properties*, J. Hydraul Eng., 114: pp. 877-887.

Pastor, M., Quecedo, M., Fernández Merodo, J.A., Herreros, M^a.I., González, E. & Mira, P., (2002) *Modelling Tailing Dams and mine waste dumps failures*, Geotechnique, Vol.LII, N.8, pp. 579-592.

Pastor, M., Quecedo, M., González, E., Herreros, M^a.I, Fernández Merodo, J.A., & Mira, P., (2004) *A simple approximation to bottom friction for Bingham fluid depth integrated models*. Journal of Hydraulic engineering, 130:2, pp. 149-155.

Phillips, C. J., & Davies, T. R. H., (1991) *Determining rheological parameters of debris flow material*. Geomorphology, 4: pp. 101-110.

Pierson, T. C., (1986) *Flow behaviour of channelized debris flows*, Mount At. Helens, Washington. Geol. Soc. Am. Bull., 96, pp. 1056-1069.

Rickenmann, D. & Koch, T. (1997) *Comparison of debris flow modelling approaches*, in Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, C-I.Chen (Ed.), pp.576-585.

Van Olphen, H., (1977) *Introduction to clay colloid chemistry*, Wiley, New York, 2nd ed.

Wan, Z., (1982) *Bed material movement in hyperconcentrated flow*, Ser. Pap., 31, Inst. Hydrodyn. Hydraul. Eng., Tech. Univ. Denmark.

Wang, Z., Larsen, P. & Xiang, W., (1994) *Rheological properties of sediment suspensions and their implications*, J. Hydraul, Res., 32: pp. 560-580.

Whipple, K. & Dunne, T., (1992) *The influence of Debris-flow rheology on fan morphology*, Owens Valley, California. Geol. Soc. Am. Bull., 104, pp. 887-900.

CAPÍTULO 4

MODELIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE SISTEMAS HIPERBÓLICOS

4.1. Introducción:

La mayor parte de las leyes de la física están formuladas en término de ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Éstas pueden resolverse mediante un conjunto de métodos (métodos numéricos entre otros) procediendo la mayoría de ellos a transformar las EDP en ecuaciones en derivadas ordinarias (EDO). A este respecto, gracias al incremento de la potencia de los ordenadores, los métodos numéricos, a diferencia de los métodos teóricos tradicionales, se prestan a resolver los problemas físicos en todos

sus detalles sin recurrir a demasiadas simplificaciones. Por ello, en muchos problemas de ingeniería se debe recurrir a la simulación numérica para obtener una solución aproximada a un modelo matemático para el que no se puede encontrar una solución analítica. Como ejemplos, pueden mencionarse el comportamiento dinámico de una presa de materiales sueltos que puede romper por licuefacción, la propagación de un deslizamiento rápido de ladera, o el transporte de contaminantes en medio marino.

Los distintos métodos numéricos siguen un procedimiento de resolución similar, y está constituido por las siguientes etapas:

- Elaboración de un **modelo matemático**, en el que se describe el problema que se pretende resolver. Dicho modelo suele expresarse mediante EDPs con sus condiciones iniciales y sus condiciones de contorno.
- **Discretización del dominio** del problema, representándolo mediante una malla, es decir, una rejilla de puntos que aproximan la geometría del problema. Los elementos de dicha malla quedan definidos por la conectividad, o dicho de otro modo, por las relaciones entre los nodos. Éstos definen las ubicaciones en las que se calculan las variables de campo.
- **Discretización numérica** que permite transformar la forma continua de las operaciones de integración y derivación en representaciones discretas.
- Resolución de las EDOs o las ecuaciones algebraicas resultantes, mediante las **rutinas numéricas** utilizándose las formulaciones débil o fuerte.
- Implementación de la simulación numérica mediante un programa **de ordenador** escrito en algún lenguaje de programación. Dicho programa debe

validarse mediante la reproducción de un número de datos experimentales, soluciones teóricas, etc.

En los capítulos anteriores (2 y 3) se han presentado las formulaciones, tanto euleriana como cuasi-lagrangiana del modelo matemático integrado en profundidad que describe la propagación de un deslizamiento rápido. Las ecuaciones de dicho modelo se pueden resolver mediante los métodos numéricos disponibles, siendo el método de los elementos finitos más adecuado para las formulaciones eulerianas, mientras que el método SPH es más adecuado para la formulación cuasi-lagrangiana.

En este capítulo, se presenta el método de los Elementos Finitos (EF) que pertenece junto con el método de las Diferencias Finitas (DF) a los llamados “Métodos numéricos con malla”, ya que la información se encuentra estructurada en “mallas”. Estos métodos han vivido un desarrollo espectacular desde 1980, existiendo textos excelentes entre los que cabe destacarse el ya clásico de Zienkiewicz & Taylor (2000).

Para presentar una visión global de los esquemas de resolución en EF, así como de las dificultades que hay que afrontar, se estudia el caso de una ecuación hiperbólica simple (transporte convectivo en 1D). Dicha ecuación se aproxima mediante el método clásico de Galerkin. A continuación, se utiliza el método de las DF con el fin de reflejar, tanto los conceptos básicos de las simulaciones (estabilidad y/o inestabilidad condicionada o incondicionada, grados de precisión y difusión numérica), así como las inestabilidades numéricas que son intrínsecas al uso de ciertos esquemas. Ello se debe a que los esquemas de DF tienen sus equivalentes en la esfera de los elementos finitos. Seguidamente, se presentan los esquemas estables de EF implementados en el un programa de GEOFLOW2D, para resolver las ecuaciones del problema de propagación de los deslizamientos rápidos.

4.2. Modelización mediante elementos finitos de deslizamientos rápidos:

La formulación euleriana del modelo matemático para la propagación de los deslizamientos rápidos se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

(a1) Balance de masa

$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j h) = e_R$	(4.1)
---	-------

(b1) Balance del momento lineal

$\frac{\partial}{\partial t} (h \bar{v}_i) + (1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_i \bar{v}_j) = b_i h + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{\sigma}_{ij}) + N^A t_i^A + N^B t_i^B$	(4.2)
--	-------

Esta ecuación puede expresarse de forma alternativa como:

$\frac{\partial}{\partial t} (h \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \bar{v}_i \bar{v}_j - \frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \delta_{ij} \right) =$ $\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{\sigma}_{ij}^*) + b_i h + N^A t_i^A + N^B t_i^B$	(4.3)
--	-------

Donde se ha introducido la descomposición:

$$\sigma_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \sigma_{ij}^*$$

Con:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 h \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{p} \delta_{ij}$$

(c1) Consolidación vertical

$\frac{\partial}{\partial t}(P_1 h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j P_1 h) + \frac{\pi}{2} C.T. = -\frac{\pi^2}{4h} c_v P_1$	(4.4)
--	-------

El sistema de ecuaciones (4.1) a (4.4) puede expresarse de forma más compacta como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = D + S \quad (4.5)$$

Donde se han introducido:

- (i) El vector de incógnitas ϕ .
- (ii) Los flujos F_1 y F_2 según las direcciones x_1 y x_2 respectivamente.
- (iii) Los términos difusivos D .
- (iv) Los términos fuente S .

Siendo:

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{v}_1 \\ h\bar{v}_2 \\ hP_1 \end{pmatrix} \quad F_1 = \begin{pmatrix} h\bar{v}_1 \\ h\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \\ h\bar{v}_1 \bar{v}_2 \\ h\bar{v}_1 P_1 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} h\bar{v}_2 \\ h\bar{v}_1 \bar{v}_2 \\ h\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \\ h\bar{v}_1 P_1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Y

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{1j}^*) \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{2j}^*) \\ 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} e_R \\ b_1 h + |N^A| t_1^A + |N^B| t_1^B \\ b_2 h + |N^A| t_2^A + |N^B| t_2^B \\ -\frac{\pi^2}{4h} c_v P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_1 \bar{v}_j) \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_2 \bar{v}_j) \\ -\frac{\pi}{2} C.T. \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La modelización mediante EF del sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer orden (4.5), se enfrenta a una dificultad fundamental debida a la presencia de los términos convectivos (F_1 y F_2) que requieren métodos especiales de discretización. Por ello, el método clásico de Galerkin, ampliamente utilizado para resolver los problemas parabólicos o elípticos, da lugar a importantes oscilaciones en el caso de los problemas hiperbólicos.

4.3. Aproximación mediante elementos finitos de EDP hiperbólicas: conceptos básicos

4.3.1. Ecuación modelo: transporte convectivo en 1D.

Se considera el transporte convectivo en una dimensión de una sustancia, con concentración ϕ , por una corriente con una velocidad constante v (Figura 4.1.).

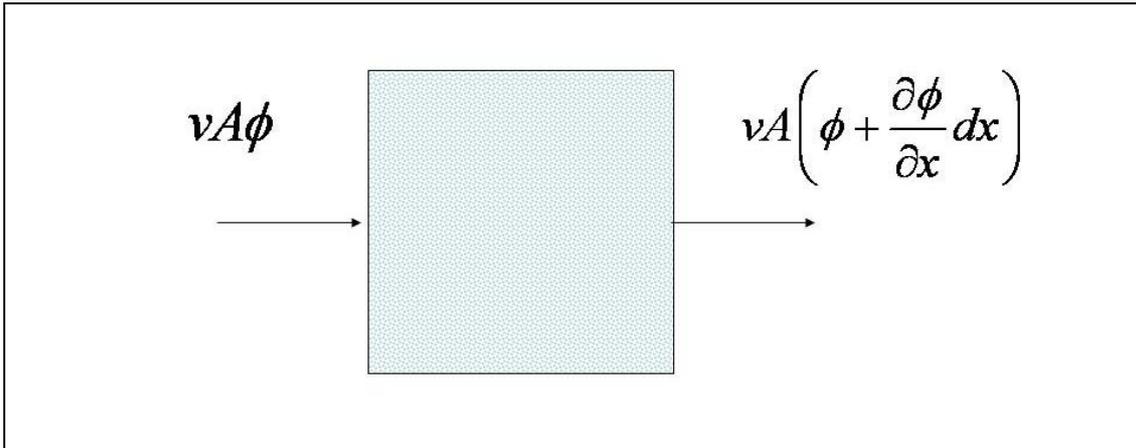


Figura 4.1. Transporte convectivo de una sustancia por una corriente uniforme

La ecuación de balance de masa de la sustancia viene dada por:

$$A dx \frac{\partial \phi}{\partial t} = vA\phi - vA\left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx\right) \quad (4.8)$$

Obteniéndose:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

Esta EDP debe de completarse con condiciones iniciales (4.10) y de contorno (4.11) adecuadas:

$$\phi(x, t = 0) = f_0(x) \quad (4.10)$$

$$\phi(x = 0, t) = g(t) \quad (4.11)$$

La solución general a este problema es del tipo:

$$\phi(x,t) = \phi(x - vt) \tag{4.12}$$

Esta expresión corresponde a una onda propagándose con la velocidad de la corriente. Esto puede averiguarse fácilmente sustituyendo la solución (4.12) en la EDP (4.9) y verificando si dicha ecuación se cumple.

4.3.2. La aproximación clásica de Galerkin:

Con el fin de presentar el método clásico de Galerkin se utiliza el problema simple del transporte convectivo en una dimensión presentado en el epígrafe anterior. En la parte izquierda del contorno se da la concentración de la sustancia en cuestión y se supone que la velocidad es del orden de $v = 1$, la longitud del dominio es $L = 5$ y la concentración de la sustancia dentro del dominio es inicialmente nula.

En primer lugar, se discretiza el dominio del problema mediante una malla simple formada por 5 nodos y 4 elementos como muestra la figura 4.2.

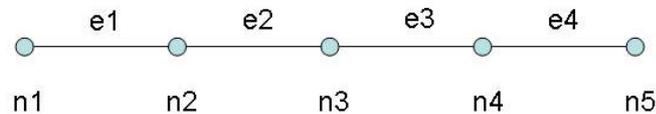


Figura 4.2. Malla de elementos finitos 1D para el problema de transporte convectivo

Por otro lado, se aproxima la solución mediante las funciones globales de forma $N_j(x)$ $j = 1, \dots, 5$ y las variables nodales $\hat{\Phi}_j(t)$ $j = 1, \dots, 5$ según la expresión:

$$\phi(x, t) \approx \hat{\phi}(x, t) = \sum_{j=1}^5 N_j(x) \hat{\Phi}_j(t) \quad (4.13)$$

La expresión (4.13) puede escribirse de forma más compacta:

$$\hat{\phi}(x, t) = N \cdot \hat{\Phi} \quad (4.14)$$

Donde se han introducido los vectores de las funciones de forma N y de las incógnitas nodales $\hat{\Phi}$ que dependen respectivamente de x y de t .

La condición de contorno es de tipo Dirichlet (concentración prescrita) y se escribe como:

$$\phi(x = 0, t) = g(t) \quad (4.15)$$

Siendo la concentración constante en el lado izquierdo:

$$\phi(x = 0, t) = 1 \quad (4.16)$$

Esta condición de contorno es inmediatamente satisfecha si se prescribe el valor del nodo 1 es decir $\hat{\Phi}_1(t) = 1$.

Al sustituir la aproximación $\hat{\phi}$ en la EDP ésta deja de cumplirse resultando un error o residuo R_Ω que viene definido por:

$$R_{\Omega} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + v \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (4.17)$$

Sustituyendo la expresión (4.13) en la expresión (4.17) se llega a:

$$R_{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^5 N_j(x) \hat{\Phi}_j(t) \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^5 N_j(x) \hat{\Phi}_j(t) \right) \quad (4.18)$$

De este modo, se tiene:

$$R_{\Omega} = \sum_{j=1}^5 N_j(x) \frac{d\hat{\Phi}_j}{dt} + \sum_{j=1}^5 v \hat{\Phi}_j \frac{dN_j}{dx} \quad (4.19)$$

El método de Galerkin consiste en determinar las incógnitas $\hat{\Phi}_j$ utilizando las ecuaciones:

$$\int_{\Omega} N_i R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (4.20)$$

De este modo, se obtiene el mismo número de ecuaciones que incógnitas teniendo en cuenta que el valor de la incógnita en el nodo 1 esta prescrito.

Al reemplazar (4.19) en (4.20) se llega a:

$$\int_{\Omega} N_i \left(\sum_{j=1}^5 N_j(x) \frac{d\hat{\Phi}_j}{dt} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} N_i \left(\sum_{j=1}^5 v \hat{\Phi}_j \frac{dN_j}{dx} \right) d\Omega \quad (4.21)$$

Como resultado, se obtiene:

$$\left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right) \frac{d\hat{\Phi}_j}{dt} = - \left(\int_{\Omega} N_i \frac{dN_j}{dx} d\Omega \right) \hat{\Phi}_j \quad (4.22)$$

Esta ecuación puede expresarse de forma matricial como:

$$M \frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -H\hat{\Phi} \quad (4.23)$$

Siendo M la matriz de masas y H la matriz convectiva discretizada.

Las matrices M y H se obtienen mediante el ensamblado de las contribuciones de todos los elementos de la malla siendo la contribución de cada elemento $M^{(e)}$ y $H^{(e)}$:

$$M^{(e)} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$H^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde h representa la longitud del elemento que en este caso es igual a la unidad.

Como consecuencia, las matrices globales resultantes son:

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación (4.23) es una EDO que hay que integrar respecto al tiempo. Para introducir la discretización en el tiempo de dicha ecuación se considera una serie de pasos de tiempo t^0, t^1, \dots, t^n de tal forma que:

$$t^n = t^0 + n \Delta t \quad (4.26)$$

De este modo, se introduce una aproximación simple hacia adelante en el tiempo de la derivada del vector incógnitas:

$$\frac{d\hat{\Phi}^n}{dt} = \frac{\hat{\Phi}^{n+1} - \hat{\Phi}^n}{\Delta t} \quad (4.27)$$

Donde $\hat{\Phi}^n$ representa el valor del vector incógnitas en el tiempo n.

Al sustituir (4.27) en (4.23) se obtiene:

$$\hat{\Phi}^{n+1} = \hat{\Phi}^n - \Delta t M^{-1} H \hat{\Phi}^n \quad (4.28)$$

O bien:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{n+1} &= (I - \Delta t M^{-1} H) \hat{\Phi}^n \\ \hat{\Phi}^{n+1} &= A \hat{\Phi}^n \end{aligned} \quad (4.29)$$

Siendo I la matriz identidad de quinto orden y A la matriz iteración.

El esquema obtenido es explícito ya que la matriz de coeficientes en (4.23) corresponde a la matriz de masas. Por lo tanto puede resolverse mediante un esquema de iteración tipo Jacobi. Normalmente, son suficientes 3 a 5 iteraciones para conseguir una solución razonablemente precisa.

Partiendo de la solución inicial $\hat{\Phi}^0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$ y escogiendo un incremento de tiempo Δt .

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Phi}^1 &= A\hat{\Phi}^0 \\
 \hat{\Phi}^2 &= A\hat{\Phi}^1 \\
 \hat{\Phi}^3 &= A\hat{\Phi}^2 \\
 &\dots \\
 \hat{\Phi}^{n+1} &= A\hat{\Phi}^n
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

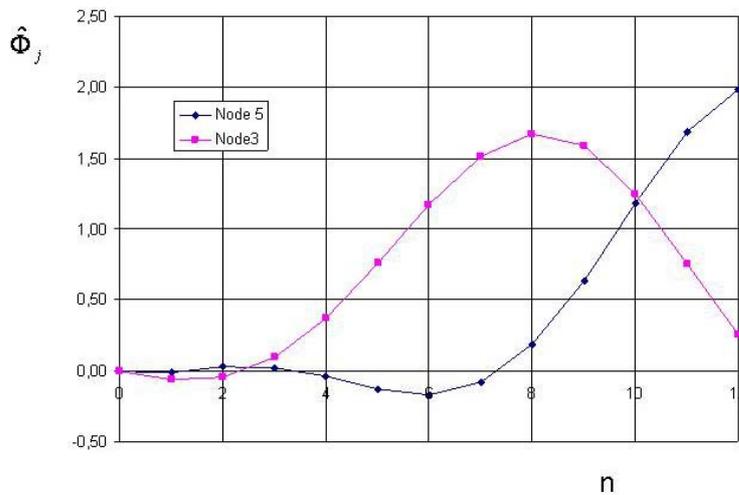


Figura 4.3.a. Evolución de la concentración de la sustancia en función del tiempo en los nodos 3 y 5.

La figura 4.3.a. muestra la evolución en el tiempo de la solución en dos nodos de control, mientras que en la figura 4.3.b. se da la concentración de la sustancia dentro del dominio del problema en dos pasos de tiempo distintos. Como puede apreciarse en ambas figuras, los resultados obtenidos presentan importantes oscilaciones que se incrementan con el tiempo. Este tipo de comportamiento se obtiene independientemente del incremento de tiempo utilizado. Ello se debe a que el esquema utilizado es **incondicionalmente inestable**, es decir, no converge independientemente del Δt utilizado. Por su parte, la solución analítica es una función escalón localizada en $x_s = n\Delta t$.

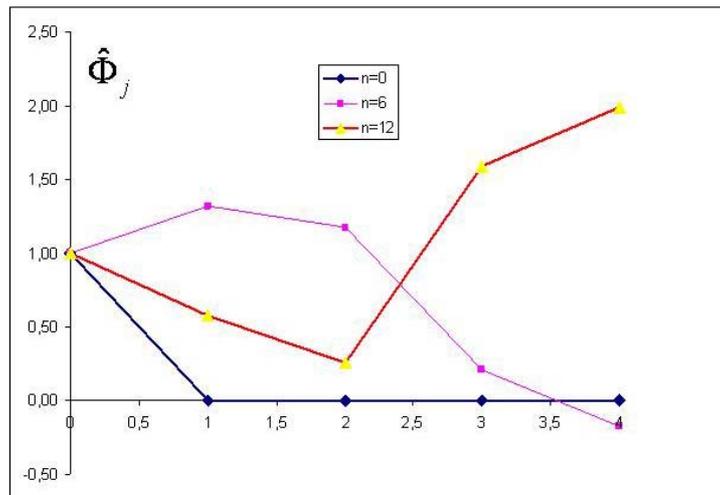


Figura 4.3.b. Concentración de la sustancia en la malla en los pasos de tiempo 0, 6 y 12.

Para reflejar la evolución del error en el tiempo se considera el esquema (4.29) que rige la solución exacta $\bar{\hat{\Phi}}^n$:

$$\bar{\hat{\Phi}}^{n+1} = A\bar{\hat{\Phi}}^n \quad (4.31)$$

Si se resta de esta relación la ecuación (4.29) se consigue relacionar el error en el tiempo $n+1$ con el error en el tiempo n :

$$\hat{\varepsilon}^{n+1} = A\hat{\varepsilon}^n \quad (4.32)$$

La relación (4.32) coincide con el esquema numérico utilizado.

Puede demostrarse que la condición necesaria y suficiente para que el error no crezca es que el módulo de todos los valores propios tiene que ser más pequeño que la unidad. Esta condición no se cumple en el ejemplo arriba presentado en cuyo caso los valores propios corresponden a números complejos con módulos superiores a la unidad.

Por otra parte, para ahorrar tiempo de cálculo se aproxima la matriz de masas mediante su representación diagonal denominada M_L cuyos términos diagonales corresponden a la suma de todos los coeficientes de la misma fila.

En el caso del problema que se está estudiando la matriz M_L , se deduce directamente de la expresión (4.25):

$$M_L = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Por su parte, la matriz A viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= (I - \Delta t v M_L^{-1} H) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{v \Delta t}{h} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{v \Delta t}{2h} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como resultado, la ecuación de iteración para un determinado nodo viene dada por:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{v \Delta t}{h} \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2} \right) \quad (4.35)$$

4.3.3. Esquemas en Diferencias Finitas.

Con el objetivo de adquirir una perspectiva más amplia de las posibles soluciones se presentan los esquemas básicos de diferencias finitas. Las conclusiones obtenidas de este modo pueden extenderse de forma directa a los elementos finitos.

- *Mallas de Diferencias Finitas:*

El método de las diferencias finitas se basa en la construcción de una malla regular en el dominio espacio-temporal. En la figura 4.4. se esquematiza una malla de DF que representa un dominio unidimensional de longitud L con $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t \leq T$. Los ejes del espacio y del tiempo se han dividido en intervalos de longitud Δx y Δt respectivamente.

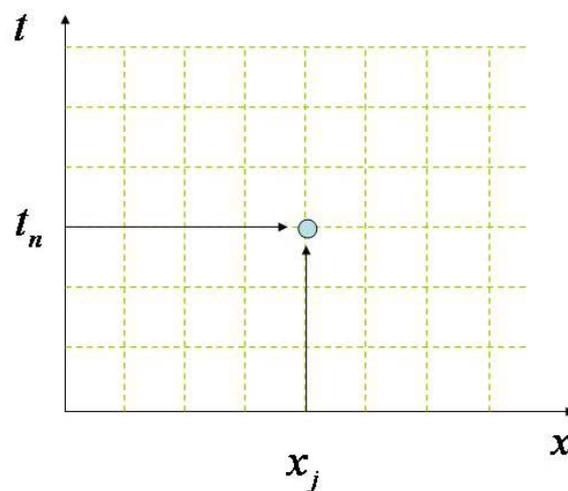


Figura 4.4. Malla de diferencias finitas

Los nodos corresponden a los puntos de cruce de las líneas verticales y horizontales de la malla de diferencias finitas. Cada nodo $x_j = j\Delta x$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ queda definido por un par de valores (j, n) . Además, los valores de las incógnitas en dicho nodo se expresan como:

$$\phi(x_j, t_n) = \phi_j^n \quad (4.36)$$

- ***Aproximación de las derivadas:***

Las derivadas parciales con respecto al tiempo (j, n) pueden aproximarse a través de la combinación de los valores de las incógnitas en los nodos. De este modo, la derivada parcial hacia adelante en el tiempo (FT) se escribe como:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_j^n = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.37)$$

Donde la notación $O(\Delta t)$ indica que la derivada es de primer orden de precisión.

Por otro lado, existen varias alternativas para aproximar las derivadas espaciales de primer orden. Entre otras, puede mencionarse la derivada hacia atrás en el espacio (BS), que también es de primer orden de precisión:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_j^n = \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.38)$$

Dicha derivada espacial se puede aproximar de forma alternativa mediante una fórmula de diferencias centradas.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_j^n = \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.39)$$

Esta derivada centrada en el espacio (CS) presenta una precisión de segundo orden, lo cual permite pensar que sus resultados serán más precisos. A continuación, se comparan los resultados obtenidos mediante ambas aproximaciones.

- *Esquemas alternativos de DF: FTBS, FTCS y Lax Wendroff*

Un esquema de diferencias finitas se obtiene sustituyendo las derivadas parciales con respecto al tiempo y el espacio por sus aproximaciones discretas. De este modo, el esquema FTCS (hacia delante en el tiempo y centrado en el espacio) se obtiene reemplazando la formulación hacia adelante en el tiempo y centradas en el espacio en la EDP (4.9):

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + v \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.40)$$

De este modo, se tiene:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2} \right) \quad (4.41)$$

Cabe señalar que esta expresión es exactamente la misma que se ha obtenido mediante el método clásico de Galerkin de los Elementos Finitos presentado en la sección anterior.

Por otra parte, el número adimensional de Courant juega un papel primordial en el análisis numérico de las EDP hiperbólicas de primer orden y relaciona la velocidad física y la velocidad numérica:

$$C = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \quad (4.42)$$

Al introducir el número de Courant en el esquema **FTCS** se obtiene:

$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{C}{2}(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n)$	(4.43)
--	--------

De forma similar el esquema **FTBS** (hacia delante en el tiempo y hacia atrás en el espacio) puede expresarse como:

$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - C(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n)$	(4.44)
--	--------

Ambos esquemas son explícitos ya que los valores en el tiempo t^{n+1} se obtienen directamente a partir de los valores dados en el tiempo t^n sin tener que resolver ningún sistema de ecuaciones.

En la figura 4.5. se puede contemplar el patrón que siguen los esquemas FTCS y FTBS para obtener la información de partida.

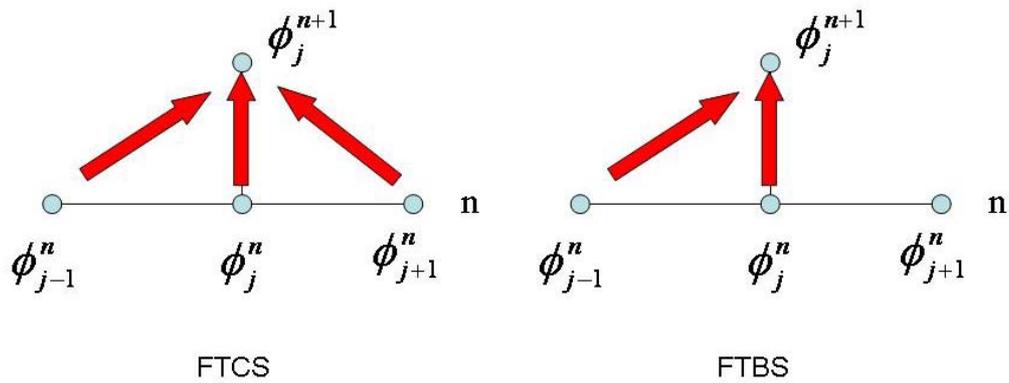


Figura 4.5. El patrón de los esquemas de diferencias finitas FTCS y FTBS

Para comparar estos esquemas se estudia el problema del transporte de una sustancia, mediante una corriente con velocidad constante “v” en un canal de longitud equivalente a 2 unidades, siendo la concentración en el tiempo inicial:

$$\begin{aligned}
 0 \leq x < 0.8 & \quad \phi(x, 0) = 0 & (4.45) \\
 0.8 \leq x < 1 & \quad \phi(x, 0) = (x - 0.8) / 2 \\
 1 \leq x < 1.2 & \quad \phi(x, 0) = (1.2 - x) / 2 \\
 1.2 \leq x < 2 & \quad \phi(x, 0) = 0
 \end{aligned}$$

La condición de contorno por su parte viene dada por:

$$\phi(x = 0, t) = 0 \quad (4.46)$$

Es decir, no se efectúa entrada alguna de la sustancia en el dominio. Se toma $\Delta x = 0.1$ y se estudian los casos correspondientes a $C = \{0.5, 1, 1.5\}$. Los resultados vienen reflejados en las figuras 4.6. y 4.7.

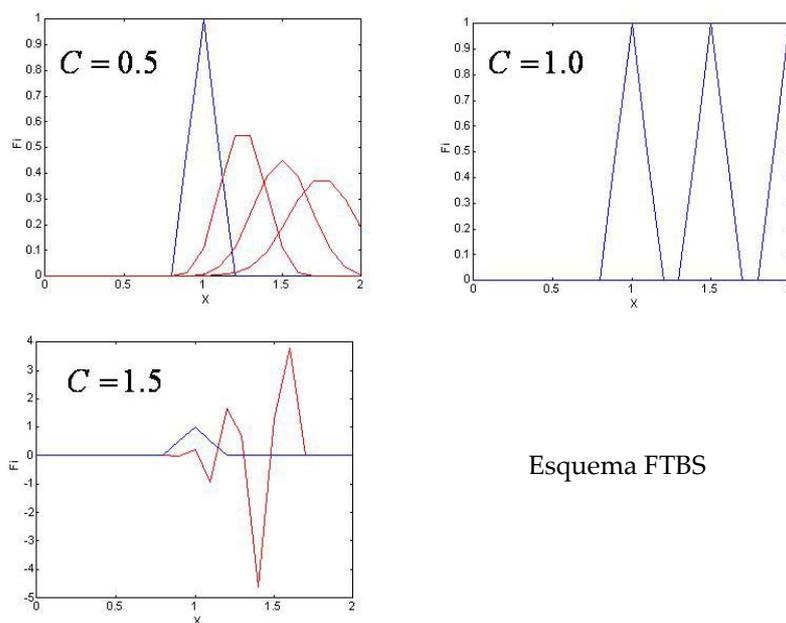


Figura 4.6. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema FTBS.

La solución analítica a este problema consiste en la traslación del perfil de una onda triangular con la velocidad de la corriente. En el caso del esquema FTBS la figura 4.6. muestra que la solución exacta se obtiene para $C = 1$, mientras que aparece una difusión para $C = 0.5$. Dicha difusión se denomina “**difusión numérica**”, ya que ha sido introducida por el algoritmo utilizado. Para $C = 1.5$ el esquema es inestable, apareciendo una oscilación que se va amplificando con el paso del tiempo. Se puede demostrar que la estabilidad solo se alcanza si el número de Courant es inferior a uno, por ello el esquema se denomina “**condicionalmente estable**”.

La figura 4.7. presenta los resultados obtenidos al resolver el mismo problema con el algoritmo FTCS. Puesto que este esquema proporciona una mejor aproximación a las derivadas espaciales cabe esperar que los resultados sean más precisos.

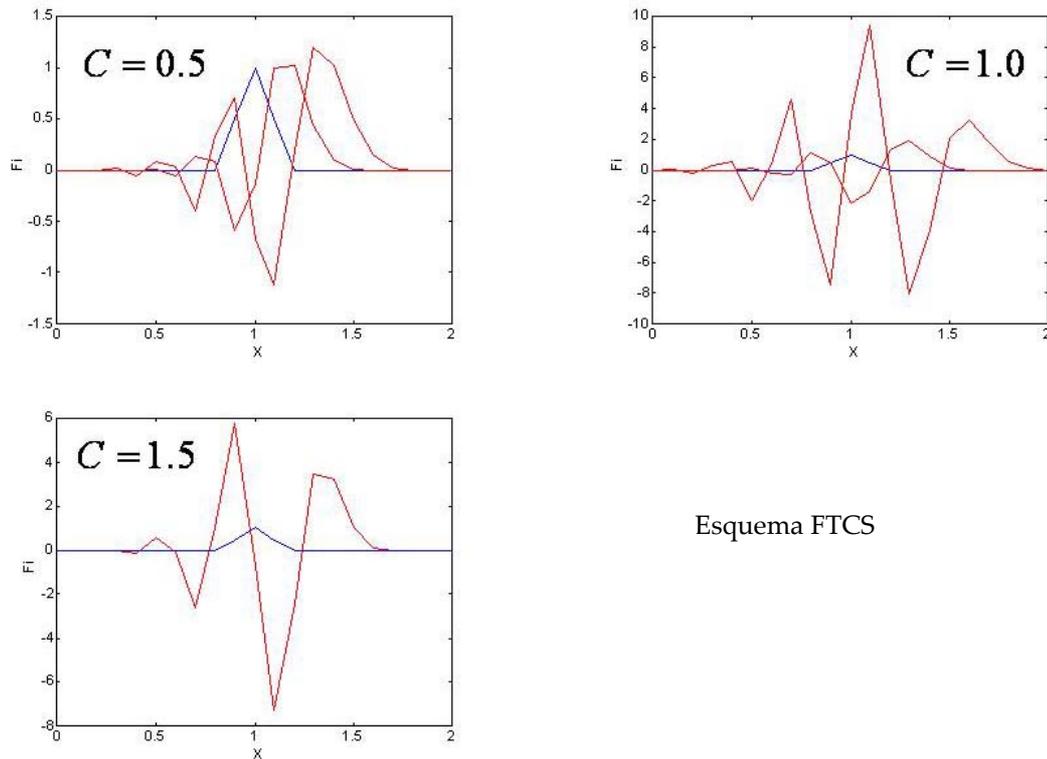


Figura 4.7. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema FTCS.

Sin embargo, a pesar de la gran precisión de la formulación utilizada puede observarse que el esquema es siempre inestable presentando oscilaciones que se amplifican con el paso del tiempo. Por lo tanto, se trata de un esquema **“incondicionalmente inestable”**.

Por último, el esquema **Lax Wendroff** se basa en llevar a cabo un desarrollo en serie de Taylor de ϕ con respecto al tiempo en (j, n) seguido por la discretización espacial.

Las incógnitas en el tiempo t^{n+1} se expresan como:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n \quad (4.47)$$

Empleando la ecuación en derivadas parciales (4.9) se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n = -v \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \quad (4.48)$$

Y derivando de nuevo con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left(-v \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n \right) \\ &= v^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \end{aligned} \quad (4.49)$$

Las expresiones obtenidas se sustituyen en el desarrollo de la serie de Taylor (4.47):

$$\phi^{n+1} = \phi^n - v \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \quad (4.50)$$

Una vez obtenida la ecuación (4.50) pueden emplearse las DF para llevar a cabo la discretización espacial. Puesto que la precisión del desarrollo en serie de Taylor es de segundo orden en el tiempo, se utilizará una aproximación cuya precisión es de segundo orden en el espacio:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n &= \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \\ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n &= \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Sustituyendo (4.51) en la EDP y reordenando los términos se llega al esquema de Lax Wendroff:

$\phi_j^{n+1} = \frac{1}{2} C(1+C)\phi_{j-1}^n + (1-C^2)\phi_j^n - \frac{1}{2} C(1-C)\phi_{j+1}^n$	(4.52)
--	--------

Se trata de un esquema explícito centrado en el espacio con el mismo patrón que el esquema FTCS discutido más arriba.

Al aplicar este esquema al problema de transporte convectivo de una onda triangular mediante una corriente uniforme a velocidad constante, se obtienen los resultados de la figura 4. 8. Como se puede observar en dicha figura el esquema de Lax- Wendroff es condicionalmente estable coincidiendo la solución exacta con $C = 1$.

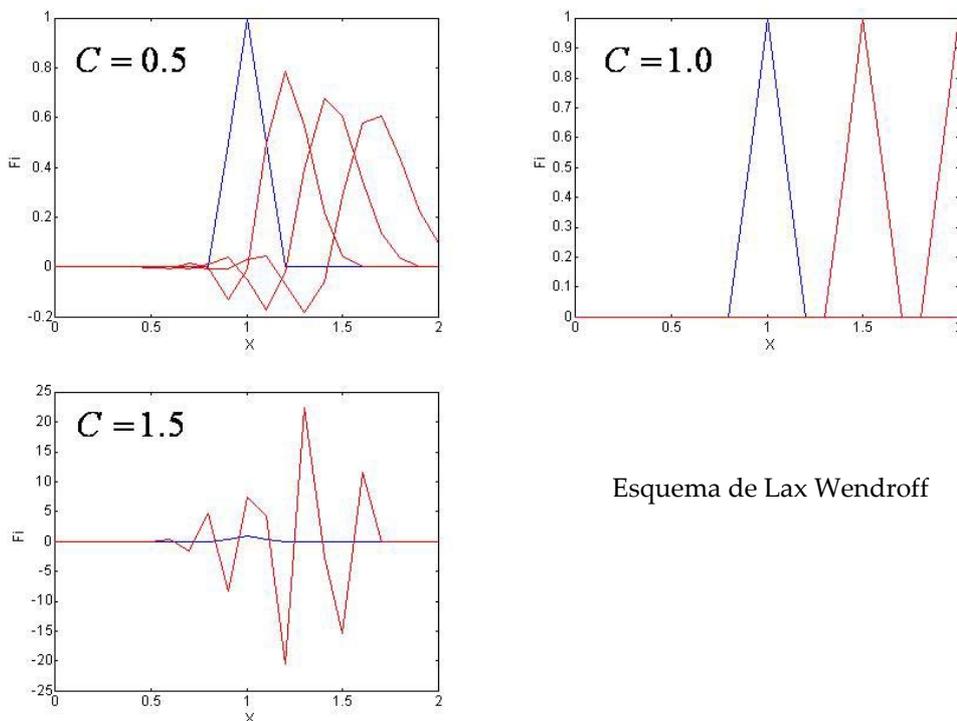


Figura 4. 8. Transporte convectivo de una onda triangular mediante el esquema Lax Wendroff

Los tres esquemas presentados en esta sección han sido seleccionados por los siguientes motivos: en primer lugar permiten la introducción de los conceptos de estabilidad y difusión numérica, además del concepto de inestabilidad incondicionada (esquema FTCS) y la estabilidad condicionada (esquemas de FTBS y Lax Wendroff). En segundo lugar, en el caso de los problemas unidimensionales, el algoritmo FTCS

coincide con el esquema clásico de Galerkin de los EF descrito en este capítulo. Como resultado, un esquema de EF centrado y explícito basado en el método clásico de Galerkin nunca funciona. De este modo, las DF proporcionan una base para desarrollar esquemas estables de EF. En este contexto, a partir de los esquemas FTBS y Lax Wendroff se pueden desarrollar dos métodos simples: el método de Petrov Galerkin, en el que las funciones de ponderación no coinciden con las funciones de forma, y el esquema de Taylor Galerkin que representa una extensión del esquema Lax Wendroff a la esfera de los elementos finitos.

4.4. Esquemas numéricos estables en Elementos Finitos: el método de Taylor Galerkin.

El algoritmo de Taylor Galerkin es un algoritmo simple y preciso que ha sido propuesto por Donea, 1983; Löhner, et al., 1987; Donea, et al., 1992 y Quecedo & Pastor (2002). El procedimiento para obtener este esquema es similar al descrito con anterioridad para el esquema de Lax Wendroff, aunque a diferencia de este último se utiliza el método de Galerkin para la discretización espacial. Una descripción detallada de este algoritmo puede encontrarse en el texto de Zienkiewicz & Taylor (2000).

Para presentar el algoritmo de Taylor-Galerkin se analiza en primer lugar su aplicación al caso simple de una ecuación de transporte convectivo 1D. Seguidamente, se implementara para sistemas y ecuaciones cuasi-lineales donde se introduce el algoritmo de Taylor – Galerkin de dos pasos. Y por último, se analiza la discretización de términos de fuente y difusivos.

4.4.1. El algoritmo de Taylor Galerkin para la ecuación de transporte convectivo en 1D:

Se parte de la ecuación de transporte convectivo 1D (4.9) descrita con anterioridad:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta la expansión de la serie de Taylor hasta segundo orden en el tiempo:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - v \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^n + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|^n \quad (4.50)$$

Y la aproximación mediante elementos finitos (4.13) o bien (4.14):

$$\phi(x, t) \approx \hat{\phi}(x, t) = \sum_{j=1}^5 N_j(x) \hat{\Phi}_j(t) \quad (4.13)$$

$$\hat{\phi}(x, t) = N \cdot \hat{\Phi} \quad (4.14)$$

Se sustituye la aproximación (4.13) en (4.50), multiplicando ambos lados por $N_i(x)$ e integrando en el dominio:

$$\int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^n d\Omega - v \Delta t \int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right|^n d\Omega + v^2 \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \right|^n d\Omega \quad (4.53)$$

Al estudiar por separado los términos de la ecuación (4.53) se llega a:

$$\int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^{n+1} d\Omega = \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right) \hat{\Phi}_j^{n+1} = M \hat{\Phi}_j^{n+1} \quad (4.54)$$

$$\int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^n d\Omega = \left(\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right) \hat{\Phi}_j^n = M \hat{\Phi}_j^n$$

$$\int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right|^n d\Omega = \left(\int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right) \hat{\Phi}_j^n = H \hat{\Phi}_j^n \quad (4.55)$$

Donde M representa la matriz de masas y H el operador convectivo discretizado:

$$H_{ij} = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (4.56)$$

Integrando por partes el término que contiene la derivada segunda de $\hat{\phi}$ se obtiene:

$$\int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \right|^n d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right|^n d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right|^n d\Gamma \quad (4.57)$$

Donde $\partial\Omega$ corresponde al contorno del dominio y n a la normal al contorno.

Al desarrollar la expresión (4.57) se llega a:

$$- \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right) \hat{\Phi}_j^n + \int_{\partial\Omega} N_i \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right|^n d\Gamma = -K_{ij} \hat{\Phi}_j^n + \int_{\partial\Omega} N_i \left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right|^n d\Gamma \quad (4.58)$$

La matriz K es la denominada “matriz de rigidez” en el análisis estructural.

Reemplazando los distintos términos en la ecuación (4.53) se obtiene:

$$M\hat{\Phi}^{n+1} = M\hat{\Phi}^n - v\Delta t H\hat{\Phi}^n - v^2 \frac{\Delta t^2}{2} K\hat{\Phi}^n + f^n \quad (4.59)$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$M\Delta\hat{\Phi}^{n+1} = rhs|^n \quad (4.60)$$

Donde el vector de las incógnitas viene dado por:

$$\Delta\hat{\Phi}^n = \hat{\Phi}^{n+1} - \hat{\Phi}^n \quad (4.61)$$

Puesto que la matriz de coeficientes corresponde en este caso a la matriz de masas, el algoritmo obtenido es explícito y puede resolverse mediante un esquema iterativo tipo Jacobi. Este último sólo requiere de 3 a 5 iteraciones para converger:

$$\Delta\hat{\Phi}^n|^{(k+1)} = M_L^{-1} \left(rhs|^n - M \Delta\hat{\Phi}^n|^{(k)} \right) \quad (4.62)$$

4.4.2. Ecuaciones y sistemas Cuasi-lineales. Formas conservativas.

Las ecuaciones hiperbólicas de primer orden pueden expresarse de forma alternativa llamada forma conservativa. De este modo, la ecuación de transporte convectivo (4.9) se escribe como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.63)$$

Donde F representa el término de flujos que viene dado por:

$$F(x, t) = v\phi(x, t) \quad (4.64)$$

Por otro lado, la ecuación de Burger (4.65) representa la ecuación más simple que contiene un término convectivo similar al encontrado en la formulación euleriana de las ecuaciones de balance del momento lineal de la dinámica de fluidos. Dicha ecuación corresponde a una EDP hiperbólica cuasi-lineal.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.65)$$

En este caso el término de flujos se expresa como:

$$F = \frac{1}{2} \phi^2 \quad (4.66)$$

Para aplicar el método de Taylor Galerkin a las EDP hiperbólicas cuasi-lineales se parte de la expansión en serie de Taylor:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^n \quad (4.47)$$

Donde se sustituye la derivada primera por su valor obtenido de la EDP:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4.67)$$

La derivada segunda viene dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial F}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \quad (4.68)$$

Por su parte, las derivadas temporales del flujo pueden expresarse como:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -A \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4.69)$$

Donde

$$A = \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad (4.70)$$

De este modo, se obtiene:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right|^n \quad (4.71)$$

Representando la expresión (4.71) el algoritmo de Taylor Galerkin de un paso para las ecuaciones cuasi-lineales.

En el caso de un sistema de EDP de primer orden unidimensional las incógnitas y flujos corresponden a vectores de una dimensión determinada. Dicho sistema puede expresarse de forma compacta como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.72)$$

Por lo tanto, el algoritmo de Taylor Galerkin (4.71) es válido para sistemas EDP de primer orden unidimensionales donde "A" representa una matriz.

Una vez realizada la discretización en el tiempo, se lleva acabo la discretización espacial de la expresión (4.71) mediante el método de Galerkin. Para ello, se sustituye la aproximación de las incógnitas mediante EF en (4.71) y a continuación se multiplica la ecuación obtenida por las funciones de forma y se integra en el dominio:

$$\int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^n d\Omega + \frac{1}{2} \Delta t^2 \int_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A \frac{\partial F}{\partial x}} \right)^n d\Omega \quad (4.73)$$

El tercer término de la expresión (4.73) se obtiene fácilmente al utilizarse elementos lineales. Por su parte, el término de flujos se obtiene en los nodos y se interpola utilizando las funciones de forma:

$$F = N_j \hat{F}_j \quad (4.74)$$

Por otro lado, la derivada parcial del flujo dentro de los elementos es constante y su contribución a la integral de un elemento particular (e) se calcula de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega_e} N_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^n d\Omega_e = \overline{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^n} \int_{\Omega_e} N_i d\Omega \quad (4.75)$$

Donde la barra indica el valor constante del flujo dentro de un elemento dado.

Asimismo, la integral de la función de forma en un elemento lineal unidimensional se expresa como:

$$\int_{\Omega} N_i d\Omega = \frac{1}{2} l_e \quad (4.76)$$

Donde l_e corresponde a la longitud del elemento.

Por otro lado, se aplica la integración por partes al término que contiene derivadas de segundo orden:

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\widehat{A \frac{\partial F}{\partial x}} \right)^n d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \widehat{A \frac{\partial F}{\partial x}}^n d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_i \widehat{A \frac{\partial F}{\partial n}}^n d\Gamma \quad (4.77)$$

La integral en el dominio se calcula de forma sencilla, puesto que ambas derivadas parciales son constantes dentro de cada elemento. Asimismo, dependiendo de la naturaleza de "A" deben de utilizarse técnicas de integración numérica para obtener dicha integral, aunque también puede calcularse directamente.

4.4.3. El algoritmo de dos pasos de Taylor Galerkin

En la sección anterior se ha presentado el algoritmo de Taylor Galerkin de un paso para sistemas EDP de primer orden cuasi-lineales. Dicho algoritmo contiene productos de la matriz Jacobiana "A" por un vector. Ello supone un gran esfuerzo computacional. En este contexto, el método de Taylor Galerkin de dos pasos representa una mejora que pretende evitar el alto coste de los cálculos. Este método introducido por Löhner, et al., en 1984 consta de dos etapas:

En la **primera etapa** se busca la solución en el tiempo $\Delta t / 2$:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F}{\partial x}^n \quad (4.78)$$

En este sentido, cabe mencionar que la derivada del flujo se obtiene en los elementos en lugar de los nodos. Por lo tanto, la expresión (4.78) se reescribe utilizando valores promediados en los elementos:

$$\bar{\phi}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\phi}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F}{\partial x}^n \quad (4.79)$$

Una vez obtenidos los valores de las incógnitas en los elementos se determinan de forma directa los valores de los flujos $\bar{F}^{n+\frac{1}{2}}$ en el tiempo $n + \frac{1}{2}$.

En un **segundo paso** se calculan los valores de las incógnitas en el tiempo $n + 1$ según la expresión:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

Utilizando el método de Galerkin se tiene:

$$\int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{n+\frac{1}{2}} d\Omega \quad (4.81)$$

donde los dos primeros términos corresponden a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^n d\Omega &= M_{ij} \hat{\Phi}_j^n \\ \int_{\Omega} N_i \hat{\phi}^{n+1} d\Omega &= M_{ij} \hat{\Phi}_j^{n+1} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Puesto que los flujos en el tiempo $n + \frac{1}{2}$ se conocen a nivel de elementos en lugar de nodos, el último término puede obtenerse mediante la integración por partes, o bien mediante el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|^{n+\frac{1}{2}} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{F} \Big|^{n+\frac{1}{2}} d\Omega + \int_{\Omega} N_i \left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial n} \right|^{n+\frac{1}{2}} d\Omega \quad (4.83)$$

El segundo paso puede expresarse como:

$$M\Delta\hat{\Phi}^n = r.h.s\Big|^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.84)$$

Esta ecuación puede resolverse de la misma forma iterativa descrita en (4.62).

4.4.4. Términos difusivos y términos tipo fuente.

El algoritmo de Taylor Galerkin de dos pasos puede extenderse fácilmente al caso general de una EDP con términos de fuente (S) y términos difusivos (D):

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S + D \quad (4.85)$$

Donde el término difusivo D corresponde a:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \quad (4.86)$$

El **primer paso** del algoritmo de Taylor Galerkin para esta ecuación general viene dado por:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} \left(S - \frac{\partial F}{\partial x} \Big|^{n} \right) \quad (4.87)$$

Por otro lado, el **segundo paso** se expresa como:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left(S + D + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (4.88)$$

A continuación, se procede a la discretización de los términos adicionales (fuente y difusión). En este sentido, la contribución del término de fuentes viene dada por:

$$\int_{\Omega} N_i \bar{S}^{n+\frac{1}{2}} d\Omega \quad (4.89)$$

Este término puede aproximarse utilizando el valor del término de fuentes en el elemento.

Por su parte, el término difusivo se aproxima mediante su valor en el tiempo t_n :

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n d\Omega \quad (4.90)$$

La expresión anterior se integra por partes obteniéndose:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} N_i k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} d\Omega \quad (4.91)$$

La relación (4.91) puede escribirse como:

$$-K_{ij} \hat{\Phi}_j^n + f_{Di} \quad (4.92)$$

El algoritmo arriba descrito se aplica siempre y cuando la intensidad del término fuente no sea muy alta. Para el caso contrario es preciso aplicar algoritmos especiales de descomposición con el fin de determinar dicho término. Esta situación se da a menudo en el análisis de los deslizamientos rápidos de ladera, donde los términos fuente se deben a la pendiente del terreno y a la fricción basal. Para afrontar este problema se utiliza el algoritmo de Taylor-Galerkin, junto con el método de descomposición de Runge Kutta de 4º orden para determinar las fuentes (Quecedo & Pastor, 2002).

4.4.5. El método de Runge Kutta de 4º orden.

Este método consiste en discretizar el sistema de ecuaciones hiperbólicas mediante una técnica de descomposición de operadores tratando de forma separada al operador de transporte convectivo y al operador de fuentes. De este modo, se divide el problema en dos partes:

(i) un problema de convección pura de tipo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \\ \phi(x, t^n) &= \phi^n(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi^{\text{adv}} \quad (4.93)$$

(ii) un problema de fuentes representado por una ecuación en derivadas ordinarias:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= S(\phi, t) \\ \phi(x, t^n) &= \phi^{\text{adv}} \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

Esta descomposición puede expresarse de forma compacta como:

$$\phi^{n+1} = S(\Delta t) \text{Adv}(\Delta t) \phi^n \quad (4.95)$$

Donde $\text{Adv}(\Delta t)$ y $S(\Delta t)$ corresponde a los operadores de transporte convectivo y de las fuentes respectivamente.

