

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

**Departamento de Personalidad, Evaluación
y Tratamientos Psicológicos (Psicología Clínica)**



**UN ESTUDIO TRANSVERSAL Y LONGITUDINAL SOBRE
LOS CONOCIMIENTOS INFORMALES DE LAS
OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS EN NIÑOS DE
EDUCACIÓN INFANTIL**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Sonia Caballero Reales

Bajo la dirección de la doctora
Purificación Rodríguez Marcos

Madrid, 2005

ISBN: 84-669-2830-8

DEPARTAMENTO DE PERSONALIDAD, EVALUACIÓN Y TRATAMIENTOS PSICOLÓGICOS (PSICOLOGÍA CLÍNICA).
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID. FACULTAD DE PSICOLOGÍA.

UN ESTUDIO TRANSVERSAL Y LONGITUDINAL SOBRE LOS
CONOCIMIENTOS INFORMALES DE LAS OPERACIONES
ARITMÉTICAS BÁSICAS EN NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL.

Director de Tesis: Purificación Rodríguez Marcos.
Tutor de Tesis: Jose Luis Graña Gómez.
Tesis realizada por: Sonia Caballero Reales.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento, y gratitud a la Directora de esta Tesis, Dra. Purificación Rodríguez, ya que sin su enseñanza, apoyo y entusiasmo este trabajo no hubiera sido posible. Y a Dra. Oliva Lago por las buenas ideas aportadas.

En segundo lugar agradecer la colaboración de todas aquellas personas que de una u otra manera me han apoyado y ayudado. Y en especial a mis padres y hermanos por confiar en mí.

Por último y no por ello menos importante agradecer la colaboración de los profesores, padres y alumnos del colegio Centro Cultural Salmantino, y sobre todo a la dirección de dicho centro por facilitar la realización de este estudio.

I. Introducción	1
II. Marco teórico.....	5
1. Los orígenes del conocimiento matemático informal.....	5
2. El pensamiento matemático informal en los años de la educación infantil.....	11
2.1 Algunos procedimientos de cuantificación	13
2.1.1 Subitizing.....	13
2.1.2 La habilidad de contar	14
(1) Principio de correspondencia uno a uno	16
(2) Principio de orden estable	18
(3) Principio de cardinalidad	20
(4) Principio de abstracción	22
(5) Principio de orden irrelevante	23
3. Adición y sustracción	25
3.1 Concepto y propiedades de la adición y la sustracción	25
3.2 Conocimiento informal sobre la adición y la sustracción en los niños de educación infantil.....	32
3.3 Clasificación de los problemas verbales de adición y sustracción	35
3.4 Secuenciación de los problemas verbales de adición y sustracción	47
3.5 Estrategias y errores en la resolución de las tareas de adición y sustracción.....	53
3.5.1 Estrategias de representación directa	54
3.5.2 Estrategias de conteo.....	57
3.5.3 Estrategias memorísticas: hechos numéricos y hechos derivados .	60

3.5.4 Evolución de las estrategias de adición y sustracción.....	64
3.5.5 Estrategias incorrectas de adición y sustracción	68
(a) Errores en los algoritmos.....	68
(b) Errores en los problemas verbales	69
4. Multiplicación y división.....	72
4.1 Concepto y propiedades de la multiplicación y la división	72
4.2 Conocimiento informal sobre la multiplicación y la división en los niños de educación infantil	74
4.2.1 Los modelos intuitivos de la multiplicación y la división.....	80
4.3 Clasificación de los problemas verbales de multiplicación y división	87
4.4 Secuenciación de los problemas verbales de multiplicación y división...	103
4.5 Estrategias y errores en la resolución de problemas de multiplicación y división	108
4.5.1 Estrategias de representación directa o recuento unitario	110
4.5.2 Estrategias de doble recuento.....	113
4.5.3 Recuento transaccional.....	115
4.5.4 Estrategias de conteo	115
4.5.5 Estrategias memorísticas: hechos numéricos y hechos derivados	116
4.5.6 Estrategias incorrectas de multiplicación y división	116

III. Marco experimental	121
1. Planteamiento de hipótesis.....	121
2. Método.....	124
2.1 Participantes	124
2.2 Material.....	125
2.3 Procedimiento.....	126
3. Análisis y discusión de datos	130
3.1 Datos transversales	131
3.1.1 Análisis cuantitativo.....	131
3.1.2 Análisis cualitativo.....	138
1. Procedimientos de resolución: correctos e incorrectos	138
(A) Procedimientos correctos en problemas verbales de adición y sustracción	139
(B) Procedimientos incorrectos en problemas verbales de adición y sustracción.....	150
(C) Procedimientos correctos en problemas verbales de multiplicación y división.....	155
(D) Procedimiento incorrectos en problemas verbales de multiplicación y división.....	166
3.2 Datos longitudinales	174
3.2.1 Análisis cuantitativo.....	175
3.2.2 Análisis cualitativo.....	177

1. Procedimientos de resolución: correctos e incorrectos	177
(A) Procedimientos correctos en problemas verbales de adición y sustracción	177
(B) Procedimientos incorrectos en problemas verbales de adición y sustracción	184
(C) Procedimientos correctos en problemas verbales de multiplicación y división	187
(D) Procedimiento incorrectos en problemas verbales de multiplicación y división	193
3.2.3. El cambio intraindividual	197
IV. Conclusiones	204
V. Bibliografía	211
VI. Anexo I y Anexo II	238

I. INTRODUCCIÓN

I. INTRODUCCIÓN:

Las matemáticas han atraído la atención de numerosas disciplinas desde mucho tiempo atrás, y ello fue debido a que ocupaban y ocupan en la actualidad, un lugar importante y necesario en la sociedad, en el sistema económico y en la vida diaria. A modo de ilustración, son infinitudes de cosas las que a diario son contadas: los días de la semana, los días del mes, el dinero, los objetos, los niños que hay en una clase etc. Y además, las matemáticas están presentes en el currículo escolar desde los 3 años y hasta el bachillerato cuando los niños tienen ya 18 años. Sin embargo, a pesar de ser una de las materias a las que más tiempo se dedica en el currículo escolar es una de las que más fracaso académico conlleva. Buena prueba de ello son, por ejemplo, los resultados de la selectividad del 2003 en los que se pone de manifiesto que la mayoría de los jóvenes españoles suspendían esta asignatura. También los correspondientes al informe Pisa 2004, que arrojaron datos tan alarmantes como que un 20% de los alumnos de secundaria no resolvían con éxito un problema básico.

Estos resultados, hacen surgir inmediatamente la pregunta ¿cuándo se inicia este fracaso? Y lo que es más importante ¿por qué?. Desde nuestro punto de vista, buena parte de las respuestas han de girar en torno a la forma en que se enseñan actualmente las matemáticas. Al ser esta una enseñanza que no parte del conocimiento previo de los alumnos (i.e., conocimiento matemático informal), que no potencia la diversidad en la forma de resolver las tareas y que aleja las matemáticas del entorno del niño favoreciendo la resolución de algoritmos frente a los problemas,

el aprendizaje resulta mecánico y carente de razonamiento. Paliar las dificultades inherentes a la materia comporta prestar más atención a cómo se forma y desarrolla el conocimiento matemático para diseñar estrategias de aprendizaje más eficaces. Sin embargo, nos encontramos con varios problemas:

a) como señalan Bermejo, Lago, Rodríguez, (1998) y Bermejo, Lago, Rodríguez y Pérez, (2000). Los profesores conocen las teorías generales sobre el desarrollo intelectual, pero desconocen las teorías evolutivas sobre el desarrollo en ámbitos específicos como las matemáticas. No suelen conocer los pasos evolutivos en la adquisición de las estrategias de resolución de los diferentes problemas, ni los errores que suelen cometer en distintas tareas, ni las diferentes categorías de problemas). Este desconocimiento hace difícil que los profesores puedan plantear tareas que provoquen reorganizaciones conceptuales en los niños.

b) La instrucción del conocimiento matemático se inicia con la simbología y con los algoritmos de las operaciones básicas (i.e. adición, sustracción, multiplicación y división), pensando que éstos constituyen la base para la comprensión de los problemas verbales. De esta forma, queda relegado a un segundo plano la comprensión, la construcción y el significado de los problemas verbales.

c) En la escuela no se proponen problemas verbales (i.e., adición, sustracción, multiplicación y división) con estructuras semánticas diferentes. Esta limitación provoca que los niños den respuestas automáticas en determinados problemas, siendo incapaces de resolver otros con estructuras diferentes, que requieren los mismos esquemas conceptuales.

Estas ideas, aunque lentamente, han empezado a introducirse en la escuela, ya que en los últimos años se han llevado a cabo diferentes investigaciones que han puesto de manifiesto, por ejemplo, que los primeros conceptos que desarrollan los niños sobre la adición, sustracción, multiplicación y división tienen su origen, como tendremos ocasión de mostrar en este estudio, en el conocimiento informal, en las acciones de la vida cotidiana. Acciones como “quitar”, “poner” o “repartir” las realizan los niños habitualmente con gran éxito. No obstante, queda mucho por hacer y el cambio debe afectar directamente al currículo escolar. Por ejemplo, si nos circunscribimos a la Educación Infantil, comprobaremos que los primeros conocimientos matemáticos que se enseñan están relacionados con el aprendizaje de las etiquetas-numéricas, y los aspectos ordinales y cardinales del número pasando posteriormente a la *adición* de conjuntos con pequeñas cantidades, pero no se potencia y desarrolla el conocimiento informal sobre las operaciones básicas en contextos de resolución de problemas. Conocimiento que como comprobaremos en nuestro estudio, es muy abundante. Desde este momento la escuela empieza a limitar las posibilidades de razonar ante diferentes problemas verbales y situaciones matemáticas.

Nos gustaría concluir afirmando que la perspectiva educativa que debería predominar en la escuela ha de ser aquella que tenga en cuenta los conocimientos informales de los niños y a partir de ellos construya el aprendizaje formal.

Desde este punto de vista, el trabajo de investigación que a continuación se presenta pretende contribuir al conocimiento sobre cómo se desarrolla y conforma el conocimiento matemático, estableciendo los conocimientos informales que los niños

tienen, antes de la enseñanza formal, de las operaciones aritméticas básicas, averiguando si realmente hay un orden de dificultad en la adquisición de estas operaciones, comprobando si los diferentes tipos de problemas (i.e., *acción*, *no acción*) son resueltos con igual facilidad, así como el estudio minucioso de los procedimientos correctos e incorrectos de resolución.

El trabajo lo hemos estructurado en tres partes. Una primera parte teórica en la que se discute el paso del conocimiento informal al conocimiento formal y algunos procedimientos de cuantificación. Posteriormente, nos ocupamos, por un lado, de la adición y sustracción y por otro, de la multiplicación y división analizando en ambos casos: el conocimiento informal de los niños sobre estas operaciones, las clasificaciones basadas en los problemas verbales, las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas verbales y por último, los errores más frecuentes.

La segunda parte corresponde al trabajo experimental. En primer lugar, exponemos nuestros objetivos e hipótesis para pasar posteriormente a la descripción de la muestra y el método. A continuación realizamos el análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos para terminar con las conclusiones finales.

En la tercera parte recogemos las referencias bibliográficas.

II. MARCO TEÓRICO

II. MARCO TEÓRICO.

Una parte importante del conocimiento matemático de los niños tiene que ver con la construcción del número. Dos modelos merecen ser especialmente destacados. Por un lado la corriente piagetiana (Piaget y Szeminska, 1941), que asume que la capacidad para adquirir, comprender y emplear el número sólo es posible si los niños previamente han tenido acceso a una serie de conceptos ligados al estadio de las operaciones concretas. Brevemente, hasta que los niños alcanzan esta etapa no se puede hablar de una comprensión real del número (Piaget, 1959). La otra alternativa, representada fundamentalmente por Gelman (p.e., Gelman, 1972; Gelman y Gallistel, 1978), considera que la capacidad tanto para usar como para comprender los números se desarrolla a partir de la experiencia de contar y ésta, como tendremos ocasión de ver más adelante, está presente desde muy temprano. En este marco teórico tendrá cabida nuestra investigación, cuyo objetivo reside en mostrar que el conocimiento inicial de los niños sobre esta habilidad les permite resolver diversas situaciones que implican las operaciones aritméticas elementales.

1. LOS ORIGENES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO INFORMAL.

A la hora de abordar la cuestión relativa al conocimiento matemático informal se plantean numerosas preguntas: ¿cuándo se empieza a desarrollar el conocimiento matemático?, ¿este aprendizaje depende de la habilidad del lenguaje para contar, de la cultura o es innato?

Se ha comprobado en numerosos estudios que los niños poseen habilidades numéricas que pueden ser usadas para contar pequeños grupos de objetos. Parece que en torno a los 2 años surgen los primeros intentos de usar los números convencionales en situaciones concretas y hacer uso del conocimiento informal (Bermejo,1994). En principio, empiezan a contar para enumerar pequeños conjuntos y no reparan en si los objetos son similares o no, si son estáticos o no, y tampoco si son secuenciales o simultáneos.

Geary (1994) señaló que la competencia matemática de los niños no depende del lenguaje o de la transmisión cultural, sino de que nacen con “un sentido matemático”. Este hecho resulta patente en numerosos estudios realizados con bebés y con animales en los que se demuestra que los más pequeños son capaces de discriminar y atender a la numerosidad como cualidad de los objetos, además de anticipar la solución correcta ante pequeñas operaciones de adición y sustracción (Ginsburg, 1998). A continuación, recogemos algunos de los estudios realizados desde esta perspectiva.

Starkey y Cooper (1980) encontraron en un experimento de habituación que los niños de 5 meses discriminaban entre 2 y 3 puntos, pero en un segundo experimento también hallaron que dicha discriminación no se producía ante 4 y 6 puntos. En esta misma línea, Cooper (1984) mostró que los niños con edades comprendidas entre los 12 y 18 meses eran capaces de determinar cuál resultaba ser el más numeroso de dos conjuntos, pero incapaces de establecer la distinción “más que/menos que”. Diez años después Starkey junto a Spelke y Gelman realizaron un experimento con bebés de 6 meses a los que expusieron imágenes auditivo-visuales,

comprobando que miraban más tiempo la exposición visual que se emparejaba con el número de sonidos que habían escuchado. Además, recientemente Wynn, Bloom y Chiang (2002) pusieron de manifiesto que no solo los más pequeños respondían a aspectos numéricos y eran capaces de contar objetos, sino que también consideraban una colección de objetos como una unidad y eran capaces de contarla. En efecto, estos autores llegaron a la conclusión de que los niños de 5 meses podían individualizar y contar colecciones de objetos. Para ello, separaron a los bebés en dos grupos: unos fueron habituados a dos colecciones de 3 objetos cada una y otros a 4 colecciones de 3 objetos. En la fase de prueba se les mostró a ambos grupos dos tipos de ensayos con 8 objetos: uno formado por dos conjuntos con 4 elementos cada uno y otro por cuatro conjuntos con dos objetos cada uno. Tanto en la fase de habituación como en la de prueba, los objetos de cada colección se hallaban en movimiento, de manera que la configuración de la colección cambiaba constantemente. Encontraron que los bebés que habían sido habituados a dos colecciones miraban más tiempo la fase de prueba compuesta por cuatro colecciones, y los habituados a cuatro miraban más la de dos. Hasta aquí se podría afirmar que los más pequeños conocen los aspectos relacionados con la cardinalidad del número, es decir, conocen si dos conjuntos son o no del mismo tamaño, pero las investigaciones han dado un paso más en el desarrollo del conocimiento numérico al investigar también el aspecto ordinal. En otras palabras, se trata de evaluar si comparan entre si dos conjuntos y el sentido en el que son diferentes (i.e. mayor o menor). Este conocimiento supone comprender que determinados efectos numéricos implican transformaciones en los conjuntos. A pesar de que las investigaciones al respecto son

escasas encontramos dos líneas de investigación, claramente definidas: la **posición innatista** y la posición que defiende que estas **habilidades ordinales se adquieren progresivamente** en el desarrollo del niño. La primera de ellas ha estado representada por Wynn quien señaló que los bebés de tan sólo 5 meses tenían habilidades numéricas necesarias y suficientes para discriminar dos cantidades numéricas distintas y establecer relaciones de orden mayor que /menor que. En cuanto a la segunda, autores como Cooper (1984) propusieron un modelo evolutivo en dos pasos: (1) la discriminación *equivalente / no equivalente* que se adquiere a los 12 meses. (2) las relaciones *mayor que / menor que* a los 16. Sin embargo, estudios posteriores mostraron que la comprensión de las relaciones ordinales se produce hacia los 9-11 meses de edad antes de que los niños sean capaces de emitir la secuencia de conteo. Por ejemplo Elisabeth Brannon ha sido una de las autoras que de forma reciente ha ahondado sobre la formación de relaciones ordinales en bebés preverbales. Uno de sus objetivos ha sido comprobar el modelo evolutivo anteriormente presentado controlando algunas variables experimentales, sobre todo de tipo perceptivo, que podrían estar influyendo. Así, Brannon, (2002) habituó a bebés de 9 a 11 meses a una secuencia de elementos ascendentes (2, 4 y 8 cuadrados). Con el fin de evitar el efecto de plenitud que se produciría al aumentar sin más el número de elementos en pantalla, se controlaron diversos aspectos visuales de los elementos y de la pantalla de presentación (p.e., el tamaño, el área, la densidad...). En la fase de evaluación se emplearon dos condiciones experimentales: familiar si se mantenía el orden de presentación y novedosa si éste se invertía. Los resultados mostraron que sólo a partir de los 11 meses los niños detectaban la

inversión de la secuencia numérica (p.e., 2, 4 y 8 cuadrados frente a 8, 4 y 2 cuadrados).

Además, encontramos que los bebés no sólo tienen conocimientos sobre la cardinalidad y la ordinalidad de conjuntos pequeños de objetos, sino también acerca de las direcciones y efectos que producen las transformaciones que se hacen como resultado de la adición y la sustracción. Por ejemplo, en el estudio que Wynn realizó en 1992, mostró a bebés de 5 meses el resultado correcto de la adición $1+1$ y la sustracción $2-1$, así como la solución incorrecta (i.e., $1+1=1$ y $2-1=2$). Advirtió que los niños de 5 meses observaban durante más tiempo la respuesta no correcta o inesperada. Sin embargo, estos resultados podían deberse a que en la solución incorrecta el conjunto inicial permanecía invariable, por ello llevó a cabo un nuevo experimento variando la respuesta incorrecta ($1+1=3$). En este último caso, los bebés miraban durante más tiempo la solución incorrecta.

Estos estudios han sido replicados por diferentes autores variando la técnica y el estímulo. Así, Uller, Carey Huntley, Fenner y Klatt (1996) encontraron los mismos resultados que Wynn con niños de ocho meses e igualmente, Baillargeon (1994), obtuvo resultados similares con niños de 10 meses. No obstante, algunos autores han propuesto explicaciones alternativas (para una amplia revisión sobre el tema se puede consultar Rodríguez, Lago y Jimenez, 2003). Por ejemplo, Koechlin, Dehaene y Mehler (1997) plantearon que quizás los bebés respondían en función de la presencia / ausencia del objeto, más que en función del número. Por este motivo, colocaron los objetos en una plataforma giratoria, que los niños no pudieron retener una localización espacial específica. A pesar de esto, los bebés de 5 meses se

comportaron del mismo modo que lo habían hecho en el experimento de Wynn, es decir, miraban más tiempo los resultados numéricos incorrectos.

Por su parte, Simon, Hepos y Rochat (1995) trataron de verificar si esas respuestas se debían a expectativas no cumplidas del proceso visual o al cálculo exacto de la operación aritmética. Para ello, introdujeron una serie de variaciones en el experimento de Wynn consistentes en modificar la identidad de los objetos presentados (i.e., los muñecos: Elmo y Ernie). En concreto, los niños observaron en la situación experimental de adición dos condiciones:

(a) Situaciones posibles: $\text{Elmo} + \text{Elmo} = 2 \text{ Elmos}$, $\text{Ernie} + \text{Ernie} = 2 \text{ Ernies}$,
 $\text{Elmo} + \text{Ernie} = \text{Elmo} + \text{Ernie}$.

(b) Situaciones imposibles: $\text{Elmo} + \text{Elmo} = \text{Elmo}$ y Ernie , $\text{Elmo} + \text{Elmo} = 1 \text{ Elmo}$,
 $\text{Elmo} + \text{Elmo} = \text{Ernie}$

En la sustracción se siguió una pauta similar. Los resultados concluyeron que los bebés de 5 meses miraban más tiempo los resultados aritméticamente imposibles, tanto de adición como de sustracción, independientemente de que los objetos no cumplieren la regla de identidad.

Finalmente, Starkey (1992) llevó a cabo una investigación con niños de 18 a 35 meses en la que debían identificar el número de pelotas de pin-pon de diferentes colores que había dentro de una caja (i.e., de 1 a 5) que se manipulaba poniendo o quitando pelotas. Los niños de 18 meses eran capaces de identificar correctamente el número de pelotas dentro de la caja, en esta situación 1 más 1.

Estudios similares a estos fueron realizados con animales, por ejemplo con ratas (Davis y Bradford, 1986; Meck y Church, 1983; Platt y Johnson, 1971),

chimpancés (Matsuzawa, 1985; Davis 1984; Boysen y Berntson, 1989), papagayos (Pepperberg, 1987) y monos Rhesus (Wynn, 1992). Estos últimos al igual que los bebés observaban más tiempo cuando la solución de $1+1$ no era la correcta. En general, los animales eran capaces de distinguir entre conjuntos con diferentes elementos, además de establecer comparaciones entre dos conjuntos.

Podemos concluir este apartado señalando que, independientemente de a que edad los niños adquieran los aspectos cardinales ordinales de los numerales y las habilidades aritméticas de adición y sustracción, parece claro que los bebés presentan constancia visual ante aspectos como el tamaño, la forma, el color, la propia identidad y la numerosidad (Karmiloff-Smith, 1992). Esto pone de manifiesto que desde muy temprana edad los niños tienen un conocimiento matemático informal, que se desarrolla como veremos en el siguiente apartado, en los primeros años de la infancia.

2. EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO INFORMAL EN LOS AÑOS DE LA EDUCACIÓN INFANTIL

Las investigaciones cognitivo-evolutivas indican que, en general, al margen de cómo se introduzcan las técnicas, símbolos y conceptos matemáticos en la escuela, los niños tienden a interpretar y abordar las matemáticas formales en función de sus conocimientos matemáticos informales (p.e., Clements y Sarama, 2000; Ginsburg, 1997; Hierbert, 1984). A este respecto, sería correcto afirmar que las matemáticas informales constituyen el paso intermedio crucial entre el conocimiento intuitivo,

limitado e impreciso basado en la percepción directa, y la matemática precisa basada en símbolos abstractos que se aprende en la escuela. La distinción entre conocimiento formal e informal reside en que este último se construye a partir de la interacción con el medio físico y social, mientras que el formal consiste en la manipulación de un sistema de símbolos escritos que se aprende en la escuela.

Desde el nacimiento encontramos que los niños se desarrollan en un medio social que les brinda múltiples oportunidades para relacionarse con elementos que pueden ser manipulados, tocados e incluso contados. Es en este medio donde los más pequeños se enfrentan con situaciones de adición, sustracción y otros problemas numéricos (p.e., Langer, 1986).

Independientemente del medio cultural, los niños tienen numerosas oportunidades para contar, desarrollando sus propias etiquetas (palabras-numerales) y aunque estas varíen de cultura a cultura, todas tienen en común que presentan un sistema de conteo altamente elaborado. Un breve recorrido por el sistema de conteo de culturas muy primitivas recuerda los primeros procesos de cuantificación de los niños más pequeños, que pasa por la utilización de los dedos para contar y las marcas para representar lo que se ha contado, antes de llegar a la simbología de los números propiamente dichos. Así, remontándonos al siglo VIII hallamos un complejo sistema de representación de números de 0 hasta 1 millón basados en la representación con los dedos (p.e., Flegg, 1984). En 1979 Geoffrey Saxe describe el sistema de conteo que utilizan los miembros de la tribu Oksapmin de Nueva Guinea. Los Oksapmin empiezan contando por el dedo meñique de una mano y marcan hasta veintisiete lugares del cuerpo, acabando con el meñique de la otra mano. De esta

forma se pone de manifiesto que la simbología matemática no constituye un conocimiento innato.

El desarrollo del conocimiento informal está sujeto a influencias socioculturales, pero los componentes básicos del conocimiento matemático informal son universales a lo largo de las diversas culturas y grupos sociales (p.e., Ginsburg, Choi, López, Netley, y Chi, 1997; Klein y Starkey, 1988).

En lo que sigue nos referiremos específicamente a dos habilidades básicas, el *subitizing* y la *habilidad de contar*, que junto a otras, por ejemplo la correspondencia, permitirán a los niños pequeños resolver con éxito numerosas situaciones aritméticas.

2.1. ALGUNOS PROCEDIMIENTOS DE CUANTIFICACIÓN

2.1.1. Subitizing.

El proceso de *subitizing* está presente desde muy temprano cuando a los pequeños se les interroga acerca de la cantidad de elementos que contiene un determinado conjunto. En efecto, encontramos que, sin necesidad de contar, si el número de elementos es menor de 5, son capaces de responder correctamente a la cardinalidad del conjunto.

A la hora de explicar los orígenes del procedimiento de subitización los autores proponen diferentes explicaciones. Así, según Kaufman (1949) el *subitizing* es un proceso rápido de apreciación de números pequeños hasta cantidades de 5 elementos. Von Glasersfeld (1982) lo considera como una operación puramente perceptiva, que no implica procedimientos numéricos. Otros autores (p.e. Gelman y

Gallistel, 1978; Ginsburg, Klein y Starkey, 1998; Mandler y Shebo, 1982) señalan que el número es algo que la mente impone sobre la realidad y que el *subitizing* debe basarse en un rápido recuento subvocal y no sólo en procesos perceptivos. En concreto, Gelman y Gallistel (1978) afirman que el *subitizing* llega a través del recuento, es decir, consiste en la utilización de modelos canónicos (i.e., similares a las agrupaciones del domino), que se adquieren de forma paulatina y que se utilizan para facilitar el recuento. Además, señalan una secuencia evolutiva en el proceso de adquisición: (1) recuento de números pequeños, (2) subitización de números pequeños y (3) recuento de números grandes.

Lo que parece claro es que el proceso de subitización es distinto al de conteo en la velocidad y precisión con que niños y adultos determinan la numerosidad, aunque el tiempo aumenta con el número de elementos del conjunto. Además, el *subitizing* es un proceso limitado no solo por la cantidad que se puede enumerar, sino también en la clase de información numérica que proporciona. Por ejemplo, un niño podría afirmar que un conjunto de 3 elementos es diferente de un conjunto con 2, sin llegar a percibir que el primero es mayor. Estas relaciones ordinales son aprendidas, según Cooper (1984), observando que sucede *vía subitizing*, cuando añaden o quitan objetos a un conjunto.

2.1.2. La habilidad de contar

Definimos la habilidad de contar como la asignación individual de etiquetas en secuencia a los elementos de un conjunto, designando la última etiqueta el cardinal. Esta habilidad requiere la coordinación visual, manual y verbal.

Los primeros estudios sobre el conteo surgieron en los años 70 en un intento de superar las posiciones piagetianas que consideraban el conteo como una mera actividad verbal no relacionada con el número, hasta que los niños hubieran superado con éxito las tareas de conservación.

La nueva conceptualización sobre la habilidad de contar se ve reforzada, entre otras cosas, por los estudios que muestran que el conteo constituye una habilidad útil para los niños cuando solucionan diferentes problemas matemáticos antes de los aprendizajes formales (p.e., Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987a, 1987b, 1988, 1990; Carpenter Hiebert y Morse, 1983; Lago, 1992; Lago, Rodríguez, Caballero, 1999; Secada, Fuson y Hall, 1983 etc.). A este respecto, han surgido diferentes explicaciones teóricas sobre el proceso de adquisición de esta habilidad. Algunos autores consideran el conteo como resultado de un proceso mecánico o aprendizaje memorístico (p.e., Baroody y Ginsburg, 1986; Brier y Siegler, 1984; Fuson y Hall, 1983; Siegler y Shneger, 1984). En otras palabras, la habilidad de contar se debe a la creación de hábitos desde los cuales se inducen los principios del conteo, de tal manera que el conteo mecánico va siendo sustituido por un conteo progresivamente más significativo.

Otros autores proponen que la habilidad de contar descansa en la adquisición de unos principios que guían su aprendizaje y estos principios son los siguientes: correspondencia uno a uno, orden estable, cardinalidad, abstracción y orden irrelevante (Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983; Greeno, Riley y Gelman, 1984). La naturaleza no unitaria del modelo propuesto por estos autores (i.e., se pueden tener adquiridos unos principios y otros no) permite conocer los procesos

cognitivos subyacentes a la habilidad de contar. Seguidamente, pasaremos a tratar cada uno de los principios por separado.

(1) Principio de correspondencia uno a uno

Este principio permite asignar a cada elemento una única etiqueta y a cada etiqueta un único elemento. Según Gelman y Gallistel (1987) la aplicación de este principio conlleva la coordinación de dos procesos: el de *partición* y el de *etiquetación*.

- El de *partición* permite distinguir entre el número de elementos de un conjunto que han sido contados y los que aún faltan por contar. Esto se puede realizar bien mediante una acción física cuando los niños señalan, bien mental cuando han interiorizado dicha acción.

- El de *etiquetación* supone la asignación de un conjunto de etiquetas que el niño habrá de hacer corresponder una y sólo una vez a cada objeto

Por su parte Fuson (1988) mencionó que la correspondencia uno a uno supone la coordinación de dos tipos de correspondencia: (a) la *espacial* entre el objeto y el acto de señalar y (b) la *temporal* entre el acto de señalar y la etiquetación.

