UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CC. MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático

SINGULARIDAD DE INCLUSIONES ENTRE ESPACIOS INVARIANTES POR REORDENAMIENTO

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR Víctor Manuel Sánchez de los Reyes

Bajo la dirección de los Doctores:
Francisco Luis Hernández Rodríguez
Evgueni Mikhailovich Semenov

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-1809-4

SINGULARIDAD DE INCLUSIONES ENTRE ESPACIOS INVARIANTES POR REORDENAMIENTO

Víctor Manuel Sánchez de los Reyes

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Directores de Tesis:
D. Francisco Luis Hernández Rodríguez
D. Evgueni Mikhailovich Semenov

Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid

Enero de 2002

A la memoria de mi padre

Índice

Introducción

Esta memoria se encuadra en el estudio de la estructura de los espacios invariantes por reordenamiento o espacios simétricos. Esta clase importante de retículos de Banach engloba una gran variedad de espacios funcionales clásicos de la Teoría de Operadores, como son los espacios de Orlicz, de Lorentz y de Marcinkiewicz (ver por ejemplo las monografías de Lindenstrauss y Tzafriri [LT_2], de Kreĭn, Petunin y Semenov [KPS] y de Bennett y Sharpley [BS]).

El objetivo principal de la memoria es analizar las singularidades de inclusiones entre espacios invariantes por reordenamiento tanto concretos (espacios de Lorentz, de Marcinkiewicz, de Orlicz y espacios extremos) como generales.

Recordemos que un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach X e Y se dice que es *estrictamente singular* (o *Kato*) si no es un isomorfismo sobre ningún subespacio infinito dimensional de X. Los operadores estrictamente singulares introducidos por Kato en [Ka] forman un ideal cerrado de operadores que contiene a los operadores compactos. A diferencia de estos últimos, el que un operador sea estrictamente singular no implica que lo sea su traspuesto, y viceversa (ver Przeworska-Rolewicz y Rolewicz [PR, Ejemplos C.II.5.1 y 2]), luego la clase de los operadores estrictamente singulares no es estable por dualidad.

Un operador lineal y continuo T de un retículo de Banach X en un espacio de Banach Y se dice que es *disjuntamente estrictamente singular* si no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos tal que la restricción de T al subespacio cerrado engendrado por ellos sea un isomorfismo. La introducción del concepto de operador disjuntamente estrictamente singular por Hernández y Rodríguez-Salinas en [HR_1] está justificada por su aplicación al problema de encontrar proyecciones en retículos de Banach de funciones medibles. Por ejemplo, se tiene que si para un retículo de Banach X existe un operador $T : X \longrightarrow L^p[0,1]$ con $p \geq 1$ que preserva disjuntos y que no es disjuntamente estrictamente singular, entonces X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p. La clase de los operadores disjuntamente estrictamente singulares es un espacio vectorial que es estable por composición a la izquierda pero no es un ideal de operadores (Hernández [H_2]).

Los antecedentes del estudio de las inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios invariantes por reordenamiento son los siguientes:

Kalton caracterizó en [K_1] las inclusiones estrictamente singulares entre espacios de Orlicz de sucesiones obteniendo que si ℓ_φ y ℓ_ψ son espacios de Orlicz de sucesiones tales que φ verifica la condición Δ_2 en 0 y $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$, entonces son equivalentes:

(i) La inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$ es estrictamente singular.

(ii) Para todo $C > 0$ existen $t_1, \dots, t_n \in (0,1]$ distintos y $a_1, \dots, a_n \in (0,\infty)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(\lambda t_k) \geq C \sum_{k=1}^{n} a_k \psi(\lambda t_k)$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

En este caso, como se verá más adelante, el que la inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$ sea estrictamente singular es equivalente a que sea disjuntamente estrictamente singular.

En el contexto de espacios de funciones se caracterizaron en [HR_1] las inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios de Orlicz de funciones definidas en $[0,1]$, L^φ y L^ψ, verificando φ y ψ la condición Δ_2 en ∞, obteniendo que son equivalentes:

(i) La inclusión $L^\varphi \hookrightarrow L^\psi$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) Para cada constante $C > 0$ existen $x_1, \dots, x_n \in [1,\infty)$ distintos y $a_1, \dots, a_n \in (0,\infty)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi(t x_k) \leq C \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(t x_k)$$

para todo $t \geq 1$.

Cuando uno de los espacios extremos es un espacio L^p con $p \geq 1$ se tienen los siguientes criterios integrales dados en [H_2] y [HR_1] respectivamente:

(i) La inclusión $L^p \hookrightarrow L^\varphi$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{s\geq 1} \frac{1}{\log a} \int_1^a \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = 0.$$

(ii) La inclusión $L^{\varphi} \hookrightarrow L^p$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \inf_{s\geq 1} \frac{1}{\log a} \int_1^a \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = \infty.$$

García del Amo, Hernández y Ruiz dieron en [GHR] la caracterización de las inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios de Orlicz sobre $[0,\infty)$ la cual extiende las dadas en los casos $[0,1]$ y de sucesiones.

Las inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios de Lorentz y de Marcinkiewicz sobre $[0,1]$ han sido caracterizadas por Astashkin en [A]. En concreto se tiene que son equivalentes:

(i) La inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) La inclusión $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$ es disjuntamente estrictamente singular, donde $\tilde{\phi} = \frac{id}{\phi}$.

(iii) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0.$

La memoria se divide en cuatro capítulos. El primero de ellos contiene los preliminares necesarios para el estudio de los otros tres capítulos que abordan respectivamente el caso finito, el infinito y el discreto. Pasemos a ver más en detalle el contenido de cada uno de ellos.

Se ha tratado de que el capítulo 1 sea lo más autocontenido posible para de esta manera facilitar la lectura de la memoria. En él recordamos los conceptos básicos dentro de la teoría de espacios invariantes por reordenamiento como son función de distribución, reordenamiento decreciente, funciones equimedibles, función maximal y función fundamental. Además, revisamos la teoría de espacios de Köthe. Más tarde nos ocupamos de recordar las definiciones de los espacios de Lorentz y de Marcinkiewicz, básicos en toda la memoria, y de los índices de Boyd para, finalmente, hacer una breve incursión en la teoría de interpolación.

En el capítulo 2 estudiamos inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios invariantes por reordenamiento construidos sobre $[0,1]$. Recordemos dos resultados importantes relativos a las inclusiones canónicas respecto a espacios extremos L^1 y L^{∞}:

(i) Si E es un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^{∞} entonces la inclusión $L^{\infty} \hookrightarrow E$ es siempre estrictamente singular.

Este resultado es debido a S.Ya. Novikov ([N_1]). El caso $E = L^p$ con $p \geq 1$ es un resultado clásico debido a Grothendieck (ver Rudin [R, Teorema 5.2]).

(ii) Si E es un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^1 entonces la inclusión $E \hookrightarrow L^1$ es siempre disjuntamente estrictamente singular.

Una demostración de este resultado se tiene en ([GHR]) y en Novikov ([N_2]).

En primer lugar hemos obtenido el siguiente criterio general: dadas ϕ y ψ con $\psi \leq \phi$ son equivalentes:

(i) Si E y F son espacios invariantes por reordenamiento con $\phi_E = \phi$, $\phi_F = \psi$ y $E \hookrightarrow F$, entonces la inclusión es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{\phi(t)}\right)' \psi'(t)dt < \infty$.

En otro resultado importante del capítulo 2 factorizamos inclusiones entre espacios invariantes por reordenamiento a través de inclusiones no disjuntamente estrictamente singulares. En concreto, dados E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $E \hookrightarrow F$ con $E \neq L^\infty$ y $F \neq L^1$, existe un espacio invariante por reordenamiento G tal que $E \hookrightarrow G \hookrightarrow F$ y ninguna de las inclusiones es disjuntamente estrictamente singular. Como corolario de este resultado caracterizamos L^1 y L^∞ mediante inclusiones singulares:

(i) Sea $E \neq L^\infty$ un espacio invariante por reordenamiento. Entonces $E = L^1$ si y solo si para todo espacio invariante por reordenamiento F tal que $F \hookrightarrow E$, la inclusión $F \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) Sea $E \neq L^1$ un espacio invariante por reordenamiento. Entonces $E = L^\infty$ si y solo si para todo espacio invariante por reordenamiento F tal que $E \hookrightarrow F$, la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.

También, en el capítulo 2 estimamos el grado de proximidad entre dos espacios invariantes por reordenamiento E y F cuando se tiene la inclusión $E \hookrightarrow F$ y no es disjuntamente estrictamente singular. En concreto tenemos que dados E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que sus funciones fundamentales tienen variación regular y $E \hookrightarrow F$, si la inclusión $E \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular entonces existe $p > 1$ tal que

$$\bigcup_{q>p} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<p} L^q$$

o se tiene una de las siguientes cadenas de inclusiones:

$$L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<\infty} L^q$$

o

$$\bigcup_{q>1} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow L^1.$$

En el capítulo 3 estudiamos inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios invariantes por reordenamiento modelados sobre el intervalo $[0,\infty)$. Comenzamos estudiando la inclusión extrema a la izquierda $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ obteniendo la siguiente caracterización general. Son equivalentes:

(i) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es estrictamente singular.

(iii) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es débilmente compacta.

(iv) $\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{\phi_E(t)}{t} = 0.$

Pasamos luego a estudiar la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ que ha resultado ser más compleja. Primero obtenemos condiciones necesarias no suficientes en general para que dicha inclusión sea disjuntamente estrictamente singular: si la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular entonces

(i) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\phi_E(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \phi_E(t) = \infty.$

(ii) Las funciones de la forma $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \notin E$ para ningún $1 < p < \infty$.

Y damos también condiciones suficientes: sea E un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^1 y de L^∞. Si la función fundamental ϕ_E es submultiplicativa y $E \neq L^{p,\infty}$ y $E \neq L_0^{p,\infty}$ para todo $1 < p < \infty$ entonces la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular.

Por último, en el capítulo 3 estudiamos la inclusión entre dos espacios de Lorentz obteniendo el siguiente criterio: si

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0$$

y la función ϕ es submultiplicativa, entonces la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular.

El capítulo 4 se centra en los espacios invariantes por reordenamiento de sucesiones también llamados espacios simétricos de sucesiones. Primero caracterizamos las inclusiones estrictamente singulares entre espacios de Lorentz y de Marcinkiewicz de sucesiones

(Teoremas 4.2 y 4.6) al igual que hizo Astashkin en el caso de espacios de funciones definidas sobre $[0,1]$, obteniendo que son equivalentes:

(i) La inclusión $d(\omega,p) \hookrightarrow d(\omega',p)$ es estrictamente singular.

(ii) La inclusión $m(\omega') \hookrightarrow m(\omega)$ es estrictamente singular.

(iii) La inclusión $m_0(\omega') \hookrightarrow m_0(\omega)$ es estrictamente singular.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega'_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k} = 0.$

De este resultado obtenemos fácilmente que las inclusiones canónicas $\ell_1 \hookrightarrow E$ y $E \hookrightarrow c_0$ son siempre estrictamente singulares para todo espacio simétrico con inclusión propia.

Para espacios simétricos generales tenemos un resultado análogo al del caso finito:

Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ninguno de ellos en ℓ_1 tales que $\sum_{k=1}^n \omega'_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:

(i) Si E y F son espacios simétricos de sucesiones con $E \hookrightarrow F$, E σ-orden continuo y $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ y $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^n \omega'_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.

(ii) Si $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida por $\sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \omega_k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_k \omega'_k < \infty.$$

Damos también un resultado de factorización de inclusiones entre espacios simétricos de sucesiones en dos inclusiones no disjuntamente estrictamente singulares (Teorema 4.23):

Sean E y F espacios simétricos de sucesiones con $E \hookrightarrow F$, $E \neq \ell_1$ y $F \neq c_0, \ell_\infty$. Entonces existe un espacio simétrico de sucesiones G tal que

$$E \hookrightarrow G \hookrightarrow F$$

y ninguna de las inclusiones es disjuntamente estrictamente singular.

Con este resultado podemos caracterizar c_0 y ℓ_1 mediante inclusiones estrictamente singulares:

(i) Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_1. Entonces $E = c_0$ si y solo si para todo espacio simétrico de sucesiones F con $F \hookrightarrow E$ y $F \neq E$ se tiene que la inclusión $F \hookrightarrow E$ es estrictamente singular.

(ii) Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_∞. Entonces $E = \ell_1$ si y solo si para todo espacio simétrico de sucesiones F con $E \hookrightarrow F$ y $F \neq E$ se tiene que la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.

También estimamos el grado de proximidad entre dos espacios simétricos de sucesiones distintos E y F cuando se tiene la inclusión $E \hookrightarrow F$ y no es estrictamente singular.

Finalmente en este capítulo estudiamos inclusiones estrictamente cosingulares (las cuales guardan ciertan relación de dualidad con las estrictamente singulares) y débilmente compactas obteniendo resultados análogos a los ya comentados para espacios de Lorentz y de Marcinkiewicz de sucesiones y para las inclusiones canónicas. Recordemos que un operador lineal y continuo T entre dos espacios de Banach X e Y se dice que es *estrictamente cosingular* (o de *Pełczyński*) si no existe ningún espacio de Banach infinito dimensional E ni aplicaciones sobre $h_X : X \to E$ y $h_Y : Y \to E$ tales que $h_Y \circ T = h_X$. Los operadores estrictamente cosingulares forman también un ideal cerrado de operadores.

Varios de los resultados presentados en la memoria han sido ya objeto de publicaciones recientes. Así, en García del Amo, Hernández, Sánchez y Semenov [GHSS] se recogen varios resultados del capítulo 2, y Hernández, Sánchez y Semenov [HSS] contiene los principales resultados del capítulo 3.

Los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares entre espacios simétricos extremos han sido también estudiados muy recientemente por Cobos, Manzano, Martínez y Matos en [CMMM] usando técnicas diferentes a las nuestras basadas en teoría de interpolación.

Esta memoria constituye el fruto de varios años de estudio de los espacios invariantes por reordenamiento. La investigación ha sido llevada a cabo en estrecha colaboración con mis directores de tesis, los profesores Francisco Luis Hernández Rodríguez de la Universidad Complutense de Madrid y Evgueni Mikhailovich Semenov de la Universidad Estatal de Voronezh (Rusia), y también con el profesor Alejandro José García del Amo Jiménez de la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid. A ellos y a todo el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid les agradezco el apoyo recibido, en especial a mis directores sin cuyas inestimables ayuda y paciencia este trabajo habría sido imposible.

Enero de 2002

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo de la memoria pretende sentar las bases de la teoría de espacios invariantes por reordenamiento. Debido a la densidad de la misma será un capítulo esencialmente expositorio, incluyendo sólamente aquellas demostraciones que consideremos relevantes para el posterior desarrollo de la memoria.

A lo largo de la memoria, $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ denotará uno de los siguientes tres espacios de medida:

(i) $\Omega = [0,1]$, Σ la σ-álgebra de Lebesgue y λ la medida de Lebesgue.

(ii) $\Omega = [0,\infty)$, Σ la σ-álgebra de Lebesgue y λ la medida de Lebesgue.

(iii) $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y λ la medida cardinal.

Comenzaremos recordando dos conceptos importantes como son el de función de distribución asociada a una función medible y finita en casi todo punto y el de reordenamiento decreciente de una función de este tipo.

Definición 1.1. Sea $f \in L_0(\Omega, \lambda) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f$ es λ-medible y finita λ-casi todo punto$\}$. Se define la *función de distribución* asociada a f por $\lambda_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ dada por

$$\lambda_f(s) = \lambda\{t \in \Omega : |f(t)| > s\}.$$

Definición 1.2. Sea $f \in L_0(\Omega, \lambda)$. Se define el *reordenamiento decreciente* de f por $f^* : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ dada por

$$f^*(t) = \inf\{s \in [0,\infty) : \lambda_f(s) \leq t\}$$

con la convención $\inf \emptyset = \infty$.

Definición 1.3. Dos funciones $f, g \in L_0(\Omega, \lambda)$ se dicen *equimedibles* (o *equidistribuidas*) si $\lambda_f = \lambda_g$.

Las principales propiedades de la función de distribución y del reordenamiento decreciente están recogidas en las dos siguientes proposiciones (ver [BS, Proposiciones 2.1.3 y 2.1.7]):

Proposición 1.4. *Sean $f, g, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0(\Omega, \lambda)$. La función de distribución λ_f asociada a una función f es no negativa, decreciente y continua a la derecha sobre $[0, \infty)$. Además verifica que:*

(i) Si $|g| \le |f|$ λ-casi todo punto entonces $\lambda_g \le \lambda_f$.

(ii) $\lambda_{af}(s) = \lambda_f(s/|a|)$ para todo $s \ge 0$ y todo $a \ne 0$.

(iii) $\lambda_{f+g}(s_1 + s_2) \le \lambda_f(s_1) + \lambda_g(s_2)$ para todo $s_1, s_2 \ge 0$.

(iv) Si $|f| \le \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ λ-casi todo punto entonces $\lambda_f \le \liminf_{n\to\infty} \lambda_{f_n}$. En particular, si $|f_n| \uparrow |f|$ λ-casi todo punto entonces $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$.

Proposición 1.5. *Sean $f, g, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0(\Omega, \lambda)$. El reordenamiento decreciente de f, f^*, es no negativo, decreciente y continuo a la derecha sobre $[0, \infty)$. Además verifica que:*

(i) Si $|g| \le |f|$ λ-casi todo punto entonces $g^* \le f^*$.

(ii) $(af)^* = |a|f^*$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \le f^*(t_1) + g^*(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \ge 0$.

(iv) Si $|f| \le \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ λ-casi todo punto entonces $f^* \le \liminf_{n\to\infty} f_n^*$. En particular, si $|f_n| \uparrow |f|$ λ-casi todo punto entonces $f_n^* \uparrow f^*$.

(v) Si $\lambda_f(s) < \infty$ para un cierto $s \ge 0$ entonces $f^*(\lambda_f(s)) \le s$, y si $f^*(t) < \infty$ para un cierto $t \ge 0$ entonces $\lambda_f(f^*(t)) \le t$.

(vi) f y f^* son equimedibles.

(vii) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ para todo $0 < p < \infty$.

Un resultado básico en la teoría de espacios invariantes por reordenamiento es la desigualdad de Hardy-Littlewood (ver [BS, Teorema 2.2.2]):

Teorema 1.6. *Sean $f, g \in L_0(\Omega, \lambda)$. Entonces*

$$\int_\Omega |fg| d\lambda \le \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt.$$

Asociada a $f \in L_0(\Omega, \lambda)$ tenemos la función maximal f^{**} definida de la siguiente forma:

Definición 1.7. Sea $f \in L_0(\Omega, \lambda)$. Se denomina *función maximal* de f y se denota por f^{**} a la función definida por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$$

con $t > 0$.

Recordemos algunas propiedades (ver [BS, Proposiciones 2.3.2 y 2.3.3]):

Proposición 1.8. *Sean $f, g, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0(\Omega, \lambda)$. Entonces f^{**} es una función no negativa, decreciente y continua. Además verifica que:*

(i) $f^{**} \equiv 0$ si y solo si $f = 0$ λ-casi todo punto.

(ii) $f^* \leq f^{**}$.

(iii) Si $|g| \leq |f|$ λ-casi todo punto entonces $g^{**} \leq f^{**}$.

(iv) $(af)^{**} = |a| f^{**}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(v) Si $|f_n| \uparrow |f|$ λ-casi todo punto entonces $f_n^{**} \uparrow f^{**}$.

(vi) Si, dado $t > 0$, existe $F \in \Sigma$ tal que $\lambda(F) = t$, entonces

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup_{\lambda(E)=t}\int_E |f|d\lambda.$$

Observación 1.9. Del apartado (vi) del resultado anterior se obtiene fácilmente la subaditividad de la función maximal.

Recordemos ahora las definiciones de retículo de Banach, espacio de Köthe de funciones y de espacio invariante por reordenamiento.

Definición 1.10. Se llama *retículo de Banach* a un espacio de Banach X sobre $\mathbb{R}$, parcialmente ordenado verificando:

(i) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todos $x, y, z \in X$.

(ii) $ax \geq 0$ para todo $x \in X$ con $x \geq 0$ y todo $a \geq 0$.

(iii) Existen $\sup(x, y)$ e $\inf(x, y)$ para todos $x, y \in X$.

(iv) Si $|x| \leq |y|$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$ con $x, y \in X$ donde $|x| = \sup(x, -x)$.

Definición 1.11. Un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ formado por clases de equivalencia, módulo igualdad en casi todo punto, de funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrables sobre Σ (es decir, medibles e integrables sobre cada A de Σ de medida finita) es un *espacio de Köthe* si se verifica lo siguiente:

(i) Si $|f| \leq |g|$ λ-casi todo punto, con f medible y $g \in E$, entonces $f \in E$ y $\|f\|_E \leq \|g\|_E$.

(ii) $\chi_A \in E$ para todo $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) < \infty$.

Los espacios de Köthe son en particular retículos de Banach.

Definición 1.12. Un *espacio invariante por reordenamiento* E es un espacio de Köthe verificando que si f y g son equimedibles y $f \in E$ entonces $g \in E$ y $\|f\|_E = \|g\|_E$.

Ejemplos 1.13. Los espacios $L^p(\lambda)$ con $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Orlicz $L^\varphi(\lambda)$ y los espacios de Lorentz clásicos $L^{p,q}(\lambda)$ con $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ son espacios invariantes por reordenamiento.

Recordemos la definición de los espacios de Orlicz:

$$L^\varphi(\lambda) = \left\{ f \in L_0(\Omega, \lambda) : \|f\|_\varphi = \inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \varphi\left(\frac{|f(t)|}{k}\right) dt \leq 1 \right\} < \infty \right\}$$

donde φ es una función de Orlicz, es decir, una función continua, no decreciente y convexa definida sobre $[0, \infty)$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. La función complementaria de φ se define de la siguiente forma: $\varphi^*(t) = \int_0^t \sup\{x \geq 0 : p(x) \leq s\} ds$ donde p es la derivada por la derecha de φ. Se dice que φ satisface la condición Δ_2 en 0 (respectivamente ∞) si $\limsup_{t\to 0(\infty)} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$. Si φ satisface la condición Δ_2 en ∞ entonces $L^\varphi[0,1]$ es separable. Y si la satisface en 0 entonces lo es ℓ_φ.

Ahora la de los espacios de Lorentz clásicos:

$$L^{p,q}(\lambda) = \left\{ f \in L_0(\Omega, \lambda) : \|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

si $q < \infty$ y

$$L^{p,\infty}(\lambda) = \{ f \in L_0(\Omega, \lambda) : \|f\|_{p,\infty} = \sup\{t^{1/p} f^*(t) : t > 0\} < \infty \}.$$

Claramente se tiene que $L^{p,p}(\lambda) = L^p(\lambda)$.

Una propiedad importante dentro de los espacios de Köthe es la propiedad de Fatou:

Definición 1.14. Se dice que el espacio de Köthe E tiene la *propiedad de Fatou* si para toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $0 \leq f_n \uparrow f$ λ-casi todo punto entonces o $f \notin E$ y $\|f_n\|_E \uparrow \infty$ o $f \in E$ y $\|f_n\|_E \uparrow \|f\|_E$.

Observación 1.15. La propiedad de Fatou garantiza la completitud de un espacio de Köthe E.

Pasemos ya a ocuparnos de cuestiones de dualidad.

Definición 1.16. Sea E un espacio de Köthe. Se llama *espacio asociado* a E (o *dual de Köthe* de E) al espacio E' de clases de funciones medibles f sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$ tales que

$$\|f\|_{E'} = \sup\left\{\int_\Omega |fg|d\lambda : g \in E, \|g\|_E \leq 1\right\} < \infty.$$

La desigualdad de Hölder, análoga a la que se tiene en los espacios $L^p(\Omega)$, es la siguiente (ver [BS, Corolario 2.4.5]):

Proposición 1.17. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Si $f \in E$ y $g \in E'$ entonces*

$$\int_\Omega |fg|d\lambda \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt \leq \|f\|_E\|g\|_{E'}.$$

Observación 1.18. A cada $g \in E'$ se le puede asociar el operador lineal $T_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido mediante $T_g(f) = \int_\Omega fgd\lambda$. Se tiene que

$$|T_g(f)| \leq \int_\Omega |fg|d\lambda \leq \|f\|_E\|g\|_{E'}$$

para toda $f \in E$ con lo que $T_g \in E^*$ y $\|T_g\|_{E^*} \leq \|g\|_{E'}$ (de hecho $\|T_g\|_{E^*} = \|g\|_{E'}$). Por tanto, podemos considerar al dual de Köthe E' de E como un subespacio del dual topológico E^* de E.

Definición 1.19. Sea E un espacio de Köthe. Se dice que $f \in E$ tiene *norma σ-orden continua* si $\|f\chi_{A_n}\|_E \to 0$ para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\chi_{A_n} \to 0$ λ-casi todo punto. Denotaremos por E_0 a la parte σ-orden continua de E, es decir, al subconjunto de E formado por las funciones con norma σ-orden continua y diremos que E es *σ-orden continuo* si $E_0 = E$.

Observación 1.20. Es evidente que si E y F son espacios de Köthe tales que $E \hookrightarrow F$ entonces se tiene que $E_0 \hookrightarrow F_0$.

Teorema 1.21. *Sea E un espacio de Köthe. Se tiene que $E' = E^*$ si y solo si E es σ-orden continuo.*

Este resultado se puede consultar en [LT_2, página 29].

Teorema 1.22. *Si E es un espacio invariante por reordenamiento entonces E' también lo es, verificando además la propiedad de Fatou y que*

$$\|f\|_{E'} = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt : g \in E, \|g\|_E \leq 1\right\}$$

para toda $f \in E'$.

Un par de resultados importantes en dualidad son:

Proposición 1.23. *Si E es un espacio invariante por reordenamiento entonces*

$$\|f\|_E = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt : g \in E', \|g\|_{E'} \leq 1\right\}.$$

Proposición 1.24. *Si E y F son espacios de Köthe y $E \hookrightarrow F$ entonces $F' \hookrightarrow E'$. De hecho, si $\|f\|_F \leq C\|f\|_E$ para toda $f \in E$ entonces $\|g\|_{E'} \leq C\|g\|_{F'}$ para toda $g \in F'$.*

Pasemos a ocuparnos de un concepto importante en la teoría de espacios invariantes por reordenamiento: el de función fundamental.

Definición 1.25. Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Se define la *función fundamental* ϕ_E de E mediante

(i) $\phi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$ con $0 \leq t \leq 1$ si $\Omega = [0,1]$.

(ii) $\phi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$ con $t \geq 0$ si $\Omega = [0,\infty)$.

(iii) $\phi_E(0) = 0$ y $\phi_E(n) = \|\chi_{\{1,2,\ldots,n\}}\|_E$ con $n \in \mathbb{N}$ si $\Omega = \mathbb{N}$.

Por equimedibilidad se tiene que $\phi_E(t) = \|\chi_A\|_E$ para todo $A \in \Sigma$ con $\lambda(A) = t$ o $\lambda(A) = n$ respectivamente. Supondremos siempre que sea necesario que $\phi_E(1) = 1$.

Ejemplos 1.26. (i) $\phi_{L^\varphi}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}$.

(ii) $\phi_{L^{p,q}}(t) = t^{1/p}$.

Antes de las propiedades de las funciones fundamentales veamos un resultado básico que nos será de utilidad a lo largo de la memoria.

