UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Departamento de Álgebra

CONJUNTOS INVARIANTES EN SUPERFICIES DE RIEMANN

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Ángel Luís Pérez del Pozo

Bajo la dirección de los doctores:
Emilio Bujalance García y José Manuel Gamboa Mutuberria

Madrid, 2005

ISBN: 84-669-2805-7

Conjuntos invariantes en superficies de Riemann

por

Ángel Luis Pérez del Pozo

Memoria presentada al
Departamento de Álgebra
para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Madrid, julio de 2005

Dirigida por los profesores
Emilio Bujalance García (Universidad Nacional de Educación a Distancia) y
José Manuel Gamboa Mutuberría (Universidad Complutense de Madrid).

Resumen.

En esta memoria abordamos el estudio de algunos subconjuntos de superficies de Riemann y superficies de Klein que son invariantes bajo la acción del grupo de automorfismos de éstas. El Capítulo 2 está centrado en el conjunto de puntos de Weierstrass de una superficie de Riemann. En él se establecen cotas inferiores para el peso de los puntos fijos de un automorfismo de la superficie. Estas cotas dependen del orden del automorfismo, el número de puntos fijos que posee y el género de la superficie. En el Capítulo 3 extendemos las nociones de la teoría de puntos de Weierstrass al contexto de las superficies de Klein. Asociamos a cada punto de la superficie una sucesión de enteros positivos (formada por diferencias de dimensiones de espacios de funciones meromorfas definidas sobre la superficie) que generaliza el concepto de sucesión de gaps en un punto, estudiamos algunas propiedades de esta sucesión y la determinamos para cada punto de una superficie de Klein hiperelíptica. En el Capítulo 4 obtenemos cotas superiores para el orden de un grupo de automorfismos de una superficie de Klein con borde; estas cotas dependen del género algebraico de la superficie y de cardinales de subconjuntos finitos de la superficie invariantes bajo la acción del grupo. Imponiendo condiciones de no transitividad en la acción del grupo sobre el conjunto de componentes conexas del borde de la superficie, podemos aplicar nuestras cotas para hallar otras que sólo dependen del género algebraico.

Introducción.

Históricamente las superficies de Riemann se introdujeron como los dominios adecuados para definir funciones de variable compleja. La definición original trataba sólo superficies orientables y sin borde. La noción de superficie de Klein se atribuye a Klein por las observaciones hechas en 1882 en las páginas finales de un histórico trabajo de Hurwitz [28]. Mientras que las superficies de Riemann han sido estudiadas exhaustivamente a lo largo del siglo XX, las superficies de Klein que no son superficies de Riemann se han mencionado sólo ocasionalmente en la literatura, pero se empezó a trabajar en ellas de modo sistemático a partir de la aparición de la monografía [46]. En este trabajo, Schiffer y Spencer se refieren a las superficies de Riemann como a superficies con o sin borde y que pueden ser orientables o no. En [3], Alling y Greenleaf, para evitar confusión, vuelven a llamar superficies de Klein a las superficies introducidas por Klein y presentan con detalle la teoría básica acerca de ellas, reservando el término superficie de Riemann para aquéllas que son orientables y sin borde.

El estudio de la teoría de superficies de Riemann involucra argumentos de Geometría Algebraica, de Variable Compleja, de Topología y otros de naturaleza combinatoria. En nuestra memoria queda reflejado este hecho. Estudiar una superficie de Riemann de forma aislada resulta difícil, por lo cual se suele abordar su estudio agrupándolas en familias que cumplen alguna propiedad. Los miembros de una misma familia tienen un comportamiento semejante respecto de su grupo de automorfismos, su cuerpo de funciones meromorfas o los grupos fuchsianos que las uniformizan. En los Capítulos 2 y 3 de esta memoria se abordan cuestiones relacionadas con el cuerpo de funciones meromorfas de la superficie, lo que entraña un comportamiento particular de un subconjunto privilegiado de puntos de la superficie con respecto al grupo de automorfismos: el conjunto de puntos de Weierstrass. También el Capítulo 4 trata de subconjuntos invariantes bajo la acción del grupo de automorfismos, pero ahora desde un punto de vista distinto; se trata de aportar nuevos resultados en una línea clásica de trabajo: la obtención de cotas superiores para el orden del grupo de automorfismos.

La noción de punto de Weierstrass de una superficie de Riemann fue introducida hace más de un siglo (véase [28]). Toda superficie de Riemann compacta R de género topológico $g \geq 2$ posee un subconjunto distinguido W, finito y no vacío, cuyos elementos reciben el nombre de puntos de Weierstrass de R. La existencia de funciones meromorfas que cumplen ciertas condiciones nos permite asociar a cada punto P de R una colección, formada por g números enteros positivos, que recibe el nombre de sucesión de gaps en P. El conjunto de puntos de Weierstrass de R resulta estar formado por los puntos de R cuya sucesión de gaps es distinta de la genérica $\{1, 2, \ldots, g\}$. La sucesión de gaps en un punto P nos permite asignar a ese punto un número entero no negativo $wt(P)$ que se denomina peso de P, de manera que W está formado por los puntos de S cuyo peso es positivo.

El conjunto W de puntos de Weierstrass de R es un conjunto invariante bajo la acción de los automorfismos de R, es decir, cada automorfismo de R transforma W en sí mismo. Es más, cada uno de los subconjuntos de W formado por los puntos que tienen un peso determinado es también invariante bajo la acción de los automorfismos de R. Esto hace que el conjunto de puntos de Weierstrass sea un objeto de interés ya que contiene información sobre el grupo de automorfismos de la superficie.

Quizá el trabajo más relevante sobre puntos de Weierstrass a lo largo del siglo pasado es el artículo de Lewittes [30] donde se establece una representación matricial del grupo de automorfismos de una superficie de Riemann. Una de las consecuencias que obtuvo Lewittes es el siguiente resultado: si un automorfismo de R tiene más de cuatro puntos fijos, entonces todos ellos son puntos de Weierstrass. En [2, p. 52] Accola proporcionó una demostración alternativa de este resultado. Torres [48] y Towse [49] obtuvieron una cota inferior para los pesos de los puntos fijos de un automorfismo de R de orden 2. Watanabe propuso una demostración más simple del mismo resultado en [50]. En el Capítulo 2, siguiendo ideas de la demostración de Watanabe, obtenemos una cota inferior para los pesos de los puntos fijos de un automorfismo de R de orden arbitrario. En particular, si el número de puntos fijos del automorfismo es mayor que cuatro, la cota obtenida es positiva, con lo cual proporcionamos una demostración alternativa del resultado de Lewittes. Por último, empleamos resultados de Harvey [27] y Lewittes [30] (en la misma línea que Maclachlan en [36]) para obtener, mediante uniformización por grupos fuchsianos, superficies de Riemann para las cuales se alcanzan nuestras cotas inferiores.

El objetivo del Capítulo 3 es extender las nociones de la teoría de puntos de Weierstrass al contexto de las superficies de Klein. Un automorfismo antianalítico de orden 2 de una superficie de Riemann recibe el nombre de simetría. Se atribuye a Klein la idea de asociar a cada simetría σ de una superficie de Riemann R otra superficie topológica, con borde o no orientable (o ambas cosas), obtenida como cociente de R bajo la acción de $\langle\sigma\rangle$. En la monografía [3] Alling y Greenleaf demuestran que, dada una superficie de Klein S, existe una superficie de Riemann S_c y una simetría σ_c de S_c tales que $S = S_c/\langle\sigma_c\rangle$ y la proyección natural $\pi_c : S_c \longrightarrow S$ es un morfismo en la categoría de superficies de Klein. La terna (S_c, π_c, σ_c) recibe el nombre de cubierta doble de S.

Si S_c es compacta y su género es mayor que 1, es natural preguntarse cómo afecta la existencia de la simetría σ_c al conjunto W de puntos de Weierstrass de S_c. El primer hecho destacable es que W es simétrico, esto es, $\sigma_c(W) = W$. Así pues aparece en S el conjunto distinguido $\pi_c(W)$ formado por los puntos que son proyección de los puntos de Weierstrass de S_c. La superficie S posee su propio cuerpo de funciones meromorfas, luego cabe plantear, en primer lugar, si es posible caracterizar los elementos de $\pi_c(W)$ en términos de funciones meromorfas definidas sobre S. Este problema se resuelve parcialmente en el Capítulo 3 de esta memoria, concretamente para los puntos del borde de S.

El estudio del problema mencionado nos conduce a definir el concepto de sucesión de gaps en un punto P de una superficie de Klein S, así como una sucesión de números enteros

$\{a_j(P)\}$ formada por diferencias de dimensiones de subespacios vectoriales de funciones meromorfas definidas sobre S. La sucesión $\{a_j(P)\}$ no sólo determina la sucesión de gaps en P sino que contiene información adicional sobre el comportamiento de las funciones meromorfas cuyo conjunto de polos se reduce al conjunto $\{P\}$.

Las sucesiones de gaps en las superficies de Klein resultan tener un comportamiento distinto al de las sucesiones de gaps en las superficies de Riemann, ya que las primeras no poseen cardinal fijo y pueden llegar a ser vacías. Demostramos que, si la sucesión de gaps en algún punto de una superficie de Klein S es vacía, entonces S es hiperelíptica. A continuación estudiamos el conjunto $G_1(S)$ de puntos de S para los cuales la sucesión de gaps es vacía. Este conjunto está formado por un número finito de "curvas" dentro de la superficie S; más formalmente, $G_1(S)$ es un subespacio semialgebraico de S (en el sentido de Delfs-Knebusch) de dimensión 1. Por último, determinamos la sucesión $\{a_j(P)\}$ para cada punto P de una superficie de Klein hiperelíptica.

En el Capítulo 4 se aborda un problema clásico: el estudio de cotas superiores para el orden del grupo de automorfismos. El problema del cálculo explícito de los grupos de automorfismos es muy difícil y sólo está resuelto en casos muy particulares de superficies de Riemann: bien para géneros bajos o bien para superficies de Riemann que poseen un automorfismo distinguido, como las hiperelípticas. En el caso de superficies de Klein el problema es de parecida dificultad y sólo se conoce el grupo de automorfismos para ciertas familias. Por ese motivo un problema importante es el cálculo de cotas superiores para el orden del grupo de automorfismos de la superficie.

Es un resultado clásico, probado por Hurwitz en [28], que el orden del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(R)$ de una superficie de Riemann compacta R de género $g \geq 2$ está acotado superiormente por $84(g-1)$. En la misma línea, May [37] probó en los años 70 que para una superficie de Klein S, con borde y de género algebraico $p \geq 2$, se tiene que $|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 12(p-1)$.

Posteriormente se ha estudiado el problema de rebajar estas cotas, tanto en el caso de superficies de Riemann como de Klein, imponiendo ciertas condiciones sobre el grupo de automorfismos; por ejemplo, considerando grupos cíclicos, abelianos, metabelianos, resolubles, superresolubles, nilpotentes y p-grupos (se pueden encontrar referencias en [6, 9, 11, 12, 15, 19, 22, 23, 24, 25, 39, 40, 41, 47, 51, 52]). Las cotas que se obtienen en estos trabajos no se alcanzan para todos los géneros; como consecuencia de ello surge el siguiente problema: hallar el máximo número entero positivo que aparece como el orden de un grupo de automorfismos de una superficie de género arbitrario. Esto fue resuelto por Accola [1] y Maclachlan [34] para superficies de Riemann, por May [38] para superficies de Klein con borde y, parcialmente, por Conder, Maclachlan, Todorovic Vasiljevic y Wilson [16] para superficies de Klein sin borde.

Otra forma de abordar el problema de la acotación del orden del grupo de automorfismos consiste en imponer condiciones sobre subconjuntos de la superficie que quedan invariantes bajo la acción del grupo. El conjunto de puntos de Weierstrass de una superficie de Riemann R es un ejemplo de subconjunto invariante bajo la acción del grupo de automorfismos de la superficie. De forma más general, dado un grupo G de automorfismos de R, se dice que un subconjunto B de R es invariante bajo la acción de G si $\gamma(B) = B$ para cada $\gamma \in G$. Los conjuntos invariantes están, por tanto, formados por la unión de órbitas de puntos de R bajo la acción de G. Este hecho fue aprovechado por Arakawa [4] y Oikawa [43] para obtener cotas superiores para el orden del grupo G en función del género $g \geq 2$ de R y de cardinales de subconjuntos invariantes finitos de R. En el Capítulo 4 estudiamos el problema análogo para una superficie de Klein S, con borde y de género algebraico $p \geq 2$. Obtenemos cotas superiores para el orden de un grupo G de automorfismos de S; dichas cotas dependen del género algebraico p de S y de cardinales de subconjuntos finitos de S invariantes bajo la acción de G. Si $G = \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ y los cardinales de los conjuntos invariantes son suficientemente pequeños, nuestras cotas mejoran la obtenida por May en [37].

Cada automorfismo de una superficie de Klein S induce una permutación en el conjunto (finito) $\mathcal{B}$ de componentes conexas del borde de S. Por tanto cada grupo G de automorfismos de S actúa sobre el conjunto $\mathcal{B}$. Bajo la hipótesis de que esta acción no sea transitiva, aplicamos las cotas obtenidas anteriormente para obtener nuevas cotas para el cardinal de G. Concretamente, probamos el siguiente resultado: si el número de órbitas de la acción es mayor que 1, entonces $|G| \leq 4(p-1)$; si el número de órbitas es mayor que 2, entonces $|G| \leq 2(p-1)$ (con la salvedad, en cada caso, de algunas superficies de géneros bajos). Cabe destacar que estas cotas sólo dependen del género algebraico p de S y que mejoran la cota de May si $G = \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$.

Además demostramos que todas las cotas obtenidas en este capítulo son finas, construyendo, mediante la teoría de grupos cristalográficos no euclídeos (grupos NEC), superficies de género arbitrariamente grande para las cuales nuestras cotas se alcanzan.

Agradecimientos.

Me gustaría dar las gracias a todas las personas que han contribuido, de una u otra forma, a que la redacción de esta tesis doctoral acabara felizmente. En concreto, y pidiendo disculpas de antemano por los probables olvidos,

A mis directores, Emilio Bujalance y Jose Manuel Gamboa, por lo bien que me han tratado durante estos cuatro años. Además de conducir mi investigación y aportarme buenas ideas, han estado siempre disponibles, han sido pacientes y comprensivos con mis deficiencias y han conseguido, una vez tras otra, levantar mi ánimo cada vez que bajaba.

A los miembros del Departamento de Álgebra por haberme hecho sentir a gusto como parte del mismo y haber facilitado mi trabajo.

A Mari Emi Alonso, Antonio Díaz-Cano y Jesús Ruiz, responsables de los proyectos de investigación que me han permitido viajar y ampliar mi formación.

A Peter Turbek por el tiempo que dedicó a trabajar conmigo en Chicago, pero, sobre todo, por haber contribuido con una cálida acogida a hacer más llevadera una etapa muy dura.

A Luis Domínguez, porque su buen hacer como profesor fue determinante a la hora de que eligiera dedicarme a las Matemáticas.

A María Biezma por todos los buenos momentos.

A Jorge, Clara, Esther, Marco, Pippo, Jose, Raquel, Carmen, Connie y María por su compañía en la Facultad durante estos últimos años. No concibo la existencia sin amigos y ellos lo han sido, y buenos.

A Alfredo por estar siempre ahí. A Elena por ser especial. A Dani y Adriana por ser fantásticos.

A mis padres por haberme querido y respaldado tanto. Esta memoria está dedicada a ellos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares.

Definición 1.1. Llamaremos *superficie* a un espacio topológico S, conexo y Hausdorff, junto con una familia de *cartas* $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ que recubren S; esto es, $U_i \subseteq S$ para cada $i \in I$ es un subconjunto abierto en S, $\bigcup_{i\in I} U_i = S$ y cada $\phi_i : U_i \longrightarrow A_i$ es un homeomorfismo, donde A_i denota un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ o de $\mathbb{C}^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \ : \ y \geq 0\}$.

Una familia de cartas como la descrita en la definición de superficie recibirá el nombre de *atlas*. Diremos que una carta (U, ϕ) está *centrada* en $P \in S$ si $P \in U$ y $\phi(P) = 0$.

La *orientabilidad* de S se define como para una variedad real de dimensión 2. El *borde* de S, que denotaremos con ∂S, es el conjunto

$$\partial S = \{P \in S \ : \ \exists i \in I \text{ tal que } P \in U_i,\ \phi_i(P) \in \mathbb{R},\ \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^+\}$$

Llamaremos *interior* de S al conjunto $S \setminus \partial S$, que denotaremos con S°.

Definición 1.2. Una *superficie de Riemann* es una superficie sin borde dotada de un atlas maximal $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ tal que las *funciones de transición* $\phi_i \circ {\phi_j}^{-1}$ son analíticas (cuando los dominios de las cartas permitan que estén definidas).

Observaciones 1.3.

(i) Por ser analíticas, las funciones de transición de una superficie de Riemann preservan la orientación de $\mathbb{C}$. Como consecuencia de este hecho, toda superficie de Riemann es orientable.

(ii) Para definir una superficie de Riemann no es necesario proporcionar un atlas maximal; es suficiente con un recubrimiento de la superficie mediante un conjunto de cartas con cambios de coordenadas analíticos.

Ejemplos 1.4.

(i) La carta $(\mathbb{C}, id)$ dota al *plano complejo* $\mathbb{C}$ de estructura de superficie de Riemann.

(ii) Un abierto de una superficie de Riemann vuelve a tener estructura de superficie de Riemann, basta con restringir las cartas. Por tanto el *semiplano superior* abierto $\mathbb{H} :=$

$\{x+iy \in \mathbb{C} \,:\, y > 0\}$ es una superficie de Riemann, que también recibe el nombre de *plano hiperbólico*.

(iii) Sea $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compactificación mediante un punto de $\mathbb{C}$. El par de cartas $(U_1 = \mathbb{C},\ \phi_1(z) = z)$ y $(U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\},\ \phi_2(z) = 1/z)$ definen una estructura de superficie de Riemann en $\widehat{\mathbb{C}}$. Esta superficie se denomina *esfera de Riemann*.

Definiciones 1.5.

(i) Sean X e Y superficies de Riemann. Se dice que una aplicación continua $F : X \longrightarrow Y$ es *holomorfa* o *analítica* si, para cada par de cartas (U, ϕ) y (V, ψ), definidas sobre X e Y respectivamente y tales que $F(U) \subseteq V$, la aplicación $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ es analítica (considerada como una función de variable compleja).

(ii) Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa. Se dice que F es un *isomorfismo* si es biyectiva y su inversa es también holomorfa. Un isomorfismo de la superficie de Riemann X en sí misma recibe el nombre de *automorfismo* de X. El conjunto formado por todos los automorfismos de X, dotado de la composición de aplicaciones, tiene estructura de grupo; denotaremos este grupo con $\mathrm{Aut}(X)$.

(iii) Sea X una superficie de Riemann. Una *función holomorfa* es una aplicación holomorfa de X en $\mathbb{C}$. Una *función meromorfa* es una aplicación holomorfa de X en $\widehat{\mathbb{C}}$ distinta de la aplicación constante ∞.

A continuación se determinan los grupos de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{H}$. Como referencia se puede consultar [29].

Ejemplos 1.6.

(i) **Transformaciones de Möbius.** Una *transformación de Möbius* es una aplicación $m : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida como

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \quad ; \quad m(\infty) = a/c$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Se cumple que el grupo de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ es el conjunto formado por todas las transformaciones de Möbius. Además dadas dos ternas (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) de puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ existe una única transformación de Möbius m tal que $m(z_j) = w_j$ para $j \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) **Automorfismos de $\mathbb{H}$.** Una transformación de Möbius $m(z) = (az+b)/(cz+d)$ tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bd > 0$ transforma el semiplano superior $\mathbb{H}$ en sí mismo, y es, por tanto, un automorfismo de $\mathbb{H}$. Recíprocamente, todo automorfismo de $\mathbb{H}$ se puede escribir como una transformación de Möbius que cumple estas condiciones.

Hay una forma natural de dotar a $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ de estructura de grupo topológico. Sea $GL^+(2, \mathbb{R})$ el grupo formado por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y determinante positivo. Este conjunto se puede dotar de la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^4$. La aplicación

$$\begin{gathered} GL^+(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \end{gathered}$$

es un epimorfismo de grupos que nos permite dotar a $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ de la correspondiente topología final.

Proposición 1.7. *Sean $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa que no es constante y $P \in X$. Entonces existe un único número entero $m \geq 1$ que cumple la siguiente propiedad: para cada carta (V, ψ) de Y centrada en $F(P)$ existe una carta (U, ϕ) de X centrada en P tal que $(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(z) = z^m$. Este número entero m recibe el nombre de* multiplicidad *de F en P y será denotado con $mult_P(F)$.*

Definición 1.8. Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa que no es constante. Se dice que un punto $P \in X$ es un *punto de ramificación* de F si $mult_P(F) \geq 2$. Un punto $Q \in Y$ es un *punto de ramificación* de F si $Q = F(P)$ para algún punto de ramificación $P \in X$. Los conjuntos de puntos de ramificación de F en X e Y son subconjuntos discretos. En particular si X e Y son compactas, los conjuntos de puntos de ramificación son finitos.

Definición 1.9. Sea $f : X \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa. Se dice que f tiene un *polo de orden m* en P si $f(P) = \infty$ y $mult_P(f) = m$. Se dice que f tiene un *cero de orden m* en P si $f(P) = 0$ y $mult_P(f) = m$.

Observación 1.10. La definición que hemos dado de función meromorfa es equivalente a esta otra: una función meromorfa sobre una superficie de Riemann X es una aplicación $f : X \setminus \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $\mathcal{P}$ es un subconjunto discreto de X, tal que, para cada carta (U, ϕ) de X, la composición $f \circ \phi^{-1}$ es una función meromorfa (en el sentido usual). La forma de extender una de estas funciones a una función meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es definir, para cada $P \in \mathcal{P}$,

$$f(P) = \lim_{Q \to P} f(Q) \in \widehat{\mathbb{C}}$$

Así pues, si $f : X \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa, $P \in X$ es un polo de f de orden m y (U, ϕ) es una carta centrada en P, entonces $f \circ \phi^{-1}$ tiene un desarrollo de Laurent en torno a 0 de la forma

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{k \geq -m} a_k\, z^k$$

donde $a_{-m} \neq 0$.

Las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas tienen buenas propiedades. Como se establece en la siguiente proposición, siempre son suprayectivas y el número de preimágenes de cada punto es constante (contando multiplicidades).

Proposición 1.11. *Sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación holomorfa que no es constante. Supongamos que X es compacta. Entonces:*

(i) *F es sobreyectiva y, por tanto, Y es también compacta.*

(ii) *Existe un número entero $d \geq 1$, que recibe el nombre de* grado *de F, tal que para cada $Q \in Y$ se tiene que*

$$d = \sum_{P \in F^{-1}(Q)} mult_P(F)$$

(iii) **Fórmula de Riemann-Hurwitz.** *Sean g y q los géneros topológicos de X e Y respectivamente. Sea d el grado de F. Entonces*

$$2g - 2 = d\,(2q - 2) + \sum_{P \in X} (mult_P(F) - 1)$$

Una construcción frecuente para obtener una nueva superficie de Riemann a partir de otra consiste en efectuar el cociente bajo la acción de un grupo de automorfismos. Como referencia se puede consultar III.3 de [42].

Construcción 1.12. Sea X un superficie de Riemann y G un grupo de automorfismos de X. Existe una acción natural de G sobre X definida como

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, P) &\mapsto g(P) \end{aligned}$$

Sea $P \in X$. Se define la *órbita* de P bajo la acción de G como el conjunto

$$G \cdot P = \{\, g(P) \, : \, g \in G\}$$

y el *estabilizador* G_P de P como el subgrupo de G formado por los automorfismos que fijan P

$$G_P = \{\, g \in G \, : \, g(P) = P\}$$

Las órbitas de los puntos de X bajo la acción de G constituyen una partición de X. El conjunto formado por estas órbitas recibe el nombre de *espacio cociente* y se denota con X/G. La proyección natural

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/G \\ P &\mapsto G \cdot P \end{aligned}$$

permite dotar al cociente de una topología: la topología final relativa a π.

Si la acción del grupo G sobre X cumple ciertas condiciones, es posible dotar al cociente X/G de estructura de superficie de Riemann. En particular estas condiciones se cumplen si G es finito.

Proposición 1.13. *Sean X una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de X. Entonces el cociente $Y = X/G$ admite una única estructura de superficie de Riemann tal que la proyección $\pi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación holomorfa. El grado de π es el orden $|G|$ del grupo G. Dado $Q \in Y$ se tiene que $|G_P|$ es el mismo para cada $P \in \pi^{-1}(Q)$; además $mult_P(\pi) = |G_P|$.*

La condición de finitud sobre el grupo de automorfismos no es demasiado restrictiva si prestamos atención a superficies de Riemann compactas. En concreto, Hurwitz probó en [28] el siguiente resultado:

Teorema 1.14 (Teorema de Hurwitz). *Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Entonces* $\mathrm{Aut}(X)$ *es finito y* $|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84\,(g-1)$.

A continuación se exponen algunos hechos importantes sobre grupos fuchsianos, así como la estrecha relación de éstos con las superficies de Riemann compactas y sus grupos de automorfismos. Como referencia se puede consultar [31] o también [8] para una exposición en el contexto más amplio de los grupos NEC.

Definición 1.15. Se dice que un subgrupo Γ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ es un *grupo fuchsiano* si Γ es discreto en $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ y el espacio cociente $\mathbb{H}/\Gamma$ es compacto.

La siguiente proposición recoge las propiedades fundamentales de los grupos fuchsianos que emplearemos en esta memoria.

