

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología



**ÍNDICE DE PUNTO FIJO EN HIPERESPACIOS E ÍNDICE
DE CONLEY**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR POR**

José Manuel Salazar Crespo

Bajo la dirección del Doctor:

Francisco Romero Ruiz del Portal

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1808-6

Indice de punto fijo en hiperespacios e índice de Conley

José Manuel Salazar Crespo

Memoria para optar al grado de Doctor en CC.Matemáticas.
Dirigida por Francisco Romero Ruiz del Portal,
Doctor en CC. Matemáticas y
Profesor Titular del Departamento de Geometría y Topología
de la Facultad de CC. Matemáticas de la U.C.M.

Madrid, Abril de 2001

Departamento de Geometría y Topología

Facultad de CC. Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

AGRADECIMIENTOS

La presente Memoria no hubiera podido ser escrita sin la ayuda, directa o indirecta, de un buen número de personas. A ellas dedico estas líneas de agradecimiento. En primer lugar, quisiera acordarme de todos mis profesores del Programa de Doctorado, que siempre me mostraron la mejor de sus disposiciones cuando necesité de su asesoramiento. También quisiera dar las gracias, de manera especial, al Profesor Francisco Romero, director de esta Memoria, por su apoyo y paciencia, así como por la cantidad tan enorme de tiempo y esfuerzo que ha derrochado para que este trabajo vea la luz. En último lugar, aunque no el menos importante, quisiera agradecer a mi familia el soporte moral que me ha brindado en todo momento y sin el que me hubiese sido imposible reunir los ánimos suficientes para terminar este trabajo.

INDICE

Introducción 7

Capítulo I. Índice *shape* en espacios métricos 9

- I.1. Introducción 9
- I.2. Resultados preliminares 11
 - I.2.1. *Shape*, resoluciones y teorema de continuidad 12
 - I.2.2. Índice de Conley 18
- I.3. Índice *shape* en espacios métricos y propiedades principales 21
 - I.3.1. Definición y consistencia del índice *shape* 22
 - I.3.2. Propiedades principales del índice *shape*. Propiedad aditiva 31
- I.4. Algunos resultados acerca de los tipos *shape* que aparecen como índice en un sistema dinámico discreto 40

Capítulo II. Índice de punto fijo en hiperespacios: Un índice del tipo de Conley para sistemas semidinámicos discretos 51

- II.1. Introducción y comentarios preliminares 51
- II.2. Propiedades del índice de compacto fijo y resultados principales 55
- II.3. Definición y estudio del m -índice de compacto fijo 72

Capítulo III. Índice de punto fijo en productos simétricos 81

- III.1. Introducción 81
- III.2. Definiciones y resultados preliminares 83
- III.3. Estudio del índice para $X = \mathbb{R}^m$ y $f : B(\bar{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal con $\bar{0}$ un punto fijo hiperbólico 85
- III.4. Aplicación: Estudio de la G-herradura 110
- III.5. Aplicación: Característica de Euler de los n -productos simétricos de variedades 118

Capítulo IV. Índice de punto fijo de iteraciones de homeomorfismos locales del plano 127

- IV.1. Introducción 127
- IV.2. Resultados preliminares y Teorema Principal 129
- IV.3. Existencia de filtraciones fuertes 137
- IV.4. Generalización del Teorema Principal 146

Bibliografía 171

INTRODUCCION

La presente Memoria tiene por objeto la construcción y el estudio de cierto tipo de índices asociados a los conjuntos compactos, invariantes y aislados de sistemas dinámicos discretos. Estos índices, de propiedades análogas a las del índice de Conley, nos permitirán obtener información sobre la dinámica en los conjuntos mencionados. El desarrollo de nuestra investigación requerirá el empleo de técnicas de índice de Conley.

Dividimos el contenido de este texto en tres partes. En la primera de ellas (Capítulo I) construimos el índice *shape* asociado a un compacto invariante y aislado de un sistema dinámico discreto definido sobre un espacio métrico. Lo novedoso de esta construcción es que prescinde de la condición de compacidad local del espacio, que hasta ahora siempre se había exigido. A cambio impondremos cierta condición, más débil, de compacidad sobre la aplicación (condición de Rybakowski).

En la segunda parte (Capítulos II y III) asociamos a un compacto invariante y aislado de un sistema dinámico discreto f en un ANR localmente compacto X , los índices de punto fijo de las aplicaciones inducidas por f en ciertos hiperespacios de X . Calcularemos sus valores y veremos cuál es su significado dinámico.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea K un compacto invariante, aislado y conexo. La tercera y última parte de este estudio (Capítulo IV) calcula el índice de punto fijo, en los entornos aislantes de K , de las iteraciones de f , $i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K))$. Este cómputo, que generaliza un reciente teorema de Le Calvez y Yoccoz, proporciona resultados sobre la existencia de soluciones periódicas de f en K . De igual modo obtenemos un corolario que niega la existencia de homeomorfismos minimales en ciertos subconjuntos de S^2 .

CAPITULO I

INDICE SHAPE EN ESPACIOS METRICOS

Resumen. En este capítulo se resuelven dos problemas planteados por M.Mrozek en [97]. Sea X un espacio métrico localmente compacto, U un subconjunto abierto de X y $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua. Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado para f . Mrozek introdujo, en este contexto, el índice *shape* de K como cierto límite inverso en la categoría *shape*, con punto base, y propuso la posibilidad de extenderlo al marco de los espacios métricos. Las dificultades técnicas para dicha extensión se deben fundamentalmente a que los funtores *shape* y límite inverso no conmutan, en general, fuera de la clase de los espacios compactos. Resolveremos este problema compensando la ausencia de compacidad local del espacio con la imposición de algún tipo de compacidad sobre la aplicación. Demostraremos que este índice coincide con el de Mrozek en espacios localmente compactos y resolveremos el problema de la propiedad aditiva.

Estudiaremos, además, qué *shapes* pueden aparecer como índice de conjuntos compactos, invariantes y aislados para f , en ANRs localmente compactos. Veremos que todos los solenoides q -ádicos aparecen con naturales modificaciones de la herradura de Smale y demostraremos que, en este marco, el índice no puede ser arbitrariamente complejo. Los solenoides generalizados no son el índice *shape* de ningún compacto invariante y aislado de ninguna aplicación continua definida localmente en un ANR localmente compacto. Probaremos que, en esta situación, el índice siempre puede computarse suponiendo que nuestra aplicación está definida en el cubo de Hilbert de lo que se deduce que el índice siempre será el *shape* de un compacto obtenido como límite inverso de una sucesión (P_n, g_n, \mathbb{N}) , siendo $P_n = P$ un poliedro finito y $g_n = g : P \rightarrow P$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

I.1. Introducción

El problema de construir un análogo al índice homotópico de Conley para sistemas dinámicos discretos fue planteado por el propio Conley en [25]. Robbin y Salamon, en [108], dieron una solución positiva a la cuestión para difeomorfismos de una variedad diferenciable y compacta. La mayor dificultad para trasladar las ideas de Conley en sistemas dinámicos continuos al caso discreto se encuentra en la ausencia de homotopías a lo largo de las trayectorias del flujo. Robbin y Salamon usan la teoría de *shape* para solventar este problema. Sin embargo, la biyectividad y la diferenciabilidad de la aplicación se utilizan fuertemente.

Independientemente, Mrozek, en [95], introduce un invariante algebraico (cohomológico) para homeomorfismos de espacios métricos localmente compactos. Mrozek y Rybakowski, en [98], extienden las ideas de Mrozek a

aplicaciones, no necesariamente inyectivas, en espacios métricos no necesariamente localmente compactos.

Más recientemente, Mrozek, en [97], presenta un esquema general para la construcción de varios índices del tipo de Conley unificando los resultados de [108] y [95] para aplicaciones definidas localmente en espacios métricos localmente compactos. Esta simplificación de las hipótesis es importante porque permite aplicar la teoría cuando se pretende estudiar las funciones de Poincaré generadas por algún fenómeno periódico. Como consecuencia de este artículo, Mrozek obtiene, de manera unificada, y en este amplio contexto, tanto el índice cohomológico como el índice *shape*. Este último se introduce como el límite inverso en la categoría Sh_* , (*shape* con punto base), de un sistema inverso en Sh_* . Sin embargo, Mrozek plantea dos problemas:

- a) Verificación de la propiedad aditiva.
- b) Extensión del índice *shape* si se elimina la hipótesis de la compacidad local del espacio.

El obstáculo principal para la resolución del segundo problema estriba en que, en la teoría de *shape*, cuando se trabaja con espacios no compactos, no es cierto que los funtores *shape* y límite inverso conmuten.

Para hacer esta memoria lo más autocontenida posible y para facilitar su lectura, en la Sección I.2 recopilaremos los preliminares necesarios sobre la teoría de *shape* y recordaremos algunas construcciones utilizadas en la elaboración del índice de Conley.

En la Sección I.3 resolvemos los dos problemas arriba expuestos siguiendo las ideas de [98]. En ausencia de compacidad local, utilizamos las condiciones de Rybakowski, ver también [109] y [111], que suponen, al igual que con la extensión de la teoría del grado de Leray-Schauder, exigir algún tipo de compacidad sobre la función. En este sentido, Benci, ver [4], introduce un índice sobre entornos aislantes en espacios métricos en una teoría muy general. Sólo necesita hipótesis de compacidad, una vez la teoría ha sido completamente desarrollada, para obtener conclusiones. La clave de nuestra demostración se encuentra en que en los sistemas inversos que aparecerán se podrá demostrar que los funtores *shape* y límite inverso conmutan aunque los espacios con los que trabajemos no sean necesariamente compactos.

Mientras que el índice *shape* (homotópico) para flujos considerado en [108] es siempre el tipo *shape* (homotópico) de un poliedro punteado y compacto, el índice *shape* para el caso discreto puede ser más complicado, incluso bajo hipótesis muy favorables.

Los espacios móviles constituyen una clase muy importante en la teoría de *shape*. Todo espacio *shape* dominado por un poliedro es móvil. Entonces, una condición necesaria para que un sistema dinámico discreto sea deformable a uno inducido por un flujo es que su índice sea el *shape* de un espacio móvil. Los pro-grupos de homología, que contienen más información que los grupos de homología de Čech, son, con frecuencia, una buena herramienta para detectar la ‘no movilidad’ de los espacios.

El objetivo de la Sección I.4 será el estudio de los tipos *shape* que pueden aparecer como índices de compactos invariantes y aislados en sistemas dinámicos discretos en ANRs localmente compactos. Demostraremos que el *shape* de todos los solenoides q -ádicos aparece como índice en el estudio de modificaciones naturales de la herradura de Smale y que, sin embargo, el *shape* de los solenoides generalizados no es el índice de ningún conjunto compacto, invariante y aislado de una aplicación definida localmente en un ANR localmente compacto. Probaremos que, en ANRs localmente compactos, el índice es siempre el *shape* del límite inverso de una sucesión inversa de poliedros punteados, finitos, $((P_n, *)_n, f_n, \mathbb{N})$, donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P$ fijo y $f_n = f$ fija. Este resultado es natural aunque su demostración requerirá algún esfuerzo, dado que no se sabe si, en todo ANR localmente compacto, cada subcompacto tiene una base de entornos compactos y ANRs.

El problema que aquí estudiamos tiene similitudes con el del estudio de la geometría global de los atractores. Günther y Segal, en [53], demostraron que la clase de los compactos que pueden ser atractores de sistemas dinámicos continuos sobre variedades topológicas es exactamente la de los compactos finito dimensionales con el *shape* de un poliedro finito. Por otro lado, debido a la existencia de funciones de Lyapunov (ver [7] por ejemplo), se puede ver que cualquier atractor invariante M , de un sistema dinámico continuo sobre un ANR localmente compacto, tiene el *shape* de un poliedro finito. Se demuestra que existe una base $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de entornos compactos de M tal que U_{n+1} es un retracto de deformación fuerte de U_n y $Sh(U_n) = Sh(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Una demostración diferente de este resultado, utilizando la aproximación al *shape* por aplicaciones multivaluadas fue dada por Sanjurjo en [113].

El caso discreto parece ser más complicado. En [52], Günther probó que un solenoide generalizado no puede ser un atractor de una aplicación sobre una variedad. Sin embargo, los solenoides q -ádicos sí son atractores de sistemas semidinámicos definidos en \mathbb{R}^3 . Más recientemente, Kato, en [65], ha caracterizado los espacios susceptibles de ser atractores en variedades topológicas.

Los resultados anteriores dan información sobre el índice de Conley de sistemas dinámicos continuos, al menos cuando el conjunto invariante es un atractor o un repulsor.

I.2. Resultados preliminares

En este punto hacemos acopio de las principales definiciones y teoremas que iremos manejando a lo largo del capítulo. En caso de que sea necesario hacer alguna modificación en cualquier resultado al que hagamos referencia, lo destacaremos convenientemente.

La primera parte de esta sección está dedicada a la construcción de la categoría *shape*, que utilizaremos en la definición del índice. También hablaremos de la noción de resolución, concepto semejante al de límite inverso, y

que extiende a espacios topológicos arbitrarios las propiedades del límite inverso en la teoría de *shape* para espacios topológicos compactos. Finalmente, enunciamos el teorema de continuidad, que permitirá demostrar la consistencia de la definición del índice.

El lector interesado en la teoría de *shape* puede encontrar en los trabajos de Borsuk [11], [12], [14] y [15] la noción de *shape* para espacios métricos compactos. Mardešić y Segal en [77], [79] y [80] atacan el problema desde un punto de vista diferente que les permite generalizar el concepto a espacios compactos y Hausdorff. La noción para espacios métricos, no necesariamente compactos, fue introducida por Fox en [41] (ver también [13] y [15] para las teorías débil y fuerte, diferentes extensiones a este contexto). Finalmente, Mardešić, en [78], extiende el marco de la teoría de *shape* a cualquier espacio topológico. Otros trabajos de referencia son los de Dydak y Segal [38] y, el más utilizado por nosotros, el libro de Mardešić y Segal [81].

La segunda parte se dedicará a exponer las construcciones previas a la definición del índice de Conley. Recordaremos conceptos como el de entorno aislante y admisible de un conjunto compacto, invariante y aislado, o el de *index pair* asociado a un entorno aislante y admisible. Finalmente, con la ayuda de los *index pairs* y de ciertas aplicaciones entre ellos, podremos construir sistemas inversos de utilidad para nosotros. Una vez hecho todo esto, estaremos en condiciones de definir el índice *shape*.

Para conseguir información acerca del índice de Conley en sistemas dinámicos continuos pueden verse, además de [25], los trabajos de Rybakowski [109], [110] y [111], que extienden la teoría a espacios métricos no necesariamente localmente compactos, Salamon [112] y Mischaikow [85]. Para el estudio de sistemas dinámicos discretos véanse mejor, además de los citados en la introducción, Mrozek [94], donde se establece una relación entre los *index pairs* y el índice de punto fijo y Szymczak [123] y [125]. Este último proporciona criterios para detectar caos en ciertos conjuntos invariantes. En este sentido, también resulta de interés el trabajo de Mischaikow y Mrozek [87].

I.2.1. *Shape*, resoluciones y teorema de continuidad. Dada una categoría C , un *sistema inverso* en C consiste en un conjunto dirigido Λ , un objeto X_λ de C para cada $\lambda \in \Lambda$, y un morfismo de C

$$p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$$

para cada par $\lambda \leq \lambda'$. Estos morfismos deben cumplir que $p_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y, si $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$, entonces $p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$.

Denotaremos al sistema inverso como

$$\mathcal{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda).$$

Un *morfismo de sistemas inversos* entre los sistemas inversos

$$\mathcal{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \text{ e } \mathcal{Y} = (Y_\xi, q_{\xi\xi'}, \Xi)$$

consiste en una aplicación $\phi : \Xi \rightarrow \Lambda$ y en morfismos de C , $f_\xi : X_{\phi(\xi)} \rightarrow Y_\xi$, uno por cada $\xi \in \Xi$, tal que si $\xi \leq \xi'$, entonces existe un $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda \geq \phi(\xi), \phi(\xi')$ y

$$f_\xi \circ p_{\phi(\xi)\lambda} = q_{\xi\xi'} \circ f_{\xi'} \circ p_{\phi(\xi')\lambda}.$$

Denotaremos a los morfismos de sistemas inversos como

$$(f_\xi, \phi) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}.$$

Llamamos $inv(C)$ a la categoría cuyos objetos son los sistemas inversos en C y cuyos morfismos son los morfismos de sistemas inversos (ver [81] p. 6).

Decimos que el morfismo $(f_\xi, \phi) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es equivalente a $(f'_\xi, \phi') : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ si cada $\xi \in \Xi$ admite un $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda \geq \phi(\xi), \phi'(\xi)$ y tal que

$$f_\xi \circ p_{\phi(\xi)\lambda} = f'_\xi \circ p_{\phi'(\xi)\lambda}.$$

Sea $pro(C)$ la categoría cuyos objetos son los sistemas inversos en C y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de morfismos de sistemas inversos respecto de la relación de equivalencia arriba definida (ver [81] p. 7).

Lo que a continuación veremos será la definición de expansión, elemento esencial en la construcción de la categoría *shape*.

Definición 2.1.1. ([81] pág. 19). Sean T una categoría y P una subcategoría de T . Para un objeto $X \in T$, una T -expansión de X (respecto de P) es un morfismo

$$p : X \rightarrow \mathcal{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

en $pro(T)$ tal que se cumple la siguiente propiedad universal:

Para cualquier sistema inverso $\mathcal{Y} = (Y_\xi, q_{\xi\xi'}, \Xi)$ en la subcategoría P , y cualquier morfismo $h : X \rightarrow \mathcal{Y}$ en $pro(T)$, existe un único morfismo $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ en $pro(T)$ tal que $h = f \circ p$.

Decimos que p es una P -expansión de X si \mathcal{X} y f son de $pro(P)$.

Definición 2.1.2. ([81] pág. 22). Sean T una categoría y P una subcategoría suya. Decimos que P es *densa* en T si todo objeto $X \in T$ admite una P -expansión

$$p : X \rightarrow \mathcal{X}.$$

Observación 2.1.3. ([81] pág. 19). Sean $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ y $p' : X \rightarrow \mathcal{X}'$ dos P -expansiones del mismo objeto X . Entonces existe un único isomorfismo $i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ tal que $i \circ p = p'$.

Definición 2.1.4. ([81] pág. 25). Sean T una categoría y $P \subseteq T$ una subcategoría densa. Sean $p : X \rightarrow \mathcal{X}$, $p' : X \rightarrow \mathcal{X}'$ P -expansiones de $X \in T$ y sean $q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$, $q' : Y \rightarrow \mathcal{Y}'$ P -expansiones de $Y \in T$. Decimos que los

morfismos $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $f' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ en $pro(P)$ son *equivalentes*, $f \sim f'$, si el siguiente diagrama es conmutativo en $pro(P)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xleftarrow{i} & \mathcal{X} \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{Y}' & \xleftarrow{j} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Aquí, tanto i como j son los isomorfismos naturales que cumplen $i \circ p = p'$, $j \circ q = q'$. Es inmediato demostrar que ésta es una relación de equivalencia.

Definimos, ahora, una nueva categoría, llamada la categoría *shape* para (T, P) , con P densa en T . Sus objetos son los objetos de T y los morfismos son las clases de equivalencia respecto de la relación de equivalencia \sim definida arriba entre los morfismos f, f' en $pro(P)$. Denotamos a la categoría *shape* por Sh . Si dos objetos X, Y de Sh son isomorfos en esta categoría decimos $Sh(X) = Sh(Y)$.

Observación 2.1.5. ([81] pág. 25). Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en T y $p : X \rightarrow \mathcal{X}$, $q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ son P -expansiones, ocurre que existe un único morfismo (al que también llamaremos f)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

en $pro(P)$ tal que $q \circ f = f \circ p$ en $pro(T)$.

Definición 2.1.6. ([81] pág. 26). Definimos, a continuación, un functor covariante $S : T \rightarrow Sh$. Será $S(X) = X$ para todo objeto $X \in T$. Si $f \in T(X, Y)$ (f es morfismo en T de X en Y), llamamos $S(f)$ a la clase de $f \in pro(P)(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de la observación anterior. A este functor S lo llamaremos *functor shape*.

Definición 2.1.7. ([81] pág. 9). Sean T una categoría y $P \subseteq T$ una subcategoría. Diremos que P es *plena* en T si $P(X, Y) = T(X, Y)$ para todo par de objetos $X, Y \in P$.

Teorema 2.1.8. ([81] pág. 27). Sean $X \in T$ e $Y \in P$. Entonces todo morfismo *shape* $F : X \rightarrow Y$ admite un único morfismo $f : X \rightarrow Y$ en T tal que $S(f) = F$.

Corolario 2.1.9. ([81] pág. 27). Si P es una subcategoría plena de T , entonces S induce un isomorfismo entre P y la subcategoría plena de Sh restringida a los objetos de P .

Definición 2.1.10. Sea Top la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas entre ellos.

Sea Top_* la categoría de los espacios topológicos punteados, con objetos los espacios topológicos punteados y morfismos las aplicaciones continuas entre ellos que respetan el punteado. Decimos que dos morfismos $f, g \in Top_*(X, *), (Y, *)$ son *homótopos* si existe una homotopía entre ellos que respeta el punto base.

Definición 2.1.11. ([81] pág. 53). Sea $HTop_*$ la categoría con objetos los de Top_* y morfismos las clases de equivalencia de morfismos homótopos en Top_* . Denotamos por $HPol_*$ a la categoría homotópica de los poliedros punteados, que es una subcategoría densa y plena de $HTop_*$, cuyos objetos son los espacios topológicos punteados con el tipo de homotopía (punteada) de un poliedro. $HTop$ y $HPol$ denotan las correspondientes categorías sin punto base.

Definición 2.1.12. ([81] pág. 53). La categoría que a nosotros nos va a interesar es Sh con $T = HTop_*$ y $P = HPol_*$. Hablaremos entonces de la categoría del *shape punteado*, y lo denotaremos por Sh_* . Tendremos el functor *shape* $S : HTop_* \rightarrow Sh_*$.

Definición 2.1.13. ([81] pág. 54). Sea C una categoría con $\mathcal{X} \in pro(C)$ un sistema inverso. Entendemos por *límite inverso* del sistema inverso \mathcal{X} a un objeto $X \in C$ y un morfismo $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ en $pro(C)$, con la siguiente propiedad universal:

Para todo morfismo $g : Y \rightarrow \mathcal{X}$ en $pro(C)$, existe un único morfismo, que también denotaremos por g , $g : Y \rightarrow X$ en C , tal que $p \circ g = g$ en $pro(C)$.

Al objeto X lo denotaremos por

$$X = \lim \mathcal{X}.$$

Si $p' : X' \rightarrow \mathcal{X}$ es otro límite inverso de \mathcal{X} , entonces existe un único morfismo (isomorfismo) $i : X \rightarrow X'$ en C , tal que $p' \circ i = p$.

Observación 2.1.14. ([81] pág. 57). Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morfismo de $pro(C)$ entre sistemas inversos que admiten límites inversos $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ y $q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$. Entonces existe un único morfismo $f_0 : X \rightarrow Y$ en C tal que $f \circ p = q \circ f_0$. Nosotros denotaremos a f_0 como $\lim(f)$. En categorías con límites, \lim es un functor $\lim : pro(C) \rightarrow C$.

Como consecuencia de esto, es claro que un isomorfismo de sistemas inversos induce un isomorfismo de límites.

Definición 2.1.15. ([81] pág. 65). Sea $H : Top \rightarrow HTop$ el functor homotopía sobre Top , que deja los objetos de Top fijos, y a cada aplicación continua le asigna su clase de homotopía.

De igual manera se define el functor $H : Top_* \rightarrow HTop_*$ que deja los objetos fijos y envía las aplicaciones continuas $h : (X, *) \rightarrow (Y, *)$ a sus clases de homotopía (punteada) $H(h) = [h] : (X, *) \rightarrow (Y, *)$.

H asigna a un sistema $(\mathcal{X}, *) = ((X_\lambda, *), [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$ en $pro(Top_*)$, otro sistema $H((\mathcal{X}, *)) = ((X_\lambda, *), [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda)$ en $pro(HTop_*)$. Por otro lado, dado un

morfismo $p = (p_\lambda) : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ en $pro(Top_*)$, $H(p) = ([p_\lambda]) : (X, *) \rightarrow H((\mathcal{X}, *))$ pertenece a $pro(HTop_*)$.

Denotamos por $Cpt \subset Top$ ($Cpt_* \subset Top_*$) a la subcategoría plena de los espacios topológicos compactos (punteados) y Hausdorff.

Teorema 2.1.16. ([81] págs. 65 y 71). Sea \mathcal{X} un sistema en $pro(Cpt)$, y sea $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ un límite inverso de \mathcal{X} . Entonces $H(p)$ es una $HTop$ -expansión de X .

De igual manera, si $(\mathcal{X}, *)$ es un sistema en $pro(Cpt_*)$ y $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ es límite inverso de $(\mathcal{X}, *)$, entonces tendremos que $H(p)$ es una $HTop_*$ -expansión de $(X, *)$.

El teorema de continuidad, que a continuación enunciamos, será clave más adelante y su misión consiste, en última instancia, en relacionar el límite inverso del *shape* con el *shape* del límite inverso. Esta relación permitirá, entre otras cosas, demostrar la consistencia de la definición del índice *shape*.

Teorema 2.1.17. (De continuidad, [81] pág. 29). Sea T una categoría, con $P \subseteq T$ una subcategoría densa. Si

$$q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$$

es una T -expansión de $Y \in T$, entonces q es un límite inverso de \mathcal{Y} en la categoría Sh .

Enunciamos, ahora, el teorema de continuidad tal como nosotros lo vamos a utilizar.

Teorema 2.1.18. Si $q : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ es una $HTop_*$ -expansión de $(X, *) \in HTop_*$, entonces q es un límite inverso de $(\mathcal{X}, *)$ en la categoría Sh_* .

Corolario 2.1.19. Aplicando los teoremas 2.1.16 y 2.1.18, se obtiene que para límites inversos $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ en $pro(Cpt_*)$, ocurre que

$$H(p) : (X, *) \rightarrow H((\mathcal{X}, *))$$

es una $HTop_*$ -expansión de $(X, *)$ y, por tanto, un límite inverso de $(\mathcal{X}, *)$ en la categoría Sh_* .

A continuación, introducimos un concepto importante en este trabajo, la resolución. El comportamiento de las resoluciones respecto de la teoría de *shape* en espacios topológicos genéricos será como el del límite inverso en espacios topológicos compactos.

Definición 2.1.20. ([81] pág. 74). Sea X un espacio topológico. Una *resolución* de X es un sistema inverso $\mathcal{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in pro(Top)$ y un morfismo $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ en $pro(Top)$ con las siguientes dos propiedades:

(R1) Sean P un ANR, \mathcal{V} un recubrimiento abierto de P y $h : X \rightarrow P$ una aplicación continua. Entonces, existe un $\lambda \in \Lambda$ y una $f : X_\lambda \rightarrow P$ tal que las aplicaciones $f \circ p_\lambda$ y h son \mathcal{V} -cercanas ([81] p. 39).

(R2) Sean P un ANR y \mathcal{V} un recubrimiento abierto de P . Existe un recubrimiento abierto \mathcal{V}' de P con la siguiente propiedad: si $\lambda \in \Lambda$ y $f, f' : X_\lambda \rightarrow P$ son aplicaciones continuas tales que $f \circ p_\lambda$ y $f' \circ p_\lambda$ son \mathcal{V}' -cercanas, entonces existe un $\lambda' \geq \lambda$ tal que $f \circ p_{\lambda\lambda'}$ y $f' \circ p_{\lambda\lambda'}$ son \mathcal{V} -cercanas.

Si en una resolución $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ de X cada X_λ es un ANR (poliedro), entonces decimos que p es una ANR-resolución (*resolución poliédrica*) de X .

Teorema 2.1.21. ([81] pág. 75). Sea $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ una resolución de X . Entonces $H(p) : X \rightarrow H(\mathcal{X})$ es una $HTop$ -expansión de X .

Teorema 2.1.22. ([81] pág. 79). Sea $p : X \rightarrow \mathcal{X}$ un morfismo en $pro(Top)$ cumpliendo las propiedades B1 y B2 que a continuación enunciamos:

B1) Sea $\lambda \in \Lambda$ y sea U un conjunto abierto de X_λ que contiene a la clausura de $p_\lambda(X)$ en X_λ , $cl(p_\lambda(X))$. Entonces existe un $\lambda' \geq \lambda$ tal que $p_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda'}) \subseteq U$.

B2) Para todo recubrimiento normal \mathcal{U} de X existe un $\lambda \in \Lambda$ y un recubrimiento normal \mathcal{V} de X_λ tal que $p_\lambda^{-1}(\mathcal{V})$ refina a \mathcal{U} .

Entonces p es una resolución.

Definición 2.1.23. ([81] págs. 86 y 90). Sean $(X, *) \in Top_*$ y

$$p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *) = ((X_\lambda, *), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$$

un morfismo en $pro(Top_*)$. Entonces, llamamos a p una *resolución* de $(X, *)$ si cumple las propiedades R1 y R2 para ANRs punteados $(P, *)$. Aquí \mathcal{V} y \mathcal{V}' son recubrimientos abiertos de P , pero todas las aplicaciones (homotopías) serán aplicaciones (homotopías) punteadas. Decimos que una resolución p de $(X, *)$ es una ANR-resolución (*resolución poliédrica*) de $(X, *)$ si todos los $(X_\lambda, *)$ son ANRs punteados (poliedros punteados).

Teorema 2.1.24. ([81] pág. 87). Sea $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ un morfismo en $pro(Top_*)$. Entonces, si $p|_X : X \rightarrow \mathcal{X}$ es una resolución de X , ocurre que p es una resolución de $(X, *)$.

Teorema 2.1.25. ([81] págs. 86 y 90). Sea $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ una resolución de $(X, *)$. Entonces $H(p) : (X, *) \rightarrow H((\mathcal{X}, *))$ es una $HTop_*$ -expansión.

Los teoremas 2.1.18 y 2.1.25 nos permiten obtener, con espacios topológicos genéricos y resoluciones, un resultado análogo al del corolario 2.1.19.

Corolario 2.1.26. Sea $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ una resolución de $(X, *)$. Entonces,

$$H(p) : (X, *) \rightarrow H((\mathcal{X}, *))$$

es una $HTop_*$ -expansión de $(X, *)$ y, por tanto, un límite inverso de $(\mathcal{X}, *)$ en la categoría Sh_* .

I.2.2. Índice de Conley. En este punto hacemos una recopilación de definiciones y resultados básicos, empleados en la construcción del índice de Conley, que necesitaremos manejar en adelante y que aparecen, con ligeras modificaciones, en [97] y [98]. Obsérvese que el dominio de nuestra aplicación f será algo más general que en el artículo [98] mencionado, detalle éste que no influirá en los resultados obtenidos ni en sus demostraciones.

Sea Y un espacio topológico y sea $A \subset Y$. Llamaremos $cl(A)$, $int(A)$ y $\partial(A)$ a la clausura, el interior, y el borde de A en Y .

Sea X un espacio métrico fijo y sea $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua con U abierto de X . Una aplicación $\sigma : J \rightarrow U \subset X$, con J un intervalo en \mathbb{Z} , es llamada *solución de f* si $(f \circ \sigma)(i-1) = \sigma(i)$ para todo $i-1, i \in J$. Si $0 \in J$ y $\sigma(0) = x$, se dice que σ es *solución de f por x* .

Dado $N \subset U$, los conjuntos

$$Inv^+(N, f) = \{x \in X \text{ tal que } f^i(x) \in N \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\},$$

$Inv^-(N, f) = \{x \in X \text{ tal que existe una solución } \sigma : \mathbb{Z}^- \rightarrow N \text{ de } f \text{ por } x\}$ e

$$Inv(N, f) = Inv^+(N, f) \cap Inv^-(N, f)$$

son llamados *parte positivamente invariante*, *parte negativamente invariante* y *parte invariante de N con respecto a f* .

Definición 2.2.1. ([98] pág. 148). Un conjunto $A \subset U$ es llamado *invariante con respecto a f* si $Inv(A, f) = A$ o, de manera equivalente, si $f(A) = A$. Será llamado *positivamente invariante con respecto a f* si $Inv^+(A, f) = A$. Será *negativamente invariante con respecto a f* si $Inv^-(A, f) = A$. Las alusiones a la f de estas definiciones se obviarán cuando no haya confusión posible.

Definición 2.2.2. ([98] pág. 149). Un subconjunto cerrado $N \subset X$, con $N \subset U$, es *admisibile* si para cada par de sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset N$ y $\{m_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^+$ tales que $\{f^i(x_n) : 1 \leq i \leq m_n\} \subset N$ para todo n y $\{m_n\} \rightarrow \infty$, ocurre que la sucesión $\{f^{m_n}(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ tiene una subsucesión convergente.

Observación 2.2.3. Todo conjunto compacto es admisible.

Lema 2.2.4. ([98] pág. 149). Sea N admisible y supongamos que existen sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset N$ y $\{m_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^+$ tales que $\{f^i(x_n) : 1 \leq i \leq m_n\} \subset N$ para todo n y $\{m_n\} \rightarrow \infty$. Entonces $Inv(N, f) \neq \emptyset$.

Proposición 2.2.5. ([98] pág. 149). Si N es admisible, entonces $Inv^-(N, f)$ e $Inv(N, f)$ son conjuntos compactos. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumplen que $\{f^i(x_n) : 1 \leq i \leq m_n\} \subset N$ para todo n y $\{m_n\} \rightarrow \infty$, entonces todo punto de acumulación de $\{f^{m_n}(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ pertenece a $Inv^-(N, f)$.

Definición 2.2.6. ([98] pág. 150). Sea $K \subset U$ un conjunto invariante. Si existe un entorno N de K , N admisible, tal que $K = Inv(N, f)$, entonces K es llamado *conjunto invariante y aislado* y N se dice *entorno aislante y admisible de K* .

Observación 2.2.6. Si K es un conjunto invariante y aislado, entonces K es compacto.

El conjunto \emptyset es invariante y aislado, siendo \emptyset un entorno aislante y admisible suyo.

La definición de *index pair* asociado a un entorno aislante y admisible, N , que nosotros adoptaremos, es la expuesta en [98].

Definición 2.2.7. ([98] pág. 152). Sea $N \subset X$ un conjunto admisible y sea $A \subset N$. A es llamado *positivamente invariante con respecto a N* si $f(A) \cap N \subset A$. Se dice que A es *N -positivamente invariante*.

Un par $P = (P_1, P_2)$ de cerrados de N , entorno aislante y admisible de K , es llamado un *index pair* para K en N (respecto de f) si se dan las condiciones siguientes:

- a) P_1, P_2 son N -positivamente invariantes.
- b) $K \subset int(P_1 \setminus P_2)$.
- c) $cl(P_1 \setminus P_2) \subset int(N) \cap f^{-1}(int(N))$.

La familia de los *index pairs* en N se denotará por $IP(N)$.

Teorema 2.2.8. ([98] pág. 153). Sean N y N' entornos aislantes y admisibles de K , tales que $N \subset int(N') \cap f^{-1}(int(N'))$. Entonces, para todo W , entorno abierto de K , existe un $P \in IP(N)$ tal que $cl(P_1 \setminus P_2) \subset W$.

Hacemos notar que la demostración, expuesta en el teorema 4.4 de [98], utiliza la primera parte del teorema 3.11 de [98] que, a su vez, necesita, para garantizar la semicontinuidad de ciertas aplicaciones, de los *remark 9*, *remark 10* y lema 3 de [94]. El dominio de definición de nuestra f dará lugar a algún ligero cambio en las pruebas de estos resultados, aunque, sustancialmente, seguirán siendo las mismas.

Corolario 2.2.9. Para todo conjunto K invariante y aislado, existe un N , entorno aislante y admisible de K , suficientemente pequeño, tal que admite un $P \in IP(N)$.

Llegados a este punto, introduciremos ciertas categorías y funtores que nos permitirán definir, posteriormente, el índice *shape*. Sólo estableceremos demostraciones en aquellos casos en que difieran de las hechas en [97].

Definición 2.2.10. ([97]). Definamos la categoría de pares, Prs , cuyos objetos son los pares de espacios topológicos $P = (P_1, P_2)$, $P_2 \subset P_1$ subespacio cerrado. Los morfismos entre los objetos $P = (P_1, P_2)$ y $Q = (Q_1, Q_2)$ serán las aplicaciones continuas, definidas localmente, $h : P_1 \rightarrow Q_1$ tales que:

- a) El dominio de h , $dom(h)$, es cerrado en P_1 .
- b) $h(P_2) \subset Q_2$.
- c) $h(\partial_{P_1}(dom(h))) \subset Q_2$.

La demostración de que, en efecto, Prs es una categoría aparece en la proposición 5.1 de [97].

Definimos, a continuación, un functor covariante $Quot : Prs \rightarrow Top_*$, análogo al que se introduce en [97].

Definición 2.2.11. Dado un objeto $P = (P_1, P_2) \in Prs$, podemos asociarle el espacio cociente P_1/P_2 . Denotaremos por $q_P : P_1 \rightarrow P_1/P_2$ a la correspondiente proyección.

Dados $P, Q \in Prs$, y dado $\alpha : P \rightarrow Q$ un morfismo en Prs , definimos el espacio punteado

$$Quot(P) = (P_1/P_2, [P_2]) \in Top_*$$

y la aplicación continua (ver [97]) entre espacios punteados

$$Quot(\alpha) : (P_1/P_2, [P_2]) \rightarrow (Q_1/Q_2, [Q_2])$$

tal que si $x \in dom(\alpha)$, $x \neq [P_2]$, entonces $Quot(\alpha)(x) = q_Q(\alpha(x))$. En otro caso, $Quot(\alpha)(x) = [Q_2]$.

Sea $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua, con U abierto del espacio métrico X . Sean $P, Q \in Prs$ pares de subconjuntos cerrados de X , con $P_1 \subset U$. Definimos $f_{PQ} : P_1 \cap f^{-1}(Q_1) \ni x \rightarrow f(x) \in Q_1$. Esta aplicación no tiene por qué ser un morfismo de P a Q en Prs . En la siguiente proposición se dan condiciones suficientes para que f_{PQ} sea un morfismo en Prs .

Proposición 2.2.12. ([97] pág. 31). Sea f cumpliendo:

- 1) $P_1 \setminus P_2 \subset f^{-1}(Q_1)$.
- 2) $P_2 \cap f^{-1}(Q_1) \subset f^{-1}(Q_2)$.

Ocurre, entonces, que $f_{PQ} \in Prs(P, Q)$.

Observación 2.2.13. Sean X un espacio métrico y $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua, con U abierto de X . Sea N un entorno aislante y admisible de un conjunto invariante y aislado K . Dado $P = (P_1, P_2) \in IP(N)$, asociamos a éste un objeto de la categoría Prs al que llamaremos, igualmente, P y que definimos como $P = (P_1, P_1 \cap P_2) \in Prs$. Resulta

evidente que el nuevo objeto es un *index pair*. Ocurre, entonces, que $f_{PP} \in Prs(P, P)$.

Para demostrar esto basta ver que estamos en las condiciones de la última proposición.

Definición 2.2.14. ([97] pág. 30). Dados los pares $P = (P_1, P_2)$ y $Q = (Q_1, Q_2)$, un morfismo $H \in Prs(P \times I, Q)$, con $I = [0, 1]$, será llamado *homotopía de P a Q en Prs*. Para cada $t \in I$ se define $H_t \in Prs(P, Q)$ como $H_t = H \circ i_t$, donde $i_t \in Prs(P, P \times I)$ es el morfismo $i_t : P \ni x \rightarrow (x, t) \in P \times I$. Decimos que dos morfismos f y g en $Prs(P, Q)$ son *homótopos* si existe una homotopía $H \in Prs(P \times I, Q)$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Resulta inmediato demostrar que la homotopía entre morfismos en Prs es una relación de equivalencia, y coincide en la composición de morfismos.

La proposición 5.7 de [97] nos garantiza que si f y g son homótopos en Prs , entonces $Quot(f)$ y $Quot(g)$ lo son en Top_* .

Definición 2.2.15. Sea $HPrs$ la categoría homotópica de pares cuyos objetos son los de Prs y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de morfismos homótopos en Prs .

Definición 2.2.16. ([97] pág. 30). Podemos conseguir, a partir de estas definiciones, el functor

$$Quot : HPrs \rightarrow HTop_*$$

Notación. Sea $f_P = Quot(f_{PP}) : (P_1/P_2, [P_2]) \rightarrow (P_1/P_2, [P_2])$. Tenemos que f_P es un morfismo de Top_* . Resulta que $Quot([f_{PP}]) = [f_P]$, con $[f_{PP}]$ y $[f_P]$ las respectivas clases en $HPrs$ y $HTop_*$. Sea

$$T = S \circ Quot : HPrs \rightarrow Sh_*$$

siendo S el functor *shape*.

I.3. Índice *shape* en espacios métricos y propiedades principales

Esta sección queda dividida en dos puntos. El primero de ellos extiende el concepto de índice *shape* dado por Mrozek en [97] a espacios metrizablees, no necesariamente localmente compactos. Si el espacio no es localmente compacto, tendremos dificultades a la hora de demostrar la consistencia de la definición de índice, tal como aseguraba Mrozek en [97]. Superar los problemas de consistencia que surgen es la misión de esta primera parte. El segundo apartado lo dedicamos a enunciar y demostrar la propiedad aditiva del índice en este tipo de espacios, dando, así, una respuesta afirmativa a la pregunta planteada a este respecto en [97]. Concluiremos este punto con el estudio de las propiedades de invariancia por homotopías y conmutatividad.

I.3.1. Definición y consistencia del índice *shape*. Sean X un espacio métrico, U un subconjunto abierto de X y $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua. Sea K un conjunto invariante y aislado, con N un entorno aislante y admisible de K , y $P = (P_1, P_2) \in IP(N)$. Si $P = (P_1, P_2)$ es un *index pair*, también lo será $(P_1, P_1 \cap P_2)$, de manera que consideraremos, en todo momento, que los *index pairs* $P = (P_1, P_2) \in IP(N) \cap Prs$.

Definición 3.1.1. Definimos el *índice shape* de K , al que denotaremos por $C_{lim,S}(K, f)$, como $C_{lim,S}(K, f) = (limS[(\mathcal{X}, *)], lim(\{S([f_P])\}_n))$ donde

$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (S([f_P]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$, $\{S([f_P])\}_n$ es un morfismo de nivel de $S[(\mathcal{X}, *)]$ en sí mismo y $lim : pro(Sh_*) \rightarrow Sh_*$ es el functor límite inverso.

Diremos que los pares (Y, g) e (Y', g') (donde $Y, Y' \in Top_*$ con $g : Y \rightarrow Y'$ y $g' : Y' \rightarrow Y'$ morfismos de Sh_*) son isomorfos si existe un isomorfismo $\varphi : Y \rightarrow Y'$ de Sh_* que cumple $\varphi \circ g = g' \circ \varphi$.

Para que la definición del índice sea consistente debo ver:

1) Existe $limS[(\mathcal{X}, *)]$. Por la observación 2.1.14, esto garantizará la existencia de $lim(\{S([f_P])\}_n)$.

2) $(limS[(\mathcal{X}, *)], lim(\{S([f_P])\}_n))$ no depende, salvo isomorfismo, de la N ni del $P \in IP(N)$ escogidos.

Empecemos por 1).

Como comentábamos en la introducción, Mrozek, en [97], se valía del teorema de continuidad (ver corolario 2.1.19) para, así, resolver el problema de la existencia del límite inverso, de sistemas inversos compactos, en la categoría *shape*. Aquí, sin embargo, si X no es localmente compacto, no podemos garantizar que haya un N compacto y no tendremos asegurada la existencia de un $P \in IP(N)$ tal que los P_1/P_2 del sistema inverso sean compactos.

Hemos optado por debilitar la condición impuesta sobre el entorno aislante N en [97] y, al no poder exigirle compacidad, le pediremos que sea admisible. Esta condición bastará, como veremos ahora, para que los $P = (P_1, P_2) \in IP(N)$ que encontremos garanticen la consistencia del índice, aunque P_1/P_2 no sea un compacto.

Lema 3.1.2. Sea $P = (P_1, P_2) \in IP(N)$ un *index pair* asociado a K . Entonces, el sistema inverso $((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N})$ admite un límite inverso $(X, *)$ (en Top_* siempre existe límite inverso) con X compacto.

Demostración. Sea

$$Q = (Q_1, Q_2) = (Inv^-(N, f) \cap P_1, Inv^-(N, f) \cap P_2).$$

Ocurre que $Q \in Prs$. Además, $f_{QQ} \in Prs(Q, Q)$. Para verlo basta observar que estamos en las condiciones de la proposición 2.2.12.

Veamos 1) $(P_1 \cap Inv^-(N, f)) \setminus (P_2 \cap Inv^-(N, f)) \subset f^{-1}(P_1 \cap Inv^-(N, f))$.

Si $x \in (P_1 \cap Inv^-(N, f)) \setminus (P_2 \cap Inv^-(N, f))$, entonces $x \in P_1 \setminus P_2 \subset int(N) \cap f^{-1}(int(N))$. Así, $f(x) \in int(N) \subset N$. De este modo, tenemos que $f(x) \in P_1$.

Por otro lado, sabemos que $x \in Inv^-(N, f)$, lo que garantiza que $f(x) \in Inv^-(N, f)$, al ser $f(x) \in N$.

Veamos 2), es decir, que

$$(P_2 \cap Inv^-(N, f)) \cap f^{-1}(P_1 \cap Inv^-(N, f)) \subset f^{-1}(P_2 \cap Inv^-(N, f)).$$

Si $x \in (P_2 \cap Inv^-(N, f)) \cap f^{-1}(P_1 \cap Inv^-(N, f))$, entonces $x \in P_2$ y $f(x) \in P_1$. Como $x \in Inv^-(N, f)$, lo que implica que $f(x) \in P_2$.

Como $x \in Inv^-(N, f)$ y $f(x) \in N$ tenemos, para acabar, que $f(x) \in P_2 \cap Inv^-(N, f)$.

Podemos afirmar ya que $f_{QQ} \in Prs(Q, Q)$, lo que garantiza (ver definición 2.2.11 ó [97], proposición 5.2) que $Quot(f_{QQ}) = f_Q$ es continua.

En estas condiciones podemos construir el sistema inverso, con \mathbb{N} como conjunto dirigido,

$$(X', *) \cdots \xrightarrow{f_Q} (Q_1/Q_2, [Q_2]) \xrightarrow{f_Q} (Q_1/Q_2, [Q_2])$$

donde $(X', *)$ es el límite inverso, con X' compacto ya que $Q_1/Q_2 \neq \emptyset$ lo es.

Consideremos, ahora, el morfismo inclusión j entre los dos sistemas inversos:

$$j = (j_n, \phi) : ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N}) \rightarrow ((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N})$$

con $\phi = id$.

Este morfismo está considerado en la categoría $pro(Top_*)$. Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (X, *) \cdots & \xrightarrow{f_P} & (P_1/P_2, [P_2]) & \xrightarrow{f_P} & (P_1/P_2, [P_2]) \\ \uparrow u & & \uparrow j_{n+1} & & \uparrow j_n \\ (X', *) \cdots & \xrightarrow{f_Q} & (Q_1/Q_2, [Q_2]) & \xrightarrow{f_Q} & (Q_1/Q_2, [Q_2]) \end{array}$$

Claramente, j está bien definida y es continua. Es sencillo ver que el diagrama conmuta, lo que nos garantiza que el morfismo entre los sistemas inversos está bien construido. Si vemos que u es sobreyectiva (de hecho será un homeomorfismo) estará demostrado el lema.

Tenemos

$$(X', *) \xrightarrow{u} (X, *)$$

que, por definición, es $u((x'_n)_n) = (j_n([x'_n]))_n$, donde los $x'_n \in Q_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que es el conjunto dirigido de los dos sistemas inversos, y las $[x'_n] = q_Q(x'_n) \in Q_1/Q_2$.

Veamos la sobreyectividad de u .

Es claro que el punto base va al punto base. Por otro lado, dado $([x_n])_n \neq *$, con $([x_n])_n \in X \subset \prod_{n=1}^{\infty} (P_1/P_2)_n$, tenemos que existe un $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \leq n_0$ se cumple $[x_n] = *$, y para todo $n > n_0$ ocurre $[x_n] \neq *$.

Tenemos que $x_n \in P_1 \setminus P_2$ para todo $n > n_0$, con $f(x_n) = x_{n-1}$. Así, $x_n \in \text{Inv}^-(N, f) \cap (P_1 \setminus P_2)$ para todo $n > n_0$.

De este modo, basta construir un $([x'_n])_n$ donde $[x'_n] = [x_n]$ para todo $n > n_0$, y $[x'_n] = [Q_2]$ para todo $n \leq n_0$.

Ocurre que $u((x'_n)_n) = ([x_n])_n$ con $([x'_n])_n \in X'$.

Además, la inyectividad de u resulta clara. Así, tenemos que u es biyectiva, continua (es límite inverso de continuas) y cerrada, al ir de un espacio compacto X' a un Hausdorff X . Afirmamos, por tanto, que u es un homeomorfismo. \square

El resultado que a continuación enunciaremos es clave en esta sección ya que permitirá aplicar, utilizando la noción de resolución, el teorema de continuidad de la teoría de *shape*. Así, garantizaremos la existencia de $\lim S[(\mathcal{X}, *)]$, siendo

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (S([f_P]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Sh_*).$$

De hecho, ocurrirá que $\lim S[(\mathcal{X}, *)]$ es el *shape* de $\lim(\mathcal{X}, *)$. Escribiremos

$$\lim S[(\mathcal{X}, *)] = Sh(\lim(\mathcal{X}, *))$$

donde

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Top_*).$$

En definitiva, lo que tendremos es que el *shape* conmuta con el límite inverso de nuestros sistemas inversos, que están constituidos por espacios P_1/P_2 no necesariamente compactos.

Proposición 3.1.3. Sea K un conjunto invariante y aislado, con N un entorno aislante y admisible de K , y sea $P \in IP(N)$ un *index pair* con $P_2 \subset P_1$. Consideremos el sistema inverso punteado

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (f_P)_{nn'}, \mathbb{N})$$

y su límite inverso (en $\text{pro}(Top_*)$)

$$p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *).$$

Entonces, $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ es una resolución.

Demostración. Para probar que $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$ es una resolución, basta demostrarlo con $p|_X : X \rightarrow \mathcal{X}$ (ver teorema 2.1.24).

Será suficiente verificar el cumplimiento de las propiedades B1 y B2 del teorema 2.1.22, que a continuación enunciamos:

B1) Sea $n \in \mathbb{N}$, con U abierto de $(P_1/P_2)_n$ y tal que $cl(p_n(X)) \subset U$. Entonces existe un $n' \geq n$ tal que $(f_P)_{nn'}(P_1/P_2) \subseteq U$.

B2) Para todo recubrimiento normal \mathcal{U} de X , existe un $n \in \mathbb{N}$ y un recubrimiento normal \mathcal{V} de $(P_1/P_2)_n$ tal que $p_n^{-1}(\mathcal{V})$ refina a \mathcal{U} .

Veamos B1.

Supongamos que la afirmación no es cierta para algún n y algún U . Entonces, para todo $m \geq n$, el conjunto $Y_m = (P_1/P_2) \setminus (f_P)_{nm}^{-1}(U)$ es distinto de \emptyset .

Como $(f_P)_{mm'}(Y_{m'}) \subseteq Y_m$, obtenemos un sistema $\mathcal{Y} = (Y_m, q_{mm'}, M)$, donde $q_{mm'} = (f_P)_{mm'}|_{Y_{m'}}$ y $M = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$. Ocurre que $* \notin Y_m$ para todo m . Obsérvese que, entonces, podremos identificar Y_m con un subconjunto de $P_1 \setminus P_2$, para todo m .

La aplicación inclusión $i_m : Y_m \rightarrow (P_1/P_2)_m$, $m \in M$, determina un morfismo entre sistemas inversos

$$i : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$$

siendo $\mathcal{X}' = ((P_1/P_2)_m, (f_P)_{mm'}, M)$. Llamamos X' al límite inverso de \mathcal{X}' (será el mismo que en \mathcal{X}), y llamamos Y al límite inverso de \mathcal{Y} . Veamos que $Y \neq \emptyset$:

Tenemos que $Y_m \neq \emptyset$, $m \geq n$. Podemos escoger, entonces, elementos $y_{n+1} \in Y_{n+1}$, $y_{n+2} \in Y_{n+2}$, $y_{n+3} \in Y_{n+3} \dots$. Ocurre, además, que $(f_P)_{mm'}(y_{m'}) = (f_P)^{m'-m}(y_{m'}) \in Y_m$.

Conviene considerar la sucesión $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\} = \{[x_1], [x_2], \dots\}$, donde $x_m \in (P_1 \setminus P_2) \subset P_1$, que es admisible. Tendremos otra sucesión $\{m : m \in \mathbb{N}\}$ que, junto a $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, cumple que $\{f^i(x_m) : 1 \leq i \leq m\} \subset P_1 \setminus P_2 \subset P_1$ para todo m , y $m \rightarrow \infty$. Demostrar esto es sencillo ya que, de existir un i_0 tal que $1 \leq i_0 \leq m$, $f^{i_0}(x_m) \notin P_1 \setminus P_2$, entonces $f_P^{i_0}([x_m]) = * \notin Y_{n+m-i_0}$, lo cual es absurdo.

Como P_1 es admisible, la sucesión $\{f^m(x_m)\}_m$ tiene una subsucesión convergente y, por la Proposición 2.2.5, existe un punto de acumulación $x_0 \in Inv^-(P_1, f)$.

Resulta sencillo ver que $f_P^m([x_m]) = [f^m(x_m)] \in Y_n \subset (P_1/P_2)_n$. Como x_0 es un punto de acumulación de $\{f^m(x_m)\}_m$, ocurre que $\{f_P^m([x_m])\}_m$ tiene a $[x_0]$ como punto de acumulación. Teniendo en cuenta que $f_P^m([x_m]) \in Y_n$ para todo m , e Y_n es cerrado de $(P_1/P_2)_n$, entonces $[x_0] \in Y_n$, lo que implica que $x_0 \in P_1 \setminus P_2$.

Ocurre, pues, que $x_0 \in Inv^-(P_1, f) \setminus P_2$. Llamemos $\{x'_m\}$ a una 'historia previa' de x_0 en P_1 . Es fácil ver que $x'_k \in Inv^-(P_1, f) \cap (P_1 \setminus P_2)$ para todo k . Por un lado es obvio que $x'_k \in Inv^-(P_1, f)$, y $x'_k \in P_1 \setminus P_2$ ya que, de estar en P_2 , ocurriría que $f^k(x'_k) = x_0 \in P_2$, lo cual es absurdo.

Teniendo esto en cuenta, es inmediato que, para todo $[x'_k] \in (P_1/P_2)_{n+k}$ se cumple $f_P^k([x'_k]) = [f^k(x'_k)] = [x_0] \in Y_n$, de modo que $[x'_k] \in Y_{n+k}$ para todo k . De hecho $f_P([x'_k]) = [f(x'_k)] = [x'_{k-1}]$.

Construimos, de este modo, un $y = ([x'_k])_k$, con $y \in Y$, el límite inverso de \mathcal{Y} . Queda demostrado que $Y \neq \emptyset$.

Considérense los sistemas inversos y morfismos siguientes:

$i : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ inclusión.

$j : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ con $j_m = id : (P_1/P_2)_m \rightarrow (P_1/P_2)_m$ para todo $m \in M$.

$q : Y \rightarrow \mathcal{Y}$ límite inverso del sistema inverso \mathcal{Y} .

$p : X \rightarrow \mathcal{X}$ límite inverso del sistema inverso \mathcal{X} .

$p : X' \rightarrow \mathcal{X}'$ límite inverso del sistema inverso \mathcal{X}' .

$i_0 : Y \rightarrow X'$, límite inverso de i , $lim(i) = i_0$.

$j_0 : X \rightarrow X'$, límite inverso de j , $lim(j) = j_0$.

Dado $y \in Y$, tenemos $(p_n \circ i_0)(y) = (i_n \circ q_n)(y) \in i_n(Y_n) = (P_1/P_2) \setminus U$. Por otro lado, $(p_n \circ i_0)(y) = (p_n \circ j_0)(x) = p_n(x) \in U$ para cierto $x \in X$, lo cual es una contradicción. Queda, pues, demostrado B1.

Veamos B2.

Para todo $x \in X$, podemos escoger un $m(x) \in \mathbb{N}$ y un abierto $W_x \subseteq (P_1/P_2)_{m(x)}$ tal que $x \in (p_{m(x)})^{-1}(W_x) \subseteq U_x$ para algún $U_x \in \mathcal{U}$ (ver *remark* 3 de [81], pág. 58). Por el lema anterior, tenemos que X es compacto y podemos garantizar la existencia de una colección finita $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\} \subset \mathbb{N}$ y subconjuntos abiertos $W_i \subseteq (P_1/P_2)_{m_i}$ tal que $\{(p_{m_i})^{-1}(W_i)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ es un recubrimiento abierto de X que refina a \mathcal{U} . Escogemos, ahora, un $m \geq m_1, \dots, m_n$ y definimos $V_i = ((f_P)_{m_i m})^{-1}(W_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Claramente, $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n, (P_1/P_2)_m \setminus p_m(X)\}$ es un recubrimiento abierto de $(P_1/P_2)_m$ y $(p_m)^{-1}(\mathcal{V}) = \{(p_m)^{-1}(V_1), \dots, (p_m)^{-1}(V_n)\}$ refina a \mathcal{U} .