Proposición 1.27. *Sean f y g funciones medibles no negativas sobre $[0,\infty)$ y supongamos que $\int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t g(s)ds$ para todo $t>0$. Entonces*

$$\int_0^\infty (fh)(s)ds \leq \int_0^\infty (gh)(s)ds$$

para toda función h medible, no negativa y decreciente sobre $[0,\infty)$.

Demostración. Por el Teorema de la convergencia monótona, será suficiente hacer la prueba para una función simple h. Entonces podemos expresar h de la siguiente forma: $h=\sum_{n=1}^k a_n\chi_{[0,t_n)}$ con $a_n\geq 0$ para todo $1\leq n\leq k$ y $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$. Por tanto,

$$\int_0^\infty (fh)(s)ds = \sum_{n=1}^k a_n \int_0^{t_n} f(s)ds \leq \sum_{n=1}^k a_n \int_0^{t_n} g(s)ds = \int_0^\infty (gh)(s)ds.$$

□

Algunas propiedades de la función fundamental ϕ_E se recogen en la siguiente proposición. Recordemos antes la definición de función cuasi-cóncava:

Definición 1.28. Sea ϕ una función no negativa definida en $[0,\infty)$. Se dice que ϕ es *cuasi-cóncava* si es creciente, solo se anula en 0 y $\frac{\phi}{id}$ es decreciente.

Proposición 1.29. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Entonces:*

(i) $\phi_E\phi_{E'}=id$.

(ii) ϕ_E es cuasi-cóncava.

Demostración. (i) La desigualdad de Hölder nos da que $id\leq\phi_E\phi_{E'}$. Veamos la desigualdad contraria. Consideremos primero los casos $\Omega=[0,1],[0,\infty)$. Usando la Proposición 1.23 se tiene que

$$\phi_E(t)=\sup\left\{\int_0^t g^*(s)ds : g\in E', \|g\|_{E'}\leq 1\right\}.$$

Ahora, dada $g\in E'$ con $\|g\|_{E'}\leq 1$ consideramos $h=\frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)ds\chi_{[0,t]}$. Ya que

$$\int_0^s h^*(r)dr = \min\left(1,\frac{s}{t}\right)\int_0^t g^*(r)dr \leq \int_0^s g^*(r)dr$$

para todo $s\geq 0$, por la Proposición 1.27 se tiene que $\int_0^\infty h^*(t)f^*(t)dt\leq\int_0^\infty g^*(t)f^*(t)dt$ para toda $f\in E$ con $\|f\|_E\leq 1$ con lo que usando el Teorema 1.22 obtenemos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)ds\ \phi_{E'}(t)=\|h\|_{E'}\leq\|g\|_{E'}\leq 1.$$

Tomando supremos en g se tiene el resultado. El caso $\Omega = \mathbb{N}$ es análogo.

(ii) Es evidente que ϕ_E es creciente y que solo se anula en 0, y que $\frac{\phi_E}{id}$ es decreciente es trivial a partir de (i). $\square$

Si E y F son espacios invariantes por reordenamiento entonces también lo son $E \cap F$ y $E + F$ con las normas

$$\|x\|_{E\cap F} = \max(\|x\|_E, \|x\|_F)$$

y

$$\|x\|_{E+F} = \inf\{\|y\|_E + \|z\|_F : x = y + z, y \in E, z \in F\}$$

(ver [KPS, Lema II.4.5]), y se tiene que $\phi_{E\cap F} = \max(\phi_E, \phi_F)$ y $\phi_{E+F} = \min(\phi_E, \phi_F)$. Además, se tienen las relaciones de dualidad $(E \cap F)' = E' + F'$ y $(E + F)' = E' \cap F'$ (ver Lozanovskii [Lo]).

Un resultado básico sobre inclusiones que va a ser utilizado a lo largo de la memoria es el siguiente:

Teorema 1.30. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Entonces:*

(i) Si $\Omega = [0, 1]$ se tiene que $L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1$.

(ii) Si $\Omega = [0, \infty)$ se tiene que $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$.

(iii) Si $\Omega = \mathbb{N}$ se tiene que $\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell_\infty$.

Recordemos que otra expresión para la norma en $L^1 + L^\infty$ es $\|f\|_{L^1+L^\infty} = f^{**}(1) = \int_0^1 f^*(t)dt = \sup_{\lambda(E)=1} \int_E |f(t)|dt$ (ver [LT$_2$, Proposición 2.a.2]).

Pasemos ahora a definir espacios de Lorentz generales $\Lambda(\phi)$. Empecemos considerando los casos $\Omega = [0, 1]$ o $[0, \infty)$.

Definición 1.31. Sean $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función creciente, cóncava y nula solo en cero y $p \geq 1$. Se define el *espacio de Lorentz* $\Lambda^p(\phi)$ de la siguiente forma:

$$\Lambda^p(\phi) = \left\{ f \in L_0(\Omega, \lambda) : \|f\|_{\Lambda(\phi)} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p d\phi(t) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Nosotros estaremos interesados principalmente en el caso $p = 1$, es decir, en los espacios de Lorentz $\Lambda(\phi)$.

Observación 1.32. Otras expresiones de la norma de un espacio de Lorentz $\Lambda(\phi)$ son

$$\|f\|_{\Lambda(\phi)} = f^*(0)\phi(0+) + \int_0^\infty f^*(t)\phi'(t)dt$$

y

$$\|f\|_{\Lambda(\phi)} = \int_0^\infty \phi(\lambda_f(s))ds.$$

En el caso particular $\phi(t) = t^{1/p}$ con $1 \leq p < \infty$ obtenemos los espacios $L^{p,1}$.

Algunas propiedades de estos espacios son las siguientes:

(i) Se tiene la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que $\psi \leq C\phi$.

(ii) Si $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ entonces las funciones simples integrables son densas en $\Lambda(\phi)$ (ver [KPS, Corolario II.5.3]).

(iii) El espacio $\Lambda(\phi)$ es separable si y solo si $\lim_{t\to 0+} \phi(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ (ver [KPS, Lema II.5.1]).

Si $\Omega = \mathbb{N}$ tenemos la siguiente definición:

Definición 1.33. Sean $1 \leq p < \infty$ y $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ una sucesión decreciente de pesos con $\omega_1 = 1$. Se define el *espacio de Lorentz de sucesiones* $d(\omega, p)$ de la siguiente forma:

$$d(\omega, p) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \|x\|_{d(\omega,p)} = \left(\sum_{n=1}^\infty (x_n^*)^p \omega_n \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Se tiene que la función funadamental de los espacios $d(\omega, 1)$ es $\phi_{d(\omega,1)}(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Los espacios de Lorentz $d(\omega, 1)$ son separables y tienen base simétrica. El pedir $\omega_1 = 1$ es para normalizar los vectores de la base canónica.

Observación 1.34. Si $\omega \notin c_0$ entonces $d(\omega, 1) = \ell_1$ y si $\omega \in \ell_1$ entonces $d(\omega, 1) = \ell_\infty$, por lo que interesa considerar solo sucesiones de pesos $\omega \in c_0 \setminus \ell_1$.

En Lindenstrauss y Tzafriri [LT_1] se estudian varias propiedades de estos espacios. Por ejemplo, la Proposición 4.e.3 se enuncia de la siguiente forma:

Proposición 1.35. *Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de $d(\omega,p)$ con $p \geq 1$. Entonces toda base bloque normalizada $u_n = \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} a_i e_i$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ contiene para todo $\epsilon > 0$ una subsucesión $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que es $1+\epsilon$-equivalente a la base canónica de ℓ_p.*

También usaremos el Corolario 17 de Casazza y Lin [CL] que nos dice que todo subespacio infinito dimensional de $d(\omega,p)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p.

Es obvio por la definición que tanto los espacios de Lorentz $\Lambda(\phi)$ como los $d(\omega,p)$ son espacios invariantes por reordenamiento.

La definición de los espacios de Marcinkiewicz, que son los espacios duales de los espacios de Lorentz, es la siguiente:

Definición 1.36. Sea $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función creciente, cóncava y nula solo en cero. Se define el *espacio de Marcinkiewicz* $M(\phi)$ de la siguiente forma:

$$M(\phi) = \left\{ f \in L_0(\Omega,\lambda) : \|f\|_{M(\phi)} = \sup_{t>0} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\phi(t)} < \infty \right\}.$$

Análogamente al caso de espacios de Lorentz se tiene que $M(\phi) \hookrightarrow M(\psi)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que $\phi \leq C\psi$.

En el caso discreto $\Omega = \mathbb{N}$ tenemos la siguiente definición:

Definición 1.37. Sea $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ una sucesión decreciente con $\omega_1 = 1$. Se define el *espacio de Marcinkiewicz de sucesiones* $m(\omega)$ de la siguiente forma:

$$m(\omega) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \|x\|_{m(\omega)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^n x_k^*}{\sum_{k=1}^n \omega_k} < \infty \right\}.$$

Se tiene que la función funadamental de los espacios $m(\omega)$ es $\phi_{m(\omega)}(n) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \omega_k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.38. Si $\omega \notin c_0$ entonces $m(\omega) = \ell_\infty$ y si $\omega \in \ell_1$ entonces $m(\omega) = \ell_1$.

Tanto los espacios $M(\phi)$ como los $m(\omega)$ son espacios invariantes por reordenamiento no separables. Incluso podemos pedir que ϕ sea cuasi-cóncava en vez de cóncava y que $\left(\frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sea decreciente en vez de ω.

Definamos ahora los siguientes subespacios de los espacios de Marcinkiewicz:

Definición 1.39. (i) Si $\Omega = [0,1]$ se define

$$M_0(\phi) = \left\{ f \in M(\phi) : \lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\phi(t)} = 0 \right\}.$$

(ii) Si $\Omega = [0,\infty)$ se define

$$M_0(\phi) = \left\{ f \in M(\phi) : \lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\phi(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\phi(t)} = 0 \right\}.$$

(iii) Si $\Omega = \mathbb{N}$ se define

$$m_0(\omega) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in m(\omega) : \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k^*}{\sum_{k=1}^n \omega_k} = 0 \right\}.$$

Las propiedades de estos espacios se pueden ver en [KPS]. Por ejemplo, si $\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t} < \infty$ entonces $M_0(\phi) = \{0\}$.

Los espacios de Lorentz y de Marcinkiewicz se relacionan de la siguiente forma:

Proposición 1.40. *(i) Sea $\Omega = [0,1]$. Si $\lim_{t \to 0} \phi(t) = 0$ y $\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t} = \infty$ entonces $M_0(\phi)$ es un espacio invariante por reordenamiento, es la parte σ-orden continua de $M(\phi)$ y se tienen las siguientes relaciones de dualidad:*

$$(\Lambda(\phi))^* = M(\phi) \quad y \quad (M_0(\phi))^* = \Lambda(\phi).$$

Además, en general se cumple que

$$(\Lambda(\phi))' = M(\phi) \quad y \quad (M(\phi))' = \Lambda(\phi).$$

(ii) Si $\Omega = [0,\infty)$, $\lim_{t \to 0} \phi(t) = 0$ y $\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \phi(t) = \infty$ entonces $M_0(\phi)$ es un espacio invariante por reordenamiento, es la parte σ-orden continua de $M(\phi)$ y se tienen las mismas relaciones de dualidad que en el caso finito.

(iii) Si $\Omega = \mathbb{N}$ y $\omega \notin \ell_1$ entonces $m_0(\omega)$ es un espacio invariante por reordenamiento, es la parte σ-orden continua de $m(\omega)$ y se tienen las siguientes relaciones de dualidad:

$$(d(\omega,1))^* = m(\omega) \quad y \quad (m_0(\omega))^* = d(\omega,1).$$

Además, en general se cumple que

$$(d(\omega,1))' = m(\omega) \quad y \quad (m(\omega))' = d(\omega,1).$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en [BS], Garling [Ga_1], [Ga_2] y [KPS, Capítulo II.5].

Veamos ahora algunas relaciones entre las funciones cóncavas y las cuasi-cóncavas:

Proposición 1.41. *Toda función $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ creciente, cóncava y que solo se anula en 0 es cuasi-cóncava.*

Lema 1.42. *Si $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es cuasi-cóncava entonces existe una función $\overline{\phi} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ creciente, cóncava y nula solo en el cero tal que $\phi \leq \overline{\phi} \leq 2\phi$.*

Demostración. Ya que ϕ es cuasi-cóncava se tiene que

$$\phi(t) \leq \phi(1)\max(1,t) \leq \phi(1)(1+t).$$

Definimos la función ψ por

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi(1)(1+t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La función ψ es creciente, cóncava y nula solo en 0. Por tanto, $A_\phi = \{\psi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) : \psi$ creciente, cóncava, nula solo en 0 y $\phi \leq \psi\} \neq \emptyset$. Sea entonces

$$\overline{\phi} = \inf\{\psi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) : \psi \in A_\phi\}.$$

que es una función creciente, cóncava, nula solo en 0 y $\overline{\phi} \geq \phi$. Solo resta ver que $\overline{\phi} \leq 2\phi$. Sea $x > 0$ fijo, entonces $\phi(t) \leq (1 + \frac{t}{x})\phi(x)$ para todo $t \geq 0$. En efecto, si $t < x$ se tiene por ser ϕ creciente, y si $t > x$ entonces

$$\frac{\phi(t)}{t+x} \leq \frac{\phi(t)}{t} \leq \frac{\phi(x)}{x}.$$

Definimos ahora la función φ de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1+\frac{t}{x})\phi(x) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Ya que φ es creciente, cóncava, nula solo en 0 y $\varphi \geq \phi$, tenemos que $\overline{\phi} \leq \varphi$. Tomando $t = x$ se tiene que $\overline{\phi}(x) \leq 2\phi(x)$. $\square$

Utilizando el lema anterior y la Proposición 1.29.ii podemos renormar cualquier espacio invariante por reordenamiento E sobre $\Omega = [0,1]$ o $[0,\infty)$ tal que la nueva norma siga dotando a E de estructura de espacio invariante por reordenamiento y la nueva función fundamental asociada a E sea cóncava en Ω (ver [BS, Proposición 5.11]). La nueva norma se define de la siguiente forma: $\|f\| = \max(\|f\|_E, \|f\|_{M(\tilde{\phi_E})})$.

Enunciemos a continuación un Teorema de Semenov que usaremos a menudo (ver [KPS, Teorema 2.5.5 y 2.5.7] y [BS]):

Teorema 1.43 (Semenov). *(i) Sea E un espacio invariante por reordenamiento sobre $\Omega = [0,1]$ o $[0,\infty)$. Entonces*

$$\Lambda(\phi_E) \hookrightarrow E \hookrightarrow M(\tilde{\phi_E})$$

donde $\tilde{\phi_E} = \frac{id}{\phi_E}$ y las inclusiones son de norma 1.

(ii) Sea E un espacio invariante por reordenamiento sobre $\Omega = \mathbb{N}$ distinto de c_0. Entonces

$$d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E \hookrightarrow m(\tilde{\omega_E})$$

donde $\sum_{k=1}^n \omega_{Ek} = \phi_E(n)$ y

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_{Ek} = \frac{n}{\phi_E(n)} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \omega_{Ek}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y las inclusiones son de norma 1.

Observación 1.44. Tanto ω_E como $\tilde{\omega_E}$ son sucesiones decrecientes de pesos no negativos con $\omega_{E1} = \tilde{\omega}_{E1} = 1$.

Por tanto, fijada una función $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ creciente, cóncava y nula solo en 0, los espacios $\Lambda(\phi)$ y $M(\tilde{\phi})$ son respectivamente el menor y el mayor espacio invariante por reordenamiento con función fundamental ϕ.

Un ejemplo de aplicación de este resultado puede ser el hecho de que si E es un espacio invariante por reordenamiento sobre $[0,1]$ entonces $\lim_{t\to 0+} \phi_E(t) = 0$ si y solo si $E \neq L^\infty$. En efecto, si $\lim_{t\to 0+} \phi_E(t) = L > 0$ y $x \in E \hookrightarrow M(\tilde{\phi_E})$ entonces $\|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \geq L \sup_{t>0} f^*(t) = L\|x\|_\infty$ luego $x \in L^\infty$ y por tanto $E = L^\infty$. La otra parte es trivial.

Cualquier espacio invariante por reordenamiento E es un subespacio vectorial de E''. Además E contiene al subespacio vectorial engendrado por las funciones simples integrables. Con todo ello tenemos la siguiente definición:

Definición 1.45. Sea E un espacio invariante por reordenamiento.

(i) Se dice que E es *minimal* si coincide con el subespacio vectorial cerrado engendrado en E'' por las funciones simples integrables.

(ii) Se dice que E es *maximal* si $E = E''$.

Ejemplos 1.46. (i) Todo espacio invariante por reordenamiento separable es minimal.

(ii) Un espacio invariante por reordenamiento es maximal si y solo si tiene la propiedad de Fatou. También se tiene que un espacio invariante por reordenamiento separable es maximal si y solo si no tiene ningún subespacio isomorfo a c_0.

(iii) $L^\infty[0,1]$ es un espacio invariante por reordenamiento no separable maximal y minimal al mismo tiempo. El ser ambas cosas a la vez le sucede también a todo espacio invariante por reordenamiento reflexivo.

De ahora en adelante consideraremos siempre espacios invariantes por reordenamiento que sean minimales o maximales.

Introduzcamos a continuación la importante relación de Hardy-Littlewood-Polya:

Definición 1.47. Sean $f, g \in L^1[0,\infty) + L^\infty[0,\infty)$ o $L^1[0,1]$. Escribimos $f \prec g$ si $f^{**} \leq g^{**}$, es decir, si

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds$$

para todo $t > 0$. A la relación "$\prec$" se le llama *relación de Hardy-Littlewood-Polya.*

La norma en un espacio invariante por reordenamiento sobre $[0,1]$ o $[0,\infty)$ es monótona con respecto a la relación de Hardy-Littlewood-Polya:

Proposición 1.48. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Si $f \in E$ y $g \prec f$ entonces $g \in E$ y $\|g\|_E \leq \|f\|_E$.*

Con este resultado, que se puede consultar en [LT_2, Proposición 2.a.8], obtenemos el siguiente que será de mucha utilidad en la memoria:

Proposición 1.49. *Sean E un espacio invariante por reordenamiento sobre $\Omega = [0,1]$ o $[0,\infty)$ y ϕ una función definida en $[0,\infty)$ creciente, cóncava y nula solo en 0. Son equivalentes:*

(i) $M(\phi) \hookrightarrow E$.

(ii) $\phi' \in E$.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Esta implicación es inmediata ya que $\phi' \in M(\phi)$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sea $f \in M(\phi)$. Entonces

$$\int_0^t f^*(s)ds \le \|f\|_{M(\phi)}\ \phi(t) = \|f\|_{M(\phi)} \int_0^t \phi'(s)ds$$

para todo $t \in \Omega$, luego $f \prec \|f\|_{M(\phi)}\phi'$ con lo que, usando el resultado anterior, se tiene que $f \in E$. $\square$

Vamos ahora a enunciar el Teorema de interpolación de Calderon-Mitjagin:

Teorema 1.50 (Calderón-Mitjagin). *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y sea T un operador definido sobre $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ acotado de $L^1(\Omega)$ en si mismo y de $L^\infty(\Omega)$ en si mismo. Entonces T aplica E en E y está acotado con*

$$\|T\|_E \le \max(\|T\|_1, \|T\|_\infty).$$

La demostración de este resultado se puede consultar en [LT_2, Teorema 2.a.10].

Una consecuencia de este resultado es el hecho de que en un espacio invariante por reordenamiento E, el operador *proyección en media* asociado a una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definido por

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} x(s)ds}{\lambda(A_n)} \chi_{A_n}$$

con $x \in E$, es un operador acotado y contractivo de E en E.

Recordemos ahora los índices de Boyd asociados a un espacio invariante por reordenamiento.

Para cada $s > 0$ definimos el operador lineal *dilatación-compresión* D_s sobre $L_0(\Omega, \lambda)$ de la siguiente forma:

(i) Si $\Omega = [0, \infty)$ y $f \in L_0(\Omega, \lambda)$ entonces $(D_s f)(t) = f(t/s)$ con $t \ge 0$.

(ii) Si $\Omega = [0, 1]$ y $f \in L_0(\Omega, \lambda)$ entonces

$$(D_s f)(t) = \begin{cases} f(t/s) & \text{si } 0 \le t \le \min(1, s), \\ 0 & \text{si } s < t \le 1. \end{cases}$$

Claramente D_s es lineal y como consecuencia directa del Teorema de Calderón-Mitjagin resulta que D_s es un operador continuo de E en E y que $\|D_s\|_E \le \max(1, s)$.

Otras propiedades de los operadores D_s se recogen en el siguiente resultado:

Proposición 1.51. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento sobre $\Omega = [0,1]$ o $[0,\infty)$. Entonces:*

(i) $(D_s f)^* = D_s f^*$ para toda $f \in L_0(\Omega, \lambda)$ y todo $s > 0$.

(ii) $\|D_s\|_E$ puede calcularse para todo $s > 0$ considerando solo funciones decrecientes.

(iii) $D_r f \leq D_s f$ para toda $f \geq 0$ decreciente y todo $0 < r < s$.

(iv) $\|D_s\|_E$ es una función creciente en $s > 0$.

(v) $D_r \circ D_s = D_{rs}$ para todo $r, s > 0$ salvo cuando $\Omega = [0,1]$ y $r < 1 < s$ en cuyo caso $D_r D_s f = \chi_{[0,r]} D_{rs} f$. En cualquier caso se tiene que

$$\|D_{rs}\|_E \leq \|D_r\|_E \|D_s\|_E.$$

Definición 1.52. Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Los *índices de Boyd* p_E y q_E se definen de la siguiente forma:

$$p_E = \lim_{s\to\infty} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E} = \sup_{s>1} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E}$$

y

$$q_E = \lim_{s\to 0^+} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E} = \inf_{0<s<1} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E}.$$

Ejemplos 1.53. (i) Si $E = L^p(\lambda)$ con $1 \leq p \leq \infty$ entonces $p_E = q_E = p$.

(ii) Si E es un espacio de Lorentz $L^{p,q}(\lambda)$ entonces $p_E = q_E = p$.

(iii) Sea E un espacio de Orlicz $L^\varphi[0,1]$. Entonces

$$p_E = \sup\left\{p \geq 1 : \inf_{\lambda,t\geq 1} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(\lambda) t^p} > 0\right\}$$

y

$$q_E = \inf\left\{q \geq 1 : \sup_{\lambda,t\geq 1} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(\lambda) t^q} < \infty\right\}.$$

La demostración puede consultarse en [LT_2, Proposición 2.b.5]. En este caso de espacios de Orlicz L^φ los índices de Boyd coinciden con los de Matuszewska-Orlicz (ver Maligranda [M, Teorema 4.2]) los cuales se definen de la siguiente forma:

$$s_\varphi = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(\lambda)}}{\log t}$$

y

$$\sigma_\varphi = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(\lambda)}}{\log t}$$

. Resultados análogos se tienen para espacios de Orlicz de sucesiones ℓ_φ (ver [LT_2] y [M]).

Proposición 1.54. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Entonces:*

(i) $1 \leq p_E \leq q_E \leq \infty$.

(ii) $\frac{1}{p_E} + \frac{1}{q_{E'}} = 1$ *y* $\frac{1}{q_E} + \frac{1}{p_{E'}} = 1$.

Para una demostración ver [LT$_2$, Proposición 2.b.2].

Estos índices intervienen en el Teorema de Boyd de interpolación:

Teorema 1.55 (Boyd). *Sea $\Omega = [0,1]$ o $[0,\infty)$, $1 \leq p < q \leq \infty$ y $T : L^{p,1} + L^{q,1} \longrightarrow L_0(\Omega,\lambda)$ un operador lineal tal que $\|T(f)\|_{p,\infty} \leq C\|f\|_{p,1}$ y $\|T(f)\|_{q,\infty} \leq C\|f\|_{q,1}$ para alguna constante C (poniendo $\|\cdot\|_\infty$ en vez de $\|\cdot\|_{q,1}$ si $q = \infty$). Entonces para todo espacio invariante por reordenamiento E sobre Ω tal que $p < p_E$ y $q_E < q$ se tiene que T aplica E en si mismo de forma continua.*

Pasemos ahora a recordar algunas nociones de la teoría de interpolación de espacios de Banach.

Definición 1.56. Un par de espacios de Banach (X_1, X_2) se llama un *par compatible* si existe un espacio vectorial topológico Hausdorff X_0 tal que $X_1 \hookrightarrow X_0$ y $X_2 \hookrightarrow X_0$.

Definición 1.57. Sea (X_1, X_2) un par compatible. Se dice que un espacio de Banach X es un *espacio intermedio* entre X_1 y X_2 si

$$X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1 + X_2.$$

Definición 1.58. Sean (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) dos pares compatibles. Un operador lineal $T : X_1 + X_2 \longrightarrow Y_1 + Y_2$ se llama *admisible* con respecto a (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) si se tiene que $T : X_i \longrightarrow Y_i$ de forma continua para $i = 1, 2$.

Definición 1.59. Sean (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) dos pares compatibles. Sean X e Y espacios intermedios con respecto a X_1 y X_2 e Y_1 e Y_2 respectivamente. Se dice que el par (X, Y) es un *par de interpolación* respecto de (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) si cada operador admisible T aplica X en Y de forma continua.

Se dice que X es un *espacio de interpolación* respecto de (X_1, X_2) si (X, X) es un par de interpolación respecto de (X_1, X_2) y (X_1, X_2).

Definición 1.60. Se dice que una aplicación F de los pares compatibles de espacios de Banach en los espacios de Banach es un *método de interpolación* si se verifica:

(i) $F(X_1, X_2)$ es un espacio intermedio con respecto a (X_1, X_2).

(ii) $(F(X_1, X_2), F(Y_1, Y_2))$ es un par de interpolación respecto de (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2).

Se dice que F es *exacto* si $\|T\|_{F(X_1,X_2)\to F(Y_1,Y_2)} \leq \max_{i=1,2} \|T\|_{X_i \to Y_i}$ para todo operador admisible T.

Un ejemplo importante de método de interpolación es el *método de interpolación real*:

Definición 1.61. Sea (X_1, X_2) un par compatible. Se define el *K-funcional de Peetre* para cada $x \in X_1 + X_2$ y $t > 0$ como

$$K(x, t, X_1, X_2) = \inf\{\|x_1\|_{X_1} + t\|x_2\|_{X_2} : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}.$$

Es evidente que $\min(1, t)\|x\|_{X_1+X_2} \leq K(x, t, X_1, X_2) \leq \min(1, t)\|x\|_{X_1\cap X_2}$.

Definición 1.62. Sea (X_1, X_2) un par compatible y sean $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q < \infty$ o $0 \leq \theta \leq 1$ y $q = \infty$. El espacio de interpolación real $F(X_1, X_2) = (X_1, X_2)_{\theta,q}$ está formado por todos los vectores $x \in X_1 + X_2$ para los que es finito

$$\|x\|_{\theta,q} = \begin{cases} (\int_0^\infty (t^{-\theta} K(x, t, X_1, X_2))^q \frac{dt}{t})^{1/q} & \text{si } 0 < \theta < 1 \text{ y } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(x, t, X_1, X_2) & \text{si } 0 \leq \theta \leq 1 \text{ y } q = \infty. \end{cases}$$

Recordemos algunos ejemplos:

Ejemplos 1.63. (i) Sean $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$. Entonces

$$(L^{p_1}, L^{p_2})_{\theta,q} = L^{p,q}$$

(con normas equivalentes) si $p_1 < q \leq \infty$ y $1/p = (1 - \theta)/p_1 + \theta/p_2$ con $0 < \theta < 1$.