Proposición 1.16. *Todo grupo fuchsiano Γ admite una presentación por generadores y relaciones del tipo:*

$$\Gamma = \left\langle x_1, \ldots, x_r, a_1, b_1, \ldots, a_\gamma, b_\gamma \;:\; x_j^{m_j} = 1 \;\forall j \in \{1, \ldots, r\},\; \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{\gamma} [a_k, b_k] = 1 \right\rangle$$

donde γ y r son enteros no negativos y cada m_j es un entero mayor que 1. Los generadores x_j con $j \in \{1, \ldots, r\}$ reciben el nombre de generadores elípticos*. Además:*

(i) *Llamaremos* signatura *de Γ a la colección de enteros $\sigma(\Gamma) = (\gamma\,;\, m_1, \ldots, m_r)$. El entero γ recibe el nombre de* género orbital *de Γ mientras que los enteros m_j se denominan* periodos *de Γ. Dos grupos fuchsianos son isomorfos si y sólo si tienen la misma signatura (salvo permutación de periodos).*

(ii) *Sea $\sigma = (\gamma\,;\, m_1, \ldots, m_r)$ una colección de enteros con $\gamma, r \geq 0$ y $m_j \geq 2$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Llamaremos* área *de σ al número*

$$\mu(\sigma) = 2(\gamma - 1) + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

Existe un grupo fuchsiano con signatura σ si y sólo si $\mu(\sigma) > 0$.

(iii) *Sea Γ un grupo fuchsiano. El cociente $R = \mathbb{H}/\Gamma$ admite una única estructura de superficie de Riemann que haga que la proyección canónica $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow R$ sea un morfismo. El género de R coincide con el género orbital de Γ.*

(iv) *Si $r = 0$ escribiremos la signatura de Γ de la forma $(\gamma\,;\, —)$ y diremos que Γ es un* grupo fuchsiano de superficie*. Toda superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ es isomorfa a un cociente $\mathbb{H}/\Gamma$ donde Γ es un grupo de superficie.*

(v) *Sean* K *un grupo de superficie y* $R = \mathbb{H}/K$. *Un grupo* G *es isomorfo a un grupo de automorfismos de* R *si y sólo si* $G \cong \Gamma/K$ *para algún grupo fuchsiano* Γ *que contenga a* K *como subgrupo normal. El cociente* R/G *es isomorfo, como superficie de Riemann, a* $\mathbb{H}/\Gamma$.

(vi) *Sea* Γ *un grupo fuchsiano y* Λ *un subrupo de* Γ *de índice finito. Entonces* Λ *también es grupo fuchsiano.*

Capítulo 2

Puntos de Weierstrass. Pesos.

Toda superficie de Riemann compacta R de género topológico $g \geq 2$ posee un subconjunto distinguido W, finito y no vacío, cuyos elementos reciben el nombre de puntos de Weierstrass de R. La existencia de funciones meromorfas que cumplen ciertas condiciones nos permite asociar a cada punto P de R una colección, formada por g números enteros positivos, que recibe el nombre de sucesión de gaps en P. El conjunto de puntos de Weierstrass de R resulta estar formado por los puntos de R cuya sucesión de gaps es distinta de la genérica $\{1, 2, \ldots, g\}$. La sucesión de gaps en un punto P nos permite asignar a ese punto un número entero no negativo $wt(P)$ que se denomina peso de P, de manera que W está formado por los puntos de S cuyo peso es positivo.

El conjunto W de puntos de Weierstrass de R es un conjunto invariante bajo la acción de los automorfismos de R, es decir, cada automorfismo de R transforma W en sí mismo. Es más, cada uno de los subconjuntos de W formado por los puntos que tienen un peso determinado es también invariante bajo la acción de los automorfismos de R.

Lewittes probó en [30] que si un automorfismo de R tiene más de cuatro puntos fijos, entonces todos ellos son puntos de Weierstrass. En [2, p. 52] Accola proporcionó una demostración alternativa de este resultado. Torres [48] y Towse [49] obtuvieron una cota inferior para los pesos de los puntos fijos de un automorfismo de R de orden 2. Watanabe proporcionó una demostración más simple del mismo resultado en [50]. En este capítulo, siguiendo ideas de la demostración de Watanabe, obtenemos una cota inferior para los pesos de los puntos fijos de un automorfismo de R de orden arbitrario. En particular, si el número de puntos fijos del automorfismo es mayor que cuatro, la cota obtenida es positiva, con lo cual proporcionamos una demostración alternativa del resultado de Lewittes.

Por último, empleamos resultados de Harvey [27] y Lewittes [30] (en la misma línea que Maclachlan en [36]) para obtener, mediante uniformización por grupos fuchsianos, superficies de Riemann para las cuales se alcanzan nuestras cotas inferiores.

2.1. Divisores y puntos de Weierstrass.

A lo largo de esta sección, R denotará una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$. $\mathcal{M}(R)$ denotará el cuerpo de funciones meromorfas de R.

Definiciones 2.1.

(i) Un *divisor* en R es un símbolo formal

$$D = \sum_{P \in R} D(P) \cdot P$$

donde cada $D(P) \in \mathbb{Z}$ y $D(P) = 0$ salvo para un número finito de puntos $P \in R$. Los divisores en R, con la operación natural de suma, forman un grupo abeliano. De hecho, son el grupo abeliano libre sobre el conjunto de puntos de R.

(ii) Sea $f \in \mathcal{M}(R)$ una función meromorfa. El *divisor de* f, que denotaremos con (f), es el siguiente divisor:

$$(f) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} mult_P(f) \cdot P \quad - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} mult_P(f) \cdot P$$

(iii) Dado un divisor D en R, diremos que $D \geq 0$ si $D(P) \geq 0$ para cada $P \in R$. Dados dos divisores D y D' diremos que $D \geq D'$ si $D - D' \geq 0$.

(iv) Dado un divisor D en R, el *espacio de funciones meromorfas con polos acotados por* D, que denotaremos con $L_R(D)$ (o simplemente con $L(D)$ si no hay riesgo de confusión), es el siguiente conjunto de funciones meromorfas:

$$L_R(D) = \{f \in \mathcal{M}(R) \ : \ (f) \geq -D\}$$

Observaciones 2.2.

(i) $L(D)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Por definición, si $D \leq D'$ entonces $L(D) \subseteq L(D')$.

(ii) Supongamos que $D(P) = n > 0$. Entonces la condición $f \in L(D)$ quiere decir que si f tiene un polo en P, el orden de ese polo es a lo sumo n. Análogamente, si $D(P) = -n < 0$, entonces $f \in L(D)$ significa que f ha de tener un cero en P y, además, el orden de ese cero ha de ser por lo menos n.

Como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch se obtiene:

Teorema 2.3 (Teorema de los gaps de Noether). *Sean R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ y $P_1, P_2, P_3, \ldots$ una sucesión de puntos de R (en la que puede haber puntos repetidos). Definimos la sucesión de divisores $D_0 = 0$; $D_{j+1} = D_j + P_{j+1}$ para cada $j \geq 0$. Entonces existen g enteros positivos $1 = \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_g < 2g$ tales que:*

$$\exists f \in L(D_j) \setminus L(D_{j-1}) \quad \Leftrightarrow \quad j \notin \{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$$

Observación 2.4. $D_{j-1} \leq D_j$ luego, por la Observación 2.2 (i), $L(D_{j-1}) \subseteq L(D_j)$. Si el contenido es estricto entonces $L(D_{j-1})$ tiene codimensión 1 en $L(D_j)$.

Demostración. Veamos que el cociente $V := L(D_j)/L(D_{j-1})$ tiene dimensión 1. Sea $n := D_j(P_j) > 0$. Denotaremos con $\overline{f}$ la clase de equivalencia en V de una función meromorfa $f \in L(D_j)$. Si $\overline{f}$ es un elemento no nulo de V, entonces f está en la diferencia $L(D_j) \setminus L(D_{j-1})$. Por pertenecer f a $L(D_j)$, si f tiene un polo en P_j entonces el orden de ese polo es a lo sumo n. Pero como f no pertenece a $L(D_{j-1})$, necesariamente f ha de tener un polo de orden n en P_j; por tanto, si elegimos una carta ϕ centrada en P_j, la expresión local de f tendrá un desarrollo en serie de Laurent (véase la Observación 1.10) de la forma

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{k \geq -n} a_k \, z^k$$

donde $a_{-n} \neq 0$.

Sean $\overline{f}$ y $\overline{g}$ dos elementos no nulos de V, sea ϕ una carta centrada en P y sean $(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{k \geq -n} a_k \, z^k$ y $(g \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{k \geq -n} b_k \, z^k$ los desarrollos en serie de las expresiones locales de f y g. La función meromorfa

$$h := f - \frac{a_{-n}}{b_{-n}} \, g \in L(D_j)$$

tendrá expresión local $(h \circ \phi^{-1})(z) = \sum_{k \geq -n+1} c_k \, z^k$, lo cual implica que $h \in L(D_{j-1})$. Por tanto, $\overline{h} = 0$, es decir,

$$\overline{f} = \frac{a_{-n}}{b_{-n}} \, \overline{g}$$

Así pues $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son linealmente dependientes sobre $\mathbb{C}$. □

Definición 2.5. Sea $P \in R$ y tomemos como sucesión de puntos $P_j = P$ para cada $j \geq 1$. La sucesión de divisores mencionada en el enunciado del Teorema 2.3 será $D_j = j \cdot P$ para cada $j \geq 0$. De la demostración de la Observación 2.4 se deduce que, para una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(R)$ y un entero positivo $j \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

1. $f \in L(D_j) \setminus L(D_{j-1})$
2. f tiene un único polo en R, que es P, y ese único polo es de orden j.

Si una función meromorfa f cumple las condiciones 1 y 2 diremos que f es una *función en* $j(P)$.

Así pues, como caso particular del Teorema de los gaps de Noether, tomando $P_j = P$ para cada $j \geq 1$, obtenemos:

Teorema 2.6 (Teorema de los gaps de Weierstrass). *Sean R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ y $P \in R$. Entonces existen g enteros positivos* $1 = \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_g < 2g$ *tales que*

$$\textit{existe una función en } j(P) \quad \Leftrightarrow \quad j \notin \Gamma(P) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$$

Definiciones 2.7.

(i) Los enteros γ_j del Teorema 2.6 reciben el nombre de *gaps* en P y al conjunto $\Gamma(P) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ se le llama *sucesión de gaps* en P. Llamaremos *no-gaps* en P a los enteros del conjunto $\mathbb{N} \setminus \Gamma(P)$.

(ii) Diremos que P es un *punto de Weierstrass* de R si $\Gamma(P) \neq \{1, 2, \ldots, g\}$.

(iii) Llamaremos *peso* de P al entero positivo

$$wt(P) = \sum_{j=1}^{g} (\gamma_j - j)$$

Obviamente P es un punto de Weierstrass si y sólo si $wt(P) > 0$.

Proposición 2.8. *Sean $B \in Aut(R)$ y $P \in R$. Entonces $\Gamma(P) = \Gamma(B(P))$. En particular, el conjunto W de puntos de Weierstrass de R es invariante bajo la acción de automorfismos de R, es decir, $B(W) = W$ para cada $B \in Aut(R)$.*

Demostración. Supongamos que n es un no-gap en P. Sea f una función meromorfa en $n(P)$. Entonces $f \circ B^{-1}$ es una función meromorfa en $n(B(P))$ y, por tanto, n es un no-gap en $B(P)$. Aplicando esto al automorfismo B^{-1} obtenemos que todo no-gap en $B(P)$ también es un no-gap en P. Por tanto las sucesiones de gaps en P y $B(P)$ coinciden. $\square$

Observaciones 2.9.

(i) El conjunto de no-gaps en P tiene estructura de semigrupo aditivo: si f es una función en $j(P)$ y g es una función en $k(P)$ entonces el producto $f\,g$ es una función en $(j+k)(P)$. Por tanto si j y k son no-gaps, su suma $j+k$ también es un no-gap.

(ii) Si R tiene género 1 y $P \in R$, entonces $\Gamma(P) = \{1\}$ por el Teorema 2.6 y, por tanto, no hay puntos de Weierstrass en R.

(iii) Si R tiene género 0, esto es, $R = \widehat{\mathbb{C}}$, la esfera de Riemann, entonces para cada $P \in R$ existe un automorfismo de R que transforma P en el punto del infinito ∞ (véase 1.6). Este automorfismo se puede interpretar como una función en $1(P)$ y f^j será una función en $j(P)$ para cada $j \geq 1$. Por tanto podemos decir por extensión, aunque no hayamos definido punto de Weierstrass para superficies de género 0, que no hay puntos de Weierstrass en $\widehat{\mathbb{C}}$.

El siguiente resultado establece la finitud del conjunto de puntos de Weierstrass en una superficie de género mayor que 1. Se encuentra probado en [20, pág. 85].

Proposición 2.10. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Entonces el conjunto W de puntos de Weierstrass de R es finito. Además $2g+2 \leq |W| \leq g^3 - g$. De hecho, hay exactamente $g^3 - g$ puntos de Weierstrass en R si contamos cada uno con su peso, es decir,*

$$\sum_{P \in R} wt(P) = g^3 - g$$

2.2. Algunos resultados previos.

Para una superficie de Riemann compacta R de género $g \geq 2$, Lewittes encontró en [30] una representación matricial h de $\mathrm{Aut}(R)$, obtenida haciendo actuar cada automorfismo de R sobre $\Omega_1(R)$, el espacio vectorial complejo de dimensión g formado por las diferenciales holomorfas de R. Dado un automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(R)$ con algún punto fijo $P \in R$, el siguiente resultado de Lewites proporciona la representación $h(T)$ en términos de la expresión local de T cerca de P y de la sucesión de gaps en P:

Teorema 2.11. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, sea $T \in \mathrm{Aut}(R)$ un automorfismo de orden n que fija $P \in R$ y sea $z \mapsto \varepsilon z$ la expresión local de T cerca de P, donde ε es una raíz primitiva n-ésima de la unidad. Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ la sucesión de gaps en P. Entonces, con respecto a una base adecuada de $\Omega_1(R)$, la representación matricial $h(T)$ es la matriz diagonal* $\mathrm{diag}\,\{\varepsilon^{\gamma_1}, \ldots, \varepsilon^{\gamma_g}\}$.

Sea Γ un grupo fuchsiano (véanse la Definición 1.15 y la Proposición 1.16) con signatura $\sigma = (\gamma\,; m_1, \ldots, m_r)$, sean $K \lhd \Gamma$ un grupo fuchsiano de superficie, $R = \mathbb{H}/K$ la superficie de Riemann cociente, $G = \Gamma/K$ un grupo de automorfismos de R y $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow R$ la proyección canónica. Los puntos fijos en $\mathbb{H}$ de elementos de Γ son los puntos fijos de los generadores elípticos x_k y sus conjugados y cada generador elíptico x_k tiene un único punto fijo en $\mathbb{H}$, al que llamaremos z_k (véase 5.2 de [29]). Sabiendo esto, es fácil probar lo siguiente:

Observación 2.12. Los puntos fijos en R de elementos de G son los puntos del conjunto $\bigcup_{k=1}^{r} \psi(\Gamma\, z_k)$, donde $\Gamma\, z$ denota la órbita de z en $\mathbb{H}$ bajo la acción de Γ.

Demostración. Sea $P = zK$ un punto fijo de $T = \gamma K \in G$. Tendremos por tanto que

$$zK = P = T(P) = (\gamma K)(zK) = \gamma(z)K$$

así que $z = \delta(\gamma(z))$ para algún $\delta \in K$. Luego $\delta \circ \gamma$ será conjugado de algún generador elíptico de Γ, es decir, $\delta \circ \gamma = \rho^{-1} \circ x_k \circ \rho$ para ciertos $\rho \in \Gamma$ y $k \in \{1, \ldots, r\}$. Tendremos pues que $\rho(z) = x_k(\rho(z))$, con lo cual $\rho(z) = z_k$ por ser z_k el único punto fijo en $\mathbb{H}$ de x_k. Con lo que queda probado que $z \in \Gamma\, z_k$ lo que implica que $P = zK \in \psi(\Gamma\, z_k)$.

Recíprocamente, si $P \in \psi(\Gamma\, z_k)$, se tiene que $P = \rho(z_k)K$ para algún $\rho \in \Gamma$. Pero entonces P es punto fijo del automorfismo $(\rho \circ x_k \circ \rho^{-1})K \in G$. $\square$

Supongamos ahora que G es un grupo cíclico de orden n generado por un automorfismo T. Recordemos que m_k es el orden del generador elíptico x_k. Como $K = Ker\,\phi$ no contiene elementos de orden finito, también m_k es el orden de $\phi(x_k)$ en G, así que m_k divide a n. Los puntos del conjunto $\psi(\Gamma\, z_k)$ serán puntos fijos del automorfismo $T^{(n/m_k)}$. Harvey encontró en [27] la expresión local de $T^{-(n/m_k)}$ cerca de cada uno de sus puntos fijos en función del epimorfismo $\phi : \Gamma \longrightarrow G$. Como $G \cong \mathbb{Z}_n$ identificaremos cada elemento de G de la forma T^m con el entero m módulo n y usaremos la notación $\phi_k := \phi(x_k)$ para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$. El resultado de Harvey es:

Teorema 2.13. *En cada $P \in \psi(\Gamma z_k)$ la expresión local de $T^{-(n/m_k)}$ es $z \mapsto \varepsilon_k z$ donde*

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i \eta_k / m_k}$$

donde η_k es tal que $0 < \eta_k < m_k$, $(\eta_k, m_k) = 1$ y $\phi_k \eta_k \equiv n/m_k \pmod{n}$

Sea $\omega = e^{2\pi i/n}$. Los autovalores de la representación matricial $h(T)$ (ver Teorema 2.11) son potencias de ω. Para el caso en que el orden de G es un número primo, Lewittes obtuvo en [30] una expresión para la multiplicidades $\{N_j\}_{0 \leq j \leq n-1}$ de los autovalores ω^j en la representación $h(T)$. Usando las técnicas de Lewittes ("bajar" y "subir" diferenciales entre R y R/G y calcular dimensiones de subespacios vectoriales de diferenciales usando el teorema de Riemann-Roch) se pueden obtener estas multiplicidades en el caso en que n es un entero positivo arbitrario. Además, con ayuda del Teorema 2.13, las fórmulas para calcular los N_j se pueden reescribir en función del epimorfismo ϕ y del género orbital de Γ, tal y como las presentó Harvey en [27]:

Proposición 2.14. *Con las notaciones anteriores se tiene*

$$N_0 = \gamma$$

$$N_j = \gamma - 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ j \cdot \phi_k \neq 0 \pmod{n}}}^{r} \left(1 - \left\langle \frac{j \cdot \phi_k}{n} \right\rangle \right) \quad para\ \ j \in \{1, \ldots, n-1\}$$

donde $\langle x \rangle$ denota la parte fraccionaria de x.

Por otro parte, Macbeath obtuvo en [33] el número de puntos fijos de cualquier automorfismo del grupo cíclico G en función de la signatura de Γ:

Proposición 2.15. *Para un automorfismo $U \in G$ cuyo orden es d, el número $F(U)$ de puntos fijos de U en R viene dado por:*

$$F(U) = n \sum_{m_k \in d\mathbb{Z}} \frac{1}{m_k}$$

2.3. Automorfismos que fijan un número par de puntos.

Teorema 2.16. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Sea T un automorfismo de R con un número par $r \geq 6$ de puntos fijos y sea n el orden de T. Entonces el peso de cada punto fijo P de T satisface la siguiente cota:*

$$wt(P) \geq \frac{1}{8}(n-1)(r-4)(r-2)$$

Demostración. Sea $G = \langle T \rangle$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}(R)$ generado por T, sea $S = R/G$ el cociente de R bajo la acción de G y sea q el género de S. Consideramos la proyección natural

$$\begin{aligned} \pi : R &\longrightarrow S \\ P &\longmapsto \overline{P} \end{aligned}$$

que es un morfismo entre superficies de Riemann compactas. Por tanto, se satisface la fórmula de ramificación de Riemann-Hurwitz (véase 1.11) para π. Veamos qué aspecto toma esta fórmula. Para cada $P \in R$ la fibra $\pi^{-1}(\overline{P})$ es la órbita de P bajo la acción de G (véanse 1.12 y 1.13). El cardinal de cada una de estas órbitas es n, salvo si P es punto fijo de alguna potencia de T distinta de la identidad (en este caso el cardinal de la órbita disminuye). Así pues, π es un morfismo de grado n y sus puntos de ramificación son los puntos fijos de las potencias de T distintas de la identidad. En particular, los r puntos fijos de T son puntos de ramificación de π con índice de ramificación igual a $n-1$ (ya que, en este caso, la órbita de P tiene cardinal 1). Sustituyendo esta información en la fórmula de Riemann-Hurwitz para π obtenemos

$$(*) \qquad 2g-2 = n\,(2q-2) + (n-1)\,r + B$$

donde B denota la contribución a la fórmula del resto de los puntos de ramificación de π.

La siguiente afirmación será útil a lo largo de la demostración:

(+) *Sea $F : X \longrightarrow Y$ un morfismo de grado n entre superficies de Riemann compactas y sea $Q \in Y$ tal que $F^{-1}(Q)$ consta de un único punto $P \in X$. Si α es un no-gap en Q entonces $n\,\alpha$ es un no-gap en P.*

Veamos que esta última afirmación es cierta. Como α es un no-gap en Q, existe una función en $\alpha(Q)$ (véase la Definición 2.5), es decir, una función meromorfa $f : Y \to \widehat{\mathbb{C}}$ que cumple que Q es su único polo y que el orden de este polo es α. Así pues f es un morfismo de grado α y, por tanto, la composición $f \circ F$ es un morfismo de grado $n\,\alpha$. Además $(f \circ F)^{-1}(\infty) = F^{-1}(Q) = \{P\}$, con lo cual $f \circ F$ es una función en $(n\,\alpha)(P)$ y, por tanto, $n\,\alpha$ es un no-gap en P, como queríamos probar.

Sea P uno cualquiera de los puntos fijos de T. Vamos a estimar el peso $wt(P)$. Para ello, consideramos 2 casos:

(i) $\overline{P}$ no es punto de Weierestrass de S.

Esto es lo mismo que decir que $\alpha_j := q + j$ es un no-gap en $\overline{P}$ para cada entero $j \geq 1$. Como π es un morfismo de grado n y $\pi^{-1}(\overline{P}) = \{P\}$ podemos aplicar (+), obteniendo que $n\,\alpha_j = n\,(q+j)$ es un no-gap en P para cada $j \geq 1$. Sabiendo que la colección de enteros $\{n\,\alpha_j\}_{j\geq 1}$ está formada por no-gaps en P, tendremos que el peso en P sería mínimo cuando la sucesión de gaps en P coincidiera con la sucesión $\{\gamma_l\}_{1\leq l\leq g}$ de los g primeros enteros positivos que no están en la colección $\{n\,\alpha_j\}_{j\geq 1}$. Podemos suponer entonces, dado que estamos calculando una cota inferior para el peso, que nos encontramos en esta situación.

Como $n\,(q+1)$ es el primer no-gap en P, tendremos $n\,(q+1)-1$ gaps cuya contribución al peso será nula. Usando la ecuación $(*)$, podemos obtener el número m de gaps cuya contribución al peso es positiva:

$$m = g - (n\,q + n - 1) = \frac{1}{2}(n-1)(r-4) + \frac{B}{2} > 0$$

El peso $wt(P)$ sería mínimo cuando m fuera lo más pequeño posible, esto es, cuando $B = 0$, con lo que $m = \frac{1}{2}(n-1)(r-4)$. Calculando el peso en este caso, obtendremos la cota inferior que buscamos. Tendremos pues $n-1$ gaps entre $n\,(q+1)$ y $n\,(q+2)$, cada uno de los cuales añadirá una unidad al peso, $n-1$ gaps entre $n\,(q+2)$ y $n\,(q+3)$ que añadirán dos unidades al peso cada uno y así sucesivamente hasta que se acaben los m gaps que contribuyen al peso. Al ser r par, $n-1$ divide a m, así que podemos agrupar estos m gaps en $(r-4)/2$ bloques (de $n-1$ gaps cada uno), de modo que la contribución al peso de cada gap de un bloque es una unidad mayor que la contribución de cada gap del bloque anterior. Por tanto, el peso en este caso toma el valor

$$w(P) = (n-1)\sum_{k=1}^{(r-4)/2} k = (n-1)\frac{1}{2}\frac{(r-4)}{2}\frac{(r-2)}{2}$$

(ii) $\overline{P}$ es punto de Weierstrass de S.

Sea $\{\beta_j\}_{j\geq 1}$ la sucesión de no-gaps en $\overline{P}$. El hecho de que $\overline{P}$ no sea punto de Weierstrass se traduce en que algunos de los g primeros no-gaps en $\overline{P}$ toman valores más bajos que en el caso (i), pero, sea como sea, siempre se tiene que $\beta_j \leq \alpha_j = q + j$ para cada $j \geq 1$. De nuevo por (+), se cumple que $n\,\beta_j$ es un no-gap en P para cada $j \geq 1$.

Supongamos ahora que el peso $wt(P)$ es lo más pequeño posible, es decir, que la sucesión de gaps $\{\widetilde{\gamma}_j\}$ en P está formada por los g primeros enteros positivos que no están en la colección $\{n\,\beta_j\}_{j\geq 1}$. Como $n\,\beta_j \leq n\,\alpha_j$ para cada $j \geq 1$, se sigue que $\widetilde{\gamma}_l \geq \gamma_l$ para cada $l \in \{1,\ldots,g\}$. Por lo tanto, el peso $wt(P)$ será necesriamente mayor o igual que la cota obtenida en (i). $\square$

Observación 2.17. Si el orden de T es una potencia de 2, esto es $n = 2^m$, el número de puntos fijos r es par. El motivo es el siguiente: al ser todos los divisores de n pares, todas las órbitas bajo la acción de G de puntos de la superficie, salvo las formadas por los puntos fijos de T, tendrán cardinal par. Así que en la relación $(*)$ el sumando B es par y, por tanto, también lo es $(n-1)\,r$. Como $n-1$ es impar, concluimos que r es par.