Como la paracompacidad es un invariante de las aplicaciones cerradas, (ver teorema de Michael en [40]), aplicando este resultado a la proyección $q_P : P_1 \rightarrow P_1/P_2$ obtenemos que P_1/P_2 es paracompacto. De este modo, podemos garantizar que nuestro recubrimiento \mathcal{V} será normal. \square

Corolario 3.1.4. Nuestro límite inverso $p : (X, *) \rightarrow (\mathcal{X}, *)$, que es resolución de $(X, *)$, cumple que $H(p) : (X, *) \rightarrow H((\mathcal{X}, *))$ es una $HTop_*$ -expansión. Consecuentemente, $S[(\mathcal{X}, *)]$ admite límite inverso y, de hecho, $limS[(\mathcal{X}, *)] = Sh(lim(\mathcal{X}, *)) = Sh((X, *))$.

La demostración es automática a partir del corolario 2.1.26.

Acabada ya la demostración del punto 1), únicamente nos falta ver, para garantizar la consistencia de la definición de $C_{lim, S}(K, f)$, que

2) $(limS[(\mathcal{X}, *)], lim(\{S([f_P])\}_n))$ no depende, salvo isomorfismo, de la N ni del $P \in IP(N)$ escogidos.

Para ello requeriremos de varios pasos previos. Todos ellos aparecen, ligeramente modificados, en [98].

Sea $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua, con U abierto de un espacio métrico X , y sea K un conjunto invariante y aislado, con M y N entornos aislantes y admisibles de K , y $P \in IP(N), Q \in IP(M)$. Necesitamos demostrar que

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (S([f_P]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, (S([f_Q]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

cumplen que

$$(\lim S[(\mathcal{X}, *)], \lim(\{S([f_P])\}_n)) \equiv (\lim S[(\mathcal{Y}, *)], \lim(\{S([f_Q])\}_n))$$

son isomorfos.

Lema 3.1.5. ([98] Lema 5.5). Sea N un entorno aislante y admisible del conjunto invariante y aislado K , con $P \in IP(N)$. Entonces, existen un M entorno aislante y admisible de K , $M \subset \text{int}(N) \cap f^{-1}(\text{int}(N))$, y $P' \in IP(N), Q \in IP(M), Q \subset P'$ tales que si

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, (S([f_Q]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((P'_1/P'_2, [P'_2])_n, (S([f_{P'}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*),$$

ocurre que

$$\lim(\{(S \circ \text{Quot})([i_{QP'}])\}_n) : \lim S[(\mathcal{X}, *)] \rightarrow \lim S[(\mathcal{Y}, *)]$$

es un isomorfismo en Sh_* .

Demostración. Este resultado es una modificación del enunciado en el lema 5.5 de [98], y para demostrarlo se han de seguir los mismos pasos. De esta manera se obtendrán los pares P' y Q del enunciado.

Ocurre que $P', Q \in Prs$ con $Q \subset P'$, de manera que, por la proposición 2.2.12, la aplicación inclusión $i_{QP'} \in Prs(Q, P')$. Por el teorema 5.5 de [97], resulta que $\text{Quot}([i_{QP'}]) = [\text{Quot}(i_{QP'})]$ es un isomorfismo de $HTop_*$. Por lo tanto, el morfismo de nivel $\{(S \circ \text{Quot})([i_{QP'}])\}_n$ de $pro(Sh_*)$ que va de $S[(\mathcal{X}, *)]$ en $S[(\mathcal{Y}, *)]$ será un isomorfismo. Si hallamos el límite inverso de este isomorfismo entre sistemas inversos, obtenemos otro isomorfismo, y el resultado está demostrado. \square

Como corolario inmediato, al cumplirse

$$\begin{aligned} & \lim(\{S([f_{P'}])\}_n) \circ \lim(\{(S \circ \text{Quot})([i_{QP'}])\}_n) = \\ & = \lim(\{(S \circ \text{Quot})([i_{QP'}])\}_n) \circ \lim(\{S([f_Q])\}_n) \end{aligned}$$

donde $\{S([f_{P'}])\}_n$ y $\{S([f_Q])\}_n$ son morfismos de nivel de $S[(\mathcal{Y}, *)]$ y $S[(\mathcal{X}, *)]$ en sí mismos, tendremos que

$$(\lim S[(\mathcal{X}, *)], \lim(\{S([f_Q])\}_n)) \equiv (\lim S[(\mathcal{Y}, *)], \lim(\{S([f_{P'}])\}_n))$$

son isomorfos.

Teorema 3.1.6. Sea $f : U \rightarrow X$ continua, con N entorno aislante y admisible fijo, y sean $P, Q \in IP(N)$, $P \subset Q$. Si $[i_{PQ}] : P \rightarrow Q$ es el morfismo inclusión en $HPrs$ y $T = S \circ Quot$, entonces $T([i_{PQ}])$ es un morfismo en Sh_* , y cumple $\lim(\{T([i_{PQ}])\}_n)$ es un isomorfismo en Sh_* ,

$$\lim(\{T([i_{PQ}])\}_n) : \lim S[(\mathcal{X}, *)] \xrightarrow{\cong} \lim S[(\mathcal{Y}, *)]$$

donde

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (T([f_{PP}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, (T([f_{QQ}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*),$$

siendo $\{T([i_{PQ}])\}_n$ el morfismo de nivel entre $S[(\mathcal{X}, *)]$ y $S[(\mathcal{Y}, *)]$.

Como corolario de esto, tendremos, al igual que en el lema anterior, que

$$(\lim S[(\mathcal{X}, *)], \lim(\{S([f_P])\}_n)) \cong (\lim S[(\mathcal{Y}, *)], \lim(\{S([f_Q])\}_n))$$

son isomorfos

Demostración. Este teorema es una ligera modificación del teorema 5.6 de [98]. La demostración, que es prácticamente igual, tiene alguna variación que introduciremos en el momento oportuno. Se divide en tres casos y cada uno necesita del anterior para ser demostrado.

Caso 1. Supongamos:

a) P está relacionado con Q , esto es, $P \subset Q$ y $(Q_1, P_2) \in IP(N)$ o, lo que es equivalente, $P \subset Q$ y $cl(Q_1 \setminus P_2) \subset int(N) \cap f^{-1}(int(N))$ (ver [98] p. 155).

b) $f(Q) \cap N \subset P$.

En esta situación, ocurre que $f_{QP} \in Prs(Q, P)$ al darse las condiciones de la Proposición 2.2.12.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f_{PP}} & P \\ \downarrow i_{PQ} & \nearrow f_{QP} & \downarrow i_{PQ} \\ Q & \xrightarrow{f_{QQ}} & Q \end{array}$$

Aplicando T , obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
T(P) & \xrightarrow{T([f_{PP}])} & T(P) \\
\downarrow T([i_{PQ}]) & \nearrow T([f_{QP}]) & \downarrow T([i_{PQ}]) \\
T(Q) & \xrightarrow{T([f_{QQ}])} & T(Q)
\end{array}$$

Ocurre, por el lema de Morita ([81] p. 112) y las propiedades del functor lim , que

$$limS[(\mathcal{X}, *)] \xrightarrow{lim(\{T([i_{PQ}])\}_n)} limS[(\mathcal{Y}, *)]$$

es un isomorfismo.

Caso 2. Supongamos:

a) P está relacionado con Q .

Este caso es idéntico al paso 2 del teorema 5.6 de [98], hasta el momento en que se demuestra que $f(Q^{i+1}) \subset T_N(Q^i)$. Nosotros necesitamos el contenido $f(Q^{i+1}) \cap N \subset Q^i$. Pero esto resulta claro ya que, como $f(Q^{i+1}) \cap N \subset Q^{i+1}$, entonces $f(Q^{i+1}) \cap N = f(Q^{i+1}) \cap Q^{i+1} \subset f(Q^{i+1}) \cap Q \subset Q^i$. De este modo, tenemos que $f(Q^{i+1}) \cap N \subset Q^i$.

Sea

$$S[(\mathcal{X}_i, *)] = ((Q_1^i/Q_2^i, [Q_2^i])_n, (T([f_{Q^i Q^i}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

Naturalmente, estos sistemas inversos admiten límite inverso. El resto de la demostración del caso 2 es igual que en la referencia.

Caso 3. (Caso general). La demostración será igual que el paso 3 de la demostración del teorema 5.6 de [98]. \square

Corolario 3.1.7. Para todo $P, Q \in IP(N)$ ocurre que $limS[(\mathcal{X}, *)]$ es isomorfo a $limS[(\mathcal{Y}, *)]$, siendo

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (T([f_{PP}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, (T([f_{QQ}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in pro(Sh_*)$$

Resultará, entonces, inmediato que

$$(limS[(\mathcal{X}, *)], lim(\{S([f_P])\}_n)) \equiv (limS[(\mathcal{Y}, *)], lim(\{S([f_Q])\}_n))$$

son isomorfos.

Demostración. Sea $R = P \cap Q$. Ocurre que $R \in IP(N)$ (ver Proposición 4.3 de [98]), $R \subset P$, $R \subset Q$ y, por el teorema anterior, el resultado es evidente. \square

Nos encontramos, ya, en condiciones de demostrar el teorema que garantiza la consistencia de la definición del índice *shape*.

Teorema 3.1.8. ([98] teorema 5.8). Sea $f : U \rightarrow X$ continua y sea K un conjunto invariante y aislado. Entonces para todo N, M entornos aislantes y admisibles de K , y para todo $P \in IP(N), Q \in IP(M)$ ocurre que $\lim S[(\mathcal{X}, *)]$ es isomorfo a $\lim S[(\mathcal{Y}, *)]$, siendo

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P_1/P_2, [P_2])_n, (T([f_{PP}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Sh_*)$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, (T([f_{QQ}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Sh_*).$$

Como corolario, resultará evidente que

$$(\lim S[(\mathcal{X}, *)], \lim(\{S([f_P])\}_n)) \equiv (\lim S[(\mathcal{Y}, *)], \lim(\{S(f_Q)\}_n))$$

son isomorfos.

Demostración. Se divide en dos casos.

Caso 1. Supongamos que $M \subset N$ y que existe un N' entorno aislante y admisible de K tal que $N \subset \text{int}(N') \cap f^{-1}(\text{int}(N'))$.

La demostración de este caso es como la hecha en el teorema 5.8 de [98], pero con las modificaciones pertinentes.

Consideramos las R y R' de la referencia. Denotamos

$$(\mathcal{R}', *) = ((R'_1/R'_2, [R'_2])_n, f_{R'}^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Top_*),$$

$$(\mathcal{R}, *) = ((R_1/R_2, [R_2])_n, f_R^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Top_*),$$

$$S[(\mathcal{R}', *)] = ((R'_1/R'_2, [R'_2])_n, (T([f_{R'R'}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Sh_*),$$

$$S[(\mathcal{R}, *)] = ((R_1/R_2, [R_2])_n, (T([f_{RR}]))^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(Sh_*)$$

y

$$\{T([i_{R'R}])\}_n : S[(\mathcal{R}', *)] \rightarrow S[(\mathcal{R}, *)]$$

morfismo de nivel. Entonces

$$\lim(\{T([i_{R'R}])\}_n) : \lim S[(\mathcal{R}', *)] \rightarrow \lim S[(\mathcal{R}, *)]$$

es un isomorfismo.

Esto, junto al corolario anterior, nos garantiza que

$$\lim S[(\mathcal{X}, *)] \equiv \lim S[(\mathcal{R}, *)] \equiv \lim S[(\mathcal{R}', *)] \equiv \lim S[(\mathcal{Y}, *)].$$

Caso 2. Sean, ahora, M, N arbitrarios.

Su demostración es muy parecida a la de la referencia. Escogemos M', N', P', Q' y R como en [98]. Denotamos por $S[(\mathcal{P}', *)]$, $S[(\mathcal{Q}', *)]$ y $S[(\mathcal{R}, *)]$ a los objetos de $\text{pro}(Sh_*)$ definidos como se hizo en el caso 1 para $S[(\mathcal{R}, *)]$ y $S[(\mathcal{R}', *)]$.

Por el caso 1, ocurre que

$$\lim S[(\mathcal{P}', *)] \equiv \lim S[(\mathcal{R}, *)] \equiv \lim S[(\mathcal{Q}', *)].$$

Falta ver que $\lim S[(\mathcal{X}, *)] \equiv \lim S[(\mathcal{P}', *)]$ y $\lim S[(\mathcal{Y}, *)] \equiv \lim S[(\mathcal{Q}', *)]$.

Si la elección de M', N', Q' y P' es como la hecha en la construcción del lema 5.5 de [98], los dos isomorfismos últimos serán evidentes. \square

Observación 3.1.9. El índice del conjunto vacío es $C_{\lim, S}(\emptyset, f) = (*, id)$. Para demostrarlo basta tomar como *index pair* a $P = (P_1, P_2) = (\emptyset, \emptyset)$. Obsérvese, por tanto, que si el índice calculado en un N entorno aislante y admisible es distinto de $(*, id)$, ocurrirá que $K \neq \emptyset$.

I.3.2. Propiedades principales del índice. Propiedad aditiva. Sea $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua y supongamos que un conjunto invariante y aislado K es unión disjunta de otros dos conjuntos invariantes y aislados K_1 y K_2 . En el próximo teorema daremos respuesta al problema, planteado por Mrozek en [97], de la relación existente entre $C_{\lim, S}(K, f)$ y el par $C_{\lim, S}(K_1, f), C_{\lim, S}(K_2, f)$.

Definición 3.2.1. Dados $(Y_1, *), (Y_2, *) \in Top_*$ espacios topológicos punteados, la expresión $(Y_1, *) \vee (Y_2, *) \in Top_*$ denota el espacio *unión punteada*. Este espacio surge de la unión de Y_1 e Y_2 , identificando los dos puntos base. Si tenemos aplicaciones punteadas (morfismos de Top_*) $h_1 : (Y_1, *) \rightarrow (Y_1, *)$ y $h_2 : (Y_2, *) \rightarrow (Y_2, *)$, definimos la aplicación $h_1 \vee h_2 : (Y_1, *) \vee (Y_2, *) \rightarrow (Y_1, *) \vee (Y_2, *)$ que asigna a cada $y_i \in Y_i$ el valor $h_i(y_i)$, para $i \in \{1, 2\}$. Es claro que $h_1 \vee h_2$ es un morfismo de Top_* .

Teorema 3.2.2. Sea K un conjunto invariante y aislado, unión disjunta de otros dos conjuntos invariantes y aislados K_1 y K_2 . Entonces

$$C_{\lim, S}(K, f) = (\lim(\mathcal{X}, *) \vee \lim(\mathcal{Y}, *), S([\lim(\{f_P\}_n) \vee \lim(\{f_Q\}_n)]))$$

donde

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, *)_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N})$$

e

$$(\mathcal{Y}, *) = ((Q_1/Q_2, *)_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N})$$

con $P = (P_1, P_2) \in IP(N_1)$ y $Q = (Q_1, Q_2) \in IP(N_2)$, siendo N_1 y N_2 entornos aislantes ‘suficientemente pequeños’ de K_1 y K_2 . Las expresiones $\{f_P\}_n$ y $\{f_Q\}_n$ representan morfismos de nivel de $(\mathcal{X}, *)$ e $(\mathcal{Y}, *)$ en sí mismos.

Demostración. Sean $K_1 \subset U_1$ y $K_2 \subset U_2$ con U_1, U_2 abiertos contenidos en U tales que $cl(U_1) \cap cl(U_2) = \emptyset$.

Para $i = 1, 2$ escogemos entornos aislantes y admisibles de K_i , N_i , tales que $N_i \subset U_i \cap f^{-1}(U_i)$. Este es el significado de la expresión ‘suficientemente pequeño’ que mencionamos en el enunciado del teorema. No resulta difícil darse cuenta, debido a elección de los N_i , de que $N_1 \cup N_2$ es un entorno aislante y admisible de $K_1 \cup K_2$.

Sean $P \in IP(N_1)$ y $Q \in IP(N_2)$. Resulta sencillo demostrar que $P \cup Q = (P_1 \cup Q_1, P_2 \cup Q_2)$ es un *index pair* de K en $N_1 \cup N_2$. Veámoslo:

- a) Si $x \in P_1 \cup Q_1$ y $f(x) \in N_1 \cup N_2$, existen dos posibilidades,
 a1) $x \in P_1$, lo que implica que $f(x) \in N_1$. Es inmediato, entonces, que $f(x) \in P_1 \subset P_1 \cup Q_1$.
 a2) $x \in Q_1$, lo que implica que $f(x) \in N_2$. Es inmediato, entonces, que $f(x) \in Q_1 \subset P_1 \cup Q_1$.

Por otro lado, si $x \in P_2 \cup Q_2$ y $f(x) \in N_1 \cup N_2$, haremos igual.

b) Es claro que

$$K = K_1 \cup K_2 \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2) \cup \text{int}(Q_1 \setminus Q_2) \subset \text{int}((P_1 \cup Q_1) \setminus (P_2 \cup Q_2)).$$

c) Ocurre que

$$\begin{aligned} cl((P_1 \cup Q_1) \setminus (P_2 \cup Q_2)) &= cl((P_1 \setminus P_2) \cup (Q_1 \setminus Q_2)) \subset \\ &\subset cl(P_1 \setminus P_2) \cup cl(Q_1 \setminus Q_2) \subset \\ &\subset (\text{int}(N_1) \cap f^{-1}(\text{int}(N_1))) \cup (\text{int}(N_2) \cap f^{-1}(\text{int}(N_2))) \subset \\ &\subset \text{int}(N_1 \cup N_2) \cap f^{-1}(\text{int}(N_1) \cup \text{int}(N_2)) \subset \\ &\subset \text{int}(N_1 \cup N_2) \cap f^{-1}(\text{int}(N_1 \cup N_2)). \end{aligned}$$

Tenemos demostrado que $P \cup Q$ es un *index pair* de K en $N_1 \cup N_2$. Obsérvese que

$$((P_1 \cup Q_1)/(P_2 \cup Q_2), *) \simeq (P_1/P_2, *) \vee (Q_1/Q_2, *).$$

Definimos la aplicación punteada

$$f_P \vee f_Q : (P_1/P_2, *) \vee (Q_1/Q_2, *) \rightarrow (P_1/P_2, *) \vee (Q_1/Q_2, *)$$

que establece la asignación

$$f_P \vee f_Q([x]) = f_P([x]) \text{ para todo } [x] \in P_1/P_2$$

y

$$f_P \vee f_Q([y]) = f_Q([y]) \text{ para todo } [y] \in Q_1/Q_2.$$

Resulta claro, por la construcción de N_1 y N_2 , que

$$f_{P \cup Q} \equiv f_P \vee f_Q$$

determinan una conjugación topológica.

$$\text{Sea } (\mathcal{Z}, *) = (((P_1 \cup Q_1)/(P_2 \cup Q_2), *)_n, f_{P \cup Q}^{n'-n}, \mathbb{N}).$$

$$\text{Sea } (\mathcal{W}, *) = (((P_1/P_2, *) \vee (Q_1/Q_2, *)_n, (f_P \vee f_Q)^{n'-n}, \mathbb{N}).$$

Es sencillo confirmar, por la construcción de los entornos aislantes y el comportamiento de f_P y f_Q , que

$$\lim(\mathcal{W}, *) = \lim(\mathcal{X}, *) \vee \lim(\mathcal{Y}, *).$$

Tendremos, entonces, que

$$\begin{aligned}
C_{lim,S}(K, f) &= (limS[(\mathcal{Z}, *), lim(\{S([f_{P \cup Q}])\}_n)]) = \\
&= (lim(\mathcal{Z}, *), S([lim(\{f_{P \cup Q}\}_n)])) = (lim(\mathcal{W}, *), S([lim(\{f_P \vee f_Q\}_n)])) = \\
&= (lim(\mathcal{X}, *) \vee lim(\mathcal{Y}, *), S([lim(\{f_P\}_n) \vee lim(\{f_Q\}_n)])) .
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia directa del corolario 3.1.4 (la igualdad es única salvo isomorfismo). La igualdad entre los morfismos

$$lim(\{S([f_{P \cup Q}])\}_n) = S([lim(\{f_{P \cup Q}\}_n)])$$

es inmediata si observamos la unicidad del morfismo límite inverso (ver observación 2.1.14). \square

Acabado el estudio de la propiedad aditiva, ahora analizaremos el comportamiento del índice tras pequeñas modificaciones continuas de la $f : U \rightarrow X$. Los resultados y sus demostraciones son muy semejantes a los que aparecen en [98]. En las próximas líneas comentaremos, únicamente, aquellos resultados sobre la propiedad de invariancia por homotopías que difieran en algo de los expuestos en la referencia, cuya lectura previa recomendamos.

Sea $f : \Lambda \times U \rightarrow X$ una aplicación continua con Λ un intervalo real. Denotamos por $f_\lambda : U \rightarrow X$ a la aplicación que establece la asignación $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$.

Si J es subintervalo de Λ , entonces denotamos por f_J a la aplicación

$$f_J : J \times U \ni (\lambda, x) \mapsto (\lambda, f_\lambda(x)) \in J \times X.$$

Identificaremos las aplicaciones f_λ y $f_{\{\lambda\}}$.

Supondremos que $N \subset X$ es tal que $J \times N \subset J \times U$ es admisible y aislante con respecto a f_J en $J \times X$.

Diremos que $P \in IP(N, \lambda)$ si P es un *index pair* en N con respecto a f_λ .

Dado $P \in IP(N)$, denotamos por $T_N(P) = (P_1 \cup (X \setminus int(N)), P_2 \cup (X \setminus int(N)))$.

Todas las proposiciones y lemas que aparecen en [98], y sus demostraciones, son válidas para nosotros, salvo un par de resultados que serán ligeramente modificados. Una de las cosas que habrá que modificar es el lema 6.3. Lo cambiaremos por el siguiente.

Lema 3.2.3. ([98] pág. 163). Sean $\kappa, \lambda \in J$, $P \in IP(N, \lambda)$, $Q \in IP(N, \kappa)$, $P \subset Q$ y $f_\mu(P) \subset T_N(Q)$ para todo $\mu \in J$. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(P_1/P_2, *) & \xrightarrow{f_P^\lambda} & (P_1/P_2, *) \\
\downarrow \text{Quot}(i_{PQ}) & & \downarrow \text{Quot}(i_{PQ}) \\
(Q_1/Q_2, *) & \xrightarrow{f_Q^\kappa} & (Q_1/Q_2, *)
\end{array}$$

conmuta salvo homotopía (hemos denotado a $(f_\lambda)_P$ como f_P^λ).

Esto implicará que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
((P_1/P_2, *), S([f_P^\lambda])) & \xrightarrow{S([f_P^\lambda])} & ((P_1/P_2, *), S([f_P^\lambda])) \\
\downarrow T([i_{PQ}]) & & \downarrow T([i_{PQ}]) \\
((Q_1/Q_2, *), S([f_Q^\kappa])) & \xrightarrow{S([f_Q^\kappa])} & ((Q_1/Q_2, *), S([f_Q^\kappa]))
\end{array}$$

también conmuta.

Demostración. Denotaremos $T_N(Q) = T(Q) = (T_1(Q), T_2(Q))$. Ocurre que

$$(P_1, P_2) \xrightarrow{f_{PT(Q)}^\mu} (T_1(Q), T_2(Q))$$

donde $f_{PT(Q)}^\mu$ denota $(f_\mu)_{PT(Q)}$. Es claro que $f_{PT(Q)}^\mu \in \text{Prs}(P, T(Q))$.

Sean $i_{PQ} : (P_1, P_2) \rightarrow (Q_1, Q_2)$ y $i_{QT(Q)} : (Q_1, Q_2) \rightarrow (T_1(Q), T_2(Q))$ las aplicaciones inclusión entre los pares respectivos.

Resulta fácil ver que la aplicación

$$(P_1/P_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(f_{PT(Q)}^\lambda)} (T_1(Q)/T_2(Q), *)$$

es igual a la composición

$$(P_1/P_2, *) \xrightarrow{f_P^\lambda} (P_1/P_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(i_{PQ})} (Q_1/Q_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(i_{QT(Q)})} (T_1(Q)/T_2(Q), *).$$

Obsérvese que $\text{Quot}(i_{QT(Q)})$ es un homeomorfismo punteado (ver [98], proposición 4.6).

De igual modo, tendremos que la aplicación

$$(P_1/P_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(f_{PT(Q)}^\kappa)} (T_1(Q)/T_2(Q), *)$$

es igual a la composición

$$(P_1/P_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(i_{PQ})} (Q_1/Q_2, *) \xrightarrow{f_Q^\kappa} (Q_1/Q_2, *) \xrightarrow{\text{Quot}(i_{QT(Q)})} (T_1(Q)/T_2(Q), *).$$

Construyamos la homotopía

$$H : (P_1/P_2, *) \times I \rightarrow (T_1(Q)/T_2(Q), *) \simeq (Q_1/Q_2, *)$$

que establece la asignación

$$([x], t) \mapsto (\text{Quot}(i_{QT(Q)}))^{-1}([f(t\lambda + (1-t)\kappa, x)]).$$

Es evidente que H está bien definida y es continua, cumpliéndose $H_t(*) = *$ para todo t .

Ocurre, además, que

$$H_0 = (\text{Quot}(i_{QT(Q)}))^{-1} \circ \text{Quot}(f_{PT(Q)}^\kappa) = f_Q^\kappa \circ \text{Quot}(i_{PQ})$$

mientras

$$H_1 = (\text{Quot}(i_{QT(Q)}))^{-1} \circ \text{Quot}(f_{PT(Q)}^\lambda) = \text{Quot}(i_{PQ}) \circ f_P^\lambda.$$

La conmutatividad del segundo diagrama del lema resulta ya obvia. \square

Lema 3.2.4. ([98] Lema 6.5). Sea $\mu \in J$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un intervalo abierto $J_0 \subset J$ que contiene a μ y, para cada $\lambda \in J_0$ y $j \in \{1, \dots, k\}$ existe un *index pair* $P(j, \lambda) = (P(j, \lambda)_1, P(j, \lambda)_2) \in IP(N, \lambda)$ tal que

$$P(j, \kappa) \subset P(j+1, \lambda) \text{ para } j \in \{1, \dots, k-1\} \text{ y } \kappa, \lambda \in J_0$$

y la inclusión $i_{P(j, \kappa)P(j+1, \lambda)} : P(j, \kappa) \rightarrow P(j+1, \lambda)$ induce un morfismo

$$\{T([i_{P(j, \kappa)P(j+1, \lambda)}])\}_n : S[(\mathcal{X}, *)] \rightarrow S[(\mathcal{Y}, *)]$$

siendo

$$S[(\mathcal{X}, *)] = ((P(j, \kappa)_1/P(j, \kappa)_2, *)_n, T([f_{P(j, \kappa)P(j, \kappa)}^\kappa]), \mathbb{N})$$

y

$$S[(\mathcal{Y}, *)] = ((P(j+1, \lambda)_1/P(j+1, \lambda)_2, *)_n, T([f_{P(j+1, \lambda)P(j+1, \lambda)}^\lambda]), \mathbb{N}).$$

La demostración será idéntica a la hecha en la referencia, y hará uso del lema 3.2.3 anterior.

Teorema 3.2.5. ([98] pág. 167). Sea $f : \Lambda \times U \rightarrow X$ una aplicación continua y sea $N \subset U$ un conjunto cerrado de X tal que para todo $\mu \in \Lambda$ existe un entorno J de μ en Λ de manera que $J \times N \subset J \times U$ es un entorno aislante y admisible con respecto a f_J en $J \times X$. Entonces $C_{im, S}(Inv(N, f_\lambda), f_\lambda)$ es independiente de $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Basta ver, tal como se hace en [98], que $C_{im, S}(K_\lambda, f_\lambda)$ es localmente constante. El proceso de la demostración es idéntico, hasta llegar a la construcción del diagrama conmutativo de cohomologías, que nosotros sustituiremos por lo siguiente:

Sea

$$S[(\mathcal{P}(\mu), *)] = ((P(\mu)_1/P(\mu)_2, *)_n, T([f_{P(\mu)P(\mu)}^\mu]), \mathbb{N}) \in pro(Sh_*).$$

De idéntica manera definiremos $S[(\mathcal{Q}'(\lambda), *)]$, $S[(\mathcal{P}'(\lambda), *)]$ y $S[(\mathcal{Q}(\mu), *)]$.

Consideremos el morfismo de nivel

$$\{T([i_{P(\mu)Q'(\lambda)}])\}_n : S[(\mathcal{P}(\mu), *)] \rightarrow S[(\mathcal{Q}'(\lambda), *)].$$

Ocurre que $\{T([i_{P(\mu)Q'(\lambda)}])\}_n$ es igual a la composición

$$\begin{aligned} S[(\mathcal{P}(\mu), *)] &\xrightarrow{\{T([i_{P(\mu)P'(\lambda)}])\}_n} S[(\mathcal{P}'(\lambda), *)] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\{T([i_{P'(\lambda)Q(\mu)}])\}_n} S[(\mathcal{Q}(\mu), *)] \xrightarrow{\{T([i_{Q(\mu)Q'(\lambda)}])\}_n} S[(\mathcal{Q}'(\lambda), *)]. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 3.1.6 y el functor lim , tenemos que $lim(\{T([i_{P(\mu)Q'(\lambda)}])\}_n)$ es un isomorfismo entre $C_{lim,S}(Inv(N, f_\mu), f_\mu)$ y $C_{lim,S}(Inv(N, f_\lambda), f_\lambda)$. \square

Consideremos X, Y espacios metrizable, con $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos.

Sean $\varphi : U \rightarrow Y$ y $\psi : V \rightarrow X$ aplicaciones continuas de modo que $K \subset U$ sea un conjunto invariante y aislado con respecto a $f = \psi \circ \varphi$.

Teorema 3.2.6. Ocurre, en estas condiciones, que $\varphi(K)$ es invariante y aislado con respecto a $g = \varphi \circ \psi$. Además, tendremos que $C_{lim,S}(K, f) = C_{lim,S}(\varphi(K), g)$.

Demostración. La primera parte de la demostración consistirá en ver que $\varphi(K)$ es invariante y aislado respecto de g .

Basta escoger las M, N de la demostración hecha en [97], pero con $M \subset dom(f) = \varphi^{-1}(V)$ entorno aislante y admisible de K respecto de f .

La igualdad $Inv(N, g) = \varphi(K)$ aparece probada en [97]. Veamos que N es también admisible.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en N y $\{m_n\}_n \rightarrow \infty$, con

$$\{g^i(x_n) : 1 \leq i \leq m_n\} \subset N \text{ para todo } n.$$

Consideremos

$$\{\psi(g^i(x_n)) = f^i(\psi(x_n)) : 1 \leq i \leq m_n - 1\} \subset M.$$

Es claro que $\{m_n - 1\} \rightarrow \infty$. Entonces, la sucesión $\{f^{m_n-1}(\psi(x_n))\}_n$ tiene una subsucesión convergente en M . Si le aplicamos la aplicación continua φ , obtenemos

$$\{(\varphi \circ f^{m_n-1})(\psi(x_n))\}_n = \{g^{m_n}(x_n)\}_n,$$

que tendrá subsucesión convergente en N . Queda demostrado que N es admisible.

Veamos la segunda parte del teorema, que consiste en demostrar la igualdad

$$C_{lim,S}(K, f) = C_{lim,S}(\varphi(K), g).$$

Consideremos, ahora, $\varphi : U \rightarrow Y$ y $\psi' : \psi^{-1}(U) \rightarrow U$ restricción de ψ . Definimos, entonces

$$f_0 = \psi' \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi^{-1}(U)) \rightarrow U$$

y

$$g_0 = \varphi \circ \psi' : \psi^{-1}(U) \rightarrow Y$$

Resulta claro que $g_0 = g$ y $C_{lim,S}(K, f) = C_{lim,S}(K, f_0)$.

Sea N un entorno aislante y admisible de $\varphi(K)$ para g . Veamos que $\varphi^{-1}(N)$ es un entorno aislante y admisible de K para f_0 .

1. $\varphi^{-1}(N)$ es cerrado en U .

2. $\varphi^{-1}(N)$ es admisible.

Sean $\{x_n\}_n \subset \varphi^{-1}(N)$ y $\{m_n\}_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\{f_0^i(x_n) : 1 \leq i \leq m_n\} \subset \varphi^{-1}(N) \text{ para todo } n.$$

Ocurre que $\{\varphi(x_n)\}_n \subset N$. Consideremos $\{m_n - 1\}_n \rightarrow \infty$.

Es claro que $g^i(\varphi(x_n)) = \varphi(f_0^i(x_n))$. Esto garantiza que

$$\{g^i(\varphi(x_n)) : 1 \leq i \leq m_n - 1\} \subset N$$

con N admisible. Entonces $\{g^{m_n-1}(\varphi(x_n))\}_n$ tiene una subsucesión convergente. Al ser ψ continua, tendremos que

$$\{(\psi \circ g^{m_n-1})(\varphi(x_n))\}_n = \{(f_0^{m_n-1} \circ \psi \circ \varphi)(x_n)\}_n = \{f_0^{m_n}(x_n)\}_n$$

tiene un punto de acumulación.

3. $\varphi^{-1}(N)$ es aislante de K .

Resulta claro que es un entorno cerrado en U de K .

Sea $x \in \varphi^{-1}(N)$ de modo que existe una $\sigma_x : \mathbb{Z} \rightarrow \varphi^{-1}(N)$ solución de f_0 por x . Entonces $\varphi \circ \sigma_x$ cae en $Inv(N, g) = \varphi(K)$. Esto implica que σ_x está en $\varphi^{-1}(\varphi(K))$.

Si existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma_x(n) \in \varphi^{-1}(\varphi(K)) \setminus K$, entonces tenemos

$$f_0(\sigma_x(n-1)) = \sigma_x(n) \notin K,$$

pero

$$\begin{aligned} f_0(\varphi^{-1}(\varphi(K))) &= (\psi' \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\varphi(K))) = \\ &= \psi'(\varphi(K)) = f_0(K) = K, \end{aligned}$$

de modo que $f_0(\sigma_x(n-1)) = \sigma_x(n) \in K$ lo cual es absurdo. Por consiguiente, σ_x está totalmente contenida en K .

Así, tenemos que $Inv(\varphi^{-1}(N), f_0) = K$. Queda demostrado que $\varphi^{-1}(N)$ es un entorno aislante y admisible de K para f_0 .

Sea $(Q_1, Q_2) \in IP(N)$ con $Q_2 \subset Q_1$. Definimos $P_1 = \varphi^{-1}(Q_1)$ y $P_2 = \varphi^{-1}(Q_2)$.

Veamos que $P = (P_1, P_2) \in IP(\varphi^{-1}(N))$.

a) P_i positivamente invariante respecto de $\varphi^{-1}(N)$.

Si $x \in P_i$ con $f_0(x) \in \varphi^{-1}(N)$, entonces $\varphi(x) \in Q_i$ con $g(\varphi(x)) = \varphi(f_0(x)) \in N$. De modo que $g(\varphi(x)) = \varphi(f_0(x)) \in Q_i$. Esto implica que $f_0(x) \in \varphi^{-1}(Q_i) = P_i$.

b) $K \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2)$.

Como $\varphi(K) \subset \text{int}(Q_1 \setminus Q_2)$, existe un abierto $U_0 \subset \varphi^{-1}(N)$, con $K \subset U_0$, tal que $\varphi(U_0) \subset \text{int}(Q_1 \setminus Q_2)$.

Entonces $U_0 \subset \text{int}(\varphi^{-1}(Q_1) \setminus \varphi^{-1}(Q_2))$. De modo que $K \subset U_0 \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2)$.

c) $cl(P_1 \setminus P_2) \subset \text{int}(\varphi^{-1}(N)) \cap f_0^{-1}(\text{int}(\varphi^{-1}(N)))$.

Sea $x \in cl(P_1 \setminus P_2)$. Entonces

$$\varphi(x) \in cl(Q_1 \setminus Q_2) \subset g^{-1}(\text{int}(N)) \cap \text{int}(N).$$

Aplicando g , tendremos que $g(\varphi(x)) = \varphi(f_0(x)) \in \text{int}(N)$, de modo que

$$f_0(x) \in \varphi^{-1}(\text{int}(N)) \subset \text{int}(\varphi^{-1}(N)).$$

Así, $x \in f_0^{-1}(\text{int}(\varphi^{-1}(N)))$.

Por otro lado, $x \in \varphi^{-1}(\text{int}(N)) \subset \text{int}(\varphi^{-1}(N))$.

Tenemos, entonces, que $P = (P_1, P_2) \in IP(\varphi^{-1}(N))$.

El resto de la demostración es análogo a lo hecho en [97].

Observación 3.2.7. Sea $f : U \rightarrow X$ continua con K un conjunto invariante y aislado por N , un entorno aislante y admisible. Consideremos $P \in IP(N)$. Utilizaremos únicamente el functor límite inverso $\lim : \text{pro}(\text{Top}_*) \rightarrow \text{Top}_*$ para construir un objeto, semejante al índice *shape* que ya tenemos, y al que llamaremos *índice límite inverso*. El nuevo índice tendrá todas las propiedades del índice *shape*, salvo la de invariancia por homotopías, y su definición es la siguiente

$$C_{\lim}(K, f) = (\lim(\mathcal{X}, *), \lim(\{f_P\}_n)),$$

siendo $(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, *)_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N})$. Obsérvese que el índice límite inverso es el resultante de quitarle el functor *shape* y el functor homotopía al índice *shape*.

Debemos demostrar que esta definición es independiente del P y del N escogidos. Sin embargo, si nos fijamos en los resultados obtenidos con el índice *shape* cuando demostrabamos esto, veremos que se puede hacer un trasplante casi total de todos los pasos seguidos.

Así, se ve sin dificultad que el lema 3.1.5 se reenuncia del siguiente modo

Lema 3.2.8. Sea N un entorno aislante y admisible del conjunto invariante y aislado K , con $P \in IP(N)$. Entonces existen un entorno aislante y admisible M de K , $M \subset \text{int}(N) \cap f^{-1}(\text{int}(N))$, y $P' \in IP(N)$, $Q \in IP(M)$, $Q \subset P'$ tales que si

$$(\mathcal{X}, *) = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*)$$

e

$$(\mathcal{Y}, *) = ((P'_1/P'_2, [P'_2])_n, f_{P'}^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*),$$

resulta que

$$\lim(\{Quot(i_{QP'})\}_n) : \lim(\mathcal{X}, *) \rightarrow \lim(\mathcal{Y}, *)$$

es un isomorfismo en Top_* (un homeomorfismo), donde denotamos como $\{Quot(i_{QP'})\}_n$ al morfismo de nivel en $\text{pro}(\text{Top}_*)$ que va de $(\mathcal{X}, *)$ en $(\mathcal{Y}, *)$.

$\lim(\{Quot(i_{QP'})\}_n)$ es un isomorfismo entre $(\lim(\mathcal{X}, *), \lim(\{f_Q\}_n))$ y $(\lim(\mathcal{Y}, *), \lim(\{f_{P'}\}_n))$. Aquí, por isomorfismo entendemos un homeomorfismo de Top_* que cumple

$$\lim(\{Quot(i_{QP'})\}_n) \circ \lim(\{f_Q\}_n) = \lim(\{f_{P'}\}_n) \circ \lim(\{Quot(i_{QP'})\}_n).$$

La demostración es idéntica a la hecha en el lema 3.1.5.

Teorema 3.2.9. Sea $f : U \rightarrow X$ continua, con N un entorno aislante y admisible, $P, Q \in IP(N)$, $P \subset Q$. Si $i_{PQ} : P \rightarrow Q$ es el morfismo inclusión en Prs , entonces $Quot(i_{PQ})$ es un morfismo en Top_* , y cumple que $\lim(\{Quot(i_{PQ})\}_n)$ es un isomorfismo en Top_* (un homeomorfismo),

$$\lim(\{Quot(i_{PQ})\}_n) : \lim(\mathcal{X}, *) \xrightarrow{\cong} \lim(\mathcal{Y}, *)$$

donde

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*)$$

e

$$(\mathcal{Y}, *) = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*),$$

siendo $\{Quot(i_{PQ})\}_n$ el morfismo de nivel entre $(\mathcal{X}, *)$ e $(\mathcal{Y}, *)$.

La demostración de este resultado es prácticamente igual a la hecha para el teorema 3.1.6.

Corolario 3.2.10. Dados $P, Q \in IP(N)$, ocurre que $\lim(\mathcal{X}, *)$ es isomorfo (homeomorfo) a $\lim(\mathcal{Y}, *)$, siendo

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*)$$

e

$$(\mathcal{Y}, *) = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*).$$

La prueba es análoga a la del corolario 3.1.7.

Teorema 3.2.11. Sea $f : U \rightarrow X$ continua y sea K un conjunto invariante y aislado. Entonces, dados N, M entornos aislantes y admisibles de K , y dados $P \in IP(N), Q \in IP(M)$, ocurre que $(\lim(\mathcal{X}, *), \lim(\{f_P\}_n))$ es isomorfo (homeomorfo) a $(\lim(\mathcal{Y}, *), \lim(\{f_Q\}_n))$, siendo

$$(\mathcal{X}, *) = ((P_1/P_2, [P_2])_n, f_P^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*)$$

e

$$(\mathcal{Y}, *) = ((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, f_Q^{n'-n}, \mathbb{N}) \in \text{pro}(\text{Top}_*).$$

La demostración se hace en términos muy semejantes a los del teorema 3.1.8.

Observación 3.2.12. El índice del conjunto vacío es $C_{\text{lim}}(\emptyset, f) = (*, id)$. Para demostrarlo basta tomar como *index pair* $P = (P_1, P_2) = (\emptyset, \emptyset)$. Obsérvese, por tanto, que si el índice calculado en un N , entorno aislante y admisible, es distinto de $(*, id)$, ocurrirá que $K \neq \emptyset$.

Además, el índice límite inverso cumplirá las propiedades aditiva y conmutativa. Basta echar un vistazo a las demostraciones ya hechas con el índice *shape*, y veremos cómo las modificaciones son mínimas. Hacemos observar también que nuestro índice queda caracterizado por un espacio topológico punteado y un homeomorfismo punteado del espacio en sí mismo.

Será, sin embargo, la invariancia por homotopías la propiedad que falle para nuestro nuevo índice, lo cual lo convierte en un objeto muy inestable y de poco interés desde ese punto de vista.

I.4. Algunos resultados acerca de los tipos *shape* que aparecen como índice en un sistema dinámico discreto

En contra de lo que ocurre con el índice *shape* (homotópico) para flujos en variedades, que es siempre el tipo *shape* (homotópico) de un poliedro punteado y compacto, el índice para el caso discreto suele ser más complejo.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ escogemos $S_n^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y tomamos $1 = z_n \in S_n^1$ como punto base. Dado $q \in \mathbb{Z}$, el *solenoides q-ádico*, S_q , es el límite inverso del sistema inverso $((S_n^1, z_n), q_n, \mathbb{N})$ donde las aplicaciones punteadas $q_n : S_{n+1}^1 \rightarrow S_n^1$ se definen como $q_n(z) = z^q$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria de enteros y nosotros tomamos diferentes aplicaciones punteadas $h_n : S_{n+1}^1 \rightarrow S_n^1$, $h_n(z) = z^{d_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtendremos, pasando al límite, el *solenoides generalizado*.

En esta sección, T denotará un solenoides generalizado (punteado) obtenido de cualquier sucesión de enteros $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, primos entre sí. Los solenoides son compactos, conexos, no movibles (punteados).

Nuestro objetivo es obtener el *shape* (punteado) de todos los solenoides q -ádicos como el índice de conjuntos invariantes y aislados de sistemas dinámicos discretos (modificando la G-herradura). Por otro lado, el *shape* de los solenoides generalizados no es el índice de ningún conjunto compacto, invariante y aislado de una aplicación definida localmente en un ANR métrico localmente compacto. Entonces, el índice no puede ser ‘arbitrariamente complejo’. De hecho, será el *shape* del límite inverso de un sistema inverso $((P_n, z_n), g_n, \mathbb{N})$ donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(P_n, z_n) = (P, *)$ y $g_n = g$, con P un poliedro finito fijo y $g : P \rightarrow P$ fija (punteada).

Si $f : N \subset X \rightarrow X$ es una aplicación continua y $K \subset \text{int}(N)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado, denotaremos por $S(K, f)$ al índice *shape* del par (K, f) , considerando sólo el objeto (sin morfismo) de $C_{\text{lim}, S}(K, f)$.

Proposición 4.1. Para todo $q \in \mathbb{N}$ existe un difeomorfismo definido localmente $f_q : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y un conjunto compacto, invariante y aislado, K_q , para f_q , tal que $S(K_q, f_q) = Sh(S_q)$. El caso $q = 2$ se obtiene de la G-herradura.

Demostración. Probaremos, primero, que $S(K_2, f_2) = Sh(S_2)$. Sea G_2 un conjunto compacto (punteado) obtenido como límite inverso de la sucesión inversa asociada a un *index pair* $P = (P_1, P_2)$ tal que el cociente P_1/P_2 es homotópicamente equivalente a la unión punteada de dos círculos (ver figura I.2).

Debemos, entonces, ver que $Sh(G_2) = Sh(S_2)$. El solenoide S_2 se obtiene como límite inverso de la sucesión inversa

$$\dots \xrightarrow{z^2} (S^1, 1) \xrightarrow{z^2} (S^1, 1) \xrightarrow{z^2} (S^1, 1).$$

Por otro lado, tenemos que G_2 es el límite inverso de la sucesión inversa

$$\dots \xrightarrow{\phi} (S^1 \vee S^1, *) \xrightarrow{\phi} (S^1 \vee S^1, *) \xrightarrow{\phi} (S^1 \vee S^1, *)$$

donde $\phi : (S^1 \vee S^1, *) \rightarrow (S^1 \vee S^1, *)$ es cualquier aplicación punteada que transforma los caminos a y b en ab (ver figura I.1).

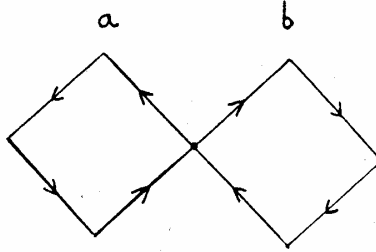


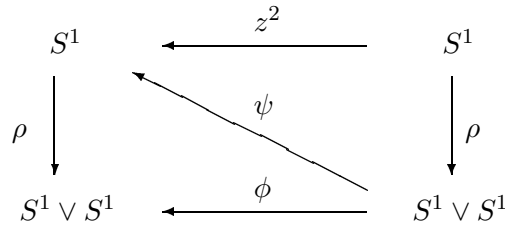
Figura I.1

Definimos

$$\psi = (id_{S^1}, id_{S^1}) : (S^1 \vee S^1, *) \rightarrow (S^1, 1).$$

Sea $\rho : (S^1, 1) \rightarrow (S^1 \vee S^1, *)$ cualquier aplicación punteada, morfismo de $H\text{Top}_*$, que transforma el camino identidad $S^1 \rightarrow S^1$ en el camino ab .

Tenemos, por tanto, que el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía punteada,



Ahora, usando el teorema de Morita para isomorfismos de nivel en pro-categorías ([91]), la demostración del caso $q = 2$ está completa.

Sea q arbitrario. Tomaremos el difeomorfismo definido localmente $f_q : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como en la figura I.2. Ahora, la demostración es similar a la del caso $q = 2$. Aquí $S(K_q, f_q) = Sh(G_q)$, donde G_q es el límite inverso de una sucesión inversa definida en la unión punteada de q circunferencias.

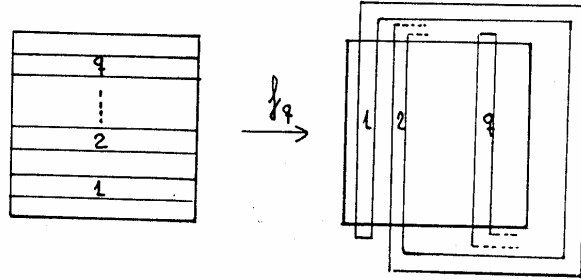


Figura I.2

El resto de la demostración resulta ya evidente. \square

Aplicaremos, en nuestro contexto, las técnicas del lema 5.1 de [125], con el fin de asegurar la existencia de *index pairs* adecuados para todo conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a un sistema semidinámico definido en $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$, el cubo de Hilbert. Teniendo en cuenta que estas técnicas requieren el uso de aplicaciones multivaluadas, introducimos, a continuación, algunos resultados sobre sistemas dinámicos multivaluados, que necesitaremos para proseguir con nuestro estudio. La mayor parte de estos resultados ha sido tomada del artículo de Kaczynski y Mrozek [63].

Sea $f : Q \rightarrow Q$ una aplicación continua. Dado $\epsilon > 0$, consideremos

$$\mathcal{A}(\epsilon) = \{A \cap Q, A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i : \forall i \exists k \in \mathbb{N} \text{ con } A_i = k\epsilon \text{ ó } A_i = [k\epsilon, (k + 1)\epsilon].\}$$

Definimos las aplicaciones multivaluadas $T_\epsilon, F_\epsilon : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ del siguiente modo

$$T_\epsilon(x) = \bigcup \{A \in \mathcal{A}(\epsilon) : x \in A\}$$

y

$$F_\epsilon(x) = (T_\epsilon \circ f \circ T_\epsilon)(x).$$

Definición 4.2. ([63]). Sean Y, Z espacios métricos. Una aplicación $F : Y \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ es *semicontinua superiormente (scs)* si $F^{-1}(A) = \{y \in Y : F(y) \cap A \neq \emptyset\}$ es cerrado para todo $A \subset Z$ cerrado o, de manera equivalente, si el conjunto $\{y \in Y : F(y) \subset U\}$ es abierto para todo abierto $U \subset Z$.

Denotamos $F(A) = \bigcup\{F(y) : y \in A\} \subset Z$. Dado un entero positivo n , denotamos $F^n(y) = F(F^{n-1}(y))$.

Toda aplicación scs con valores compactos envía conjuntos compactos a conjuntos compactos.

Definición 4.3. ([63]). Una aplicación scs $F : X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ con valores compactos se llama *sistema dinámico multivaluado discreto (sdmd)* si:

- 1) Para todo $x \in X$, $F(x, 0) = \{x\}$.
- 2) Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $nm \geq 0$ y todo $x \in X$, $F(F(x, n), m) = F(x, n + m)$.
- 3) Para todo $x, y \in X$, $y \in F(x, -1)$ si, y sólo si, $x \in F(y, 1)$.

Usaremos la notación $F(x, n) = F^n(x)$. Obsérvese que F^n es equivalente a aplicar repetidamente $F^1 : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ o su inversa $(F^1)^{-1}$. Por ello llamamos a F^1 generador del sdmd F .

Una aplicación scs con valores compactos $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ genera un sdmd si, y sólo si, es propia, esto es, si $F^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset X$ (ver [63]).

Diremos que un conjunto $A \subset Q$ es un *prisma* si existe un $m \in \mathbb{N}$ y un poliedro finito P tal que $A = P \times Q \subset \prod_{n=1}^m [0, 1/n] \times Q$ (ver p. 104 de [10]).

Lema 4.4. Sea $F : I \times Q \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, definida del siguiente modo

$$F(\epsilon, x, n) = F_\epsilon^n(x).$$

Entonces, F es una aplicación scs, con valores compactos, tal que para todo $\epsilon \in I$, $F_\epsilon : Q \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es un sdmd.

Demostración. Primero veremos que $F_\epsilon^1 : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es una aplicación scs, con valores compactos, propia, de modo que genera un sdmd.

Para todo $\epsilon > 0$ existe un $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n(\epsilon)} \leq \epsilon < \frac{1}{n(\epsilon)-1}$.

Entonces

$$T_\epsilon(x) = P \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon)-1} [0, 1/n] \times Q$$

con P poliedro finito. Por tanto, para todo $x \in Q$, $T_\epsilon(x)$ es un prisma.

De manera análoga, para todo $x \in Q$

$$F_\epsilon(x) = (P_1 \cup \dots \cup P_k) \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon)-1} [0, 1/n] \times Q$$

donde P_i es un poliedro finito para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como k es finito, para todo $x \in Q$, $F_\epsilon(x)$ es un prisma.

En particular, T_ϵ y F_ϵ toman valores compactos.

Veamos que T_ϵ y F_ϵ son scs.

Con T_ϵ debemos demostrar que, dado U abierto de Q , el conjunto $\{x \in Q : T_\epsilon(x) \subset U\}$ es abierto. Sea $x \in Q$ fijo. Si $x' \sim x$ es suficientemente

próximo a x , resulta claro que $T_\epsilon(x') \subseteq T_\epsilon(x)$, de modo que, si $T_\epsilon(x) \subset U$, entonces $T_\epsilon(x') \subset U$. Consecuencia inmediata es que $F_\epsilon(x') \subset F_\epsilon(x)$.

Queda, entonces, demostrado que $F_\epsilon^1 : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es scs, con valores compactos, propia (Q es compacto), y genera un sdmd.

Para ver que F es scs, tómesese un subconjunto abierto $U \subset Q$. Entonces, el conjunto

$$\begin{aligned} & \{(\epsilon, x, n) \in I \times Q \times \mathbb{Z} : F(\epsilon, x, n) \subset U\} \equiv \\ & \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{(\epsilon, x, n) \in I \times Q \times n : F(\epsilon, x, n) \subset U\} \end{aligned}$$

es abierto de $I \times Q \times \mathbb{Z}$. Será suficiente demostrar que

$$F^1, F^{-1} : I \times Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

son scs.

La demostración para F^1 se reduce a verlo para $T : I \times Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, donde $T(\epsilon, x) = T_\epsilon(x)$. Dado (ϵ_0, x_0) fijo, con $T_{\epsilon_0}(x_0) \subset U$ abierto de Q , si $(\epsilon_1, x_1) \sim (\epsilon_0, x_0)$ es suficientemente próximo a (ϵ_0, x_0) , tendremos sin dificultad que $T_{\epsilon_1}(x_1) \subset U$.

Veamos que F^{-1} es scs. Sea $(\epsilon_0, x_0) \in \{(\epsilon, x) \in I \times Q : F^{-1}(\epsilon, x) \subset U\}$. Ocurre que

$$F_\epsilon^{-1}(x) \subset U \text{ cuando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \text{ y } x \rightarrow x_0.$$

En efecto, de no ser así, tendríamos que existen sucesiones $\{\epsilon_n\}_n \rightarrow \epsilon_0$, $\{x_n\}_n \rightarrow x_0$, $\{y_n\}_n \rightarrow y_0$, con $y_n \notin U$ para todo n , y tal que $y_n \in F_{\epsilon_n}^{-1}(x_n)$.

Como F^1 es scs, dado $m \in \mathbb{N}$, existe un $n_m \in \mathbb{N}$ de modo que

$$x_n \in F_{\epsilon_n}^1(y_n) \subset B_{1/m}(F_{\epsilon_0}^1(y_0)) \text{ para todo } n \geq n_m$$

siendo $B_{1/m}(F_{\epsilon_0}^1(y_0)) = \{x \in Q : d(x, F_{\epsilon_0}^1(y_0)) < 1/m\}$.

Entonces $x_0 \in F_{\epsilon_0}^1(y_0)$, con lo que tendremos que $y_0 \in F_{\epsilon_0}^{-1}(x_0) \subset U$, que es una contradicción. \square

Definición 4.5. ([63]). Sea X un ANR localmente compacto, con $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una aplicación scs, con valores compactos, propia (genera un sdmd). Dado I , un intervalo en \mathbb{Z} con $0 \in I$, diremos que $\sigma : I \rightarrow X$ es una *solución de F por $x \in X$* si $\sigma(n+1) \in F(\sigma(n))$ para todo $n, n+1 \in I$, y $\sigma(0) = x$.

Dado un conjunto compacto $N \subset X$, denotamos

$$Inv(N, F) = \{x \in N \text{ tal que existe } \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow N \text{ solución de } F \text{ por } x\}.$$

Como N es compacto, ocurre que $Inv(N, F)$ es un conjunto compacto.

Sea $diam_N F = \sup\{diam F(x) : x \in N\}$ y $dist(A, B) = \min\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$, $A, B \subset X$.

Definición 4.6. ([63]). Un conjunto compacto $N \subset X$ es llamado *entorno aislante para F* si

$$B_{diam_N F}(Inv(N, F)) \subset int(N)$$

o, de manera equivalente,

$$dist(Inv(N, F), \partial(N)) > diam_N F.$$

Definición 4.7. ([63]). Sea N un entorno aislante para F . Un par $P = (P_1, P_2)$ de conjuntos compactos, $P_2 \subset P_1 \subset N$, se llama *index pair* para $Inv(N, F)$ si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) $F(P_i) \cap N \subset P_i$, $i \in \{1, 2\}$.
- 2) $F(P_1 \setminus P_2) \subset N$.
- 3) $Inv(N, F) \subset int(P_1 \setminus P_2)$.

Teorema 4.8. ([63]). Sea N un entorno aislante para F y sea W un entorno de $Inv(N, F)$. Entonces existe un *index pair* P para $Inv(N, F)$ tal que $P_1 \setminus P_2 \subset W$.

Lema 4.9. ([63]). Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y sea

$$F : \Lambda \times X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

una aplicación scs, con valores compactos, tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, la aplicación $F_\lambda : X \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definida como $F_\lambda(x, n) = F(\lambda, x, n)$ es un sdmd. Si $N \subset X$ es un conjunto compacto, entonces la aplicación $\lambda \rightarrow Inv(N, F_\lambda)$ es scs.

Tras esta recopilación de resultados sobre aplicaciones multivaluadas y los sistemas dinámicos multivaluados que determinan, estamos en condiciones de seguir con nuestro estudio.

Proposición 4.10. Sea $f : Q \rightarrow Q$ una aplicación continua y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Entonces existe un entorno aislante y admisible, M , de K , y un *index pair* $(Q_1, Q_2) \in IP(M)$, tal que Q_1 y Q_2 son prismas.

Demostración. Será parecida a la hecha en el lema 5.1 de [125]. Sabemos que las aplicaciones multivaluadas T_ϵ, F_ϵ toman valores compactos y son aplicaciones scs.

Recordemos que, dado $\epsilon > 0$, existe un $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n(\epsilon)} \leq \epsilon < \frac{1}{n(\epsilon)-1}$, de manera que

$$T_\epsilon(x) = P \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon)-1} [0, 1/n] \times Q$$

siendo P un poliedro finito. Así, para todo $x \in Q$, $T_\epsilon(x)$ es un prisma.