Las propuestas de Gelman y Gallistel (1978) y Fuson (1988) han dado lugar a dos clasificaciones diferentes de los errores que cometen los niños en relación a este principio y que vamos a comentar a continuación. A modo de ejemplo, veremos los tipos de errores propuestos por Fuson:

(A) Errores en la correspondencia temporal:

-1. señalan el objeto, pero no le asignan ninguna etiqueta,

-2. asignan múltiples etiquetas a un mismo objeto, que ha sido señalado una única vez,

-3. fraccionamiento de una etiqueta aunque señalen correctamente los objetos,

-4. etiquetan en un lugar donde no hay ningún objeto.

(B) Errores relacionados con la correspondencia espacial:

-1. uno o varios objetos no son señalados, ni etiquetados, aunque pasen el dedo por encima de ellos,

-2. algunos objetos son señalados y etiquetados varias veces,

-3. señalan y etiquetan un lugar donde no hay objetos.

(C) Errores en la correspondencia temporal y espacial conjuntamente:

-1. un mismo objeto es señalado dos veces, pero sólo se le aplica una etiqueta,

-2. el objeto es señalado en dos o más ocasiones, pero no le asignan ninguna etiqueta,

-3. etiquetan un objeto sin señalarlo,

-4. no realizan señalamientos específicos y las etiquetas se emiten de forma continua,

-5. realizan rápidos señalamientos al tiempo que dan etiquetas a un ritmo regular sin correspondencia con los señalamientos.

(D) Errores que se producen al contar dos veces el mismo objeto

-1. invertir el conteo para contar nuevamente un elemento que ya había sido contado,

-2. recontar después de contar un elemento que había sido omitido y al que regresan para contarlo.

En el principio de correspondencia uno a uno existe un aspecto especialmente sobresaliente que guarda relación con el acto de señalar o, como indica Fuson (1988), *los actos de indicación*. Cuando los niños adquieren el conteo se observa siempre el acto de señalar, progresivamente esta acción se va interiorizando de tal manera que les resulta suficiente con "señalar" los objetos con la mirada. Este proceso de interiorización tiene repercusiones en la exactitud del conteo. En efecto, no resulta extraño encontrar niños de 6 años que obtienen peores resultados en tareas de conteo que los más pequeños, debido a que los primeros han iniciado el proceso de interiorización (Lago, 1992).

Para terminar cabe señalar que existe una relación directamente proporcional entre los ensayos erróneos y el tamaño del conjunto, sobre todo en los niños más pequeños cuando se trata de conjuntos grandes (i.e., de 12 y 14 elementos) (Lago, 1992).

(2) Principio de orden estable

Desde el punto de vista de Gelman y Gallistel (1978) la aplicación de este principio no requiere la utilización de la secuencia convencional de numerales únicamente precisa dos condiciones para considerarse correcto: ser repetible y estar integrado por etiquetas únicas. El uso de secuencias no convencionales, idiosincrásicas, hace que los niños obtengan mejores resultados en el conteo que aquellos que utilizan la lista convencional. Esto se

debe a que la organización impuesta desde el exterior interfiere con la organización propia de los niños, de ahí que recuerden mejor una lista creada por ellos mismos.

Fuson, Richards y Briars (1982) analizan la adquisición y elaboración de la secuencia de numerales, estableciendo las siguientes fases:

(A) En la fase de adquisición se realiza el aprendizaje de la secuencia convencional como un bloque compacto. Posteriormente, los niños comienzan a aplicarla en el procedimiento de conteo.

(B) En la fase de elaboración se crean nuevos nexos entre los numerales proporcionados por la fase de adquisición, convirtiéndose en elementos sobre los que operan las estrategias de resolución de problemas. Este período de elaboración se subdivide en cinco niveles:

1) En el *nivel de secuencia* los numerales sólo se pueden emitir ordenadamente sin que exista correspondencia entre la etiqueta, el acto de señalar y el objeto.

2) En el *nivel de cadena irrompible* si bien ésta sigue siendo unidireccional, cada etiqueta se distingue de las demás y ya existe una correspondencia uno a uno.

3) En el *nivel de cadena fragmentable* el conteo se puede iniciar desde cualquier lugar de la secuencia, esto es, no se requiere que sea emitida en bloque (p.e., se empieza a contar desde un número que no sea el 1, puede ser el 3, el 5, ...).

4) En el *nivel de cadena numerable*, que supone un nivel mayor de abstracción de los numerales, resulta posible contar los numerales que hay de un numeral a otro, es decir se convierten en unidades susceptibles de ser contadas (p.e., ante una secuencia 3,4,5,6,7 el niño puede contar cuántos números hay del 3 al 7: 1,2,3,4).

5). Por último, el *nivel de cadena bidireccional* implica el conocimiento pleno de la secuencia, lo que permite su utilización en ambos sentidos (i.e., creciente y decreciente)

(3) Principio de cardinalidad

Este principio indica que la última etiqueta usada en el conteo de un conjunto de objetos representa el número de objetos contenidos en el mismo. Para Gelman y Gallistel (1978) los niños están utilizando el principio de cardinalidad si siguen alguna de las siguientes pautas:

- repiten el último elemento del conteo
- ponen un énfasis especial en el último elemento de la secuencia de conteo
- repiten espontáneamente el último numeral empleado durante el conteo y/o indican correctamente el cardinal del conjunto.

En un estudio posterior, Bermejo y Lago (1990) identificaron 6 niveles evolutivos por los que pasan los niños en la adquisición de este principio:

- 1.-no entienden la situación planteada y dan respuestas al azar.

2.-repiten la secuencia de números emitidos sin referencia explícita a los objetos.

3.-repiten la secuencia de números, estableciendo correspondencias entre los numerales y los objetos.

4.-responden siempre con el último número emitido sin tener en cuenta si se corresponde o no con la cantidad de objetos (p.e. cuando se cuenta de forma decreciente).

5.- responden con el numeral mayor de la secuencia de conteo.

6.-comprenden que el último número corresponde y representa la totalidad del conjunto.

Bermejo, Lago y Rodríguez (1986) observaron que los niños de Educación Infantil respondían a la pregunta de cardinalidad independientemente del tamaño de los conjuntos, mientras que los porcentajes de ensayos correctos de conteo se reducían drásticamente cuando se pasaba de los conjuntos pequeños a conjuntos de mayor tamaño. De este modo, en conjuntos pequeños de 5 y 9 elementos los niños de 4 años contaban correctamente en el 79% de las ocasiones y respondían adecuadamente a la cardinalidad en el 90%; cuando el conjunto era grande (i.e., de 16 y 23 elementos) contaban correctamente en el 38% de las ocasiones y un 81% daban la respuesta de cardinalidad. Los niños de 5 años ofrecían la respuesta de cardinalidad correcta en el 100% de las situaciones y contaban correctamente conjuntos pequeños y grandes en un 96%. En una línea similar Wynn (1990) indicó que el tamaño de los conjuntos no afectaba

al principio de cardinalidad, ya que los niños respondían con el último elemento de la secuencia de conteo tanto en conjuntos pequeños como grandes.

Sin embargo, Bermejo, Lago y Rodríguez (1989) señalan que el conteo no es más que uno de los procedimientos que permite la obtención del cardinal, no existiendo un nexo directo entre conteo y cardinalidad. Los niños no aplican siempre la regla del cuántos, que consiste en contar y contestar con el último elemento de la secuencia, sino que introducen modificaciones en la respuesta de cardinalidad e incluso se apoyan en procedimientos diferentes al conteo.

Los tres principios hasta ahora examinados (i.e., el principio de correspondencia uno a uno, el principio de orden estable y el principio de cardinalidad) forman la estructura conceptual del conteo. Es decir, se trata de principios procesuales que indican a los niños cómo han de proceder al contar y determinar la cantidad de elementos de un conjunto.

(4) Principio de abstracción

El principio de abstracción hace referencia a que el número de objetos de un conjunto es independiente de las cualidades de los elementos del mismo. Las reglas para contar un conjunto heterogéneo son las mismas que para contar un conjunto de elementos homogéneos. Brevemente, Von Glasersfeld y Richards (1983) establecieron diferentes etapas en la aplicación de este principio:

1. Unidades perceptivas: cuentan sólo los objetos que están dentro de su campo visual.
2. Unidades figurales: cuentan objetos que no están disponibles directamente, pero son representaciones de ellos.
3. Unidades motoras: el numeral adquiere la cualidad de ser contado.
4. Unidades abstractas: pueden prescindir de ayudas externas y contar cualquier objeto.

(5) Principio de orden irrelevante

Este principio supone que el cardinal de un conjunto no se ve afectado por el orden de enumeración. Es condición necesaria pero no suficiente para comprender la irrelevancia del orden haber adquirido los tres primeros principios (i.e., correspondencia uno a uno, orden estable y cardinalidad).

Gelman y Gallistel (1978) afirmaron que los niños que han adquirido este principio saben:

- que el ítem contado es una cosa y no un "1" o un "2",
- que las etiquetas de conteo son asignadas al objeto de forma temporal y arbitraria
- y que siempre se obtiene el mismo cardinal.

Podemos concluir este apartado señalando que la adquisición de la habilidad de contar resulta ser un proceso complejo, que se extiende a lo largo de varios años y que se basa en el aprendizaje de los principios anteriormente mencionados. De hecho, como hemos tenido ocasión de ver en

las paginas anteriores, la adquisición de estos principios no es un proceso de todo o nada, sino que cada uno de ellos conlleva una serie de etapas evolutivas, más o menos explícitas, por las que atraviesan los niños. En efecto, la habilidad de contar se desarrolla a medida que los niños comprenden e integran los diferentes principios, que sufren transformaciones y elaboraciones, adquiriendo progresivamente mayor flexibilidad y robustez. No obstante, el desarrollo de la habilidad de contar constituye sólo el primer paso del razonamiento matemático. Para que los niños aprendan a usar los números, deben aplicarlos a objetos y manipularlos bajo una serie de reglas y algoritmos. Contar es la base para la adquisición de los procedimientos aritméticos y conceptos numéricos más complejos, sofisticados y desarrollados.

Conviene no perder de vista que cuando los niños aprenden a contar, lo hacen con un sistema artificial que ha sido inventado hace cientos de años y que presenta sus propias dificultades. Como la propia Nunes (1997) señaló, las dificultades con el conteo pueden ser inherentes al propio sistema y no al razonamiento matemático subyacente.

3. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Comenzamos este apartado analizando el concepto y las propiedades de la adición y la sustracción para de este modo poder acercarnos mejor, en un nuevo apartado al conocimiento informal de los más pequeños. A continuación, llevaremos a cabo un análisis exhaustivo de las diferentes clasificaciones de los problemas verbales de adición y sustracción con el fin de esclarecer y justificar la elección de los tipos de problemas que vamos a utilizar en la parte empírica de este trabajo. Por último, examinaremos los procedimientos de resolución empleados por los niños, lo que nos va a permitir determinar no sólo los procesos subyacentes a las ejecuciones correctas e incorrectas, sino conocer también los mecanismos implicados en el cambio conceptual.

3.1. CONCEPTO Y PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN.

Los diferentes estudios sobre la adición tienen como objetivo principal inferir los procesos cognitivos subyacentes a las respuestas infantiles, así como dar explicación a los cambios experimentados con el tiempo. Se pueden diferenciar dos grandes líneas de trabajo:

- ✓ la centrada en conocer la secuencia evolutiva de adquisición de la adición y sustracción a partir del análisis de los procedimientos de resolución empleados

por los niños (p.e. Bermejo, Lago y Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1983; De Corte y Verschaffel 1987; Vergnaud, 1982);

✓ la segunda interesada en definir los aspectos de la cuantificación, que se ocupa de estudiar los procesos de interiorización del acto de sumar, es decir, la unidad de medición sobre la que se aplican los procedimientos (p.e. Davidov, 1982; Hatano, 1982; Miyamoto y Gimbayashi, 1983).

El trabajo empírico, que más adelante presentamos, se situaría dentro de la primera línea de investigación, ya que nuestro objetivo reside en recoger los procedimientos de resolución que los niños de educación infantil utilizan para resolver los diferentes problemas verbales y su evolución.

Como indicamos en páginas anteriores, la adición está vinculada, inicialmente, a la acción de *añadir* y es precisamente a la edad de 3 y 4 años cuando los niños empiezan a comprender esta noción con números menores a la decena (p.e., Geary, 1995). Este proceso de *añadir* se corresponde con la concepción unitaria de la suma (Weaver, 1995), según la cual el conjunto inicial sufre un cambio de estado al *añadirle* un segundo conjunto, que da como resultado su incremento. Esta concepción unitaria impide a los niños resolver con la misma facilidad expresiones $1+N$ que $N+1$. Con el tiempo y la experiencia, llegan a entender que ambas expresiones producen el mismo resultado. Cuando esto sucede habrán superado la concepción unitaria de la suma y habrán captado la irrelevancia del orden en el que se adicionan los sumandos, es decir, la concepción binaria. Desde esta concepción la adición se relaciona con la acción de combinar y no de añadir. De esta forma, se considera la adición como la combinación de dos conjuntos a los que se les asigna el mismo papel e implica, por

tanto, la conmutatividad (Weaver, 1982). Esta propiedad y el resto de las propiedades aditivas (i.e asociativa e identidad) se consideran inherentes al sistema numérico y son descubiertas por los niños cuando empiezan a tener sus primeras experiencias en la resolución de expresiones aditivas escritas (Bermejo, 1994). En lo que sigue, nos vamos a referir únicamente a los estudios sobre la propiedad conmutativa, puesto que además de ser la propiedad que primero se adquiere (Canobi, Reeve, Pattison, 1998) es la única que de algún modo puede aparecer en nuestro trabajo empírico, ya que los niños tan solo tienen la oportunidad de operar con dos cantidades en cada uno de los problemas, no pudiendo apreciar, por tanto, la propiedad asociativa. Además ninguna de las operaciones propuestas toma el valor cero, lo que a su vez impide observar su conocimiento sobre la propiedad de identidad.

Como mencionamos unas líneas más arriba, el proceso de adquisición de la propiedad conmutativa resulta anterior al de la asociativa, tal y como demostraron los trabajos de Canobi, Reeve y Pattinson (1998, 2002) realizados con niños de primero y segundo grado de primaria, y otros estudios con niños de Educación Infantil (Baroody y Gannon, 1984; Baroody, Ginsburg y Waxman, 1983; Cowan y Renton, 1996; Siegler y Jenkins, 1989). En esta misma línea, Rodríguez (1992) con niños de 5 a 8 años descubrió que el empleo de la estrategia "contar desde el mayor" no se puede desvincular del conocimiento de tal propiedad, comprobando que la adquisición de la conmutatividad no se realiza como un proceso de todo o nada, sino que supone un desarrollo gradual sobre el que inciden diversas variables referidas, por ejemplo, al contexto en el que se presentan las tareas.

Por su parte Baroody (1988) y Baroody y Ginsburg (1986) consideraron dos etapas evolutivas en la adquisición de la conmutatividad: la *protoconmutativa* y la conmutativa. Algunos niños parecen tener desde muy temprano una noción primitiva de la conmutatividad, es decir la *protoconmutatividad* o "esquema de adición de orden indiferente", que les permite comprender que el orden en que se adicionan los sumandos no presenta diferencias con la exactitud de la suma, o lo que es lo mismo, la *protoconmutatividad* supone que dos números pueden ser combinados en cualquier orden para producir respuestas correctas, aunque éstas no sean necesariamente las mismas. Esto último implica que el orden de los sumandos puede afectar al resultado. La *protoconmutatividad* se adquiere como resultado de la experiencia informal, por lo que no se encuentra ligada a la utilización de estrategias más avanzadas. Baroody consideró la conmutatividad como un concepto particularmente apropiado para ser fomentado mediante el aprendizaje por descubrimiento y que puede ser descubierto tempranamente por los niños sin necesidad de tener una concepción binaria de la adición, si se les da la oportunidad de comparar los resultados de pares conmutados (Baroody, Ginsburg y Waxman, 1983).

Por último, recientemente Wilkins, Baroody y Tiilikainen (2001) establecieron los siguientes niveles en el desarrollo de la conmutatividad:

Nivel 0: los niños tienen una concepción unitaria de la adición y no presentan comprensión de la conmutatividad; Nivel 1: presentan una concepción unitaria y binaria de la adición y se encuentran en la fase de *protoconmutatividad*; Nivel 2: tienen una concepción unitaria y binaria de la adición, además de la *protoconmutativa* y de la conmutatividad en problemas del tipo parte-parte-todo;

Nivel 3: demuestran una concepción unitaria y binaria de la suma, la conmutatividad en problemas de cambio ("pseudoconmutatividad") y la "verdadera" conmutatividad matemática.

En cuanto a la sustracción, encontramos que se presenta bajo tres formas diferentes *quitar, comparar y separar*. La primera y la tercera corresponden a un esquema parte-todo, mientras que la segunda supone la comparación de un conjunto con otro, de manera que uno de ellos se considera parte del otro.

Una idea bastante extendida es que la enseñanza de la sustracción se debe postergar a la de la adición. Esto es debido a la creencia generalizada de que la sustracción presenta mayor dificultad que su inversa la adición. Sin embargo, esta idea no tiene sustento empírico, ya que los niños de Educación Infantil resuelven problemas verbales de sustracción sencillos manipulando objetos físicos (p.e., Bebout 1990; Bermejo, Lago, Pérez, Bejerano, Dopico, Lozano y Pintos 1995; Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Bermejo y Rodríguez 1987; De Corte y Verschaffel, 1987; Hudson, 1983). No obstante, se encuentran datos contrarios cuando los trabajos se realizan con niños mayores de Educación Primaria, ya que ciertos aspectos de la sustracción les suponen una gran dificultad. Este hecho podría indicar que la adquisición del concepto de sustracción, ya sea de quitar, completar o separar se produce de manera gradual y sólo al final del proceso llegan los niños a una plena comprensión del mismo. A este respecto, Resnick y Omanson (1987) argumentaron que la comprensión auténtica de la sustracción supone la adquisición de cuatro principios: la *composición aditiva de las cantidades*, es

decir, todo número está formado por otras cantidades (p.e., la cantidad 6 además de representar la cardinalidad de un conjunto con 6 elementos, se compone de cantidades como 4 y 2, 3 y 3, etc.). La comprensión de este principio resulta imprescindible para la resolución de expresiones sustractivas como $6-2$, que sería imposible de resolver sin entender que el 6 puede descomponerse en 4 y 2. El segundo principio, *los valores convencionales de la notación decimal*, es una consecuencia del anterior, de modo que en la aritmética escrita los valores de los símbolos depende de sus posiciones espaciales en el sistema decimal. De este modo, por ejemplo, el número 6 no tiene el mismo valor si ocupa el lugar de las unidades o decenas (i.e., 16 ó 61), puesto que en el sistema decimal cada posición hacia la izquierda representa un valor diez veces mayor que el anterior. El tercer principio se refiere a la *realización de cálculos por partes* y supone que toda cantidad está compuesta de otras cantidades, lo que permite operar con o entre las partes (por ejemplo, en la expresión $25-12$, podemos descomponer ambos términos en $20+5$ y $10+2$, y restar las unidades del sustraendo a las unidades del minuendo $5-2$ e igualmente las decenas $20-10$). El último principio es el de *recomposición y conversión de la cantidad del minuendo*. Teniendo en cuenta que para los niños de Educación Primaria resulta difícil la comprensión de los números negativos es necesario recomponer el minuendo cuando sea menor que el sustraendo (por ejemplo, en la sustracción $32-27$ no se pueden descomponer sin más porque nos quedaría $30-20$ y $2-7$, la descomposición

para esta expresión, siguiendo este principio, quedaría 20-20 y 12-7 para evitar los números negativos).

La mayor complejidad de la sustracción tiene su explicación por un lado, como acabamos de ver, en la dificultad inherente a la propia operación y por otro, en la extrapolación que se hace de los atributos y estrategias de la operación aditiva a la sustractiva (p.e., Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter y Fennema, 1997). Dicha extrapolación explicaría el hecho de que en los estudios realizados con niños de Educación Infantil no se presenten diferencias sustanciales en la forma de resolver los problemas de adición y sustracción, aunque esto no lleve aparejado el mismo grado de eficacia. No obstante, los aspectos diferenciales entre una operación y otra resultan evidentes:

A) La adición engloba dos concepciones diferentes: la unitaria y la binaria, mientras que la sustracción es una operación unidireccional por lo que no se puede dar esta doble polaridad. En la sustracción tenemos un conjunto inicial del que extraemos la cantidad correspondiente al segundo conjunto, lo que conlleva lógicamente la modificación del conjunto inicial. La unidireccionalidad queda patente en el hecho de que no se permite el cambio de papel entre los dos conjuntos.

B) La sustracción no posee las mismas propiedades que la adición (p.e., 5-3 no da el mismo resultado que 3-5), salvo la propiedad de identidad (i.e., si a un número se le resta 0 sigue siendo el mismo número).

3.2. CONOCIMIENTO INFORMAL SOBRE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN EN LOS NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL.

Sabemos que las operaciones aritméticas elementales están presentes en las acciones cotidianas de los niños, es decir, las conocen y practican antes de su enseñanza formal dentro de las aulas (p.e. Cowan y Renton, 1996; Fuson, 1982; Klein, 1984; Siegler, 1987; Siegler y Robinson, 1982; Starkey, 1992). Al principio, la operación de sumar se vincula con la acción de añadir o “poner” y la de restar con la acción de quitar, separar, comparar o dar el cambio. Los efectos producidos por las acciones de “quitar” y “poner” permiten a los niños descubrir que se trata de procesos inversos: si la adición aumenta un conjunto, la sustracción lo disminuye (p.e. Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Resnick, 1983; Riley, Greeno y Heller, 1983). En esta misma línea, señaló Bryant (1987) que si bien los niños de 3 a 5 años no conocen la relación de inversión entre ambas operaciones, son capaces de realizar sumas y restas con cantidades pequeñas.

En otras palabras, el conocimiento informal va más allá de los procedimientos de subitizing y conteo. Diversas investigaciones han demostrado que los niños pequeños conocen los efectos de la adición o la sustracción de pequeños conjuntos sin necesidad de contarlos (p.e., Bryant, 1997; Ginsburg, Klein y Starkey, 1998; Rittle-Johnson y Siegler, 1998; Wynn, 1998). En efecto, en un estudio clásico llevado a cabo por Siegler y Robinson (1982) observaron que los niños de 3 a 5 años resolvían problemas verbales simples en los que había un conjunto de objetos imaginarios que se transformaban (p.e., Si tienes “m” naranjas y yo te doy “n” naranjas ¿cuántas

naranjas tienes ahora?). En concreto los niños de 3 años ejecutaban con éxito el problema si los números usados eran pequeños, mientras que los de 4 a 5 años podían solucionar problemas con cantidades numéricas mayores utilizando una gran variedad de estrategias. En la misma línea, Starkey y Gelman (1982) hallaron que los niños de 3 años no usaban espontáneamente estrategias de conteo, sino que utilizaban "estrategias cerradas" en los problemas de adición, mientras que los de 4 recurrían espontáneamente a "estrategias de conteo abiertas" para resolver los distintos problemas aritméticos. Las "estrategias cerradas" consistían en procedimientos ligados directamente a la estructura del problema. Por ejemplo, para resolver el problema "*María tiene 3 galletas y Ana le da 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene ahora María?*", los niños representaban a María y Ana, después las galletas correspondientes a una y otra y por último, juntaban todas las galletas y las contaban. Las "estrategias abiertas" eran aquellas que estaban menos ligadas a los datos irrelevantes del problema e incluían el *conteo verbal* (contaban sin necesidad de utilizar material físico) y las de *conteo con los dedos* (usaban los dedos para sustituir a los objetos físicos y después los contaban).

En general, estos y otros trabajos permitieron concluir que las "estrategias cerradas" aparecían primero y se utilizaban en problemas con conjuntos pequeños, mientras que las "estrategias abiertas" se desarrollaban más tarde y servían para contar conjuntos grandes. Estas últimas, resultaban más eficaces y mostraban un grado de conocimiento matemático más elevado.

El conocimiento informal de la sustracción ha sido menos estudiado que el de la adición, aunque parece que ambos siguen desarrollos paralelos. Investigaciones

como las de Siegler (1987) o Starkey y Gelman (1982) demostraron que los niños utilizaban estrategias similares de resolución en la adición y la sustracción.

Parece claro, como hemos señalado anteriormente, que los niños conocen que la adición "hace más grande" y la sustracción "más pequeño", tanto en un conjunto único como en la comparación de dos conjuntos, pero cuando los conjuntos iniciales no resultan equivalentes tienen mayor dificultad. Por ejemplo, Klein (1984) presentó a los niños dos hileras con 8 objetos cada una, de modo que pudieran observar su equivalencia y los interrogó acerca de la misma. Posteriormente, añadían o quitaban dos elementos en una de las hileras. Los niños respondían correctamente a la pregunta sobre si había más o menos que antes. Sin embargo, cuando los conjuntos de partida no eran equivalentes (p.e., en una fila hay 7 y en la otra hay 10) y se añadían dos elementos a la fila menor, los niños más pequeños cometían errores consistentes, por ejemplo, en considerar sólo la dirección (i.e., aumento o decremento) en que se transformaba el conjunto sin tener en cuenta la desigualdad inicial entre ellos. Los niños de Educación Infantil mayores tenían en cuenta ambos conjuntos, pero se equivocaban al hacer la adición. Aproximadamente, hasta los 6 ó 7 años no se observaba un progreso significativo en este tipo de problema.

Hasta aquí hemos tenido ocasión de analizar cuáles son los conocimientos informales que tienen los más pequeños acerca de la adición y la sustracción, pero debemos señalar que hay otros factores como la estructura del enunciado, que afectan a la resolución de los diferentes problemas. Hughes (1981) demostró, por ejemplo, que el tipo de pregunta que se plantea en los problemas provoca grandes diferencias en la resolución de los mismos por parte de los niños pequeños. En esta

línea, estudios más recientes analizaron la influencia del enunciado del problema en el rendimiento mediante la reformulación de los mismos (i.e., problema rutinario vs problema reformulado), concluyendo que los problemas planteados bajo la reformulación realista generan un mayor número de respuestas correctas a la hora de solucionarlos (p.e., De Corte, y Verchaffel, 1987; Hudson, 1983; Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2001).

3.3. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

En general, los problemas de adición y sustracción más sencillos se caracterizan por estar integrados por dos partes, la informativa y la pregunta, además de tres cantidades, dos de las cuales se dan como dato en la parte informativa y la otra forma parte de la pregunta. Existe evidencia empírica reiterada que demuestra que ante los mismos algoritmos y cantidades los niños resuelven mejor unos tipos de problemas que otros (p.e., Aguilar y Navarro, 2000; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Christou y Philippou, 1998; Lago, Rodríguez, Zamora y Madroño, 1999; Riley y Greeno, 1988). Estos resultados ponen de manifiesto la existencia de factores que nada tienen que ver con las habilidades matemáticas que poseen los sujetos. A la hora de explicitar dichos factores se ha recurrido a establecer distintas clasificaciones de los problemas verbales para determinar las diferencias entre ellos. Las primeras clasificaciones atendían a criterios lingüísticos, estudiando aspectos como el tiempo verbal, el número de palabras, el tipo de vocabulario (Nesher,1982). Sin embargo, los

estudios más recientes indican que la estructura semántica de los problemas desempeña un papel relevante a la hora de esclarecer los procesos cognitivos, que ponen en marcha los niños en su resolución (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990; De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Ginsburg, Klein y Starkey, 1998; Renninger y Staris, 1995). En efecto, Heller y Greeno (1978) señalaron que los problemas verbales que requieren la misma representación pueden presentar diferentes estructuras semánticas. En concreto, establecieron tres tipos: a) cambio, b) combinación y c) comparación. En términos generales, estas tres categorías se diferencian entre sí dependiendo de que describan situaciones dinámicas (i.e., los problemas de cambio) o estáticas (i.e., los problemas de combinación y comparación). Veamos cada uno de ellos con más detalle:

1. Los problemas de cambio hacen referencia a un suceso que introduce modificaciones en una cantidad inicial. Por ejemplo, en la adición: *"María tiene 3 galletas y Ana le da 2 galletas más, ¿cuántas galletas tiene ahora María?"*. En la sustracción: *"María tiene 5 galletas y se come 2 galletas, ¿cuántas galletas tiene ahora María?"*.

2. Los problemas de combinación muestran dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse independientemente o como partes de un todo. Esta categoría sólo admite formulaciones en términos de adición. Por ejemplo: *"María tiene 2 galletas y Ana tiene 3 galletas, ¿cuántas galletas tienen entre las dos?"*.

3. En los problemas de comparación se presenta la relación entre dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia entre ellas, bien para averiguar una cantidad conociendo la otra. Por ejemplo: *"María tiene 4 galletas. Ana*

tiene 2 galletas más que María, ¿cuántas galletas tiene Ana?". En términos de sustracción sería: *"María tiene 4 galletas. Ana tiene 2 galletas menos que María, ¿cuántas galletas tiene Ana?"*.

A su vez estas tres categorías se subdividen en otras dependiendo de dónde se encuentre la incógnita (i.e. en el primer término, en el segundo o en el resultado). Asimismo, los problemas de cambio y comparación se subdividen dependiendo de la dirección del cambio (i.e. incremento o decremento) o de la relación en el caso de los problemas de comparación (i.e. más que o menos que). En conjunto, se puede obtener un total de 14 tipos de problemas diferentes (ver Tabla 1).