(ii) Sean $1 < p_1, p_2 \leq \infty$ y $1 \leq q_1, q_2, q \leq \infty$. Entonces

$$(L^{p_1,q_1}, L^{p_2,q_2})_{\theta,q} = L^{p,q}$$

si $p_1 \neq p_2$ y $1/p = (1 - \theta)/p_1 + \theta/p_2$ con $0 < \theta < 1$. La fórmula también es cierta si $p_1 = p_2 = p$ y $1/q = (1 - \theta)/q_1 + \theta/q_2$.

Es conocido el siguiente resultado de Calderón:

Teorema 1.64. *Los espacios de interpolación exactos entre L^1 y L^∞ son los espacios invariantes por reordenamiento.*

Recordemos ahora otros dos teoremas de interpolación que usaremos en la memoria. El primero, debido a Beauzamy, se puede consultar en [B, Proposición II.3.1] y el segundo en Bergh y Löfström [BL, Teorema 3.5.2.b].

Teorema 1.65. *Sean X_1 y X_2 espacios de Banach tales que $X_1 \hookrightarrow X_2$, $0 < \theta < 1$ y $1 < q < \infty$. Entonces $(X_1, X_2)_{\theta,q}$ es reflexivo si y solo si la inclusión $X_1 \hookrightarrow X_2$ es débilmente compacta.*

Teorema 1.66. *Sea (X_1, X_2) un par compatible, X un espacio de Banach intermedio y $0 < \theta < 1$. Entonces $(X_1, X_2)_{\theta,1} \hookrightarrow X$ si y solo si existe una constante C tal que $\|x\|_X \leq C\|x\|_{X_1}^{1-\theta}\|x\|_{X_2}^{\theta}$ para todo $x \in X_1 \cap X_2$.*

Capítulo 2

El caso finito: espacios de funciones invariantes por reordenamiento sobre $[0, 1]$

En este capítulo vamos a ocuparnos de los espacios de funciones invariantes por reordenamiento $E[0,1] \equiv E$ modelados sobre el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue λ.

En primer lugar recordemos las nociones de operador estrictamente singular y disjuntamente estrictamente singular.

Definición 2.1. Un operador lineal y continuo T entre dos espacios de Banach X e Y se dice que es *estrictamente singular* (o *Kato*) si no es un isomorfismo sobre ningún subespacio infinito dimensional de X.

Los operadores estrictamente singulares forman un ideal de operadores (ver [LT$_1$]) y todo operador compacto es estrictamente singular.

Definición 2.2. Un operador lineal y continuo T de un retículo de Banach X en un espacio de Banach Y se dice que es *disjuntamente estrictamente singular* si no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos tal que la restricción de T al subespacio cerrado engendrado por ellos sea un isomorfismo.

Esta noción fue introducida por F. Hernández y B. Rodríguez-Salinas en [HR$_1$]. Los operadores disjuntamente estrictamente singulares no forman un ideal de operadores si bien la suma de dos de ellos lo es y la composición por la izquierda de un operador disjuntamente estrictamente singular con un operador continuo es disjuntamente estrictamente singular. Pero la composición por la derecha falla en general, no si el operador continuo preserva disjuntos (ver [H_2]).

Es claro que todo operador estrictamente singular es disjuntamente estrictamente singular. El recíproco no es cierto en general: consideremos la inclusión canónica $L^q[0,1] \hookrightarrow L^p[0,1]$ con $1 \leq p < q < \infty$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^p[0,1]$ formada por funciones no nulas, con soportes disjuntos dos a dos y normalizadas, se tiene que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n\right\|_p^p = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n\right|^p d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \int_0^1 |f_n|^p d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$$

para toda $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Luego $\overline{[(f_n)_{n\in\mathbb{N}}]}$ es isométrico a ℓ_p y por tanto la inclusión $L^q[0,1] \hookrightarrow L^p[0,1]$ es disjuntamente estrictamente singular. Sin embargo, como consecuencia de la desigualdad de Khintchine, el subespacio cerrado engendrado en $L^p[0,1]$ por la sucesión de funciones de Rademacher es canónicamente isomorfo a ℓ_2, luego la inclusión $L^q[0,1] \hookrightarrow L^p[0,1]$ no es estrictamente singular.

Los conceptos de ser disjuntamente estrictamente singular y estrictamente singular coinciden si X tiene una base de Schauder de vectores con soportes disjuntos dos a dos (ver [H_2, Proposición 1]).

Dados un retículo de Banach X y $p > 1$, se define el retículo de Banach *p-convexificado* $X^{(p)} = \{f : f^p = |f|^p \text{sign } f \in X\}$ dotado de la norma $\|f\| = \||f|^p\|_X^{1/p}$. Es claro que si X es un espacio invariante por reordenamiento también lo es $X^{(p)}$. Estos espacios son estudiados en [LT_2]. Respecto a ellos se tiene el siguiente resultado básico:

Proposición 2.3. *Sean X e Y espacios invariantes por reordenamiento con $X \hookrightarrow Y$. Se tiene que la inclusión $X \hookrightarrow Y$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si lo es la inclusión $X^{(p)} \hookrightarrow Y^{(p)}$.*

Demostración. Si las normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ son equivalentes sobre el subespacio cerrado engendrado por la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos, las normas $\|\cdot\|_{X^{(p)}}$ y $\|\cdot\|_{Y^{(p)}}$ serán equivalentes sobre el subespacio cerrado engendrado por la sucesión con soportes disjuntos dos a dos $(x_n^{1/p})_{n\in\mathbb{N}}$.

Recíprocamente, si las normas $\|\cdot\|_{X^{(p)}}$ y $\|\cdot\|_{Y^{(p)}}$ son equivalentes sobre el subespacio cerrado engendrado por la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos, las normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ serán equivalentes sobre el subespacio cerrado engendrado por la sucesión con soportes disjuntos dos a dos $(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

La introducción del concepto de operador disjuntamente estrictamente singular está justificada por su aplicación al problema de encontrar proyecciones en retículos de Banach de funciones. Por ejemplo, en [HR$_1$] se obtiene que si para un retículo de Banach X existe un operador $T : X \longrightarrow L^p[0,1]$ con $p \geq 1$ que preserva disjuntos y que no es disjuntamente estrictamente singular, entonces X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p.

Pasemos ya a considerar espacios invariantes por reordenamiento construidos sobre $[0,1]$. Dos resultados importantes relativos a las inclusiones canónicas respecto a espacios extremos L^1 y L^∞ son los siguientes:

Teorema 2.4. *Si E es un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^∞ entonces la inclusión $L^\infty \hookrightarrow E$ es siempre estrictamente singular.*

Este resultado es debido a S.Ya. Novikov ([N$_1$]). El caso $E = L^p$ con $p \geq 1$ es un resultado clásico de Grothendieck (ver [R, Teorema 5.2]).

Teorema 2.5. *Si E es un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^1 entonces la inclusión $E \hookrightarrow L^1$ es siempre disjuntamente estrictamente singular.*

Una demostración de este resultado se tiene en [GHR]. Se puede ver también en [N$_3$].

Recordemos los resultados para inclusiones entre espacios de Lorentz y entre espacios de Marcinkiewicz dados por Astashkin en [A].

Teorema 2.6. *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ crecientes, cóncavas, nulas en 0 y verificando que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0, \tag{2.1}$$

y sea F un espacio invariante por reordenamiento con función fundamental ψ. Entonces $\Lambda(\phi) \hookrightarrow F$ siendo la inclusión disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. La condición 2.1 implica que $\psi(t) \leq C_1\phi(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, por el Teorema 1.43 se tiene que $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi) \hookrightarrow F$.

Supongamos que $\Lambda(\phi) \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces existe una constante $C_2 > 0$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Lambda(\phi)$ de funciones no nulas, con soportes disjuntos dos a dos y que podemos suponer no negativas tal que $\|x_n\|_{\Lambda(\phi)} \leq C_2\|x_n\|_F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por 2.1, para todo $0 < \epsilon < 1$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\psi(t) \leq \epsilon\phi(t) \tag{2.2}$$

para todo $t < t_0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(\text{sop } x_n) < t_0$ para todo $n \geq n_0$. Ya que las funciones simples integrables son densas en cualquier espacio de Lorentz sobre $[0,1]$ (ver [KPS, Corolario 3, página 110]), para cada $n \geq n_0$ existe una función

$$y_n = \sum_{k=1}^{j_n} a_k^n \chi_{E_k^n}$$

donde $a_k^n \geq 0$, $E_1^n \supset E_2^n \supset \cdots \supset E_{j_n}^n$, y $\lambda(E_1^n) < t_0$, para la que

$$\max(\|x_n - y_n\|_{\Lambda(\phi)}, \|x_n - y_n\|_{\Lambda(\psi)}) < \epsilon \min(\|x_n\|_{\Lambda(\phi)}, \|x_n\|_{\Lambda(\psi)}). \tag{2.3}$$

De ello obtenemos que $\|x_n\|_{\Lambda(\psi)} - \|y_n\|_{\Lambda(\psi)} \leq \epsilon \|x_n\|_{\Lambda(\psi)}$, y 2.2 implica que

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_F &\leq \|x_n\|_{\Lambda(\psi)} \\
&\leq \frac{1}{1-\epsilon}\|y_n\|_{\Lambda(\psi)} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon}\sum_{k=1}^{j_n} a_k^n \psi(\lambda(E_k^n)) \\
&\leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sum_{k=1}^{j_n} a_k^n \phi(\lambda(E_k^n)) \\
&= \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\|y_n\|_{\Lambda(\phi)} \\
&\leq \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\|x_n\|_{\Lambda(\phi)}.
\end{aligned}$$

La primera igualdad se tiene gracias a que $y_n^* = \sum_{k=1}^{j_n} a_k^n \chi_{(0,\lambda(E_k^n))}$. La última desigualdad es debida también a 2.3. Si tomamos ϵ tal que

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon(1+\epsilon)} > C_2$$

contradecimos que $\|x_n\|_{\Lambda(\phi)} \leq C_2 \|x_n\|_F$. □

Corolario 2.7. *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ crecientes, cóncavas y nulas en 0. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0.$

(ii) La inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular.

(iii) No existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Lambda(\phi)$ de funciones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tales que $\|x_n\|_{\Lambda(\phi)} \leq C\|x_n\|_{\Lambda(\psi)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Las implicaciones (i)⇒(ii) y (ii)⇒(iii) se siguen del teorema anterior y de la definición de operador disjuntamente estrictamente singular respectivamente.

Supongamos ahora que se tiene (iii) y no (i). Entonces

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} > 0.$$

Por tanto, existe una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ y una constante $C > 0$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1$ y $\phi(t_n) \leq C\psi(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las funciones $x_n = \chi_{E_n}$ con $E_n \subset [0,1]$, $\lambda(E_n) = t_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ contradicen (iii). □

Proposición 2.8. *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ crecientes, cóncavas y nulas en 0 y $p \geq 1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0.$

(ii) La inclusión $\Lambda^p(\phi) \hookrightarrow \Lambda^p(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. El resultado se tiene gracias al corolario anterior y a la Proposición 2.3 ya que $\Lambda(\phi)^{(p)} = \Lambda^p(\phi)$. □

Estudiemos ahora el caso de los espacios de Marcinkiewicz. Recordemos que por $\tilde{\psi}$ denotamos a la función $\frac{id}{\psi}$.

Teorema 2.9. *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ crecientes, cóncavas, nulas en 0 y verificando que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0,$$

y sea E un espacio invariante por reordenamiento con función fundamental ϕ. Entonces $E \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$ y dicha inclusión es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. La condición 2.1 implica que $\psi(t) \leq C_1\phi(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$, y por el Teorrema 1.43 tenemos que $E \hookrightarrow M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$.

Supongamos que $E \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$ no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E de funciones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C_2 > 0$ tales que $\|x_n\|_{M(\tilde{\psi})} = 1$ y

$$\|x_n\|_{M}(\tilde{\phi}) \leq C_2 \tag{2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in (0,1]$ tal que

$$\int_0^{t_n} x_n^*(s)ds \geq \frac{\tilde{\psi}(t_n)}{2}.$$

Debido a que las funciones x_n tienen soportes disjuntos dos a dos se puede asumir que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Como

$$\|x_n\|_{M(\tilde{\phi})} \geq \frac{\int_0^{t_n} x_n^*(s)ds}{\tilde{\phi}(t_n)} \geq \frac{\phi(t_n)}{2\psi(t_n)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene por 2.1 que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{M(\tilde{\phi})} = \infty$, lo cual contradice 2.4. □

Corolario 2.10. *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ crecientes, cóncavas, nulas en 0 y verificando que $\psi \leq C_1\phi$. Entonces son equivalentes:*

(i) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0.$

(ii) La inclusión $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\psi})$ es disjuntamente estrictamente singular.

(iii) No existen una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M(\tilde{\phi})$ de funciones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tales que $\|x_n\|_{M(\tilde{\phi})} \leq C\|x_n\|_{M(\tilde{\psi})}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Es similar a la del corolario anterior. □

Observación 2.11. El que la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow M(\psi)$ sea disjuntamente estrictamente singular es equivalente a que $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0$.

En el caso de espacios de Orlicz separables, cuando la inclusión es disjuntamente estrictamente singular está estudiado en [HR$_1$]:

Proposición 2.12. *Sean L^φ y L^ψ espacios de Orlicz tales que $L^\varphi \hookrightarrow L^\psi$. Son equivalentes:*

(i) La inclusión $L^\varphi \hookrightarrow L^\psi$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) Para cada constante $C > 0$ existen $x_1, \ldots, x_n \in [1,\infty)$ distintos y $a_1, \ldots, a_n \in (0,\infty)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi(tx_k) \leq C \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(tx_k)$$

para todo $t \geq 1$.

Observación 2.13. Cuando uno de los espacios extremos es un espacio L^p con $p \geq 1$ se tienen los siguientes criterios integrales dados en [H$_2$] y [HR$_1$] respectivamente:

(i) La inclusión $L^p \hookrightarrow L^\varphi$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{s\geq 1} \frac{1}{\log a} \int_1^a \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = 0.$$

(ii) La inclusión $L^\varphi \hookrightarrow L^p$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \inf_{s\geq 1} \frac{1}{\log a} \int_1^a \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = \infty.$$

Observación 2.14. Sean L^φ y L^ψ espacios de Orlicz tales que $L^\varphi \hookrightarrow L^\psi$. La condición

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_{L^\psi}(t)}{\phi_{L^\varphi}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{t})}}{\frac{1}{\varphi^{-1}(\frac{1}{t})}} = 0 \tag{2.5}$$

es una condición suficiente para que la inclusión $L^\varphi \hookrightarrow L^\psi$ sea disjuntamente estrictamente singular. En efecto, dicha condición implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 0$$

con lo que obtenemos la condición (ii) de la Proposición 2.12.

Sin embargo, la condición 2.5 no es necesaria. En Hernández y Rodríguez-Salinas [HR$_3$] se construye, dado $p \geq 1$, un espacio de Orlicz L^ψ tal que $L^p \hookrightarrow L^\psi$ siendo la inclusión disjuntamente estrictamente singular y

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\psi(t)}{t^p} > 0.$$

Esto es una diferencia con los espacios de Lorentz.

Nuestro primer resultado original caracteriza cuando la inclusión $E \hookrightarrow F$ es disjuntamente estrictamente singular entre cualquier par de espacios invariantes por reordenamiento con funciones fundamentales prefijadas.

Denotemos por Φ la clase de todas las funciones $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, crecientes, cóncavas, nulas en 0, continuas en 0 y con $\phi(1) = 1$ y $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t} = \infty$.

Teorema 2.15. *Sean $\phi, \psi \in \Phi$ con $\psi \leq \phi$. Son equivalentes:*

(i) Todo par de espacios invariantes por reordenamiento E y F con $\phi_E = \phi$ y $\phi_F = \psi$ verifica que $E \hookrightarrow F$.

(ii) Si E y F son espacios invariantes por reordenamiento con $\phi_E = \phi$, $\phi_F = \psi$ y $E \hookrightarrow F$, entonces la inclusión es disjuntamente estrictamente singular.

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t}{\phi(t)}\right)' \psi'(t)dt < \infty.$

Para demostrar este teorema necesitamos probar la siguiente proposición.

Proposición 2.16. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento y $\phi \in \Phi$. Si la función $\phi' \notin E$ entonces la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow M(\phi) + E$ no es disjuntamente estrictamente singular.*

Demostración. Se tiene que $\|\phi'\|_{M(\phi)+E} \leq \|\phi'\|_{M(\phi)} = 1$. Probemos primero que se cumple que

$$\lim_{u\to 0} \|\phi'\chi_{(u,s)}\|_{M(\phi)+E} = 1 \tag{2.6}$$

para todo $0 < s \leq 1$. En efecto, si $\lim_{u\to 0} \|\phi'\chi_{(u,s)}\|_{M(\phi)+E} = b < 1$ para cierto $0 < s \leq 1$ entonces, ya que $(M(\phi)+E)' = \Lambda(\phi)\cap E'$, tenemos que, dado $u \in (0,s)$, $\int_u^s \phi'(t)y(t)dt \leq b$ para todo $y \in \Lambda(\phi) \cap E'$ con $\|y\|_{\Lambda(\phi)} \leq 1$, $\|y\|_{E'} \leq 1$ e $y \geq 0$. Ahora, por el Lema de Fatou obtenemos que $\int_0^s \phi'(t)y(t)dt \leq b$ para cada función y verificando las condiciones anteriores. Por tanto, $\|\phi'\chi_{(0,s)}\|_{M(\phi)+E} \leq b$. Esto implica que existe una descomposición $\phi'\chi_{(0,s)} = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in M(\phi)$, $f_2 \in E$ y $\|f_1\|_{M(\phi)} + \|f_2\|_E \leq \frac{1+b}{2}$. Ya que $\int_0^\tau f_1(t)dt \leq \frac{1+b}{2}\phi(\tau)$ para todo $0 \leq \tau \leq 1$, tenemos que

$$\int_0^\tau f_2(t)dt \geq \phi(\tau) - \frac{1+b}{2}\phi(\tau) = \frac{1-b}{2}\phi(\tau)$$

para todo $\tau \in [0,s]$. Esto muestra que $\phi'\chi_{(0,s)} \prec \frac{2}{1-b}f_2$. Por ello $\phi'\chi_{(0,s)} \in E$ lo cual es una contradicción ya que $\phi'\chi_{[s,1]} \in E$ por ser ϕ' decreciente.

Ahora, usando 2.6, podemos encontrar una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ tal que $t_1 = 1$, $t_n \searrow 0$ y

$$\|\phi'\chi_{(t_{n+1},t_n)}\|_{M(\phi)+E} \geq \frac{1}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos $x_n = \phi'\chi_{(t_{n+1},t_n)} \in M(\phi)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|a\|_{c_0} &\leq \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{M(\phi)+E} \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{M(\phi)} \\
&\leq \|\phi'\|_{M(\phi)}\|a\|_{c_0} \\
&= \|a\|_{c_0}
\end{aligned}$$

para todo $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Por tanto, la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow M(\phi) + E$ no es disjuntamente estrictamente singular. □

Observación 2.17. Si la función $\phi' \in E$ entonces $M(\phi) \hookrightarrow E$ y la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow M(\phi) + E = E$ puede ser disjuntamente estrictamente singular. Por ejemplo, si se tiene que $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0$ entonces $\phi' \in M(\psi)$ y la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow M(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración del Teorema 2.15. (i)⇒(ii). Podemos asumir que la función $\tilde{\phi}$ es concava (ver Lema 1.42). Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $\phi_E = \phi$, $\phi_F = \psi$ y $E \hookrightarrow F$. Por hipótesis tenemos la inclusión $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$, luego la factorización

$$E \hookrightarrow M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi) \hookrightarrow F,$$

por lo que es suficiente probar que la inclusión $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^*(t)\psi'(t)dt \leq C\|x\|_{M(\tilde{\phi})}$$

para todo $x \in M(\tilde{\phi})$. Entonces $\sup_{\|x\|_{M(\tilde{\phi})}\leq 1} \int_0^1 x^*(t)\psi'(t)dt \leq C$. Ahora, como $(M(\tilde{\phi}))' = \Lambda(\tilde{\phi})$ (ver Proposición 1.40.i) tenemos que

$$\int_0^1 \tilde{\phi}'(t)\psi'(t)dt = \|\psi'\|_{\Lambda(\tilde{\phi})} \leq C.$$

Si $x \in M(\tilde{\phi})$ y $\|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq 1$ entonces $\int_0^s x^*(t)dt \leq \int_0^s \tilde{\phi}'(t)dt$ para todo $s \in [0,1]$ por lo que $x \prec \tilde{\phi}'$ y, por tanto, $\|x\|_{\Lambda(\psi)} \leq \|\tilde{\phi}'\|_{\Lambda(\psi)}$ (ver Proposición 1.48). Si además $\lambda(\text{sop } x) \leq \epsilon$ para un cierto $\epsilon > 0$ entonces $\|x\|_{\Lambda(\psi)} \leq \|\tilde{\phi}'\chi_{[0,\epsilon]}\|_{\Lambda(\psi)}$. Ahora por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \sup\{\|x\|_{\Lambda(\psi)} : \|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq 1, \lambda(\text{sop } x) \leq \epsilon\} = 0.$$

Esto muestra que la inclusión $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ es disjuntamente estrictamente singular ya que si tenemos una sucesión de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M(\tilde{\phi})$, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(\text{sop } x_{n_0}) \leq \epsilon$.

(ii)⇒(iii). Supongamos que $\int_0^1 \tilde{\phi}'(t)\psi'(t)dt = \infty$. Consideremos los espacios $E = M(\tilde{\phi})$ and $F = M(\tilde{\phi}) + \Lambda(\psi)$. Entonces tenemos que $\phi_E = \phi$, $\phi_F = \min(\phi,\psi) = \psi$ y $E \hookrightarrow F$. Sin embargo, usando la proposición anterior obtenemos que la inclusión $E \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular ya que $\tilde{\phi}' \notin \Lambda(\psi)$.

(iii)⇒(i). Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento con $\phi_E = \phi$ y $\phi_F = \psi$. Si $x \in M(\tilde{\phi})$ entonces $x \prec \|x\|_{M(\tilde{\phi})}\tilde{\phi}'$. Por hipótesis $\|x\|_{\Lambda(\psi)} \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi})}\|\tilde{\phi}'\|_{\Lambda(\psi)}$ y, por tanto, $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$, concluyéndose por el Teorema 1.43 que $E \hookrightarrow M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow \Lambda(\psi) \hookrightarrow F$. □

El teorema anterior da una condición suficiente para que la inclusión $E \hookrightarrow F$ sea disjuntamente estrictamente singular en el caso de que E y F sean espacios invariantes por reordenamiento con funciones fundamentales diferentes. Veamos ahora que ocurre con espacios invariantes por reordenamiento con la misma función fundamental.

Fijado un espacio de Orlicz L^φ, sea ϕ una función definida en $[0,1]$ creciente, cóncava y nula solo en el 0 equivalente a la función fundamental

$$\phi_{L^\varphi}(t) = \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

El Teorema 1.43 nos asegura las inclusiones $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$.

Teorema 2.18. *Sea L^φ un espacio de Orlicz y ϕ la función anterior equivalente a ϕ_{L^φ}. Entonces:*

(i) La inclusión $L^\varphi \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si $q_{L^\varphi} < \infty$.

(ii) La inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi$ es disjuntamente estrictamente singular si y solo si $p_{L^\varphi} > 1$.

Demostración. (i) Si $q_{L^\varphi} < \infty$ entonces la función φ satisface la condición Δ_2 en el ∞ (ver [M, Teoremas 3.2.b y 4.2]), luego L^φ es σ-orden continuo y no contiene ninguna copia isomorfa de c_0 (ver Chen [C, Teorema 1.90]). El resultado se sigue de la factorización $L^\varphi = L_0^\varphi \hookrightarrow M_0(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ ya que toda sucesión normalizada de vectores en $M_0(\tilde{\phi})$ con soportes disjuntos dos a dos contiene una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0 (ver Semenov [Se, página 175]).

Supongamos ahora que $q_{L^\varphi} = \infty$. Entonces la función φ no satisface la condición Δ_2 en el ∞, luego podemos encontrar una sucesión de conjuntos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que la sucesión

$$\left(\frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{L^\varphi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

en L^φ es equivalente a la base canónica de c_0 (ver [C, Lema 1.85]). Ya que $\left(\frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{L^\varphi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

es también una sucesión normalizada en $M(\tilde{\phi})$, se deduce que $L^\varphi \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ no es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) Al ser $\Lambda(\phi)$ σ-orden continuo realmente tenemos la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow H^\varphi$. Si $p_{L^\varphi} > 1$ entonces H^φ no contiene ninguna copia de ℓ_1. El resultado se sigue de que toda sucesión en $\Lambda(\phi)$ de vectores normalizados con soportes disjuntos dos a dos tiene una subsucesión equivalente a la base canónica de ℓ_1 siendo complementado el subespacio que genera (ver Figiel, Johnson y Tzafriri [FJT, Teorema 5.1]).

Supongamos ahora que $p_{L^\varphi} = 1$. Entonces la función φ^* no satisface la condición Δ_2 en el ∞, luego podemos encontrar una sucesión de conjuntos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que la sucesión

$$\left(\frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{L^\varphi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

en L^φ es equivalente a la base canónica de ℓ_1 (ver [C, Teorema 1.91]). Ya que $\left(\frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{L^\varphi}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada en $\Lambda(\phi)$, usando [FJT, Teorema 5.1], se deduce que $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi$ no es disjuntamente estrictamente singular. $\square$

Observación 2.19. Del resultado anterior se deduce en particular que ambas inclusiones $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi$ y $L^\varphi \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ son disjuntamente estrictamente singulares si y solo si el espacio de Orlicz L^φ es reflexivo, es decir, tanto φ como φ^* verifican la condición Δ_2 en el ∞.

Observación 2.20. Cada una de las inclusiones anteriores $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi$ y $L^\varphi \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ puede llegar a ser una igualdad:

Se tiene que $L^\varphi = M(\tilde{\phi})$ si y solo si $\tilde{\phi}' \in L^\varphi$, es decir, $\left(t\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)' \in L^\varphi$.

La demostración del "solo si" es trivial pues $\tilde{\phi}' \in M(\tilde{\phi})$ siempre. Ahora si $\tilde{\phi}' \in L^\varphi$ entonces $M(\tilde{\phi}) \hookrightarrow L^\varphi$.

Ejemplo: podemos tomar $\varphi(t) = e^t - 1$. Se tiene que $\tilde{\phi_{L^\varphi}}(t) = t\log(1+\frac{1}{t})$ luego $\tilde{\phi_{L^\varphi}}'(t) = \log(1+\frac{1}{t}) - \frac{1}{t+1}$ y

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{\tilde{\phi_{L^\varphi}}'(t)}{3}\right) dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t+1}}}} - 1\right) dt \le e^{-1/6} \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{2}{t}} dt - 1 = \frac{3\sqrt[3]{2}e^{-1/6}}{2} - 1 < 1.$$

Para la otra inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^\varphi$ se conoce el siguiente criterio dado por Lorentz (ver [L, Teorema 2]): se tiene que $\Lambda(\phi) = L^\varphi$ si y solo si existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\varphi^{*-1}(1)}^{\infty} \frac{\varphi^*(\delta t)}{\varphi^*(t)^2}\, d\varphi^*(t) < \infty.$$

Vamos ahora a factorizar inclusiones entre espacios invariantes por reordenamiento a través de inclusiones no disjuntamente estrictamente singulares.