De igual modo, tenemos, para todo $x \in Q$, que

$$F_\epsilon(x) = (P_1 \cup \dots \cup P_k) \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon)-1} [0, 1/n] \times Q$$

siendo P_i poliedros finitos para todo $i = 1, \dots, k$. Como k es finito, para todo $x \in Q$, $F_\epsilon(x)$ es un prisma.

Sea N un entorno aislante y admisible de K (y por tanto compacto), por ejemplo N un prisma (ver lema 4.3, pág. 105, de [10]). Definimos

$$N_\epsilon = \bigcup \{A \in \mathcal{A}(\epsilon) : A \subset N\}.$$

Si ϵ es suficientemente pequeño, tendremos que N_ϵ es un prisma, entorno aislante respecto de F_ϵ , que contiene a K . Veámoslo.

$$N = P \times Q \subset \prod_{n=1}^{n_1} [0, 1/n] \times Q, \quad N_\epsilon = P' \times Q \subset \prod_{n=1}^{n_1} [0, 1/n] \times Q$$

siendo $P' \subset P$ poliedros finitos.

Resulta evidente, si ϵ es suficientemente pequeño, que N_ϵ es un prisma que contiene a K .

Para ver que N_ϵ es un entorno aislante para F_ϵ , con ϵ suficientemente pequeño, basta utilizar el lema 4.4 y el lema 4.9.

Es claro que $K \subset K_\epsilon = \text{Inv}_{N_\epsilon} F_\epsilon$. Sabemos, por el teorema 4.8, que existen (P_1, P_2) compactos, $P_2 \subset P_1 \subset N_\epsilon$, tales que

- 1) $F_\epsilon(P_i) \cap N_\epsilon \subset P_i$, $i \in \{1, 2\}$.
- 2) $F_\epsilon(P_1 \setminus P_2) \subset N_\epsilon$
- 3) $K_\epsilon \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2)$.

Interesa encontrar, ahora, un *index pair* prismático para K , esto es, un entorno aislante M de K y un par (Q_1, Q_2) de compactos (prismas) en M tal que:

- a) $f(Q_i) \cap M \subset Q_i$
- b) $\text{Inv}(M, f) = K \subset \text{int}(Q_1 \setminus Q_2)$.
- c) $cl(Q_1 \setminus Q_2) \subset \text{int}(M) \cap f^{-1}(\text{int}(M))$.

Escogemos $M = N_\epsilon$. Consideraremos los (P_1, P_2) descritos antes, de modo que

$$cl(P_1 \setminus P_2) \subset \text{int}(N_\epsilon) \cap f^{-1}(\text{int}(N_\epsilon)) = W.$$

Sea $d \in \mathbb{N}$. Definimos, entonces, (Q_1, Q_2) del siguiente modo:

$$Q_1 = T_{\epsilon/d}(P_1) \cap N_\epsilon$$

y

$$Q_2 = T_{\epsilon/d}(P_2) \cap N_\epsilon.$$

Por *prisma de cola* $n(\epsilon/d)$ entendemos $P = P' \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon/d)-1} [0, 1/n] \times Q$ siendo P' un poliedro finito.

Hacemos notar que (Q_1, Q_2) son dos prismas de cola $n(\epsilon/d)$, con $P_1 \subset Q_1$ y $P_2 \subset Q_2$. Obsérvese, además, que, variando al alza el valor de d , tendremos que Q_i es tan próximo, con la métrica de Hausdorff (ver [40], pág. 370), a P_i como sea necesario. Veamos que $(Q_1, Q_2) \in IP(M)$.

Como $K_\epsilon \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2)$ y $Q_i \rightarrow P_i$, entonces existe un d tal que $K_\epsilon \subset \text{int}(Q_1 \setminus Q_2)$. En consecuencia, $\text{Inv}(N_\epsilon, f) = K \subset \text{int}(Q_1 \setminus Q_2)$, con lo que b) está demostrado.

Para d suficientemente grande, tenemos que $cl(P_1 \setminus P_2) \sim cl(Q_1 \setminus Q_2)$ son suficientemente próximos (con la métrica de Hausdorff), de modo que

$$cl(Q_1 \setminus Q_2) \subset W = int(N_\epsilon) \cap f^{-1}(int(N_\epsilon)),$$

lo que demuestra c).

Ocurre que $f(Q_i) \cap N_\epsilon \subset F_\epsilon(P_i) \cap N_\epsilon$, ya que, al ser $Q_i = T_{\epsilon/d}(P_i) \cap N_\epsilon$, tendremos

$$f(Q_i) \subset f(T_{\epsilon/d}(P_i)) \subset T_{\epsilon/d}(f(T_{\epsilon/d}(P_i))) = F_{\epsilon/d}(P_i) \subset F_\epsilon(P_i).$$

Como $F_\epsilon(P_i) \cap N_\epsilon \subset P_i \subset Q_i$, ya tenemos que $f(Q_i) \cap N_\epsilon \subset Q_i$, y queda demostrado a). \square

Teorema 4.11. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ continua, con X un ANR localmente compacto y U abierto de X . En estas condiciones, afirmamos que para todo conjunto K compacto, invariante y aislado, $S(K, f) = Sh(\lim(\mathcal{X}, *))$, siendo $(\mathcal{X}, *) = ((Q_1/Q_2, *)_n, g_Q, \mathbb{N})$, donde (Q_1, Q_2) es un *index pair* prismático para cierta aplicación continua f , extensión de f , $g : Z \subset Q \rightarrow Q$.

Demostración. Podemos considerar a X sumergido como un subconjunto cerrado de un espacio normado B . Sea N un entorno aislante, compacto, de K . Al ser X un ANR, existen un entorno abierto de X , $U^X \subset B$, y una retracción $r : U^X \subset B \rightarrow X$. Debido a [46] tendremos que se puede construir un ANR compacto, A^N , con $N \subset A^N \subset U^X$.

Sea V un subconjunto abierto de X tal que $K \subset V \subset N$, con $f(V) \subset N$. Sea $W = r^{-1}(V) \cap A^N$, subconjunto abierto de A^N .

Consideremos la aplicación

$$f_1 = f \circ r|_W : W \subset A^N \rightarrow A^N.$$

Resulta sencillo ver, por la propiedad conmutativa del índice *shape*, que $S(K, f) = S(K, f_1)$.

En consecuencia, el estudio de $S(K, f)$ se puede considerar idéntico al del índice $S(K, f_1)$ en A^N , que es un ANR compacto.

Por compacidad, tenemos que $A^N \subset Q$, contenido como un cerrado en el cubo de Hilbert.

Existen, entonces $U^{A^N} \subset Q$, entorno abierto de A^N , y una retracción

$$r_1 : U^{A^N} \subset Q \rightarrow A^N.$$

Sea $Z = r_1^{-1}(W) \subset U^{A^N}$ un subconjunto abierto de Q . Definimos

$$g = f_1 \circ r_1|_Z : Z \subset Q \rightarrow Q.$$

Resulta claro, por la propiedad conmutativa del índice, que $S(K, f_1) = S(K, g)$.

Basta, ahora, aplicar la última proposición para obtener, de manera inmediata el resultado buscado. \square

Corolario 4.12. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ continua, con X un ANR localmente compacto. Entonces, para todo conjunto compacto, invariante y aislado, K , $S(K, f) \neq Sh(T)$.

Demostración. Tenemos $S(K, f) = Sh(\lim((Q_1/Q_2, [Q_2])_n, g_Q, \mathbb{N})) = Sh(Z)$, con Z el límite inverso.

Si $S(K, f) = Sh(T)$, ocurre que $Sh(T) = Sh(Z)$. Existe, entonces, un $l \in \mathbb{N}$ y aplicaciones punteadas $\alpha : Q_1/Q_2 \rightarrow S^1$, $\beta : S^1 \rightarrow Q_1/Q_2$ tales que

$$\beta \circ \alpha \simeq g_Q^l : Q_1/Q_2 \rightarrow Q_1/Q_2$$

donde el símbolo \simeq se refiere a la relación de homotopía punteada.

Tendremos, entonces, el siguiente diagrama conmutativo (salvo homotopía punteada)

$$\begin{array}{ccc} Q_1/Q_2 & \xleftarrow{g_Q^l} & Q_1/Q_2 \\ \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \downarrow \alpha \\ S^1 & \xleftarrow{\alpha \circ \beta} & S^1 \end{array}$$

De este modo, resulta $S(K, f) = Sh(Z) = Sh(T) = Sh(S_q)$ donde S_q es el solenoide obtenido como límite inverso de

$$\dots S^1 \xrightarrow{\alpha \circ \beta} S^1 \xrightarrow{\alpha \circ \beta} S^1.$$

Pero esto, por el teorema 17 de [79], es una contradicción. \square

Corolario 4.13. El índice de un conjunto compacto, invariante y aislado de una aplicación definida localmente en un ANR localmente compacto, es el *shape* del límite inverso de una sucesión inversa $((P_n, z_n), g_n, \mathbb{N})$ donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(P_n, z_n) = (P, *)$ fijo y $g_n = g : (P, *) \rightarrow (P, *)$ fija, siendo P un poliedro finito.

El poliedro P será finito debido a que podemos conseguir un Q_1/Q_2 , ANR compacto (ver teorema 1.2, pág. 178, de [58]), que, por el teorema de West [126], tiene el tipo de homotopía de un poliedro finito. Tendremos que el índice es el *shape* de un compacto de dimensión de deformación finita.

Observaciones finales. Del último corolario se deduce que el *shape* de un espacio de dimensión de deformación infinita, como el compacto, unión punteada de esferas, $\bigvee_{j=1}^{\infty} S^j$, no será el índice de un sistema dinámico en un ANR localmente compacto. Sin embargo, la demostración del corolario 4.12 puede modificarse para ver que espacios más simples, como el pendiente hawaiano H , de dimensión 1, tampoco aparece como índice en un sistema dinámico.

Por otro lado, si la sucesión inversa de poliedros que construimos es móvil punteada y los grupos *shape* son numerables, tenemos que el índice obtenido es el *shape* de un FANR (teorema 18, pág. 235, de [81]). Parece

difícil encontrar índices que sean el *shape* de espacios movibles que no sean FANRs. En este sentido, el ejemplo dado en el corolario 4.12 es interesante ya que nos brinda un caso unidimensional, no movable, compacto, conexo y cuyos grupos *shape* son triviales.

El último corolario también puede verse como un resultado generalizado sobre la finitud del tipo del índice de Conley, ver [125].

CAPITULO II

INDICE DE PUNTO FIJO EN HIPERESPACIOS: UN INDICE DEL TIPO DE CONLEY PARA SISTEMAS SEMIDINAMICOS DISCRETOS

Resumen. Sean X un ANR métrico, localmente compacto, U un subconjunto abierto de X y $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua. El objetivo del presente capítulo es estudiar el índice de punto fijo de la aplicación que f induce en ciertos hiperespacios de X . Para cualquier conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , $K \subset U$, calcularemos este índice de punto fijo y determinaremos su significado dinámico. El valor del índice dependerá únicamente del comportamiento de f en cierta región de K , que denominaremos parte atractora de K . Nuestro índice permitirá caracterizar los compactos que aíslan a un atractor.

Por otro lado, las propiedades que demostraremos de nuestros índices nos proporcionarán algunas observaciones interesantes. Así, la conmutatividad y la invariancia por homotopías permitirán reducir el análisis de la dinámica de f en K , que puede ser complejo, al estudio de nuestro índice en otros sistemas dinámicos, eventualmente más simples.

II.1. Introducción y comentarios preliminares

La tarea de asignar a un conjunto invariante y aislado de un sistema dinámico un índice, tal como hace Conley en [25] con los sistemas dinámicos continuos, o como proponen Robbin y Salamon en [108] y, de modo más general, Mrozek en [97] con los sistemas dinámicos discretos, se sirve de la noción de *index pair*. La independencia de la elección de los *index pairs* para introducir tales índices es uno de los resultados claves en los artículos mencionados.

El lector que esté familiarizado con la teoría del grado notará que los índices de Conley tienen propiedades similares a las del índice de punto fijo.

Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua, con U un conjunto abierto y X un ANR localmente compacto. Construiremos, bajo estas hipótesis, un índice del tipo de Conley, con valores enteros, asociado a un conjunto compacto, invariante y aislado, K , utilizando el índice de punto fijo de la aplicación inducida sobre el hiperespacio de X (dotado con la métrica de Hausdorff). Nuestra construcción es completamente natural y, por las propiedades del índice de punto fijo, será independiente de las elecciones que hagamos en las definiciones. No necesitaremos utilizar *index pairs* para introducir nuestro índice, aunque sí emplearemos una clase especial de *index pairs* que nos permitirá calcularlo. Estos nuevos índices, de propiedades muy semejantes a las del índice de Conley, darán información sobre la dinámica de f en K .

A lo largo de todo el capítulo, salvo mención expresa, X denotará un ANR métrico y localmente compacto. Recalquemos algunas nociones que utilizaremos con asiduidad. La mayoría de las definiciones que siguen han sido tomadas de [97] y [26], y varias de ellas ya fueron utilizadas en el capítulo anterior.

Sea $U \subset X$ un conjunto abierto. Un *sistema semidinámico (local)* es una aplicación continua, definida localmente, $f : U \rightarrow X$. Una función $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow X$ es *solución de f por x* en $N \subset X$ si $f(\sigma(i)) = \sigma(i+1)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, $\sigma(0) = x$ y $\sigma(i) \in N$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. La *parte invariante* de N , $Inv(N, f)$, se define como el conjunto de todos los $x \in N$ que admiten una solución de f por x en N .

Un conjunto compacto $K \subset X$ es *invariante* si $f(K) = K$. Un conjunto compacto e invariante K es *aislado con respecto a f* si existe un entorno compacto N de K tal que $Inv(N, f) = K$. El entorno N es llamado *entorno aislante de K* . Diremos que K es un conjunto compacto, invariante y aislado, sin especificar la f , cuando no exista confusión posible.

Dado un ANR métrico X , con una métrica acotada d , denotamos por 2^X al hiperespacio de subconjuntos compactos no vacíos de X , dotado con la métrica de Hausdorff, d_H , definida como

$$d_H(E, F) = \inf\{\epsilon > 0 : E \subset B(F, \epsilon) \text{ y } F \subset B(E, \epsilon)\}$$

donde $B(Z, \epsilon) = \{x \in X : d(x, Z) < \epsilon\}$ para todo conjunto compacto $Z \subset X$.

Hacemos notar que la topología de 2^X no dependerá más que de la topología de X y no de la métrica d escogida.

Un *hiperespacio de desarrollo* Λ de X es cualquier subespacio cerrado de 2^X que cumpla la siguiente condición: si $C \in \Lambda$ y $D \in 2^X$ son tales que $C \subset D$ y toda componente de D corta a C , entonces $D \in \Lambda$. 2^X y el espacio $C(X)$ de subconjuntos compactos, conexos y no vacíos de X son hiperespacios de desarrollo de X .

Un espacio métrico X es *continuo-conexo* si cada par de puntos en X está contenido en un subcontinuo. X es *localmente continuo-conexo* si tiene una base de entornos abiertos que son continuos-conexos. Para demostrar esta propiedad local basta encontrar, para cada entorno U de un punto x , un entorno $V \subset U$ de x tal que cada $y \in V$ se conecta con x por un conjunto compacto conexo contenido en U (ver [26]).

El siguiente teorema, debido a D.W.Curtis, es de gran importancia en nuestra construcción.

Teorema 1.1. ([26], pág. 141). Si X es localmente continuo-conexo (conexo y localmente continuo conexo), entonces todo hiperespacio de desarrollo Λ de X es un ANR (AR). De manera recíproca, si existe un hiperespacio de desarrollo Λ tal que $C(X) \subset \Lambda$ y Λ es un ANR (AR), entonces X es localmente continuo-conexo (conexo y localmente continuo-conexo).

Para obtener más información sobre hiperespacios, se pueden ver los trabajos de Wojdyslawski [127] donde se demuestra que el hiperespacio de un continuo de Peano es un AR, o Kelley [66], que prueba que todo hiperespacio de desarrollo de un continuo de Peano es un AR. Más recientemente, Curtis [27], caracteriza ciertos hiperespacios de desarrollo de los continuos de Peano, que serán homeomorfos al cubo de Hilbert. Curtis y Schori, en [28], [30] y [29], demuestran que los hiperespacios de los continuos de Peano son cubos de Hilbert. En 1978, Kodama, Spież y Watanabe, en [67], ven que para todo espacio X compacto, Hausdorff y conexo, el hiperespacio 2^X tiene *shape* trivial. Siguiendo esta línea de resultados, Curtis, en [26], prueba el teorema 1.1. Otro trabajo de referencia sobre hiperespacios es el libro de Nadler [99].

Un sistema semidinámico $f : U \rightarrow X$ induce, de manera natural, otro sistema semidinámico $2^f : 2^U \rightarrow 2^X$.

Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f y sea N un entorno aislante de K . Consideremos un conjunto abierto W tal que $K \subset W \subset N$ y tomemos $2^f|_{2^W} : 2^W \rightarrow 2^X$. Claramente, $Fix(2^f|_{2^W}) \subset 2^K$, que es compacto, con lo que $Fix(2^f|_{2^W})$ es un subconjunto compacto de 2^W .

Por otro lado, $2^f|_{2^W}$ es una aplicación compacta porque admite una extensión evidente a 2^N , que es un conjunto compacto.

Como X es un ANR, resulta que X es localmente continuo-conexo y, por el teorema 1.1, 2^X es un ANR. Por tanto, el índice de punto fijo de $2^f|_{2^W}$ en 2^X , $i_{2^X}(2^f|_{2^W}, 2^W)$, está bien definido.

El lector interesado en la teoría del índice de punto fijo en ANRs puede acudir a los trabajos de Dold, [35] y [36], Dugundji y Granas, [37], Lefschetz, [68], [69] y [70], Dold, [35] y [36], Nussbaum [102] y [101], Brown, [22], o Granas [49], [50] y [51]. Esta teoría puede introducirse con métodos de topología diferencial y algebraica. El lector puede encontrar en los libros de Deimling, [33], o Brown, [23], por ejemplo, todas las técnicas necesarias de la teoría del grado.

Definición 1.2. Definimos el *índice de compacto fijo* del par (K, f) como

$$I_X(K, f) = i_{2^X}(2^f|_{2^W}, 2^W).$$

Observación 1.3. Por la propiedad de escisión del índice de punto fijo tenemos que $I_X(K, f)$ no depende de las elecciones del entorno aislante N de K ni del conjunto abierto W .

Observación 1.4. Resulta sencillo encontrar ejemplos donde $I_X(K, f) \neq i_X(f, W)$, el índice de punto fijo de f en W . En efecto, si consideramos un flujo π en \mathbb{R}^2 con un atractor K que es una órbita cerrada, podemos tomar $t > 0$ tal que el período de $x \in K$ no es múltiplo de t . Sea N un ANR conexo, entorno aislante de K . Si $f = \pi_t$, tenemos que $i_{\mathbb{R}^2}(f, W) = 0$ ya que el conjunto de puntos fijos es vacío, pero usando el teorema 1.1, 2^N es un

AR (ver, por ejemplo en [29], que 2^N es homeomorfo al cubo de Hilbert), con lo que, por el teorema 2.8, $I_{\mathbb{R}^2}(K, f) = 1$.

Observación 1.5. Si X no es localmente compacto, aún podemos introducir nuestro índice si suponemos que f es compacta. En este sentido, la condición de Rybakowski (ver Capítulo I ó [98], [95], [94]) se introduce para definir el índice de Conley cuando la compacidad local de X no es requerida.

Observación 1.6. Índices similares pueden ser definidos si nos restringimos a un hiperespacio de desarrollo particular de X . Al final de este capítulo presentamos los resultados que se obtienen si consideramos el hiperespacio de desarrollo $C_m(X)$ de subconjuntos compactos, no vacíos, de X con, a lo sumo, m componentes conexas.

Por otro lado, usando el hecho de que los espacios $F_k(X) \subset 2^X$ de los subconjuntos no vacíos de X consistentes en, a lo sumo, k puntos son también ANRs ([100], [88]), podemos introducir índices que detectan puntos periódicos de f . En el capítulo siguiente haremos un estudio de estos índices.

Definición 1.7. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Se dice que un conjunto compacto, invariante y aislado, $K \subset U$, es un *atractor* si existe un entorno abierto $U_0 \subset U$ de K tal que:

- i) $f^m(U_0) \subset U$ para todo $m \geq 1$.
- ii) Para todo entorno abierto V de K existe un $m(V) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_0) \subset V$ para todo $n \geq m(V)$.

Cuando calculamos el índice de punto fijo de una aplicación $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Fix(f|_W)$ es un conjunto finito de puntos fijos hiperbólicos,

$$i_{\mathbb{R}^n}(f, W) = \sum_{a \in Fix(f|_W)} sign(J(Id - f)(a))$$

donde J denota el determinante Jacobiano. Entonces cada punto fijo atractor contribuye con $+1$ en la suma anterior.

En este capítulo veremos que el índice de punto fijo en el hiperespacio no toma en cuenta los conjuntos compactos e invariantes que no son atractores.

El capítulo se divide en dos partes: la Sección II.2 se dedica al análisis de las propiedades principales del índice, como son la propiedad de Ważewski, la aditividad, la invariancia por homotopías o la conmutatividad. Se desarrollarán, también, los resultados más importantes (teorema 2.12 y teorema 2.22), que determinan la relación entre el valor numérico del índice de compacto fijo y la dinámica de f en un entorno de K . Una consecuencia sorprendente del teorema 2.22 será que el índice de punto fijo $i_{2^X}(2^f|_{2^W}, 2^W)$ es siempre mayor o igual que cero.

Desde que Wojdislawski, en 1939, demostrara que un continuo X es localmente conexo si, y sólo si, para cada entero positivo m , $C_m(X)$ es un retracto absoluto, casi nada se ha hecho acerca de estos hiperespacios. El lector puede encontrar en los trabajos de Macías, [75] y [76] algunas investigaciones recientes sobre ellos. La Sección II.3 se encarga del estudio de

índices análogos al índice de compacto fijo, pero inducidos sobre los hiperespacios de desarrollo $C_m(X)$, que ampliarán los resultados ya obtenidos en la Sección II.2 (teorema 3.4 y teorema 3.8).

Algunos ejemplos de las consecuencias de los resultados de este capítulo son los siguientes corolarios.

Corolario 1.8. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Un continuo, invariante y aislado K es un atractor si, y sólo si, $I_X(K, f) = 1$.

Corolario 1.9. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Consideremos un conjunto abierto W de modo que $cl(W)$ sea un entorno aislante de $Inv(cl(W), f)$, que suponemos minimal. Entonces W contiene un atractor si, y sólo si, $i_{2X}(2^f|_{2W}, 2^W) \neq 0$.

Corolario 1.10. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea $W \subset X$ un subconjunto abierto, tal que $cl(W)$ es un entorno aislante. Si $i_{2X}(2^f|_{2W}, 2^W) = 2^r - 1$ entonces 2^f tiene, al menos, r órbitas periódicas atractoras en 2^W .

Corolario 1.11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Si $I_{\mathbb{R}}(K, f) = 2^r - 1$, entonces K contiene al menos r órbitas periódicas.

Corolario 1.12. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado cuyas componentes conexas tienen *shape* trivial. Si $I_X(K, f) = 2^r - 1$ entonces K contiene, al menos, r órbitas periódicas.

Corolario 1.13. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea $W \subset X$ un subconjunto abierto, tal que $cl(W)$ es un entorno aislante de un conjunto compacto, invariante y aislado, K . Si el índice *shape* de (K, f) es el *shape* de un espacio punteado $(Y, *)$ (ver [97] y [108]), y $i_{2X}(2^f|_{2W}, 2^W) = I_X(K, f) = 2^r - 1$, entonces Y tiene al menos $r + 1$ componentes.

II.2. Propiedades del índice de compacto fijo y resultados principales

Comenzaremos exponiendo las principales propiedades, análogas a las del índice de Conley, de nuestro índice. Todas ellas son consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades del índice de punto fijo. Sólo la propiedad aditiva no es obvia.

Proposición 2.1. (Propiedad de Ważewski). Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Entonces $I_X(K, f) \neq 0$ implica $K \neq \emptyset$.

Proposición 2.2. (Propiedad aditiva). Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Supongamos que K es unión disjunta de dos conjuntos compactos, invariantes y aislados, K_1 y K_2 . Entonces

$$I_X(K, f) = I_X(K_1, f) + I_X(K_2, f) + I_X(K_1, f)I_X(K_2, f).$$

Demostración.

Tomemos $N = N_1 \cup N_2$ entorno aislante de K tal que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ y N_j es entorno aislante de K_j , $j = 1, 2$.

Escogemos entornos abiertos $U_1 \subset N_1$ y $U_2 \subset N_2$ de K_1 y K_2 respectivamente tal que $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Entonces,

$$I_X(K, f) = i_{2X}(2^f|_{2^{U_1 \cup U_2}}, 2^{U_1 \cup U_2})$$

y

$$I_X(K_i, f) = i_{2X}(2^f|_{2^{U_i}}, 2^{U_i}), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Sean $W_1 = 2^{U_1 \cup U_2}$ y $W_2 = 2^{U_1} \vee 2^{U_2} \vee (2^{U_1} \times 2^{U_2})$.

Sean $X_1 = 2^X$ y $X_2 = (2^X)_1 \vee (2^X)_2 \vee (2^X \times 2^X)$.

Consideremos la aplicación $i_* : W_1 \rightarrow W_2$ definida como sigue:

Si $K'_j \subset U_j$, entonces $i_*(K'_j) = K'_j$, $j = 1, 2$. Por otro lado, si $K' \in W_1$ es tal que $K' \cap U_1 = K'_1 \neq \emptyset$ y $K' \cap U_2 = K'_2 \neq \emptyset$, entonces $i_*(K') = (K'_1, K'_2) \in 2^{U_1} \times 2^{U_2} \subset W_2$.

Resulta sencillo ver que i_* es un homeomorfismo.

Sea

$$F_* = 2^f \vee 2^f \vee (2^f \times 2^f) : W_2 \rightarrow X_2$$

y sea

$$j_* : X_2 \rightarrow X_1$$

definida así:

$j_*(K'_j) = K'_j$ si $K'_j \in (2^X)_j$ y $j_*(K'_1, K'_2) = K'_1 \cup K'_2$ para $(K'_1, K'_2) \in 2^X \times 2^X$.

Ocurre que $2^f = j_* \circ F_* \circ i_*$.

Denotamos

$$f_1 = i \circ i_* : W_1 \rightarrow X_2$$

donde $i : W_2 \rightarrow X_2$ es la inclusión y

$$f_2 = 2^f \circ i_*^{-1} : W_2 \rightarrow X_1.$$

Entonces, $S = \{x \in f_1^{-1}(W_2) : (f_2 \circ f_1)(x) = x\} = \{x \in W_1 : 2^f(x) = x\}$ es un conjunto compacto.

Usando la propiedad commutativa del índice de punto fijo aplicada a f_1 y f_2 ,

$$\begin{aligned} i_{2X}(2^f, 2^{U_1 \cup U_2}) &= i_{X_1}(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(W_2)) = i_{X_2}(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(W_1)) = \\ &= i_{(2^X)_1 \vee (2^X)_2 \vee (2^X \times 2^X)}(i \circ i_* \circ 2^f \circ i_*^{-1}, (2^f \circ i_*^{-1})^{-1}(2^{U_1 \cup U_2})). \end{aligned}$$

Como $2^f = j_* \circ F_* \circ i_*$,

$$i \circ i_* \circ 2^f \circ i_*^{-1} |_{i_*((2^f)^{-1}(W_1))} = i \circ i_* \circ j_* \circ F_* |_{F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))}.$$

Además,

$$i \circ i_* \circ j_* \circ F_* |_{F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))} = F_* |_{F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))}.$$

De modo que

$$\begin{aligned} & i_{(2^X)_1 \vee (2^X)_2 \vee (2^X \times 2^X)}(i \circ i_* \circ 2^f \circ i_*^{-1}, (2^f \circ i_*^{-1})^{-1}(2^{U_1 \cup U_2})) = \\ & = i_{(2^X)_1 \vee (2^X)_2 \vee (2^X \times 2^X)}(i \circ i_* \circ j_* \circ F_*, F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))) = \\ & = i_{(2^X)_1 \vee (2^X)_2 \vee (2^X \times 2^X)}(F_*, F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))) = \\ & = i_{X_2}(F_*, F_*^{-1}(j_*^{-1}(W_1))) = i_{X_2}(F_*, W_2) = \\ & = i_{X_2}(F_* |_{2^{U_1}}, 2^{U_1}) + i_{X_2}(F_* |_{2^{U_2}}, 2^{U_2}) + i_{X_2}(F_* |_{2^{U_1} \times 2^{U_2}}, 2^{U_1} \times 2^{U_2}) = \\ & = i_{2^X}(2^f |_{2^{U_1}}, 2^{U_1}) + i_{2^X}(2^f |_{2^{U_2}}, 2^{U_2}) + i_{2^X \times 2^X}(2^f \times 2^f |_{2^{U_1} \times 2^{U_2}}, 2^{U_1} \times 2^{U_2}) = \\ & = i_{2^X}(2^f |_{2^{U_1}}, 2^{U_1}) + i_{2^X}(2^f |_{2^{U_2}}, 2^{U_2}) + i_{2^X}(2^f |_{2^{U_1}}, 2^{U_1}) i_{2^X}(2^f |_{2^{U_2}}, 2^{U_2}). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 2.3. (Propiedad conmutativa). Sean X, Y ANRs métricos y localmente compactos. Sean

$$\varphi : U \subset X \rightarrow Y$$

$$\psi : V \subset Y \rightarrow X$$

aplicaciones definidas localmente.

Tomemos $f = \psi \circ \varphi$ y $g = \varphi \circ \psi$. Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , entonces $\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a g y $I_X(K, f) = I_Y(\varphi(K), g)$.

Demostración. Es resultado conocido que $\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a g (ver teorema 1.12 de [97]). Tendremos que

$$\begin{aligned} I_X(K, f) &= i_{2^X}(2^f, 2^{U_1}) = i_{2^X}(2^\psi \circ 2^\varphi, (2^\varphi)^{-1}(2^{V_1})) = \\ &= i_{2^Y}(2^\varphi \circ 2^\psi, (2^\psi)^{-1}(2^{U_1})) = i_{2^Y}(2^g, 2^{V_1}) = I_Y(\varphi(K), g). \end{aligned}$$

donde $cl(U_1)$ es un entorno aislante de K y $cl(V_1)$ es un entorno aislante de $\varphi(K)$. La segunda y cuarta igualdades son evidentes, y la tercera se debe a la propiedad conmutativa del índice de punto fijo aplicada a

$$2^\varphi : 2^{U_1} \rightarrow 2^Y \text{ y } 2^\psi : 2^{V_1} \rightarrow 2^X. \quad \square$$

Corolario 2.4. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Supongamos que $f(X) \subset Y$, donde $Y \subset X$ es un ANR localmente compacto. Si K es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , entonces K es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a $f|_Y$ y $I_X(K, f) = I_Y(K, f|_Y)$.

Proposición 2.5. (Propiedad de invariancia por homotopías). Sea $f : U \times \Lambda \rightarrow X$ una aplicación continua, tal que U es un subconjunto abierto de X y $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto. Supongamos que N es un entorno aislante para cada aplicación $f_\lambda : U \rightarrow X$. Entonces $I_X(Inv(N, f_\lambda), f_\lambda)$ no depende de $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Sea U_0 un conjunto abierto tal que $Inv(N, f_\lambda) \subset U_0 \subset N$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Consideremos la aplicación f , restringida en su dominio,

$$f : U_0 \times \Lambda \rightarrow X.$$

Como $f_\lambda \simeq f_{\lambda'}$, entonces $2^{f_\lambda} \simeq 2^{f_{\lambda'}}$ para todo $\lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Tenemos

$$2^{f_\lambda} : 2^{U_0} \rightarrow 2^X$$

con $2^{f_\lambda}(K) = f_\lambda(K)$.

Definimos la aplicación

$$F : 2^{U_0} \times \Lambda \rightarrow 2^X$$

como $F(K, \lambda) = 2^{f_\lambda}(K) = f_\lambda(K)$. Al ser f continua, resulta sencillo ver que F es continua.

Ocurre que

$$S_\lambda = Fix(2^{f_\lambda}) \subset 2^{Inv(N, f_\lambda)} \subset 2^{U_0} \subset 2^N$$

es un conjunto compacto para todo $\lambda \in \Lambda$. De hecho, el conjunto $\Sigma = \{(K, \lambda) \in 2^{U_0} \times \Lambda : F(K, \lambda) = K\} \subset 2^N \times \Lambda$ es compacto. Además, resulta claro que la homotopía F es compacta (se puede extender su dominio al compacto $2^N \times \Lambda$). En estas condiciones, podremos aplicar la propiedad de invariancia por homotopías del índice de punto fijo en ANRs a nuestra homotopía F , y tendremos que $I_X(Inv(N, f_\lambda), f_\lambda)$ no depende de $\lambda \in \Lambda$. \square

El siguiente resultado que probaremos constituye una primera aproximación al significado dinámico completo de nuestro índice. La demostración utiliza un teorema, debido a H.Steinlein (ver [102] y [122]), que enunciamos a continuación.

Teorema 2.6. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea $H \subset U$ un conjunto abierto tal que f^m está definida sobre H para $m = p^t$ con p primo. Supongamos que

$$\Sigma = \{x \in H : f^m(x) = x\}$$

es compacto, $f(\Sigma) \subset \Sigma$ y f es compacta en algún entorno de Σ . Entonces

$$i_X(f^m, H) \equiv i_X(f, H) \pmod{p}.$$

Definición 2.7. ([94], pág 181). Sea $f : Z \rightarrow Z$ una aplicación continua definida en un espacio métrico. Decimos que f es de atracción compacta si es localmente compacta y existe un conjunto compacto $A \subset Z$ tal que para todo $z \in Z$

$$cl(\{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}^+\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Teorema 2.8. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Si $K \subset U$ es un atractor conexo, entonces $I_X(K, f) = 1$.

Demostración. Tómesese un conjunto abierto y conexo U_0 como en la definición de atractor. Por el teorema 1.1, 2^{U_0} es un AR.

Sean q primo y t tales que $p = q^t \geq m(U_0)$. Entonces

$$(2^f)^p = 2^{f^p} : 2^{U_0} \rightarrow 2^{U_0}.$$

Resulta sencillo ver que estamos en las hipótesis del teorema de Steinlein para $H = 2^{U_0}$.

Por otro lado, tendremos

$$i_{2^X}((2^f)^p, 2^{U_0}) = i_{2^{U_0}}((2^f)^p, 2^{U_0}) = \Lambda((2^f)^p) = 1$$

donde $\Lambda((2^f)^p)$ denota el número de Lefschetz de $(2^f)^p$ (ver [94]).

La primera igualdad es consecuencia de la propiedad conmutativa de nuestro índice. La segunda es resultado de aplicar la propiedad de normalización del índice de punto fijo (ver [94]) a $(2^f)^p : 2^{U_0} \rightarrow 2^{U_0}$, que es de atracción compacta. Veamos esto último. Resulta evidente que $(2^f)^p$ es localmente compacta. Además, por la definición de atractor, dado $N \subset U_0$ un entorno compacto de K , para todo $x \in 2^{U_0}$ se tiene que

$$cl(\{(2^f)^{np}(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}) \cap 2^N \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $(2^f)^p : 2^{U_0} \rightarrow 2^{U_0}$ es de atracción compacta.

Queda por ver que $\Lambda((2^f)^p) = 1$. Al ser 2^{U_0} contractible, tendremos que $H_n(2^{U_0}) = 0$ para todo $n \geq 1$ mientras que $H_0(2^{U_0}) = \mathbb{Q}$. Es claro, entonces, que

$$\Lambda((2^f)^p) = \Lambda((2^f)_*^p) = (-1)^0 tr(((2^f)_*^p)_0)$$

siendo $((2^f)_*^p)_0 : H_0(2^{U_0}) \rightarrow H_0(2^{U_0})$.

Resulta inmediato que $tr(((2^f)_*^p)_0) = 1$.

Así, aplicando el teorema de Steinlein a $2^f : 2^U \rightarrow 2^X$ con $H = 2^{U_0}$, tendremos que para todo primo q

$$1 = i_{2^X}((2^f)^p, 2^{U_0}) \equiv I_X(K, f) \pmod{q}.$$

Entonces $I_X(K, f) = 1$. \square

Por el último teorema y la propiedad aditiva se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.9. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ unión disjunta de n atractores conexos. Entonces $I_X(K, f) = 2^n - 1$.

Sea K un conjunto compacto, invariante con respecto al sistema semidinámico $f : U \rightarrow X$. Supongamos que K tiene un número finito de componentes K_1, K_2, \dots, K_p . Como $f(K) = K$, f produce una permutación de los elementos de esta descomposición de K . Entonces podemos ordenar las componentes de K del siguiente modo:

$$K = K_{1,1} \cup K_{1,2} \cup \dots \cup K_{1,k_1} \cup K_{2,1} \cup K_{2,2} \cup \dots \cup K_{2,k_2} \cup \dots \cup K_{r,1} \cup K_{r,2} \cup \dots \cup K_{r,k_r}$$

donde $k_1 + k_2 + \dots + k_r = p$, y para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, k_i - 1\}$ tenemos que $f(K_{i,j}) = K_{i,j+1}$ y $f(K_{i,k_i}) = K_{i,1}$.

Definición 2.10. En la situación arriba descrita se dice que f *descompone a K en r ciclos*. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, el correspondiente k_i es llamado *longitud del ciclo i* .

Lema 2.11. Sea K un atractor para el sistema semidinámico $f : U \rightarrow X$. Como X es localmente conexo, K tiene un número finito de componentes.

Demostración. En efecto, tomemos un entorno aislante $N = N_1 \cup \dots \cup N_p$ de K donde N_i es conexo y $N_i \cap K \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, p$. Consideremos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $f^n(N) \subset N$. Es claro que para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ existe un $p(i) \in \{1, \dots, p\}$ tal que $(f^{n_0})^{p(i)}(N_i) \subset N_i$. Si $K^i = K \cap N_i$, entonces $(f^{n_0})^{p(i)}(K^i) = K^i$ y $K^i \subset \text{Inv}(N_i, (f^{n_0})^{p(i)}) \subset N_i$. Por otra parte, si $x \in \text{Inv}(N_i, (f^{n_0})^{p(i)})$, como $f^{n_0}(N) \subset N$, tenemos que $x \in \text{Inv}(N, f) = K$. En consecuencia, $x \in K^i$, $K^i = \text{Inv}(N_i, (f^{n_0})^{p(i)})$ y K^i es conexo. \square

Hacemos observar que si X es un espacio métrico y no es localmente conexo, existen ejemplos de atractores con infinitas componentes conexas (ver [47]).

Teorema 2.12. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un atractor. Entonces

$$I_X(K, f) = 2^r - 1$$

donde r es el número de ciclos de K .

Demostración. Consideremos la descomposición en ciclos de K

$$K = K_{1,1} \cup K_{1,2} \cup \dots \cup K_{1,k_1} \cup K_{2,1} \cup K_{2,2} \cup \dots \cup K_{2,k_2} \cup \dots \cup K_{r,1} \cup K_{r,2} \cup \dots \cup K_{r,k_r}$$

donde para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, k_i - 1\}$, se tiene $f(K_{i,j}) = K_{i,j+1}$ y $f(K_{i,k_i}) = K_{i,1}$.

Por la propiedad aditiva, es suficiente ver que

$$I_X(K_{i,1} \cup K_{i,2} \cup \dots \cup K_{i,k_i}, f) = 1$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Entonces podemos suponer que K tiene un único ciclo $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k$.

Sea N un entorno aislante de K como en el lema 2.11 y sea $W \subset N$ un abierto que contiene a K . W es unión de componentes abiertas, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$.

$$2^W = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} W_A$$

donde

$$W_A = \{C \in 2^W : C \cap W_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap W_j = \emptyset \text{ si } j \notin A\}.$$

Resulta sencillo ver que W_A es homeomorfo al producto $\prod_{j \in A} 2^{W_j}$, con lo que se tiene que las componentes de 2^W son ARs ya que el producto finito de ANRs (ARs) es ANR (AR).

Sea $m > k$ cualquier primo tal que $f^m(W) \subset W$. Ocurre, por las propiedades conmutativa y de normalización del índice de punto fijo, que

$$i_{2^X}(2^{f^m}, 2^W) = i_{2^W}(2^{f^m}, 2^W) = \Lambda(2^{f^m}).$$

Para calcular $\Lambda(2^{f^m})$ debemos fijarnos en

$$H_0(2^W) = \mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q} \text{ con } 2^k - 1 \text{ generadores.}$$

Los generadores de $H_0(2^W)$ se corresponden con las componentes de 2^W . Supongamos que

$$f^m(K_{i_1} \cup \dots \cup K_{i_p}) = K_{i_1} \cup \dots \cup K_{i_p}$$

con $p < k$.

Entonces $\{K_{i_1}, \dots, K_{i_p}\}$ es un ciclo o unión de ciclos para f^m y

$$pm = nk$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como m es primo, $m > k$, tenemos que $n = n_1m$ y $p = n_1k$. Entonces $n_1 = 1$, $n = m$ y $p = k$, lo cual es una contradicción.

En consecuencia,

$$\{K_{i_1}, \dots, K_{i_p}\} = \{K_1, \dots, K_k\}$$

y el generador de $H_0(W_{\{1, \dots, k\}})$ produce un número distinto de cero en la traza de la matriz de $(2_*^{f^m})_0$, que tendrá la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Por el teorema 2.6,

$$\begin{aligned} i_{2X}(2^{f^m}, 2^W) &= i_{2W}(2^{f^m}, 2^W) = \\ &= \Lambda(2^{f^m}) = (-1)^0 \text{tr}((2_*^{f^m})_0) = 1 \equiv I_X(K, f) \pmod{m}. \end{aligned}$$

Como $m > k$ es arbitrario, se tiene $I_X(K, f) = 1$. \square

Para calcular el índice de compacto fijo en situaciones más generales recordamos, a continuación, la noción de *index pair*, introducida en el capítulo anterior, pero ligeramente modificada. Cierta tipo de *index pairs*, los *index pairs* regulares, será de gran utilidad.

Definición 2.13. ([94]). Sea $f : U \subset Z \rightarrow Z$ una aplicación continua, con U un subconjunto abierto del espacio métrico Z . Consideremos un conjunto compacto, invariante y aislado, K , y un entorno aislante suyo N . Supongamos que (P_1, P_2) es un par de subconjuntos cerrados de N tales que $P_2 \subset P_1$. El par (P_1, P_2) es un *index pair* para K si se dan las siguientes condiciones:

- i) $P_1 \cap f(P_2) \subset P_2$,
- ii) $f(P_1 \setminus P_2) \subset P_1$,
- iii) $K = \text{Inv}(P_1 \setminus P_2, f) \subset \text{Int}(P_1 \setminus P_2)$.

Diremos que el *index pair* (P_1, P_2) es *regular* si

- a) Existe un conjunto V , abierto en P_1 , tal que $P_2 \subset V$ y $f(V \setminus P_2) \subset P_2$

y

- b) $cl(f(P_2) \setminus P_1) \cap cl(P_1 \setminus P_2) = \emptyset$.

Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Consideremos el sistema semidinámico inducido $2^f : 2^U \subset 2^X \rightarrow 2^X$. Si K es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f y N es un entorno aislante de K , entonces 2^N es un entorno aislante de $\text{Inv}(2^N, 2^f) = 2^K$.

Proposición 2.14. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea $P = (P_1, P_2)$ un par compacto de subconjuntos de X .

Consideremos el conjunto

$$\bigcap P_2 = \{C \in 2^{P_1} : C \cap P_2 \neq \emptyset\}.$$

Si (P_1, P_2) es un *index pair* (*index pair* regular) para un conjunto compacto, invariante y aislado, K , entonces $(2^{P_1}, \bigcap P_2)$ es un *index pair* (*index pair* regular) para 2^K .

Demostración. Resulta inmediato demostrar que el par de compactos $(2^{P_1}, \bigcap P_2)$ es un *index pair* para el conjunto compacto, invariante y aislado, $2^K = \text{Inv}(2^{P_1}, 2^f) \subset \text{int}(2^{P_1})$, esto es, se cumplen las propiedades:

- i) Dado $C \in \bigcap P_2$ con $2^f(C) \in 2^{P_1}$, entonces $2^f(C) \in \bigcap P_2$.
- ii) Sea $C \in 2^{P_1}$, $2^f(C) \notin 2^{P_1}$. Entonces $C \in \bigcap P_2$.
- iii) $2^K = \text{Inv}(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2, 2^f) \subset \text{int}(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2)$.

Veamos que, si (P_1, P_2) es un *index pair* regular, entonces $(2^{P_1}, \bigcap P_2)$ es regular.

a) Existe un V' abierto en 2^{P_1} tal que $\bigcap P_2 \subseteq V'$ y $2^f(V' \setminus \bigcap P_2) \subset \bigcap P_2$.

Sea $V' = \bigcap V = \{C \in 2^{P_1} : C \cap V \neq \emptyset\} \subset 2^{P_1}$. Hemos denotado por V al abierto de P_1 que cumple la condición a) de regularidad en el par (P_1, P_2) . Ocurre que V' es un abierto de 2^{P_1} .

Como $P_2 \subset V$, entonces $\bigcap P_2 \subset V'$.

Por otro lado, dado $C \in V' \setminus \bigcap P_2$, ocurre que existe un $x \in C$ tal que $x \in V \setminus P_2$. Esto implica que $f(x) \in P_2$. Además, para todo $x \in C$ es claro que $x \in P_1 \setminus P_2$, con lo que $f(x) \in P_1$. Así, $2^f(C) \in \bigcap P_2$.

b) $cl(2^f(\bigcap P_2) \setminus 2^{P_1}) \cap cl(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2) = \emptyset$.

Si existe un $D_1 \in cl(2^f(\bigcap P_2) \setminus 2^{P_1}) \cap cl(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2)$, entonces $D_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{2^f(C_n)\}_n$ con $C_n \in \bigcap P_2 \subset 2^{P_1}$, $2^f(C_n) \notin 2^{P_1}$.

Como $\bigcap P_2$ es compacto, existe $\{C_{n_l}\}_l \rightarrow D_0 \in \bigcap P_2$. Entonces

$$\{2^f(C_{n_l})\}_l \rightarrow 2^f(D_0), \quad \{2^f(C_{n_l})\}_l \rightarrow D_1$$

de modo que $2^f(D_0) = D_1$, $D_0 \in \bigcap P_2$.

Como $D_1 \in 2^{P_1}$, entonces $D_1 \in \bigcap P_2$.

Resulta sencillo demostrar que existe una sucesión $\{x_{n_l}\}_l$ con $x_{n_l} \in C_{n_l} \cap P_2$ para todo l , tal que $f(x_{n_l}) \in f(C_{n_l}) \setminus P_1$, y $\{x_{n_l}\}_l \rightarrow x_0 \in D_0$.

Tendremos que $x_0 \in D_0 \cap P_2$.

$$\{f(x_{n_l})\}_l \rightarrow f(x_0) \in f(D_0) = D_1 \subset P_1.$$

Entonces $f(x_0) \in P_2$.

Sea $x_1 = f(x_0)$. Tenemos que $x_1 \in cl(f(P_2) \setminus P_1)$ ya que

$$x_1 = f(x_0) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \{f(x_{n_l})\}_l, \quad f(x_{n_l}) \notin P_1, \quad x_{n_l} \in P_2.$$

Por otro lado, al ser $D_1 \in cl(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2)$, $D_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{C'_n\}_n$ con $C'_n \in 2^{P_1} \setminus \bigcap P_2$, para todo n .

Ocurre que $x_1 = f(x_0) \in D_1$ cumple $x_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{x'_n\}_n$ con $x'_n \in C'_n$, esto es, $x'_n \in P_1 \setminus P_2$, de modo que $x_1 \in cl(P_1 \setminus P_2)$.

En consecuencia, $x_1 \in cl(f(P_2) \setminus P_1) \cap cl(P_1 \setminus P_2)$. Pero esto es una contradicción al ser $P = (P_1, P_2)$ regular. Por tanto no existe $D_1 \in cl(2^f(\bigcap P_2) \setminus 2^{P_1}) \cap cl(2^{P_1} \setminus \bigcap P_2)$. \square

Proposición 2.15. En las condiciones de la proposición anterior, si P_1 es localmente continuo-conexo, entonces 2^{P_1} y $\bigcap P_2$ son unión finita, disjunta, de ARs.

Demostración. Veamos que 2^{P_1} es una unión finita de ARs. Como P_1 tiene una cantidad finita de componentes (es compacto y localmente arcoconexo) basta, con la ayuda del teorema 1.1, aplicar el mismo argumento del teorema 2.12 para 2^W .

La demostración para $\bigcap P_2$ se apoya en el hecho de que $\bigcap P_2$ es un hiperespacio de desarrollo de P_1 .

En efecto, si $P_1 = P_{11} \cup P_{12} \cup \dots \cup P_{1k}$ es la descomposición en componentes conexas de P_1 , entonces

$$2^{P_1} = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} P_{1A}$$

donde

$$P_{1A} = \{C \in 2^{P_1} : C \cap P_{1j} \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap P_{1j} = \emptyset \text{ si } j \notin A\}$$

son ARs, y

$$\bigcap P_2 = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} (P_{1A} \cap \bigcap P_2)$$

es una unión finita de ANRs ($\bigcap P_2$ es un ANR). De hecho, cada conjunto de la unión distinto de vacío es contractible. Para demostrar esto basta ver que, dado $A \subset \{1, \dots, k\}$, existe una homotopía

$$H_A : (P_{1A} \cap \bigcap P_2) \times I \rightarrow P_{1A} \cap \bigcap P_2$$

con $H_A(0) = id$ y $H_A(1) = \bigcup_{j \in A} P_{1j}$ constante, que ‘expande’ cualquier punto de $P_{1A} \cap \bigcap P_2$ al punto $\bigcup_{j \in A} P_{1j} \in P_{1A} \cap \bigcap P_2$. Demostremos la existencia de H_A .

Sabemos que existe una homotopía $G_A : P_{1A} \times I \rightarrow P_{1A}$ tal que $G_A(0) = id$ y $G_A(1) = \bigcup_{j \in A} P_{1j}$ constante.

Definimos entonces

$$H_A(K_0, t_0) = \bigcup_{t \in [0, t_0]} G_A(K_0, t).$$

Resulta $H_A(K_0, 0) = G_A(K_0, 0) = K_0$ y $H_A(K_0, 1) = \bigcup_{t \in [0, 1]} G_A(K_0, t) = \bigcup_{j \in A} P_{1j}$.

Queda por demostrar que H_A está bien definida y es continua. Para ello bastará ver:

a) $H_A(K, t)$ es un subconjunto compacto de X para todo $K \in P_{1A} \cap \bigcap P_2$ y para todo $t \in I$.

b) H_A es continua.

Probemos a). Sean $K_0 \in P_{1A} \cap \bigcap P_2$ y $t_0 \in [0, 1]$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto del conjunto $H_A(K_0, t_0) \subset X$. Ocurre que $G_A(K_0, t)$ es un subconjunto compacto de X para todo $t \in [0, t_0]$. Existe entonces una unión finita de abiertos de \mathcal{U} , que denotaremos por $\mathcal{U}(K_0, t)$, que recubre a $G_A(K_0, t)$.

Es claro que $G_A(K_0 \times [0, t_0]) \subset P_{1A}$ es un subconjunto compacto de 2^X , de modo que cualquier recubrimiento abierto suyo tendrá un subcubrimiento finito. Consideremos el recubrimiento abierto $\{2^{\mathcal{U}(K_0, t)}\}_{t \in [0, t_0]}$ de $G_A(K_0 \times [0, t_0])$. Entonces $G_A(K_0 \times [0, t_0]) \subset \bigcup_{t \in [0, t_0]} 2^{\mathcal{U}(K_0, t)}$. Como existe un subcubrimiento finito,

$$G_A(K_0 \times [0, t_0]) \subset \bigcup_{i=1}^p 2^{\mathcal{U}(K_0, t_i)}.$$

Esto quiere decir que cada $G_A(K_0, t)$, que es un subconjunto compacto de X , cumple

$$G_A(K_0, t) \subset \mathcal{U}(K_0, t_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, p\}$$

De manera que $H_A(K_0, t_0) \subset X$ cumple

$$H_A(K_0, t_0) = \bigcup_{t \in [0, t_0]} G_A(K_0, t) \subset \bigcup_{i=1}^p \mathcal{U}(K_0, t_i).$$

siendo $\mathcal{U}(K_0, t_i)$ una unión finita de abiertos de \mathcal{U} para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. Queda demostrado que $H_A(K_0, t_0)$ es compacto.

Por otra parte, por la definición de H_A , resulta evidente que $H_A(K, t) \in P_{1A} \cap \bigcap P_2$, para todo $K \in P_{1A} \cap \bigcap P_2$, $t \in I$.

Probemos b). Resulta inmediato, a partir de la continuidad de G_A y de la definición de métrica de Hausdorff

$$d_H(E, F) = \text{Max}\{\text{Sup}_{e \in E}\{d(e, F)\}, \text{Sup}_{f \in F}\{d(f, E)\}\}.$$

Sea $(K_0, t_0) \in (P_{1A} \cap \bigcap P_2) \times I$ y sea $\epsilon > 0$. Denotamos por d' a la métrica inducida en el espacio producto $P_{1A} \times I$. La aplicación continua $G_A : P_{1A} \times I \rightarrow P_{1A}$ es uniformemente continua ($P_{1A} \times I$ es un espacio compacto), de modo que existe un $\delta > 0$ tal que si $d'((K, t), (K', t')) < \delta$ entonces $d_H(G_A(K, t), G_A(K', t')) < \epsilon$.

Sea $(K_1, t_1) \in (P_{1A} \cap \bigcap P_2) \times I$, de modo que

$$d'((K_1, t_1), (K_0, t_0)) = \sqrt{(d_H(K_1, K_0))^2 + (t_1 - t_0)^2} < \delta.$$

Dado $x \in H_A(K_1, t_1)$, entonces $x \in G_A(K_1, t_x)$ con $t_x \leq t_1$. Consideremos $t'_x \leq t_0$ tal que $d'((K_1, t_x), (K_0, t'_x)) < \delta$. Entonces

$$d(x, H_A(K_0, t_0)) \leq d(x, G_A(K_0, t'_x)) \leq d_H(G_A(K_1, t_x), G_A(K_0, t'_x)) < \epsilon.$$

De igual modo se ve que $d(x, H_A(K_1, t_1)) < \epsilon$ para todo $x \in H_A(K_0, t_0)$.

Por consiguiente, resulta inmediato que $d_H(H_A(K_0, t_0), H_A(K_1, t_1)) < \epsilon$.

□

Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, con $P = (P_1, P_2)$ un *index pair* para K tal que P_1 es unión finita de componentes conexas.

Podemos ordenarlas como sigue,

$$P_1 = P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0} \cup \dots \cup P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l$$

donde

- a) $P_1^j \cap K \neq \emptyset$ y $P_1^j \cap P_2 = \emptyset$ si $j \leq k_0$.
- b) $P_1^j \cap P_2 \neq \emptyset$ si $j \geq k_1$.

Lema 2.16. Bajo las hipótesis anteriores, tenemos:

- 1) Si $x \in P_1^i$, $k_1 \leq i \leq l$ y $f(x) \in P_1^j$, entonces $k_1 \leq j \leq l$.
- 2) Si $x \in P_1^i$, $1 \leq i \leq k_0$, entonces $f(x) \in P_1^j$, $1 \leq j \leq k_0$.

Demostración. 1) Si $f(P_1^i) \subset P_1^j$, entonces $f(y) \in P_1^j \cap P_2$ para todo $y \in P_1^i \cap P_2$.

Si $P_1^i \setminus f^{-1}(P_1^j) \neq \emptyset$, como P_1^i es conexo, existe $p \in cl_{P_1^i}(P_1^i \setminus f^{-1}(P_1^j)) \cap (f^{-1}(P_1^j) \cap P_1^i)$.

Es sencillo ver que $p \in P_2 \cap f^{-1}(P_1^j)$. Entonces $f(p) \in P_2 \cap P_1^j$.

2) Sea $P_1^{i_0}$ con $i_0 \leq k_0$ y tal que $f(P_1^{i_0}) \subset P_1^{j_0}$ para $j_0 \in \{k_1, \dots, l\}$. Por

1) existe $i_1 \leq k_0$ tal que $(P_1^{i_1} \cap K) \cap f(P_1) = \emptyset$. Esto es una contradicción. \square

Observación 2.17. En las hipótesis del último lema,

$$(P'_1, P'_2) = (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0} \cup P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l, P_2)$$

es también un *index pair* (regular si lo es (P_1, P_2)). Resulta que

$$K = [K \cap (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0})] \cup [K \cap (P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l)]$$

y

$$f(K \cap (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0})) = K \cap (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0}),$$

$$f(K \cap (P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l)) = K \cap (P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l).$$

Denotamos $K \cap (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0}) = K^A$. Es claro que $K \cap (P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l) = K \setminus K^A$.

K^A y $K \setminus K^A$ son conjuntos compactos, invariantes y aislados. Llamaremos al atractor K^A la *parte atractora* de K .

Hacemos notar que cada componente conexa de $P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0}$ contendrá una, y sólo una, componente conexa de K^A (ver lema 2.11).

Por otra parte, aunque la definición de K^A se hace en función de un *index pair*, más adelante veremos que este conjunto no depende del *index pair* elegido para construirlo.

A continuación enunciamos, ligeramente debilitado, un teorema debido a Mrozek (ver teorema 4 de [94]) que necesitaremos más adelante.