Estas tres categorías las vamos a encontrar de modo más o menos explícito en algunas de las clasificaciones de los distintos autores. Entre estas cabe mencionar la de Carpenter y Moser (1982), quienes clasificaron los problemas atendiendo a varias dimensiones: la primera basada en el carácter dinámico vs estático de la relación entre los conjuntos del problema, la segunda referida a la relación entre un conjunto y sus subconjuntos, la tercera establece si se produce un incremento o decremento de la cantidad inicial y se aplica sólo a los problemas que implican acción y finalmente la cuarta, tiene que ver con el lugar en que se ubica la incógnita. Conjugando estas cuatro dimensiones identificaron seis categorías de problemas: unión, separación, parte-parte-todo, comparación, igualación de añadir e igualación de quitar. Si se tiene en cuenta la ubicación de la incógnita, entonces se obtiene un total de 17 problemas, ya que en el problema parte-parte-todo la incógnita tan solo aparece en una de las partes o en el resultado. Los problemas de unión y separación corresponden a los problemas de cambio de adición y sustracción, los de parte-parte-todo a los de

combinación y, por último, los de comparación reciben el mismo nombre. Por tanto, la novedad más importante está en los problemas de igualación. Estos problemas suponen la comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para hacerlo equivalente a otro (p.e., *“María tiene 5 galletas y Ana 3. ¿Cuántas galletas necesita Ana para tener las mismas que María?”*).

Tabla 1: Clasificación de problemas verbales aditivos y sustractivos.**Adición-cambio**

- *María tenía 3 galletas y Ana le da dos más. ¿Cuántas galletas tiene ahora María?*
- *María tenía 3 galletas, Ana le dio alguna galleta más. Ahora tiene 5 galletas. ¿Cuántas galletas le dio Ana?*
- *María tenía algunas galletas. Ana le dio 2 galletas más. Ahora María tiene 5 galletas. ¿Cuántas galletas tenía María?*

Sustracción-cambio

- *María tenía 5 galletas. Le dio 2 galletas a Ana. ¿Cuántas galletas tiene ahora Ana?*
- *María tenía 5 galletas. Le dio algunas galletas a Ana. Ahora María tiene 3 galletas. ¿Cuántas galletas le dio a Ana?*
- *María tenía algunas galletas. Le dio 2 galletas a Ana. Ahora María tiene 3 galletas. ¿Cuántas galletas tenía María al principio?*

Combinación

- *María tiene 3 galletas y Ana tiene 2 galletas. ¿Cuántas galletas tienen entre las dos?*
- *María y Ana tienen 5 galletas entre las dos. María tiene 3 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*

Adición-comparación

- *María tiene 5 galletas. Ana tiene 2 galletas. ¿Cuántas galletas tiene María más que Ana?*
- *María tiene 3 galletas. Ana tiene 2 galletas más que María. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*
- *María tiene 5 galletas. Tiene 3 galletas más que Ana. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*

Sustracción-comparación

- *María tiene 5 galletas. Ana tiene 2 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Ana menos que María?*
- *María tiene 5 galletas. Ana tiene 2 galletas menos que María. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*
- *María tiene 3 galletas. Tiene 2 galletas menos que Ana. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*

En 1983, estos mismos autores realizaron una nueva clasificación, organizando los problemas en las categorías de cambio (i.e., de unión o separación), comparación (i.e., seis tipos dependiendo de si se desconoce el conjunto de referencia, el de comparación o la diferencia entre ambos, así como si el conjunto mayor es el de referencia o el de comparación), igualación (i.e., de unir o de quitar) y combinación. En trabajos posteriores (1993, 1996, 1999) retoman la clasificación del año 1982 diferenciando nuevamente cuatro tipos de problemas: unión, separación, parte-parte-todo y comparación. En esta propuesta dejaron al margen los problemas de igualación y le dieron mayor importancia a los tipos de acciones y relaciones descritas en los problemas. Así, los de *unión* implican una acción directa en la que una cantidad inicial se ve incrementada por otra cantidad determinada, considerando tres tipos de problemas: conjunto inicial desconocido, conjunto de cambio desconocido y resultado desconocido. Los problemas de *separación* son semejantes a los anteriores, salvo que en la cantidad inicial se produce un decremento. En los de *parte-parte-todo* las relaciones entre un conjunto y los dos subconjuntos disjuntos no implican acción sino que son estáticas, diferenciándose dos tipos de problemas dependiendo de que la incógnita esté en el resultado (el todo) o en los subconjuntos (partes). Por último, los de *comparación* resultan semejantes a los anteriores, pero en los primeros se produce la comparación de dos conjuntos disjuntos y en éstos se compara un conjunto y sus subconjuntos. En estos problemas se distinguen tres subtipos: diferencia desconocida, conjunto de comparación desconocido y referente desconocido.

Romberg y Collis (1978) propusieron una clasificación similar que incluía cuatro categorías: los problemas de cambio (i.e., son dinámicos e implican acción),

los de combinación (i.e., son situaciones estáticas que no implican acción), los de comparación (i.e., son situaciones estáticas en las que un conjunto es comparado con otro) y los problemas de igualación (i.e., acción llevada a cabo sobre un conjunto que hace que éste se iguale a otro). Cada uno de estos tipos de problemas comprende seis formas diferentes dependiendo que se trate de un problema de adición o sustracción y del lugar donde se encuentre la incógnita

Por su parte Vergnaud en 1982 estableció una clasificación con seis categorías, que atiende a tres criterios principales: medida, transformación y relación estática y que da lugar a los siguientes tipos de problemas: composición de medidas, transformación que une dos medidas, relación estática que une dos medidas, composición de dos transformaciones, transformación que conecta dos relaciones estáticas y composición de relaciones estáticas.

La primera categoría, *composición de medidas*, se corresponde con los problemas de combinación: dos medidas dan lugar a una nueva medida.

En la segunda categoría, *transformación que une dos medidas*, resulta equivalente a los problemas de cambio: una transformación opera sobre una medida para asignar otra medida.

La tercera categoría, *relación estática que une dos medidas*, muestra la relación entre dos medidas y guarda relación con los problemas de comparación.

La cuarta categoría, *composición de dos transformaciones*, se restringe al conjunto de los números naturales y describe meramente una situación de doble cambio, es decir, dos transformaciones se componen para dar lugar a otra

transformación. Por ejemplo: *“María tenía ayer 5 galletas. Hoy se comió 2 galletas, ¿cuántas galletas le quedan?”*.

En la quinta categoría, *transformación que une dos relaciones*, una transformación que opera sobre un estado relativo da lugar a un nuevo estado relativo. Por ejemplo: *“María le debía 5 galletas a Ana. Le devuelve 2, ¿cuántas le debe?”*. Esta categoría pone de relieve un tipo de relación, que no había sido considerada en las restantes clasificaciones de los problemas verbales.

En la sexta categoría, *composición de relaciones estáticas*, recoge aspectos relacionados con la propiedad transitiva de dos relaciones estáticas (p.e., *“María tiene 1 galleta más que Ana y Ana tiene 2 galletas más que Pedro, ¿cuántas galletas tiene María más que Pedro?”*).

La propuesta de Fuson (1992) se basó en dos aspectos esenciales a la hora de clasificar los problemas de adición y sustracción. El primero se refiere al tipo de operación implicada, unitaria o binaria, y el segundo a la estructura, estática o dinámica. Se entiende por operación binaria cuando hay dos cantidades disjuntas con las que se opera para producir una tercera. La unitaria considera la adición como un cambio de estado.

Teniendo en cuenta la estructura, Fuson indicó que las situaciones estáticas son aquellas en las que las cantidades implicadas en el problema no cambian. Por ejemplo: *“María tiene 5 galletas y Ana tienen 3, ¿cuántas galletas tienen entre las dos?”*. Sin embargo, las estructuras dinámicas suponen un cambio en una de las cantidades implicadas. Por ejemplo: *“María tiene 5 galletas y Ana le da 3 más, ¿cuántas galletas tiene ahora María?”*.

De este modo Fuson distinguió tres situaciones diferentes de adición y sustracción:

- a) activa con operación unitaria: los problemas de cambio de añadir y cambio de quitar
- b) activa con operación binaria: problemas de combinación física en la adición y los de igualación en la sustracción
- c) estática con operación binaria: aquí sitúa los de combinación conceptual en la adición y los de comparación en la sustracción.

La distinción entre combinación física y conceptual reside en que, en la primera, la combinación se hace explícita usando términos de inclusión (p.e., *“María tiene 5 galletas. Ana tiene 3 galletas. ¿Cuántas tienen entre las dos?”*), mientras que en la conceptual las *palabras clave* permiten la resolución correcta a los niños que aún no poseen el concepto de inclusión (p.e., *“María tiene 6 galletas, 2 son redondas y el resto cuadradas, ¿cuántas galletas cuadradas tiene María?”*).

Otras clasificaciones como la de Bermejo y Cols., (1998) consideraron el hecho de que el problema implique la presencia de uno o dos sujetos. En el primer caso, cuando afecta a un único sujeto hay dos situaciones: una que implica acción y otra en la que no hay acción. En la primera se sitúan los problemas de cambio, mientras que en las situaciones en las que no hay acción las dos cantidades pueden combinarse dando lugar a un problema de combinación, compararlas lo que permite formular un problema de comparación o preguntar por un cambio implícito que las iguale hallándonos entonces ante un problema de igualación.

Cuando están implicados dos sujetos, aparecen dos opciones: acción que afecta a alguna de las cantidades y no acción. En la primera, la acción puede

proceder de un cambio interno, de modo que uno de los sujetos altera su cardinal aumentando el del otro (p.e., *“María tiene 5 galletas y Ana tiene 4, Ana le da 2 galletas a María”*). En este caso los niños han de poder controlar dos operaciones distintas a la vez. Por el contrario, la acción puede venir por un cambio externo en el que alguno de los sujetos cambia su cardinal. Así, nos hallaríamos ante un problema de cambio con datos irrelevantes (p.e., *“María tiene 4 galletas y Ana tiene 3 galletas. María se encuentra 3 galletas, ¿cuántas galletas tiene María?”*). No obstante, esta situación también puede describirse teniendo en cuenta la relación entre los cardinales correspondientes a los dos sujetos. De ahí que los autores propusieran una nueva categoría denominada relacional, en la que hay una relación inicial de dos sujetos que mediante un cambio externo produce una relación final (p.e., *María tiene 3 galletas y Ana tiene 2 galletas más que María. La madre de María le da 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene ahora María más que Ana?*

En las situaciones en las que no hay acción, si los dos cardinales son distintos se dan tres posibilidades: un cambio hipotético que los iguale, la comparación de cardinales o la unión de cardinales con lo que se obtendrían las categorías ya conocidas de igualación, comparación y combinación.

A pesar de la variedad terminológica utilizada por los diferentes autores (ver Tabla 2), podríamos concluir diciendo que todos ellos aceptan y reconocen la existencia de cuatro categorías: cambio, combinación, comparación e igualación. Esta última es la que implica una mayor polémica, ya que no aparece en algunas clasificaciones y es la menos estudiada por parte de los investigadores. En nuestro trabajo de investigación tomamos dos de estos tipos de problemas: los de cambio y

comparación, ya que ambos se pueden formular en términos aditivos y sustractivos y como veremos en el apartado de multiplicación y división, tienen su correlato en estas dos operaciones.

Tabla 2: Resumen de las clasificaciones de los problemas verbales de adición y sustracción.

Bermejo y col. (1998)	Problema de Cambio	Problema de Cambio	Problema de Combinación	Problema de Comparación	Problema de Igualación	Problema relacional.
Carpenter y Moser (1996, 1999)	Problema de unión. Problema de separación.	Problema de unión Problema de Separación	Problema de Parte-parte-todo.	Problema de Comparación		
Fuson (1992)	Activa con operación unitaria	Activa con operación binaria. Estática con operación binaria.	Activa con operación binaria. Estática con operación binaria.	Estática con operación binaria	Activa con operación binaria.	
Carpenter y Moser (1983)	Problema de Cambio	Problema de Cambio	Problema de Combinación	Problema de Comparación	Problema de igualación	
Vergnaud (1982)	Transformación que une dos medidas. Composición de dos transformaciones. Transformación que une dos relaciones estáticas	Composición de medida.	Relación estática que une dos medidas.		Composición de relaciones estáticas.	
Carpenter y Moser (1982)	Problema de unión Problema de Separación	Problema de Parte-parte-todo.	Problema de Comparación	Problema de Igualación.		
Heller y Greeno (1978)	Problema de Cambio	Problema de Combinación	Problema de Comparación			

3.4. SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

Como señalamos en el apartado anterior, numerosos estudios han demostrado que los niños obtienen niveles de rendimiento distintos dependiendo del problema verbal que se les proponga (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990 a; Carpenter, Moser y Bebout, 1988). Además de la estructura semántica otros factores también afectan a los niveles de ejecución, como son el tamaño de las cantidades, el nivel de abstracción de los sumandos, la ubicación de la incógnita, el tipo de sentencia (i.e., canónica o no canónica) y la presencia o no de ayudas.

En lo referente a la estructura semántica numerosos trabajos han puesto de manifiesto que los problemas más fáciles de resolver son los de cambio (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; De Corte y Verschaffel, 1987; Lago, Rodríguez y Caballero 1999). Ello se debe a que este tipo de problemas conllevan acción y existe un único poseedor que aumenta o decrementa su cantidad inicial. En cambio, los problemas de comparación y combinación resultan más difíciles, ya que suponen relaciones estáticas e implican más de un poseedor. Los problemas de igualación son más complejos que los de combinación, pero más sencillos que los de comparación (Bermejo y Rodríguez, 1987c; Aguilar, Alcalde, Marchena y Navarro, 1998)

Teniendo en cuenta esto, en orden decreciente de dificultad se podría establecer la siguiente jerarquía: comparación, igualación, combinación, y cambio. Esto no significa que se adquiriera primero la noción de cambio en todas

las circunstancias, sino que se desarrolla en paralelo con las nociones de comparación, combinación e igualación.

Como acabamos de mencionar unas líneas más arriba, parece que los problemas de comparación son muy complejos para los niños. En efecto, según se ha demostrado en algunos estudios los problemas que contienen sentencias relacionales en las que un conjunto se define en función de otro resultan más difíciles y esta dificultad aumenta, cuando la operación aritmética no es consistente con la sentencia de relación (p.e., Bermejo y Rodríguez, 1990b; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Fuson, Carroll y Landis, 1996; Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2001; Lewis, 1989; Mwangi y Sweller, 1998; Verchaffel, De Corte y Pawels, 1992). Con el fin de solventar estas dificultades se ha procedido a la reformulación de estos problemas. Uno de los trabajos pioneros es el de Hudson (1983) en el que mostró que los niños de Educación Infantil eran capaces de resolver problemas de comparación cuando se reformulaba el enunciado. En concreto, les planteó dos cuestiones: la habitual en los problemas comparativos (i.e., ¿Cuántos pájaros hay más que gusanos?), y otra reformulada (i.e., Imagina que todos los pájaros corrieran y que cada uno intentase coger un gusano, ¿cuántos pájaros se quedarían sin gusano?). El problema resultó más fácil en el segundo caso, ya que propiciaba la puesta en marcha de una estrategia de emparejamiento. Más recientemente, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano (2001) evaluaron a niños de 5 a 7 años en problemas de comparación con enunciado tradicional y con enunciado reformulado, utilizando o no material físico como ayuda. Comprobaron que cuando se reformulaban los problemas mediante la dinamización de la pregunta

y además se utilizaba material que permitía la representación del enunciado mejoraba notablemente el rendimiento de los niños.

Otras variables que explican la complejidad de los problemas guarda relación con el lugar en que se encuentra la incógnita. La dificultad mayor surge cuando la cantidad no conocida se encuentra en el conjunto de partida, es decir, en el primer sumando (Carpenter, 1986). Estos datos son congruentes con la hipótesis del esquema unitario, ya que los niños no son capaces de “trasladar” la incógnita al segundo sumando para que el problema verbal sea más fácil. Esta afirmación resulta igualmente válida tanto para los problemas de cambio como para los de combinación. En los de comparación la dificultad es máxima cuando se desconoce el conjunto de referencia o el de comparación, por ejemplo: *“María tiene 6 galletas. Tiene 3 más que Ana. ¿Cuántas galletas tiene Ana?”* (Bermejo y Rodríguez 1990a).

En los trabajos con niños pequeños se ha comprobado que la presencia de ayudas, como pueden ser dibujos o material concreto que se pueda manipular, facilita el proceso de representación del problema, lo que repercute favorablemente en los resultados (Carpenter y Moser, 1982; Pepper y Hunting, 1998). Así, Carpenter y cols. (1993) mostraron que los niños de Educación Infantil, tenían éxito en problemas de comparación de sustracción en los que se desconocía el resultado y en los problemas de cambio con la incógnita en el conjunto de cambio (i.e., segundo sumando), cuando recibían materiales para representar las acciones descritas en el problema. De modo semejante, Bermejo y Rodríguez (1987) encontraron que un 52% de los niños de 5-5;6 años y el

64% de los niños de 6;6-6 años eran capaces de resolver problemas de igualación cuando disponían de objetos para representar el problema.

En cuanto a la magnitud de los sumandos, existe una cierta relación entre las magnitudes que se presentan en el problema y el tipo de estrategia que utilizan para resolverlo.

Al margen de los factores anteriormente considerados para explicar las dificultades que presentan los niños ante los diferentes tipos de problemas, se han propuesto dos modelos explicativos generales: el lógico-matemático (p.e., Briars y Larkin, 1988; Riley y Greeno, 1988) y el lingüístico (p.e., Cummins, 1991; Davis-Dorsey, Ross y Morrison, 1991; De Corte, Verschaffel y De Win, 1987). Los autores que defienden el punto de vista lógico-matemático consideran que los errores de los niños en las tareas verbales se deberían a la falta del conocimiento conceptual necesario para resolverlos correctamente. Así, por ejemplo, Riley y Greeno (1988) establecieron tres niveles de desarrollo dependiendo del nivel de conocimiento. En el nivel I, los niños representaban adecuadamente las proposiciones en las que se especifica la cantidad, podían construir conjuntos y comprender cuestiones relativas a los conjuntos, pero eran incapaces de resolver problemas con la incógnita en uno de los sumandos. En el nivel II, poseían un esquema que les permitía asignar a los objetos como miembros del conjunto principal y de los subconjuntos. Por último, en el nivel III, la incorporación del esquema parte-parte-todo facilitaba la representación de las relaciones existentes entre todos los elementos del problema.

Desde el punto de vista de Cummins (1991) los niños preescolares tenían a menudo más conocimiento sobre las relaciones lógicas de lo que se suponía,

como se demostraba en el hecho de que tenían una cierta comprensión del esquema parte-parte-todo.

Por el contrario, los autores que defienden el punto de vista lingüístico consideran que ciertos tipos de problemas verbales son difíciles de resolver porque emplean formas lingüísticas que no tienen una proyección adecuada en las estructuras conceptuales de los niños, lo que hace que ciertas palabras y frases puedan resultar ambiguas. En otras palabras, además de la estructura semántica y el lugar ocupado por la incógnita, la formulación verbal (i.e., el grado en que en el texto se explicitan las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, y el orden de presentación de la información) influye en la facilidad o dificultad que los niños tienen para resolver las tareas. Bajo esta perspectiva, la representación significativa del problema se ve afectada tanto por variables internas (i.e., procesamiento de la información) como externas (i.e., la instrucción). En las variables internas no se puede intervenir, pero sí se pueden manipular las variables externas mediante la reformulación y la personalización del contexto en el que se presentan las tareas.

En 1991 Cummins realizó un estudio para comprobar qué factores tenían más peso en la interpretación que hacían los niños de los problemas verbales. Los resultados de este y otro estudio posterior demostraron que, por una parte, había una relación directa entre tener éxito en la solución de los problemas verbales y la habilidad para conceptualizar adecuadamente las situaciones descritas en el mismo y, por otra, que los errores cometidos en la resolución de problemas verbales eran causados por interpretaciones incorrectas de ciertas expresiones.

Estas interpretaciones constituyen el resultado de la dificultad para traducir esas expresiones al esquema conceptual correspondiente.

En una línea semejante Davis-Dorsey, Ross y Morrison (1991) trataron de ver la incidencia de la personalización y la reformulación de los problemas, comprobando que los niños de 2º y 5º curso obtenían mejores resultados cuando se presentaban situaciones reformuladas y personalizadas. La personalización incrementaba la motivación en los niños, favorecía la representación mental y allanaba el establecimiento de conexiones entre el texto del problema y los esquemas conceptuales existentes.

A modo de conclusión general, cabría señalar que si bien se observa una cierta progresión en el tipo de problemas que resuelven los niños, es difícil establecer de forma rígida y unidireccional una jerarquía, ya que son muchos los factores que influyen en el éxito infantil, entre ellos, la presencia o no de objetos que permitan la representación del problema, la estructura semántica de los mismos y el lugar en que se encuentra la incógnita. Además, como señala Bermejo y col., (1998) una dificultad adicional a la hora de establecer jerarquías procede a menudo de la imposibilidad para aunar criterios, debido a que los niveles escolares considerados por los diferentes autores no resultan homogéneos, y también, a que encontramos escasez de estudios que investiguen en un mismo trabajo las diferentes operaciones y las diferentes categorías de problemas. La mayoría de estudios se centran tan sólo en una o varias categorías, pero no en todas y además, no utilizan todos los subtipos dentro de una misma categoría, lo que unido a la variabilidad de las diferentes condiciones en las investigaciones hace complejo establecer conclusiones generales. No

obstante, también estamos en condiciones de afirmar que los niños de Educación Infantil son capaces de resolver problemas con estructura de cambio de adición y sustracción si la incógnita se encuentra en el resultado y cuentan con ayuda de material para la representación, pero como hemos visto en los trabajos de reformulación también pueden resolver problemas con estructuras más complejas (i.e., problemas de comparación), así como problemas con la incógnita en uno de los sumandos.

3.5. ESTRATEGIAS Y ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE LAS TAREAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

El estudio de los procedimientos de resolución que emplean los niños para resolver los diferentes problemas resulta de gran importancia para conocer los procesos subyacentes a las ejecuciones correctas e incorrectas y establecer los mecanismos implicados en el cambio conceptual. Por esta razón, en los últimos años han proliferado los estudios basados en el examen de esos procedimientos de resolución (p.e., Beishuizen, Van Puttlen y Van Mulken, 1997; Bertelli, Joanni y Martlew, 1998; Blöte, Klein y Beishuizen 2000; Cobb, 1995; Deboys y Pitt, 1995; Lefevre, Sadesky y Bisanz, 1996; Lozano, 2001; Siegler y Stern, 1998; Thompson, 1999; Verschaffel, De Corte, Lamote y Dherdt, 1998). En lo que sigue, analizaremos exhaustivamente las estrategias correctas e incorrectas hasta ahora identificadas, prestando especial atención a las estrategias basadas en la habilidad de contar, cuyo protagonismo será indudable dada la edad de nuestros sujetos.

3.5.1. Estrategias de representación directa.

En esta categoría se incluyen aquellos procedimientos de resolución en los que los niños usan los dedos o cualquier otro objeto para representar cada uno de los términos del problema verbal, contando a continuación todo para obtener el resultado. Dependiendo de cómo se lleve a cabo la representación del problema y el conteo final, podemos considerar diferentes tipos de estrategias en la adición:

✓ *Juntar todo.*

Es considerada la estrategia más elemental y está presente antes de que los niños reciban instrucción formal (p.e. Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1984; Ginsburg y Rusell, 1981; Lozano 2001). La estrategia de juntar todo consiste en representar cada uno de los sumandos con dedos o con objetos, contando a continuación ambos conjuntos. Por ejemplo para resolver un problema verbal del tipo: *“María tiene 5 galletas y su mamá le da 3 galletas. ¿Cuántas galletas tiene ahora María?”*, los niños cogen 5 galletas u objetos que va contando 1, 2, 3, 4, 5, después disponen tres galletas que colocan en otro lugar 1, 2, 3, y por último, juntan todas las galletas u objetos y las cuentan para ver cuántas tienen en total: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Esta estrategia aparece principalmente en los problemas de cambio y parte-parte-todo con la incógnita en el resultado.

✓ Juntar a.

Los niños construyen el conjunto inicial y añaden elementos hasta que alcanzan el conjunto total. Esta estrategia la utilizan cuando desconocen el conjunto de cambio. Por ejemplo: *“María tiene 5 galletas, Pedro le da galletas, ahora María tiene 8 galletas. ¿ Cuantas galletas le ha dado Pedro a María?”*, en este caso los niños forman un conjunto inicial con 5 galletas y añaden galletas hasta llegar a 8, contando después las galletas añadidas (i.e., 1, 2 y 3) para llegar a la solución (i.e., 3)

En la sustracción, la representación directa sigue las mismas reglas que en la adición, ya que los niños necesitan representar ambos términos para obtener el resultado final:

✓ Quitar de.

Representan con objetos la cantidad que corresponde al minuendo y retiran de este conjunto inicial una cantidad de objetos igual al sustraendo. Por último, cuentan los objetos que quedan en el conjunto inicial.

Esta estrategia es utilizada por los niños en los problemas de sustracción, cuando la incógnita está en el resultado. Por ejemplo: *“María tiene 5 caramelos y le da 2 caramelos a un amigo. ¿Cuántos caramelos tiene ahora María?”*, los niños toman los 5 caramelos que se indica en el primer término, después separan de estos 5 caramelos los 2 caramelos que indica el segundo término y, en último lugar, cuentan el número de caramelos que quedan en el primer grupo: 1, 2 y 3.

✓ **Quitar a.**

Al igual que en la estrategia anterior los niños representan en un primer momento la cantidad indicada por el minuendo, pero en vez de quitar los objetos que corresponden al sustraendo retiran objetos hasta que en el conjunto inicial aparecen representados los objetos correspondientes al sustraendo. La respuesta final es el número que se obtiene de contar el conjunto de objetos que se ha retirado. Los niños recurren a esta estrategia cuando la incógnita está en el conjunto de cambio (p.e., *“María tenía 7 canicas, después de jugar con ellas sólo le quedan 2 canicas. ¿Cuántas canicas ha perdido María?”*)

✓ **Emparejamiento.**

Este procedimiento se usa principalmente en los problemas de comparación en los que se desconoce la diferencia, es decir, en problemas del tipo *“María tiene 6 galletas y Pedro tiene 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene María más que Pedro?”*.

En este caso los alumnos construyen los dos conjuntos y realizan la correspondencia uno-a-uno, siendo la respuesta el número de elementos que no tienen pareja. Para llegar a extraer la respuesta final los niños pueden contar de tres formas diferentes, que siguiendo el ejemplo anterior serían las siguientes:

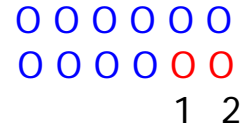
1. contando: cuentan los elementos no emparejados

○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ 1 2

2. quitando: retiran los objetos no emparejados y los cuentan

○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ 1 2

3. añadiendo: adicionan los objetos necesarios para que los dos conjuntos de objetos sean equivalentes y después cuentan los objetos añadidos.



3.5.2. Estrategias de conteo.

En este caso, los niños no precisan de la representación física de los conjuntos, de tal forma que si utilizan los dedos u otro tipo de marca lo hacen para registrar lo que ya han contado y no para representar uno de los sumandos o términos del problema.

En la adición se pueden observar varias formas de realizar el conteo:

✓ **Contar todo.**

Cuentan el primer sumando y siguen contando al tiempo que añaden el segundo sumando. Este conteo suele ir acompañado de los dedos o de algún otro apoyo físico; como golpes con los pies en el suelo, movimientos con la cabeza, etc. En el ejemplo: “*María tiene 5 galletas y Pedro le da 4 galletas ¿Cuántas galletas tiene ahora María?*”, los niños empiezan contando 1, 2, 3, 4 y 5, y continúan con el segundo término 6, 7, 8 y 9.

✓ **Contar a partir del primer sumando.**

Es similar a la anterior, sólo que en este caso no cuentan ambos sumandos, sino que comienzan contando a partir del primer sumando. Por

ejemplo: *“María tiene 3 galletas y Ana le regala 5 ¿Cuántas galletas tiene ahora María?”*, parten del 3 y cuentan 4, 5, 6, 7 y 8, dando como respuesta el último número de la secuencia, es decir, 8.

✓ ***Contar a partir del sumando mayor.***

Esta estrategia supone un avance respecto a la anterior, ya que se produce una economía en el proceso de conteo. Los niños inician el recuento desde el sumando mayor, independientemente de cual sea su situación dentro del problema.

Tanto este procedimiento como el anterior son usados principalmente en los problemas de adición con la incógnita en el resultado.

✓ ***Contar hasta.***

Consiste en contar desde el sumando conocido hasta el resultado y suele manifestarse cuando la incógnita del problema se encuentra en el segundo sumando. Por ejemplo: *“Al comenzar el día María tiene 5 canicas, después de jugar con sus amigos María tiene 9 canicas ¿Cuántas canicas ha ganado María?”*, los niños cuentan desde el 5 hasta el nueve (i.e., 6, 7, 8, 9), al tiempo que cuentan el número de elementos que representa cada numeral (i.e., 1, 2, 3, 4) para llegar a la respuesta final “4”.

En los problemas de sustracción se han identificado los siguientes procedimientos:

✓ Contar hacia atrás.

Esta estrategia resulta semejante al procedimiento de *quitar de* y surge principalmente en los problemas de sustracción con la incógnita en el resultado. Partiendo del minuendo los niños levantan dedos contando hacia atrás hasta que llegan a tener tantos dedos como se indica en el sustraendo, siendo el resultado el último numeral dicho en la secuencia de conteo. Supone un estadio evolutivo avanzado, ya que requiere la habilidad de ir hacia atrás en la secuencia del conteo. Por ejemplo: "*María tiene 7 galletas y se ha comido 3, ¿cuántas galletas le quedan?*", los niños resuelven el problema partiendo del 7 y contando hacia atrás tres números como indica el sustraendo (i.e., 6, 5, 4), dando como respuesta el último numeral de la serie.