Teorema 2.21. *Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $E \hookrightarrow F$ con $E \neq L^\infty$ y $F \neq L^1$. Entonces existe un espacio invariante por reordenamiento G tal que*

$$E \hookrightarrow G \hookrightarrow F$$

y ninguna de las inclusiones es disjuntamente estrictamente singular.

Para probar este teorema necesitamos dos resultados previos.

Dada una sucesión decreciente de escalares $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\tau_1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, denotaremos por $Q(\tau)$ al espacio de funciones que toman un valor constante sobre cada intervalo (τ_{n+1}, τ_n) con $n \in \mathbb{N}$. Definimos el operador *traslación a la derecha* T_τ sobre $Q(\tau)$ de la siguiente forma:

$$T_\tau\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\chi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\chi_{n+1}$$

donde $\chi_n = \chi_{(\tau_{n+1},\tau_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que la *proyección en media* P_τ asociada a τ (ver Capítulo 1) se define por

$$P_\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n - \tau_{n+1}} \left(\int_{\tau_{n+1}}^{\tau_n} x(s)ds\right)\chi_n.$$

Proposición 2.22. *Sean E un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^∞ y $0 < \epsilon < 1$. Existe una sucesión decreciente $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\tau_1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ tal que la imagen mediante el operador T_τ de $L^1 \cap Q(\tau)$ está en E y su norma*

$$\|T_\tau\|_{L^1\cap Q(\tau),E} \leq \epsilon.$$

Demostración. La inclusión canónica $\Lambda(\phi_E) \hookrightarrow E$ nos permite reducirnos a considerar el caso de espacios de Lorentz $E = \Lambda(\phi_E)$.

Veamos qué condiciones debemos pedirle a τ para obtener el resultado. Si $x \in L^1 \cap Q(\tau)$ con $x \geq 0$ y $\|x\|_1 \leq 1$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\chi_n$ con $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_n - \tau_{n+1}) \leq 1$. Supongamos que se cumple que $\tau_{n+1} \leq \epsilon\tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\tau_n \leq \frac{1}{1-\epsilon}.$$

Ahora, como

$$\|T_\tau(x)\|_{\Lambda(\phi_E)} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{n+1}\right\|_{\Lambda(\phi_E)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \phi_E(\tau_{n+1}),$$

la condición

$$\phi_E(\tau_{n+1}) \leq \epsilon(1-\epsilon)\tau_n \tag{2.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (la cual es posible imponer porque al ser $E \neq L^\infty$ se tiene que $\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = 0$ (ver Capítulo 1)) implica que

$$\|T_\tau(x)\|_{\Lambda(\phi_E)} \leq \epsilon.$$

Ya que la condición 2.7 implica que $\tau_{n+1} \leq \epsilon\tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ porque $\tilde{\phi_E}$ es creciente, la demostración está terminada. □

Fijado un espacio $Q(\tau)$ sea ahora $Q_1(\tau)$ el subespacio de $Q(\tau)$ formado por las funciones

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{(\tau_{2k+1}, \tau_{2k-1})}$$

y $Q_2(\tau)$ el formado por las funciones

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{(\tau_{2k}, \tau_{2k-2})}.$$

Proposición 2.23. *Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $E \neq L^\infty$ y $F \neq L^1$. Dado $0 < \epsilon < 1$ existe una sucesión decreciente $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\tau_1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ tal que*

$$\|xy\|_1 \leq \epsilon \|x\|_F \|y\|_{E'}$$

para todo $x \in F \cap Q_1(\tau)$ e $y \in E' \cap Q_2(\tau)$.

Demostración. Ya que $F \neq L^1$ tenemos que el espacio asociado $F' \neq L^\infty$. En efecto, si $F' = L^\infty$ entonces $F'' = L^1$ y tanto si F es maximal como si es minimal llegamos a que $F = L^1$ lo cual es una contradicción.

Por tanto, $E \cap F' \neq L^\infty$. Usando la proposición anterior, fijado $\epsilon > 0$ obtenemos una sucesión decreciente $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\tau_1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ tal que la imagen mediante el operador T_τ de $L^1 \cap Q(\tau)$ está en $E \cap F'$, siendo

$$\|T_\tau\|_{L^1 \cap Q(\tau), E} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\|T_\tau\|_{L^1\cap Q(\tau),F'} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Sean $x \in F \cap Q_1(\tau)$ e $y \in E' \cap Q_2(\tau)$ con $x, y \geq 0$, es decir,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{(\tau_{2k+1},\tau_{2k-1})} \quad \text{e} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{(\tau_{2k},\tau_{2k-2})}$$

con $x_k, y_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si consideramos los vectores

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{(\tau_{2k},\tau_{2k-1})}$$

y

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{(\tau_{2k-1},\tau_{2k-2})}$$

entonces

$$T_\tau(u) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{(\tau_{2k+1},\tau_{2k})}$$

y

$$T_\tau(v) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{(\tau_{2k},\tau_{2k-1})}.$$

Ya que se cumple que

$$xy = uT_\tau(v) + vT_\tau(u),$$

obtenemos, usando la desigualdad de Hölder, que

$$\begin{aligned}
\|xy\|_1 &\leq \|u\|_F \|T_\tau(v)\|_{F'} + \|v\|_{E'} \|T_\tau(u)\|_E \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|u\|_F \|v\|_1 + \frac{\epsilon}{2}\|v\|_{E'} \|u\|_1 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\|u\|_F \|v\|_{E'} + \frac{\epsilon}{2}\|v\|_{E'} \|u\|_F \\
&= \epsilon \; \|u\|_F \|v\|_{E'} \\
&\leq \epsilon \; \|x\|_F \|y\|_{E'}.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.21. Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $E \hookrightarrow F$, luego $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$ y cierta constante $C > 0$. Usando la proposición anterior obtenemos una sucesión $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\tau_1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ tal que

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_F \|y\|_{E'}$$

para todo $x \in F \cap Q_1(\tau)$ e $y \in E' \cap Q_2(\tau)$. Sea $V = B_{E'} \cap Q_2(\tau)$ donde $B_{E'}$ es la bola unidad cerrada de E'. Definimos el espacio

$$G = \left\{ x \in F : \|x\|_G = \sup_{y^* \in V \cup B_{F'}} \int_0^1 x^*(t)y(t)dt < \infty \right\}.$$

Es claro que G es un espacio invariante por reordenamiento al ser la intersección de dos de ellos. Ahora, dado $x \in E$, ya que

$$\sup_{y^* \in V} \int_0^1 x^*(t)y(t)dt \leq \|x\|_E$$

y

$$\sup_{y^* \in B_{F'}} \int_0^1 x^*(t)y(t)dt = \|x\|_F,$$

obtenemos que

$$\|x\|_G \leq \max(\|x\|_E, \|x\|_F) \leq \max(1, C)\|x\|_E.$$

Por tanto se tiene la factorización

$$E \hookrightarrow G \hookrightarrow F.$$

Veamos que ninguna de las inclusiones anteriores es disjuntamente estrictamente singular. Pasando a una subsucesión si fuera preciso, podemos suponer que $\tau_{n+1} \leq \frac{1}{2}\tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $x \in Q_i(\tau)$ con $i = 1, 2$ existe $z \in Q_i(\tau)$ tal que $|x| \leq z$, $z = z^*$ y $\lambda_z(s) \leq 2\lambda_x(s)$ para todo $s \geq 0$. En efecto, la función z definida por

$$z(t) = \min\{w(t) : w \geq |x|, w = w^*\}$$

verifica todo lo requerido (para la desigualdad de las funciones de distribución basta pensar en el primer $n \in \mathbb{N}$ para el que $|x(t)| > s$ si $t \in (\tau_{n+1}, \tau_n)$). Ahora, al tenerse que $x^*(t/2) \geq z^*(t)$ para todo $t > 0$ y ser $(D_2 x^*)(t) = x^*(t/2)$, obtenemos si $x \in E \cap Q_2(\tau)$ que

$$\|x\|_E \leq \|z\|_E \leq 2\|x\|_E$$

y

$$\|x\|_G \leq \|z\|_G \leq 2\|x\|_G$$

Además, como

$$\begin{aligned}
\|z\|_E &= \sup_{y=y^* \in B_{E'}} \int_0^1 z^*(t)y(t)dt \\
&= \sup_{y=y^* \in B_{E'}} \int_0^1 (P_{\tau'}(z^*))(t)y(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{y=y^*\in B_{E'}} \int_0^1 z^*(t)(P_{\tau'}(y))(t)dt \\ &= \sup_{y^*\in V} \int_0^1 z^*(t)y(t)dt \\ &\leq \|z\|_G \end{aligned}$$

donde $\tau' = (\tau_{2k-2})_{k\in\mathbb{N}}$, obtenemos que las normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_G$ son equivalentes sobre $E\cap Q_2(\tau)$. La última igualdad es consecuencia del hecho de que en espacios invariantes por reordenamiento el operador proyección en media asociado a una sucesión de subconjuntos disjuntos dos a dos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una proyección contractiva sobre $[(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}]$ (ver Capítulo 1).

Por otra parte, si $x \in G \cap Q_1(\tau)$ obtenemos del mismo modo que

$$\|x\|_G \leq \|z\|_G \leq 2\|x\|_G$$

y

$$\|x\|_F \leq \|z\|_F \leq 2\|x\|_F.$$

Ahora, usando la desigualdad procedente de la proposición anterior obtenemos de la definición de $\|\cdot\|_G$ que $\|z\|_G \leq \|z\|_F$. Luego $\|z\|_G = \|z\|_F$ y entonces las normas $\|\cdot\|_G$ y $\|\cdot\|_F$ son equivalentes sobre $G \cap Q_1(\tau)$. □

Corolario 2.24. *(i) Sea $E \neq L^\infty$ un espacio invariante por reordenamiento. Entonces $E = L^1$ si y solo si para todo espacio invariante por reordenamiento F tal que $F \hookrightarrow E$, la inclusión $F \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular.*

(ii) Sea $E \neq L^1$ un espacio invariante por reordenamiento. Entonces $E = L^\infty$ si y solo si para todo espacio invariante por reordenamiento F tal que $E \hookrightarrow F$, la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.

Demostración. (i) Si $E = L^1$ y $F \neq L^1$ la inclusión $F \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular (ver Teorema 2.5).

Recíprocamente, si E es distinto de L^1 consideramos la inclusión $L^\infty \neq \Lambda(\phi) \hookrightarrow E$ donde $\phi = \sqrt{\phi_E}$ que es continua en 0 pues $E \neq L^\infty$. Aplicando el teorema anterior obtenemos contradicción (de esta forma solventamos el problema que surge si $E = \Lambda(\phi_E)$).

(ii) Si $E = L^\infty$ y $F \neq L^\infty$ la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular (ver Teorema 2.4).

Recíprocamente, si E es distinto de L^∞ consideramos la inclusión $E \hookrightarrow M(\phi) \hookrightarrow L^1$ donde $\phi = \sqrt{\tilde{\phi_E}}$ ($M(\phi) \neq L^1$ ya que sus funciones fundamentales no son equivalentes). Aplicando el teorema anterior obtenemos contradicción (de esta forma solventamos el problema que surge si $E = M(\tilde{\phi_E})$). □

Los próximos resultados estiman el grado de proximidad entre dos espacios invariantes por reordenamiento E y F cuando se tiene la inclusión $E \hookrightarrow F$ y no es disjuntamente estrictamente singular.

Recordemos que una función ϕ creciente y positiva en $[0, \infty)$ se dice que tiene *variación regular* en 0 si existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(2t)}{\phi(t)} < \infty.$$

Proposición 2.25. *Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que sus funciones fundamentales tienen variación regular en 0 y $E \hookrightarrow F$. Si la inclusión $E \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular entonces existe $p > 1$ tal que*

$$\bigcup_{q>p} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<p} L^q$$

o se tiene una de las siguientes cadenas de inclusiones:

$$L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<\infty} L^q$$

o

$$\bigcup_{q>1} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow L^1.$$

Demostración. Denotemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi_E(2t)}{\phi_E(t)} = 2^\alpha$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi_F(2t)}{\phi_F(t)} = 2^\beta.$$

Ya que $\phi_E(2t) \leq 2\phi_E(t)$ para todo $t \geq 0$, se tiene que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Consideremos primero el caso $0 < \alpha, \beta < 1$. Se tiene que para todo $0 < \epsilon < \min(\alpha, 1-\alpha)$ existe una constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_\epsilon}\, t^{\alpha+\epsilon} \leq \phi_E(t) \leq C_\epsilon\, t^{\alpha-\epsilon} \tag{2.8}$$

para todo $t \in [0,1]$. En efecto, existe $t_0 \in (0,1]$ tal que

$$\frac{\phi_E(2t)}{2^{\alpha+\epsilon}} \leq \phi_E(t) \leq \frac{\phi_E(2t)}{2^{\alpha-\epsilon}}$$

para todo $t \in [0,t_0)$, luego si $t \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$, por recurrencia obtenemos que

$$\frac{\phi_E(2^n t)}{2^{n(\alpha+\epsilon)}} \leq \phi_E(t) \leq \frac{\phi_E(2^{n+1}t)}{2^{(n+1)(\alpha-\epsilon)}},$$

lo cual nos da 2.8. Ahora, usando 2.8 y el Teorema 1.43 obtenemos que

$$L^{\frac{1}{\alpha-\epsilon},1} \hookrightarrow \Lambda(\phi_E) \hookrightarrow E \hookrightarrow M(\tilde{\phi_E}) \hookrightarrow L^{\frac{1}{\alpha+\epsilon},\infty}.$$

Y como $L^r \hookrightarrow L^{q,1} \hookrightarrow L^{q,\infty} \hookrightarrow L^p$ para todo $1 \leq p < q < r \leq \infty$, se tiene que

$$L^{\frac{1}{\alpha-\epsilon'}} \hookrightarrow E \hookrightarrow L^{\frac{1}{\alpha+\epsilon'}}$$

para todo $0 < \epsilon' < \min(\alpha, 1-\alpha)$. Estas inclusiones muestran que $\alpha \leq \beta$. Si fuera $\alpha < \beta$, tomando $1/\beta < q < r < 1/\alpha$ obtendríamos la factorización $E \hookrightarrow L^r \hookrightarrow L^q \hookrightarrow F$ y la inclusión $E \hookrightarrow F$ sería entonces disjuntamente estrictamente singular. Por tanto $\alpha = \beta$. Tomando $p = 1/\alpha$ obtenemos

$$\bigcup_{q>p} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<p} L^q.$$

Si $\alpha = 1$, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $\phi_E(t) \leq C_\epsilon t^{1-\epsilon}$ para todo $t \in [0,1]$ lo cual nos da que $L^{\frac{1}{1-\epsilon'}} \hookrightarrow E$ para todo $0 < \epsilon' < 1$ y, por tanto,

$$\bigcup_{q>1} L^q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow L^1.$$

Si $\beta = 0$, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $\phi_F(t) \geq C_\epsilon t^\epsilon$ para todo $t \in [0,1]$ lo cual nos da que $F \hookrightarrow L^{\frac{1}{\epsilon'}}$ para todo $0 < \epsilon' < 1$ y, por tanto,

$$L^\infty \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q<\infty} L^q.$$

Si $0 = \alpha < \beta \leq 1$ y si $0 \leq \alpha < \beta = 1$ llegamos por factorización a través de espacios L^p a la misma contradicción que antes. $\square$

En el caso general se puede estimar la proximidad entre dos espacios invariantes por reordenamiento distintos E y F con inclusión $E \hookrightarrow F$ no disjuntamente estrictamente singular en términos de los *índices de inclusión* definidos de la siguiente forma:

$$\delta_E = \liminf_{t \to 0} \frac{\log t}{\log \phi_E(t)}$$

y

$$\gamma_E = \limsup_{t\to 0} \frac{\log t}{\log \phi_E(t)}.$$

Observación 2.26. En el caso de ser E un espacio de Orlicz L^φ los índices de inclusión de E se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\delta_{L^\varphi} = \liminf_{s\to\infty} \frac{\log \varphi(s)}{\log s}$$

y

$$\gamma_{L^\varphi} = \limsup_{s\to\infty} \frac{\log \varphi(s)}{\log s}.$$

En efecto,

$$\delta_{L^\varphi} = \liminf_{t\to 0} \frac{\log t}{\log \phi_{L^\varphi}(t)} = \liminf_{t\to 0} \frac{\log \frac{1}{t}}{\log \varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)} = \liminf_{s\to\infty} \frac{\log \varphi(s)}{\log s}.$$

Y análogamente con γ_{L^φ}.

Proposición 2.27. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Se tiene que*

$$\gamma_E = \inf\{p > 0 : L^p \hookrightarrow E\}$$

y

$$\delta_E = \sup\{p > 0 : E \hookrightarrow L^p\}.$$

Demostración. Si $q > \gamma_E$ entonces se sigue de la definición de γ_E que existe una constante $C > 0$ tal que $\phi_E(t) \le Ct^{1/q}$ para todo $t \in [0,1]$. Usando el Teorema 1.43 obtenemos que $L^{q,1} \hookrightarrow \Lambda(\phi_E) \hookrightarrow E$. Por tanto, para todo $p > \gamma_E$ se tiene que $L^p \hookrightarrow E$. Recíprocamente si $p > 0$ es tal que $L^p \hookrightarrow E$ entonces $\phi_E(t) \le Ct^{1/p}$ para alguna constante $C > 0$ y para todo $t \in [0,1]$, luego $p \ge \gamma_E$.

En cuanto a la otra igualdad, si $q < \delta_E$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que $\phi_E(t) \ge Ct^{1/q}$ para todo $t \in [0,1]$. Usando de nuevo el Teorema 1.43 obtenemos que $E \hookrightarrow M(\tilde{\phi_E}) \hookrightarrow L^{q,\infty}$. Por tanto, para todo $p < \delta_E$ se tiene que $E \hookrightarrow L^p$. Recíprocamente si $p > 0$ es tal que $E \hookrightarrow L^p$ entonces $\phi_E(t) \ge Ct^{1/p}$ para alguna constante $C > 0$ y para todo $t \in [0,1]$, luego $p \le \delta_E$. $\square$

La relación entre los índices de inclusión y los de Boyd viene dada en el siguiente resultado:

Proposición 2.28. *Dado un espacio invariante por reordenamiento E se tiene que:*

(i) $p_E \leq \delta_E \leq \gamma_E \leq q_E$.

(ii) $\frac{1}{\delta_E} + \frac{1}{\gamma_{E'}} = 1$ *y* $\frac{1}{\delta_{E'}} + \frac{1}{\gamma_E} = 1$.

Demostración. (i) Veamos la primera desigualdad:

$$p_E = \lim_{s\to\infty} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E} = \liminf_{t\to 0} \frac{-\log t}{\log \|D_{\frac{1}{t}}\|_E} \leq \liminf_{t\to 0} \frac{-\log t}{-\log \phi_E(t)} = \delta_E$$

donde la desigualdad se tiene gracias a que $1 = \|\chi_{[0,1]}\|_E = \|D_{\frac{1}{t}}\chi_{[0,t]}\|_E \leq \|D_{\frac{1}{t}}\|_E \phi_E(t)$.

La otra desigualdad se obtiene de la siguiente forma:

$$q_E = \lim_{s\to 0^+} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E} = \limsup_{s\to 0^+} \frac{\log s}{\log \|D_s\|_E} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{\log s}{\log \phi_E(s)} = \gamma_E$$

donde la desigualdad es debida a que $\phi_E(s) = \|D_s\chi_{[0,1]}\|_E \leq \|D_s\|_E$.

(ii) Es trivial a partir de la Proposición 1.29.i. La segunda igualdad también se puede obtener a partir de la primera ya que $\phi_{E''} = \phi_E$. □

Proposición 2.29. *Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento tales que $E \hookrightarrow F$. Si la inclusión $E \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular entonces $\delta_E \leq \gamma_F$.*

Demostración. Supongamos que $\delta_E > \gamma_F$, entonces si $\delta_E > p > q > \gamma_F$ utilizando la Proposición 2.27 obtenemos que $E \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^q \hookrightarrow F$ y la inclusión $E \hookrightarrow F$ sería disjuntamente estrictamente singular al serlo la inclusión $L^p \hookrightarrow L^q$. □

Observación 2.30. La inclusión $E \hookrightarrow F$ en el caso extremo $\delta_E = \gamma_F$ puede o no ser disjuntamente estrictamente singular.:

(i)Si $E = L^p$ y $F = L^\varphi$ para la función de Orlicz

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{\log(1+t)}$$

con $p > 1$ entonces $\delta_E = \gamma_F = p$ y la inclusión $E \hookrightarrow F$ es disjuntamente estrictamente singular ([H_2, página 39]).

(ii) Existe un espacio de Orlicz $E = L^\varphi$ y $F = L^p$ con índices de inclusión $\delta_E = \gamma_F = p$ tales que $E \hookrightarrow F$ y dicha inclusión no es disjuntamente estrictamente singular.

Dado $p > 1$ tomamos

$$\varphi(t) = t^p e^{qf(\log t)}$$

para todo $t > 1$, donde $0 < q < \frac{p-1}{3\pi}$ y $f(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ siendo

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 2^{2^{2n}} - 2^{n+2}, \\ \sum_{k=1}^{n}(1-\cos\frac{\pi t}{2^k}) & \text{si } 2^{2^{2n}} - 2^{n+2} \leq t \leq 2^{2^{2n}} \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver [HR$_1$, Teorema 3.5]).

Teorema 2.31. *Sean E y F espacios invariantes por reordenamiento. Entonces la inclusión $E \cap F \hookrightarrow E$ o la inclusión $E \cap F \hookrightarrow F$ no es disjuntamente estrictamente singular.*

Demostración. Supongamos que la inclusión $E \cap F \hookrightarrow F$ es disjuntamente estrictamente singular, es decir, $\|\cdot\|_F$ and $\|\cdot\|_{E\cap F}$ no son equivalentes sobre ningún subespacio $\overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}$ de $E\cap F$ generado por una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in E\cap F$ tal que $\|u_n\|_E = 1$ y $\|u_n\|_F \leq 1/n^2$. En efecto, si no es cierto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\|_F > 1/N^2$ para todo $x \in E\cap F$ con $\|x\|_E = 1$, luego $\|x\|_F > \frac{1}{N^2}\|x\|_E$ para todo $x \in E \cap F$ con lo que $\|\cdot\|_F$ and $\|\cdot\|_{E\cap F}$ son equivalentes lo cual es una contradicción.

Tomemos ahora los vectores

$$v_n = \frac{D_{\frac{1}{n}} u_n}{\left\| D_{\frac{1}{n}} u_n \right\|_E} \in E \cap F.$$

Ya que por las propiedades del operador dilatación-compresión se tiene que

$$1 = \left\| D_n D_{\frac{1}{n}} u_n \right\|_E \leq n \left\| D_{\frac{1}{n}} u_n \right\|_E$$

tenemos que $\|v_n\|_E = 1$ y $\|v_n\|_F \leq 1/n$. Sea $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $n_k > 2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y consideremos la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ traslación de $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que el soporte sop $x_k \subset (1/2^k, 1/2^{k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\|x_k\|_F < 1/2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $x \in \overline{[(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]}$ en $E\cap F$, es decir, $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Entonces

$$\|x\|_F \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|x_k\|_F \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|a_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \leq \|x\|_E,$$

por lo que $\|\cdot\|_{E\cap F}$ es equivalente a $\|\cdot\|_E$ sobre $\overline{[(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]}$ y la inclusión $E\cap F \hookrightarrow E$ no es disjuntamente estrictamente singular. □

Observación 2.32. El teorema anterior puede deducirse directamente a partir de resultados de teoría de interpolación de operadores disjuntamente estrictamente singulares y vale en general para retículos de Banach.

En efecto, si ambas inclusiones $E \cap F \hookrightarrow E$ y $E \cap F \hookrightarrow F$ fueran disjuntamente estrictamente singulares a la vez, usando [GHR, Teorema 3.3], también lo sería $E \cap F \hookrightarrow E \cap F$. Dicho teorema nos dice que dados un retículo de Banach X y un espacio de Banach intermedio Y entre Y_1 e Y_2, si los operadores $T : X \longrightarrow Y_1$ y $T : X \longrightarrow Y_2$ son disjuntamente estrictamente singulares entonces también lo es el operador $T : X \longrightarrow Y$ (Agradecemos al profesor F. Cobos su sugerencia).

Una cuestión por resolver es si se pueden dar resultados análogos con la suma de espacios invariantes por reordenamiento $E + F$, es decir, cuando la inclusión $E \hookrightarrow E + F$ o la inclusión $F \hookrightarrow E + F$ no es disjuntamente estrictamente singular en la línea de la Proposición 2.16.

Capítulo 3

El caso no acotado: espacios de funciones invariantes por reordenamiento sobre $[0, \infty)$

En este capítulo vamos a estudiar inclusiones disjuntamente estrictamente singulares entre espacios invariantes por reordenamiento E modelados sobre el intervalo no acotado $[0, \infty)$ con la medida de Lebesgue. En el caso de espacios de Orlicz se han dado en [GHR] caracterizaciones y criterios para que la inclusión $L^{\varphi} \hookrightarrow L^{\psi}$ sea disjuntamente estrictamente singular verificando las funciones φ y ψ la condición Δ_2 en 0 y en ∞. Al final del capítulo se dan criterios para espacios de Lorentz. Recordemos que se tienen las inclusiones canónicas $L^1 \cap L^{\infty} \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1 + L^{\infty}$ (ver Teorema 1.30). Vamos a comenzar caracterizando cuando la inclusión $L^1 \cap L^{\infty} \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular.

Estudiemos primero cuando fijada una función cóncava ϕ tal que $\phi(1) = 1$ la inclusión del espacio de Lorentz $\Lambda(\phi)$ en el espacio de Marcinkiewicz $M(\tilde{\phi})$ es débilmente compacta.

Proposición 3.1. *Son equivalentes:*

(i) La inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ es débilmente compacta.

(ii) Se verifican las condiciones

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \phi(t) = \infty \tag{3.1}$$

y

$$\lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{\phi(t)}{t} = 0. \tag{3.2}$$

Demostración. (i)⇒(ii). Si alguna de las condiciones de 3.1 o de 3.2 no se cumple veamos que entonces la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ no es débilmente compacta ya que no puede ser factorizada a través de ningún espacio reflexivo (de hecho, un operador es débilmente compacto si y solo si factoriza a través de un espacio reflexivo (ver [LT$_2$, Teorema 2.g.11])). En efecto, consideremos el subespacio U de $\Lambda(\phi)$ formado por las funciones de la forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{[n-1,n)}$. Si $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = L < \infty$ entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \int_0^1 x^*(t)dt \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq \|x\|_{\Lambda(\phi)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\phi(n) - \phi(n-1)) \leq L \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

luego U es isomorfo a ℓ_∞. Ahora, si $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = L' > 0$ se tiene que

$$L' \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq \|x\|_{\Lambda(\phi)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \frac{\phi(n)}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

para todo $x \in U$.

Consideremos ahora el subespacio V de $\Lambda(\phi)$ formado por las funciones x con $\text{sop}(x) \subset [0,1]$. Si $\lim_{t\to 0} \phi(t) = L > 0$ entonces

$$L\|x\|_\infty = L \sup_{t>0} x^*(t) \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq \|x\|_{\Lambda(\phi)} = \int_0^1 x^*(t) d\phi(t) \leq \|x\|_\infty.$$

Y si $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t} = L' < \infty$ entonces

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi})} \leq \|x\|_{\Lambda(\phi)} \leq L'\|x\|_1$$

para todo $x \in V$.