Teorema 2.18. Sea Z un ANR métrico y sea $f : Z \rightarrow Z$ una aplicación de atracción compacta. Si (M, N) es un *index pair* regular para el conjunto compacto, invariante y aislado, $Inv(M \setminus N, f)$, y M, N son ANRs, entonces $I_{M,N} = (i_{M,N})_*^{-1} \circ (f_{M,N})_*$ es un endomorfismo de Leray y

$$i_Z(f, int(M \setminus N)) = \Lambda(I_{M,N}).$$

Llamamos $i_{M,N} : (M, N) \rightarrow (M \cup f(N), N \cup f(N))$ a la aplicación inclusión entre los pares (M, N) y $(M \cup f(N), N \cup f(N))$. De igual modo, hemos

denotado por $f_{M,N} : (M, N) \rightarrow (M \cup f(N), N \cup f(N))$ a la aplicación f entre dichos pares. $\Lambda(I_{M,N})$ es el número de Lefschetz de $I_{M,N}$.

Teorema 2.19. Sea $f : X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, que admite un *index pair* regular $P = (P_1, P_2)$ con P_1 localmente continuo-conexo. Supongamos que 2^f es de atracción compacta. Entonces,

$$I_X(K, f) = I_X(K^A, f) = 2^q - 1$$

donde q es el número de ciclos de K^A .

Demostración. Mantendremos la notación de la última observación. Utilizando la propiedad aditiva, es suficiente ver que $I_X(K \setminus K^A, f) = 0$.

$P' = (P'_1, P'_2) = (P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l, P_2)$ es un *index pair* regular para $K \setminus K^A$.

Entonces $(2^{P'_1}, \bigcap P'_2)$ es un *index pair* regular para $2^{K \setminus K^A}$, que es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$.

$2^{P'_1}$ y $\bigcap P'_2$ son ANRs compactos (unión finita de ARs).

Consideremos la sucesión de homologías singulares del par $(2^{P'_1}, \bigcap P'_2)$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_p(\bigcap P'_2) \rightarrow H_p(2^{P'_1}) \rightarrow H_p(2^{P'_1}, \bigcap P'_2) \rightarrow H_{p-1}(\bigcap P'_2) \rightarrow \\ \cdots \rightarrow H_1(\bigcap P'_2) \rightarrow H_1(2^{P'_1}) \rightarrow H_1(2^{P'_1}, \bigcap P'_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(\bigcap P'_2) \rightarrow H_0(2^{P'_1}) \rightarrow H_0(2^{P'_1}, \bigcap P'_2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Como $H_p(2^{P'_1}) = H_p(\bigcap P'_2) = 0$ para todo $p \geq 1$, entonces tenemos $H_p(2^{P'_1}, \bigcap P'_2) = 0$ para todo $p > 1$.

Además, $2^{P'_1} / \bigcap P'_2$ es un AR al ser unión punteada de ARs, con lo que

$$0 = H_1(2^{P'_1} / \bigcap P'_2, *) \equiv H_1(2^{P'_1}, \bigcap P'_2).$$

De manera análoga

$$0 = \widetilde{H}_0(2^{P'_1} / \bigcap P'_2) \equiv H_0(2^{P'_1} / \bigcap P'_2, *) \equiv H_0(2^{P'_1}, \bigcap P'_2).$$

Ahora, por el teorema 2.18 aplicado al par $(2^{P'_1}, \bigcap P'_2)$ y a la aplicación 2^f ,

$$I_X(K \setminus K^A, f) = i_{2^X}(2^f, \text{int}(2^{P'_1} \setminus \bigcap P'_2)) = \Lambda(I_{2^{P'_1}, \bigcap P'_2}) = 0. \quad \square$$

Sea $Q = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$ el cubo de Hilbert. Tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.20. Sea $f : U \subset Q \rightarrow Q$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, que admite un *index pair* regular $P = (P_1, P_2)$ tal que P_1 es localmente continuo-conexo. Entonces

$$I_X(K, f) = I_X(K^A, f) = 2^q - 1$$

donde q es el número de ciclos de K^A .

Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Si no imponemos condiciones adicionales, el cálculo de nuestro índice $I_X(K, f)$ va a requerir la extensión del sistema semidinámico f a Q , de ahí el corolario anterior y los próximos resultados.

Aplicaremos las técnicas del lema 5.1 de [125], ya utilizadas en el capítulo anterior, con el fin de asegurar, para todo conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a un sistema semidinámico definido en Q , la existencia de *index pairs* (tal como se han definido en este capítulo) adecuados.

Sea $f : Q \rightarrow Q$ una aplicación continua. Dado $\epsilon > 0$, consideremos, tal como hicimos en la Sección I.4,

$$\mathcal{A}(\epsilon) = \{A \cap Q, A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i : \forall i \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ con } A_i = k\epsilon \text{ ó } A_i = [k\epsilon, (k+1)\epsilon]\}$$

y las aplicaciones multivaluadas $T_\epsilon, F_\epsilon : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, definidas del mismo modo.

Proposición 2.21. Sea $f : Q \rightarrow Q$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f . Entonces existe un *index pair* regular (Q_1, Q_2) para K , tal que Q_1 y Q_2 son prismas.

Demostración. Será semejante a la hecha en la proposición 4.10 del Capítulo I. Sabemos que T_ϵ, F_ϵ toman valores compactos y son aplicaciones scs.

Sea N un entorno aislante de K , por ejemplo N un prisma (ver lema 4.3, p. 105 de [10]). Definimos

$$N_\epsilon = \bigcup \{A \in \mathcal{A}(\epsilon) : A \subset N\}.$$

Si ϵ es suficientemente pequeño, tendremos que N_ϵ es un prisma que contiene a K , y es un entorno aislante para F_ϵ . Veámoslo.

$$N = P \times Q \subset \prod_{n=1}^{n_1} [0, 1/n] \times Q, \quad N_\epsilon = P' \times Q \subset \prod_{n=1}^{n_1} [0, 1/n] \times Q$$

siendo $P' \subset P$ poliedros finitos.

Resulta evidente, si ϵ es suficientemente pequeño, que N_ϵ es un prisma que contiene a K .

Para ver que N_ϵ es un entorno aislante para F_ϵ , con ϵ suficientemente pequeño, basta utilizar los lemas 4.4 y 4.9 del Capítulo I.

Es claro que $K \subset K_\epsilon = \text{Inv}(N_\epsilon, F_\epsilon)$. Por el teorema 4.8 del Capítulo I, sabemos que existen (P_1, P_2) compactos, $P_2 \subset P_1 \subset N_\epsilon$, tales que

- 1) $F_\epsilon(P_i) \cap N_\epsilon \subset P_i$, $i \in \{1, 2\}$.
- 2) $F_\epsilon(P_1 \setminus P_2) \subset N_\epsilon$
- 3) $K_\epsilon \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2)$.

Interesa encontrar, ahora, un *index pair* prismático para K , esto es, un par (Q_1, Q_2) de compactos (prismas), $Q_2 \subset Q_1 \subset N$, tal que:

- i) $f(Q_2) \cap Q_1 \subset Q_2$.
- ii) $f(Q_1 \setminus Q_2) \subset Q_1$.

iii) $Inv(Q_1 \setminus Q_2, f) = K \subset int(Q_1 \setminus Q_2)$.

Sea $d \in \mathbb{N}$. Definimos

$$Q_i = \bigcup \{A \in \mathcal{A}(\epsilon/d) : A \subset P_i, A = P \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon/d)-1} [0, 1/n] \times Q\}$$

con P un poliedro finito.

Si ϵ/d es suficientemente pequeño (si d es suficientemente grande), podremos afirmar que $K \subset int(Q_1) \neq \emptyset$. No se puede decir lo mismo de Q_2 , que puede ser vacío para todo d . Tenemos que (Q_1, Q_2) son de la forma $Q_i = R_i \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon/d)-1} [0, 1/n] \times Q$ con R_i poliedro finito para $i \in \{1, 2\}$. De hecho (Q_1, Q_2) son dos prismas ϵ/d -regulares, esto es, unión de elementos de $\mathcal{A}(\epsilon/d)$.

Veamos que, si d es suficientemente grande, el par (Q_1, Q_2) es un *index pair* regular para K .

Para probar que (Q_1, Q_2) es un *index pair* basta ver el lema 5.1 de [125]. Quedaría por demostrar la regularidad del par (Q_1, Q_2) , esto es:

- a) Existe un entorno V de Q_2 en Q_1 tal que $f(V \setminus Q_2) \subset Q_2$.
- b) $cl(f(Q_2) \setminus Q_1) \cap cl(Q_1 \setminus Q_2) = \emptyset$.

Veamos a). Sea $V = int(T_\epsilon(Q_2)) \cap Q_1$. Si $x \in V \setminus Q_2$, entonces $x \in Q_1 \setminus Q_2$, por lo que $f(x) \in N_\epsilon$.

Además, $x \in T_\epsilon(y)$ para cierto $y \in Q_2$, de modo que $f(x) \in F_\epsilon(Q_2) \subset F_\epsilon(P_2)$.

En consecuencia, $f(x) \in N_\epsilon \cap F_\epsilon(P_2) = R \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon/d)-1} [0, 1/n] \times Q$, siendo $R \times Q$ un prisma ϵ/d -regular contenido en P_2 . Entonces $f(x) \in Q_2$.

Veamos b). Supongamos que existe un $y_0 \in cl(f(Q_2) \setminus Q_1) \cap cl(Q_1 \setminus Q_2)$.

Como $y_0 \in cl(f(Q_2) \setminus Q_1)$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_n \rightarrow y_0$, con $y_n = f(x_n) \in Q \setminus Q_1$, $x_n \in Q_2$, y esto para todo n . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{x_n\}_n \rightarrow x_0 \in Q_2$, con $f(x_0) = y_0 \in Q_1$. Como consecuencia tenemos que $y_0 \in f(Q_2) \cap Q_1 \subset Q_2$.

Por otro lado, como $y_0 \in cl(Q_1 \setminus Q_2)$, existe una sucesión $\{y'_n\}_n \rightarrow y_0$ con $y'_n \in Q_1 \setminus Q_2$ para todo n .

Dado ϵ suficientemente pequeño, consideremos $K_\epsilon \subset W \subset N_\epsilon$, siendo W un entorno de K_ϵ tal que $\bigcup_{x \in W} B(x, \epsilon) \subset int(N_\epsilon)$.

Escogemos, de antemano, (P_1, P_2) de modo que $cl(P_1 \setminus P_2) \subset W$ (ver teorema 4.8 del Capítulo I). Sea, entonces, A_n el menor conjunto en $\mathcal{A}(\epsilon/d)$, $A_n = S \times Q \subset \prod_{n=1}^{n(\epsilon/d)-1} [0, 1/n] \times Q$, tal que $y'_n \in A_n$. Ocurre que $A_n \subset P_1$. Existe, pues, un $y''_n \in A_n \cap P_1 \setminus P_2$. Construimos así una sucesión $\{y''_n\}_n$ contenida en $P_1 \setminus P_2$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{y''_n\}_n \rightarrow y \in cl(P_1 \setminus P_2) \subset W$.

Téngase en cuenta que, si d es suficientemente grande, $diam(A_n) < \epsilon$, de modo que $d(y'_n, y''_n) < \epsilon$. En consecuencia, $d(y_0, y) \leq \epsilon$. Por tanto, al ser $y \in W$, ocurre que $y_0 \in int(N_\epsilon)$.

De lo último se deduce que existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $y_n \in N_\epsilon$. Pero entonces tendremos que

$$y_n = f(x_n) \in f(Q_2) \cap N_\epsilon \subset Q_2 \subset Q_1,$$

resultado que se contradice con el hecho de que $y_n \in Q \setminus Q_1$ para todo n . \square

Teorema 2.22. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Entonces

$$I_X(K, f) = I_X(K^A, f) = 2^q - 1$$

donde q es el número de ciclos de K^A , conjunto que no depende del *index pair* elegido para definirlo.

Demostración. Podemos considerar a X sumergido como un subconjunto cerrado de un espacio normado B . Sea N un entorno aislante de K . Al ser X un ANR, existen un entorno abierto de X , $U^X \subset B$, y una retracción $r : U^X \subset B \rightarrow X$. Debido a [46] tendremos que se puede construir un ANR compacto A^N , con $N \subset A^N \subset U^X$.

Sea V un subconjunto abierto de X tal que $K \subset V \subset N$, con $f(V) \subset N$. Sea $W = r^{-1}(V) \cap A^N$, subconjunto abierto de A^N .

Consideremos la aplicación

$$f_1 = f \circ r|_W : W \subset A^N \rightarrow A^N.$$

Resulta inmediato ver, por la propiedad conmutativa, que $I_X(K, f) = I_{A^N}(K, f_1)$.

En consecuencia, el estudio de $I_X(K, f)$ se puede considerar idéntico al de $I_{A^N}(K, f_1)$, donde A^N es un ANR compacto.

Por compacidad, tenemos que $A^N \subset Q$, sumergido como un cerrado en el cubo de Hilbert.

Debido a que A^N es un ANR, existen un entorno abierto de A^N , $U^{A^N} \subset Q$, y una retracción

$$r_1 : U^{A^N} \subset Q \rightarrow A^N.$$

Sea $Z = r_1^{-1}(W) \subset U^{A^N}$ un subconjunto abierto de Q . Definimos

$$g = f_1 \circ r_1|_Z : Z \subset Q \rightarrow Q.$$

Es claro, por la propiedad conmutativa, que $I_{A^N}(K, f_1) = I_Q(K, g)$.

Basta ahora, tras extender adecuadamente g a todo Q , aplicar el corolario 2.20 y la proposición 2.21 para obtener de manera inmediata

$$I_X(K, f) = I_Q(K, g) = I_Q(K^A, g) = 2^q - 1.$$

Resulta sencillo ver que, dado un *index pair* prismático (como en la proposición 2.21) (Q_1, Q_2) para K en el sistema semidinámico $g : Q \rightarrow Q$, el conjunto K^A será el mismo que con el *index pair* $(P_1, P_2) = ((r \circ r_1)(Q_1), (r \circ r_1)(Q_2))$ para K en el sistema semidinámico $f : U \subset X \rightarrow X$.

El número de ciclos correspondiente es también el mismo para los dos sistemas semidinámicos.

Por otro lado, resulta que el conjunto K^A no va a depender del *index pair* elegido para definirlo. Dado (Q_1, Q_2) un *index pair* prismático para K en el sistema semidinámico $g : Q \rightarrow Q$, ocurre que K^A es igual al conjunto

$$\bigcup \{C \subset K : g(C) = C \text{ atractor, compacto y } g(K \setminus C) = K \setminus C \text{ compacto}\}$$

Comprobar que K^A está contenido en el conjunto arriba mencionado es automático.

Veamos el otro contenido. De no darse, existirá un $C_0 \in \bigcup \{C \subset K : g(C) = C \text{ atractor, compacto y } g(K \setminus C) = K \setminus C \text{ compacto}\}$ tal que $C_0 \not\subset K^A$. Sabemos que C_0 es una unión finita de ciclos, de modo que, como $g(C_0 \setminus K^A) = C_0 \setminus K^A$, ocurre que $C_0 \setminus K^A$ es un conjunto atractor, unión finita de componentes conexas de $K \setminus K^A$.

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= I_X(K \setminus K^A, g) = I_X((K \setminus K^A) \setminus (C_0 \setminus K^A), g) + I_X(C_0 \setminus K^A, g) + \\ &\quad + I_X((K \setminus K^A) \setminus (C_0 \setminus K^A), g) I_X(C_0 \setminus K^A, g). \end{aligned}$$

La primera igualdad es evidente y la segunda es consecuencia de aplicar la propiedad aditiva de nuestro índice.

Sea $a = I_X(C_0 \setminus K^A, g)$. Resulta $a > 0$ al ser $C_0 \setminus K^A$ un atractor. Sea $b = I_X((K \setminus K^A) \setminus (C_0 \setminus K^A), g)$. Sabemos que $b \geq 0$.

Como $0 = a + b + ab$ con $a > 0$ y $b \geq 0$, llegamos a contradicción.

Por otro lado, es inmediato que

$$\begin{aligned} &\bigcup \{C \subset K : g(C) = C \text{ atractor, compacto y } g(K \setminus C) = K \setminus C \text{ compacto}\} = \\ &= \bigcup \{C \subset K : f(C) = C \text{ atractor, compacto y } f(K \setminus C) = K \setminus C \text{ compacto}\}. \end{aligned}$$

Queda demostrado que el conjunto K^A está caracterizado por las igualdades arriba expresadas y que, por tanto, no depende más que del conjunto K y de la dinámica de f en un entorno de K . \square

Corolario 2.23. (Propiedad producto). Sean $f : U \subset X \rightarrow X$ y $g : V \subset Y \rightarrow Y$ dos sistemas semidinámicos. Sean K y L conjuntos compactos, invariantes y aislados con respecto a f y g respectivamente.

Entonces $K \times L$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a $f \times g : U \times V \subset X \times Y \rightarrow X \times Y$ y

$$I_{X \times Y}(K \times L, f \times g) = 2^{pq} - 1$$

donde p y q son el número de ciclos de K^A y L^A respectivamente.

II.3. Definición y estudio del m -índice de compacto fijo

En esta sección introduciremos cierta clase de hiperespacios de desarrollo de X que nos permitirán definir índices análogos al índice de compacto fijo, $I_X(K, f)$, y que darán más información sobre la dinámica de f en K^A . En concreto determinaremos, no sólo el número de ciclos de K^A , sino también la longitud de cada uno.

Sea $C_m(X) \subset 2^X$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de X , no vacíos, que tienen, a lo sumo, m componentes conexas. Resulta inmediato ver que $C_m(X)$ es un hiperespacio de desarrollo de X .

Si $f : U \subset X \rightarrow X$ es un sistema semidinámico, entonces f induce otro sistema semidinámico

$$C_m(f) : C_m(U) \subset C_m(X) \rightarrow C_m(X).$$

Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , y sea N un entorno aislante de K . Tomemos un conjunto abierto W tal que $K \subset W \subset N$.

Considérese $C_m(f) : C_m(W) \rightarrow C_m(X)$. Ocurre que $\text{Fix}(C_m(f)|_{C_m(W)})$ es un conjunto compacto al ser un subconjunto cerrado del compacto $C_m(K)$. Además $C_m(f) : C_m(W) \rightarrow C_m(X)$ es compacta, y $C_m(X)$ es un ANR (basta aplicar el teorema 1.1 a X).

Entonces, el índice de punto fijo $i_{C_m(X)}(C_m(f)|_{C_m(W)}, C_m(W))$ está bien definido.

Definición 3.1. Definimos el m -índice de compacto fijo del par (K, f) como

$$I_X^m(K, f) = i_{C_m(X)}(C_m(f)|_{C_m(W)}, C_m(W)).$$

Observación 3.2. Las propiedades de estos índices son similares a las propiedades del índice de compacto fijo, expuestas en las proposiciones 2.1-2.5, a excepción de la propiedad aditiva, que queda reducida al siguiente resultado para $m = 1, 2$.

Proposición 3.3. (Propiedad aditiva). Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Supongamos que K es unión disjunta de dos conjuntos compactos, invariantes y aislados, K_1 y K_2 . Entonces

$$I_X^1(K, f) = I_X^1(K_1, f) + I_X^1(K_2, f)$$

e

$$I_X^2(K, f) = I_X^2(K_1, f) + I_X^2(K_2, f) + I_X^1(K_1, f)I_X^1(K_2, f).$$

Demostración. Sea $K = K_1 \cup K_2$ con entornos aislantes disjuntos N_1 y N_2 . Consideramos dos subconjuntos abiertos U_1, U_2 con $K_i \subset U_i \subset N_i$, $i \in \{1, 2\}$, y tales que $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Resulta evidente que los siguientes espacios son homeomorfos,

$$C_1(U_1 \cup U_2) \simeq C_1(U_1) \vee C_1(U_2)$$

y

$$C_2(U_1 \cup U_2) \simeq C_2(U_1) \vee C_2(U_2) \vee C_1(U_1) \times C_1(U_2).$$

Teniendo en cuenta lo escrito arriba, y siguiendo los pasos dados en la demostración de la propiedad aditiva para el caso compacto, se obtiene el resultado buscado. \square

Desgraciadamente no tendremos una propiedad aditiva para todo $m \in \mathbb{N}$.

A continuación desarrollamos los principales resultados obtenidos con este índice.

Teorema 3.4. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un atractor. Entonces

$$I_X^m(K, f) = l_m$$

donde l_m es el número de uniones de ciclos de K cuya suma de longitudes es menor o igual que m .

Demostración. Sea $K = K_1 \cup \dots \cup K_k$ unión de k componentes conexas y sea $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$ un entorno abierto de K , con k componentes conexas, de modo que $K_i \subset W_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, y tal que $W \subset N$, un entorno aislante de K .

Veamos que $C_m(W)$ es una unión finita de ARs.

$$C_m(W) = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} W_A^m$$

donde

$$W_A^m = \{C \in C_m(W) : C \cap W_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap W_j = \emptyset \text{ si } j \notin A\}.$$

Demostremos que, salvo para el caso en que $m < \text{card}(A)$ donde W_A^m será vacío, los conjuntos W_A^m son ARs, esto es, ANRs contractibles. Como $C_m(W)$ es un ANR, tenemos que los conjuntos W_A^m son ANRs. Queda ver la contractibilidad.

En el teorema 2.12 denotábamos por W_A a

$$W_A = \{C \in 2^W : C \cap W_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap W_j = \emptyset \text{ si } j \notin A\}.$$

Como W_A es un AR, existe una homotopía $r_A : W_A \times I \rightarrow W_A$ tal que $r_A(0) = id$ y $r_A(1) = L_A$ constante. Supondremos que $L_A \in W_A^m \subset W_A$.

Definimos, entonces, una homotopía $H_A : W_A^m \times I \rightarrow W_A^m$ del siguiente modo

$$H_A(L, t_0) = \begin{cases} \bigcup_{t \in [0, 2t_0]} r_A(L, t) & \text{si } t_0 \in [0, 1/2] \\ \bigcup_{t \in [2t_0 - 1, 1]} r_A(L, t) & \text{si } t_0 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Resulta que $H_A(L, 0) = r_A(L, 0) = L$ y $H_A(L, 1) = r_A(L, 1) = L_A$ constante, y esto para todo $L \in W_A^m$.

Queda por demostrar que H_A está bien definida y es continua. Para ello bastará ver:

a) $H_A(L, t_0)$ es un subconjunto compacto de X para todo $L \in W_A^m$ y para todo $t_0 \in I$.

b) $H_A(L, t_0)$ tiene, a lo sumo, m componentes conexas.

c) H_A es continua.

Probemos a). Sean $L \in W_A^m$ y $t_0 \in [0, 1/2]$ (si $t_0 \in [1/2, 1]$ la demostración será análoga). Tomemos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto del conjunto $H_A(L, t_0) \subset X$. Ocurre que $r_A(L, t)$ es un subconjunto compacto de X para todo $t \in [0, 2t_0]$. Existe entonces una unión finita de abiertos de \mathcal{U} , que denotaremos por $\mathcal{U}(L, t)$, que recubre a $r_A(L, t)$.

Es claro que $r_A(L \times [0, 2t_0]) \subset W_A$ es un subconjunto compacto de 2^X , de modo que cualquier recubrimiento abierto suyo tendrá un subcubrimiento finito. Consideremos el recubrimiento abierto $\{2^{\mathcal{U}(L, t)}\}_{t \in [0, 2t_0]}$ de $r_A(L \times [0, 2t_0])$. Entonces $r_A(L \times [0, 2t_0]) \subset \bigcup_{t \in [0, 2t_0]} 2^{\mathcal{U}(L, t)}$. Como existe un subcubrimiento finito,

$$r_A(L \times [0, 2t_0]) \subset \bigcup_{i=1}^{p_0} 2^{\mathcal{U}(L, t_i)}.$$

Esto quiere decir que cada $r_A(L, t)$, subconjunto compacto de X , cumple

$$r_A(L, t) \subset \mathcal{U}(L, t_i) \text{ para algún } i \in \{1, \dots, p_0\}.$$

De manera que el subconjunto de X , $H_A(L, t_0)$, verifica

$$H_A(L, t_0) = \bigcup_{t \in [0, 2t_0]} r_A(L, t) \subset \bigcup_{i=1}^{p_0} \mathcal{U}(L, t_i)$$

con $\mathcal{U}(L, t_i)$ una unión finita de abiertos de \mathcal{U} para todo $i \in \{1, \dots, p_0\}$. Queda, pues, demostrado que $H_A(L, t_0)$ es un subconjunto compacto de X .

Resulta claro, por la definición de H_A , que $H_A(L, t) \in W_A$ para todo $(L, t) \in W_A^m \times I$.

Probemos b). Sean $L \in W_A^m$ y $t_0 \in [0, 1/2]$ (para $t_0 \in [1/2, 1]$ se hará de modo análogo). Supongamos que el compacto $H_A(L, t_0) = \bigcup_{t \in [0, 2t_0]} r_A(L, t)$ tiene más de m componentes conexas. Podremos conseguir entonces $m+1$ abiertos disjuntos de X , $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$, de modo que $H_A(L, t_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$ y $U_i \cap H_A(L, t_0) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, m+1\}$.

Es claro que $L \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$, $r \leq m$, con $L \cap U_{i_j} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Entonces $L \in 2^{U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}}$.

Por otro lado, existe un $U_{i_0} \notin \{U_{i_1}, \dots, U_{i_r}\}$ tal que $H_A(L, t_0) \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. En consecuencia, existe un $t_1 \in [0, 2t_0]$ tal que $r_A(L, t_1) \cap U_{i_0} \neq \emptyset$.

Tenemos que el conjunto $r_A(L \times [0, 2t_0]) \subset 2^{\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i}$ es conexo. Tómesese el conjunto abierto de 2^X , $V = 2^{\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i} \setminus 2^{\bigcup_{j=1}^r U_{i_j}}$.

Ocurre que $V \cup 2^{\bigcup_{j=1}^r U_{i_j}} = 2^{\bigcup_{i=1}^{m+1} U_i}$, con $V \cap 2^{\bigcup_{j=1}^r U_{i_j}} = \emptyset$.

Como $r_A(L \times [0, 2t_0])$ es conexo y $r_A(L, 0) \in 2^{\bigcup_{j=1}^r U_{i_j}}$, entonces $r_A(L \times [0, 2t_0]) \subset 2^{\bigcup_{j=1}^r U_{i_j}}$. Sin embargo, sabemos que existe un t_1 tal que $r_A(L, t_1) \cap U_{i_0} \neq \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Demostrar c) resulta inmediato a partir de la continuidad de r_A , y de la definición de métrica de Hausdorff

$$d_H(E, F) = \text{Max}\{\text{Sup}_{e \in E}\{d(e, F)\}, \text{Sup}_{f \in F}\{d(f, E)\}\}.$$

Sea $(K_0, t_0) \in W_A^m \times I$ y sea $\epsilon > 0$. Denotamos por d' a la métrica inducida en el espacio producto $W_A \times I$.

Sea $K_0 \in Z \subset W_A^m$, con Z un entorno compacto en W_A^m del punto K_0 . Consideremos $(K', t') \in Z \times I$, que es compacto. Tendremos, por la continuidad de r_A , que existe un $\delta > 0$ tal que si $d'((K_0, t), (K', t')) < \delta$, entonces $d_H(r_A(K_0, t), r_A(K', t')) < \epsilon$.

Sea $(K_1, t_1) \in Z \times I \subset W_A^m \times I$, de modo que

$$d_H(K_1, K_0) + 2|t_1 - t_0| < \delta.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} d'((K_1, t_1), (K_0, t_0)) &= \sqrt{(d_H(K_1, K_0))^2 + (t_1 - t_0)^2} \leq \\ &\leq d_H(K_1, K_0) + 2|t_1 - t_0| < \delta. \end{aligned}$$

Dado $x \in H_A(K_1, t_1)$, ocurre que $x \in r_A(K_1, t_x)$ para cierto $t_x \in [2t_1 - 1, 2t_1] \cap [0, 1]$. Consideremos $t'_x \in [2t_0 - 1, 2t_0] \cap [0, 1]$ con $|t'_x - t_x| \leq 2|t_1 - t_0|$. Entonces

$$\begin{aligned} d'((K_1, t_x), (K_0, t'_x)) &= \sqrt{(d_H(K_1, K_0))^2 + (t_x - t'_x)^2} \leq \\ &\leq d_H(K_1, K_0) + 2|t_1 - t_0| < \delta. \end{aligned}$$

Así

$$d(x, H_A(K_0, t_0)) \leq d(x, r_A(K_0, t'_x)) \leq d_H(r_A(K_1, t_x), r_A(K_0, t'_x)) < \epsilon$$

De igual modo se ve que $d(x, H_A(K_1, t_1)) < \epsilon$ para todo $x \in H_A(K_0, t_0)$.

Resulta ya inmediato ver que $d_H(H_A(K_0, t_0), H_A(K_1, t_1)) < \epsilon$.

Por consiguiente, el espacio

$$C_m(W) = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} W_A^m$$

es una unión finita de ARs.

Obsérvese que si $m < k$, algunos de estos W_A^m serán vacíos ($W_A^m = \emptyset$ si, y sólo si, $m < \text{card}(A)$).

Al ser K un atractor, podemos escoger $q_0 \in \mathbb{N}$ fijo y W , de modo que $f^p(W) \subset W$ para todo $p \geq q_0$.

Entonces

$$C_m(f^p) = (C_m(f))^p : C_m(W) \rightarrow C_m(W) \text{ para todo } p \geq q_0.$$

Resulta que $(C_m(f))^p$ es de atracción compacta, con lo que, por la propiedad de normalización del índice de punto fijo (ver [94]),

$$i_{C_m(X)}((C_m(f))^p, C_m(W)) = i_{C_m(W)}((C_m(f))^p, C_m(W)) = \Lambda((C_m(f))^p).$$

Al ser $C_m(W)$ una unión finita de ARs, tendremos las homología singular con coeficientes racionales

$$H_n(C_m(W)) = 0 \text{ para todo } n \geq 1$$

$$H_0(C_m(W)) = \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}$$

con tantos generadores como $W_A^m \neq \emptyset$ existan. Interesa calcular $\Lambda((C_m(f))^p)$. Supondremos que p es primo, $p \geq q_0$ y $p \geq k$.

Tenemos

$$(C_m(f))^p : \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} W_A^m \rightarrow \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} W_A^m.$$

Diremos que W_A^m es *ciclo o unión de ciclos para f* si el conjunto A está formado exactamente por los subíndices de una unión completa de ciclos de K .

Supongamos que W_A^m es ciclo o unión de ciclos para f . Como $f^p(K) = K$, tendremos, automáticamente, que $(C_m(f))^p(W_A^m) \subset W_A^m$.

Por otro lado, si W_A^m no es ciclo o unión de ciclos para f , resulta, si tenemos en cuenta que $p \geq k$, p primo, que $(C_m(f))^p(W_A^m) \subset W_{A'}^m \neq W_A^m$.

En consecuencia,

$$i_{C_m(X)}((C_m(f))^p, C_m(W)) = \Lambda((C_m(f))^p) = (-1)^0 \text{tr}(((C_m(f))^p)_*) = l_m$$

siendo l_m la cantidad de uniones de ciclos de K cuya suma de longitudes es menor o igual que m , y esto para todo p primo suficientemente grande. Entonces, por el teorema 2.6, tendremos que $I_X^m(K, f) = l_m$. \square

Observación 3.5. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea $P = (P_1, P_2)$ un par compacto de subconjuntos de X .

Consideremos el conjunto

$$\bigcap_m P_2 = \{C \in C_m(P_1) : C \cap P_2 \neq \emptyset\}.$$

Si (P_1, P_2) es un *index pair* (*index pair* regular) para un conjunto compacto, invariante y aislado, K , entonces $(C_m(P_1), \bigcap_m P_2)$ es un *index pair* (*index pair* regular) para $\text{Inv}(C_m(P_1), C_m(f)) \subset C_m(K) \subset \text{int}(C_m(P_1))$.

La demostración de esta observación es idéntica a la de la proposición 2.14.

Proposición 3.6. En las condiciones de la observación anterior, si P_1 es localmente continuo-conexo, entonces $C_m(P_1)$ y $\bigcap_m P_2$ son unión finita de ARs disjuntos.

Demostración. Utilizaremos las técnicas de las demostraciones del teorema 3.4 y de la proposición 2.15. Denotamos $P_1 = P_{11} \cup \dots \cup P_{1k}$. Resulta evidente que $C_m(P_1)$ es un ANR, al ser P_1 localmente continuo-conexo. Por otro lado,

$$C_m(P_1) = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} P_{1A}^m$$

donde

$$P_{1A}^m = \{C \in C_m(P_1) : C \cap P_{1j} \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap P_{1j} = \emptyset \text{ si } j \notin A\}$$

Tal como se hizo en el teorema 3.4 con los conjuntos W_A^m , se demuestra que los P_{1A}^m distintos de vacío son ARs.

Resulta sencillo comprobar que $\bigcap_m P_2$ es un hiperespacio de desarrollo de P_1 , lo cual implica que $\bigcap_m P_2$ es un ANR. Para ver que, además, es una unión finita de ARs, basta tener en cuenta que

$$\bigcap_m P_2 = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k\}} (P_{1A}^m \cap \bigcap_m P_2)$$

donde cada $P_{1A}^m \cap \bigcap_m P_2$ distinto de vacío es un AR (ver proposición 2.15). \square

Teorema 3.7. Sea $f : X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado que admite un *index pair* regular $P = (P_1, P_2)$, con P_1 localmente continuo-conexo. Supongamos que $C_m(f)$ es de atracción compacta. Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$I_X^m(K, f) = I_X^m(K^A, f).$$

Demostración. Tenemos

$$P_1 = P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0} \cup \dots \cup P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l$$

con $K \cap P_1^i \neq \emptyset$ si $i \in \{1, \dots, k_0, k_1, \dots, l\}$ y $P_2 \cap P_1^j \neq \emptyset$ si $j \in \{k_1, \dots, l\}$.

Consideremos el par

$$P' = (P'_1, P'_2) = (P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0} \cup P_1^{k_1} \cup \dots \cup P_1^l, P_2)$$

Ocurre que P' es un *index pair* regular para K , con P'_1 localmente continuo-conexo.

Además,

$$C_m(P'_1) = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0, k_1, \dots, l\}} P'_{1A}{}^m$$

donde

$$P'_{1A}{}^m = \{C \in C_m(P'_1) : C \cap P_1^j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in A \text{ y } C \cap P_1^j = \emptyset \text{ si } j \notin A\}$$

Estos conjuntos son, por la proposición 3.6, ARs o vacíos.

De igual modo, por la proposición 3.6, tenemos que el ANR $\bigcap_m P'_2$ es

$$\bigcap_m P'_2 = \bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0, k_1, \dots, l\}} (P'_{1A} \cap \bigcap_m P'_2)$$

donde cada $P'_{1A} \cap \bigcap_m P'_2$ es un AR (si no es vacío).

Cada componente conexa de $C_m(P'_1)$ contiene una o ninguna componente conexa de $\bigcap_m P'_2$.

Las componentes de $C_m(P'_1)$ que se cortan con $\bigcap_m P'_2$ son los P'_{1A} tales que $A \cap \{k_1, \dots, l\} \neq \emptyset$.

Sabemos, por la observación 3.5, que $(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2)$ es un *index pair* regular para el conjunto compacto, invariante y aislado, $Inv(C_m(P_1), C_m(f))$, con $C_m(f) : C_m(X) \rightarrow C_m(X)$.

Calculemos, a continuación, las homología singular con coeficientes racionales $H_n(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2)$.

Tenemos la sucesión exacta de homología

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(\bigcap_m P'_2) \rightarrow H_n(C_m(P'_1)) \rightarrow H_n(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \rightarrow H_{n-1}(\bigcap_m P'_2) \rightarrow \\ \rightarrow \cdots \rightarrow H_1(\bigcap_m P'_2) \rightarrow H_1(C_m(P'_1)) \rightarrow H_1(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(\bigcap_m P'_2) \rightarrow H_0(C_m(P'_1)) \rightarrow H_0(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como $H_n(\bigcap_m P'_2) = H_n(C_m(P'_1)) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces se deduce con facilidad que $H_n(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) = 0$ para todo $n > 1$.

Calculemos $H_1(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2)$. Es sabido que $H_*(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \cong H_*(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *)$.

Por otro lado, la sucesión

$$\begin{aligned} H_1(*) \rightarrow H_1(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2) \rightarrow H_1(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *) \rightarrow \widetilde{H}_0(*) \rightarrow \\ \rightarrow \widetilde{H}_0(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2) \rightarrow H_0(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

es también exacta.

Obsérvese que existe un homeomorfismo entre los espacios

$$C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2 \simeq \left(\bigcup_{A \cap \{k_1, \dots, l\} = \emptyset} P'_{1A} \right) \cup \left(\bigvee_{A \cap \{k_1, \dots, l\} \neq \emptyset} (P'_{1A}/\bigcap_m P'_2) \right).$$

La unión punteada \bigvee es una unión punteada de ARs (cada cociente de ARs es un AR), de modo que $C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2$ es una unión finita de ARs.

Podremos decir, en consecuencia, que $H_1(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2) = 0$, con lo que $H_1(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *) = 0$. Esta última igualdad se debe a la exactitud de la última sucesión de homología. Finalmente, como $H_*(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \cong H_*(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *)$, tenemos que $H_1(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) = 0$.

También la exactitud de la última sucesión de homologías dice que

$$H_0(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) \equiv H_0(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2, *) \equiv \widetilde{H}_0(C_m(P'_1)/\bigcap_m P'_2)$$

que es finitamente generado. De hecho

$$H_0(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) = [T_1] \oplus \cdots \oplus [T_r]$$

donde los generadores $[T_i]$ se corresponden con las componentes conexas (ARs) P'_{1A} con $A \subset \{1, \dots, k_0\}$.

Denotamos $M = C_m(P'_1)$ y $N = \bigcap_m P'_2$. Consideremos

$$C_m(f)_{M,N} : (M, N) \rightarrow (M \cup C_m(f)(N), N \cup C_m(f)(N)),$$

una aplicación entre pares determinada por $C_m(f)$, y

$$i_{M,N} : (M, N) \rightarrow (M \cup C_m(f)(N), N \cup C_m(f)(N)),$$

una aplicación entre pares determinada por la inclusión i .

Ocurre que

$$[i_{M,N}]_* : H_*(M, N) \rightarrow H_*(M \cup C_m(f)(N), N \cup C_m(f)(N))$$

es un isomorfismo (ver lema 1 de [94]). También tenemos el morfismo

$$[C_m(f)_{M,N}]_* : H_*(M, N) \rightarrow H_*(M \cup C_m(f)(N), N \cup C_m(f)(N)).$$

Aplicaremos *remark 2* de [94] al par de morfismos

$$[i_{M,N}]_*^{-1} \circ [C_m(f)_{M,N}]_* : H_*(M, N) \rightarrow H_*(M, N)$$

y

$$[C_m(f)|_{\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A}}]_* : H_*(\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A}) \rightarrow H_*(\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A})$$

Téngase en cuenta que

$$H_n(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ [T_1] \oplus \cdots \oplus [T_r] & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y

$$H_n(\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ [T_1] \oplus \cdots \oplus [T_r] & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Definimos el morfismo

$$[i]_* : H_*(\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A}) \rightarrow H_*(C_m(P'_1), \bigcap_m P'_2)$$

donde $[i]_*([T_i]) = [T_i]$. Resulta claro que $[i]_*$ es un isomorfismo.

Si consideramos el diagrama conmutativo que se construye con los isomorfismos $[i]_*$, $[i]_*^{-1}$ y con $[i_{M,N}]_*^{-1} \circ [C_m(f)_{M,N}]_*$ y $[C_m(f)|_{\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P'_{1A}}]_*$, tendremos que el *remark 2* de [94] y el teorema 2.18 garantizan que

$$\begin{aligned}
I_X^m(K, f) &= \Lambda(I_{C_m(P'_1)} \cap_m P'_2) = \Lambda(C_m(f)|_{\bigcup_{A \subset \{1, \dots, k_0\}} P_{1A}^m}) = \\
&= i_{C_m(X)}(C_m(f), C_m(P_1^1 \cup \dots \cup P_1^{k_0})) = I_X^m(K^A, f). \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.8. Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f .

Entonces

$$I_X^m(K, f) = I_X^m(K^A, f) = l_m$$

donde l_m es el número de uniones de ciclos de K^A cuya suma de longitudes es menor o igual que m .

La demostración es idéntica a la del teorema 2.22. La primera igualdad será consecuencia del teorema 3.7 y, la segunda, del teorema 3.4.

Observación 3.9. Debido al teorema 2.22 y al teorema 3.8 tendremos que, dado un conjunto compacto, invariante y aislado, K , con respecto a un sistema semidinámico $f : U \subset X \rightarrow X$, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_X^m(K, f) = I_X(K, f)$ para todo $m \geq m_0$.

Observación 3.10. Sean $f : U \subset X \rightarrow X$ y $g : V \subset Y \rightarrow Y$ dos sistemas semidinámicos. Sean K_1 y K_2 dos conjuntos compactos, invariantes y aislados con respecto a f y g respectivamente. Entonces $I_X^m(K_1, f) = I_Y^m(K_2, g)$ para todo $m \leq r$ si, y sólo si, el número de ciclos de longitud m de K_1^A y K_2^A coincide para todo $m \leq r$.

Corolario inmediato es que, debido a la propiedad de invariancia por homotopías, tenemos garantizada la estabilidad (invariancia bajo pequeñas perturbaciones en el sistema dinámico) tanto del número de ciclos como de las longitudes de los mismos.

Otro hecho, destacable por su utilidad, es que, dado un sistema semidinámico $f : U \subset X \rightarrow X$, y dado K , un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , la combinación de las propiedades conmutativa y de invariancia por homotopías podrá permitir el cálculo de nuestros índices $I_X^m(K, f)$ a partir del estudio de los mismos en otros sistemas semidinámicos, eventualmente más simples.

CAPITULO III

INDICE DE PUNTO FIJO EN PRODUCTOS SIMETRICOS

Resumen. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico, con X un ANR localmente compacto. En este capítulo estudiaremos el índice de punto fijo de la aplicación que f induce en los n -productos simétricos de X , $F_n(X)$. Centraremos nuestra atención en el cálculo de este índice para $K = \{\bar{0}\}$, un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, una aplicación lineal. Su conocimiento nos permitirá determinar la característica de Euler del n -producto simétrico de una variedad X , $\mathcal{X}(F_n(X))$. Hallaremos explícitamente $\mathcal{X}(F_n(X))$ para toda X superficie compacta, sin borde y orientable. La adecuada utilización de las propiedades de este tipo de índices permitirá también analizar sistemas dinámicos no triviales y determinar todas sus órbitas periódicas, como haremos con la G-herradura.

III.1. Introducción

Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua, con U un subconjunto abierto de un ANR localmente compacto X . Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f . Resultaría de gran utilidad profundizar en el estudio de la dinámica de f en K , en la línea de lo hecho en el capítulo anterior. De especial interés sería tener alguna información acerca de las órbitas periódicas contenidas en K . Para ello, en el presente capítulo construiremos índices de la misma naturaleza que los ya desarrollados, esto es, índices de punto fijo de la aplicación inducida, en este caso, sobre el espacio $F_n(X)$ de los subconjuntos finitos de X , no vacíos, con, a lo sumo, n elementos. Este espacio fue definido en 1931 por Borsuk y Ulam en [16] con el nombre de n -producto simétrico de X . Los autores investigaron las propiedades topológicas que heredaban de X los n -productos simétricos $F_n(X)$, y consideraron $X = I$ para estudiar las propiedades topológicas de $F_n(I)$.

Por la naturaleza del nuevo espacio, el índice que desarrollaremos dará información sobre las órbitas periódicas, contenidas en K , de período menor o igual que n . Su estudio será más difícil e incompleto que el hecho para el índice de compacto fijo, debido a que ciertas propiedades topológicas de $F_n(X)$ son más complejas que las de 2^X y $C_n(X)$, y esto dificulta su manipulación para hacer los cálculos. Además, mientras en los índices ya estudiados se sabe con exactitud cuál es el significado dinámico de su valor numérico, aquí no siempre será así.

Dividimos el capítulo en cuatro secciones. En la Sección III.2 veremos, tal como se hizo con el índice de compacto fijo, que esta construcción es consistente y mostraremos sus propiedades más importantes.

La Sección III.3 la dedicamos a hacer un estudio del índice en las situaciones más sencillas, esto es, con K un punto fijo y f una aplicación lineal

en \mathbb{R}^m , dedicando atención especial a los casos $m = 1, 2$ (teorema 3.16 y teorema 3.17).

En el apartado III.4 aplicamos las propiedades del índice de punto fijo y los resultados obtenidos en III.2 y III.3 al estudio completo de las órbitas periódicas de un sistema como la G-herradura.

Finalmente, en la Sección III.5, y gracias al soporte teórico de III.2 y III.3, proporcionaremos técnicas para hallar la característica de Euler de $F_n(X)$, cuando X es una variedad de dimensión finita. Nuestro interés en este punto se debe a que, aunque diversos autores han considerado el estudio de la estructura topológica de los espacios $F_n(X)$, las caracterizaciones topológicas completas sólo se han conseguido en un número muy limitado de casos. Así, en [16], Borsuk y Ulam demuestran que $F_n(I) \simeq I^n$ para $n \leq 3$. Borsuk, en [9] afirma, equivocadamente, que $F_3(S^1) \simeq S^1 \times S^2$. Es Bott, en [17], quien prueba que $F_3(S^1) \simeq S^3$, mientras en [89], Molski ve que $F_2(I^2) \simeq I^4$. En la misma dirección tenemos el trabajo de Schori, [114], donde se observan varios resultados que caracterizan espacios del tipo de $F_n(I^m)$, mediante la utilización de relaciones de equivalencia adecuadas. Asimismo, se han conseguido algunos resultados sobre propiedades topológicas de n -productos simétricos. En [16] se demuestra que $\dim(F_n(I)) = n$ para todo n , y $F_n(I)$ no es sumergible en \mathbb{R}^n para $n > 3$. Algo parecido se observa en [89] con $F_n(I^2)$, que no es sumergible en \mathbb{R}^{2n} , y con $F_2(I^m)$ que no es sumergible en \mathbb{R}^{2m} para $m \geq 3$. Wu, en [128], probó que, si n es impar, la homología de $F_n(S^1)$ es la de S^n y, si n es par, $H^0(F_n(S^1)) = H^{n-1}(F_n(S^1)) = \mathbb{Z}$, y $H^i(F_n(S^1)) = 0$ si $i \neq 0, n-1$. Schori, en [114], demuestra que, dada una 2-variedad M , entonces $F_2(M)$ es una 4-variedad. En [60], Illanes prueba que, si X es localmente conexo y normal, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para $n \geq 3$. Igualmente, Macías demuestra en [73] que, si X es compacto y conexo, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para $n \geq 3$. De hecho, prueba que $\check{H}^1(F_n(X), \mathbb{Z}) = 0$. En este marco, el desarrollo de técnicas que permitan el cálculo de las características de Euler de los n -productos simétricos de variedades de dimensión finita puede ser de cierto interés, y a ello se dedica la última sección del capítulo. Pondremos especial atención en las superficies compactas, orientables y sin borde, para las que haremos el cómputo completo.

También reciben el nombre de productos simétricos los espacios denotados por $SP_n(X)$ y que se construyen como el cociente de X^n por la acción del grupo de permutaciones de n elementos. $SP_n(X) = F_n(X)$ si $n = 2$. Recomendamos el libro de Aguilar, Gitler y Prieto, [1], en el que se utilizan estos espacios para dar un enfoque homotópico a varios conceptos clásicos de la topología algebraica.

Podría ser interesante estudiar, cuando sea posible, el índice de punto fijo en $SP_n(X)$ dado que se puede esperar un comportamiento aditivo mejor que en los espacios $F_n(X)$. Masih y Rallis, en [82], [83] y [107] han definido ciertos índices para aplicaciones $X \rightarrow SP_n(X)$.

III.2. Definiciones y resultados preliminares

Sea X un ANR métrico y localmente compacto. Denotamos por $F_n(X)$ al n -producto simétrico de X , esto es, el subespacio cerrado de 2^X consistente en los subconjuntos no vacíos de X con, a lo sumo, n elementos. Contrariamente a lo que sucedía con 2^X y $C_n(X)$, resulta evidente que $F_n(X)$ no es un hiperespacio de desarrollo de X . Este dato resulta de gran relevancia, ya que, dado un espacio N localmente continuo-conexo (conexo y localmente continuo-conexo), no se podrá garantizar que $F_n(N)$ sea un ANR (AR). En consecuencia, la elección de *index pairs* adecuados no garantizará el cálculo, como ocurría en el capítulo anterior, del número de Lefschetz que caracteriza el índice.

Si $f : U \subset X \rightarrow X$ es un sistema semidinámico, entonces tenemos, dado $n \in \mathbb{N}$, que f induce otro sistema semidinámico

$$F_n(f) : F_n(U) \subset F_n(X) \rightarrow F_n(X).$$

Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , y sea N un entorno aislante de K . Tomemos un conjunto abierto W tal que $K \subset W \subset N$.

Considérese $F_n(f)|_{F_n(W)} : F_n(W) \rightarrow F_n(X)$. Resulta claro que el conjunto $S = \text{Fix}(F_n(f)|_{F_n(W)})$ es un subconjunto cerrado del compacto $F_n(K)$, con lo que S es compacto. Además, $F_n(f)|_{F_n(W)}$ es compacta (se puede extender al compacto $F_n(N)$).

Por otro lado, $F_n(W)$ es un abierto de $F_n(X)$ y, al ser X un ANR métrico, $F_n(X)$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$ ([100], [88]).

En consecuencia, el índice de punto fijo $i_{F_n(X)}(F_n(f)|_{F_n(W)}, F_n(W))$ está bien definido.

Definición 2.1. Definimos el n -índice finito de compacto fijo del par (K, f) como

$$I_X^{F_n}(K, f) = i_{F_n(X)}(F_n(f)|_{F_n(W)}, F_n(W)).$$

Obsérvese que la condición de que K sea aislado es suficiente pero no necesaria para garantizar la consistencia de la definición de este índice.

Observación 2.2. Por la propiedad de escisión del índice de punto fijo, se tiene que $I_X^{F_n}(K, f)$ no depende de la elección del entorno aislante N de K , ni del abierto W .

Las proposiciones que a continuación enunciamos tienen demostraciones análogas a las del caso compacto y no las repetiremos aquí.

Proposición 2.3. (Propiedad de Ważewski). $I_X^{F_n}(K, f) \neq 0$ implica que $K \supset S \neq \emptyset$, esto es, existe alguna órbita periódica de f en K de período menor o igual que n .

Proposición 2.4. (Casos particulares de aditividad). Sea $f : U \rightarrow X$ una aplicación continua y sea $K = K_1 \cup K_2$ un conjunto compacto, invariante y aislado, unión disjunta de dos conjuntos compactos, invariantes y aislados. Entonces,

$$I_X^{F_1}(K, f) = I_X^{F_1}(K_1, f) + I_X^{F_1}(K_2, f),$$

$$I_X^{F_2}(K, f) = I_X^{F_2}(K_1, f) + I_X^{F_2}(K_2, f) + I_X^{F_1}(K_1, f)I_X^{F_1}(K_2, f).$$

Proposición 2.5. (Propiedad conmutativa). Sean X, Y ANRs localmente compactos, U abierto de X y V abierto de Y .

Sean

$$\varphi : U \rightarrow Y$$

y

$$\psi : V \rightarrow X$$

aplicaciones continuas.

Definimos $f = \psi \circ \varphi$ y $g = \varphi \circ \psi$. Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , entonces $\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a g y $I_X^{F_n}(K, f) = I_Y^{F_n}(\varphi(K), g)$.

Proposición 2.6. (Propiedad de invariancia por homotopías). Sea $f : U \times \Lambda \rightarrow X$ una aplicación continua, con U un abierto de X y $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Supongamos que N es un entorno aislante para cada aplicación $f_\lambda : U \rightarrow X$. Entonces $I_X^{F_n}(Inv(N, f_\lambda), f_\lambda)$ no depende de $\lambda \in \Lambda$.

Proposición 2.7. (Índice de un atractor. Caso particular). Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, con U_0 un entorno abierto, contractible, de K tal que:

- i) $f^m(U_0) \subset U$ para todo $m \geq 1$,
- ii) Para todo entorno abierto V de K existe un $m(V) \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_0) \subset V$ para todo $n \geq m(V)$.

Entonces

$$I_X^{F_n}(K, f) = 1.$$

Demostración. Sabemos que existe un $m(U_0)$ tal que $f^m(U_0) \subset U_0$ para todo $m \geq m(U_0)$. Por otro lado, $F_n(U_0)$ es un AR al ser U_0 un AR. Entonces existe una homotopía $H : F_n(U_0) \times I \rightarrow F_n(U_0)$ tal que $H_0 = id$ y $H_1 = cte$.

Si consideramos p primo, $p \geq m(U_0)$, tendremos $(F_n(f))^p = F_n(f^p) : F_n(U_0) \rightarrow F_n(U_0)$.

Es sencillo ver que $S = \{\bar{x} \in F_n(U_0) : (F_n(f))^p(\bar{x}) = \bar{x}\}$ es un conjunto compacto, al ser cerrado en el compacto $F_n(K)$.

Además, $(F_n(f))^p : F_n(U_0) \rightarrow F_n(U_0)$ es compacta en algún entorno de S . Resulta, pues, que tenemos definido el índice

$$I_X^{F_n}(K, f^p) = I_{U_0}^{F_n}(K, f^p).$$

Ver que $(F_n(f))^p : F_n(U_0) \rightarrow F_n(U_0)$ es de atracción compacta resulta sencillo, y nos permitirá, por la propiedad de normalización del índice de punto fijo, igualar el índice al número de Lefschetz.

$$I_{U_0}^{F_n}(K, f^p) = \Lambda((F_n(f))^p).$$

Como $F_n(U_0)$ es un AR, tendremos los grupos de homología singular con coeficientes racionales

$$H_m(F_n(U_0)) = 0 \text{ para todo } m > 0 \text{ y } H_0(F_n(U_0)) = \mathbb{Q}.$$

Entonces,

$$I_X^{F_n}(K, f^p) = \Lambda((F_n(f))^p) = 1,$$

y esto para cualquier p primo suficientemente grande. En estas condiciones, aplicando el teorema de Steinlein a $F_n(f) : F_n(U) \rightarrow F_n(X)$, tendremos que

$$1 = I_X^{F_n}(K, f^p) = I_X^{F_n}(K, f)(\text{mod } p).$$

En consecuencia, $I_X^{F_n}(K, f) = 1$. \square

III.3. Estudio del índice para $X = \mathbb{R}^m$ y $f : B(\bar{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal con $\bar{0}$ un punto fijo hiperbólico

En esta sección consideraremos el caso en que $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal con $\bar{0} \in U$, un abierto de \mathbb{R}^m . Impondremos la condición de que $K = \{\bar{0}\}$ sea un conjunto compacto, invariante y aislado, y estudiaremos el índice $I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$.

Hacemos notar que, si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de una variedad M , de dimensión m , y p es un punto fijo hiperbólico para f , entonces, debido al teorema de Grobman-Hartman, ver, por ejemplo, [39], que garantiza que f es topológicamente conjugada con $Df(p)$ en un entorno de p , podremos reducir el cálculo de $I_M^{F_n}(\{p\}, f)$ al del caso lineal $I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, Df(p))$ (la propiedad conmutativa asegura que nuestro índice será invariante por conjugación topológica).

Observación 3.1. Dada una aplicación lineal $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, denotamos por J a la matriz de Jordan asociada. Dado $\epsilon > 0$, existe una matriz $J(\epsilon)$, semejante a J , que cambia los ‘unos’ sobre la diagonal de J por $\epsilon > 0$.

Demostración. Sea la matriz de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c|} \cdots & & & \\ \hline & A(\lambda_k) & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & A(\alpha_l, \beta_l) \\ \hline & & & \cdots \end{array} \right)$$

donde

$$A(\lambda_k) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} A_1(\lambda_k) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & A_1(\lambda_k) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & A_p(\lambda_k) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & A_p(\lambda_k) & \end{array} \right)$$

con

$$A_i(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

matriz $i \times i$.

De igual manera,

$$A(\alpha_l, \beta_l) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} A_1(\alpha_l, \beta_l) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & A_1(\alpha_l, \beta_l) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & A_q(\alpha_l, \beta_l) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & A_q(\alpha_l, \beta_l) & \end{array} \right)$$

con

$$A_i(\alpha_l, \beta_l) = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l & 1 & 0 & & & \\ -\beta_l & \alpha_l & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_l & \beta_l & 1 & 0 \\ & & & -\beta_l & \alpha_l & 0 & 1 \\ & & & & & \alpha_l & \beta_l \\ & & & & & -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}$$

matriz $2i \times 2i$.

Dado $\epsilon > 0$, veamos que existe una semejanza entre las matrices J y $J(\epsilon)$, que será igual que J pero sustituyendo los unos sobre la diagonal por ϵ .

Consideremos, para $A_i(\lambda_k)$, la matriz diagonal

$$S_i = \begin{pmatrix} \epsilon^{i-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \epsilon & & \\ & & & \epsilon & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

y para $A_i(\alpha_l, \beta_l)$, la matriz diagonal

$$T_i = \begin{pmatrix} \epsilon^{i-1} & & & & & & \\ & \epsilon^{i-1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \epsilon & & & \\ & & & & \epsilon & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta sencillo ver que

$$S_i A_i(\lambda_k) S_i^{-1} = A_i(\lambda_k)(\epsilon)$$

siendo $A_i(\lambda_k)(\epsilon)$ como $A_i(\lambda_k)$, pero cambiando los unos sobre la diagonal por $\epsilon > 0$.

De igual manera tenemos

$$T_i A_i(\alpha_l, \beta_l) T_i^{-1} = A_i(\alpha_l, \beta_l)(\epsilon)$$

siendo $A_i(\alpha_l, \beta_l)(\epsilon)$ como $A_i(\alpha_l, \beta_l)$, pero cambiando los unos sobre la diagonal por $\epsilon > 0$. De este modo se consigue

$$SJS^{-1} = J(\epsilon)$$

donde S es la matriz diagonal compuesta por las S_i y las T_j adecuadamente colocadas.