Probaremos a continuación que la cota obtenida es fina para todos los posibles valores de n y r. Esto se hará construyendo superficies y automorfismos para los cuales se alcanza la cota.

Proposición 2.18. *Sean n y r enteros positivos, r par, tales que $n \geq 2$ y $r \geq 6$. Entonces existen una superficie de Riemann compacta R, un automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(R)$ con r puntos fijos y de orden n y un punto $P \in R$ que es punto fijo de T tales que*

$$wt(P) = \frac{1}{8}(n-1)(r-4)(r-2)$$

Demostración. Sea Γ un grupo fuchsiano (véanse la Definición 1.15 y la Proposición 1.16) con presentación

$$\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_r \ : \ x_1^n = \ldots = x_r^n = x_1 x_2 \ldots x_r = 1 \rangle$$

es decir, con signatura $\sigma = (0; n, \ldots, n)$, donde r es el número de periodos. La existencia de este grupo está garantizada por la Proposición 1.16 (ii), ya que el área $\mu(\sigma)$ de la signatura

$$\mu(\sigma) = -2 + r\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq -2 + r\,\frac{1}{2} \geq -2 + 6\,\frac{1}{2} = 1$$

es positiva.

Consideramos una aplicación $\xi : \{x_1, \ldots, x_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \xi(x_k) = 1 & \text{para} & 1 \leq k \leq r/2 \\ \xi(x_k) = n-1 & \text{para} & r/2 < k \leq r \end{array}$$

donde $\mathbb{Z}_n$ denota el grupo aditivo de restos módulo n. Es inmediato comprobar que ξ es compatible con las relaciones de Γ. Por tanto, ξ se extiende a un único homomorfismo de grupos $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_n$. Además, por estar el generador 1 de $\mathbb{Z}_n$ en la imagen de ϕ, tenemos que ϕ es un epimorfismo. Usaremos la notación $\phi_k = \phi(x_k)$.

Veamos ahora que el núcleo $K = Ker\,\phi$ es un grupo de superficie. En primer lugar, K es grupo fuchsiano por ser subgrupo de índice finito del grupo fuchsiano Γ (véase Proposición 1.16 (vi)). Por tanto, sólo nos queda probar que K no contiene elementos de orden finito distintos de la identidad, ya que, en ese caso, no tendrá generadores elípticos. Pero es un hecho conocido (véase [35]) que los elementos de orden finito de Γ son todos conjugados de potencias de los generadores elípticos, es decir de la forma $y = d\,x_k^m\,d^{-1}$ con $d \in \Gamma$, $k \in \{1, \ldots, r\}$ y $m \neq 0 \pmod n$. La imagen de uno cualquiera de estos elementos

$$\phi(y) = \phi(d) + m\,\phi(x_k) - \phi(d) = m\,\phi_k$$

es distinta de cero en $\mathbb{Z}_n$, ya que ϕ_k es una unidad en $\mathbb{Z}_n$. Así pues, y no está en $K = Ker\,\phi$.

Por la Proposición 1.16, apartados (iii) y (v), el grupo $G = \Gamma/K \cong \mathbb{Z}_n$ actúa como grupo de automorfismos de la superficie de Riemann compacta $R = \mathbb{H}/K$. Sea g el género de R y sea $T \in G$ el automorfismo de R que se identifica con el generador $1 \in \mathbb{Z}_n$.

Por la Proposición 2.15, el número de puntos fijos de T en R es

$$F(T) = n\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{n} = r$$

Vamos ahora a obtener la sucesión de gaps en $P = \psi(\Gamma\, z_1)$, que por el Teorema 2.13 es punto fijo de $T^{-n/n} = T^{-1}$ y, por tanto, de T (nótese que $m_1 = n$). Este mismo Teorema nos proporciona la expresión local de T^{-1} cerca de P. Como $\phi_1 = 1$ se tiene que $\eta_1 = 1$ con lo cual $\varepsilon_1 = \omega = e^{2\pi i/n}$, es decir, la expresión local de T^{-1} cerca de P es $z \mapsto \omega\, z$. Por el Teorema 2.11 la representación matricial $h(T)$ obtenida por Lewittes tiene la forma diag $\{\omega^{\gamma_1}, \ldots, \omega^{\gamma_g}\}$, donde $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$ es la sucesión de gaps en P. Así que el número de gaps en P que son congruentes con j módulo n coincide con la multiplicidad N_j del autovalor ω^j en $h(T)$ para cada $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Las fórmulas de la Proposición 2.14 nos permiten obtener las multiplicidades N_j (recuérdese que, en nuestro caso, $\gamma = 0$ y $m_k = n$ para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$):

$$N_0 = 0$$

$$N_j = -1 + \sum_{k=1}^{r/2}\left(1 - \left\langle\frac{j\cdot 1}{n}\right\rangle\right) + \sum_{k=(r+2)/2}^{r}\left(1 - \left\langle\frac{j\cdot(n-1)}{n}\right\rangle\right) =$$

$$= -1 + \frac{r}{2}\left(1 - \frac{[\,j\,]_n}{n}\right) + \frac{r}{2}\left(1 - \frac{[\,j\,(n-1)\,]_n}{n}\right) = \frac{r-2}{2}$$

$$\text{para } j \in \{1, \ldots, n-1\}$$

donde $[\,m\,]_n$ denota el representante entre 0 y $n-1$ de la clase de m módulo n.

Al ser $N_0 = 0$ ninguno de los gaps es múltiplo de n. Por este motivo, los $(r-2)/2$ gaps que son congruentes con j módulo n han de ser exactamente los $(r-2)/2$ primeros enteros positivos congruentes con j módulo n. Esto se debe a la estructura de semigrupo aditivo del conjunto de no-gaps (véase Observación 2.9 (i)): como n es un no-gap, si m es otro no-gap, entonces todos los enteros de la forma $m + t\,n$ han de ser no-gaps. Como esto sucede para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, queda determinada la sucesión de gaps en P. Pero si nos fijamos en la demostración del Teorema 2.16 observaremos que esta sucesión de gaps es exactamente la que proporciona la cota inferior de dicho Teorema. Por tanto el peso de P coincide con la cota. □

Observación 2.19. A partir de la fórmula de Riemann-Hurwitz $(*)$ podemos obtener el género g de las superficies que hemos construido para probar la Proposición 2.18. El género q del cociente R/G coincide, por la Proposición 1.16 (iii), con el género orbital de Γ, esto es, $q = 0$. Por la Proposición 2.15, el número de puntos fijos de cualquier potencia de T es r, así que los únicos puntos de ramificación de $\pi : R \longrightarrow R/G$ son los puntos fijos de T, por lo tanto $B = 0$. Usando la relación $(*)$ obtenemos

$$g = (n-1)\,\frac{r-2}{2}$$

2.4. Automorfismos que fijan un número impar de puntos.

Vamos a considerar ahora automorfismos con un número impar r de puntos fijos. Mantendremos las notaciones empleadas durante la sección precedente. En este caso, a diferencia del anterior, es necesario estudiar separadamente dos casos, dependiendo de la paridad del orden n del automorfismo. Esto se debe a que, si n es par, en la fórmula de Riemann-Hurwitz

$$(*) \qquad\qquad 2g-2 = n\,(2q-2) + (n-1)\,r + B$$

el sumando $(n-1)\,r$ es impar, con lo que necesariamente B es impar y en particular no nulo. Esto hace que la situación se vuelva más complicada.

Sin embargo, si n es impar el tratamiento es muy similar al de la sección anterior. Estudiaremos, en primer lugar, este caso.

Teorema 2.20. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Sea T un automorfismo de R de orden impar n con un número impar $r \geq 5$ de puntos fijos. Entonces el peso de cada punto fijo P de T satisface la siguiente cota:*

$$wt(P) \geq \frac{1}{8}(n-1)(r-3)^2$$

Demostración. Este resultado se prueba reproduciendo paso por paso la demostración del Teorema 2.16. La única diferencia reseñable aparece cuando se calcula el peso $wt(P)$ asociado a la sucesión de gaps $\{\gamma_l\}_{1\leq l\leq g}$ que proporciona la cota inferior. En este caso el número $m = (n-1)(r-4)/2$ de gaps que contribuyen al peso no es divisible entre $n-1$ con lo cual tenemos $(r-5)/2$ bloques con $n-1$ gaps cada uno y un último bloque formado por $(n-1)/2$ gaps, cada uno de los cuales añade al peso $(r-3)/2$ unidades. Por tanto:

$$w(P) = (n-1)\sum_{k=1}^{(r-5)/2} k + \frac{n-1}{2}\,\frac{r-3}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(r-3)^2$$

□

Proposición 2.21. *Sean $n \geq 2$ y $r \geq 5$ enteros positivos impares. Enconces existen una superficie de Riemann compacta R, un automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(R)$ con r puntos fijos y de orden n y un punto $P \in R$ que es punto fijo de T tales que*

$$wt(P) = \frac{1}{8}(n-1)(r-3)^2$$

Demostración. La demostración es paralela a la de la Proposición 2.18, así que omitiremos los detalles y mantendremos las mismas notaciones. Las justificaciones de las afirmaciones que se harán son análogas a las de la citada demostración.

Sea Γ un grupo fuchsiano con género orbital 0 y r periodos iguales a n y sean $\{x_1, \ldots, x_r\}$ los generadores de Γ. Consideramos la aplicación $\xi : \{x_1, \ldots, x_r\} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ dada por

$$n = 3 : \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}(r+3) \\ \\ r_2 = \frac{1}{2}(r-3) \end{cases}$$

$$n = 5 : \begin{cases} r_1 = 2 \\ \\ r_2 = \frac{1}{2}(r-3) \\ \\ r_3 = \frac{1}{2}(r-1) \\ \\ r_4 = 0 \end{cases} \qquad n \geq 7 : \begin{cases} r_1 = 2 \\ \\ r_{\frac{n-1}{2}} = r_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}(r-3) \\ \\ r_{n-2} = 1 \\ \\ r_j = 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde r_j denota el número de géneradores cuya imagen por ξ es $[\,j\,]_n$ (nótese que, a efectos de esta demostración, no importa cuál sea la imagen de cada generador siempre que se satisfaga la condición previamente citada, así que podemos hacer una elección cualquiera). Es inmediato comprobar la compatibilidad de ξ con la única relación relevante $\prod_{k=1}^{r} x_k = 1$ de la presentación de Γ, pues $\sum_{k=1}^{r} k\, r_k \in n\mathbb{Z}$. Por tanto ξ se extiende a un epimorfismo $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_n$. Las imágenes de todos los generadores de Γ son unidades en el anillo $\mathbb{Z}_n$ (esto es, generadores del grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$), así que $K := Ker\,\phi$ es un grupo de superficie.

Sea $R = \mathbb{H}/K$ y sea $G = \Gamma/K \cong \mathbb{Z}_n$, que es un grupo de automorfismos de R. Sean g el género de R y $T \in G$ el automorfismo de R que se identifica con el generador $1 \in \mathbb{Z}_n$. Por la Proposición 2.15, el número de puntos fijos de T en R es r. Sea x_k un generador elíptico tal que $\phi(x_k) = 1$ y sea $P = \psi(\Gamma\, z_k)$, que es un punto fijo de R.

La Proposición 2.14 nos permite calcular la multiplicidad N_j del autovalor $e^{2\pi i j/n}$ en la representación $h(T)$ de Lewittes (Teorema 2.11) para cada $j \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$N_0 = 0$$

$$N_j = \frac{r-1}{2} \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq \tfrac{n-1}{2}$$

$$N_j = \frac{r-3}{2} \quad \text{para} \quad \tfrac{n-1}{2} < j \leq n-1$$

Por los Teoremas 2.11 y 2.13 esta multiplicidad N_j coincide con el número de gaps en

P que son congruentes con j módulo n. Al no ser ninguno de los gaps múltiplo de n, la estructura de semigrupo aditivo del conjunto de no-gaps hace que quede determinada la sucesión de gaps en P : está formada por los N_j primeros enteros enteros congruentes con j módulo n para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pero esta sucesión de gaps es exactamente la que proporciona la cota inferior del Teorema 2.20. Por tanto el peso de P coincide con la cota. $\square$

Observación 2.22. Como en la Observación 2.19, la fórmula de Riemann-Hurwitz nos permite obtener el género de la superficie que hemos construido en la demostración de 2.21 que de nuevo es

$$g = (r-2)\,\frac{n-1}{2}$$

Nótese que en este caso, a diferencia del anterior, no se construyen superficies de cualquier género, ya que el factor $(r-2) > 1$ es un número impar, con lo que no aparecen superficies cuyo género es una potencia de 2.

Trataremos ahora el caso en que el orden n de T es par. También en este caso es posible obtener una cota inferior para el peso de un punto fijo de T:

Teorema 2.23. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Sea T un automorfismo de R de orden par n con un número impar $r \geq 5$ de puntos fijos. Entonces el peso de cada punto fijo P de T satisface la siguiente cota:*

$$wt(P) \geq \frac{1}{8}(n-1)(r-5)(r-3) + \frac{r-3}{2}\left(n - \frac{a+1}{2}\right)$$

donde a es el mayor divisor impar de n.

Demostración. Mantendremos las notaciones empleadas en el Teorema 2.16. Argumentando igual que en la demostración del citado Teorema, se puede asegurar que el peso de P será siempre mayor o igual que el que se obtendría si la sucesión de gaps en P estuviera formada por los g primeros enteros que no están en la colección $\{n\,(q+j)\}_{j\geq 1}$ (q es el género de $S = R/\langle T\rangle$). A partir de ahora supondremos que nos encontramos en esta situación.

De la fórmula de Riemann-Hurwitz $(*)$ se sigue que el número de gaps cuya contribución al peso es positiva es

$$m = g - (n\,q + n - 1) = \frac{1}{2}(n-1)(r-4) + \frac{B}{2}$$

y, además, que el número B es un entero positivo impar, como señalamos al comienzo de esta sección. Por tanto obtendremos una cota inferior para el peso de P si B es lo más pequeño posible. Recordemos que B es la contribución a $(*)$ de los puntos de ramificación de $\pi : R \longrightarrow S$ que no son puntos fijos de T. Si Q es uno de esos puntos de ramificación, el cardinal n_Q de la órbita de Q bajo la acción de T es el cociente n/m_Q, donde m_Q es la multiplicidad de π en Q. La aportación de Q y los demás puntos de su órbita a $(*)$ será $B_Q = n_Q\,(m_Q - 1) = n - n_Q$, que será más pequeño cuanto mayor sea n_Q.

Como B es impar, existe un punto $Q \in R$ que no es punto fijo de T tal que B_Q es impar. Desde luego $B \geq B_Q$, así que se trata de minimizar $B_Q = n - n/m_Q$ de modo que B_Q sea impar. Esto se logra cuando m_Q es la mayor potencia de 2 que divide a n (nótese que $m_Q > 1$, ya que n es par, y $m_Q < n$ por la Observación 2.17, al ser r impar). Por ello denotamos con a el mayor divisor impar de n y así $B \geq n - a$, luego

$$m \geq \frac{1}{2}(n-1)(r-4) + \frac{n-a}{2} = (n-1)\,\frac{r-5}{2} + \left(n - \frac{a+1}{2}\right)$$

y, como $1 < a \leq n-1$, se tiene que

$$n - 1 > n - \frac{a+1}{2} \geq \frac{n}{2}$$

Por tanto tenemos, por un lado, $(r-5)/2$ bloques formados por $n-1$ gaps cada uno, de manera que cada gap del bloque j-ésimo añade j unidades al peso. Por otro lado, tenemos un último bloque formado por al menos $n - (a+1)/2$ gaps, cada uno de los cuales añade $(r-3)/2$ unidades al peso. Por tanto, la cota inferior es

$$(n-1)\sum_{k=1}^{(r-5)/2} k + \frac{r-3}{2}\left(n - \frac{a+1}{2}\right) = \frac{1}{8}(n-1)(r-5)(r-3) + \frac{r-3}{2}\left(n - \frac{a+1}{2}\right)$$

$\square$

Capítulo 3

Sucesiones de gaps en superficies de Klein.

Un automorfismo antianalítico de orden 2 de una superficie de Riemann recibe el nombre de simetría. Se atribuye a Klein la idea de asociar a cada simetría σ de una superficie de Riemann R otra superficie topológica, con borde o no orientable (o ambas cosas), obtenida como cociente de R bajo la acción de $\langle\sigma\rangle$. El tratamiento moderno de estas superfices, que actualmente reciben el nombre de superficies de Klein, se debe a Alling y Greenleaf, cuyos trabajos se encuentran recogidos en [3]. En esta monografía se introduce la definición de superficie de Klein como una superficie topológica dotada de lo que Alling y Greenleaf llaman estructura dianalítica. También se demuestra que, dada una superficie de Klein S, existe una superficie de Riemann S_c y una simetría σ_c de S_c tales que $S = S_c/\langle\sigma_c\rangle$ y la proyección natural $\pi_c : S_c \longrightarrow S$ es un morfismo en la categoría de las superficies de Klein. La terna (S_c, π_c, σ_c) recibe el nombre de cubierta doble de S.

Si S_c es compacta y su género es mayor que 1, es natural preguntarse cómo afecta la existencia de la simetría σ_c al conjunto W de puntos de Weierstrass de S_c. El primer hecho destacable es que W es simétrico, esto es, $\sigma_c(W) = W$. Así pues aparece en S el conjunto distinguido $\pi_c(W)$ formado por los puntos que son proyección de los puntos de Weierstrass de S_c. La superficie S posee su propio cuerpo de funciones meromorfas, luego cabe plantear, en primer lugar, si es posible caracterizar los elementos de $\pi_c(W)$ en términos de funciones meromorfas definidas sobre S. Este problema se resuelve parcialmente en el presente capítulo, concretamente para los puntos del borde de S.

El estudio del problema antes mencionado nos conduce a definir el concepto de sucesión de gaps en un punto P de una superficie de Klein S, así como una sucesión de números enteros $\{a_j(P)\}$ formada por diferencias de dimensiones de subespacios vectoriales de funciones meromorfas definidas sobre S. La sucesión $\{a_j(P)\}$ no sólo determina la sucesión de gaps en P sino que contiene información adicional sobre el comportamiento de las funciones meromorfas cuyo conjunto de polos se reduce al conjunto $\{P\}$.

Las sucesiones de gaps en las superficies de Klein resultan tener un comportamiento distinto al de las sucesiones de gaps en las superficies de Riemann, ya que las primeras no poseen cardinal fijo y pueden llegar a ser vacías. Demostramos que, si la sucesión de gaps en algún punto de una superficie de Klein S es vacía, entonces S es hiperelíptica. A continuación estudiamos el conjunto $G_1(S)$ de puntos de S para los cuales la sucesión de gaps es vacía. Este conjunto está formado por un número finito de "curvas" dentro de la superficie S; más formalmente, $G_1(S)$ es un subespacio semialgebraico de S (en el sentido de Delfs-Knebusch) de dimensión 1. Por último, determinamos la sucesión $\{a_j(P)\}$ para cada punto P de una superficie de Klein hiperelíptica.

3.1. Superficies de Klein.

Definiciones 3.1.

(i) Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Diremos que una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es *antianalítica* en U si su función conjugada

$$\begin{aligned} \overline{f} : U \longrightarrow\ & \mathbb{C} \\ z\ \longmapsto\ & \overline{f(z)} \end{aligned}$$

es analítica en U. Diremos que f es *dianalítica* en U si para cada componente conexa V de U la restricción de f a V es analítica o antianalítica.

(ii) Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^+$. Diremos que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es *dianalítica* en A si se puede extender a una función dianalítica definida en un abierto de $\mathbb{C}$, es decir, si existen un subconjunto U abierto de $\mathbb{C}$ y una función dianalítica $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $A \subseteq U$ y $f = \widetilde{f}|_A$. Diremos que f es *analítica* en A si se puede conseguir que la extensión $\widetilde{f}$ sea analítica en U.

Definición 3.2. Una *superficie de Klein* es una superficie S (véase la Definición 1.1) junto con un conjunto maximal de cartas $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ tal que las *funciones de transición* $\phi_i \circ {\phi_j}^{-1}$ son dianalíticas (nótese que estas funciones están definidas si $U_i \cap U_j$ es no vacío).

Observaciones 3.3.

(i) Para definir una superficie de Klein no es necesario proporcionar un conjunto maximal de cartas; basta con un conjunto de cartas dianalíticas que recubran la superfice (al que llamaremos *atlas dianalítico*). Si la superficie de Klein es orientable es posible elegir un atlas formado por cartas analíticas.

(ii) Hay una biyección natural entre superficies de Riemann y superficies de Klein orientables sin borde. Identificaremos estas dos clases a partir de ahora.

Ejemplos 3.4.

(i) La carta $(\mathbb{C}^+, id)$ dota a $\mathbb{C}^+$ de estructura de superficie de Klein. El borde de $\mathbb{C}^+$ consiste en los puntos del eje del real.

(ii) Sea $\Delta = \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ la compactificación mediante un punto de $\mathbb{C}^+$. Las dos cartas $U_1 = (\mathbb{C}^+, \phi_1(z) = z)$ y $U_2 = (\Delta \setminus \{0\}, \phi_2(z) = 1/\overline{z})$ dotan a Δ de estructura de superficie de Klein. El borde de Δ es el conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definición 3.5. Sea S una superficie de Klein compacta de género topológico g y sea k el número de componentes conexas de ∂S. El *género algebraico* de S es el entero $p = \alpha g + k - 1$, donde $\alpha = 2$ si S es orientable y $\alpha = 1$ en caso contrario. El *tipo topológico* de S (es decir, la clase de equivalencia de S bajo la relación "ser homeomorfo a") está determinado por la terna (p, k, α).

Definición 3.6. La *aplicación doblez* es la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^+ \\ & x+iy & \longmapsto & x+i|y| \end{array}$$

Definición 3.7. Un *morfismo* entre las superficies de Klein S y S' es una aplicación continua $F : S \longrightarrow S'$ tal que

1. $F(\partial S) \subseteq \partial S'$.
2. Para cada $P \in S$ existen cartas (U, ϕ) en S y (V, ψ) en S' y una aplicación analítica $T : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $P \in U$, $F(U) \subseteq V$, $\psi(V) \subseteq \mathbb{C}^+$ y $\psi \circ F|_U = \Phi \circ T \circ \phi$.

Proposición 3.8. *Los morfismos entre superficies de Klein son aplicaciones abiertas.*

Definición 3.9. Diremos que una aplicación F entre superficies de Klein es un *isomorfismo* si es un morfismo biyectivo y F^{-1} es también un morfismo. De hecho, si F es un morfismo biyectivo, por la Proposición 3.8, es un isomorfismo. Un *automorfismo* de una superficie de Klein es un morfismo de la superficie en sí misma. La composición de dos morfismos entre superficies de Klein es un morfismo. Por tanto, el conjunto de automorfismos de una superficie de Klein S, dotado con la composición de aplicaciones, es un grupo, que denotaremos con $\mathrm{Aut}^{\pm}(S)$. Los morfismos de orden 2 reciben el nombre de *involuciones.*

Definición 3.10. Sean S y S' superficies de Klein orientables y supongamos que están orientadas. Diremos que un morfismo es *analítico* si preserva la orientación y que es *antianalítico* si la invierte. Los automorfismos analíticos de S forman un subgrupo de índice 2 de $\mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ que denotaremos con $\mathrm{Aut}^{+}(S)$. Si S es una superficie de Riemann, $\mathrm{Aut}(S)$ (según se definió en el Capítulo 1) y $\mathrm{Aut}^{+}(S)$ son grupos isomorfos.

Ejemplo 3.11. En 1.6 se determinó el grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ y se le dio estructura de grupo topológico. Ahora vamos a hacer lo mismo con $\mathrm{Aut}^{\pm}(\mathbb{H})$. Sea $\mathcal{A}^-$ el conjunto formado por las transformaciones m del tipo

$$m(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{H}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc < 0$. Los elementos de $\mathcal{A}^-$ resultan ser todos los automorfismos antianalíticos de $\mathbb{H}$, con lo cual se tiene que $\mathrm{Aut}^{\pm}(\mathbb{H}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cup \mathcal{A}^-$.

Sea $GL(2,\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y determinante no nulo. Este conjunto hereda la topología usual como subespacio de $\mathbb{R}^4$. La aplicación

$$GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\pm}(\mathbb{H})$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} m(z) = (az+b)/(cz+d) & \text{si } \; det(A) > 0 \\ \\ m(z) = (a\overline{z}+b)(c\overline{z}+d) & \text{si } \; det(A) < 0 \end{cases}$$

es un epimorfismo de grupos que permite dotar a $\mathrm{Aut}^{\pm}(\mathbb{H})$ de la topología final correspondiente.

A continuación se introducen algunas notaciones usadas por May en [37]. Los resultados que se mencionan se deben a Alling y Greenleaf y se pueden encontrar demostrados en [3].

Proposición 3.12. *Sean $F : S \longrightarrow S'$ un morfismo no constante entre superficies de Klein y $P \in S$.*

(i) *Existen cartas dianalíticas (U, ϕ) y (V, ψ) centradas en P y $F(P)$, respectivamente, tales que, para cada $Q \in U$,*

$$F(Q) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ \Phi(\pm\, \phi(Q)^e) & si \ F(P) \in \partial S' \\ \\ \psi^{-1}(\pm\, \phi(Q)^e) & si \ F(P) \notin \partial S' \end{cases}$$

donde e es un entero positivo, al que llamaremos multiplicidad *o* índice de ramificación *de F en P y denotaremos con $mult_F(P)$ y otras veces, por brevedad, con $e_F(P)$. Se dirá que F es* ramificado *en P si $mult_F(P) > 1$.*

(ii) *Llamaremos* grado relativo *de P sobre $F(P)$ al entero positivo $d_F(P)$ definido como*

$$d_F(P) = \begin{cases} 2 & si \ P \in S^{\circ} \ y \ F(P) \in \partial S' \\ 1 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

Existe un entero positivo r, al que llamaremos grado *de F, tal que*

$$\sum_{P \in F^{-1}(Q)} e_F(P)\; d_F(P) = r$$

para cada $Q \in S'$.