(ii)⇒(i). Si j denota al operador inclusión, por el Teorema 1.43 tenemos que $j : \Lambda(\phi) \hookrightarrow M_0(\tilde{\phi}) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$, luego el operador traspuesto j^* va de $(M_0(\tilde{\phi}))^* = \Lambda(\tilde{\phi})$ (ver Proposición 1.40.ii) a $(\Lambda(\phi))^*$ y, por tanto, el operador bitraspuesto j^{**} va de $(\Lambda(\phi))^{**}$ en $M(\tilde{\phi})$ y aplicando un teorema de Gantmacher (un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es débilmente compacto si y solo si $T^{**}(X^{**}) \subset Y$ (ver por ejemplo [PR, Teorema C.II.4.1])) obtenemos que j es débilmente compacto. □

Proposición 3.2. *Dada ϕ son equivalentes:*

(i) Existe un espacio invariante por reordenamiento E reflexivo con función fundamental $\phi_E = \phi$.

(ii) La función ϕ satisface las condiciones 3.1 y 3.2.

Demostración. (i)⇒(ii). Si existe un espacio invariante por reordenamiento E reflexivo con función fundamental $\phi_E = \phi$, la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ es débilmente compacta y el resultado anterior nos da (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Bajo las condiciones 3.1 y 3.2 tenemos por la proposición anterior que la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow M(\tilde{\phi})$ es débilmente compacta. Consideremos el espacio de interpolación real $E = (\Lambda(\phi), M(\tilde{\phi}))_{1/2,4}$. Usando el Teorema 1.65 deducimos que E es un espacio invariante por reordenamiento reflexivo con

$$\phi_E(s) = \left(\int_0^\infty \left(t^{-1/2}\min(1,t)\phi(s)\right)^4 \frac{dt}{t}\right)^{1/4} = \phi(s).$$

$\square$

Observación 3.3. Las Proposiciones 3.1 y 3.2 extienden resultados previos para espacios invariantes por reordenamiento sobre $[0,1]$ dados por Kuzin-Aleksinskii en [Ku, Teoremas 2 y 3].

Dado E espacio invariante por reordenamiento, son equivalentes que $\lim_{t\to 0}\phi_E(t) = 0$ y que $E \not\hookrightarrow L^\infty$. En efecto, si $E \hookrightarrow L^\infty$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que $\phi_E(t) \geq 1/C$ para todo $t > 0$. Y si $\lim_{t\to 0}\phi_E(t) = L > 0$ entonces

$$\|x\|_E \geq \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \geq L \sup_{t>0} x^*(t) = L\|x\|_\infty$$

luego $E \hookrightarrow L^\infty$.

Ya que la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^\infty$ no es estrictamente singular pues $\|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty}$ coincide con $\|\cdot\|_\infty$ en $[0,1]$ se tiene que si la inclusión $L^1\cap L^\infty \hookrightarrow E$ es estrictamente singular entonces $E \not\hookrightarrow L^\infty$.

También son equivalentes que $\lim_{t\to\infty}\frac{\phi_E(t)}{t} = 0$ y que $E \not\hookrightarrow L^1$. En efecto, si $E \hookrightarrow L^1$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que $\frac{\phi_E(t)}{t} \geq 1/C$ para todo $t > 0$. Y si $\lim_{t\to\infty}\frac{\phi_E(t)}{t} = L > 0$ entonces

$$\|x\|_E \geq \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \geq L \sup_{t>0} \int_0^t x^*(s)ds = L\|x\|_1$$

luego $E \hookrightarrow L^1$.

Ya que la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^1$ no es estrictamente singular pues $\|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty}$ coincide con $\|\cdot\|_1$ sobre $\overline{[(\chi_{[n-1,n)})_{n\in\mathbb{N}}]}$ se tiene que si la inclusión $L^1\cap L^\infty \hookrightarrow E$ es estrictamente singular entonces $E \not\hookrightarrow L^1$.

Por tanto, el que $\lim_{t\to 0}\phi_E(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\phi_E(t)}{t} = 0$ son condiciones necesarias para que la inclusión $L^1\cap L^\infty \hookrightarrow E$ sea estrictamente singular (disjuntamente estrictamente singular). Veamos que también son condiciones suficientes:

Teorema 3.4. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Son equivalentes:*

(i) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular.

(ii) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es estrictamente singular.

(iii) La inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es débilmente compacta.

(iv) $\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{\phi_E(t)}{t} = 0.$

En la demostración usaremos el siguiente lema de extensión.

Lema 3.5. *Si ϕ satisface que $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = 0$ entonces existe una función ψ que satisface las condiciones 3.1, 3.2 y*

$$\int_0^\infty \phi'(t)\psi'(t)dt < \infty.$$

Demostración. Consideremos primero la función ϕ_1 definida sobre $[0,1]$ de la siguiente forma

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \frac{t}{\sqrt{\phi(t)}} & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

La función ϕ_1 es cuasicóncava. Denotemos por ϕ_2 a la menor mayorante cóncava de ϕ_1 con lo que $\phi_1 \leq \phi_2 \leq 2\phi_1$ (ver Lema 1.42). Ahora, usando la Proposición 1.27, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi'(t)\phi_2'(t)dt &\leq 2\int_0^1 \phi'(t)\phi_1'(t)dt \\ &= 2\int_0^1 \phi'(t)\frac{\sqrt{\phi(t)} - \frac{t\phi'(t)}{2\sqrt{\phi(t)}}}{\phi(t)}dt \\ &\leq 2\int_0^1 \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\phi(t)}}dt \\ &= 4\sqrt{\phi(1)}. \end{aligned}$$

Pasemos ahora a definir la función requerida en $(1,\infty)$. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ donde $a_n = \phi(n+1) - \phi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Ya que ϕ es cóncava, $\frac{\phi(t)}{t}$ es decreciente y $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = 0$, tenemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ creciente tal que $\lim_{k\to\infty} n_k = \lim_{k\to\infty}(n_k - n_{k_1}) = \infty$ y

$$\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k - 1} a_n \leq a_0 = \phi(1) \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente y de términos positivos tal que

$$b_1 \leq \phi_2'(1), \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 1 \tag{3.5}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(n_k - n_{k-1}) = \infty. \tag{3.6}$$

Sea ahora la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $c_n = b_k$ si $n_{k-1} \leq n < n_k$, y tomemos una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ verificando que

$$\phi_2(1) = c_1 + d_1 \ \text{ y } \ nc_{n-1} + d_{n-1} = nc_n + d_n \tag{3.7}$$

para todo $n = 2, 3, \ldots$. Consideremos ahora la función ψ definida sobre $[0, \infty)$ mediante

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi_2(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ c_n t + d_n & \text{si } n < t \leq n+1 \text{ con } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La condición 3.7 nos da la continuidad de ψ, y el decrecimiento de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y 3.3 muestran que ψ' es una función positiva y decreciente, luego ψ es creciente y cóncava.

Veamos que ψ satisface las condiciones 3.1 y 3.2. En efecto, ya que $\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} \geq \lim_{t\to 0} \frac{\phi_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\phi(t)}} = \infty.$$

Como $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ se tiene también que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} c_n = 0.$$

Ya que la función $\frac{\phi(t)}{t}$ es decreciente,

$$\lim_{t\to 0} \psi(t) \leq 2 \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{\phi(t)}} = 2 \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{t}{\phi(t)}} \sqrt{t} \leq \frac{2}{\sqrt{\phi(1)}} \lim_{t\to 0} \sqrt{t} = 0.$$

Ahora, usando 3.6, obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \lim_{k\to\infty} \left(\phi_2(1) + \sum_{n=1}^{n_k} c_n \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\phi_2(1) + \sum_{j=1}^{k} b_j(n_j - n_{j-1}) \right) = \infty.$$

Finalmente, por 3.3 y 3.5 se tiene que

$$\int_1^\infty \phi'(t)\psi'(t)dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} c_n\phi'(t)dt = \sum_{n=1}^\infty c_n a_n = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} a_n \right) b_k \leq \sum_{k=1}^\infty a_0 b_k \leq a_0.$$

Por tanto concluimos que la función ψ construida verifica que

$$\int_0^\infty \phi'(t)\psi'(t)dt \leq 4\sqrt{\phi(1)} + a_0 < \infty.$$

$\square$

Demostración del Teorema 3.4. (i)$\Rightarrow$(iv). Supongamos que $\lim_{t\to 0}\phi_E(t) = L > 0$. Entonces

$$\|x\|_E \geq \lim_{t\to 0} \|x^*\chi_{[0,t]}\|_E \geq \lim_{t\to 0} x^*(t)\phi_E(t) = L\|x\|_\infty$$

para todo $x \in E$. Sea V es el subespacio de $L^1 \cap L^\infty$ formado por las funciones $x \in L^\infty$ con $\text{sop}(x) \subset [0,1]$, entonces $\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ para todo $x \in V$ y se tiene que

$$\|x\|_E \leq \|x\|_{L^1\cap L^\infty} = \|x\|_\infty \leq \frac{1}{L}\|x\|_E$$

para todo $x \in V$. Por tanto, las normas $\|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty}$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes sobre V y la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ no es disjuntamente estrictamente singular.

Supongamos ahora que $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi_E(t)}{t} = L' > 0$. Entonces $\phi_E(t) \geq L't$ para todo $t \geq 0$ por lo que $\tilde{\phi_E}(t) \leq \frac{1}{L'}$ para todo $t \geq 0$. Usando el Teorema 1.43 obtenemos que

$$\|x\|_E \geq \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \geq L'\|x\|_{L^1}$$

para todo $x \in E$. Ahora, si U es el subespacio de $L^1 \cap L^\infty$ formado por las funciones de la forma $x = \sum_{n=1}^\infty x_n\chi_{[n-1,n)}$ entonces

$$\|x\|_E \leq \|x\|_{L^1\cap L^\infty} = \sum_{n=1}^\infty |x_n| \leq \frac{1}{L'}\|x\|_E$$

para todo $x \in U$, por lo que las normas $\|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty}$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes sobre U y la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ no es disjuntamente estrictamente singular.

(iv)$\Rightarrow$(iii). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ϕ_E es cóncava (ver Lema 1.42). Por el lema anterior existe una función ψ que satisface 3.1, 3.2 y

$$\int_0^\infty \phi_E'(t)\psi'(t)dt < \infty.$$

De esto último deducimos la inclusión $M(\psi) \hookrightarrow \Lambda(\phi_E)$ usando la Proposición 1.49. Ahora, si denotamos por $\overline{\psi}$ a la función creciente, cóncava y nula solo en 0 equivalente a la función $\tilde{\psi} = \frac{id}{\psi}$, tenemos la inclusión canónica $\Lambda(\overline{\psi}) \hookrightarrow M(\psi)$. Por tanto, tenemos la siguiente factorización

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow \Lambda(\overline{\psi}) \hookrightarrow M(\psi) \hookrightarrow \Lambda(\phi_E) \hookrightarrow E.$$

Ahora por la Proposición 3.1 deducimos que la inclusión $\Lambda(\overline{\psi}) \hookrightarrow M(\psi)$ es débilmente compacta. Por tanto, también lo es la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Esta implicación es debida a que $L^1 \cap L^\infty$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis (ver Kalton [K$_2$] y Kamińska y Mastyło [KM]) ya que un operador débilmente compacto que parte de un espacio con la propiedad de Dunford-Pettis es estrictamente singular. Recordemos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis si $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$ para todo par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ débilmente convergentes a 0.

(ii)$\Rightarrow$(i). Esta implicación es trivial. □

Observación 3.6. En [CMMM] Cobos, Manzano, Martínez y Matos han dado también criterios para que la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ sea estrictamente singular usando métodos de interpolación.

Corolario 3.7. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Son equivalentes:*

(i) Existe un espacio invariante por reordenamiento F reflexivo tal que $F \hookrightarrow E$.

(ii) $\lim_{t\to 0} \phi_E(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{\phi_E(t)}{t} = 0.$

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Ya que podemos factorizar la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ a través de un espacio reflexivo, dicha inclusión es débilmente compacta y aplicando el teorema anterior obtenemos (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). La demostración de esta implicación es igual que la de (iv)$\Rightarrow$(iii) del teorema anterior considerando finalmente el espacio $F = (\Lambda(\overline{\psi}), M(\psi))_{\theta,p}$ con $0 < \theta < 1$ y $1 < p < \infty$ como en la Proposición 3.2. □

Corolario 3.8. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Son equivalentes:*

(i) Existe un espacio invariante por reordenamiento F reflexivo tal que $E \hookrightarrow F$.

(ii) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\phi_E(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \phi_E(t) = \infty.$

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Supongamos que existe un espacio invariante por reordenamiento F reflexivo, luego maximal, tal que $E \hookrightarrow F$. Entonces $F' \hookrightarrow E'$. Al ser F reflexivo, tanto F como F' son σ-orden continuos (ver [BS, Corolario 1.4.4]), luego $F' = F^*$ y, por tanto, F' también es reflexivo. Ya que $\phi_E(t)\phi_{E'}(t) = t$ para todo $t \geq 0$, el corolario anterior nos da (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Si ϕ_E verifica (ii), $\phi_{E'}$ verifica (ii) del corolario anterior. El mismo nos dice que existe un espacio invariante por reordenamiento F reflexivo tal que $F \hookrightarrow E'$. Por tanto, $E \hookrightarrow E'' \hookrightarrow F'$ y F' también es reflexivo. $\square$

Una vez caracterizados los espacios invariantes por reordenamiento E que cumplen que la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow E$ es disjuntamente estrictamente singular, vamos a estudiar cuando lo es la otra inclusión canónica extrema $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$. Comencemos dando condiciones necesarias:

Teorema 3.9. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Si la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular entonces:*

(i) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\phi_E(t) = \infty.$

(ii) Las funciones de la forma $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \notin E$ *para* $1 < p < \infty$.

Demostración. (i) Supongamos primero que $\lim_{t\to 0}\frac{\phi_E(t)}{t} = L < \infty$. Si consideramos la sucesión de funciones de soportes disjuntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n\chi_{(2^{-n},2^{-n+1}]})_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que las normas de E y de $L^1 + L^\infty$ son equivalentes sobre el subespacio cerrado engendrado por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, el cual es isomorfo a ℓ_1. En efecto, ya que $\|x_n\|_E = 2^n\phi_E(2^{-n}) \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty |a_n| &= \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_0^1 x_n(t)dt \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n(t)\right| dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right)^*(t)dt \\
&= \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_E
\end{aligned}$$

$$\leq \ L\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Si $\lim_{t\to\infty}\phi_E(t) = L' < \infty$, entonces las normas de E y de L^1+L^∞ son equivalentes sobre el subespacio engendrado por la sucesión $(\chi_{[n-1,n)})_{n\in\mathbb{N}}$, el cual es isomorfo a c_0. En efecto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{[n-1,n)}\right\|_{L^1+L^\infty} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{[n-1,n)}\right\|_{E} \leq L'\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(ii) Supongamos ahora que existe $1 < p < \infty$ tal que la función $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \in E$. Podemos considerar en E una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ de funciones con soportes disjuntos dos a dos tal que cada x_n y la función $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}$ son equimedibles para todo $n\in\mathbb{N}$. Para ello basta con ir intercalando adecuadamente los trozos $t^{-1/p}\chi_{(k-1,k]}$ con $k\in\mathbb{N}$. Entonces las funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n \quad \text{y} \quad \|a\|_p t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}$$

son equimedibles para toda sucesión $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ ya que

$$\lambda_{\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{a_nx_n}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{x_n}\left(\frac{s}{|a_n|}\right) = \frac{\|a\|_p^p}{s^p} = \lambda_{\|a\|_p t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}}(s)$$

para todo $s>0$. Por tanto,

$$\|a\|_p\ \|t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}\|_{L^1+L^\infty} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right\|_{L^1+L^\infty} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right\|_{E} = \|a\|_p\ \|t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)}\|_E,$$

luego las normas de E y de L^1+L^∞ son equivalentes sobre el subespacio engendrado por la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, el cual es isomorfo a ℓ_p. □

Corolario 3.10. *La inclusión* $L^{p,\infty} \hookrightarrow L^1+L^\infty$ *no es disjuntamente estrictamente singular para* $1<p<\infty$.

Demostración. Es consecuencia de que la función $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \in L^{p,\infty}$. □

Las condiciones necesarias dadas en el teorema anterior no son en general suficientes para que la inclusión $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ sea disjuntamente estrictamente singular como mostraremos en el primer corolario del siguiente resultado. Recordemos que un retículo de

Banach X satisface una *p-estimación superior (inferior)* con $p > 1$ si existe una constante C tal que para todos $(x_n)_{n=1}^k \subset X$ disjuntos dos a dos se tiene que

$$\left\|\sum_{n=1}^k x_n\right\| \le C\left(\sum_{n=1}^k \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

$$(\left\|\sum_{n=1}^k x_n\right\| \ge C^{-1}\left(\sum_{n=1}^k \|x_n\|^p\right)^{1/p}).$$

El espacio $L^{p,\infty}$ satisface una p-estimación superior (ver Carothers y Dilworth [CD$_1$, Lema 2.1.ii]).

Proposición 3.11. *Sean $L^{p,\infty}$ con $1 < p < \infty$, y una sucesión de funciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{p,\infty}$ con soportes disjuntos dos a dos tal que $\|x_n\|_{p,\infty} \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n < \infty$ y una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^s x_n^*(t)dt \ge Cs^{1-1/p} \tag{3.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [\epsilon_n, 1]$. Entonces existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K}\|a\|_p \le \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} \le \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{p,\infty} \le K\|a\|_p \tag{3.9}$$

para toda sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$.

Demostración. Usando que $\|x\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{\lambda(E)=1} \int_E |x(t)|dt$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty} &= \sup_{\lambda(E)=1} \int_E \left|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n(t)\right| dt \\
&= \sup_{\lambda(E)=1} \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_{E\cap \mathrm{sop}\ x_n} |x_n(t)|dt \\
&= \sup_{\sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n)=1} \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_{E_n} |x_n(t)|dt \\
&= \sup_{\substack{s_n \ge 0 \\ \sum_{n=1}^\infty s_n = 1}} \sup_{\lambda(E_n)=s_n} \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_{E_n} |x_n(t)|dt \\
&= \sup_{\substack{s_n \ge 0 \\ \sum_{n=1}^\infty s_n = 1}} \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_0^{s_n} x_n^*(t)dt.
\end{aligned}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$. Entonces, por 3.8, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{L^1+L^\infty} &\geq C \sup_{\substack{s_n \geq \epsilon_n \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n = 1}} \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| s_n^{1-1/p} \\
&\geq C \sup_{\substack{s_n \geq 0 \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n = 1/2}} \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| s_n^{1-1/p} \\
&= 2^{1/p-1} C \sup_{\substack{s_n \geq 0 \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n = 1}} \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| s_n^{1-1/p} \\
&= 2^{1/p-1} C \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Y ya que $\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \|_{L^1+L^\infty} \geq C \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ obtenemos la primera desigualdad de 3.9.

La segunda desigualdad de 3.9 es obvia, y como $L^{p,\infty}$ satisface una p-estimación superior, obtenemos la tercera desigualdad de 3.9. □

Corolario 3.12. *La inclusión* $L_0^{p,\infty} \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ *no es disjuntamente estrictamente singular para* $1 < p < \infty$.

Demostración. Dada una sucesión $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en la proposition anterior, consideremos una sucesión de funciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0^{p,\infty}$ con soportes disjuntos dos a dos tal que

$$
x_n^*(t) = \begin{cases} \epsilon_n^{-1/p} & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon_n, \\ t^{-1/p} & \text{si } \epsilon_n < t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}
$$

Entonces $\|x_n\|_{p,\infty} \leq 1$ y

$$
\int_0^s x_n^*(t)dt = \int_0^{\epsilon_n} \epsilon_n^{-1/p} dt + \int_{\epsilon_n}^s t^{-1/p} dt \geq s^{1-1/p}
$$

para todo $s \in [\epsilon_n, 1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$. El resultado se sigue ahora de la proposición anterior. □

Observación 3.13. Los espacios $L_0^{p,\infty}$ con $p > 1$ cumplen las condiciones del Teorema 3.9.

El corolario anterior permite también debilitar la condición necesaria (ii) dada en el Teorema 3.9:

Corolario 3.14. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Si la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t^{-1/p}\chi_{(1/n,n)}\|_E = \infty$$

para todo $1 < p < \infty$.

Demostración. Supongamos que existe $1 < p < \infty$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|t^{-1/p}\chi_{(1/n,n)}\|_E < \infty$. Entonces, como E'' tiene la propiedad de Fatou, se tiene que $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \in E''$ con lo que $L^{p,\infty} \hookrightarrow E''$ y por tanto la inclusión $E'' \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no puede ser disjuntamente estrictamente singular. Ahora, si E es maximal es clara la contradicción. En el caso minimal consideramos partes σ-orden continuas, con lo que se tiene $L_0^{p,\infty} \hookrightarrow (E'')_0 = E$ y como por el corolario anterior la inclusión $L_0^{p,\infty} \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular, tampoco puede serlo la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$. □

Pasemos ahora a dar condiciones suficientes para que la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ sea disjuntamente estrictamente singular. El primer resultado es para inclusiones que factorizan a través de un espacio L^p:

Proposición 3.15. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento. Si existe $1 < p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{\phi_E} \in L^p$$

entonces la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. Si $x \in M(\tilde{\phi_E})$ entonces

$$\int_0^t x^*(s)ds \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \frac{t}{\phi_E(t)} \leq \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)}ds$$

para todo $t \geq 0$ con lo que $x \prec \|x\|_{M(\tilde{\phi_E})} \frac{1}{\phi_E}$, luego por la Proposición 1.48 y la hipótesis se tiene que $x \in L^p$. Por tanto, se tiene la cadena de inclusiones

$$E \hookrightarrow M(\tilde{\phi_E}) \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^1 + L^\infty.$$

Como la última inclusión $L^p \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular (ver [GHR, Ejemplo 4.6]) se tiene que también lo es la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$. □

Para dar otra condición suficiente para que la inclusión $E \hookrightarrow L^1+L^\infty$ sea disjuntamente estrictamente singular que no sea tan restrictiva como la del resultado anterior, vamos a estudiar primero el caso en el que E es un espacio de Marcinkiewicz:

Dada la función ϕ supongamos que la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular, es decir, existe en $M(\phi)$ una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{M(\phi)} \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{L^1+L^\infty} \tag{3.10}$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Sean las funciones asociadas

$$\varphi_n(t) = \int_0^t x_n^*(s)ds$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que podemos si no considerar las funciones $\left(\frac{x_n}{\varphi_n(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

En el siguiente resultado usaremos los espacios modulares o de Musielak-Orlicz (ver Woo [Wo]) definidos de la siguiente forma:

Definición 3.16. Sea $M = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de Orlicz. El *espacio modular* (o *de Musielak-Orlicz*) de sucesiones ℓ_M es el espacio de Banach formado por todas las sucesiones $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{|x_n|}{k}\right) < \infty$ para algún $k > 0$ dotado de la norma

$$\|x\|_{\ell_M} = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(\frac{|x_n|}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

Lema 3.17. *Sea la función ϕ tal que la inclusión $M(\phi) \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces con la notación anterior existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que*

$$\varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{C\phi(k)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \geq n_k$, donde C es la constante de 3.10.

Demostración. Usando la desigualdad 3.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{M(\phi)} &= \sup_{t_n \geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{t_n} x_n^*(s)ds}{\phi(\sum_{n=1}^{\infty} t_n)} \\
&\leq C \sup_{\substack{t_n \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_0^{t_n} x_n^*(s)ds \\
&= C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_{L^1+L^\infty},
\end{aligned}$$

para toda sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, donde la primera igualdad se obtiene de forma análoga a como se obtuvo la última en la Proposición 3.11. Por tanto,

$$\sup_{t_n\geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\varphi_n(t_n)}{\phi(\sum_{n=1}^{\infty} t_n)} \leq C \sup_{\substack{t_n \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\varphi_n(t_n)$$

o

$$\sup_{s_n\geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|s_n}{\phi(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(s_n))} \leq C \sup_{\substack{s_n \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(s_n) = 1}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|s_n. \tag{3.11}$$

Ya que φ_n es cóncava para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que φ_n^{-1} es convexa para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, el conjunto

$$A = \left\{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(|t_n|) \leq 1\right\}$$

es convexo. Denotemos por ℓ_M el espacio modular (o de Musielak-Orlicz) de sucesiones generado por la sucesión de funciones $(\varphi_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces A es la bola unidad cerrada de ℓ_M. De 3.11 obtenemos que

$$\sup_{s_n\geq 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|s_n}{\phi(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(s_n))} \leq C\|a\|_{\ell'_M}.$$

Por tanto,

$$\sup_{\|a\|_{\ell'_M}\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{s_n}{\phi(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{-1}(s_k))} \leq C$$

para toda sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que ℓ_M tiene la propiedad de Fatou, es maximal, luego se tiene que

$$\left\|\left(\frac{s_n}{\phi(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{-1}(s_k))}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_M} \leq C$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{s_n}{C\phi(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{-1}(s_k))}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A$$

para toda sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}\left(\frac{s_n}{C\phi(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{-1}(s_k))}\right) \leq 1.$$

Ahora, dado $k \in \mathbb{N}$ y un conjunto $I \subset \mathbb{N}$ con cardinal $|I| = k$, consideramos la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in I, \\ 0 & \text{si } n \notin I. \end{cases}$$

Usando que $\varphi_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\sum_{n\in I} \varphi_n^{-1}\left(\frac{1}{C\phi(k)}\right) \leq 1,$$

con lo que

$$\left|\left\{n \in \mathbb{N} : \varphi_n^{-1}\left(\frac{1}{C\phi(k)}\right) > \frac{1}{k}\right\}\right| < k.$$

Por tanto, existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{C\phi(k)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \geq n_k$. □

Podemos ahora dar una condición suficiente para que la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ sea disjuntamente estrictamente singular. Recordemos que una función $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *submultiplicativa* si existe una constante $K > 0$ tal que

$$\phi(ts) \leq K\phi(t)\phi(s)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.18. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento distinto de L^1 y de L^∞. Si la función fundamental ϕ_E es submultiplicativa y $E \neq L^{p,\infty}$ y $E \neq L_0^{p,\infty}$ para todo $1 < p < \infty$ entonces la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular.*

Demostración. Supongamos que la inclusión $E \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E de funciones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_E \leq C \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty}$$

para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 1.43 se tiene entonces que

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{M(\tilde{\phi_E})} \leq C \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|_{L^1+L^\infty}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|x_n\|_{L^1+L^\infty} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\tilde{\phi_E}$ es cóncava. Veamos ahora usando el lema anterior y la concavidad de $\tilde{\phi_E}$ que se tiene para $\varphi_n(t) = \int_0^t x_n^*(s)ds$ que

$$\varphi_n(t) \geq \frac{1}{2C\tilde{\phi_E}\left(\frac{1}{t}\right)} \tag{3.12}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $t \in [1/k, 1]$ y $n \geq n_k$.