Por consiguiente, la matriz de Jordan J será semejante a una del tipo $J(\epsilon)$. Así, cuando trabajemos con aplicaciones lineales, podremos manipular matrices del tipo $J(\epsilon)$, que harán más sencillos algunos cálculos.

Observación 3.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con $\bar{0} \in U$. Entonces $K = \{\bar{0}\}$ es un conjunto compacto, invariante y aislado si, y sólo si, todos los autovalores de f tienen norma distinta de 1.

Demostración. Supongamos, primero, que todos los autovalores de f tienen norma distinta de 1. Entonces, el resultado será consecuencia inmediata de la descomposición de \mathbb{R}^m en subespacios invariantes atractores y repulsores que determinan las cajas de la matriz $J(\epsilon)$ asociada a f .

Veamos el recíproco. Si existe algún autovalor λ con $|\lambda| = 1$, tendremos:

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ ó b) $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

Caso a):

Existe una caja en la matriz de Jordan del tipo

En lo que queda de sección haremos el cálculo detallado de $I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f)$ y $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$, que serán los casos de más utilidad para nosotros, y daremos algunas ideas que ayuden a obtener el caso general $I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$, para $m > 2$, limitándonos a presentar un esquema de la demostración de este resultado debido a que no será empleado por nosotros a lo largo del trabajo.

Proposición 3.3. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado, y sea la matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\delta \in \{0, 1\}$. Entonces

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2)))$$

siendo

$$D(\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2)) = \begin{pmatrix} \delta(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \delta(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

una matriz diagonal con

$$\delta(\lambda_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda_i > 1 \\ -2 & \text{si } \lambda_i < -1 \\ 0 & \text{si } |\lambda_i| < 1 \end{cases}$$

Demostración. Como la conjugación topológica implica conmutatividad para nuestro índice, es claro que

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, J) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, J(\epsilon)).$$

Sea $U_0 = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (con respecto al sistema de referencia que determina $J(\epsilon)$) con $cl(U_0)$ entorno aislante de $\{\bar{0}\}$. Construyamos la homotopía $H : F_n(cl(U_0)) \times I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$,

$$H(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}, t) = \{A(t)\bar{x}_1, \dots, A(t)\bar{x}_r\}$$

siendo

$$A(t) = (1 - t)J(\epsilon) + tD(\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2)).$$

La continuidad de H resulta clara. Veamos que $H(F, t) \neq F$ para todo $F \in \partial(F_n(U_0))$ y para todo $t \in I$.

Sea $F = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \in \partial(F_n(U_0))$. Existe, entonces, un $\bar{x}_i = (x_{i_1}, x_{i_2})$ tal que $|x_{i_k}| = 1$ para algún $k \in \{1, 2\}$. Supongamos $x_{i_k} = 1$ (en caso de que $x_{i_k} = -1$ se trabaja de manera idéntica). Pueden darse las situaciones:

- a) $\lambda_k > 1$.
- b) $\lambda_k < -1$.
- c) $|\lambda_k| < 1$.

Denotaremos por π_k a la proyección sobre la coordenada k -ésima.

En el caso a), $|\pi_k(A(t)\bar{x}_i)| \geq |(1-t)\lambda_k + t(2) - \epsilon| > 1$, si ϵ es suficientemente pequeño. En consecuencia, resulta inmediato que $H(F, t) \neq F$ para todo $F \in \partial(F_n(U_0))$, $t \in I$.

En el caso b), $|\pi_k(A(t)\bar{x}_i)| \geq |(1-t)\lambda_k + t(-2) + \epsilon| > 1$, si ϵ es suficientemente pequeño.

En el caso c), $|\pi_k(A(t)\bar{x}_i)| \leq |(1-t)\lambda_k + \epsilon| < 1$, si ϵ es suficientemente pequeño. De igual modo, para todo $\bar{x}_j \in F = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ se obtendrá que $|\pi_k(A(t)\bar{x}_j)| \leq |(1-t)\lambda_k + \epsilon| < 1$, si ϵ es suficientemente pequeño. En consecuencia, $H(F, t) \neq F$ para todo $F \in \partial(F_n(U_0))$, $t \in I$.

Podemos concluir, aplicando la propiedad de invariancia por homotopías, que

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, J(\epsilon)) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2))). \quad \square$$

Proposición 3.4. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado, y sea la matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = \begin{cases} I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 2)) & \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > 1 \\ I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(0, 0)) & \text{si } \alpha^2 + \beta^2 < 1 \end{cases}$$

Demostración. Resulta

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}$$

para cierto θ_0 , siendo $0 < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \neq 1$, de modo que la matriz representa un giro compuesto con una contracción o un giro compuesto con una expansión.

Sea $U_0 = B(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (con respecto al sistema de referencia que determina J), con $cl(U_0)$ entorno aislante de $\{\bar{0}\}$. Construyamos la homotopía $H : F_n(cl(U_0)) \times I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$,

$$H(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}, t) = \{A(t)\bar{x}_1, \dots, A(t)\bar{x}_r\}$$

siendo

$$A(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 t) & \sin(\theta_0 t) \\ -\sin(\theta_0 t) & \cos(\theta_0 t) \end{pmatrix}$$

Resulta inmediato que H es continua, con $H(F, t) \neq F$ para todo $F \in \partial(F_n(U_0))$, $t \in I$.

En consecuencia,

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})) =$$

$$= \begin{cases} I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 2)) & \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > 1 \\ I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(0, 0)) & \text{si } \alpha^2 + \beta^2 < 1 \end{cases}$$

La primera igualdad es resultado de aplicar la propiedad de invariancia por homotopías a H , mientras que la segunda es consecuencia de la proposición 3.3. \square

Observación 3.5. $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 2)) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(-2, -2))$.

Demostración. Sea $U_0 = B(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Basta construir una homotopía $H : F_n(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$ del tipo

$$H(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}, t) = \{A(t)\bar{x}_1, \dots, A(t)\bar{x}_r\}$$

con

$$A(t) = 2 \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

y aplicar la propiedad de invariancia por homotopías. \square

Observación 3.6. Por ser $D(0, 0)$ la aplicación constante igual a $\bar{0}$, tendremos que

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(0, 0)) = 1.$$

Proposición 3.7. $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 2)) = 1$.

Demostración. Consideremos $U_0 = B(\bar{0}, 1)$ un entorno abierto de $\bar{0}$. Definimos la homotopía $H : F_n(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^2)$ que establece

$$H(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}, t) = \begin{cases} \{A(t)(2\bar{x}_1), \dots, A(t)(2\bar{x}_r)\} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \{2(1-t)A(1/2)(2\bar{x}_1), \dots, 2(1-t)A(1/2)(2\bar{x}_r)\} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

siendo

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n+1}2t) & \sin(\frac{2\pi}{n+1}2t) \\ -\sin(\frac{2\pi}{n+1}2t) & \cos(\frac{2\pi}{n+1}2t) \end{pmatrix}$$

Hacemos observar que consideramos $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$ si $i \neq j$. Es obvio que $r \leq n$. Resulta claro que H es continua, con $H_0 = F_n(D(2, 2))$ y $H_1 = F_n(D(0, 0))$.

Veamos que $H(K, t) \neq K$ para todo $(K, t) \in \partial(F_n(U_0)) \times I$. Primero lo demostraremos para $t \in [0, 1/2]$.

Sea $K = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \in \partial(F_n(U_0))$. Entonces existe un \bar{x}_i tal que $\bar{x}_i \in \partial(B(\bar{0}, 1))$. Ocorre que $|(x_{i_1}, x_{i_2})| = 1$.

Es claro que

$$|A(t)2\bar{x}_i| = 2|(x_{i_1}, x_{i_2})| = 2.$$

La primera igualdad se debe a que $A(t)$ es un giro (que preserva el módulo).

Por consiguiente, $A(t)2\bar{x}_i \notin cl(U_0)$ para todo $t \in [0, 1/2]$, lo que implica que $H(K, t) \neq K$ para todo $(K, t) \in \partial(F_n(U_0)) \times [0, 1/2]$.

Veamos, ahora, el caso en que $t \in [1/2, 1]$.

Sea $K = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \in \partial(F_n(U_0))$. Tendremos que existe un $\bar{x}_i \in \partial(B(\bar{0}, 1))$. Entonces $|(x_{i_1}, x_{i_2})| = 1$.

Razonaremos por reducción al absurdo. Si existiese un $t_0 \in [1/2, 1]$ tal que

$$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} = \{2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_1, \dots, 2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_r\},$$

entonces tendríamos un $\bar{x}_j \in \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ que cumple

$$2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_j = \bar{x}_i.$$

Resulta

$$2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_i = 4(1-t_0) \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n+1) & \sin(2\pi/n+1) \\ -\sin(2\pi/n+1) & \cos(2\pi/n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{pmatrix}$$

De manera que

$$|2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_i| = 4(1-t_0)|(x_{i_1}, x_{i_2})| = 4(1-t_0).$$

Tenemos, por hipótesis, que existe un $\bar{x}_k \in \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ tal que

$$\bar{x}_k = 2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_i.$$

Como $|\bar{x}_k| \leq 1$ y $|\bar{x}_k| = 4(1-t_0)$, entonces

$$\begin{aligned} 1 \geq 4(1-t_0) &= |4(1-t_0) \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n+1) & \sin(2\pi/n+1) \\ -\sin(2\pi/n+1) & \cos(2\pi/n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \end{pmatrix}| \geq \\ &\geq |4(1-t_0) \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n+1) & \sin(2\pi/n+1) \\ -\sin(2\pi/n+1) & \cos(2\pi/n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \end{pmatrix}| = \\ &= |2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_j| = |\bar{x}_i| = 1. \end{aligned}$$

Así, $4(1-t_0) = 1$ de modo que $t_0 = 3/4$. Sustituyendo t_0 por su valor, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= 2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_j = A(1/2)\bar{x}_j = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n+1) & \sin(2\pi/n+1) \\ -\sin(2\pi/n+1) & \cos(2\pi/n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo que no es sino un giro de ángulo $2\pi/(n+1)$.

Igualmente

$$\bar{x}_k = 2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_i = A(1/2)\bar{x}_i = A(1/2)^2\bar{x}_j.$$

De este modo se obtiene que el cardinal de $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ es mayor o igual que $n+1$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, no existe un $t_0 \in [1/2, 1]$ tal que

$$\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} = \{2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_1, \dots, 2(1-t_0)A(1/2)2\bar{x}_r\},$$

con lo que $H(K, t) \neq K$ para todo $(K, t) \in \partial(F_n(U_0)) \times I$.

Podemos afirmar, por la propiedad de invariancia por homotopías aplicada a H , que

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{0\}, D(2, 2)) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{0\}, D(0, 0)) = 1. \quad \square$$

Observación 3.8. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado. El estudio de $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$ se reduce, por lo visto hasta ahora, a los siguientes casos:

- 1) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(0, 0))$.
- 2) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 0))$.
- 3) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(-2, 0))$.
- 4) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, -2))$.

Observación 3.9. Sea $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal con $\{0\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado. El estudio de $I_{\mathbb{R}}(\{0\}, f)$ se reduce, tal como se hizo con \mathbb{R}^2 a los siguientes casos:

- 1) $I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, D(0))$.
- 2) $I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, D(2))$.
- 3) $I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, D(-2))$.

El caso 1) no ofrece dificultades ya que, por ser constante igual a 0,

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, D(0)) = 1.$$

El análisis de los casos repulsores 2) y 3) facilitará el estudio del índice en \mathbb{R}^m . En particular resolverá los casos 2) y 3) de la observación 3.8.

Lema 3.10. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un sistema semidinámico, con $0 \in U$ y $f(x) = 2x$. Entonces $I_{\mathbb{R}}^{F_1}(\{0\}, f) = -1$ y $I_{\mathbb{R}}^{F_2}(\{0\}, f) = 0$.

Demostración. La primera igualdad es un resultado conocido. Demostremos la segunda.

Sea $U_0 = (-1/2, 1/2)$ y sea $H : F_2(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_2(\mathbb{R})$ la homotopía

$$H(\{x_1, x_2\}, t) = \{(1-t)f(x_1) + t(-1), (1-t)f(x_2) + t(1)\}$$

para todo $x_1 \leq x_2$.

Ocurre que $H_0 = F_2(f)$ y $H_1 = \{-1, 1\}$ constante.

Resulta sencillo demostrar la continuidad de H .

Veamos que $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F_2(U_0)) \times I$.

Sea $\bar{x} = \{x_1, x_2\} \in \partial(F_2(U_0))$ con $x_1 \leq x_2$. Entonces, a) $x_1 = -1/2$ ó b) $x_2 = 1/2$.

Si se da a), tenemos que, para todo $t \in I$,

$$\{(1-t)f(x_1) + t(-1), (1-t)f(x_2) + t(1)\} =$$

$$= \{-1, (1-t)f(x_2) + t\} \neq \{-1/2, x_2\}.$$

Si se da b), la demostración es análoga.

De este modo, aplicando la propiedad de invariancia por homotopías del índice de punto fijo, tendremos

$$I_{\mathbb{R}}^{F_2}(\{0\}, f) = i_{F_2(\mathbb{R})}(\{-1, 1\}, F_2(U_0)) = 0. \quad \square$$

Proposición 3.11. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un sistema semidinámico, con $0 \in U$ y $f(x) = 2x$. Entonces, dado $n \geq 3$,

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. Para calcular este índice seguiremos un camino indirecto que pasa por el estudio de $I_J^{F_n}(\{0\}, g)$, siendo $g : J \rightarrow J$, con $g(x) = x^{1/3}$ y $J = [-1, 1]$.

Resulta

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, g).$$

La primera igualdad se debe a la propiedad conmutativa del índice de punto fijo en ANRs. La propiedad de invariancia por homotopías garantiza la segunda igualdad. Basta considerar, dado $U_0 = (-1/2, 1/2)$, la homotopía $H : F_n(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_n(J)$ que establezca la asignación

$$H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) = \{(1-t)f(x_1) + tg(x_1), \dots, (1-t)f(x_r) + tg(x_r)\}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$I_J^{F_n}(J, g) = \Lambda(F_n(g)) = \Lambda(F_n(\text{id})) = 1.$$

La primera igualdad se debe a la propiedad de normalización del índice de punto fijo. Al ser $\text{id} \simeq g$ obtenemos la segunda de las igualdades. La última es consecuencia de que $F_n(J)$ es un AR, por lo que las homología singular con coeficientes racionales son

$$H_m(F_n(J)) = 0 \quad \forall m \geq 1, \quad H_0(F_n(J)) = \mathbb{Q}.$$

Dado $\epsilon > 0$, denotaremos $V_1 = B(-1, \epsilon)$, $V_2 = B(0, \epsilon)$ y $V_3 = B(1, \epsilon)$.

Sean, para $\epsilon \sim 0$,

$$U_n(\{-1\}) = \{\bar{x} \in F_n(J) : \bar{x} \subset V_1\},$$

$$U_n(\{-1, 0\}) = \{\bar{x} \in F_n(J) : \bar{x} \subset \bigcup_{i=1,2} V_i \text{ y } \bar{x} \cap V_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, 2\},$$

$$U_n(\{-1, 0, 1\}) = \{\bar{x} \in F_n(J) : \bar{x} \subset \bigcup_{i=1}^3 V_i \text{ y } \bar{x} \cap V_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, 2, 3\}.$$

Resulta claro que $U_n(\{-1\})$, $U_n(\{-1, 0\})$ y $U_n(\{-1, 0, 1\})$ son entornos abiertos en $F_n(J)$ de los puntos respectivos de $F_n(J)$.

Entonces, debido a la propiedad aditiva del índice de punto fijo en ANRs, tendremos

$$\begin{aligned} 1 &= I_J^{F_n}(J, g) = i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{0\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{0, 1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo, que es el cálculo de $I_J^{F_n}(\{0\}, g) = i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{0\}))$, será posible hallando el resto de los índices de la igualdad arriba expresada.

Veamos, primeramente, que

$$\begin{aligned} i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1\})) &= i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{1\})) = \\ &= i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) = 1. \end{aligned}$$

En los tres índices, el conjunto compacto, invariante y aislado, es un punto $\bar{x} \in F_n(J)$, atractor para $F_n(g)$, que admite un entorno $U_n(\bar{x})$, abierto de $F_n(J)$, con $U_n(\bar{x})$ contractible.

Teniendo en cuenta estas observaciones, sólo queda construir, para cada \bar{x} una homotopía, análoga a la del lema 3.10, $H^{\bar{x}} : cl(U_n(\bar{x})) \times I \rightarrow F_n(J)$ de manera que $H_0^{\bar{x}} = F_n(g)$, $H_1^{\bar{x}} = \bar{x}$ constante y $H^{\bar{x}}(\bar{y}, t) \neq \bar{y}$ para todo $(\bar{y}, t) \in \partial(U_n(\bar{x})) \times I$.

Una vez hecho esto, tendremos que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\bar{x})) = i_{F_n(J)}(\bar{x}, U_n(\bar{x})) = 1.$$

Un modo alternativo de probar este resultado es imitar la demostración hecha en la proposición 2.7.

En las próximas líneas, dedicaremos nuestro esfuerzo a ver que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0\})) = i_{F_{n-1}(J)}(F_{n-1}(g), U_{n-1}(\{0\})).$$

Sea $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \in U_n(\{-1, 0\})$, $x_1 < \dots < x_r$, con $\{x_1, \dots, x_q\} \subset B(-1, \epsilon)$ y $\{x_{q+1}, \dots, x_r\} \subset B(0, \epsilon)$.

Sea $F : U_n(\{-1, 0\}) \rightarrow F_{n-1}(J)$ una aplicación definida así

$$F(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{g(x_{q+1}), \dots, g(x_r)\}.$$

Veamos que F es continua.

Sea $\epsilon_0 > 0$, y sean $\bar{x}, \bar{x}' \in U_n(\{-1, 0\})$,

$$\bar{x} = \{x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r\} \text{ y } \bar{x}' = \{x'_1, \dots, x'_{q'}, x'_{q'+1}, \dots, x'_{r'}\}$$

de modo que $d_H(\bar{x}, \bar{x}') < \delta$, siendo δ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(g(x), g(y)) < \epsilon_0$.

En esta situación ocurre que

$$\text{Max}\{Sup_{x_i \in \bar{x}}\{d(x_i, \bar{x}')\}, Sup_{x'_i \in \bar{x}'}\{d(x'_i, \bar{x})\}\} < \delta.$$

Queremos ver que

$$d_H(F(\bar{x}), F(\bar{x}')) = d_H(\{g(x_{q+1}), \dots, g(x_r)\}, \{g(x'_{q'+1}), \dots, g(x'_{r'})\}) < \epsilon_0.$$

Dado l con $r \geq l > q$, tendremos que $d(g(x_l), F(\bar{x}')) < \epsilon_0$. En efecto, como existe un $x'_l \in \{x'_{q'+1}, \dots, x'_{r'}\}$ tal que $d(x_l, x'_l) = d(x_l, \bar{x}') < \delta$, entonces, aplicando g , es inmediato que $d(g(x_l), F(\bar{x}')) < \epsilon_0$.

De manera análoga, dado l' con $r' \geq l' > q'$, tendremos que $d(g(x'_{l'}), F(\bar{x})) < \epsilon_0$.

Por consiguiente, $d_H(F(\bar{x}), F(\bar{x}')) < \epsilon_0$, lo que demuestra la continuidad de F .

Sea $G : U_{n-1}(\{0\}) \rightarrow F_n(J)$, definida así

$$G(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, x_1, \dots, x_r\}.$$

Resulta evidente que G es continua.

Aplicaremos, más adelante, la propiedad conmutativa del índice de punto fijo a las aplicaciones F y G .

$F \circ G : U_{n-1}(\{0\}) \rightarrow F_{n-1}(J)$ cumple que

$$(F \circ G)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{g(x_1), \dots, g(x_r)\} = F_{n-1}(g)(\{x_1, \dots, x_r\}).$$

Por otra parte, $G \circ F : F^{-1}(U_{n-1}(\{0\})) \rightarrow F_n(J)$ es

$$(G \circ F)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, g(x_{q+1}), \dots, g(x_r)\}.$$

Es claro que $G \circ F$ se extiende de manera natural a $cl(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\})))$. Veamos que $G \circ F$ es homótopa a $F_n(g) : cl(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \rightarrow F_n(J)$.

Sea la homotopía

$$H : cl(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \times I \rightarrow F_n(J)$$

con

$$H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) =$$

$$= \{(1-t)g(x_1) + t(-1), \dots, (1-t)g(x_q) + t(-1), g(x_{q+1}), \dots, g(x_r)\}.$$

Es obvio que $H_0 = F_n(g)$, $H_1 = G \circ F$.

Demostremos que H es continua y que se comporta adecuadamente en el conjunto $\partial(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \times I$.

Veamos la continuidad de H . Sea $\epsilon_0 > 0$ y $(\bar{x}, t) \in cl(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \times I$. Consideremos $(\bar{x}', t') \in cl(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \times I$ con $d(t, t') < \delta$, $d_H(\bar{x}, \bar{x}') <$

δ , siendo $\delta < \epsilon_0/4$ suficientemente pequeño, de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces, $d(g(x), g(y)) < \epsilon_0/4$.

Tenemos

$$H(\bar{x}, t) = \{(1-t)g(x_1) + t(-1), \dots, (1-t)g(x_q) + t(-1), g(x_{q+1}), \dots, g(x_r)\}$$

y

$$H(\bar{x}', t') = \{(1-t')g(x'_1) + t'(-1), \dots, (1-t')g(x'_{q'}) + t'(-1), \\ , g(x'_{q'+1}), \dots, g(x'_{r'})\}.$$

Dado l con $q \geq l \geq 1$, tendremos que

$$d((1-t)g(x_l) + t(-1), H(\bar{x}', t')) < \epsilon_0.$$

Esto se debe a que

$$d((1-t)g(x_l) + t(-1), H(\bar{x}', t')) \leq \\ \leq d((1-t)g(x_l) + t(-1), (1-t')g(x'_{l'}) + t'(-1))$$

siendo $x'_{l'} \in \{x'_1, \dots, x'_{q'}\}$ aquel que cumpla

$$d(x_l, x'_{l'}) = d(x_l, \bar{x}') < \delta.$$

Obsérvese que esto implica, aplicando g , que $d(g(x_l), g(x'_{l'})) < \epsilon_0/4$.

Podemos decir que

$$d((1-t)g(x_l) + t(-1), (1-t')g(x'_{l'}) + t'(-1)) \leq |g(x_l) - g(x'_{l'})| + \\ + |t'g(x'_{l'}) - tg(x_l)| + |t' - t| < \epsilon_0/4 + |(g(x'_{l'}) - g(x_l))t + g(x'_{l'})(t' - t)| + \epsilon_0/4 < \epsilon_0.$$

De modo que

$$d((1-t)g(x_l) + t(-1), H(\bar{x}', t')) < \epsilon_0.$$

Veamos, dado l , con $r \geq l > q$, que

$$d(g(x_l), H(\bar{x}', t')) < \epsilon_0.$$

Es claro que existe un $x'_{l'} \in \{x'_{q'+1}, \dots, x'_{r'}\}$ tal que $d(x_l, x'_{l'}) = d(x_l, \bar{x}') < \delta$, de modo que, aplicando g , conseguimos

$$d(g(x_l), H(\bar{x}', t')) \leq d(g(x_l), g(x'_{l'})) < \epsilon_0/4 < \epsilon_0.$$

De manera idéntica obtendremos que

$$d((1-t')g(x'_{l'}) + t'(-1), H(\bar{x}, t)) < \epsilon_0 \text{ con } q' \geq l' \geq 1$$

$$d(g(x'_{l'}), H(\bar{x}, t)) < \epsilon_0 \text{ con } r' \geq l' > q'.$$

Resulta, pues, que $d_H(H(\bar{x}, t), H(\bar{x}', t')) < \epsilon_0$, de modo que H es continua.

Demostremos que $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) \times I$.

Sea $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \in \partial(F^{-1}(U_{n-1}(\{0\})))$. Se pueden dar los supuestos

- a) $x_q = -1 + \epsilon$,
- b) $x_{q+1} = -\epsilon^3$,
- c) $x_r = \epsilon^3$.

En el caso a) tenemos

$$x_q > (1-t)g(x_q) + t(-1) \geq \cdots \geq (1-t)g(x_1) + t(-1)$$

para todo $t \in I$.

$$x_q < g(x_{q+1}) \leq \cdots \leq g(x_r).$$

De modo que $\bar{x} \neq H(\bar{x}, t) \quad \forall t \in I$.

En el caso b),

$$g(x_{q+1}) < x_{q+1} \leq \cdots \leq x_r,$$

$$g(x_{q+1}) > x_q \geq \cdots \geq x_1.$$

Por consiguiente, $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $t \in I$.

En el caso c) ocurre

$$g(x_r) > x_r \geq \cdots \geq x_1.$$

Así, $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $t \in I$.

Podemos afirmar ya que

$$\begin{aligned} i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0\})) &= i_{F_n(J)}(F_n(g), F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) = \\ &= i_{F_n(J)}(G \circ F, F^{-1}(U_{n-1}(\{0\}))) = i_{F_{n-1}(J)}(F \circ G, U_{n-1}(\{0\})) = \\ &= i_{F_{n-1}(J)}(F_{n-1}(g), U_{n-1}(\{0\})). \end{aligned}$$

La primera y cuarta igualdades son evidentes. La segunda es consecuencia de la propiedad de invariancia por homotopías del índice de punto fijo, aplicada a H . La tercera igualdad es fruto de la propiedad conmutativa, aplicada a F y G .

De manera parecida se demuestra que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})) = i_{F_{n-2}(J)}(F_{n-2}(g), U_{n-2}(\{0\})).$$

Sea $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \in U_n(\{-1, 0, 1\})$, con $x_1 < \cdots < x_r$, y $\{x_1, \dots, x_p\} \subset B(-1, \epsilon)$, $\{x_{p+1}, \dots, x_q\} \subset B(0, \epsilon)$, $\{x_{q+1}, \dots, x_r\} \subset B(1, \epsilon)$

Sea $F : U_n(\{-1, 0, 1\}) \rightarrow F_{n-2}(J)$ con $F(\bar{x}) = \{g(x_{p+1}), \dots, g(x_q)\}$.

Resulta, tal como se hacía en el caso anterior, que F es continua.

Definimos $G : U_{n-2}(\{0\}) \rightarrow F_n(J)$ como

$$G(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, x_1, \dots, x_r, 1\},$$

que también es continua.

Tenemos $F \circ G : U_{n-2}(\{0\}) \rightarrow F_{n-2}(J)$, que cumple

$(F \circ G)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{g(x_1), \dots, g(x_r)\} = F_{n-2}(g)(\{x_1, \dots, x_r\})$,
y $G \circ F : F^{-1}(U_{n-2}(\{0\})) \rightarrow F_n(J)$, que establece la asignación

$$(G \circ F)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, g(x_{p+1}), \dots, g(x_q), 1\}.$$

Ocurre que $G \circ F$ se extiende de manera natural a $cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\})))$.
Veamos que $F \circ G$ es homótopa a $F_n(g) : cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \rightarrow F_n(J)$ vía
la homotopía

$$H : cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \times I \rightarrow F_n(J)$$

que definimos como

$$H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) = \{(1-t)g(x_1) + t(-1), \dots, (1-t)g(x_p) + t(-1), \\
, g(x_{p+1}), \dots, g(x_q), (1-t)g(x_{q+1}) + t(1), \dots, (1-t)g(x_r) + t(1)\}.$$

Es claro que $H_0 = F_n(g)$ y $H_1 = G \circ F$. Como en el caso anterior, resulta
rutinario demostrar que H es continua.

Igualmente se ve que $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \times I$.

De esta manera,

$$\begin{aligned} i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})) &= i_{F_n(J)}(F_n(g), F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) = \\ &= i_{F_n(J)}(G \circ F, F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) = i_{F_{n-2}(J)}(F \circ G, U_{n-2}(\{0\})) = \\ &= i_{F_{n-2}(J)}(F_{n-2}(g), U_{n-2}(\{0\})), \end{aligned}$$

que es el resultado que estábamos buscando.

Si recordamos la igualdad del comienzo de la demostración,

$$\begin{aligned} 1 &= I_J^{F_n}(J, g) = i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{0\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{0, 1\})) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) + \\ &\quad + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})), \end{aligned}$$

y sustituimos adecuadamente, caeremos en la cuenta de que

$$I_J^{F_n}(\{0\}, g) = -2 - 2I_J^{F_{n-1}}(\{0\}, g) - I_J^{F_{n-2}}(\{0\}, g).$$

Por otro lado, sabemos que

$$I_J^{F_1}(\{0\}, g) = -1,$$

$$I_J^{F_2}(\{0\}, g) = 0.$$

De modo que, por un argumento de inducción, resulta

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

□

Lema 3.12. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un sistema semidinámico, con $0 \in U$ y $f(x) = -2x$. Entonces $I_{\mathbb{R}}^{F_1}(\{0\}, f) = 1$ y $I_{\mathbb{R}}^{F_2}(\{0\}, f) = 0$

Demostración. La primera igualdad es inmediata. Veamos la segunda.

Sea $U_0 = (-1/2, 1/2)$. Definimos la homotopía $H : F_2(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_2(\mathbb{R})$ como

$$H(\{x_1, x_2\}, t) = \{(1-t)f(x_1) + t(1), (1-t)f(x_2) + t(-1)\}$$

siendo $x_1 \leq x_2$.

Ocurre que $H_0 = F_n(f)$ y $H_1 = \{-1, 1\}$ constante. La demostración de la continuidad de H es sencilla.

Veamos que $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F_2(U_0)) \times I$.

Sea $\bar{x} = \{x_1, x_2\} \in \partial(F_2(U_0))$. Tendremos, entonces, que
a) $x_1 = -1/2$ ó b) $x_2 = 1/2$.

Si se da a),

$$\begin{aligned} & \{(1-t)f(x_1) + t(1), (1-t)f(x_2) + t(-1)\} = \\ & = \{1, (1-t)f(x_2) + t(-1)\} \neq \{-1/2, x_2\} \end{aligned}$$

y esto para todo $t \in I$.

Si se cumple b), el cálculo es análogo.

En consecuencia, $I_{\mathbb{R}}^{F_2}(\{0\}, f) = i_{F_2(\mathbb{R})}(H_1, F_2(U_0)) = 0$. □

Proposición 3.13. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un sistema semidinámico, con $0 \in U$ y $f(x) = -2x$. Ocurre, entonces, que

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Demostración. Bastará estudiar los casos en que $n \geq 3$. El modo de calcular este índice será semejante al utilizado para el caso de $f(x) = 2x$. Utilizaremos un camino indirecto que pasa por el estudio de $I_J^{F_n}(\{0\}, g)$, donde $g : J \rightarrow J$ es la aplicación $g(x) = -x^{1/3}$, con $J = [-1, 1]$.

Resulta claro que $\{0\}$ es un conjunto compacto, invariante, aislado y repulsor para g . Es sencillo comprobar que

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, g).$$

La primera igualdad se debe a la propiedad conmutativa del índice de punto fijo. La propiedad de invariancia por homotopías garantiza la segunda igualdad. Basta considerar, dado $U_0 = (-1/2, 1/2)$, la homotopía $H : F_n(\text{cl}(U_0)) \times I \rightarrow F_n(J)$, que establece la asignación

$$H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) = \{(1-t)f(x_1) + tg(x_1), \dots, (1-t)f(x_r) + tg(x_r)\}$$

para $x_1 < \dots < x_r$.

Por otro lado,

$$I_J^{F_n}(J, g) = \Lambda(F_n(g)) = \Lambda(F_n(id)) = 1.$$

La primera igualdad se debe a la propiedad de normalización del índice de punto fijo. La segunda, a que $id \simeq g$, mientras que la última es imputable al hecho de que $F_n(J)$ es un AR, por lo que las homología singular con coeficientes racionales son

$$H_m(F_n(J)) = 0 \quad \forall m \geq 1, \quad H_0(F_n(J)) = \mathbb{Q}.$$

Debido a la propiedad aditiva del índice de punto fijo,

$$\begin{aligned} 1 = I_J^{F_n}(J, g) &= I_J^{F_n}(\{0\}, g) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) + \\ &+ i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo, que es calcular $I_J^{F_n}(\{0\}, g)$, será posible hallando el resto de los índices de la igualdad arriba expresada.

Por lo comentado en el caso de $g(x) = x^{1/3}$, resulta inmediato que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) = 1.$$

Bastará construir la homotopía $H : cl(U_n(\{-1, 1\})) \times I \rightarrow F_n(J)$ definida como

$$\begin{aligned} H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) &= \{(1-t)g(x_1) + t(1), \dots, (1-t)g(x_q) + t(1), \\ &, (1-t)g(x_{q+1}) + t(-1), \dots, (1-t)g(x_r) + t(-1)\} \end{aligned}$$

donde $\{x_1, \dots, x_q\} \subset B(-1, \epsilon)$ y $\{x_{q+1}, \dots, x_r\} \subset B(1, \epsilon)$. Ocurre que $H_0 = F_n(g)$ y $H_1 = \{-1, 1\}$ constante.

Podemos afirmar que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) = i_{F_n(J)}(H_1, U_n(\{-1, 1\})) = 1.$$

A continuación veremos que

$$i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})) = i_{F_{n-2}(J)}(F_{n-2}(g), U_{n-2}(\{0\})) = I_J^{F_{n-2}}(\{0\}, g).$$

Sea $F : U_n(\{-1, 0, 1\}) \rightarrow F_{n-2}(J)$ la aplicación definida como

$$F(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{g(x_{p+1}), \dots, g(x_q)\}$$

donde $x_1 < \dots < x_r$, con $\{x_1, \dots, x_p\} \subset B(-1, \epsilon)$, $\{x_{p+1}, \dots, x_q\} \subset B(0, \epsilon)$ y $\{x_{q+1}, \dots, x_r\} \subset B(1, \epsilon)$.

Resulta, tal como se vio en la proposición anterior, que F es continua.

Sea $G : U_{n-2}(\{0\}) \rightarrow F_n(J)$ con $G(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, x_1, \dots, x_r, 1\}$.

Es claro que G también es continua.

Tendremos que $F \circ G : U_{n-2}(\{0\}) \rightarrow F_{n-2}(J)$ cumple

$$(F \circ G)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{g(x_1), \dots, g(x_r)\}.$$

Por otro lado, $G \circ F : F^{-1}(U_{n-2}(\{0\})) \rightarrow F_n(J)$ es

$$(G \circ F)(\{x_1, \dots, x_r\}) = \{-1, g(x_{p+1}), \dots, g(x_q), 1\}$$

para $x_1 < \dots < x_r$. Resulta evidente que existe una extensión natural de $G \circ F$ a $cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\})))$.

Veamos que $G \circ F$ es homótopa a $F_n(g) : cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \rightarrow F_n(J)$. Construimos, para ello, la homotopía $H : cl(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \times I \rightarrow F_n(J)$ definida como

$$H(\{x_1, \dots, x_r\}, t) = \{(1-t)g(x_1) + t(1), \dots, (1-t)g(x_p) + t(1),$$

$$, g(x_{p+1}), \dots, g(x_q), (1-t)g(x_{q+1}) + t(-1), \dots, (1-t)g(x_r) + t(-1)\}.$$

Resulta que $H_0 = F_n(g)$ y $H_1 = G \circ F$. La continuidad de H se demuestra como en el caso de $f(x) = 2x$.

Veamos que $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \times I$.

Sea $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \in \partial(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\})))$ con $x_1 < \dots < x_r$. Entonces pueden darse varias situaciones:

- a) $x_p = -1 + \epsilon$,
- b) $x_{p+1} = -\epsilon^3$,
- c) $x_q = \epsilon^3$,
- d) $x_{q+1} = 1 - \epsilon$.

Si se da a), entonces

$$x_p < (1-t)g(x_p) + t(1) \leq \dots \leq (1-t)g(x_1) + t(1),$$

$$x_p < g(x_{p+1}), \dots, x_p < g(x_q),$$

$$x_p > (1-t)g(x_{q+1}) + t(-1) \geq \dots \geq (1-t)g(x_r) + t(-1).$$

Si se da b), tendremos

$$g(x_{p+1}) > x_q \geq \dots \geq x_1,$$

$$g(x_{p+1}) < x_{q+1} \leq \dots \leq x_r.$$

En el caso c) ocurre

$$g(x_q) < x_{p+1} \leq \dots \leq x_r,$$

$$g(x_q) > x_p \geq \dots \geq x_1.$$

Finalmente, en d) se da la situación siguiente

$$x_{q+1} > g(x_{p+1}), \dots, x_{q+1} > g(x_q),$$

$$x_{q+1} > (1-t)g(x_{q+1}) + t(-1) \geq \cdots \geq (1-t)g(x_r) + t(-1),$$

$$x_{q+1} < (1-t)g(x_p) + t(1) \leq \cdots \leq (1-t)g(x_1) + t(1).$$

Por consiguiente, $H(\bar{x}, t) \neq \bar{x}$ para todo $(\bar{x}, t) \in \partial(F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) \times I$.

Volviendo a los índices, tenemos

$$\begin{aligned} i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})) &= i_{F_n(J)}(F_n(g), F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) = \\ &= i_{F_n(J)}(G \circ F, F^{-1}(U_{n-2}(\{0\}))) = i_{F_{n-2}(J)}(F \circ G, U_{n-2}(\{0\})) = \\ &= i_{F_{n-2}(J)}(F_{n-2}(g), U_{n-2}(\{0\})). \end{aligned}$$

La primera igualdad y la cuarta resultan evidentes. La segunda y la tercera se deben a las propiedades de invariancia por homotopías y conmutativa del índice de punto fijo.

De este modo, recordando que

$$\begin{aligned} 1 = I_J^{F_n}(J, g) &= I_J^{F_n}(\{0\}, g) + i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 1\})) + \\ &+ i_{F_n(J)}(F_n(g), U_n(\{-1, 0, 1\})) \end{aligned}$$

obtenemos que

$$1 = I_J^{F_n}(\{0\}, g) + 1 + I_J^{F_{n-2}}(\{0\}, g).$$

Por consiguiente,

$$I_J^{F_n}(\{0\}, g) = -I_J^{F_{n-2}}(\{0\}, g).$$

Además, como $I_J^{F_1}(\{0\}, g) = 1$ y $I_J^{F_2}(\{0\}, g) = 0$, resulta inmediato ver que

$$I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f) = I_J^{F_n}(\{0\}, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

□

Una vez resuelto el problema del cómputo de $I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, f)$, con $\{0\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a la aplicación lineal f , el paso siguiente consiste en calcular los índices

- 1) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(0, 0))$,
- 2) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 0))$,
- 3) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(-2, 0))$,
- 4) $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, -2))$,

que determinarán, por lo dicho en la observación 3.8, el valor de $I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$ cuando $\bar{0}$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a la aplicación lineal $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Los cálculos de 2) y 3) son corolario de los resultados conseguidos en \mathbb{R} .

Corolario 3.14.

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, 0)) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, 2x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(-2, 0)) = I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, -2x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

La demostración es consecuencia inmediata de la aplicación de la propiedad conmutativa de nuestro índice.

Proposición 3.15. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un sistema semidinámico, con $\bar{0} \in U$ y $f(\bar{x}) = D(2, -2)\bar{x}$. Entonces

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, -2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. Dado un sistema dinámico determinado (X, F) , denotaremos, para abreviar, $i_{F_n(X)}(F_n(F), U_n(\{p_1, \dots, p_r\})) = i_n(\{p_1, \dots, p_r\})$.

Consideremos el sistema dinámico $G = s \circ f : S^2 \rightarrow S^2$, donde $s : S^2 \rightarrow S^2$ es una simetría con respecto al plano $\{z = 0\}$ y $f : S^2 \rightarrow S^2$ es el sistema dinámico

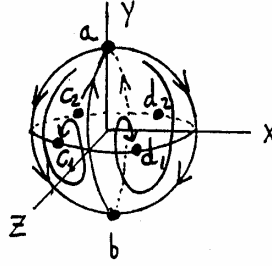


Figura III.1

La demostración de la proposición va a requerir el cálculo previo de $I_{S^2}^{F_n}(S^2, G)$. A ello dedicaremos casi todos nuestros esfuerzos. Tenemos que el punto fijo a es un conjunto compacto, invariante y aislado, de tipo $D(2, -1/2)$ (teorema de Grobman-Hartman) o, lo que es lo mismo a efectos del cálculo del índice, de tipo $D(2, 0)$. Igualmente, el punto fijo b es un conjunto compacto, invariante y aislado, de tipo $D(-2, 1/2)$ o, lo que es equivalente a efectos de índice, de tipo $D(-2, 0)$. Los pares $\{c_1, c_2\}$ y $\{d_1, d_2\}$ son órbitas de período 2, atractoras.

Entonces, si $n \geq 6$, por la propiedad aditiva del índice de punto fijo, se tiene

$$I_{S^2}^{F_n}(S^2, G) = i_n(\{a\}) + i_n(\{b\}) + i_n(\{a, b\}) + i_n(\{c_1, c_2\}) + i_n(\{d_1, d_2\}) +$$

$$\begin{aligned}
& +i_n(\{a, c_1, c_2\}) + i_n(\{a, d_1, d_2\}) + i_n(\{b, c_1, c_2\}) + i_n(\{b, d_1, d_2\}) + \\
& +i_n(\{a, b, c_1, c_2\}) + i_n(\{a, b, d_1, d_2\}) + i_n(\{c_1, c_2, d_1, d_2\}) + \\
& +i_n(\{a, c_1, c_2, d_1, d_2\}) + i_n(\{b, c_1, c_2, d_1, d_2\}) + i_n(\{a, b, c_1, c_2, d_1, d_2\}).
\end{aligned}$$

Si $n < 6$, basta quitar los sumandos que no procedan.

Al ser $\{c_1, c_2\}$ y $\{d_1, d_2\}$ órbitas atractoras, aplicando la propiedad conmutativa y la de invariancia por homotopías del índice de punto fijo, obtenemos, para $n \geq 6$, que

$$\begin{aligned}
I_{S^2}^{F_n}(S^2, G) = & i_n(\{a\}) + i_n(\{b\}) + i_n(\{a, b\}) + 1 + 1 + 2i_{n-2}(\{a\}) + 2i_{n-2}(\{b\}) + \\
& + 2i_{n-2}(\{a, b\}) + 1 + i_{n-4}(\{a\}) + i_{n-4}(\{b\}) + i_{n-4}(\{a, b\}).
\end{aligned}$$

Consideremos el sistema dinámico $f : X \rightarrow X$,

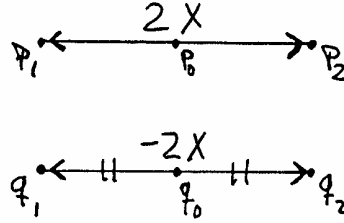


Figura III.2

Requerimos esta construcción para completar el cálculo de $I_{S^2}^{F_n}(S^2, G)$. Resulta sencillo ver, si se apela a la propiedad de normalización, que

$$I_X^{F_n}(X, f) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Entonces, si $n \geq 6$,

$$\begin{aligned}
3 = & 1 + i_n(\{p_0\}) + 1 + i_n(\{q_0\}) + i_{n-1}(\{p_0\}) + 1 + i_{n-1}(\{q_0\}) + i_{n-1}(\{p_0\}) + \\
& + i_n(\{p_0, q_0\}) + i_{n-1}(\{q_0\}) + 1 + i_{n-2}(\{p_0\}) + i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-2}(\{q_0\}) + \\
& + 1 + i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-2}(\{p_0\}) + 1 + i_{n-2}(\{q_0\}) + i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) + \\
& + i_{n-3}(\{p_0\}) + 1 + i_{n-3}(\{q_0\}) + i_{n-3}(\{p_0\}) + i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-3}(\{q_0\}) + \\
& + i_{n-4}(\{p_0\}) + i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-4}(\{q_0\}) + i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-4}(\{p_0, q_0\}).
\end{aligned}$$

En caso de que $1 < n < 6$, basta quitar del miembro de la derecha de la igualdad los sumandos que corresponda.

Si $n = 2$, entonces $3 = i_2(\{p_0, q_0\}) + 4$, con lo que

$$i_2(\{p_0, q_0\}) = -1.$$

Si $n = 3$, entonces $3 = i_3(\{p_0, q_0\}) + 2$, con lo que

$$i_3(\{p_0, q_0\}) = 1.$$

Si $n = 4$, entonces $3 = i_4(\{p_0, q_0\}) + 3$, con lo que

$$i_4(\{p_0, q_0\}) = 0.$$

Si $n = 5$, entonces $3 = i_5(\{p_0, q_0\}) + 3$, con lo que

$$i_5(\{p_0, q_0\}) = 0.$$

Si $n \geq 6$, $n = 2k$ par, entonces

$$\begin{aligned} 3 = & 2(-1) + 2(-1)^{k-1} + i_n(\{p_0, q_0\}) + 2i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) + 2i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) + \\ & + 2(-1) + 2(-1)^{k-2} + 2i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-4}(\{p_0, q_0\}) + 7. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} i_n(\{p_0, q_0\}) = & -2i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) - 2i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) - \\ & - 2i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) - i_{n-4}(\{p_0, q_0\}). \end{aligned}$$

Si $n \geq 6$, $n = 2k + 1$ impar, tenemos

$$\begin{aligned} 3 = & (-1) + (-1)^k + i_n(\{p_0, q_0\}) + 2(-1) + 2(-1)^{k-1} + 2i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) + \\ & + 2i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) + (-1) + (-1)^{k-2} + 2i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) + i_{n-4}(\{p_0, q_0\}) + 7. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} i_n(\{p_0, q_0\}) = & -2i_{n-1}(\{p_0, q_0\}) - 2i_{n-2}(\{p_0, q_0\}) - \\ & - 2i_{n-3}(\{p_0, q_0\}) - i_{n-4}(\{p_0, q_0\}). \end{aligned}$$

Se deduce de todo esto que

$$i_n(\{p_0, q_0\}) = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ 1 & \text{si } n = 4k + 3 \\ 0 & \text{si } n = 4k + 4 \\ 0 & \text{si } n = 4k + 5 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Volvamos al estudio de $I_{S^2}^{F_n}(S^2, G)$.

Por la propiedad conmutativa del índice de punto fijo se observa que $i_n(\{p_0, q_0\}) = i_n(\{a, b\})$. En adelante utilizaremos este hecho para calcular $I_{S^2}^{F_n}(S^2, G)$.

Si $n = 2$,

$$I_{S^2}^{F_2}(S^2, G) = i_2(\{a\}) + i_2(\{b\}) + i_2(\{a, b\}) + 2 = 1.$$

Si $n = 3$,

$$I_{S^2}^{F_3}(S^2, G) = i_3(\{a\}) + i_3(\{b\}) + i_3(\{a, b\}) + 2 + 2i_1(\{a\}) + 2i_1(\{b\}) = 1.$$

Si $n = 4$,

$$I_{S^2}^{F_4}(S^2, G) = i_4(\{a\}) + i_4(\{b\}) + i_4(\{a, b\}) + 2 + 2i_2(\{a\}) + 2i_2(\{b\}) + 2i_2(\{a, b\}) + 1 = 1.$$

Si $n = 5$,

$$I_{S^2}^{F_5}(S^2, G) = i_5(\{a\}) + i_5(\{b\}) + i_5(\{a, b\}) + 2 + 2i_3(\{a\}) + 2i_3(\{b\}) + 2i_3(\{a, b\}) + 1 + i_1(\{a\}) + i_1(\{b\}) = 1.$$

Si $n \geq 6$, tendremos que en todos los casos $n = 4k + 2$, $n = 4k + 4$, $n = 4k + 3 = 2(2k + 1) + 1$ y $n = 4k + 5 = 2(2k + 2) + 1$, resulta

$$I_{S^2}^{F_n}(S^2, G) = i_n(\{a\}) + i_n(\{b\}) + i_n(\{a, b\}) + 2 + 2i_{n-2}(\{a\}) + 2i_{n-2}(\{b\}) + 2i_{n-2}(\{a, b\}) + 1 + i_{n-4}(\{a\}) + i_{n-4}(\{b\}) + i_{n-4}(\{a, b\}) = 1.$$

Consideremos el sistema dinámico $F = s \circ f : S^2 \rightarrow S^2$, donde s es la simetría de la figura III.1 y $f : S^2 \rightarrow S^2$ es el sistema dinámico

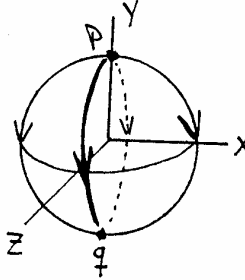


Figura III.3

Resulta sencillo ver que $F \simeq G$ en S^2 . En consecuencia, si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 1 &= I_{S^2}^{F_n}(S^2, G) = I_{S^2}^{F_n}(S^2, F) = i_n(\{p\}) + i_n(\{q\}) + i_n(\{p, q\}) = \\ &= i_n(\{p\}) + 1 + i_{n-1}(\{p\}). \end{aligned}$$

Entonces $i_n(\{p\}) + i_{n-1}(\{p\}) = 0$. Como $i_1(\{p\}) = -1$, tenemos

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, -2)) = i_n(\{p\}) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

□

Teorema 3.16. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado. Denotamos por λ_1, λ_2 los autovalores de f . Entonces

Si $\lambda_1 > 1, |\lambda_2| < 1$,

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < -1$,

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si $\lambda_1 < -1, |\lambda_2| < 1$,

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

En el resto de casos se tiene

$$I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = 1.$$

La demostración es consecuencia de aplicar la observación 3.8, la proposición 3.7, el corolario 3.14 y la proposición 3.15.

Enunciamos, a continuación, el resultado del cálculo de $I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f)$ para $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado, y esbozamos una prueba, que no desarrollaremos por completo, ya que nuestro interés se centrará, en adelante, en el caso bidimensional, ya demostrado al detalle.

Teorema 3.17. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, con $\{\bar{0}\}$ un conjunto compacto, invariante y aislado. Consideremos el conjunto de los autovalores reales (repetidos), de norma mayor que 1, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Sea r_2 el número de autovalores mayores que 1, y r_{-2} el número de autovalores menores que -1. Naturalmente $r = r_2 + r_{-2}$. Entonces, pueden darse los siguientes casos:

$$I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = \begin{cases} \text{Si } r_2 \text{ es impar y } r_{-2} \text{ es par ,} \\ I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, 2id) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\ \text{Si } r_2 \text{ es par y } r_{-2} \text{ es impar ,} \\ I_{\mathbb{R}}^{F_n}(\{0\}, -2id) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \\ \text{Si } r_2 \text{ es impar y } r_{-2} \text{ es impar ,} \\ I_{\mathbb{R}^2}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(2, -2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\ \text{Si } r_2 \text{ es par y } r_{-2} \text{ es par,} \\ I_{\mathbb{R}^r}^{F_n}(\{\bar{0}\}, \bar{0}) = 1 \end{cases}$$

Demostración. Si recurrimos a la matriz de Jordan $J(\epsilon)$ definida en la observación 3.1, se puede trabajar con cada uno de los subespacios vectoriales invariantes en que queda descompuesto \mathbb{R}^m por las cajas de Jordan. Manipulando homotopías en cada uno de estos subespacios, tal como se hacía en \mathbb{R}^2 , se puede construir otra homotopía adecuada, H , en todo \mathbb{R}^m , que garantiza la igualdad

$$I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, f) = I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\delta(\lambda_1), \dots, \delta(\lambda_m)))$$

con $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ los autovalores de f , y

$$\delta(\lambda_j) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda_j > 1 \text{ ó } \lambda_j = \alpha + i\beta, \beta \neq 0, \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 > 1 \\ -2 & \text{si } \lambda_j < -1 \\ 0 & \text{si } |\lambda_j| < 1 \end{cases}$$

Aplicando la propiedad conmutativa de nuestro índice,

$$I_{\mathbb{R}^m}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\delta(\lambda_1), \dots, \delta(\lambda_m))) = I_{\mathbb{R}^{r+2t}}^{F_n}(\{\bar{0}\}, D(\delta(\lambda_1), \dots, \delta(\lambda_{r+2t})))$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son los autovalores reales (repetidos) de norma mayor que 1, y $\{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+2t}\}$ son los autovalores complejos (repetidos) de norma mayor que 1.

Utilizando las técnicas de la proposición 3.7 con $D(\delta(\lambda_1), \dots, \delta(\lambda_{r+2t}))$, y aplicando la propiedad conmutativa del índice de punto fijo, se consigue el resultado sin dificultad. \square

III.4. Aplicación: Estudio de la G-herradura

Consideremos la aplicación continua $F : I^2 \subset C \rightarrow C$ de la figura III.4, donde C es la corona circular que contiene a I^2 .

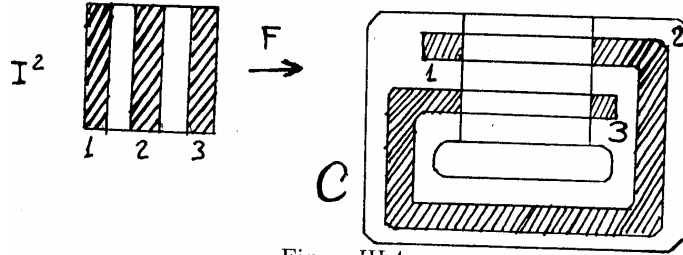
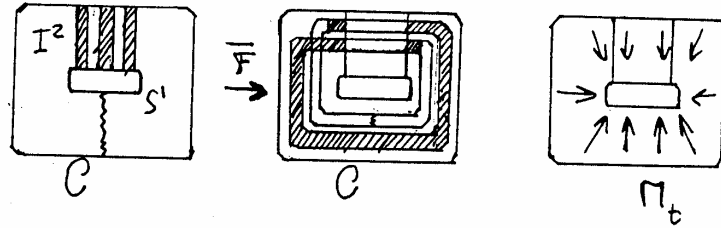


Figura III.4

Realizaremos, siguiendo las técnicas de punto fijo aplicadas a los n -productos simétricos, un estudio de las órbitas periódicas de este sistema semidinámico. Aplicando las propiedades principales de nuestros índices, reduciremos este problema al de analizar otros sistemas semidinámicos menos complejos.

Sean $\bar{F} : C \rightarrow C$ una extensión continua de F , y $\Pi : C \times I \rightarrow C$ una proyección de C sobre S^1 , su circunferencia interior, tal como se indica en la figura III.5.



Figuras III.5a y III.5b

Tenemos que $\Pi_0 = id$ y $\Pi_1 = \pi : C \rightarrow S^1$.

Dado $I \times \{0\} \subset I^2 \subset C$, consideramos la aplicación

$$g = \Pi_1 \circ \bar{F}|_{I \times \{0\}} : I \rightarrow S^1.$$

Sea $\bar{g} = \Pi_1 \circ \bar{F}|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ una extensión continua de g .

Ocurre que $\Pi_1 \circ \bar{F} \simeq \Pi_0 \circ \bar{F} = \bar{F}$ vía la homotopía $H : C \times I \rightarrow C$, con $H(x, t) = \Pi(\bar{F}(x), t)$. De manera que

$$I_C^{F^n}(Inv(C, \Pi_1 \circ \bar{F}), \Pi_1 \circ \bar{F}) = I_C^{F^n}(Inv(C, \bar{F}), \bar{F})$$

Si aplicamos la propiedad conmutativa del n -índice finito de compacto fijo a las aplicaciones $i : S^1 \hookrightarrow C$ y $\Pi_1 \circ \bar{F} : C \rightarrow S^1$, tenemos

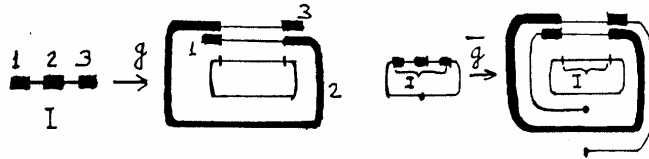
$$I_C^{F^n}(Inv(C, \Pi_1 \circ \bar{F}), \Pi_1 \circ \bar{F}) = I_{S^1}^{F^n}(S^1, \bar{g}).$$

Por consiguiente,

$$I_C^{F_n}(Inv(C, \overline{F}), \overline{F}) = I_{S^1}^{F_n}(S^1, \overline{g}).$$

Por idéntica razón, observando el buen comportamiento de la homotopía H en $\partial_C(I^2)$, tenemos

$$I_C^{F_n}(Inv(I^2, \overline{F}), \overline{F}) = I_{S^1}^{F_n}(Inv(I, \overline{g}), \overline{g}).$$



Figuras III.6a y III.6.b

Además, resulta sencillo ver que $\overline{g} \simeq 2x$, siendo $2x : S^1 \rightarrow S^1$ la aplicación que multiplica por 2 el ángulo, esto es,

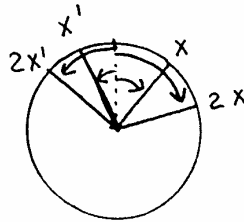


Figura III.7

Así, por la propiedad de invariancia por homotopías de nuestro índice,

$$I_{S^1}^{F_n}(S^1, \overline{g}) = I_{S^1}^{F_n}(S^1, 2x)$$

con lo que tendremos

$$I_C^{F_n}(Inv(C, \overline{F}), \overline{F}) = I_{S^1}^{F_n}(S^1, 2x).$$

Observación 4.1. $\overline{F}|_{I^2}$ es una ‘contracción’ en la dirección vertical y una ‘expansión’ en la dirección horizontal. De igual manera tenemos que $g = \overline{g}|_I$ es una ‘expansión’.