De este modo, se llega a la solución:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{\text{adv}} + \Delta t G(\phi_i^s) \quad (4.96)$$

Los algoritmos de Runge-Kutta proporcionan una alta precisión en el cálculo de las EDO. Una descripción detallada de este método se puede encontrar en Hirsch (1988).

La forma general del algoritmo de Runge Kutta es:

$$\begin{aligned}
 \phi^1 &= \phi^n \\
 \phi^2 &= \phi^n + \Delta t \alpha_2 H(\phi^1) \\
 \phi^3 &= \phi^n + \Delta t \alpha_3 H(\phi^2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \phi^k &= \phi^n + \Delta t \alpha_k H(\phi^{k-1}) \\
 \phi^{n+1} &= \phi^n + \Delta t \sum_{k=1}^k \beta_k H(\phi^k)
 \end{aligned}
 \tag{4.97}$$

Con la condición de consistencia:

$$\sum_{k=1}^k \beta_k = 1
 \tag{4.98}$$

Los coeficientes del algoritmo de Runge Kutta de 4º orden son:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \frac{1}{2}; & \alpha_3 &= \frac{1}{2}; & \alpha_4 &= 1; \\
 \beta_1 &= \frac{1}{6}; & \beta_2 &= \beta_3 = \frac{1}{3}; & \beta_4 &= \frac{1}{6};
 \end{aligned}
 \tag{4.99}$$

Obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 \phi^1 &= \phi^n \\
 \phi^2 &= \phi^n + \frac{1}{2} \Delta t H(\phi^1) \\
 \phi^3 &= \phi^n + \frac{1}{2} \Delta t H(\phi^2) \\
 \phi^4 &= \phi^n + \frac{1}{2} \Delta t H(\phi^3) \\
 \phi^{n+1} &= \phi^n + \frac{\Delta t}{6} [H(\phi^1) + 2H(\phi^2) + 2H(\phi^3) + H(\phi^4)]
 \end{aligned}
 \tag{4.100}$$

El algoritmo RK de 4º orden ofrece una excelente combinación precisión- coste.

Bibliografía:

Donea, J. (1983) *A Taylor- Galerkin Method for Convective Transport Problems*, Int. J.Num. Meth. Engng. 20, pp 101-109.

Donea, J., Quartapelle, L., & Selmin, V. (1992) *An introduction to finite element methods for transient advection problems*, Comp.Meth.Appl.Mech.Engng. 95, pp. 169-203.

Hirsch, C., (1988) *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol II*, John Wiley and Sons.

Löhner, R., Morgan, K., & Zienkiewicz, O.C., (1984) *The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 4, pp 1043- 1063.

Quecedo, M., & Pastor, M., (2002) *A reappraisal of Taylor-Galerkin algorithm for drying-wetting areas in shallow water computations*, Int.J.Num.Meth.Fluids 38, pp. 515-531.

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L., (2000) *The Finite Element Method*, 5th Edition, Butterworth-Heinmann.

CAPÍTULO 5

MODELIZACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LOS DESLIZAMIENTOS RÁPIDOS MEDIANTE SPH

5.1. Introducción:

Los “métodos numéricos con malla” presentan, entre otros, dificultades para resolver problemas de superficie libre o de grandes deformaciones. En la mecánica de sólidos, el problema de las grandes deformaciones ha sido abordado en una inmensa mayoría de los casos mediante formulaciones lagrangianas, en las que aparecían problemas cuando los elementos se distorsionaban mucho al deformarse el material. Por otro lado, en la dinámica de fluidos se han empleado formulaciones eulerianas en una mayoría de casos. Sin embargo, para tratar problemas de superficie libre o de interfases entre

distintos fluidos, ha habido que recurrir a técnicas especiales, como por ejemplo las basadas en el Level Set.

En las últimas décadas ha aparecido un grupo de métodos numéricos de simulación, que por no tener la información asociada a una malla se les ha denominado de forma general como “métodos sin malla”. Se trata de una alternativa muy interesante en muchos casos, especialmente en los de superficie libre o interfases. Como ejemplos, hay que destacar el Método de los Elementos Difusos, propuestos por Nayroles, Touzot & Villon (1992), el método *Element Free Galerkin* de Belytschko, Lu & Gu (1994), los métodos de Partición de la Unidad (*Partition of Unity*) de Babuska & Melenk (1995), el método de los puntos finitos de Oñate & Iddlesohn (1998), y, finalmente, el denominado Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (*Smoothed particle Hydrodynamics* o SPH), al que se dedica este capítulo.

El método SPH se basa en la discretización en un conjunto de nodos de aproximaciones de tipo integral de una función y de sus derivadas. Este método fue introducido por Lucy (1977) y Gingold & Monaghan (1977), quienes lo aplicaron a problemas astrofísicos, dominio en el cual el SPH presenta una serie de ventajas sobre otros métodos de discretización. El método se ha descrito en los trabajos de Monaghan & Latanzio (1985), Benz (1990), Monaghan (1992) o en los textos más recientes de Liu & Liu (2003) o Li & Liu (2004).

Como ya se ha comentado, el SPH es un método particularmente adecuado para resolver problemas en Hidrodinámica, y es en esta área donde se encuentra el mayor número de aplicaciones, tales como las descritas por Gingold & Monaghan (1982), Monaghan & Gingold (1983), Takeda, et al. (1994), Monaghan (1994), Monaghan & Kocharyan (1995), Monaghan & Kos (1999), Monaghan, et al.(1999), Bonet & Kulasegaram (2000), y Monaghan, et al. (2003). Igualmente, Se ha aplicado en problemas de Mecánica de Sólidos, siendo de destacar los trabajos de Libersky &

Petschek (1990), Libersky, et al. (1993), Randles & Libersky (2000), Bonet & Kulasegaram (2000) y Gray, et al. (2001).

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de este método haciendo hincapié en su aplicación a la modelización de deslizamientos rápidos.

5.2. Aproximaciones Integrales de funciones y sus derivadas:

5.2.1. Aspectos generales

El método SPH se basa en dos etapas. En la primera, se aproxima una función dada $\phi(x)$ y sus derivadas mediante aproximaciones integrales caracterizadas por un núcleo (kernel). En una segunda etapa se introduce un conjunto de nodos o “partículas” que se emplean para construir aproximaciones numéricas basadas en una integración numérica en la que los puntos de integración son estos nodos o “partículas”, sin tener que recurrir a “mallas” o “elementos”. Estos nodos pueden moverse con el medio continuo (formulación lagrangiana), o pueden permanecer fijos (formulación euleriana). Asociar el concepto de nodo al de una partícula representativa del medio continuo presenta la ventaja de que el método sea más intuitivo y fácil de interpretar, pero hace perder perspectiva y generalidad.

Una descripción rigurosa del método y de los fundamentos de las aproximaciones y reglas empleadas, requiere el empleo de un complejo aparato matemático que parte del concepto de distribución o función generalizada. Sin embargo, en este trabajo se ha optado por renunciar a este rigor en aras de una mayor claridad de la exposición.

5.2.2. Aproximaciones integrales de funciones

Se considera una función escalar $\phi(x)$ de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, donde Ω es el dominio donde se ha definido la función y la igualdad

$$\phi(x) = \int_{\Omega} \phi(x') \delta(x' - x) dx' \quad (5.1)$$

siendo $\delta(x)$ la delta de Dirac que se define tradicionalmente como:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & |x| > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

con la propiedad de área unidad adicional:

$$\int_{\Omega} \delta(x) dx = 1 \quad (5.3)$$

Esta definición es suficiente para muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería, aunque no es completamente rigurosa. De hecho, la delta de Dirac es una función generalizada o distribución, que es una clase de funcionales lineales.

La delta de Dirac en teoría de distribuciones se define a partir de una sucesión de funciones o núcleos $W_k(x, h)$, como por ejemplo:

$$W_k(x, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left(-\frac{x^2}{h}\right) \quad \text{donde} \quad h = 1/k \quad (5.4)$$

Se puede demostrar que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} W_k(x'-x, h) \phi(x') dx' = \int_{\Omega} \phi(x') \delta(x'-x) dx' = \phi(x) \quad (5.5)$$

En estas ecuaciones se ha introducido un núcleo $W_k(x, h)$ que depende de una longitud h (o de un número entero k). En la Figura 5.1. se han representado una serie de núcleos para distintos valores de sus parámetros.

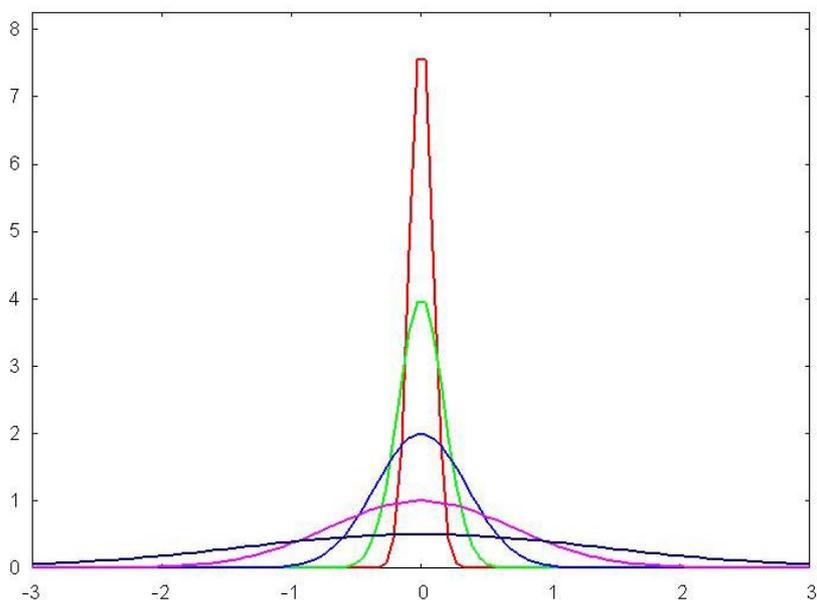


Figura 5.1. Núcleos (Kernels) para aproximar la delta de Dirac

Estas ecuaciones se denominan representaciones integrales de $\phi(x)$ con núcleo $W(x)$. Las mismas se pueden generalizar a 2 o 3 dimensiones siendo $\phi(x)$ una función escalar o vectorial de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{ndim}$ representando Ω un dominio abierto.

Con el fin de simplificar la notación de aquí en adelante se omite (x) cuando se trata de una distribución.

Estas ecuaciones representan el punto de partida para la construcción de aproximaciones SPH donde el valor de la función se aproxima mediante las distribuciones regulares.

A diferencia de la notación que se ha utilizado hasta el momento, la notación clásica utilizada en SPH suele escribirse como:

$$\langle \phi(x) \rangle = \int_{\Omega} \phi(x') W(x'-x, h) dx' \quad (5.6)$$

5.2.3. Núcleos. propiedades básicas y ejemplos:

La precisión de las aproximaciones SPH depende de las propiedades del Núcleo $W(x,h)$ utilizado. En este sentido, son de destacar los núcleos que corresponden a funciones con simetría radial, es decir, funciones que dependen solo de r :

$$r = |x' - x| \quad (5.7)$$

En los textos dedicados a SPH el núcleo a veces se expresa como funciones $W(x'-x, h)$ y otras como $W(\xi)$, donde ξ viene dada por:

$$\xi = \frac{|x' - x|}{h} = \frac{r}{h} \quad (5.8)$$

En este trabajo se ha optado por utilizar ambas notaciones.

Por otro lado, para que una función $W_k(x, h)$ puede utilizarse en las aproximaciones SPH como núcleos debe de cumplir las siguientes condiciones:

(i)

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x' - x, h) = \delta(x) \quad (5.9)$$

(ii)

$$\int_{\Omega} W(x' - x, h) dx' = 1 \quad (5.10)$$

Esta última condición se deduce de la primera y puede interpretarse como la habilidad de la aproximación para reproducir una constante, es decir, un polinomio de grado cero. Por ello, se habla de consistencia de orden cero.

(iii) El núcleo $W(x - x', h)$ es positivo y tiene un soporte compacto:

$$W(x' - x, h) = 0 \quad \text{si} \quad |x' - x| \geq kh \quad (5.11)$$

Donde k es un número entero positivo que a menudo se toma $k = 2$.

(iv) El núcleo $W(x' - x, h)$ es una función decreciente de forma monótona de ξ .

$$\xi = |x' - x| / h \quad (5.12)$$

(v) El núcleo $W(x' - x, h)$ es una función simétrica de $(x' - x)$ (5.13)

Se puede demostrar que bajo las condiciones arriba mencionadas la aproximación resultante es de segundo orden de precisión:

$$\langle \phi(x) \rangle = \phi(x) + O(h^2) \quad (5.14)$$

Los núcleos más destacados que se han propuesto dentro del marco de las formulaciones SPH son:

(a) El núcleo Gaussiano propuesto por Gingold & Monaghan (1977) definido como:

$$W(x' - x, h) = W(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{h^{\text{ndim}} \pi^{(\text{ndim}/2)}} \exp(-\xi^2) & \xi \leq 3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (5.15)$$

(b) El spline cúbico introducido por Monaghan (Monaghan & Gingold 1983; Monaghan & Lattanzio 1985):

$$W(x' - x, h) = W(\xi) = \frac{C}{h^{\text{ndim}}} \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^3\right) & \xi < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - \xi)^3 & 1 \leq \xi \leq 2 \\ 0 & 2 \leq \xi \end{cases} \quad (5.16)$$

donde C es una constante que depende de la dimensión del dominio del problema:

$$C = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{para ndim} = 1 \\ \frac{10}{7\pi} & 2 \\ \frac{1}{\pi} & 3 \end{cases} \quad (5.17)$$

Este factor se escoge de tal forma que el núcleo satisfaga las condiciones (5.9) y (5.11).

La figura 5.2. muestra ambos núcleos para el caso unidimensional.

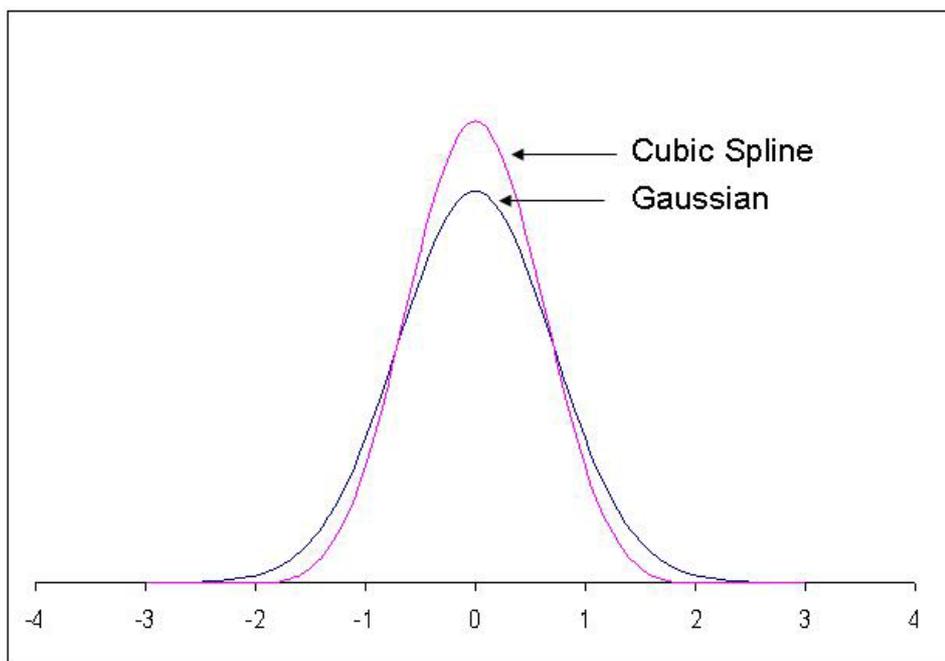


Figura 5.2. Núcleos en 1D: (a) Gaussiano (b) Spline cúbico

5.2.4. Aproximaciones integrales de las derivadas y de los operadores diferenciales:

En el método SPH la representación integral de las derivadas se escribe como:

$$\langle \phi'(x) \rangle = \int_{\Omega} \phi'(x') W(x'-x, h) dx' \quad (5.18)$$

La idea fundamental consiste en que a medida que h disminuye y el núcleo se aproxime a la “función” delta de Dirac la representación propuesta también se aproxima al valor de la derivada.

En problemas unidimensionales integrando por partes la expresión (5.18) y teniendo en cuenta que el núcleo posee un soporte compacto se llega a:

$$\langle \phi'(x) \rangle = - \int_{\Omega} \phi(x') W'(x'-x, h) dx' \quad (5.19)$$

Este resultado válido para aproximar las derivadas en problemas unidimensionales puede generalizarse a los casos bi- o tridimensionales.

A continuación, se proporcionan las aproximaciones integrales de algunos operadores utilizados en la mecánica de medios continuos:

- ***Gradiente de función escalar***

La aproximación integral del gradiente de una función escalar viene dada por:

$$\langle \text{grad } \phi(x) \rangle = - \int_{\Omega} \phi(x') \text{grad}(W(x'-x, h)) d\Omega \quad (5.20)$$

Cabe mencionar que en la expresión (5.20) las derivadas involucradas en el gradiente se obtienen con respecto a x' .

El gradiente del núcleo se calcula teniendo en cuenta que $W(\xi)$ depende de $\xi = r/h$:

$$\text{grad } W = \frac{1}{h} \frac{dW}{d\xi} \left(\frac{x'-x}{r} \right) = \frac{1}{h} W', \frac{x'-x}{r} \quad (5.21)$$

Siendo W' la derivada del núcleo con respecto a ξ . Además como ya se ha mencionado el gradiente se obtiene con respecto a x' .

De este modo, se obtiene:

$$\langle \nabla \phi(x) \rangle = - \int_{\Omega} \phi(x') \frac{1}{h} W' \frac{x' - x}{r} d\Omega \quad (5.22)$$

• Gradiente de un campo vectorial:

Por su parte, el gradiente de un campo vectorial $u_i(x)$ se expresa como:

$$\langle \text{grad } u(x) \rangle_{ij} = - \int_{\Omega} u_i(x') \frac{1}{h} W' \frac{x'_j - x_j}{r} d\Omega \quad (5.23)$$

O de forma más compacta:

$$\langle \text{grad } u(x) \rangle = - \int_{\Omega} \frac{1}{h} W' \frac{u(x') \otimes (x' - x)}{r} d\Omega \quad (5.24)$$

• Divergencia de una función vectorial

De forma similar se aproxima la divergencia de una función vectorial $u_i(x)$:

$$\begin{aligned} \langle \text{div } u(x) \rangle &= - \int_{\Omega} u(x') \text{grad } W d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{h} W' \frac{u(x') \cdot (x' - x)}{r} d\Omega \end{aligned} \quad (5.25)$$

• *Divergencia de un campo tensorial:*

Por último, la divergencia de un campo tensorial $\sigma(x)$ se aproxima mediante:

$$\begin{aligned} \langle \text{div } \sigma(x) \rangle &= - \int_{\Omega} \sigma \cdot \text{grad } W d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{h} W' \frac{\sigma \cdot (x' - x)}{r} d\Omega \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.2.5. Propiedades de las aproximaciones integrales:

Algunas propiedades de las aproximaciones integrales son fundamentales para obtener la aproximación integral de las leyes de balance (masa, momento, etc.). Las mismas pueden obtenerse fácilmente dentro del marco de la teoría de distribuciones.

(P1)

$$\langle \alpha \phi \rangle = \alpha \langle \phi \rangle \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.27)$$

(P2)

$$\langle \phi + \psi \rangle = \langle \phi \rangle + \langle \psi \rangle \quad (5.28)$$

(P3)

$$\langle \phi \psi \rangle = \langle \phi \rangle \cdot \langle \psi \rangle \quad (5.29)$$

(P4)

$$\left\langle \frac{d\phi(x,t)}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \phi \rangle \quad (5.30)$$

Hay que subrayar que las propiedades (5.29) y (5.30) sólo se cumplen en el límite $h \rightarrow 0$ o $k \rightarrow \infty$.

Además, la aproximación obtenida es de primer orden de precisión (Monaghan, 1982):

$$\langle \phi(x) \rangle = \phi(x) + O(h^2) \quad (5.31)$$

5.2.6. Aproximaciones integrales de las ecuaciones de balance de masa y momento lineal:

Las ecuaciones de balance de masa y del momento lineal, tanto en su forma lagrangiana como en su forma eulriana, se pueden discretizar haciendo uso de las propiedades de las aproximaciones integrales (5.27) a (5.30), así como de las aproximaciones de los operadores diferenciales arriba mencionadas.

Partiendo de la forma Lagrangiana de la ecuación de balance de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (5.32)$$

Se obtiene la forma integral de la misma:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right\rangle = 0 \quad (5.33)$$

Es decir:

$$\int_{\Omega} W \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right) = 0 \quad (5.34)$$

Utilizando las propiedades (5.27) a (5.30) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right\rangle &= \left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle + \langle \rho \operatorname{div} v \rangle \\ \left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle &= \frac{D}{Dt} \langle \rho \rangle \\ \langle \rho \operatorname{div} v \rangle &= \langle \rho \rangle \langle \operatorname{div} v \rangle \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por lo tanto, la aproximación integral de la ecuación de balance de masa resulta:

$$\frac{D}{Dt} \langle \rho \rangle + \langle \rho \rangle \langle \operatorname{div} v \rangle = 0 \quad (5.36)$$

Por otro lado, la ecuación de balance del momento lineal en su forma lagrangiana viene dada por:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho b + \operatorname{div} \sigma \quad (5.37)$$

Esta forma es más frecuente en la mecánica de sólidos, mientras que en la dinámica de fluidos el tensor de las tensiones se descompone en su componente hidrostática y desviadora de modo que:

$$\sigma = -pI + s \quad (5.38)$$

Donde:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (5.39)$$

En este caso, la ecuación de balance se escribe como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho b + \text{div } s - \text{grad } p \quad (5.40)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las aproximaciones integrales se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{Dv}{Dt} \right\rangle &= \langle \rho \rangle \left\langle \frac{Dv}{Dt} \right\rangle = \langle \rho \rangle \frac{D}{Dt} \langle v \rangle \\ \langle -\text{grad } p + \text{div } s + \rho b \rangle &= -\langle \text{grad } p \rangle + \langle \text{div } s \rangle + \langle \rho \rangle \cdot \langle b \rangle \end{aligned} \quad (5.41)$$

Por lo tanto, la aproximación integral de la ecuación de balance del momento lineal puede expresarse como:

$$\langle \rho \rangle \frac{D}{Dt} \langle v \rangle = -\langle \text{grad } p \rangle + \langle \text{div } s \rangle + \langle \rho \rangle \cdot \langle b \rangle \quad (5.42)$$

5.3. Discretización de las aproximaciones integrales de las funciones y sus derivadas:

5.3.1. Aproximación discretizada de las funciones.

Las aproximaciones de las funciones y sus derivadas presentadas en la sección anterior son válidas a nivel del continuo. Sin embargo, cuando la información está almacenada en forma discretizada (una serie de puntos o nodos por ejemplo) es necesario construir aproximaciones discretizadas. Por ello, el método SPH introduce el concepto de “partículas”, donde se localiza la información referida a las variables de campo y sus derivadas. En efecto, éstas son equivalentes a los denominados “nodos” de los métodos de elementos finitos y diferencias finitas y todas las operaciones se llevan a cabo en dichos nodos.

Por lo tanto, se considera un grupo de “partículas” o “nodos” $\{x_K\}$ con $K = 1..N$ que representan la base de la aproximación. Como es de esperar, el nivel de precisión de dicha aproximación depende de la localización y espaciado de los nodos. Como consecuencia, es aplicable en el método SPH la estrategia clásica, propia de los elementos finitos consistente en tener una mayor concentración de nodos en las zonas donde se espera un gran gradiente.

La figura 5.3. muestra una malla de nodos SPH que se va utilizar para modelizar un deslizamiento rápido. En dicha figura se pueden observar dos mallas distintas; una es la malla que describe la topografía, mientras que la otra es una malla de nodos SPH. Esta última se compone de nodos agrupados en diferentes sitios que corresponden a las áreas fuente de las avalanchas.



Figura 5.3. Malla SPH para modelizar un lahar en Italia

Como ya se ha mencionado con anterioridad, la aproximación integral o continua de una función viene dada por la expresión (5.43):

$$\langle \phi(x) \rangle = \int_{\Omega} \phi(x') W(x'-x, h) dx' \quad (5.43)$$

Puesto que la información relacionada con la función sólo esta disponible en un número N de nodos, la integral puede evaluarse utilizando técnicas de integración numérica:

$$\langle \phi(x_I) \rangle_h = \sum_{J=1}^N \phi(x_J) W(x_J - x_I, h) \omega_J \quad (5.44)$$

Donde el sub-índice "h" representa la aproximación discreta y ω_J los pesos de la formula de integración.

Con el fin de simplificar la notación se introduce ϕ_I definida como:

$$\phi_I = \langle \phi(x_I) \rangle_h = \sum_{J=1}^N \phi(x_J) W(x_J - x_I, h) \omega_J \quad (5.45)$$

Ya que la función núcleo tiene un soporte local, es decir, que la función vale cero cuando $|x_J - x_I| > 2h$, la suma sólo se extiende a un número Nh de puntos que cumplen dicha condición. Por lo tanto:

$$\phi_I = \langle \phi(x_I) \rangle_h = \sum_{J=1}^{Nh} \phi(x_J) W(x_J - x_I, h) \omega_J \quad (5.46)$$

La figura 5.4. muestra el procedimiento de la integración numérica utilizada.

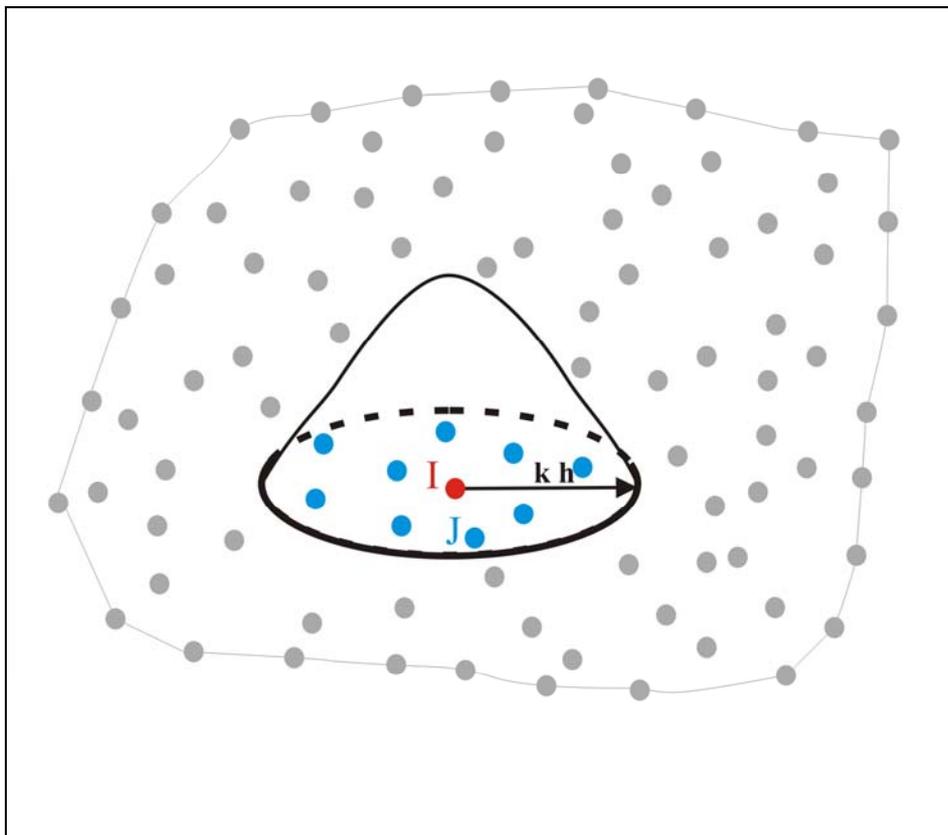


Figura 5.4. Nodos e integración numérica en la malla SPH

En este contexto cabe mencionar que $\phi(x_j)$ es distinta de ϕ_j . Por otro lado, el valor del núcleo $W(x_j - x_I, h)$ suele expresarse como W_{IJ} , refiriéndose esta notación al valor del núcleo centrado en el nodo I en la posición J. No obstante, los núcleos utilizados en SPH son simétricos (ver propiedad (5.13)), es decir, dependen de $\xi = \frac{|x' - x|}{h}$.

Como resultado, se obtiene:

$$W_{IJ} = W(x_j - x_I, h) = W(x_I - x_j, h) = W_{JI} \quad (5.47)$$

y

$$\phi_I = \sum_{J=1}^{N_h} \phi(x_J) W_{IJ} \omega_J \quad (5.48)$$

Además, el núcleo puede expresarse como $W_{IJ} = W(\xi_{IJ})$. Donde:

$$\xi_{IJ} = \frac{|x_I - x_J|}{h} \quad (5.49)$$

Cabe subrayar que cuando se utiliza la notación compacta W_{IJ} no se incluye h de forma explícita. Asimismo, cuando h depende del nodo, W_{IJ} corresponde al valor del núcleo centrado en el nodo I ya que éste representa el origen de la aproximación a la distribución delta de Dirac centrada en x_I . De este modo, el núcleo discretizado pierde su simetría. Con el fin de solucionar este problema se suele definir para cada par de nodos I, J un "h" promediado:

$$\xi_{IJ} = \frac{|x_I - x_J|}{h_{IJ}} \quad \text{donde} \quad h_{IJ} = \frac{1}{2}(h_I + h_J) \quad (5.50)$$

A continuación, se simplifica la notación suprimiendo los subíndices de h .

En el método de los elementos finitos se suelen utilizar las reglas de integración de Gauss. En las mismas la posición y los pesos de los puntos de integración se determinan con el objeto de obtener el máximo grado de precisión. Por ejemplo, el grado de precisión de la regla de integración de Gauss en una dimensión con n puntos de integración es del orden de $m = 2n-1$, tanto las posiciones como los puntos son libres. Mientras que cuando las posiciones de los puntos están fijadas (por ejemplo, cuando los puntos de integración están equidistantes) el grado de precisión es $n-1$.

La situación es bastante distinta en SPH, puesto que los nodos circundantes al nodo donde se evalúa la integral pueden tener cualquier posición. Por lo tanto, no existe una regla general de integración que abarca la infinidad de casos posibles.

Si se considera la aproximación de una constante mediante la regla de integración (5.44) se obtiene:

$$\langle 1 \rangle_h = \sum_{J=1}^{N_h} 1 \cdot W_{IJ} \omega_J \quad (5.51)$$

Al comparar este resultado con la condición de unidad de W , el peso correspondiente a la partícula J tiene que ser el volumen, el área o la longitud Ω_J asociada con él. Este concepto de “volumen” asociado al nodo es de suma importancia, ya que permite formulaciones más generales que las que están basadas en la “masa” de las partículas de SPH. Como resultado, la aproximación se expresa como:

$$\phi_I = \sum_{J=1}^{N_h} \phi(x_J) W_{IJ} \Omega_J \quad (5.52)$$

En el contexto de la mecánica de medios continuos (sólidos y fluidos) es conveniente introducir la densidad ρ_J asociada al nodo J como:

$$\rho_J = m_J / \Omega_J \quad (5.53)$$

Donde m_j es la masa asociada al nodo j o la masa del volumen asociado al nodo considerado.

De este modo, La ecuación (5.50) queda como:

$$\phi_I = \sum_{J=1}^{Nh} \phi(x_J) W_{IJ} \frac{m_J}{\rho_J} \quad (5.54)$$

Siendo esta expresión la forma más utilizada en SPH.

Cuando la función ϕ representa la densidad la expresión (5.54) se escribe como:

$$\rho_I = \sum_{J=1}^{Nh} \rho_J W_{IJ} \frac{m_J}{\rho_J} \quad (5.55)$$

$$\rho_I = \sum_{J=1}^n W_{IJ} m_J$$

5.3.2. Aproximación discretizada de las derivadas y los operadores diferenciales.

Las formas discretizadas de las aproximaciones integrales de SPH se obtienen a partir de las expresiones establecidas en la sección 2.4.

Utilizando la siguiente notación:

$$\begin{aligned} x_{IJ} &= x_I - x_J \\ r_{IJ} &= |x_I - x_J| \\ W_{IJ} &= \frac{W}{h} \frac{x_{IJ}}{r_{IJ}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi_I &= \langle \text{grad } \phi(x_I) \rangle_h \\ \text{div } u_I &= \langle \text{div } u(x_I) \rangle_h \\ \text{grad } v_I &= \langle \text{grad } v(x_I) \rangle_h \\ \text{div } \sigma_I &= \langle \text{div } \sigma(x_I) \rangle_h \end{aligned} \quad (5.57)$$

Las formas discretizadas resultantes son:

- *Gradiente de una función escalar*

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi_I &= \sum_{J=1}^{Nh} \phi(x_J) \nabla W_{IJ} \Omega_J \\ \text{o} \\ \text{grad } \phi_I &= \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} \phi(x_J) \nabla W_{IJ} \end{aligned} \quad (5.58)$$

En la práctica se utiliza la siguiente aproximación:

$$\phi_J \approx \phi(x_J) \quad (5.59)$$

Obteniéndose:

$$\text{grad } \phi_I = \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} \phi_J \nabla W_{IJ} \quad (5.60)$$

Además de las expresiones (5.9) a (5.13) existen otras alternativas que suelen utilizarse en la práctica, ya que mejoran la precisión del cálculo por la simetría que ofrecen. Dentro de estas formas alternativas, denominadas “formas simetrizadas”, destacan las tres siguientes:

$$\text{grad } \phi_I = \frac{1}{\rho_I} \sum_J m_J (\phi_J - \phi_I) \text{grad } W_{IJ} \quad (5.61)$$

$$\text{grad } \phi_I = \rho_I \sum_J m_J \left\{ \frac{\phi_J}{\rho_J^2} + \frac{\phi_I}{\rho_I^2} \right\} \text{grad } W_{IJ} \quad (5.62)$$

$$\text{grad } \phi_I = \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} (\phi_I + \phi_J) \text{grad } W_{IJ} \quad (5.63)$$

A veces se opta por utilizar la siguiente variante de la tercera forma simetrizada (5.63):

$$\text{grad } \phi_I = \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} (\phi_I + \phi_J) \text{grad } W_{IJ} \quad (5.64)$$

• *Gradiente de un campo vectorial*

La forma discretizada en SPH es:

$$\text{grad } v_I = \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} v_J \otimes \text{grad } W_{IJ} \quad (5.65)$$

Y sus formas simetrizadas son:

$$\text{grad } v_I = \frac{1}{\rho_I} \sum_J m_J (v_J - v_I) \otimes \text{grad } W_{IJ} \quad (5.66)$$

$$\text{grad } v_I = \rho_I \sum_J m_J \left\{ \frac{v_J}{\rho_J^2} + \frac{v_I}{\rho_I^2} \right\} \otimes \text{grad } W_{IJ} \quad (5.67)$$

$$\text{grad } v_I = \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} (v_J - v_I) \otimes \text{grad } W_{IJ} \quad (5.68)$$

• *Divergencia de una función vectorial*

La forma discretizada en SPH de la divergencia de una función vectorial es:

$$\text{div } v_I = \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} u_J \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.69)$$

Con las formas simetrizadas dadas por:

$$\text{div } v_I = -\frac{1}{\rho_I} \sum_J v_{IJ} \text{grad } W_{IJ} m_J \quad (5.70)$$

Donde se ha introducido:

$$v_{IJ} = v_I - v_J \quad (5.71)$$

$$\text{div } v_I = \rho_I \sum_J m_J \left(\frac{v_J}{\rho_J^2} + \frac{v_I}{\rho_I^2} \right) \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.72)$$

$$\text{div } v_I = - \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} v_{IJ} \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.73)$$

• *Divergencia de un campo tensorial*

La forma discretizada básica en SPH de la divergencia de un campo tensorial es:

$$\text{div } \sigma_I = - \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} \sigma_J \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.74)$$

Con las formas simetrizadas:

$$\text{div } \sigma_I = - \sum_J \sigma_{IJ} \text{grad } W_{IJ} m_J \quad (5.75)$$

$$\text{div } \sigma_I = - \rho_I \sum_J m_J \left(\frac{\sigma_J}{\rho_J^2} + \frac{\sigma_I}{\rho_I^2} \right) \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.76)$$

$$\text{div } \sigma_I = - \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} \sigma_{IJ} \cdot \text{grad } W_{IJ} \quad (5.77)$$

O su variante

$$\operatorname{div} \sigma_I = - \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} (\sigma_I + \sigma_J) \cdot \operatorname{grad} W_{IJ} \quad (5.78)$$

5.3.3. Algunas propiedades de las aproximaciones SPH

A continuación, se presentan algunas propiedades de las aproximaciones SPH que pueden obtenerse a partir de las propiedades de las aproximaciones integrales. Dichas propiedades como se verá más adelante son de suma importancia para obtener las aproximaciones discretizadas de SPH.

La versión discretizada de las propiedades (5.27) a (5.30) viene dada por:

(P1)

$$\langle \alpha \phi \rangle_h = \alpha \langle \phi \rangle_h \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.79)$$

(P2)

$$\langle \phi + \psi \rangle_h = \langle \phi \rangle_h + \langle \psi \rangle_h \quad (5.80)$$

(P3)

$$\langle \phi \psi \rangle_h = \langle \phi \rangle_h \cdot \langle \psi \rangle_h \quad (5.81)$$

(P4)

$$\left\langle \frac{d\phi(x,t)}{dt} \right\rangle_h = \frac{d}{dt} \langle \phi \rangle_h \quad (5.82)$$

Asimismo, las propiedades P3 y P4 sólo se cumplen en el límite $h \rightarrow 0$ o $k \rightarrow \infty$.

5.3.4. Discretización SPH de las leyes de balance (masa y momento lineal)

- *Balance de masa*

La forma Lagrangiana de la ecuación de balance de masa es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (5.83)$$

Con su forma integral:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right\rangle = 0 \quad (5.84)$$

Es decir:

$$\int_{\Omega} W \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right) = 0 \quad (5.85)$$

Utilizando las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} v \right\rangle &= \left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle + \langle \rho \operatorname{div} v \rangle \\ \left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle &= \frac{D}{Dt} \langle \rho \rangle \\ \langle \rho \operatorname{div} v \rangle &= \langle \rho \rangle \langle \operatorname{div} v \rangle \end{aligned} \tag{5.86}$$

La aproximación integral de la ecuación de balance de masa resulta:

$$\frac{D}{Dt} \langle \rho \rangle + \langle \rho \rangle \langle \operatorname{div} v \rangle = 0 \tag{5.87}$$

Puesto que existen varias alternativas para discretizar $\langle \operatorname{div} v \rangle$, se obtienen las siguientes formas discretizadas de la ecuación de balance de masa:

○ **Forma básica**

$$\frac{D\rho_I}{Dt} = -\rho_I \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} v_J \operatorname{grad} W_{IJ} \tag{5.88}$$

○ **Primera forma simetrizada**

$$\frac{D\rho_I}{Dt} = \sum_J m_J v_{IJ} \operatorname{grad} W_{IJ} \tag{5.89}$$

○ **Segunda forma simetrizada**

$$\frac{D\rho_I}{Dt} = -\rho_I^2 \sum_J m_J \left(\frac{v_I}{\rho_I^2} + \frac{v_J}{\rho_J^2} \right) \operatorname{grad} W_{IJ} \tag{5.90}$$

○ *Tercera forma simetrizada*

$$\frac{D\rho_I}{Dt} = \rho_I \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} v_{IJ} \text{grad } W_{IJ} \quad (5.91)$$

• *Balance del momento lineal*

La ecuación de balance del momento lineal viene dada por:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho b + \text{div } \sigma \quad (5.92)$$

También podría expresarse como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho b + \text{div } s - \text{grad } p \quad (5.93)$$

La aproximación integral de la ecuación (5.93) es:

$$\left\langle \rho \right\rangle \frac{D}{Dt} \langle v \rangle = -\langle \text{grad } p \rangle + \langle \text{div } s \rangle + \langle \rho \rangle \cdot \langle b \rangle \quad (5.94)$$

Donde se han utilizado las propiedades de las aproximaciones integrales:

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{Dv}{Dt} \right\rangle &= \langle \rho \rangle \left\langle \frac{Dv}{Dt} \right\rangle = \langle \rho \rangle \frac{D}{Dt} \langle v \rangle \\ \langle -\text{grad } p + \text{div } s + \rho b \rangle &= -\langle \text{grad } p \rangle + \langle \text{div } s \rangle + \langle \rho \rangle \cdot \langle b \rangle \end{aligned} \quad (5.95)$$

Los operadores gradiente y divergencia pueden discretizarse de varias formas. Por motivos de consistencia, se utiliza la misma forma de discretización para ambos operadores obteniéndose:

○ *Forma básica*

$$\rho_I \frac{Dv_I}{Dt} = -\sum_J \frac{m_J}{\rho_J} p_J \text{grad } W_{IJ} + \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} s_J \text{grad } W_{IJ} + b_I \quad (5.96)$$

○ *Primera forma simetrizada*

$$\frac{Dv_I}{Dt} = -\frac{1}{\rho_I} \sum_J m_J (p_J - p_I) \text{grad } W_{IJ} + \frac{1}{\rho_I} \sum_J m_J (s_J - s_I) \text{grad } W_{IJ} + b_I \quad (5.97)$$

○ *Segunda forma simetrizada*

$$\frac{Dv_I}{Dt} = -\sum_J m_J \left(\frac{p_I}{\rho_I^2} + \frac{p_J}{\rho_J^2} \right) \text{grad } W_{IJ} + \sum_J m_J \left(\frac{s_I}{\rho_I^2} + \frac{s_J}{\rho_J^2} \right) \text{grad } W_{IJ} + b_I \quad (5.98)$$

○ *Tercera forma simetrizada*

$$\frac{Dv_I}{Dt} = -\sum_J m_J \left(\frac{p_I + p_J}{\rho_I \rho_J} \right) \text{grad } W_{IJ} + \sum_J m_J \left(\frac{s_I + s_J}{\rho_I \rho_J} \right) \text{grad } W_{IJ} + b_I \quad (5.99)$$

5.3.5. Leyes reológicas

Las leyes de balance (el balance de masa y el balance de momento lineal) discretizadas incluyen las siguientes variables: (i) la densidad ρ , (ii) la velocidad v , y (iii) la tensión o presión y tensión desviadora. Como ya se ha mencionado en los capítulos anteriores el sistema tiene que completarse con ecuaciones adicionales que relacionan el tensor de tensiones con la densidad y la velocidad. Se trata de las ecuaciones constitutivas o leyes reológicas que describen el comportamiento del medio continuo (sólido o fluido).

En el caso de los fluidos, suponiendo que el medio es isótropo, la relación general entre el tensor de tensiones de Cauchy y el tensor velocidad de deformación se expresa como (Malvern, 1969):

$$\sigma = -\bar{p}I + \Phi_0I + \Phi_1d + \Phi_2d^2 \quad (5.100)$$

Donde \bar{p} es la presión termodinámica, d es el tensor velocidad de deformación y Φ_k $k = 0..2$ son funciones escalares de los tres invariantes de d :

$$I_{1D} = \text{tr}(d) \quad I_{2D} = \frac{1}{2} \text{tr}(d^2) \quad I_{3D} = \frac{1}{3} \text{tr}(d^3) \quad (5.101)$$

La expresión anterior es una aplicación directa del teorema de representación de funciones escalares e isótropas de tensores de segundo orden.

La ley reológica no incluye ninguna función escalar o tensorial, que describa describiendo la estructura del fluido, ni tampoco la deformación en un momento dado o la memoria tensorial del material. Además, la tensión se obtiene sin tener en cuenta los cambios, es decir, no es necesario utilizar ni una velocidad de deformación objetiva

ni medidas de tensión, lo cual diferencia las leyes reológicas de las ecuaciones constitutivas de los sólidos.

La presión total obtenida a partir de (3.4.2) es:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr } \sigma \quad (5.102)$$

De este modo, se obtiene:

$$p = \bar{p} - \Phi_0 - \frac{1}{3} \Phi_1 \text{tr}(d) - \frac{1}{3} \Phi_2 \text{tr}(d^2) \quad (5.103)$$

Como se puede observar la velocidad de deformación juega un papel primordial a la hora de discretizar la ecuación (5.100):

$$\begin{aligned} \sigma_I &= -\bar{p}_I I + \Phi_0 I + \Phi_1 d_I + \Phi_2 d_I^2 \\ p_I &= \bar{p}_I - \Phi_0 - \frac{1}{3} \Phi_1 \text{tr}(d_I) - \frac{1}{3} \Phi_2 \text{tr}(d_I^2) \end{aligned} \quad (5.104)$$

Las ecuaciones anteriores se aplican con el objeto de utilizar los valores nodales de la tensión y de la presión en las ecuaciones de balance.

Puesto que, el tensor velocidad de deformación viene dado por:

$$d = \text{grad}_{sym} v \quad (5.105)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.106)$$

Y utilizando las expresiones de las formas básica y simetrizadas se llega a:

• **Forma Básica**

$$d_I = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{Nh} \frac{m_J}{\rho_J} (v_J \otimes \text{grad } W_{IJ} + \text{grad } W_{IJ} \otimes v_J) \quad (5.107)$$

• **Formas simetrizadas**

$$d_I = -\frac{1}{2\rho_I} \sum_J m_J (v_{IJ} \otimes \text{grad } W_{IJ} + \text{grad } W_{IJ} \otimes v_{IJ}) \quad (5.108)$$

$$d_I = \frac{\rho_I}{2} \sum_J m_J \left\{ \left(\frac{v_J}{\rho_J^2} + \frac{v_I}{\rho_I^2} \right) \otimes \text{grad } W_{IJ} + \text{grad } W_{IJ} \otimes \left(\frac{v_J}{\rho_J^2} + \frac{v_I}{\rho_I^2} \right) \right\} \quad (5.109)$$

$$d_I = -\frac{1}{2} \sum_J \frac{m_J}{\rho_J} (v_{IJ} \otimes \text{grad } W_{IJ} + \text{grad } W_{IJ} \otimes v_{IJ}) \quad (5.110)$$

5.4. Discretización SPH de las ecuaciones integradas en profundidad:

5.4.1. Introducción. Ecuaciones integradas en profundidad para deslizamientos rápidos.

En general, un deslizamiento rápido presenta una profundidad media mucho más pequeña que la longitud. Esta consideración geométrica permite integrar las ecuaciones de los modelos 3D a lo largo del eje vertical y , como consecuencia, simplificar dichos modelos transformándolos en los llamados modelos integrados en profundidad. El modelo bidimensional resultante muestra una excelente combinación “precisión-sencillez”, siendo capaz de predecir las características más relevantes del flujo: la velocidad de propagación, el tiempo de llegada a un sitio determinado, la altura del flujo a lo largo del recorrido, etc. No obstante, la mayoría de los modelos integrados en profundidad disponibles no toman en cuenta la presión de poros en el fondo a pesar del papel primordial que esta desempeña.

En esta sección se presenta el procedimiento seguido para la discretización, mediante el método SPH del modelo integrado en profundidad, que tiene en cuenta la disipación de la presión de poros durante la fase de propagación.

Las ecuaciones integradas en profundidad expresadas en formalización euleriana son:

(a1) Balance de masa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j h) = e_R \quad (5.111)$$

(b1) Balance del momento lineal

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + (1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{v}_i\bar{v}_j) = b_i h + \frac{\partial}{\partial x_j}(h\bar{\sigma}_{ij}) + |N^A|t_i^A + |N^B|t_i^B \quad (5.112)$$

Introduciendo la descomposición:

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \sigma_{ij}^* \quad (5.113)$$

Con:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 h \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{p}\delta_{ij} \quad (5.114)$$

La ecuación (5.112) se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h\bar{v}_i\bar{v}_j - \frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \delta_{ij} \right) = \\ \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{v}_i\bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{\sigma}_{ij}^*) + b_i h + |N^A|t_i^A + |N^B|t_i^B \end{aligned} \quad (5.115)$$

(c1) Por su parte, la consolidación vertical viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_1 h) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j P_1 h) + \frac{\pi}{2} C.T. = -\frac{\pi^2}{4h} c_v P_1 \quad (5.116)$$

La formulación euleriana de la ecuaciones integradas en profundidad suele expresarse de forma más compacta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = D + S \quad (5.117)$$

En la ecuación (5.117) se han considerado:

(i) Vector de incógnitas ϕ

(ii) Flujos F_1 y F_2 según los ejes x_1 y x_2

(iii) Términos difusivos D

(iv) Términos fuente S

siendo:

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ h\bar{v}_1 \\ h\bar{v}_2 \\ hP_1 \end{pmatrix} \quad F_1 = \begin{pmatrix} h\bar{v}_1 \\ h\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\rho b_3 h^2 \\ h\bar{v}_1\bar{v}_2 \\ h\bar{v}_1 P_1 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} h\bar{v}_2 \\ h\bar{v}_1\bar{v}_2 \\ h\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\rho b_3 h^2 \\ h\bar{v}_1 P_1 \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{\sigma}_{1j}^*) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{\sigma}_{2j}^*) \\ 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} e_R \\ b_1 h + |N^A| t_1^A + |N^B| t_1^B \\ b_2 h + |N^A| t_2^A + |N^B| t_2^B \\ -\frac{\pi^2}{4h} c_v P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{v}_1\bar{v}_j) \\ -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{v}_2\bar{v}_j) \\ -\frac{\pi}{2} C.T. \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

Por otra parte, la formulación cuasi-lagrangiana del modelo integrado en profundidad viene dada por:

(a2) Balance de masa

$$\frac{d\bar{h}}{dt} + h \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.120)$$

(b2) Balance del momento lineal

$$h \frac{d}{dt} \bar{v}_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \right) = -e_R \bar{v}_i - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_i \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{\sigma}_{ij}^*) + b_i h + |N^A| t_i^A + |N^B| t_i^B \quad (5.121)$$

(b3) Consolidación vertical

$$\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{h} P_1 e_R + \frac{\pi}{2h} C.T. = \frac{\pi^2}{4h^2} c_v P_1 \quad (5.122)$$

En los modelos SPH se pueden utilizar, tanto las aproximaciones euleriana como la cuasi- lagrangiana. Sin embargo, esta última presenta claras ventajas sobre la primera.

5.4.2. Discretización SPH

Se consideran un número de nodos $\{x_k\}$ con $K = 1..N$ y las variables nodales.

h_I altura del deslizamiento en el nodo I.

\bar{v}_I la velocidad 2D integrada en profundidad.

t_I^b el vector fuerza de superficie en el fondo.

$\bar{\sigma}_I^*$ el tensor tensiones integrado en profundidad modificado.

P_{1I} presión de poros en la superficie basal.

Por otra parte, se denomina Ω_I al área 2D asociada con el nodo I, y considerándose además:

(i) una masa ficticia m_I moviéndose con el nodo:

$$m_I = \Omega_I h_I \quad (5.123)$$

(ii) y el término de presión integrado en profundidad \bar{p}_I dado por:

$$\bar{p}_I = \frac{1}{2} \rho b_3 h_I^2 \quad (5.124)$$

Hay que subrayar que m_I no tiene ningún sentido físico y, mientras el nodo I se mueve, el material que se encuentra en la columna con base Ω_I habrá entrado o salido de ella, ya que la columna se mueve con una velocidad promediada que no es igual para todas las partículas.