✓ Contar hacia delante.

Este procedimiento aparece con menos frecuencia que el anterior. Los niños cuentan desde el sustraendo hasta alcanzar el numeral que indica el minuendo. Tomando como ejemplo el problema anterior, los alumnos dirían 3 y contarían hacia delante hasta alcanzar el 7 (i.e., 4, 5, 6, y 7), contando después los números que habían mencionado 4 (1º), 5 (2º), 6 (3º), 7 (4º) para dar la respuesta "4".

3.5.3. Estrategias memorísticas: hechos numéricos y hechos derivados.

Son aquellas combinaciones numéricas que los niños conocen de memoria (i.e., *hechos numéricos*) o las pueden derivar a partir de otras conocidas (p.e., para sumar 6 y 7, como saben que 6 y 6 son 12 una más 13), (i.e. *reglas o hechos derivados*).

La recuperación directa de hechos numéricos y hechos derivados forman la base del cálculo mental (Askew, 1997). Los estudios comparativos realizados con niños escolarizados y no escolarizados pusieron de manifiesto que estos últimos presentaban un mayor número de estrategias basadas en el cálculo mental (p.e., Ginsburg, Posner y Russell, 1981). Este dato induce a pensar que una parte del conocimiento sobre los hechos numéricos resulta del conocimiento informal y se puede adquirir, como tendremos ocasión de averiguar en nuestra investigación, antes de la enseñanza formal en la escuela a la edad de 4 ó 5 años.

En lo que sigue vamos a considerar los hechos numéricos y derivados en la adición y posteriormente, en la sustracción:

✓ *Los hechos numéricos de la adición.*

Los *hechos numéricos* son el resultado de la memorización de una serie de combinaciones. Por tanto, la recuperación de estos hechos se produce de manera rápida y correcta siempre que se hayan almacenado de forma adecuada en la memoria. No obstante, no todas las combinaciones de adición se recuerdan con la misma facilidad, parece que los dobles (en este orden $2+2$, $5+5$, $3+3$,

4+4, 6+6, 7+7, 8+8, 9+9) son más fáciles de aprender (p.e., Hamann y Ashcraft, 1985; Lozano, 2001; Rathemell, 1978; Siegler, 1988; Verschaffel, De Corte, Gielen y Struyf, 1994). Los complementarios, es decir, aquellos números que sumados forman la decena resultan más fáciles del recordar que otras combinaciones (7+3, 6+4, 9+1, 8+2). Cuando el 5 es uno de los sumandos la memorización es más fácil, ya que este número se representa con los dedos de la mano. Igualmente, los hechos numéricos correspondientes a cifras grandes (p.e., 7 y 8) son más difíciles de memorizar que los de cifras pequeñas (p.e., 2+1). Finalmente, el empleo de procedimientos de hechos conocidos resulta más frecuente cuando se trata de resolver problemas en los que hay una operación de suma que de resta, tal como se ha puesto de relieve en diversas investigaciones realizadas con niños de Educación Primaria.

✓ **Los hechos derivados de la adición.**

Los *hechos derivados* son complejos y sofisticados y requieren un mayor desarrollo evolutivo que los *hechos numéricos*, ya que son estructuras que surgen de los hechos numéricos conocidos. Estos procedimientos se basan en el conocimiento procedimental, dependen de un procesamiento consciente e imponen más demandas a la memoria de trabajo. Debido a su nivel de complejidad, la manifestación de este procedimiento es mucho menor en los niños de corta edad.

Como sucedía con los hechos numéricos conocidos, los hechos derivados también son más utilizados en los problemas de adición que en los de sustracción (p.e., Dowken, 1996). Además, al aumentar los hechos numéricos memorizados,

también lo hace el rango de estrategias disponibles para derivar otros hechos numéricos. Se han establecido varios tipos y, a modo de ejemplo, vamos a ver algunos de ellos:

- a) "dobles +/- 1" o "dobles +/- 2": a partir de las memorizaciones de adiciones de números iguales, deducen otras cuyos números no distan en más de una o dos unidades respectivamente; por ejemplo:
 $7+8=7+7=14+1=15$; $4+6=4+4=8+2=10$.
- b) "decena": utilizan los números como si fueran una decena; por ejemplo: $9+5=10+5=15-1=14$ (el nueve como si fuera 10). Dicho de otra forma "todo lo que se suma a 9 da uno menos que si se suma a 10".
- c) "compartir o compensar": los niños realizan la compensación de los sumandos buscando alguna combinación numérica memorizada anteriormente; por ejemplo: $3+5=4+4$.
- d) "Usar el 5": consiste en sumar de 5 en 5 representando cualquier unidad como la suma de $5+N$.

Cuando los números son mayores los niños utilizan procedimientos en los que aparece el uso de la decena (p.e., " $N - 10$ " y " $10 - 10$ ").

Al igual que en la adición, mencionaremos las estrategias basadas en hechos numéricos y en hechos derivados en la sustracción:

✓ **Los hechos numéricos de la sustracción.**

Los *hechos numéricos* de la resta se recuperan de dos formas:

- *de manera directa*: los niños recuerdan automáticamente el resultado de la resta (p.e., $8-3=5$)
- *de manera indirecta*: encuentran la respuesta a partir de un hecho conocido relacionado. En el caso anterior, al conocer que $8-5$ son 3 deducen que $8-3$ son 5
- *basadas en la adición*: extraen la respuesta correcta partiendo de un hecho numérico conocido de la adición (p.e., $8-4$ son 4, por que saben que $4+4$ son 8).

✓ **Los hechos derivados de la sustracción.**

Como en la adición las estrategias basadas en hechos derivados se nutren de las estrategias de hechos numéricos, es decir, los hechos derivados se obtienen componiendo o descomponiendo los diferentes términos conocidos (Putnam, de Bettencourt y Leinhardt, 1990). Por ejemplo:

- a) "decena": cuando uno de los términos de la operación es 9 lo usan como si fuera 10; por ejemplo $9-4=10-4=6$ como 10 es uno más que 9 resto uno más a 6 y quedan 5.
- b) "dobles +/-1" o "dobles +/-2": por ejemplo $5-3=6-3=3$ como 5 es uno menos que 6 se quita 1 al resultado; $10-4=8-4=4$ como 10 es dos más que 8 se añade 2 al resultado y se obtiene 6.
- c) "compartir o compensar": uno de los términos de la operación se aumenta una unidad y en el otro disminuye una unidad para compensar el aumento; por ejemplo $16-9=16-8=8$ como 9 es una más que 8 se quita una unidad al resultado (7).

- d) "mantener la diferencia": consiste en aumentar o disminuir en una unidad los dos términos para transformarlos en un hecho conocido; por ejemplo $15-8=14-7$.
- e) "usar los 5": proceden a restar de 5 en 5; por ejemplo $9-6=9-5=4-1=3$.

Al igual que en la adición cuando se trata de números mayores aparecen las estrategias de "N-10" y "10-10".

Hasta aquí hemos realizado un amplio recorrido por las diferentes estrategias que utilizan los niños cuando resuelven los problemas verbales de adición y sustracción, a continuación analizaremos la evolución de estas estrategias para de este modo entender mejor las competencias de los niños de Educación Infantil.

3.5.4. Evolución de las estrategias de adición y sustracción.

Sabemos que durante los primeros años escolares, los niños transforman progresivamente sus procedimientos de resolución desde las estrategias de conteo a otras que implican un menor esfuerzo y tiempo de ejecución como las mentales.

A este respecto, se han propuesto algunos modelos que describen el desarrollo de las distintas estrategias, como son el de Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983), el de Carpenter y Moser (1984) o el más reciente de Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson (1999). En el primero, Steffe et

al.(1983) consideraron que la evolución de las estrategias se desarrollaba en 4 etapas:

1. Los niños representan mediante objetos físicos ambos términos de la operación. En este nivel el material físico es imprescindible para resolver con éxito la operación y tan sólo pueden contar elementos que perciben o representan.

2. En este nivel, los objetos sirven para representar los pasos que se han realizado en el conteo y constituyen también, como en el anterior, una ayuda externa a la memoria.

3. Los niños utilizan el conteo mental sin necesidad de usar objetos externos.

4. Por último, aparecen las estrategias basadas en hechos numéricos que se recuperan directamente de la memoria o se derivan de reglas.

De manera similar Carpenter y Moser (1984) diferenciaron 5 niveles de evolución en los procesos de resolución:

1. Se caracteriza por la incapacidad para llevar a cabo procedimientos que les permitan resolver cualquier tipo de problema aritmético.

2. Representan ambos términos de la operación mediante objetos físicos.

A este nivel corresponden las estrategias de *representación directa*.

3. Constituye un periodo de transición en el que surgen procesos basados en la *representación directa* y los basados en el *conteo*.

4. Usan sistemáticamente las estrategias *de conteo*.

5. Surgen los procesos memorísticos y los *hechos numéricos y derivados*.

Por último, este modelo ha sido sintetizado por Carpenter, et al. (1999) en 3 niveles:

✓ El primero estaría caracterizado por la necesidad de representar los términos de la operación mediante objetos físicos. A este nivel corresponden las estrategias de *representación directa*.

✓ Tiene lugar un proceso gradual en el que se procede a reemplazar las estrategias de *representación directa* por otras más eficientes como son las de *conteo*. Inicialmente, los niños recurren a ambas estrategias, usando las de *conteo* en las situaciones que les resultan más fáciles. A medida que el tiempo pasa se encontrarán cada vez más seguros con las estrategias de *conteo* quedando en un segundo plano las de *representación directa*.

✓ En último lugar aparecen las estrategias de *hechos numéricos y derivados* para dar respuesta a problemas con cantidades grandes y de este modo, economizar el esfuerzo cognitivo que suponen las estrategias de *conteo*.

En los tres modelos encontramos una pauta común a la hora de describir el proceso de evolución de las estrategias: representación directa, conteo (con o sin apoyos físicos) y estrategias memorísticas (hechos numéricos y hechos derivados). No obstante, falta por especificar cómo se produce el tránsito de unas estrategias a otras y el momento en que tienen lugar esos cambios. El estudio de Carpenter y Moser (1984) ofrece algunas respuestas al respecto. En efecto, en este estudio longitudinal encontraron que la estrategia de "contar todo" era sustituida por la de "contar a partir de una de las cantidades", pero ese tránsito no ocurría de forma completa en los primeros momentos, pues los niños

empleaban ambos procedimientos de manera indistinta. Asimismo, no hallaron ninguna evidencia empírica para establecer etapas separadas entre las estrategias de *"contar desde el primer sumando"* y *"contar desde el sumando mayor"* (i.e., el 80% de los niños empleaban ambas estrategias al menos en una de las entrevistas). Sin embargo, Baroody (1987) en un estudio longitudinal con niños de Educación Infantil observó que la estrategia de *"contar desde el sumando mayor"* era más frecuente que la de *"contar desde el primer sumando"*.

Este resultado lo explicaba por la tendencia de los niños a utilizar las estrategias que suponían un menor esfuerzo cognitivo.

Otros estudios como el de Siegler (1987, ver también Siegler, 1996) con niños de Educación Infantil y 1º y 2º de Educación Primaria, mostraron que no predominaba ninguna estrategia en particular, sino que utilizaban una gran variedad de ellas, pero con cambios en la distribución. Así, pasaban de utilizar procedimientos como *"contar todo"* a estrategias de *"recuperación"*. Del mismo modo, la estrategia de *"contar desde el sumando mayor"* se usaba en todas las edades, pero a medida que se incrementaba la edad disminuía su presencia. Afirmaba Siegler que el desarrollo de las estrategias se debía a la experiencia acumulada.

Esta variabilidad en el uso de estrategias también fue hallada en algunos estudios transversales como el de Carpenter, et al (1993), y el de Lago, Rodríguez y Caballero (1999) con niños de Educación Infantil. En este último, se comprobó que los más pequeños utilizaban principalmente estrategias basadas en la *representación directa*, pero también, aunque con menor frecuencia, recurrían a las de *conteo* y *estrategias mentales*.

3.5.5. Estrategias incorrectas de adición y sustracción.

Las “estrategias erróneas” constituyen, junto al estudio de las “estrategias correctas”, uno de los mecanismos para conocer los procesos cognitivos que subyacen a la resolución de problemas verbales.

Las dificultades que encuentran los niños al enfrentarse a la adición o la sustracción podemos agruparlas en dos tipos: los errores en los algoritmos y los errores en los problemas verbales.

a) Errores en los algoritmos.

Vamos a tratar este apartado brevemente, ya que la parte empírica de nuestro trabajo se ha llevado a cabo con niños de Educación Infantil que aún no han recibido instrucción formal sobre el algoritmo y además tan sólo hemos planteado problemas verbales.

En líneas generales, sabemos que solucionar correctamente un algoritmo implica tener en cuenta una serie de factores de tipo sintáctico y semántico (Brown y Burton, 1978; Brown y Van Lehn, 1982; Resnick, 1983). Los componentes sintácticos abarcan reglas que dirigen la actuación como, por ejemplo, empezar el algoritmo por la primera columna de la derecha, sumar o restar columna por columna etc. Los semánticos hacen referencia a conceptos básicos como el valor posicional y el conocimiento del sistema de base. Desde el punto de vista sintáctico, uno de los errores más frecuente consiste en anotar el resultado de la adición de una columna en valor absoluto olvidando que sólo debe consignarse un único dígito por columna hasta llegar a la última de la

izquierda. En cuanto a los errores semánticos, los más frecuentes son aquellos que tienen que ver con las "llevadas".

b) Errores en los problemas verbales

Diversas investigaciones han mostrado que los problemas verbales de adición son más difíciles de solucionar que los algoritmos. Esto sugiere que además de las habilidades matemáticas que contribuyen al éxito en la resolución, hay otros factores implicados como el tipo de problema que se le propone al alumno.

En general, siguiendo a Rodríguez (1992), se pueden establecer dos grandes categorías de errores: los de ejecución y los de representación. Los errores de ejecución se producen cuando los niños resuelven los problemas con la operación aritmética adecuada, pero cometen algún error en la ejecución de la misma (p.e., no empezar la operación por la primera columna de la derecha). Los de representación tienen lugar cuando construyen una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal. Estos últimos son de varios tipos:

1. *Repetir una de las cantidades propuestas en el problema.* Este error se ha observado en los tres tipos de problemas (i.e. comparación, cambio, combinación). En los de comparación, Bermejo y Rodríguez (1990) comprobaron que en el problema "*Javier tiene 6 globos. Mario tienen 9 globos más que Javier. ¿Cuántos globos tiene Mario?*", un alto porcentaje de niños de 2º y 3º de Educación Primaria respondían a la pregunta diciendo "9". Riley y cols. (1983) también identificaron esta clase de error y apuntaron que se debía a una

representación inapropiada de la historia del problema, como resultado de la ausencia del esquema que permite su comprensión. En la misma línea, Mayer (1986) señaló que los niños interpretaban una proposición de relación como una proposición de asignación. Es decir, la proposición relacional "*Mario tiene 9 globos más que Javier*" es interpretada como una proposición de asignación "*Mario tiene 9 globos*".

En los problemas de cambio, los errores surgen porque los niños se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y cambio separadamente (Riley y cols., 1983). Por ejemplo, en el problema "*María tiene algunas galletas. Ana le da 5 galletas. Ahora María tiene 8 galletas. ¿Cuántas galletas tenía María al principio?*", cuando el niño recibe la frase "*María tiene algunas galletas*" se da cuenta de que no conoce el conjunto inicial con exactitud, pero no crea un conjunto de partida desconocido para María. Ante la segunda proposición, "*Ana le da 5 galletas*", crea un conjunto con 5 galletas para María, pero como no ha representado un conjunto de partida inicial, no entienden este conjunto como un cambio en el sumando inicial. A continuación, la tercera proposición "*Ahora María tiene 8 galletas*" la interpreta como un incremento en el conjunto anterior. Por eso, al llegar a la pregunta "*¿Cuántas galletas tenía María al principio?*", responde 5, esto es, el número que, según el niño, representa al conjunto inicial (Bermejo y Rodríguez, 1990).

En los problemas de combinación, por ejemplo "*María y Ana tienen juntas 9 galletas. María tiene 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*", De Corte y Verschaffel (1987) afirmaron que los errores se producían porque los niños interpretaban la proposición "*María y Ana tienen juntas 9 galletas*" como María

tiene 9 galletas y Ana tienen 9 galletas, es decir, conciben erróneamente el 9 como una información relativa a la cantidad de cada persona. Por su parte Riley y cols (1983) y Briars y Larkin (1984) explicaron estos errores como resultado de la falta de comprensión de la relación parte-todo. Es decir, los niños que no disponían de este esquema interpretaban cada parte del problema separadamente, sin poder establecer las relaciones entre los dos conjuntos.

2. *Inventar la respuesta.* Suele aparecer con cierta frecuencia cuando los niños no comprenden el problema, limitándose a pronunciar la primera cantidad que se les pasa por la cabeza sin ninguna reflexión.

3. *Selección de una operación inadecuada.* Este tipo de error se muestra con más frecuencia en aquellos problemas en los que la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Se presenta en todas las categorías de problemas y tiene su origen en tres causas diferentes. La primera reside en la dificultad para entender el significado de la identificación de uno de los sumandos ("algunos"), la segunda se refiere a que no aprecian la información temporal contenida en el texto y la última a que la proposición comparativa que determina uno de los sumandos resulta difícilmente comprensible para los niños (Bermejo y Rodríguez, 1990; López, 2001). Por otro lado, De Corte y Verschaffel (1985) apuntan que este error se debe a que procesan el texto de forma superficial, bien porque se centran en palabras claves que están asociadas a ciertas operaciones aritméticas (i.e. "entre los dos" asociada a la suma), en vez de intentar construir una representación mental del problema como un todo, bien a que no comprenden el problema y utilizan la operación que les resulta más fácil y conocida.

4. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Siguiendo el mismo esquema que en el apartado correspondiente a de la adición y la sustracción comenzaremos, en primer lugar, haciendo referencia al concepto de multiplicación y división y sus propiedades, el conocimiento informal de los más pequeños, la clasificación de los problemas verbales y finalmente los procedimientos de resolución.

4.1. CONCEPTO Y PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN.

Según la noción matemática la multiplicación se define “como la ley de composición interna asociativa definida en un conjunto C , cuya notación es $X \times Y$ y que, a dos elementos X e Y , asocia el elemento X por Y llamado producto del factor X por el factor Y ” (Enciclopedia Larousse, 1989). Una segunda definición más extendida es la referida a los números enteros en la que el producto $n \times x$ aparece como una adición iterada: $n \times x = x + x + x + \dots + x$. Esta noción de la multiplicación como una suma repetida resulta ser la más habitual entre nuestros escolares lo que les acarreará múltiples dificultades, como veremos en el apartado 4.2.1, cuando se enfrenten con los números racionales. Sin embargo, Nesher (1992) consideró que enseñar la multiplicación como una suma repetida, evita al profesor la necesidad de hablar directamente de la regla “ x por y ”. De este modo, la multiplicación se trata como una operación unitaria y no binaria

con dos predicados n_1 y n_2 . En esta misma línea, Vergnaud (1983) indicó que enseñar una concepción binaria de la multiplicación en los primeros años de aprendizaje llevaría a los niños a conflictos conceptuales, por el hecho de que los dos términos de la multiplicación pertenecen a espacios de medida diferentes (i.e, galletas y cajas). Esta situación resulta muy diferente a la que se plantea en el caso de la adición, ya que en ésta ambas medidas son del mismo tipo (i.e., galletas). Por este motivo, la multiplicación se presenta como una operación unitaria lo que, según Maza (1991), acarrea dos consecuencias. En primer lugar, el papel concebido por los dos términos de la multiplicación es diferente, el multiplicando sería un elemento "pasivo" y el multiplicador (operador escalar) un agente "activo" que opera sobre el anterior y de ahí, que la multiplicación no sea conmutativa. Segundo, el operador escalar actúa sobre un espacio de medida e indica el número de veces que se repite la suma del multiplicando. Entendida así la multiplicación permite a los niños pequeños continuar empleando los procedimientos familiares de la adición, en vez de considerarla como una operación distinta. Además, tampoco van a concebir la multiplicación como una operación binaria, ni como la inversa de la división, sino que aparece estrechamente ligada a la adición.

Como indicábamos unas líneas más arriba, la multiplicación no tiene carácter conmutativo en su concepción unitaria, pero si en la binaria, ya que a ambos factores se les asigna el mismo papel. Las propiedades restantes surgen con posterioridad en niveles escolares avanzados. Por ejemplo, la multiplicación cumple la propiedad asociativa ($x (b \times c) = (a \times b) \times c$), y el elemento neutro

(i.e., llamamos así al elemento "u" que al multiplicarlo por cualquier otro elemento da el mismo número).

La división se define como la inversa de la multiplicación. Es decir, la operación que permite que dos números a (dividendo) y b (divisor) encuentren un único par de números (q, r) tales que, siendo q el cociente y r el resto, se cumpla que *dividendo = divisor x cociente + resto*. Sin embargo, en sus orígenes la división no aparece vinculada a la multiplicación sino a la idea de reparto (p.e., Correa, Nunes y Bryant, 1988; Dickson, Brown y Gibson, 1984). Para que la división pueda considerarse como la inversa de la multiplicación, esta última debe entenderse como una operación binaria y ésta, como hemos visto anteriormente, no se da en los más pequeños.

En lo referente a las propiedades de la división hay que tener en cuenta que al tratarse de una operación unidireccional el papel del dividendo y del divisor no se pueden intercambiar, por tanto no cumple la propiedad conmutativa (i.e., $6:2$ no es igual que $2:6$), ni la asociativa (i.e. $12:(6:3)$ no es igual $(12:6):3$), pero sí, como en la multiplicación, el elemento neutro.

4.2. CONOCIMIENTO INFORMAL SOBRE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN EN LOS NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL.

Numerosos estudios demostraron que el conocimiento de los más pequeños acerca de la multiplicación y la división ha sido frecuentemente subestimado. En este apartado recogeremos algunas de las investigaciones que han cuestionado estas deficiencias.

El estudio de Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) aportó datos sobre las habilidades de los niños con edades comprendidas entre los 4-6 años en problemas verbales (i.e., adición, sustracción, multiplicación y división). Antes de comentar los resultados del estudio conviene tener en cuenta que los profesores que impartían clases en esas aulas formaban parte del programa de "Instrucción Guiada Cognitivamente" en el que recibían información acerca del conocimiento informal, y participaban en discusiones sobre los conocimientos y las estrategias que los alumnos tendían a utilizar para resolver los distintos problemas (para más información, ver p.e., Carpenter y Fennema, 1992; Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988). En concreto, los niños debían resolver un total de 9 problemas: tres de adición y sustracción, tres de multiplicación y división y tres no rutinarios o que requerían más de una operación aritmética. En cuanto a los de división les plantearon un problema de división de medida, un problema de división partitiva y un problema de división con resto. Los resultados mostraron que los niños empleaban diversas estrategias correctas para resolverlos: *representación directa*, *conteo* y *hechos numéricos*. Encontraron que el 46% de los niños recurrían a una estrategia correcta para resolver los nueve problemas, aunque 13 de ellos cometieron algún error de conteo en uno o dos problemas y el 63% resolvía correctamente siete problemas. Con respecto a la multiplicación, 60 de los 70 niños que participaron en el estudio utilizaron una estrategia correcta, de éstos 46 usaron la estrategia *de representación directa* y 14 la *de conteo*. En la división, 51 resolvieron correctamente el problema de división de medida (50 con una estrategia de *representación directa* y 1 con la de *conteo*), 49 ejecutaron correctamente el

problema de división partitiva (39 con una estrategia de representación directa, 1 la de *conteo*, 1 la de *hechos derivados* y los 8 restantes con estrategias inclasificables) y 45 niños tuvieron éxito en el problema de división con resto (42 con una estrategia de *representación directa*, 1 con una estrategia de *conteo* y 2 con estrategias de *hechos derivados*). Además, 41 alumnos solucionaron el problema no rutinario (40 con una estrategia de *representación directa* y 1 con una *estrategia de conteo*).

En resumen, los resultados del estudio indicaron que los niños desde temprana edad solucionaban problemas de multiplicación y división, ahora bien siempre y cuando contasen con objetos físicos para representar las cantidades de los problemas.

En otros estudios, como el de Kouba (1989), también se solicitó a niños de los primeros cursos de Primaria que solucionaran problemas de adición, sustracción, multiplicación y de división. Así, comprobó que el éxito en los problemas multiplicativos aumentaba a medida que lo hacía el nivel escolar de los alumnos. También halló variaciones en las estrategias, de modo que los niños de 1º y 2º recurrían a la *representación directa* en los problemas de división, mientras que los de 3º al recuerdo de *hechos numéricos*. Además, si comparamos los datos de este estudio con los de Carpenter et al. (1993) se pone de manifiesto que los niños de Educación Infantil obtenían mejores resultados que los de primero y segundo, igualándose a los de tercero. En esta misma línea, habría que situar los hallazgos correspondientes a los problemas de división con resto (Caballero, Rodríguez, Lago, Jiménez, Hernández, 2005).

Desde nuestro punto de vista, estas diferencias podrían ser atribuidas a la metodología de enseñanza que seguían los profesores en la investigación dirigida por Carpenter et al. (1993), ya que habían participado previamente en el CGI. Con objeto de comprobar esta afirmación hicimos una réplica de este trabajo, con la salvedad de que ni los profesores, ni los niños habían formado parte de ningún programa de entrenamiento previo y que, en nuestro caso, se ciñó exclusivamente a la multiplicación y a la división (Lago, Rodríguez y Caballero, 1999). Concretamente, seleccionamos 20 niños con edades comprendidas entre los 5 y 6 años, ninguno de los cuales había recibido instrucción anterior sobre la multiplicación y división, limitándose sus conocimientos a pequeños cálculos de adición y sustracción con cantidades pequeñas.

La prueba elaborada consistió en problemas de multiplicación, división de medida, división partitiva, división con resto y no rutinario. Los datos se recogieron mediante entrevista individual y a los niños se les proporcionó material para facilitar los procesos de representación. Los resultados de este estudio corroboraron los hallados por Carpenter et al. (1993), los niños mostraron una competencia mayor de la que se suponía para su edad, puesto que obtuvieron porcentajes de éxito del 86% en los problemas de multiplicación, 72% y 70% en los de división partitiva y división de medida, respectivamente

A la hora de explicar el éxito alcanzado, no se puede atribuir únicamente a la disponibilidad de material para representar los problemas, sino también al esfuerzo de interpretación que hacen para acomodar su respuesta a los requerimientos del problema. Al no haber recibido instrucción formal sobre la

multiplicación y la división, estos alumnos no son dependientes de los algoritmos, sino que buscan otras estrategias que les faciliten el proceso de resolución.

Una muestra más de la importancia de los conocimientos informales son los estudios con los niños de la calle (p.e., Nunes y Bryant, 1996; Nunes Schliemann y Carraher, 1993). Nunes, Schliemann y Carraher (1993) al examinar a una niña de 9 años que vendía fruta en la calle comprobaron que poseía una gran habilidad para establecer el precio de 12 limones que costaban 5 cruzeiros cada uno. La estrategia consistía en separar dos limones cada vez mientras contaba "10, 20, 30, 40, 50, 60". Sin embargo, cuando presentaron un problema con la misma estructura (i.e., 12×5), pero en un contexto fuera del habitual el fracaso fue total (p.e., ponían 2, después 5 y por último 1, respondiendo 251).

Llegados a este punto cabría preguntarse de dónde proviene este conocimiento informal. Por ejemplo Dickson, Brown y Gibson (1984) y Bryant (1997) sugirieron que la experiencia con el "reparto" favorece la aparición del concepto de la división o en términos de Correa, Nunes y Bryant (1988), cuando los niños tienen un esquema de acción para realizar una distribución equitativa empiezan a comprender la división. Los niños de 4 y 5 años son capaces de repartir cantidades discontinuas usando el reparto *uno a uno*, pero normalmente no establecen ninguna conexión entre el reparto y la equivalencia cardinal. A partir de los 5 años comienzan a modificar su rutina de reparto para ajustarla a las diferencias en el tamaño de las unidades repartidas. Así, Frydman y Bryant (1988) mostraron que los niños de 5 años conocían el sentido de la correspondencia uno a uno en el reparto. En efecto, enfrentaron a los niños a una tarea consistente en repartir pastillas de chocolate en dos recipientes, pero

mientras que en uno colocaban pastillas sencillas, en el otro ponían pastillas dobles, de este modo cada vez que el niño repartía situaba dos sencillas en un recipiente y una doble en el otro. Los resultados mostraron que los niños de 5 años realizaban correctamente la tarea, pero los de 4 se limitaban a colocar una pastilla en cada recipiente sin tener en cuenta si era doble o sencilla. Los autores intentaron ir más lejos tratando de comprobar que sucedía con la correspondencia uno a uno en niños de 4 años. Para ello, llevaron a cabo un nuevo experimento en el que se introducía el color para enfatizar la situación (i.e., tabletas simples, unas azules y otras amarillas, tabletas dobles de dos colores, la mitad azul y la otra mitad amarilla). Los niños de 4 años ejecutaron con éxito la tarea, utilizando adecuadamente la correspondencia uno a uno. A continuación, se repitió el mismo experimento sin la variable color y en esta ocasión, fueron capaces de ejecutar bien la tarea. En otras palabras, aprendieron y extrapolaron la tarea de correspondencia uno a uno. De ahí, se puede concluir que las actividades de repartir no solo proporcionan a los más pequeños el significado de la correspondencia uno a uno, sino que constituyen el primer paso en la adquisición del concepto de dividir.