En efecto, supongamos que no, es decir, que

$$\varphi_n(t) < \frac{1}{2C\tilde{\phi_E}\left(\frac{1}{t}\right)}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$, un $t \in [1/k, 1]$ y un $n \geq n_k$. Ahora sea j natural tal que $t \in (1/2^j, 1/2^{j-1}]$. Si $1/k \leq 1/2^j$ entonces

$$\varphi_n(1/2^j) \leq \varphi_n(t) < \frac{1}{2C\tilde{\phi_E}(2^{j-1})} \leq \frac{1}{C\tilde{\phi_E}(2^j)}$$

lo cual contradice el lema anterior. Ahora en el otro caso, si $1/k \in (1/2^j, 1/2^{j-1}]$ se tiene que

$$\varphi_n(1/2^{j-1}) \leq 2\varphi_n(1/2^j) \leq 2\varphi_n(t) < \frac{1}{C\tilde{\phi_E}(2^{j-1})}$$

lo que contradice de nuevo el lema anterior. Se cumple pues 3.12.

Ahora de la submultiplicatividad de ϕ_E se deduce la supermultiplicatividad de $\tilde{\phi_E}$, es decir,

$$\tilde{\phi_E}(ts) \geq \frac{1}{K}\tilde{\phi_E}(t)\tilde{\phi_E}(s)$$

para todo $t, s \geq 0$, luego en particular $\tilde{\phi_E}(t)\tilde{\phi_E}(1/t) \leq K\tilde{\phi_E}(1)$ para todo $t > 0$ y usando 3.12 se cumple que

$$\varphi_n(t) \geq \frac{1}{2CK\tilde{\phi_E}(1)}\tilde{\phi_E}(t) \tag{3.13}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $t \in [1/k, 1]$ y $n \geq n_k$. Por tanto, dado $j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{|I|=j}\left\|\sum_{n\in I} x_n\right\|_E &\geq \sup_{|I|=j}\left\|\sum_{n\in I} x_n\right\|_{M(\tilde{\phi_E})} \\
&\geq \sup_{|I|=j}\ \sup_{0<t\leq j} \frac{\sum_{n\in I}\varphi_n\left(\frac{t}{j}\right)}{\tilde{\phi_E}(t)} \\
&= \sup_{0<t\leq j}\ \sup_{|I|=j} \frac{\sum_{n\in I}\varphi_n\left(\frac{t}{j}\right)}{\tilde{\phi_E}(t)} \\
&\geq \frac{1}{2CK\tilde{\phi_E}(1)}\ \sup_{0<t\leq j} \frac{j\tilde{\phi_E}\left(\frac{t}{j}\right)}{\tilde{\phi_E}(t)}.
\end{aligned}$$

Ahora como $\|x_n\|_{M(\tilde{\phi_E})} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\varphi_n(t) \leq C\tilde{\phi_E}(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$. Sea $I \subset \mathbb{N}$ con $|I| = j$, entonces

$$\left\|\sum_{n\in I} x_n\right\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{\sum_{n\in I} t_n = 1}\ \sum_{n\in I}\varphi_n(t_n)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\sum_{n\in I} t_n=1} \sum_{n\in I} C\tilde{\phi_E}(t_n) \\
&= Cj \sup_{\sum_{n\in I} t_n=1} \sum_{n\in I} \frac{1}{j}\tilde{\phi_E}(t_n) \\
&\leq Cj\tilde{\phi_E}\left(\frac{1}{j}\right).
\end{aligned}
$$

Comparando ahora las dos últimas desigualdades se obtiene que

$$\frac{1}{2CK\tilde{\phi_E}(1)} \sup_{0<t\leq j} \frac{\tilde{\phi_E}\left(\frac{t}{j}\right)}{\tilde{\phi_E}(t)} \leq C^2\tilde{\phi_E}\left(\frac{1}{j}\right)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, con lo que

$$\tilde{\phi_E}(ts) \leq C_1\tilde{\phi_E}(t)\tilde{\phi_E}(s)$$

para todo $t, s \geq 0$ tales que $ts \leq 1$ donde $C_1 = 2KC^3\tilde{\phi_E}(1)$. Por tanto,

$$\frac{1}{K}\tilde{\phi_E}(t)\tilde{\phi_E}(s) \leq \tilde{\phi_E}(ts) \leq C_1\tilde{\phi_E}(t)\tilde{\phi_E}(s)$$

para todo $0 \leq t, s \leq 1$. Ahora como las únicas funciones que son submultiplicativas y supermultiplicativas son las equivalentes a potencias, se tiene que existe $C_2 > 1$ y $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{C_2}t^\alpha \leq \tilde{\phi_E}(t) \leq C_2t^\alpha$$

para todo $t \in [0,1]$. Además si $t > 1$ y $0 < s \leq 1/t$ entonces

$$\frac{\tilde{\phi_E}(ts)}{C_1\tilde{\phi_E}(s)} \leq \tilde{\phi_E}(t) \leq K\frac{\tilde{\phi_E}(ts)}{\tilde{\phi_E}(s)}$$

con lo que

$$\frac{1}{C_1C_2^2}\ t^\alpha \leq \tilde{\phi_E}(t) \leq KC_2^2t^\alpha$$

para todo $t \geq 0$.

Si $\alpha = 0$ entonces $E = L^1$ ya que en este caso $\Lambda(\phi_E) = M(\tilde{\phi_E}) = L^1$ pues ϕ_E es equivalente a la función identidad, y si $\alpha = 1$ entonces $E = L^\infty$ porque en este otro caso $\Lambda(\phi_E) = M(\tilde{\phi_E}) = L^\infty$ ya que $\lim_{t\to 0+}\phi_E(t) > 0$. Como ambos casos están excluidos por hipótesis, se tiene que $0 < \alpha < 1$, luego existen $1 < p < \infty$ y $C_3 > 1$ tal que

$$\frac{1}{C_3}t^{1/p} \leq \phi_E(t) \leq C_3t^{1/p}$$

para todo $t \geq 0$. La desigualdad de la izquierda y el Teorema 1.43 nos dan la inclusión $E \hookrightarrow L^{p,\infty}$.

Estudiemos ahora la inclusión recíproca probando que $L^{p,\infty} \hookrightarrow E''$. Por 3.13 existe una constante $C_4 > 0$ y una sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_{k_n}(t) \geq C_4 t^{1-\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [1/2^n, 1]$. De esto obtenemos que

$$x = C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)\min(t^{-1/p}, 2^{n/p})\chi_{[0,1]} \prec x_{k_n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $t \geq 1/2^n$ es trivial que $\int_0^t x^*(s)ds \leq \int_0^t x^*_{k_n}(s)ds$ y si $0 \leq t < 1/2^n$ se tiene que

$$\frac{\varphi_{k_n}(t)}{t} \geq \frac{\varphi_{k_n}(2^{-n})}{2^{-n}} \geq C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)2^{n/p}.$$

Ya que las funciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen soportes disjuntos dos a dos, para todo $\epsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $I \subset \mathbb{N}$ con $|I| = j$ tal que

$$C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{j}(t-i+1)^{-1/p}\chi_{[i-1+\epsilon,i]}(t) \prec \sum_{i\in I} x_i.$$

Por tanto, usando las Proposiciones 3.11 y 1.48 obtenemos que

$$C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left\|\sum_{i=1}^{j}(t-i+1)^{-1/p}\chi_{[i-1+\epsilon,i]}\right\|_E \leq \left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|_E \leq C_5 j^{1/p}$$

para alguna constante $C_5 > 0$ que no depende de ϵ. Ya que E'' tiene la propiedad de Fatou, haciendo tender ϵ a 0 se tiene que

$$C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left\|\sum_{i=1}^{j}(t-i+1)^{-1/p}\chi_{(i-1,i]}\right\|_{E''} \leq C_5 j^{1/p}.$$

Ahora como las funciones

$$j^{-1/p}\sum_{i=1}^{j}(t-i+1)^{-1/p}\chi_{(i-1,i]}$$

y

$$t^{-1/p}\chi_{(0,j]}$$

son equimedibles, deducimos que

$$\|t^{-1/p}\chi_{(0,j]}\|_{E''} \leq C_5\left[C_4\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]^{-1}.$$

Usando de nuevo la propiedad de Fatou obtenemos que $t^{-1/p}\chi_{(0,\infty)} \in E''$, luego $L^{p,\infty} \hookrightarrow E''$ con lo que $E'' = L^{p,\infty}$.

Finalmente concluimos que si E es maximal entonces $E = L^{p,\infty}$, y si es minimal entonces $E = (E'')_0 = L_0^{p,\infty}$. □

Ejemplos 3.19. (i) La inclusión $E = L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty} \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular para todo $1 < p < q < \infty$ (a pesar de que cada inclusión $L^{p,\infty} \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no lo es).

En efecto, tenemos que

$$\phi_E(t) = \begin{cases} t^{1/q} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{1/p} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

que es una función submultiplicativa al ser máximo de dos submultiplicativas. Como $E \neq L^1, L^\infty, L^{r,\infty}, L_0^{r,\infty}$ para todo $1 < r < \infty$, se sigue el resultado del teorema anterior.

(ii) Si φ es una función de Orlicz submultiplicativa entonces la inclusión $L^\varphi \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ es disjuntamente estrictamente singular excepto cuando $L^\varphi = L^1$.

Observación 3.20. La submultiplicatividad de ϕ_E es esencial en el teorema anterior: La inclusión $E = L^p + L^q \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular para ningún $1 \leq p < q \leq \infty$ (ver [GHR, Ejemplo 3.5]), $E \neq L^1, L^\infty, L^{r,\infty}, L_0^{r,\infty}$ para todo $1 < r < \infty$ y la función ϕ_E no es submultiplicativa pues

$$\phi_E(t) = \begin{cases} t^{1/p} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{1/q} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Pasemos a aplicar el resultado anterior al estudio de cuando inclusiones $E \hookrightarrow F$ son disjuntamente estrictamente singulares usando algunos resultados de interpolación.

Una aplicación $\rho : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ creciente de 0 a ∞ tal que $\frac{\rho}{id}$ decrece de ∞ a 0 se dice que es una *función parámetro* si para todo $\lambda > 0$ se tiene que

$$s_\rho(\lambda) = \sup_{x>0} \frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)}$$

es finito y

$$\lim_{\lambda \to 0} s_\rho(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{s_\rho(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

Un método de interpolación F se dice que es de *género* s_ρ si dados (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) pares compatibles y T un operador admisible se tiene que

$$\|T\|_{F(X_1,X_2)\to F(Y_1,Y_2)} \leq C\|T\|_{X_1\to Y_1} s_\rho\left(\frac{\|T\|_{X_2\to Y_2}}{\|T\|_{X_1\to Y_1}}\right)$$

donde C es una constante independiente de T.

Por ejemplo, los métodos de interpolación real y complejo son de género s_ρ.

Teorema 3.21. *Sean (X, X) e (Y_1, Y_2) pares compatibles y T un operador admisible. Si F es un método de interpolación de género s_ρ y $T : X \longrightarrow Y_1$ es disjuntamente estrictamente singular entonces $T : X \longrightarrow F(Y_1, Y_2)$ también es disjuntamente estrictamente singular.*

Este resultado se puede ver en [GHR, Teorema 3.4].

Considerando espacios de interpolación obtenidos por métodos de interpolación de género s_ρ obtenemos el siguiente corolario del Teorema 3.18:

Corolario 3.22. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento con función fundamental submultiplicativa y $E \neq L^1, L^\infty, L^{p,\infty}, L_0^{p,\infty}$ para todo $1 < p < \infty$. Si F es un espacio de interpolación entre E y $L^1 + L^\infty$ obtenido por un método de interpolación de género s_ρ, entonces la inclusión $E \hookrightarrow F$ es disjuntamente estrictamente singular.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 3.18 y del anterior. □

Corolario 3.23. *Sea E un espacio invariante por reordenamiento con función fundamental submultiplicativa y $E \neq L^1, L^\infty, L^{p,\infty}, L_0^{p,\infty}$ para todo $1 < p < \infty$. Si F es un espacio de Banach intermedio entre E y $L^1 + L^\infty$ tal que*

$$\|x\|_F \leq C\|x\|_E^\theta \|x\|_{L^1+L^\infty}^{1-\theta} \tag{3.14}$$

para algún $0 < \theta < 1$, algún $C > 0$ y para todo $x \in E$, entonces la inclusión $E \hookrightarrow F$ es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. Este corolario se obtiene del anterior y del Teorema 1.66. □

Finalmente, como aplicación del Teorema 3.18 demos condiciones para que una inclusión entre dos espacios de Lorentz $\Lambda(\phi)$ sea disjuntamente estrictamente singular. Para los espacios de Lorentz clásicos $L^{p,q}$ tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.24. *Sean $1 < p < \infty$ y $1 \leq q < q' \leq \infty$. Entonces la inclusión $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,q'}$ es disjuntamente estrictamente singular.*

Demostración. Este resultado se obtiene fácilmente del hecho siguiente: Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada de funciones de $L^{p,q}$ con soportes disjuntos dos a dos, el subespacio cerrado engendrado por ella contiene una copia isomorfa de ℓ_q la cual está engendrada por una sucesión de funciones con soportes disjuntos dos a dos (ver Carothers y Dilworth [CD_2, Corolario 2.4]). $\square$

Para espacios de Lorentz generales $\Lambda(\phi)$ tenemos el siguiente teorema que nos dice cuando la inclusión entre dos de ellos es disjuntamente estrictamente singular siempre que la función fundamental del primero sea submultiplicativa:

Teorema 3.25. *Dadas las funciones ϕ, ψ, si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0 \tag{3.15}$$

y la función ϕ es submultiplicativa, entonces se tiene la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ y es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. Por la hipótesis 3.15, existe una constante $K > 0$ tal que $\psi \leq K\phi$, luego se tiene la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ (ver Capítulo 1).

Supongamos ahora que la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$ no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces existe en $\Lambda(\phi)$ un subespacio S engendrado por una sucesión de funciones con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tales que $\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^\infty \psi(\lambda_x(s))ds \geq C$ para todo $x \in S$ con $\|x\|_{\Lambda(\phi)} = 1$. Por 3.15 existe $0 < \delta < 1$ que depende solo de ϕ, ψ y C tal que

$$\int_{\{\lambda_x(s) \leq \delta\}} \psi(\lambda_x(s))ds + \int_{\{\lambda_x(s) \geq 1/\delta\}} \psi(\lambda_x(s))ds \leq \frac{C}{2}.$$

Por tanto, al ser $\|x\|_{\Lambda(\psi)} \geq C$ se tiene que

$$\int_{\{\delta < \lambda_x(s) < 1/\delta\}} \psi(\lambda_x(s))ds \geq \frac{C}{2}.$$

Luego

$$\psi\left(\frac{1}{\delta}\right) \lambda \left\{s \in [0, \infty) : \delta < \lambda_x(s) < 1/\delta\right\} \geq \frac{C}{2},$$

con lo que

$$x^*(\delta) \geq \frac{C}{2\psi(1/\delta)}.$$

Esto implica que

$$\|x\|_{L^1+L^\infty} = \int_0^1 x^*(t)dt \geq \int_0^\delta x^*(t)dt \geq \delta x^*(\delta) \geq \frac{C\delta}{2\psi(1/\delta)},$$

lo cual quiere decir que $\|\cdot\|_{\Lambda(\phi)}$ y $\|\cdot\|_{L^1+L^\infty}$ son equivalentes sobre S y por tanto que la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular. Ahora se tiene por el Teorema 3.18 que $\Lambda(\phi) = L^{p,\infty}$ o $\Lambda(\phi) = L_0^{p,\infty}$ para algún $1 < p < \infty$, pero esto es una contradicción. $\square$

Observación 3.26. La submultiplicatividad de ϕ en el teorema anterior es esencial como muestra el siguiente ejemplo:

Sean $1 \leq r < p < q < s < \infty$. Si $\phi(t) = \min(t^{1/p}, t^{1/q})$ y $\psi(t) = \min(t^{1/r}, t^{1/s})$ entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0$$

con lo que se tiene la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$. Sin embargo, esta inclusión no es disjuntamente estrictamente singular.

En efecto, la función $t^{-1/l}\chi_{(0,\infty)} \in \Lambda(\phi)$ para todo $p < l < q$, por lo que, usando el Teorema 3.9, se tiene que la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ no es disjuntamente estrictamente singular, luego tampoco lo es la inclusión $\Lambda(\phi) \hookrightarrow \Lambda(\psi)$.

Observación 3.27. Una cuestión por resolver es encontrar una caracterización general de cuando la inclusión entre dos espacios de Lorentz $\Lambda(\phi)$ o de Marcinkiewicz $M(\phi)$ en $[0,\infty)$ es disjuntamente estrictamente singular.

Capítulo 4

El caso discreto: espacios simétricos de sucesiones

En este último capítulo vamos a centrarnos en los espacios invariantes por reordenamiento de sucesiones, es decir, construidos sobre $\mathbb{N}$, también llamados *espacios simétricos de sucesiones*. Estudiaremos además de los operadores estrictamente singulares y disjuntamente estrictamente singulares, operadores estrictamente cosingulares y débilmente compactos entre espacios simétricos de sucesiones.

Una base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach E se dice que es *simétrica* si cualquier permutación suya $(e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a ella, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{\pi(n)}$ converge. Los espacios simétricos de sucesiones están estrechamente relacionados con este concepto ya que todo espacio de Banach de sucesiones $(E, \|\cdot\|)$ con base simétrica es un espacio simétrico de sucesiones pues la norma $\|\cdot\|_0$ definida por

$$\|x\|_0 = \sup_{\theta_n=\pm 1} \sup_{\pi} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta_n e_{\pi(n)} \right\|$$

es equivalente a $\|\cdot\|$ y es claramente simétrica. Además se tiene que todo espacio simétrico de sucesiones σ-orden continuo E tiene base simétrica. En efecto, sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Ya que $x - \sum_{n=1}^{k} x_n e_n \downarrow 0$ con $k \to \infty$, por la σ-orden continuidad se tiene que $\|x - \sum_{n=1}^{k} x_n e_n\| \downarrow 0$ con $k \to \infty$ luego $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de E, y es además base simétrica ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{\pi(n)}$ son equimedibles para toda permutación π de $\mathbb{N}$.

Dado un espacio simétrico de sucesiones E se tiene que $\lim_{n\to\infty} \phi_E(n) < \infty$ si y solo si $E = c_0$ o $E = \ell_\infty$. En efecto, si $E \neq c_0, \ell_\infty$ entonces $E_0 \neq c_0$, y ya que E_0 tiene base simétrica se tiene que $\lim_{n\to\infty} \phi_E(n) = \infty$ (ver [LT_1, página 119]).

Utilizando lo anterior obtenemos que si E es un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_∞ entonces $E \hookrightarrow c_0$. En efecto, sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \setminus c_0$. Pasando si es necesario a una subsucesión podemos suponer que existe $\epsilon > 0$ tal que $|x_n| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\|x\|_{m(\tilde{\omega_E})} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \epsilon\phi_E(n) = \infty$$

lo cual es una contradicción.

Comencemos estudiando cuando la inclusión entre dos espacios de Lorentz de sucesiones $d(\omega, 1)$ es estrictamente singular o disjuntamente estrictamente singular. Notemos que ambos conceptos coinciden por tener dichos espacios una base de Schauder de vectores con soportes disjuntos dos a dos. El siguiente resultado de inclusiones es básico:

Proposición 4.1. *Sean dos sucesiones de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Son equivalentes:*

(i) $d(\omega, 1) \hookrightarrow d(\omega', 1)$.

(ii) Existe $C > 0$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega'_k \leq C \sum_{k=1}^{n} \omega_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Como la inclusión es continua, existe $C > 0$ tal que $\|x\|_{d(\omega',1)} \leq C\|x\|_{d(\omega,1)}$ para todo $x \in d(\omega, 1)$. Basta entonces tomar $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$ con $n \in \mathbb{N}$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Para demostrarlo usaremos la Proposición 1.27. Sean las funciones $f = \sum_{k=1}^{\infty} \omega'_k \chi_{(k-1,k]}$ y $g = C\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \chi_{(k-1,k]}$. Por hipótesis $\int_0^n f(s)ds \leq \int_0^n g(s)ds$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $t \notin \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in (n_0 - 1, n_0)$ y, por tanto,

$$\int_0^t f(s)ds = \sum_{k=1}^{n_0-1} \omega'_k + (t - n_0 + 1)\omega'_{n_0}$$

y

$$\int_0^t g(s)ds = C\sum_{k=1}^{n_0-1} \omega_k + C(t - n_0 + 1)\omega_{n_0}.$$

Consideremos la función u definida por $u(t) = \int_0^t g(s)ds - \int_0^t f(s)ds$ con $t \in [n_0 - 1, n_0]$. Se tiene que $u(n_0 - 1), u(n_0) \geq 0$ y $u'(t)$ es constante luego $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [n_0 - 1, n_0]$. Por tanto, $\int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t g(s)ds$ para todo $t > 0$. Ahora, usando la Proposición 1.27 con $h = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* \chi_{(k-1,k]}$ se deduce el resultado. □

Teorema 4.2. *Sean dos sucesiones de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega_k} = 0.$

(ii) La inclusión $d(\omega,1) \hookrightarrow d(\omega',1)$ *es estrictamente singular.*

(iii) No existe en $d(\omega,1)$ *una base bloque normalizada* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la base canónica,* $x_n = \sum_{k=q_n+1}^{q_{n+1}} a_k e_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, con* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$*, tal que se tenga* $\|x_n\|_{d(\omega',1)} \geq \frac{1}{C}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para alguna constante* $C > 0$*.*

Demostración. (i)⇒(ii). Sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{n} \omega'_k \leq \epsilon \sum_{k=1}^{n} \omega_k$ para todo $n \geq n_0$. De la proposición anterior se deduce que $d(\omega,1) \hookrightarrow d(\omega',1)$.

Supongamos que dicha inclusión no es estrictamente singular, luego por [H_2, Proposición 1] no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $d(\omega,1)$ de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tales que

$$\|x\|_{d(\omega,1)} \leq C\|x\|_{d(\omega',1)}$$

para todo $x \in \overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}$. Tomemos el vector

$$x = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\prod_{k=1, k\neq n}^{n_0} \|x_k\|_\infty \right) x_n.$$

Como $d(\omega,1) \subset c_0$, el vector $|x|$ tiene al menos n_0 coordenadas iguales a $\prod_{n=1}^{n_0} \|x_n\|_\infty$ y el resto menores que dicho número. Como $x \in \overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}$, se tiene que $\|x\|_{d(\omega,1)} \leq C\|x\|_{d(\omega',1)}$. Lo mismo le sucede al reordenamiento $x^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir x^* tiene al menos las n_0 primeras coordenadas iguales a $\prod_{n=1}^{n_0} \|x_n\|_\infty$. Consideremos ahora $y = \sum_{n=1}^{n_1} x_n^* e_n$ una truncación de x^* con $n_1 \geq n_0$ tal que

$$\max(\|x^* - y\|_{d(\omega,1)}, \|x^* - y\|_{d(\omega',1)}) < \epsilon \min(\|x^*\|_{d(\omega,1)}, \|x^*\|_{d(\omega',1)}).$$

Esto lo podemos conseguir por tener $d(\omega,1)$ base de Schauder. Entonces

$$\|x^*\|_{d(\omega',1)} - \|y\|_{d(\omega',1)} < \epsilon\|x^*\|_{d(\omega',1)}.$$

Debido a la forma que tiene x^* se tiene que existen $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \mathbb{N}$ tales que $y = \sum_{n=1}^{k} a_n \chi_{E_n}$ con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \{1,\ldots,k\}$, $|E_1| \geq n_0$ y $\sum_{n=1}^{k} a_n = \prod_{n=1}^{n_0} \|x_n\|_\infty$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|x^*\|_{d(\omega',1)} &< \frac{1}{1-\epsilon}\|y\|_{d(\omega',1)} \\ &= \frac{1}{1-\epsilon} \sum_{n=1}^{k} a_n \sum_{j=1}^{|E_n|} \omega'_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\sum_{n=1}^{k} a_n \sum_{j=1}^{|E_n|}\omega_j \\
&= \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\|y\|_{d(\omega,1)} \\
&< \frac{\epsilon(1+\epsilon)}{1-\epsilon}\|x^*\|_{d(\omega,1)}.
\end{aligned}
$$

Si tomamos ϵ tal que

$$\frac{1-\epsilon}{\epsilon(1+\epsilon)} > C$$

obtenemos la contradicción deseada ya que tendríamos

$$\|x\|_{d(\omega',1)} < \frac{1}{C}\|x\|_{d(\omega,1)}.$$

(ii)⇒(iii). Supongamos que existe en $d(\omega,1)$ una base bloque normalizada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la base canónica, $x_n = \sum_{k=q_n+1}^{q_{n+1}} a_k e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, tal que $\|x_n\|_{d(\omega',1)} \ge \frac{1}{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para alguna constante $C > 0$. Usando la Proposición 1.35 se tiene que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que es equivalente a la base canónica de ℓ_1. Considerando esta subsucesión en $d(\omega',1)$ donde es seminormalizada y aplicando el mismo resultado obtenemos otra subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}} \subset d(\omega',1)$ que es equivalente también a la base canónica de ℓ_1. Como también lo es en $d(\omega,1)$ la inclusión $d(\omega,1) \hookrightarrow d(\omega',1)$ no es estrictamente singular ya que las normas son equivalentes en $\overline{[(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}]}$.

(iii)⇒(i). Supongamos que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\omega'_k}{\sum_{k=1}^{n}\omega_k} = L > 0.$$

Sea $C > 0$ tal que $L > \frac{1}{C}$. Entonces existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sum_{k=1}^{n_j}\omega_k \le C\sum_{k=1}^{n_j}\omega'_k$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora la base bloque de coeficientes constantes $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definida para cada $j \in \mathbb{N}$ por

$$x_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_j}\omega_k}\sum_{i=n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_j} e_i.$$

La sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset d(\omega,1)$ es normalizada y contradice (iii). □

Corolario 4.3. *Sean dos sucesiones de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ y $p \ge 1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\omega'_k}{\sum_{k=1}^{n}\omega_k} = 0.$

(ii) La inclusión $d(\omega,p) \hookrightarrow d(\omega',p)$ es estrictamente singular.

Demostración. Es una consecuencia directa del teorema anterior y de la Proposición 2.3 ya que $(d(\omega,1))^{(p)} = d(\omega,p)$. $\square$

Corolario 4.4. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones. Son equivalentes:*

(i) La inclusión $\ell_1 \hookrightarrow E$ es estrictamente singular.

(ii) $E \neq \ell_1$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(n)}{n} = 0$.

Demostración. (i)⇒(ii). Trivial.

(ii)⇒(iii). Supongamos que no se tiene (iii), entonces existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(n)}{n} = L > 0,$$

con lo que $E \neq c_0$. Entonces, dado $x \in m(\tilde{\omega_E})$ se tiene que $\|x\|_{m(\tilde{\omega_E})} \geq L\|x\|_1$, luego por el Teorema 1.43 se tiene que $E \hookrightarrow m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow \ell_1$ y, por tanto, $E = \ell_1$ lo cual es una contradicción.

(iii)⇒(i). Se tiene que $\ell_1 \hookrightarrow d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$. El teorema anterior nos dice que la primera inclusión es estrictamente singular, luego $\ell_1 \hookrightarrow E$ también lo es. $\square$

Observación 4.5. Usando el corolario anterior y la Proposición 2.3 se tiene que la inclusión $\ell_p \hookrightarrow d(\omega,p)$ es siempre estrictamente singular si y solo si $\omega \in c_0$, es decir, si y solo si $d(\omega,p) \neq \ell_p$, con $p \geq 1$.

Veamos ahora la caracterización de cuando la inclusión entre espacios de Marcinkiewicz $m(\omega)$ es disjuntamente estrictamente singular.