La aproximación SPH de la ecuación de balance de masa (5.120) se obtiene de la siguiente manera:

$$\left\langle \frac{d\bar{h}}{dt} + h \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} \right\rangle = 0 \quad (5.125)$$

Como resultado, se obtiene:

$$\frac{d\bar{h}}{dt} \langle h \rangle + \langle h \rangle \left\langle \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} \right\rangle = 0 \quad j = 1, 2 \quad (5.126)$$

la ecuación (5.126) se puede expresar para un nodo determinado I de la siguiente manera:

$$\frac{d\bar{h}}{dt} h_I + h_I \left\langle \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} \right\rangle_I = 0 \quad j = 1, 2 \quad (5.127)$$

donde el término de divergencia viene dado por:

$$\operatorname{div} v_I = -\sum_J \Omega_J v_J \operatorname{grad} W_{IJ} \quad (5.128)$$

o bien:

$$\operatorname{div} v_I = -\sum_J \frac{m_J}{h_J} v_J \operatorname{grad} W_{IJ} \quad (5.129)$$

Evidentemente, se puede utilizar cualquiera de las formas simetrizadas arriba mencionadas.

De este modo, se obtiene la ecuación de balance de masa discretizada mediante SPH:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}h_I}{dt} &= -h_I \sum_J \frac{m_J}{h_J} v_J \operatorname{grad} W_{IJ} && \text{(Forma Básica)} \\ \frac{\bar{d}h_I}{dt} &= \sum_J m_J v_{IJ} \operatorname{grad} W_{IJ} && \text{(Primera forma)} \\ \frac{\bar{d}h_I}{dt} &= h_I \sum_J \frac{m_J}{h_J} v_{IJ} \operatorname{grad} W_{IJ} && \text{(Segunda forma)} \end{aligned} \quad (5.130)$$

donde:

$$v_{IJ} = v_I - v_J \quad (5.131)$$

una vez conocida la posición de los nodos, la altura h_I puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_I &= \langle h(x_I) \rangle \\ &= \sum_J h_J \Omega_J W_{IJ} \\ &= \sum_J m_J W_{IJ} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Con el fin de mejorar la aproximación en el contorno se procede a normalizar la altura h_I :

$$h_I = \frac{\sum_J m_J W_{IJ}}{\sum_J \left(\frac{m_J}{h_J} \right) W_{IJ}} \quad (5.133)$$

Por otro lado, la forma simplificada de la ecuación de balance del momento lineal (5.112) se expresa como:

$$h \frac{\bar{d}}{dt} \bar{v} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \right) + \text{div} (h \bar{\sigma}_{ij}^*) + bh + |N^B| t^B \quad (5.134)$$

O bien se obtiene introduciendo la presión integrada en profundidad:

$$h \frac{\bar{d}}{dt} \bar{v} = \text{grad} p + \text{div} (h \bar{\sigma}_{ij}^*) + bh + |N^B| t^B \quad (5.135)$$

en las ecuaciones anteriores (5.134) y (5.135), se han ignorado los términos correspondientes a las fuerzas de superficie, la erosión, y el factor de corrección α .

El término de la izquierda corresponde a:

$$h_I \frac{\bar{d}}{dt} \bar{v}_I \quad (5.136)$$

Dependiendo de la forma simetrizada escogida, para discretizar el gradiente de la presión y la divergencia del tensor de tensiones, se obtienen las siguientes formas discretizadas de la ecuación de balance del momento:

$$\frac{\bar{d}}{dt} \bar{v}_I = - \sum_J m_J \frac{p_I + p_J}{h_I h_J} \text{grad} W_{IJ} + \sum_J m_J \frac{\sigma_I + \sigma_J}{h_I h_J} \text{grad} W_{IJ} + b + \frac{1}{h_I} \left| N^B \right|_{t_I^B} \quad (5.137)$$

$$\frac{\bar{d}}{dt} \bar{v}_I = - \sum_J m_J \left(\frac{p_I}{h_I^2} + \frac{p_J}{h_J^2} \right) \text{grad} W_{IJ} + \sum_J m_J \left(\frac{\sigma_I}{h_I^2} + \frac{\sigma_J}{h_J^2} \right) \text{grad} W_{IJ} + b + \frac{1}{h_I} \left| N^B \right|_{t_I^B} \quad (5.138)$$

Por último, la forma discretizada de la disipación de la presión de poros en el fondo se expresa como:

$$\frac{\bar{d}}{dt} P_{1I} = - \frac{\pi^2 c_v}{4h_I} P_{1I} \quad (5.139)$$

Las ecuaciones resultantes de la discretización del balance de masa (5.130), el balance del momento (5.137) y (5.138) y la disipación de presión de poros (5.139) son EDO, que pueden integrarse en el tiempo utilizando el esquema Leap Frog o Runge Kutta (2do o 4do orden). En este sentido, el esquema de Runge Kutta de Segundo orden proporciona un equilibrio razonable entre el esfuerzo computacional y la precisión de los resultados obtenidos.

Suponiendo que se conocen las variables nodales en la etapa “n” los valores de las variables en un primer paso de tiempo vienen dados por:

$$\begin{aligned} h_I^{n+1/2} &= h_I^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} h_I \Big|_n \\ v_I^{n+1/2} &= v_I^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} v_I \Big|_n \\ P_{1I}^{n+1/2} &= P_{1I}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} P_{1I} \Big|_n \end{aligned} \quad (5.140)$$

Una vez las variables están dadas para el tiempo $n + \frac{1}{2}$ se obtiene el valor de las derivadas para esta etapa y se evalúa la siguiente etapa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_i^{n+1} &= h_i^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} h_i \Big|^{n+1/2} \\
 v_i^{n+1} &= v_i^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} v_i \Big|^{n+1/2} \\
 P_{1I}^{n+1} &= P_{1I}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\bar{d}}{dt} P_{1I} \Big|^{n+1/2}
 \end{aligned}
 \tag{5.141}$$

Bibliografía:

Babuska, I. & Melenk, J. (1995) *The partition of unity element method*, Tech.Rep. BN-1185, Inst.Phys.science and Techn., Univ. Maryland, Maryland USA.

Belytschko, T., Lu & L.Gu, Y.Y. (1994) *Element-free Galerkin methods*, Int.J.Num.Meth.Eng. 37, pp. 229-256.

Benz, W., (1990) *Smooth particle hydrodynamics: a review*, in *The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations*, pp. 269-288, J.R. Buchler (Ed), Kluwer Academic Publishers.

Bonet, J. & Kulasegaram, S., (2000) *Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 47, pp. 1189-1214.

Gingold, R. A., & Monaghan, J.J., (1977) *Smoothed particle hydrodynamics*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 181, 375

Gingold, R.A. & Monaghan, J.J. ((1982)) *Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics*, J. Comput. Phys. 46 , 429.

Gray, J.P., Monaghan, J.J., & Swift, R.P. , (2001), *SPH elastic dynamics*, Comput. Methods Appl.Mech. Engrg., 190, pp. 6641-6662.

Li, S. & Liu, W.K. (2004) *Meshfree particle method*, Springer Verlag, ISBN 3-540-22256-1

Libersky, L.D. & Petschek, A.G. (1990) *Smooth particle hydrodynamics with strength of materials*. Advances in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics, Vol. 395, pp. 248-257.

Libersky, L.D., Petschek, A.G., Carney, A.G., Hipp, T.C., Allahdadi, J.R., & High, F.A. (1993) *Strain Lagrangian Hydrodynamics: A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response*, J. Comp. Phys, Vol. 109, pp. 67-75.

Liu, G.R. & Liu, M.B. (2003) *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*, World Scientific, ISBN 981-238-456-1

Lucy, L.B. (1977) *A numerical approach to the testing of fusion process*, Astronomical Journal, Vol. 82, pp. 1013-1024.

Malvern, L.E. (1969) *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall.

Monaghan, J.J. (1982) *Why particle methods work*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol 3, pp. 422-433.

Monaghan, J. J. (1992) *Smoothed particle hydrodynamics*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 30, pp. 543-574.

Monaghan, J.J. (1994) *Simulating free surface flows with SPH*, J. Comput. Phys. 110, pp. 399-406.

Monaghan J.J. & Gingold, R.A. (1983) *Shock simulation by the particle method SPH*, J.Comp.Phys. 52, pp. 374-389.

Monaghan, J.J. & Kocharyan, A. (1995) *SPH simulation of multi-phase flow*, Comput. Phys. Commun. 87, pp. 225-235.

Monaghan, J.J. & Kos, A., (1999) *Solitary waves on a Cretan beach.* J. Waterways., Port, Coastal, Ocean Eng. ASCE, 125, pp.145-154.

Monaghan, J.J. & Latanzio, J.C. (1985) *A refined particle method for astrophysical problems*, Astronomy and Astrophysics 149, pp.135-143.

Monaghan; J. J., Kos, A. & Issa, N., (2003) "*Fluid Motion Generated by Impact*", Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering ASCE 129, 250–259.

Monaghan, J. J., Cas, R. F., Kos, A., & Hallworth, M., (1999) *Gravity currents descending a ramp in a stratified tank*, J. Fluid Mech., 379, pp. 36–39.

Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P., (1992) *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Comp. Mech. 10, pp. 307-318.

Oñate, E. & Idelsohn, S., (1998) *A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Comp.Mech. 21, pp. 283-292.

Randles, P.W. & Libersky, L.D. (2000) *Normalized SPH with stress points*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 48, pp. 1445-1462.

Takeda, H.T., Miyama, S.M. & Sekiya, M. (1994) *Numerical simulation of viscous flow by smooth particle hydrodynamics*, Progress of Theoretical Physics, Vol 92, pp. 939-960.

CAPÍTULO 6

MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE LOS FLUJOS GRANULARES:

Avalancha de Valpola (Italia)

6.1. Introducción:

Las avalanchas granulares son un tipo de deslizamientos extremadamente rápidos de derrubios que proceden de la desintegración de una masa rocosa como consecuencia de deslizamientos o desprendimientos a gran escala.

Como ha sido explicado en el capítulo I las avalanchas se diferencian de los flujos de derrubios principalmente por el papel que desempeña el agua, ya que estos últimos

son flujos saturados mientras que la proporción de agua con respecto al aire es despreciable en el caso de las avalanchas. Asimismo, las velocidades que llegan a alcanzar las mismas son mucho mayores (superior a 10m/s) que las desarrolladas por los flujos de derrubios (0.5 m/s a 10 m/s).

Este movimiento está considerado como el tipo de deslizamiento más peligroso y el que más daños ocasiona debido a la enorme energía que le caracteriza. Uno de los ejemplos más interesantes es la avalancha que tuvo lugar en Valtellina (provincia de Sondrio) en los Alpes de Italia del Norte que costó la vida a 27 personas, causó la destrucción de varios pueblos y modificó de forma sustancial la geomorfología del valle denominado ValPola. Por todo ello, esta avalancha ha sido uno de los casos más estudiados por distintos autores. En este sentido, Azzoni et al., (1992) ofrecen una descripción detallada tanto del evento como de la zona de ValPola. Por su parte Erismann & Abele (2001) presentan una topografía a escala 1/10.000 de la zona de Val Pola antes y después de la avalancha. Desde el punto de vista numérico, varios autores han intentado reproducir este evento (calvetti et al., 2000; Crosta et al., 2002; González et al., 2002. y González, 2003) mediante distintos métodos numéricos. En este capítulo, se estudia la propagación de la avalancha de Val Pola mediante el método SPH utilizando como reología la de un material friccional. Los datos necesarios para esta simulación han sido recopilados de la bibliografía especializada.



Figura 6.1. La avalancha de ValPola

6.2. Área de Estudio:

El deslizamiento de Valpola tuvo lugar en la ladera Este del monte Zandila (Valtellina), que se encuentra a una distancia de 10 km al sur de la ciudad de Bormio en los Alpes centrales italianos (figura 6.2.).

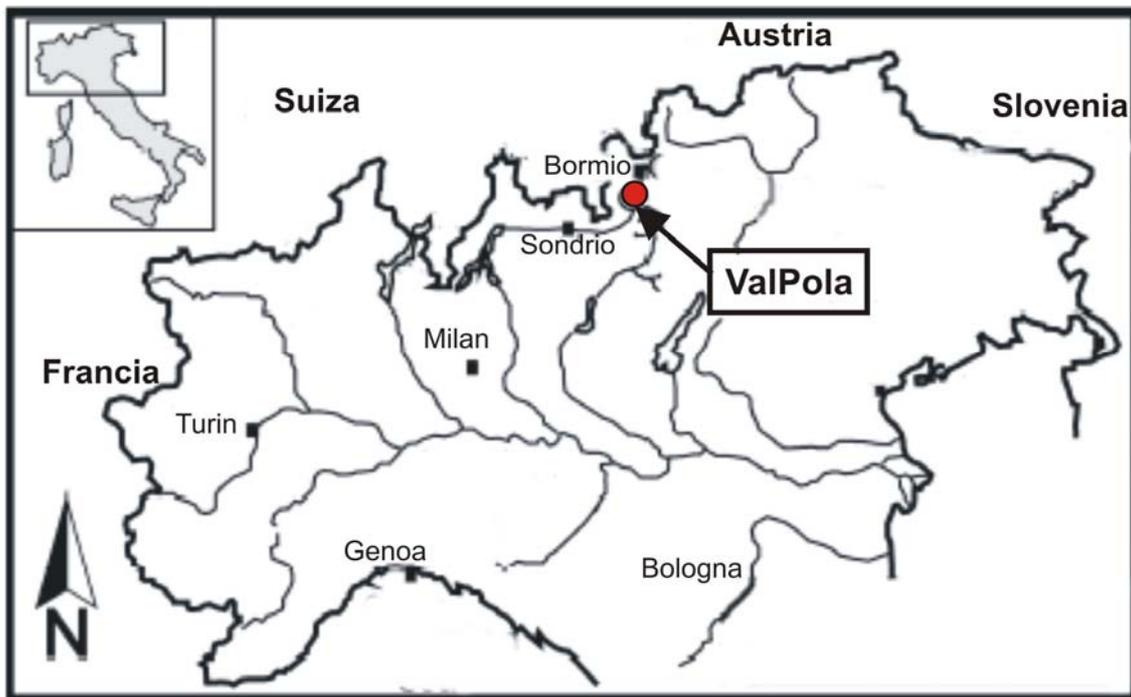


Figura 6.2. Localización de la avalancha de ValPola en la región de valtellina (Norte de Italia)

El valle de Valpola presenta una orientación Norte-Sur, y está limitado por montañas de altitudes medias comprendidas entre 2500m y 3000m. Las laderas presentan elevadas pendientes (superiores a 30°) lo que facilita la aparición de problemas de inestabilidad en las mismas. Como ejemplo de lo anteriormente expuesto, en la ladera Este del monte de Zandila se ha identificado un paleodeslizamiento cuya corona se encuentra a 2350m. Dicha ladera, presenta una pendiente media de 32° mientras que la cota del fondo del valle se encuentra a 1040m.

Básicamente, la ladera Este del Monte Zandila está constituida por rocas ígneas (dioritas y gabros) y metamórficas (gneises) con depósitos superficiales limitados (morrenas, derrubios y depósitos aluviales) (Figura 6.3.).

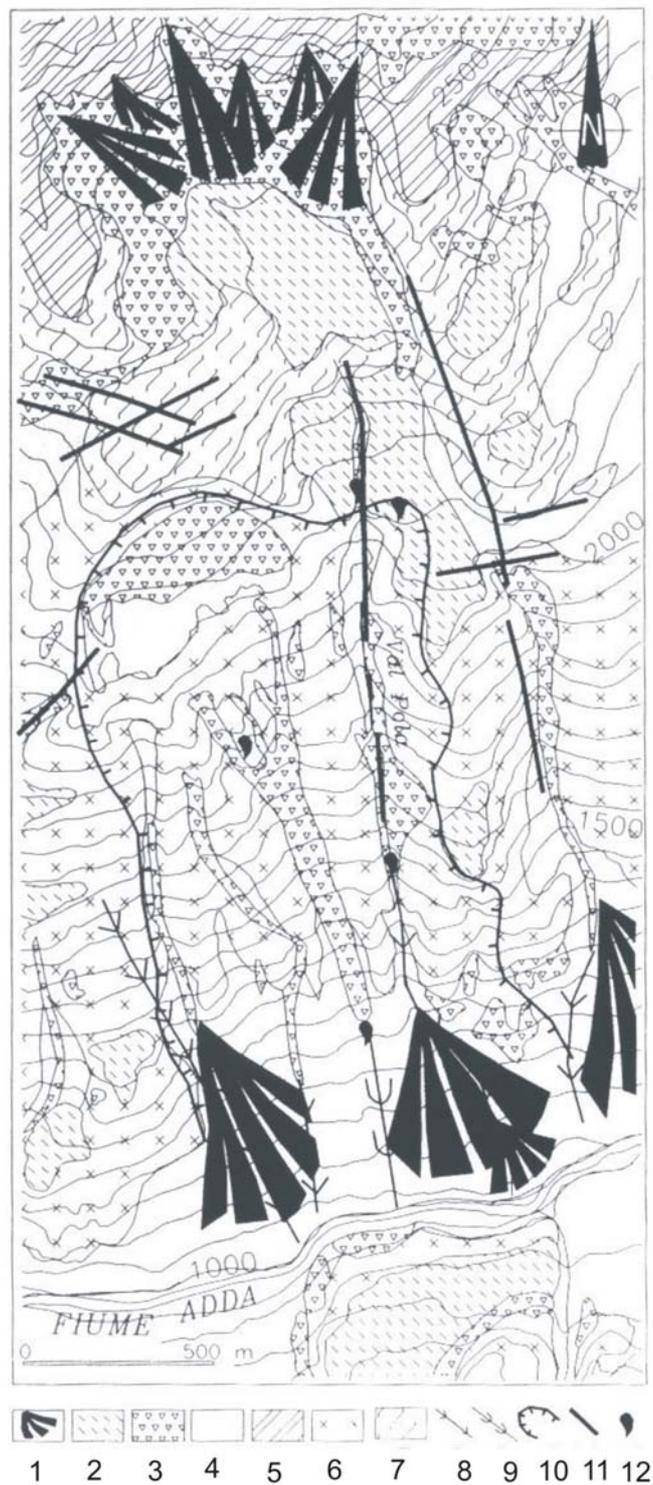


Figura 6.3. Geología de la ladera Este del monte de Zandila (Azzoni et al., 1992)

(1: abanicos de derrubios y abanicos aluviales; 2: morrenas; 3: acumulación de derrubios y de paleodeslizamientos; 4: acumulación de derrubios y de paleodeslizamientos con vegetación; 5: ortogneises; 6: rocas plutónicas (dioritas y gabrodioritas); 7: paragneises; 8: canales de drenaje activos; 9: canales abandonados; 10: límite del deslizamiento; 11: falla principal; 12: manantiales)

Los principales elementos estructurales del área del deslizamiento son las fallas de Valpola y Monte Zandila, ambas con una orientación E-W, además de pequeñas fallas y juntas con una orientación NW-SE y NNE-SSW (Regione Lombardia, 1988, a,b). La masa rocosa está altamente fracturada y el sistema de juntas principal es: NNW-SSE, buzando 45° hacia el Este; E-W buzando 35° hacia el Norte; y ENE-WSW buzando 40° y 80° SurEste.

El área circundante al monte Zandila recibe precipitaciones anuales del orden de 800mm a 1200mm. La mayor parte de las precipitaciones registradas en la estación meteorológica de Bormion (1125m) se concentran en los meses de Agosto, con una precipitación media para la serie de datos disponible de 102mm, y Julio con un valor medio de 85mm.

Las temperaturas más altas se registran en Julio, definiendo un valor promedio de 24,4°C a 1200m y 14°C a 2000m (Azzoni et al., 1992). Mientras que el promedio de las mínimas del mismo mes y en las mismas altitudes es de 10,2°C y 6,1°C, respectivamente. En el área del estudio el manto nival permanece una veintena de días al año, en altitudes del orden de 1000m, y unos 190 días anuales a 2000m.

El elemento hidrográfico principal del área de estudio es el torrente Pola localizado al norte del área del deslizamiento y que fluye ladera debajo de forma rectilínea desde la cota 2400m hasta confluir con el río Adda en la altitud 1040m.

6.3. Evento del 28 de julio de 1987:

La región de Valtellina fue escenario de una secuencia de catástrofes naturales (figura 6.4.) que duró desde mediados de Julio hasta comienzos de Septiembre de 1987. Éstas

se concretaron en inundaciones y movimientos de ladera que causaron la pérdida de cincuenta y tres vidas humanas. Además, al menos 110 personas resultaron heridas al tiempo que 25.000 tuvieron que ser evacuadas. Las pérdidas económicas fueron evaluadas en cuatrocientos millones de euros y sólo en reabrir el valle al tráfico se tardó cinco meses (Govi, 1989; Azzoni et al., 1992).



Figura 6.4. Varios escenarios de las catástrofes naturales acontecidas en Valtellina en 1987

El factor desencadenante de los procesos naturales anteriormente citados fue meteorológico. Así, durante los días 17, 18 y 19 de Julio de 1987 se registraron

aproximadamente 190 mm de lluvias en la estación meteorológica de Arnoga. A su vez, la temperatura mínima se mantuvo superior o igual a 5 °C, especialmente a partir del 21 de junio del mismo año, lo cual provocó el deshielo rápido de parte del glaciar.

Este evento extremo de lluvia desencadenó inundaciones y flujos de derrubios en la totalidad del área de Valtellina. Además, como resultado de éste se modificó de forma sustancial la geomorfología del fondo del valle de Valpola, especialmente entre las altitudes 1600-2000m y 1100-1300m. De hecho, los flujos de derrubios colmataron el río Adda formando un pequeño lago.

Igualmente, se reactivó el paleodeslizamiento de Valpola. Así, el 25 de julio se identificó una grieta de 600m de largo orientada SSE-NNW por encima de la corona del paleodeslizamiento. Entre el 26 y el 27 de Julio la extensión de la grieta se incrementó de forma progresiva hasta unos 900m, produciéndose frecuentes caídas de roca en las áreas de mayor pendiente del paleodeslizamiento (casi 100 en las 24 horas anteriores al deslizamiento).

El 28 de Julio a las 7:25 a.m. se separó de forma repentina un volumen estimado de 34 millones de metros cúbicos de roca, el cual se movilizó en forma de avalancha que recorrió una distancia de 800m devastando el fondo del valle a su paso.

A pesar de la gran velocidad con la cual tuvo lugar el colapso, sus etapas principales pudieron ser reconstruidas gracias a los testigos presenciales y a las evidencias morfológicas registradas después del acontecimiento, a saber:

1. Los primeros desplazamientos, relativamente limitados, tuvieron lugar por causa de la expansión de la corona creada una hora antes.

2. Unos segundos después, la masa rocosa empezó a deslizar a lo largo de dos planos principales de rotura: el primero, existente con anterioridad, buzaba 45° hacia el Este, el segundo, se formó durante el proceso, y presentaba un buzamiento de 35° hacia el Norte.
3. A lo largo de este último plano, se produjo un movimiento traslacional hacia el Norte. Este movimiento se inició con una serie de pequeños impulsos sucesivos y unas aceleraciones, que se incrementaban progresivamente hasta que se produjo el impacto con el escarpe rocoso que delimitaba la ladera inestable. Se estima que el espesor del cuerpo rocoso que colisionó superaba los 70 m.



Figura 6.5. Vista de la zona de iniciación del movimiento después del evento

4. Al producirse el impacto la masa rocosa que permanecía compacta hasta entonces se desmoronó. La caída del material resultante (fragmentos rocosos de

varias dimensiones) en dirección Este obstruyó una gran área del fondo del valle. Los fragmentos de roca se dirigieron a la ladera opuesta y llegaron hasta una altura de 300 m, precedidos por nubes de polvo que alcanzaron una altitud de 2000 m.

5. Al colisionar con el saliente de Plaz la avalancha se dividió en dos partes. La primera viajó 1,5 km hacia el sur hasta la localidad de “Ponte del Diavolo”, mientras que la otra parte viajó hacia el norte en dirección San Bartolomeo. Al caer parte del material dentro del pequeño lago de Morignone, se formó una gran ola de barro que se movió río arriba de forma extremadamente rápida y destruyó a su paso los pueblos de Poz, S. Antonio Morignone, y Tirindre que fueron evacuados en los días previos. Sin embargo, al alcanzar la ola el pueblo de Aquilone, localizado a 2300 metros aguas arriba, la onda de flujo provocó la muerte de 27 personas.

En la cuarta fase, el movimiento gravitacional que empezó como deslizamiento se convirtió rápidamente en una avalancha de rocas. Durante el avance de esta avalancha, se incorporaron al movimiento, tanto los depósitos de derrubios distribuidos a lo largo de la ladera como la cobertura vegetal. El volumen de los depósitos acumulados, se estimó en 40 millones de metros cúbicos, con un espesor máximo de 90m (Govi, 1988; Govi, 1989).

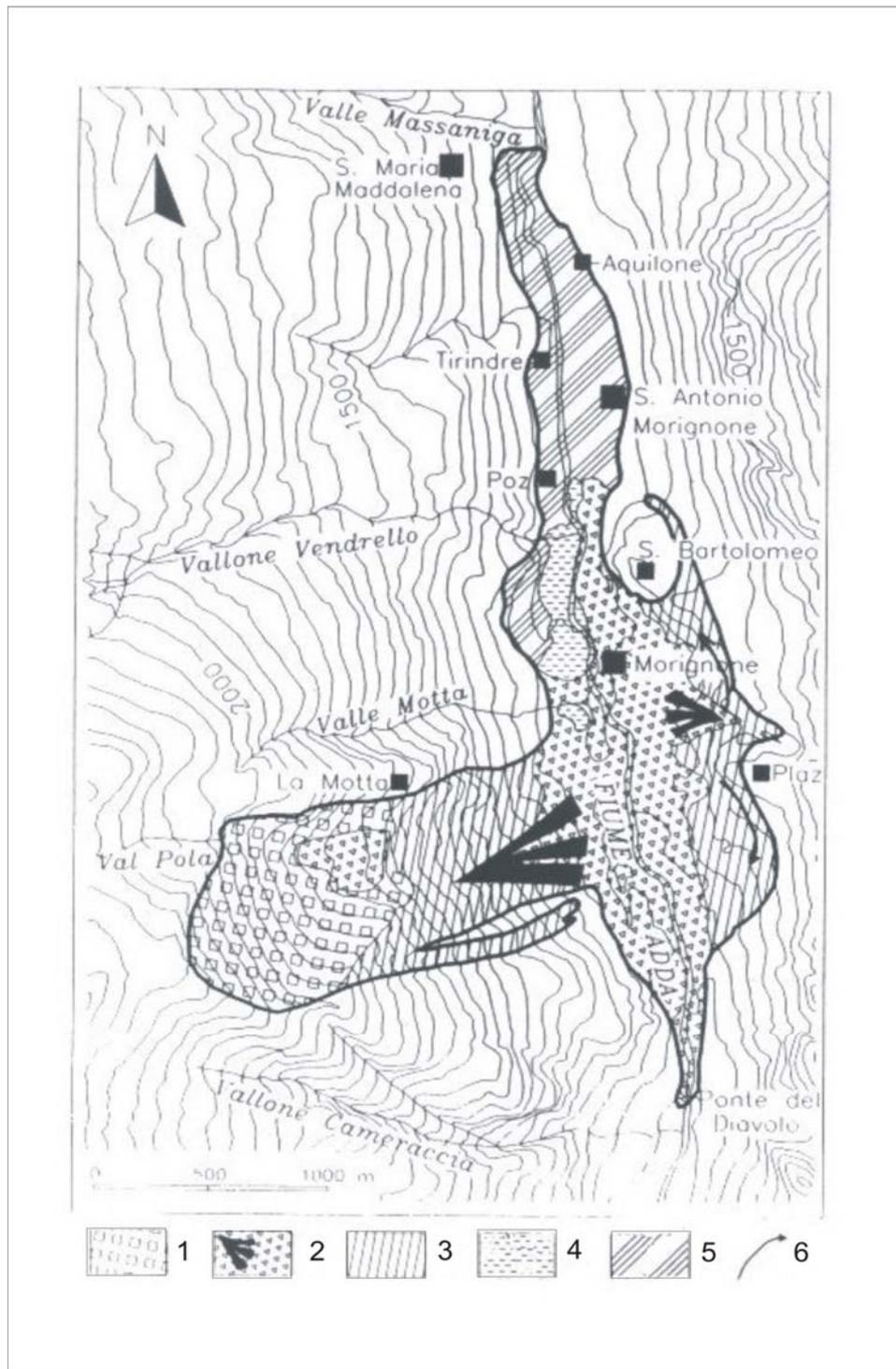


Figura 6.6. Mapa geomorfológico de la zona afectada (Azzoni et al., 1992)

(**Leyenda:** 1: área del desgarre; 2: área de acumulación del deslizamiento; 3: áreas devastadas por el deslizamiento; 4: depósitos aluviales y lacustres del río Adda movilizadas por el deslizamiento; 5: áreas devastadas por la ola de barro; 6: direcciones de la avalancha de rocas después de colisionar con la cresta de Plaz.)

6.4. Validación del programa de cálculo SPH:

Los programas de simulación numérica deben validarse mediante la reproducción de soluciones analíticas. Uno de los problemas que se utiliza con este fin es el estudio de la rotura de una presa en 1D. La solución analítica de este problema, también conocido como problema de Riemann, puede encontrarse en Toro (2001).

El escenario anteriormente enunciado ha sido empleado para comprobar la robustez y precisión de Geoflow2D. Para consultar los resultados del estudio comparativo entre la solución analítica del problema de Riemann y la solución numérica obtenida por Geoflow2D se remite a Herreros (2003).

A continuación, se compara la solución analítica del problema de Riemann en condiciones secas y mojadas y lecho horizontal con la solución numérica obtenida mediante SPH.

Las condiciones iniciales del problema se presentan en la figura 6.7. En ella, la mitad izquierda del canal de 20 m se considera inicialmente inundada, siendo h_0 equivalente a 10m. Por su parte, la mitad derecha del canal se considera inicialmente seca, para el caso del estudio del problema de Riemann con lecho seco y se considera cubierta por una capa de agua de 1m de profundidad en el caso del estudio del problema de Riemann con lecho mojado.

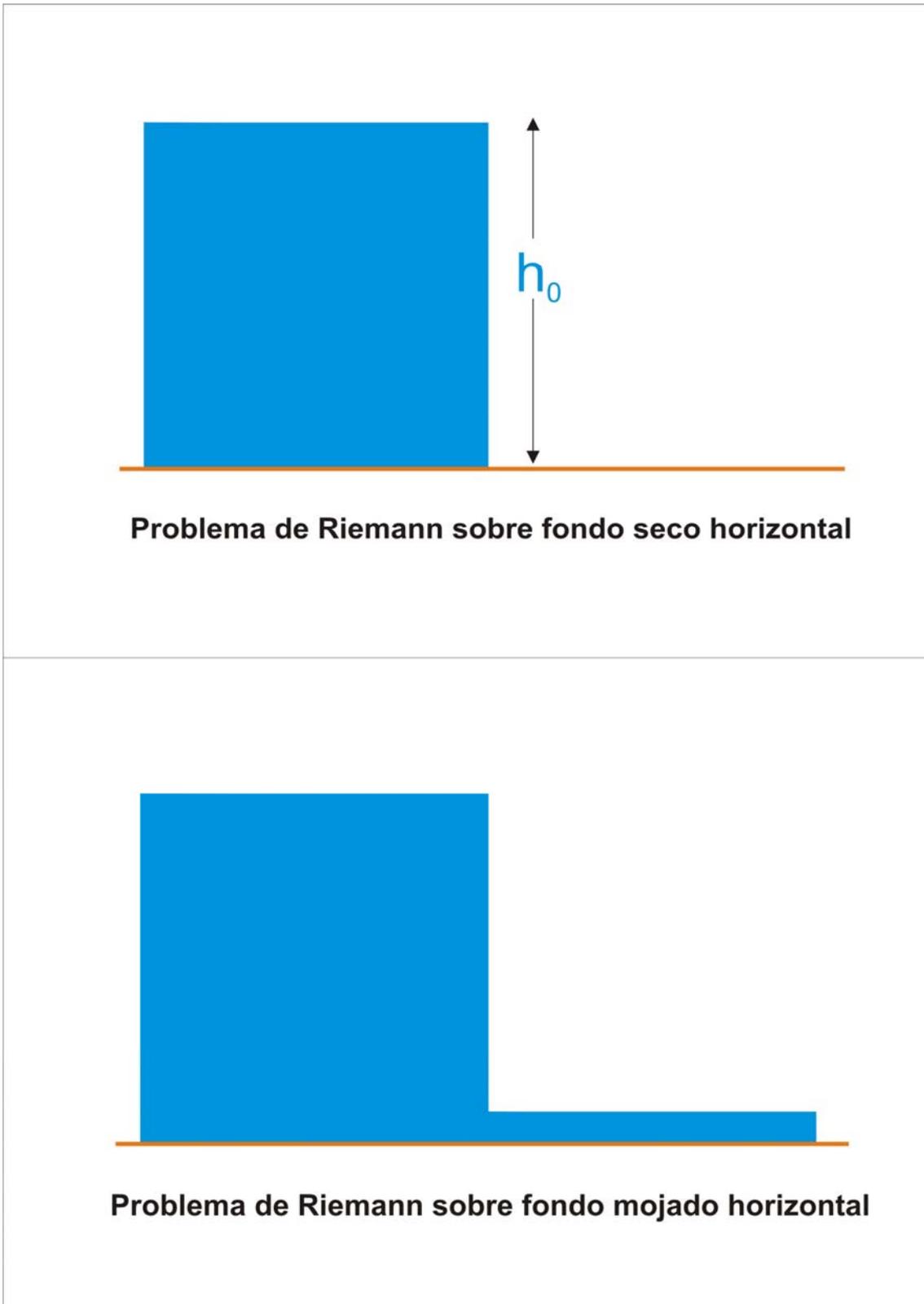


Figura 6.7. Condición inicial para el problema de Riemann

Las figuras 6.8. y 6.9. comparan los resultados correspondientes a la profundidad y velocidad de la simulación numérica mediante SPH con la solución analítica del problema de Riemann en condiciones secas y mojadas respectivamente.

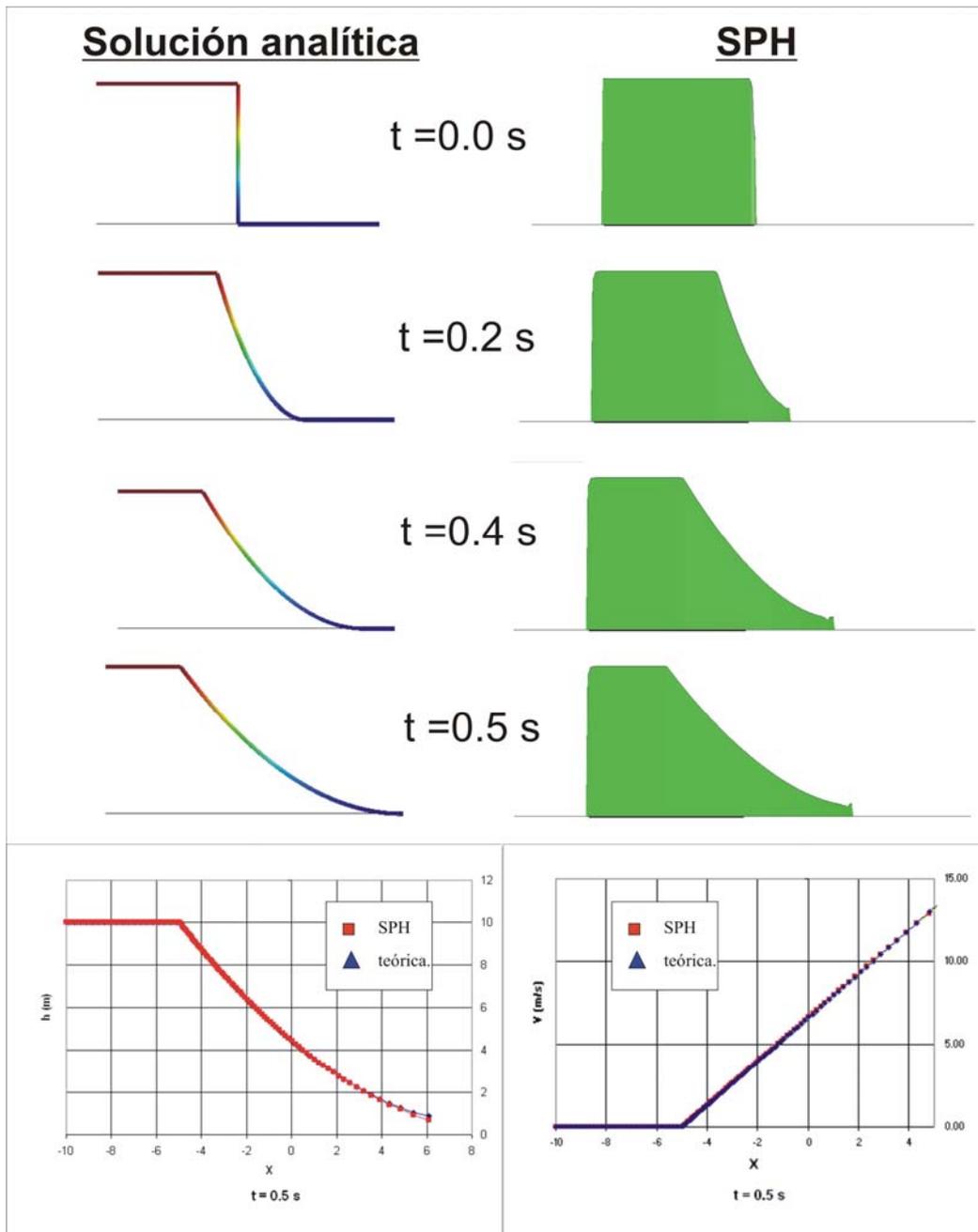


Figura 6.8. Comparación de la solución SPH con la solución analítica del problema de Riemann sobre fondo seco (Pastor, 2007).

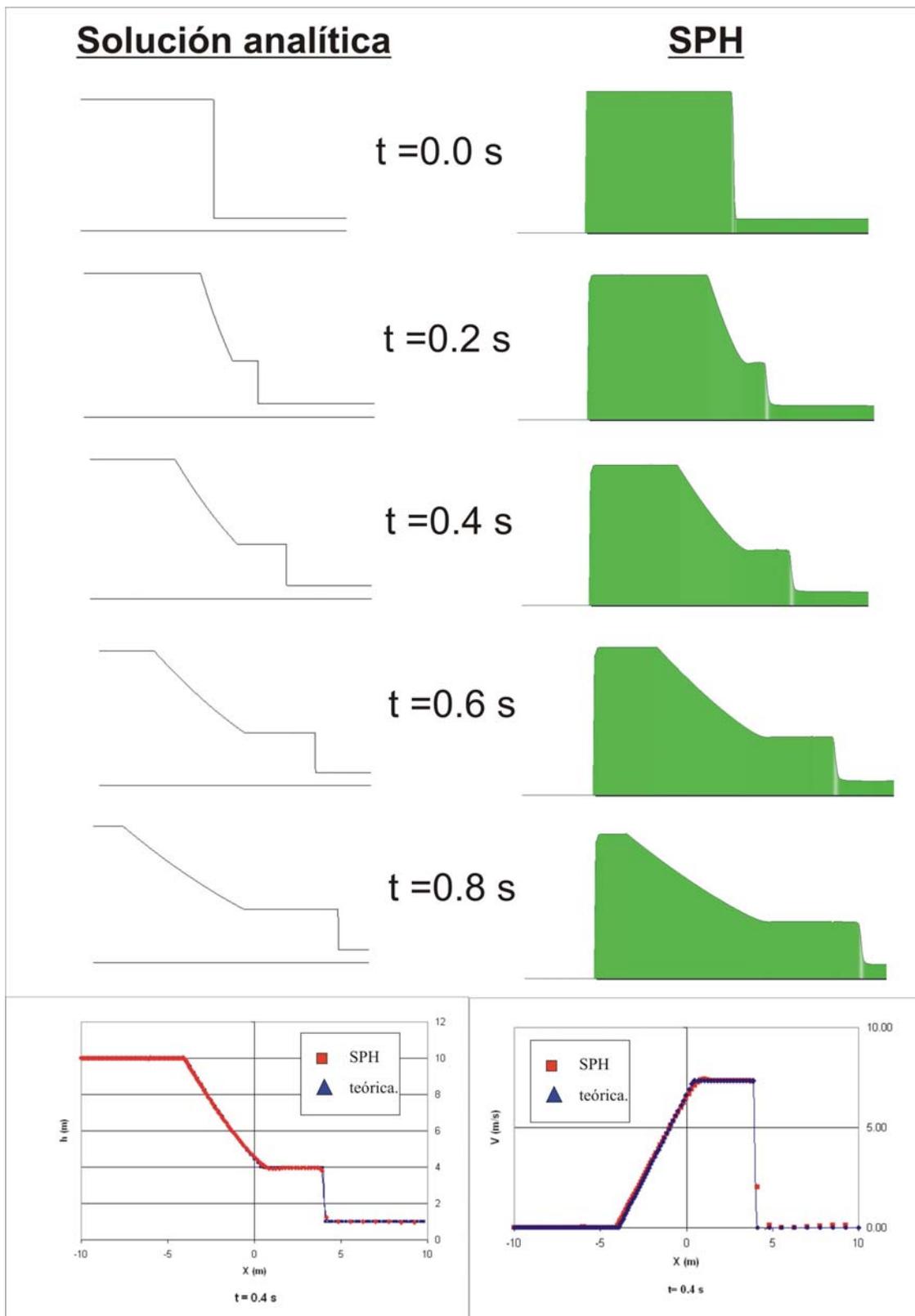


Figura 6.9. Comparación de la solución SPH con la solución analítica del problema de Riemann sobre fondo mojado (Pastor, 2007).

A la vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que el método utilizado es capaz de reproducir de forma satisfactoria el problema de Riemann tanto en condiciones secas como mojadas sobre lecho horizontal. Asimismo, para este último caso el programa es capaz de reproducir la forma y la velocidad de la onda de choque.

6.5. Datos de partida y elaboración de la malla SPH:

Los datos sobre los que esta basada esta simulación (topografía, condición inicial y propiedades del material) han sido recopilados de la literatura especializada. En este sentido, se ha digitalizado la topografía de la zona de estudio antes y después del evento del 28 de Julio de 1987 (figura 6.10.).

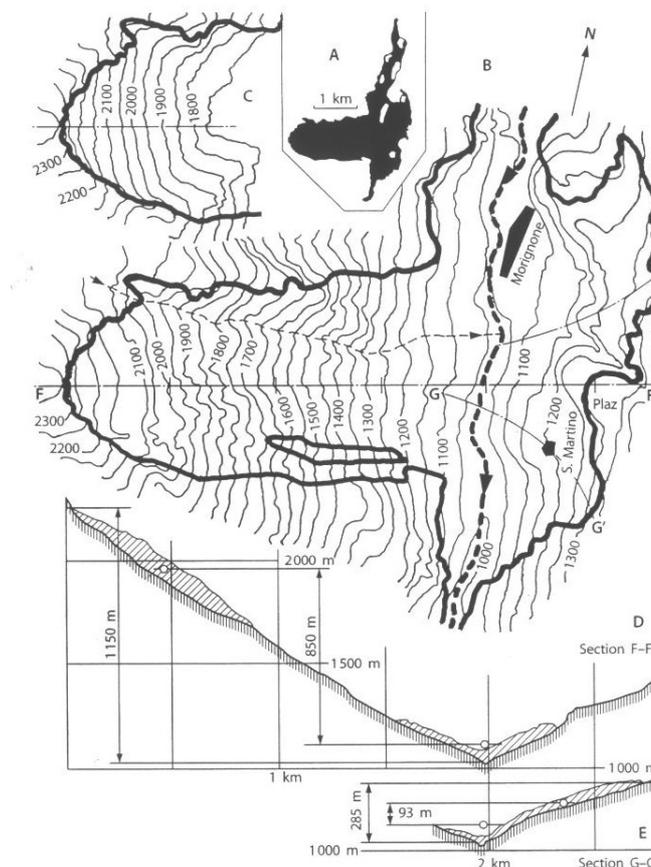


Figura 6.10. Topografía de la avalancha de Val Pola a escala 1/10.000 (Erismann & Abele, 2001)
(B: topografía antes del evento; C: Topografía después del evento; D y E: secciones longitudinales)

A partir de la topografía digitalizada se han generado mallas tridimensionales del terreno antes y después del evento (figuras 6.11. y 6.12.).

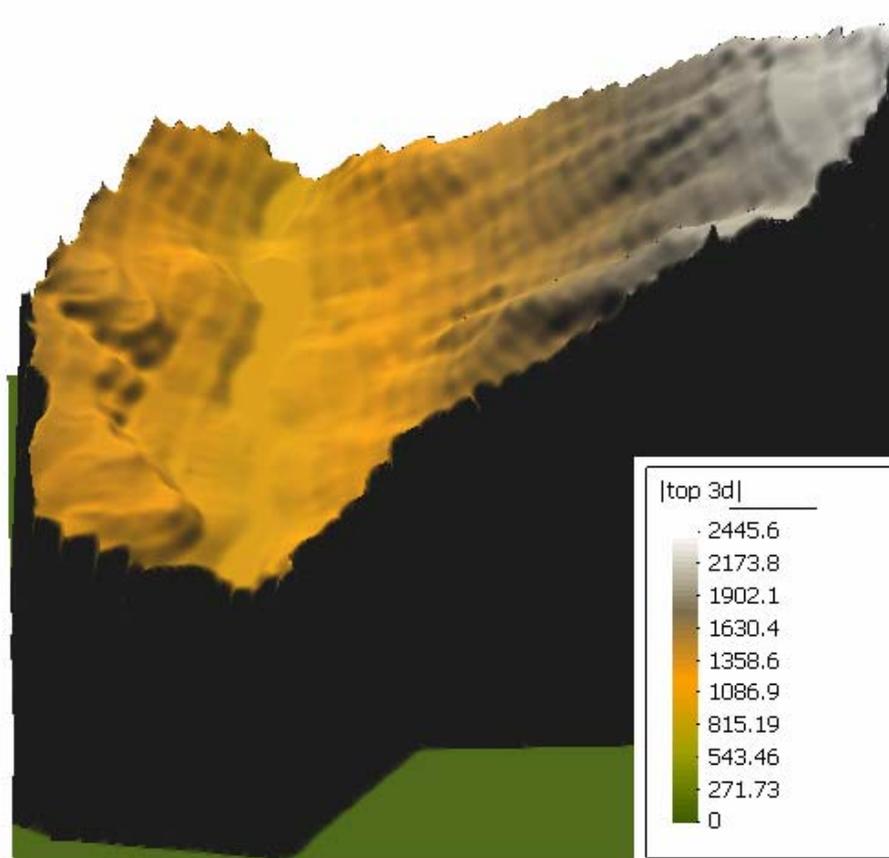


Figura 6.11. Malla tridimensional de la topografía de Valpola antes del evento de 1987.

La condición inicial empleada para simular el evento del 28 de julio de 1987 esta definida por 4822 partículas equidistantes 10 metros (figura 6.13.). Las alturas correspondientes a dichas partículas se han obtenido restando las topografías del terreno antes y después de la avalancha (figura 6.14.).

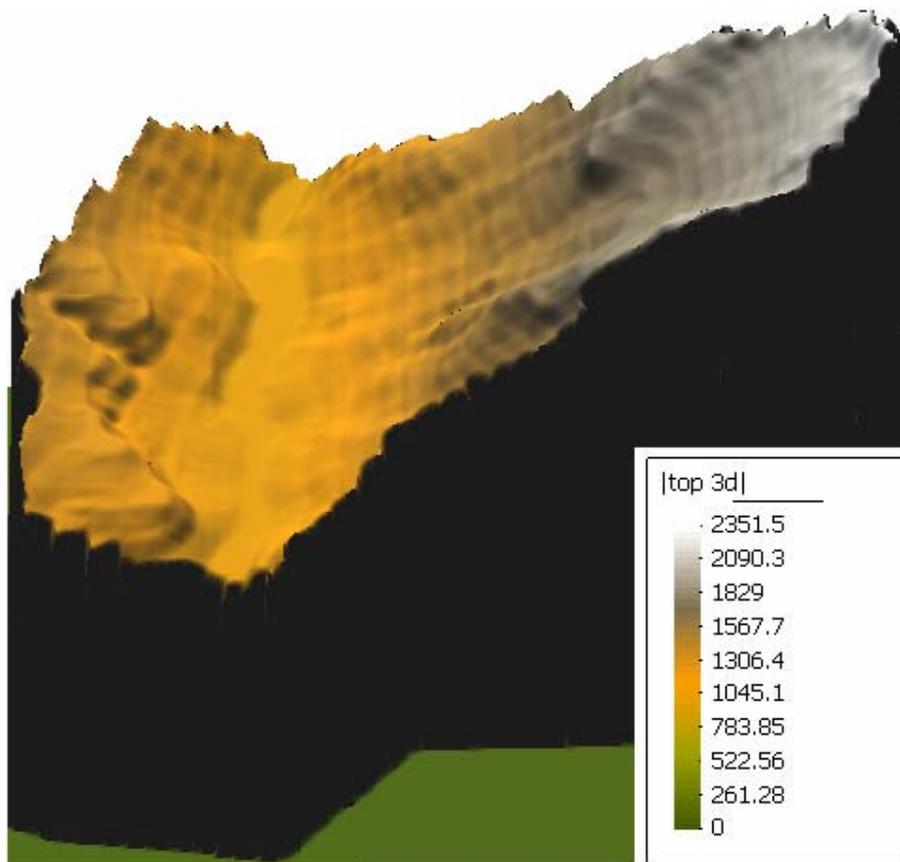


Figura 6.12. Malla tridimensional de la topografía de Valpola después del evento de 1987.