Proposición 4.2. Sea $\bar{p} = \{p_1, \dots, p_q\} \subset I^2$ una órbita periódica de \overline{F} , de período $q \leq n$. Por la observación 4.1 resulta claro que el punto

$\bar{p} \in F_n(I^2)$ admite un entorno $U_n(\bar{p}) \subset F_n(C)$ tal que $Fix(F_n(\bar{F})|_{U_n(\bar{p})}) = \bar{p}$.
Entonces

$$i_{F_n(C)}(F_n(\bar{F}), U_n(\bar{p})) = \begin{cases} -1 & \text{si } (2m-1)q \leq n < 2mq \\ 0 & \text{si } 2mq \leq n < (2m+1)q \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consideremos el sistema dinámico $G : X \rightarrow X$,

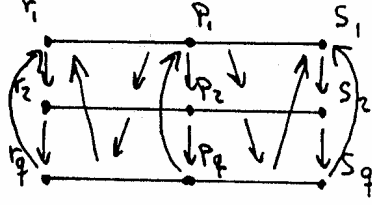


Figura III.8

Resulta, por la observación 4.1, la invariancia por homotopías y la propiedad conmutativa del índice de punto fijo, que

$$i_{F_n(C)}(F_n(\bar{F}), U_n(\bar{p})) = i_{F_n(X)}(F_n(G), U_n(\{p_1, \dots, p_q\})).$$

Es inmediato ver, utilizando la propiedad de normalización del índice de punto fijo, que

$$1 = I_X^{F_n}(X, G).$$

Dado $l \leq n$, llamamos $i_n(\{c_1, \dots, c_l\}) = i_{F_n(X)}(F_n(G), U_n(\{c_1, \dots, c_l\}))$. Denotamos por $\bar{p} = \{p_1, \dots, p_q\}$, $\bar{r} = \{r_1, \dots, r_q\}$ y $\bar{s} = \{s_1, \dots, s_q\}$. Dividimos el estudio de $i_n(\bar{p})$ en tres casos.

Caso 1. Si $n < 2q$, entonces tenemos

$$1 = I_X^{F_n}(X, G) = i_n(\bar{r}) + i_n(\bar{s}) + i_n(\bar{p}) = 1 + 1 + i_n(\bar{p}).$$

Por tanto,

$$i_{F_n(X)}(F_n(G), U_n(\bar{p})) = -1.$$

Caso 2. Si $2q \leq n < 3q$, entonces

$$\begin{aligned} 1 = I_X^{F_n}(X, G) &= i_n(\bar{r}) + i_n(\bar{s}) + i_n(\bar{p}) + i_n(\bar{r} \cup \bar{s}) + i_n(\bar{r} \cup \bar{p}) + \\ &+ i_n(\bar{s} \cup \bar{p}) = 1 + 1 + i_n(\bar{p}) + 1 + 2i_{n-q}(\bar{p}). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$i_{F_n(X)}(F_n(G), U_n(\bar{p})) = -2i_{F_{n-q}(X)}(F_{n-q}(G), U_{n-q}(\bar{p})) - 2 =$$

$$= -2(-1) - 2 = 0.$$

La penúltima igualdad se debe a que $n - q < 2q$, lo que nos lleva al caso 1.

Caso 3. Si $n \geq 3q$, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= I_X^{F_n}(X, G) = i_n(\bar{r}) + i_n(\bar{s}) + i_n(\bar{p}) + i_n(\bar{r} \cup \bar{s}) + \\ &\quad + i_n(\bar{r} \cup \bar{p}) + i_n(\bar{s} \cup \bar{p}) + i_n(\bar{r} \cup \bar{s} \cup \bar{p}) = \\ &= 1 + 1 + i_n(\bar{p}) + 1 + 2i_{n-q}(\bar{p}) + i_{n-2q}(\bar{p}). \end{aligned}$$

De modo que

$$i_n(\bar{p}) = -2i_{n-q}(\bar{p}) - i_{n-2q}(\bar{p}) - 2.$$

Estamos en condiciones de aplicar un argumento de inducción sobre m . Supongamos que

$$i_n(\bar{p}) = \begin{cases} -1 & \text{si } (2m-1)q \leq n < 2mq \\ 0 & \text{si } 2mq \leq n < (2m+1)q \end{cases}$$

con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Veremos entonces que

$$i_n(\bar{p}) = \begin{cases} -1 & \text{si } (2m+1)q \leq n < (2m+2)q \\ 0 & \text{si } (2m+2)q \leq n < (2m+3)q \end{cases}$$

Si $(2m+1)q \leq n < (2m+2)q$, tenemos $n \geq (2m+1)q \geq 3q$. Resulta

$$i_n(\bar{p}) = -2i_{n-q}(\bar{p}) - i_{n-2q}(\bar{p}) - 2.$$

Como $(2m+1)q > n - q \geq 2mq$ y $2mq > n - 2q \geq (2m-1)q$, entonces

$$i_n(\bar{p}) = -2(0) - (-1) - 2 = -1.$$

Si $(2m+2)q \leq n < (2m+3)q$, tenemos $n \geq (2m+2)q \geq 4q > 3q$. Como $(2m+1)q \leq n - q < (2m+2)q$ y $2mq \leq n - 2q < (2m+1)q$, ocurre que

$$i_n(\{\bar{p}\}) = -2(-1) - (0) - 2 = 0. \quad \square$$

Corolario 4.3. Dada una órbita periódica de período n de \bar{F} , $\{p_1, \dots, p_n\} \subset I^2$, entonces

$$i_{F_n(C)}(F_n(\bar{F}), U_n(\{p_1, \dots, p_n\})) = -1.$$

Corolario 4.4. Dada una órbita periódica de \bar{g} , $\{p_1, \dots, p_q\} \subset I$, $q \leq n$, entonces

$$i_{F_n(S^1)}(F_n(\bar{g}), U_n(\{p_1, \dots, p_q\})) = \begin{cases} -1 & \text{si } (2m-1)q \leq n < 2mq \\ 0 & \text{si } 2mq \leq n < (2m+1)q \end{cases}$$

Corolario 4.5. En las condiciones del anterior corolario

$$i_{F_n(S^1)}(F_n(\bar{g}), U_n(\{p_1, \dots, p_n\})) = -1.$$

Proposición 4.6. Sean $\bar{\alpha}_{q_1}, \dots, \bar{\alpha}_{q_r}$ órbitas periódicas de \bar{F} , de períodos q_1, \dots, q_r , con $\sum_{i=1}^r q_i \leq n$, y con la unión de todos los puntos de todas las órbitas $\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r}$ cumpliendo

$$\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r} \in F_n(I^2).$$

Sean, de modo análogo, $\bar{\beta}_{q_1}, \dots, \bar{\beta}_{q_r}$ órbitas periódicas de \bar{g} , de períodos q_1, \dots, q_r , y con la unión de todos los puntos de todas las órbitas $\bar{\beta}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\beta}_{q_r}$ cumpliendo

$$\bar{\beta}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\beta}_{q_r} \in F_n(I).$$

Sea $U_n(\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r}) \subset F_n(I^2)$ un entorno del punto $\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r}$ de modo que

$$Fix(F_n(\bar{F})|_{U_n(\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r})}) = \bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r}.$$

De igual modo definimos $U_n(\bar{\beta}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\beta}_{q_r}) \subset F_n(I)$ para $F_n(\bar{g})$.

Entonces

$$i_{F_n(C)}(F_n(\bar{F}), U_n(\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r})) = i_{F_n(S^1)}(F_n(\bar{g}), U_n(\bar{\beta}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\beta}_{q_r})).$$

Demostración. Consideremos el sistema dinámico $G : X \rightarrow X$,

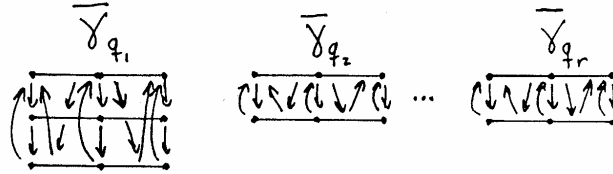


Figura III.9

Resulta sencillo ver que

$$\begin{aligned} i_{F_n(C)}(F_n(\bar{F}), U_n(\bar{\alpha}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{q_r})) &= i_{F_n(X)}(F_n(G), U_n(\bar{\gamma}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\gamma}_{q_r})) = \\ &= i_{F_n(S^1)}(F_n(\bar{g}), U_n(\bar{\beta}_{q_1} \cup \dots \cup \bar{\beta}_{q_r})). \end{aligned}$$

Esto se debe a que $\bar{g}|_I$ es expansiva, y los entornos de las órbitas periódicas $\bar{\beta}_{q_i}$ son como los de las órbitas centrales $\bar{\gamma}_{q_i}$ de (X, G) .

De igual modo ocurre con $\bar{F}|_{I^2}$. La dirección vertical se puede contraer a un punto sin que varíe el valor del índice (invariancia por homotopías) y

lo que queda es algo idéntico a lo que tenemos en las órbitas centrales de (X, G) . \square

Proposición 4.7. El número de órbitas periódicas de cualquier período de $\overline{F}|_{I^2}$ es el mismo que el de $\overline{g}|_I$.

Demostración. Sabemos, por lo dicho al comienzo de la sección, que $I_C^{F_n}(Inv(I^2, \overline{F}), \overline{F}) = I_{S^1}^{F_n}(Inv(I, \overline{g}), \overline{g})$. Además

$$I_C^{F_n}(Inv(I^2, \overline{F}), \overline{F}) = \sum_{i=1}^k i_{F_n(C)}(F_n(\overline{F}), U_n^i) + \sum_{j=1}^{l_n} i_{F_n(C)}(F_n(\overline{F}), U_n(\overline{\alpha}_n^j))$$

siendo los conjuntos U_n^i entornos de las órbitas y uniones de órbitas periódicas de \overline{F} de período menor que n , cuya suma de períodos es menor o igual que n , y siendo los conjuntos $U_n(\overline{\alpha}_n^j)$ entornos de las órbitas periódicas $\overline{\alpha}_n^j$ de \overline{F} , de período exactamente n . Estamos suponiendo que la familia de todas las órbitas de período menor o igual que n de \overline{F} en I^2 es finita, algo evidente por la observación 4.1. Consideramos $U_n^i \subset F_n(I^2)$ y $U_n(\overline{\alpha}_n^j) \subset F_n(I^2)$ para todo i, j .

De igual modo,

$$I_{S^1}^{F_n}(Inv(I, \overline{g}), \overline{g}) = \sum_{i=1}^{k'} i_{F_n(S^1)}(F_n(\overline{g}), V_n^i) + \sum_{j=1}^{l'_n} i_{F_n(S^1)}(F_n(\overline{g}), U_n(\overline{\beta}_n^j))$$

siendo los conjuntos $V_n^i \subset F_n(I)$ entornos de las órbitas y uniones de órbitas periódicas de \overline{g} de período menor que n , cuya suma de períodos es menor o igual que n , y siendo los conjuntos $U_n(\overline{\beta}_n^j) \subset F_n(I)$ entornos de las órbitas periódicas $\overline{\beta}_n^j$ de \overline{g} , de período exactamente n .

Para demostrar la proposición utilizaremos un argumento de inducción. Veamos primero que $\overline{F}|_{I^2}$ y $\overline{g}|_I$ tienen el mismo número de puntos fijos.

Ocurre, por el corolario 4.3, que

$$I_C^{F_1}(Inv(I^2, \overline{F}), \overline{F}) = \sum_{j=1}^{l_1} i_{F_1(C)}(F_1(\overline{F}), U_1(\overline{\alpha}_1^j)) = -l_1,$$

$$I_{S^1}^{F_1}(Inv(I, \overline{g}), \overline{g}) = \sum_{j=1}^{l'_1} i_{F_1(S^1)}(F_1(\overline{g}), U_1(\overline{\beta}_1^j)) = -l'_1.$$

Por lo dicho al principio de la demostración, tenemos $l_1 = l'_1$. Entonces, debido a los corolarios 4.3 y 4.5,

$$I_C^{F_n}(Inv(I^2, \overline{F}), \overline{F}) = \sum_{i=1}^k i_{F_n(C)}(F_n(\overline{F}), U_n^i) - l_n$$

$$I_{S^1}^{F_n}(Inv(I, \bar{g}), \bar{g}) = \sum_{i=1}^{k'} i_{F_n(S^1)}(F_n(\bar{g}), V_n^i) - l'_n$$

siendo l_n y l'_n el número de órbitas de período n de $\bar{F}|_{I^2}$ y $\bar{g}|_I$. Supongamos que el número de órbitas periódicas de cualquier período menor o igual que $n - 1$ es el mismo para $\bar{F}|_{I^2}$ que para $\bar{g}|_I$. Entonces el sumatorio de índices de las dos igualdades de arriba vale lo mismo (proposición 4.6), con lo que $l_n = l'_n$. Como $l_1 = l'_1$, la proposición está demostrada. \square

Observación 4.8. $\bar{F}|_{I^2}$ y $\bar{g}|_I$ tienen dos puntos fijos.

Demostración. Ocurre que

$$I_{S^1}^{F_1}(S^1, \bar{g}) = I_{S^1}^{F_1}(S^1, 2x) = -1.$$

La última igualdad es consecuencia de que la aplicación $2x : S^1 \rightarrow S^1$ tiene un único punto fijo, de tipo $D(2)$.

Asimismo, resulta inmediato que \bar{g} tiene un único punto fijo fuera de I , que es atractor. Entonces $I_{S^1}^{F_1}(S^1, \bar{g}) = I_{S^1}^{F_1}(Inv(I, \bar{g}), \bar{g}) + 1$.

Ocurre, por tanto, que $I_{S^1}^{F_1}(Inv(I, \bar{g}), \bar{g}) = -2$, con lo que $l'_1 = 2$. \square

Proposición 4.9. El conjunto $\{x \in I^2 : (\bar{F}|_{I^2})^n(x) = x\}$ tiene 2^n puntos.

Demostración. Consideremos el círculo S^1 que surge de identificar los dos extremos del segmento $[p, q]$ (p y q son los puntos fijos de $\bar{g}|_I$). Resulta, por la naturaleza de \bar{g} , que p y q son los extremos de $Inv(\bar{g}|_I)$.

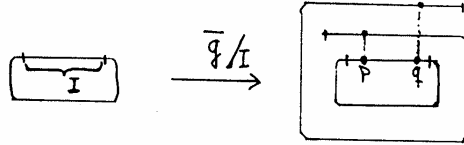


Figura III.10

Sea $\bar{h} : S^1 \rightarrow S^1$, con $S^1 = [p, q]/(p \equiv q)$, definida como sigue

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} \bar{g}(x) & \text{si } \bar{g}(x) \in [p, q] \\ p \equiv q & \text{si } \bar{g}(x) \notin [p, q] \end{cases}$$

Resulta inmediato ver que \bar{h} es continua y tiene un único punto fijo ($p \equiv q$). En eso difiere de $\bar{g}|_I$, que tiene dos puntos fijos, precisamente p y q . Por otro lado, es claro que las órbitas periódicas de período mayor o igual que 2 de \bar{h} coinciden con las de $\bar{g}|_I$.

Además, el único punto fijo de \bar{h} es un repulsor de tipo $D(2)$, y \bar{h} da dos vueltas a S^1 , como $2x$.

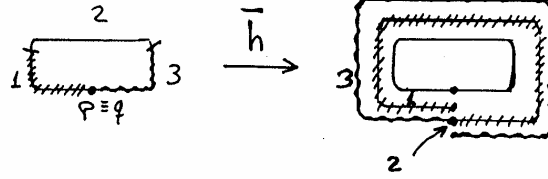


Figura III.11

Resulta claro que $\bar{h} \simeq 2x : S^1 \rightarrow S^1$. Por consiguiente

$$I_{S^1}^{F_n}(S^1, \bar{h}) = I_{S^1}^{F_n}(S^1, 2x)$$

de modo que las órbitas periódicas de cualquier período son las mismas, en número, para \bar{h} que para $2x$ (la demostración es idéntica a la de la proposición 4.7).

Como \bar{h} y $\bar{g}|_I$ tienen las mismas órbitas periódicas de período mayor o igual que 2, y $\bar{g}|_I$ y $\bar{F}|_{I^2}$ tienen el mismo número de órbitas periódicas de cualquier período, entonces $2x$ y $\bar{F}|_{I^2}$ tienen el mismo número de órbitas periódicas de cualquier período mayor o igual que 2. Los puntos fijos de $\bar{F}|_{I^2}$ sabemos que son dos, mientras que para $2x$ sólo hay uno.

Basta, por tanto, estudiar el sistema dinámico $2x : S^1 \rightarrow S^1$ para calcular el número de órbitas periódicas de cualquier período mayor o igual que 2 de $\bar{F}|_{I^2}$.

Sea $f = 2x : S^1 \rightarrow S^1$ con $S^1 = [0, 1]/(0 \equiv 1)$. Es fácil ver que

$$\{x \in [0, 1] : f^n(x) = x\} = \left\{0, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2}{2^n - 1}, \dots, \frac{2^n - 2}{2^n - 1}, 1\right\}.$$

Al ser $0 \equiv 1$, el conjunto $\{x \in S^1 : f^n(x) = x\}$ tiene $2^n - 1$ puntos. Por consiguiente, para $\bar{F}|_{I^2}$, el conjunto

$$\{x \in I^2 : (\bar{F}|_{I^2})^n(x) = x\}$$

tiene 2^n puntos (debe añadirse un punto fijo que no se contaba con $2x$). \square

III.5. Aplicación: Característica de Euler de los n -productos simétricos de variedades

El objetivo de esta sección es desarrollar técnicas que permitan calcular, en la medida de lo posible, la característica de Euler del n -producto simétrico $F_n(X)$ de una variedad X de dimensión finita. Para ello efectuaremos el cálculo con las superficies compactas, orientables y sin borde. Este ejemplo proporcionará, de manera implícita, la pauta a seguir para cualquier variedad X .

Construiremos un sistema dinámico $F : X \rightarrow X$, tal que $F_n(F)$ sea de atracción compacta, $F \simeq id$, con una cantidad finita, lo más pequeña posible, de órbitas periódicas de período menor o igual que n (si es posible puntos fijos), $\bar{\alpha}_p^i$, donde $p \in \{1, \dots, n\}$ es el período, y de modo que los índices $i_{F_n(X)}(F_n(F), U_n(\bar{\alpha}_{p_1}^{i_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{p_r}^{i_r}))$, en los entornos de las uniones de órbitas periódicas, sean calculables por nosotros mediante el uso de los resultados obtenidos en las primeras secciones.

Tendremos que la característica de Euler de $F_n(X)$ es

$$\mathcal{X}(F_n(X)) = \Lambda(F_n(id)) = \Lambda(F_n(F)) = i_{F_n(X)}(F_n(F), F_n(X)),$$

de manera que el cálculo de $\mathcal{X}(F_n(X))$ se reduce, por aditividad, a hallar el valor de los índices $i_{F_n(X)}(F_n(F), U_n(\bar{\alpha}_{p_1}^{i_1} \cup \dots \cup \bar{\alpha}_{p_r}^{i_r}))$.

En adelante, y hasta el final de capítulo, centraremos nuestro estudio en la característica de Euler de n -productos simétricos de superficies compactas, orientables y sin borde.

Consideremos el sistema dinámico $f : X_k \rightarrow X_k$,

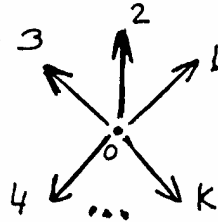
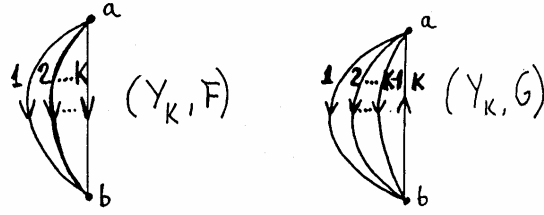


Figura III.12

Para abreviar notación llamaremos a $I_{X_k}^{F_n}(\{0\}, f) = i_n(k)$.

Interesa averiguar el valor de $i_n(k)$ ya que, más adelante, podremos reducir, mediante las técnicas arriba comentadas, el cálculo de la característica de Euler de los n -productos simétricos de k -toros al cómputo de este tipo de índice. Supondremos que $k > 1, 2$, ya que los casos en que $k = 1$ ó $k = 2$ están resueltos en la Sección III.3.

Para hallar $i_n(k)$ nos serviremos de los sistemas dinámicos $F : Y_k \rightarrow Y_k$ y $G : Y_k \rightarrow Y_k$ siguientes



Figuras III.13a y III.13b

Si $n \geq 2$ tenemos, aplicando las propiedades del índice de punto fijo (aditividad, invariancia por homotopías y conmutatividad), que

$$\begin{aligned} I_{Y_k}^{F_n}(Y_k, F) &= I_{Y_k}^{F_n}(\{a\}, F) + I_{Y_k}^{F_n}(\{b\}, F) + i_{F_n(Y_k)}(F_n(F), U_n(\{a, b\})) = \\ &= i_n(k) + 1 + i_{n-1}(k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Y_k}^{F_n}(Y_k, G) &= I_{Y_k}^{F_n}(\{a\}, G) + I_{Y_k}^{F_n}(\{b\}, G) + i_{F_n(Y_k)}(F_n(G), U_n(\{a, b\})) = \\ &= i_n(k-1) + 0 + 0 = i_n(k-1). \end{aligned}$$

Como $F \simeq G$, resulta que $I_{Y_k}^{F_n}(Y_k, F) = I_{Y_k}^{F_n}(Y_k, G)$. Entonces

$$i_n(k-1) = i_n(k) + 1 + i_{n-1}(k).$$

Si $n = 1$, entonces

$$i_1(k-1) = i_1(k) + 1.$$

Supongamos que n es impar. Entonces

$$\begin{aligned} i_n(k-1) &= i_n(k) + i_{n-1}(k) + 1 \\ -i_{n-1}(k-1) &= -i_{n-1}(k) - i_{n-2}(k) - 1 \\ i_{n-2}(k-1) &= i_{n-2}(k) + i_{n-3}(k) + 1 \\ &\vdots \\ -i_2(k-1) &= -i_2(k) - i_1(k) - 1 \\ i_1(k-1) &= i_1(k) + 1. \end{aligned}$$

Sumando, obtenemos

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j i_{n-j}(k-1) - 1 = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} i_m(k-1) - 1.$$

Supongamos que n es par. Entonces

$$\begin{aligned} i_n(k-1) &= i_n(k) + i_{n-1}(k) + 1 \\ -i_{n-1}(k-1) &= -i_{n-1}(k) - i_{n-2}(k) - 1 \\ i_{n-2}(k-1) &= i_{n-2}(k) + i_{n-3}(k) + 1 \\ &\vdots \\ i_2(k-1) &= i_2(k) + i_1(k) + 1 \\ -i_1(k-1) &= -i_1(k) - 1. \end{aligned}$$

Sumando, obtenemos

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j i_{n-j}(k-1) = \sum_{m=1}^n (-1)^m i_m(k-1).$$

Denotaremos por C_s^r a las combinaciones de r elementos tomados de s en s . Hacemos notar que $C_0^r = 1$ y, si $r < s$, entonces $C_s^r = 0$.

Recurriendo a argumentos de inducción se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 5.1. Sea n impar fijo, k fijo, y $p \in \mathbb{N}$, con $p \geq 1$ y $k-p \geq 1$. Resulta

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_j^{p-1+j} i_{n-j}(k-p) - R(p)$$

siendo $R(p) = 1 + \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{p-1+2j}$.

Demostración. Recurrirémos a la inducción sobre p . Es claro que para $p = 1$ el resultado es cierto.

Supongamos cierto el resultado para $p = p_0 - 1 \geq 1$. Veamos que también lo es para $p = p_0$.

Tenemos

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_j^{p_0-2+j} i_{n-j}(k-p_0+1) - R(p_0-1).$$

Aplicando lo observado antes de la proposición,

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{p_0-2+j} \left[\left(\sum_{m=1}^{n-j} (-1)^{m+1} i_m(k-p_0) \right) - \delta(j) \right] - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{p_0-2+2j} - 1$$

siendo $\delta(j) = 1$ si j es par, y $\delta(j) = 0$ si j es impar.

Si reordenamos la fórmula, obtenemos

$$i_n(k) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} i_m(k-p_0) \left[\sum_{j=0}^{n-m} C_j^{p_0-2+j} \right] - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2j}^{p_0-2+2j} + C_{1+2j}^{p_0-2+2j}) - 1.$$

Como consecuencia de las propiedades del triángulo de Tartaglia, se tiene $\sum_{j=0}^{m_0} C_j^{j_0+j} = C_{m_0}^{j_0+m_0+1}$,

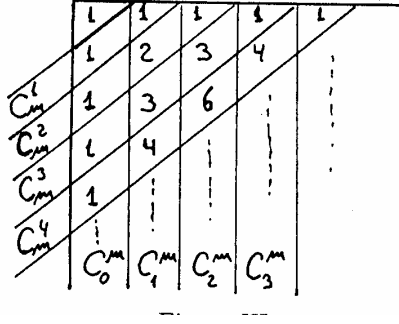


Figura III.14

con lo que resulta la igualdad

$$i_n(k) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} i_m(k-p_0) C_{n-m}^{p_0-1+n-m} - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2j}^{p_0-2+2j} + C_{1+2j}^{p_0-2+2j}) - 1.$$

Apelando de nuevo a las propiedades del triángulo de Tartaglia, se observa que $C_{m_0}^{j_0} + C_{m_0+1}^{j_0} = C_{m_0+1}^{j_0+1}$, de manera que

$$\begin{aligned} i_n(k) &= \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} i_m(k-p_0) C_{n-m}^{p_0-1+n-m} - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{p_0-1+2j} - 1 = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j i_{n-j}(k-p_0) C_j^{p_0-1+j} - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{p_0-1+2j} - 1, \end{aligned}$$

que es el resultado buscado. \square

Proposición 5.2. Sea n par fijo, k fijo, y $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 1$ y $k-p \geq 1$.

Resulta

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_j^{p-1+j} i_{n-j}(k-p) + R(p)$$

siendo $R(p) = \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{p+2j}$.

Demostración. Recurriremos a la inducción sobre p . Es claro que para $p = 1$ el resultado es cierto.

Supongamos cierto el resultado para $p = p_0 - 1 \geq 1$. Veamos que también lo es para $p = p_0$.

Tenemos

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_j^{p_0-2+j} i_{n-j}(k - p_0 + 1) + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{p_0-1+2j}.$$

Aplicando lo observado antes de la proposición 5.1,

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{p_0-2+j} \left[\sum_{m=1}^{n-j} (-1)^m i_m(k - p_0) + \delta(j) \right] + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{p_0-1+2j}$$

siendo $\delta(j) = 1$ si j es impar y $\delta(j) = 0$ si j es par.

Si reordenamos la fórmula, obtenemos

$$i_n(k) = \sum_{m=1}^n (-1)^m i_m(k - p_0) \left[\sum_{j=0}^{n-m} C_j^{p_0-2+j} \right] + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} (C_{1+2j}^{p_0-1+2j} + C_{2+2j}^{p_0-1+2j}).$$

Como consecuencia de las propiedades del triángulo de Tartaglia resulta la igualdad

$$i_n(k) = \sum_{m=1}^n (-1)^m i_m(k - p_0) C_{n-m}^{p_0-1+n-m} + \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{p_0+2j},$$

que es el resultado buscado. \square

Corolario 5.3. Si n es impar, $k \geq 3$, y $p = k - 1$, entonces

$$i_n(k) = -1 - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{k-2+2j}.$$

Si n es par, $k \geq 3$, y $p = k - 1$, entonces

$$i_n(k) = \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{k-1+2j}.$$

Estamos ya en condiciones de calcular la característica de Euler de los n -productos simétricos de k -toros, $\mathcal{X}(F_n(kT))$.

Proposición 5.4. Las características de Euler de los n -productos simétricos de k -toros, $\mathcal{X}(F_n(kT))$, con $k \geq 2$, son

$$\mathcal{X}(F_n(kT)) = \begin{cases} -1 - \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{1+2j}^{2k-3+2j} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} C_{2+2j}^{2k-2+2j} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Si $k = 1$, entonces $\mathcal{X}(F_n(T)) = 0$.

Demostración. Consideremos el sistema dinámico $F' : kT \rightarrow kT$

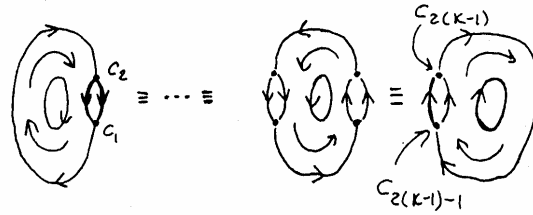


Figura III.15

El sistema dinámico cumple $F' \simeq id$ en kT , con $2(k-1)$ órbitas periódicas, todas ellas puntos fijos, hiperbólicos, de tipo $D(2, 1/2)$.

Ocurre que $\mathcal{X}(F_n(kT)) = \Lambda(F_n(F')) = I_{kT}^{F_n}(kT, F')$.

Consideremos el sistema dinámico $G' : Y'_k \rightarrow Y'_k$

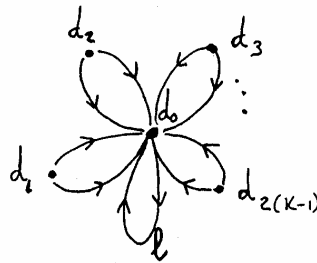


Figura III.16

Veamos que

$$I_{kT}^{F_n}(kT, F') = I_{Y'_k}^{F_n}(Y'_k, G').$$

El índice de punto fijo de $F_n(G')$, en un entorno de un punto fijo del tipo $\{d_{i_1} \cup \dots \cup d_{i_r} \cup d_0\} \in F_n(Y'_k)$, es

$$i_{F_n(Y'_k)}(F_n(G'), U_n(\{d_{i_1} \cup \dots \cup d_{i_r} \cup d_0\})) = 0$$

y esto para cualesquiera $i_1, \dots, i_r \in \{0, 1, \dots, 2(k-1)\}$.

Para demostrarlo basta construir una homotopía adecuada que traslade todos los puntos $F_n(G')(\bar{x})$, con $\bar{x} \in U_n(\{d_{i_1} \cup \dots \cup d_{i_r} \cup d_0\})$, a una constante fuera de ese entorno. Esto se podrá hacer gracias a la dinámica de G' sobre el lazo de Y'_k que tiene a d_0 como único punto fijo.

En consecuencia,

$$I_{Y'_k}^{F_n}(Y'_k, G') = \sum_{AC\{d_1, \dots, d_{2(k-1)}\}} i_{F_n(Y'_k)}(F_n(G'), U_n(\{A\})).$$

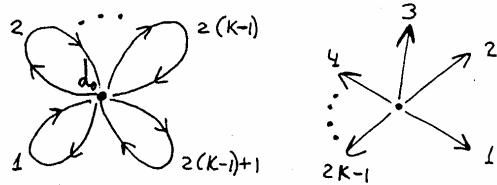
Asimismo

$$I_{kT}^{F_n}(kT, F') = \sum_{BC\{c_1, \dots, c_{2(k-1)}\}} i_{F_n(kT)}(F_n(F'), U_n(\{B\})).$$

Utilizando los argumentos expuestos en la proposición 4.6, tenemos que los sumandos de ambas igualdades coinciden, de modo que está demostrada la igualdad $I_{kT}^{F_n}(kT, F') = I_{Y'_k}^{F_n}(Y'_k, G')$.

Obsérvense los siguientes sistemas dinámicos

$$H' : Y'_k \rightarrow Y'_k \text{ y } f : X_{2k-1} \rightarrow X_{2k-1}$$



Figuras III.17a y III.17b

Resulta claro que $G' \simeq H'$ en Y'_k , con lo que

$$\mathcal{X}(F_n(kT)) = I_{Y'_k}^{F_n}(Y'_k, H') = i_n(2k - 1).$$

La última igualdad es consecuencia inmediata de aplicar la propiedad de invariancia por homotopías y la propiedad conmutativa de nuestro índice.

Tendremos, si $k \geq 2$, que $2k - 1 \geq 3$, y entonces el resultado del enunciado es inmediato.

En el caso en que $k = 1$, lo que tenemos es el sistema dinámico $F' : T \rightarrow T$



Figura III.18

con lo que

$$\mathcal{X}(F_n(T)) = \Lambda(F_n(F')) = I_T^{F_n}(T, F') = 0. \quad \square$$

La siguiente proposición permite hallar la característica de Euler de los n -productos simétricos de k -esferas, $\mathcal{X}(F_n(S^k))$.

Proposición 5.5. La característica de Euler de los n -productos simétricos de k -esferas, $\mathcal{X}(F_n(S^k))$, es

$$\mathcal{X}(F_n(S^{2k+1})) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que

$$\mathcal{X}(F_n(S^{2k})) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 3 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demostración. Consideremos los sistemas dinámicos $J : S^k \rightarrow S^k$,

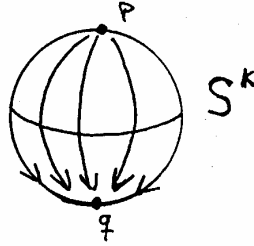


Figura III.19

Tenemos dos puntos fijos hiperbólicos, un repulsor p , y un atractor q . Supongamos que $n \geq 2$. Como $J \simeq id$ en S^k ,

$$\mathcal{X}(F_n(S^k)) = \Lambda(F_n(J)) = I_{S^k}^{F_n}(\{p\}, J) + I_{S^k}^{F_n}(\{q\}, J) + i_{F_n(S^k)}(F_n(J), U_n(\{p, q\})).$$

Como q es un atractor,

$$\mathcal{X}(F_n(S^k)) = I_{S^k}^{F_n}(\{p\}, J) + 1 + I_{S^k}^{F_{n-1}}(\{p\}, J).$$

En caso de que $n = 1$, tendremos

$$\mathcal{X}(F_1(S^k)) = I_{S^k}^{F_1}(\{p\}, J) + 1.$$

Supongamos que k es par y $n \geq 2$. Entonces $\mathcal{X}(F_n(S^k)) = 1 + 1 + 1 = 3$.

Esto se debe a que $I_{S^k}^{F_n}(\{p\}, J) = I_{S^k}^{F_{n-1}}(\{p\}, J) = 1$. Para demostrarlo basta observar que p es un punto fijo del tipo $D(2, \dots, 2)$. Utilizando el teorema 3.17, ya tenemos el resultado.

Supongamos que k es par y $n = 1$. Entonces, por idéntica razón,

$$\mathcal{X}(F_1(S^k)) = 1 + 1 = 2.$$

Supongamos que k es impar y $n \geq 2$.

Entonces, si n es impar, sabemos, por el teorema 3.17, que $I_{S^k}^{F_n}(\{p\}, J) = -1$ y $I_{S^k}^{F_{n-1}}(\{p\}, J) = 0$, de modo que

$$\mathcal{X}(F_n(S^k)) = -1 + 1 + 0 = 0.$$

Si n es par, ocurre, por la misma razón, que

$$\mathcal{X}(F_n(S^k)) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Supongamos que k es impar y $n = 1$. Entonces es claro que

$$\mathcal{X}(F_1(S^k)) = -1 + 1 = 0.$$

Queda, por tanto, demostrado el resultado. \square

CAPITULO IV

INDICE DE PUNTO FIJO DE ITERACIONES DE
HOMEOMORFISMOS LOCALES DEL PLANO

Resumen. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Introduciremos la noción de filtración fuerte. El cálculo del índice de punto fijo de cualquier iteración de f en un entorno aislante de K , $i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K))$, es relativamente sencillo para todo K que admita una filtración fuerte. La existencia de tales filtraciones para compactos de *shape* trivial permite obtener de manera corta y elemental un resultado general del que se desprende, como caso particular, un teorema de Le Calvez-Yoccoz, en [72], que computa los índices en condiciones menos generales, con $K = \{p\}$, y f preservando la orientación. Las técnicas que utilizaremos nos permitirán calcular, después, el índice de punto fijo de toda iteración de f en entorno aislante de cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo.

IV.1. Introducción

La discusión sobre la existencia de homeomorfismos minimales de \mathbb{R}^m con un único punto omitido fue uno de los problemas propuestos por S.Ulam, e incluido en el famoso *Scottish Book*, ([84], problema 115). Existen varias respuestas parciales (ver por ejemplo [3], [5], [6], [84], [104]), pero el problema permanece abierto. Como consecuencia del teorema de traslación de Brouwer ([18], [43]) tenemos que no existen homeomorfismos minimales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para el plano multiperforado el problema ha resultado ser mucho más complicado. En [54], M. Handel probó la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, donde K es un conjunto finito con, al menos, dos puntos, y más recientemente Le Calvez y Yoccoz, en [72], han resuelto completamente este problema. En [42], J. Franks dió una demostración alternativa, más corta, usando técnicas del índice de Conley.

Le Calvez y Yoccoz probaron la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, para cualquier conjunto K finito, utilizando la teoría del índice de punto fijo. Dado un homeomorfismo local que preserva la orientación, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ellos hacen un estudio local en un entorno de un punto fijo p que es, localmente, un conjunto invariante maximal y que no es ni repulsor ni atractor. Prueban que existen enteros $q, r \geq 1$ tales que

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, p) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in r\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } k \notin r\mathbb{Z} \end{cases}$$

Aunque el índice de Conley facilita una demostración muy breve de la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, con K finito, sin embargo no proporciona el profundo análisis local necesario para probar

este teorema. No obstante, nosotros veremos que manipulando adecuadamente cierta clase de objetos, los pares filtrantes, las claves para los cálculos aparecen de manera natural y puede darse una demostración elemental.

El principal objetivo de este capítulo es proporcionar una prueba alternativa, más breve y simple, del resultado enunciado, así como una generalización del mismo a conjuntos compactos, conexos, invariantes y aislados. Nuestras técnicas están basadas en las ideas del índice de Conley, y pueden ser aplicadas a homeomorfismos, definidos localmente, arbitrarios. Obtendremos, de este modo, un teorema general que nos permite calcular el índice de punto fijo de cualquier iteración de cualquier homeomorfismo local en un punto fijo, no repulsor, que sea localmente un conjunto maximal invariante. Introducimos un tipo especial de *index pairs* que llamaremos filtraciones fuertes. Un hecho remarkable es que, una vez obtenido uno de tales *index pairs*, el cálculo del índice de punto fijo y los enteros q y r es inmediato. Se demuestra que estos enteros dependen del comportamiento de f en el conjunto de salida de una filtración fuerte dada (ver ejemplo 1). De modo más general, el mismo argumento permite determinar el índice de punto fijo de las iteraciones de homeomorfismos en entornos aislantes de conjuntos compactos, invariantes y aislados, que admiten filtraciones fuertes. Finalmente, con la ayuda de las técnicas utilizadas en la primera parte del estudio, obtendremos que se calcula con facilidad el índice de punto fijo de cualquier iteración de un homeomorfismo definido localmente, en cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo.

Existe una interesante literatura dedicada al estudio del índice de punto fijo en un entorno de un punto fijo aislado (como punto fijo pero no necesariamente como compacto invariante) y su relación con la dinámica de la función. En este sentido recomendamos los trabajos de Alonso y Campos ([2]), M. Brown ([19], [20], [21]), Dancer y Ortega, ([31]), Handel ([55]), Hirsch ([56], [57]), Le Calvez ([71]), Pelikan y Slaminka ([105]), Shub y Sullivan ([117]) y Simon ([118]).

El capítulo se organiza del siguiente modo: en la Sección IV.2 se prueba el teorema principal. La Sección IV.3 se dedica a demostrar la existencia de filtraciones fuertes. Esta parte contiene también dos teoremas que prueban la existencia de ciertos bloques aislantes y pares filtrantes peculiares, que pueden ser aplicados a la teoría del índice de Conley. Por último, la Sección IV.4 generaliza los resultados obtenidos en las dos secciones precedentes, sirviéndose de las técnicas empleadas en ellas. Primeramente se estudian algunas propiedades topológicas de los conjuntos compactos, invariantes, aislados y conexos, y de ciertos entornos aislantes suyos. Demostraremos, por ejemplo, que, dado $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, tendremos que cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo K tendrá el *shape* de un poliedro finito.

Posteriormente se construyen pares filtrantes adecuados, que permitirán extender al caso compacto conexo el teorema principal. Corolario de estos

teoremas será un interesante resultado sobre homeomorfismos minimales en la esfera en el que se demuestra que si $f : S^2 \rightarrow S^2$ es un homeomorfismo y K es un conjunto compacto, propio e invariante con una cantidad finita de componentes, entonces $f : S^2 \setminus K \rightarrow S^2 \setminus K$ no es minimal.

IV.2. Resultados preliminares y teorema principal

Sea la aplicación continua, definida localmente, $f : U \subset X \rightarrow X$, con U abierto de X . Dado un conjunto $N \subset U$, definimos el *conjunto de salida de* N como

$$N^- = \{x \in N \text{ tal que } f(x) \notin \text{int}(N)\}.$$

Definición 2.1. (Ver [44]). Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, y sea (N, L) , con $L \subset N$, un par compacto contenido en el interior del dominio de f . El par (N, L) se denomina *par filtrante* para K si N y L son las clausuras de sus interiores y

- 1) $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K .
- 2) L es un entorno de N^- en N y
- 3) $f(L) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$.

La próxima definición está basada en el concepto de par filtrante, y es clave para poder efectuar un cálculo inmediato del índice de punto fijo de cualquier iteración de un homeomorfismo, definido localmente, del plano.

Definición 2.2. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Supongamos que (N, L) , con $L \subset N$, es un par compacto contenido en el interior de U . El par (N, L) se llama *filtración fuerte* para K si N y L son las clausuras de sus interiores y

- 1) N y $\partial(N \setminus L)$ son homeomorfos a un disco y a S^1 respectivamente.
- 2) $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K .
- 3) $f(cl(N \setminus L)) \subset \text{int}(N)$.
- 4) Para toda componente L_i de L , $\partial_N(L_i)$ es un arco, y existe un disco topológico B_i tal que $\partial_N(L_i) \subset B_i \subset L_i$, $B_i \cap N^- \neq \emptyset$ y $f(B_i) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$.

El teorema que a continuación enunciamos garantiza, en determinadas circunstancias, la existencia de filtraciones fuertes. Ofreceremos la demostración en la sección siguiente (tras el teorema 3.4).

Teorema 2.3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U abierto, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor, $K = \text{Inv}(V, f)$, donde $V \subset U$ es homeomorfo a una bola abierta. Entonces existe una filtración fuerte (N, L) para K .

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea (N, L) una filtración fuerte para K , un conjunto compacto, invariante y aislado. L es la unión de sus componentes $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$.

Tenemos que

$$f|_{cl(N \setminus L)} : cl(N \setminus L) \rightarrow N$$

y, para todo i , existe un j tal que $f(\partial_N(L_i)) \subset int(L_j)$.

Consideremos el espacio cociente $cl(N \setminus L)/\sim$ que resulta de identificar cada $\partial_N(L_i)$ a un punto q_i (si $i \neq j$ entonces $q_i \neq q_j$).

Consideremos la aplicación proyección

$$\pi : cl(N \setminus L) \rightarrow cl(N \setminus L)/\sim$$

y

$$r : N \rightarrow cl(N \setminus L)$$

retracción en la que cada L_i se retrae a $\partial_N(L_i)$, con $r(x) = x$ si $x \in cl(N \setminus L)$.

Definimos, ahora, $f' = \pi \circ r \circ f \circ \pi^{-1}$,

$$f' : cl(N \setminus L)/\sim \setminus \{q_1, \dots, q_m\} \rightarrow cl(N \setminus L)/\sim$$

Resulta que f' es continua y, en un entorno suficientemente pequeño de K , $f' \equiv f$. Como $f(\partial_N(L_i)) \subset int(L_j)$, f' admite una única extensión continua

$$\overline{f'} : cl(N \setminus L)/\sim \rightarrow cl(N \setminus L)/\sim$$

tal que $\overline{f'}(U'(q_i)) = q_j$ para un entorno $U'(q_i)$ de q_i .

Tenemos $\overline{f'}(\{q_1, \dots, q_m\}) \subset \{q_1, \dots, q_m\}$. De hecho $\overline{f'}(q_i) = q_j$ si, y sólo si, $f(\partial_N(L_i)) \subset int(L_j)$.

Es claro que

$$Fix_{cl(N \setminus L)/\sim}(\overline{f'}) \subset K \cup \{q_1, \dots, q_m\}$$

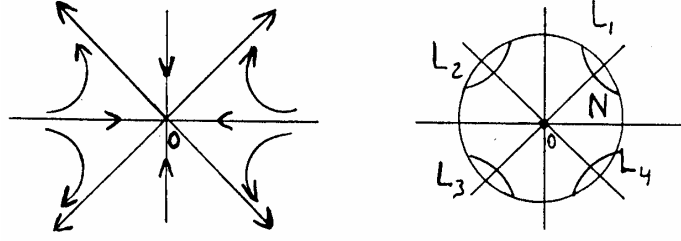
y como $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K ,

$$Fix_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k) \subset K \cup \{q_1, \dots, q_m\}.$$

Ejemplo 1. Presentamos, a continuación, algunos homeomorfismos para los que calculamos el índice de punto fijo y los enteros r y q del teorema de Le Calvez-Yoccoz y nuestro teorema principal. Daremos ejemplos para el caso en que el homeomorfismo preserve la orientación y para el caso en que la invierte.

Sea $N = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|x\| \leq 2^{1/2}\}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que genera el sistema dinámico discreto de la figura IV.1a. Consideremos un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y L la unión de los ϵ -entornos,

en N , de $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ (ver figura IV.1b).



Figuras IV.1a y IV.1b

Sean $g, s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una $\pi/2$ -rotación y una simetría con respecto a $\{x - y = 0\}$ respectivamente.

El punto $0 \in N$ es un conjunto compacto, invariante, aislado y no repulsor, y N es un entorno aislante de $\{0\}$ para $f, g \circ f$ y $s \circ f$. En todos los casos el par (N, L) es una filtración fuerte. Consideramos $q_i = \pi(\partial_N(L_i)) \in cl(N \setminus L) / \sim$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Ocurre que

$$Fix_{cl(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k) = \{0, q_1, q_2, q_3, q_4\}.$$

En este caso tenemos, además de $\{0\}$, cuatro órbitas periódicas de período uno. Entonces $r = 1$ y $q = 4$. Por tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, 0) = -3.$$

$$Fix_{cl(N \setminus L) / \sim}(((\overline{g \circ f'})^k) = \begin{cases} \{0, q_1, q_2, q_3, q_4\} & \text{si } k \in 4\mathbb{N} \\ \{0\} & \text{si } k \notin 4\mathbb{N} \end{cases}$$

Aquí $\overline{(g \circ f')}$ tiene, además de $\{0\}$, una órbita periódica de período cuatro. Entonces $r = 4$, $q = 1$ y

$$i_{\mathbb{R}^2}((g \circ f)^k, 0) = \begin{cases} -3 & \text{si } k \in 4\mathbb{N} \\ 1 & \text{si } k \notin 4\mathbb{N} \end{cases}$$

Por otro lado, $s \circ f$ invierte la orientación.

$$Fix_{cl(N \setminus L) / \sim}(((\overline{s \circ f'})^k) = \begin{cases} \{0, q_1, q_2, q_3, q_4\} & \text{si } k \in 2\mathbb{N} \\ \{0\} & \text{si } k \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

$\overline{(s \circ f')}$ tiene, además de $\{0\}$, $q = 1$ órbitas periódicas de período dos y dos puntos fijos. Entonces, nuestro teorema principal garantiza que

$$i_{\mathbb{R}^2}((s \circ f)^k, 0) = \begin{cases} -3 & \text{si } k \text{ es par} \\ -1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Definición 2.4. Sea $\theta(p_1) = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \{q_1, \dots, q_m\}$ una órbita periódica de $\overline{f'}$. Decimos que $p_i, p_j \in \theta(p_1)$ son *adyacentes* en $\theta(p_1)$ si existe

un arco γ contenido en $\partial(N \setminus L) / \sim$, que es un conjunto homeomorfo a S^1 , de modo que γ conecta a p_i con p_j y $\gamma \cap \theta(p_1) = \{p_i, p_j\}$.

Lema 2.5. Sea $\theta(p_1) = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \{q_1, \dots, q_m\}$ una órbita periódica de período s de \bar{f} . Si p_i y p_j son adyacentes en $\theta(p_1)$, entonces sus imágenes p_{i+1} y p_{j+1} también son adyacentes.

Demostración. Si \bar{f} fuese un homeomorfismo, la demostración sería simple. Desafortunadamente \bar{f} nunca es inyectiva, de modo que la prueba será más elaborada, aunque las ideas esenciales son las mismas.

Consideremos el arco de la definición 2.4 que une p_i con p_j , y que denotaremos por $\overline{p_i p_j}$. Diremos que $\overline{p_i p_j}$ hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_i y p_j .

Sea

$$\overline{L_i L_j} = (\pi)^{-1}(\overline{p_i p_j}) \subset \partial(N \setminus L).$$

$\overline{L_i L_j}$ es un arco, de extremos $a \in \partial_N(L_i)$ y $b \in \partial_N(L_j)$. Entonces $f(\overline{L_i L_j}) \subset \text{int}(N)$ es un arco.

Sean L_{i+1}, L_{j+1} tales que $f(\partial_N(L_i)) \subset \text{int}(L_{i+1})$ y $f(\partial_N(L_j)) \subset \text{int}(L_{j+1})$. Como $N^- \cap B_i \neq \emptyset$, se puede construir un arco γ_i en B_i que conecta el punto a con $a' \in N^-$, $\gamma_i \cap N^- = \{a'\}$ y $\gamma_i \cap \partial_N(L_i) = \{a\}$.

Resulta que $f(\gamma_i)$ es un arco, $f(\gamma_i) \subset L_{i+1}$, uniendo el extremo $f(a)$ con $\partial(N)$, $f(\gamma_i) \cap \partial(N) = \{f(a')\}$, $f(\gamma_i) \cap f(\partial_N(L_i)) = \{f(a)\}$.

Denotamos $K_{i+1} = f(\gamma_i)$. Consideramos un arco similar γ_j para L_j , y llamamos $K_{j+1} = f(\gamma_j)$.

Es claro que $f(\overline{L_i L_j}) \cup K_{i+1} \cup K_{j+1}$ es un arco que descompone a N en dos componentes.

Sea R la componente (cerrada) tal que $R \cap K = \emptyset$ (no es necesario que K sea conexo para poder afirmar esto). $\partial(R)$ es homeomorfo a S^1 , con $f(\overline{L_i L_j}) \cup K_{i+1} \cup K_{j+1} \subset \partial(R)$ (ver figura IV.2).

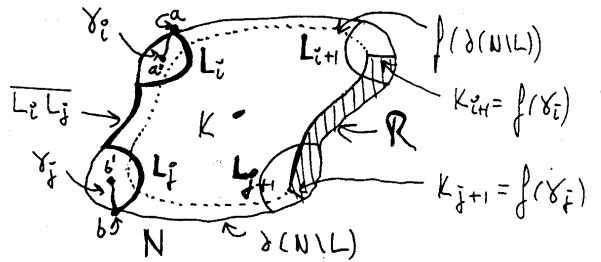


Figura IV.2

Consideremos el arco

$$A = \partial(N) \cap R \subset \partial(N).$$

Definimos $\overline{p_{i+1}p_{j+1}} = (\pi \circ r)(A)$, un arco en $\partial(N \setminus L) / \sim \equiv S^1$ que une p_{i+1} con p_{j+1} .

Veremos que p_{i+1} y p_{j+1} son adyacentes (en $\theta(p_1)$) ya que

$$\overline{p_{i+1}p_{j+1}} \cap \theta(p_1) = \{p_{i+1}, p_{j+1}\}.$$

Supongamos que existe un $p_k \in \theta(p_1) \cap \overline{p_{i+1}p_{j+1}}$, con $p_k \notin \{p_{i+1}, p_{j+1}\}$. Consideremos $p_{k-1} \in \theta(p_1)$, tal que $\overline{f'(p_{k-1})} = p_k$. Resulta evidente que $p_{k-1} \notin \overline{p_i p_j}$ y $f(\partial_N(L_{k-1})) \subset \text{int}(L_k)$.

$$(\pi)^{-1}(p_{k-1}) = \partial_N(L_{k-1})$$

$$(\pi)^{-1}(p_k) = \partial_N(L_k) \subset (\pi)^{-1}(\overline{p_{i+1}p_{j+1}}).$$

Denotamos $(\pi)^{-1}(\overline{p_{i+1}p_{j+1}}) = \overline{L_{i+1}L_{j+1}}$.

Además, $f(\partial_N(L_{k-1})) \subset \text{int}(R)$. En efecto, si $x \in \partial_N(L_{k-1})$ es tal que $f(x) \in L_k \setminus \text{int}(R)$, existe un arco $\gamma_x^y \subset B_{k-1}$, γ_x^y con extremos $x \in \partial_N(L_{k-1})$, $y \in B_{k-1} \cap N^-$, $\gamma_x^y \cap N^- = \{y\}$ y $\gamma_x^y \cap \partial_N(L_{k-1}) = \{x\}$. Así, $f(y) \in \partial(N)$.

Es claro que $f(\gamma_x^y) \subset L_k$.

Como $f(x) \notin \text{int}(R)$ y $f(y) \in \partial(N) \cap L_k \subset A \subset R$, entonces existe un $z \in \gamma_x^y$ tal que $f(z) \in \partial(R)$. Pero $f(\gamma_x^y)$ sólo podrá cortar a $\partial(R)$ en $f(\overline{L_i L_j})$ ya que, por construcción, no lo puede hacer con K_{i+1} y K_{j+1} . Así que $f(z) \in f(\overline{L_i L_j})$, y $z \in \overline{L_i L_j}$. Consecuentemente $z \in \text{int}_N(L_{k-1}) \cap \overline{L_i L_j}$, lo que nos lleva a una contradicción.

Como K está en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus f(\partial(N \setminus L))$, ocurre que $f(\overline{L_i L_j}) = f(\partial(N \setminus L)) \cap R$.

Por otro lado, $f(\partial_N(L_{k-1})) \subset \text{int}(R) \cap f(\partial(N \setminus L))$. Entonces tendríamos que $\partial_N(L_{k-1}) \subset \overline{L_i L_j}$. Obtenemos, de este modo, una contradicción con el hecho de que $p_{k-1} \notin \overline{p_i p_j}$. \square

Lema 2.6. Utilizando la notación del lema anterior, sean $\partial_N(L_i) \neq \partial_N(L_j)$, tales que $L_{i+1} \neq L_{j+1}$. Consideremos un arco $\overline{L_i L_j}$. Si $\partial_N(L_k) \subset \overline{L_i L_j}$, entonces

$$\partial_N(L_{k+1}) \subset \overline{L_{i+1}L_{j+1}}$$

donde $L_{k+1} \in \{L_1, \dots, L_m\}$ es tal que $f(\partial_N(L_k)) \subset \text{int}(L_{k+1})$.

Demostración. Sabemos que es posible construir un arco γ_k en B_k que conecta el punto a_k , extremo del arco $\partial_N(L_k)$, con $a' \in N^-$ y tal que $\gamma_k \cap N^- = \{a'\}$. Entonces $f(\gamma_k) \subset L_{k+1}$ es un arco que conecta $f(a_k) \in \text{int}(L_{k+1})$ con $\partial(N)$,

$$f(\gamma_k) \cap \partial(N) = \{f(a')\} \text{ y } f(\gamma_k) \cap f(\partial_N(L_k)) = \{f(a_k)\}.$$

Dada la región R como en el lema anterior, tenemos que

$$f(\gamma_k) \cap \partial_N(R) = \{f(a_k)\}.$$

Entonces

$$1) f(\gamma_k) \subset (N \setminus R) \cup \{f(a_k)\},$$

o bien

$$2) f(\gamma_k) \subset R.$$

Es claro que $f(a_k) \in \text{int}(f(\text{cl}(N \setminus L)) \cup R)$.

Si se da 1), como $f(a') \in \partial(N)$, resulta que

$$f(\gamma_k) \cap (f(\partial(N \setminus L)) \setminus \{f(a_k)\}) \neq \emptyset.$$

Por la construcción de γ_k esto es imposible.

Si se da 2), $f(a') \in L_{k+1} \cap (\partial(N) \cap R)$. Entonces $f(a') \in A$ (arco que determinaba $\overline{L_{i+1}L_{j+1}}$). Así, $r(f(a')) \in \partial_N(L_{k+1}) \cap \overline{L_{i+1}L_{j+1}}$. En consecuencia, $\partial_N(L_{k+1}) \subset \overline{L_{i+1}L_{j+1}}$. \square

Proposición 2.7. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con (N, L) una filtración fuerte para K , un conjunto compacto, invariante y aislado. Entonces

a) Si f preserva la orientación, todas las órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en $\{q_1, \dots, q_m\}$ tienen el mismo período.

b) Si f invierte la orientación, entonces $\overline{f'}$ no tiene más de dos puntos fijos en $\{q_1, \dots, q_m\}$ y el período de sus puntos periódicos es menor o igual que 2.

Demostración. a) Fijemos una orientación en $\partial(N \setminus L)$. Recuérdese que $f(\partial(N \setminus L))$ circunda a K , preservando la orientación.

Entonces, los arcos orientados $\overline{L_iL_j}$ y $\overline{L_{i+1}L_{j+1}}$ tienen la misma orientación en $\partial(N \setminus L)$. En consecuencia, $\overline{p_{i+1}p_{j+1}}$ preserva la orientación de $\overline{p_i p_j}$ en $\partial(N \setminus L)/\sim$.

Consideremos dos órbitas periódicas, distintas, de $\overline{f'}$ en $\{q_1, \dots, q_m\}$ a las que denotaremos por $\theta(p_1) = \{p_1, \dots, p_r\}$ y $\theta(p'_1) = \{p'_1, \dots, p'_s\}$.

$|\theta(p_1)| = r$ y $|\theta(p'_1)| = s$. Veamos que $r = s$.

Si $p'_1 \in \overline{p_i p_j}$, arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_i y p_j , entonces $(\pi)^{-1}(p'_1) = \partial_N(L'_1)$ con $L'_1 \in \{L_1, \dots, L_m\}$ cumpliendo que $\partial_N(L'_1) \subset \overline{L_iL_j} = (\pi)^{-1}(\overline{p_i p_j})$.