Sin embargo, no podemos limitar el concepto de dividir al reparto (Bryant, 1997; Correa, Nunes y Bryant, 1998). Comprender la división conlleva que los niños capten además la relación entre los tres elementos de la misma: el dividendo, el divisor y el cociente. Los niños pequeños no parecen haber desarrollado esta comprensión y así, cuando reparten, su objetivo radica en que todos los destinatarios tengan la misma cantidad.

4.2.1. Los modelos intuitivos de la multiplicación y división.

En el apartado anterior hemos tenido ocasión de comprobar que los niños son capaces de resolver problemas sencillos a pesar de no haber recibido instrucción formal. Algunos autores tratan de explicar estas habilidades basándose en la existencia de modelos implícitos sobre la multiplicación y la división. En efecto, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), consideran que cada operación aritmética está vinculada a un modelo intuitivo y la identificación de la operación necesaria para resolver un problema determinado está mediatizada por el modelo intuitivo correspondiente.

Los modelos intuitivos arraigan en la mente de los alumnos ejerciendo un control inconsciente sobre su conducta, incluso después de haber recibido instrucción formal sobre las nociones matemáticas. Esto da lugar a errores cuando tienen que resolver problemas elementales con datos numéricos que conducen a conflictos entre la operación correcta y las imposiciones del modelo correspondiente (Lago, Rodríguez, Zamora y Madroño, 1999).

De este modo, el modelo intuitivo asociado a la multiplicación es el de *sumas repetidas*, siendo el multiplicador el número de colecciones equivalentes y el multiplicando el tamaño de cada colección. Para que una situación se ajuste a este modelo tiene que cumplir los siguientes criterios: (a) el multiplicador ha de ser un entero y (b) el resultado siempre será mayor que el multiplicando, quedando implícita la idea de que la multiplicación siempre hace mayor. En los primeros años escolares esta concepción de la multiplicación se refuerza continuamente, ya que los niños sólo trabajan con números enteros.

En el caso de la división, Fischbein et al. (1985) propusieron dos modelos intuitivos: el *partitivo* y el de *medida*, siendo la estructura del problema la que determina qué modelo se activará. El modelo *partitivo* está asociado a la idea de que un objeto o colección de objetos se divide en subcolecciones o fragmentos iguales, siendo el dividendo el número de colecciones, el divisor el número de subcolecciones y el cociente el tamaño de cada colección. Este modelo genera tres reglas intuitivas: (a) el divisor tienen que ser un entero, (b) el divisor ha de ser más pequeño que el dividendo y (c) el cociente tiene que ser menor que el dividendo, lo que conlleva la idea de que la división siempre hace más pequeño.

El modelo de *medida* alude a cuántas veces una cantidad dada es contenida en otra mayor. La única regla que impone este modelo es que el divisor tiene que ser más pequeño que el dividendo. Si el cociente es un número entero, este modelo se representa como *sustracciones repetidas*. Además, difiere del modelo anterior en que el divisor puede ser un número no entero y el cociente mayor que el dividendo y en consecuencia, la división no siempre reduce.

Fischbein et al. (1985) indicaron que los niños inicialmente tienen un modelo *partitivo* y que solo después con la instrucción surge el de *medida*.

Kuoba (1989), partiendo de la misma hipótesis que Fischbein et al (1985), investigó los modelos implícitos evaluando a niños de entre 6 y 9 años en problemas con números enteros. Los datos mostraron que no era correcto definir el modelo intuitivo de la división de *medida* como *sustracción repetida*, puesto que los niños resolvían los problemas de medida de dos formas diferentes:

quitando repetidamente (forman un conjunto de elementos que representa el dividendo y quitan grupos equivalentes hasta agotar el dividendo) o por *acumulación repetida* (cuentan uno por uno los objetos al tiempo que forma los grupos, y dan la respuesta cuando el conteo total alcanza el dividendo p.e., en 9 dividido por 3, cuentan 1, 2 y 3 un grupo, 4, 5 y 6, dos grupos, 7, 8 y 9 tres grupos; la respuesta es tres).

Respecto al modelo intuitivo de *división partitiva*, sugirió tres modelos intuitivos diferentes: *repartir por reparto* (representan el dividendo con objetos y los reparten uno a uno hasta agotar el dividendo), *repartir quitando repetidamente* (representan el dividendo con objetos, estiman el número de elementos que compone cada conjunto y quitan, sucesivamente, los conjuntos equivalentes estimados hasta agotar el dividendo) y *repartir acumulando repetidamente* (estiman el número de elementos en un grupo y cuentan por múltiplos desde ese número hasta alcanzar el dividendo o sobrepasarlo).

Kouba indicó que, tanto en los problemas con estructura *partitiva* como en los de *medida*, los niños recurrían a *quitar repetidamente* y *acumular repetidamente*, lo que parecía indicar que percibían los dos tipos de división más relacionadas de lo que inicialmente parecía en las descripciones de Fischbein et al. (1985). Asimismo, si tenemos en cuenta que *acumular* y *quitar* son los modelos implícitos de la sustracción, ésta y la división aparecen vinculadas.

Por último, Kouba (1989) no halló una correspondencia directa entre la estructura semántica del problema y los métodos que empleaban los niños para resolverlos.

Investigaciones posteriores confirmaron las diferencias entre ambos tipos de división. Por ejemplo, Correa, Nunes y Bryant (1998) realizaron dos experimentos, uno con problemas de división partitiva y otro con problemas de división de medida. Las tareas fueron diseñadas para evaluar la comprensión conceptual de los niños de 5, 6 y 7 años sobre las variaciones en el tamaño del cociente cuando se modificaba el tamaño del divisor y se mantenía constante el dividendo.

En el primer experimento, mostraron a los niños dos conjuntos de conejos rosas y azules cada uno con una pequeña mochila. En algunas ocasiones, el número de conejos en ambos grupos era el mismo y en otras, había más conejos rosas que azules o viceversa. El experimentador repartía un número de caramelos equivalente para cada grupo de conejos (p.e., 12 ó 24) sin que el niño viese como lo hacía. A continuación, sí por ejemplo, había más conejos rosas que azules (p.e., 2 rosas y 4 azules) le preguntaban si unos tenían más caramelos que los otros.

La tarea resultó muy difícil para los niños de 5 y 6 años cuando el número de conejos era diferente en los dos grupos (i.e., se modificaba el divisor), mientras que los de 7 años respondieron mejor.

En el segundo experimento propusieron a niños de 5, 6 y 7 años problemas de división de medida. El material consistió en 24 bloques de plástico rojos y 24 azules que hacían las veces de caramelos, 6 conejos rosas, 6 azules y 6 dibujos, tres de ellos mostraban 2, 3 y 4 bloques rojos en un plato y los otros tres mostraban 2, 3 y 4 bloques azules en otro plato. Estos dibujos se utilizaron para ayudar a los niños a recordar el número de caramelos que el

experimentador quería poner sobre cada plato. El investigador le decía al niño que quería invitar a un picnic a los conejos rosas y a otro picnic a los conejos azules, pero que desconocía a cuántos podía invitar, mostrándole al mismo tiempo uno de los dibujos con la cantidad de caramelos que le gustaría dar a cada uno de los grupos de conejos (i.e., en tres ensayos el divisor era el mismo y en otros tres diferente). La entrevista concluía interrogando al niño acerca de si era posible invitar al mismo número de conejos azules y rosas.

La tarea resultó muy difícil, en los tres grupos de edad, cuando el divisor era diferente en los dos grupos.

Correa et al. (1998) concluyeron que la habilidad para comparar dos conjuntos, una vez efectuado el reparto, y comprender la relación inversa entre el divisor y el cociente surgía gradualmente entre los 5 y los 7 años, siendo tres las posibles explicaciones: las experiencias diarias de los niños con el reparto, los aprendizajes escolares de conceptos relacionados, el proceso mismo de maduración.

En otro orden de cosas, las diferencias entre la división de medida y la partitiva ponen de manifiesto la distinción psicológica entre ambos conceptos. Comprender la división de medida, según estos autores, supone la coordinación de las experiencias con la división partitiva y con la sustracción.

En la misma línea, Kornilaki y Nunes (1997) también estuvieron interesados en averiguar cómo influye el modelo del problema de división en la ejecución. Para ello, presentaron a niños de 5, 6, y 7 años problemas de medida y partitivos en las condiciones de divisor idéntico y divisor diferente, con cantidades continuas y discontinuas. Los autores no hallaron diferencias

dependiendo de las cantidades que estuvieran presentes, pero si en el tipo de división. En efecto, resultaron mas difíciles los problemas de división de medida que los partitivos. Este último dato lo explicaron aludiendo a que la división partitiva se encuentra más próxima a la experiencia de reparto de los niños.

Por su parte Bryant (1997) afirmó que resultaba más difícil la división de medida que la partitiva, ya que, en esta última, los niños podían representar el dividendo y el divisor, mientras que en la de medida tan sólo el dividendo. Por ejemplo, en el siguiente problema partitivo: *“María tiene 9 galletas, que quiere guardar en tres cajas. ¿Cuántas galletas tiene que guardar en cada caja para que quepan todas?”*, representaban las 9 galletas y las 3 cajas y procedían al reparto; en el de medida: *“María tiene 9 galletas que quiere guardar en cajas, si en cada caja coloca 3 galletas. ¿Cuántas cajas necesita para que quepan todas las galletas?”*, representaban el dividendo (i.e., el nueve), pero no las cajas porque desconocían el número. Conclusiones similares fueron halladas por Squire y Bryant (2002). En efecto, comprobaron que a los niños les resultaba relativamente más sencillo determinar el número de caramelos que correspondía a cada muñeco cuando en la situación de reparto el divisor determinaba el número de grupos y el cociente el tamaño de cada grupo (i.e., división partitiva), pero que esta situación se volvía compleja cuando el divisor establecía el número de objetos en cada grupo y el cociente era el número de grupos formados (i.e., división de medida).

Contrariamente a estas propuestas, Neuman (1999) sostuvo que el modelo natural a través del cual los niños pequeños se acercaban a la división era el de medida. Mejor dicho, según este autor, concebían la división en

términos partitivos, pero la resolvían como si se tratase de un problema de medida, de tal forma que extraían repetidas veces del dividendo la cantidad que representaba el divisor (i.e., cuántos grupos de 3 galletas puede haber en 12 galletas).

Volviendo al tema de los modelos implícitos, Mulligan y Mitchelmore (1997) intentaron determinar el tipo de estrategias de cálculo que utilizaban los niños cuando resolvían problemas de multiplicación y división, y su relación con estos modelos. El estudio fue longitudinal y se inició con niños de 2º de primaria (i.e., 7 a 8 años), que no habían recibido instrucción formal sobre la multiplicación y división.

Los resultados permitieron identificar tres modelos intuitivos de la multiplicación: conteo directo, adición repetida, y operación de multiplicar; y cuatro de la división: conteo directo, sustracción repetida, adición repetida y operación de multiplicar.

En el modelo de *conteo directo* los niños utilizaban la habilidad de contar para representar correctamente un problema y dar la respuesta.

En los de *adición y sustracción repetida* representaban grupos de tamaños iguales, es decir, secuencias de múltiplos.

En el de *operación* entendían la multiplicación como una operación binaria, cuyo resultado representaba el número final de la secuencia de múltiplos.

Los datos indicaron que existía una progresión en los modelos utilizados por los estudiantes de 2º y 3º, que iban desde el conteo directo pasando por la sustracción o adición repetida a las operaciones multiplicativas, así como en la

eficacia para resolver los problemas. No encontraron relación entre la estructura semántica de los problemas y los modelos intuitivos utilizados para resolverlos, ni que el modelo intuitivo más utilizado para la multiplicación fuese el de *adición repetida*.

Podríamos concluir este apartado afirmando que, a excepción de Fischbein et al (1985) quienes defendían que la estructura del problema determinaba el modelo intuitivo, otros autores no hallaron tal relación sino que el alumno ponía en marcha la estructura matemática que tuviera disponible. Asimismo, parece existir cierta unanimidad en que el modelo intuitivo partitivo de la división resulta más primitivo que el de medida.

4.3. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Las investigaciones sobre división y multiplicación guardan un cierto paralelismo con los trabajos sobre la adición y sustracción. Al igual que en éstos, se han propuesto clasificaciones de los problemas verbales, que según Nesher (1982) pueden agruparse en tres enfoques: el de los modelos psicológicos implícitos (Fischbein, 1985, 1987, 1989), el análisis conceptual de Schwartz (1988) y Vergnaud (1988, 1994) y el enfoque textual de Nesher (1988) y Kouba (1989). Por otro lado Greer (1992, 1994) sugirió una nueva clasificación de los problemas verbales de multiplicación y división, en la cual coordina dos dimensiones: el tipo de problema y la posibilidad de formular los diversos tipos de problemas verbales con cantidades que trasciendan los números enteros.

Asimismo, hay que destacar las propuestas de Bell, Greer, Griminson y Mangan (1989) y la más reciente de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epton (1999).

Desde el enfoque textual se afirma que la resolución de problemas comienza con el análisis del texto, a través del cual el sujeto descubre las relaciones lógicas y semánticas que le permitirán encontrar los datos relevantes. Afirma Nesher (1992) que los problemas de multiplicación y división comparten la misma estructura multiplicativa, la diferencia entre unos y otros reside en la información que se muestra y en la que se oculta. De este modo, la parte informativa presente en un problema de dividir se corresponde con la pregunta en un problema de multiplicar. Por tanto, las diferentes estructuras semánticas que surgen a la hora de plantear un problema de multiplicación son exactamente las mismas que en un problema de dividir.

A continuación, recogeremos las diferentes clasificaciones realizadas por los distintos autores, así como los puntos de convergencia entre unas y otras.

Clasificación de Bell, Greer, Griminson y Mangan.

Bell, Greer, Griminson y Mangan (1989) mantienen que los problemas verbales de multiplicación describen dos tipos de situaciones: *simétricas* y *asimétricas*.

En las situaciones *simétricas*, los papeles del multiplicador y el multiplicando se pueden intercambiar (p.e., problemas en los que se pregunta por el área de una figura geométrica: ancho x alto). En las *asimétricas*, el multiplicador y el multiplicando tienen asignados papeles distintos y se diferencian en las situaciones descritas en el texto del problema (p.e., 4 platos

con 3 galletas cada uno: la estructura es de 4 repeticiones de un conjunto de 3 elementos, o lo que es lo mismo $3+3+3+3$; esta estructura resulta diferente si tenemos 3 platos con 4 galletas cada uno).

Teniendo en cuenta esto, Bell et al. (1984, 1989) establecen los siguientes tipos: *grupos múltiples, medidas repetidas, porcentajes en diferentes contextos (i.e., precio, velocidad, conversión de moneda), cambio de tamaño con las mismas unidades, cambio de tamaño con unidades diferentes, mezcla con unidades iguales y mezcla con unidades diferentes*. En la Tabla 3 recogemos un ejemplo de cada uno de ellos.

Tabla 3: ejemplos de las situaciones asimétricas recogidas por Bell et al.(1989).

Estructura	Multiplicación
GRUPOS MÚLTIPLES	Hay 3 platos y en cada plato hay 4 galletas. ¿Cuántas galletas hay en total?.
MEDIDAS REPETIDAS	Un niño necesita 3 botes de pintura para pintar 4 m de pared. Si tiene que pintar 8 metros. ¿Cuántos botes de pintura necesita comprar?
PORCENTAJE	Un coche recorre por término medio 20 km en una hora. ¿cuánto habrá recorrido en 3 horas?
PORCENTAJE PRECIO	María compró 1 paquete de galletas a 2 euros el paquete. Si quiere comprar 6 paquetes. ¿Cuánto dinero necesita?
PORCENTAJE VELOCIDAD	Un caballo de carreras se mueve a la velocidad de 15 km por hora. ¿Cuánta distancia recorrerá el caballo viajando durante 3 horas?
PORCENTAJE CONVERSIÓN MONEDAS	Si un hombre quiere comprar un regalo que vale 400 pesetas. ¿Cuántas euros necesita? (1 euro son 166,386 pesetas)
CAMBIO DE TAMAÑO (mismas unidades)	Se realiza una fotocopia ampliándola en 4 cm por 1 cm. Si el valor inicial era de 3 cm. ¿Cuánto ha aumentado la fotocopia?
CAMBIO DE TAMAÑO (unidades diferentes)	Un mapa se ha realizado a escala 2 metros a un cm. Si el modelo tiene de largo 5 cm. ¿Cuál es el largo real del mapa?
MEZCLA (mismas unidades)	Un pintor mezcla para hacer un color a partes iguales 3 kg tanto de azul como de amarillo. ¿Cuánto azul debería utilizar con 1.2 kg de amarillo?
MEZCLA (unidades diferentes)	1 litro de disolvente se mezcla con 2 kg de pintura. ¿Cuántos litros de disolvente se necesitan para mezclar 4 kg de pintura?

Las dos primeras estructuras se caracterizan por la presencia de un número entero y/o una cantidad continua, mientras que en las estructuras restantes se produce una correspondencia entre dos cantidades continuas. Los problemas de porcentajes se presentan en contextos diferentes. En los de cambio de tamaño la correspondencia tiene lugar entre medidas, que pueden o no estar en diferentes unidades (i.e., los problemas de escala representan un ejemplo de unidades diferentes). En los de mezcla las dos cantidades componentes, de la misma o diferente unidad, se unen físicamente. Además, en las estructuras de grupos iguales y medidas repetidas, el multiplicador es por definición el número de repeticiones, mientras que en las estructuras restantes el multiplicador desempeña un papel análogo al multiplicando, no diferenciándose claramente uno de otro.

Por último, en las situaciones simétricas, cada una de estas categorías de problemas, puede adoptar dos modalidades en la división: la *partitiva* o división por el "multiplicador" y la *de medida* o división por el "multiplicando".

Clasificación de Vergnaud

Vergnaud (1983, 1988) identificó tres clases de problemas dentro de las "estructuras multiplicativas": *Isomorfismo de medidas* (p.e., "María tiene 3 cajas con galletas, en cada caja hay 4 galletas. ¿Cuántas galletas hay en total?"), *producto de medidas* (por ejemplo: "María tiene 3 chaquetas y 2 faldas. ¿Cuántos conjuntos distintos puede formar?") y *proporción múltiple* (p.e., "si un oso come 10 peces al día. ¿Cuántos peces comerán dos osos en tres días?").

Los problemas de *Isomorfismo de medidas* plantean situaciones en las que hay una proporción directa entre dos espacios de medida: M1 (cajas de galletas) y M2 (galletas). Son problemas con dos dimensiones básicas que incluyen dos números o cantidades (i.e., enteros, fracciones o decimales) e incorporan, además, el 1 como base para la razón. La representación de esta relación de proporcionalidad quedaría así:

$$\begin{array}{r}
 \text{M1=cajas} \quad \text{M2=galletas} \\
 1 \dots\dots\dots 4 \\
 3 \dots\dots\dots ?
 \end{array}$$

Por tanto, se trata de una relación entre cuatro elementos en la que caben dos representaciones diferentes:

- 1) un operador escalar dentro de cada dimensión que aumenta o disminuye (entre 1 y 3 ó 4 y ¿?)
- 2) un operador función entre las dimensiones M1 y M2, que mantiene una razón constante (entre 1 y 4 y 3 y ¿?, respectivamente).

De la misma manera Vergnaud diferencia dos tipos de problemas de división: partitivo y de medida.

Los problemas de *Producto de medidas* consisten en una composición cartesiana entre dos espacios de medida (M1 y M2) dentro de un tercero (M3). Por ejemplo: "*María tiene 3 chaquetas y 2 faldas. ¿Cuántos conjuntos distintos puede formar?*", en este caso M1=3 chaquetas, M2= 2 faldas, M3=conjuntos distintos que puede formar. Aquí se incluyen 3 cantidades, pero dos de ellas (M1 y M2) están contenidas en una tercera (M3). La diferencia entre estos problemas

y los de *Isomorfismo de medidas* reside en que en estos últimos hay una proporción simple, mientras que en los de *Productos de medida* el alumno ha de manejar proporciones dobles. Además, en éstos el multiplicando y el multiplicador desempeñan el mismo papel dentro del problema, por tanto estamos ante una multiplicación que se considera simétrica. Esta simetría es la que justifica que tan sólo se pueda formular un único tipo de problema de división: "*María tiene 6 conjuntos de chaqueta y falda diferentes, si tiene 3 chaquetas. ¿Cuántas faldas diferentes tiene?*"

Finalmente, los problemas de *Proporción múltiple* se caracterizan por una medida (M3) que es proporcional a dos medidas diferentes independientes (M1 y M2). En el problema "si un oso come 10 peces al día. ¿Cuántos peces comerán dos osos en tres días?", en este caso M3 representa al número de peces por oso y día, M1 el número de peces por oso y M2 el número de peces por día.

Además, estos problemas incluyen cantidades que tienen significados intrínsecos, ya que ninguna de ellas puede ser reducida al producto de las otras dos.

Clasificación de Schwartz

Schwartz (1988) propuso un análisis dimensional basado en la distinción entre los tipos de cantidades implicados en cada operación: *cantidades intensivas* y *cantidades extensivas*. Por ejemplo, en el problema "*María tiene 3 cajas con galletas, en cada caja hay 4 galletas. ¿Cuántas galletas hay en total?*", el número 3 representa una cantidad discreta que se refiere al número de cajas de galletas y la unidad de medida corresponde a una cantidad extensiva, mientras que el

número 4 guarda relación no solo con el número de galletas, sino también con el número de galletas que hay en cada caja, es decir, hace referencia a la intensidad con que una magnitud está presente en otra y se expresa como una razón entre dos magnitudes. Partiendo de esta idea, Schwartz hace una doble distinción: *Problemas con estructura $I \times E = E'$* , *Problemas con estructura $E \times E = E'$* , *Problemas con estructura $I \times I = I$* .

1. *Problemas con estructura $I \times E = E'$*

Son los problemas de multiplicación en los que hay una cantidad intensiva (I) para representar el multiplicando y una cantidad extensiva (E) para el multiplicador. Cuando el multiplicador es un número entero se concibe la multiplicación como una adición repetida o problema de isomorfismo de medidas en términos de Vergnaud (1983, 1988), ya que la cantidad intensiva corresponde al operador función entre las dos cantidades. Del mismo modo, la división adopta dos formatos: partitivo (i.e., cuando la incógnita está en la cantidad intensiva y responde a la fórmula $? \times E = E'$) y de medida (i.e., cuando la incógnita está en la cantidad extensiva, en otras palabras, responde a la fórmula $I \times ? = E'$)

Ahora bien, en otras ocasiones la cantidad intensiva representa al cuantificador, de manera que los papeles del multiplicador y del multiplicando se intercambian, es decir, la cantidad extensiva se convierte en multiplicando y la intensiva en multiplicador (p.e., "*María tiene 4 galletas. Ana tiene 2 veces más galletas que María. ¿Cuántas galletas tiene Ana?*"). Estos problemas se conocen con el nombre de comparación y en la división, pueden formularse en términos partitivos (p.e.: "*María tiene algunas galletas. Ana tiene 8 galletas, ella tiene dos*

veces más galletas que María. ¿Cuántas galletas tiene María?") o de medida (p.e., "María tiene 4 galletas, Ana tiene 8 galletas. ¿Cuántas veces más tiene Ana las galletas de María?").

2. Problemas con estructura $E \times E = E$

Bajo esta nomenclatura se incluyen los problemas de multiplicación cartesiana (i.e., productos de medidas según Vergnaud), siendo las dos cantidades que se multiplican cantidades extensivas (E_1 y E_2) que dan lugar a una tercera cantidad (E_3). Ejemplo de esta categoría son los problemas en los que hay que obtener el área de un rectángulo, o aquellos en los que se combinan dos conjuntos diferentes para dar lugar a un tercero (p.e., "Un rectángulo mide 8 cm de largo y 2 cm de alto, hallar el área de dicho rectángulo" ó "María tiene 3 chaquetas y 2 falda. ¿Cuántos conjuntos distintos puede formar?").

3. Problemas con estructura $I \times I = I$

En estos problemas dos cantidades intensivas son multiplicadas para dar como resultado una tercera cantidad intensiva (p.e., "Un grifo echa 20 litros de agua a la hora, si funciona durante 4 horas al día. ¿Cuántos litros habrá echado en un día?").

El problema de división correspondiente a esta estructura multiplicativa se resolvería con la operación $I \div I$. Por ejemplo: "Un grifo echa a lo largo del día 80 litros, si echa a razón de 20 litros a la hora. ¿Cuántas horas habrá tardado en echar los 80 litros?."

Clasificación de Nesher

Nesher (1992) realizó un análisis textual de los problemas y señaló que es la formulación verbal la que va a permitir descubrir a los niños las condiciones lógicas y las relaciones semánticas, que se establecen en un problema multiplicativo bien estructurado.

Diferenció tres tipos de problemas multiplicativos (Nesher, 1988, 1992; Nesher y Katriel, 1977, 1978):

(1) *Problemas que describen una regla de correspondencia:*

Por ejemplo: *“María tiene 3 cajas con galletas, en cada caja hay 4 galletas. ¿Cuántas galletas hay en total?”*. En este problema se distinguen tres proposiciones. La primera informa sobre el número de veces en que ocurre la repetición. En otras palabras, existe un Xs (i.e., *cajas*) para los cuales hay Ys (i.e., *galletas*) y una relación entre ambos (i.e., entre las *cajas* y las *galletas*). La segunda presenta una regla de correspondencia general y una relación funcional que constituye la cantidad intensiva. Esto es, incluye una descripción de una cantidad repetida en forma de regla (i.e., 4 galletas en cada caja) y conecta las dos dimensiones que constituirán la cantidad intensiva de la pregunta. El número que aparece en esta proposición, el multiplicando, es el que se repite. La tercera proposición corresponde a la pregunta, que se refiere al total de una dimensión considerando todas las repeticiones.

(2) *Problemas de comparación multiplicativa:*

Los problemas de comparación multiplicativa representan una cantidad en función de otra e incluyen dos tipos de cantidades: la *referente* y la *comparada*.

Siguiendo el ejemplo: *“María tiene 4 galletas. Ana tiene 2 veces más galletas que María. ¿Cuántas galletas tiene Ana?”*, podemos observar que consta de tres proposiciones. La primera afirma que hay un conjunto de referencia que contiene un determinado número de elementos Ys (i.e., *“María tiene 4 galletas”*), la segunda mantiene que hay una regla específica para cada elemento del conjunto de referencia Ys con respecto al conjunto de comparación Xs (i.e., por cada galleta de María, Ana tiene 2 galletas) y, la tercera, plantea la pregunta acerca del número de elementos que hay en el conjunto de comparación Xs (i.e., *“¿Cuántas galletas tiene Ana?”*).

En general, estos problemas se definen mediante una función escalar entre el número de objetos en el conjunto referente y los del conjunto comparado. La dirección en la que se establece la relación no es intercambiable, puesto que los papeles del conjunto referente y el conjunto comparado no son simétricos. No obstante, los objetos que se van a comparar no tienen que pertenecer necesariamente a la misma clase (p.e., las galletas de María con las muñecas de Ana).

Finalmente, los problemas de comparación pueden adoptar dos formas diferentes en la división: *partitivos* (i.e., son aquellos que muestran el conjunto de comparación y la función escalar y se pregunta por el conjunto de referencia) y *de medida* (i.e., presentan el conjunto de referencia y el de comparación y se pregunta por la función escalar).

(3) Problemas de multiplicación cartesiana:

Este tipo de problemas implica la presencia de dos dimensiones diferentes, que se combinan para dar lugar a una tercera cantidad también distinta. Presentan tres proposiciones: las dos primeras describen los dos conjuntos independientes de objetos y en la tercera se propone la pregunta, acerca de cuántos conjuntos distintos se pueden obtener del producto cruzado de cada uno de los conjuntos independientes anteriormente descritos.

Estos problemas son simétricos y, por tanto, sólo admiten una única formulación en términos de división.

Clasificación de Kouba

Kouba (1989), en la misma línea que Nesher, señaló que los factores semánticos tienen un efecto significativo en la interpretación que realizan los niños de los distintos problemas. La autora identificó dos factores principales: la cantidad desconocida y la naturaleza de las cantidades. A su vez, la cantidad desconocida, da lugar a tres categorías de problemas:

- multiplicación: la cantidad desconocida es el producto
- división partitiva: la cantidad desconocida es el número de elementos de cada conjunto
- división de medida: la cantidad desconocida es el número de conjuntos.

En cuanto la naturaleza de las cantidades, las situaciones más importantes que implican la multiplicación y la división de enteros incluye:

problemas de conjuntos equivalentes o grupos iguales, problemas escalares o comparación multiplicativa y problemas de producto cartesiano.

Clasificación de Greer

Como en las clasificaciones anteriores, Greer (1992) consideró que los factores semánticos son esenciales y por ese motivo su clasificación coincide con las ya descritas. No obstante, existen algunas divergencias en los tipos de problemas que identificó en el factor *naturaleza de las cantidades*. En efecto, consideró una cuarta categoría: los *problemas de área rectangular*. La resolución de estos problemas era similar a los de producto cartesiano y como en éstos, los multiplicandos desempeñan papeles equivalentes.

Greer amplió su clasificación a los números decimales y las fracciones, pero no nos detendremos en ella, puesto que estas cantidades se encuentran fuera de los objetivos de nuestra investigación.

Clasificación de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epon

Una de las clasificaciones más recientes corresponde a Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epon (1999), que consideraron los siguientes tipos de problemas:

(1) *Problemas de agrupamiento y partición*: dentro de este grupo se encuentran aquellos problemas de multiplicación y división que pueden ser agrupados o partidos en grupos equivalentes.