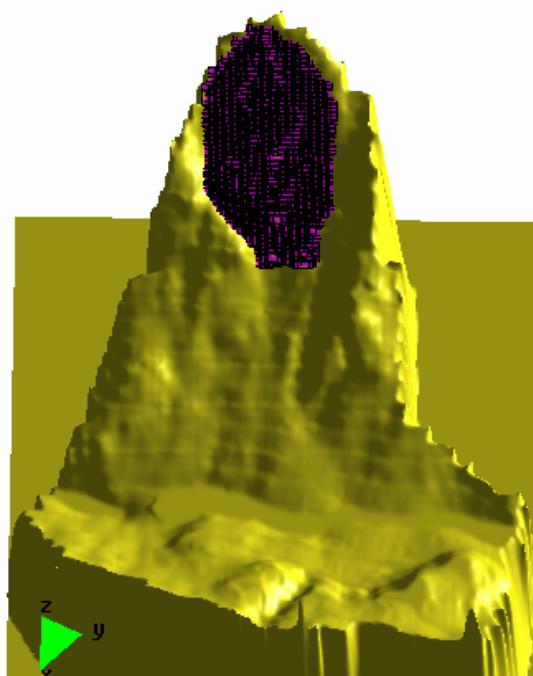


Figura 6.13. Situación inicial de la propagación

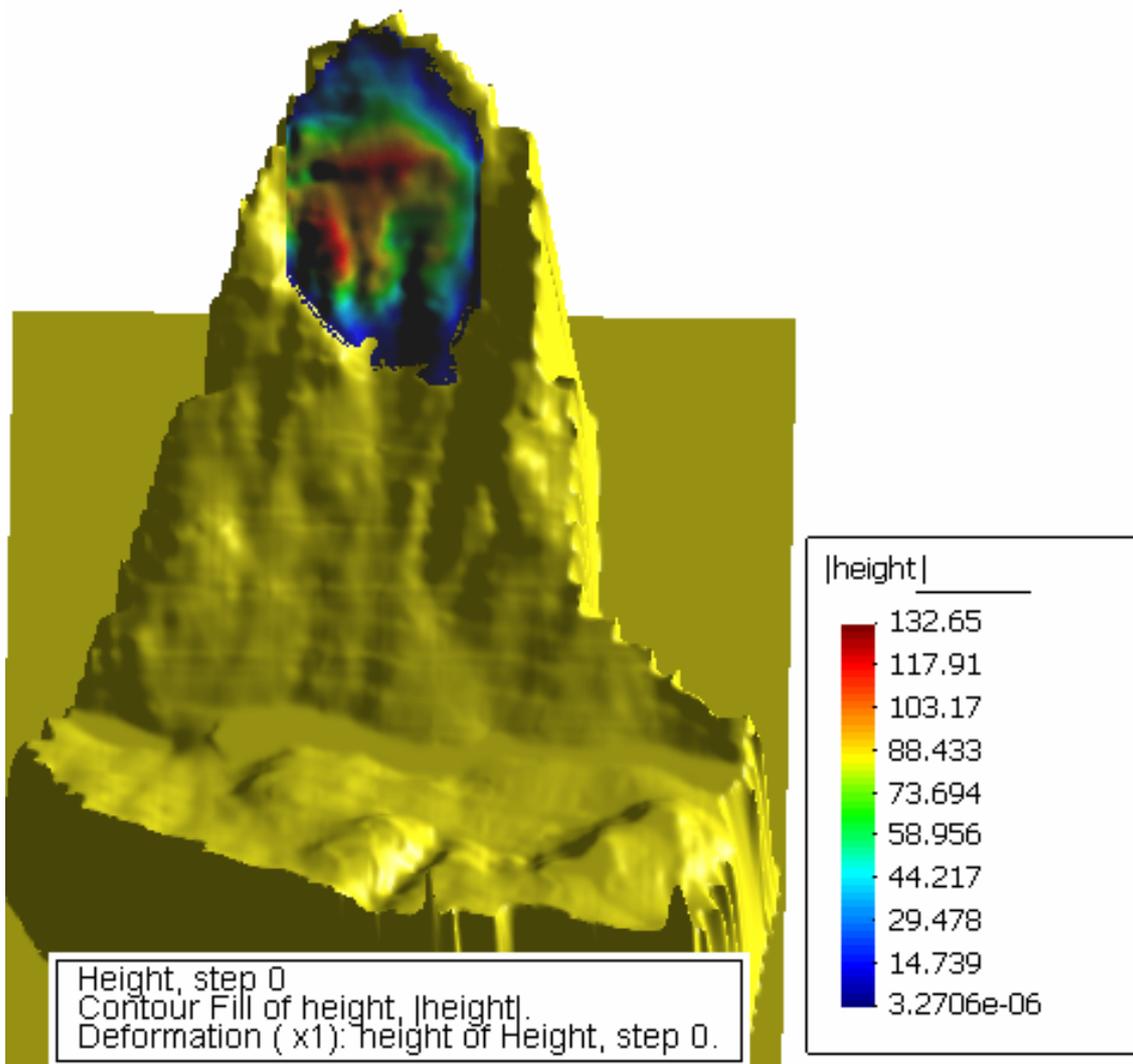


Figura 6.14. Alturas del material en el tiempo inicial.

6.6. Resultados:

Para la simulación se ha considerado un material friccional, con una densidad de 2101kg/m^3 y un ángulo de rozamiento con el fondo de 18° (Crosta et al., 2003). Los resultados vienen reflejados en las figuras 6.15., 6.16.y 6.17.

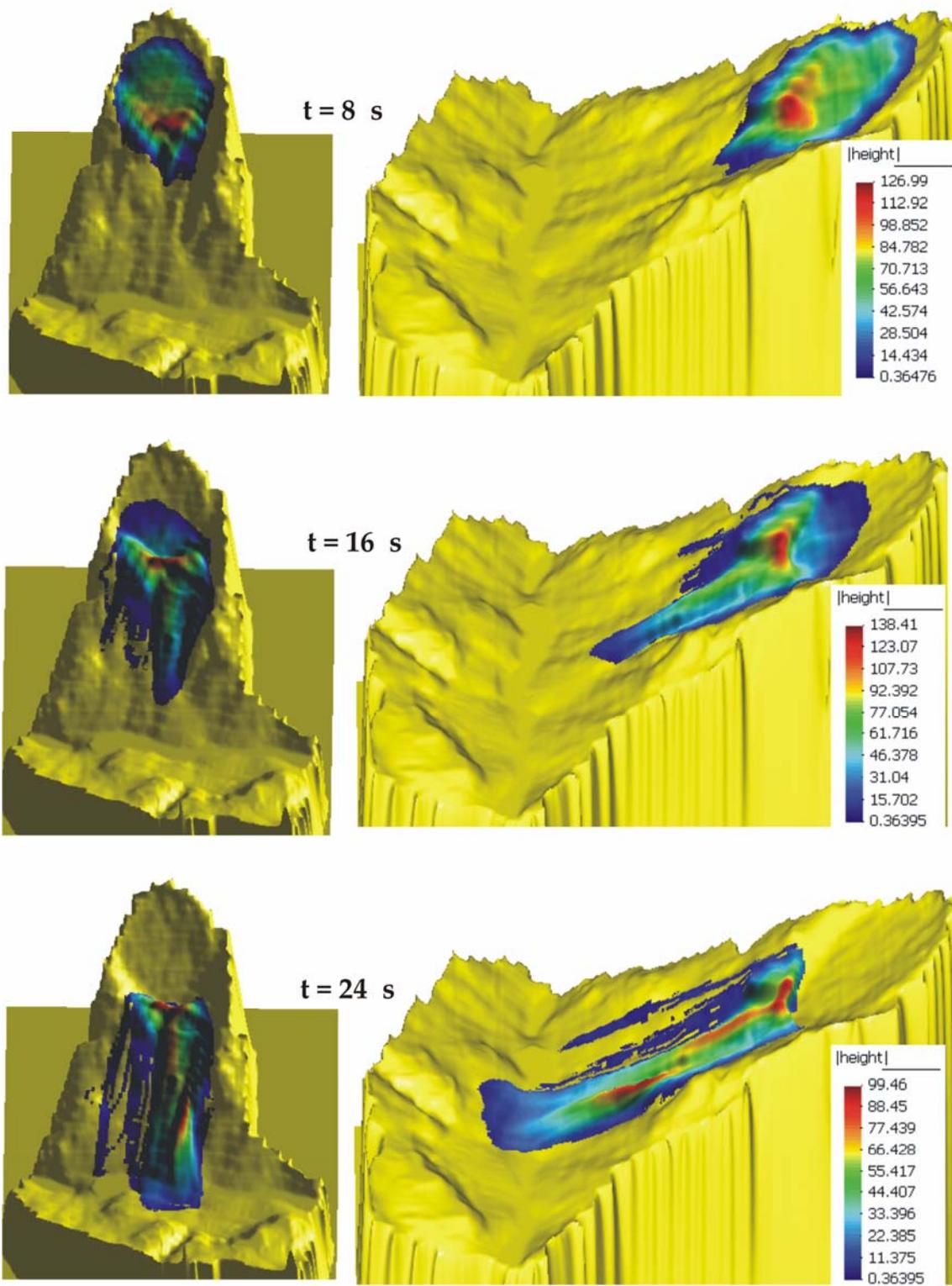


Figura 6.15. Alturas del material en varios pasos del tiempo (t=8s, 16s, 24s.).

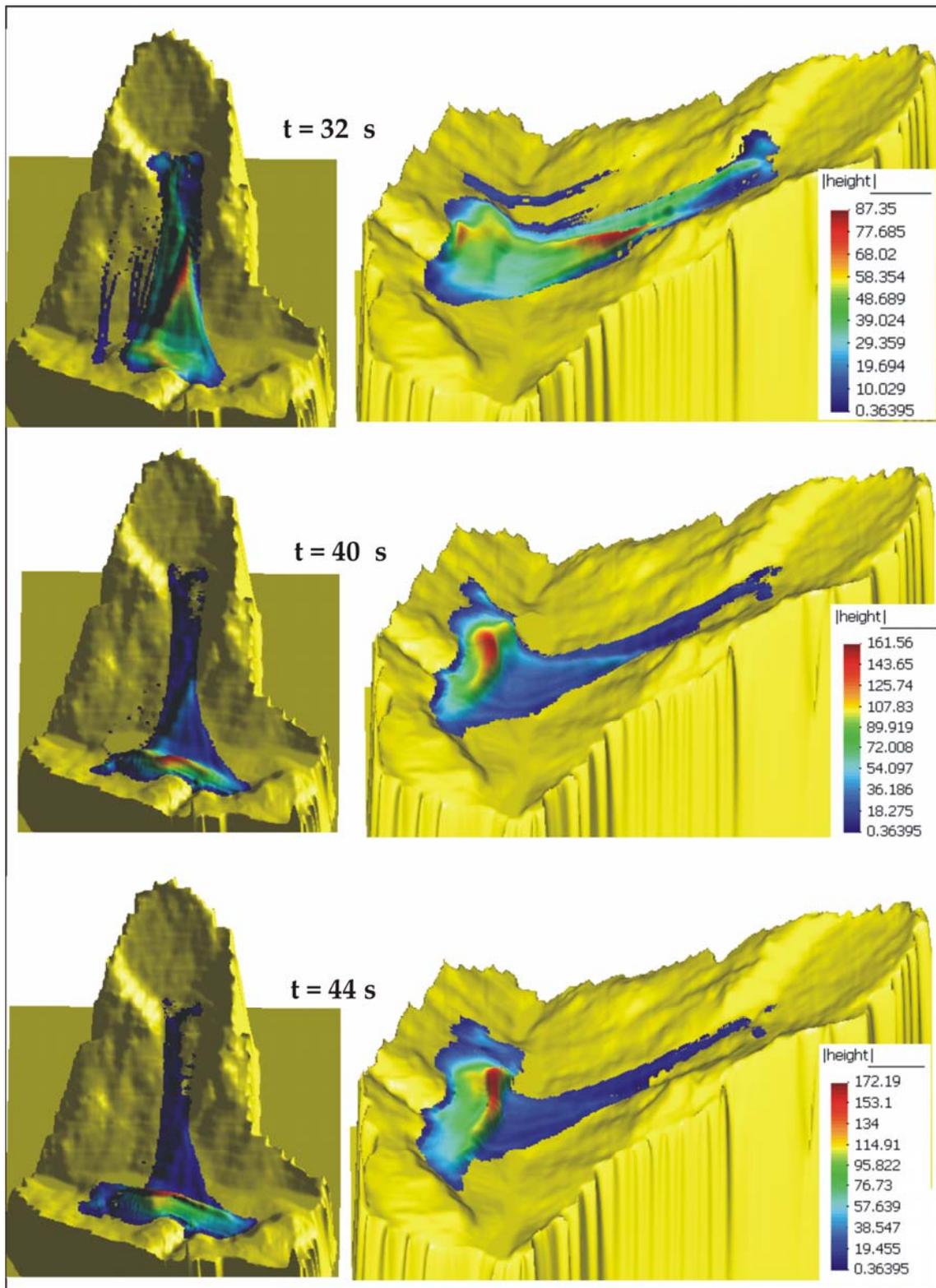


Figura 6.16. Alturas del material en varios pasos del tiempo ($t=32$ s, 40s, 44s.).

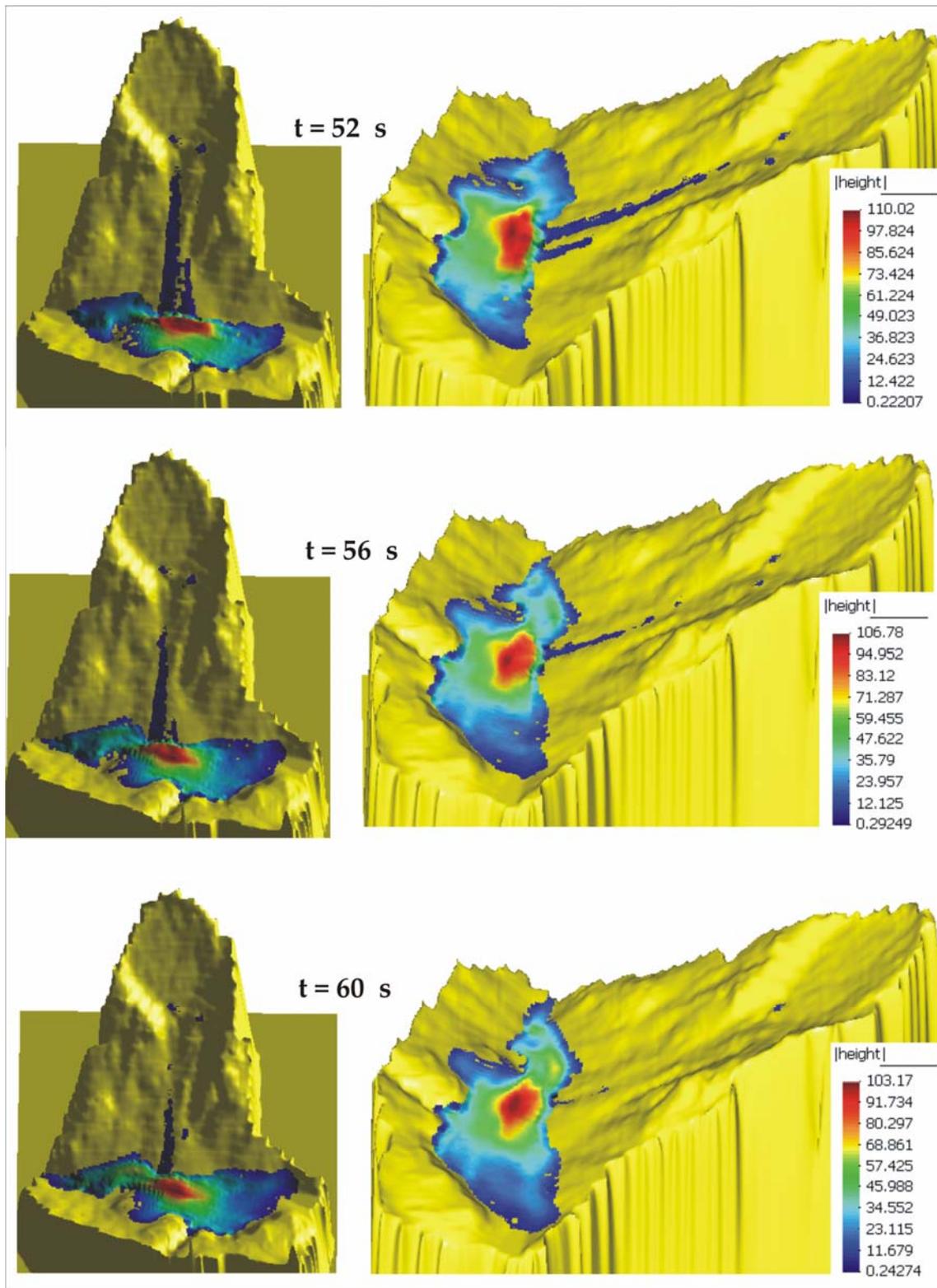


Figura 6.17. Alturas del material en varios pasos del tiempo (t=52s, 56s, 60s.).

La figura 6.18. presenta las distancias recorridas, las velocidades, las alturas y las altitudes de tres nodos que inicialmente se encontraban en el frente, centro y cola de la masa.

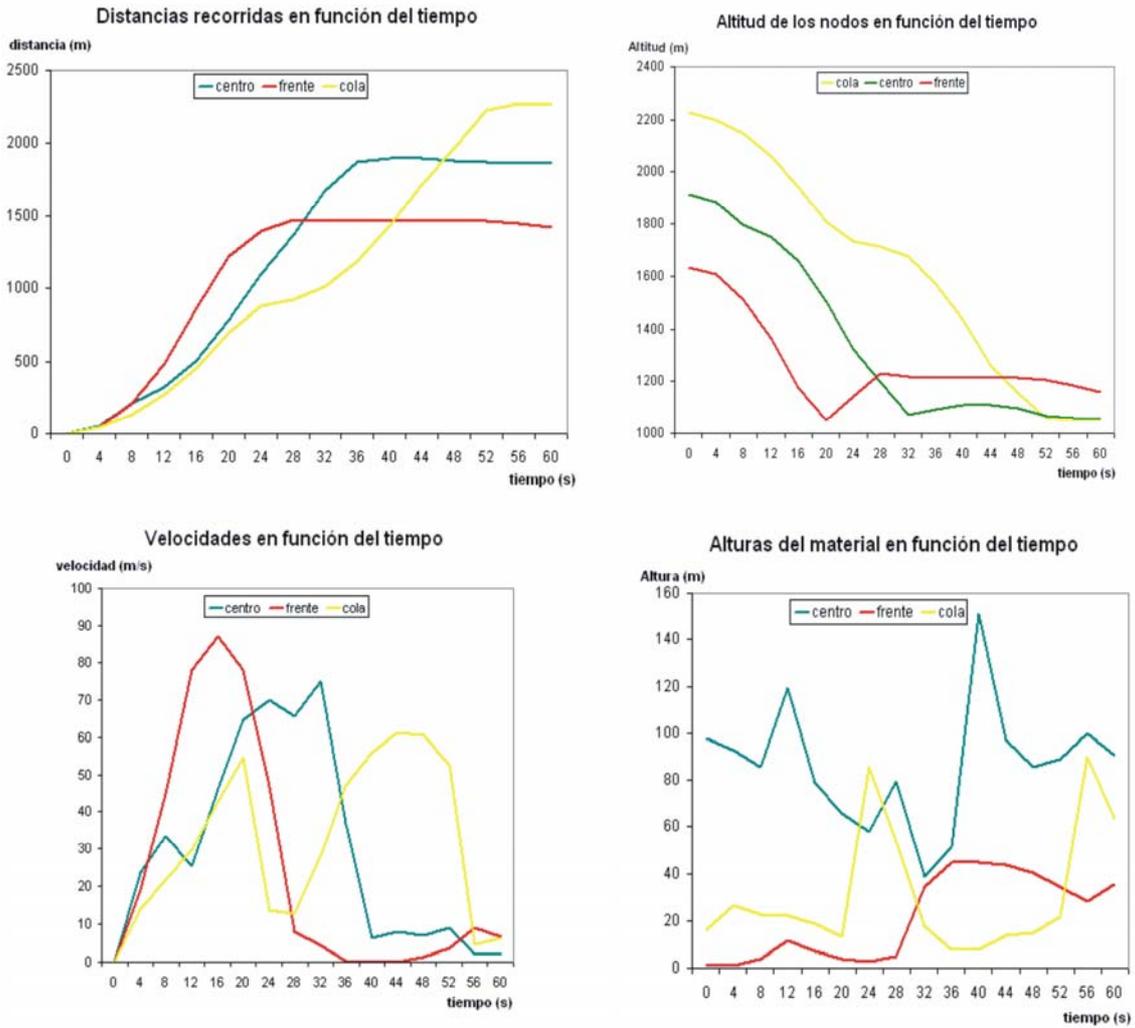


Figura 6.18. Evolución de las distancias recorridas, las velocidades y la altura del material en función del tiempo.

La figura 6.19. presenta la evolución del espesor de la avalancha en función del desplazamiento horizontal.

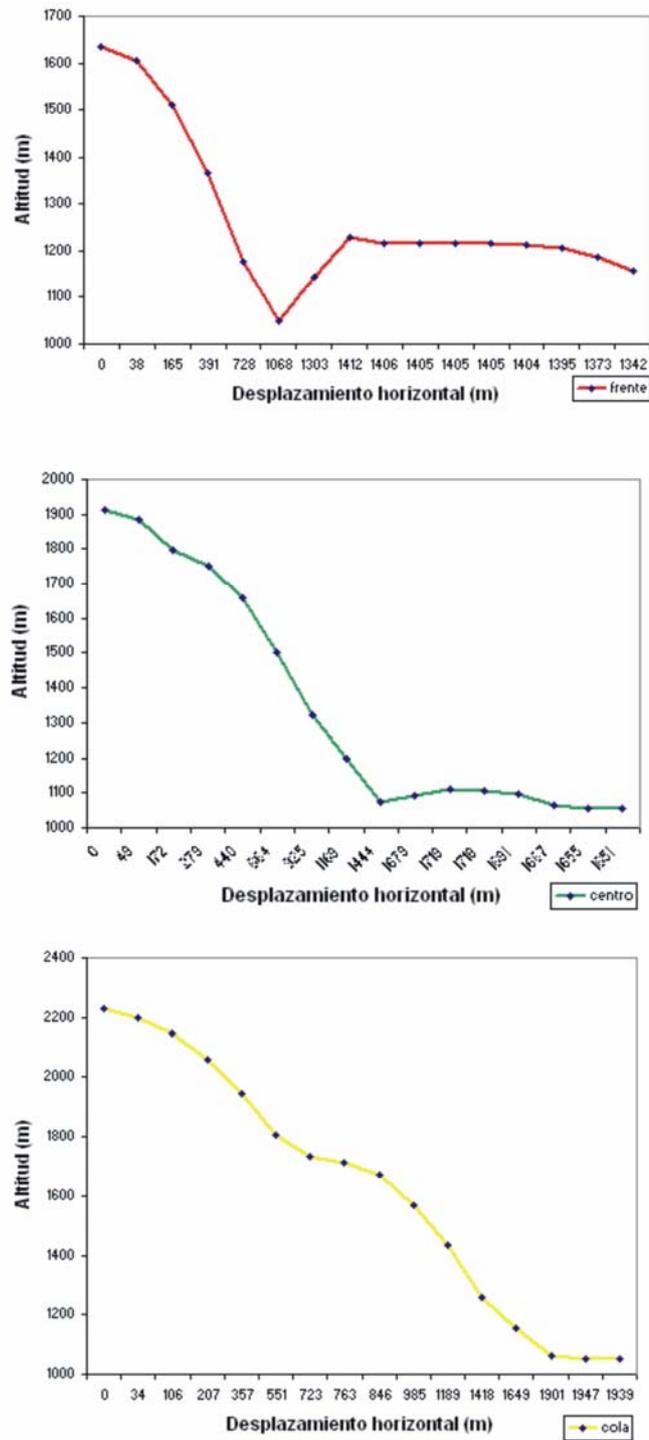


Figura 6.19. Desplazamiento vertical del material en función de su desplazamiento horizontal a lo largo del tiempo.

En la figura 6.20. se presentan los desplazamientos según los tres ejes del espacio así como el desplazamiento total de uno de los nodos de la masa. Como puede apreciarse el desplazamiento total del nodo coincide con su desplazamiento según el eje X y que el desplazamiento según el eje Y es mínimo lo cual justifica que los autores que estudiaron la propagación de la avalancha de ValPola utilizaron un perfil XZ. Sin embargo, esto es cierto antes de que la masa colisionara con el saliente de Plaz pero a partir de ahí el movimiento de gran parte del material según el eje Y no es despreciable (Figura 6.21.).

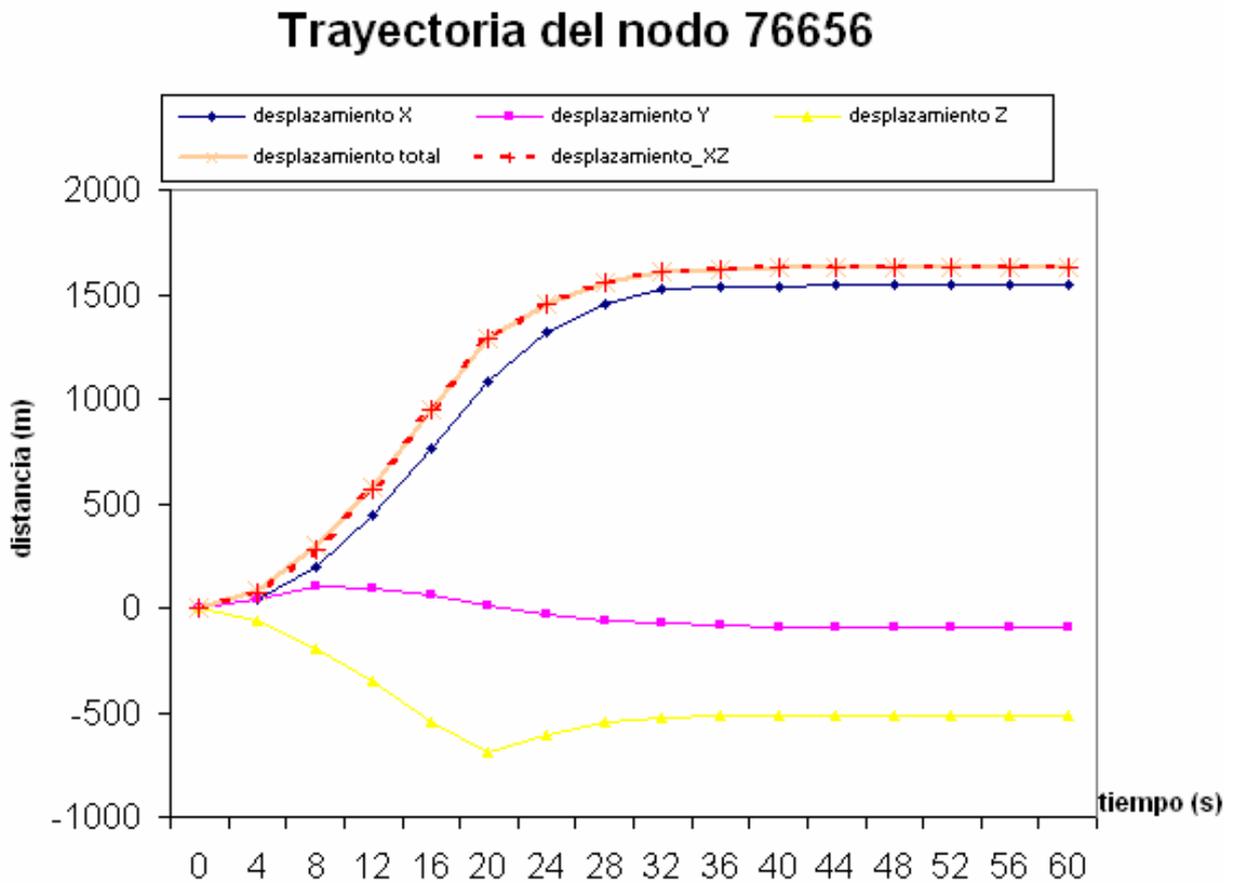


Figura 6.20. Trayectoria del nodo 76656

Trayectoria del nodo 75965

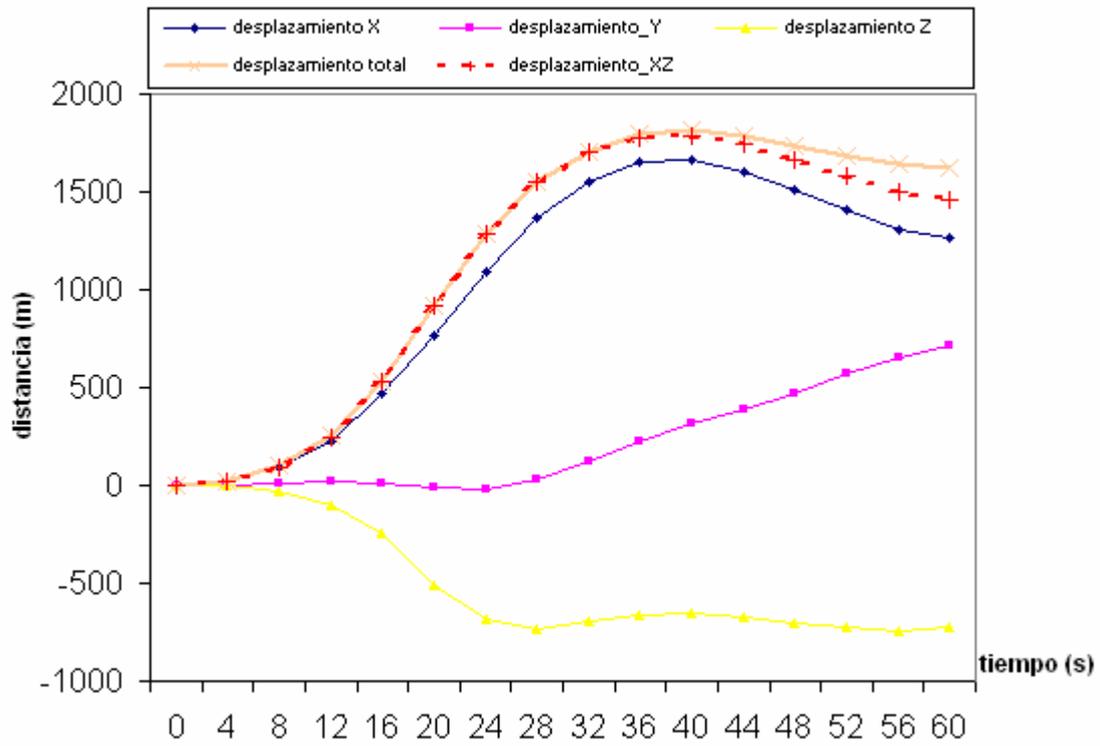


Figura 6.21. Trayectoria del nodo 75965

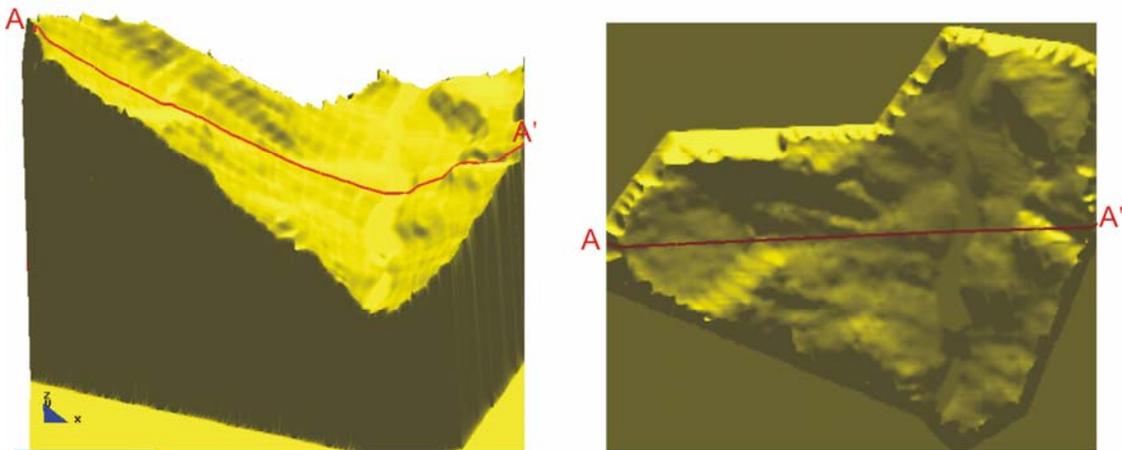


Figura 6.22. Perfil longitudinal AA'.

Considerando el perfil longitudinal AA' (figura 6.22.), los resultados de la propagación de la masa según el espacio XZ vienen reflejados en la figura 6.23.

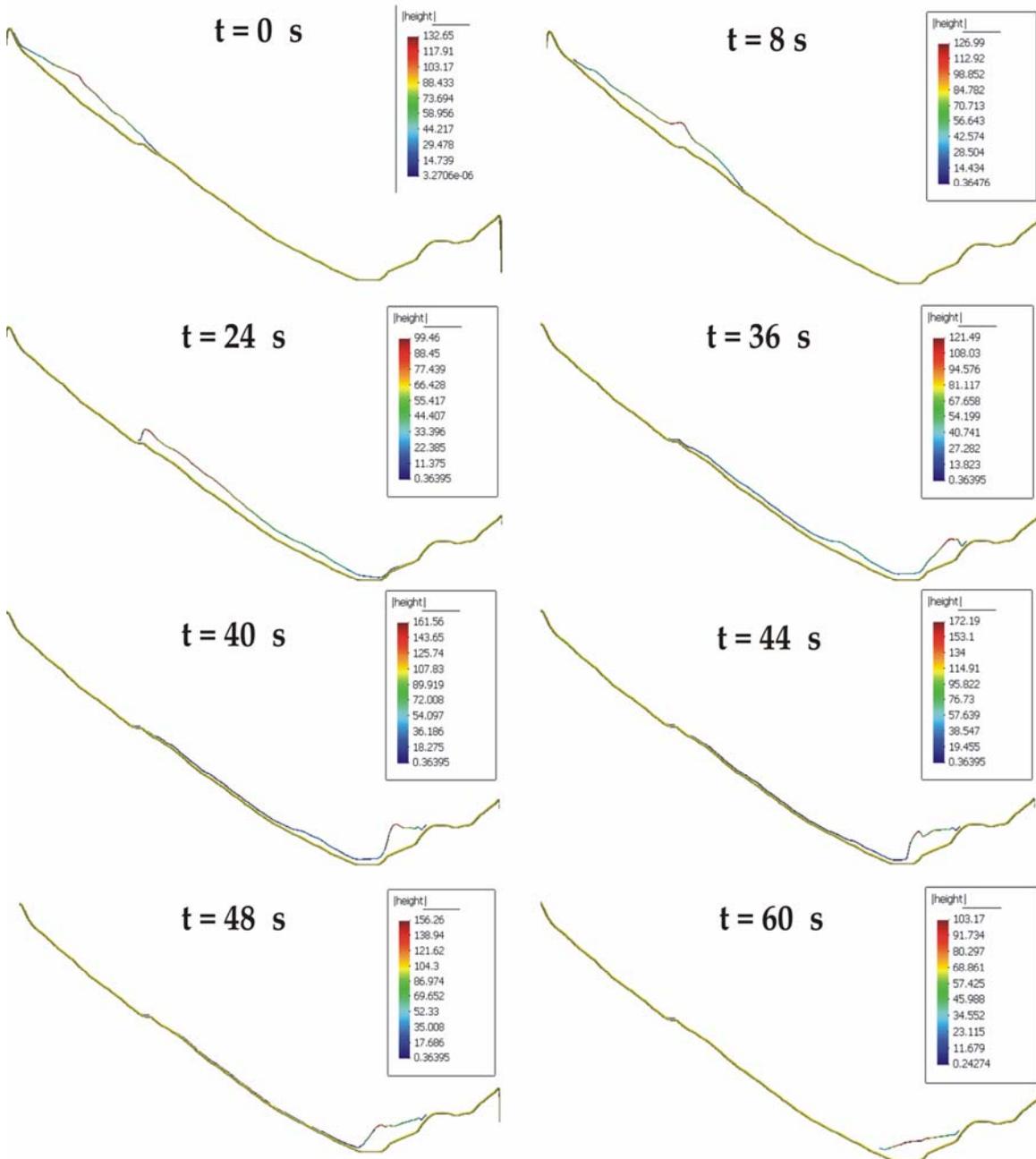


Figura 6.23. Propagación de la avalancha de ValPola según XZ (perfil AA').

La figura 6.24. presenta la evolución de las alturas del material a lo largo del perfil AA'.

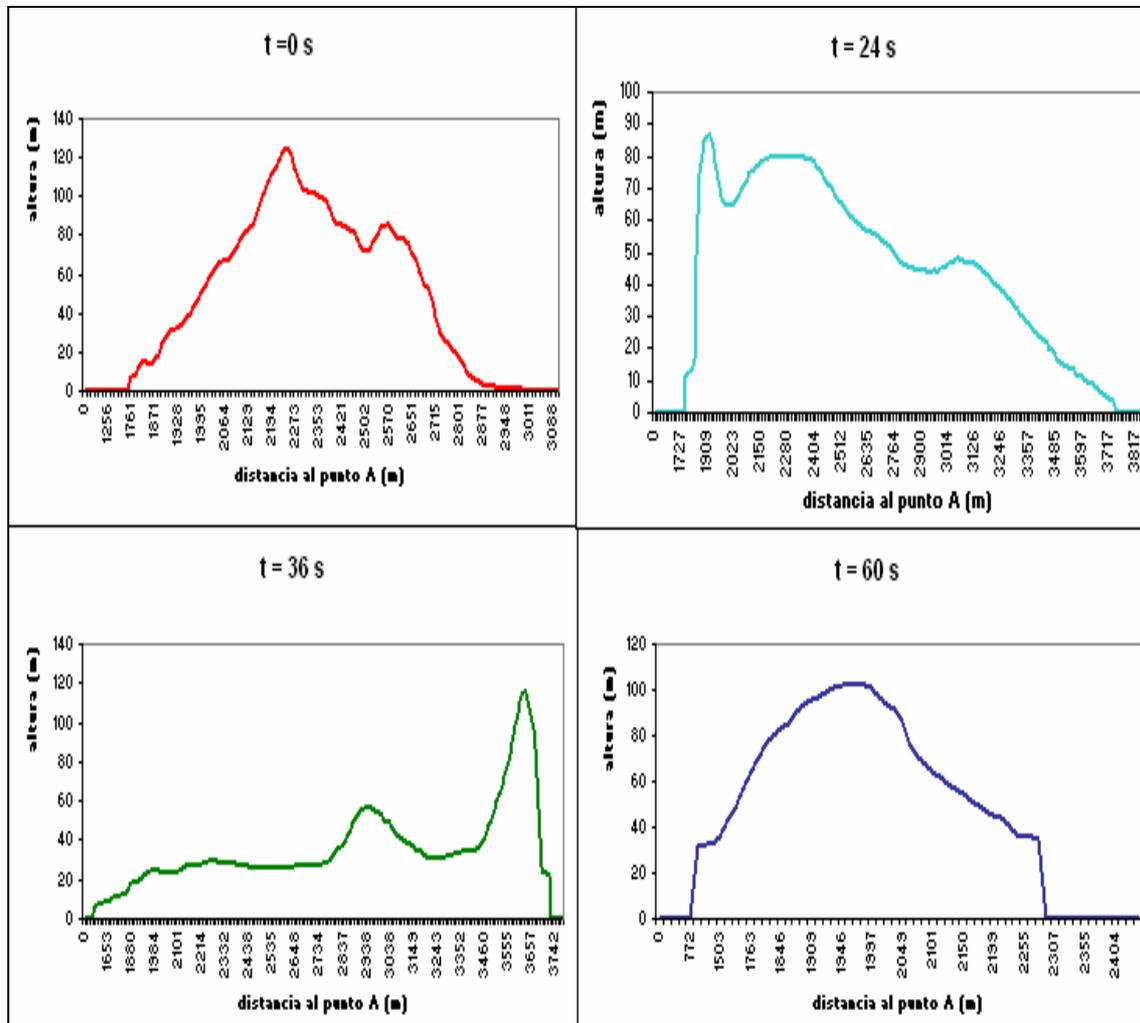


Figura 6.24. Evolución de la altura del material a los largo del perfil AA'.

Como viene reflejado en las figuras precedentes, la simulación mediante SPH de la avalancha de Val Pola predice un tiempo de propagación de 60 segundos y un espesor final del material en el fondo del valle del orden de 100m. Asimismo, la trayectoria del movimiento consiste en que la avalancha se mueve de forma extremadamente rápida por la ladera Este del monte Zandila, llega al fondo del valle del río Adda, sube unos 300m por la ladera opuesta. Al colisionar con el saliente de Plaz la masa se divide en

dos partes, ambas caen hacia el fondo del valle del río Adda, la primera se mueve en dirección Norte y la segunda en dirección Sur. Estos resultados se ajustan satisfactoriamente al evento de julio de 1987 arriba descrito.

Bibliografía:

Azzoni, A., Chiesa, S., Frassoni, A., & Govi, M., (1992) *The Valpola Landslide*, Eng. Geol., 33, pp. 59-70.

Calvetti, F., Crosta, & G., Tatarella, (2000) *Numerical simulation of dry granular flows from the reproduction of small- scale experiments to the prediction of rock avalanches* Rivista Italiana di Geotecnica. Aprile- Giugno, pp 21- 38.

Crosta, G. B., Imposimato, S., & Roddeman, D. G., (2003) *Numerical modelling of large landslides stability an runout*, Natural Hazards and Herat System Sciences, vol. 3, pp. 523-538.

Erismann T. H. & Abele G. (Eds) (2001) *Dynamics of Rockslides & Rockfalls*, springer.

González, E., (2003) *Aspectos geomecánicos de los deslizamientos rápidos: modelización y diseño de estructuras de contención*, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

González, E., Herreros, M. I., Pastor M., Quevedo, M., Fernández Merodo, J.A., (2002) *Discrete and continuum approaches for fast landslide modelling*. Proceedings of the 1st International PFC Symposium, Genselkirchen, pp. 307-313.

Goví, M., (1988) *The 1987 landslide on Mount Zandila in Valtellina (North Italy)*. Landslide News, Geol. Surv. Denver Fed. Center.

Goví, M., (1989) *The 1987 landslide on Mount Zandila in the Valtellina, northen Italy*. Landslide News, Japan Landslide Soc., vol. 3, pp. 1-3.

Herreros, M. I.,(2002), *Desarrollo de modelos numéricos aplicados a hidráulica ambiental*, Ph.D.Thesis, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Pastor, M.,(2007), *Modelos numéricos para ecuaciones y sistemas hiperbólicos de primer orden*, monografía. Curso de cálculo numérico, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Regione Lombardia- Convenzione Regione Lombardia- ISMES, (1988a.) *Esecuzione di rilievi geologici e geostrutturali di campagna sulla frana di Val Pola*. RTF-DGM-02150.

Regione Lombardia- Convenzione Regione Lombardia- ISMES, (1988b) *Analisi di stabilità del versante in frana della Val Pola mediante lo Studio di cunei potenzialmente instabili*. RAT-DMM-02167.

Toro, E. F., (2001), *Shock – capturing methods for free surface shallow flows* , John wileys & Sons.

CAPÍTULO 7

MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE LOS LAHARES DEL POPOCATÉPETL

7.1. Introducción:

La comunidad científica define los lahares como flujos rápidos de una mezcla de agua y derrubios altamente concentrados que tienen lugar en laderas volcánicas (Thouret & Lavigne, 2000). Este tipo de procesos son altamente destructivos debido al enorme volumen de material movilizado y a su capacidad para recorrer grandes distancias. Además, el riesgo asociado a la ocurrencia de este tipo de procesos puede verse incrementado debido a la elevada densidad demográfica que con frecuencia existe en estas áreas.

Una región que cumple con las características antedichas es el entorno del volcán Popocatepetl (figura 7.1.), que se sitúa a 70 Km, al sureste de la Ciudad de México, y

que cuenta con una población de cuarenta millones de habitantes. La región está amenazada por tres tipologías de peligrosidad volcánica asociada a la actividad eruptiva del Popocatepetl: a) Flujos calientes de material volcánico; b) lahares; c) lluvia de material volcánico (Macías *et al.*, 1995). De hecho, en diciembre de 2000 más de 40.000 personas fueron evacuadas debido a la actividad del volcán.



Figura 7.1. El volcán Popocatepetl (cortesía de D. Palacios)

La actividad reciente del Popocatepetl ha causado varios eventos laháricos, de los cuales los más destacados han sido el lahar que tuvo lugar varias horas después de la erupción de julio de 1997 y el acontecido en enero de 2001. Los mismos, recorrieron una distancia de aproximadamente 12 Km, llegando a las puertas del pueblo de Santiago Xalitzintla. En este punto, el lahar de 1997 se había convertido en una

arroyada cargada de sedimentos, mientras que el del 2001 mantuvo sus características de flujo de derrubios, incrementándose como consecuencia su poder destructivo (Capra *et al.*, 2004).

Con el objeto de prevenir las consecuencias potencialmente catastróficas de este fenómeno, se necesita de estructuras adecuadas de protección y canalización o, al menos, de la implementación de planes de respuesta eficientes en caso de emergencia. En este contexto, la modelización numérica se presenta como una herramienta potente a la hora de predecir el trayecto más probable en unas condiciones determinadas, así como las áreas de inundación resultantes.

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos mediante el programa de elementos finitos GEOFLOW2D, así como los derivados por el método SPH. Dichos programas son capaces de predecir las características del flujo, quedando las mismas definidas por: a) el trayecto de propagación del flujo; b) la velocidad; c) la distancia recorrida en tiempo real; d) la altura del flujo.

7.2. Área de Estudio:

El Popocatepetl (19.02° N, 98.62° W) se encuentra en el límite de los estados mexicanos de Morelos, México, y Puebla. Cuenta con una altitud de 5452 m y ha quedado clasificado dentro de la tipología de los *Stratovolcanos*. El volcán pertenece a la cordillera volcánica Trans-Méxicana, que atraviesa México de Este a Oeste entre los paralelos 19° y 20°N. En el sector central de dicha cordillera se levanta el macizo montañoso de Sierra Nevada, formado por el Popocatepetl en su extremo sur, y continuado hacia el norte por los volcanes de Iztaccihualt, Telaron y Tlaloc (figura 7.2.).

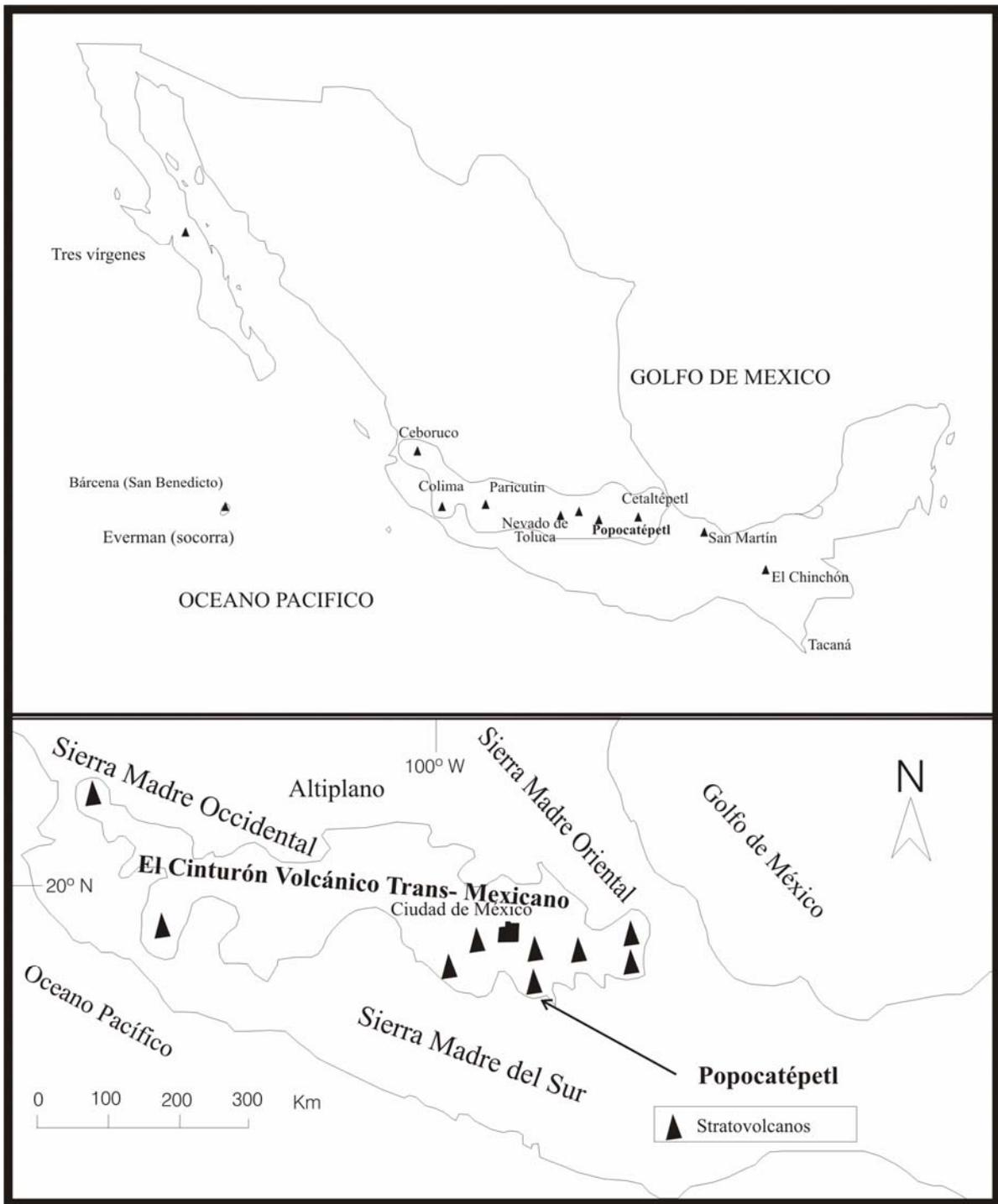


Figura 7.2. Localización del cinturón volcánico Trans-Mexicano (CVTM) y de los volcanes activos en el territorio mexicano.

El cono del Popocatepetl se formó sobre la cicatriz de un antiguo volcán que colapsó hacia el Sur formando avalanchas de derrubios. Su formación tuvo lugar gracias al emplazamiento de flujos de lavas andesíticas y dacíticas y al menos ocho erupciones plinianas. Las dos últimas tuvieron lugar en el siglo I (después de cristo) y entre los años 700 y 850, respectivamente (Plunkett & Uruñuela, 1998). En los últimos 500 años se han producido 13 episodios eruptivos menores, comenzando el último en diciembre de 1994. El episodio anterior a éste tuvo lugar entre 1919 y 1927 y fue muy similar al acontecido en diciembre de 1994. La actividad eruptiva se concretó en el crecimiento de domos y su posterior destrucción, acompañados con explosiones moderadas y exhalaciones frecuentes.

Tras varias décadas de tranquilidad relativa, el Popocatepetl incrementó su actividad sísmica y volcánica hasta desencadenar la erupción del 21 de diciembre de 1994. Después de febrero de 1995, la emisión de cenizas se hizo más esporádica, finalizando en abril del mismo año. El 5 de marzo de 1996 el volcán entró de nuevo en erupción. Desde entonces, se han registrado de forma intermitente, tanto la formación de domos en el cráter y su posterior destrucción por eventos explosivos como erupciones de cenizas de intensidad pequeña a moderada. Sin embargo, la intensa actividad registrada en diciembre del 2000, dio lugar el 22 de enero de 2001 a la erupción reciente más grande del Popocatepetl.

Por otro lado, el glaciar existente en la cara Norte del volcán se ha visto alterado, tanto por los cambios climáticos como por la actividad volcánica. El deshielo repentino causado por actividad del volcán, ha generado volúmenes importantes de agua, que históricamente han desencadenado lahares que recorrían los flancos del volcán.