(iii) *Si $F : S \longrightarrow S'$ y $G : S' \longrightarrow S''$ son morfismos entre superficies de Klein de grados r y s respectivamente entonces $G \circ F$ es un morfismo de grado $r \cdot s$. Además $e_{G\circ F}(P) = e_F(P) \cdot e_G(F(P))$ para cada $P \in S$.*

Vamos a introducir la *cubierta doble* de una superficie de Klein (véase, por ejemplo, [3]).

Construcción 3.13. Sea S una superficie de Klein que no es una superficie de Riemann (es decir, ∂S es no vacío, S es no es orientable o ambas cosas). Entonces existe una terna (S_c, π_c, σ_c), llamada la *cubierta doble* de S, que cumple las siguientes condiciones:

1. S_c es una superficie de Riemann. Si S es compacta, S_c también lo es; además, el género de S_c coincide con el género algebraico de S.

2. La aplicación $\pi_c : S_c \longrightarrow S$ es un morfismo de grado 2 entre superficies de Klein tal que $|\pi_c^{-1}(P)| = 1$ si $P \in \partial S$ y $|\pi_c^{-1}(P)| = 2$ si $P \notin \partial S$. Por tanto π_c no es ramificado en ningún punto de S_c.

3. La aplicación $\sigma_c : S_c \longrightarrow S_c$ es el único automorfismo antianalítico de orden 2 de S_c que satisface la igualdad $\pi_c \circ \sigma_c = \pi_c$. Llamaremos *involución antianalítica* de S_c a este autormorfismo. Un punto $Q \in S_c$ es punto fijo de σ_c si y sólo si $\pi_c(Q) \in \partial S$.

Si no hay posibilidad de confusión, denotaremos la cubierta doble de S simplemente con (S_c, π, σ).

Como veremos más adelante, la cubierta doble permite establecer una equivalencia funtorial entre la categoría de superficies de Klein y la de superficies de Riemann simétricas que introducimos a continuación. Conviene destacar también un resultado probado por Bujalance y Singerman en [10]: la superficie de Klein S es orientable si y sólo si $S_c \backslash \pi^{-1}(\partial S)$ no es conexo.

Definición 3.14. Una *superficie de Riemann simétrica* es un par (R, σ) donde R es una superficie de Riemann y $\sigma : R \longrightarrow R$ es un autormorfismo antianalítico de orden 2 (al que llamaremos *involución antianalítica* de R). Un *morfismo* entre dos superficies de Riemann simétricas (R, σ) y (R', σ') es un morfismo $F : R \longrightarrow R'$ que conserva la orientación y cumple que $F \circ \sigma = \sigma' \circ F$.

Observación 3.15. Es un hecho conocido (una demostración puede verse en [13, pág. 7]) que son funtorialmente equivalentes las dos categorías cuyos objetos son las superficies de Klein y las superficies de Riemann simétricas, respectivamente, y cuyos morfismos son los morfismos no constantes. La forma natural de identificarlas es la siguiente:

Una superficie de Klein S se asocia con su cubierta doble (S_c, σ), que es una superficie de Riemann simétrica.

Una superficie de Riemann simétrica (R, σ) se asocia con el cociente $S = R/\langle\sigma\rangle$, que puede ser dotado con una única estructura de superficie de Klein tal que la proyección canónica sea un morfismo.

Si S es una superficie de Klein con cubierta doble (S_c, σ) se cumple que

$$\mathrm{Aut}^{\pm}(S) \cong Aut(S_c, \sigma) = \{F \in \mathrm{Aut}(S_c) : \; F \circ \sigma = \sigma \circ F\}$$

La restricción de esta correspondencia nos permite identificar también las superficies de Klein compactas con las superficies de Riemann simétricas compactas.

3.2. Funciones meromorfas en superficies de Klein.

Definición 3.16. Sean S una superficie de Klein y $\mathcal{A} = \{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ un atlas dianalítico. Una *función meromorfa sobre* S *relativa a* $\mathcal{A}$ es una familia de aplicaciones $f_{\mathcal{A}} = \{f_i : U_i \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{i \in I}$ tal que:

1. Cada aplicación $f_i \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa.
2. $f_i(U_i \cap \partial S) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
3. Para cada componente conexa V de $U_i \cap U_j$ se tiene:

$$f_i|_V = \begin{cases} f_j|_V & \text{si } \phi_i \circ \phi_j^{-1} \text{ es analítica} \\ \\ \overline{f_j}|_V & \text{si } \phi_i \circ \phi_j^{-1} \text{ es antianalítica} \end{cases}$$

Observaciones 3.17.

(i) El conjunto $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(S)$ de funciones meromorfas sobre S relativas a $\mathcal{A}$ es una extensión de cuerpos de $\mathbb{R}$ con grado de trascendencia 1. Se prueba fácilmente que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos atlas dianalíticos que definen S, entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(S)$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(S)$ son cuerpos $\mathbb{R}$-isomorfos. Así pues llamaremos a cualquiera de estos cuerpos *el cuerpo de funciones meromorfas de* S que será denotado con $\mathcal{M}(S)$.

(ii) $\mathcal{M}(S)$ contiene una copia de $\mathbb{C}$ si y sólo si S es una superficie de Riemann. Además, $\mathcal{M}(S)$ es un cuerpo formalmente real (esto es, un cuerpo en el cual -1 no es suma de cuadrados) si y sólo si ∂S es vacío.

(iii) Sea S una superficie de Klein orientable y sin borde. Los conjuntos de funciones meromorfas sobre S, vista como superficie de Riemann y como superficie de Klein, son cuerpos isomorfos, por tanto los identificaremos y denotaremos ambos con $\mathcal{M}(S)$.

Definiciones 3.18.

(i) Sean S una superficie de Klein, (S_c, π, σ) su cubierta doble y f una función meromorfa sobre S_c. Podemos definir una nueva función meromorfa $\sigma^* f$ sobre S_c del siguiente modo:

$$(\sigma^* f)(P) = \overline{f(\sigma(P))}$$

Diremos que f es *invariante bajo* σ^* o *simétrica* si $\sigma^* f = f$. Dado un subconjunto A de $\mathcal{M}(S_c)$ denotaremos con A^{σ^*} el subconjunto de A formado por las funciones meromorfas invariantes bajo σ, esto es,

$$A^{\sigma^*} = \{f \in A : \ \sigma^* f = f\}$$

(ii) Sea $f = \{f_i : U_i \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{i \in I}$ una función meromorfa de una superficie de Klein S. El valor de f en un punto no está bien definido, ya que depende de la carta elegida entre las que cubren dicho punto. Sin embargo podemos introducir las nociones de cero y polo de f. Diremos que f tiene un *cero* (resp. un *polo*) *de orden* n en $P \in S$ si existe $i \in I$ tal que $P \in U_i$ y $f_i \circ \phi_i^{-1}$ tiene un cero (resp. un polo) de orden n en $\phi_i(P)$. Es inmediato comprobar que estas definiciones no dependen de la carta elegida.

Observación 3.19. La multiplicidad del morfismo $\sigma^* f$ en un punto $P \in S_c$ es la misma que la de f en $\sigma(P)$.

Demostración. Sea $c : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el morfismo definido como $c(z) = \overline{z}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $c(\infty) = \infty$. Entonces, por definición, podemos escribir $\sigma^* f = c \circ f \circ \sigma$. Las aplicaciones σ y c son automorfismos de S_c y $\widehat{\mathbb{C}}$ respectivamente y, por tanto, morfismos de grado 1, así que tienen multiplicidad 1 en todos los puntos de su dominio. Por la Proposición 3.12, para cada $P \in S_c$ se tiene que

$$e_{\sigma^* f}(P) = e_c(f(\sigma(P))) \cdot e_f(\sigma(P)) \cdot e_\sigma(P) = e_f(\sigma(P))$$

$\square$

Construcción 3.20. Sea Δ la compactificación mediante un punto de $\mathbb{C}^+$ (véase 3.4). Sean S una superficie de Klein y $f = \{f_i : U_i \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{i \in I}$ una función meromorfa de S. A partir de f se construye un morfismo $\widehat{f} : S \longrightarrow \Delta$ del siguiente modo: si f tiene un polo en $P \in S$, definimos $\widehat{f}(P) = \infty$; en otro caso, elegimos un dominio de carta U_j que contenga a P y definimos $\widehat{f}(P) = a + |b|i$, donde $f_j(P) = a + bi$. La definición de esta función no depende de la carta elegida. Además, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si f y g son funciones meromorfas no constantes tales que $f \neq g$, entonces $\widehat{f} \neq \widehat{g}$.
2. El orden de una función meromorfa f en un punto P y el índice de ramificación del morfismo $\widehat{f}$ en P coinciden.

La siguiente Proposición se deduce de los resultados A.5 y A.8 en el Apéndice de [8].

Proposición 3.21. *Sean S una superficie de Klein y (S_c, π, σ) su cubierta doble. Entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales reales $\pi^* : \mathcal{M}(S) \longrightarrow \mathcal{M}(S_c)^{\sigma^*}$. Este isomorfismo cumple la siguiente propiedad: si f es una función meromorfa sobre S, entonces el morfismo $\widehat{\pi^*(f)}$ asociado a $\pi^*(f)$ es $\widehat{f} \circ \pi$.*

A lo largo del resto de la sección, S denotará una superficie de Klein compacta de género algebraico $p \geq 2$ con cubierta doble (S_c, π, σ) (estamos suponiendo, por tanto, que S no es una superficie de Riemann). Necesitamos usar el lenguaje de divisores en superficies de Klein. Las definiciones básicas son, formalmente, las mismas que las dadas en 2.1.

Para divisores en una superficie de Klein S se cumplen los enunciados análogos de las Observaciones 2.2 y 2.4, pero con dos salvedades:

(i) Los espacios $L_S(D)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}(S)$ y, por tanto, espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, pero no sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Si D_j es una sucesión de divisores construida como en el Teorema de los gaps the Noether (2.3), también se cumple que $L(D_{j-1}) \subseteq L(D_j)$. Sin embargo, si el contenido es estricto, la diferencia de dimensiones de los dos subespacios no tiene por qué ser 1. De hecho, como probaremos más adelante, si $P \in S \setminus \partial S$ y $D_j = j \cdot P$ entonces

$$dim_{\mathbb{R}} L_S(D_j) - dim_{\mathbb{R}} L_S(D_{j-1}) = 2$$

si $j > p$, donde p es el género algebraico de S.

También podemos dar una Definición análoga a la 2.5 y, a partir de ella, establecer las definiciones de gap y no-gap en un punto de una superficie de Klein. Hacemos esto a continuación.

Definición 3.22. Sea $P \in S$ y consideremos la sucesión de divisores $D_j = j \cdot P$ para cada $j \geq 0$. Para una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(S)$ y un entero positivo $j \in \mathbb{N}$ son equivalentes:

1. $f \in L(D_j) \setminus L(D_{j-1})$
2. f tiene un único polo en R, que es P, y ese único polo es de orden j

Si una función meromorfa f cumple las condiciones anteriores diremos que f es una *función en* $j(P)$. Si existe una función en $j(P)$ diremos que j es un *no-gap* en P; en caso contrario diremos que j es un *gap* en P.

Así pues la sucesión de gaps en un punto $P \in S$ está determinada por los espacios $L(D_j)$. Concretamente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. j es un no-gap en P
2. $a_j(P) := dim_{\mathbb{R}} L_S(D_j) - dim_{\mathbb{R}} L_S(D_{j-1}) \neq 0$

Para estudiar las sucesiones de gaps en los puntos de una superficie de Klein estableceremos relaciones entre los espacios $L_S(D)$ y ciertos espacios de funciones meromorfas asociados a divisores en la cubierta doble S_c.

Definición 3.23. Dado un divisor $D = \sum_{P \in S} n_P \, P$ en S definimos el *divisor asociado* a D como

$$\widetilde{D} := \sum_{Q \in S_c} n_{\pi(Q)} \, Q$$

que es un divisor en S_c.

Los tres siguientes resultados aparecen sin demostrar en [45]. Serán enunciados como lemas y se incorporarán demostraciones.

Lema 3.24. *Sea D un divisor en S. Entonces la restricción de la aplicación π^* al subespacio vectorial $L_S(D)$ es un $\mathbb{R}$-isomorfismo sobre el subespacio vectorial $L_{S_c}(\widetilde{D})^{\sigma^*}$.*

Demostración. Sea f una función meromorfa con un cero o un polo de orden n en $P \in S$. Como se afirmó en la Construction 3.20, el morfismo $\widehat{f} : S \longrightarrow \Delta$ asociado a f tiene orden n en P y lo mismo le sucede a $\widehat{f} \circ \pi = \widehat{\pi^*(f)}$ en cada punto de $\pi^{-1}(P)$ (por la Proposición 3.12, teniendo en cuenta que π no es ramificado en ningún punto de S_c). Por tanto, $\pi^*(f)$ tiene orden n en cada punto de $\pi^{-1}(P)$.

Esto prueba, por definición de $\widetilde{D}$, que si f es una función meromorfa en $L_S(D)$, entonces $\pi^*(f)$ está en $L_{S_c}(\widetilde{D})^{\sigma^*}$. Al mismo tiempo, también implica que si f no está en $L_S(D)$, entonces $\pi^*(f)$ no está en $L_{S_c}(\widetilde{D})^{\sigma^*}$. Por lo tanto $\pi^*(L_S(D)) = L_{S_c}(\widetilde{D})^{\sigma^*}$. $\square$

Lema 3.25. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y $\tau : V \longrightarrow V$ una aplicación tal que $\tau^2 = Id$ y*

$$\tau(v + w) = \tau(v) + \tau(w) \text{ para cada } v, w \in V$$

$$\tau(\lambda v) = \overline{\lambda}\tau(v) \text{ para cada } v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

Entonces el espacio vectorial real $V^\tau = \{v \in V :\ \tau(v) = v\}$ cumple que $dim_{\mathbb{R}} V^\tau = dim_{\mathbb{C}} V$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V^τ sobre $\mathbb{R}$. Probemos que $\mathcal{B}$ genera V sobre $\mathbb{C}$. Sea $v \in V$. Como los vectores $v_1 = v + \tau(v)$ y $v_2 = i(v - \tau(v))$ están en V^τ, deducimos que:

$$v = \frac{1}{2}(v_1 - iv_2) = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j - i \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - i\beta_j}{2}\, u_j$$

con $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$. Si $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0$ con $\lambda_j \in \mathbb{C}$, entonces $0 = \tau(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j) = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} u_j$. Si sumamos las dos igualdades precedentes, obtenemos $\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \overline{\lambda_j}) u_j = 0$. Como $\lambda_j + \overline{\lambda_j} \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$, concluimos que $\lambda_j + \overline{\lambda_j} = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$ y, por tanto, $\lambda_j = i\alpha_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Así pues $0 = -i \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$ lo cual implica que $\alpha_j = 0$ y, por tanto, $\lambda_j = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$. $\square$

Lema 3.26. *Sea $\sigma^* : \mathcal{M}(S_c) \longrightarrow \mathcal{M}(S_c)$ la aplicación definida en 3.18 y sea D un divisor en S. Entonces $\sigma^*(L_{S_c}(\widetilde{D})) \subseteq L_{S_c}(\widetilde{D})$.*

Demostración. Sea $f \in L_{S_c}(\widetilde{D})$. Por la Observación 3.19 se tiene que si f tiene multiplicidad j en un punto $Q \in S_c$, entonces $\sigma^* f$ tiene multiplicidad j en $\sigma(Q)$. Por tanto, para cada $Q \in S_c$, se tiene

$$(\sigma^* f)(Q) = (f)(\sigma(Q)) \geq -\widetilde{D}(\sigma(Q)) = -\widetilde{D}(Q)$$

Luego $\sigma^* f$ pertenece a $L_{S_c}(\widetilde{D})$. $\square$

Como consecuencia inmediata de los tres Lemas precedentes, teniendo en cuenta que la aplicación $\sigma^* : L_{S_c}(\widetilde{D}) \longrightarrow L_{S_c}(\widetilde{D})$ cumple las hipótesis de 3.25, se obtienen las siguientes igualdades de dimensiones:

Proposición 3.27. *Sea D un divisor en S. Entonces*

$$dim_{\mathbb{R}} L_S(D) = dim_{\mathbb{R}} L_{S_c}(\widetilde{D})^{\sigma^*} = dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(\widetilde{D})$$

Un problema de interés consiste en comparar las sucesiones de gaps en un punto $Q \in S_c$ y su proyección $\pi(Q) \in S$. En la siguiente Proposición esto se resuelve en el caso en que $Q \in \pi^{-1}(\partial S)$.

Proposición 3.28. *Sean $P \in \partial S$ y $Q = \pi^{-1}(P) \in S_c$. Sea $j \geq 1$ un entero positivo. Entonces j es un gap en P si y sólo si j es un gap en Q.*

Demostración. El entero j es un gap en P si y sólo si

$$a_j(P) = dim_{\mathbb{R}} L_S(D_j) - dim_{\mathbb{R}} L_S(D_{j-1}) = 0$$

Por la Proposición 3.27, $a_j(P) = dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(\widetilde{D}_j) - dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(\widetilde{D}_{j-1})$. Como $\pi^{-1}(P) = Q$, los divisores asociados a los D_j tienen la forma $\widetilde{D}_j = j\,Q$. Por tanto $a_j(P) = dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(j\,Q) - dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}((j-1)\,Q)$, que es cero si y sólo si j es un gap en Q. □

Observaciones 3.29.

(i) Como consecuencia inmediata de la Proposición 3.28 se obtiene que el conjunto de no-gaps en un punto $P \in \partial S$ tiene estructura de semigrupo aditivo, ya que coincide con el conjunto de no-gaps en un punto de una superficie de Riemann (véase la Observación 2.9 (i)).

(ii) De la demostración anterior y de la Observación 2.4 se deduce que $a_j(P) \in \{0, 1\}$ si $P \in \partial S$.

La situación es más complicada cuando $P \in S \setminus \partial S$, porque la fibra $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$ tiene dos elementos y los divisores asociados a los D_j toman la forma $\widetilde{D}_j = jQ_1 + jQ_2$. A lo largo del resto de la sección nos referiremos a este último caso y emplearemos la notación que acabamos de introducir.

Notación 3.30. Para poder aplicar el Teorema de los gaps de Noether (2.3) y obtener información sobre la sucesión $\{a_j(P)\}$ definimos una nueva sucesión de divisores en S_c:

1. $E_0 := 0$.
2. $E_j := E_{j-1} + Q_1$ si j es impar.
3. $E_j := E_{j-1} + Q_2$ if j es par.

Sea $b_j(P) := dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(E_j) - dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(E_{j-1})$. Por la Observación 2.4, $b_j \in \{0,1\}$ para cada $j \geq 1$. Por definición, $E_{2j} = \widetilde{D}_j$ para cada $j \geq 0$. Por lo tanto, para cada $j \geq 0$ se cumple la igualdad

$$a_j(P) = dim_{\mathbb{R}} L_S(D_j) - dim_{\mathbb{R}} L_S(D_{j-1}) = b_{2j}(P) + b_{2j-1}(P)$$

que implica que $a_j(P) \in \{0,1,2\}$.

Proposición 3.31. *Existen p números enteros (donde p es el género algebraico de S) $1 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p < 2p$ tales que:*

$$b_j(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad j \in \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$$

En particular, $a_j(P) = 2$ si $j > p$ y $a_p(P) \neq 0$.

Demostración. Basta con aplicar el Teorema de los gaps de Noether (2.3) a la superficie de Riemann S_c tomando como sucesión de divisores $\{E_j\}_{j \geq 0}$. □

En la siguiente Proposición se establecen algunas restricciones para los valores de la sucesión $\{b_j(P)\}$.

Proposición 3.32. *Sea $P \in S \setminus \partial S$. Entonces:*

(i) *Si $b_{2j-1}(P) = 1$ entonces $b_{2j}(P) = 1$ y por tanto $a_j(P) = 2$. En consecuencia las sucesiones $\{a_j(P)\}_{j\geq 1}$ y $\{b_j(P)\}_{j \geq 1}$ se determinan mutuamente.*

(ii) *El conjunto de no-gaps en P tiene estructura de semigrupo aditivo. En otros términos, si $a_j(P), a_k(P) \neq 0$ entonces $a_{j+k}(P) \neq 0$.*

Demostración. Por una de las igualdades de la Proposición 3.27 se tiene que

$$a_j(P) = dim_{\mathbb{R}} L_{S_c}(\widetilde{D}_j)^{\sigma^*} - dim_{\mathbb{R}} L_{S_c}(\widetilde{D}_{j-1})^{\sigma^*}$$

Recordemos que $\pi^{-1}(P)$ consta de 2 puntos que denotamos con Q_1 y Q_2; por tanto, $\widetilde{D}_j = jQ_1 + jQ_2$.

Si $a_j(P) \neq 0$ elegimos $f_j \in L_{S_c}(\widetilde{D}_j)^{\sigma^*} \setminus L_{S_c}(\widetilde{D}_{j-1})^{\sigma^*}$. Entonces f_j ha de tener un polo de orden j en Q_1 ó en Q_2. Pero como $Q_2 = \sigma(Q_1)$ y f_j es simétrica, de hecho f_j tiene un polo de orden j tanto en Q_1 como en Q_2 (por la Observación 3.19).

Supongamos ahora que $b_{2j-1}(P) = 1$; entonces $a_j(P) \neq 0$. La función f_j está en la diferencia $L_{S_c}(E_{2j}) \setminus L_{S_c}(E_{2j-1})$, así que $b_{2j}(P) = 1$. Con esto queda probado (i).

Por otra parte, si $a_j(P), a_k(P) \neq 0$, el producto $f_j\, f_k$ es una función meromorfa simétrica con polos de orden $j+k$ en Q_1 y Q_2 (y sin polos en el resto de S_c), por tanto $a_{j+k}(P) \neq 0$; esto prueba (ii). □

A continuación se obtiene información sobre la sucesión de gaps en un punto P a partir de las sucesiones de gaps en Q_1 y $Q_2 = \sigma(Q_1)$ (que, como se prueba, son coincidentes).

Observaciones 3.33.

(i) Las sucesiones de gaps en Q_1 y Q_2 coinciden. En particular, Q_1 es un punto de Weierstrass de S_c si y sólo si lo es Q_2.

(ii) Si j es un no-gap en Q_1 entonces j es un no-gap en P. Además $a_j(P) = 2$.

Demostración.

(i) Sea f una función meromorfa en $j(Q_1)$. Entonces $\sigma^* f$ es una función meromorfa en $j(Q_2)$ (por la Observación 3.19). Por tanto si j es un no-gap en Q_1, también lo es en Q_2. Cambiando Q_1 por Q_2 se obtiene la afirmación recíproca.

(ii) Si j es un no-gap en Q_1, existe una función meromorfa f en $j(Q_1)$. Esta función cumple que $f \in L_{S_c}(E_{2j-1}) \setminus L_{S_c}(E_{2j-2})$, así que $b_{2j-1}(P) = 1$ y, por la Proposición 3.32, $a_j(P) = 2$ (y, por tanto, j es un no-gap en P). □

3.3. Superficies de Klein hiperelípticas.

Definición 3.34. Se dice que una superficie de Riemann compacta R de género $p \geq 2$ es *hiperelíptica* si existe una función meromorfa $f : R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado 2. Diremos que una superficie de Klein S es *hiperelíptica* si lo es su cubierta doble S_c.

Estamos interesados en estudiar las sucesiones de gaps en los puntos de una superficie de Klein hiperelíptica. A continuación enumeramos algunas propiedades básicas de las superficies de Riemann hiperelípticas que serán útiles para este objetivo. Se pueden encontrar demostradas en [20].

Proposición 3.35. *Sea R una superficie de Riemann hiperelíptica. La función meromorfa $f : R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado 2 es única salvo automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, si $g : R \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es otra función meromorfa de grado 2 entonces existe una transformación de Möbius $T : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $g = T \circ f$.*

Proposición 3.36. *Sea R una superficie de Riemann compacta de género $p \geq 2$ y sea W el conjunto de puntos de Weierstrass de R. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es hiperelíptica.*
2. *Existe una involución analítica $h : R \longrightarrow R$ que tiene exactamente $2p + 2$ puntos fijos.*
3. *$|W| = 2p + 2$.*
4. *Existe $P \in W$ tal que $\Gamma(P) = \{1, 3, 5, \dots, 2p - 1\}$.*
5. *Para cada $P \in W$ se tiene que $\Gamma(P) = \{1, 3, 5, \dots, 2p - 1\}$.*

Corolario 3.37. *Toda superficie de Riemann compacta de género* 2 *es hiperelíptica.*

Demostración. Del Teorema de los gaps de Weierstrass (2.6) se deduce que las únicas sucesiones de gaps posibles en un punto de una superficie de Riemann de género 2 son $\{1, 2\}$ y $\{1, 3\}$. Por tanto, en cada punto de Weierstrass de la superficie la sucesión de gaps será $\{1, 3\}$. De la equivalencia entre 1 y 5 de la Proposición anterior se sigue que la superficie es hiperelíptica. □

Definición 3.38. El automorfismo $h : R \longrightarrow R$ de la Proposición 3.36 es la única involución analítica de R con exactamente $2p + 2$ puntos fijos. Recibe el nombre de *involución hiperelíptica* de R. La involución hiperelíptica conmuta con todos los automorfismos de R (véase [8, pág. 160]).

Observación 3.39. Sea R una superficie de Riemann hiperelíptica y sea $f \in \mathcal{M}(R)$ una función meromorfa de grado 2 cualquiera. Entonces los puntos de ramificación de f en R son exactamente los $2p + 2$ puntos de Weierstrass de R. También coincide el conjunto de puntos de Weierstrass de R con el conjunto de puntos fijos de la involución antianalítica h. Dado un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ que no es punto de ramificación de f, la aplicación h intercambia los dos puntos que forman la fibra $f^{-1}(z)$.