Debido al último lema, si $\overline{f'}(p'_1) = p'_2$, entonces $(\pi)^{-1}(p'_2) = \partial_N(L'_2)$ es tal que $\partial_N(L'_2) \subset \overline{L_{i+1}L_{j+1}} = (\pi)^{-1}(\overline{p_{i+1}p_{j+1}})$. Tenemos, pues, que $p'_2 \in \overline{p_{i+1}p_{j+1}}$.

Por otro lado, como $\overline{p_i p_j}$ es un arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a sus extremos, ocurre que, como se hacía en el lema 2.5 para definir $\overline{p_{i+1}p_{j+1}}$, se pueden definir ahora los arcos $\overline{p_{i+k}p_{j+k}}$, que harán también adyacentes en $\theta(p_1)$ a sus extremos, y esto para todo k .

Si $\overline{p_{i+l}p_{j+l}} \cap \overline{p_{i+l'}p_{j+l'}} \neq \emptyset$ con $l \neq l'$ menores que r , entonces

$$\overline{p_{i+l}p_{j+l}} \cap \overline{p_{i+l'}p_{j+l'}} \subset \{p_{i+l} \cup p_{j+l}\}.$$

La otra posibilidad sería $\overline{p_{i+l}p_{j+l}} = \overline{p_{i+l'}p_{j+l'}}$, pero entonces, al preservarse la orientación, $\overline{p_i p_j}$ mantiene la orientación de $\overline{p_{i+l}p_{j+l}}$, y la de $\overline{p_{i+l'}p_{j+l'}}$ con lo que llegamos a la contradicción de que $p_{i+l} = p_{i+l'}$ y $p_{j+l} = p_{j+l'}$ con $l, l' < r$.

Se obtiene $p'_1 \in \overline{p_i p_j}$, $p'_2 \in \overline{p_{i+1} p_{j+1}}$, \dots , $p'_r \in \overline{p_{i+r-1} p_{j+r-1}}$, de modo que $p'_l \neq p'_{l'}$ para todo $l \neq l'$ ($\leq r$). En consecuencia

$$s = |\theta(p'_1)| \geq r = |\theta(p_1)|.$$

Por un argumento idéntico obtendremos $r \geq s$ con lo que resulta $r = s$.

b) Veremos primero que el período de los puntos periódicos es menor o igual que 2. Supongamos lo contrario, esto es, que existe $\theta(p_1)$ con $|\theta(p_1)| = r > 2$. Sean p_i, p_j adyacentes en $\theta(p_1)$. Consideremos el arco orientado $\overline{p_i p_j}$ que no contiene ningún otro elemento de $\theta(p_1)$. Tendremos que el arco orientado $\overline{p_{i+1} p_{j+1}}$ que hace adyacentes a p_{i+1} y p_{j+1} , tiene orientación opuesta a la de $\overline{p_i p_j}$. Como $r > 2$, ocurre que

$$\overline{p_i p_j} \cap \overline{p_{i+1} p_{j+1}} = \emptyset.$$

Repitamos el argumento. Consideremos el arco orientado $\overline{p_j p_{k_1}}$, que hace adyacentes a p_j y $p_{k_1} \neq p_i$ en $\theta(p_1)$, y construyamos $\overline{p_{j+1} p_{k_1+1}}$, un arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_{j+1} y p_{k_1+1} , cambiando la orientación de $\overline{p_j p_{k_1}}$. Tendremos que

$$\overline{p_j p_{k_1}} \cap \overline{p_{j+1} p_{k_1+1}} = \emptyset.$$

Repetiendo el proceso se obtienen $\{k_2, \dots, k_r\}$, de manera que $\overline{p_{k_{r-1}} p_{k_r}}$ hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a $p_{k_{r-1}}$ y p_{k_r} . Ocurre que

$$\overline{p_{k_{r-1}} p_{k_r}} \cap \overline{p_{k_{r-1}+1} p_{k_r+1}} = \emptyset,$$

con orientaciones opuestas, y tal que existe un arco $\overline{p_{k_r} p_{k_r+1}}$ que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_{k_r} y p_{k_r+1} .

Tenemos, por un lado, a $\overline{p_{k_r} p_{k_r+1}}$, un arco de extremos adyacentes en $\theta(p_1)$ y, por otro, a $\overline{f'(p_{k_r}) f'(p_{k_r+1})}$, un arco de extremos adyacentes en $\theta(p_1)$, de orientación opuestas. Entonces

$$\overline{f'(p_{k_r+1})} = p_{k_r}.$$

Como $\overline{f'(p_{k_r})} = p_{k_r+1}$ llegamos a contradicción, al ser $r > 2$.

Sólo nos queda ver que $\overline{f'}$ no tiene más de dos puntos fijos en $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Supongamos que $p_i, p_j \in \{q_1, \dots, q_m\}$ son dos puntos fijos de $\overline{f'}$. Consideremos un arco $\overline{p_i p_j}$ en $\partial(N \setminus L) / \sim$ de extremos p_i, p_j . Entonces $\overline{p_i p_j}$ y $\overline{p_{i+1} p_{j+1}}$ tienen orientaciones opuestas, de modo que

$$\overline{p_i p_j} \cap \overline{p_{i+1} p_{j+1}} = \{p_i \cup p_j\}.$$

En consecuencia no existen más puntos fijos. \square

Teorema Principal 2.8. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor, $K = \text{Inv}(V, f)$, con $V \subset U$ homeomorfo a una bola abierta. Escojamos una filtración fuerte (N, L) para K . Pueden darse dos casos,

a) f preserva la orientación. Entonces,

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in r\mathbb{N} \\ 1 & \text{si } k \notin r\mathbb{N} \end{cases}$$

siendo $k \in \mathbb{N}$, q el número de órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en $\{q_1, \dots, q_m\}$ y r el período de todas ellas.

b) f invierte la orientación. Entonces:

1) Si $\overline{f'}$ no tiene puntos fijos en $\{q_1, \dots, q_m\}$ ocurre

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1 - 2q & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

2) Si $\overline{f'}$ tiene un único punto fijo en $\{q_1, \dots, q_m\}$ ocurre

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1 - (2q + 1) & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

3) Si $\overline{f'}$ tiene dos puntos fijos en $\{q_1, \dots, q_m\}$ ocurre

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1 - (2q + 2) & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

siendo q el número de órbitas de período 2 de $\overline{f'}$ en $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Demostración. a) $\{q_1, \dots, q_m\}$ se descompone en puntos eventualmente periódicos y periódicos. Por la proposición 2.7 existen $q \geq 1$ órbitas periódicas, todas ellas de período $r \geq 1$.

Por otro lado, usando el hecho de que $cl(N \setminus L)/\sim$ es un AR,

$$\begin{aligned} 1 &= i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = \\ &= i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, V') + \sum_{q_i \in Fix((\overline{f'})^k)} i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, q_i) \end{aligned}$$

siendo V' un entorno aislante suficientemente pequeño de K .

Nótese que $i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, V') = i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V)$ y, como $(\overline{f'})^k$ es constante en un pequeño entorno de cada $q_i \in Fix((\overline{f'})^k)$, entonces $i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, q_i) = 1$ para todo $q_i \in Fix((\overline{f'})^k)$.

Resulta evidente, entonces, que

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V) = 1 - \sum_{q_i \in Fix((\overline{f'})^k)} i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, q_i) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in r\mathbb{N} \\ 1 & \text{si } k \notin r\mathbb{N} \end{cases}$$

b) Análogo al caso a). \square

Corolario 2.9. Supongamos que estamos en las condiciones del teorema principal. Entonces

a) Si $K = \{p\}$ y f preserva la orientación, obtenemos el teorema de Le Calvez-Yoccoz, enunciado en la introducción, pero para $k \in \mathbb{N}$.

b) Si f invierte la orientación y $i_{\mathbb{R}^2}(f, V)$ es par (impar), entonces $i_{\mathbb{R}^2}(f^k, V)$ es par (impar) para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 2.10. Hacemos notar que el teorema principal está enunciado para iteraciones f^k , con $k \in \mathbb{N}$, mientras que el teorema de Le Calvez-Yoccoz se aplica para $k \in \mathbb{Z}$ con f preservando la orientación y $K = \{p\}$ no atractor ni repulsor. Nuestras técnicas de demostración del teorema principal también serán válidas con $k < 0$, preserve f o no la orientación, siendo K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo, no atractor ni repulsor, $K = \text{Inv}(V, f)$, con V homeomorfo a una bola abierta, ya que se puede probar que tanto f como f^{-1} admiten filtraciones fuertes en K con las mismas propiedades. La demostración de esto, aunque no difícil, es engorrosa y no la haremos aquí.

Corolario 2.11. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen. Supongamos que existe una filtración fuerte (N, L) para $K = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L), f)$, no necesariamente conexo. Entonces ocurre que los argumentos utilizados nos sirven para demostrar que el teorema principal es también cierto en este caso.

Observación 2.12. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación continua. Supongamos que existe una filtración fuerte (N, L) para f en $K = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L), f)$ y que se cumplen las condiciones:

- a) $f|_{\partial(N) \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i)}$ es un homeomorfismo sobre la imagen,
- b) $f(\partial(N \setminus L))$ genera un dominio de Jordan que contiene a K .

Entonces los argumentos utilizados sirven, palabra por palabra, para demostrar el teorema principal en esta situación.

M.Shub y D.Sullivan probaron, en [117], que, para aplicaciones C^1 , $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto fijo aislado $p \in U$, $i_{\mathbb{R}^m}(f^k, p)$ es función acotada de k . El siguiente corolario es un resultado similar en nuestro contexto.

Corolario 2.13. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo local. Sea $p \in U$ un punto fijo de f , no repulsor, tal que $\{p\}$ es un conjunto invariante y aislado. Entonces $i_{\mathbb{R}^2}(f^k, p)$ es función acotada de k .

IV.3. Existencia de filtraciones fuertes

Definición 3.1. Un conjunto compacto N es llamado *bloque aislante* si

$$f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N).$$

En el libro de Easton [39] se encuentra una demostración muy elegante de la existencia de bloques aislantes para cada compacto invariante y aislado.

Observación 3.2. Una definición equivalente de bloque aislante es la siguiente:

Para todo $x \in \partial(N)$ ocurre que $f(x) \notin N$ ó $f^{-1}(x) \notin N$.

Demostración. Supongamos que $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N)$. Entonces, dado $x \in \partial(N)$, debe ocurrir que $f(x) \notin N$ ó $f^{-1}(x) \notin N$, ya que, en

caso contrario tendríamos que $f(x), f^{-1}(x) \in N$, con lo que llegamos a una contradicción.

Supongamos, ahora, que para todo $x \in \partial(N)$, o bien $f(x) \notin N$, o $f^{-1}(x) \notin N$. Entonces, si no se diese $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N)$, tendríamos que existe un $x_0 \in f(N) \cap \partial(N) \cap f^{-1}(N)$, lo que nos lleva a una contradicción.

□

Teorema 3.3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U abierto, y sea $K = \text{Inv}(V, f)$ un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo, con $V \subset U$ homeomorfo a una bola abierta (si $K = \{p\}$ esto siempre es posible). Entonces existe un bloque aislante, N , arbitrariamente pequeño, tal que N es homeomorfo a un disco y $K = \text{Inv}(N, f) \subset \text{int}(N)$.

Demostración. Sea U_0 una bola abierta tal que $\text{cl}(U_0)$ es una bola cerrada con $K = \text{Inv}(\text{cl}(U_0), f) \subset U_0$.

Sea M una variedad compacta, $M \subset \text{cl}(U_0)$, M bloque aislante de $K = \text{Inv}(M, f) \subset \text{int}(M)$ (ver en teorema 3.7 de [44] la existencia de tal M).

M es un disco con una cantidad finita de agujeros $\{D_1, \dots, D_n\}$. Denotamos por $D(M)$ al disco que se obtiene de rellenar los agujeros de M , $D(M) = M \cup (\bigcup_{i=1}^n D_i)$.

Estudiamos el comportamiento de f en $\{D_1, \dots, D_n\}$. Existen tres casos posibles:

A) Existe un $D_0 \in \{D_1, \dots, D_n\}$ tal que

$$f(D_0) \subset M \text{ ó } f^{-1}(D_0) \subset M.$$

B) Existe un $D_0 \in \{D_1, \dots, D_n\}$ tal que

$$f(D_0) \not\subset D(M) \text{ ó } f^{-1}(D_0) \not\subset D(M).$$

C) Negación de los dos anteriores, esto es, para todo D_j tenemos

$$f(D_j) \subset D(M), \quad f(D_j) \cap \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right) \neq \emptyset.$$

y

$$f^{-1}(D_j) \subset D(M), \quad f^{-1}(D_j) \cap \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right) \neq \emptyset.$$

Para cada uno de los casos enunciados transformaremos M en una variedad M_1 con, al menos, un agujero menos. Veámoslo.

Caso A). Sea D_0 tal que $f(D_0) \subset M$ (si $f^{-1}(D_0) \subset M$, el argumento es similar). Definimos, entonces, $M_1 = M \cup D_0 \subset \text{cl}(U_0)$. Ocurre que M_1 sigue siendo una variedad, con $n - 1$ agujeros, y tal que $K = \text{Inv}(M_1, f) \subset \text{int}(M_1)$.

Demostremos que M_1 es un bloque aislante. Sabemos, debido a que $f(D_0)$ está contenido en el bloque aislante M , que $f^{-1}(D_0) \cap M = \emptyset$. Por otro

lado, es claro que $f^{-1}(D_0) \not\subset D_0$, ya que $D_0 \subset cl(U_0)$, que es un entorno aislante de K , de modo que $f^{-1}(D_0) \cap M_1 = \emptyset$.

Sea $x \in \partial(M_1)$. Entonces $x \in \partial(M)$ y, al ser M un bloque aislante, ocurre 1) $f(x) \notin M$ ó 2) $f^{-1}(x) \notin M$.

Si se da 1), entonces $f(x) \notin M_1$, ya que, de ser $f(x) \in M_1 \setminus M$, entonces $f(x) \in int(D_0)$. Esto es contradictorio con el hecho de que $f^{-1}(D_0) \cap M_1 = \emptyset$.

Si se da 2), entonces $f^{-1}(x) \notin M_1$, ya que, de ser $f^{-1}(x) \in M_1 \setminus M$, entonces $f^{-1}(x) \in int(D_0)$. Como $f(D_0) \subset M$, tenemos un absurdo ya que $x = f(f^{-1}(x)) \in int(M)$ y $x \in \partial(M)$.

En consecuencia, M_1 es un bloque aislante, y una variedad (bola) con un agujero menos que M , tal que $K = Inv(M_1, f) \subset int(M_1)$.

Caso B). Sea D_0 tal que $f(D_0) \not\subset D(M)$ (si $f^{-1}(D_0) \not\subset D(M)$ la demostración es análoga). Existe un $D'_0 \in \{D_1, \dots, D_n\}$ (probablemente $D'_0 \neq D_0$) y un arco

$$\gamma : I \rightarrow f(M) \setminus D(M),$$

con $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = q_1$, $\gamma((0, 1)) \subset int(f(M))$, tal que

$$p_1 \in \partial(f(D'_0)) \setminus D(M)$$

$$q_1 \in \partial(f(D(M))) \setminus D(M).$$

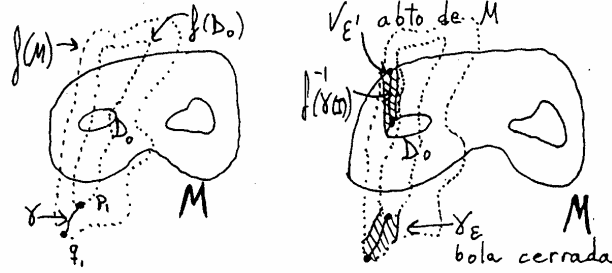
Consideraremos un entorno suficientemente pequeño, γ_ϵ , de $\gamma(I)$, tal que γ_ϵ es homeomorfo a una bola cerrada y $\gamma(I) \subset int_{f(M)}(\gamma_\epsilon) \subset f(M) \setminus D(M)$.

Tenemos que $f^{-1}(p_1) \in \partial(D'_0)$, $f^{-1}(q_1) \in \partial(D(M))$, $f^{-1}(\gamma((0, 1))) \subset int(M)$ y $f^{-1}(\gamma(I))$ es un arco en M que une el borde de D'_0 con el borde del disco $D(M)$.

Sea $V_{\epsilon'}$ un entorno, abierto en M , de $f^{-1}(\gamma(I))$. Por ejemplo, $V_{\epsilon'} = B_{\epsilon'}(f^{-1}(\gamma(I))) \cap M$, con $\epsilon' > 0$ tan pequeño como para que $V_{\epsilon'}$ sea contractible, $f^{-1}(\gamma(I)) \subset V_{\epsilon'} \subset f^{-1}(\gamma_\epsilon)$, y

$$M_1 = M \setminus V_{\epsilon'}$$

sea una variedad conexa.



Figuras IV.3a y IV.3b

M_1 es una bola con $n - 1$ agujeros porque D'_0 ha desaparecido. Resulta claro que $K = \text{Inv}(M_1, f) \subset \text{int}(M_1)$.

Veamos que M_1 es un bloque aislante. Sea $x \in \partial(M_1)$. Entonces puede ocurrir 1) $x \in \partial(M)$ ó 2) $x \in \partial(V_{\epsilon'})$.

Si se da 1), entonces $f(x) \notin M$ ó $f^{-1}(x) \notin M$, con lo que $f(x) \notin M_1$ ó $f^{-1}(x) \notin M_1$.

Si se da 2), entonces $f(x) \in \gamma_{\epsilon} \subset f(M) \setminus M$, luego $f(x) \notin M_1$.

Caso C). Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$, de modo que $|n_0| \in \mathbb{N}$ es el menor natural tal que

$$f^{n_0}(D_1 \cup \dots \cup D_n) \not\subset D(M).$$

Es claro que n_0 existe al ser $K = \text{Inv}(cl(U_0))$. Además, $|n_0| \geq 2$.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que n_0 es positivo. Sea $D_0 \in \{D_1, \dots, D_n\}$ tal que $f^{n_0}(D_0) \not\subset D(M)$. Sea $p_{n_0} = f^{n_0}(p_0) \in f^{n_0}(\text{int}(D_0))$, con $p_{n_0} \notin D(M)$.

Sabemos que existen D_{i_1}, \dots, D_{i_n} tales que

$$(1) f(D_1) \cap \text{int}(D_{i_1}) \neq \emptyset, \dots, f(D_n) \cap \text{int}(D_{i_n}) \neq \emptyset.$$

Definimos

$$A_0(M) = D_1 \cup \dots \cup D_n$$

$$A_1(M) = A_0(M) \cup V_1$$

siendo V_1 una variedad compacta, homeomorfa a $f(A_0(M))$. Podemos escoger $V_1 \subset \text{int}(f(A_0(M)))$, transversal a $A_0(M)$, tan próximo a $f(A_0(M))$ como para que $p_1 = f(p_0) \in \text{int}(V_1)$ y, de modo que, en virtud de (1), la variedad $A_1(M)$ tenga un número de componentes conexas menor o igual que n . Entonces $A_1(M)$ es una cantidad finita de bolas (a lo sumo n), con

una cantidad finita de agujeros cada una ($A_1(M)$ es una variedad compacta).

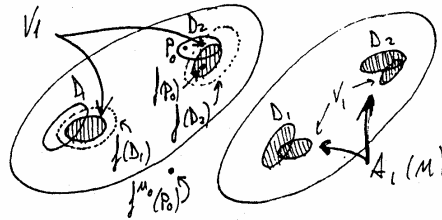


Figura IV.4

Sea $D(A_1(M))$ el conjunto obtenido de tapan los agujeros de $A_1(M)$. $D(A_1(M))$ es una unión finita de discos que contiene a $A_1(M)$. Existen dos situaciones posibles para K :

- a) $K \subset cl(D(A_1(M)) \setminus A_1(M))$.
- b) $K \not\subset cl(D(A_1(M)) \setminus A_1(M))$.

Si se da a), ocurre, al ser K conexo, que $K \subset G$, siendo G un agujero de alguna componente conexa $[A_1(M)]_K$, de $A_1(M)$. Definimos

$$M_1 = G \setminus \bigcup_{i=1}^n int(D_i).$$

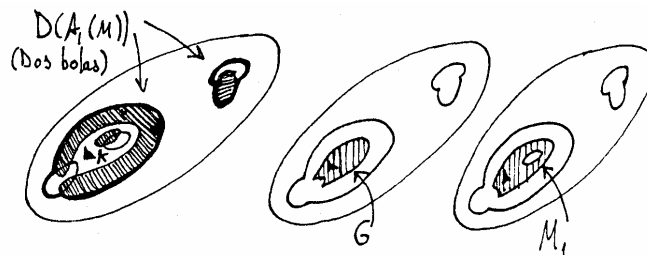


Figura IV.5

Es claro que $K = Inv(M_1, f) \subset int(M_1)$ ya que $K \cap A_1(M) = \emptyset$. Además, M_1 es una variedad compacta (bola) con, a lo más, $n - 1$ agujeros ($[A_1(M)]_K$ contiene al menos uno).

Veamos, ahora, que M_1 es un bloque aislante. Sea $x \in \partial(M_1)$. Entonces $x \in \partial(A_1(M)) \cup \partial(A_0(M))$. Por tanto $x \in \partial(A_0(M))$ ó $x \in \partial(V_1)$.

En el primer caso $x \in \partial(D_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Por ello $f(x) \notin M$ ó $f^{-1}(x) \notin M$. Como $M_1 \subset M$, $f(x) \notin M_1$ ó $f^{-1}(x) \notin M_1$.

En el segundo caso, al ser $x \in \partial(V_1)$, tenemos $f^{-1}(x) \in int(A_0(M))$. Luego $f^{-1}(x) \notin M$.

Así, en el caso a), pasamos de M , una variedad con n agujeros, a M_1 , que es una variedad con, a lo más, $n - 1$ agujeros.

Si se da b), como $K \cap A_1(M) = \emptyset$ y K es conexo, entonces $K \cap D(A_1(M)) = \emptyset$. Definimos

$$M_1 = M \setminus \text{int}(D(A_1(M))).$$

Tenemos que $M_1 \subset M$, $A_0(M) = \bigcup_{i=1}^n D_i = D(A_0(M)) \subset D(A_1(M))$ con $K = \text{Inv}(M_1, f) \subset \text{int}(M_1)$. Además $\{p_0, f(p_0)\} \subset D(A_1(M))$, que son los agujeros de M_1 . Tenemos que M_1 es una bola con, a lo más, n agujeros.

Veamos que M_1 es un bloque aislante. Sea $x \in \partial(M_1)$. Entonces $x \in \partial(M)$ ó $x \in \partial(A_1(M)) \setminus \partial(M)$.

En el primer caso tenemos que $f(x) \notin M$ ó $f^{-1}(x) \notin M$. Como $M_1 \subset M$, ocurre que $f(x) \notin M_1$ ó $f^{-1}(x) \notin M_1$.

En el segundo caso $x \in \partial(V_1)$, luego $f^{-1}(x) \in \text{int}(A_0(M))$. En consecuencia, $f^{-1}(x) \notin M_1$.

Si $n_0 = 2$, M_1 está en las condiciones del caso B), lo que nos permitirá reducir el número de agujeros de la variedad. Si $n_0 > 2$, resulta evidente que las componentes conexas de $D(A_1(M))$ cumplen, en M_1 , las condiciones del caso C). Repetimos el argumento arriba expuesto y construimos

$$A_1(M_1), \quad D(A_1(M_1)) \text{ y } M_2$$

con $K = \text{Inv}(M_2, f) \subset \text{int}(M_2)$, siendo M_2 una variedad compacta (bola con agujeros) y un bloque aislante, y siendo $D(A_1(M_1))$ la familia de agujeros de M_2 , con n componentes conexas o menos.

Además, $\{p_0, f(p_0), f^2(p_0)\} \subset D(A_1(M_1))$ y $n_0 - 1$ es el menor natural tal que $f^{n_0-1}(D(A_1(M_1))) \not\subset M_1 \cup D(A_1(M_1)) = M \cup D(A_0(M))$.

Por inducción obtenemos $A_1(M_{n_0-2})$, $D(A_1(M_{n_0-2}))$ y M_{n_0-1} , una variedad compacta (bola con agujeros), bloque aislante, con $K = \text{Inv}(M_{n_0-1}, f) \subset \text{int}(M_{n_0-1})$, siendo $D(A_1(M_{n_0-2}))$ la familia de agujeros de M_{n_0-1} , con n componentes conexas o menos. Además $\{p_0, f(p_0), \dots, f^{n_0-1}(p_0)\} \subset D(A_1(M_{n_0-2}))$.

Como $p_{n_0} = f(f^{n_0-1}(p_0)) \notin M \cup D(A_0(M))$, y $M_{n_0-1} \cup D(A_1(M_{n_0-2})) = M \cup D(A_0(M))$, entonces

$$p_{n_0} \notin M_{n_0-1} \cup D(A_1(M_{n_0-2})).$$

Estamos, por tanto, en las condiciones del caso B) y la demostración acaba aquí. \square

Teorema 3.4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea $K = \text{Inv}(V, f)$ un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor, siendo $V \subset U$ homeomorfo a una bola abierta. Entonces, existe un par filtrante (N, L) para K , N bloque aislante, con N y las componentes de L discos topológicos.

Demostración. Sea N el bloque aislante construido en el teorema anterior. Siguiendo la demostración del teorema 3.7 en [44], tendremos que existe

$L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ de modo que (N, L) es un par filtrante para K , y L es una variedad de dimensión 2. Entonces L es la unión finita de n bolas, cada una con una cantidad finita de agujeros.

Dado G , un agujero de L_i , veamos que $K \cap G = \emptyset$. Supondremos lo contrario. Sea G_0 el menor de todos los agujeros que contienen a K (tén-gase en cuenta que estos agujeros son encajados). Entonces, como $f(L) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$, tendremos $f(\partial(G_0)) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$. Como K es invariante y no repulsor, llegamos a contradicción de manera inmediata.

Consideremos el par $(N, D(L))$, donde $D(L)$ es el conjunto que se obtiene de rellenar los agujeros de L . Resulta $L \subset D(L)$, que es una unión finita de discos. Veamos que $(N, D(L))$ es el par filtrante buscado en el enunciado del teorema.

1) $cl(N \setminus D(L))$ es entorno aislante de K .

Evidente ya que acabamos de demostrar que $K \subset N \setminus D(L)$.

2) $f(cl(N \setminus D(L))) \subset int(N)$.

Como $cl(N \setminus D(L)) \subset cl(N \setminus L)$, entonces, aplicando f , el resultado es obvio.

3) $f(D(L)) \cap cl(N \setminus D(L)) = \emptyset$.

Sean $\{D(L_1), \dots, D(L_n)\}$ las bolas obtenidas al tapar los agujeros de los L_i . Tenemos $D(L) = \bigcup_{i=1}^n D(L_i)$.

$cl(N \setminus D(L)) \subset cl(N \setminus L)$, por lo que $f(L) \cap cl(N \setminus D(L)) = \emptyset$.

Denotamos a $cl(D(L_i) \setminus L_i) = D_1^i \cup \dots \cup D_{p(i)}^i$ unión finita de bolas (los agujeros de L_i).

Entonces,

$$f(D(L)) \cap cl(N \setminus D(L)) = (f(\bigcup_{j=1}^{p(1)} D_j^1) \cup \dots \cup f(\bigcup_{j=1}^{p(n)} D_j^n)) \cap cl(N \setminus D(L))$$

$\partial(D_j^r) \subset \partial_N(L)$, así que, por las propiedades del par filtrante,

$$f(\partial(D_j^r)) \subset int(L) \subset int(D(L)),$$

de modo que $f(D_j^r) \subset int(D(L))$. En consecuencia, $f(D_j^r) \cap cl(N \setminus D(L)) = \emptyset$ y $f(D(L)) \cap cl(N \setminus D(L)) = \emptyset$. \square

Observación 3.5. Cualquier par filtrante (N, L) , en las condiciones del enunciado del teorema anterior, puede suponerse de modo tal que

$$N^- \cap L_i \neq \emptyset$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Si existen $L_{i_1}, \dots, L_{i_r} \in \{L_1, \dots, L_n\}$ tales que $L_{i_j} \cap N^- = \emptyset$ para $j \in \{1, \dots, r\}$, entonces basta considerar el par

$$N' = N \text{ y } L' = L \setminus \bigcup_{j=1}^r L_{i_j}$$

y tendremos que (N', L') es un par filtrante para K .

1) $cl(N' \setminus L')$ es un entorno aislante de K .

Evidente, ya que $K \subset cl(N \setminus L) \subset cl(N' \setminus L') \subset V$.

2) $f(cl(N' \setminus L')) \subset int(N')$.

Ocurre que $cl(N' \setminus L') = cl(N \setminus L) \cup (\bigcup_{j=1}^r L_{i_j})$. Además $f(cl(N \setminus L)) \subset int(N)$ y $f(L_{i_j}) \subset int(N)$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. En consecuencia, tenemos que $f(cl(N' \setminus L')) \subset int(N')$.

3) $f(L') \cap cl(N' \setminus L') = \emptyset$.

Sea $L_0 \in L'$. Sabemos $f(L_0) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$.

Debemos ver que $f(L_0) \cap \bigcup_{j=1}^r L_{i_j} = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $L_1 \in \{L_{i_1}, \dots, L_{i_r}\}$ tal que $f(L_0) \cap L_1 \neq \emptyset$. Como $L_0 \in L'$, entonces $f(L_0) \not\subset int(L_1)$, esto es, $f(L_0) \cap \partial(L_1) \neq \emptyset$ y $f(L_0) \cap \partial(N) \neq \emptyset$.

Al ser $f(L_0) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$ podemos decir que $f(L_0) \cap \partial(L_1) \cap \partial(N) \neq \emptyset$.

Como N es un bloque aislante,

$$f(f(L_0) \cap \partial(L_1) \cap \partial(N)) \subset N^c,$$

pero sabemos que $f(L_1) \subset int(N)$, con lo que

$$f(f(L_0) \cap \partial(L_1) \cap \partial(N)) \subset int(N),$$

lo cual nos lleva a una contradicción. \square

Nótese que el par filtrante que se construye en el teorema 3.4 puede cumplir, sin necesidad de ninguna modificación, la condición de la anterior observación (ver teorema 3.7 de [44]).

Observación 3.6. Cualquier par filtrante en las condiciones de la observación 3.5 cumple que $L_i \not\subset int(N)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. De existir un $L_0 \subset int(N)$, entonces $f(\partial(L_0)) \subset int(N)$, luego $f(L_0) \subset int(N)$, algo imposible, ya que, como $L_0 \cap N^- \neq \emptyset$, $f(L_0 \cap N^-) \not\subset int(N)$. \square

Demostración de teorema 2.3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor, $K = Inv(V, f)$, siendo $V \subset U$ homeomorfo a una bola abierta. Escogemos un par filtrante para K , (N, L) , como en el teorema 3.4. El disco N es un bloque aislante, y $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ es una unión disjunta de discos. Podemos suponer, por la observación 3.5, que $L_i \cap N^- \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Dividimos a $\{L_1, \dots, L_n\}$ en dos clases:

1) Los L_i tales que $N \setminus L_i$ no es conexo. De estos L_i diremos que son *transversales* con respecto a N .

2) Los L_i tales que $N \setminus L_i$ es conexo.

Denotamos por $\{L_1, \dots, L_p\}$ a la familia de las componentes transversales de L que se pueden conectar con K por algún camino en N que no corta a ninguna otra componente transversal de L , y llamamos $\{L_{p+1}, \dots, L_m\}$ a la familia de las componentes no transversales de L que se conectan con K

por algún camino en N que no corta a ninguna componente transversal de L .

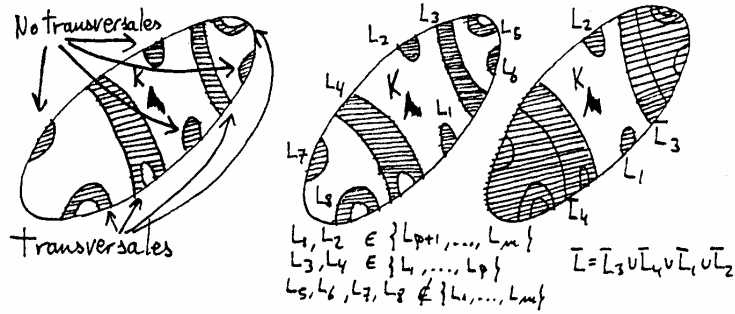
Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ definimos

$$\overline{L}_i = N \setminus c.c.(N \setminus L_i, K)$$

donde $c.c.(N \setminus L_i, K)$ es la componente conexa de $N \setminus L_i$ que contiene a K .

Consideramos el par (N, \overline{L}) con

$$\overline{L} = \left(\bigcup_{i=1}^p \overline{L}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=p+1}^m L_i \right) = \bigcup_{i=1}^m \overline{L}_i.$$



Figuras IV.6a y IV.6b

Veamos que (N, \overline{L}) es una filtración fuerte para K .

Tenemos que $\overline{L} \subset N$ es un par de compactos tal que N y \overline{L} son las clausuras de sus interiores.

Resulta evidente que $\overline{L}_i \cap \partial(N)$ es un arco para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. Asimismo, gracias a lo expuesto en la observación 3.6, se demuestra que $\overline{L}_i \cap \partial(N)$ es también un arco para todo $i \in \{p+1, \dots, m\}$. Entonces,

1) N es homeomorfo a un disco y, por lo dicho arriba, $\partial(N \setminus \overline{L})$ es homeomorfo a S^1 .

2) $cl(N \setminus \overline{L})$ es un entorno aislante de K .

Resulta evidente, ya que, por la construcción de \overline{L} , tenemos que $cl(N \setminus \overline{L}) \subset cl(N \setminus L)$ es un entorno de K .

3) $f(cl(N \setminus \overline{L})) \subset int(N)$.

Obvio ya que $cl(N \setminus \overline{L}) \subset cl(N \setminus L)$.

4) Para toda componente \overline{L}_i de \overline{L} , $\partial_N(\overline{L}_i)$ es un arco, y existe un disco topológico B_i tal que $\partial_N(\overline{L}_i) \subset B_i \subset \overline{L}_i$, $B_i \cap N^- \neq \emptyset$ y $f(B_i) \cap cl(N \setminus \overline{L}) = \emptyset$.

Resulta, debido a que $\overline{L}_i \cap \partial(N)$ es un arco, que $\partial_N(\overline{L}_i)$ es también un arco. Sea $B_i = L_{k(i)} \in \{L_1, \dots, L_n\}$ tal que $L_{k(i)} \subset \overline{L}_i$ y $\partial_N(\overline{L}_i) \subset \partial_N(L_{k(i)})$. Como $L_{k(i)} \cap N^- \neq \emptyset$, y $f(L_{k(i)}) \cap cl(N \setminus \overline{L}) \subset f(L_{k(i)}) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$, el resultado queda demostrado. \square

IV.4. Generalización del teorema principal

Como consecuencia de los resultados obtenidos en los puntos anteriores, así como de las técnicas utilizadas para demostrarlos, estamos en situación de obtener conclusiones más generales.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Dado $k \in \mathbb{N}$, interesa calcular

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)).$$

Para comenzar este estudio escogeremos un entorno aislante N de K con propiedades topológicas que faciliten su posterior manipulación y que expliciten, en la medida de lo posible, la dinámica de f en las inmediaciones de K .

Sea N un bloque aislante de K , N variedad compacta, conexa (la construcción de un tal N aparece en el teorema 3.7 de [44]) y con una cantidad mínima de agujeros $\{D_1, \dots, D_p\}$, entendiendo por agujero a una bola cerrada.

Denotamos por $D(N)$ al disco obtenido de rellenar los agujeros de N , $D(N) = N \cup (\bigcup_{i=1}^p D_i)$. Dado $x \in D(N)$, denotamos por γ_x^∂ a cualquier arco, contenido en $D(N)$, de extremos $\gamma_x^\partial(0) = x$ y $\gamma_x^\partial(1) = y \in \partial(D(N))$.

Definimos

$$C(K) = K \cup I(K)$$

donde

$$I(K) = \{x \in D(N) \setminus K : \gamma_x^\partial \cap K \neq \emptyset \text{ para todo } \gamma_x^\partial\}.$$

Ocurre que $I(K)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 y $C(K)$ es un conjunto compacto y conexo.

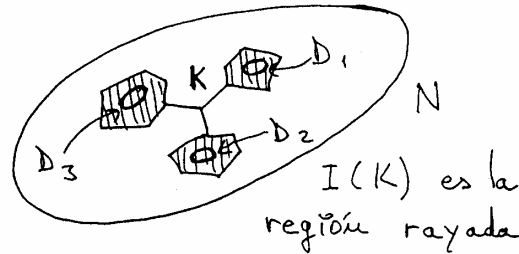


Figura IV.7

Observación 4.1. $f(C(K)) = C(K)$.

Demostración. Sea $I(K)_0$ una componente conexa de $I(K)$. $I(K)_0$ es un abierto de \mathbb{R}^2 .

Resulta evidente que $\partial(I(K)_0) \subset K$. Tenemos, además, que $\partial(f(I(K)_0)) = f(\partial(I(K)_0)) \subset K$.

Así, el conjunto $I(K)_1 = f(I(K)_0)$ es una componente conexa de $I(K)$.

De modo que f , al igual que f^{-1} , transforma componentes conexas de $I(K)$ en componentes conexas de $I(K)$ de manera homeomorfa. En consecuencia, $f(C(K)) = C(K)$. \square

Lema 4.2. Sea $I(K)_0$ una componente conexa de $I(K)$. Ocurre que $I(K)_0$ contiene, al menos, un agujero $D^0 \in \{D_1, \dots, D_p\}$.

Una consecuencia interesante de este resultado será que, dada $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, se tiene que cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo K tendrá el *shape* de un poliedro finito.

Demostración. Veamos que, si no existe un $D^0 \subset I(K)_0$, entonces el conjunto $f(I(K)_0) = I(K)_1$ tampoco tiene agujeros.

En efecto, si existiese un agujero $D^1 \subset I(K)_1$, entonces $f(\partial(D^1)) \subset \text{int}(D^2) \subset I(K)_2$, con D^2 un agujero de $I(K)_2$. Esto es consecuencia inmediata de que N es un bloque aislante.

Por otro lado, $f^{-1}(\partial(D^2)) \subset N$, ya que, en caso contrario, existe algún punto $x \in I(K)_1$ tal que $x \in f^{-1}(\partial(D^2)) \cap \partial(N)$. Pero entonces, como $f^{-1}(x) \in I(K)_0 \subset N$, resulta que N no es un bloque aislante, lo cual es una contradicción.

Al ser $f^{-1}(\partial(D^2)) \subset N$, entonces $f(\partial(D^2)) \subset \text{int}(D^3) \subset I(K)_3$. De este modo, las imágenes por f de $I(K)_0$ tienen, todas, agujeros. Al haber una cantidad finita de agujeros, existe un n_0 tal que $f^{n_0}(I(K)_0) = I(K)_0$, que debería tener agujeros. Obtenemos así una contradicción.

En consecuencia, si $I(K)_0$ no tiene agujeros, tampoco los tiene ninguna de sus imágenes por f (o preimágenes por f^{-1}).

Así que, denotando $I(K)_n = f^n(I(K)_0)$, se tiene que $K \cup \text{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I(K)_n)$, que es distinto de K , es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , contenido en N . Pero esto se contradice con el hecho de que $\text{Inv}(N, f) = K$.

Por lo tanto, $I(K)_0$ siempre tendrá algún agujero D^0 .

Consecuencia inmediata de esto último es que $I(K)$ tiene una cantidad finita de componentes que se descomponen como unión finita de ciclos de longitud finita.

Así, por el teorema 9.1 de [11], dada $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, se tiene que cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo K tendrá el *shape* de un poliedro finito. \square

Observación 4.3. Sea D^0 un agujero de $I(K)_0$. No se dará ninguna de las situaciones siguientes:

- 1) $f(D^0) \subset N$ ó $f^{-1}(D^0) \subset N$.
- 2) $f(D^0) \not\subset D(N)$ ó $f^{-1}(D^0) \not\subset D(N)$.

En consecuencia, la única posibilidad será

$$f(D^0) \subset D(N), \quad f(D^0) \cap \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^p D_i\right) \neq \emptyset$$

y

$$f^{-1}(D^0) \subset D(N), \quad f^{-1}(D^0) \cap \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^p D_i\right) \neq \emptyset.$$

Demostración. Resulta evidente que 2) no se dará, ya que $D^0 \subset C(K) = f(C(K))$.

Veamos que 1) no se da. Si $f(D^0) \subset N$ (el caso en que $f^{-1}(D^0) \subset N$ se hará de manera análoga), entonces $f^{-1}(D^0) \subset \text{int}(D^{-1}) \subset I(K)_{-1}$. Esto se debe a que N es un bloque aislante.

Además, debido a que $f(D^0) \subset N$, es evidente que $f^{-1}(D^0) \not\subset \text{int}(D^0)$. De modo que $D^{-1} \neq D^0$.

Definimos $N_1 = N \cup D^0$, que es una variedad compacta, conexa, con un agujero menos que N , y con $\text{Inv}(N_1, f) = \text{Inv}(N, f) = K$.

Veamos que N_1 es un bloque aislante. En efecto, dado $x \in \partial(N_1)$, ocurre que $x \in \partial(N)$. Como N es un bloque aislante, entonces $f(x) \notin N$ ó $f^{-1}(x) \notin N$.

En el primer caso $f(x) \notin N_1$ ya que, de no ser así, $f(x) \in N_1 \setminus N = \text{int}(D^0)$. Entonces $x \in \text{int}(D^{-1}) \neq \text{int}(D^0)$, con lo que tendríamos el absurdo de que $x \notin N_1$.

En el segundo caso $f^{-1}(x) \notin N_1$ ya que, de no ser así, $f^{-1}(x) \in N_1 \setminus N = \text{int}(D^0)$. Como $f(D^0) \subset N$, entonces $x = f(f^{-1}(x)) \in \text{int}(N)$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Tenemos, entonces, que N_1 es un bloque aislante.

Consecuencia de todo lo dicho es que la variedad compacta y conexa N_1 es un bloque aislante de K con un agujero menos que N (que tenía la cantidad mínima de agujeros posibles). Esto es una contradicción. Queda, por tanto, demostrado que la situación 1) tampoco se puede dar. \square

Observación 4.4. $\bigcup_{i=1}^p D_i \subset C(K)$.

Demostración. Supongamos que no es así. Resulta que $N \cup C(K)$ es un entorno aislante del conjunto compacto, invariante y aislado $C(K)$. Sea $B(C(K))$ un disco, con $C(K) \subset \text{int}(B(C(K)))$, $B(C(K)) \subset N \cup C(K)$, tal que $B(C(K))$ no se corta con los D_i que no están en $C(K)$.

Claramente $B(C(K))$ es un entorno aislante del conjunto compacto y conexo $C(K)$. Entonces, por el teorema 3.3, existe un bloque aislante de $C(K)$, M , que es una variedad sin agujeros, con $M \subset B(C(K))$.

Resulta evidente que $M \setminus \bigcup D_i$ será un bloque aislante de K , y $M \setminus \bigcup D_i$ tiene menos agujeros que N , lo cual es absurdo. \square

Lema 4.5. $I(K)_0$ tiene un único agujero D^0 .

Demostración. Supongamos que existen $D^{0,1} \neq D^{0,2} \subset I(K)_0$ agujeros distintos. Sea B_0 un disco topológico, con $D^{0,1} \cup D^{0,2} \subset B_0 \subset I(K)_0$. Consideremos un recubrimiento finito del compacto B_0 , en $I(K)_0$, formado por bolas cerradas $\{B(x)\}_{x \in \mathcal{F}}$, siendo \mathcal{F} un subconjunto finito de B_0 , de modo que para toda $B(x)$ existe algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(B(x)) \subset \text{int}(\bigcup D_i)$.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}^- = \{x \in \mathcal{F} : \exists n \leq 0 \text{ con } f^n(B(x)) \subset \text{int}(\bigcup D_i)\}.$$

Dado $x \in \mathcal{F}^-$, denotaremos

$$n^-(x) = \text{Max}\{n \leq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(\bigcup D_i)\}.$$

Sea

$$n_0 = \text{Max}\{|n^-(x)| : x \in \mathcal{F}^-\}.$$

Construiremos, a continuación, un bloque aislante de K , de características análogas a las de N (una bola con una cantidad finita de agujeros), con los mismos o menos agujeros, al que llamaremos N_{n_0} , y que cumplirá que el conjunto $\bigcup_{x \in \mathcal{F}^-} B(x)$ está contenido en los agujeros de N_{n_0} .

Reproduciendo la construcción hecha en el teorema 3.3, definimos

$$A_0(N) = D_1 \cup \dots \cup D_p$$

$$A_1(N) = A_0(N) \cup V_1$$

con V_1 una variedad compacta, homeomorfa a $f(A_0(N))$, y contenida en $\text{int}(f(A_0(N)))$. Asimismo, V_1 debe ser transversal a $A_0(N)$, tan próximo a $f(A_0(N))$ como para que

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^- : n^-(x) = -q\}} f^{1-q}(B(x)) \subset \text{int}(V_1) \text{ y esto para todo } q \in \{1, \dots, n_0\}$$

y tal que $A_1(N)$ tenga un número de componentes conexas menor o igual que el de $A_0(N)$ (ver observación 4.3). Se observa que $A_1(N)$ es una familia finita de bolas con una cantidad finita de agujeros cada una ($A_1(N)$ es una variedad compacta).

Definimos $D(A_1(N))$ como el conjunto que resulta de rellenar los agujeros de $A_1(N)$. Se tiene que $A_1(N) \subset D(A_1(N))$, que es una unión finita de bolas. Es claro que $K \cap D(A_1(N)) = \emptyset$. Definimos

$$N_1 = N \setminus \text{int}(D(A_1(N))).$$

Ocurre que $K \subset \text{int}(N_1) \subset N$ y $A_0(N) = D(A_0(N)) \subset D(A_1(N))$, que es la familia de agujeros de N_1 .

Resulta sencillo ver que N_1 es un bloque aislante de K y una variedad compacta, conexa y con los mismos o menos agujeros que N . Es claro que N_1 y sus agujeros, $D(A_1(N))$, están en las condiciones de la observación 4.3.

Dado $x \in \mathcal{F}^-$, definimos

$$n_1^-(x) = \text{Max}\{n \leq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(D(A_1(N)))\}.$$

Es claro, por la construcción de V_1 , que

$$n_1^-(x) > n^-(x) \text{ si } n^-(x) < 0.$$

Naturalmente, si $n^-(x) = 0$, entonces $n_1^-(x) = 0$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^- &= \{x \in \mathcal{F}^- : n^-(x) \in \{-n_0, \dots, 0\}\} = \\ &= \{x \in \mathcal{F}^- : n_1^-(x) \in \{-n_0 + 1, \dots, 0\}\}. \end{aligned}$$

Repitiendo la construcción anterior n_0 veces, obtenemos

$$D(A_1(N)) \subset D(A_1(N_1)) \subset \dots \subset D(A_1(N_{n_0-2})) \subset D(A_1(N_{n_0-1}))$$

y

$$N_{n_0} \subset N_{n_0-1} \subset \dots \subset N_1 \subset N,$$

siendo todos los $D(A_1(N_i))$ uniones finitas de discos. Si $D(A_1(N_i)) \subset D(A_1(N_j))$, entonces cada componente conexa de $D(A_1(N_j))$ contiene, al menos, una componente conexa de $D(A_1(N_i))$.

Además, tendremos que N_{n_0} es una variedad compacta, conexa y bloque aislante de K . El conjunto $D(A_1(N_{n_0-1}))$ es la familia de agujeros de N_{n_0} (la misma cantidad o menos que en N_{n_0-1}).

Si $x \in \mathcal{F}^-$, denotamos por

$$n_{n_0}^-(x) = \text{Max}\{n \leq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0-1})))\}.$$

Naturalmente

$$n_{n_0}^-(x) > n_{n_0-1}^-(x) \text{ si } n_{n_0-1}^-(x) < 0.$$

Es evidente que si $n_{n_0-1}^-(x) = 0$, entonces $n_{n_0}^-(x) = 0$.

Tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^- &= \{x \in \mathcal{F}^- : n^-(x) \in \{-n_0, \dots, 0\}\} = \\ &= \{x \in \mathcal{F}^- : n_1^-(x) \in \{-n_0 + 1, \dots, 0\}\} = \\ &= \dots = \{x \in \mathcal{F}^- : n_{n_0}^-(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De manera que la variedad N_{n_0} cumple que

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^-\}} B(x) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0-1}))),$$

esto es, el conjunto $\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^-\}} B(x)$ está contenido en los agujeros de N_{n_0} , que es una variedad compacta, conexa y bloque aislante de K , con los mismos o menos agujeros que N .

Interesa sumergir todo B_0 , y no sólo una parte, como tenemos ahora, en los agujeros de una variedad del tipo de N_{n_0} .

Sea

$$\mathcal{F}^+ = \{x \in \mathcal{F} : \exists n \geq 0 \text{ con } f^n(B(x)) \subset \text{int}(\bigcup D_i)\}.$$

Dado $x \in \mathcal{F}^+$, definimos

$$n^+(x) = \text{Min}\{n \geq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(\bigcup D_i)\}.$$

Denotamos $n'_0 = \text{Max}\{n^+(x) : x \in \mathcal{F}^+\}$.

Consideremos la variedad N_{n_0} con agujeros $D(A_1(N_{n_0-1}))$, que también denotamos como $A_0(N_{n_0})$.

Repetiremos el argumento desarrollado en \mathcal{F}^- , pero ahora con \mathcal{F}^+ .

Dado $x \in \mathcal{F}^+$, definimos

$$n_{n_0}^+(x) = \text{Min}\{n \geq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0-1})))\}.$$

Resulta evidente que para todo $x \in \mathcal{F}^+$ se tiene $n'_0 \geq n^+(x) \geq n_{n_0}^+(x) \geq 0$.
Construimos

$$D(A_1(N_{n_0})), \quad N_{n_0+1} \subset N_{n_0}$$

del siguiente modo

$$A_1(N_{n_0}) = A_0(N_{n_0}) \cup V_1$$

siendo V_1 una variedad compacta, homeomorfa a $f^{-1}(A_0(N_{n_0}))$ y contenida en $\text{int}(f^{-1}(A_0(N_{n_0})))$. Además, V_1 debe ser transversal a $A_0(N_{n_0})$, y tan próximo a $f^{-1}(A_0(N_{n_0}))$ como para que

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^+ : n_{n_0}^+(x) = q\}} f^{q-1}(B(x)) \subset \text{int}(V_1) \text{ y esto para todo } q \in \{1, \dots, n'_0\}.$$

En virtud de lo visto en la observación 4.3, construimos $A_1(N_{n_0})$ de modo que tenga un número de componentes conexas menor o igual que el de $A_0(N_{n_0})$. $A_1(N_{n_0})$ será una familia finita de bolas, con una cantidad finita de agujeros cada una ($A_1(N_{n_0})$ es una variedad compacta).

Definimos $D(A_1(N_{n_0}))$ como el conjunto que resulta de rellenar los agujeros de $A_1(N_{n_0})$. Se tiene $A_1(N_{n_0}) \subset D(A_1(N_{n_0}))$, que es una unión finita de discos, y $K \cap D(A_1(N_{n_0})) = \emptyset$. Definimos

$$N_{n_0+1} = N_{n_0} \setminus \text{int}(D(A_1(N_{n_0}))).$$

Sucede que N_{n_0+1} es una variedad compacta, conexas y bloque aislante de K . Asimismo, se cumple que $D(A_1(N_{n_0-1})) \subset D(A_1(N_{n_0}))$, que son los agujeros de N_{n_0+1} (la misma cantidad o menos que en N_{n_0}).

Dado $x \in \mathcal{F}^+$, existe un

$$n_{n_0+1}^+(x) = \text{Min}\{n \geq 0 : f^n(B(x)) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0})))\}.$$

Se tiene, por la construcción de V_1 , que

$$n_{n_0+1}^+(x) < n_{n_0}^+(x) \text{ si } n_{n_0}^+(x) > 0.$$

Es evidente que si $n_{n_0}^+(x) = 0$, entonces $n_{n_0+1}^+(x) = 0$.

Repitiendo el proceso n'_0 veces, se construyen

$$D(A_1(N_{n_0})) \subset \cdots \subset D(A_1(N_{n_0+n'_0-1})),$$

y

$$N_{n_0+n'_0} \subset N_{n_0+n'_0-1} \subset \cdots \subset N_{n_0} \subset N$$

siendo todos los $D(A_1(N_i))$ uniones finitas de discos. Si $D(A_1(N_i)) \subset D(A_1(N_j))$, entonces cada componente conexa de $D(A_1(N_j))$ contiene, al menos, una componente conexa de $D(A_1(N_i))$.

Además, $N_{n_0+n'_0}$ es una variedad compacta, conexa y bloque aislante de K . El conjunto $D(A_1(N_{n_0+n'_0-1}))$ es la familia de agujeros de $N_{n_0+n'_0}$ (la misma cantidad o menos que en $N_{n_0+n'_0-1}$).

Tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+ &= \{x \in \mathcal{F}^+ : n^+(x) \in \{0, \dots, n'_0\}\} = \{x \in \mathcal{F}^+ : n_{n_0}^+(x) \in \{0, \dots, n'_0\}\} = \\ &= \{x \in \mathcal{F}^+ : n_{n_0+1}^+(x) \in \{0, \dots, n'_0-1\}\} = \cdots = \{x \in \mathcal{F}^+ : n_{n_0+n'_0}^+(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De manera que la variedad $N_{n_0+n'_0}$ cumple que

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^+\}} B(x) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0+n'_0-1}))).$$

Además, $D(A_1(N_{n_0-1})) \subset D(A_1(N_{n_0+n'_0-1}))$, y

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}^-\}} B(x) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0-1}))),$$

con lo que tendremos

$$\bigcup_{\{x \in \mathcal{F}\}} B(x) \subset \text{int}(D(A_1(N_{n_0+n'_0-1}))).$$

Como

$$D^{0,1} \cup D^{0,2} \subset B_0 \subset \bigcup_{\{x \in \mathcal{F}\}} B(x),$$

resulta que B_0 , que contiene a $D^{0,1}$ y $D^{0,2}$, está contenido en uno de los agujeros de $N_{n_0+n'_0}$, con lo que el número de agujeros de $N_{n_0+n'_0}$ es estrictamente menor que el de N (cada agujero de $N_{n_0+n'_0}$ contiene, por construcción, alguno de N). \square

Proposición 4.6. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Entonces existe un par de compactos (N, L) , donde N es una variedad de dimensión 2, compacta, conexa, bloque aislante de K y con una cantidad finita, mínima, de agujeros $\{D_1, \dots, D_p\}$,

y $L = L_1 \cup \dots \cup L_m \subset N$ es una unión finita de variedades compactas, conexas, de dimensión 2 con, a lo más, un agujero. Este par (N, L) cumple

- 1) $\partial_N(L_i)$ es un arco con $\partial_N(L_i) \cap \partial(N) = \{a_i, b_i\}$ dos puntos, o $\partial_N(L_i)$ es una curva de Jordan.
- 2) $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K .
- 3) $f(cl(N \setminus L)) \subset int(N)$.
- 4) Para todo L_i existe un conjunto B_i , disco con, a lo más, un agujero, tal que $\partial_N(L_i) \subset B_i \subset L_i$, $B_i \cap N^- \neq \emptyset$ y $f(B_i) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$.

Demostración. Sea N_1 un bloque aislante de K , N_1 variedad compacta, conexa y con una cantidad mínima de agujeros $\{D_1, \dots, D_p\}$. Consideremos un entorno abierto V de N_1 , donde $cl(V)$ es un pequeño engorde de N_1 , difeomorfo a N_1 y entorno aislante de K . Resulta elemental construir una función diferenciable $\varphi : cl(V) \rightarrow \mathbb{R}^+$ que se anule exactamente sobre N_1 , y de modo que $\varphi^{-1}([0, \delta])$ sea difeomorfo a N_1 para todo $\delta \geq 0$.

Entonces, apelando a la construcción hecha en el teorema 3.7 de [44], se obtiene un par (N, J) donde N es un bloque aislante de K y variedad compacta, con una cantidad mínima de agujeros, que también denotaremos por $\{D_1, \dots, D_p\}$, mientras que $J = J_1 \cup \dots \cup J_n$ es una unión finita de variedades compactas, conexas, de dimensión 2, y de modo que el par (N, J) es un par filtrante para K , con J subvariedad de N , y $J_i \cap N^- \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si a J le añadimos el conjunto de agujeros suyos tales que no se salen de N ni tocan a K , obtenemos una variedad compacta que denotaremos por $D(J)$.

Consideremos el par $(N, D(J))$. Veamos que es un par filtrante para K .

Como $K \subset cl(N \setminus D(J))$, resulta obvio que $cl(N \setminus D(J))$ es un entorno aislante de K .

Dado que $cl(N \setminus D(J)) \subset cl(N \setminus J)$, entonces $f(cl(N \setminus D(J))) \subset int(N)$.

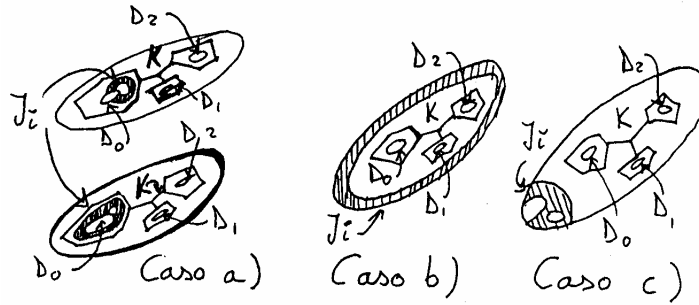
Falta ver que $f(D(J)) \cap cl(N \setminus D(J)) = \emptyset$. En efecto, como $cl(N \setminus D(J)) \subset cl(N \setminus J)$, ocurre que $f(J) \cap cl(N \setminus D(J)) \subset f(J) \cap cl(N \setminus J) = \emptyset$.