7.3. Lahares del Popocatépetl y datos de partida:

7.3.1. El lahar del 1 de julio de 1997:

El 30 de junio de 1997 se registró el evento eruptivo más grande desde el inicio de la actividad volcánica en 1994. La erupción del 30 de junio de 1997 fue precedida por una serie de sismos volcano-tectónicos que iniciaron a las 22:56h de ese día. Varios sismos con magnitud en el rango de 2 a 2,7 fueron detectados a lo largo de un intervalo de 13 minutos. La erupción comenzó a las 23:11h y tuvo dos pulsos principales; el primero duró 135 minutos, mientras que el segundo comenzó a las 01:26 h del día 1 de julio y duró alrededor de 90 minutos. Esta erupción generó una enorme pluma que alcanzó en unos pocos minutos los 8 km de altura. Durante las 2-3 horas siguientes se informó acerca de la caída de cenizas en muchas poblaciones alrededor del volcán, incluyendo Ciudad de México. En los días siguientes a la erupción, inspecciones aéreas sobre el volcán mostraron una significativa subsidencia en la parte central del domo de lava que comenzó a crecer en el fondo del cráter del Popocatépetl antes del 30 de junio (CENAPRED, 2001).

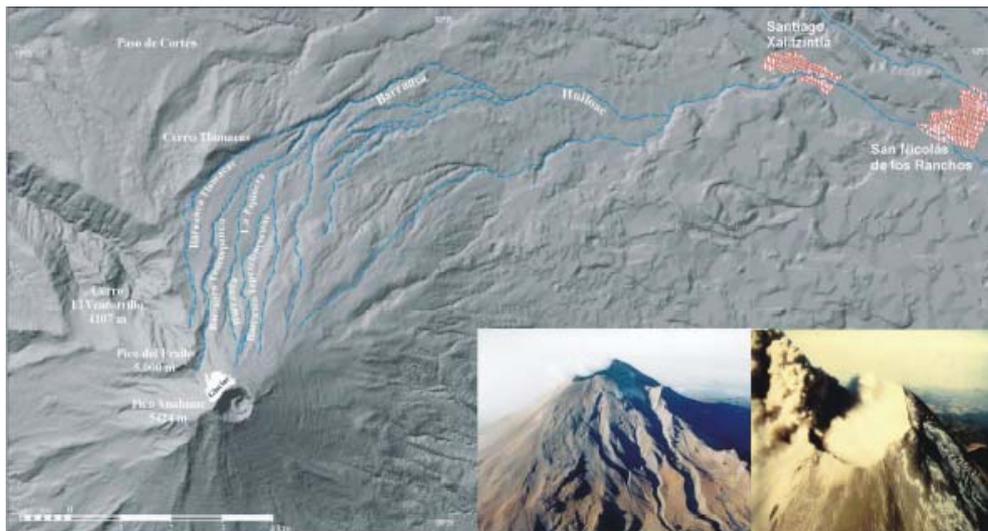


Figura 7.3. Gráfico de localización de la barranca Tenenpanco-Huiloac (Muñoz, 2004).

Debido a la explosión del 30 de junio de 1997 una capa de cenizas cubrió gran parte del glaciar, lo cual provocó, según Palacios et al., 2001 y Sheridan et al., 2001 su deshielo parcial. La escorrentía resultante ($1 \times 10^7 \text{ m}^3$ de agua liberada), saturó los materiales de la cabecera de las tres barrancas de la ladera norte del Popocatépetl, a saber: Tenenepanco, la Espinera y Tepeteloncocone (figura 7.3.) y como resultado se desencadenaron los flujos laháricos del día 1 de julio de 1997. Éstos se movilizaron a favor de la ladera norte del volcán, canalizándose inmediatamente por las barrancas Tenenepanco, la Espinera y Tepeteloncocone. Finalmente, todos ellos confluyeron en el canal Huiloac, movilizandolos materiales no consolidados del canal y propagándose el flujo hasta llegar al pueblo de Santiago de Xalizintla donde finalizó el movimiento (figura 7.4.).

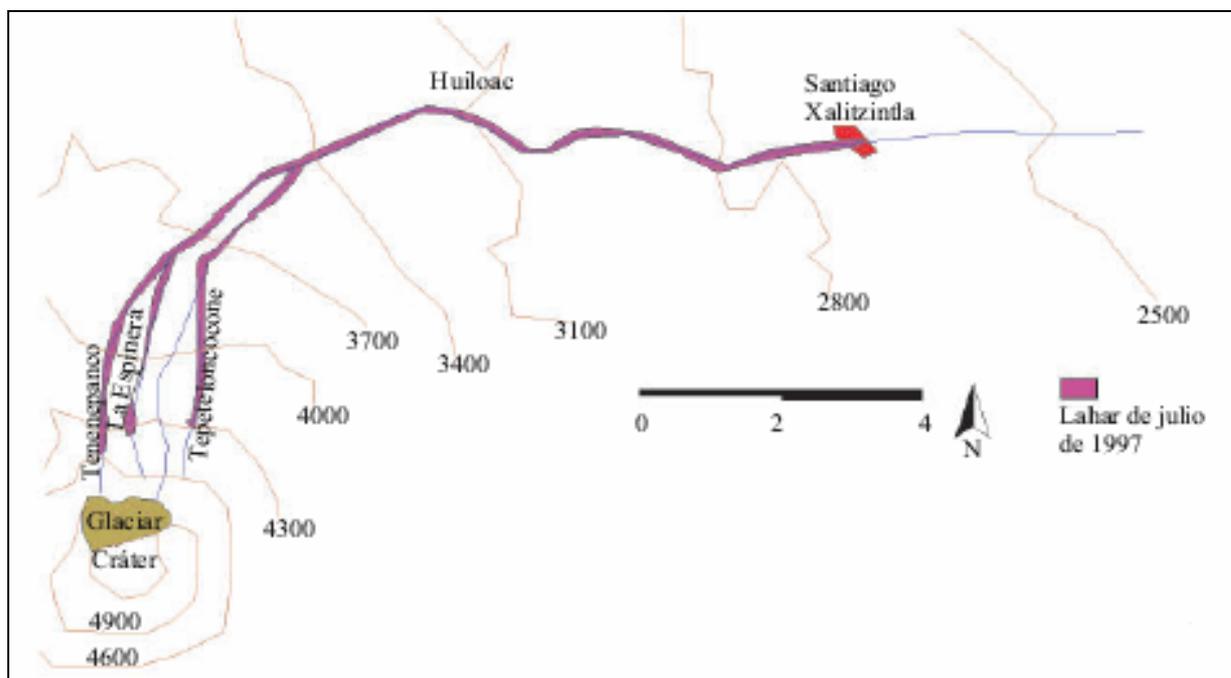


Figura 7.4. Trayectoria del lahar de 1997 (Muñoz, 2004).

El lahar de 1997 se comportó como un flujo de arroyada hiperconcentrada con régimen turbulento desde el área de cabecera de la barranca Tenenepanco hasta prácticamente su confluencia con Huiloac. Durante este tramo el flujo incrementó su carga sólida, convirtiéndose en la parte central del recorrido en un flujo de derrubios con una elevada carga de sedimentos. En el tramo final, donde la pendiente es menor de 6.5°, el flujo fue depositando materiales al perder capacidad portante. Como resultado, el lahar se transformó en un flujo de arroyada hiperconcentrada. A la altura de Santiago de Xalizintla, según Espíndola (1999), el flujo era principalmente una corriente de "aguas claras". Según este mismo autor, el tiempo transcurrido desde la erupción hasta que se produjo el lahar fue de dos días. Sin embargo Sheridan (2001) estima que este proceso se desarrolló en 24h, siendo el volumen del depósito estimado por este último del orden de $3.3 \times 10^5 \text{ m}^3$.

7.3.2. El lahar del 22 de enero del 2001:

El 22 de enero, a las 14:58h, tuvo lugar un seísmo de origen volcano-tectónico de magnitud 2,8 localizado al este del cráter. A las 15:15h, el volcán inicio una exhalación de vapor de agua, que alcanzó 1 km de altura. A las 16:15h, comenzó una exhalación grande de pómez y cenizas. A las 16:23h se incrementó la explosividad de esta emisión generando flujos piroclásticos que descendieron por las barrancas del volcán hasta distancias estimadas de 4 a 6 km (Sheridan *et al.*, 2001).



Figura 7.5. Parte del trayecto del lahar de 2001

Aproximadamente 4h después de que aconteciera la erupción, se generó el lahar del 2001 en la 'barranca' Tenenepanco, continuando seguidamente por Huiloac (Sheridan et al., 2001) (figura 7.6). El movimiento en masa recorrió un total de 12 Km, interrumpiéndose el proceso a 2 Km del pueblo de Santiago Xalitzintla. En este lugar el lahar acarreó bloques de hasta 0,5m de diámetro (CENAPRED, 2001).

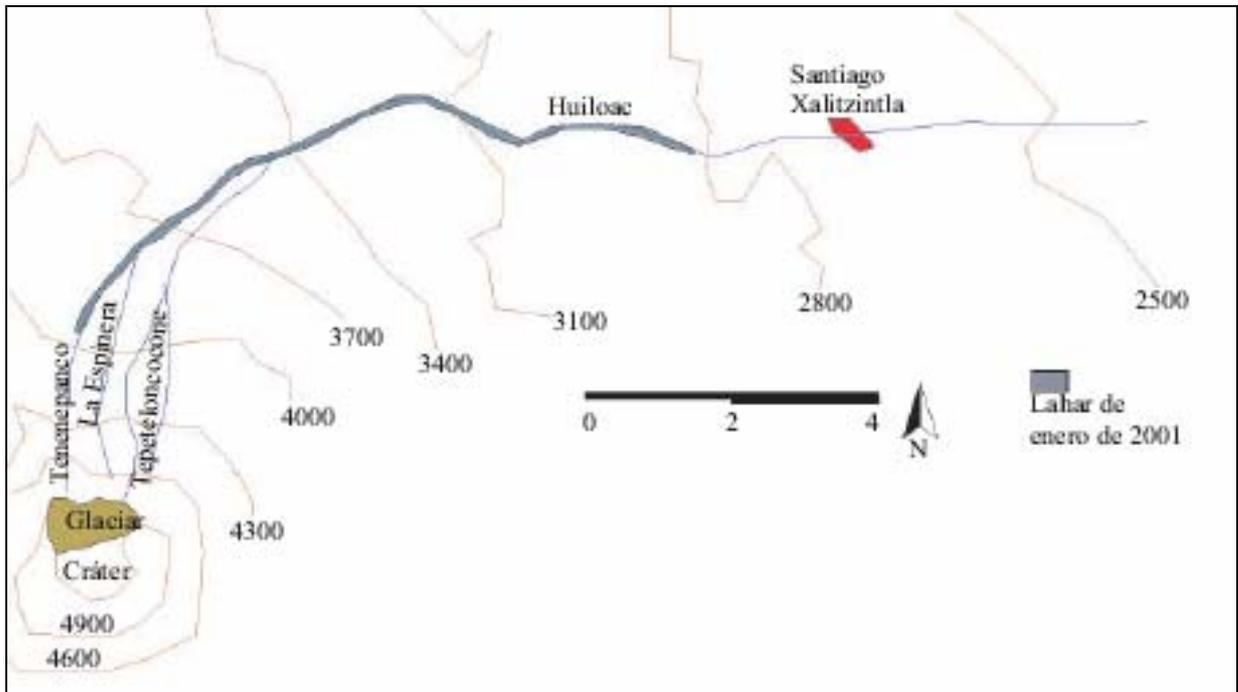


Figura 7.6. Trayectoria del lahar de 2001 (E. Muñoz, 2004).

A diferencia del lahar de 1997, la principal fuente suministradora de agua en la formación del lahar de 2001 provino de la condensación del vapor de agua durante el flujo piroclástico acontecido unas horas antes (proceso de condensación post deposicional (Sheridan et al., 2001)). Asimismo, el volumen de agua en la mezcla que componía el flujo lahárico de 1997 fue mucho mayor que el volumen correspondiente a la mezcla del 2001.



Figura 7.7. Depósito del lahar de 2001 sobre el depósito del lahar de 1997 (cortesía de D. Palacios)

Este lahar se ha caracterizado como un flujo de derrubios que se mantuvo como tal durante la totalidad del trayecto no evolucionando, por tanto, a un flujo hiperconcentrado, o arroyada simple (Capra *et al.*, 2004).

Dicho flujo no tuvo riesgo para la población al no alcanzar ningún área habitada. Aunque es conveniente destacar que sus características hidrológicas y reológicas fueron más destructivas que las del lahar de 1997. Por lo tanto, el lahar de 2001 habría provocado más daños de haber llegado a alcanzar la población de Santiago Xalitzintla.



Figura 7.8. Tronco arrastrado por el lahar de 2001 (cortesía de D. Palacios).

7.3.3. Datos de partida:

La figura 7.11. recoge la información en la que se ha basado esta modelización. La misma consta de una topografía del área de estudio a escala 1/50.000 con equidistancia de 20m (UTM1927 zon 18), así como de un levantamiento de detalle en el canal del flujo con una resolución de 2m x 2m realizado en el marco del proyecto LAHAR (figura 7.9.).



Figura 7.9. Levantamiento topográfico de detalle en el canal Tenenpanco-Huiloac (cortesía de D. Palacios)

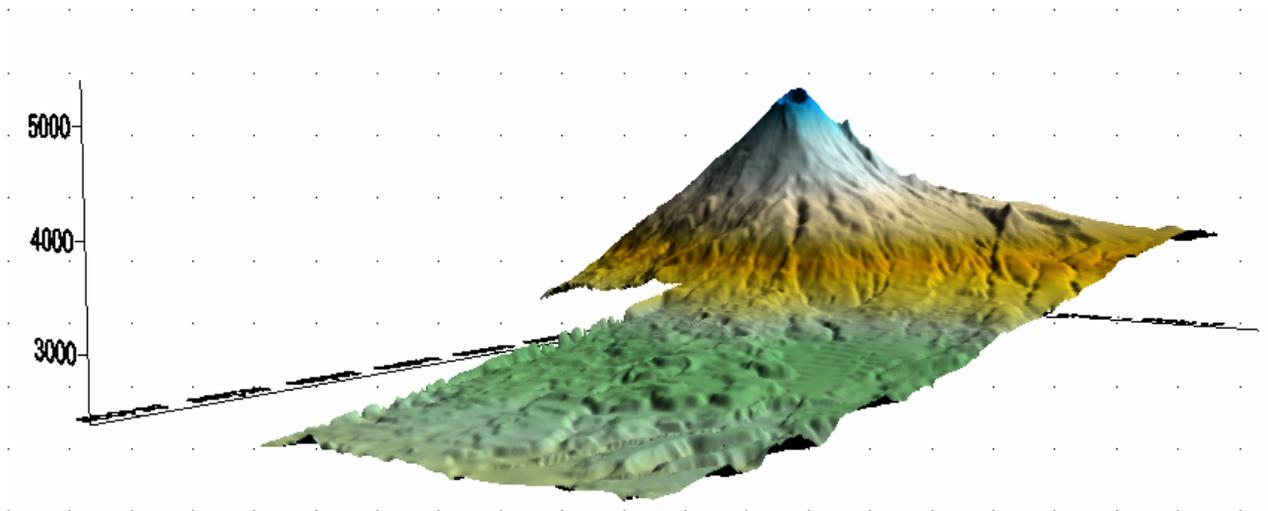
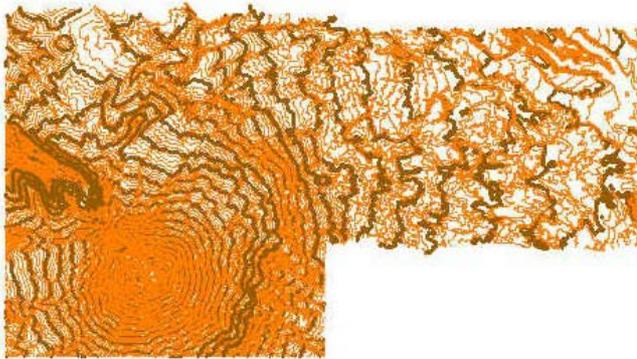


Figura 7.10. Modelo digital del terreno elaborado a partir de la topografía disponible (surfer 8).

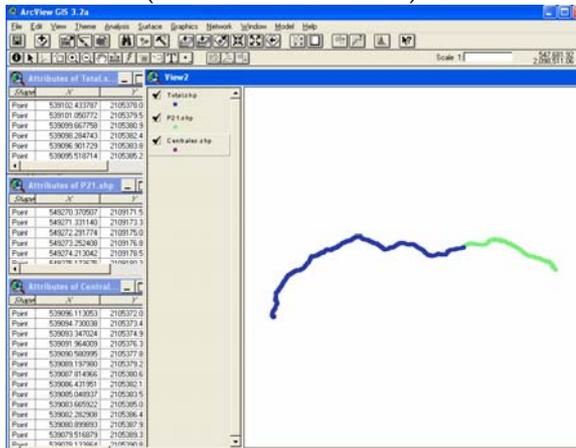
Popocatépetl

Topografía

Escala 1/50.000 con equidistancia de 20m (resolución 20 x 20) UTM1927 zon18



Topografía del canal Tenenpanco-Huilcoac en formato shape de arcview (resolución 2m x 2m)



Lahar del 1 de Julio de 1997

Clasificación	Flujo de derrubios- Flujo hiperconcentrado (Capra et al., 2004)
Iniciación	<ul style="list-style-type: none"> - Aporte del agua: agua liberada por el glaciar. - Abundancia de material no consolidado. - Pendiente: superior a 11°. - Mecanismo desencadenante: deshielo parcial del glaciar.
Material	Volumen de agua: 1.10^7 m^3 Porcentaje de agua en la mezcla: 75% (Sheridan et al., 2001)
	Porcentaje de finos: 20% (Capra et al., 2004)
Características	Volumen del depósito: $3,3 \cdot 10^5 \text{ m}^3$ (Sheridan, 2001)

del evento	Distancia recorrida: del orden de 12 km. Tiempo de propagación: 1-2 días
Lahar del 22 de enero de 2001	
Clasificación	Flujo de derrubios
Iniciación	<ul style="list-style-type: none"> - Aporte del agua: principalmente desde la condensación del vapor de agua desde el flujo piroclásticos acontecido unas horas antes (Sheridan, 2001). - Abundancia de material no consolidado. - Pendiente: superior a 11°. - Mecanismo desencadenante: flujo piroclástico generado por la erupción volcánica.
Condición inicial	Coordenadas de origen: X =539.221,50 Y=2106626,42 Z =3920
Material	Volumen de agua: $0,5 \cdot 10^5 \text{ m}^3$ (Iverson et., 1998; Macias et al., 2003; Capra et al., 2004) Porcentaje de agua en la mezcla: máximo 25% (Capra et al., 2004)
	Porcentaje de finos: 5% (Capra et al., 2004)
Características del evento	Volumen: $1,6 \cdot 10^5 \text{ m}^3$
	Distancia recorrida: del orden de 12 km.
	Velocidades estimadas: 8,840 m/s (a altitudes del orden de 3940m), 1,569 m/s (2972 m) y 1,457m/s (2951 m).

Figura 7.11. Ficha de datos de partida de las simulaciones del Popocatepetl.

Por otra parte, los datos referidos a la condición inicial de la masa que movilizó y los referentes, tanto a las propiedades del material como a las características del evento, han sido recopilados de la literatura especializada, así como de la información facilitada por el grupo de investigación dirigido por Dr. Palacios.

7.4. Simulación de los lahares del Popocatépetl mediante SPH:

7.4.1. Elaboración de la malla y condición inicial:

A partir de los datos de topografía se generó una malla tridimensional (*background mesh*) con el módulo “*Get_dtm*” del programa SPH (ver figura 7.12.). Dicha malla esta constituida por 87737 elementos cuadrilaterales.

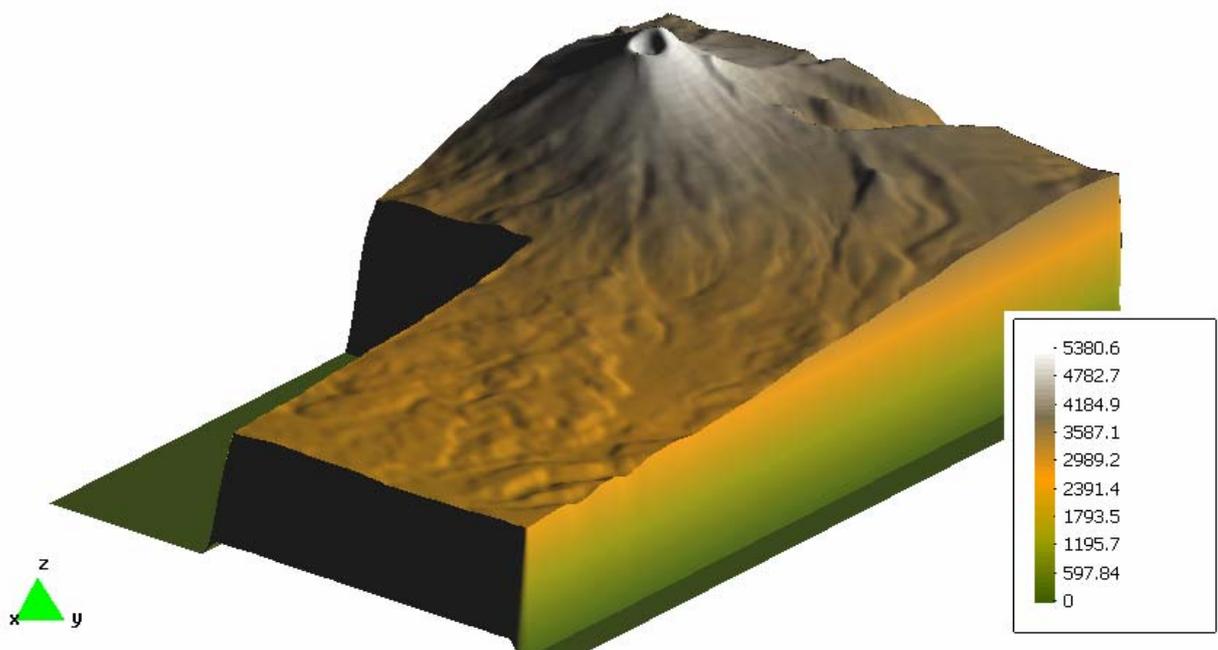


Figura 7.12. Malla tridimensional elaborada por SPH.

Asimismo, la condición inicial empleada en SPH para simular los lahares del Popocatepetl esta definida por 1468 partículas (figura 7.13.)

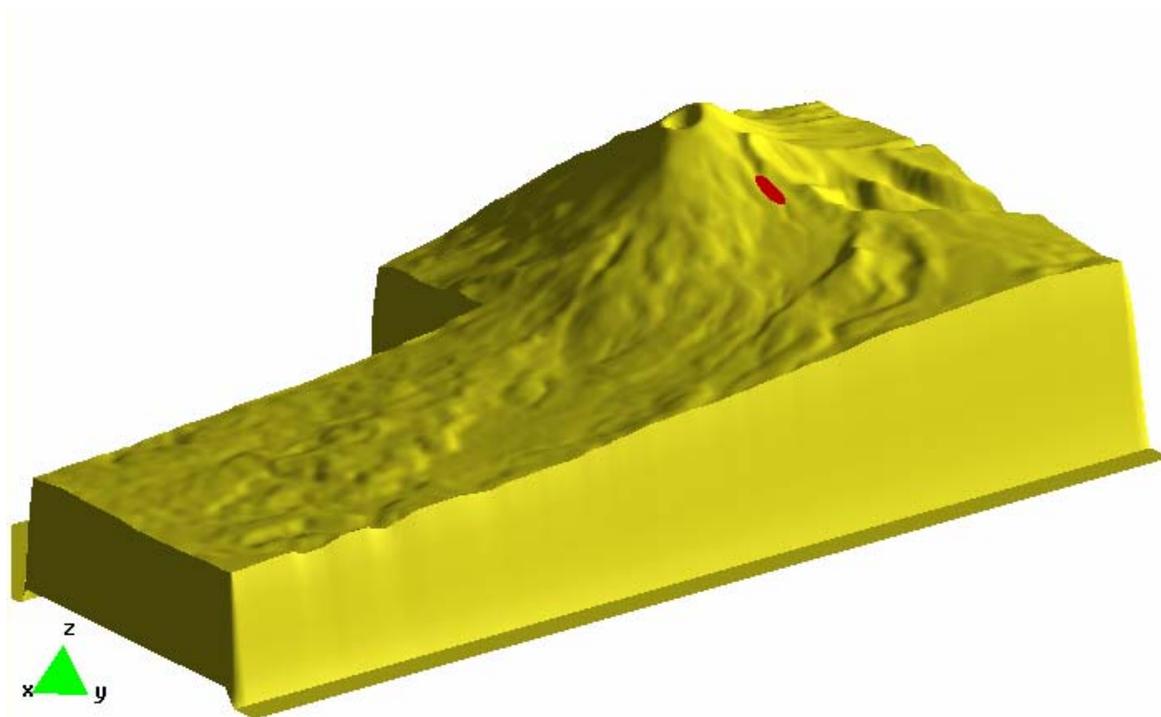


Figura 7.13. Situación inicial de la propagación.

7.4.2. Resultados:

Para la simulación se ha considerado un material tipo Bingham, con una densidad de 1740 kg/m³. Por falta de datos sobre la viscosidad y tensión de fluencia del material se han empleado los valores encontrados en la literatura especializada sobre este tipo de materiales (ver tablas 7.1. y 7.2.)

Autor	ρ (kg/m ³)	τ_y (Pa)	μ (Pa.s)
Jan		100- 160	40- 60
Johnson	2000- 2400	60 – 170- 500	45
Sharp & Nobles	2400		20- 60
Pierson	2090	130-240	210-810

Tabla 7.1.: valores de la densidad, la tensión de fluencia y la viscosidad según autores (Jan, 1997)

Emplazamiento	ρ (kg/m³)	τ_y (Pa)	μ (Pa.s)
Anhui Debris Dam	1570	38	2.1
Aberfan	1764	4794	958
Rudd Creek	1575	956	958

Tabla 7.2.: valores de la densidad, la tensión de fluencia y la viscosidad en distintos emplazamientos (Jin & Fread, 1997)

Partiendo de las tablas 7.1. y 7.2. se han estudiado los siguientes casos:

	Tensión de fluencia τ_y (Pa)	Viscosidad μ (Pa.s)
Caso 1 (Johnson)	60	45
Caso 2 (Johnson)	500	45
Caso 3 (Pierson)	130	210
Caso 3b (Pierson)	130	810
Caso 4 (Pierson)	240	810
Caso 5 (Aberfan)	4794	958
Caso 6 (Anhui)	38	2.1

Tabla 7.3.: casos de estudio

La figura 7.14. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 1 (tensión de fluencia = 60 Pa viscosidad = 45 Pa.s):

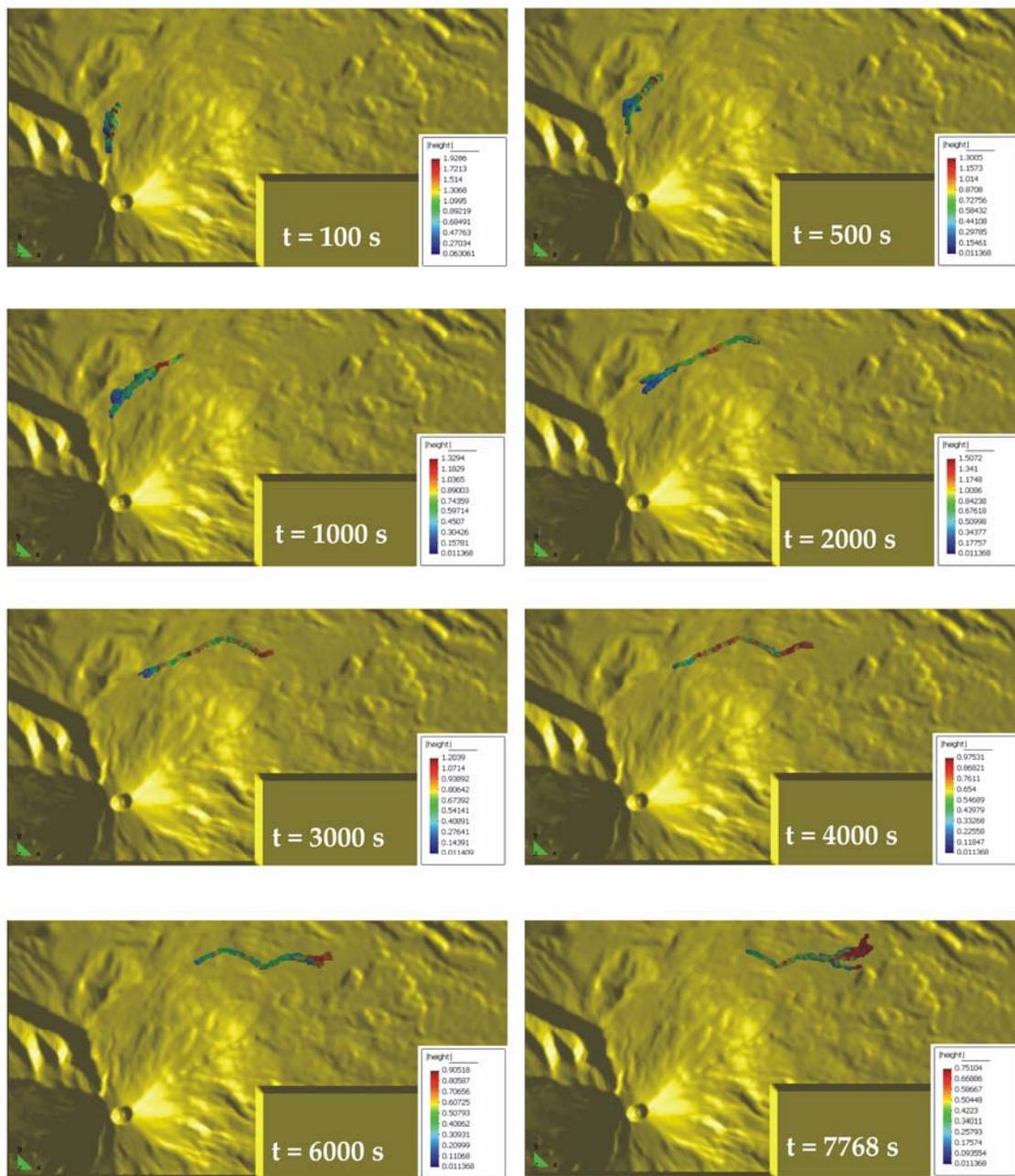


Figura 7.14. Alturas del material en función del tiempo (caso1).

Asimismo, las figuras 7.15. y 7.16. presentan respectivamente las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa.

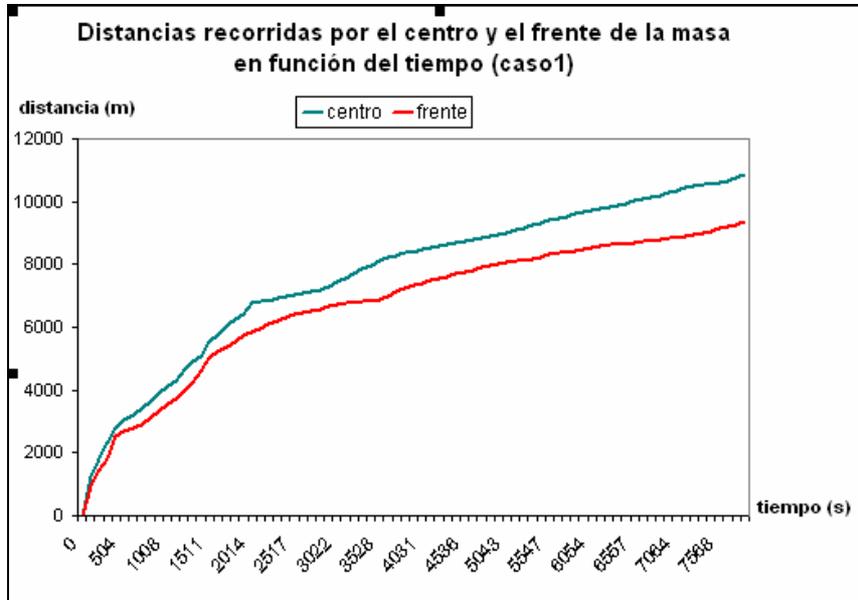


Figura 7.15. Evolución de las distancias recorridas por el centro y el frente de la masa en función del tiempo (caso1).

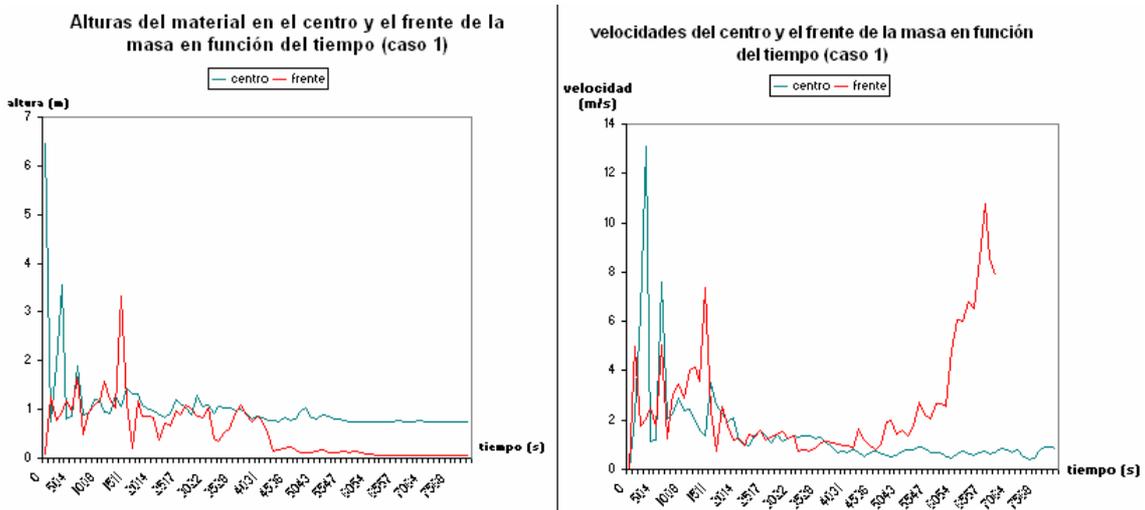


Figura 7.16. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso1).

La figura 7.17. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 2 (tensión de fluencia = 500 Pa , viscosidad = 45 Pa.s):

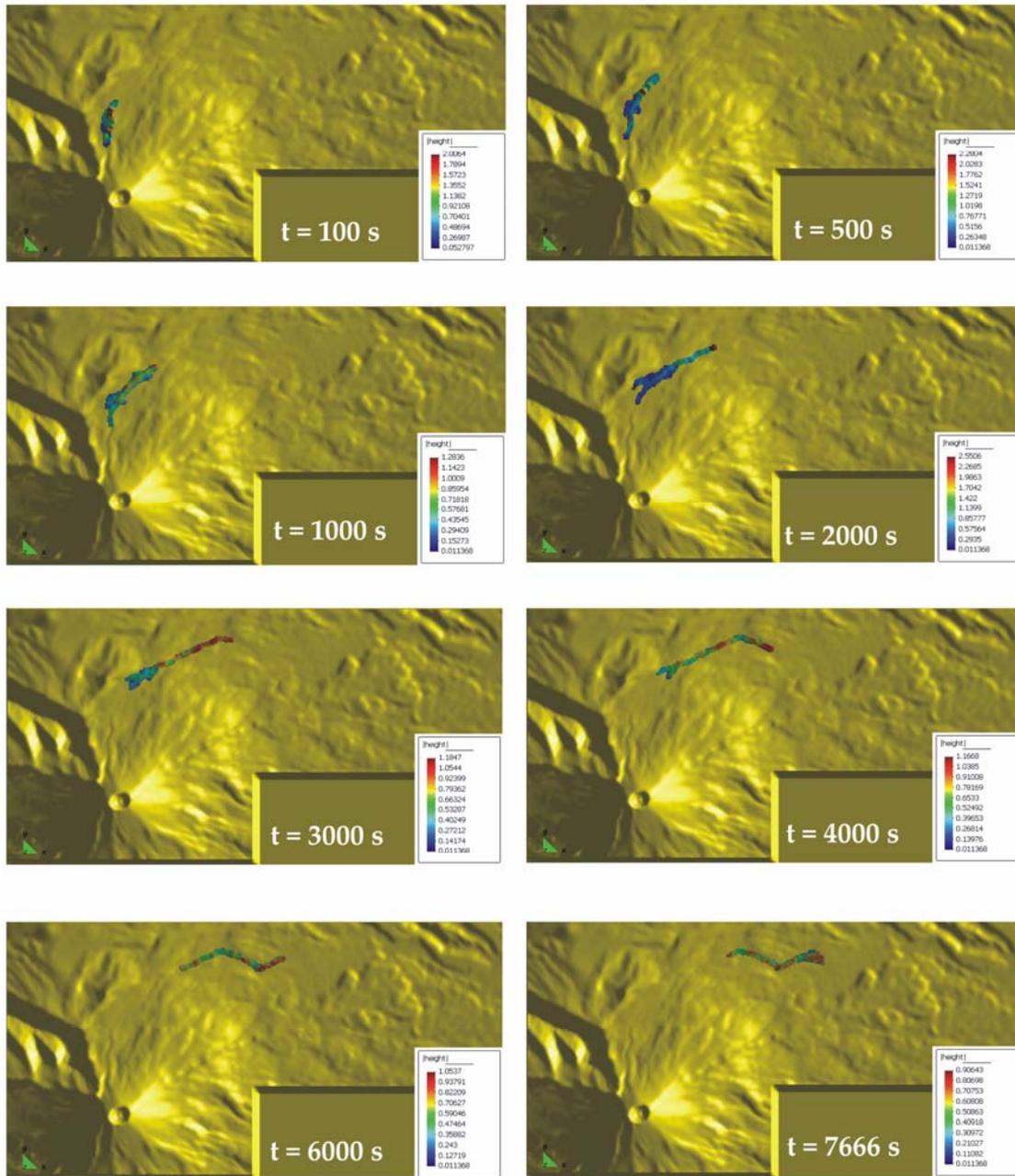


Figura 7.17. Alturas del material en función del tiempo (caso2).

Las figuras 7.18. y 7.19. presentan el efecto de la tensión de fluencia sobre las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro de la masa.

**Distancias recorridas por el centro de la masa
(efecto de la tensión de fluencia)**

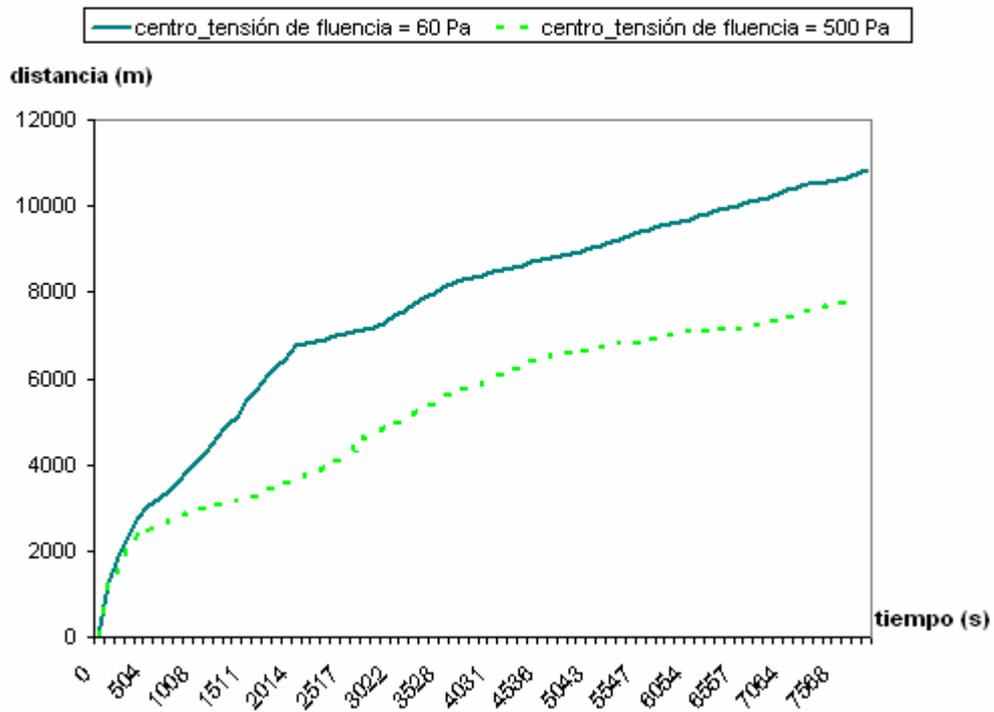


Figura 7.18. Evolución de las distancias recorridas por el centro en función de la tensión de fluencia del material (caso1 - caso2).

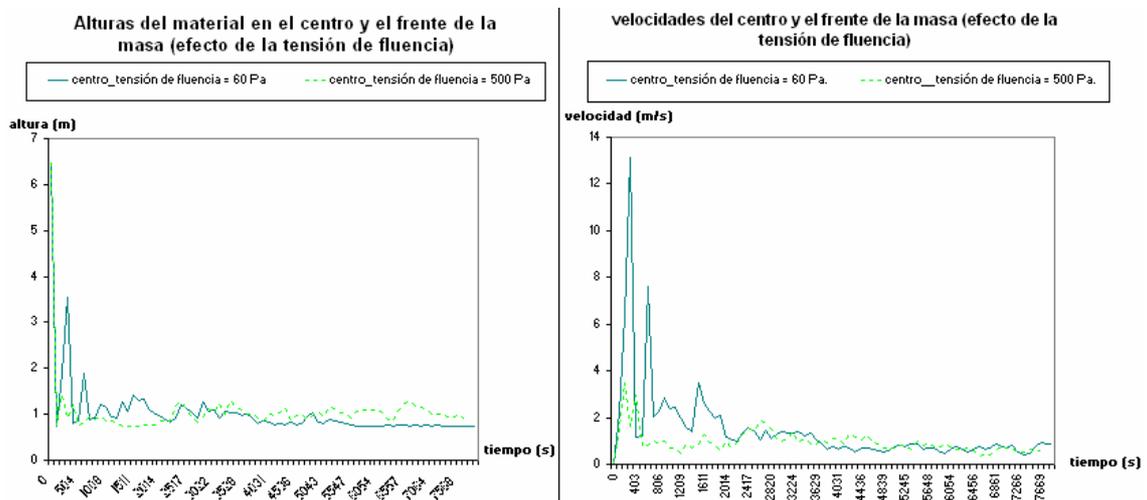


Figura 7.19. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función de la tensión de fluencia del material (caso1 - caso2).

La figura 7.20. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 3 (tensión de fluencia = 130 Pa , viscosidad = 210 Pa.s):

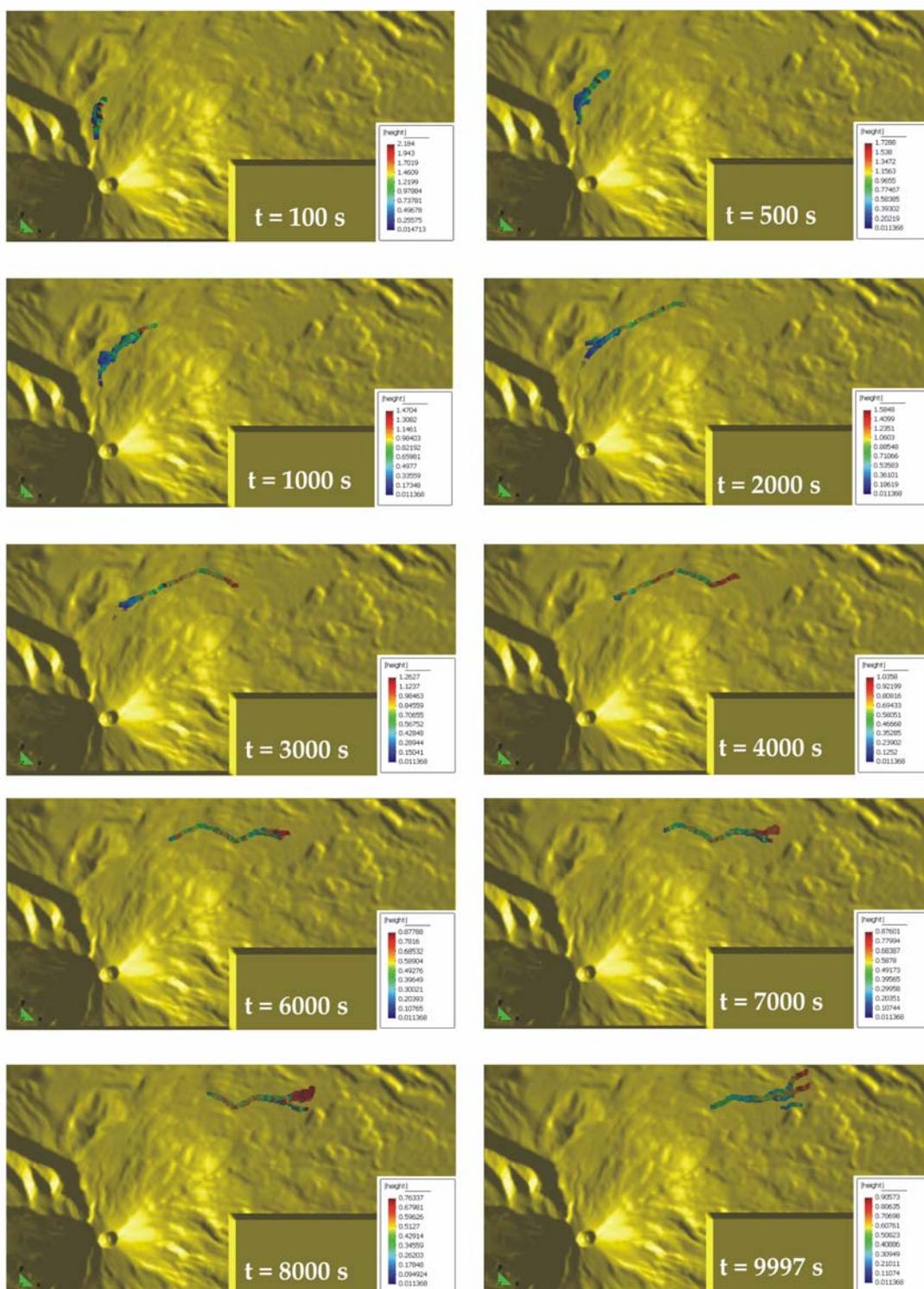


Figura 7.20. Alturas del material en función del tiempo (caso3).

Las figuras 7.21. y 7.22. presentan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa en el caso 3.

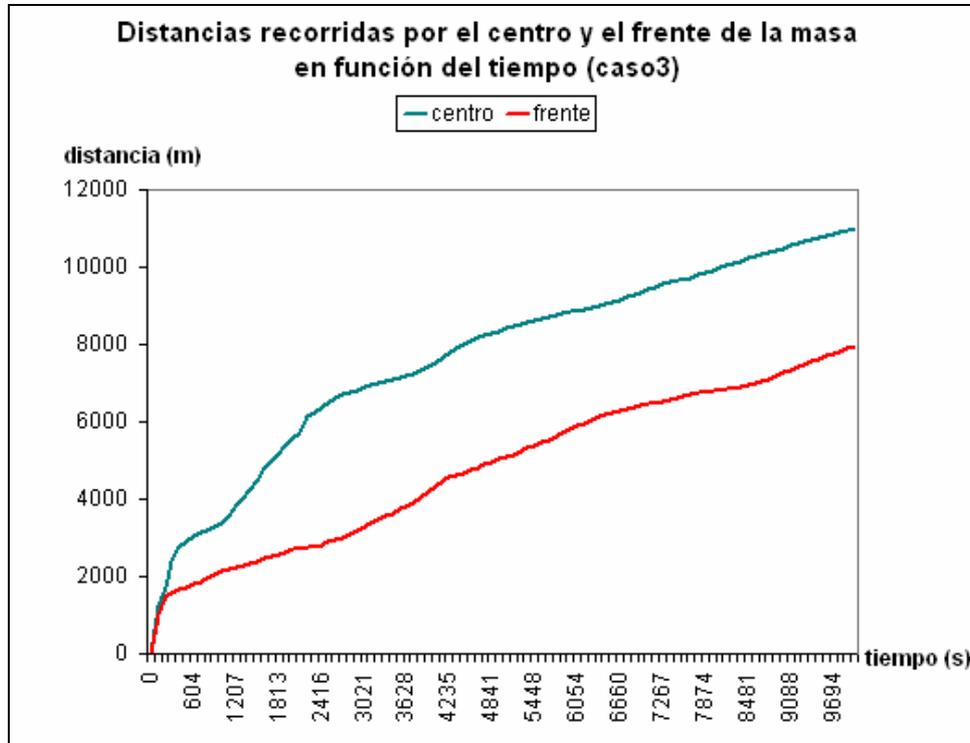


Figura 7.21. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso3).

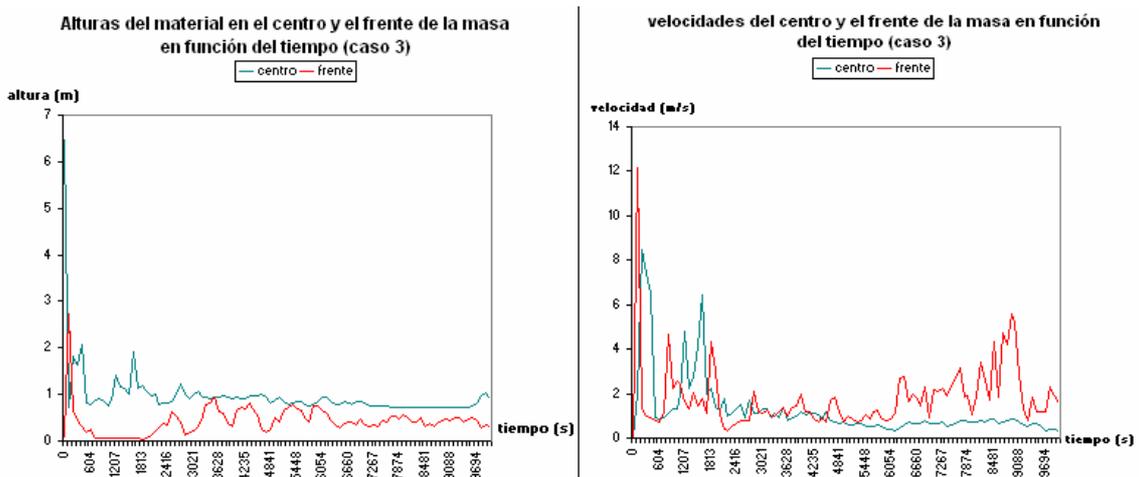


Figura 7.22. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso3).