(2) *Problemas simétricos (problemas de área, tablas y de combinación)*:

- Los *problemas de área* equivalen a los de *área rectangular* de Greer.

- Los *problemas de tablas*, tan sólo, se diferencian de los anteriores en que éstos pueden incluir objetos discretos (p.e., filas de sillas). Concretamente están formados por un número de filas con el mismo número de elementos en cada fila. Por ejemplo: "En la clase de segundo curso se han puesto cuatro filas de sillas con 4 sillas en cada fila. ¿Cuántas sillas se han colocado en la clase?".

- Los *Problemas de combinación* se corresponden con los de *producto de medida* de Vergnaud, los de *producto cartesiano* de Kouba y Nesher, los de *estructura $E \times E$* de Schwartz y los de *estructura de combinación* de Schmidt y Weiser.

(3) *Problemas no simétricos (problemas de razón, precio y multiplicación comparativa)*:

- *Problemas de razón y precio* son los problemas de *Estructura $|x| = |y|$* de Schwartz, y los de *proporción múltiple* de Vergnaud.

Los problemas de *razón* no tienen necesariamente que incluir un grupo de objetos contables (p.e., "Un grifo echa 20 litros de agua a la hora, si funciona durante 4 horas al día. ¿Cuántos litros habrá echado en un día?"). Estos problemas pueden ser resueltos de igual manera que los de agrupamiento y partición. Es decir, los niños pueden calcular cuántos litros de agua echa el grifo en un día, en dos días y así sucesivamente haciendo cuatro grupos de 20 litros en cada uno.

Los Problemas de *precio*, son *problemas de razón* en los que la razón es el precio por ítem (p.e., "María compró 1 paquete de galletas a 2 euros el paquete. Si quiere comprar 6 paquetes. ¿Cuánto dinero necesita?")

- *Problemas de multiplicación comparativa*: guardan semejanza con los problemas de *comparación multiplicativa* de Nesher, Kuoba y Greer.

A lo largo de estas páginas hemos presentado diversas clasificaciones, pero las semejanzas entre unas y otras resultan evidentes. Por este motivo, hemos elaborado una tabla final en la que hemos plasmado estas similitudes (Tabla 4).

Tabla 4: Resumen de las clasificaciones de los problemas verbales de multiplicación y división.

Bell et al. (1989)	Vergnaud (1983, 1988)	Schwartz (1988)	Nesher (1992)	Kuoba (1989)	Greer (1992)	Carpenter et al. (1999)
1. Multiplicación asimétrica: a. grupos múltiples. b. Medidas repetidas. c. Porcentajes. d. Cambio tamaño. e. Mezcla.	1. Isomorfismo de medida.	1. Problemas con estructura $I \times E = E'$.	1. Problemas que describen una regla de correspondencia. 2. Problemas de comparación multiplicativa.	1. Problemas con conjuntos equivalentes. 2. Problemas escalares o comparación multiplicativa.	1. Problemas de agrupamiento y partición. 2. Problemas de multiplicación comparativa.	3. Problemas de producto cartesiano. 4. Problemas de área rectangular.
2. Multiplicación simétrica: a. problemas de área. b. problemas de combinación.	2. Producto de medida. 3. Proporción múltiple.	2. Problemas con estructura $E \times E$. 3. Problemas con estructura $I \times I = I'$.	3. Problemas de multiplicación cartesiana.	3. Problemas producto cartesiano.	3. Problemas producto cartesiano. 4. Problemas de área rectangular.	3. Problemas simétricos. 4. Problemas no simétricos.

En la parte empírica del trabajo, teniendo en cuenta que nuestro objetivo consistía en examinar las competencias de los niños de Educación Infantil en las cuatro operaciones básicas de cálculo, hemos intentado mantener un criterio único a la hora de plantear las tareas. Por ello, hemos recurrido al factor estructura semántica en un intento de hacer corresponder los problemas con estructuras de multiplicación y división con los de adición y sustracción. En nuestra investigación, clasificaremos los problemas verbales en dos grandes grupos, dependiendo de que impliquen *acción* o *no acción*, obteniendo las siguientes equivalencias:

<i>Acción</i>	<i>No Acción</i>
Adición cambio	Adición comparación
Sustracción cambio	Sustracción comparación
Multiplicación sumas repetidas	Multiplicación comparación
División de medida restas repetidas	División de medida comparación
División partitiva restas repetidas	División partitiva de comparación

Quedan al margen los problemas de combinación, igualación de adición y sustracción por no tener una estructura similar en los problemas de multiplicación y división y de igual modo, descartamos los problemas de producto cartesiano al adoptar tan sólo la estructura multiplicativa. La necesidad de plantear estructuras semánticas equivalentes para las cuatro operaciones se debe a que, como veremos, uno de nuestros objetivos consiste en averiguar la

dificultad inicial de cada una de estas operaciones cuando los niños no han recibido instrucción formal en ninguna de ellas.

4.4. SECUENCIACIÓN DE LOS PROBLEMAS VERBALES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

En este apartado recogeremos los distintos niveles de dificultad de los problemas de multiplicación y división. A pesar de las similitudes con los problemas verbales de adición y sustracción, los estudios sobre multiplicación y división, como señalaron Lago y Rodríguez (1999), no constituyen una copia exacta de éstos. La razón es que en la adición y la sustracción la estructura semántica se ha considerado un factor esencial, mientras que en el ámbito de la multiplicación y la división se ha explicado su dificultad acudiendo a la naturaleza de las cantidades. Brevemente señalaremos algunos de estos datos, ya que gran parte de las investigaciones se han centrado en los números racionales. Así, Bell, Swan y Taylor (1981) demostraron que un problema verbal con el mismo contenido, pero diferentes datos numéricos, daba lugar a que niños de entre 12 y 15 años eligiesen una operación diferente dependiendo del tipo de cantidad implicada. Por ejemplo, en el siguiente problema "*Encuentra el precio de 0.22 galones de petróleo, si un galón cuesta 1.20 libras*", la respuesta más frecuente entre los estudiantes era la división. Sin embargo, cuando se enfrentaban a la misma situación con números naturales: "*Encuentra el precio de 5 galones de petróleo, si un galón cuesta 2 libras*", la respuesta mayoritaria fue la multiplicación. Los autores explicaron estos resultados aludiendo a que los

alumnos pensaban que el precio de 0.22 tenía que ser inferior al de 1 galón y por ello, resolvían el problema dividiendo, actuando de acuerdo con la idea intuitiva errónea de que esta operación "hace menor" (la división produce un número menor que el dividendo).

En esta misma línea, cuando el multiplicando era un decimal, las dificultades no eran mayores que si era un número natural. Sin embargo, si el decimal era el multiplicador la dificultad crecía, ya que a los niños les resultaba difícil imaginar un número multiplicado tantas veces como indicaba el decimal (i.e., modelo intuitivo de sumas repetidas). En concreto, De corte, Verschaffel y Van Collie (1988) realizaron un estudio con 116 niños de 12 años, la tarea consistió en problemas verbales de multiplicación en los que se variaba la naturaleza de la cantidad en el multiplicando y en el multiplicador (entero positivo, decimal mayor que uno y decimal menor que uno). Los resultados fueron los siguientes: a) cuando el multiplicador era un número decimal mayor que uno se quebrantaba la regla de "adición repetida" (i.e., el multiplicador debe ser un número entero) y en consecuencia, el número de operaciones erróneas era mayor que cuando el multiplicador era un número entero; b) cuando el multiplicador era inferior a uno se violaba tanto la regla de la adición repetida como la de que el resultado debe ser mayor que el multiplicando, siendo muy alta la tasa de errores; c) la naturaleza de los números que aparecían en el multiplicando no producía diferencias significativas en la ejecución.

En cuanto a la división, Fischbein et al. (1985) señalaron que las cantidades que se utilizaban en los problemas determinaban el nivel de dificultad de los mismos. De esta forma, cuando el divisor era un número decimal los

problemas de dividir resultaban más difíciles (i.e., tan sólo el 22% niños de 10-11 años, daban respuestas correctas, el 25% de los de 12-13 años y el 40% de los alumnos de 14-15) que cuando el divisor era un número entero (i.e., 89%, 93% y 99%, respectivamente). El error más frecuente que cometían los niños consistía en cambiar la operación de dividir por la de multiplicar. Cuando el divisor era mayor que el dividendo la dificultad aún era mayor (i.e., 20%, 24% y 41%), siendo el error más frecuente la inversión de los datos numéricos (i.e., dividir el número mayor por el número menor).

Como acabamos de ver, uno de los obstáculos principales con el que se encuentran los alumnos cuando resuelven problemas verbales de multiplicación y división tiene que ver con la elección de la operación adecuada, de este modo resuelven problemas de división como si fueran de multiplicación y viceversa. Además, en el estudio realizado recientemente por Dopico (2001) con niños de 3º, 4º y 5º de Educación Primaria, se indicaba que era la estructura semántica de los problemas la que influía en el nivel de éxito. En esta misma línea, otros estudios encontraron que los problemas de grupos iguales resultaban más sencillos que los de comparación (p.e., Bell et al., 1984, 1989; De Corte y Verschaffel, 1996; Fischbein et al., 1985; Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Kouba y Franklin, 1993; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Nesher, 1992; Tirosh y Graeber, 1990).

Parece que las estructuras que implican acción, como los problemas de grupos iguales de división, son más sencillos que los problemas que presentan una relación estática como, por ejemplo, los de comparación (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1996;

Dopico, 2001). En otras palabras, en los problemas de grupos iguales los niños podían interpretar la relación dinámica entre los conjuntos y comprender más fácilmente el papel desempeñado por las dos cantidades del enunciado sin tener que realizar una elaboración profunda, mientras que en los de comparación de división se enfrentaban a una relación asimétrica compleja del tipo: "A tiene n veces lo que tiene B" (Dopico, 2001). De este modo, el modelo matemático de las situaciones de grupos iguales imponía menos demandas cognitivas y no requería una comprensión tan profunda como el de las situaciones de comparación.

Volviendo al estudio de Dopico (2001) no halló diferencias significativas cuando consideraba únicamente el factor modelo (partitivo / medida), pero sí cuando tenía en cuenta además la estructura semántica del problema. Así, los niños de 3º y 5º resolvían ligeramente mejor la división de medida que la partitiva, tanto con las estructuras de grupos iguales, como con las de comparación. A la hora de explicar estos datos acudía a dos interpretaciones no excluyentes: el lugar donde aparece la palabra clave y la transformación de la sentencia de comparación en una de asignación. Respecto a la primera, los niños parecían emplear una "estrategia" de palabra clave, que daba lugar a una determinada operación aritmética. De este modo, en los problemas de comparación de medida la palabra *clave* "veces" se sitúa en la pregunta, mientras que en los de comparación partitiva la palabra clave se encuentra en alguna otra de las proposiciones del enunciado. Con respecto a la segunda justificación, los datos señalaban que los niños tenían dificultades para

interpretar el significado de una sentencia relacional traduciéndola, en consecuencia, en una de asignación.

En la multiplicación se han encontrado datos similares a la división, los problemas multiplicativos de grupos iguales son los más sencillos, frente a los comparativos o de producto cartesiano (p.e., Bell, Greer, Griminson y Mangan, 1989; De Corte y Verschaffel, 1996; Lago et al., 1999). A la hora de explicar este orden de dificultad hemos de acudir a Nesher (1988) quien señaló que: *"la primera ojeada que los niños realizan del problema verbal les muestra un texto consistente, en un lenguaje natural y con algún dato numérico. Está claro que el dato numérico no ofrece ninguna información con respecto al tipo de operación que se tiene que ejecutar, al contrario, toda la información decisiva se encuentra en la formulación verbal del texto"* (p.24). En otras palabras, lo que determina la elección de una u otra operación en un problema verbal no son las cantidades, sino fundamentalmente el texto. De ahí que, la dificultad de los problemas se pueda predecir a partir de su estructura proposicional. Teniendo en cuenta esto, los problemas de *grupos iguales* son los más sencillos, ya que los niños pueden comprender el papel desempeñado por cada una de las cantidades dadas directamente, sin tener que llevar a cabo una elaboración profunda del texto. La estructura presente en estos problemas puede verse como un procedimiento dinámico en el cual n_2 se repite n_1 veces (p.e., 4 galletas en 5 cajas), convirtiéndose en un proceso de suma repetida (Nesher, 1992). Además, según esta misma autora, los más pequeños aprenden la multiplicación como una suma repetida, de este modo el problema se convierte en una operación unitaria en vez de una operación binaria con dos predicados n_1 y n_2 .

Los *problemas de comparación* son más difíciles, porque los alumnos han de comprender la relación asimétrica entre la cantidad comparada y la cantidad de referencia. Esta relación sólo se menciona sutilmente en la estructura de la segunda condición (i.e., "a" tiene n veces lo que tiene "b").

Los *problemas de producto cartesiano* son los más complejos de resolver. Implican la consideración de un hecho que no aparece explícitamente en el texto del problema, pero que ha de ser tenido en cuenta para resolverlo con éxito, esto es, "cada A tiene que ser multiplicado de forma cruzada con cada B". La estructura inherente a estos problemas puede conducir a los niños a interpretarlos como problemas de adición, dada la ausencia de indicios claros que los vincule con la multiplicación.

4.5. ESTRATEGIAS Y ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Para obtener una visión completa del conocimiento que tienen los niños sobre los problemas de multiplicación y división es necesario prestar atención a *cómo* los resuelven. A este respecto, Wright, Mulligan y Gould (2000) distinguieron cinco niveles evolutivos en el conocimiento temprano de los niños sobre la multiplicación y división, vinculados a estrategias que procedían de la reorganización cognitiva del conteo y de las estrategias de adición y sustracción. En lo que sigue describiremos estos 5 niveles:

Nivel 1: "agrupamiento inicial": los niños son capaces de establecer la cantidad numérica de una colección, así como establecer grupos iguales si los ítems son visibles y pueden realizar el conteo uno a uno de cada uno de ellos.

Nivel 2 "conteo perceptual por múltiplos": las estrategias de conteo correspondientes a este nivel conllevan, implícita o explícitamente, el conteo por múltiplos. Puede ser de tres tipos:

- a) *Conteo rítmico:* cuentan todos los ítems contenidos en cada uno de los grupos, enfatizando el último "numeral" de cada grupo (p.e., si tienen que contar 3 grupos con 4 elementos cada uno, enfatizaran el "cuatro" el "ocho" y el "doce")
- b) *Doble conteo:* cuentan todos los ítems que hay dentro de un grupo y al mismo tiempo cuentan el número de grupos (p.e., en el problema anterior cuentan: 1,2, 3, 4 (1) 5,6,7,8 (2) 9,10, 11, 12 (3)).
- c) *Conteo a saltos:* el conteo se realiza utilizando múltiplos de un mismo factor (p.e., de 2 en 2, de 3 en 3, etc.)

Nivel 3 "composición figurativa de grupos": los niños son capaces de contar el número de ítems, no visibles, de los diferentes grupos.

Nivel 4 "repetición abstracta de la composición de un grupo": los niños construyen una estructura conceptual de etiquetado (i.e., una unidad de composición abstracta), que les permite ser conscientes de la composición del número y de su carácter unitario. De ahí que puedan utilizar sumas o restas repetidas para resolver problemas de multiplicación o de división, siendo conocedores de que si hay 6 grupos de 3 elementos, por ejemplo, cada grupo de 3 forma una unidad y al mismo tiempo comprende 3 elementos.

Nivel 5 "multiplicación y división como operación": en este nivel se sitúan las operaciones de multiplicación y división propiamente dichas. Los alumnos son capaces de coordinar dos composiciones de unidades en el contexto de la multiplicación o de la división. Por ejemplo, si tenemos seis grupos de tres elementos cada uno, saben que tanto el 6 como el 3 son unidades de composición abstracta. Además, en este nivel tendrán acceso a la propiedad conmutativa y el principio de relación inversa entre la multiplicación y la división.

Otros autores consideraron el grado de *abstracción* de los procedimientos, agrupándolos en cinco categorías: representación directa o recuento unitario, doble recuento, recuento transaccional, aditivas o sustractivas y hechos numéricos recordados (p.e., Anghileri, 1989; Kouba, 1989; Mulligan, 1992). Estas categorías hallan cierta correspondencia con los niveles de Wright et al. (2000). Así, por ejemplo, la representación directa o recuento unitario se ubicaría en el *nivel 1*, mientras que las estrategias de adición y sustracción podríamos situarlas en el *nivel 4*. A continuación, examinaremos estos procedimientos con cierto detalle.

4.5.1. Estrategias de representación directa o recuento unitario

Reciben este nombre todas aquellas estrategias que se apoyan en la utilización de objetos físicos para representar las relaciones descritas en el enunciado del problema. Veamos algunos ejemplos.

"María compró 4 cajas de galletas. Había 3 galletas en cada caja, ¿cuántas galletas compró María?".

Para resolverlo, los niños pequeños hacen grupos de 3 elementos, de uno en uno, hasta llegar a tener 4 grupos de 3 elementos cada uno, posteriormente cuentan todos los objetos utilizados y dan la respuesta "12".

"María tiene 12 galletas, si quiere colocar 3 galletas en cada plato.

¿Cuántos platos necesita para colocar todas las galletas?".

En este problema de división de medida encontramos dos variantes de la estrategia de representación directa, dependiendo de si el número total es contado al principio o al final. En la primera, los niños cuentan el total de objetos 12 y los reparten en grupos de 3 objetos cada uno, contando finalmente el número de grupos. En la segunda, los niños van tomando, sucesivamente, objetos para hacer grupos de 3 elementos cada uno. Cuando han hecho 3 grupos, por ejemplo, cuentan las "galletas" que tienen, (i.e., 9) y cogen nuevamente otro grupo de 3 elementos contando el total (12). Por último, proceden a contar el número de grupos para dar la respuesta final.

"María tiene 12 galletas, guarda todas las galletas en 4 cajas, poniendo en cada caja el mismo número de galletas. ¿Cuántas galletas hay en cada caja?".

Para resolver este problema de división partitiva los niños pequeños pueden proceder de dos formas: bien contando las 12 galletas y repartiéndolas de una en una para formar 4 montones de 3 elementos cada uno, bien tomando el conjunto inicial de 12 galletas y repartiéndolo, por ejemplo de 2 en 2, añadiendo, una más a cada grupo de las sobrantes. No obstante, algunos niños no cuentan inicialmente el total de elementos, sino que comienzan el reparto al

tiempo que cuentan 1, 2, 3, 4, añaden más elementos en otro lugar separado y cuentan 5, 6, 7, 8 y así sucesivamente hasta llegar a 12.

Dentro de estas estrategias están aquellas que aunque existe la representación con objetos físicos se apoyan en adiciones y restas repetidas para dar solución al problema. Por ejemplo, en la multiplicación (4×3) los niños llevan a cabo la representación de: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

En la división de medida, si recurren a la adición repetida añaden reiteradamente el divisor hasta llegar al dividendo. Si echan mano de la sustracción repetida comienzan con el dividendo y utilizan un procedimiento de cálculo en el que quitan reiteradamente el divisor. Veamos un ejemplo.

"María tiene 12 galletas, si quiere colocar 3 galletas en cada plato, ¿cuántos platos necesita para colocar todas las galletas?".

En este caso, los niños lo pueden resolver haciendo grupos de 3 en 3 al hasta llegar al dividendo (12), para finalizar contando el número de grupos de 3 elementos.

En la estrategia de sustracción comenzará con la representación de 12 y quitarán múltiplos de 3 hasta llegar a 3, es decir, 12, 9, 6, 3. Finalmente, contarán el número de veces que se ha quitado 3 a 12.

" María tiene 12 galletas, guarda todas las galletas en 4 cajas, poniendo el mismo número de galletas en cada caja. ¿Cuántas galletas hay en cada caja?".

En este problema de división partitiva, los niños efectuarán sumas de grupos equivalentes hasta sumar un total de cuatro grupos. Por ejemplo de 2 en

2, (2,4,6,8), pero como el último número no coincide con el dividendo volverán a intentarlo de 3 en 3, (3,6,9,12).

En las estrategias de sustracción, partiendo del 12, procederán a quitar múltiplos de 2 o de 3 un total de 4 veces, (12,9,6,3). El cardinal del conjunto es correcto si el último número coincide con el elegido (en nuestro caso el 3).

4.5.2. Estrategias de doble recuento

Estas estrategias representan un nivel de abstracción más avanzado, puesto que los sujetos son capaces de integrar dos secuencias de conteo.

Siguiendo a Baroody (1988) la estrategia de doble recuento comprende cuatro pasos. A modo de ejemplo veamos la siguiente división, 6:2

1. generan los números de la secuencia numérica estándar, que se corresponde con el dividendo (i.e., 1, 2, 3, 4, 5, 6)
2. de forma simultánea al paso anterior, llevan la cuenta de cada dos números contados, (i.e., 1,2, 1,2, 1,2.)
3. cuentan el número de grupos de dos (i.e., 1, 2, 3).
4. detienen la secuencia numérica después de completar el último grupo, siendo la respuesta el último grupo contado (i.e., 3).

Los niños que utilizan el doble recuento no comienzan representando el dividendo con un conjunto de objetos, sino que utilizan el dividendo para saber "cuando tienen que parar" y no formar más grupos.

"María tiene 12 galletas, si quiere colocar 3 galletas en cada plato.

¿Cuántos platos necesita para colocar todas las galletas?"

En el ejemplo, cuentan los elementos al tiempo que cuentan el número de conjuntos formado

1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12
1	2	3	4

“ María tiene 12 galletas, guarda todas las galletas en 4 cajas, poniendo en cada caja el mismo número de galletas. ¿Cuántas galletas hay en cada caja?”.

En este caso el doble recuento lo realizan mientras reparten los objetos uno a uno. Por ejemplo, distribuyen una galleta en cada cajita hasta llegar al número que indica el dividendo, al tiempo que cuentan el número de galletas que colocan en las cajas.

<input style="width: 40px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 40px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>	<input style="width: 40px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/>
1 4 7 10	2 5 8 11	3 6 9 12

Con el paso del tiempo, los niños se vuelven menos dependientes de la presencia de objetos o del uso de los dedos, lo que les va a permitir contar verbalmente estableciendo distintas pausas o énfasis en la palabra que se corresponde con el último numeral de un conjunto. Por ejemplo, en el problema anterior contarán: 1, 2, 3 (pausa) 4, 5, 6 (pausa) 7, 8, 9 (pausa) 10, 11, 12 (pausa).

4.5.3. Recuento transaccional

La característica esencial que define esta estrategia es que los niños calculan la respuesta al problema utilizando una secuencia de conteo basada en múltiplos de un mismo factor. Por ejemplo, en el problema de división anterior (6:2) contarán 2, 4, 6.

4.5.4. Estrategias de conteo

Como en la adición y la sustracción, a medida que los niños van adquiriendo más habilidades matemáticas cambian las estrategias basadas en la *representación directa* por las de *conteo* (Carpenter et al., 1999).

"María compró 4 cajas de galletas, había 3 galletas en cada caja.

¿Cuántas galletas compró María?"

Este problema de multiplicación puede resolverse mediante un procedimiento de *conteo por múltiplos*, es decir, los niños extienden 4 dedos al tiempo que cuentan 3, 6, 9, 12. En este caso los dedos sirven para registrar lo que ya han contado y no como objeto físico para contar.

En otras ocasiones, lo que hacen es utilizar estrategias combinadas. Por ejemplo, recurren inicialmente al *conteo por múltiplos* (i.e., 3, 6, 9) y después, continúan con un *conteo uno a uno* hasta llegar a la respuesta.

"María tiene 12 galletas, si quiere colocar 3 galletas en cada plato.

¿Cuántos platos necesita para colocar todas las galletas?"

Los niños contarán 3, 6, 9, 12, hasta llegar al dividendo (12) al tiempo que extienden un dedo por cada número dicho, siendo la respuesta el número de dedos levantados (4).

“María tiene 12 galletas, guarda todas las galletas en 4 cajas, poniendo el mismo número de galletas en cada caja. ¿Cuántas galletas hay en cada caja?”.

En este problema de división partitiva, pueden proceder formando 4 grupos equivalentes, por ejemplo 2, 4, 6, 8 y como el último número no se corresponde con el dividendo, procederán a realizar nuevos grupos equivalentes con diferente cardinal 3, 6, 9, 12.

4.5.5. Estrategias memorísticas: hechos numéricos y hechos derivados

En algunas ocasiones los niños obtienen la respuesta recordando el producto de la multiplicación o el resultado de la división. En otras, recurren a los hechos derivados. Por ejemplo en el problema *“María compró 4 cajas de galletas, había 3 galletas en cada caja. ¿Cuántas galletas compró María?”*, la respuesta sería la siguiente: como 4 más 4 son 8, una vez más 4 son 12.

4.5.6. Estrategias incorrectas de multiplicación y división

A la hora de analizar los errores de multiplicación y división nos encontramos con la dificultad de que los estudios se han basado principalmente en el efecto de las cantidades, en vez de en la estructura semántica del

problema. Por ejemplo, Bell et al. (1989) señalaron que uno de los errores que cometían los niños era cambiar el dividendo por el divisor cuando el primero era menor que el segundo. Asimismo, Bell, Sawn y Taylor (1981) encontraron que en el problema "*Encontrar el precio de 0.22 galones de petróleo si un galón cuesta 1.20 libras*" uno de los errores más frecuentes consistía en resolver el problema mediante la división de 1.20 entre 0.22. No vamos a extendernos más en estos errores, que como indicamos anteriormente, se producían ante la presencia de cantidades decimales o en situaciones en las que el dividendo es menor que el divisor y, ambos casos, están fuera de los objetivos de nuestra investigación.

Otros estudios analizaron los errores en la tarea de "*plantear problemas*". De Corte y Verschaffel (1996) señalaron las siguientes respuestas incorrectas, datos que también fueron corroborados en el estudio de Dopico (2001):

- Plantear el problema sin formular la pregunta final, describiendo solamente una situación.
- Incluir la respuesta dentro del enunciado, sin que conlleve ningún cálculo aritmético para solucionar el problema.
- Algunos problemas carecen de cierta información necesaria para poder resolverlos (por ejemplo: "*María tiene 3 galletas y Ana le da más galletas. ¿Cuántas galletas tiene ahora María?*").
- Utilizar datos numéricamente diferentes a los dados.
- Generar un problema cuya solución requiere una operación aritmética diferente a la dada.

Finalmente, otros errores atañen directamente al conocimiento inapropiado del papel desempeñado por los términos de la división (i.e., dividendo, divisor, cociente y resto). En efecto, en un estudio que realizamos sobre división partitiva y de medida en niños de Educación Infantil (Caballero, Rodríguez y Lago, 1999) identificamos los siguientes errores:

Error de cociente: denominamos así cuando no consideran el cociente, de manera que distribuyen el dividendo sin tener en cuenta que todos los subconjuntos formados han de tener el mismo número de elementos.

Por ejemplo en el problema: "9 gallinas se van a jugar a la casa azul, amarilla, verde y roja. En todas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas hay jugando en cada casa?".

Virginia (5 años): cogió 4 casas (divisor) y las 9 gallinas (dividendo) y distribuyó 2 gallinas en cada casa, salvo en la cuarta donde colocó 3 gallinas.

Error en el dividendo: no tienen en cuenta el número de elementos que componen el dividendo, incrementándolo o disminuyéndolo. Este error suele deberse al conteo, ya que a menudo cuentan dos veces un mismo elemento o dejan alguno sin etiquetar.

Error en el divisor: los niños no prestan la debida atención al número que representa al divisor. En los problemas de división partitiva hacen agrupaciones con un número mayor o menor de subconjuntos de los que indica el divisor. En la de medida, distribuyen un número de elementos, mayor o menor, que lo indicado por el divisor.

Por ejemplo en el problema de división de medida: *“Empieza a llover, la vaca Paca tiene que guardar 11 gallinas. Sólo puede meter 3 gallinas en cada casa. ¿Cuántas casas necesita para que quepan todas las gallinas?”*.

Raúl (5 años): cogió 11 gallinas (dividendo) y 2 casas, distribuyó 7 gallinas en una casa y 4 en la otra casa (no teniendo en cuenta que en cada casa sólo podía haber 3 gallinas).

En el problema de división partitiva: *“9 gallinas se van a jugar a la casa azul, amarilla, verde y roja. En todas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas hay jugando en cada casa?”*.

Laura (5 años): cogió 9 gallinas (dividendo) y 4 casas (divisor) distribuyó las 9 gallinas entre 3 casas y respondió *“tres gallinas en cada casa y quito una casa porque sobra”* (no tuvo en cuenta el tamaño del divisor).

Transformación en multiplicación: en vez de resolver el problema repartiendo dividendo entre divisor, lo que hacen es “multiplicar” el dividendo por el divisor.

Por ejemplo en el problema: *“Empieza a llover, la vaca Paca tiene que guardar 11 gallinas. Sólo puede meter 3 gallinas en cada casa. ¿Cuántas casas necesita para que quepan todas las gallinas?”*.

Miguel Angel (5 años): colocó 11 gallinas en cada casa, de manera que habría un total de 33 gallinas.

Estos errores fueron hallados también por Squire y Bryant (2002). En concreto, realizaron un estudio con niños de 5 a 8 años sobre problemas de división presentados bajo dos formas diferentes: *Agrupamiento por el divisor* y *Agrupamiento por el cociente*. En la primera situación de reparto el divisor

determinaba el número de grupos y el cociente el tamaño de cada grupo, mientras que en la segunda el divisor establecía el número de objetos en cada grupo y el cociente el número de grupos formados. En ambos casos, los autores encontraron dos errores principales: *el error de divisor*, (i.e., daban por respuesta el divisor en lugar del cociente) y el *error de dividendo*, (i.e., respondían con el dividendo en vez del cociente).