Introducimos ahora el *modelo plano afín* de una superficie de Riemann hiperelíptica R, que consiste en una curva en $\mathbb{C}^2$, definida como el conjunto de ceros de un polinomio en dos variables, junto con una compactificación suya que es isomorfa a R. Una descripción detallada de este modelo se puede encontrar en el Capítulo III de [42].

Construcción 3.40. Para nosotros, una *curva afín* será el conjunto de ceros en $\mathbb{C}^2$ de un polinomio no constante $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Diremos que una curva afín es *lisa* si se puede encontrar un polinomio F que la defina de manera que en cada punto de la curva alguna de las dos derivadas parciales de F es distinta de cero. Si el polinomio F es irreducible la curva es conexa. Una curva afín lisa y conexa tiene estructura de superficie de Riemann, con cartas dadas por el Teorema de la función implícita.

Sea $G(x)$ un polinomio mónico de grado $2p+1+\varepsilon$ donde $\varepsilon \in \{0, 1\}$ y $p \geq 2$. Supongamos que todas las raíces de G son simples. Sea X la curva plana definida por la ecuación $y^2 = G(x)$, que es una superficie de Riemann no compacta. "Pegando" X y la curva afín definida por $w^2 = z^{2g+2}G(1/z)$ a lo largo de los conjuntos $\{x \neq 0\}$ y $\{z \neq 0\}$ (véase [42] III.1) se obtiene una superficie de Riemann compacta Z de género p.

Podemos identificar Z con la curva X junto con algunos puntos añadidos en el infinito: un único punto, que denotaremos con ∞, si $\varepsilon = 0$; y dos puntos, que denotaremos con ∞_1 e ∞_2, si $\varepsilon = 1$.

Sea $f : Z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la aplicación que transforma $(x, y) \mapsto x$ y los puntos del infinito en ∞. Se cumple que f es una función meromorfa de grado 2; por tanto Z es hiperelíptica. Por otro lado, toda superficie de Riemann hiperelíptica R es isomorfa a una superficie Z construida con el procedimiento que hemos descrito a partir de una curva plana X. La curva X recibe el nombre de *modelo plano afín* de R.

La aplicación $h(x, y) = (x, -y)$ extendida a Z por $h(\infty) = \infty$ (si $\varepsilon = 0$) o por $h(\infty_1) = \infty_2$ y $h(\infty_2) = \infty_1$ (si $\varepsilon = 1$) es la involución hiperelíptica de Z. Los puntos de la forma $(x, 0)$ donde x es una raíz de G (junto con ∞ si G tiene grado impar) son los $2p+2$ puntos fijos de h, esto es, los puntos de Weierstrass de Z.

Sean S una superficie de Klein hiperelíptica de género $p \geq 2$ y (S_c, π, σ) su cubierta doble, también hiperelíptica por definición. Es posible elegir un modelo afín plano para S_c de manera que la involución antianalítica σ tenga una expresión sencilla en las variables x e y. Esto se detalla en la siguiente Proposición, que se puede encontrar demostrada en [14].

Proposición 3.41. *Sea S una superficie de Klein hiperelíptica con cubierta doble (S_c, π, σ). Entonces (S_c, σ) es isomorfa, como superficie de Riemann simétrica, a (R, σ_R) donde R es una superficie de Riemann hiperelíptica con modelo afín plano $\{y^2 = G(x)\}$ de manera que G y σ_R cumplen una y sólo una de las siguientes condiciones:*

1. *G es un polinomio mónico real (es decir, con coefientes reales) y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$.*
2. *G es un polinomio mónico real sin raíces reales y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, -\overline{y})$.*
3. *G es un polinomio mónico y $\sigma_R(x, y) = (-1/\overline{x}, \varphi(\overline{x}, y))$ para cierta función racional φ.*

Dos superficies de Riemann simétricas (R_i, σ_{R_i}) y (R_j, σ_{R_j}) que satisfacen las condiciones i y j anteriores, respectivamente, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, no son isomorfas.

El siguiente resultado fue probado en [26]; la formulación que empleamos se puede encontrar en [7]. Denotaremos con $[x]$ la parte entera de x y con $gr\,G$ el grado del polinomio G.

Lema 3.42 (Lema de clasificación topológica). *Sea S una superficie de Klein hiperelíptica. Sea (p, k, α) la terna de enteros positivos descrita en 3.5 que determina el tipo topológico de S. En cada uno de los tres casos descritos en 3.41 el tipo topológico de S viene dado por:*

1. *$p = [(gr\,G - 1)/2]$. Sea d el número de raíces reales de G.*
   - a) *$k = p + 1$ y $\alpha = 2$ si $d = gr\,G$.*
   - b) *$k = (2p + 2 - gr\,G + d)/2$ y $\alpha = 1$ si $0 < d < gr\,G$.*
   - c) *$k = 1$ y $\alpha = 2$ si $d = 0$ y p es par.*
   - d) *$k = 2$ y $\alpha = 2$ si $d = 0$ y p es impar.*
2. *$p = (gr\,G - 2)/2$, $k = 0$ y $\alpha = 1$.*
3. *$p = [(gr\,G - 1)/2]$ impar, $k = 0$ y $\alpha = 1$.*

Observación 3.43. En [13, páginas 38-39 y 47] se demuestra que toda superficie del primero de los tipos anteriores es isomorfa tanto a una que está definida por un polinomio G de grado par como a una que viene dada por un polinomio G de grado impar.

Es conocido que la esfera de Riemann es la única superficie de Riemann que admite funciones meromorfas de grado 1 y, por tanto, con un único polo en $\widehat{\mathbb{C}}$, el cual tiene orden 1. Si una superficie de Riemann de género $g \geq 2$ admite una función meromorfa de grado 2, entonces es, por definición, hiperelíptica y para cada punto de Weierstrass P existe una función meromorfa en $2(P)$.

En el caso de una superficie de Klein S de género algebraico $p \geq 2$, la Proposción 3.31 no excluye la posibilidad de que haya algún punto P en el interior de S tal que exista una función meromorfa f en $1(P)$. De hecho, esto ocurre si y sólo si $b_2(P) = 1$. Supongamos que existe dicha función f y sea $\widehat{f} : S \longrightarrow \Delta$ el morfismo asociado a f. Es conveniente destacar que, a diferencia de lo que sucedería para una función meromorfa sobre una superficie de Riemann, el morfismo $\widehat{f}$ no tiene grado 1. Esto se explica porque, a pesar de que $\widehat{f}^{-1}(\infty) = \{P\}$ y $\widehat{f}$ tiene multiplicidad 1 en P, el grado relativo de $\widehat{f}$ en P es 2 (véase la Proposición 3.12), ya que $P \notin \partial S$ y $\infty \in \partial\Delta$. Por tanto, $\widehat{f}$ es un morfismo de grado 2.

Definición 3.44. Sea n un entero positivo y S una superficie de Klein compacta. Denotaremos con $G_n(S)$ el conjunto de puntos $P \in S$ tales que n es el primer no-gap en P.

Sea S una superficie de Klein compacta de género algebraico $p \geq 2$ y con cubierta doble (S_c, π, σ). Estamos interesados en estudiar el conjunto $G_1(S)$, formado por los puntos $P \in S$ que admiten una función meromorfa en $1(P)$. Por la Proposición 3.28, no hay puntos de ∂S en $G_1(S)$, así que, en lo que sigue, nos preocuparemos sólo de puntos interiores de S.

Observación 3.45. Sea $P \in S \setminus \partial S$ y sean $Q_1, Q_2 \in S_c$ tales que $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $P \in G_1(S)$.
2. Existe una función meromorfa f sobre S_c con polos de orden 1 en Q_1 y Q_2 y sin polos en el resto de puntos de S_c.

Demostración. Por definición, $P \in G_1(S)$ si y sólo si $a_1(P) \neq 0$. Como

$$a_1(P) = dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(Q_1 + Q_2) - dim_{\mathbb{C}} L_{S_c}(0)$$

se deduce que $P \in G_1(S)$ si y sólo si existe una función meromorfa f no constante en $L_{S_c}(Q_1 + Q_2)$; una función f en ese espacio no puede tener un único polo de orden 1, porque S_c tiene género $p > 0$, por tanto f ha de tener polos de orden 1 en Q_1 y Q_2. $\square$

Proposición 3.46. *Si $G_1(S)$ es no vacío entonces S es hiperelíptica.*

Demostración. Sea $P \in G_1(S)$. Por la Observación precedente, existe $f \in \mathcal{M}(S_c)$ con polos de orden 1 en Q_1 y Q_2 y sin polos en los demás puntos de S_c. Entonces $f^{-1}(\infty)$ tiene dos elementos, contando multiplicidades y, por tanto, f tiene grado 2. Así pues S_c es hiperelíptica y, por definición, también lo es S. □

En la siguiente Proposición caracterizamos el conjunto $G_1(S)$ mediante las dos involuciones (hiperelíptica y antianalítica) de la cubierta doble S_c:

Proposición 3.47. *Sean S una superficie de Klein hiperelíptica, $h : S_c \longrightarrow S_c$ la involución hiperelíptica de su cubierta doble (S_c, π, σ), $P \in S \setminus \partial S$ y $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$. Entonces*

$$P \in G_1(S) \quad \Leftrightarrow \quad h(Q_1) = Q_2 = \sigma(Q_1)$$

Demostración. Nos apoyaremos en la caracterización de $G_1(S)$ dada en la Observación 3.45.

$\Leftarrow$] Sea f una función meromorfa sobre S_c de grado 2. Como $h(Q_1) = Q_2$, se tiene que $f(Q_1) = f(Q_2) = z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Sea m una transformación de Möbius de $\widehat{\mathbb{C}}$ (véase 1.6) tal que $m(z) = \infty$. Por tener m grado 1, la función meromorfa $g = m \circ f$ tiene grado 2 (por la Proposición 3.12); g tiene polos en Q_1 y Q_2, por tanto ha de tener un polo de orden 1 en cada uno de estos puntos y no puede tener polos en el resto de puntos de S_c.

$\Rightarrow$] Sea f una función meromorfa sobre S_c con polos de orden 1 en Q_1 y Q_2 y sin polos en el resto de puntos de S_c. Esta función f tiene grado 2, luego la involución h intercambia los dos puntos de la fibra $f^{-1}(\infty) = \{Q_1, Q_2\}$, es decir, $h(Q_1) = Q_2$. □

Observación 3.48. Si la cubierta doble (S_c, π, σ) es hiperelíptica y $h : S_c \longrightarrow S_c$ es la involución hiperelíptica, entonces el morfismo $\tau = h \circ \sigma : S_c \longrightarrow S_c$ es antianalítico, por ser composición de un morfismo analítico y uno antianalítico; además τ tiene orden 2, porque h conmuta con todos los elementos de $\mathrm{Aut}^{\pm}(S_c)$. Por tanto (S_c, τ) también es una superficie de Riemann simétrica.

En la Proposición previa hemos probado que $\pi^{-1}(G_1(S))$ está formado por los puntos $Q \in S_c$ que no son puntos fijos de σ y tales que $\tau(Q) = h \circ \sigma(Q) = Q$, es decir, por los puntos de S_c que yacen sobre el borde de $S_c / \langle \tau \rangle$ pero no sobre el borde de $S = S_c / \langle \sigma \rangle$.

A continuación, a partir del modelo afín plano de la cubierta doble de S (véase 3.41), proporcionamos una descripción explícita del conjunto $G_1(S)$.

Proposición 3.49. *Sean S una superficie de Klein hiperelíptica y (S_c, π, σ) su cubierta doble. Sea $\{y^2 = F(x)\}$ un modelo plano afín de S_c que cumpla alguna de las tres condiciones de la Proposición 3.41.*

1. *Si F es un polinomio mónico real (es decir, con coefientes reales) y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$ entonces*

$G_1(S) = \{\pi(x, y) : \ (x, y) \in S_c, \ x \in \mathbb{R}, \ F(x) < 0\}.$

2. *Si F es un polinomio mónico real sin raíces reales y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, \ -\overline{y})$, entonces*

   $G_1(S) = \{\pi(x, y) : \ (x, y) \in S_c, \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{\pi(\infty_1) = \pi(\infty_2)\}.$

3. *Si F es un polinomio mónico y $\sigma_R(x, y) = (-1/\overline{x}, \ \varphi(\overline{x}, y))$, donde φ es cierta función racional, entonces*

   $G_1(S)$ *es vacío.*

Demostración. Gracias a la caracterización de $G_1(S)$ proporcionada en la Proposición 3.47, basta con encontrar los puntos $Q \in S_c$ tales que $h(Q) = \sigma(Q)$ y $\sigma(Q) \neq Q$. Recordemos que $h(x, y) = (x, -y)$.

(1) $(x, -y) = (\overline{x}, \overline{y})$. Entonces x ha de ser real e $y = i\alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Los puntos fijos de σ son los puntos (x, y) con las dos coordenadas reales, junto con los puntos del infinito. Al ser $y^2 = F(x)$, los puntos que estamos buscando son aquellos que tienen la coordenada x real y tal que $F(x) < 0$ (lo que implica que $y = i\alpha \notin \mathbb{R}$).

(2) $(x, -y) = (\overline{x}, -\overline{y})$. Estos son los puntos (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$. Como F es mónico y no tiene raíces reales, $F(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, luego los puntos (x, y) cuya coordenada x es real tienen también coordenada y real. Todos estos puntos cumplen las condiciones mencionadas porque, en este caso, σ no tiene puntos fijos. Por otro lado, los dos puntos del infinito son intercambiados tanto por σ como por h.

(3) $x = -1/\overline{x}$. Cuando $x \neq 0$, esta ecuación equivale a $|x|^2 = x\overline{x} = -1$, que no tiene solución. Las imágenes por σ de los puntos de la forma $(0, y)$ son los puntos del infinito y viceversa. Por tanto $G_1(S)$ es vacío. □

Observación 3.50. Nótese que en el primer caso de la Proposición 3.49, $G_1(S)$ es vacío si y sólo si F no tiene raíces reales.

Proposición 3.51. *Sea S una superficie de Klein hiperelíptica con cubierta doble (S_c, π, σ) y sea $\{y^2 = F(x)\}$ un modelo plano afín de S_c que cumpla alguna de las tres condiciones de la Proposición 3.41. Supongamos que $G_1(S)$ es no vacío. Entonces $G_1(S)$ es un subespacio semialgebraico de S (en el sentido de Delfs-Knebusch) de dimensión 1. Además, dependiendo de la expresión de σ, se tiene:*

1. *Si F es un polinomio mónico real con $2k > 0$ raíces reales (podemos suponer que F tiene grado par por la Observación 3.43) y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, \ \overline{y})$ entonces*

   $G_1(S)$ es un subconjunto no compacto de S que tiene k componentes conexas.

2. *Si F es un polinomio mónico real sin raíces reales y $\sigma_R(x, y) = (\overline{x}, \ -\overline{y})$ entonces*

   $G_1(S)$ es un subconjunto compacto y conexo de S.

Demostración.

(1) Ya que los puntos del infinito no están en $G_1(S)$ podemos trabajar con el subconjunto abierto de S_c consistente en la parte afín $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \ y^2 = F(x)\}$ de S_c, cuya topología es la misma que la que hereda como subespacio de $\mathbb{C}^2$.

Sean $\alpha_1 < \ldots < \alpha_{2k}$ las raíces reales de F. Los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $F(x) < 0$ son exactamente los números reales en la unión de los k intervalos abiertos $(\alpha_1, \alpha_2) \cup \cdots \cup (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$. Por tanto el conjunto $\pi^{-1}(G_1(S)) \subseteq S_c$ está formado por las $2k$ curvas parametrizadas por

$$\begin{aligned} c_j^+ : (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}) &\longrightarrow S_c \\ x &\longmapsto (x, i\sqrt{-F(x)}) \\ c_j^- : (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}) &\longrightarrow S_c \\ x &\longmapsto (x, -i\sqrt{-F(x)}) \end{aligned}$$

donde $1 \leq j \leq k$.

Como σ transforma $im(c_j^+)$ en $im(c_j^-)$, $G_1(S)$ se puede escribir como la unión disjunta

$$G_1(S) = \bigcup_{j=1}^{k} im(\pi \circ c_j^+)$$

Cada uno de estos subconjuntos $im(\pi \circ c_j^+)$ es conexo, por ser la imagen por una aplicación continua del intervalo $(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j})$. Además $im(\pi \circ c_j^+)$ está contenido en la proyección por π del cilindro con base $(\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j})$ y es por tanto un subconjunto abierto de S. Así pues los k conjuntos $im(\pi \circ c_j^+)$ son las componentes conexas de $G_1(S)$.

Por otra parte, S es un espacio semialgebraico en el sentido de Delfs-Knebusch (véanse [17] y [18]), ya que la parte afín de S_c es un subconjunto algebraico de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 y la aplicación $\pi : S_c \longrightarrow S = S_c/\langle\sigma\rangle$ tiene fibras finitas, por lo que basta aplicar el Corolario 1.6 de [5]. Veamos que también $G_1(S)$ es semialgebraico. Como

$$G_1(S) = \pi\left(\bigcup_{j=1}^{k} im\, c_j^+\right)$$

y π es aplicación semialgebraica, basta probar que lo es la unión $\bigcup_{j=1}^{k} im\, c_j^+$. Esto es obvio ya que F es un polinomio. Además $dim\, G_1(S) = dim\ (\alpha_1, \alpha_2) = 1$.

Finalmente, $G_1(S)$ no es compacto, ya que no es cerrado en S porque los puntos $\pi(\alpha_j, 0)$ están en la clausura de $G_1(S)$ pero no en $G_1(S)$.

(2) Sea $\Sigma := \{(x,y) \in S_c : \ x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$. $G_1(S)$ es semialgebraico de dimensión 1 por ser $G_1(S) = \pi(\Sigma)$. Recordemos que S_c se construye pegando las curvas $C_1 = \{y^2 = F(x)\}$ y $C_2 = \{w^2 = z^{2p+2}F(1/z)\}$ a lo largo de los subconjuntos $\{(x,y) \in C_1 : \ x \neq 0\}$ y $\{(z,w) \in C_2 : \ z \neq 0\}$ mediante cierta aplicación continua y sobreyectiva

$\psi : C_1 \cup C_2 \longrightarrow S_c$. Así pues es posible describir Σ como el subconjunto de S_c que se obtiene al pegar los subconjuntos compactos $K_1 = \{(x,y) \in C_1 : \ x, y \in \mathbb{R}, \ |x| \leq 1\}$ y $K_2 = \{(z,w) \in C_2 : \ z, w \in \mathbb{R}, \ |w| \leq 1\}$, es decir, $\Sigma = \psi(K_1 \cup K_2)$. Por lo tanto Σ es compacto luego también lo es $G_1(S)$, por ser π continua.

Por no tener F raíces reales, los conjuntos $K_1^+ = \{(x,y) \in K_1 : \ x > 0\}$ y $K_2^+ = \{(z,w) \in K_2 : \ w > 0\}$ son conexos, así que también lo es $\psi(K_1^+ \cup K_2^+) \subseteq S_c$. Como $\sigma(x,y) = (\overline{x}, -\overline{y}) = (x, -y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que $G_1(S)$ es la imagen por π de $\psi(K_1^+ \cup K_2^+)$, luego $G_1(S)$ es conexo. $\square$

La Proposición precedente nos permite emplear el Lema de Clasificación Topológica (3.42) para establecer una correspondencia entre el tipo topológico de S y la compacidad y número de componentes conexas de $G_1(S)$. Sin embargo, la topología de $G_1(S)$ no permite determinar completamente el tipo topológico de S, ya que $G_1(S)$ es vacío en dos casos distintos:

(i) S no es orientable y no tiene borde (caso 3 de la Proposición 3.49).

(ii) S es orientable con borde y el número de componentes conexas de ∂S es mínimo: uno o dos, según la paridad de p (caso 1 de la Proposición 3.49 cuando F no tiene raíces reales).

En el primer caso S consta sólo de puntos interiores, luego, por la Proposición 3.31, p es un no-gap en cada punto de S, y por tanto $G_{p+1}(S)$ es vacío.

En el segundo caso, un punto $P \in \partial S$ tal que $\pi^{-1}(P)$ no es punto de Weierstrass de S_c cumple que $p+1$ es el primer no-gap en P. Por tanto P está en $G_{p+1}(S)$. Como el conjunto de puntos de Weierstrass de S_c es finito, concluimos que $G_{p+1}(S)$ es no vacío.

Estos dos hechos nos permiten distinguir entre los casos (i) y (ii) por medio del conjunto $G_{p+1}(S)$. Nótese que la propiedad que hemos establecido no depende del hecho de que S sea hiperelíptica y es cierta en general:

Observación 3.52. Sea S una superficie de Klein compacta de género algebraico $p \geq 2$. Entonces el borde de S es vacío si y sólo si $G_{p+1}(S)$ es vacío.

Exponemos en la siguiente tabla la correspondencia entre las propiedades de los conjuntos $G_n(S)$ y el tipo topológico de S. En la primera columna aparece el número k de componentes conexas de $G_1(S)$, seguido de la letra c si $G_1(S)$ es compacto. En la última columna aparece la terna (p, k, α) que determina el tipo topológico de S.

$\#\{$ c.c. de $G_1(S)\}$	$G_{p+1}(S)$	(p,k,α)
$k = p+1$	no vacío	$(p, p+1, 2)$
$k \in \{1, \ldots, p\}$	no vacío	$(p, k, 1)$
$k = 1,\ c$	vacío	$(p, 0, 1)$
0	no vacío	$(p,2,2)$ ó $(p,1,2)$
0	vacío	$(p, 0, 1)$

Al igual que el conjunto de puntos de Weierstrass de una superficie de Riemann, los conjuntos $G_n(S)$ también son invariantes bajo la acción de automorfismos de S, como prueba el siguiente resultado.

Proposición 3.53. *Sean S una superficie de Klein compacta de género $p \geq 2$, $A \in Aut^{\pm}(S)$ y $P \in S$. Entonces $a_j(P) = a_j(A(P))$ para cada $j \geq 0$. En particular, $A(G_n(S)) = G_n(S)$ para cada $n \geq 1$.*

Demostración. Sea (S_c, π, σ) la cubierta doble de S. Como se estableció en la Observación 3.15

$$\mathrm{Aut}^{\pm}(S) \cong Aut(S_c, \sigma) = \{F \in \mathrm{Aut}(S_c) : \ F \circ \sigma = \sigma \circ F\}$$

Sea B el automorfismo de (S_c, σ) inducido por A, es decir B cumple que $B \circ \sigma = \sigma \circ B$ y $\pi \circ B = A \circ \pi$. Sea $P' = A(P)$.

Supongamos en primer lugar que $P \in \partial S$. Por ser A un automorfismo de S, $P' \in \partial S$. Sean $Q = \pi^{-1}(P)$ y $Q' = \pi^{-1}(P')$; entonces $B(Q) = Q'$. Combinando las Proposiciones 2.8 y 3.28 obtenemos

$$a_j(P) = 1 \ \Leftrightarrow \ j \text{ es un no-gap en } Q \ \Leftrightarrow \ j \text{ es un no-gap en } Q' \ \Leftrightarrow \ a_j(P') = 1$$

para cada $j \geq 1$. Como los únicos valores posibles de $a_j(P)$ y $a_j(P')$ son 0 y 1, hemos obtenido el resultado deseado.

Supongamos ahora que $P \notin \partial S$. Entonces $P' = A(P)$ también es un punto interior de S. Sean $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$ y $\pi^{-1}(P') = \{Q'_1, Q'_2\}$. Como $B(\{Q_1, Q_2\}) = \{Q'_1, Q'_2\}$, podemos suponer, intercambiando Q_1 y Q_2 si es necesario, que $B(Q_j) = Q'_j$ para $j = 1, 2$. Denotaremos con $\{E_j\}_{j \geq 0}$ y $\{E'_j\}_{j \geq 0}$ las sucesiones de divisores en S_c construidas a partir de P y P' de la manera descrita en 3.30.

Si $b_j(P) = 1$ entonces existe una función meromorfa f que está en la diferencia $L_{S_c}(E_j) \setminus L_{S_c}(E_{j-1})$. La multiplicidad de f en Q_j es la misma que la de $f \circ B^{-1}$ en Q'_j para $j = 1, 2$. Por lo tanto, $f \circ B^{-1}$ está en $L_{S_c}(E'_j) \setminus L_{S_c}(E'_{j-1})$, por lo que $b_j(P') = 1$.

Aplicando este resultado al automorfismo A^{-1} obtenemos que las sucesiones $\{b_j(P)\}_{j \geq 1}$ y $\{b_j(P')\}_{j \geq 1}$ coinciden. Por tanto las sucesiones $\{a_j(P)\}_{j \geq 1}$ y $\{a_j(P')\}_{j \geq 1}$ también coinciden. $\square$

Volvamos al caso en que S es una superficie de Klein hiperelíptica y supongamos que ∂S y $G_1(S)$ no son vacíos. Sean (S_c, π, σ) la cubierta doble de S y W el conjunto de puntos de Weierstrass de S_c. Cada automorfismo $A \in \mathrm{Aut}(S)$ induce una permutación en el conjunto $\pi(W) \cap \partial S$. Como consecuencia de la Proposición precedente, obtendremos que la imagen por A de uno cualquiera de los puntos de $\pi(W) \cap \partial S$ determina las imágenes por A del resto de los puntos del conjunto.