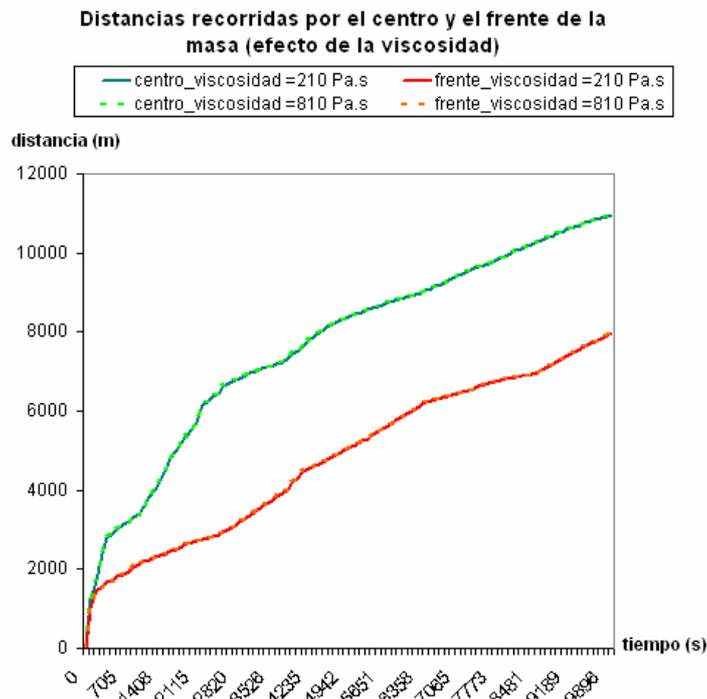


Figura 7.23. Evolución de las distancias recorridas por el centro en función de la tensión de fluencia del material (caso3 – caso3b).

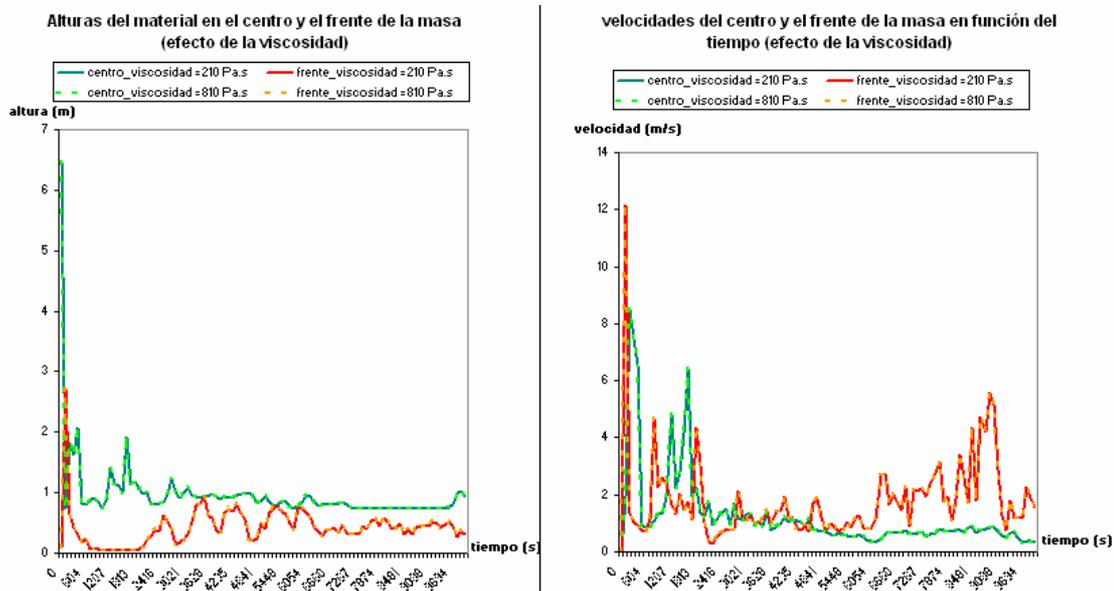


Figura 7.24. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función de la tensión de fluencia del material (caso3 – caso3b).

La figura 7.25. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 4 (tensión de fluencia = 240 Pa , viscosidad = 810 Pa.s):

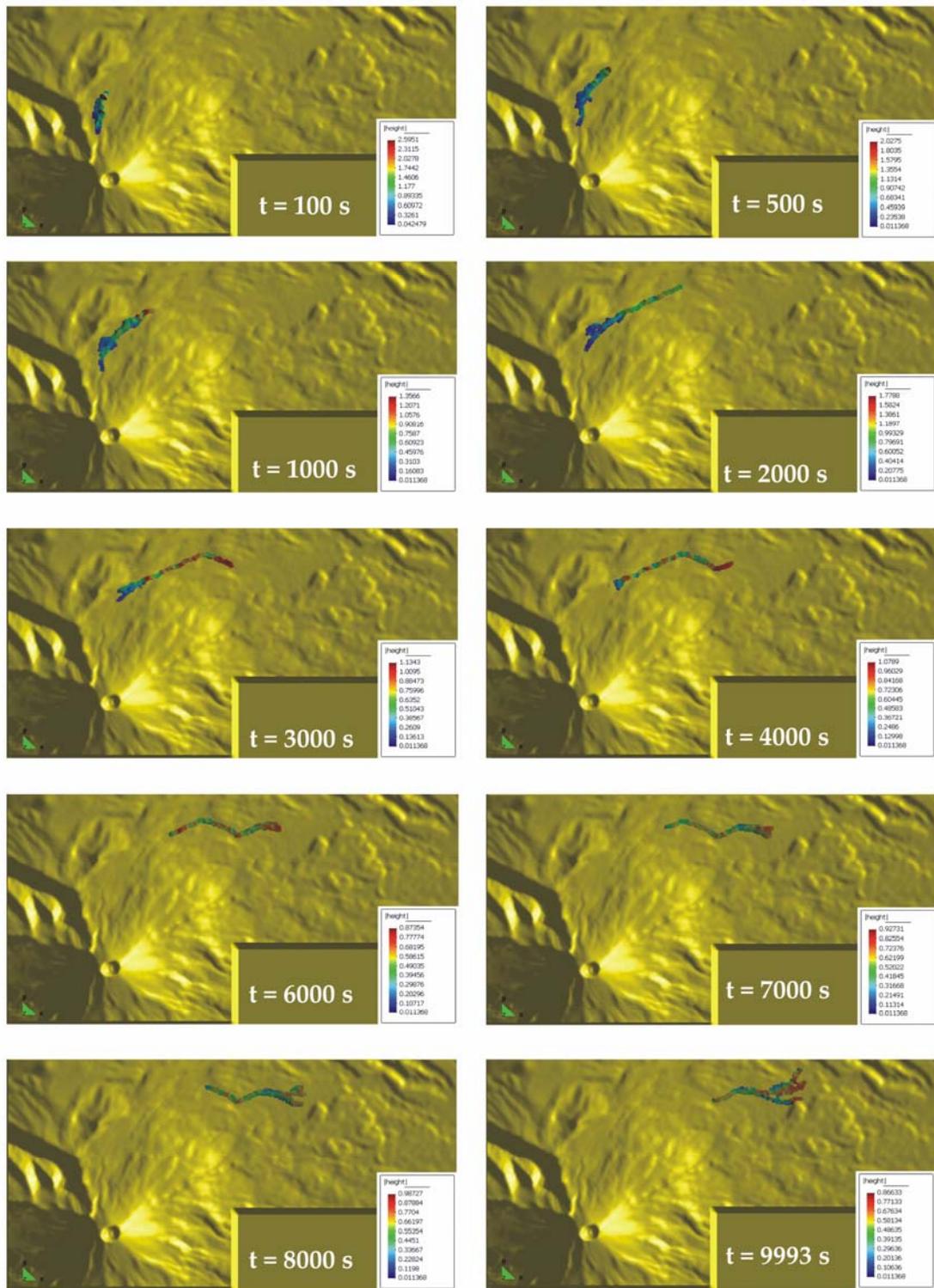


Figura 7.25. Alturas del material en función del tiempo (caso4).

Las figuras 7.26. y 7.27. comparan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa en los caso 3 y 4.

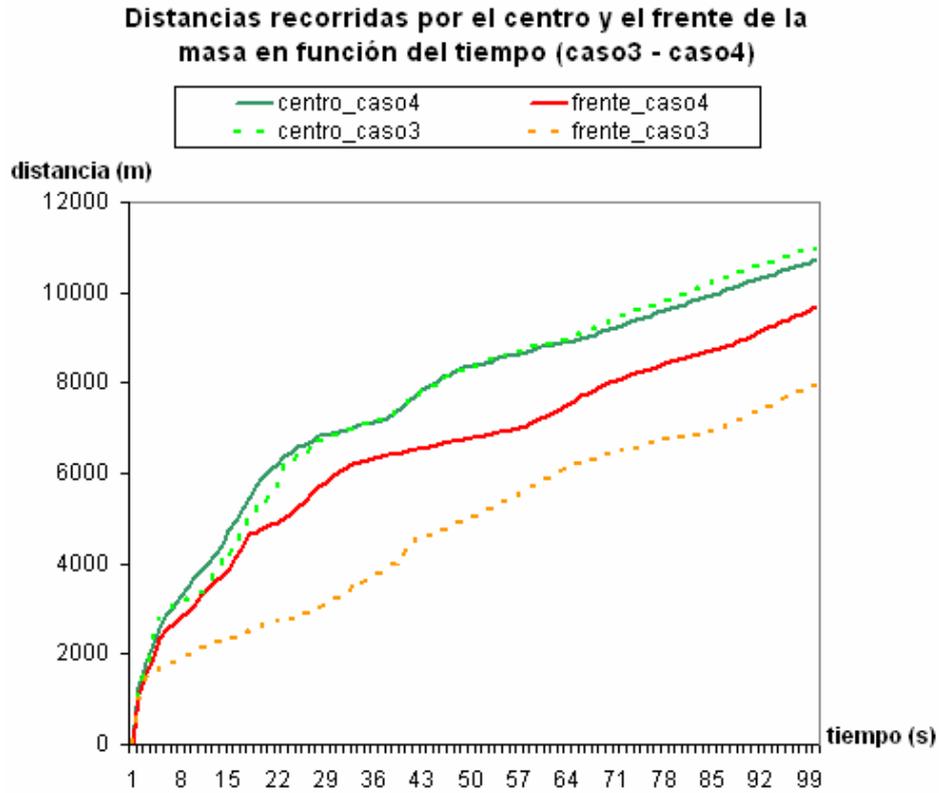


Figura 7.26. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso3- caso4).

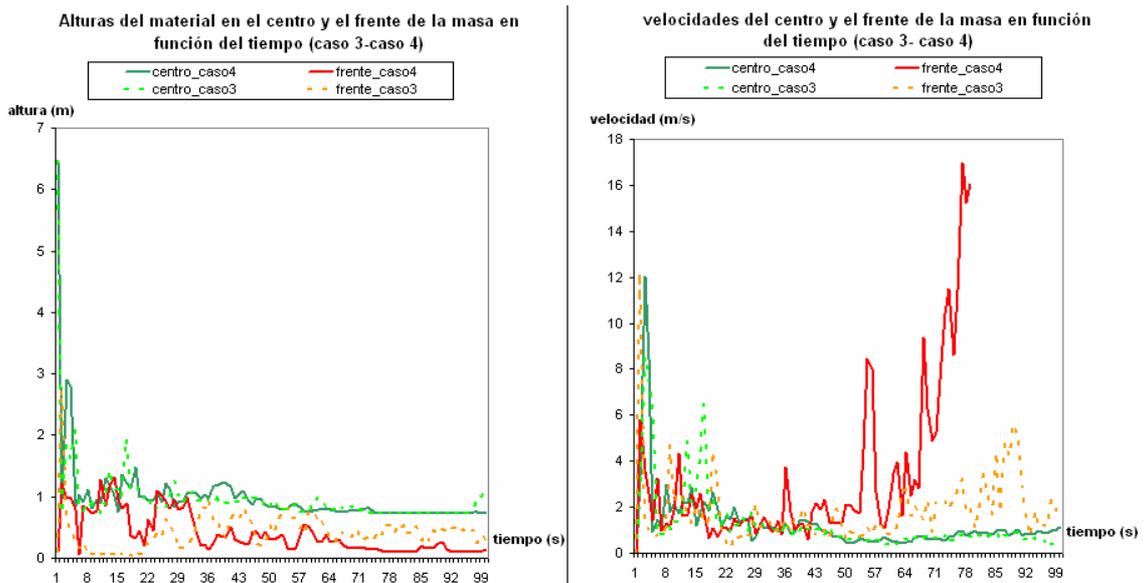


Figura 7.27. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso4).

La figura 7.28. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 5 (tensión de fluencia = 4794 Pa , viscosidad = 958 Pa.s):

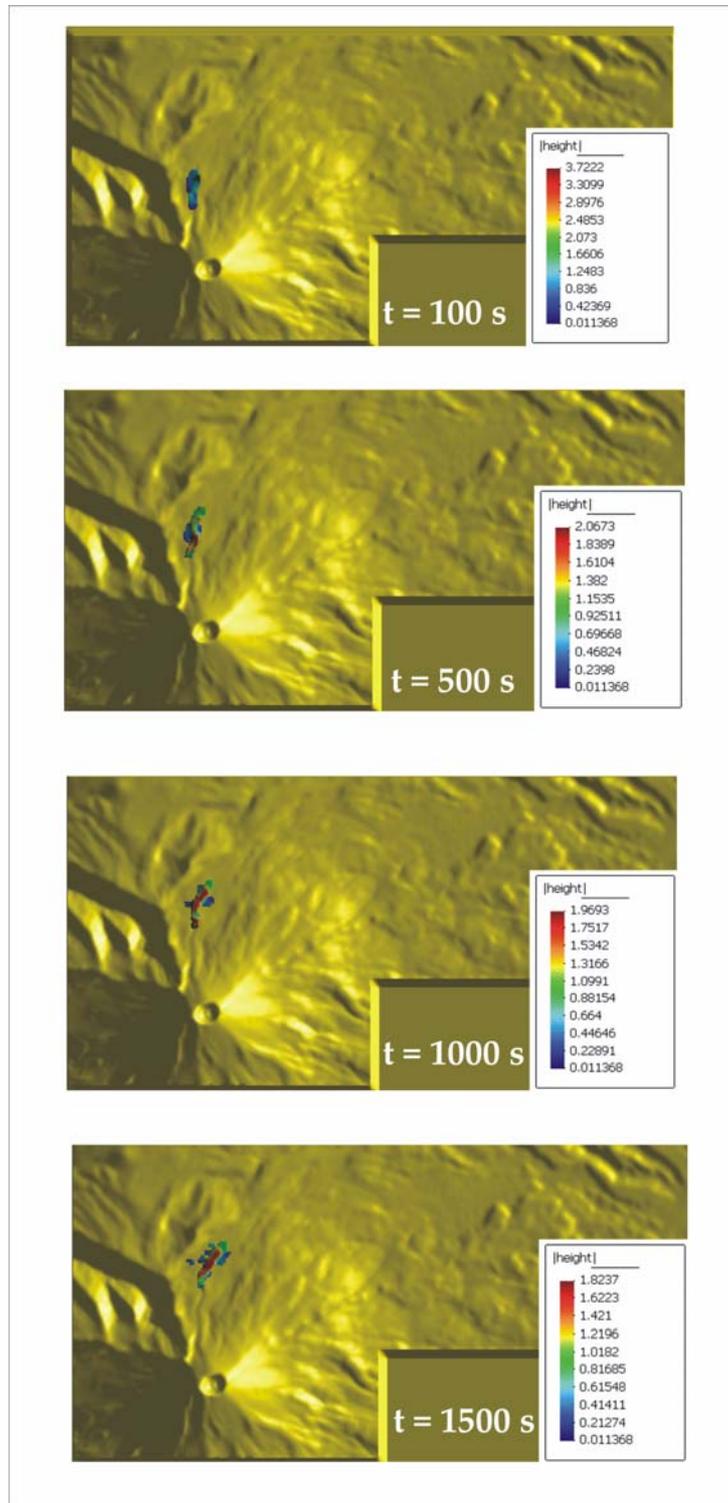


Figura 7.28. Alturas del material en función del tiempo (caso5).

Las figuras 7.29. y 7.30. presentan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa para el caso 5.

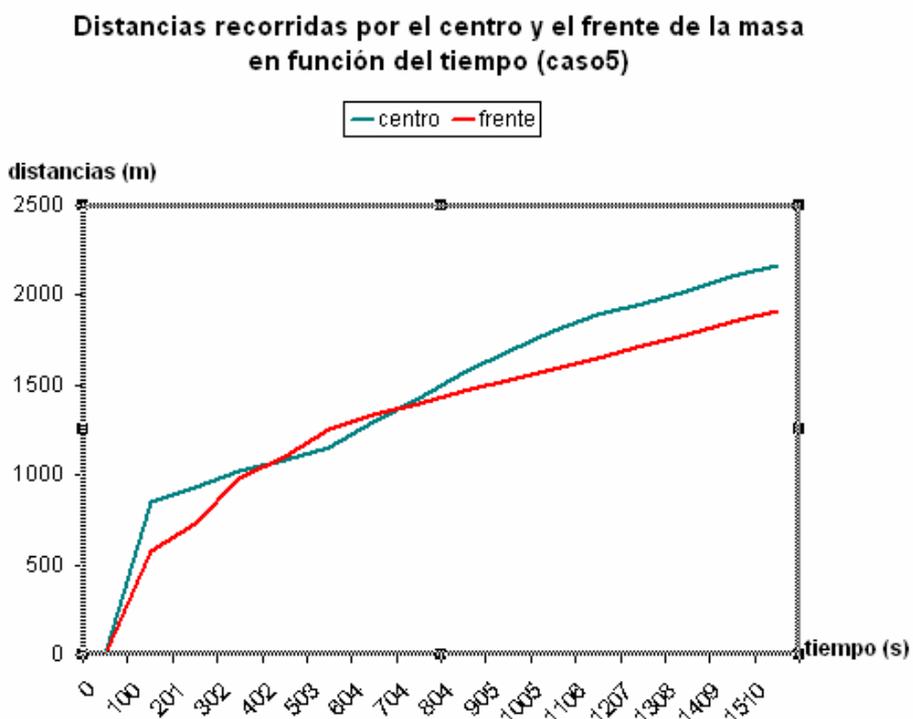


Figura 7.29. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso 5)

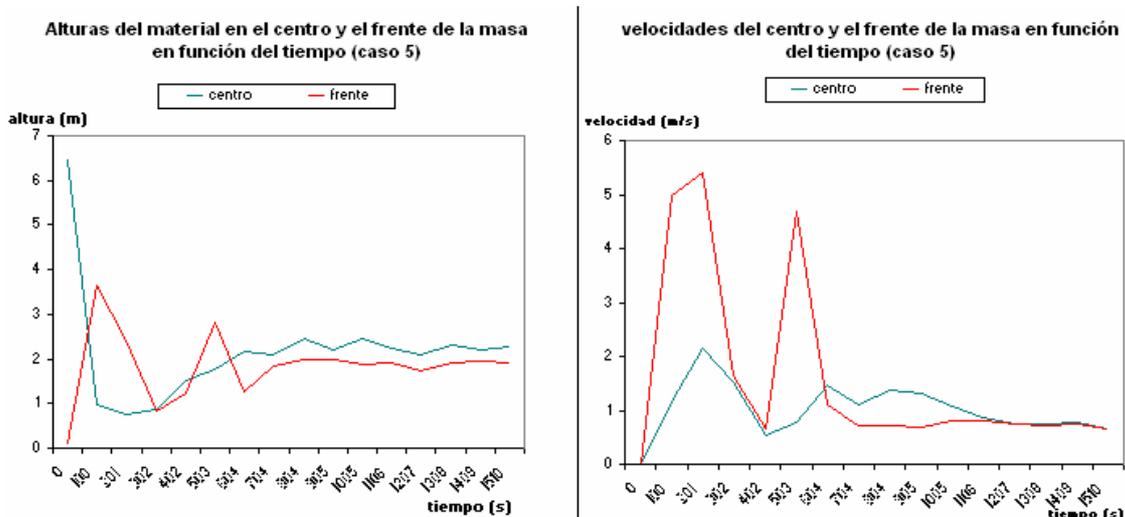


Figura 7.30. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso5).

La figura 7.31. muestra las alturas en función del tiempo para el caso 6 (tensión de fluencia = 38 Pa , viscosidad = 2,1 Pa.s):

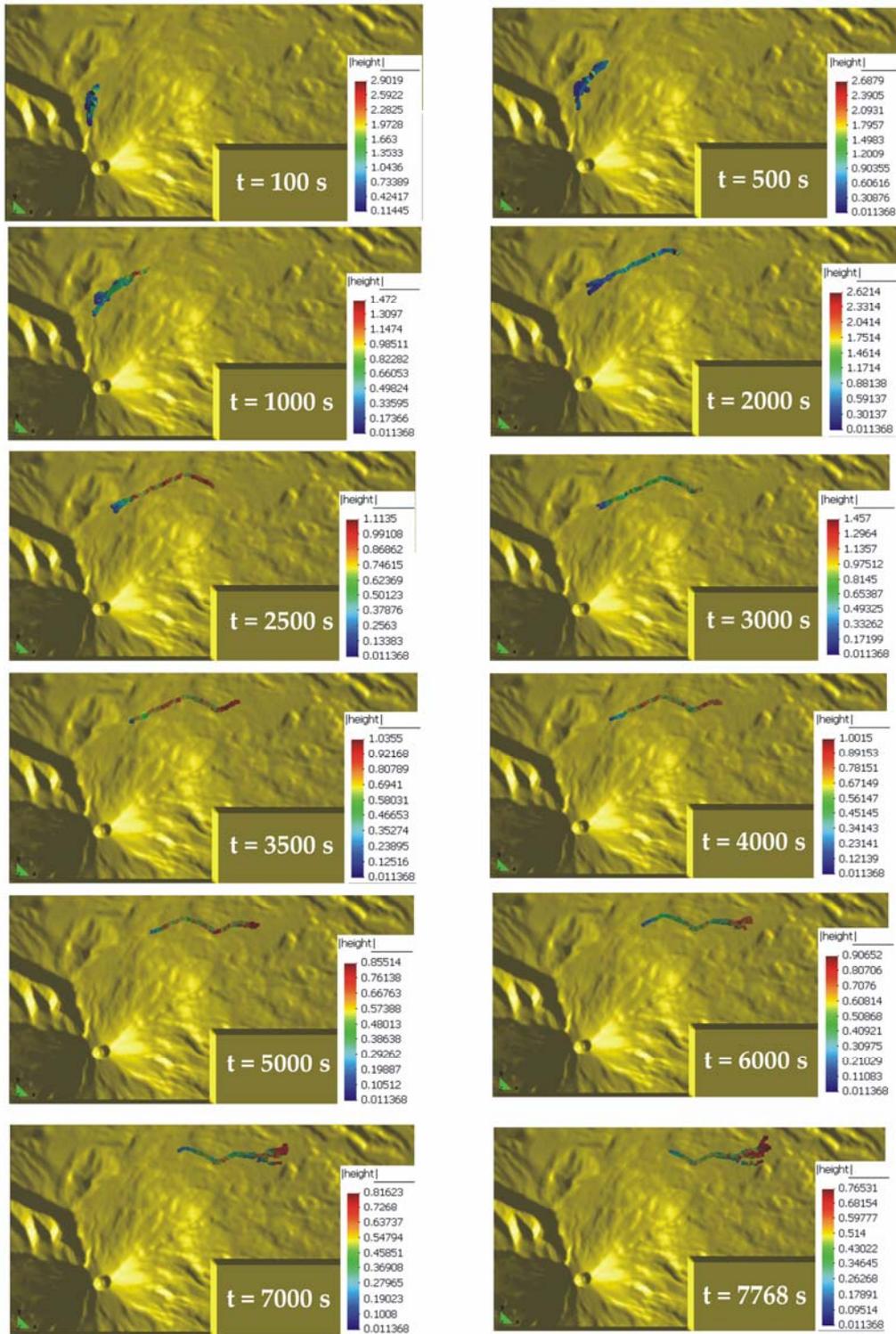


Figura 7.31. Alturas del material en función del tiempo (caso6).

Las figuras 7.32. y 7.33. presentan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa.

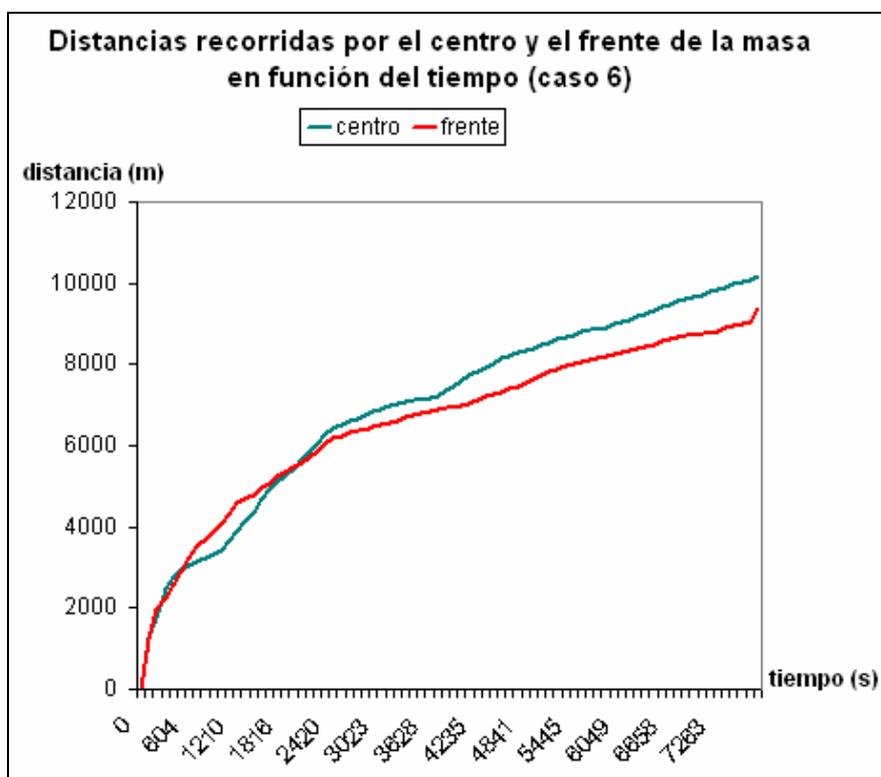


Figura 7.32. Evolución de las distancias recorridas por el centro de la masa en función del tiempo (caso6).

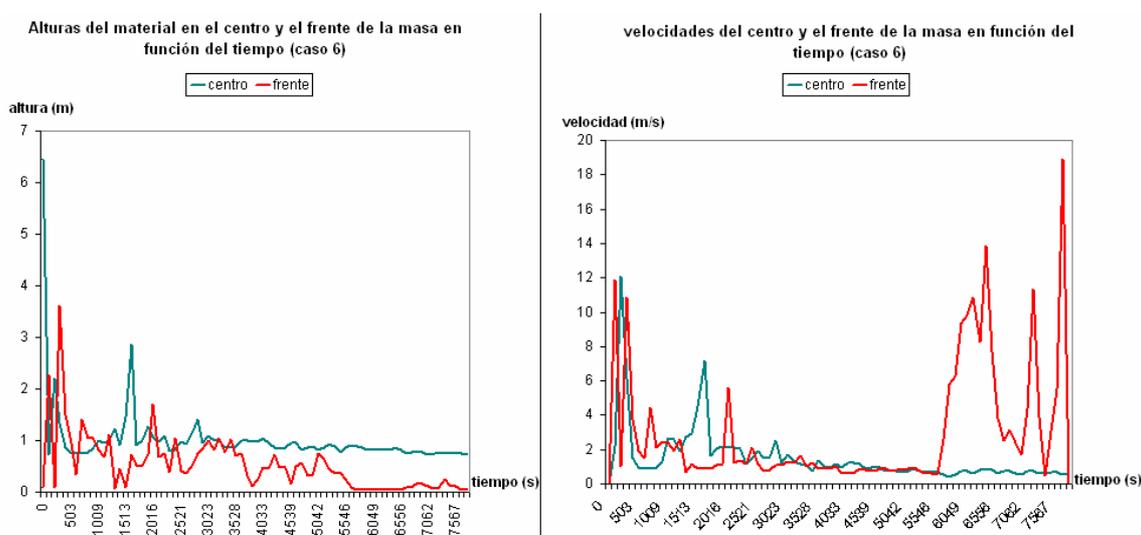


Figura 7.33. Evolución de la altura y de la velocidad del material en función del tiempo (caso6).

En las figuras 7.34., 7.35. y 7.36. se comparan las distancias recorridas, las alturas y las velocidades alcanzadas para los distintos casos estudiados:

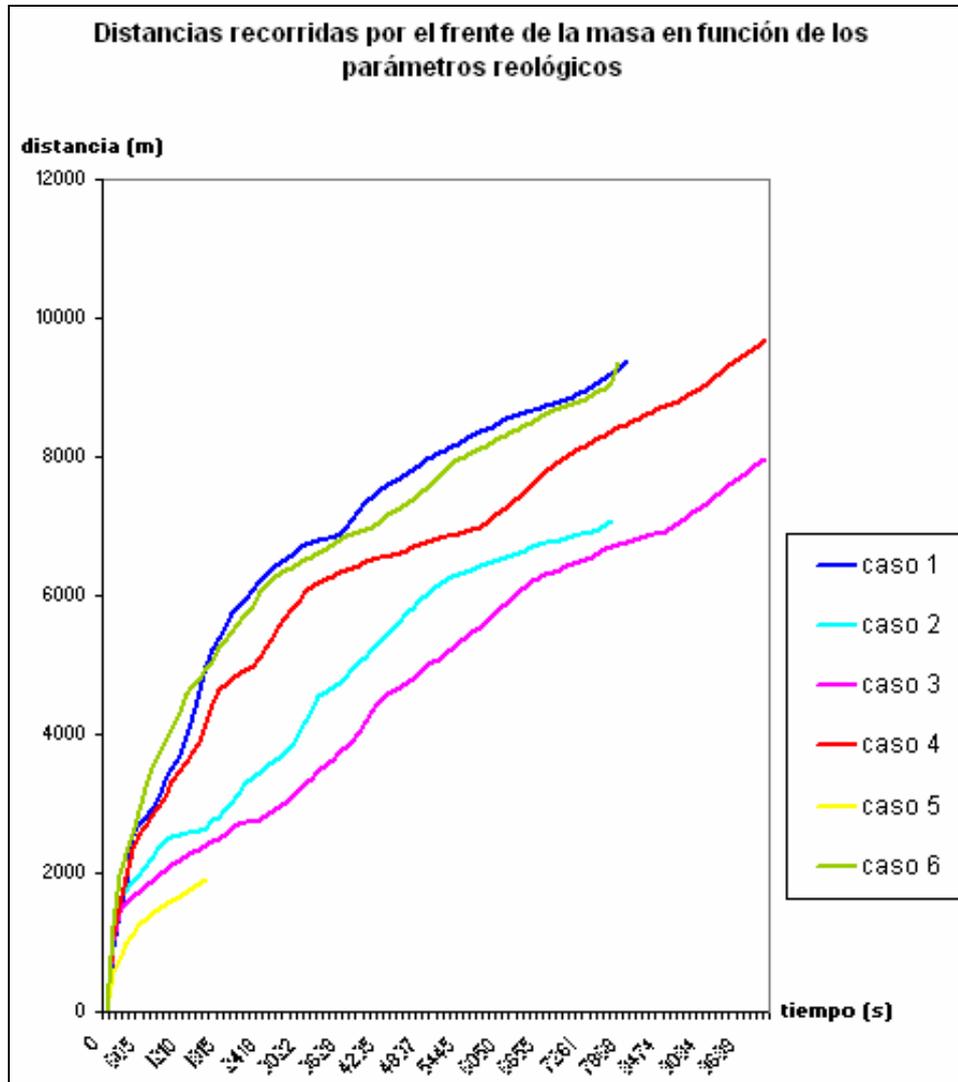


Figura 7.34. Comparación de la evolución de las distancias recorridas por el frente de la masa en función del tiempo.

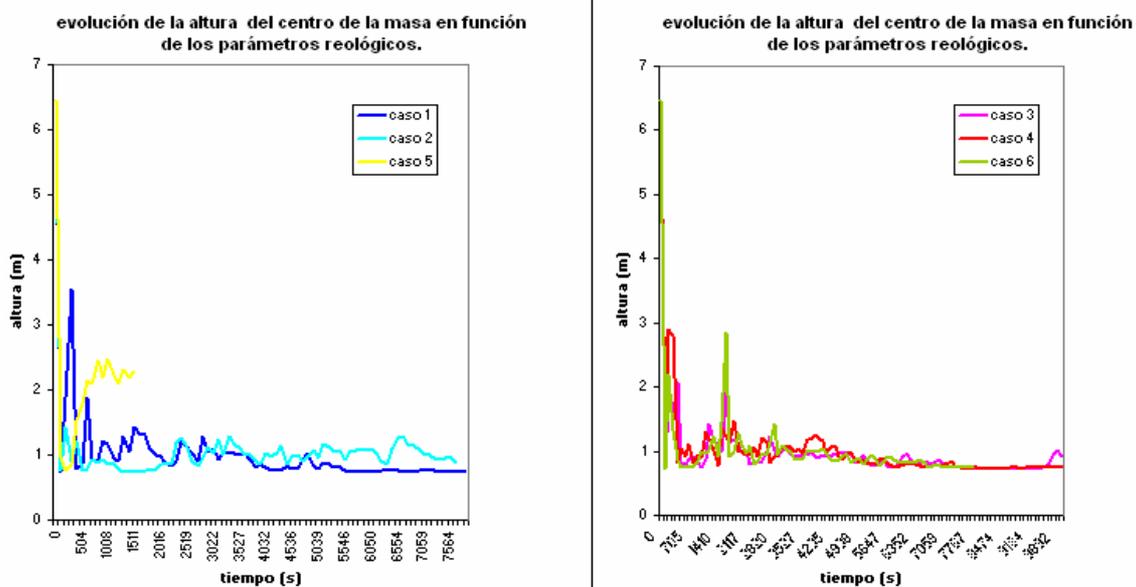


Figura 7.35. Comparación de la evolución de la altura del material en función del tiempo para los distintos casos estudiados.

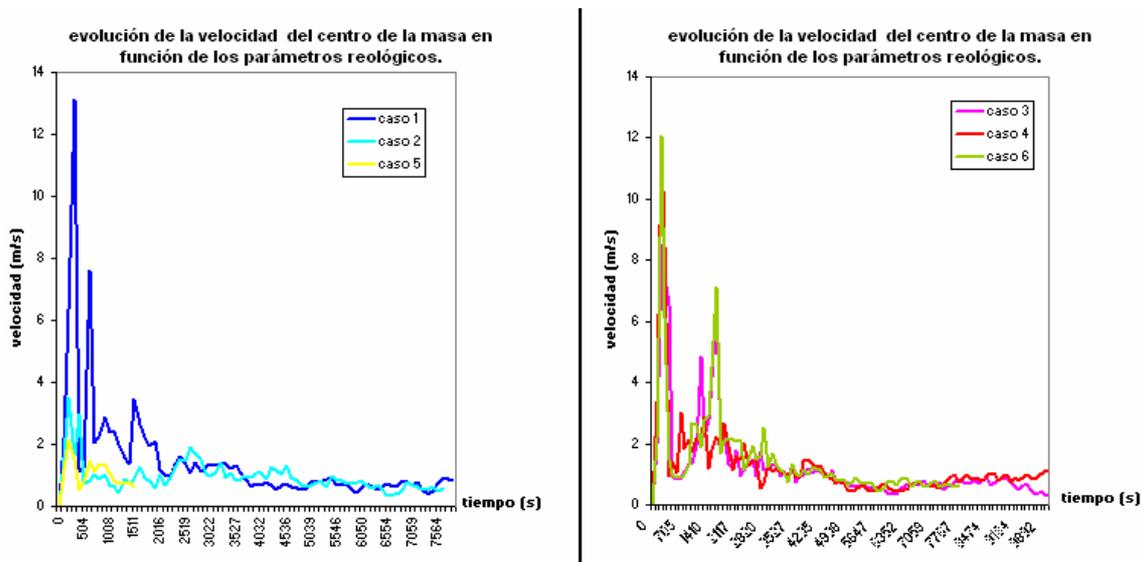


Figura 7.36. Comparación de la evolución de la velocidad en función del tiempo para los distintos casos estudiados.

La tabla 7.4. compara las velocidades teóricas estimadas con las velocidades alcanzadas por el frente de propagación en los distintos casos estudiados.

Altitudes (m)	Velocidad teórica estimada (m/s)	Velocidad media caso 1 (m/s)	Velocidad media caso 2 (m/s)	Velocidad Media caso 3 (m/s)	Velocidad media caso 4 (m/s)	Velocidad media caso 5 (m/s)	Velocidad media caso 6 (m/s)
3940	8,84	5,000291	8,802367	12,14889	5,801371	4,685845	11,90767
2972	1,569	1,65029	0,5768937	1,810582	4,417074		0,8259919
2951	1,457	1,03108		2,269831	9,384168		0,9468524

Tabla 7.4.: comparación de las velocidades obtenidas por SPH con las velocidades teóricas estimadas.

Al comparar los resultados obtenidos con los datos teóricos presentes en la bibliografía, se deriva la conclusión de que los resultados obtenidos en el caso 1 se ajustan satisfactoriamente a lo ocurrido en el Popocatépetl el 22 de enero del 2001.

La figura 7.37. presenta la evolución del frente de propagación del lahar obtenida por SPH (caso1)

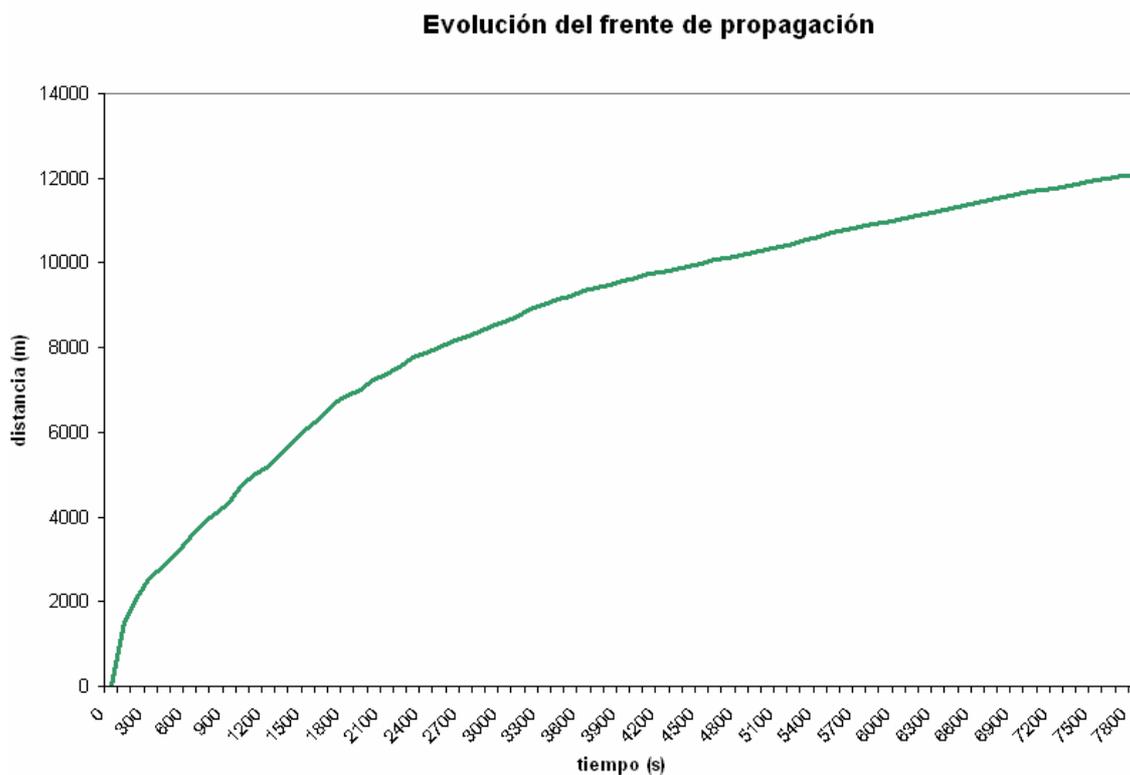


Figura 7.37. Evolución del frente de propagación del lahar mediante SPH (caso1)

Las figuras 7.38., 7.39. 7.40. presentan la evolución de las alturas del material correspondientes respectivamente a las altitudes 3940m, 2970m y 2950m.

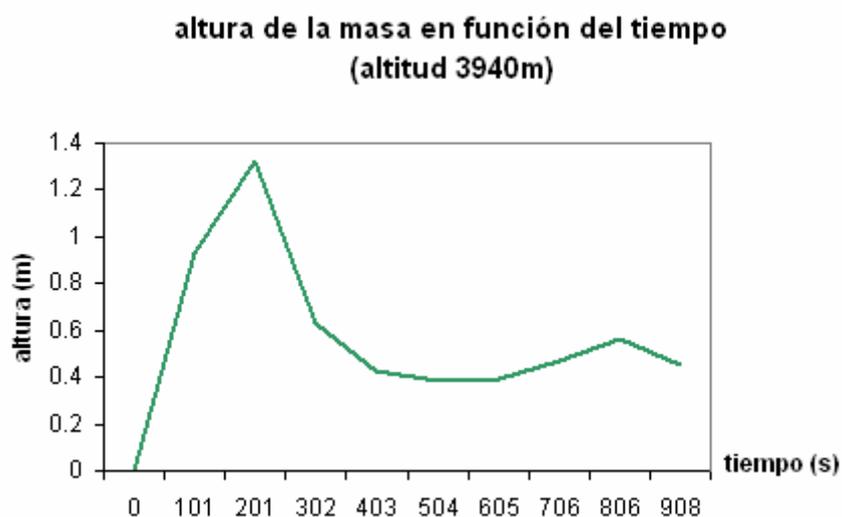


Figura 7.38. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 3940m

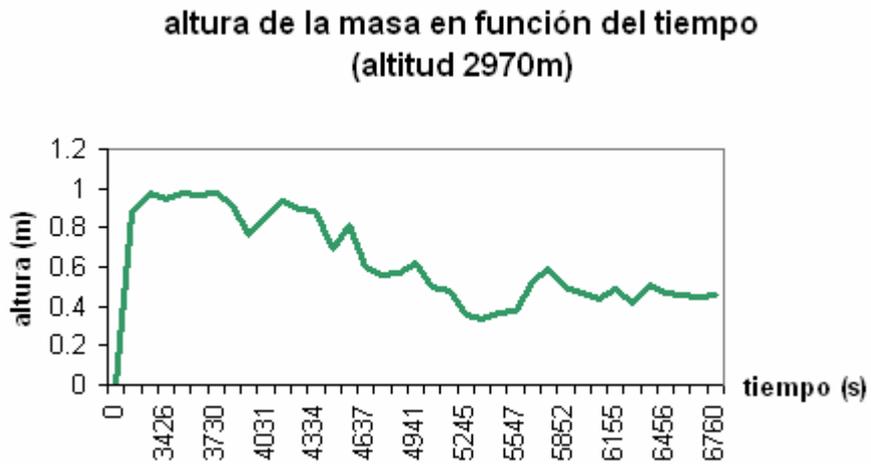


Figura 7.39. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2970m

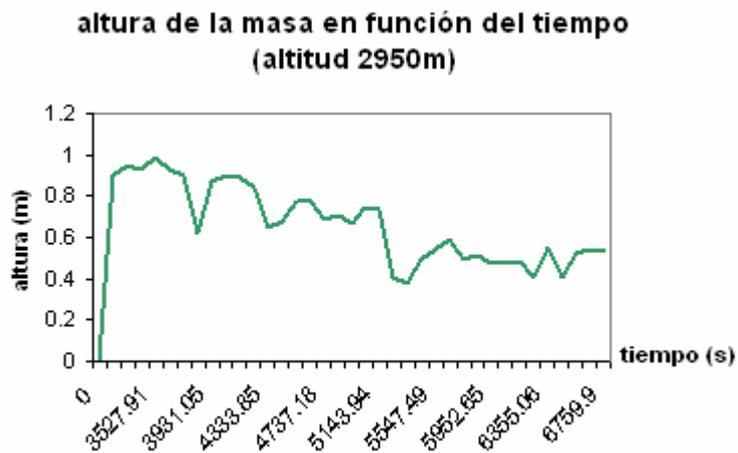


Figura 7.40. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2950m

Las figuras 7.41., 7.42. y 7.43. muestran la evolución de la velocidad del lahar a la altura de las cotas 3940m, 2970m y 2950m respectivamente.

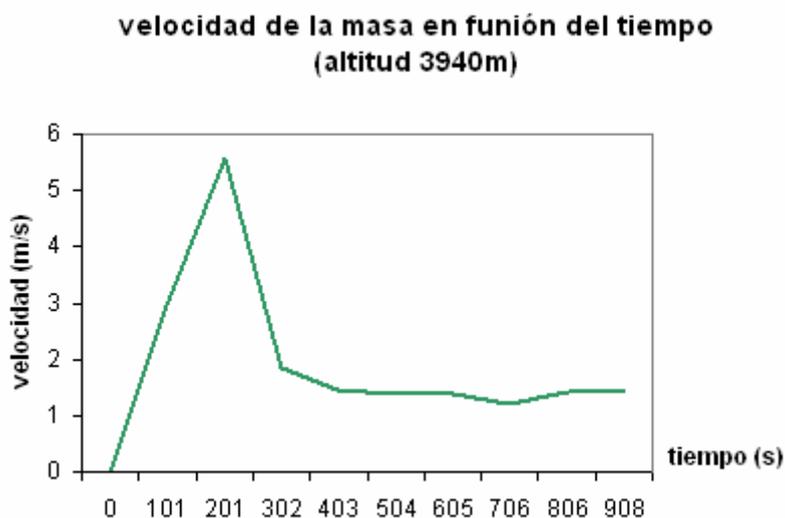


Figura 7.41. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 3940m .

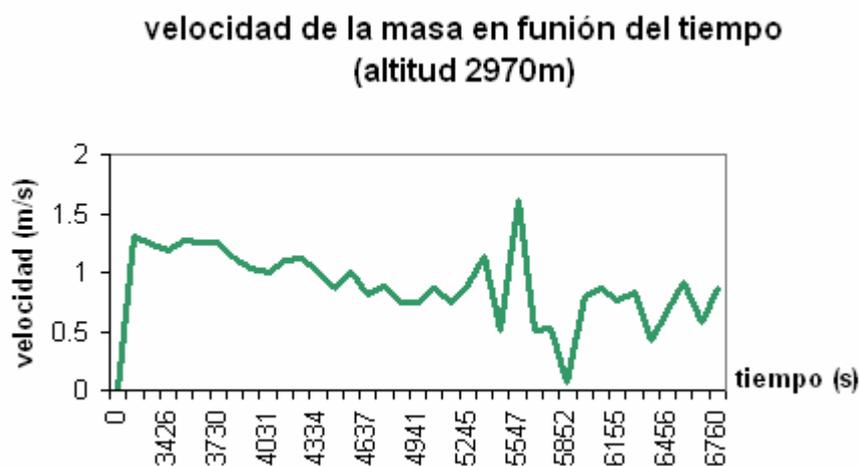


Figura 7.42. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2970m.

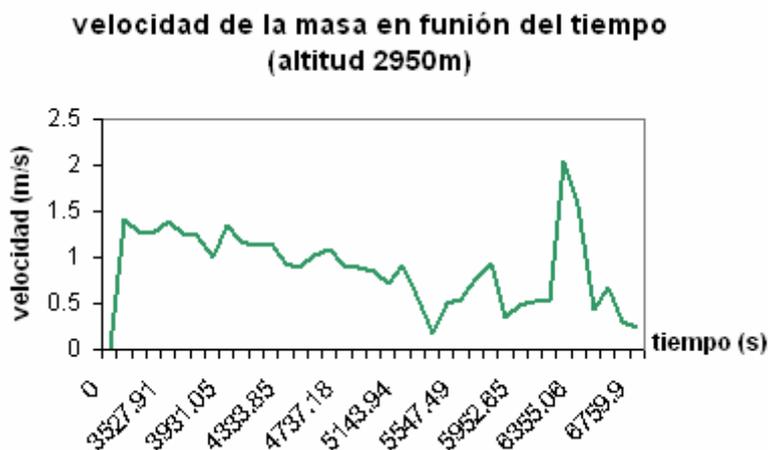


Figura 7.43. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2950m.

La figura 7.44. muestra las áreas de inundación obtenidas en el caso 1 para distintos pasos de tiempo.

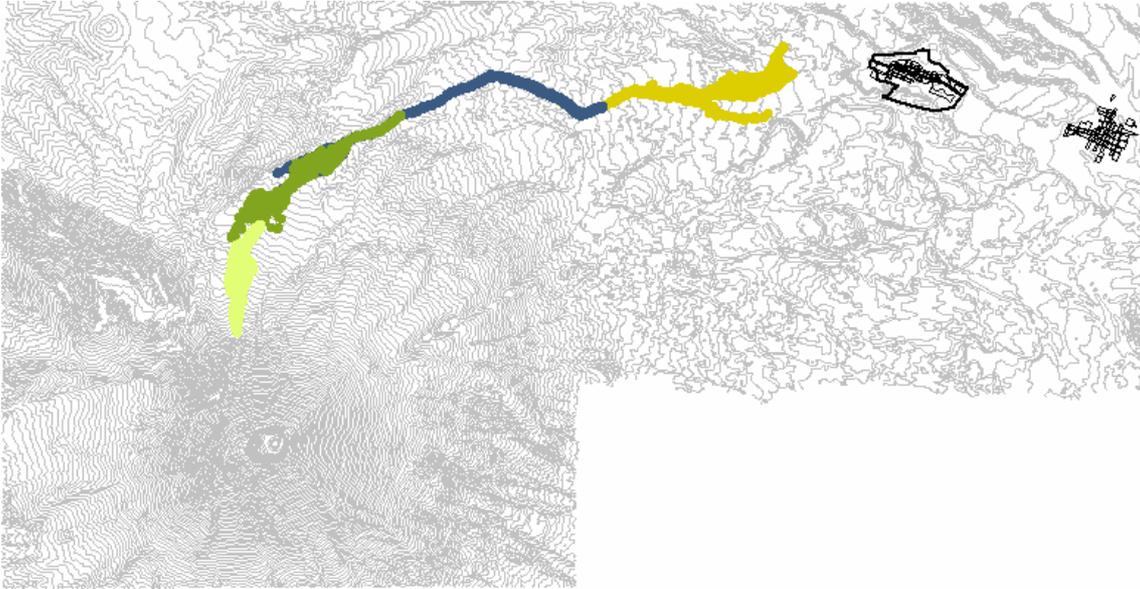


Figura 7.44. Áreas de inundación obtenidas por SPH (caso 1)

7.5. Simulación de los lahares del Popocatépetl mediante GEOFLOW2D:

7.5.1. Elaboración de la malla y la condición inicial:

Partiendo de la topografía disponible, se generó una malla tridimensional de elementos finitos. Dicha malla, se generó en dos dimensiones con el programa Gid, quedando definida por 66296 nodos y 33543 elementos triangulares (figura 7.46.).

Las condiciones iniciales de la propagación se presentan en la figura 7.45., en la que la escala vertical de la masa deslizante aparece multiplicada por 10.