Teorema 4.6. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \backslash \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0$.

(ii) La inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ es disjuntamente estrictamente singular.

Demostración. (i)⇒(ii). Por la hipótesis obtenemos la inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ y que es continua. Supongamos que no es disjuntamente estrictamente singular. Entonces existe una sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $m(\omega)$ de vectores no nulos y con soportes disjuntos dos a dos y una constante $C > 0$ tales que $\|x\|_{m(\omega)} \leq C\|x\|_{m(\omega')}$ para todo $x \in \overline{[(x^n)_{n\in\mathbb{N}}]}$. Por la hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega_k} \geq 2C$$

para todo $n \geq n_0$. Sea el vector x como en la demostración de (i)⇒(ii) del teorema anterior, es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\prod_{k=1, k\neq n}^{n_0} \|x^k\|_\infty \right) x^n.$$

Se tiene que

$$\|x\|_{m(\omega)} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n} \omega_k} \geq 2C \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k}$$

para todo $n \geq n_0$. Ya que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k} = \prod_{j=1}^{n_0} \|x^j\|_\infty \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k}$$

es creciente para $n \in \{1, \ldots, n_0\}$ se tiene que

$$\|x\|_{m(\omega')} = \sup_{n \geq n_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k},$$

luego $\|x\|_{m(\omega)} \geq 2C\|x\|_{m(\omega')}$ lo cual supone una contradicción.

(ii)⇒(i). Supongamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k} = L > 0.$$

Entonces existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_j} \omega_k}{\sum_{k=1}^{n_j} \omega'_k} \geq \frac{L}{2}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora para cada $j \in \mathbb{N}$ el vector

$$x_j = \frac{1}{\phi_{m(\omega)}(n_j)} \chi_{E_j}$$

con $|E_j| = n_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y los conjuntos E_j disjuntos dos a dos. Sea $j_1 = 1$. Por recurrencia podemos construir una sucesión $(j_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_{j_1}} \omega_k + \sum_{k=1}^{n_{j_2}} \omega_k + \cdots + \sum_{k=1}^{n_{j_i}} \omega_k}{\sum_{k=1}^{n_{j_1}+\cdots+n_{j_i}} \omega_k} \leq \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{2^m}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora la sucesión $(x_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_{j_i} \in \overline{[(x_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}]}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{L}{2}|a_i| &\leq |a_i|\|x_{j_i}\|_{m(\omega')}\\ &\leq \|x\|_{m(\omega')}\\ &\leq C\|x\|_{m(\omega)}\\ &\leq C\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_{j_i}\right\|_{m(\omega)}\\ &\leq 3C\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|.\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. La última desigualdad es debida a que

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^{n_{j_1}+\cdots+n_{j_{i-1}}+r} x_k^*}{\sum_{k=1}^{n_{j_1}+\cdots+n_{j_{i-1}}+r} \omega_k} &= \frac{\sum_{k=1}^{n_{j_1}}\omega_k + \cdots + \sum_{k=1}^{n_{j_{i-1}}}\omega_k + r\frac{\sum_{k=1}^{n_{j_i}}\omega_k}{n_{j_i}}}{\sum_{k=1}^{n_{j_1}+\cdots+n_{j_{i-1}}+r}\omega_k}\\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{n_{j_1}}\omega_k + \cdots + \sum_{k=1}^{n_{j_{i-1}}}\omega_k + \sum_{k=1}^{r}\omega_k}{\sum_{k=1}^{n_{j_1}+\cdots+n_{j_{i-1}}+r}\omega_k}\\ &\leq \sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2^m}+1\\ &\leq 3\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $r \in \{1, \ldots, n_{j_i}\}$. Por tanto, la inclusión no es disjuntamente estrictamente singular al ser las normas $\|\cdot\|_{m(\omega)}$ y $\|\cdot\|_{m(\omega')}$ equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$ en $\overline{[(x_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}]}$. □

Observación 4.7. A la vista de la demostración anterior se observa que el mismo resultado es cierto cambiando los espacios de Marcinkiewicz $m(\omega)$ y $m(\omega')$ por sus partes σ-orden continuas $m_0(\omega)$ y $m_0(\omega')$ respectivamente. Además, ya que estos espacios $m_0(\omega)$ tienen base de Schauder de vectores disjuntos (ver [Ga$_1$, Teorema 12]), el mismo resultado se tiene también para inclusiones estrictamente singulares.

Más general es el siguiente resultado:

Teorema 4.8. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\backslash\ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\omega_k}{\sum_{k=1}^{n}\omega'_k} = 0.$

(ii) La inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ es estrictamente singular.

(iii) La inclusión $m_0(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega')$ es estrictamente singular.

Demostración. (i)⇒(ii). Sea la sucesión de pesos $\omega'' = (\omega''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumpliendo que

$$\sum_{k=1}^{n} \omega''_k = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \omega_k \sum_{k=1}^{n} \omega'_k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega''_k} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega''_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k} = 0$$

luego tenemos la inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega'')$ y la factorización

$$m(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega'') \hookrightarrow m_0(\omega') \hookrightarrow m(\omega').$$

Ahora como la inclusión central $m_0(\omega'') \hookrightarrow m_0(\omega')$ por la observación anterior es estrictamente singular, deducimos el resultado.

(ii)⇒(i). Trivial a partir del Teorema 4.6.

(iii)⇔(i). Ver la observación anterior. □

Corolario 4.9. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de c_0 y de ℓ_∞. Entonces la inclusión canónica $E \hookrightarrow c_0$ es estrictamente singular.*

Demostración. Se tiene que $E \hookrightarrow m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow m(\omega') \hookrightarrow c_0$ donde la sucesión $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \omega'_k = \frac{n}{\sqrt{\phi_E(n)}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La última inclusión es debida a que si $m(\omega') = \ell_\infty$ entonces $\ell_\infty = d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$ y, por tanto, $E = \ell_\infty$. Ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega_E}_k}{\sum_{k=1}^{n} \omega'_k} = 0$$

se tiene por el teorema anterior que $m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow m(\omega')$ es estrictamente singular y, por tanto, también lo es $E \hookrightarrow c_0$. □

Observación 4.10. Los Corolarios 4.9 y 4.4 no son ciertos en general para espacios de Banach de sucesiones no simétricos: sea

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_{2k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1, (x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} \in c_0\}$$

dotado de la norma

$$\|x\|_E = \max(\|(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}\|_1, \|(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty).$$

Es claro que E es un espacio de Banach distinto de c_0 y de ℓ_1 tal que $\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow c_0$. Se tiene que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes sobre el subespacio (cerrado) de ℓ_1 definido por $H_1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_{2k-1} = 0, k \in \mathbb{N}\}$ y las normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes sobre el subespacio (cerrado) de E definido por $H_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}\}$. Por tanto las inclusiones $\ell_1 \hookrightarrow E$ y $E \hookrightarrow c_0$ no son estrictamente singulares.

Definición 4.11. Un espacio normado E es *subproyectivo* si todo subespacio cerrado infinito dimensional contiene otro subespacio cerrado infinito dimensional complementado en E.

Los dos siguientes resultados están contenidos en un artículo de Whitley ([W]).

Teorema 4.12. *Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado subproyectivo y $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Si T^* es estrictamente singular entonces también lo es T.*

Corolario 4.13. *Sean E un espacio de Banach reflexivo tal que E^* es subproyectivo, F un espacio normado y $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Si T es estrictamente singular entonces también lo es T^*.*

Con estos dos últimos resultados el problema de la singularidad estricta de la inclusión entre dos duales de espacios de Lorentz de sucesiones queda también resuelto en el caso $p > 1$:

Proposición 4.14. *Sean dos sucesiones de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ y $1 < p < \infty$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$

(ii) Se tiene la inclusión $(d(\omega, p))^* \hookrightarrow (d(\omega', p))^*$ y es estrictamente singular.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Por hipótesis se tiene que $d(\omega', p) \hookrightarrow d(\omega, p)$ luego $(d(\omega, p))^* \hookrightarrow (d(\omega', p))^*$. Ya que $d(\omega, p)$ es reflexivo, la base canónica es reductora y, por tanto, $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $(d(\omega, p))^*$. Por [CL, Teorema 24] obtenemos que $(d(\omega, p))^*$ es subproyectivo. Aplicando el corolario anterior obtenemos el resultado.

(ii)$\Rightarrow$(i). Esta implicación es una consecuencia directa del teorema anterior y del Corolario 4.3. $\square$

Observación 4.15. Una sucesión de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es *regular* si se cumple que

$$\sum_{n=1}^{k} \omega_n \leq Ck\omega_k$$

para alguna constante $C > 0$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Esta condición de regularidad es equivalente a que se tenga una representación del dual de un espacio de Lorentz $d(\omega, p)$ de la siguiente forma:

$$(d(\omega, p))^* = d(\omega^{-p'/p}, p')$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (ver el Teorema 1 de Ariño y Muckenhoupt [AM]), estando este último espacio de Lorentz de sucesiones definido a través de la sucesión de pesos $\omega^{-p'/p}$ que es creciente y no acotada. Estos espacios de Lorentz de sucesiones con pesos crecientes han sido estudiados por Ariño, Eldeeb y Peck en [AEP].

En cuanto a inclusiones entre espacios de Orlicz de sucesiones se tiene el siguiente resultado debido a Kalton (ver [K_1, Teorema 5.2]):

Teorema 4.16. *Sean ℓ_φ y ℓ_ψ espacios de Orlicz de sucesiones tales que φ verifica la condición Δ_2 en 0 y $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$. Son equivalentes:*

(i) La inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$ es estrictamente singular.

(ii) Para todo $C > 0$ existen $t_1, \ldots, t_n \in (0, 1]$ distintos y $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi(\lambda t_k) \geq C \sum_{k=1}^{n} a_k\psi(\lambda t_k)$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Observación 4.17. Ya que φ verifica la condición Δ_2 en 0, la base canónica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base simétrica de ℓ_φ y por tanto el que la inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_\psi$ sea estrictamente singular es equivalente a que sea disjuntamente estrictamente singular.

Observación 4.18. Cuando uno de los espacios extremos es un espacio ℓ_p con $p \geq 1$ se tienen los siguientes criterios integrales los cuales se pueden ver en García del Amo [G_2] y [K_1] respectivamente:

(i) La inclusión $\ell_p \hookrightarrow \ell_\varphi$ es estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{0<s\leq 1} \frac{1}{\log a} \int_{1/a}^{1} \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = 0.$$

(ii) La inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow \ell_p$ es estrictamente singular si y solo si

$$\lim_{a\to\infty} \inf_{0<s\leq 1} \frac{1}{\log a} \int_{1/a}^{1} \frac{\varphi(su)}{s^p u^{p+1}} du = \infty.$$

Pasemos ahora a ocuparnos de espacios simétricos de sucesiones generales.

Dado E espacio simétrico de sucesiones consideramos los *índices de inclusión* δ_E y γ_E definidos por

$$\delta_E = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \phi_E(n)}$$

y

$$\gamma_E = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \phi_E(n)}.$$

Es claro que $1 \leq \delta_E \leq \gamma_E \leq \infty$.

Proposición 4.19. *Se tiene que*

$$\delta_E = \sup\{p > 0 : \ell_p \hookrightarrow E\}$$

y

$$\gamma_E = \inf\{p > 0 : E \hookrightarrow \ell_p\}.$$

Demostración. En efecto, si $q < \delta_E$ se tiene que $\phi_E(n) \leq n^{1/q}$ para n suficientemente grande. Por tanto, $\ell_{q,1} \hookrightarrow d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$. De esto obtenemos que si $p < q < \delta_E$ entonces $\ell_p \hookrightarrow \ell_{q,1} \hookrightarrow E$, y al ser p arbitrario se deduce el resultado ya que el recíproco es trivial, es decir, si $\ell_p \hookrightarrow E$ para un cierto $p > 0$, entonces $p \leq \delta_E$.

Sea ahora $q > \gamma_E$. Entonces se tiene que $\phi_E(n) \geq n^{1/q}$ para n suficientemente grande, luego $E \hookrightarrow m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow \ell_{q,\infty}$. De esta forma si $\gamma_E < q < p$ tenemos que $E \hookrightarrow \ell_{q,\infty} \hookrightarrow \ell_p$, y al ser p arbitrario se concluye el resultado. □

Proposición 4.20. *Sean E y F espacios simétricos de sucesiones con $E \hookrightarrow F$. Si $\gamma_E < \delta_F$ entonces la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.*

Demostración. Si $\gamma_E < p < q < \delta_F$ entonces $E \hookrightarrow \ell_p \hookrightarrow \ell_q \hookrightarrow F$ y el resultado se sigue de ser la inclusión $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ estrictamente singular. □

Pasemos a dar otra condición suficiente para que la inclusión $E \hookrightarrow F$ sea estrictamente singular.

Teorema 4.21. *Sean los pesos* $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ninguno de ellos en* ℓ_1 *tales que* $\sum_{k=1}^n \omega'_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Son equivalentes:*

(i) Todo par de espacios simétricos de sucesiones E *y* F *con funciones fundamentales* $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ *y* $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^n \omega'_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *verifica que* $E \hookrightarrow F$.

(ii) Si E *y* F *son espacios simétricos de sucesiones con* $E \hookrightarrow F$, E σ*-orden continuo y* $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ *y* $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^n \omega'_k$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces la inclusión* $E \hookrightarrow F$ *es estrictamente singular.*

(iii) Si $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión definida por* $\sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \omega_k}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_k \omega'_k < \infty.$$

Demostración. (i)⇒(ii). Sean E y F dos espacios simétricos con $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ y $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^n \omega'_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, E σ-orden continuo y $E \hookrightarrow F$. Por la hipótesis (i), y usando el Teorema 1.43 tenemos la factorización

$$E \hookrightarrow m(\tilde{\omega}) \hookrightarrow d(\omega', 1) \hookrightarrow F.$$

Ya que E es σ-orden continuo se tiene que

$$E \hookrightarrow m_0(\tilde{\omega}) \hookrightarrow d(\omega', 1) \hookrightarrow F$$

por lo que es suficiente probar que la inclusión $m_0(\tilde{\omega}) \hookrightarrow d(\omega', 1)$ es disjuntamente estrictamente singular. Si no lo fuera, usando [H$_2$, Proposición 1], existiría una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $m_0(\tilde{\omega})$ de sucesiones no nulas y con soportes disjuntos dos a dos y $C > 0$ tales que $\|x\|_{m(\tilde{\omega})} \leq C\|x\|_{d(\omega',1)}$ para todo $x \in \overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}$. Ahora, usando [CL, Corolario 17] obtenemos un subespacio X de $\overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}_{d(\omega',1)}$ isomorfo a ℓ_1. Por otra parte, por [CL, Teorema 24] y [Ga$_1$, Teorema 12] existe un subespacio complementado Y de X en $\overline{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]}_{m_0(\tilde{\omega})}$ isomorfo a c_0, lo cual es una contradicción.

(ii)⇒(iii). Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_k \omega'_k = \infty$. Consideremos los espacios simétricos $E = m_0(\tilde{\omega})$ y $F = m(\tilde{\omega}) + d(\omega', 1)$. Se tiene que E es σ-orden continuo, $E \hookrightarrow F$ y $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ y $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^n \omega'_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, vamos a ver que esta inclusión $E \hookrightarrow F$ no es estrictamente singular.

Veamos en primer lugar que se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\ldots,m+n\}}\|_F = 1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

En efecto, supongamos que no, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ para el que se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\dots,m+n\}}\|_F = b < 1$ ya que $\|\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\dots,m+n\}}\|_F \leq \|\tilde{\omega}\|_F \leq \|\tilde{\omega}\|_{m(\tilde{\omega})} = 1$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{k=m}^{m+n} \tilde{\omega}_k y_k \leq b$ para todo $y \in F'$ con $\|y\|_{F'} \leq 1$ e $y \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\sum_{k=m}^{\infty} \tilde{\omega}_k y_k \leq b$ para todo $y \in F'$ con $\|y\|_{F'} \leq 1$ e $y \geq 0$, luego $\|\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\dots\}}\|_F \leq b$. Entonces existe una descomposición $\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\dots\}} = x + z$ con $x \in m(\tilde{\omega})$, $z \in d(\omega', 1)$ y $\|x\|_{m(\tilde{\omega})} + \|z\|_{d(\omega',1)} \leq \frac{1+b}{2}$. Ahora, ya que $\sum_{k=m}^{n} x_k \leq \frac{1+b}{2} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega}_k$ para todo $n \geq m$, se tiene que

$$\sum_{k=m}^{n} z_k \geq \sum_{k=m}^{n} \tilde{\omega}_k - \frac{1+b}{2} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega}_k$$

para todo $n \geq m$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n-m+1} z_k^* + \frac{1+b}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{\omega}_k \geq \sum_{k=m}^{n} z_k + \frac{1+b}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{\omega}_k \geq \frac{1-b}{2} \sum_{k=m}^{n} \tilde{\omega}_k$$

para todo $n \geq m$ y, por tanto, usando la Proposición 1.27 se tiene que

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* \omega_k' + \frac{1+b}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{\omega}_k \geq \frac{1-b}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_{k+m-1} \omega_k'$$

por lo que $\tilde{\omega}\chi_{\{m,m+1,\dots\}} \in d(\omega', 1)$ lo cual es una contradicción.

Así, existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente con $n_1 = 1$ tal que $\|\tilde{\omega}\chi_{\{n_k,\dots,n_{k+1}-1\}}\|_F \geq \frac{1}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si consideramos ahora los vectores $x_k = \tilde{\omega}\chi_{\{n_k,\dots,n_{k+1}-1\}} \in m_0(\tilde{\omega})$ con $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\|a\|_{c_0} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\|_F \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\|_E \leq \|a\|_{c_0} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{m(\tilde{\omega})} = \|a\|_{c_0} \|\tilde{\omega}\|_{m(\tilde{\omega})} = \|a\|_{c_0}.$$

(iii)$\Rightarrow$(i). Sean E y F espacios simétricos con $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$ y $\phi_F(n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis se obtiene la factorización

$$E \hookrightarrow m(\tilde{\omega}) \hookrightarrow d(\omega', 1) \hookrightarrow F.$$

En efecto, si $x \in m(\tilde{\omega})$, entonces $\sum_{k=1}^{n} x_k^* \leq \|x\|_{m(\tilde{\omega})} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega}_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por la Proposición 1.27 se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* \omega_k' \leq \|x\|_{m(\tilde{\omega})} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_k \omega_k' < \infty$, es decir, $m(\tilde{\omega}) \hookrightarrow d(\omega', 1)$. $\square$

El teorema anterior da una condición suficiente para que la inclusión $E \hookrightarrow F$ sea estrictamente singular en el caso de que E y F sean espacios simétricos de sucesiones con funciones fundamentales diferentes y E sea σ-orden continuo. Veamos ahora que ocurre entre espacios simétricos de sucesiones con la misma función fundamental.

Proposición 4.22. *Sea ℓ_φ un espacio de Orlicz de sucesiones con φ no degenerada ($\varphi(t) > 0$ si $t > 0$). Entonces:*

(i) La inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow m(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}})$ es estrictamente singular si y solo si $q_{\ell_\varphi} < \infty$.

(ii) La inclusión $d(\omega_{\ell_\varphi}, 1) \hookrightarrow \ell_\varphi$ es estrictamente singular si y solo si $p_{\ell_\varphi} > 1$.

Demostración. (i) Si $q_{\ell_\varphi} < \infty$ entonces φ satisface la condición Δ_2 en 0, ℓ_φ no contiene ninguna copia isomorfa de c_0 y es σ-orden continuo (ver [LT$_1$, Proposición 4.a.4]. El resultado se sigue de la factorización $\ell_\varphi \hookrightarrow m_0(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}}) \hookrightarrow m(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}})$ ya que en $m_0(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}})$ todo subespacio infinito-dimensional contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0 (ver [CL, Teorema 24]).

Recíprocamente supongamos ahora que $q_{\ell_\varphi} = \infty$, es decir, la función φ no satisface la condición Δ_2 en 0. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_φ formada por vectores no nulos y con soportes finitos y disjuntos dos a dos que es equivalente a la base canónica de c_0. Más en concreto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base bloque con coeficientes constantes de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El resultado se sigue ahora de [CL, Lema 23] ya que de esa sucesión considerada ahora en $m_0(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}})$ se puede extraer una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0, luego la inclusión $\ell_\varphi \hookrightarrow m(\tilde{\omega_{\ell_\varphi}})$ no es estrictamente singular.

(ii) Al ser $d(\omega_{\ell_\varphi}, 1)$ σ-orden continuo realmente tenemos la inclusión $d(\omega_{\ell_\varphi}, 1) \hookrightarrow h_\varphi$. Si $p_{\ell_\varphi} > 1$ entonces h_φ no contiene ninguna copia de ℓ_1 (ver [LT$_1$, Teorema 4.a.9]). El resultado se sigue de que todo subespacio infinito-dimensional de $d(\omega_{\ell_\varphi}, 1)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1 (ver [CL, Corolario 17]).

Supongamos ahora que $p_{\ell_\varphi} = 1$. Al ser φ convexa, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalizada en ℓ_φ formada por vectores no nulos y con soportes finitos y disjuntos dos a dos que es equivalente a la base canónica de ℓ_1 (ver Hernández [H$_1$, Teorema 2.2.ii]). El resultado nos lo da ahora [CL, Lema 15] porque de esa sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que está también en $d(\omega_{\ell_\varphi}, 1)$ podemos extraer una subsucesión equivalente a la base canónica de ℓ_1. $\square$

A continuación vamos a dar un resultado de factorización de inclusiones entre espacios simétricos de sucesiones en dos inclusiones no disjuntamente estrictamente singulares.

Teorema 4.23. *Sean E y F espacios simétricos de sucesiones con $E \hookrightarrow F$, $E \neq \ell_1$ y $F \neq c_0, \ell_\infty$. Entonces existe un espacio simétrico de sucesiones G tal que*

$$E \hookrightarrow G \hookrightarrow F$$

y ninguna de las inclusiones es disjuntamente estrictamente singular.

Para demostrar este resultado necesitamos dar dos previos.

Sea $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ una sucesión de naturales con $n_1 = 1$ y $(n_{k+1} - n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ creciente, y sean los vectores $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que son base bloque de coeficientes constantes de la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidos por

$$v_k = \frac{\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} e_j}{n_{k+1} - n_k}$$

con $k \in \mathbb{N}$ y $v_0 = 0$. Denotamos por $Q_E(\alpha)$ al subespacio cerrado de E generado por la base bloque $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, es decir,

$$Q_E(\alpha) = \{x \in E : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_k\}.$$

Sea el operador *traslación a la derecha* T_d sobre $Q_E(\alpha)$ definido por

$$T_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_{k+1}$$

con $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_k \in Q_E(\alpha)$.

Proposición 4.24. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_1 y $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe una sucesión $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que el operador traslación a la derecha $T_d : Q_{c_0}(\alpha) \longrightarrow E$ es acotado y se verifica que*

$$\|T_d\|_{Q_{c_0}(\alpha),E} \leq \epsilon.$$

Demostración. Supongamos primero que $E = c_0$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos una sucesión $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ creciente tal que

$$\frac{m_n}{m_{n+1}} < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora consideramos la sucesión $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $n_k = \sum_{n=1}^{k} m_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_k \in Q_{c_0}(\alpha)$ con $\|x\|_\infty \leq 1$ entonces

$$\|T_d(x)\|_{c_0} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{m_{k+2}} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{m_{k+1}}{m_{k+2}} \leq \epsilon$$

con lo que obtenemos el resultado.

Supongamos ahora que $E \neq c_0$. Como el espacio E es distinto de ℓ_1 se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(n)}{n} = 0$, ya que si $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(n)}{n} > 0$ entonces $m(\tilde{\omega_E}) = \ell_1$. Basta considerar como espacio E el espacio de Lorentz $d(\omega_E, 1)$. Ahora elegimos por recurrencia una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ creciente tal que $m_1 = 1$ y

$$\frac{\phi_E(m_{j+1})}{m_{j+1}} \leq \frac{\epsilon}{2^{j-1} m_j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, y tomamos la sucesión $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $n_k = \sum_{j=1}^{k} m_j$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_k \in Q_{c_0}(\alpha)$ con $\|x\|_\infty \leq 1$ entonces

$$\|T_d(x)\|_E \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \|v_{k+1}\|_E \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_{k+1} \frac{\phi_E(m_{k+2})}{m_{k+2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

$\square$

Este último resultado no es válido para $E = \ell_1$ ya que si $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v_k \in Q_{c_0}(\alpha)$ entonces $\|T_d(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Sean ahora, fijado un espacio simétrico de sucesiones E y una sucesión de naturales $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, los subespacios $Q_E^1(\alpha)$ y $Q_E^2(\alpha)$ de E definidos por

$$Q_E^1(\alpha) = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k v_{2k-1} + x'_k v_{2k}) : \frac{x_k}{n_{2k} - n_{2k-1}} = \frac{x'_k}{n_{2k+1} - n_{2k}},\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

y

$$Q_E^2(\alpha) = \left\{ y = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k v_{2k-2} + y'_k v_{2k-1}) : \frac{y_k}{n_{2k-1} - n_{2k-2}} = \frac{y'_k}{n_{2k} - n_{2k-1}},\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ambos son subespacios cerrados de E ya que se tiene que $Q_E^1(\alpha) = \overline{[(\sum_{j=n_{2k-1}}^{n_{2k+1}-1} e_j)_{k\in\mathbb{N}}]}$ y $Q_E^2(\alpha) = \overline{[(\sum_{j=n_{2k-2}}^{n_{2k}-1} e_j)_{k\in\mathbb{N}}]}$.

Proposición 4.25. *Sean E y F espacios simétricos de sucesiones con $E \neq \ell_1$ y $F \neq c_0, \ell_\infty$, y $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe una sucesión de naturales $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\|xy\|_1 \leq \epsilon\ \|x\|_F \|y\|_{E'}$$

para todo $x \in Q_F^1(\alpha)$ e $y \in Q_{E'}^2(\alpha)$.