III. MARCO EXPERIMENTAL

III. MARCO EXPERIMENTAL.

1. PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS.

El objetivo principal de esta investigación es ahondar en el conocimiento informal que tienen los más pequeños acerca de las cuatro operaciones aritméticas, esto es, adición, sustracción, multiplicación y división. Como señalamos repetidamente a lo largo de este trabajo, este interés resultó de suma importancia, puesto que los niños tienden a interpretar y abordar las matemáticas formales en función de sus conocimientos informales.

Esta meta se plasma a su vez en dos objetivos específicos. El primero reside en comprobar si las cuatro operaciones aritméticas representan para ellos distintos niveles de complejidad. La trascendencia educativa de este planteamiento se evidencia en el proyecto curricular de primaria, momento en que empieza la enseñanza reglada de las operaciones aritméticas. Esta enseñanza formal empieza por la adición, seguida de la sustracción, multiplicación y concluye con la división, en un intento de ir de lo más fácil a lo más difícil. Sin embargo, ¿esta secuenciación obedece a razones puramente matemáticas, que centran el aprendizaje de estas operaciones en la enseñanza del algoritmo, o toma en consideración aspectos psicológicos relacionados con el proceso de adquisición de estos conceptos?. Para responder a esta cuestión, no sólo hemos incorporado en las tareas propuestas a los niños las cuatro operaciones aritméticas, sino también el factor *estructura semántica*, que en la investigación sobre problemas verbales se ha revelado de gran importancia.

En otras palabras, nuestro interés consiste en determinar si el grado de dificultad de las diferentes operaciones varía dependiendo de que los problemas se formulen en términos de *acción o no acción*.

El segundo objetivo consiste en conocer los procesos de solución de los niños de EI cuando se enfrentan a estas tareas. En efecto, pretendemos trazar la secuencia evolutiva que siguen en los procedimientos de resolución mediante la combinación de una metodología transversal y longitudinal. La novedad aquí reside en que la mayoría de los estudios emplean una metodología transversal y además, analizan una o dos operaciones aritméticas (p.e., adición y sustracción), pero no las cuatro de manera conjunta.

Para alcanzar estas metas planteamos las siguientes hipótesis de trabajo:

Hipótesis 1: los niños de 4-5 años realizarán peor las tareas de resolver problemas verbales que los de 5-6 años, independientemente del tipo de Operación y Estructura Semántica.

Desde que los niños nacen se encuentran con un entorno lleno de elementos que pueden ser manipulados, tocados e incluso cuantificados, dando lugar a pequeños ejemplos de adición, sustracción y reparto. Escenas como contar los peldaños de la escalera y repartir caramelos son frecuentes en los juegos entre padres e hijos lo que provoca que, con la edad, el número de estímulos matemáticos recibidos sea mayor y, por tanto, mejore el rendimiento.

Hipótesis 2: no esperamos encontrar diferencias en el factor Operación.

Como señalamos unas líneas más arriba, las experiencias cotidianas proporcionan a los niños los conocimientos informales y en éstas, se dan por igual en situaciones aditivas, sustractivas, etc.

Hipótesis 3: los niños de EI resolverán mejor los problemas con Estructura Semántica de *acción* (i.e., cambio, sumas repetidas y restas repetidas) que los problemas con estructura de *no acción* (i.e., comparación) y ello afectará principalmente al grupo de 4-5 años.

A este respecto, como hemos tenido ocasión de comentar en la parte teórica de este trabajo, son varios los estudios que confirman que los problemas con estructura que implica *acción* resultan más fáciles de resolver, puesto que los niños pueden interpretar la relación dinámica entre los conjuntos y comprender mejor el papel desempeñado por las dos cantidades del enunciado sin tener que realizar una elaboración profunda, mientras que en los problemas que implican *no acción* se enfrentan a situaciones estáticas y asimétricas. Esta dificultad es aún mayor si tenemos en cuenta que en estos problemas han de representar correctamente la relación comparativa que se establece entre los conjuntos.

Hipótesis 4: la progresiva elaboración del conocimiento informal permitirá a los niños, cuando alcancen la edad de 5-6 años, mostrar estrategias más elaboradas para resolver los problemas que a los 4-5 años.

Cabe esperar que, con la edad, los niños tengan la oportunidad de descubrir procedimientos más elaborados y con menor carga cognitiva, como son las estrategias de conteo frente a las de representación directa.

Hipótesis 5: las estrategias de resolución estarán determinadas por la Operación y Tipo de Problema.

Al partir del conocimiento informal de los niños trataremos de averiguar si este conocimiento previo es el que determina los procesos de resolución o por el contrario, estos procesos están mediatizados por otros factores como el tipo de problema o la operación.

Hipótesis 6: con la edad los errores experimentarán cambios cuantitativos y cualitativos.

En otras palabras, y siguiendo con el razonamiento anterior, a los 4-5 años el número de errores será mayor y estarán relacionados con la competencia conceptual, mientras que a los 5-6 años se incrementarán los de ejecución.

2. MÉTODO.

2.1. PARTICIPANTES.

Participaron en este estudio todos los niños de Educación Infantil del colegio concertado Centro Cultural Salmantino situado en la zona sur de Madrid, cuyo nivel socio-económico y cultural era medio-bajo.

En total fueron 36 alumnos, que se repartieron en dos grupos equivalentes siguiendo el criterio de curso escolar en el que se hallaban (i.e., primero o segundo de Educación Infantil). De este modo:

El Grupo I estuvo formado por 18 niños con edades comprendidas entre los 4 y los 5 años, que en el momento de iniciar la recogida de datos tenían una media de edad de 4;7 años.

El Grupo II estuvo integrado por 18 niños con edades comprendidas entre los 5 y los 6 años (M: 5;5 años).

Al tratarse, como veremos más adelante, no sólo de un estudio transversal sino también longitudinal se procedió a hacer un seguimiento a todos los niños del Grupo I, salvo 3 que causaron baja en el colegio, cuando sus edades oscilaban entre los 5 y los 6 años (M:5;7años), formando el Grupo III con un total de 15 niños.

2.2. MATERIAL.

El material que se proporcionaba a los participantes para la resolución de los diferentes tareas constaba de:

- A) ocho dibujos de casas de diferentes colores (2 amarillas, 2 rojas, 2 verdes, 2 azules) presentadas cada una de ellas en papel plastificado de 19,7 x 19,7 cm (Ver Anexo II, pag.245).
- B) 20 gallinitas de plástico duro, iguales en cuanto al tamaño, color y forma. En concreto, todas eran de color blanco con cresta, pico y barba de color rojo, y con dos puntitos de color negro para los ojos. Las gallinitas medían 6,5 cm de alto, 7 cm de largo y 4 cm de ancho (Ver foto, Anexo II, pagina 243).
- C) 20 sacos de trigo, confeccionados con tela de color amarillo claro y rellenos de algodón, del mismo color, forma y tamaño. Las medidas de los sacos eran 8,5 cm de alto, 4,5 cm de largo y 2 cm de ancho (ver foto, Anexo II, pagina 243).
- D) Una marioneta de guante en forma de vaca, y con el nombre de "la vaca Paca", confeccionada con lana de color marrón oscuro, con el hocico de color blanco y la parte interna de la boca de color rosa. Los ojos, la separación entre los ojos, la

nariz y la parte anterior de las orejas estaba hecha con fieltro. La nariz eran dos óvalos de color negro, los ojos también eran dos óvalos superpuestos uno blanco y otro negro, la separación entre los ojos era blanca y la parte anterior de las orejas era de color rosa. El pelo de la vaca era de color blanco y tenía una tira de color rojo que separaba los ojos del hocico. Medía 23 cm de alto (Ver foto, Anexo II, pagina 244).

E) Finalmente, para realizar los análisis posteriores, utilizamos una cámara de vídeo para grabar las sesiones de recogida de datos.

2.3. PROCEDIMIENTO.

La recogida de datos se realizó en 2 cursos escolares consecutivos (1999-2000, 2000-2001). En el curso 1999-2000, resolvieron las tareas los niños de los Grupos I y II (4-5 años y 5-6 años, respectivamente). Durante el curso 2000-2001 se realizó el seguimiento a 15 niños del Grupo I (Grupo III: 5-6 años).

En cuanto a las pruebas, consistieron en un protocolo de problemas verbales para los niños de 5-6 años y otro protocolo de iguales características, pero diferentes cantidades numéricas, para los niños de 4-5 años. Los protocolos estaban constituidos por 20 problemas verbales:

(1) dos problemas de adición - acción: *"En la casa azul hay 5 gallinas, y otras 3 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?"*.

(2) dos problemas de sustracción - acción: *" En la casa amarilla hay 11 gallinas y 6 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa amarilla?"*.

(3) dos problemas de multiplicación - acción: *"Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?"*

(4) dos problemas de división de medida - acción: *"12 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 4 gallinas. ¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?"*.

(5) dos problemas de división partitiva - acción: *"Tenemos 12 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, amarilla y verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?"*.

(6) dos problemas de adición - no acción: *"Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa azul 7 sacos de trigo y en la casa amarilla ponen 4 sacos de trigo más que en la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa amarilla?"*.

(7) dos problemas de sustracción - no acción: *"En la casa verde están descansando 10 gallinas y en la casa amarilla están descansando 5 gallinas menos que en la verde. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa amarilla?"*.

(8) dos problemas de multiplicación - no acción: *"En la casa roja hay 3 gallinas y en la casa azul 4 veces las gallinas que hay en la casa roja. ¿Cuántas gallinas hay en la casa azul?"*.

(9) dos problemas de división partitiva - no acción: *"Las gallinas de la*

casa verde comen la mitad de sacos de trigo que las gallinas de la casa azul y las de la casa azul comen 8 sacos de trigo. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?”.

(10) dos problemas de división de medida - no acción: *“Las gallinas de la casa azul comen 9 sacos de trigo y las de la casa verde comen 3 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 3 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa azul?”.*

Las cantidades seleccionadas para los participantes de 4-5 años no excedían en ningún caso de 7, mientras que las cantidades en el grupo de 5-6 años llegaban hasta el 12 (ver Anexo I, pags. 238-242). En ambos casos se escogieron números pequeños para asegurarnos de que los niños eran capaces de realizar el conteo hasta dichas cantidades y excluir que éstas en sí mismas fuesen una dificultad añadida. No obstante, se elevaron las cantidades en el grupo de los mayores para evitar que resolvieran los problemas por *subitizing* y tuvieran ocasión de desarrollar un mayor número de estrategias.

Las pruebas fueron aplicadas en 5 entrevista individuales, cada una con 4 problemas. El número de sesiones fue elevado para prevenir el cansancio y la falta de atención que el mismo provoca en niños de tan corta edad. El orden de la presentación de los diferentes problemas fue elegido al azar y se mantuvo constante para todos los participantes. Cada niño era entrevistado sólo una vez por semana, durante las horas lectivas del centro, para mitigar posibles efectos del aprendizaje, con una duración que no excedía de los 20 minutos.

La recogida de datos fue realizada por nosotros mismos junto con dos estudiantes de psicología a quienes se entrenó previamente.

Todas las sesiones seguían una pauta similar. Se iniciaban presentando la "vaca Paca" y el material que se iba a utilizar, según indican los siguientes diálogos:

- PRIMERA ENTREVISTA.

¡Hola soy la vaca Paca!

Y tú .¿Cómo te llamas?.

Qué nombre más bonito.

¿Cuántos años tienes?.

Eres muy mayor...

¿Te gusta jugar?

¿Quieres jugar conmigo?.

Tengo muchas gallinas pero no sé contarlas, ni colocarlas en sus casas. ¿Tú me puedes ayudar?.

Entonces yo te pregunto cosas y tú me ayudas a resolverlas, ¿de acuerdo?. Te dejo las gallinitas, las casas de las gallinitas y los sacos de trigo.

Si no entiendes lo que te digo me puedes preguntar todo lo que quieras.

-RESTO DE ENTREVISTAS

¡Hola!.

¿Te acuerdas de mí? (seguramente el niño responderá diciendo quien es).

Vamos a jugar a lo mismo del otro día. ¿Me vas a ayudar otra vez?.

Entonces yo te pregunto cosas y tú me ayudas a resolverlas, ¿de acuerdo?. Te dejo las gallinitas, las casas de las gallinitas y los sacos de trigo.

Si no entiendes lo que te digo me puedes preguntar todo lo que quieras.

Todos los materiales se situaban en una silla, al lado del niño, para facilitar su acceso. A continuación, el experimentador se colocaba la marioneta de guante (i.e., "la vaca Paca") y leía en voz alta el problema correspondiente. Si los niños hacían alguna pregunta se volvía a leer el problema y así, cuántas veces lo solicitasen. Una vez que habían finalizado y antes de pasar al problema siguiente, se procedía a interrogarlos para establecer adecuadamente cuál había sido su procedimiento de resolución.

Todas las sesiones fueron grabadas en vídeo para su análisis posterior. Los dos estudiantes, que actuaban como colaboradores, tomaban nota de todos aquellos aspectos que consideraban de interés durante el desarrollo de las pruebas (p.e., contar con los dedos debajo de la mesa, etc.).

3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS DATOS.

En aras de una mayor claridad, dividimos la exposición de nuestro datos en dos partes: 1) los resultados transversales y 2) los datos correspondientes al seguimiento longitudinal. En ambas partes, procederemos a analizar los datos cuantitativos generales y el análisis cualitativo de los procedimientos correctos e incorrectos de resolución, con el fin de establecer una imagen más precisa del conocimiento informal de los niños.

3.1. DATOS TRANSVERSALES.

3.1.1. Análisis cuantitativo.

Desde la vertiente cuantitativa y de acuerdo con los objetivos de nuestro trabajo, nos interesaba determinar el efecto que tenían las variables edad, operación y tipo de problema sobre la resolución de problemas. Para ello, realizamos un ANOVA mixto 2 (Grupo: I y II) x 5 (Operación: adición vs. sustracción vs. multiplicación vs. división partitiva vs. división de medida) x 2 (Tipo de Problema: acción vs. no acción) con medidas repetidas en los dos últimos factores, que fue ejecutado con el programa SPSS. Los resultados mostraron que eran significativos los efectos principales de los factores Grupo ($F_{1,34} = 6.940$, $p < 0.05$), Operación ($F_{4,136} = 3.860$, $p < 0.01$) y Tipo de Problema o Estructura Semántica ($F_{1,34} = 183.165$, $p < 0.01$) (ver Tabla 5).

Tabla 5. Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, del ANOVA

	Grupo I		Grupo II	
	Acción	No Acción	Acción	No Acción
Adición	1.61 (0.70)	0.06 (0.24)	1.78 (0.65)	0.72 (0.83)
Sustracción	1.61 (0.78)	0.06 (0.24)	1.67 (0.59)	0.61 (0.85)
Multiplicación	1.50 (0.71)	0.00 (0.00)	1.94 (0.24)	0.44 (0.62)
División Partitiva	1.33 (0.84)	0.11 (0.32)	1.83 (0.38)	0.28 (0.46)
División de Medida	1.72 (0.67)	0.39 (0.50)	1.72 (0.70)	0.72 (0.83)

Puntuación máxima posible: 2

En efecto, existen diferencias entre las puntuaciones medias de ambos grupos (G.I= 0.839 y G.II= 1.172), siendo superior el rendimiento de los niños de 5-6 años frente al de los de 4-5 años.

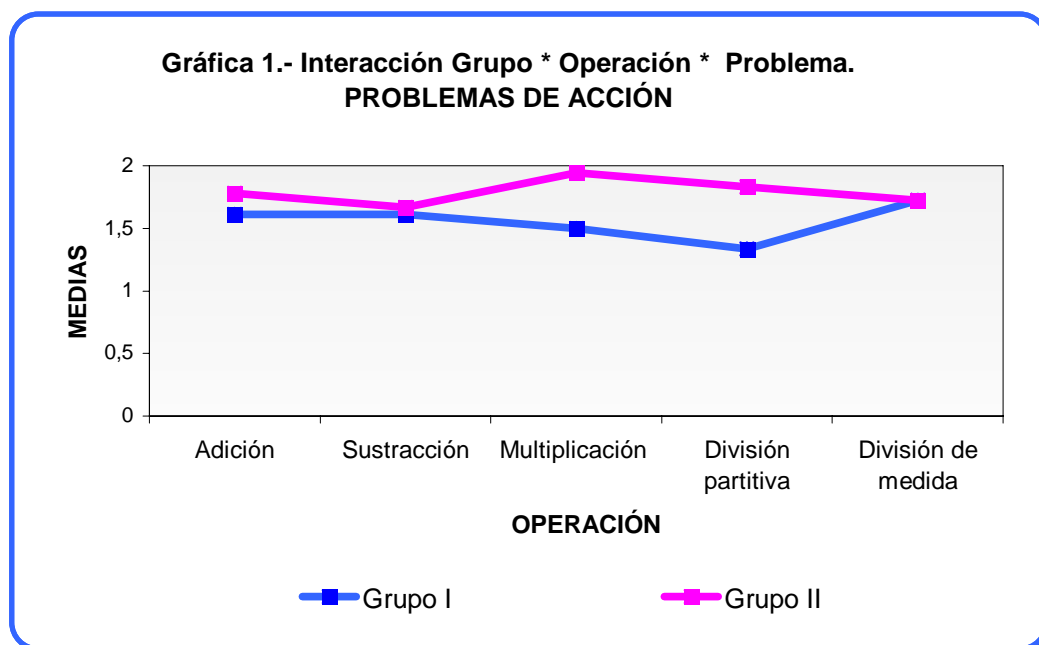
En cuanto al factor Operación el orden de dificultad, de acuerdo con sus valores medios, sería el siguiente: división de medida (M: 1.139), adición (M: 1.042), sustracción (M:0.986), multiplicación (M: 0.972) y división partitiva (M:0.889). El análisis de las comparaciones múltiples mostró que era significativo el contraste entre la división de medida y el resto de las operaciones (i.e., sustracción ($p < 0.05$), multiplicación ($p < 0.05$), división partitiva ($p < 0.01$)) a excepción de la adición que resultó significativa con la división partitiva ($p < 0.05$). Aunque, como veremos unas líneas más adelante las diferentes operaciones no presentan un orden intrínseco de dificultad, teniendo en cuenta el grupo y tipo de problema. Ello confirma que los más pequeños aún careciendo de un conocimiento formal acerca de estas operaciones sitúan en un primer plano como más fácil la división de medida y en otro bloque la sustracción, multiplicación, y división partitiva que les resultan más difíciles. Estos resultados no ratifican los hallados por otros autores como Carpenter et al., (1993) en problemas de sustracción, multiplicación, división de medida y división partitiva con estructura de cambio (i.e., acción). En efecto, este autor, encontró un rendimiento similar en todos los problemas (51%, 50%, 50% y 49% respectivamente).

El tercer factor que resultó significativo fue el Tipo de Problema o Estructura Semántica (i.e., acción vs. no acción). En este caso, las puntuaciones medias se distanciaron notablemente, siendo mayor el nivel de rendimiento alcanzado en los problemas de acción (M:1.672) que en los de no acción (M: 0.339), a pesar de que

los niños disponían de objetos para manipular en ambos casos. Este dato concuerda con los de otras investigaciones, como las realizadas en torno a los problemas de adición y sustracción, en las que se ponía de manifiesto que los tipos de problemas que implicaban acción (p. e., problema de cambio) resultaban más sencillas que las estructuras que describían situaciones estáticas (p. e., problema de comparación) (p.e., Bermejo, Lago, Rodríguez, 1994; Bermejo et al. 1998; Carpenter y Moser, 1983). Asimismo, en los estudios sobre estructuras multiplicativas en las que se observó que los problemas de sumas repetidas y restas repetidas resultaban más sencillos que los de comparación (p.e., Bell et al., 1989; De Corte y Verschaffel, 1996; Dopico, 2001; English, 1998; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Nesher, 1992). En efecto, de acuerdo con Nesher (1992) y De Corte y Verschaffel (1996), la facilidad de nuestros niños para resolver los problemas que implicaban acción guardaba relación con el hecho de que por tratarse de situaciones dinámicas imponían menos demandas cognitivas, de modo que podían representar fácilmente con los objetos las cantidades dadas en el enunciado, sin necesidad de llevar a cabo elaboraciones más profundas para interpretar la relación asimétrica entre ellas, como sucedía en los de comparación.

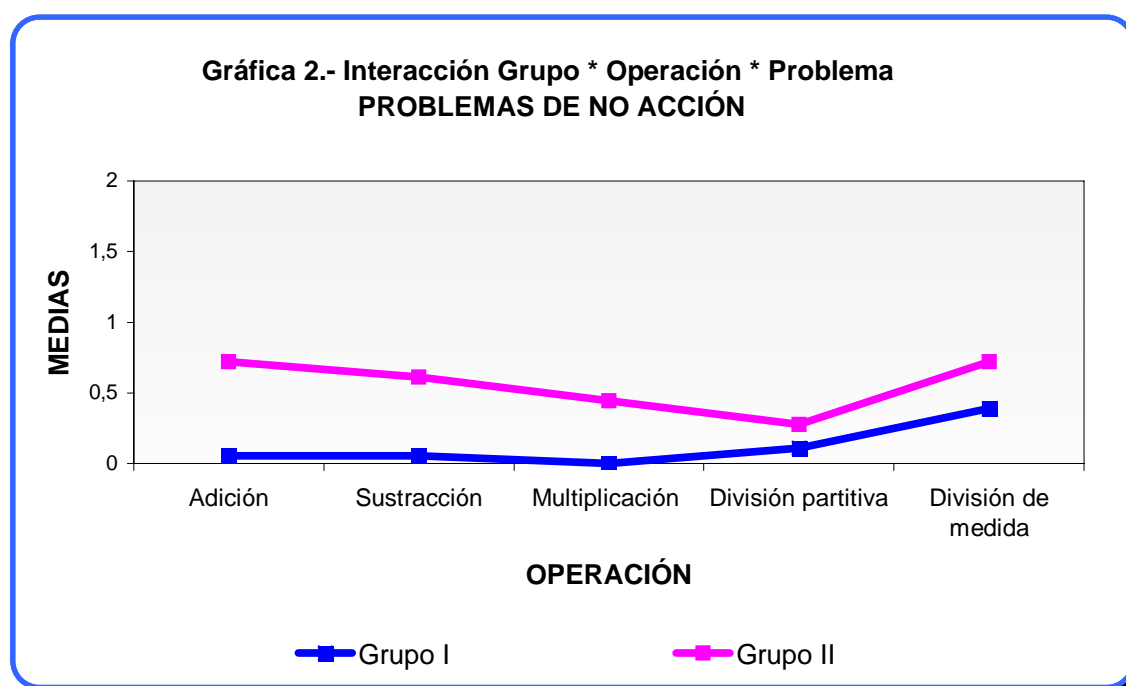
El análisis de varianza reveló también que no resultaba significativa ninguna interacción doble, aunque sí la triple Grupo x Operación x Tipo de Problema ($F_{4, 136} = 3.334, p < 0.05$). El análisis de la Gráfica 1 mostró que, en ambos grupos de edad y en los problemas de acción, el factor operación afectó al rendimiento de los niños en las tareas de multiplicación y división partitiva. Ahora bien, en el grupo de los

mayores la presencia de estas operaciones elevó la ejecución, mientras que descendió entre los más pequeños.



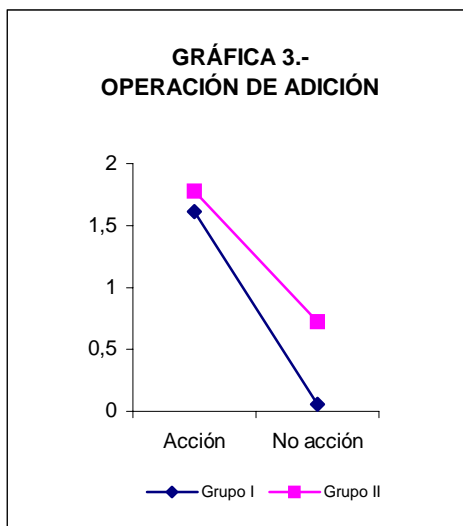
En cuanto a la estructura de no acción, en la Gráfica 2 podemos observar que si bien el comportamiento de los niños era similar en las tareas de adición, sustracción y multiplicación, presentaba variaciones positivas cuando se enfrentaban a las pruebas de división partitiva y división de medida. El aumento del rendimiento en los problemas de división partitiva ha venido provocado por la formulación de los mismos, ya que la aparición de la expresión "*la mitad que*" pareció facilitar la resolución de estos (p.e., "*las gallinas de la casa azul comen 4 sacos de trigo y las gallinas de la casa verde comen la mitad que las gallinas de la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?*"). Además, estos datos confirmaron, por un lado, que la división no era la operación más difícil para los niños,

como presuponen los programas educativos que comienzan con la enseñanza de la adición y terminan con la división y por otro, altera el planteamiento de Fischbein et al. (1985) según el cual el modelo partitivo está asociado a la idea de reparto y supone un modelo más primitivo, mientras que el de medida es adquirido posteriormente con la instrucción. En efecto, este resultado no solo no halló sustento en nuestros datos, sino que el modelo de medida fue ligeramente más sencillo, lo que se halla más próximo a las propuestas de Neuman (1999) en vista a las cuales el modelo natural con el que los niños se acercan a la división es el modelo de medida.

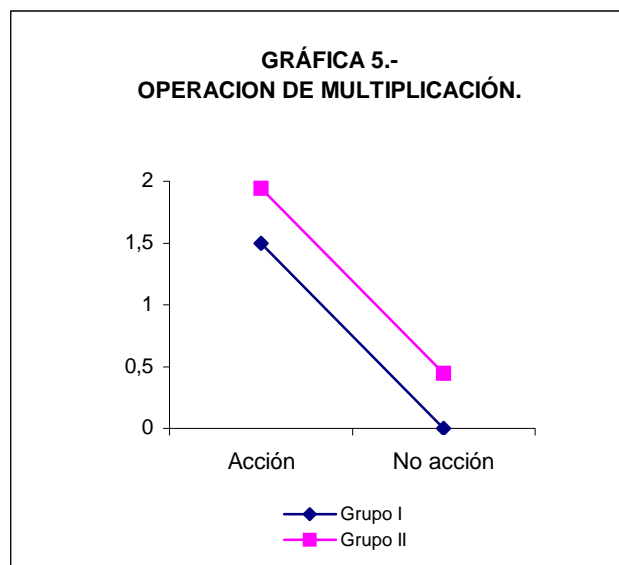


Por último, hemos intentado ahondar aún más en cómo los más pequeños se enfrentaban a cada una de estas operaciones analizándolas por separado. Por lo que se refiere a la adición y sustracción (ver Gráficas 3 y 4) hemos encontrado que, ambos grupos de edad, estaban más próximos en el rendimiento cuando resolvían

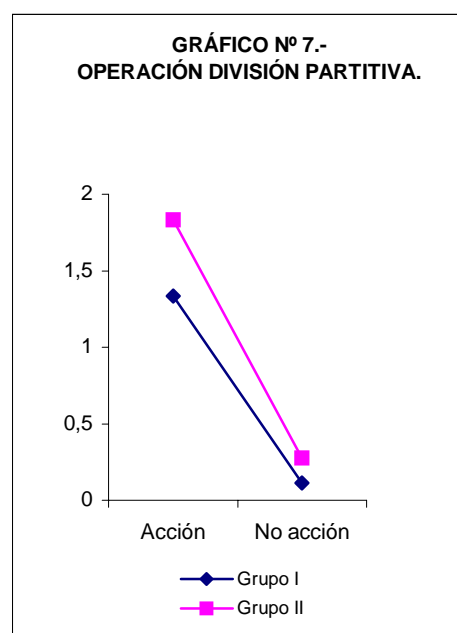
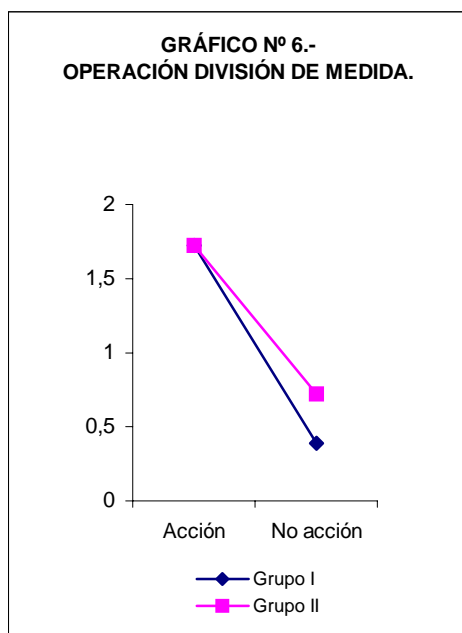
problemas que implicaban *acción* que cuando no implicaban *acción*. Parece que en los problemas más sencillos el conocimiento informal resultaba suficiente para resolverlos con cierto éxito. De hecho, algunos estudios de instrucción han mostrado que las mejoras en el rendimiento se producían sobre todo en los problemas más complejos. Por ejemplo, Aguilar y Navarro (2000) realizaron un programa para comprobar el papel de la instrucción en la resolución de problemas de adición, e informaron que si el problema era de cambio (i.e. problemas de acción) la instrucción no generaba mejoras significativas, siendo similar el rendimiento en el grupo control y en el grupo de instrucción. En cambio, cuando el problema era de comparación (i.e. problemas de *no acción*) la instrucción influía positivamente en el grupo que la había recibido. Finalmente, nuestros resultados también concordaron con los de Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) en los que se apuntaba que no existían diferencias en el rendimiento de los niños en la resolución de las tareas en función de la operación implicada, sino que el éxito en una u otra dependía del tipo de problema.