Como S es una superficie con borde, es del primero de los tipos descritos en la Proposición 3.41 y, por la Observación 3.43, podemos suponer que (S_c, π, σ) tiene un modelo plano afín $\{y^2 = F(x)\}$ donde F es un polinomio de grado par (lo que implica que los puntos del infinito de S_c no son puntos de Weierstrass). También sabemos que $G_1(S) \neq \varnothing$ implica que F tiene alguna raíz real, por lo cual hay puntos de Weierstrass en $\pi^{-1}(\partial S)$; estos puntos son exactamente los de la forma $T_j = (\alpha_j, 0) \in S_c$ con $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Proposición 3.54. *Sea S una superficie de Klein hiperelíptica con borde y supongamos que $G_1(S)$ no es vacío. Sean (S_c, π, σ) la cubierta doble de S e $\{y^2 = F(x)\}$ un modelo plano afín de S_c como el descrito en 3.41. Sea A un automorfismo de S. Sean $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$ las raíces reales de F y $P_j = \pi((\alpha_j, 0))$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Entonces $A(\{P_1, \ldots, P_r\}) = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Además, si $k \in \{1, \ldots, r\}$, entonces la imagen $A(P_k)$ determina el resto de las imágenes $A(P_j)$.*

Demostración. Sea B el automorfismo de (S_c, σ) inducido por A, es decir B cumple que $B \circ \sigma = \sigma \circ B$ y $\pi \circ B = A \circ \pi$. El conjunto W de puntos de Weierstrass de S_c es invariante bajo la acción de automorfismos de S_c (véase la Proposición 2.8). Además, los puntos $T_j = (\alpha_j, 0) \in W$ son puntos fijos de σ, luego

$$B(T_j) = B(\sigma(T_j)) = \sigma(B(T_j))$$

Por tanto $B(T_j)$ es a la vez punto de Weierstrass y punto fijo de σ, es decir, $B(T_j) = T_k$ para algún $k \in \{1, \ldots, r\}$. Así pues

$$A(P_j) = A(\pi(T_j)) = \pi(B(T_j)) = \pi(T_k) = P_k$$

Esto implica que A transforma el conjunto $\{P_1, \ldots, P_r\}$ en sí mismo.

A continuación probaremos la segunda parte del enunciado. En cada componente conexa de ∂S hay exactamente dos puntos del conjunto $\pi(W) \cap \partial S = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Por otra parte, dada una componente conexa C del conjunto $G_1(S)$, también hay exactamente dos puntos de $\pi(W) \cap \partial S$ en la clausura topológica de C en S. Por tanto, cada punto P_k está “unido” a los dos puntos P_{k-1} y P_{k+1} (si alguno de los índices $k-1$ ó $k+1$ no está en el conjunto $\{1, \ldots, r\}$, nos estaremos refiriendo al representante de su clase módulo r en dicho conjunto), ya que está en la misma componente conexa de ∂S que uno de ellos y en la misma componente conexa de la clausura de $G_1(S)$ que el otro.

Supongamos conocida la imagen $A(P_k)$ de P_k por A. El automorfismo A es una aplicación continua y cumple que $A(\partial S) = \partial S$ y $A(G_1(S)) = G_1(S)$. Por lo tanto $A(P_{k-1})$ y $A(P_{k+1})$ son los dos únicos puntos de $\pi(W) \cap \partial S$ que están “unidos” a $A(P_k)$, cada uno de ellos de la misma forma en que P_{k-1} y P_{k+1} lo estaban a P_k. Así pues $A(P_{k-1})$ y $A(P_{k+1})$ quedan determinados por $A(P_k)$. Repitiendo este proceso obtenemos las imágenes por A de todos los puntos de $\pi(W) \cap \partial S$. $\square$

Sea S una superficie de Klein hiperelíptica de género algebraico $p \geq 2$. A continuación obtenemos la sucesión $\{a_j(P)\}_{j \geq 1}$ de diferencias de dimensiones para cada punto P de S.

Recordemos que si P es un punto interior de S también está definida la sucesión $\{b_j(P)\}_{j\geq 1}$ que a la vez determina y queda determinada por $\{a_j(P)\}_{j\geq 1}$; por tanto nos referiremos a una u otra según nos interese.

Además, sólo son relevantes una cantidad finita de términos de estas sucesiones, ya que si $P \in \partial S$ entonces $a_j(P) = 1$ para cada $j \geq 2p$ (por la Proposición 3.28), mientras que si $P \notin \partial S$ entonces $a_j(P) = 2$ para cada $j > p$ (por la Proposición 3.31).

Teorema 3.55. *Sea S una superficie de Klein hiperelíptica de género algebraico $p \geq 2$. Sean P un punto de S, (S_c, π, σ) la cubierta doble de S y W el conjunto de puntos de Weierstrass de S_c.*

1. $P \in \partial S$
   - a) *Si $P \in \pi(W)$ entonces*
     $a_j(P) = 0$ *si* $j \in \{1, 3, \ldots, 2p-1\}$
     $a_j(P) = 1$ *si* $j \in \{2, 4, \ldots, 2p\}$
   - b) *Si $P \notin \pi(W)$ entonces*
     $a_j(P) = 0$ *si* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$
     $a_j(P) = 1$ *si* $j \in \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$
2. $P \notin \partial S$
   - a) *Si $P \in G_1(S)$ entonces*
     $a_j(P) = 1$ *para cada* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$
   - b) *Si $P \in \pi(W)$ entonces*
     1) *si p es par*
        $a_j(P) = 0$ *si* $j \in \{1, 3, \ldots, p-1\}$
        $a_j(P) = 2$ *si* $j \in \{2, 4, \ldots, p\}$
     2) *si p es impar*
        $a_j(P) = 0$ *si* $j \in \{1, 3, \ldots, p-2\}$
        $a_j(P) = 2$ *si* $j \in \{2, 4, \ldots, p-1\}$
        $a_p(P) = 1$
   - c) *Si $P \notin G_1(S)$ y $P \notin \pi(W)$ entonces*
     $b_j(P) = 0$ *si* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$
     $b_j(P) = 1$ *si* $j \in \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$

Demostración. Supongamos que $P \in \partial S$ y sea $Q = \pi^{-1}(P) \in S_c$. Por la Proposición 3.28, $a_j(P) = 0$ si j es un gap en Q y $a_j(P) = 1$ en caso contrario. Como S_c es una superficie hiperelíptica, la sucesión de gaps en Q es $\Gamma(Q) = \{1, 3, \ldots, 2p-1\}$ si Q es un punto de Weierstrass de S_c y $\Gamma(Q) = \{1, 2, \ldots, p\}$ si no lo es. De estos dos hechos se deduce la primera parte del enunciado.

Supongamos a partir de ahora que $P \in S \setminus \partial S$ y sea $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$.

Si $P \in G_1(S)$, por definición, $a_1(P) = 1$. Entonces $a_j(P) \neq 0$ para $j \geq 2$, ya que la sucesión de no-gaps en un punto de S tiene estructura de semigrupo aditivo (Proposición 3.32). Pero, por la Proposición 3.31, se tiene que

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{p} a_j(P) = p$$

así que los únicos valores posibles son $a_j(P) = 1$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Si $P \in \pi(W)$ entonces Q_1 es un punto de Weierstrass de S_c y, por tanto, todos los números naturales pares son no-gaps en Q_1. Por la Observación 3.33, $a_j(P) = 2$ para cada $j \geq 2$ par.

Si p es par, podemos escribir la relación $(*)$ de la forma

$$p = \sum_{j=1}^{p/2} a_{2j}(P) + \sum_{j=1}^{p/2} a_{2j-1}(P) = p + \sum_{j=1}^{p/2} a_{2j-1}(P)$$

luego $a_j(P) = 0$ si $j \in \{1, 3, \ldots, p-1\}$.

Si p es impar, tendremos que

$$p = \sum_{j=1}^{(p-1)/2} a_{2j}(P) + \sum_{j=1}^{(p-1)/2} a_{2j-1}(P) + a_p(P) = p - 1 + \sum_{j=1}^{(p-1)/2} a_{2j-1}(P) + a_p(P)$$

Como $a_p(P) \neq 0$ (véase la Proposición 3.31) los únicos valores posibles para el resto de los $a_j(P)$ son $a_p(P) = 1$ y $a_j(P) = 0$ para cada $j \in \{1, 3, \ldots, p-2\}$.

Por último, para estudiar el último caso, necesitamos hablar de diferenciales meromorfas sobre la superficie de Riemann S_c. Como referencia se pueden consultar las secciones II.5, III.4 y III.5 de [20].

Dada una diferencial meromorfa ω sobre una superficie de Riemann R se define el *divisor de* ω de forma análoga a como se hace para una función meromorfa, esto es,

$$(\omega) = \sum_{P \text{ es cero de } \omega} mult_P(\omega) \cdot P \quad - \sum_{P \text{ es polo de } \omega} mult_P(\omega) \cdot P$$

Dado un divisor D en R se define el siguiente espacio vectorial complejo de diferenciales meromorfas:

$$\Omega(D) = \{\omega \, : \, \omega \text{ es una diferencial meromorfa sobre } R \text{ y } (\omega) \geq D\}$$

En este caso se cumple que si $D \geq D'$ entonces $\Omega(D) \subseteq \Omega(D')$.

Supongamos que $\{D_j\}_{j\geq 0}$ es una sucesión de divisores construida como en el enunciado del Teorema de los gaps de Noether (2.3). Como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch se tiene la igualdad de dimensiones de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$

$$dim\, L(D_j) - dim\, L(D_{j-1}) = 1 + dim\, \Omega(D_j) - dim\, \Omega(D_{j-1})$$

De esta igualdad se deduce que

$$(+) \quad dim\, L(D_j) - dim\, L(D_{j-1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dim\, \Omega(D_{j-1}) - dim\, \Omega(D_j) = 1$$

Supongamos ahora que $P \notin G_1(S)$ y $P \notin \pi(W)$. La Observación 3.43 nos permite suponer que S_c viene dada por un modelo plano afín $\{y^2 = F(x)\}$ donde F es un polinomio de grado impar. Por lo tanto podemos considerar (véase 3.40) que S_c es la compactificación de este modelo plano mediante un único punto ∞, que es, además, un punto de Weierstrass de S_c. Así pues $2p-1$ es un gap en ∞, por ser S_c hiperelíptica. Pero esto es lo mismo que

$$dim\, L(D_{2p-1}) - dim\, L(D_{2p-2}) = 0$$

donde $D_j = j\,\infty$ para $j \in \{2p-2, 2p-1\}$. Por la equivalencia $(+)$, existe una diferencial $\omega \in \Omega(D_{2p-2}) \setminus \Omega(D_{2p-1})$. Por definición ω no tiene polos y ha de tener un cero de orden $2p-2$ en ∞. Además, es bien conocido que toda diferencial holomorfa sobre una superficie de Riemann de género p tiene exactamente $2p-2$ ceros contando multiplicidades (véase, por ejemplo, el capítulo V de [42]). Por lo tanto, ∞ es el único cero de ω en S_c.

Consideremos la aplicación $x : S_c \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida como $x(a,b) = a$ y $x(\infty) = \infty$, que es una función meromorfa sobre S_c de grado 2. Recordemos que $P \in S \setminus (\partial S \cup G_1(S) \cup \pi(W))$ y $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, Q_2\}$. Para α y β enteros positivos definimos las siguientes funciones meromorfas sobre S_c

$$f_{\alpha,\beta}(a,b) = (a - x(Q_1))^{\alpha}\,(a - x(Q_2))^{\beta}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma(x,y) = (\overline{x}, \overline{y})$ y $\sigma(Q_1) = Q_2$ se obtiene que $x(Q_2) = \overline{x(Q_1)}$. Del hecho de que $P \notin \partial S$ y $P \notin G_1(S)$ y de las descripciones que se han obtendido de estos conjuntos se deduce que $x(Q_1) \notin (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, luego $x(Q_1) \neq x(Q_2)$.

Por otra parte $P \notin \pi(W)$, así que Q_1 y Q_2 no son puntos de Weierstrass. Por lo tanto la función meromorfa $f_j = x - x(Q_j)$, que es de grado 2, tiene un cero simple en Q_j para $j \in \{1,2\}$; el otro cero de f_j en S_c es $h(Q_j) \notin \{Q_1, Q_2\}$.

En resumen, hemos probado que $f_{\alpha,\beta}$ es una función meromorfa sobre S_c de grado $2(\alpha+\beta)$ cuyos ceros son Q_1, $h(Q_1)$, Q_2 y $h(Q_2)$; los dos primeros son ceros de orden α y los dos últimos de orden β. Como $f_{\alpha,\beta}$ no tiene polos en la parte afín de S_c, ha de tener un polo de orden $2(\alpha+\beta)$ en ∞.

Dados α y β enteros positivos, el producto $\omega_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}\cdot\omega$ es nuevamente una diferencial meromorfa sobre S_c, cuyos ceros en la parte afín de S_c son los mismos y tienen los mismos órdenes que los de $f_{\alpha,\beta}$. Además, si $\alpha + \beta \leq p-1$, la diferencial $\omega_{\alpha,\beta}$ no tiene polos en ∞ y es, por tanto, holomorfa.

Sea $\{E_j\}_{j\geq 1}$ la sucesión de divisores en S_c construida como en 3.30 a partir de Q_1 y Q_2. Sea $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$; vamos a probar que $b_{k+1}(P) = 0$.

Supongamos primero que $k = 2l$ es par. Entonces la diferencial holomorfa $\omega_{l,l}$ tiene ceros de orden l en Q_1 y Q_2 y por tanto pertence al conjunto $\Omega(E_k) \setminus \Omega(E_{k+1})$ (recuérdese que $E_k = l \cdot Q_1 + l \cdot Q_2$). Si $k = 2l+1$, entonces la diferencial holomorfa $\omega_{l+1,l}$ tiene un cero de orden $l+1$ en Q_1 y un cero de orden l en Q_2, luego pertence al conjunto $\Omega(E_k) \setminus \Omega(E_{k+1})$ (en este caso $E_k = (l+1) \cdot Q_1 + l \cdot Q_2$).

En ambos casos $\Omega(E_k) \setminus \Omega(E_{k+1})$ no es vacío, por lo cual

$$dim\, \Omega(E_k) - dim\, \Omega(E_{k+1}) = 1$$

y la relación (+) implica que

$$dim\, L(E_{k+1}) - dim\, L(E_k) = 0$$

que, por definición, es lo mismo que $b_{k+1}(P) = 0$.

Hemos probado pues que $b_j(P) = 0$ si $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$; la Proposción 3.31 asegura que hay exactamente p números enteros positivos que cumplen esta condición, luego $b_j(P) = 1$ si $j \geq p+1$. □

Ejemplo 3.56. Sea S_c la superficie de Klein hiperelíptica dada por el modelo plano afín $\{y^2 = F(x)\}$ donde $F(x) = (x^2+1)(x^2+4)(x^2-1)(x^2-4)$. Por ser F de grado 8, S_c tiene género 3. Como el grado de F es par, S_c es isomorfa a la compactificación de su modelo plano afín mediante dos puntos en el infinito, que denotaremos con ∞_1 e ∞_2. La aplicación h definida por $h(x,y) = (x,-y)$, $h(\infty_1) = \infty_2$ y $h(\infty_2) = \infty_1$ es la involución hiperelíptica de S_c. La aplicación σ definida por $\sigma(x,y) = (\overline{x}, \overline{y})$ y $\sigma(\infty_j) = \infty_j$ es una involución antianalítica de S_c. El par (S_c, σ) es una superficie de Riemann simétrica del primero de los tipos descritos en la Proposición 3.41.

El espacio cociente $S = S_c / \langle\sigma\rangle$ es una superficie de Klein. Denotaremos con $\pi : S_c \longrightarrow S$ la proyección canónica sobre el cociente. Como se estableció en la Observación 3.15, (S_c, π, σ) es la cubierta doble de S y, por tanto, S tiene género algebraico 3.

El polinomio F tiene 4 raíces reales, $\{\pm 1, \pm 2\}$, así que, por el Lema de clasificación topológica (3.42), S no es orientable y tiene borde; además el borde de S tiene dos componentes conexas. El borde de S está formado por los puntos que son proyección por π de los puntos fijos de σ en S_c, es decir, los puntos de S_c cuyas dos coordenadas son reales junto con los puntos del infinito. Por tanto

$$\partial S = \left\{ \pi\left(x, \pm\sqrt{F(x)}\right) \,:\, x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty) \right\} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$$

Las dos componentes conexas C_1 y C_2 de ∂S son

$$C_1 = \left\{ \pi\left(x, \pm\sqrt{F(x)}\right) \,:\, x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \right\} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$$

$$C_2 = \left\{ \pi\left(x, \pm\sqrt{F(x)}\right) \,:\, x \in [-1, 1] \right\}$$

El conjunto W de puntos de Weierstrass de S_c está formado por los puntos de la forma $(x, 0)$ donde x es una raíz del polinomio F. Por tanto

$$W = \{(\pm 1, 0), (\pm 2, 0), (\pm i, 0), (\pm 2i, 0)\}$$

Podemos separar el conjunto W en dos subconjuntos disjuntos $W_1 = \{(\pm 1, 0), (\pm 2, 0)\}$ y $W_2 = \{(\pm i, 0), (\pm 2i, 0)\}$ que cumplen que $\pi(W_1) \subseteq \partial S$ y $\pi(W_2) \subseteq S \setminus \partial S$.

Vamos a obtener, usando el Teorema precedente, la sucesión $\{a_j(P)\}$ para cada $P \in S$. Como S tiene género algebraico 3, sólo son relevantes los seis primeros términos de esta sucesión si $P \in \partial S$, y los tres primeros términos en caso contrario. Denotaremos con $a(P)$ al conjunto ordenado formado por los términos de la sucesión, es decir, $a(P) = \{a_1(P), a_2(P), a_3(P), a_4(P), a_5(P), a_6(P)\}$ si $P \in \partial S$ y $a(P) = \{a_1(P), a_2(P), a_3(P)\}$ si $P \notin \partial S$.

Supongamos en primer lugar que $P \in \partial S$. El conjunto $\partial S \cap \pi(W)$ coincide con $\partial S \cap \pi(W_1)$ y consta de cuatro puntos

$$\partial S \cap \pi(W) = \{\pi(1, 0), \pi(2, 0), \pi(-1, 0), \pi(-2, 0)\}$$

Para cada punto $P \in \partial S \cap \pi(W)$ se cumple que $a(P) = \{0, 1, 0, 1, 0, 1\}$. Si $P \in \partial S \setminus \pi(W)$ entonces $a(P) = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$.

Supondremos a partir de ahora que $P \in S \setminus \partial S$. El conjunto de puntos interiores de S que son proyecciónes por π de puntos de Weierstrass de S_c consta de dos puntos, ya que las parejas de puntos que están en la misma órbita bajo la acción de σ tienen la misma imagen por π. En concreto

$$(S \setminus \partial S) \cap \pi(W) = (S \setminus \partial S) \cap \pi(W_1) = \{\pi(i, 0), \pi(2i, 0)\}$$

Para cada uno de estos dos puntos $a(P) = \{0, 2, 1\}$.

Por la Proposición 3.49 el conjunto $G_1(S)$ está formado por puntos de la forma $\pi(x, y)$ donde $x \in \mathbb{R}$ y $F(x) < 0$. Por tanto

$$G_1(S) = \left\{\pi\left(x, i\sqrt{-F(x)}\right) \,:\, x \in (-2, -1)\right\} \cup \left\{\pi\left(x, i\sqrt{-F(x)}\right) \,:\, x \in (1, 2)\right\}$$

Nótese que hemos presentado $G_1(S)$ como unión de sus dos componentes conexas. Para cada $P \in G_1(S)$ se tiene que $a(P) = \{1, 1, 1\}$.

Por último, si $P \in S \setminus (\partial S \cup \pi(W) \cup G_1(S))$ entonces $a(P) = \{0, 1, 2\}$.

Capítulo 4

Conjuntos invariantes en superficies de Klein con borde

Es un resultado clásico, probado por Hurwitz en [28], que el orden del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(R)$ de una superficie de Riemann compacta R de género $g \geq 2$ está acotado superiormente por $84(g-1)$. En la misma línea, May probó en [37] que para una superficie de Klein S, con borde y de género algebraico $p \geq 2$, se tiene que $|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 12(p-1)$.

La obtención de cotas del orden de subgrupos distinguidos de $\mathrm{Aut} \pm (S)$ bajo ciertas condiciones acerca de este grupo o de la superficie S constituye un tema activo de investigación y el presente capítulo se enmarca en esta línea de trabajo.

El conjunto de puntos de Weierstrass de una superficie de Riemann R es un ejemplo de subconjunto invariante bajo la acción del grupo de automorfismos de la superficie. De forma más general, dado un grupo G de automorfismos de R, se dice que un subconjunto B de R es invariante bajo la acción de G si $\gamma(B) = B$ para cada $\gamma \in G$. Los conjuntos invariantes están, por tanto, formados por la unión de órbitas de puntos de R bajo la acción de G. Este hecho fue aprovechado por Arakawa [4] y Oikawa [43] para obtener cotas superiores para el orden del grupo G en función del género $g \geq 2$ de R y de cardinales de subconjuntos invariantes finitos de R. En este capítulo estudiamos el problema análogo para una superficie de Klein S, con borde y de género algebraico $p \geq 2$. Obtenemos cotas superiores para el orden de un grupo G de automorfismos de S; dichas cotas dependen del género algebraico p de S y de cardinales de subconjuntos finitos de S invariantes bajo la acción de G. Si $G = \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ y los cardinales de los conjuntos invariantes son suficientemente pequeños, las cotas obtenidas mejoran la cota de May.

Cada automorfismo de una superficie de Klein S induce una permutación en el conjunto (finito) $\mathcal{B}$ de componentes conexas del borde de S. Por tanto cada grupo G de automorfismos de S actúa sobre el conjunto $\mathcal{B}$. Bajo la hipótesis de que esta acción no sea transitiva, aplicamos las cotas obtenidas anteriormente para obtener nuevas cotas para el cardinal de G. Concretamente, probamos el siguiente resultado: si el número de órbitas de la acción es mayor que 1, entonces $|G| \leq 4(p-1)$; si el número de órbitas es mayor que 2, entonces $|G| \leq 2(p-1)$ (con la salvedad, en cada caso, de algunas superficies de géneros bajos). Cabe destacar que estas cotas sólo dependen del género algebraico p de S y que mejoran la cota obtenida por May en [37] si $G = \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$.

Además demostramos que todas las cotas obtenidas en este capítulo son finas, construyendo, mediante la teoría de grupos cristalográficos no euclídeos (grupos NEC), superficies de género arbitrariamente grande para las cuales nuestras cotas se alcanzan.

4.1. Algunos resultados previos

Sea S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$ y sea G un grupo de automorfismos de S. Sabemos que G es isomorfo a un grupo de automorfismos de la cubierta doble de S (véase la Observación 3.15) y es, por tanto, finito (Teorema 1.14). Sea $Y = S/G$ la superficie de Klein compacta obtenida como el cociente de S bajo la acción de G y sea q el género algebraico de Y. Sea $\pi : S \longrightarrow Y$ la proyección canónica, que es un morfismo de superficies de Klein.

Emplearemos la notación utilizada por May en [37]. Para un punto $P \in S$ definimos

$$n_P = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \partial S \\ 2 & \text{si } P \notin \partial S \end{cases}$$

Con esta notación el grado relativo $d_\pi(P)$ de π en un punto $P \in S$ (véase la Proposición 3.12) se puede escribir como el cociente

$$d_\pi(P) = \frac{n_P}{n_{\pi(P)}}$$

Sean $Q_1, \ldots, Q_t \in Y$ los puntos de ramificación de π en Y. Denotaremos con e_j el índice de ramificación de π en un punto cualquiera que pertenezca a $\pi^{-1}(Q_j)$ (al igual que sucede para superficies de Riemann, el índice de ramificación es el mismo en todos los puntos de cada fibra de la aplicación π, véase [3, páginas 52-56]); supondremos siempre que $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_t$. Por brevedad escribiremos n_j en lugar de n_{Q_j}. La siguiente igualdad es la expresión obtenida por May en [37] de la fórmula de ramificación de Riemann-Hurwitz para la aplicación π.

$$(*) \qquad \frac{2p-2}{r} = 2q - 2 + \sum_{j=1}^{t} n_j \left(1 - \frac{1}{e_j}\right)$$

Los dos lemas que siguen también fueron probados en [37]. El primero de ellos fue enunciado originalmente para $Y = D$, donde D es el disco cerrado unidad del plano complejo, pero la demostración que se da en [37] es válida sin imponer ninguna condición sobre el cociente Y.

Lema 4.1. *Si $P \in \partial S$ es un punto de ramificación de π, entonces el índice de ramificación de π en P es igual a 2.*

Lema 4.2. *Supongamos que $Y = D$ y que $Q_k \in \partial D$ para algún $k \in \{1, \ldots, t\}$. Entonces el número de fibras $\pi^{-1}(Q_j)$ que están contenidas en ∂S es mayor que cero y par.*

4.2. Conjuntos invariantes finitos

Mantendremos las notaciones de la sección precedente. Diremos que un subconjunto no vacío $B \subseteq S$ es *invariante bajo la acción de* G si $G(B) = \{\gamma(P) \mid \gamma \in G,\ P \in B\} = B$. A lo largo de esta sección trataremos con conjuntos invariantes finitos. La siguiente Observación sobre la naturaleza de los conjuntos invariantes será útil con frecuencia.

Observación 4.3. Sea $B \subseteq S$ finito e invariante bajo la acción de G. Entonces B es una unión disjunta y finita de fibras de la aplicación π. Supongamos que $\pi^{-1}(Q)$ es una de estas fibras y sean $P \in \pi^{-1}(Q)$ y $e = e_\pi(P)$ el índice de ramificación de π en P. Entonces

$$|\pi^{-1}(Q)| = \begin{cases} |G|/e & \text{si} \quad d_\pi(P) = 1 \\ \\ |G|/2e & \text{si} \quad d_\pi(P) = 2 \end{cases}$$

Demostración. La primera parte del enunciado se deduce de que las fibras de la aplicación π son exactamente las órbitas de los puntos de S bajo la acción de G.