Demostración. Ya que $F \neq c_0, \ell_\infty$ se tiene que $F' \neq \ell_1$. Ahora, usando la técnica de la demostración de la proposición anterior existe una sucesión de naturales $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que se tiene

$$\|T_d\|_{Q_{c_0}(\alpha),E} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\|T_d\|_{Q_{c_0}(\alpha),F'} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos ahora los subespacios $Q_F^1(\alpha)$ y $Q_{E'}^2(\alpha)$ y sean $x = \sum_{k=1}^\infty (x_k v_{2k-1} + x'_k v_{2k}) \in Q_F^1(\alpha)$ e $y = \sum_{k=1}^\infty (y_k v_{2k-2} + y'_k v_{2k-1}) \in Q_{E'}^2(\alpha)$. Si tomamos

$$u = \sum_{k=1}^\infty x'_k v_{2k} \in Q_F(\alpha)$$

y

$$v = \sum_{k=1}^\infty y'_k v_{2k-1} Q_{E'}(\alpha)$$

entonces

$$T_d(u) = \sum_{k=1}^\infty x'_k v_{2k+1}$$

y

$$T_d(v) = \sum_{k=1}^\infty y'_k v_{2k}.$$

Se tiene que

$$xy = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{x_k y'_k}{n_{2k} - n_{2k-1}} v_{2k-1} + \frac{x'_k y_{k+1}}{n_{2k+1} - n_{2k}} v_{2k} \right).$$

Consideremos el vector

$$w = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{x_k y'_k}{n_{2k} - n_{2k-1}} v_{2k} + \frac{x'_k y_{k+1}}{n_{2k+1} - n_{2k}} v_{2k+1} \right).$$

Se cumple que

$$w = uT_d(v) + vT_d(u).$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|xy\|_1 &= \|w\|_1 \\
&\leq \|u\|_F \|T_d(v)\|_{F'} + \|v\|_{E'} \|T_d(u)\|_E \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_F \|v\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} \|v\|_{E'} \|u\|_\infty \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_F \|v\|_{E'} + \frac{\epsilon}{2} \|v\|_{E'} \|u\|_F \\
&= \epsilon \|u\|_F \|v\|_{E'} \\
&\leq \epsilon \|x\|_F \|y\|_{E'}.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.23. Por la proposición anterior existe una sucesión de naturales $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que los vectores bloque asociados $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cumplen

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_F \|y\|_{E'}$$

para todo $x \in Q_F^1(\alpha)$ e $y \in Q_{E'}^2(\alpha)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n_{k+1} \geq 2n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $V = B_{E'} \cap Q_{E'}^2(\alpha)$. Definamos el espacio

$$G = \left\{ x \in F : \|x\|_G = \sup_{y^* \in V \cup B_{F'}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n < \infty \right\}$$

Se tiene que G es un espacio simétrico de sucesiones al ser la intersección de dos de ellos. Dado $x \in E$ se tiene que

$$\sup_{y^* \in V} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n \leq \|x\|_E$$

y

$$\sup_{y^* \in B_{F'}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n = \|x\|_F.$$

Entonces

$$\|x\|_G \leq \max(\|x\|_E, \|x\|_F) \leq \max(1, C)\|x\|_E$$

donde C es la constante de la inclusión $E \hookrightarrow F$. Luego se tienen las inclusiones

$$E \hookrightarrow G \hookrightarrow F.$$

Veamos que ninguna de las dos inclusiones anteriores es disjuntamente estrictamente singular.

Sea $x \in Q_E^2(\alpha)$ y fijado $j \in \mathbb{N}$ consideremos el truncamiento

$$x^j = \sum_{k=1}^{j} (x_k v_{2k-2} + x'_k v_{2k-1})$$

y tomamos

$$z^j = \min\{w : w \geq |x^j|, w = w^*\}.$$

Se tiene que $z^j \in Q_E^2(\alpha)$, $z^j \geq |x^j|$ y $z^j = z^{j*}$, y usando que $n_{k+1} \geq 2n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se obtiene que las funciones de distribución cumplen que $\lambda_{z^j} \leq 2\lambda_{x^j}$, luego

$$(D_2 x^{j*})(t) = x^{j*}(t/2) \geq z^{j*}(t)$$

para todo $t > 0$. Entonces

$$\|x^j\|_E \leq \|z^j\|_E \leq 2\|x^j\|_E,$$

$$\|x^j\|_G \leq \|z^j\|_G \leq 2\|x^j\|_G$$

y

$$\|z^j\|_E = \sup_{y \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} z_n^j y_n = \sup_{y^* \in V} \sum_{n=1}^{\infty} {z^j}_n^* y_n \leq \|z^j\|_G$$

donde la segunda igualdad se obtiene usando la acotación contractiva del operador proyección en media P_α definido de la siguiente forma para $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$:

$$P_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right) v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i}{n_{k+1} - n_k} \right) \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} e_j.$$

Por tanto, $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_G$ son equivalentes sobre $Q_E^2(\alpha)$ ya que $\|x\|_E = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x^j\|_E \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|z^j\|_E \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|z^j\|_G \leq 2\sup_{j\in\mathbb{N}} \|x^j\|_G = 2\|x\|_G$.

Sea ahora $x \in Q_G^1(\alpha)$. Truncando en x^j y tomando z^j como en la primera inclusión obtenemos que

$$\|x^j\|_G \leq \|z^j\|_G \leq 2\|x^j\|_G,$$

$$\|x^j\|_F \leq \|z^j\|_F \leq 2\|x^j\|_F,$$

y como por la proposición anterior se tiene que

$$\|z^j\|_G = \max\left(\sup_{y^* \in V} \sum_{n=1}^{\infty} z_n^j y_n, \sup_{y^* \in B_{F'}} \sum_{n=1}^{\infty} z_n^j y_n \right) \leq \|z^j\|_F,$$

entonces

$$\|z^j\|_G = \|z^j\|_F.$$

Por tanto, razonando como antes se obtiene que $\|\cdot\|_G$ y $\|\cdot\|_F$ son equivalentes sobre $Q_G^1(\alpha)$. □

Corolario 4.26. *(i) Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_1. Entonces $E = c_0$ si y solo si para todo espacio simétrico de sucesiones F con $F \hookrightarrow E$ y $F \neq E$ se tiene que la inclusión $F \hookrightarrow E$ es estrictamente singular.*

(ii) Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_∞. Entonces $E = \ell_1$ si y solo si para todo espacio simétrico de sucesiones F con $E \hookrightarrow F$ y $F \neq E$ se tiene que la inclusión $E \hookrightarrow F$ es estrictamente singular.

Demostración. (i) El "solo si" nos lo da el Corolario 4.9 y el "si" el teorema anterior (si $E = \ell_\infty$ tomamos $F = c_0$) considerando la inclusión $d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$ si $E \neq d(\omega_E, 1)$. Si $E = d(\omega_E, 1)$ consideramos la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow E$ donde ω se construye de la siguiente forma: ya que $E \neq \ell_1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(n)}{n} = 0$ luego existe una sucesión $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ creciente tal que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_j} \omega_{Ek}}{n_j} < \frac{\omega_{Ej+1}}{j+1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $\omega_k = \omega_{Ej}$ si $n_{j-1} < k \leq n_j$ con $k \in \mathbb{N}$. Para todo $n_j < n \leq n_{j+1}$ se tiene

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_{Ek}}{\sum_{k=1}^{n} \omega_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_{Ek}}{n\omega_{Ej+1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_j} \omega_{Ek}}{n_j\omega_{Ej+1}} < \frac{1}{j+1}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \omega_{Ek}}{\sum_{k=1}^{n} \omega_k} = 0,$$

luego se tiene la inclusión propia $d(\omega, 1) \hookrightarrow d(\omega_E, 1)$ (y es estrictamente singular).

(ii) El "solo si" nos lo da el Corolario 4.4 y el "si" el teorema anterior considerando la inclusión $E \hookrightarrow m(\omega')$ con ω' como en la demostración del Corolario 4.9. □

El siguiente resultado estima el grado de proximidad entre dos espacios simétricos distintos E y F cuando se tiene la inclusión $E \hookrightarrow F$ y además no es estrictamente singular.

Recordemos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que tiene *variación regular* si existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \infty.$$

Proposición 4.27. *Sean E y F espacios simétricos de sucesiones tales que sus funciones fundamentales tienen variación regular, $E \hookrightarrow F$ y $F \neq \ell_\infty$. Si la inclusión $E \hookrightarrow F$ no es estrictamente singular entonces existe $1 < p < \infty$ tal que*

$$\bigcup_{q<p} \ell_q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q>p} \ell_q$$

o bien

$$\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q>1} \ell_q$$

o

$$\bigcup_{q<\infty} \ell_q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow c_0.$$

Demostración. Denotemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_E(2n)}{\phi_E(n)} = 2^\alpha$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_F(2n)}{\phi_F(n)} = 2^\beta.$$

Ya que $\phi_E(2n) \leq 2\phi_E(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Consideremos primero el caso $0 < \alpha, \beta < 1$. Para todo $0 < \epsilon < \min(\alpha, 1-\alpha)$ existe una constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{C_\epsilon} n^{\alpha-\epsilon} \leq \phi_E(n) \leq C_\epsilon n^{\alpha+\epsilon}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es debido a que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{\alpha-\epsilon}\phi_E(n) \leq \phi_E(2n) \leq 2^{\alpha+\epsilon}\phi_E(n)$$

para todo $n \geq n_0$. Si $n \in [2^k, 2^{k+1}]$, por recurrencia obtenemos que

$$2^{k(\alpha-\epsilon)} = 2^{k(\alpha-\epsilon)}\phi_E(1) \leq \phi_E(n) \leq 2^{(k+1)(\alpha+\epsilon)}\phi_E(1) = 2^{(k+1)(\alpha+\epsilon)}$$

lo cual nos da lo que queríamos. Usando el Teorema 1.43 obtenemos que

$$\ell_{\frac{1}{\alpha+\epsilon},1} \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell_{\frac{1}{\alpha-\epsilon},\infty}.$$

Ya que $\ell_p \hookrightarrow \ell_{q,1} \hookrightarrow \ell_{q,\infty} \hookrightarrow \ell_r$ para todo $1 \leq p < q < r \leq \infty$,

$$\ell_{\frac{1}{\alpha+\epsilon'}} \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell_{\frac{1}{\alpha-\epsilon'}}$$

para todo $0 < \epsilon' < \min(\alpha, 1-\alpha)$. Estas inclusiones muestran que $\alpha \geq \beta$. Si $\alpha > \beta$, tomando $1/\alpha < q < r < 1/\beta$ obtenemos $E \hookrightarrow \ell_q \hookrightarrow \ell_r \hookrightarrow F$ y la inclusión $E \hookrightarrow F$ sería estrictamente singular. Por tanto ha de ser $\alpha = \beta$, y tomando $p = 1/\alpha$ obtenemos

$$\bigcup_{q<p} \ell_q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q>p} \ell_q.$$

Si $\alpha = 0$, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $\phi_E(n) \leq C_\epsilon n^\epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual nos da que $\ell_{\frac{1}{\epsilon'}} \hookrightarrow E$ para todo $0 < \epsilon' < 1$ y, por tanto,

$$\bigcup_{q<\infty} \ell_q \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow c_0.$$

Si $\beta = 1$, para todo $0 < \epsilon < 1$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $\phi_F(n) \geq C_\epsilon n^{1-\epsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual nos da que $F \hookrightarrow \ell_{\frac{1}{1-\epsilon'}}$ para todo $0 < \epsilon' < 1$ y, por tanto,

$$\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow F \hookrightarrow \bigcap_{q>1} \ell_q.$$

Si $0 = \beta < \alpha \leq 1$ y si $0 \leq \beta < \alpha = 1$ llegamos a la misma contradicción que antes. $\square$

Pasemos ahora a estudiar operadores *estrictamente cosingulares* (o de *Pełczyński*) que guardan cierta relación de dualidad con los estrictamente singulares. Previamente recordemos una definición de operador estrictamente singular equivalente a la dada (ver [PR, página 257]): un operador lineal y continuo T entre dos espacios de Banach X e Y se dice que es estrictamente singular si no existe ningún espacio de Banach infinito dimensional Z ni operadores $i_X : Z \hookrightarrow X$ e $i_Y : Z \hookrightarrow Y$ isomorfismos sobre su imagen tales que $T \circ i_X = i_Y$.

Definición 4.28. Un operador lineal y continuo T entre dos espacios de Banach X e Y se dice que es *estrictamente cosingular* (o de *Pełczyński*) si no existe ningún espacio de Banach infinito dimensional E ni aplicaciones continuas sobreyectivas $h_X : X \to E$ y $h_Y : Y \to E$ tales que $h_Y \circ T = h_X$.

Enunciemos a continuación una serie de resultados relativos a operadores estrictamente cosingulares (ver por ejemplo [PR, Teoremas 6.5, 6.8 y 6.10 y Corolario 6.9]).

Proposición 4.29. *Sean X, Y y Z espacios de Banach y $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ operadores lineales y continuos. Si el operador S o el operador T son estrictamente cosingulares entonces $S \circ T$ también lo es.*

De hecho, los operadores estrictamente cosingulares forman también un ideal cerrado de operadores.

Teorema 4.30. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si $T^* : Y^* \to X^*$ es estrictamente singular (estrictamente cosingular) entonces T es estrictamente cosingular (estrictamente singular).*

Corolario 4.31. *Sean X e Y espacios de Banach con X reflexivo y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si T es estrictamente singular (estrictamente cosingular) entonces T^* es estrictamente cosingular (estrictamente singular).*

Teorema 4.32. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo, estrictamente cosingular y débilmente compacto. Entonces T^* es estrictamente singular.*

Nuestro primer resultado sobre operadores estrictamente cosingulares, relativo a espacios de Lorentz de sucesiones, es el siguiente:

Proposición 4.33. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^n \omega'_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k} = 0.$

(ii) Se tiene la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow d(\omega', 1)$ *y es estrictamente cosingular.*

Demostración. (i)⇒(ii). Por el Teorema 4.8 la inclusión $m(\omega') \hookrightarrow m(\omega)$ es estrictamente singular, es decir, la inclusión $(d(\omega', 1))^* \hookrightarrow (d(\omega, 1))^*$ es estrictamente singular, luego por el Teorema 4.30 la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow d(\omega', 1)$ es estrictamente cosingular.

(ii)⇒(i). Por el Teorema 4.30 la inclusión $m_0(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega')$ es estrictamente singular y esto es equivalente por la Observación 4.7 a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega'_k}{\sum_{k=1}^n \omega_k} = 0.$$

□

Para espacios de Marcinkiewicz de sucesiones tenemos los siguientes resultados:

Proposición 4.34. *Sean los pesos* $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ *y* $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$*. Si* $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ *y la inclusión es estrictamente cosingular entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$$

Demostración. El que la inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ sea estrictamente cosingular es equivalente a que la inclusión $(d(\omega, 1))^* \hookrightarrow (d(\omega', 1))^*$ sea estrictamente cosingular. Por el Teorema 4.30 la inclusión $d(\omega', 1) \hookrightarrow d(\omega, 1)$ es estrictamente singular y esto es equivalente a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$$

□

Proposición 4.35. *Sean los pesos* $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ *y* $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$*. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0$$

entonces $m_0(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega')$ *y la inclusión es estrictamente cosingular.*

Demostración. La condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0$$

es equivalente a que $d(\omega', 1) \hookrightarrow d(\omega, 1)$ sea estrictamente singular, es decir, es equivalente a que $(m_0(\omega'))^* \hookrightarrow (m_0(\omega))^*$ sea estrictamente singular. El Teorema 4.30 nos da el resultado. □

En cuanto a las inclusiones canónicas respecto a espacios extremos tenemos los siguientes resultados:

Corolario 4.36. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de c_0 y de ℓ_∞. Entonces la inclusión canónica $E \hookrightarrow c_0$ es estrictamente cosingular.*

Demostración. La demostración es idéntica a la del Corolario 4.9. □

Se sigue del corolario anterior que si E es un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_∞ entonces la inclusión canónica $E \hookrightarrow \ell_\infty$ es siempre estrictamente cosingular (El caso $E = c_0$ es un resultado clásico de Pełczyński (ver [P_2])).

Proposición 4.37. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_1. Entonces la inclusión canónica $\ell_1 \hookrightarrow E$ es estrictamente cosingular.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $E \neq c_0$. Consideremos las inclusiones $\ell_1 \hookrightarrow d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$. Ya que $d(\omega_E, 1)$ es σ-orden continuo se tiene que $m(\omega_E) = (d(\omega_E, 1))' = (d(\omega_E, 1))^* \hookrightarrow \ell_\infty$. Ya que esta inclusión es estrictamente singular, el Teorema 4.30 nos da el resultado.

Si $E = c_0$, el resultado se obtiene por factorización. □

Observación 4.38. El mismo ejemplo de la Observación 4.10 muestra que los dos resultados anteriores no son ciertos en el contexto de los espacios de Banach de sucesiones no simétricos. Basta tomar X/H_2 y X/H_1 respectivamente en la definición de operador estrictamente cosingular.

Para finalizar el capítulo veamos algunos resultados relativos a inclusiones débilmente compactas.

Proposición 4.39. *Sea el peso $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ tal que $\tilde{\omega} \notin \ell_1$. Entonces la inclusión $i : d(\omega, 1) \hookrightarrow m(\tilde{\omega})$ es débilmente compacta.*

Demostración. Ya que la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow m(\tilde{\omega})$ factoriza a través de la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow m_0(\tilde{\omega})$ por ser $d(\omega, 1)$ σ-orden continuo, se tiene que $i^{**} : (d(\omega, 1))^{**} \hookrightarrow m(\tilde{\omega})$ luego i es débilmente compacta por la caracterización de Gantmacher de dichos operadores. □

Corolario 4.40. *Sea una sucesión de pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitraria. Son equivalentes:*

(i) Existe un espacio simétrico de sucesiones E reflexivo tal que $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) ω y $\tilde{\omega}$ no pertenecen a ℓ_1.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Si $\omega \in \ell_1$ entonces $d(\omega, 1) = \ell_\infty$ y, por tanto, $E = \ell_\infty$ lo cual es una contradicción.

Si $\tilde{\omega} \in \ell_1$ entonces $m(\tilde{\omega}) = \ell_1$ y, por tanto, $E = \ell_1$ lo cual es una contradicción.

(ii)$\Rightarrow$(i). El resultado anterior nos dice que la inclusión $d(\omega, 1) \hookrightarrow m(\tilde{\omega})$ es débilmente compacta. Consideremos el espacio de interpolación real $E = (d(\omega, 1), m(\tilde{\omega}))_{1/2,4}$. Usando el Teorema 1.65 deducimos que E es un espacio simétrico reflexivo con $\phi_E(n) = \sum_{k=1}^n \omega_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 4.41. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$

(ii) Se tiene la inclusión $i : m_0(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega')$ y es débilmente compacta.

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Se tiene que $i^{**} : (m_0(\omega))^{**} = m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$, pero (i) nos dice que si $x \in m(\omega)$ entonces $x \in m_0(\omega')$, luego realmente se tiene $i^{**} : (m_0(\omega))^{**} \hookrightarrow m_0(\omega')$ y, por tanto, i es débilmente compacta.

(ii)$\Rightarrow$(i). Por hipótesis se tiene que $i^{**} : (m_0(\omega))^{**} = m(\omega) \hookrightarrow m_0(\omega')$. Ya que $\omega \in m(\omega)$ entonces $\omega \in m_0(\omega')$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$$

□

Corolario 4.42. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$

(ii) Se tiene la inclusión $d(\omega', 1) \hookrightarrow d(\omega, 1)$ y es débilmente compacta.

(iii) Se tiene la inclusión $m(\omega) \hookrightarrow m(\omega')$ y es débilmente compacta.

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa del teorema anterior y del hecho de que un operador lineal y continuo T entre dos espacios de Banach es débilmente compacto si y solo si su operador traspuesto T^* también lo es (ver [PR, Teorema C.II.4.5 y Corolario C.II.4.6]). $\square$

Observación 4.43. Las inclusiones $d(\omega', 1) \hookrightarrow d(\omega, 1)$ nunca son compactas pues la inclusión $\ell_1 \hookrightarrow d(\omega, 1)$ no lo es ya que $\|e_n - e_m\|_{d(\omega,1)} = 1 + \omega_2$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

Corolario 4.44. *Sean los pesos $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \ell_1$ y $\omega' = (\omega'_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$. Son equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^n \omega_k}{\sum_{k=1}^n \omega'_k} = 0.$

(ii) $(d(\omega', 1), d(\omega, 1))_{\theta,p}$ *es reflexivo para todo* $0 < \theta < 1$ *y* $1 < p < \infty$.

Demostración. Usando el Teorema 1.65 tenemos que la inclusión $d(\omega', 1) \hookrightarrow d(\omega, 1)$ es débilmente compacta si y solo si $(d(\omega', 1), d(\omega, 1))_{\theta,p}$ es reflexivo para todo $0 < \theta < 1$ y $1 < p < \infty$. $\square$

Corolario 4.45. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de ℓ_1. Entonces la inclusión canónica $\ell_1 \hookrightarrow E$ es débilmente compacta.*

Demostración. Podemos suponer que $E \neq c_0, \ell_\infty$. Consideremos la cadena de inclusiones $\ell_1 \hookrightarrow d(\omega_E, 1) \hookrightarrow E$. Como $E \neq \ell_1$, el Corolario 4.42 nos dice que la inclusión $\ell_1 \hookrightarrow d(\omega_E, 1)$ es débilmente compacta y, por tanto, también lo es la inclusión $\ell_1 \hookrightarrow E$. $\square$

Corolario 4.46. *Sea E un espacio simétrico de sucesiones distinto de c_0 y de ℓ_∞. Entonces la inclusión canónica $E \hookrightarrow c_0$ es débilmente compacta.*

Demostración. Supongamos primero que $E \neq \ell_1$. Tomando ω' como en la demostración del Corolario 4.9 se tiene la cadena de inclusiones $E \hookrightarrow m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow m(\omega') \hookrightarrow c_0$. El Corolario 4.42 nos dice que la inclusión $m(\tilde{\omega_E}) \hookrightarrow m(\omega')$ es débilmente compacta, luego lo es la inclusión $E \hookrightarrow c_0$. Si $E = \ell_1$ basta aplicar el corolario anterior a la inclusión $\ell_1 \hookrightarrow \ell_2$. $\square$

Bibliografía

[AEP] M. Ariño, R. Eldeeb y N.T. Peck, *The Lorentz sequence spaces $d(\omega, p)$ where ω is increasing*, Math. Ann. 282 (1988), 259-266.

[AM] M.A. Ariño y B. Muckenhoupt, *A characterization of the dual of the classical Lorentz sequence $d(\omega, q)$*, Proc. A.M.S. 112 (1991), 87-89.

[A] S.V. Astashkin, *Disjointly strictly singular inclusions of symmetric spaces*, Math. Notes 65 (1999), 3-12.

[B] B. Beauzamy, *Espaces d'interpolation réels: Topologie et Géométrie*, Lecture Notes in Mathematics 666, Springer-Verlag (1978).

[BS] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press (1988).

[BL] J. Bergh y J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag (1976).

[BK] Yu.A. Brudnyĭ y N.Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces I*, North-Holland (1991).

[CD_1] N.L. Carothers y S.J. Dilworth, *Geometry of Lorentz spaces via interpolation*, Longhorn Notes, The University of Texas at Austin, Functional Analysis Seminar (1985-1986), 107-133.

[CD_2] N.L. Carothers y S.J. Dilworth, *Subspaces of $L^{p,q}$*, Proc. A.M.S. 104 (1988), 537-545.

[CL] P.G. Casazza y Bor-Luh Lin, *On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces II*, Israel J. Math. 17 (1974), 191-218.

[C] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes Math. 356 (1996).

[CMMM] F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez y P. Matos, *On interpolation of strictly singular operators, strictly co-singular operators and related operator ideals*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 130A (2000), 971-989.

[FJT] T. Figiel, W.B. Johnson y L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces*, J. Approx. Theory 13 (1975), 395-412.

[FH] J. Flores y F.L. Hernández, *Domination by positive disjointly strictly singular operators*, Proc. A.M.S. 129 (2001), 1979-1986.

[G_1] A. García del Amo, *Espacios de Lorentz*, Tesina de Licenciatura, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, sección 2, número 12 (1989).

[G_2] A. García del Amo, *Clases de operadores singulares en retículos de Banach. Desigualdades con pesos y funciones maximales*, Tesis Doctoral, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, sección 1, número 30 (1993).

[GHR] A. García del Amo, F.L. Hernández y C. Ruiz, *Disjointly strictly singular operators and interpolation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126 (1996), 1011-1026.

[GHSS] A. García del Amo, F.L. Hernández, V.M. Sánchez y E.M. Semenov, *Disjointly strictly-singular inclusions between rearrangement invariant spaces*, J. London Math. Soc. 62 (2000), 239-252.

[Ga_1] D.J.H. Garling, *On symmetric sequence spaces*, Proc. London Math. Soc. 16 (1966), 85-106.

[Ga_2] D.J.H. Garling, *A class of reflexive symmetric BK-spaces*, Canad. J. Math 21 (1969), 602-608.

[H_1] F.L. Hernández, *On the galb of weighted Orlicz sequence spaces II*, Arch. Math. 45 (1985), 158-168.

[H_2] F.L. Hernández, *Disjointly strictly-singular operators in Banach lattices*, 18th Winter School on Abstract Analysis (Srní, 1990), Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. 31 (1990), 35-40.

[HR_1] F.L. Hernández y B. Rodríguez-Salinas, *On ℓ^p-complemented copies in Orlicz spaces II*, Israel J. Math. 68 (1989), 27-55.

[HR_2] F.L. Hernández y B. Rodríguez-Salinas, *Orliz spaces containing singular ℓ_p-complemented copies*, Proc. II Conf. Function Spaces (Poznań) 1989, Teubner-Texte zur Math. 120 (1991), 15-22.

[HR_3] F.L. Hernández y B. Rodríguez-Salinas, *Lattice embedding L^p into Orlicz spaces*, Israel J. Math. 90 (1995), 167-188.

[HSS] F.L. Hernández, V.M. Sánchez y E.M. Semenov, *Disjoint strict singularity of inclusions between rearrangement invariant spaces*, Studia Math. 144 (2001), 209-226.

[K_1] N.J. Kalton, *Orlicz sequence spaces without local convexity*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 81 (1977), 253-277.

[K_2] N.J. Kalton, comunicación privada (1996).

[KM] A. Kamińska y M. Mastyło, *The Dunford-Pettis property for symmetric spaces*, Canadian J. Math. 52 (2000), 789-803.

[Ka] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. Analyse Math. 6 (1958), 361-422.

[KPS] S.G. Kreĭn, Ju.I. Petunin y E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, A.M.S. (1982).

[Ku] S.A. Kuzin-Aleksinskii, *Weakly compact embeddings of symmetric spaces*, Siberian Math. J. 28 (1987), 111-113.

[LT_1] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Springer-Verlag (1977).

[LT_2] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag (1979).

[L] G.G. Lorentz, *Relations between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 127-132.

[Lo] G.Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices IV*, Siberian Math. J. 14 (1973), 97-108.

[LZ] W.A.J. Luxemburg y A.C. Zaanen, *Riesz spaces I*, North-Holland (1971).

[M] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Mathematicae 234 (1985).

[Mu] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1024, Springer-Verlag (1983).

[N_1] S.Ya. Novikov, *Boundary spaces for inclusion map between rearrangement invariant spaces*, Collect. Math. 44 (1993), 211-215.

[N_2] S.Ya. Novikov, *Singularities of embedding operators between symmetric function spaces on* $[0,1]$, Math. Notes 62 (1997), 457-468.

[N_3] S.Ya. Novikov, *The differences of inclusion map operators between rearrangement invariant spaces on finite and σ-finite measure spaces*, Collect. Math. 48 (1997), 725-732.

[P_1] A. Pełczyński, *On strictly singular and strictly cosingular operators. I. Strictly singular and strictly cosingular operators in $C(S)$-spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 13 (1965), 31-36.

[P_2] A. Pełczyński, *On strictly singular and strictly cosingular operators. II. Strictly singular and strictly cosingular operators in $L(\nu)$-spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 13 (1965), 37-41.

[PR] D. Przeworska-Rolewicz y S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, Polish Scientific Publishers (1968).

[R] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc. (1973).

[S] V.M. Sánchez, *Espacios de funciones invariantes por reordenamiento*, Tesina de Licenciatura, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, sección 1, número 36 (1996).

[Se] E.M. Semenov, *On the stability of the real interpolation method in the class of rearrangement invariant spaces*, Israel Mathematical Conference Proceedings 13 (1999), 172-182.

[W] R.J. Whitley, *Strictly singular operators and their conjugates*, Trans. A.M.S. 113 (1964), 252-261.

[Wo] J.Y.T. Woo, *On modular sequence spaces*, Studia Math. 48 (1973), 271-289.