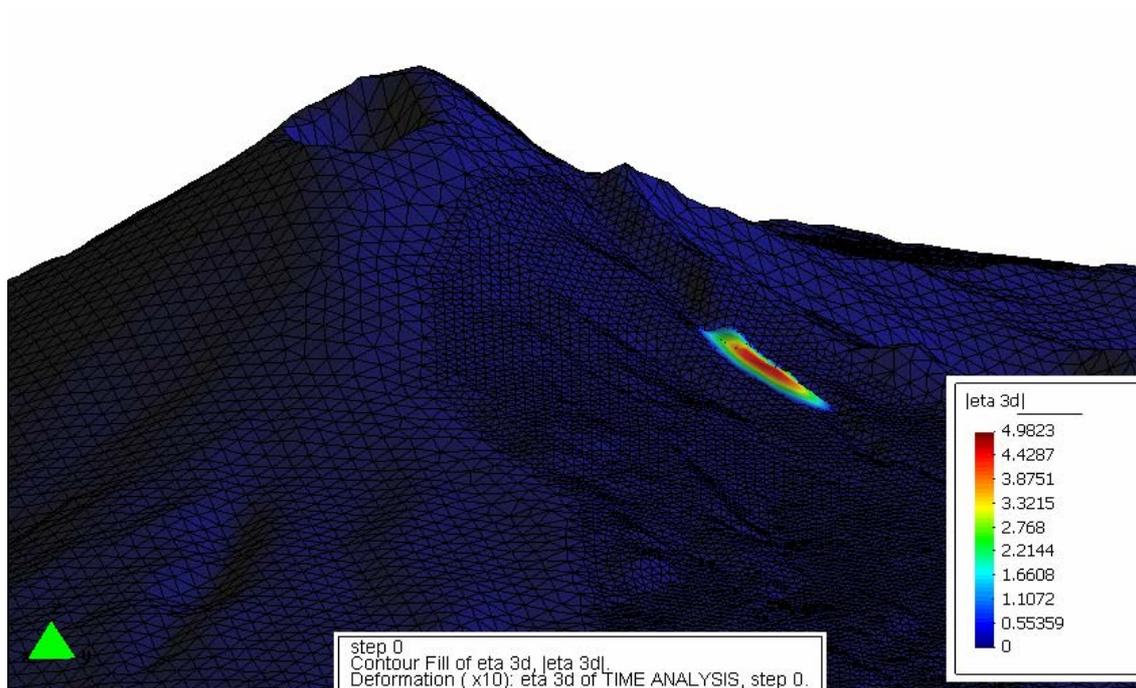


Figura 7.45. Condición inicial de la modelización con Geoflow2D.

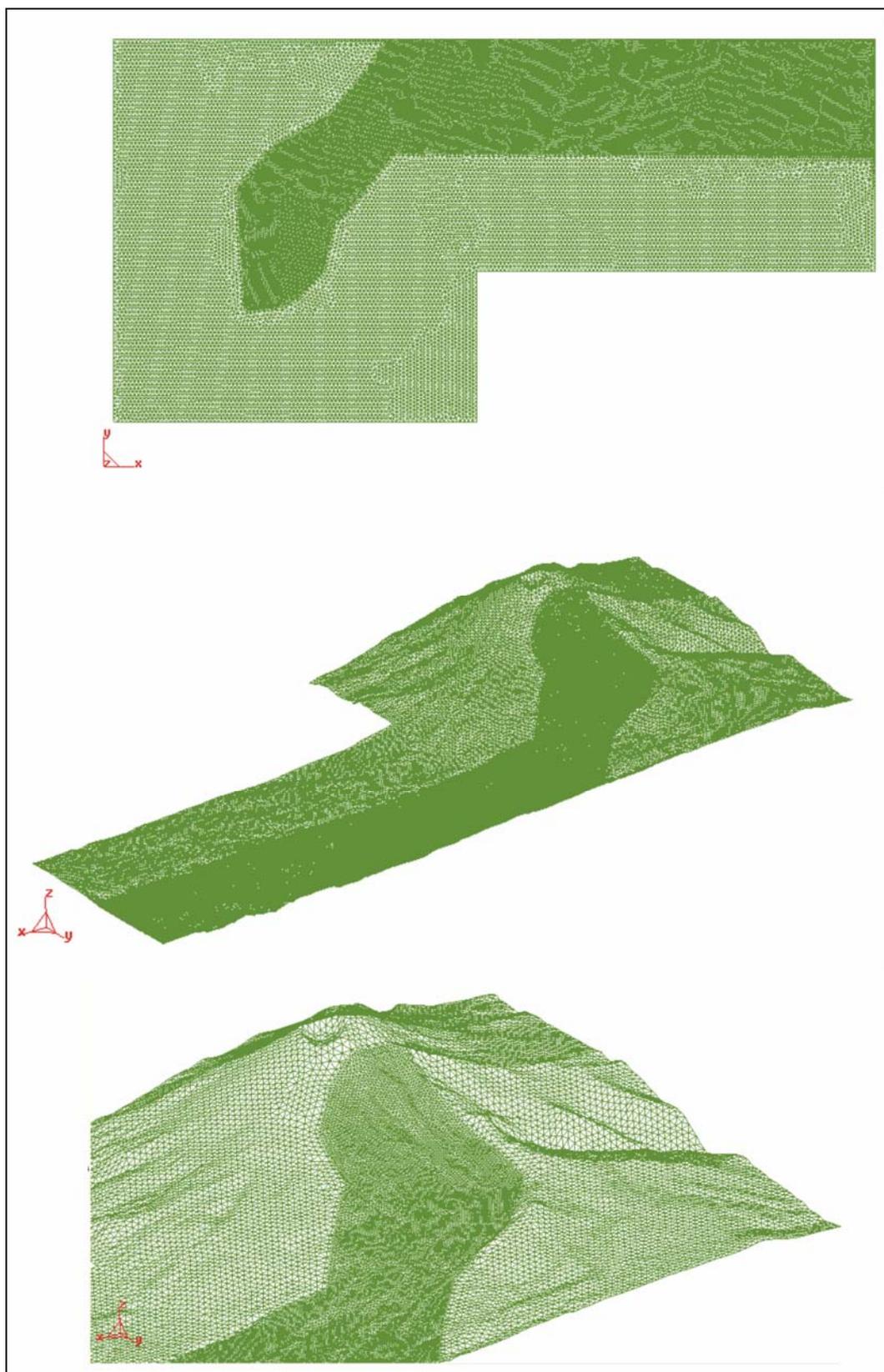


Figura 7.46. Malla de elementos finitos empleada en la simulación (3D).

7.5.2. Resultados:

Para la simulación se ha considerado un material tipo Bingham con una densidad de 1740 kg/m^3 y con los valores de la viscosidad y tensión de fluencia correspondientes al caso 1. Los resultados obtenidos vienen reflejados en la figura 7.47.

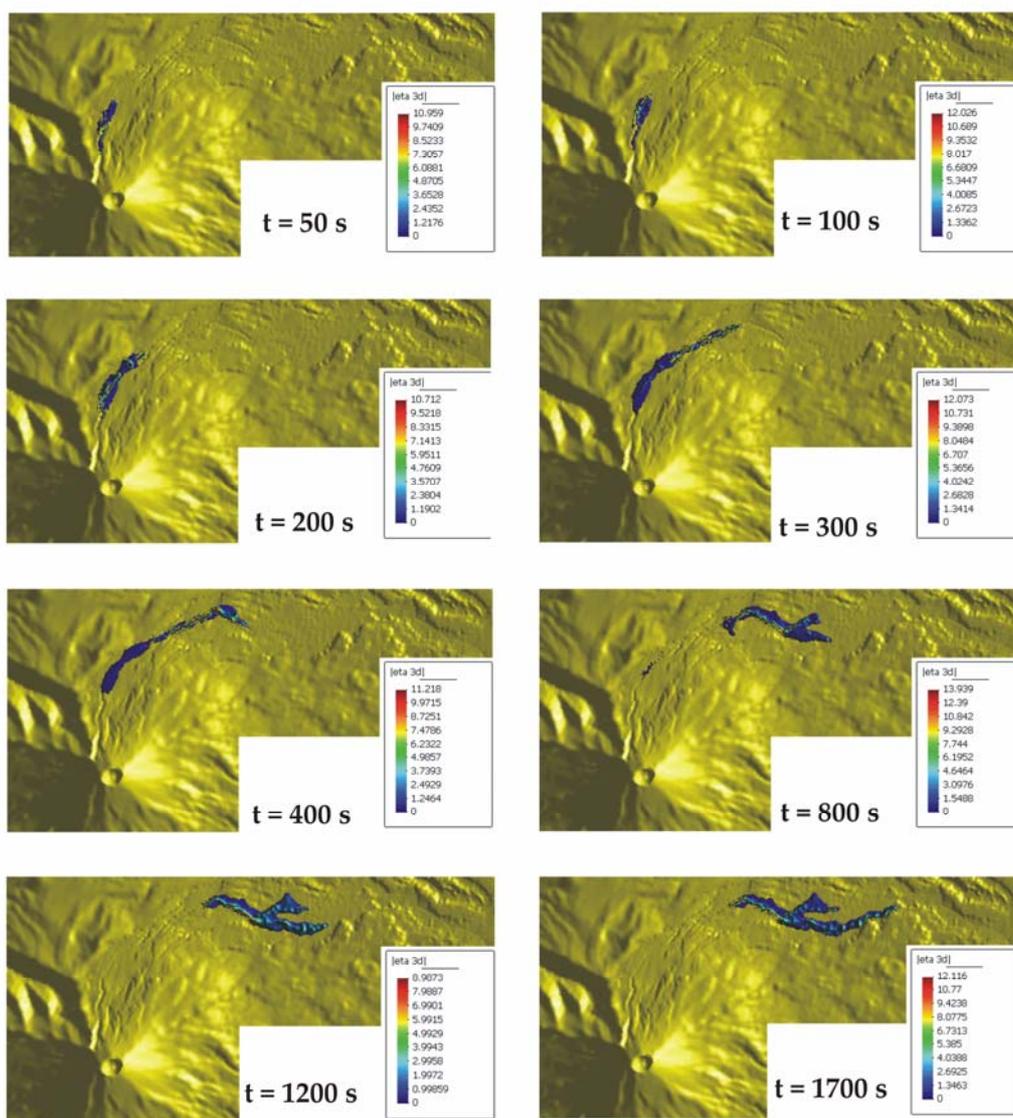


Figura 7.47. Alturas del material en función del tiempo (caso1).

La figura 7.48. presenta la evolución del frente de propagación del lahar obtenida por Geoflow2D

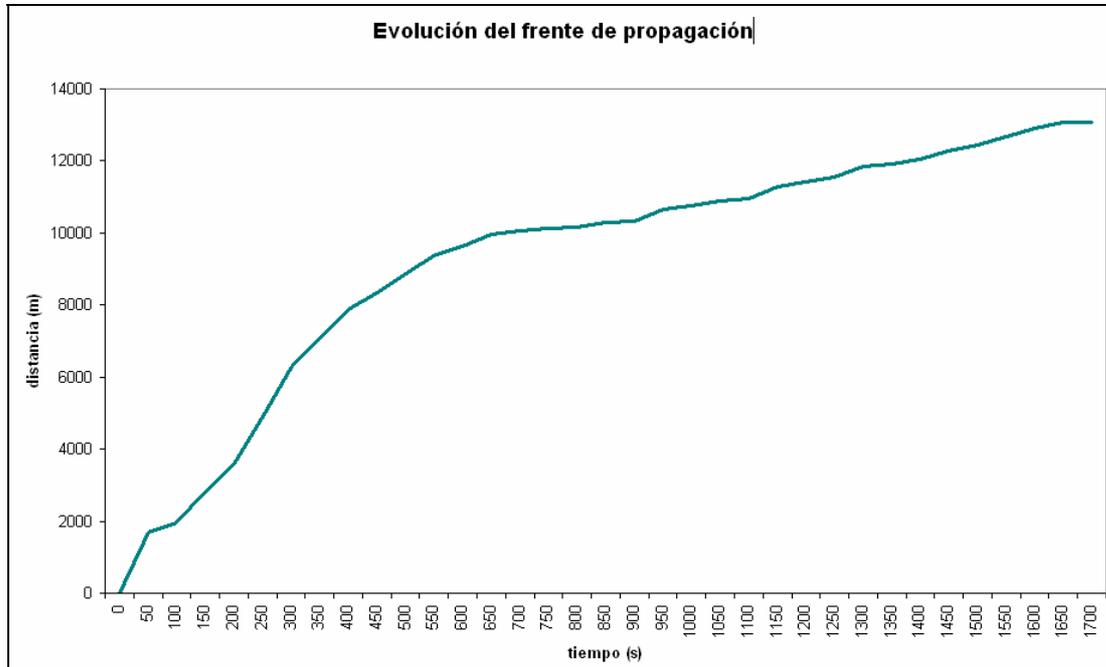


Figura 7.48. Evolución del frente de propagación.

Las figuras 7.49., 7.50. y 7.51. presentan la evolución de las alturas del material correspondientes a las altitudes 3940m, 2970m y 2950m respectivamente.

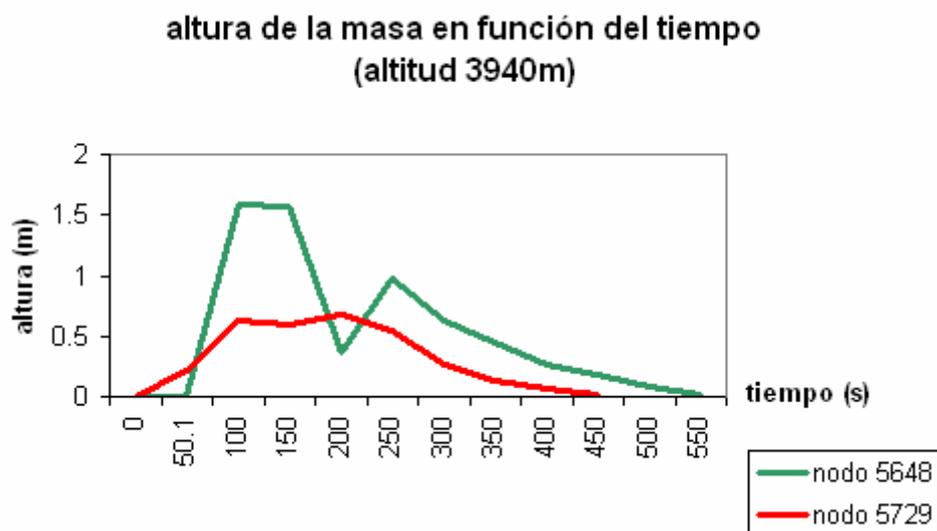


Figura 7.49. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 3940m .

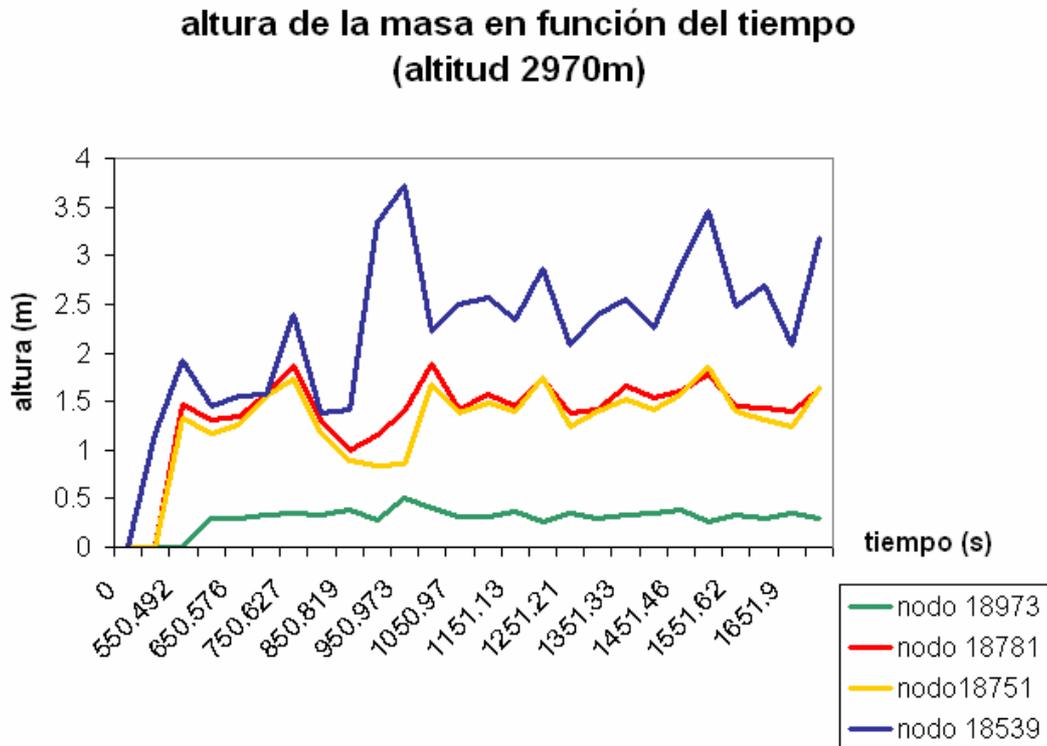


Figura 7.50. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2970m.

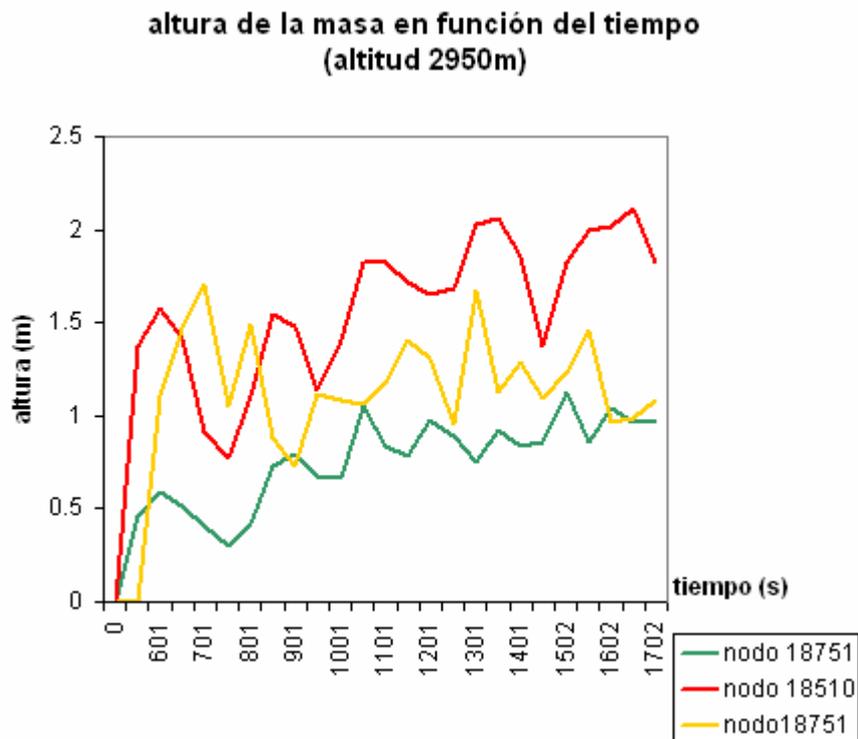


Figura 7.51. Evolución de la altura del material en función del tiempo en la altitud 2950m.

Las figuras 7.52. , 7.53. y 7.54. muestran la evolución de la velocidad del lahar a la altura de las cotas 3940m, 2970m y 2950m respectivamente.

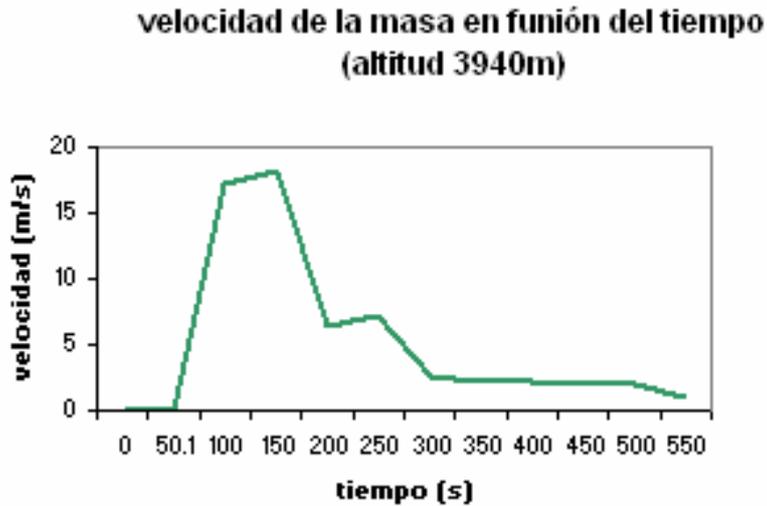


Figura 7.52. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 3940m .

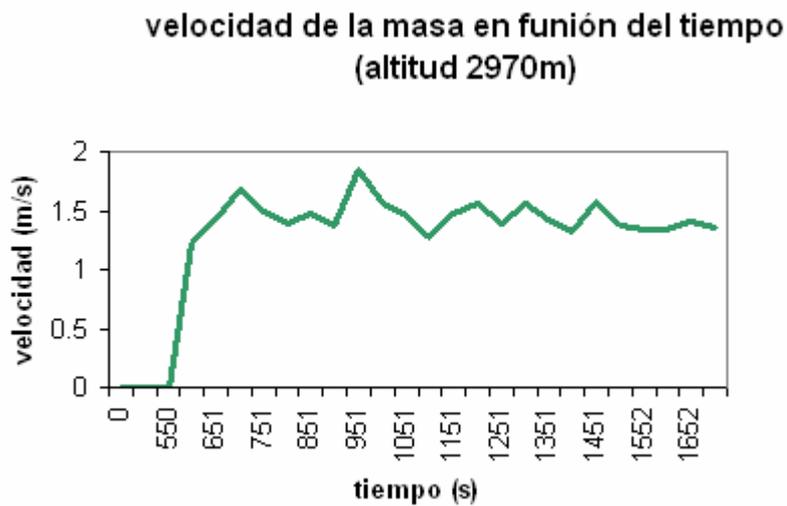


Figura 7.53. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2970m.

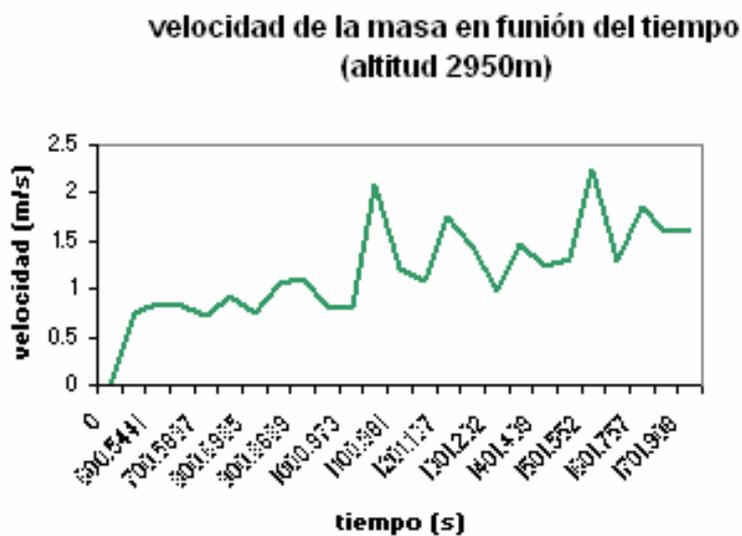


Figura 7.54. Evolución de la velocidad del lahar en la altitud 2950m.

En la figura 7.55. se presentan las áreas de inundación obtenidas por Geoflow2D para distintos pasos de tiempo.

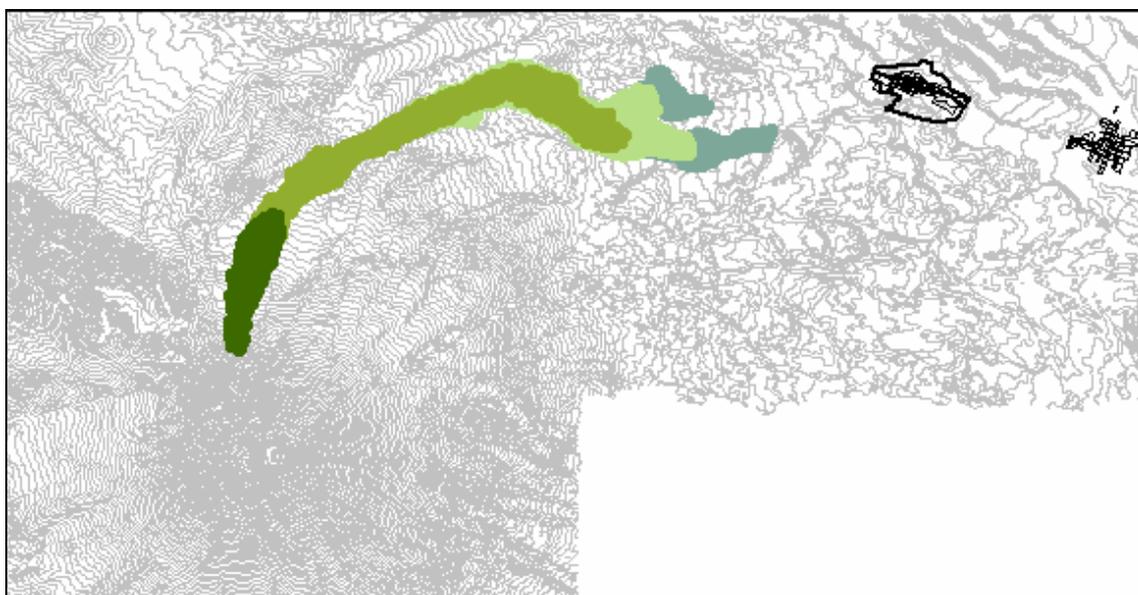


Figura 7.55. Áreas de inundación obtenidas por Geoflow 2D.

Las simulaciones realizadas mediante Geoflow 2D, de igual manera que las llevadas a cabo con SPH, muestran que el flujo recorre la barranca de Tenenepanco y continua

por Huiloac, tal y como se constató *in situ* durante los eventos de 1 de julio de 1997 y del 22 de enero de 2001. No obstante, con el método SPH se obtiene una mejor canalización del flujo tal y como lo muestra la figura 7.56. donde se comparan las áreas de inundación obtenidas por Geoflow2D con las correspondientes al método SPH para distintos pasos de tiempo.

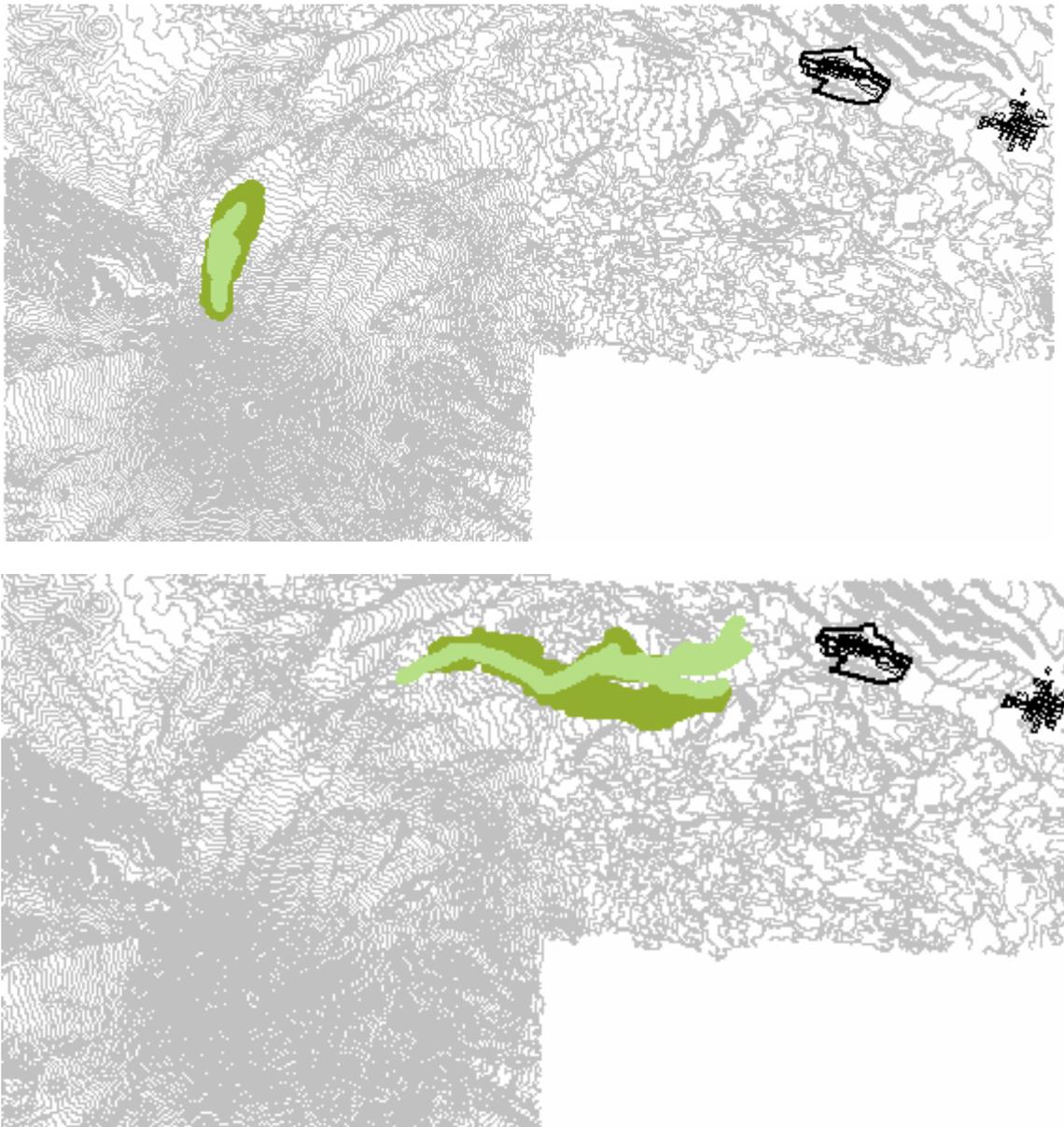


Figura 7.56. Comparación de áreas de inundación obtenidas por SPH y Geoflow2D.

Por otro lado, en lo que a esfuerzo computacional se refiere, el coste temporal de los cálculos realizados con SPH es treinta veces menor que el que resulta de utilizar el programa de elementos finitos Geoflow2D (ver tabla 7.5.).

	coste Geoflow 2D (s)	coste SPH (s)
caso 1	9591.853	342.26

Tabla 7.5. Comparación del coste del cálculo mediante Geoflow2D y SPH.

Bibliografía:

Capra, L., Poblete M.A., & Alvarado, R., (2004) *The 1997 and 2001 lahars of Popocatépetl Volcano (Central México): textural and sedimentological constraint on their origin and hazards*, Jour. Volc. And Geother. Research. Vol. 131, pp. 351-369.

CENAPRED, (2001) *Las cenizas volcánicas del Popocatépetl y sus efectos para la aeronavegación e infraestructura aeroportuaria*.

URL:<http://www.cenapred.unam.mx/es/DocumentosPublicos/PDF/parte3.pdf>

Espíndola, J.M., (1999). *La actividad volcánica*. Cuadernos del Instituto de Geofísica. UNAM.

Jan, C.D., (1997) *A study on the numerical modelling of debris flows*, in *Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, C-1.Chen (Ed.), pp.717-726.

Jin, M. & Fread, D.L. (1997) *One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV model*, in C.L.Chen (Ed.), *Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, ASCE, pp. 687-696.

Macías, J. L., Carrasco, G., Delgado, H., Del Pozzo, A. L., siebe, C., Hoblitt, R., Sheridan M.F., & Tilling, R. I., (1995) *Mapa de peligros volcánicos del Popocatépetl*, Publicación especial del Instituto de Geofísica, UNAM.

Muñoz, E., (2004) *Los lahares del Popocatepetl de 1997 y 2001: obtención y tratamiento de la información para la prevención de riesgos*. Trabajo de D.E.A Universidad Complutense de Madrid. Madrid

Palacios, D., Zamorano, J. J., & Gómez, A., (2001) *The impact of present lahars on the geomorphologic evolution of proglacial gorges: Popocatepetl, Mexico*. *Geomorphology*, 37: 15-P.42.

Plunkett, P., & Uruñuela, G., (1998) *Preclassic household patterns preserved under volcanic ash at Tetimpa, Puebla, Mexico*, *Lat. Am. Antiq.* Vol. 94, pp. 287-309.

Sheridan, M.F., Hubbard, B., Bursik, M.I., Siebe, C., Abrams, M., Macias J.L., & Delgado, H., (2001). *Short-term potential volcanic hazards at volcán Popocatepetl, Mexico*, *Earth Observing System, Amer. Geophy. Uni.* Vol. 82, pp. 185-189.

Thouret J.C., & Lavigne, F., (2000). *Lahars: occurrence, deposits and behaviour of volcano-hydrologic flows. Volcaniclastic rocks from magmas to sediments*. Edited by Hervé Leyrit and Christian Montenat. *Gordon and Breach Science Publishers*, pp.151-174.

CONCLUSIONES

Se presentan aquí las conclusiones obtenidas en este trabajo, que se han agrupado en los siguientes apartados:

- Aspectos generales de los estudios de deslizamientos.
- Herramientas para la modelización numérica del fenómeno.
- Validación de los programas de cálculo y aplicación de la metodología presentada a casos reales.
- Perspectivas de futuro.

Aspectos generales de los estudios de deslizamientos.

1. Teniendo en cuenta la incidencia socioeconómica de los deslizamientos (s.l.) en el mundo y en España, se pone en evidencia la **necesidad de una visión multidisciplinaria** que abarque todo el ámbito de estudio de estos movimientos, tanto en su globalidad como en su detalle. En efecto, en el riesgo asociado a la ocurrencia de deslizamientos confluyen varias áreas del

conocimiento, tales como: a) geodesia; b) geología; c) física; d) matemáticas; e) teledetección, f) sociología...

2. Puesto que la mejora de nuestro conocimiento acerca de este fenómeno requiere de la colaboración de científicos y técnicos provenientes de distintas ramas de la ciencia; **es necesario llegar a un consenso en lo que a terminología y definiciones se refiere**, con el fin de facilitar la comunicación entre estos expertos.

En esta memoria, se ha optado por utilizar el término deslizamientos (*landslides*) para designar de forma genérica a los movimientos en masa, no por ser éste el más correcto sino por ser el más universal y difundido. Asimismo, se sugiere utilizar las abreviaciones "*sensu lato*" (*s. l.*) y "*sensu stricto*" (*s. s.*) para evitar la ambigüedad que conlleva dicho término al evocar un tipo específico de movimientos.

3. En lo que a las clasificaciones de deslizamientos (*s. l.*) se refiere, existen tantas como grupos u objetivos de trabajos. En esta tesis se han repasado las clasificaciones más relevantes. Asimismo, se han clasificado los deslizamientos rápidos en base a criterios mecánicos, es decir, considerando el comportamiento del geomaterial una vez se ha desencadenado el movimiento. Precisamente esta clasificación es idónea para llevar a cabo la modelización numérica de este fenómeno.
4. A continuación, se han definido los deslizamientos rápidos (*Flujos de derrubios & Coladas de barro, Avalanchas granulares, y Flujos deslizantes*) objeto de este trabajo.

5. Por último, se ha presentado una revisión bibliográfica de la evolución de los estudios de deslizamientos, especialmente, los relativos a su modelización numérica.

Herramientas para la modelización numérica de los deslizamientos.

En los capítulos 2, 3, 4 y 5 de esta memoria, se ha presentado un conjunto de herramientas de simulación para los geomateriales fluidificados en general, y para el análisis de la propagación de los deslizamientos rápidos en particular. La metodología presentada con este fin consiste en: a) elaborar un **modelo matemático** capaz de describir el fenómeno; b) elaborar un **modelo reológico** que permita describir el comportamiento del geomaterial sometido al deslizamiento; c) resolver las ecuaciones en derivadas parciales a las que se ha llegado mediante **métodos numéricos** adecuados (Elementos Finitos, SPH); d) implementar los distintos modelos en un **programa de cálculo** (Geoflow2D y SPH).

- a) **modelo matemático**: en el capítulo 2 se ha desarrollado un modelo matemático tridimensional complejo que considera el suelo como un material trifásico. A partir de este modelo, y teniendo en cuenta las características de los geomateriales fluidificados en general, y las de la propagación de los deslizamientos rápidos en particular, se han realizado algunas aproximaciones. En este contexto, se ha analizado el fenómeno de consolidación y disipación de presión de poros y se ha obtenido la ecuación unidimensional de la consolidación. Seguidamente, se ha integrado el sistema de ecuaciones obtenido según la normal al flujo, obteniéndose de este modo un **modelo integrado en profundidad acoplado**. Para tener en cuenta el efecto de la curvatura del terreno se ha empleado la fuerza centrífuga aumentando la tensión normal para

el caso de materiales friccionales. Asimismo, se ha presentado tanto la formulación euleriana de dicho modelo como su formulación cuasi-lagrangiana.

- b) **modelo reológico:** en el capítulo 3 se han estudiado modelos reológicos que permiten describir el comportamiento de suelos fluidificados teniendo en cuenta el agua intersticial. En este contexto, se ha presentado un marco general dentro del cual se pueden describir leyes reológicas como la de los fluidos Newtonianos, los fluidos de Bagnold, los fluidos tipo Bingham, así como el modelo viscoplástico generalizado de Chen & Ling.

A continuación, se han presentado los modelos reológicos integrados en profundidad que permiten obtener los términos de “tensiones integradas en profundidad” y “fuerzas de fricción con el fondo”.

- c) **modelos numéricos:** en esta memoria se presentan dos métodos numéricos alternativos para resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales al cual se ha llegado; los Elementos Finitos y el SPH. En el capítulo 4 se ha presentado tanto la técnica de los elementos finitos como su aplicación a la modelización de la propagación de deslizamientos rápidos. Al tratarse de problemas que tienen lugar en terrenos naturales, su resolución mediante los elementos finitos requiere un gran esfuerzo computacional sobre todo cuando se quiere trabajar con mallas excesivamente finas. Este problema se resuelve empleando métodos sin malla como el SPH, ya que este permite separar la malla topográfica de la malla de cálculo. En el capítulo 5 de esta memoria se ha presentado el modelo SPH y su aplicación al problema objeto de esta tesis.

Validación del modelo SPH y aplicación de la metodología presentada a casos reales

En el capítulo 6 se ha presentado la validación del modelo SPH mediante la reproducción del problema de Riemann tanto en condiciones secas como mojadas sobre lecho horizontal. Asimismo, se ha presentado en los capítulos 6 y 7 la aplicación de la metodología descrita en los capítulos anteriores a casos reales, contrastando los resultados obtenidos con datos de campo. Atendiendo a los resultados de ambos capítulos se pueden definir las conclusiones siguientes:

1. A la vista de los resultados obtenidos de la reproducción del problema de Riemann, se puede concluir que el modelo SPH utilizado es capaz de reproducir de forma satisfactoria la solución a dicho problema. Asimismo, en el caso del problema de Riemann con lecho mojado el programa es capaz de reproducir la forma y la velocidad de la onda de choque.
2. La aplicación de la metodología presentada en esta memoria a casos reales demuestra su idoneidad para el estudio de la fase de propagación de los deslizamientos rápidos. En este contexto, los resultados derivados de la aplicación del modelo SPH a la simulación de los flujos granulares mediante la reproducción de la avalancha de Valpola (Italia) se ajustan satisfactoriamente al evento de julio de 1987. Dichos resultados incluyen la trayectoria del movimiento, el tiempo de la propagación y el espesor final del material. Asimismo, las simulaciones de los lahares del Popocatépetl (México) realizadas mediante Geoflow2D, de igual manera que las llevadas a cabo con SPH, muestran que el flujo recorre la barranca de Tenenepanco y continua por Huiloac, tal y como se constató *in situ* durante los eventos de 1 de julio de 1997 y del 22 de enero de 2001.

3. Por otro lado, los autores que estudiaron la propagación de la avalancha de Valpola utilizaron un perfil XZ, puesto que el movimiento se desarrolló a lo largo de este perfil en gran parte del trayecto. Sin embargo, esto es cierto antes de que la masa colisionara con el saliente de Plaz, pero a partir de ahí el movimiento de gran parte del material según el eje Y no es despreciable. Este hecho demuestra la importancia de contar con un Modelo Digital de Elevaciones para realizar este tipo de simulaciones.
4. En el caso de las simulaciones de los lahares acontecidos en el Popocatépetl, se han empleado los valores encontrados en la literatura especializada sobre este tipo de materiales, debido a la falta de datos sobre la viscosidad y tensión de fluencia del material. Mediante SPH se ha estudiado la influencia de la tensión de fluencia y de la viscosidad del material en el comportamiento de los fluidos tipo Bingham. A continuación, se han utilizado los valores que más se ajustaban a los eventos descritos en la bibliografía para reproducir mediante la técnica de los elementos finitos estos procesos. De ambos métodos se derivan resultados similares, no obstante, con el método SPH se obtiene una mejor canalización del flujo. Esto puede explicarse por el hecho de que con el SPH la topografía se aproxima mediante una malla mucho más fina que la malla utilizada en el caso de los elementos finitos.
5. La ventaja principal del método SPH, frente a los elementos finitos, para el tipo de problema que se está estudiando es sin la menor duda el coste temporal de los cálculos. En este sentido, SPH al separar la malla topográfica de la malla de cálculo permite reducir treinta veces el tiempo de ejecución.
6. La calidad de los resultados de las simulaciones está sujeta a la disponibilidad, calidad y precisión de los datos de partida: Modelo Digital de Elevaciones (MDE); información sobre la condición inicial (coordenadas, morfología,

volumen del material, etc.); información sobre los geomateriales involucrados en el movimiento (granulometría, propiedades resistentes, etc.). Además, para comprobar dicha calidad hace falta una serie de información cuantitativa que se debe obtener en base a un trabajo exhaustivo de campo.

Líneas futuras de investigación:

Los trabajos presentados en esta tesis permiten pensar en futuras líneas de investigación relacionadas con los aspectos tratados en esta memoria:

1. Nuevos modelos reológicos: no existe ningún modelo capaz de reproducir el comportamiento de las mezclas de suelo bajo todos los estados de esfuerzo que se generan en un deslizamiento rápido (desde su iniciación hasta su parada, pasando por su propagación). Además, durante la fase de propagación del movimiento el comportamiento del geomaterial puede evolucionar a un tipo distinto al inicial. Por ejemplo, los flujos de derrubios pueden evolucionar en flujos hiperconcentrados o en arroyadas y viceversa. Por lo que una línea abierta muy interesante para futuras investigaciones es, sin la menor duda, la formulación de modelos reológicos más sofisticados capaces de reflejar de forma más completa el complejo comportamiento de los geomateriales.
2. SPH3D: A pesar de la idoneidad del modelo integrado en profundidad acoplado para reproducir de forma eficiente gran parte de los deslizamientos rápidos, existen situaciones en las cuales la aplicación de dicho modelo puede ser contraproducente, ya que parte de la hipótesis de que la columna vertical del flujo es homogénea. En estos casos, para describir adecuadamente la evolución del sistema son imprescindibles las tres variables del espacio (aproximación

tridimensional). Por tanto, sería interesante implementar un modelo matemático tridimensional en el modelo SPH para simular este tipo de problemas.

3. Paralelización: una de las grandes limitaciones de la simulación de problemas complejos es el esfuerzo computacional que suponen. El método SPH supone una reducción importante del tiempo de cálculo frente al método de elementos finitos, ya que separa la malla de topografía de la malla de cálculo. Sin embargo, incluso con este método si se quiere reproducir con alta precisión problemas complejos, como por ejemplo la simulación simultánea de la propagación de deslizamientos provenientes de varias áreas fuente, el esfuerzo computacional puede ser tan alto que dicha modelización se haga inviable. Una solución para este problema es implementar algoritmos paralelos que mejorarían las prestaciones obtenidas con la versión secuencial y redujeran drásticamente los tiempos de ejecución.
4. Integración de la iniciación y propagación en el mismo modelo: hoy en día existen dos líneas de investigación separadas dedicadas a la modelización de los deslizamientos. La primera se ha especializado en resolver el problema de la iniciación del movimiento y la segunda en su propagación. Sería interesante integrar los dos tipos de modelos de simulación en un modelo consistente que englobe como casos particulares la iniciación y propagación del movimiento y que facilite el trasvase de los resultados del primero al segundo.
5. Integración en un SIG: puesto que los deslizamientos ocurren en terrenos naturales la simulación de los mismos obliga a trabajar con datos georeferenciados. Teniendo en cuenta el papel que juegan los sistemas de información geográfica en la adquisición, gestión y análisis de los datos espaciales se propone integrar los modelos de simulación numérica

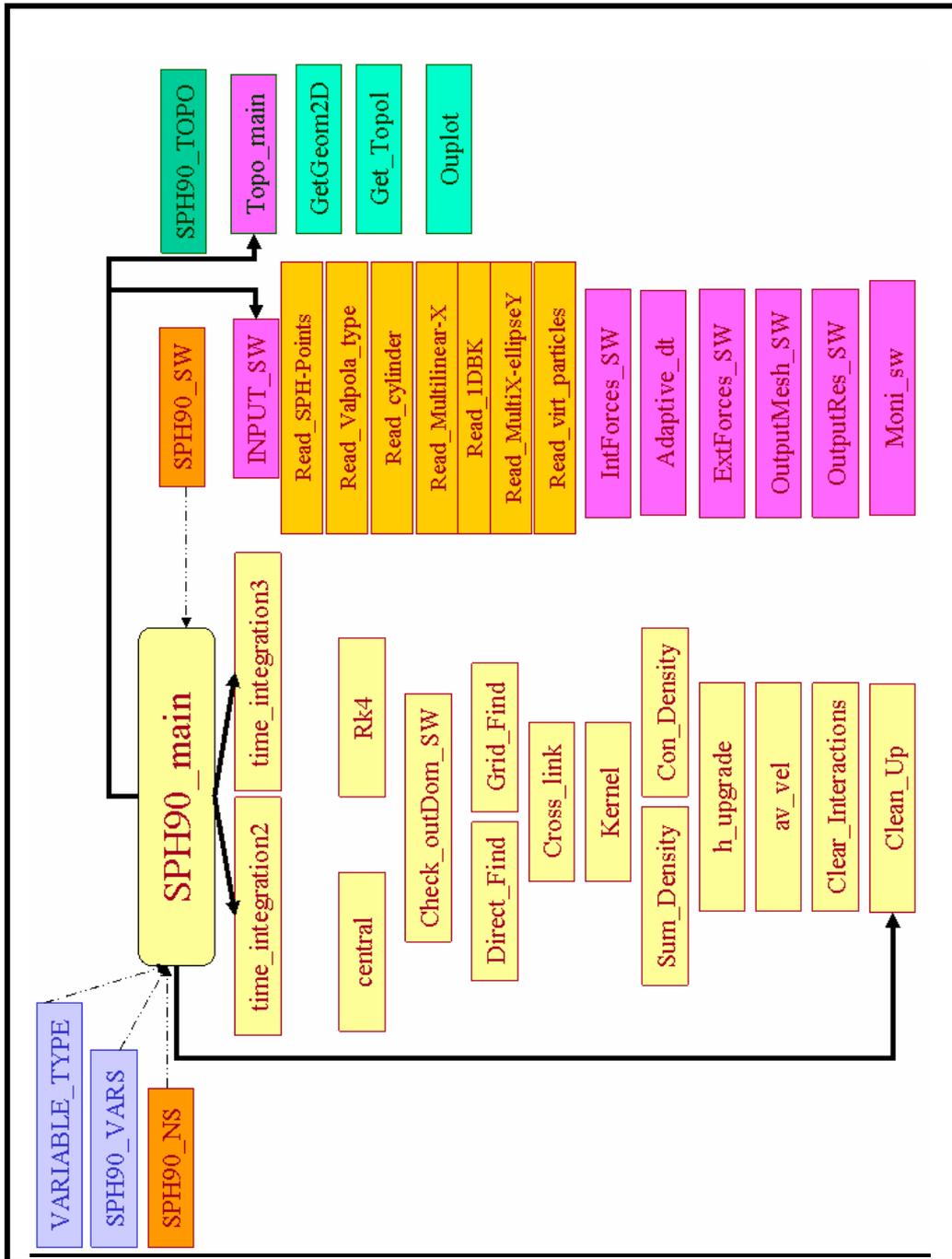
presentados en esta tesis en el entorno de un SIG lo suficientemente abierto como para permitir: 1) adquirir y gestionar los datos georeferenciados; 2) obtener modelos digitales del terreno; 3) proporcionar una interfase sencilla de emplear para el usuario; 4) facilitar el uso de los resultados de la simulación para generar mapas de peligrosidad así como para la gestión de catástrofes.

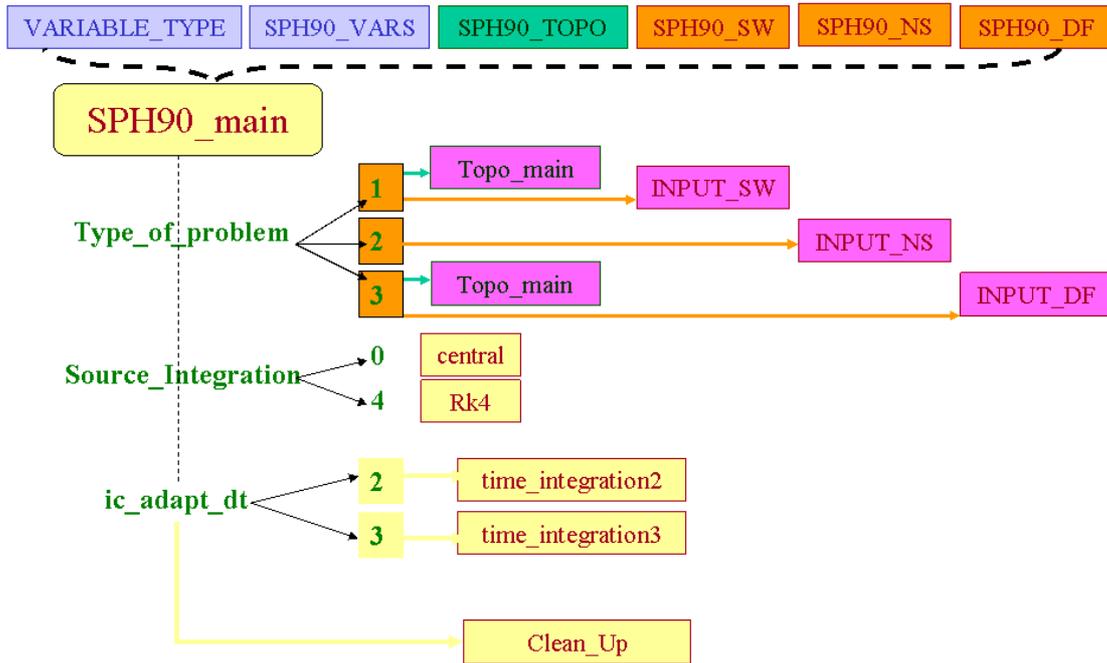
6. La validación de los modelos de simulación: se efectúa principalmente mediante la reproducción de problemas con solución analítica y experimentos de laboratorio. Otro tipo de validación muy interesante para la mejora de los programas es la comparación de los resultados, por ejemplo, la velocidad del flujo respecto a los datos obtenidos durante el desarrollo del evento. En la actualidad, los datos de campo con los que se comparan los modelos son datos recogidos a posteriori y se limitan a la distribución espacial del material una vez haya terminado el evento. Para realizar este tipo de validación y la consecuente mejora que ello supone hace falta **monitorizar** las cuencas que presentan una alta probabilidad de ocurrencia de estos fenómenos.