Cada $D(J_i)$, definido igual que $D(J)$, tiene, a lo más, un agujero, ya que únicamente pueden darse estas tres situaciones:

a) $J_i \subset I(K)_0$, una componente conexa de $I(K)$. En este caso $D(J_i)$ tiene, como mucho, un agujero. De existir, dicho agujero contendrá a D_0 , el agujero de N contenido en $I(K)_0$.

b) J_i posee un agujero que contiene a K . En esta situación $D(J_i)$ tiene uno y sólo un agujero (el que contiene a K).

c) Negación de a) y b), en cuyo caso $D(J_i)$ no tiene agujeros.



Figuras IV.8a, IV.8b y IV.8c

Por otro lado, podemos suponer que existe un $n_1 \leq n$ tal que $D(J) = D(J_1) \cup \dots \cup D(J_{n_1})$, bolas con, a lo más, un agujero, disjuntas (aunque puedan estar encajadas).

$cl(D(J_i) \setminus J_i) = D_1^i \cup \dots \cup D_{p(i)}^i$ es una unión finita de bolas (agujeros de J_i contenidos en N y que no se cortan con K).

Entonces

$$f(D(J)) \cap cl(N \setminus D(J)) = (f(\bigcup_{j=1}^{p(1)} D_j^1) \cup \dots \cup f(\bigcup_{j=1}^{p(n_1)} D_j^{n_1})) \cap cl(N \setminus D(J)).$$

Ocurre que $\partial(D_j^r) \subset \partial_N(J)$, luego $f(\partial(D_j^r)) \subset int(J) \subset int(D(J))$.

Por tanto $f(D_j^r) \subset int(D(J))$, ya que, de no ser así, $f(D_j^r)$ contiene algún agujero D_0 . Pero sabemos que

$$f^{-1}(D_0) \cap int(\bigcup D_i) \neq \emptyset,$$

que se contradice con el hecho de que $f^{-1}(D_0) \subset int(D_j^r) \subset N$.

Como $f(D_j^r) \subset int(D(J))$, resulta que 3), de la definición de par filtrante, está demostrado.

Definimos, a continuación,

$$L_i = N \setminus c.c.(N \setminus D(J_i), K)$$

donde $c.c.(N \setminus D(J_i), K)$ recordamos que es la componente conexa de $N \setminus D(J_i)$ que contiene a K .

Sea, entonces,

$$L = \bigcup_{i=1}^{n_1} L_i = \bigcup_{i=1}^m L_i$$

con $m \leq n_1$, de modo tal que $\bigcup_{i=1}^m L_i$ es una unión disjunta de discos con,

a lo más, un agujero.

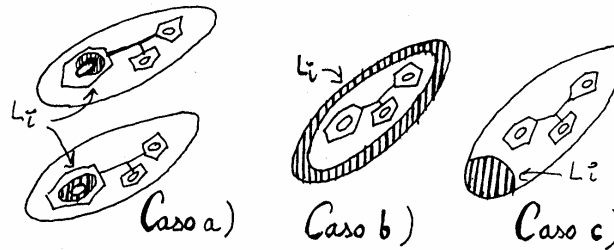


Figura IV.9

Entonces el par (N, L) está en las condiciones del enunciado de la proposición. Veámoslo.

Resulta que N es un bloque aislante de K , variedad compacta, conexa, de dimensión 2 y con una cantidad mínima de agujeros. Asimismo, L es una subvariedad compacta de N , y una unión finita de variedades compactas y conexas con, a lo más, un agujero. Además

1) $\partial_N(L_i)$ es un arco donde $\partial_N(L_i) \cap \partial(N)$ son dos puntos, o $\partial_N(L_i)$ es una curva de Jordan.

Será una curva de Jordan si $D(J_i)$ tiene un agujero, y un arco en otro caso.

2) $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K .

Evidente por la construcción de L .

3) $f(cl(N \setminus L)) \subset int(N)$.

Inmediato ya que $cl(N \setminus L) \subset cl(N \setminus D(J))$.

4) Para todo L_i existe un $B_i = D(J_i)$ disco con, a lo más, un agujero, tal que $\partial_N(L_i) \subset B_i \subset L_i$, $B_i \cap N^- \neq \emptyset$ y $f(B_i) \cap cl(N \setminus L) = \emptyset$. \square

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Consideremos un par (N, L) como el del enunciado de la proposición 4.6.

Tenemos $I(K) = I(K)_1 \cup \dots \cup I(K)_p$, con $D_i \subset I(K)_i$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Observación 4.7. a) Si $\partial_N(L_j)$ es homeomorfo a S^1 , entonces L_j tiene un agujero. Además, o L_j contiene a $C(K)$ en su agujero y $\partial(L_j) = \partial_N(L_j) \cup \partial(D(N))$, o bien $L_j \subset I(K)_i$ para algún i , de modo que el agujero de L_j es D_i .

b) Si, por contra, $\partial_N(L_j)$ es un arco, entonces L_j es un disco sin agujeros.

De todo esto se deduce que $cl(N \setminus L)$ es una variedad compacta, conexa y de dimensión 2. De hecho, será un disco con la misma cantidad de agujeros que N .

Demostración. a) Como $L_j \cap K = \emptyset$, entonces $L_j \subset I(K)_i$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$ ó $L_j \cap C(K) = \emptyset$. Si se da lo primero, como $\partial_N(L_j)$ es homeomorfo a S^1 , la única posibilidad es que L_j tenga un agujero (ver 3) y 4) de proposición 4.6 y observación 4.3), y que éste sea $D_i \in \{D_1, \dots, D_p\}$. Si se da lo segundo, la única situación posible es que L_j tenga un agujero (ver 3) y 4) de proposición 4.6 y observación 4.3) que contiene a $C(K)$ y tal que $\partial(L_j) = \partial_N(L_j) \cup \partial(D(N))$.

b) Tanto si $L_j \subset I(K)_i$, como si $L_j \cap C(K) = \emptyset$, el resultado es inmediato.

Consecuencia de todo esto es que $cl(N \setminus L)$ es una variedad compacta, conexa, de dimensión 2 y con la misma cantidad de agujeros que N . \square

Consideremos las aplicaciones

$$f|_{cl(N \setminus L)} : cl(N \setminus L) \rightarrow N,$$

$$\pi : cl(N \setminus L) \rightarrow cl(N \setminus L) / \sim,$$

$$r : N \rightarrow cl(N \setminus L),$$

definidas de modo análogo a como se hizo en la Sección IV.2. Lo dicho en la observación 4.7 garantiza el buen comportamiento de la retracción r .

Las propiedades de estas aplicaciones serán las mismas que en la Sección IV.2. Definimos también, de manera idéntica, las aplicaciones

$$f' : cl(N \setminus L) / \sim \setminus \{q_1, \dots, q_m\} \rightarrow cl(N \setminus L) / \sim$$

y su extensión

$$\bar{f}' : cl(N \setminus L) / \sim \rightarrow cl(N \setminus L) / \sim$$

tal que $\bar{f}'(U'(q_i)) = q_j$ para un entorno $U'(q_i)$ de q_i .

Tenemos $\bar{f}'(\{q_1, \dots, q_m\}) \subset \{q_1, \dots, q_m\}$. De hecho $\bar{f}'(q_i) = q_j$ si, y sólo si, $f(\partial_N(L_i)) \subset int(L_j)$.

Es claro que

$$Fix_{cl(N \setminus L) / \sim}(\bar{f}') \subset K \cup \{q_1, \dots, q_m\},$$

y como $cl(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K , resulta que

$$Fix_{cl(N \setminus L) / \sim}((\bar{f}')^k) \subset K \cup \{q_1, \dots, q_m\}.$$

Al aplicar f a la familia de abiertos $\{I(K)_1, \dots, I(K)_p\}$ obtenemos que ésta se comporta como una unión finita de ciclos.

Resulta $p = t_1 + \dots + t_l$, siendo $\{t_1, \dots, t_l\}$ las longitudes de los ciclos. Cambiaremos la notación de $\{I(K)_1, \dots, I(K)_p\}$, y les llamaremos, distinguiendo unos ciclos de otros, del siguiente modo

$$\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1, \dots, I(K)_1^l, \dots, I(K)_{t_l}^l\}$$

donde cada familia $\{I(K)_1^i, \dots, I(K)_{t_i}^i\}$, con $i \in \{1, \dots, l\}$, es un ciclo de longitud t_i .

Tenemos que

$$f^{t_j} : I(K)_i^j \rightarrow I(K)_i^j \quad i \in \{1, \dots, t_j\}, \quad j \in \{1, \dots, l\}$$

son homeomorfismos.

De igual modo, cambiamos la notación de la familia $\{D_1, \dots, D_p\}$, y pasamos a llamarla

$$\{D^{1,1}, \dots, D^{1,t_1}, \dots, D^{l,1}, \dots, D^{l,t_l}\}.$$

Se ve con facilidad que

Observación 4.8. a) Dado un ciclo $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$, si $I(K)_1^1$ cumple que existe un $L_{j(1)} \subset I(K)_1^1$, con $D^{1,1} \in \{D_1, \dots, D_p\}$ agujero de $L_{j(1)}$, entonces existe un $L_{j(i)} \subset I(K)_i^1$ con $D^{1,i} \in \{D_1, \dots, D_p\}$ agujero de $L_{j(i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, t_1\}$. De hecho existe uno, y sólo un, $L_{j(i)}$ en cada $I(K)_i^1$.

b) Dado un ciclo $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$, si $I(K)_1^1$ cumple que no existe un $L_{j(1)} \subset I(K)_1^1$, entonces no existe un $L_{j(i)} \subset I(K)_i^1$ para todo $i \in \{1, \dots, t_1\}$.

Para demostrar esta observación basta considerar lo visto en la observación 4.7.

La definición de puntos *adyacentes* en una órbita con la que aquí trabajaremos es idéntica a la expuesta en la definición 2.4. La única diferencia es que antes $\partial(N \setminus L)/\sim$ era una curva de Jordan, y ahora es una unión finita de curvas de Jordan y puntos (ver observación 4.7).

Del mismo modo, los dos lemas que desarrollamos a continuación son análogos, salvo por pequeños detalles, al lema 2.5 y al lema 2.6.

Lema 4.9. Sea $\theta(p_1) = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \{q_1, \dots, q_m\}$ una órbita periódica de período s de \bar{f}' . Sean p_i y p_j adyacentes en $\theta(p_1)$, donde $p_i = \pi(\partial_N(L_i))$ y $p_j = \pi(\partial_N(L_j))$, con $L_i, L_j \subset I(K)$. Entonces sus imágenes por \bar{f}' , p_{i+1} y p_{j+1} , también son adyacentes en $\theta(p_1)$.

Demostración. Supondremos que $L_i, L_j \subset I(K)_1^1$. Sabemos que existe una curva de Jordan en $\partial(N \setminus L)/\sim$, que denotaremos por $S^1(p_i, p_j)$, con $p_i, p_j \in S^1(p_i, p_j)$ adyacentes.

Consideremos el arco, en $\partial(N \setminus L)/\sim$, que une p_i con p_j de manera adyacente, y que denotaremos por $\overline{p_i p_j} \subset S^1(p_i, p_j)$.

Sea

$$\overline{L_i L_j} = (\pi)^{-1}(\overline{p_i p_j}) \subset \partial(N \setminus L).$$

$\overline{L_i L_j}$ es un arco, de extremos $a \in \partial_N(L_i)$ y $b \in \partial_N(L_j)$. Entonces $f(\overline{L_i L_j}) \subset \text{int}(N) \cap I(K)_2^1$ es un arco.

Sean L_{i+1}, L_{j+1} tales que $f(\partial_N(L_i)) \subset \text{int}(L_{i+1})$ y $f(\partial_N(L_j)) \subset \text{int}(L_{j+1})$. Es claro que $\partial_N(L_{i+1})$ y $\partial_N(L_{j+1})$ son arcos con $L_{i+1}, L_{j+1} \subset I(K)_2^1$. Consideremos, definiéndolos de modo idéntico a como se hacía en el lema 2.5, los arcos $K_{i+1} \subset L_{i+1}$ y $K_{j+1} \subset L_{j+1}$. Resulta claro que $f(\overline{L_i L_j}) \cup K_{i+1} \cup K_{j+1}$ es un arco que une dos puntos de $\partial(N)$, $f(a')$ y $f(b') \in \partial(D^{1,2})$ ($D^{1,2} \in$

$\{D_1, \dots, D_p\}$ es el agujero de $I(K)_2^1$, y que tiene el resto de puntos en $\text{int}(N)$.

Consideremos la curva de Jordan que determina

$$f(\overline{L_i L_j}) \cup K_{i+1} \cup K_{j+1} \cup \overline{f(a')f(b')}$$

donde $\overline{f(a')f(b')}$ es el arco de $\partial(D^{1,2})$ que hace que la curva de Jordan definida tenga dominio de Jordan en N .

Llamamos R a la región cerrada determinada por esa curva de Jordan. Tenemos $R \subset I(K)_2^1$.

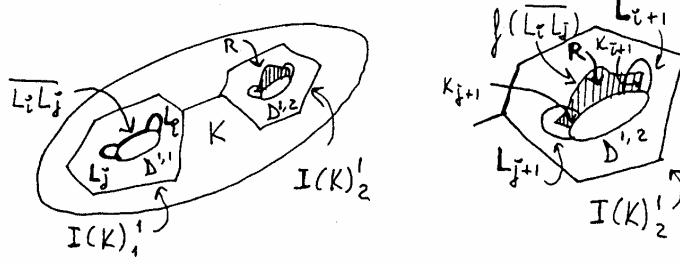


Figura IV.10

Consideremos el arco

$$A = \partial(N) \cap R = \overline{f(a')f(b')}.$$

Definimos $\overline{p_{i+1}p_{j+1}} = (\pi \circ r)(A)$, un arco en $\partial(N \setminus L)/\sim$ que une p_{i+1} con p_{j+1} .

Veremos que p_{i+1} y p_{j+1} son adyacentes (en $\theta(p_1)$) ya que

$$\overline{p_{i+1}p_{j+1}} \cap \theta(p_1) = \{p_{i+1}, p_{j+1}\}.$$

Supongamos que existe un $p_k \in \theta(p_1) \cap \overline{p_{i+1}p_{j+1}}$, con $p_k \notin \{p_{i+1}, p_{j+1}\}$. Consideremos $p_{k-1} \in \theta(p_1)$, tal que $f'(p_{k-1}) = p_k$. Resulta evidente que $p_{k-1} \notin \overline{p_i p_j}$, aunque $p_{k-1} \in S^1(p_i, p_j)$. Además, $f(\partial_N(L_{k-1})) \subset \text{int}(L_k)$, donde

$$\partial_N(L_{k-1}) = (\pi)^{-1}(p_{k-1})$$

$$\partial_N(L_k) = (\pi)^{-1}(p_k) \subset (\pi)^{-1}(\overline{p_{i+1}p_{j+1}}).$$

Denotamos $\overline{L_{i+1}L_{j+1}} = (\pi)^{-1}(\overline{p_{i+1}p_{j+1}})$.

Por la construcción de K_{i+1} y K_{j+1} ,

$$f((\pi)^{-1}(S^1(p_i, p_j))) \cap R = f(\overline{L_i L_j}).$$

Téngase en cuenta, para ver esto, que $f((\pi)^{-1}(S^1(p_i, p_j))) \simeq S^1$ circunda a $D^{1,2}$, ya que, por la observación 4.3, $f(D^{1,1}) \cap D^{1,2} \neq \emptyset$.

Ocurrirá que $f(\partial_N(L_{k-1})) \cap R = \emptyset$.

Pero, por otro lado, se demuestra, como en el lema 2.5, que $f(\partial_N(L_{k-1})) \subset \text{int}(R)$, lo que nos lleva a una contradicción.

En consecuencia, no existe p_k . \square

Lema 4.10. Utilizando la notación del lema anterior, sean $p_i = \pi(\partial_N(L_i))$ y $p_j = \pi(\partial_N(L_j))$ con $L_i, L_j \subset I(K)_1^1$, y tales que $L_{i+1} \neq L_{j+1}$. Cualquier arco $\overline{p_i p_j} \subset \partial(N \setminus L) / \sim$, de extremos p_i y p_j , con $\overline{L_i L_j} = (\pi)^{-1}(\overline{p_i p_j})$, cumple que si $\partial_N(L_k) \subset \overline{L_i L_j}$, entonces

$$\partial_N(L_{k+1}) \subset \overline{L_{i+1} L_{j+1}}$$

donde $\overline{L_{i+1} L_{j+1}}$ se define como en el lema 4.9.

Demostración. Consideremos, tal como se define en el lema 2.6, un arco $\gamma_k \subset B_k$, de extremos a_k y a' , cumpliendo las propiedades que cumple aquel. Se obtiene, dada la región R del lema 4.9, que

$$f(\gamma_k) \cap \partial_N(R) = \{f(a_k)\}.$$

Entonces, como $f((\pi)^{-1}(S^1(p_i, p_j)))$ circunda a $D^{1,2}$, y $f(\gamma_k) \cap \partial(N) = \{f(a')\} \in \partial(D^{1,2})$, sólo puede ocurrir que

$$f(\gamma_k) \subset R.$$

Tenemos que $f(a') \in L_{k+1} \cap (\partial(N) \cap R)$. Entonces $f(a') \in A$. Así, $r(f(a')) \in \partial_N(L_{k+1}) \cap \overline{L_{i+1} L_{j+1}}$. En consecuencia, $\partial_N(L_{k+1}) \subset \overline{L_{i+1} L_{j+1}}$. \square

Proposición 4.11. Si f preserva la orientación y $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$ es un ciclo, ocurre que las órbitas periódicas de $\overline{f'}|_{(\pi \circ r)(\bigcup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i}))}$, que son órbitas del conjunto $\{q_1, \dots, q_m\}$, tienen todas el mismo período.

Demostración. Fijamos una orientación en $I(K)_1^1 \cap \partial(N \setminus L) \simeq S^1$. Recuérdese que $f(I(K)_1^1 \cap \partial(N \setminus L)) \subset I(K)_2^1$ circunda a $D^{1,2} \subset I(K)_2^1$, preservando la orientación.

Si se da la situación b) de la observación 4.8, el resultado es evidente ya que $(\pi \circ r)(\bigcup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i})) \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$.

Si se da la situación a) de la observación 4.8, existe una única órbita periódica de período t_1 .

Si no se dan a) ni b) de la observación 4.8, dado un arco orientado $\overline{L_i L_j}$ en $\partial(N \setminus L)$ (que es una unión finita de curvas de Jordan) tal que $L_{i+1} \neq L_{j+1}$, ocurre que $\overline{L_{i+1} L_{j+1}}$ tiene la misma orientación en $\partial(N \setminus L)$. De modo equivalente, $\overline{p_{i+1} p_{j+1}}$ preserva la orientación de $\overline{p_i p_j}$ en $\partial(N \setminus L) / \sim$, que es una unión finita de curvas de Jordan y puntos. De hecho,

$$(\pi \circ r)\left(\bigcup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i})\right) = (\partial(N \setminus L) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{t_1} I(K)_i^1\right)) / \sim$$

es una unión de t_1 curvas de Jordan. El resto de la demostración es idéntica a la hecha en la proposición 2.7, salvo por el hecho de que, en vez de aplicar el lema 2.5 y el lema 2.6, aquí se utilizarán el lema 4.9 y lema 4.10. \square

Llamaremos r_1 al período de las órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en el conjunto $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_1} I(K)_i^1))/\sim$. Es claro que $r_1 = n_1 t_1$ con $n_1 \in \mathbb{N}$.

Corolario 4.12. En las condiciones de la proposición anterior, y dado $k \in \mathbb{N}$, para que $(\overline{f'})^k$ tenga puntos fijos en $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_1} I(K)_i^1))/\sim \subset \partial(N \setminus L)/\sim$ es necesario y suficiente que

$$k \in r_1 \mathbb{N}.$$

Si k es múltiplo de r_1 , el número de puntos fijos de $(\overline{f'})^k$ en el conjunto $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_1} I(K)_i^1))/\sim$ será $r_1 q^1$, siendo q^1 el número de órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_1} I(K)_i^1))/\sim$.

Dado $j \in \{1, \dots, l\}$, tenemos que existen q^j órbitas periódicas de período r_j de $\overline{f'}$ en $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_j} I(K)_i^j))/\sim$.

A continuación descomponemos el conjunto de las longitudes de los ciclos de $I(K)$, $\{t_1, \dots, t_l\}$, en tres subconjuntos disjuntos $t_A, t_R, t_S \subset \{t_1, \dots, t_l\}$ tales que $t_A \cup t_R \cup t_S = \{t_1, \dots, t_l\}$, siendo t_A el conjunto de las longitudes de los ciclos que se corresponden con el caso b) de la observación 4.8 (atractores), t_R el conjunto de las longitudes de los ciclos que se corresponden con el caso a) de la observación 4.8 (repulsores), y t_S el resto de las longitudes de $\{t_1, \dots, t_l\}$ (sillas).

Resulta evidente que para todo $t_j \in t_A$ se tiene $r_j = q^j = 0$, y para todo $t_j \in t_R$ se tiene $r_j = t_j$ y $q^j = 1$.

Sabemos contar los puntos fijos de $(\overline{f'})^k$ en $\partial(N \setminus L) \cap I(K)/\sim$, que son puntos del conjunto $\{q_1, \dots, q_m\}$, pero quedan aún por contabilizar los puntos fijos de $(\overline{f'})^k$ en el conjunto $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$, que será homeomorfo a S^1 o a un punto. Si es homeomorfo a un punto, éste será un punto fijo de $\overline{f'}$. Si es homeomorfo a S^1 , se deduce de manera evidente de lo hecho en la Sección 2, que las órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$ tienen todas el mismo período (q^0 órbitas de período r_0).

Si $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim \cap \{q_1, q_2, \dots, q_m\} = \emptyset$, diremos que $r_0 = q^0 = 0$, y si $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$ es un punto, diremos que $r_0 = q^0 = 1$.

Corolario 4.13. $(\overline{f'})^k$ tendrá puntos fijos en $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$ si, y sólo si,

$$k \in r_0 \mathbb{N}.$$

En esta situación, el número de puntos fijos de $(\overline{f'})^k$ será, en $(\partial(N \setminus L) \setminus I(K))/\sim$, igual a $r_0 q^0$.

Resumiendo los últimos resultados, tenemos una familia $\{r_0, r_1, \dots, r_l\}$ de períodos, y otra familia $\{q^0, q^1, \dots, q^l\}$, que determina el número de órbitas

de cada período, y que nos permitirán calcular, de manera inmediata, el número total de puntos fijos de $(\overline{f'})^k$ en $\{q_1, \dots, q_m\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.14. Supongamos que f preserve la orientación y que K no es repulsor. Entonces

$$i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = \begin{cases} 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ 2 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases}$$

Demostración. Al no ser K repulsor, no todas las curvas de Jordan de $\partial(N \setminus L)$ se pueden colapsar a un punto al hacer el cociente $cl(N \setminus L)/\sim$. De modo que $cl(N \setminus L)/\sim$ será homeomorfo a una bola con una cantidad finita de agujeros.

Denotamos a $\sum_{t_i \in t_A} t_i = A$, $\sum_{t_i \in t_S} t_i = S$ y $\sum_{t_i \in t_R} t_i = R$.

Tenemos entonces

$$H_0(cl(N \setminus L)/\sim) = \mathbb{Q}$$

$$H_1(cl(N \setminus L)/\sim) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q} & A + S \text{ generadores si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ \mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q} & A + S - 1 \text{ generadores si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases}$$

$$H_2(cl(N \setminus L)/\sim) = 0.$$

Estas igualdades se deben a que $cl(N \setminus L)/\sim$ es del tipo de homotopía de una unión punteada de $A + S$ lazos si $\partial(D(N)) \not\subset L$, y de $A + S - 1$ lazos si $\partial(D(N)) \subset L$.

Como consecuencia de esto, y recordando que $i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = \Lambda((\overline{f'})^k)$, obtendremos que

1) Si $\partial(D(N)) \not\subset L$ el resultado es inmediato.

2) Si $\partial(D(N)) \subset L$, $cl(N \setminus L)/\sim$ será una esfera con $A + S$ agujeros o, lo que es lo mismo, una bola con $A + S - 1$ agujeros.

$H_1(cl(N \setminus L)/\sim)$ tiene $A + S - 1$ generadores, y resulta inmediato ver que la imagen por $(\overline{f'})_*$ de cada uno de estos generadores es otro generador, salvo para uno, cuya imagen es la suma de todos los generadores, cambiados

de signo.

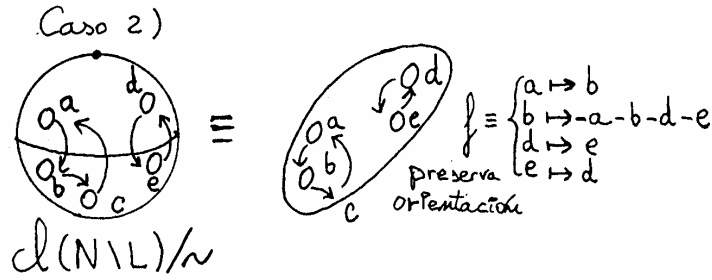


Figura IV.11

Consecuencia directa de esta observación es el valor del índice, enunciado en la proposición. \square

Definimos, a continuación, un conjunto $r_S \subset \{r_0, r_1, \dots, r_l\}$ del siguiente modo:

Dado $i \geq 1$, $r_i \in r_S$ si, y sólo si, $t_i \in t_S$. Por otro lado, $r_0 \in r_S$ si, y sólo si, $\partial(D(N)) \not\subset L$ y $\partial(D(N)) \cap L \neq \emptyset$.

Enunciamos, a continuación, la **generalización del teorema principal** para el caso en que f preserva la orientación.

Teorema 4.15. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen que preserva la orientación, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo, y no repulsor. Entonces,

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = 1 - \sum_{\substack{t_i \in \{t_1, \dots, t_l\} \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i - \sum_{\substack{r_i \in r_S \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i.$$

Demostración. Resulta, por la propiedad aditiva del índice de punto fijo, que

$$i_{cl(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L) / \sim) = i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) + \sum_{q_i \in \{q_1, \dots, q_m\} \cap Fix((\overline{f'})^k)} i_{cl(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k, U(q_i)),$$

siendo el último sumatorio una suma de unos. Esto se debe a que $\overline{f'}$ es constante en un entorno de cada q_i . Entonces tendremos

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = \begin{cases} 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i - \sum_{\substack{r_i \in \{r_0, \dots, r_l\} \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i & \text{si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ 2 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i - \sum_{\substack{r_i \in \{r_0, \dots, r_l\} \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i & \text{si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases}$$

Consecuencia inmediata es el resultado del enunciado. \square

Teorema 4.16. En las condiciones del teorema anterior, pero con K repulsor, se obtiene

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_R \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i.$$

Demostración. Como K es un repulsor, todas las curvas de Jordan de $\partial(N \setminus L)$ se colapsan a puntos al hacer el cociente $cl(N \setminus L)/\sim$, de modo que $cl(N \setminus L)/\sim$ es homeomorfo a S^2 . Entonces

$$H_0(cl(N \setminus L)/\sim) = \mathbb{Q}, \quad H_1(cl(N \setminus L)/\sim) = 0, \quad H_2(cl(N \setminus L)/\sim) = \mathbb{Q}.$$

Resulta que

$$i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\bar{f}')^k, cl(N \setminus L)/\sim) = 1 + 1 = 2.$$

Definimos $r_R = \{r_i : t_i \in t_R\} \subset \{r_1, \dots, r_l\}$.

Obtenemos, aplicando la propiedad aditiva del índice de punto fijo, que

$$\begin{aligned} 2 &= i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\bar{f}')^k, cl(N \setminus L)/\sim) = i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) + \left(\sum_{\substack{r_i \in r_R \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i \right) + 1 = \\ &= i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) + \left(\sum_{\substack{t_i \in t_R \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i \right) + 1. \end{aligned}$$

El sumatorio y el uno que aparecen en la segunda igualdad se deben a que, al ser K repulsor, sólo vamos a tener este tipo de sumandos (caso a) de la observación 4.7) y a que $r_0 q^0 = 1$, mientras que la tercera igualdad se debe a que $r_i = t_i$ y $q^i = 1$. \square

Como corolario de los dos últimos resultados se obtiene:

Corolario 4.17. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen que preserva la orientación, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Entonces

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = 1 - \sum_{\substack{t_i \in \{t_1, \dots, t_l\} \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i - \sum_{\substack{r_i \in r_S \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i.$$

Proposición 4.18. Supongamos que f invierte la orientación. Dado un ciclo $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$, puede ocurrir:

a) t_1 es par. Entonces todas las órbitas periódicas de $\bar{f}'|_{(\pi \circ r)(\cup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i}))}$ tienen el mismo período $r_1 = t_1 n_1$.

b) t_1 es impar. En ese caso todas las órbitas periódicas de $\bar{f}'|_{(\pi \circ r)(\cup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i}))}$ tienen período $r_1 = t_1$ ó $r_1 = 2t_1$. Además el número de órbitas de período $r_1 = t_1$ es menor o igual que dos.

Demostración. Supondremos que el ciclo $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$ no está en las condiciones a) ni b) de la observación 4.8, ya que, en esos casos, el resultado es evidente.

a) Consideremos dos órbitas periódicas, distintas, de \bar{f}^r en la unión finita de curvas de Jordan $(\pi \circ r)(\bigcup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i}))$.

Denotamos a las órbitas por $\theta(p_1) = \{p_1, \dots, p_r\}$ y $\theta(p'_1) = \{p'_1, \dots, p'_s\}$.
 $|\theta(p_1)| = r$ y $|\theta(p'_1)| = s$. Veamos que $r = s$.

Si $p'_1 \in \overline{p_i p_j}$, arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_i y p_j , entonces $\bar{f}^r(p'_1) = p'_2 \in \overline{p_{i+1} p_{j+1}}$.

Por otro lado, como $\overline{p_i p_j}$ es un arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a sus extremos, ocurre que los $\overline{p_{i+k} p_{j+k}}$ harán también adyacentes en $\theta(p_1)$ a sus extremos, y esto para todo k .

Si $\overline{p_{i+l} p_{j+l}} \cap \overline{p_{i+l'} p_{j+l'}} \neq \emptyset$ con $l \neq l'$ menores que r , entonces, teniendo en cuenta que t_1 es par, ocurre

$$\overline{p_{i+l} p_{j+l}} \cap \overline{p_{i+l'} p_{j+l'}} \subset \{p_{i+l} \cup p_{j+l}\}.$$

La otra posibilidad sería $\overline{p_{i+l} p_{j+l}} = \overline{p_{i+l'} p_{j+l'}}$, pero entonces, al ser $|l' - l|$ un múltiplo de t_1 par, $\overline{p_{i+l} p_{j+l}}$ mantiene la orientación de $\overline{p_{i+l'} p_{j+l'}}$ con lo que llegamos a la contradicción de que $p_{i+l} = p_{i+l'}$ y $p_{j+l} = p_{j+l'}$ con $l, l' < r$.

Se obtiene $p'_1 \in \overline{p_i p_j}$, $p'_2 \in \overline{p_{i+1} p_{j+1}}, \dots, p'_r \in \overline{p_{i+r-1} p_{j+r-1}}$, de modo que $p'_l \neq p'_{l'}$ para todo $l \neq l'$ ($\leq r$). En consecuencia

$$s = |\theta(p'_1)| \geq r = |\theta(p_1)|.$$

Por un argumento idéntico obtendremos $r \geq s$, con lo que resulta $r = s$.

b) Veremos primero que el período de las órbitas periódicas es menor o igual que $2t_1$. Supongamos lo contrario, esto es, que existe $\theta(p_1)$ con $|\theta(p_1)| = r > 2t_1$. Sean p_i, p_j adyacentes en $\theta(p_1)$. Consideremos el arco orientado $\overline{p_i p_j}$ que no contiene ningún otro elemento de $\theta(p_1)$. Tendremos, debido a que t_1 es impar, que el arco orientado $\overline{p_{i+t_1} p_{j+t_1}}$, que hace adyacentes a p_{i+t_1} y p_{j+t_1} , tiene orientación opuesta a la de $\overline{p_i p_j}$. Como $r > 2t_1$, ocurre que

$$\overline{p_i p_j} \cap \overline{p_{i+t_1} p_{j+t_1}} = \emptyset.$$

Repitamos el argumento. Consideremos el arco orientado $\overline{p_j p_{k_1}}$, que hace adyacentes a p_j y $p_{k_1} \neq p_i$ en $\theta(p_1)$, y construyamos $\overline{p_{j+t_1} p_{k_1+t_1}}$, un arco que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_{j+t_1} y $p_{k_1+t_1}$, cambiando la orientación de $\overline{p_j p_{k_1}}$.

Tendremos que

$$\overline{p_j p_{k_1}} \cap \overline{p_{j+t_1} p_{k_1+t_1}} = \emptyset.$$

Repetiendo el proceso se obtienen $\{k_2, \dots, k_r\}$, de manera que $\overline{p_{k_{r-1}} p_{k_r}}$ hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a $p_{k_{r-1}}$ y p_{k_r} . Además

$$\overline{p_{k_{r-1}} p_{k_r}} \cap \overline{p_{k_{r-1}+t_1} p_{k_r+t_1}} = \emptyset,$$

con orientaciones opuestas, y existe un arco $\overline{p_{k_r} p_{k_r+t_1}}$ que hace adyacentes en $\theta(p_1)$ a p_{k_r} y $p_{k_r+t_1}$.

Tenemos, entonces, a $\overline{p_{k_r} p_{k_r+t_1}}$, un arco de extremos adyacentes en $\theta(p_1)$, y a $(\overline{f'})^{t_1}(p_{k_r})(\overline{f'})^{t_1}(p_{k_r+t_1})$, otro arco de extremos adyacentes en $\theta(p_1)$, de orientaciones opuestas. De modo que

$$(\overline{f'})^{t_1}(p_{k_r+t_1}) = p_{k_r}.$$

Como $(\overline{f'})^{t_1}(p_{k_r}) = p_{k_r+t_1}$, llegamos a contradicción al ser $r > 2t_1$.

Sólo nos queda ver que $\overline{f'}$ no tiene más de dos órbitas de período t_1 en $(\pi \circ r)(\bigcup_{i=1}^{t_1} \partial(D^{1,i}))$.

Supongamos que $\theta(p_1)$ y $\theta(p'_1)$ son dos órbitas periódicas, de período t_1 , de $\overline{f'}$, con $p_1, p'_1 \in (\pi \circ r)(D^{1,1})$. Consideremos un arco $\overline{p_1 p'_1}$ en $\partial(N \setminus L)/\sim$ de extremos p_1, p'_1 . Entonces $p_1 p'_1$ y $p_{1+t_1} p'_{1+t_1}$ tienen orientaciones opuestas, de modo que

$$\overline{p_1 p'_1} \cap \overline{p_{1+t_1} p'_{1+t_1}} = \{p_1 \cup p'_1\}.$$

En consecuencia, no existen más órbitas de período t_1 . \square

Observación 4.19. La familia de longitudes de ciclos $\{t_1, \dots, t_l\}$ se descompone en dos conjuntos disjuntos que son el conjunto de las longitudes pares t_P y el conjunto de las longitudes impares t_I .

Para cada $t_j \in t_P$, el conjunto $(\partial(N \setminus L) \cap (\bigcup_{i=1}^{t_j} I(K)_i^j))/\sim$ contiene q^j órbitas periódicas de período r_j de $\overline{f'}$.

Si $t_j \in t_I$, existen $q^{j,1}$ órbitas periódicas de período $r_{j,1} = t_j$, y $q^{j,2}$ órbitas periódicas de período $r_{j,2} = 2t_j$, siendo $q^{j,1} \leq 2$.

Falta computar el número de órbitas periódicas de $\overline{f'}$ en el conjunto $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$. Pero sabemos ya, por la proposición 2.7, que sólo habrá $q^{0,1}$ órbitas periódicas de período $r_{0,1} = 1$ y $q^{0,2}$ órbitas periódicas de período $r_{0,2} = 2$, siendo $q^{0,1} \leq 2$.

Denotamos $r_P = \{r_i : t_i \in t_P\}$ y $r_I = \{r_{0,1} \cup r_{0,2}\} \cup \{r_{i,j} : t_i \in t_I\}$.

Proposición 4.20. Supongamos que f invierte la orientación y que K no es repulsor. Entonces

$$\begin{aligned} & i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = \\ & = \begin{cases} 1 - \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_P \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i + \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_I \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ 1 + (-1)^k - \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_P \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i + \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_I \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases} \\ & = \begin{cases} 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ 1 + (-1)^k - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Sabemos que $cl(N \setminus L) / \sim$ es homeomorfo a una bola con una cantidad finita de agujeros.

Tenemos, entonces,

$$H_0(cl(N \setminus L) / \sim) = \mathbb{Q},$$

$$H_1(cl(N \setminus L) / \sim) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q} & A + S \text{ generadores si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q} & A + S - 1 \text{ generadores si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases}$$

$$H_2(cl(N \setminus L) / \sim) = 0.$$

Como consecuencia de esto, y recordando que $i_{cl(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L) / \sim) = \Lambda((\overline{f'})^k)$, obtendremos que

1) Si $\partial(D(N)) \not\subset L$ el resultado es inmediato. Basta con calcular la traza de $((\overline{f'})^k)_* : H_1(cl(N \setminus L) / \sim) \rightarrow H_1(cl(N \setminus L) / \sim)$. Para ello, téngase en cuenta que habrá $A + S$ generadores y que la imagen por $(\overline{f'})_*$ de cada generador es otro generador con signo negativo.

2) Si $\partial(D(N)) \subset L$, $cl(N \setminus L) / \sim$ será una esfera con $A + S$ agujeros, esto es, un disco con $A + S - 1$ agujeros, con lo que $H_1(cl(N \setminus L) / \sim)$ tiene $A + S - 1$ generadores. Resulta inmediato ver que la imagen por $(\overline{f'})_*$ de cada uno de estos generadores es otro generador con signo negativo, salvo para uno, cuya imagen es la suma de todos los generadores, con signo positivo. De este comentario, y del cálculo de la traza de $((\overline{f'})^k)_*$, se deduce con facilidad el resultado del enunciado. \square

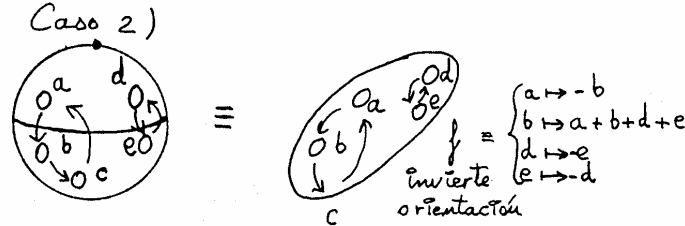


Figura IV.12

Observación 4.21. En las condiciones de la proposición anterior, si k es impar, se tendrá que

$$i_{cl(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L) / \sim) = \begin{cases} 1 + \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_I \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \not\subset L \\ \sum_{\substack{t_i \in (t_A \cup t_S) \cap t_I \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i & \text{si } \partial(D(N)) \subset L \end{cases}$$

Seguidamente enunciamos la **generalización del teorema principal** para el caso en que f invierta la orientación.

Teorema 4.22. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen que invierte la orientación, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor. Entonces

a) Si $\partial(D(N)) \not\subset L$,

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) &= 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i - \\ &- \sum_{\substack{r_i \in r_P \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i - \sum_{\substack{r_{i,j} \in r_I \\ k \in r_{i,j} \mathbb{N}}} r_{i,j} q^{i,j}. \end{aligned}$$

b) Si $\partial(D(N)) \subset L$,

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) &= 1 + (-1)^k - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i - \\ &- \sum_{\substack{r_i \in r_P \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i - \sum_{\substack{r_{i,j} \in r_I \\ k \in r_{i,j} \mathbb{N}}} r_{i,j} q^{i,j}. \end{aligned}$$

Demostración. Resulta, por la propiedad aditiva del índice de punto fijo, que

$$\begin{aligned} i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) &= i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) + \\ &+ \sum_{q_i \in \{q_1, \dots, q_m\} \cap Fix((\overline{f'})^k)} i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, U(q_i)), \end{aligned}$$

siendo la última igualdad una suma de unos. Consecuencia inmediata son los resultados del enunciado. \square

Teorema 4.23. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen que invierte la orientación, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y repulsor. Entonces

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = (-1)^k - \sum_{\substack{t_i \in t_R \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i.$$

Demostración. Como K es un repulsor, todas las curvas de Jordan de $\partial(N \setminus L)$ se colapsan a puntos al hacer el cociente $cl(N \setminus L)/\sim$, de modo que $cl(N \setminus L)/\sim$ es homeomorfo a S^2 . Entonces

$$H_0(cl(N \setminus L)/\sim) = \mathbb{Q}, \quad H_1(cl(N \setminus L)/\sim) = 0, \quad H_2(cl(N \setminus L)/\sim) = \mathbb{Q}.$$

Resulta, al invertir f la orientación, que

$$i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = 1 + (-1)^k.$$

Obtenemos, aplicando la propiedad aditiva del índice de punto fijo, que

$$1 + (-1)^k = i_{cl(N \setminus L)/\sim}((\overline{f'})^k, cl(N \setminus L)/\sim) = i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) + \sum_{\substack{t_i \in t_R \\ k \in t_i \mathbb{N}}} t_i + 1.$$

El sumatorio y el uno que aparecen en la segunda igualdad se deben a que, al ser K repulsor, sólo vamos a tener este tipo de sumandos (caso a) de la observación 4.7) y a que $\partial(N \setminus L) \setminus I(K)/\sim$ es un punto fijo. \square

Teniendo en cuenta el último corolario, resulta inmediato que el teorema 4.22 se generaliza a cualquier conjunto compacto y conexo K .

Corolario 4.24. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen que invierte la orientación, con U homeomorfo a una bola abierta, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado y conexo. Entonces

a) Si $\partial(D(N)) \not\subset L$,

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) &= 1 - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i - \\ &\quad - \sum_{\substack{r_i \in r_P \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i - \sum_{\substack{r_{i,j} \in r_I \\ k \in r_{i,j} \mathbb{N}}} r_{i,j} q^{i,j}. \end{aligned}$$

b) Si $\partial(D(N)) \subset L$,

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) &= 1 + (-1)^k - \sum_{\substack{t_i \in t_A \cup t_S \\ k \in t_i \mathbb{N}}} (-1)^{t_i} t_i - \\ &\quad - \sum_{\substack{r_i \in r_P \\ k \in r_i \mathbb{N}}} r_i q^i - \sum_{\substack{r_{i,j} \in r_I \\ k \in r_{i,j} \mathbb{N}}} r_{i,j} q^{i,j}. \end{aligned}$$

Observación 4.25. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U homeomorfo a una unión de bolas abiertas, y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, unión finita de componentes conexas,

$$K = K_{1,1} \cup \cdots \cup K_{1,k_1} \cup \cdots \cup K_{r,1} \cup \cdots \cup K_{r,k_r},$$

donde $f(K_{i,j}) = K_{i,j+1}$ y $f(K_{i,k_i}) = K_{i,1}$, esto es, K es la unión de r ciclos de longitudes $\{k_1, \dots, k_r\}$. Entonces

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K)) = \sum_{k \in k_i \mathbb{N}} k_i i_{\mathbb{R}^2}(f^k, U(K_{i,1})).$$

La demostración de este resultado es consecuencia inmediata de aplicar la propiedad aditiva del índice de punto fijo a la aplicación f^k . Obsérvese que los índices del sumatorio se podrán calcular utilizando las técnicas empleadas para el caso en que K es conexo.

Corolario 4.26. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un homeomorfismo, y sea K un conjunto propio, compacto, invariante y con una cantidad finita de componentes conexas. Entonces $f : S^2 \setminus K \rightarrow S^2 \setminus K$ no es minimal.

La demostración es análoga a la de [72], pág 243, pero trabajando con conjuntos compactos, invariantes, aislados y conexos, en vez de con puntos fijos, y utilizando el teorema 4.15.

Observación 4.27. No hemos podido hallar ejemplos de ninguna aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, homeomorfismo sobre la imagen, que invierta la orientación, con U homeomorfo a una bola, y tal que exista un K compacto, conexo, invariante y aislado con respecto a f , que posea algún ciclo $\{I(K)_1^1, \dots, I(K)_{t_1}^1\}$ con $t_1 > 2$.

.

REFERENCES

- [1] M.Aguilar, S.Gitler, C.Prieto, *Topología algebraica: un enfoque homotópico*. McGraw Hill, México 1998.
- [2] J.M.Alonso, J.Campos, *The index and the asymptotic stability of fixed points in two dimensions: a counterexample*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. 32 (1998) 719-725.
- [3] S.A.Andrea, *On homeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 61-74.
- [4] V.Benci, *A new approach to the Morse-Conley theory and some applications*, Ann. Mat. Pura. Appl. 4 (1991) 231-305.
- [5] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47 (1951), 38-45.
- [6] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane II*, Fund. Math. 28 (1973), 61-65.
- [7] N.P.Bhatia, G.P.Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer, Berlin, 1970.
- [8] G.D.Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 9, 1927.
- [9] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math. 36 (1949) 235-244.
- [10] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne 44 (PWN, Warsaw, 1967).
- [11] K. Borsuk, *Concerning homotopy properties of compacta*, Fundamenta Mathematicae 62 (1968), 223-254
- [12] K. Borsuk, *Concerning the notion of the shape of compacta*, Proc. Internat. Top. Symp. Herceg-novi 1968 (Beograd 1969) 98-104.
- [13] K. Borsuk, *On the concept of shape for metrizable spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 18 (1970) 127-132.
- [14] K. Borsuk, *Theory of shape*, Lecture Notes Ser. No 28, Mat. Inst. Aarhus Univ. (1971).
- [15] K. Borsuk, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne 59 (PWN, Warsaw, 1975).
- [16] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875-882.
- [17] R. Bott, *On the third symmetric potency of S_1* , Fund. Math. 39 (1952) 364-368.
- [18] L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1922) 37-54.
- [19] M.Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston Journal of Math. 10 (1984) 35-41.
- [20] M.Brown, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston Journal of Math. 11 (1985) 455-469.
- [21] M.Brown, *On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990) 1109-1114.
- [22] R.F.Brown, *The Lefschetz fixed point theorem*. Scott, Foresman and Company (1971) Glenview, Illinois.
- [23] R.F.Brown, *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhäuser, Boston 1993.
- [24] E.Coddington, N.Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Tata McGraw-Hill Publishing Co. New Delhi, 1955.
- [25] C. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS, 38,A. M. S. Providence R. I., 1978.
- [26] D. W. Curtis, *Hyperspaces of noncompact metric spaces*. Compositio Math. 40, 2 (1980) 139-152.
- [27] D. W. Curtis, *Growth hyperspaces of Peano continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 238, (1978) 271-283.
- [28] D. W. Curtis, R. M. Schori, *Hyperspaces of polyedra are Hilbert cubes*, Fund. Math. 99, (1978) 189-197.

- [29] D.W.Curtis, R.M.Schori, 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 927-931.
- [30] D. W. Curtis, R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978) 19-38.
- [31] E.N.Dancer, R.Ortega, *The index of Lyapunov stable fixed points*, Journal of Dynamics and Diff. Equations, 6 (1994) 631-637.
- [32] M. Degiovanni, M. Mrozek, *The Conley index for maps in absence of compactness*, Pro. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123 (1993) 75-94.
- [33] K.Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [34] R.L.Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publishing Comp. 1987.
- [35] A.Dold, *Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts*, Topology, 4 (1965), 1-8.
- [36] A.Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1972.
- [37] J.Dugundji, A.Granas, *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne, Warszawa, PWN-Polish Scientific Publishers (1982).
- [38] J.Dydak, J.Segal, *Shape theory: An Introduction*, Lecture Notes in Math. 688 (Springer-Verlag, Berlin, 1978).
- [39] R.W. Easton, *Geometric methods for discrete dynamical systems*, Oxford University Press, 1998.
- [40] R. Engelking, *General topology*, Monografie Matematyczne. Warszawa, PWN - Polish Scientific Publishers (1977).
- [41] R. H. Fox, *On shape*, Fund. Math. 74, (1972) 47-71.
- [42] J. Franks, *The Conley index and non-existence of minimal homeomorphisms*, Illinois Journal of Math. 43 (1999), 3, 457-464.
- [43] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation Theorem*, Ergod. Th. Dyn. Sys. 12 (1992) 217-226.
- [44] J.Franks, D.Richeson, *Shift equivalence and the Conley index*, Trans. Amer. Math. Soc. 352, 7 (2000) 3305-3322.
- [45] T. Ganea, *Symmetrische Potenzen topologischer Rume*, Math. Nach. 11 (1954) 305-316.
- [46] J. Girolo, *Approximating compact sets in normed linear spaces*, Pacific Journal of Math., 98, 1 (1992) 81-89.
- [47] M. Gobbino, M. Sardella, *On the connectedness of attractors for dynamical systems*, J. Dif. Equat. 133 (1997) 1-14.
- [48] S.Godlewski, *On the shape of solenoids*, Bull. Acad. Pol. Sci. 17 (1969), 623-627.
- [49] A. Granas, *Generalizing the Hopf-Lefschetz fixed point theorem for non-compact ANR's*, Symposium on infinite dimensional topology (1967) Baton Rouge.
- [50] A. Granas, *Some theorems in fixed point theory. The Leray-Schauder index and Lefschetz number*, Bull. Acad. Polon. Sc., 17, (1969) 131-137.
- [51] A. Granas, *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972) 209-228.
- [52] B.Günther, *A compactum that cannot be an attractor of a self-map on a manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 120, 2, (1994) 653-655.
- [53] B.Günther, J.Segal, *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, Proc. Amer. Math. Soc. 119, 1, (1993) 321-329.
- [54] M.Handel, *There are no minimal homeomorphisms of the multipunctured plane*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 12 (1992), 75-83.
- [55] M.Handel, *A fixed point theorem for planar homeomorphisms*, Topology, 26 (1999) 235-264.
- [56] M.W.Hirsch, *Fixed-point indices, homoclinic contacts and dynamics of injective planar maps*, Michigan Math. J. 47 (2000) 101-108.

- [57] M.W.Hirsch, *Periodic orbits and homoclinics loops for surface homeomorphisms*, Michigan Math. J. 47 (2000) 395-406.
- [58] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [59] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [60] A. Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México 25 (1985) 11-24.
- [61] A.Illanes, S. Macías, S.Nadler, *Symmetric products and Q -manifolds*, Contemporary Math. 246 (1999) 137-141.
- [62] B.Jiang, *Nielsen fixed point theory*, Contemporary Math. 14, 1980.
- [63] T.Kaczynski, M.Mrozek, *Stable index pairs for discrete dynamical systems*, Canad. Math. Bull. 40, 4, (1997), 448-455.
- [64] T.Kaczynski, M.Mrozek, *Conley index for discrete multi-valued dynamical systems*, Topology and its Appl. 65, (1995), 83-96.
- [65] H.Kato, *Attractors in euclidean spaces and shift maps on polyhedra*, Houston J. Math. 24, 4 (1998) 671-680.
- [66] J. L. Kelley, *Hyperspaces of continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.
- [67] Y. Kodama, S. Spież, T. Watanabe, *On shape of hyperspaces*, Fund. Math. 100 (1978), 59-67.
- [68] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc. (1930).
- [69] S. Lefschetz, *On the fixed point formula*, Annals of Math. 38 (1937) 819-822.
- [70] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc., (1942).
- [71] P. Le Calvez, *Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice > 1* , Topology, 38 (1999) 23-35.
- [72] P.Le Calvez, J.C.Yoccoz, *Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*, Annals of Math. 146 (1997) 241-293.
- [73] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology and its Applic. 92 (1999) 173-182.
- [74] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Procds. 22 (1997) 281-296.
- [75] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X II*, Topology Procds. (en prensa).
- [76] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology and its Appl. 109 (2001) 237-256.
- [77] S. Mardešić, *Retracts in shape theory*, Glasnik Mat. 6 (26) (1971) 153-163.
- [78] S. Mardešić, *Shape for topological spaces*, General topology and its Appl. 3 (1973) 265-282.
- [79] S. Mardešić, J. Segal, *Shapes of compacta and ANR-systems*, Fund. Math. 72 (1971) 41-59.
- [80] S. Mardešić, J. Segal, *Equivalence of the Borsuk and the ANR-systems approach to shapes*, Fund. Math. 72 (1971) 61-68.
- [81] S. Mardešić, J. Segal, *Shape theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [82] S.Masih, *Fixed points of symmetric product mappings of polyhedra and metric absolute neighborhood retracts*, Fund. Math, 80 (1973) 149-156.
- [83] S.Masih, *On the fixed point index and the Nielsen fixed point theorem of symmetric product mappings*, Fund. Math, 102 (1979)143-158.
- [84] R.D. Mauldin, ed., *The Scottish book*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [85] K. Mischaikow, *Conley index theory: some recent developments*, CDSN94 181.
- [86] K.Mischaikow, M.Mrozek, *Conley Index Theory*, preprint.
- [87] K. Mischaikow, M. Mrozek, *Isolating neighborhoods and chaos*, CDSN93 116, Japan J. Indus. Appl. Math.
- [88] T. Miyata, J. Segal, *Shape and uniform properties of hyperspaces of noncompact spaces*, Glasnik Mat. 32(52) (1997), 99-124.
- [89] R. Molski, *On symmetric products*, Fund. Math. 44 (1957) 165-170.

- [90] J.T.Montgomery, *Cohomology of isolated invariant sets under perturbations*, J. Diff. Equations, 13 (1973), 257-299.
- [91] K. Morita, *The Hurewicz isomorphism theorem on homotopy and homology pro-groups*, Proc. Jap. Acad. 50 (1974) 453-457.
- [92] M. A. Morón, F. R. Ruiz del Portal, *Shape as a Cantor completion process*, Math. Z. 225, 1 (1997), 67-86.
- [93] M.A.Morón, F.R.Ruiz del Portal, *Ultrametrics and infinite dimensional Whitehead theorems in shape theory*, Manuscripta Math., 89, (1996) 325-333.
- [94] M.Mrozek, *Index pairs and the fixed point index for semidynamical systems with discrete time*, Fund. Math. 133 (1989) 179-194.
- [95] M.Mrozek, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 318, 1 (1990) 149-178.
- [96] M. Mrozek, *The Conley index on compact ANR's is of finite type*, Results Math. 18 (1990), 306-313.
- [97] M.Mrozek, *Shape index and other indices of Conley type for local maps on locally compact Hausdorff spaces*, Fund. Math. 145, 1, (1994) 15-37.
- [98] M. Mrozek, K. P. Rybakowski, *A cohomological Conley index for maps on metrics spaces*, J. Diff. Equations 90, 143-171 (1991).
- [99] S. B. Nadler, *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [100] N. To Nhu, *Investigating the ANR-property of metric spaces*, Fund. Math. 124 (1984), 243-254.
- [101] R.D.Nussbaum, *Generalizing the fixed point index*, Math. Ann. 228 (1977), 259-278.
- [102] R.D.Nussbaum, *The fixed point index and some applications*, Séminaire de Mathématiques supérieures, Les presses de L'Université de Montréal, 1985.
- [103] R. Ortega, *Some applications of the topological degree to stability theory*, Topological Methods in Dif. Equat. and Inclusions, ed. A. Granas and M. Frigon. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995, 377-410.
- [104] J.C.Oxtoby, *Measure and category*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [105] S.Pelikan, E.E. Slaminka, *A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds*, Ergodic Th. and Dynamical systems, 7 (1987) 463-479.
- [106] J.W.Robbin, D.Salamon, *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergodic Th. and Dynamical Systems, 8 (1988), 375-393.
- [107] N.Rallis, *A fixed point index theory for symmetric product mappings*, Manuscripta Math. 44 (1983) 279-308.
- [108] J. W. Robbin, D. Salamon, *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1988), 8, 375-393.
- [109] K. P. Rybakowski, *On the homotopy index for infinite dimensional semi-flows*, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982), 351-382.
- [110] K. P. Rybakowski, *The Morse index, repeller-attractor pairs and the connection index for semiflows on noncompact spaces*, J. Diff. Equations. 47 (1983) 66-98.
- [111] K. P. Rybakowski, *The homotopy index and partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1987.
- [112] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985) 1-41.
- [113] J. M. Sanjurjo, *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape of groups*, Proc. London Math. Soc. 69 (1994) 330-344.
- [114] R.M.Schori, *Hyperspaces and symmetric products of topological spaces*, Fund. Math. 63 (1968) 77-88.
- [115] R. M. Schori, J. E. West, *Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes*, Pacific J. Math. 53 (1974), 239-251.
- [116] R. M. Schori, J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 217-235.

- [117] M.Shub and D.Sullivan, *A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps*, Topology, 13 (1974), 189-191.
- [118] C.P.Simon, *A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics*, Inventiones Math. 26 (1974) 187-200.
- [119] E. Slaminska, *Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 340 (1993) 429-445.
- [120] S.Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [121] E.Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, NY, 1966.
- [122] H.Steinlein, *Über die verallgemeinerten Fixpunktindizes von Iterierten verdichtender Abbildungen*, Manuscripta Math. 8 (1973), 252-266.
- [123] A.Szymczak, *The Conley index for discrete semidynamical systems*, Topology and its Appl. 66 (1995) 215-240.
- [124] A.Szymczak, *The Conley index for decompositions of isolated invariant sets*, Fund. Math. 148 (1995) 71-90.
- [125] A.Szymczak, *The Conley index and symbolic dynamics*, Topology, 35, 2 (1996) 287-299.
- [126] J.E.West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk*, Annals of Math. 106 (1977), 1-18.
- [127] M. Wojdyslawski, *Retracts absolut et hyperespaces des continus*, Fund. Math. 32 (1939), 184-192.
- [128] W. Wu, *Note sur les produits essentiels symétriques des espaces topologiques*, I Comptes Rendus des Seances de l'Académie des Sciences 16 (1947) 1139-1141.