El cardinal de las fibras se obtiene a partir del hecho de que π es un morfismo de grado $|G|$. Dado $Q \in Y$, tanto el índice de ramificación $e_\pi(P)$ como el grado relativo $d_\pi(P)$ son iguales para cada $P \in \pi^{-1}(Q)$. Esto se debe, nuevamente, a que las fibras de π son órbitas de puntos de S bajo la acción de G. Usando la ecuación del grado de un morfismo que aparece en la Proposición 3.12 (ii) se obtiene que

$$|G| = |\pi^{-1}(Q)|\, e_\pi(P)\, d_\pi(P)$$

donde P es un punto cualquiera de $\pi^{-1}(Q)$. De esta igualdad se deduce la segunda parte del enunciado. □

Observación 4.4. Todo automorfismo T de S cumple que $T(\partial S) = \partial S$ y $T(S^\circ) = S^\circ$. Por tanto un subconjunto invariante $B \subseteq S$ es unión de dos subconjuntos invariantes más pequeños, a saber, $B \cap \partial S$ y $B \cap S^\circ$. Estamos interesados en encontrar cotas superiores para el cardinal de un grupo $G \subseteq \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ en función (creciente) del cardinal de un conjunto invariante B, así que nos basta con estudiar dos casos: $B \subseteq \partial S$ y $B \subseteq S^\circ$.

En el primero de los casos se obtiene fácilmente, a partir del Lema 4.1 y la Observación 4.3, una cota para el orden de G.

Observación 4.5. Sea $B \subseteq \partial S$ un subconjunto finito invariante bajo la acción de un grupo $G \subseteq \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$. Entonces $|G| \leq 2|B|$. Además, si $|G| < 2|B|$, entonces $|G| \leq |B|$.

Demostración. En efecto, el conjunto B ha de ser unión disjunta y finita de fibras de la proyección canónica $\pi : S \longrightarrow S/G$. Como $B \subseteq \partial S$, el Lema 4.2 implica que los únicos índices de ramificación posibles en puntos de $|B|$ son 1 y 2. Teniendo en cuenta que la aplicación π es de grado $|G|$, por la Observación 4.3, se tiene que las fibras de π contenidas en B tienen cardinal $|G|$ o $|G|/2$. Así pues si B está formado por una única fibra se cumple que $|B| \geq |G|/2$. Obviamente, si $|B| > |G|/2$ entonces B contiene a más de una fibra de la aplicación π o a una fibra de cardinal $|G|$; en ambos casos $|B| \geq |G|$. □

Sean (S_c, π_c, σ_c) la cubierta doble de S y W el conjunto de puntos de Weierstrass de S_c que, como ya sabemos (véase la Proposición 2.8), es finito e invariante bajo la acción de $\mathrm{Aut}(S_c)$. Por tanto $\pi_c(W)$ es invariante bajo la acción de $\mathrm{Aut}^{\pm}(S)$. A partir de la Observación 4.5 se obtiene inmediatamente:

Corolario 4.6. *Sea w el número de puntos de $\pi_c(W)$ que están en ∂S. Si $w > 0$ entonces $w \geq |\mathrm{Aut}^{\pm}(S)|/2$.*

Enunciamos y demostramos, a continuación, el resultado fundamental de este capítulo, que proporciona una cota superior para el orden de un grupo de automorfismos de una superficie de Klein compacta con borde en función de su género algebraico y el cardinal de un conjunto invariante.

Teorema 4.7. *Sean S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$ y G un grupo de automorfismos de S. Sea B un subconjunto no vacío y finito de S, invariante bajo la acción de G. Entonces*

$$|G| \leq 4(p-1) + 4|B|$$

Demostración. En primer lugar, nótese que las Observaciones 4.4 y 4.5 nos permiten suponer que $B \subseteq S^{\circ}$.

La prueba se apoya en la fórmula de ramificación $(*)$. Mantendremos las notaciones introducidas en la Sección 4.1. Recordemos que q es el género del cociente $Y := S/G$, $Q_1, \ldots, Q_t \in Y$ son los puntos de ramificación de la proyección canónica $\pi : S \longrightarrow Y$ y $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_t$ son los correspondientes índices de ramificación de π. Denotaremos con $r = |G|$ el orden de G. Separaremos los cálculos en varios casos y veremos, en cada uno de ellos, que la cota es válida.

(i) $q \geq 2$. Entonces

$$\frac{2p-2}{r} \geq 2q - 2 \geq 2$$

así que $r \leq g - 1$.

(ii) Si $q = 1$, el número t de puntos de ramificación de π ha de ser mayor que cero. Así pues

$$\frac{2p-2}{r} \geq \left(1 - \frac{1}{e_1}\right) \geq \frac{1}{2}$$

lo que implica que $r \leq 4(p-1)$.

(iii) $q = 0$ y $Q_1, \ldots, Q_t \in Y^\circ$. Entonces $n_j = 2$ para cada j y la fórmula de ramificación $(*)$ adopta el siguiente aspecto

$$\frac{p-1}{r} = -1 + \sum_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right)$$

Necesariamente $t \geq 2$ y volvemos a considerar varios subcasos:

(iii.a) $t \geq 3$. Entonces

$$\frac{p-1}{r} \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y se sigue que $r \leq 2(p-1)$.

(iii.b) $t = 2$. No puede ocurrir que $e_1 = e_2 = 2$, luego $e_2 \geq 3$. Si $e_2 \geq 4$ entonces:

$$\frac{p-1}{r} \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

y $r \leq 4(p-1)$.

Si $e_1 = e_2 = 3$ entonces $r = 3(p-1)$.

Si $e_1 = 2$ y $e_2 = 3$ se tiene que $r = 6(p-1)$. Por la Observación 4.3, la fibra de π que menor cardinal tiene es $\pi^{-1}(Q_2)$, que consta de $r/3 = 2(p-1)$ puntos. Entonces, de nuevo por la Observación 4.3, el conjunto B tiene cardinal a lo sumo $2(p-1)$. Así pues

$$4(p-1) + 4|B| \geq 4|B| \geq 8(p-1) > r$$

(iv) $q = 0$ y π es ramificada sobre algún punto de ∂Y. Nótese que $Y = D$, el disco unidad del plano complejo. Esto se debe a que $\pi(\partial S) \subseteq \partial Y$ por lo que ∂Y es no vacío; D es la única superficie de Klein con borde de género algebraico 0. Por el Lema 4.2, π tiene al menos dos puntos de ramificación en Y (podemos suponer que son Q_1 y Q_2) tales que $\pi^{-1}(Q_1)$ y $\pi^{-1}(Q_2)$ están contenidas en ∂S. Entonces, por el Lema 4.1, $e_1 = e_2 = 2$. Así pues $t \geq 3$ y la relación $(*)$ se escribe como

$$\frac{2p-2}{r} = -1 + \sum_{j=3}^{t} n_j \left(1 - \frac{1}{e_j}\right)$$

Es útil considerar varios subcasos:

(iv.a) $t \geq 5$. Entonces

$$\frac{2p-2}{r} \geq -1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

luego $r \leq 4(p-1)$.

(iv.b) $t = 3$. Entonces $n_3 = 2$ y $e_3 \geq 3$. Si $e_3 \geq 4$ se tiene que

$$\frac{2p-2}{r} \geq -1 + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

y $r \leq 4(p-1)$.

Si $e_3 = 3$ entonces $r = 6(g-1)$. La fibra con cardinal más pequeño de la aplicación π es $\pi^{-1}(Q_3)$ que consta de $r/3 = 2(p-1)$ puntos. De nuevo, como en (iii.b),

$$4(p-1) + 4|B| \geq 4|B| \geq 8(p-1) > r$$

(iv.c) $t = 4$. Supongamos en primer lugar que uno de los puntos de ramificación Q_3 o Q_4 es un punto interior de Y, por ejemplo $Q_4 \in Y^\circ$. Entonces

$$\frac{2p-2}{r} \geq -1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y, en consecuencia, $r \leq 4(p-1)$.

Supongamos ahora que $Q_3, Q_4 \in \partial Y$. Recordemos que estamos suponiendo que $e_3 \leq e_4$ y no es posible que $e_3 = e_4 = 2$. Si $e_3 \geq 4$ se tiene que

$$\frac{2p-2}{r} \geq -1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

con lo que $r \leq 4(p-1)$.

Si $e_3 \in \{2, 3\}$ entonces

$$\frac{2p-2}{r} = -1 + 1 - \frac{1}{e_3} + 1 - \frac{1}{e_4} = \frac{e_3 - 1}{e_3} - \frac{1}{e_4}$$

esto es

$$p - 1 = \frac{r}{2}\left(\frac{e_3 - 1}{e_3} - \frac{1}{e_4}\right)$$

Para estos dos valores de e_3 la fibra de π con menor cardinal es $\pi^{-1}(Q_4)$, que consta de $r/2e_4$ puntos. Nuevamente por la Observación 4.3 se tiene que

$$4(p-1) + 4|B| = 2r\left(\frac{e_3 - 1}{e_3} - \frac{1}{e_4}\right) + 4|B| \geq \frac{2r(e_3 - 1)}{e_3} \geq r$$

$\square$

Observación 4.8. Nótese que si $|B| < 2(p-1)$ entonces la cota obtenida en el Teorema 4.7 es mejor que la cota de May (véase la introducción de este capítulo).

El Teorema 4.7 se puede aplicar a algunas tipos particulares de superficies de Klein. Sea γ un entero positivo; una superficie de Klein S es γ-hiperelíptica (respectivamente γ-trigonal cíclica) si existe $T \in \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ de orden 2 (respectivamente de orden 3) tal que el cociente $S/\langle T \rangle$ tiene género algebraico γ.

Corolario 4.9. *Sea S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$ y sea $\gamma \geq 0$ un entero positivo.*

(i) *Si S es γ-hiperelíptica y $p > 4\gamma + 1$ entonces*

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 8\,(p-\gamma)$$

(ii) *Si S es γ-trigonal cíclica y $p > 6\gamma + 4$ entonces*

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 6\,(p-\gamma)$$

Demostración. La condición $p > 4\gamma + 1$ (resp. $p > 6\gamma + 4$) implica que existe un automorfismo ϕ de orden 2 (resp. de orden 3) de S tal que $\langle\phi\rangle$ es central en $\mathrm{Aut}^{\pm}(S)$, esto es, $A\langle\phi\rangle = \langle\phi\rangle A$ para cada $A \in \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$. Esta última afirmación es consecuencia de la unicidad del grupo $\langle\phi\rangle$, que se deduce, para superficies de Riemann, de 3.5. en [2]. La unicidad se puede probar fácilmente para superficies de Klein (véase 6.1.5. de [8]) empleando un argumento de grupos NEC, de los que hablaremos más adelante en este Capítulo. Una alternativa consiste en levantar el automorfismo ϕ a un automorfismo $\widetilde{\phi}$ de la cubierta doble S_c de S y aprovechar entonces la unicidad del grupo $\left\langle\widetilde{\phi}\right\rangle$ en S_c.

Como consecuencia de la centralidad de $\langle\phi\rangle$, el conjunto B de puntos fijos de ϕ es invariante bajo la acción de $Aut^{\pm}(S)$. El conjunto B también es el conjunto de puntos de ramificación de la proyección canónica $\pi : S \longrightarrow S/\langle\phi\rangle$, con lo cual la fórmula de Riemann-Hurwitz $(*)$ nos permite calcular el cardinal de B.

Supongamos que $B \subseteq S^{\circ}$. En el caso (i) la relación $(*)$ adopta la forma

$$\frac{2p-2}{2} = 2\gamma - 2 + 2\,|B|\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

de donde $|B| = p + 1 - 2\gamma$. En el caso (ii) se tiene que

$$\frac{2p-2}{3} = 2\gamma - 2 + 2\,|B|\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

con lo cual $|B| = \frac{1}{2}(p + 2 - 3\gamma)$. Aplicando el Teorema 4.7 se obtiene

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 8\,(p-\gamma)$$

en el caso (i) y

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 6\,(p-\gamma)$$

en el caso (ii).

Si $B \cap \partial S$ es no vacío basta, por la Observación 4.4, con estudiar el caso en que $B \subseteq \partial S$. En esta situación, de la fórmula de Riemann-Hurwitz $(*)$ se deduce que $|B| = 2(p+1-2\gamma)$ en el caso (i) y $|B| = p + 2 - 3\gamma$ en el caso (ii). Por la Observación 4.5 se tiene

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 4(p+1-2\gamma) < 8\,(p-\gamma)$$

en el caso (i) y

$$|\mathrm{Aut}^{\pm}(S)| \leq 2(p+2-3\gamma) < 6\,(p-\gamma)$$

en el caso (ii). $\square$

Siguiendo la demostración del Teorema 4.7 se observa que $|G| \leq max\{4\,(p-1),\, 4\,|B|\}$ salvo en el siguiente caso: el género algebraico de la superficie cociente Y es igual a 0; la proyección π tiene exactamente cuatro puntos de ramificación, todos ellos en ∂Y, y tres de los índices de ramificación son igual a 2.

En la siguiente Proposición 4.10 construimos superficies que cumplen estas condiciones y para las cuales se alcanza la cota del Teorema 4.7, con lo cual quedará probado que dicha cota es fina. Además en 4.10 se afirma que esta cota es "buena" en otro sentido: no es posible encontrar otra cota similar para $|G|$ (es decir, en la que intervengan el género p y el cardinal de un conjunto invariante) en la cual el coeficiente que multiplica a p sea menor que 4.

Proposición 4.10. *Sean λ y μ números reales positivos con $\lambda < 4$. Entonces existen una superficie de Klein S compacta y con borde, un grupo G de automorfismos de S y un conjunto $C \subseteq S$, invariante bajo la acción de G, tales que:*

$$|G| > \lambda(p-1) + \mu|C|$$

donde p es el género algebraico de S. Además se puede conseguir que $|C| = 1$.

Para demostrar 4.10 emplearemos algunos hechos básicos de la teoría de grupos cristalográficos no euclídeos (grupos NEC), que describimos a continuación. Los grupos NEC desempeñan en la teoría de superficies de Klein la misma función que los grupos fuchsianos en la teoría de superficies de Riemann; como referencia se pueden consultar los Capítulos 0, 1 y 2 de [8].

Definiciones y Propiedades 4.11 (Grupos NEC). Un *grupo NEC* es un subgrupo discreto Γ de $\mathrm{Aut}^{\pm}(\mathbb{H})$ (véase 3.11) tal que el cociente $S := \mathbb{H}/\Gamma$ es compacto. Se define el *signo* de Γ como

$$sign(\Gamma) = \begin{cases} + & \text{si } S \text{ es orientable} \\ - & \text{si } S \text{ no es orientable} \end{cases}$$

(i) Todo grupo NEC admite una presentación dada por el conjunto de generadores

$$\begin{array}{lll} x_i & i = 1, \ldots, r & \\ e_i & i = 1, \ldots, k & \\ c_{ij} & i = 1, \ldots, k\,,\ j = 0, \ldots, s_i & \\ a_i\,,\ b_i & i = 1, \ldots, g & \text{si } sign(\Gamma) = + \\ d_i & i = 1, \ldots, g & \text{si } sign(\Gamma) = - \end{array}$$

(que recibirán el nombre de *generadores canónicos* de Γ) y las relaciones

$$\begin{array}{ll}
x_i^{m_i} = 1 & i = 1, \dots, r \\
e_i^{-1}\, c_{i0}\, e_i\, c_{is_i} = 1 & i = 1, \dots, k \\
c_{ij}^2 = 1 & i = 1, \dots, k\,,\ j = 0, \dots, s_i \\
(c_{i,j-1}\, c_{ij})^{n_{ij}} = 1 & i = 1, \dots, k\,,\ j = 1, \dots, s_i \\
x_1 \dots x_r\, e_1 \dots e_k\, [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 & i = 1, \dots, g \quad \text{si } sign(\Gamma) = + \\
x_1 \dots x_r\, e_1 \dots e_k\, d_1^2 \dots d_g^2 & i = 1, \dots, g \quad \text{si } sign(\Gamma) = -
\end{array}$$

donde $[a_i, b_i] = a_i\, b_i\, a_i^{-1}\, b_i^{-1}$, los m_i, n_{ij} son números enteros mayores que 1 y r, k, g y los s_i son números enteros no negativos.

(ii) Una *signatura* es una colección de números enteros y símbolos de la forma

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

Se definen el *signo* de σ

$$sign(\sigma) = \begin{cases} + & \text{si } + \text{ es el signo que aparece en } \sigma \\ - & \text{si } - \text{ es el signo que aparece en } \sigma \end{cases}$$

y el *carácter de orientabilidad* de σ como

$$\alpha(\sigma) = \begin{cases} 2 & \text{si } sign(\sigma) = + \\ 1 & \text{si } sign(\sigma) = - \end{cases}$$

(iii) Si Γ es un grupo NEC con la presentación descrita anteriormente, se define la *signatura* de Γ como

$$\sigma = \sigma(\Gamma) = (g; sign(\Gamma); [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

Para la superficie $S = \mathbb{H}/\Gamma$, el número entero g coincide con el género topológico de S, el número entero k es igual al número de componentes conexas de ∂S y $\alpha(S) = \alpha(\sigma)$ (véase la Definición 3.5). Nótese que si $k = 0$ y $sign(\Gamma) = +$ entonces Γ es un grupo fuchsiano y S una superficie orientable y sin borde.

Si $r = s_i = 0$ para $i = 1, \dots k$ escribiremos la signatura de Γ de la forma

$$\sigma(\Gamma) = (g\,; \pm; [-]; \{(-), \overset{k)}{\dots}, (-)\})$$

y diremos que Γ es un *grupo de superficie.* Si $k > 0$ diremos que Γ es un *grupo de superficie con borde.*

(iv) El *área* de una signatura

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

se define como

$$\mu(\sigma) = 2\pi \left[\alpha(\sigma)\, g + k - 2 + \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right) \right]$$

y el *área* $\mu(\Gamma)$ de un grupo NEC Γ como el área de su signatura.

Dada una signatura σ, existe un grupo NEC Γ tal que $\sigma = \sigma(\Gamma)$ si y sólo si $\mu(\sigma) > 0$ y $\alpha(\sigma) + g \geq 2$.

(v) Sean Γ' un grupo NEC y Γ un subgrupo de Γ' de índice finito $[\Gamma' : \Gamma]$. Entonces Γ es también un grupo NEC y se cumple la fórmula de Riemann-Hurwitz para grupos NEC:

$$\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma')} = [\Gamma' : \Gamma]$$

(vi) Si Γ es un grupo NEC, la superficie compacta $S = \mathbb{H}/\Gamma$ admite una única estructura de superficie de Klein tal que la proyección natural $\chi : \mathbb{H} \longrightarrow S$ es un morfismo. Si Λ es otro grupo NEC que contiene a Γ como subgrupo normal de índice finito, entonces $G = \Lambda/\Gamma$ actúa como grupo de automorfismos de $S = \mathbb{H}/\Gamma$. La superficie cociente S/G es isomorfa, como superficie de Klein, a $\mathbb{H}/\Lambda$.

(vii) Si S es una superficie de Klein compacta de género algebraico $p \geq 2$ entonces existe un grupo NEC de superficie Γ tal que $S \cong \mathbb{H}/\Gamma$. Si G es un grupo de automorfismos de S, entonces existe un grupo NEC Λ que contiene a Γ como subgrupo normal de índice finito tal que $G \cong \Lambda/\Gamma$.

Demostración de la Proposición 4.10. Sea $M \geq 4$ un número entero par. Sea Γ un grupo NEC con signatura $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 2, M)\})$. La existencia de Γ está garantizada por 4.11 (iv), ya que

$$\mu(\sigma) = 2\pi \left[1 - 2 + \frac{1}{2}\left(3\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{1}{M}\right)\right] = 2\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2M}\right] \geq 2\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right] > 0$$

y $\alpha(\sigma) + g = 2 + 0 \geq 2$.

Por 4.11 (i) y (iii) Γ admite una presentación dada por el conjunto canónico de generadores $\{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y las relaciones

$$\{c_j^2 = (c_0c_1)^2 = (c_1c_2)^2 = (c_2c_3)^2 = (c_3c_4)^M = c_0c_4 = 1 \ : \ j = 0, \ldots, 4\}$$

Sea D_M el grupo diedral de orden $2M$, que está generado por una rotación ρ de orden M y una simetría σ (que es de orden 2). De hecho D_M admite la siguiente presentación

$$\left\langle \rho, \sigma \ : \ \sigma^2 = \rho^M = 1, \ \rho\,\sigma = \sigma\,\rho^{-1} \right\rangle$$

Consideremos la aplicación $\psi : \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\} \longrightarrow D_M$ definida como

$$\psi(c_0) = \phi(c_4) = \sigma; \quad \psi(c_1) = 1; \quad \psi(c_2) = \rho^{\frac{M}{2}+1}\sigma; \quad \psi(c_3) = \rho\,\sigma$$

Es fácil comprobar que ψ respeta las relaciones que definen Γ, y por tanto se extiende a un homomorfismo de grupos $\phi : \Gamma \longrightarrow D_M$. De hecho, ϕ es un epimorfismo, ya que $\sigma = \phi(c_0), \ \rho = \phi(c_3\, c_0) \in im\, \phi$.

El núcleo $\Lambda := Ker\,\phi$ es un subgrupo normal de Γ de índice $2M$, así que, por 4.11 (v), Λ también es un grupo NEC. Sea

$$\sigma(\Lambda) = (g; \pm; [m_1, \ldots, m_r]; \{(n_{11}, \ldots, n_{1s_1}), \ldots, (n_{k1}, \ldots, n_{ks_k})\})$$

la signatura de Λ. El automorfismo ϕ respeta los órdenes de los elementos

$$c_0\, c_1,\ c_1\, c_2,\ c_2\, c_3,\ c_3\, c_4 \in \Gamma$$

lo que implica que $r = 0$ (véase el Teorema 2.2.4 de [8]). Además, el Teorema 2.3.3. de [8] nos permite afirmar que $k \geq 1$ y que $s_j = 0$ para cada j. En resumen, Λ es un grupo de superficie con borde.

Sean $S_M := \mathbb{H}/\Lambda$ y $G_M := \Gamma/\Lambda$. Por 4.11 (vi) se tiene que S_M es una superficie de Klein compacta (y con borde, ya que $k > 0$) y que $G_M \cong D_M$ actúa como grupo de automorfismos de S_M.

Por 4.11 (vi), la superficie cociente S_M/G_M es isomorfa a $\mathbb{H}/\Gamma$. Sea $\pi : S_M \longrightarrow S_M/G_M$ la proyección canónica. El hecho de que Γ tenga signatura $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 2, M)\})$ se traduce en que π tiene exactamente cuatro puntos de ramificación Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 en S_M/G_M, todos ellos pertenecientes al borde $\partial(S_M/G_M)$, con índices de ramificación $e_1 = e_2 = e_3 = 2$ y $e_4 = M$ (véase [32]).

Sea $C_M := \pi^{-1}(Q_4) \subseteq S_M$, que, por ser una fibra de la aplicación π resulta ser un conjunto finito invariante bajo la acción del grupo G_M. El Lema 4.1 implica que $C_M \subseteq S_M \setminus \partial S_M$ y se sigue de la Observación 4.3 y del hecho de que π tiene grado $2M$ que $|C_M| = 1$.

Por otra parte, la fórmula de Riemann-Hurwitz para grupos NEC (4.11 (v)) nos permite calcular el género algebraico $p = \alpha(S_M)\, g + k - 1$ de S_M:

$$2M = [\Gamma : \Lambda] = \frac{\mu(\Lambda)}{\mu(\Gamma)} = \frac{2\pi\,[\alpha(S_M)\, g + k - 2]}{2\pi\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2M}\right]} = \frac{p-1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2M}}$$

de donde se deduce que $p = M/2$.

Por lo tanto, si elegimos M suficientemente grande, la desigualdad del enunciado se cumple para la terna (S_M, G_M, C_M), ya que

$$\lambda(p-1) + \mu|C_M| = \lambda\left(\frac{M}{2} - 1\right) + \mu < 2M = |G_M|$$

siempre que

$$M > \frac{\mu - \lambda}{2 - \frac{\lambda}{2}}$$

$\square$

Observación 4.12. En la demostración anterior, para que se cumpla la desigualdad del enunciado, el número entero $M = 2p$ debe cumplir

$$\frac{\lambda M}{2} + \mu - \lambda < 2M \qquad \text{es decir} \qquad \mu - \lambda < p\,(4 - \lambda)$$

Por lo tanto, si fijamos inicialmente un número entero p que cumpla esta condición, conseguiremos una superficie S_M cuyo género algebraico será precisamente p.

Construcción 4.13. Dado un número entero par $M \geq 4$ sea (S_M, G_M, C_M) la terna construida en la demostración de la Proposición 4.10. Recordemos que S_M es una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $M/2$ y G_M es un grupo de automorfismos de S_M isomorfo a D_M, el grupo diedral de orden $2M$. La proyección $\pi : S_M \longrightarrow S_M/G_M$ ramifica sobre cuatro puntos $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \partial(S_M/G_M)$. El conjunto $C_M = \pi^{-1}(Q_4) \subseteq S_M \setminus \partial S_M$ tiene un único elemento y es invariante bajo la acción del grupo G_M.

La superfice cociente S_M/G_M es isomorfa a $\mathbb{H}/\Gamma$, donde Γ es un grupo NEC con signatura $\sigma = (0; +; [-]; \{(2, 2, 2, M)\})$. Por tanto S_M/G_M es isomorfa al disco cerrado unidad D del plano complejo. Por el Lema 4.2, el número de fibras $\pi^{-1}(Q_j)$ contenidas en ∂S_M es par, por tanto existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $B_M := \pi^{-1}(Q_k) \subseteq S_M \setminus \partial S_M$. El conjunto B_M es invariante bajo la acción del grupo G_M y, por la Observación 4.3, $|B_M| = M/2$.

Nos será de gran utilidad (para probar que las cotas que obtenemos son finas) la familia $\mathcal{S}$ definida como

$$\mathcal{S} = \{(S_M, G_M, B_M, C_M) \ : \ M \geq 4 \text{ y par}\}$$

A continuación obtenemos una cota superior para el orden de un grupo de autormorfismos de una superficie de Klein compacta y con borde S en función de los cardinales de dos subconjuntos finitos de S, invariantes bajo la acción de ese grupo.