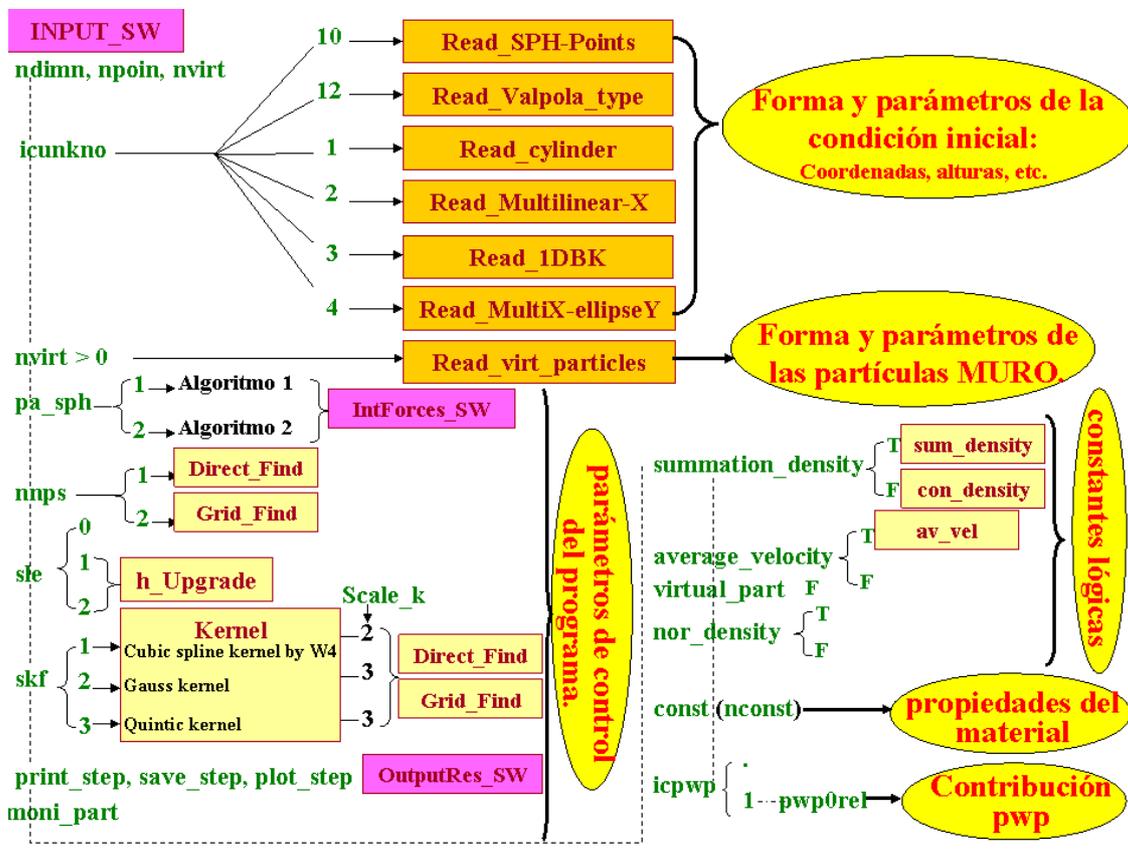
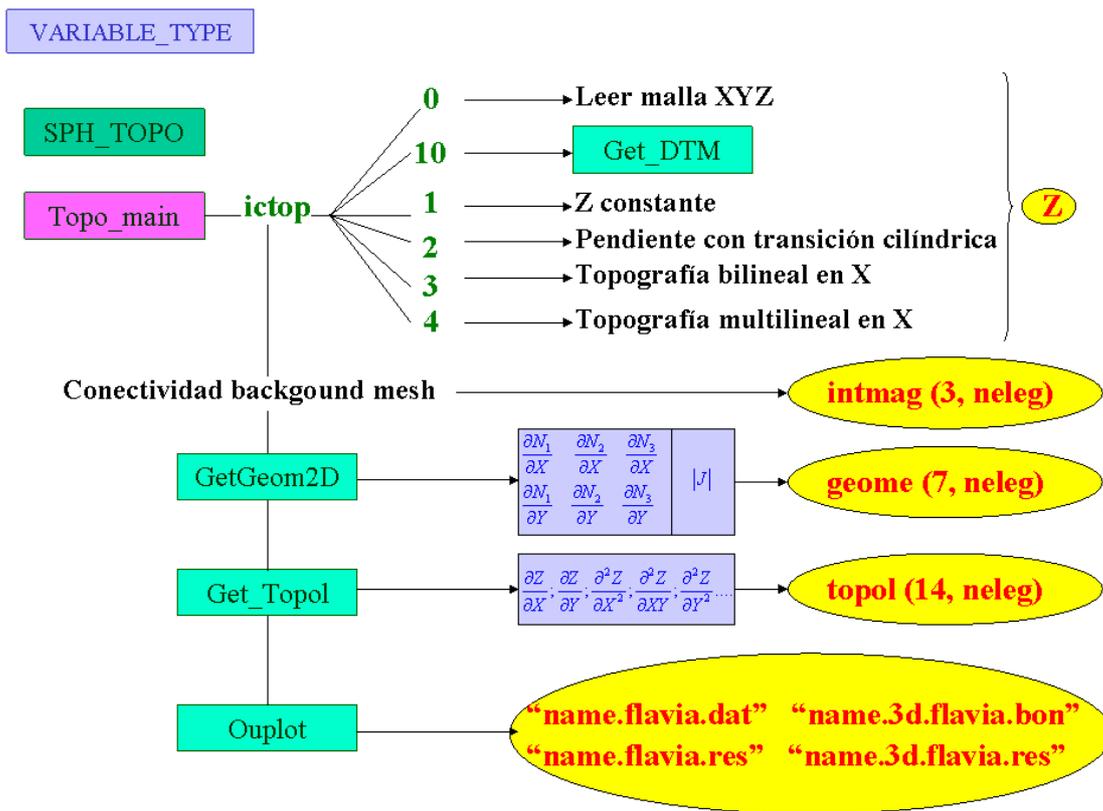
SPH:

MANUAL DEL USUARIO

ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

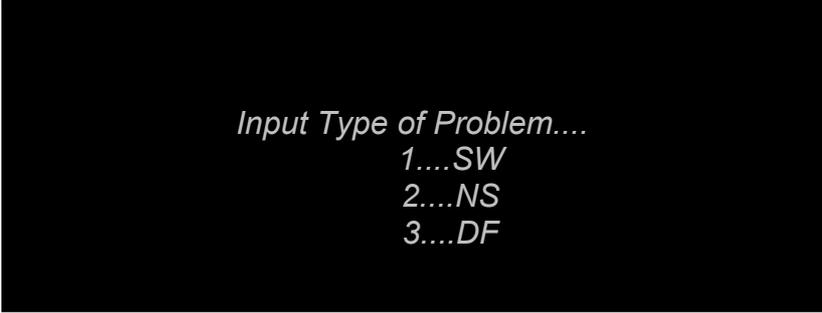






ENTRADA DE DATOS POR TECLADO

Al ejecutar el programa nos pide que introduzcamos una serie de datos manualmente. Dichos datos son los siguientes:



```
Input Type of Problem....  
1...SW  
2...NS  
3...DF
```

type_of_problem: 1=Shallow water (SW), 2= Navier-Stock (NS), 3 = Debris Flow (DF).

La opción operativa actualmente es la de Shallow Water por lo que se debe introducir el número correspondiente (**1**).



```
Input the problem name <TOPO mesh> ?
```

problem_name: nombre del fichero de topografía “**problem.top**”

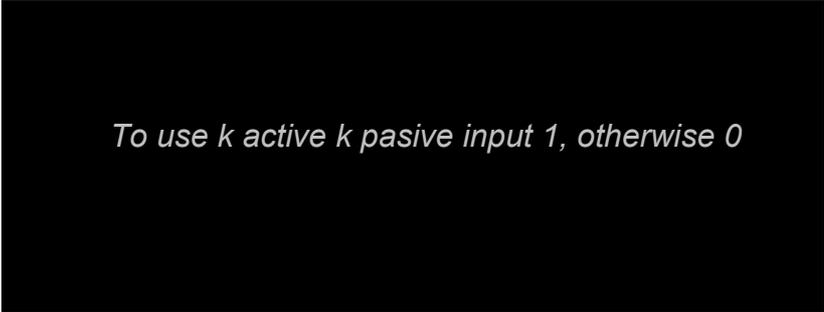
Nota: el nombre del fichero de entrada de topografía se debe introducir sin teclear la extensión (**.top**).



Input the problem name?

problem_name: nombre del fichero de datos “**problem.dat**”

Nota: el nombre del fichero de entrada de datos del problema se debe introducir sin teclear la extensión (**.dat**).



To use k active k pasive input 1, otherwise 0

ic_K0: el valor de esta variable equivale a **cero** si las tensiones verticales y horizontales son iguales y equivale a **uno** si se considera otro tipo de relación entre ambas. En este último caso, el programa nos pide que introduzcamos los valores correspondientes a los coeficientes k (activa y pasiva) que determinan dicha relación.

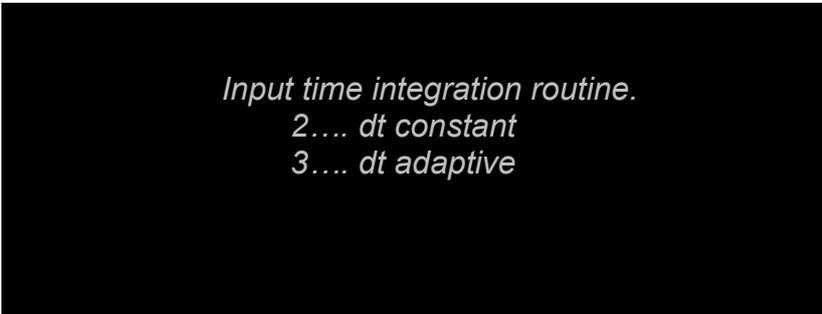


Input active and passive coefficients

K0_active: valor del coeficiente k activa.

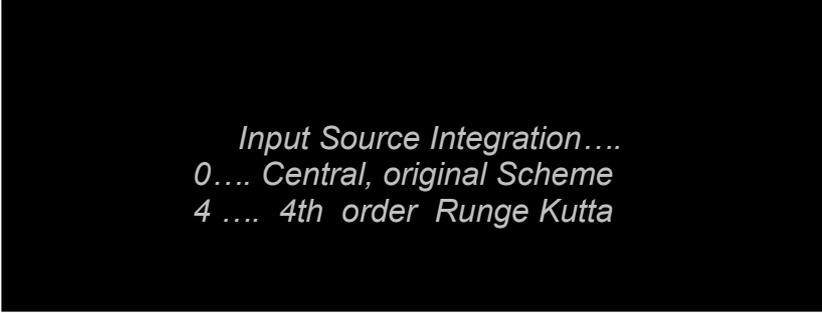
K0_pasive: valor del coeficiente k pasiva.

Nota: el valor del coeficiente ***K0_active*** debe de ser inferior o igual al valor del coeficiente ***K0_pasive***, por lo tanto el programa nos seguirá pidiendo los datos correspondientes a estos dos coeficientes hasta que los introduzcamos correctamente.



Input time integration routine.
2... dt constant
3... dt adaptive

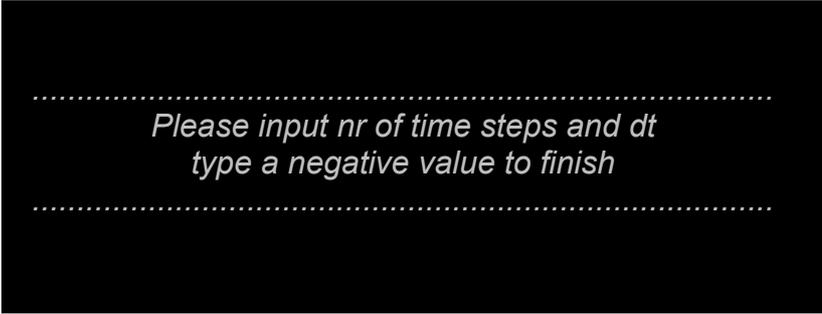
ic_adapt_dt: el valor de esta variable equivale a **2** si el incremento del tiempo es constante durante todo el proceso del cálculo y equivale a **3** si el programa actualiza el incremento de tiempo y lo adapta a las nuevas condiciones de flujo que se dan en cada paso de tiempo.



```
Input Source Integration....  
0.... Central, original Scheme  
4 .... 4th order Runge Kutta
```

Source_integration: el valor de esta variable equivale a **0** si se utiliza el esquema central original y equivale a **4** en el caso de utilizarse un esquema de Runge Kutta de cuarto orden.

Si el valor de **ic_adapt_dt** que habíamos tecleado con anterioridad es equivalente a **2** el programa solicita los siguientes datos:



```
.....  
Please input nr of time steps and dt  
type a negative value to finish  
.....
```

maxtimestep : máximo número de incrementos de tiempo.

dt : incremento de tiempo constante.

Cada vez que el programa llega al máximo número de incremento de tiempo que le hayamos especificado nos vuelve a pedir los valores de **maxtimestep** y **dt**. Si lo que queremos es finalizar el cálculo y salir del programa tenemos que teclear un número negativo.

Por otro lado, si el valor de **ic_adapt_dt** es equivalente a **3** el programa solicita los siguientes datos:

```
.....  
Time is = 0.0000000E+00  
Please input (1) dt  
          (2) Time for end of computation and  
          (3) Adapt. control(0...dt ct. 1...adapt. dt)  
          (4) Maximum number of time steps maxtimestep  
type a value of dt < 0 to stop  
.....
```

dt : incremento de tiempo inicial.

time_end: tiempo final.

ic_adapt_dt: el valor de esta variable equivale a **0** si el incremento del tiempo es constante y equivale a **1** si el programa actualiza el incremento de tiempo.

maxtimestep : máximo número de incrementos de tiempo.

Igual que en el caso anterior cada vez que el programa llega al **maxtimestep** nos vuelve a pedir los mismos datos, lo cual nos permite comprobar los resultados obtenidos y decidir si queremos seguir calculando o no. Para que el programa se parase es necesario teclear un número negativo.

FICHEROS DE ENTRADA DE DATOS

El SPH utiliza dos ficheros de entrada de datos: 1) el fichero “.top” donde se proporciona la información necesaria para definir la malla de topografía, y 2) el fichero “.dat”. donde se establecen los parámetros del problema a modelar (condición inicial, reología, constantes del material, presiones intersticiales, etc.), así como los parámetros numéricos del programa (número de partículas, partículas virtuales, tipo de algoritmo “Cubic Spline, Gauss Kernel, Quinitic Kernel”, etc.). A continuación se presenta la estructura de ambos ficheros y las múltiples alternativas que ofrecen.

1. Fichero de entrada de datos de topografía “.top”:

ictop: variable de control de topografía.

Los valores que toma la variable *ictop* corresponden a las distintas alternativas que ofrece el programa para definir la malla de topografía.

ictop = 0
(leer malla 3D)

npoigx: número de nodos de la malla en la dirección X.

npoigy: número de nodos de la malla en la dirección Y.

npoig: número total de los nodos de la malla. ($npoig = npoigx * npoigy$).

Ejemplo:

ictop			
0			
npoigx	npoigy	Número de nodos	
101	101	10201	
Coordenadas			
1	0.53554100E+06	0.21010500E+07	0.38306648E+04
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
10201	0.54455500E+06	0.21109600E+07	0.30569832E+04

En este caso el programa se limita a leer la información (XYZ) de una malla topográfica tridimensional adecuada. Dicha malla se puede obtener mediante el programa GID y el programa de interpolación. Por ello se crea una malla bidimensional estructurada en GID teniendo en cuenta que sus nodos tienen que localizarse dentro del área de estudio de cuya topografía disponemos y a continuación se obtiene la cota (Z) de los nodos utilizando el programa de interpolación.

ictop = 10
(Generar malla 3D a partir de DTM)

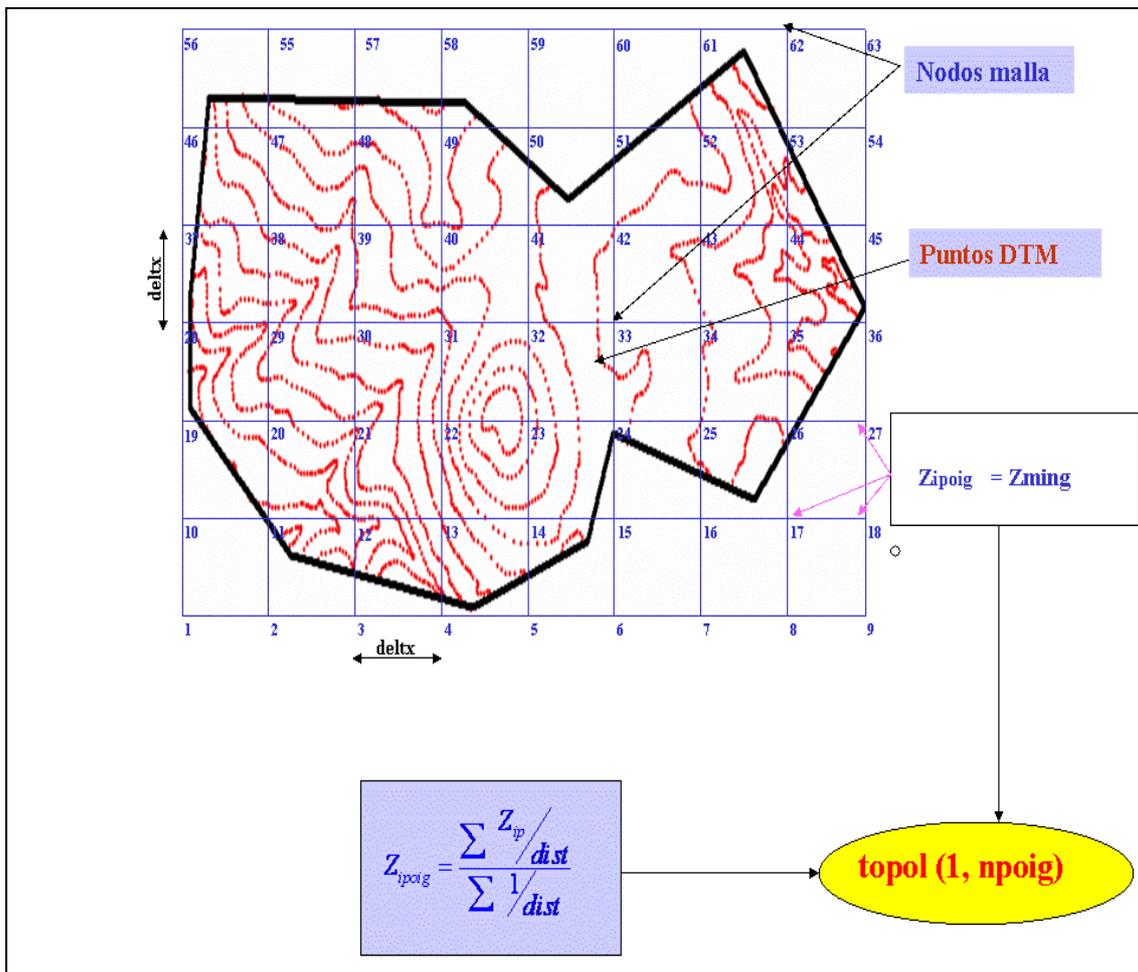
np_dtm: número total de los puntos del modelo digital del terreno (DTM).

deltx: la equidistancia entre los nodos de la malla.

Ejemplo:

ictop			
10			
Número de puntos	deltx		
161731	100		
Coordenadas			
1	535078.00	2103754.00	3900.00
2	535046.00	2103768.00	3900.00
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
161730	554186.33	2107931.17	2410
161731	554188.32	2107930.96	2410

A partir de la información del DTM se genera una malla y se interpola la cota de sus nodos a partir de la información XYZ de los puntos del DTM:



ictop = 1
(malla con cota constante)

xming: valor mínimo de la coordenada X.

ymin: valor mínimo de la coordenada Y.

xmaxg: valor máximo de la coordenada X.

ymaxg: valor máximo de la coordenada Y.

npoigx: número de nodos de la malla en la dirección X.

npoigy: número de nodos de la malla en la dirección Y.

zconst: valor de cota constante para todos los nodos de la malla de topografía.

Ejemplo:

```
ictop
1
Xmin Xmax Ymin Ymax
-15. 15. -1. 1.
npoigx npoigy
300 20
Z constant
10.
```

ictop = 2
(Pendiente con transición cilíndrica)

xming: valor mínimo de la coordenada X.

ymin: valor mínimo de la coordenada Y.

xmaxg: valor máximo de la coordenada X.

y_{maxg}: valor máximo de la coordenada Y.

n_{poigx}: número de nodos de la malla en la dirección X.

n_{poigy}: número de nodos de la malla en la dirección Y.

T1: Longitud del tramo 1.

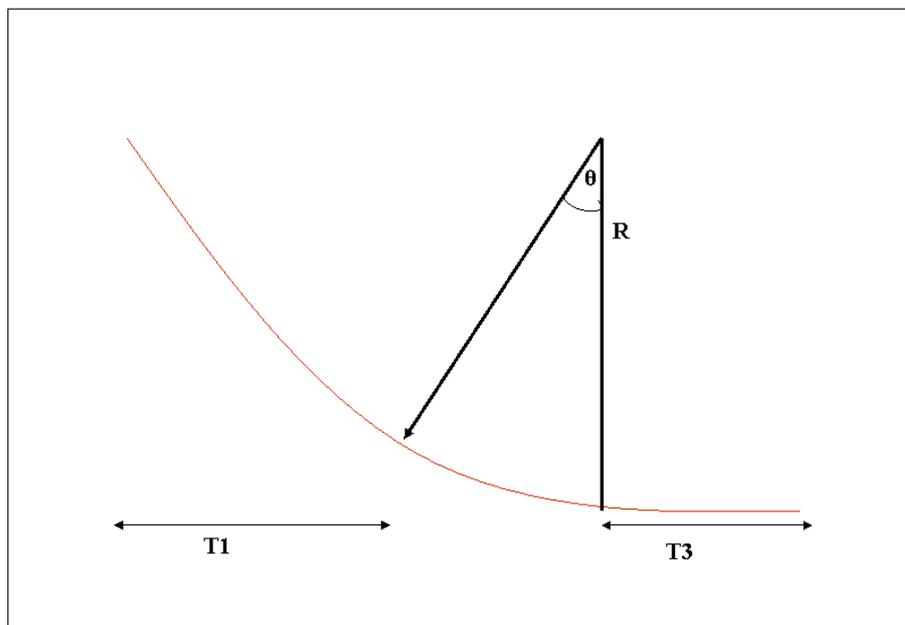
R: Radio de la transición cilíndrica.

Theta: ángulo de la transición cilíndrica.

T3: longitud del tramo horizontal.

Ejemplo:

```
ictop
2
Xmin Xmax Ymin Ymax
.
npoigx npoigy
T1 R Theta T3
.
```



ictop = 3
(Ley bilineal en X)

xming: valor mínimo de la coordenada X.

ymin: valor mínimo de la coordenada Y.

xmaxg: valor máximo de la coordenada X.

ymaxg: valor máximo de la coordenada Y.

npoigx: número de nodos de la malla en la dirección X.

npoigy: número de nodos de la malla en la dirección Y.

x0: coordenada X del punto x0.

d0: altura de la coordenada x0.

x1: coordenada X del punto x1.

d1: altura de la coordenada x1.

x2: coordenada X del punto x2.

d2: altura de la coordenada x2.

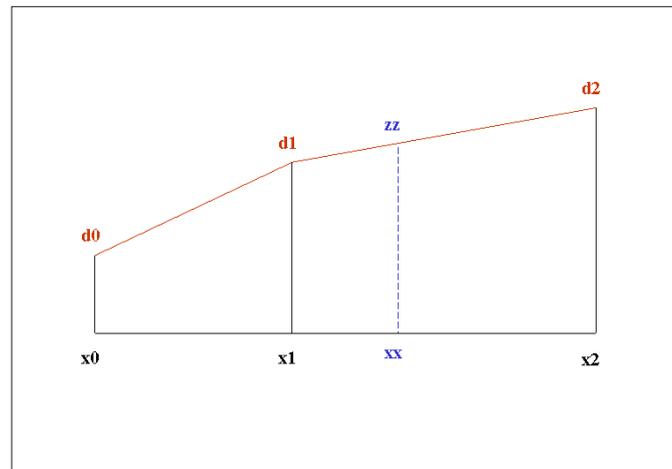
Ejemplo:

```

ictop
3
Xmin Xmax Ymin Ymax
0. 400. -10. 10.
npoigx npoigy
20 2
x0 d0 x1 d1 x2 d2
-0.001 10. 300. 0. 400. 0.

```

Se trata de una topografía con un solo cambio de pendiente que coincide con la coordenada x1, por lo cual se interpola la altura (zz) de cada nodo (xx) a partir de las alturas de los dos puntos que limitan el tramo al cual pertenece (ver figura).



ictop = 4
(Ley multilínea en X)

xming: valor mínimo de la coordenada X.

yming: valor mínimo de la coordenada Y.

xmaxg: valor máximo de la coordenada X.

ymaxg: valor máximo de la coordenada Y.

npoigx: número de nodos de la malla en la dirección X.

npoigy: número de nodos de la malla en la dirección Y.

nptsZ: número de puntos que definen los tramos de pendiente.

xptsZ(i): coordenadas X de los puntos (***nptsZ***) que delimitan los tramos de la pendiente.

zptsZ(i): coordenadas Z de los puntos (***nptsZ***) que delimitan los tramos de la pendiente.

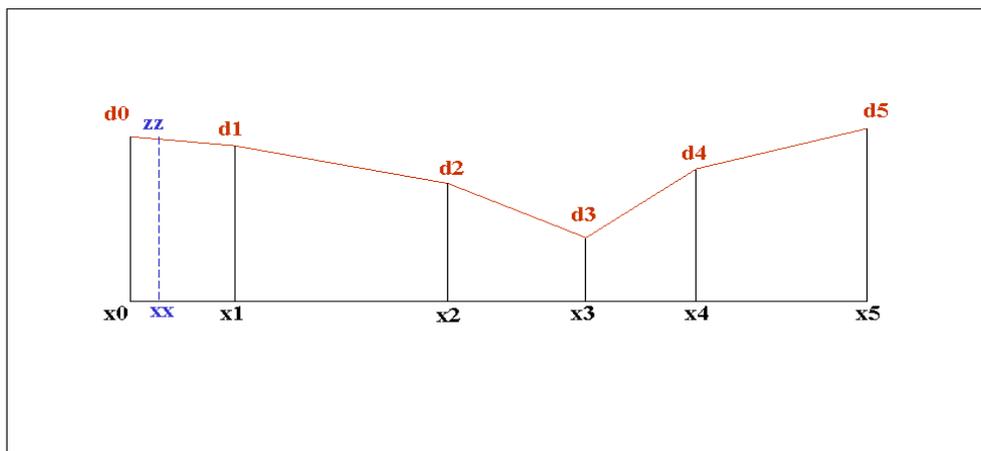
Ejemplo:

```

ictop
4
Xmin Xmax Ymin Ymax
0. 3000. -20. 20.
npoigx npoigy
300 4
nr of points defining topography
14
xlist and Z list
0. 464. 500. 668. 799. 906. 980. 1273. 1312. 1760. 2078. 2240. 2377. 3000.
2375. 1935. 1900. 1806. 1731. 1700. 1681. 1487. 1481. 1200. 1050. 1012. 1075. 1506.

```

La única diferencia entre este caso y el anterior es el hecho de que se trata de “n” tramos en lugar de dos.



2. Fichero de entrada de datos del problema “.dat”:

El fichero “.dat” recoge la información correspondiente a: a) la dimensión del problema y el número de partículas que forman la masa del material; b) el número de partículas virtuales y sus parámetros (área, altura, coordenadas, etc.); c) los parámetros que definen la condición inicial o masa del material; d) los parámetros del cálculo numérico (tipo de algoritmo, pasos de tiempo para escritura en los ficheros de salida, tipo de aproximación para el cálculo de la “densidad”, etc.).

nline: número de líneas de texto de explicación del problema.

text: texto de explicación del problema.

ndimn: dimensión de problema.

npoin: número de partículas que representan la condición inicial.

nvirt: número de partículas virtuales.

icunkno: variable de control de la condición inicial.

Los valores que toma la variable ***icunkno*** corresponden a las distintas alternativas que ofrece el programa para definir la condición inicial, es decir la forma, el área, la altura y las coordenadas de la masa del material representada por la malla de partículas SPH.

icunkno = 1
(Disposición cilíndrica de las partículas)

xp0: coordenada X del centro de la masa del material.

yp0: coordenada Y del centro de la masa del material.

rp0: radio de la masa del material.

hp0: altura del centro de la masa del material.

icdens: variable que indica si la altura del material es constante o variable.

facthsml: factor que define el radio de influencia de cada partícula.

Ejemplo:

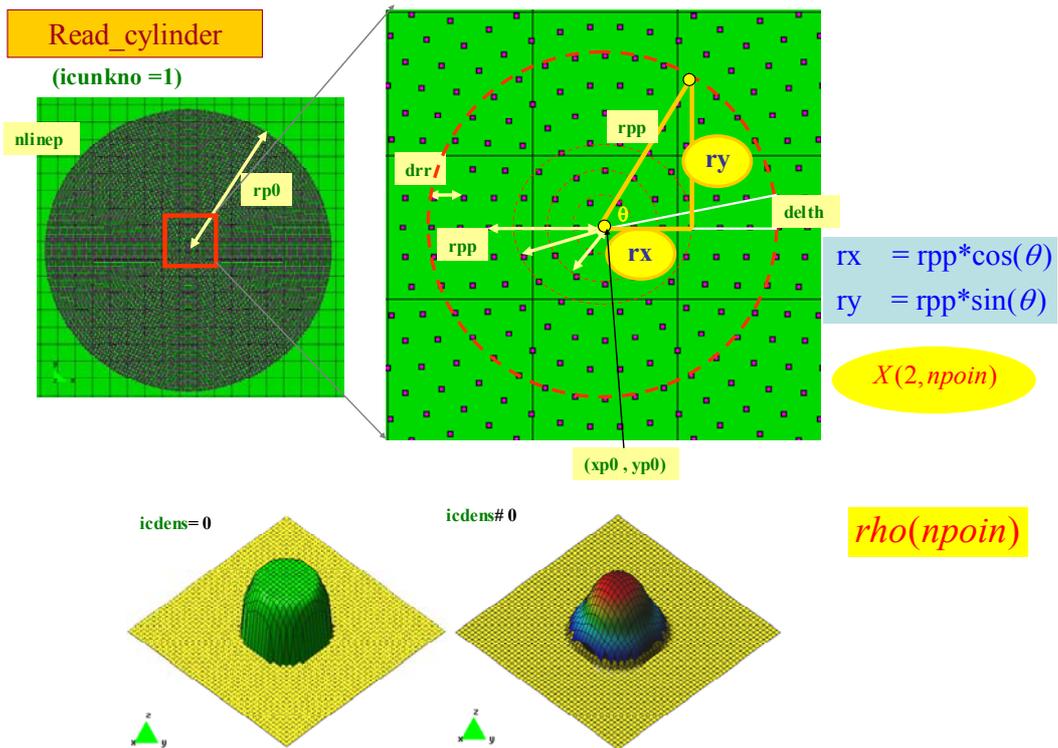
```

1
text
-- ndimn npoin nvirt
. . .
icunkno
1
xp0 yp0 rp0 hp0 icdens
0. 0. 0.5 1. 0
ngroups_vp
Np_vp, Area_vp, Height_vp, hsml_vp
.
X Y
.
.
vp_r0, vp_D, vp_n1, vp_n2
.
pa_sph, nnps, sle, skf, print_step, save_step, plot_step, moni_part
.
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens
.
cgra dens cmanning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanfi8 hfrict0 c11 tanfi0 .Bfact hrelwp. 15..Comp
.
icpwp
pwprel

```

En el caso de la disposición cilíndrica de las partículas la acumulación del material toma la forma de un cilindro con una altura constante si **icdens** = 0, o la forma de un cono si **icdens** = 1. Además, inmediatamente después de leer el nombre del fichero “.dat” el programa nos pide que tecleemos el valor de **facthsml**.

--- we are reading from cylinder/hemisphere point generation -----
 give factor for smoothing length. Total is 2*facthsml



icunkno = 2
(Acumulación de material multilineal en X)

nptsh: número de puntos que definen los cambios de altura del material.

xptsh(i): coordenadas X de los puntos ***nptsh***.

hptsh(i): alturas correspondientes a los puntos ***nptsh***.

facthsml: factor que define el radio de influencia de cada partícula.

Ejemplo:

```

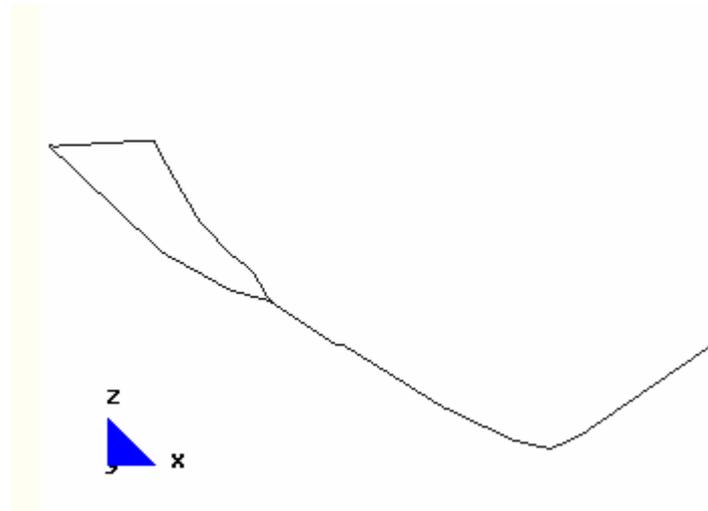
1
text
-- ndimn npoin nvirt
. . .
icunkno
2
nptsh
5
list of X's and h's
1. 464 668 906 980
1. 157. 78. 38. 1.
ngroups_vp
.
Np_vp, Area_vp, Height_vp, hsml_vp
.
X Y
.
.
vp_r0, vp_D, vp_n1, vp_n2
.
pa_sph, nnps, sle, skf, print_step, save_step, plot_step, moni_part
.
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens
.
cgra dens cmanning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanf18 hfrict0 c11 tanf10 .Bfact hrelpwp. 15..Comp
.
icpwp
.
pwprel
.

```

La acumulación del material presenta cambios de altura según la dirección del eje X. dichos cambios quedan definidos por sus coordenadas (*xptsh(i)*) y alturas (*hptsh(i)*).

Inmediatamente después de leer el nombre del fichero “.dat” el programa nos pide teclear el valor de *facthsm1*.

*This is Read_Multilinear x routine
we take here hsm1 = 2*dx, you can input a factor f such that
hsm1 = f * 2 * dx*



icunkno = 3
(Problema de rotura de presa en 1D)

x1: coordenadas X del extremo de la izquierda de la presa.

xc: coordenada X de la presa.

xr: coordenada X del extremo de la derecha de la presa.

hl: altura del agua a la izquierda de la presa.

hr: altura del agua a la derecha de la presa.

Ejemplo:

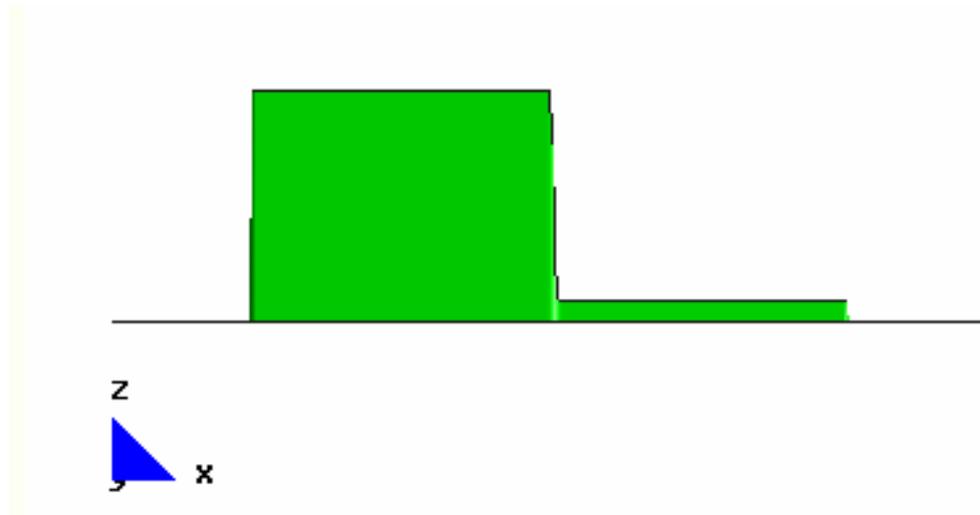
```

1
text
-- ndimn npoin nvirt
. . .
-- icunkno
3
x1 xc xr hl hr
-10. 0. 10. 1.0 0.1

ngroups_vp
.
Np_vp, Area_vp, Height_vp, hsml_vp
.
X Y
.
.
vp_r0, vp_D, vp_n1, vp_n2
.

pa_sph, nnps, sle, skf, print_step, save_step, plot_step, moni_part
.
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens
.
cgra dens cmanning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanfi8 hfrict0 c11 tanfi0 .Bfact hrelpwp. 15..Comp
.
icpwp
.
pwprel
.

```



icunkno = 10
(Leer Partículas SPH)

NslMasses: número de masas de material.

NP_slm: número de partículas en cada masa de material.

Area_slm: área de cada masa de material.

Height_slm: altura de cada masa de material.

hsml_slm: radio de influencia de cada partícula.

x(idimn, ipoin): coordenadas XY de cada partícula.

Ejemplo:

```

1
text
-- ndimn npoin nvirt
.
.
.
icunkno
10
number of sliding masses
1
mass1 ---- nps area height hsml t0 ----
      3634 4953. 0.5 3. 0.
      X      Y
      .      .
      .      .
      .      .
ngroups_vp
.
Np_vp, Area_vp, Height_vp, hsml_vp
.
      X      Y
      .      .
      .      .
      .      .
vp_r0, vp_D, vp_n1, vp_n2
.
.
.
pa_sph, nnps, sle, skf, print_step, save_step, plot_step, moni_part
.
.
.
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens
.
.
.
cgra dens cmaning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanfi8 hfrict0 c11 tanfi0 .Bfact hrelpwp. 15..Comp
.
.
.
icpwp
.
.
.
pwprel
.
.
.

```



icunkno = 12
(Condición inicial tipo Valpola)

El material tiene una forma de conoide según la dirección Y mientras que según el eje X su altura varia según un perfil constituido por *nptsh*, cuyas coordenadas X (*xptsh(i)*) y alturas (*hptsh(i)*) vienen dadas en el fichero de entrada. La base de la masa es una elipse definida por su centro (*x0pts*, *y0pts*) y sus radios (*a0pts*, *b0pts*).

deltpts: equidistancia entre las partículas vecinas.

facthsm1: factor que define el radio de influencia.

x(ndimn, ipoin): coordenadas X y Y de las partículas.

x0pts: coordenada X del centro de la elipse.

y0pts: coordenada Y del centro de la elipse..

a0pts: radio de la elipse según la dirección X.

b0pts: radio de la elipse según la dirección Y.

expmpts: tipo de conoide según la dirección Y.

nptsh: número de puntos que definen el perfil XX'.

xptsh(i): matriz que almacena las coordenadas X de los puntos *nptsh*.

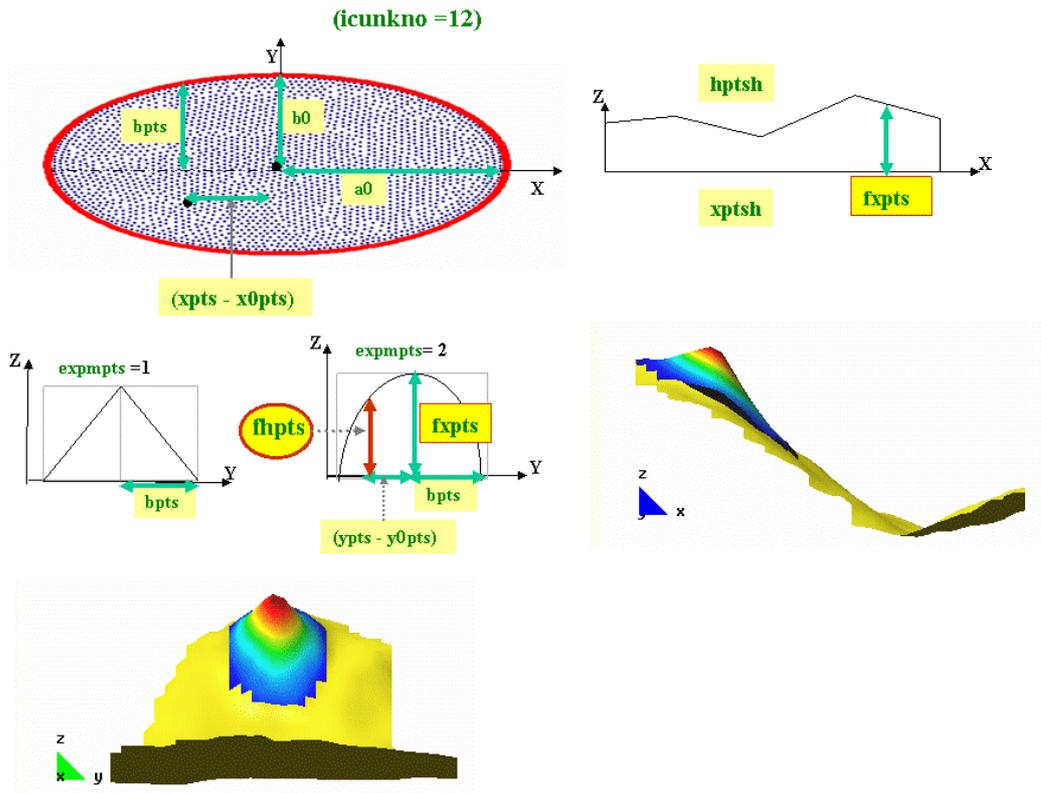
hptsh(i): matriz que almacena las alturas de los puntos *nptsh*.

Ejemplo:

```

1
text
-- ndimn npoin nvirt
. . .
-- icunkno
12
--- delt fhsml
15 2
-- X Y
. .
. .
-- X0 Y0 a0 b0 m
1467 1489 451 351 2
nptsh
5
list of X's and h's
1018. 1481 1685 1923 1997
1. 157. 78. 38. 1.
ngroups_vp
Np_vp, Area_vp, Height_vp, hsm1_vp
. X Y
. .
. .
vp_r0, vp_D, vp_n1, vp_n2
. .
pa_sph, nnps, sle, skf, print_step, save_step, plot_step, moni_part
. . .
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens
. . .
cgra dens cmanning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanf18 hfri0 c11 tanf10 .Bfact hrelpwp. 15..Comp
. . .
icpwp
pwprel
.

```



Parámetros de control

pa_sph: esta variable toma el valor 1 si se utiliza el algoritmo1 y toma el valor 2 para utilizarse el algoritmo2.

nnps: según si esta variable toma el valor de 1 o de 2 el programa utiliza la subrutina “direct_find” o “grid_find” para la búsqueda de las partículas vecinas .

sle: si **sle** =0 el valor de **hsml** se mantiene constante durante el cálculo, mientras si su valor es distinto de cero el programa llama a la subrutina de actualización de **hsml**. En este último caso **sle** puede tomar el valor de uno o de dos.

skf: si **skf** = 1 el núcleo utilizado es cubic spline Kernel by w4-spline (Monaghan, 1985).

si $skf = 2$ el núcleo utilizado es Gauss Kernel (Gingold & Monaghan, 1981).

si $skf = 3$ el núcleo utilizado es Quintic Kernel (Morris, 1985).

print_step: paso de tiempo para escribir en pantalla.

save_step: paso de tiempo para escribir en los ficheros de salida de datos.

plot_step:

moni_part: esta opción nos permite seguir los resultados en pantalla de una partícula dada mientras se esta ejecutando el programa.

Ejemplo:

pa_sph,	nnps,	sle,	skf,	print_step,	save_step,	plot_step,	moni_part
1/2	1/2	0/1/2	1/2/3

Constantes lógicas

Estas constantes toman los valores verdadero (T: *True*) o falso (F: *False*).

summation_density: esta variable define la manera según la cual se calcula la densidad.

T: llama a la subroutine **sum_density** (algoritmo de suma de densidad) .

F: llama a la subroutine **con_density** (aproximación de continuidad) .

average_velocity: si el valor de esta variable es T (true) el programa utiliza la subroutine **av_vel**, la cual calcula una velocidad media que sirve para

corregir la velocidad de las partículas y prevenir los problemas de penetración (Monaghan, 1992).

virtual_part: esta opción no está implementada por lo que su valor es F.

nor_density: si el valor de esta variable igual a T se calcula la densidad normalizada.

Ejemplo

```
sum_den, av_vel, virt_part, nor_dens  
T/F T/F F T/F
```

Constantes del material

En la línea de texto correspondiente a las constantes del material se define tanto la reología como los parámetros del material que se está simulando.

Ejemplo

```
cgra dens cmanning 4.. nfrict Tauy0 constK visco tanfi8 hfrict0 c11 tanfi0 .Bfact hrelpwp. 15..Comp  
9.8 1000. 0.0 0.0 8 0.0 0.0 0.0 1. 1.e-3 0.0 0. 0.0166 0.02 0.001
```

g	Gravedad.	const(1)
dens	Densidad.	const(2)
manning	Número de Manning (sólo para fluidos tipo 1, 4 y 5)	const(3)
coriolis	Parámetro de coriolis	const(4)
tipo	= 1, para fluidos newtonianos en régimen turbulento. = 2, para fluidos newtonianos en régimen laminar. = 3, para fluidos de Coussot. = 4, para fluidos de Bingham con solución exacta. = 5, para fluidos friccionales. = 6, para fluidos friccionales con consolidación. = 7, para fluidos friccionales con influencia de curvatura. = 8, para fluidos friccionales con consolidación e influencia de curvatura.	const(5)
Yield	Tensión de fluencia (tensión mínima que hay que superar para que haya flujo)	const(6)
K*eta	Factor relacionado con la viscosidad (se suele tomar equivalente a 24)	const(7)
Visco	Viscosidad dinámica.	const(8)
Tanfi	Tangente del ángulo de rozamiento final efectiva	const(9)
hfrict	Altura de la capa de fricción con el fondo	const(10)
csafe	Parámetro libre (no se utiliza).	const(11)
tanfi0	Tangente del ángulo de rozamiento inicial.	const(12)
Bfact	Factor de amortiguamiento exponencial con el tiempo de la tangente del ángulo de fricción para fluidos friccionales. Si se toma en cuenta la consolidación Bfact esta relacionado con el coeficiente de consolidación C_v según la expresión: $B_{fact} = \frac{C_v \pi^2}{4}$	const(13)
hrelpw	Su valor es distinto de cero únicamente cuando se toma en cuenta la disipación de la presión intersticial, y su valor corresponde al cociente entre la altura de la capa de cortante y la capa total.	const(14)
Zcomp	Altura mínima del material.	const(15)

icpwp = 1
(Presiones intersticiales)

Para que se tome en cuenta el acoplamiento son las presiones intersticiales el valor de *icpwp* tiene que ser equivalente a uno. Además, hay que proporcionar al programa el valor inicial de la presión intersticial *pwp0rel*.

Ejemplo

```
icpwp 1 / 0
pwprel
1.
```

FICHEROS DE SALIDA DE DATOS

Los ficheros que genera el programa son:

1. Ficheros de comprobación:

“name.top.chk”: fichero para comprobar la de lectura de la topografía.

“name.chk”: fichero para comprobar la lectura del fichero “.dat” .

2. Ficheros de salida para la topografía “.top”:

“name.flavia.dat”

```

line 1: output of GEOFLOW2000
line 2: output of GEOFLOW2000
line 3: output of GEOFLOW2000
line 4: output of GEOFLOW2000
line 5: output of GEOFLOW2000
neleg  npoig  nelem_type
2304   1221    3
----  coordinates  ----
      1   819.9200      250.7800

      1220   3619.920      2810.780
      1221   3699.920      2810.780
--- ielem  n1   n2   n3   imat  ----
      1           1       2           39  1
      2           1       39          38  1

      2303           1183      1184      1221  1
      2304           1183      1221      1220  1

```

“name.flavia.res”

```

deri2      1  0.0000000E+00  3  1  0 (ipoig,zxx,zxy,zyy)
           1  7.7524521E-07 -1.7182931E-05 -1.8031544E-04

           1221 -4.1575949E-03 -1.0575083E-03  5.0893734E-04
           Z      1  0.0000000E+00  1  1  0
           1  1000.000

           1221  1215.078
           rt     1  0.0000000E+00  1  1  0
           1  1.000000

           1221  1.032650
           Slope  1  0.0000000E+00  2  1  0
           1  8.3107636E-09  2.0718801E-07

           1221  0.2109409      -0.1478856
    
```

“name.3d.flavia.bon”

```

line 1: output of GEOFLOW2000
line 2: output of GEOFLOW2000
line 3: output of GEOFLOW2000
line 4: output of GEOFLOW2000
line 5: output of GEOFLOW2000
nelem  npoig  nelem_type
2304      1221      7
---- coordinates ----
           1  819.9200      250.7800      0.0000000E+00

           1221  3699.920      2810.780      0.0000000E+00
--- ielem  n1  n2  n3  imat -----
           1      1      2      39  1

2304      1183      1221      1220  1
    
```

“name.3d.flavia.res”

top 3d	1	0.0000000E+00		2	1	0
	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	1000.000		
	1221	0.0000000E+00	0.0000000E+00	1215.078		

3. Ficheros de salida de resultados:

Los ficheros “name.1.res”, “name.2.res”, “name.3.res” no se utilizan.

“ name.post.msh”

MESH SPH_quads	dimension	3	ElemType	Quadrilateral	Nnode	4
Coordinates						
1	819.9200		250.7800		1000.000	
.	.		.		.	
.	.		.		.	
.	.		.		.	
6759	966.4534		1474.000		2294.663	
End coordinates						
Elements						
1	42		43		117	116 1
.	.		.		.	
.	.		.		.	
.	.		.		.	
3487	4735		4736	4810	4809	1
End elements						
MESH SPH_points	dimension	3	ElemType	Point	Nnode	1
Elements						
1	4811		3			
.	.		.			
.	.		.			
.	.		.			
1949	6759		3			
End elements						

“name.post.res”

```
GiD Post Results File 1.0
Result "height" "Height" 0.0000000E+00 Vector OnNodes "where"
Values
  74977 0. 0. 4.000000
  74978 0. 0. 4.000000

  97572 0. 0. 4.000000
  97573 0. 0. 4.000000
End Values
Result "dis" "Disp" 0.0000000E+00 Vector OnNodes "where"
Values
  104851 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00
  104852 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00

  105306 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00
  105307 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0000000E+00
End Values
Result "vel" "veloc" 0.0000000E+00 Vector OnNodes "where"
Values
  74977 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0
  74978 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0

  105306 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0
  105307 0.0000000E+00 0.0000000E+00 0.0
End Values
Result "height" "Height" 5.743004 Vector OnNodes "where"
Values

End Values
```