Teorema 4.14. *Sea S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$. Sean B y C dos subconjuntos distintos de S, finitos y no vacíos, invariantes bajo la acción de un grupo G de automorfismos de S. Entones*

$$|G| \leq 2(p-1) + 2|B| + 2|C|$$

Demostración. Por las Observaciones 4.4 y 4.5 podemos suponer que $B, C \subseteq S^\circ$. También podemos suponer que B y C son disjuntos; en caso contrario basta con considerar los conjuntos $B' = B \cap C$ y $C' = B \setminus C$ (o $C' = C \setminus B$, en caso de que $B \setminus C$ sea vacío), que son conjuntos invariantes disjuntos más pequeños que los originales. Denotaremos con $k = |B|$ y $l = |C|$ los cardinales de los conjuntos invariantes y supondremos que $k \geq l$. Mantendremos el resto de las notaciones de la demostración del Teorema 4.7: q es el género del cociente $Y := S/G$, $Q_1, \ldots, Q_t \in Y$ son los puntos de ramificación de la proyección canónica $\pi : S \longrightarrow Y$, $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_t$ son los correspondientes índices de ramificación de π y $r = |G|$.

(i) El caso $q \geq 2$ está cubierto por la demostración de 4.7, en la que se probó que $r \leq p - 1$. Por tanto podemos asumir que $q = 0, 1$.

(ii) $q = 1$. En este caso $t \geq 1$. De la ecuación $(*)$ se obtiene que

$$\frac{2p-2}{r} \geq 1 - \frac{1}{e_t}$$

o lo que es lo mismo

$$r \leq 2(p-1) + \frac{r}{e_t}$$

La Observación 4.3 implica que la fibra más pequeña de la aplicación π consta al menos de $r/2e_t$ puntos, por lo cual el cardinal l del conjunto invariante C cumple que $l \geq r/2e_t$. De esto se deduce que

$$r \leq 2(p-1) + \frac{r}{e_t} \leq 2(p-1) + 2l$$

(iii) $q = 0$ y $Q_1, \ldots, Q_t \in Y^\circ$. En este caso $t \geq 2$ y se obtiene a partir de la relación $(*)$ que

$$\frac{p-1}{r} = -1 + \sum_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) \geq 1 - \frac{1}{e_{t-1}} - \frac{1}{e_t}$$

o, equivalentemente,

$$r \leq p - 1 + \frac{r}{e_{t-1}} + \frac{r}{e_t}$$

Las dos fibras más pequeñas de la aplicación π son $\pi^{-1}(Q_{t-1})$ and $\pi^{-1}(Q_t)$ que tienen cardinales r/e_{t-1} y r/e_t respectively, por ser Q_{t-1} y Q_t puntos interiores de Y. Por lo tanto, los cardinales k y l de los conjuntos invariantes B y C cumplen que $k \geq r/e_{t-1}$ y $l \geq r/e_t$. Así pues

$$r \leq p - 1 + \frac{r}{e_{t-1}} + \frac{r}{e_t} \leq p - 1 + k + l$$

(iv) $q = 0$ y π ramifica sobre algún punto de ∂Y. Tal y como se prueba en el caso (iv) de la demostración del Teorema 4.7, podemos suponer que $\pi^{-1}(\{a_1, a_2\}) \subseteq \partial S$, con lo cual la relación $(*)$ toma la forma

$$\frac{2p-2}{r} = -1 + \sum_{j=3}^{t} n_j \left(1 - \frac{1}{e_j}\right)$$

Si $t = 3$ entonces todas las fibras de la aplicación π tienen cardinal por lo menos $r/2$, con la excepción de $\pi^{-1}(Q_3)$. Por lo tanto, $k \geq r/2$, es decir, $r \leq 2k$.

Si $t \geq 4$ se tiene la desigualdad

$$\frac{2p-2}{r} \geq -1 + 1 - \frac{1}{e_{t-1}} + 1 - \frac{1}{e_t}$$

es decir

$$r \leq 2(p-1) + \frac{r}{e_{t-1}} + \frac{r}{e_t}$$

En este caso, las dos fibras más pequeñas de la aplicación π constan a lo sumo de $r/2e_t$ y $r/2e_{t-1}$ respectivamente, luego $l \geq r/2e_t$ y $k \geq r/2e_{t-1}$ de lo cual se sigue que

$$r \leq 2(p-1) + \frac{r}{e_{t-1}} + \frac{r}{e_t} \leq 2(p-1) + 2k + 2l$$

$\square$

Proposición 4.15. *Existen superficies de género algebraico $p \geq 2$ arbitrario tales que las cotas de los Teoremas* 4.7 *y* 4.14 *se alcanzan para esas superficies (concretamente, se alcanzan para todas las superficies de la familia $\mathcal{S}$ definida en* 4.13*).*

Demostración. Sea (S_M, G_M, B_M, C_M) un elemento cualquiera de la familia $\mathcal{S}$ definida en 4.13. La superficie S_M tiene género algebraico $p = 2M$, donde $M \geq 4$ es un número entero par arbitrario. Para (S_M, G_M, B_M, C_M) se alcanzan las cotas de los Teoremas 4.7 y 4.14, ya que

$$4(p-1) + 4|C_M| = 4\left(\frac{M}{2} - 1\right) + 4 = 2M = |G_M|$$

y

$$2(p-1) + 2|B_M| + 2|C_M| = 2\left(\frac{M}{2} - 1\right) + M + 2 = 2M = |G_M|$$

□

4.3. Conjuntos invariantes formados por componentes conexas del borde

Sean S una superficie de Klein con borde de género algebraico $p \geq 2$, $\mathcal{B}$ el conjunto finito cuyos elementos son las componentes conexas de ∂S y G un grupo de automorfismos de S. Si $C \in \mathcal{B}$ y $\gamma \in G$ se tiene que $\gamma(C)$ vuelve a ser una componente conexa de ∂S. Por tanto cada automorfismo $\gamma \in G$ permuta los elementos de $\mathcal{B}$ con lo que aparece de forma natural una acción ρ del grupo G sobre el conjunto $\mathcal{B}$. En esta sección encontraremos cotas para el orden de G en el caso en que la acción ρ no sea transitiva (es decir, que existan al menos dos órbitas distintas de elementos de $\mathcal{B}$ bajo la acción ρ). Estas cotas dependen sólo del género algebraico de S y mejoran la cota de May en el caso en que $G = \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$.

Definición 4.16. Diremos que $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ es una *partición no trivial* de $\mathcal{B}$ si

1. Cada $\mathcal{B}_j$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{B}_j$
2. $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_k$ es vacío si $j \neq k$
3. Cada $\mathcal{B}_j$ es no vacío y $m \geq 2$

Definición 4.17. Diremos que un conjunto $\mathcal{B}_j \in \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ es *invariante* bajo la acción de G si $\gamma(C) \in \mathcal{B}_j$ para cada $\gamma \in G$ y cada $C \in \mathcal{B}_j$.

Observación 4.18. El hecho de que la acción ρ de G sobre $\mathcal{B}$ no sea transitiva es equivalente a que exista una partición $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ de $\mathcal{B}$ no trivial y formada por conjuntos invariantes bajo la acción de G. Denotaremos con $k_j = |\mathcal{B}_j|$ el número de componentes conexas de cada miembro de la partición y supondremos que $k_1 \leq \cdots \leq k_m$.

La herramienta que utilizaremos es el siguiente resultado, obtenido por Oikawa en [44] (véase también [43]) para superficies de Klein orientables con borde y por Greenleaf y May en [21] para el caso no orientable.

Teorema 4.19. *Sea S una superficie de Klein con borde. Entonces es posible sumergir S en una superficie de Klein sin borde W que tiene el mismo género topológico que S y tal que cada automorfismo de S se extiende a un automorfismo de W. El complementario de S en W consiste en un número finito de discos abiertos, uno por cada componente conexa de ∂S.*

Observación 4.20. En la demostración del teorema anterior, la superficie W se consigue "pegando" un disco a cada componente del borde de S y probando que los automorfismos pueden extenderse a cada uno de estos discos. Además, si un automorfismo γ transforma una componente conexa C_1 del borde de S en otra C_2, entonces la extensión $\widetilde{\gamma}$ de γ a W transforma el disco D_1 pegado a la componente C_1 en el disco D_2 pegado a la componente C_2. Más aún, $\widetilde{\gamma}$ transforma el centro de D_1 en el centro de D_2. En otras palabras, el conjunto formado por los centros de los discos que se añaden es un conjunto finito invariante bajo la acción del grupo $\{\widetilde{\gamma} : \gamma \in \mathrm{Aut}^{\pm}(S)\}$ de automorfismos de W.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}_j$ es un subconjunto del conjunto $\mathcal{B}$ de componentes conexas de ∂S invariante bajo la acción de un grupo G de automorfismos de S. Sean $k = |\mathcal{B}|$ y $k_j = |\mathcal{B}_j|$. Teniendo en cuenta las observaciones precedentes, podemos usar la técnica de la demostración del Teorema 4.19 para pegar discos únicamente a los elementos de $\mathcal{B}_j$. De este modo conseguiremos sumergir S en una superficie de Klein V de manera que

1. El género topólogico de V es el mismo que el de S; V es orientable si y sólo si lo es S (ya que el proceso de pegar discos a una superficie no altera su género ni cambia el hecho de que sea o no orientable).

2. El número de componentes conexas de ∂V es $k - k_j$ (ya que hemos "tapado" k_j agujeros).

3. Cada automorfismo $\gamma \in G$ se extiende a un automorfismo $\widetilde{\gamma}$ de V.

4. El conjunto B_j formado por los k_j centros de los discos que se han añadido a S es un conjunto invariante bajo la acción del grupo $\widetilde{G} = \{\widetilde{\gamma} : \gamma \in G\}$ de automorfismos de V.

En lo que sigue mantendremos las notaciones empleadas previamente y denotaremos con $g_a(S)$ el género algebraico de S y con $g_t(S)$ el género topológico de S. Recordemos que se tiene la relación

$$g_a(S) = \alpha(S)\ g_t(S) + k - 1$$

donde $\alpha(S) = 2$ si S es orientable y $\alpha(S) = 1$ en caso contrario.

Supongamos que existe una partición no trivial $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ de $\mathcal{B}$ en conjuntos invariantes bajo la acción de un grupo $G \subseteq \mathrm{Aut}^{\pm}(S)$. Por la Observación 4.20 podemos sumergir S

en otra superficie de Klein V, construida pegando discos a los elementos de $\mathcal{B}_1$. El género topológico $g_t(V)$ de la superficie V es igual a $g_t(S)$ y el número de componentes conexas de ∂V es $k - k_1 = k_2$. Por tanto se cumple que

$$(+) \quad g_a(V) = \alpha(V)\ g_t(V) + k_2 - 1 = \alpha(S)\ g_t(S) + k_2 - 1$$

La superficie V posee un grupo de automorfismos $\widetilde{G}$ isomorfo a G y el conjunto $B_1 \subseteq V$ formado por los k_1 centros de los discos que se han añadido a S es invariante bajo la acción de $\widetilde{G}$. Así pues, si $g_a(V) \geq 2$ podemos aplicar el Teorema 4.7 a la superficie V para obtener una cota superior para el orden de G.

$$|G| = |\widetilde{G}| \leq 4(g_a(V) + |B_1| - 1) = 4(\alpha(S)\ g_t(S) + k_2 - 1 + k_1 - 1) = 4(g_a(S) - 1)$$

Observación 4.21. La condición $g_a(V) \geq 2$ que aparece en el párrafo previo se puede traducir en términos de la superficie original S gracias a la igualdad (+). De hecho, $g_a(V) \geq 2$ a no ser que:

1. $g_t(S) = 0,\ k_1 \leq 2,\ k_2 = 2$ o
2. $g_t(S) = \alpha(S) = 1,\ k_1 = k_2 = 1$

Nótese que no es posible $g_t(S) = 0,\ k_1 = k_2 = 1$ ya que $g_a(S) \geq 2$.

Supongamos ahora que existe una partición no trivial $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ de $\mathcal{B}$ en conjuntos invariantes bajo la acción de un grupo G. Tal como se describe en la Observación 4.20 podemos pegar discos a los elementos de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para conseguir sumergir S en una superficie de Klein V' del mismo género topológico. El número de componentes conexas de $\partial V'$ es $k - k_1 - k_2 = k_3$, así que se cumple

$$(++) \quad g_a(V') = \alpha(V')\ g_t(V') + k_3 - 1 = \alpha(S)\ g_t(S) + k_3 - 1$$

Además el grupo G se extiende a un grupo $\widetilde{G}$ de automorfismos de V' de manera que para cada $j \in 1, 2$ el conjunto B_j formado por los k_j centros de los discos que se han pegado a los elementos de $\mathcal{B}_j$ es invariante bajo la acción de automorfismos de $\widetilde{G}$. Aplicando el Teorema 4.14 a la superficie V' (lo cual podemos hacer siempre que $g_a(V') \geq 2$) obtenemos que

$$|G| = |\widetilde{G}| \leq 2(g_a(V') + |B_1| + |B_2| - 1) = 2(\alpha(S)\ g_t(S) + k_3 - 1 + k_1 + k_2 - 1) = 2(g_a(S) - 1)$$

Observación 4.22. La condición $g_a(V') \geq 2$ se expresa en términos de S por medio de la relación (++). Se cumple que $g_a(V') \geq 2$ a no ser que:

1. $g_t(S) = 0,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1$ o
2. $g_t(S) = 0,\ k_1, k_2 \leq 2,\ k_3 = 2$ o

3. $g_t(S) = \alpha(S) = 1,\ k_1 = k_2 = k_3 = 1$

Recogemos los dos resultados obtenidos en el siguiente Teorema:

Teorema 4.23. *Sea S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$ y género topológico $g_t(S)$. Sean G un grupo de automorfismos de S y $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\}$ una partición no trivial del conjunto de componentes conexas de ∂S tal que cada conjunto $\mathcal{B}_j$ es invariante bajo la acción del grupo G. Sea k_j el cardinal de $\mathcal{B}_j$.*

Si $m \geq 2$ y S no se encuentra en ninguno de los casos descritos en la Observación 4.21 *entonces*

$$|G| \leq 4\,(p-1)$$

Si $m \geq 3$ y S no se encuentra en ninguno de los casos descritos en la Observación 4.22 *entonces*

$$|G| \leq 2\,(p-1)$$

Proposición 4.24. *Existen superficies de género algebraico p arbitrariamente grande tales que las cotas obtenidas en el Teorema* 4.23 *se alcanzan para esas superficies. Concretamente, la primera cota se alcanza para género algebraico $p \geq 3$ arbitrario y la segunda para $p \geq 5$ arbitrario.*

Demostración. Para probar este resultado utilizaremos la misma técnica que Oikawa en [43]; pasamos a describirla a continuación.

Supongamos que S es una superficie de Klein compacta de género algebraico $p \geq 2$ y que $B \subseteq S$ es finito e invariante bajo la acción de un grupo G de automorfismos de S.

Por 4.11 (vii), la superficie S se obtiene como cociente del plano hiperbólico $\mathbb{H}$ bajo la acción de un grupo NEC Γ y $G \cong \Lambda/\Gamma$ donde Λ es otro grupo NEC que contiene a Γ como subgrupo normal de índice finito. Los elementos de un grupo NEC son isometrías de $\mathbb{H}$ con respecto a la distancia hiperbólica de $\mathbb{H}$, por tanto, S hereda de $\mathbb{H}$ una distancia δ de forma que los automorfismos de S son isometrías con respecto a δ. Así pues, podemos elegir ε suficientemente pequeño de manera que los discos abiertos

$$D_\varepsilon(P) = \{Q \in S \,:\, \delta(Q,P) < \varepsilon\}$$

sean disjuntos cuando $P \in B$. La superficie de Klein S' que se obtiene eliminando de S el conjunto $\bigcup_{P\in B} D_\varepsilon(P)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $g_t(S) = g_t(S')$ y $\alpha(S) = \alpha(S')$
2. Si $k(S)$ es el número de componentes conexas de ∂S entonces el número $k(S')$ de componentes conexas de $\partial S'$ es igual a $k(S) + |B|$
3. Cada automorfismo $\gamma \in G$ se restringe a un automorfismo de S', es decir, G también es un grupo de automorfismos de S'.

Las dos primeras propiedades se deben a que S' se construye quitando $|B|$ discos abiertos a S. La última propiedad se debe a que cada elemento de G, por ser una isometría con respecto a δ y permutar los puntos de B, transforma el conjunto $\bigcup_{P\in B} D_\varepsilon(P)$ en sí mismo.

Para obtener superficies para las cuales se alcancen las cotas del Teorema 4.23 aplicaremos lo anterior a las superficies construidas en la demostración de la Proposición 4.10. Sea (S,G,B,C) un elemento cualquiera de la familia $\mathcal{S}$ construida en 4.13.

Sea S' la superficie de Klein obtenida a partir de S cortando discos centrados en los puntos de C por el procedimiento descrito anteriormente. El género algebraico $g_a(S')$ es igual a

$$g_a(S') = \alpha(S')g_t(S') + k(S') - 1 = \alpha(S)g_t(S) + k(S) + |C| - 1 = g_a(S) + |C|$$

El grupo G actúa como grupo de automorfismos de S' y, como se estableció en la Proposición 4.15, su orden cumple

$$|G| = 4(g_a(S) + |C| - 1) = 4(g_a(S') - 1)$$

Por otra parte cada elemento de G, por ser un automorfismo de S, permuta las componentes conexas de ∂S, por lo cual el conjunto de componentes conexas de $\partial S'$ admite una partición en dos subconjuntos invariantes bajo la acción de G: uno de ellos el formado por los elementos de ∂S y el otro por las nuevas componentes que aparecen al cortar discos para construir S'. Así pues hemos probado que S' cumple las hipótesis de la primera parte del Teorema 4.23 y que la cota se alcanza. Además, como $g_a(S') = g_a(S) + |C| = g_a(S) + 1$ y el género algebraico de S sólo estaba restringido por la condición $g_a(S) \geq 2$, podemos construir una superficie S' de cualquier género algebraico mayor o igual que 3.

Sea ahora S'' la superficie de Klein que se obtiene quitando a S discos suficientemente pequeños alrededor de los puntos de los conjuntos B y C. El género algebraico de S'' cumple

$$g_a(S'') = \alpha(S'')g_t(S'') + k(S'') - 1 = \alpha(S)g_t(S) + k(S) + |B| + |C| - 1 = g_a(S) + |B| + |C|$$

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto formado por las componentes conexas de $\partial S''$. Sean $\mathcal{B}_1$ el conjunto de componentes conexas de ∂S, $\mathcal{B}_2$ el conjunto formado por los elementos de $\mathcal{B}$ que se obtienen al cortar discos alrededor de los puntos de B y $\mathcal{B}_3$ el conjunto formado por el resto de los elementos de $\mathcal{B}$ (es decir, las componentes que aparecen al cortar discos alrededor de los puntos de C). Por construcción $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ es una partición no trivial de $\mathcal{B}$ formada por subconjuntos invariantes bajo la acción de G. Además, como quedó establecido en la Proposición 4.15, el orden de G cumple

$$|G| = 2(g_a(S) + |B| + |C| - 1) = 2(g_a(S'') - 1)$$

Por tanto, la cota de la segunda parte del Teorema 4.23 se alcanza para la superficie S'', cuyo género algebraico es $g_a(S'') = 2g_a(S) + 1$. Así pues se puede conseguir S'' de cualquier género algebraico mayor o igual que 5. $\square$

Por último obtenemos de forma inmediata el siguiente corolario a partir del Teorema 4.23.

Corolario 4.25. *Sea S una superficie de Klein compacta y con borde de género algebraico $p \geq 2$ y supongamos que $Aut^{\pm}(S)$ es un M^*-grupo, es decir, tiene orden $12\,(p-1)$. Entonces la acción de $Aut^{\pm}(S)$ sobre el conjunto $\mathcal{B}$, formado por las componentes conexas de ∂S, es transitiva.*

Bibliografía

[1] R.D.M. Accola, *On the number of automorphisms of a closed Riemman surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 398–408.

[2] ———, *Topics in the Theory of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1595, Springer, 1994.

[3] N.L. Alling y N. Greenleaf, *Foundations of the Theory of Klein Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, no. 219, Springer, 1971.

[4] T. Arakawa, *Automorphisms groups of compact Riemman surfaces with invariant subsets*, Osaka J. Math. **4** (2000), 823–846.

[5] G.W. Brumfiel, *Quotient Spaces for Semialgebraic Equivalence Relations*, Math. Zeit. **195** (1987), 69–78.

[6] E. Bujalance, *Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable surfaces without boundary*, Pacific J. Math. **109** (1983), 279–289.

[7] E. Bujalance, F.J. Cirre, J.M. Gamboa y G. Gromadzki, *Symmetry Types of Hyperelliptic Riemann Surfaces*, Mémoires de la Société Mathématique de France, no. 86, Société Mathématique de France, 2001.

[8] E. Bujalance, J.J. Etayo, J.M. Gamboa y G. Gromadzki, *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1439, Springer, 1990.

[9] E. Bujalance y G. Gromadzki, *On nilpotent groups of automorphisms of compact Klein surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 749–759.

[10] E. Bujalance y D. Singerman, *The symmetry type of a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985), 501–519.

[11] B.P. Chetiya, *On genuses of compact Riemann surfaces admitting solvable automorphism groups*, Indian J. pure appl. Math. **12** (1981), 1312–1318.

[12] B.P. Chetiya y K. Patra, *On metabelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 467–472.

[13] F.J. Cirre, *Curvas algebraicas reales de género dos*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM, 1997.

[14] ———, *The moduli space of real algebraic curves of genus two*, Pacific J. of Math. **208** (2003), no. 1, 53–72.

[15] M.D.E. Conder, *The genus of compact Riemann surfaces with maximal automorphism group*, J. Algebra **108** (1987), 204,247.

[16] M.D.E. Conder, C. Maclachlan, S. Todorovic Vasiljevic y S. Wilson, *Bounds for the number of automorphisms of a compact non-orientable surface*, J. London Math. Soc. **68** (2003), 65–82.

[17] H. Delfs y M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field I: Paths and components in the set of rational points of an algebraic variety*, Math. Zeit. **177** (1981), 107–129.

[18] ———, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces*, Math. Zeit. **178** (1981), 175–213.

[19] J.J. Etayo, *On the order of automorphism groups of Klein surfaces*, Glasgow Math. J. **26** (1985), 75–81.

[20] H.M. Farkas e I. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, no. 71, Springer-Verlag, 1981.

[21] N. Greenleaf y C.L. May, *Bordered Klein surfaces with maximal symmetry*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), no. 1, 265–283.

[22] G. Gromadzki, *Maximal groups of automorphisms of Riemann surfaces in various classes of finite groups*, Rev. R. Acad. Ci. Madrid **82** (1988), 267–276.

[23] ———, *Abelian groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary*, Commentationes Mathematicae **28** (1989), 197–217.

[24] ———, *On soluble groups of automorphisms of Riemann surfaces*, Can. Math. Bull. **34** (1991), no. 1, 67–73.

[25] G. Gromadzki y C. Maclachlan, *Supersoluble groups of automorphisms of compact Riemann surfaces*, Glasgow Math. J. **31** (1989), 321–327.

[26] B.H. Gross y J. Harris, *Real algebraic curves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **14** (1981), 157–182.

[27] W.J. Harvey, *On branch loci in Teichmüller space*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 387–399.

[28] A. Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann. **41** (1893), 403–442.

[29] G.A. Jones y D. Singerman, *Complex Functions*, Cambridge University Press, 1987.

[30] J. Lewittes, *Automorphisms of compact Riemann surfaces*, Amer. J. Math. **84** (1963), 734–752.

[31] A.M. Macbeath, *Discontinuous groups and birational transformations*, Proc. of Summer School, Dundee, 1961.

[32] ———, *The classification of non-euclidean plane crystallographic groups*, Canad. J. Math. **19** (1967), 1192–1205.

[33] ———, *Actions of automorphisms of a compact Riemann surface on the first homology*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 103–108.

[34] C. Maclachlan, *A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface*, J. London Math. Soc. **44** (1969), 265–272.

[35] ———, *Maximal normal Fuchsian groups*, Illinois J. Math. **15** (1971), 104–113.

[36] ———, *Weierstrass points on compact Riemann surfaces*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 722–724.

[37] C.L. May, *Automorphisms of compact Klein Surfaces with boundary*, Pacific Journal of Mathematics **59** (1975), no. 1, 199–210.

[38] ———, *A bound for the number of automorphisms of a compact Klein Surface with boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 273–280.

[39] ———, *Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 395–405.

[40] ———, *Nilpotent automorphism groups of bordered Klein surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 287–292.

[41] ———, *Supersolvable M^*-groups*, Glasgow Math. J. **30** (1988), 31–40.

[42] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 5, A.M.S., 1995.

[43] K. Oikawa, *Notes of conformal mappings of a Riemann surface onto itself*, Kodai Math. Sem. Rep. **8** (1956), 23–30.

[44] ———, *A supplement to "notes of conformal mappings of a Riemann surface onto itself"*, Kodai Math. Sem. Rep. **8** (1956), 115–116.

[45] J. Pérez, *Formas Automorfas sobre grupos NEC*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, UNED, 2000.

[46] M. Schiffer y D. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton, 1954.

[47] D. Singerman, *Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces*, Glasgow Math. J. **12** (1971), 50–59.

[48] F. Torres, *Weierstrass points and double covering of curves, with application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Manuscripta Math. **83** (1994), 39–58.

[49] C. Towse, *Weierstrass weights of fixed points of an involution*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **122** (1997), 385–392.

[50] K. Watanabe, *A note on weights of Weierstrass points*, Math. J. Toyama Univ. **21** (1998), 117–120.

[51] R. Zomorrodian, *Nilpotent automorphism groups of Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 241–255.

[52] ______, *Classification of p-groups of automorphisms of a Riemann surface and their lower series*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 237–244.