En los problemas de multiplicación (ver Gráfica 5), de nuevo hemos observado un fenómeno similar. En efecto, el rendimiento de ambos grupos corría paralelo, siendo, como era de esperar, menor en el Grupo I en las tareas con estructura de no acción.



En la división de medida (Gráfica 6) ambos grupos tenían un rendimiento similar cuando los problemas presentaban una estructura de acción, pero cuando eran de no acción se distanciaron siendo el Grupo II el que obtuvo un mayor número de respuestas correctas. En los problemas de división partitiva (Gráfica 7) hemos hallado datos contrarios a estos, puesto que ambos grupos tuvieron un rendimiento más alejado cuando los problemas eran de *acción* y más cercano cuando eran de *no acción*.



3.1.2. Análisis cualitativo.

En este apartado analizaremos los procedimientos de resolución. Para ello, describiremos y explicaremos las estrategias correctas y los errores que cometen los alumnos a la hora de resolver los problemas verbales, refiriéndonos, por un lado, a los problemas verbales de adición y sustracción y, por otro, a los de multiplicación y división.

1. Procedimientos de resolución: correctos e incorrectos.

Hemos diferenciado tres procedimientos de resolución correctos: *representación directa*, *estrategias de conteo* y *estrategias memorísticas*. Brevemente, las primeras aluden a aquellas estrategias en las que los niños utilizan los dedos u otro objeto físico para representar cada uno de los términos del problema verbal, contando a continuación todo para obtener el resultado final; en las de *conteo* no

precisan representar físicamente los conjuntos, aunque utilizan apoyos físicos para registrar lo ya contado y por último, en las *estrategias memorísticas* conocen el resultado de memoria. A lo largo de este análisis comprobaremos en qué medida aparecen dichos procedimientos en los niños de Educación Infantil.

A) Procedimientos correctos en problemas verbales de adición y sustracción:

Si tenemos en cuenta el tipo de problema, los resultados mostraron que, en ambos grupos de edad, los procedimientos correctos aparecían más frecuentemente en los problemas de *acción* que en los de *no acción* (ver Tabla 7). Asimismo, hemos constatado, como era de esperar, que el grupo de 5-6 años utilizó un mayor número de procedimientos correctos en ambas estructuras semánticas que el grupo de 4-5 años, aunque estas diferencias eran mayores cuando solucionaban problemas de no acción.

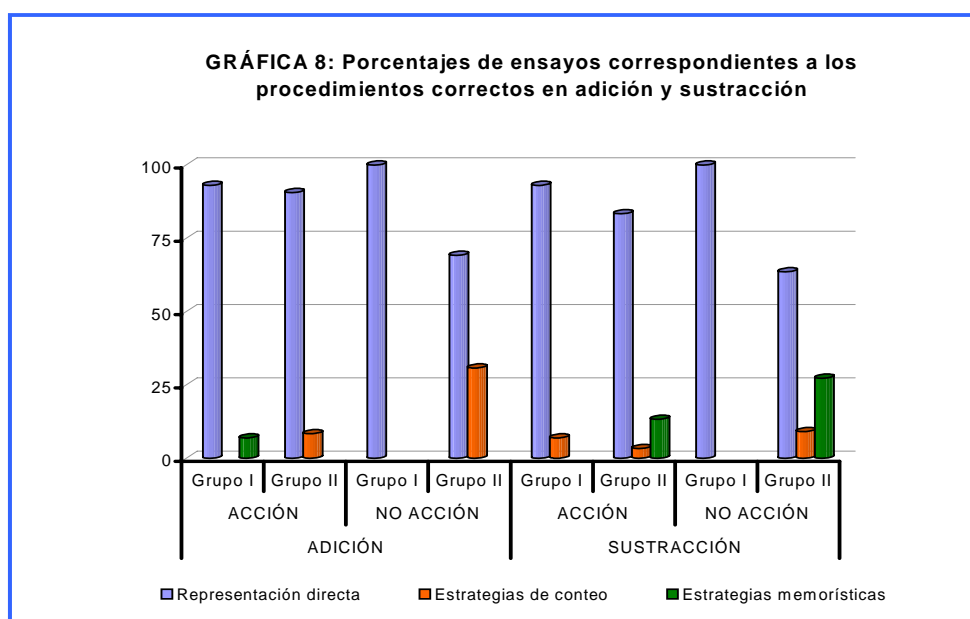
PORCENTAJES DE PROCEDIMIENTOS CORRECTOS				
	ACCIÓN		NO ACCIÓN	
	GRUPO I	GRUPO II	GRUPO I	GRUPO II
ADICIÓN	80,56	88,89	2,78	36,31
SUSTRACCIÓN	80,56	83,33	2,78	30,50

Tabla 7: porcentajes de ensayos correspondientes a los procedimientos correctos de resolución en problemas verbales de adición y sustracción, teniendo en cuenta la estructura semántica.

Respecto al tipo de estrategia empleado, todos los niños, independientemente de la edad y del tipo de problema, utilizaron mayoritariamente las basadas en la *representación directa* (Ver Gráfica 8) .

Concretamente, el grupo de 4-5 años recurrió fundamentalmente a las estrategias de *representación directa*, tanto en adición como en sustracción y en ambos tipos de problemas. Además, tanto las *estrategias memorísticas* como las de *conteo*, aunque en un porcentaje muy escaso, sólo aparecieron en las situaciones de *acción*.

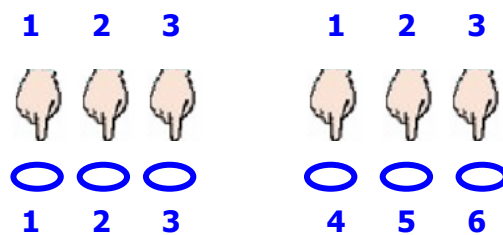
El grupo de 5-6 años utilizó con menor frecuencia la *representación directa* en favor de las estrategias de *conteo* y *memorísticas*, especialmente en los problemas de *no acción*.



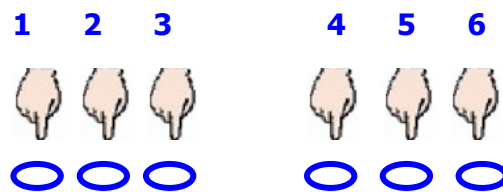
Como hemos comentado en la parte teórica de este trabajo, Carpenter y Moser (1983, 1984) propusieron tres categorías de estrategias, que aparecerían en el

siguiente orden: representación directa, conteo y hechos numéricos. Nuestros datos confirman que los más pequeños recurrían mayoritariamente a las estrategias de *representación directa*. Cabría esperar, de acuerdo con este modelo evolutivo, que la siguiente estrategia más utilizada fuese la de conteo, pero no siempre fue así; en los problemas de adición de *acción*, en el grupo de 4-5 años, y en los de sustracción de *acción* y sustracción de *no acción*, en el grupo de 5-6 años, surgieron las estrategias memorísticas. Estos problemas tienen en común que las cantidades consistían en números dobles o los mismos niños hacían uso de los dobles para su resolución (p.e., 3+3; 8-4 y 10-5). Por ejemplo, en el último caso Nerea (5 años) lo resolvió diciendo: *“como 5+5 son 10, quito 5 y se quedan 5”*. Estos resultados concuerdan con el estudio evolutivo sobre cálculo mental realizado por Lozano (2001) en el que señaló que las combinaciones numéricas que antes memorizaban los alumnos eran los “dobles”. Teniendo en cuenta esto, estamos en condiciones de afirmar, por un lado, que algunos niños de Educación Infantil podrían contar con un repertorio de *“sumas de dobles”*, lo que explica la utilización de estrategias memorísticas en lugar de estrategias de conteo, ya que las primeras les supondrían un menor esfuerzo cognitivo. Por otro, aun cuando estos niños dispongan de estrategias más sofisticadas, ello no supone que abandonen las más sencillas cuya utilización, como mencionamos anteriormente, es mayoritaria. Finalmente, un análisis pormenorizado de los datos puso de manifiesto que aquellos niños que solucionaban los problemas utilizando estrategias de *representación directa* o de *conteo* no lo hacían todos de la misma forma, pudiéndose establecer diferentes pautas de actuación que correspondían a distintos niveles de complejidad:

Nivel 1º, representa y vuelve a contar: representaban inicialmente los dos sumandos con los dedos o con objetos y contaban todo. Por ejemplo: *"en la casa azul hay 3 gallinas y otras tres van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?"*, Lara (4 años) cogió 3 gallinas y las colocó en la casa azul, después puso otras tres y contó una a una todas las gallinas que había colocado dentro "1, 2, 3, 4, 5 y 6", terminó indicando el último numeral de la secuencia "6".

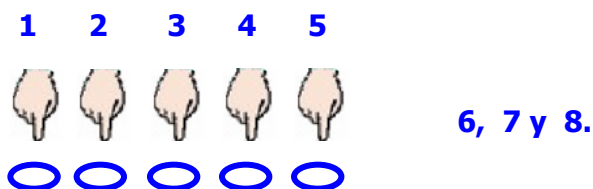


Nivel 2º, representa y cuenta a la vez: representaban uno por uno ambos términos a medida que los contaban, sin que hubiese doble conteo. Siguiendo con el ejemplo anterior, Nieves (4 años) cogió 3 gallinas y las colocó en la casa azul al tiempo que las contaba "1, 2 y 3" y siguió contando al añadir las restantes gallinas "4, 5 y 6".



Nivel 3º, representa un único término y cuenta: representaban uno de los términos y añadían el otro mentalmente sin necesidad de representación física. Por ejemplo: *"en la casa azul hay 5 gallinas y otras 3 van a jugar con ellas. ¿Cuántas*

gallinas hay ahora en la casa azul?”, Fran (5 años) representó las 5 gallinas (i.e., primer término de la adición) y dio la respuesta 8 sin necesidad de representar el 3.



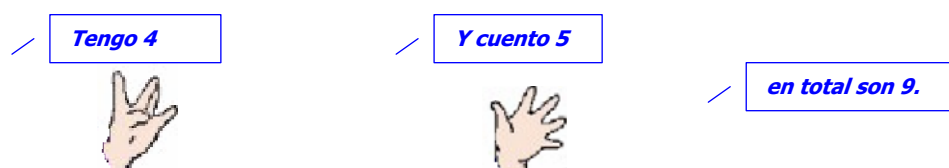
Como decíamos, estas formas de *representación directa* denotaban diferentes niveles de comprensión. En efecto, a medida que avanzan los niveles los niños mostraban un mayor “conocimiento matemático”. Por ejemplo, en el Nivel 2º no necesitaban volver a contar como en el Nivel 1º y en el Nivel 3º prescindían de representar uno de los términos.

De igual modo, hemos hallado dos niveles diferentes en las estrategias de conteo, que denominamos Nivel 4º y Nivel 5º por ser más avanzados matemáticamente que los niveles anteriores:

Nivel 4º, contar todo sin objetos físicos: contaban el primer sumando y seguían contando al tiempo que añadían el segundo sumando. Por ejemplo: *“las gallinas preparan la comida, ponen en la casa roja 4 sacos de trigo y en la casa verde ponen 5 sacos de trigo más que en la casa roja. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa verde?*, Enrique (5 años) dijo: *“cuento primero 4* (al tiempo que levantó simultáneamente 4 dedos) *y después 5* (levantando a la vez 5 dedos), *en total son 9”*.



Nivel 5º, contar a partir del primer sumando: el primer sumando no lo contaban, partían de él y añadían el segundo. En el ejemplo anterior: Mónica (5 años) dijo: "son nueve, tengo 4 y cuento 5 más y son 9", a continuación levantó 4 y 5 dedos para demostrar lo que ya había contado.



Este último nivel suponía una menor carga cognitiva al no tener que contar los dos sumandos.

Teniendo en cuenta estos niveles en la Tabla 9 hemos recogido los porcentajes de ensayos correspondientes a cada uno de ellos.

			R. D. Nivel 1º	R. D. Nivel 2º	R. D. Nivel 3º	E. C. Nivel 4º	E. C. Nivel 5º
ADICIÓN	ACCIÓN	GRUPO I	81,84	11,11	7,40	--	--
		GRUPO II	75,86	10,34	13,79	--	100
	NO ACCIÓN	GRUPO I	100	--	--	--	--
		GRUPO II	66,67	22,22	11,11	66,67	33,33

R.D. = Representación directa, E.C. = Estrategias de conteo

Tabla 9: porcentajes de ensayos de utilización en cada grupo de edad y tipo de problema según los niveles de comprensión establecidos en las estrategias de representación directa y conteo.

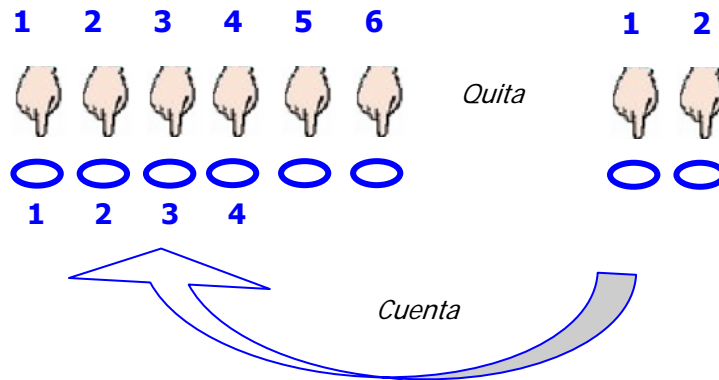
La mayoría de las respuestas de nuestros participantes, independientemente de la edad y tipo de problema, se sitúa en el Nivel 1º de representación directa (Tabla

9). El hecho de que ambos grupos no hubieran recibido enseñanza formal sobre la adición explica la aparición del mismo tipo de estrategias, aunque se puede apreciar que el grupo de los mayores empleó un mayor porcentaje de estrategias de niveles superiores. En efecto, las estrategias de conteo tan sólo aparecían en el grupo de 5 años. En el problema: *"en la casa azul hay 5 gallinas, y otras 3 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?"*, Ana recurrió al procedimiento de *contar a partir del primer sumando*: *"estos son 5 (extendió una mano), 6, 7 y 8, (levantó 3 dedos para demostrar que 5 y 3 son 8)*. El uso de este tipo de estrategias por parte de estos niños viene a confirmar que el aumento de experiencias matemáticas informales provocaba la aparición de procedimientos más sofisticados, aunque ello no implicase la desaparición de los primitivos.

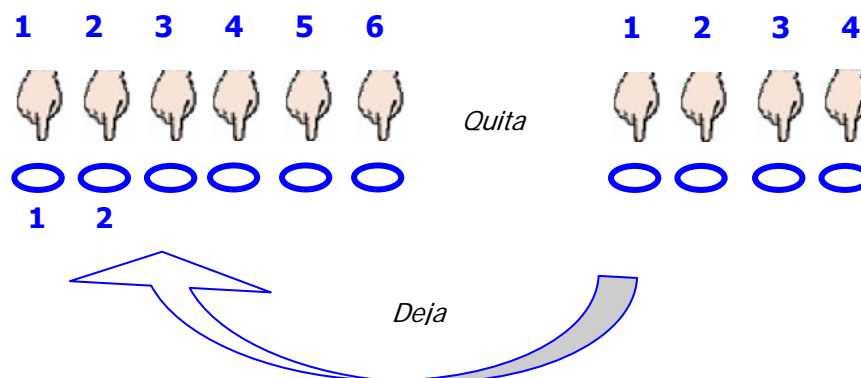
En cuanto a la sustracción, también hemos encontrado distintos niveles en las estrategias de representación directa y conteo que detallamos a continuación:

- Dentro de las estrategias de representación directa distinguimos los siguientes:

Nivel 1º, quitar de: representaban el conjunto correspondiente al minuendo y retiraban tantos objetos como indicaba el sustraendo, contando por último los objetos que quedaban en el conjunto inicial. Por ejemplo: *"en la casa verde hay 6 gallinas y 2 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?"*, María (4 años) representó 6 gallinas (i.e., minuendo) y a continuación quitó 2 (i.e., sustraendo), simulando que se iban de paseo, y contó las que se quedaron en la casa para dar la respuesta.

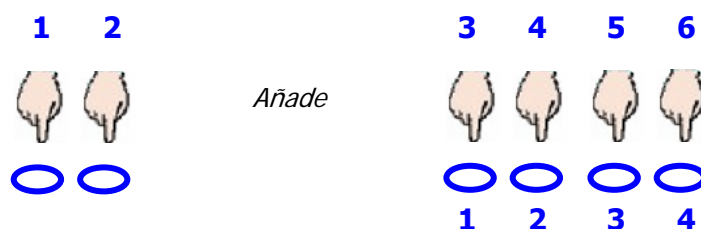


Nivel 2º, *quitar a*: representaban el conjunto indicado por el minuendo y retiraban elementos hasta que en este conjunto quedaban representados los objetos correspondientes al sustraendo, la respuesta final era el número de objetos que se habían retirado. En el ejemplo anterior Noelia B. (4 años) representó 6 gallinas (i.e., minuendo) y quitó gallinas hasta quedarse con las indicadas por el sustraendo (i.e.,2), dando como respuesta el número de gallinas retiradas: "4".



Nivel 3º, *basada en la adición*: Este procedimiento, es similar a la estrategia de conteo de *contar hacia delante*, no se ha hallado anteriormente en otros

estudios. Consistió en que los niños representaban el sustraendo y añadían elementos hasta alcanzar el minuendo, contando el número de elementos añadidos. Posiblemente constituya una de las vías de tránsito a la estrategia de conteo "contar hacia delante". Veamos un ejemplo, Noelia M. (4 años) colocó 2 gallinas fuera de la casa verde y contó al tiempo que introducía gallinas en la casa "3, 4, 5 y 6", después contó el número de gallinas que puso dentro de la casa y dio la respuesta, cuatro.



Si analizamos detenidamente estos niveles, salvo el primero que representa la situación clásica de sustracción, repararemos en que su ejecución puede requerir conocimientos que, a priori, estarían por encima de lo que cabe esperar en niños de EI. En efecto, poner en marcha el procedimiento de "quitar a" del Nivel 2º supone el **conocimiento** de que el "minuendo-resto=sustraendo" y el principio de composición aditiva de las cantidades (Martins-Mourao y Cowan, 1998; Nunes y Moreno, 2002). De igual modo, la estrategia derivada de la adición correspondiente al Nivel 3º implicaría, además del conocimiento sobre la composición aditiva de las cantidades, ser capaz de resolver un problema de sustracción como si fuera de adición (i.e., $6-2=4$ se transforma en $2+ \text{¿}=6$). Con los datos de que disponemos, sería poco riguroso por nuestra parte afirmar que los niños de EI tienen esos conocimientos pero si abre el camino para investigar sus orígenes y evolución posterior. En todo caso nos hallamos

ante unos conocimientos intuitivos que constituyen la antesala de los conocimientos formales y que capacitan a los niños para actuar representando la información presente en el problema de modos diferentes.

Por lo que se refiere a las estrategias de conteo las clasificamos de acuerdo a los siguientes niveles:

Nivel 1º, contar hacia delante: como ya hemos señalado anteriormente esta estrategia resultaba similar a la del Nivel 3 de representación directa, pero en esta ocasión prescindían de la representación del sustraendo, contando desde éste hasta alcanzar el numeral que indicaba el minuendo y hacían equivaler el resultado al número de elementos que se habían contado. Siguiendo el problema anterior:



Nivel 2º, contar hacia atrás: partiendo del minuendo contaban hacia atrás tantas veces como indicaba el sustraendo, de modo que el resultado era el último numeral dicho en la secuencia de conteo.



Siguiendo esta clasificación por niveles, ambos grupos utilizaron mayoritariamente la estrategia de Nivel 1° de representación directa, independientemente del tipo de problema (ver Tabla 10). En cuanto a las de conteo, aparecieron, en ambos grupos de edad, cuando resolvían problemas que implicaban *acción* y sólo en el grupo de los mayores cuando los problemas eran de *no acción*. Tomemos como ejemplo la respuesta de Blanca (4 años) que utilizó la estrategia de "contar hacia atrás" para resolver el siguiente problema: "en la casa verde hay 6 gallinas y 2 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?", sin usar material, respondió: "Quedan 4. Hay 6, quito la 6 y quito la 5 y quedan 4".

			R. D. Nivel 1°	R. D. Nivel 2°	R. D. Nivel 3°	E. C. Nivel 4°	E. C. Nivel 5°
SUSTRACCIÓN	ACCIÓN	GRUPO I	88,89	7,41	3,70	50	50
		GRUPO II	100	--	--	--	100
	NO ACCIÓN	GRUPO I	100	--	--	--	--
		GRUPO II	100	--	--	--	100

R.D. = Representación directa, E.C. = Estrategias de conteo

Tabla 10: Porcentajes de ensayos correspondientes a los niveles de las estrategias de *representación directa* y *conteo* en los problemas de sustracción.

Por último, señalar que en las estrategias memorísticas sólo encontramos las basadas en la recuperación de hechos numéricos a partir del repertorio de "sumas de dobles" mencionado unas páginas antes. Por ejemplo, en el problema: "En la casa verde hay 8 gallinas y 4 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?", Nerea (5 años) dice: "4 porque 4 y 4 son 8".

B) Procedimientos incorrectos en problemas verbales de adición y sustracción:

En el apartado anterior hemos comentado que se producía un decremento en los errores cometidos por los niños con la edad y que el mayor porcentaje de estos tenía lugar, en ambos niveles de edad y tipo de operación, en los problemas de *no acción*. En lo que sigue vamos a ahondar en la naturaleza de estos errores.

Basándonos en la tipología de errores propuesta por Bermejo y Rodríguez (1992), clasificamos los procedimientos erróneos de los niños en conceptuales, procedimentales y de ejecución.

1. Errores conceptuales:

ERROR 1: respondían con una de las cantidades del enunciado. Por ejemplo: "*En la casa amarilla hay 11 gallinas y 6 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa amarilla?*", daban como respuesta "11" ó "6".

ERROR 2: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado. En el ejemplo anterior representaban 11 (i.e., minuendo) y quitaban 3 (i.e., en lugar de 6), dando como respuesta 8.

ERROR 3: respuestas al azar, respondían con números sin ninguna lógica aparente: 4, 8, 9, 5.

ERROR 4: transformaban la adición en sustracción. Por ejemplo: "*En la casa verde hay 6 gallinas y otras 4 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa verde?*", representaban 6 gallinas y quitaban 4.

ERROR 5: transformaban la sustracción en adición. Siguiendo con el ejemplo inicial: representaban 11 gallinas y añadían 6, contando un total de 17.

ERROR 6: representaban correctamente el problema, pero no ofrecían ninguna respuesta. Ponían 11 gallinas en la casa amarilla y quitaban 6, pero decían que no sabían cuántas gallinas quedaban en la casa amarilla.

Hasta aquí hemos expuesto los errores surgidos cuando los problema implicaban acción. Cuando la estructura era de no acción hallamos además de éstos, otros errores que describiremos a continuación, tomando como ejemplo el siguiente problema: *“las gallinas preparan la comida, ponen en la casa roja 4 sacos de trigo y en la casa verde ponen 5 sacos de trigo más que en la casa roja. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa verde?”*.

ERROR 7: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación. Así procedían a representar el problema colocando 4 sacos de trigo en la casa roja y 5 en la verde, y respondían “5”.

ERROR 8: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional. Colocaban cuatro sacos en la casa roja y 5 en la verde, después añadían 5 sacos más a la casa verde y respondían 10 (i.e., $5+5$).

ERROR 9: resolvían el problema utilizando la operación que les resultaba más sencilla, ya fuera la adición o la sustracción. Por ejemplo, sumaban los números que aparecían en el enunciado $4+5$ o los restaban $5-4$.

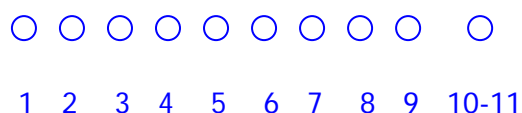
ERROR 10: comprendían el sentido de la relación comparativa “más que” / “menos que”, pero no podían establecer una cuantificación precisa a partir de ella. Por ejemplo: “en la casa verde hay 7 sacos porque siete son más que 4”.

2. Errores procedimentales:

ERROR 11: surgían cuando intentaban representar cantidades que superaban los 10 dedos de la mano.

3. Errores de ejecución:

ERROR 12: se producía un error de conteo cuando al representar, por ejemplo el minuendo (i.e., 11) algún elemento se contaba en dos ocasiones, estableciendo un punto de partida erróneo para quitar la cantidad indicada por el sustraendo (i.e., 6).



Como se puede apreciar en la Gráfica 9, la mayoría de los procedimientos erróneos fueron conceptuales.

Tomando en consideración el tipo de problema, en los de sustracción - acción el error más habitual fue el de conteo (i.e., Error 12) en el grupo de 4-5 años (71,43% de ensayos), error totalmente ausente en el de los mayores. Por ejemplo: *"en la casa verde hay 6 gallinas y dos se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?*, Sergio (4 años) cogió gallinas de la caja y las fue colocando sobre la mesa, en total 7, después las contó una a una, pero al saltarse una en el recuento el resultado fue 6. A continuación, retiró las "2 gallinas que se van de paseo" y de nuevo volvió a contar, pero en esta ocasión le salieron "5". Parece claro que Sergio no presentaba ningún error conceptual, sino que sus fallos eran debidos a una escasa habilidad de conteo.

En el grupo de 5-6 años la respuesta errónea más habitual en sustracción-acción fue responder al azar (i.e., Error 3 en el 50% de los ensayos). Además, en este

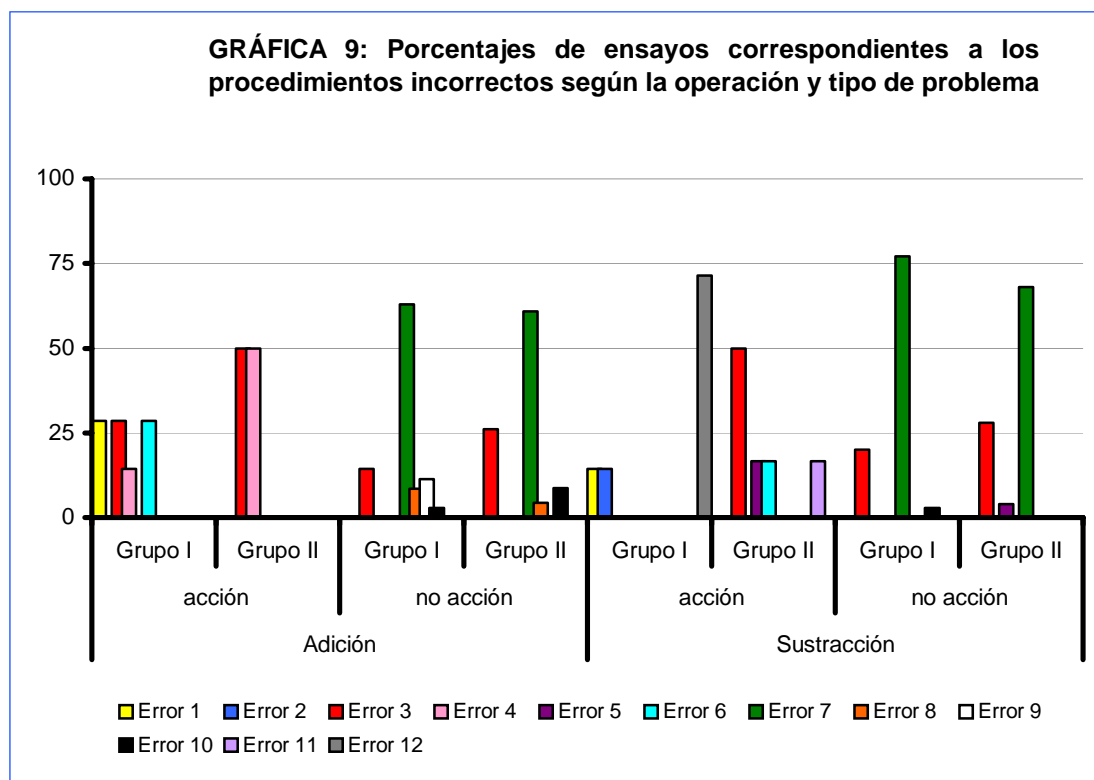
mismo grupo, aparecieron errores procedimentales (i.e., Error 11, en el 16,67% de los ensayos) que nos conducen a pensar que si bien existía por parte de los niños una cierta comprensión de la sustracción, las estrategias de resolución no resultan del todo eficaces. Por ejemplo: "*En la casa amarilla hay 11 gallinas y 6 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa amarilla?*". Enrique (5 años) extendió las dos manos y señaló "un dedo imaginario" para representar el 11, después contó hacia atrás al tiempo que señalaba los dedos: "11 (señaló el dedo que no existía) 10, 9, 8, 7, 6", pero se olvidó de que ya había contado el "dedo imaginario" y procedió a restar un dedo más de la otra mano para que fuesen 6 (valor correspondiente al sustraendo) con lo que respondió 4, que eran los dedos que permanecían levantados.

En los problemas de adición – acción, en el grupo de los mayores se producían dos tipos de errores: transformaban la adición en sustracción (50% de los ensayos) y respuestas al azar (50% de los ensayos). Este último error también lo cometieron los más pequeños, aunque en un porcentaje muy inferior (i.e., Error 3, en el 28,57% de los ensayos). Desde nuestro punto de vista, ello puede obedecer a que los mayores no comprendían el problema planteado y optaban por ofrecer simplemente una respuesta al azar. Sin embargo, los de 4-5 años creían entender lo que demandaba el enunciado e intentaban resolverlo, aunque fuese repitiendo una de las cantidades del enunciado (i.e., Error 1, en el 28,57% de los ensayos). Respecto al error consistente en sustraer en vez de sumar también aparecía en el grupo de 4-5 años (14,29% de los ensayos). Por ejemplo: "*en la casa azul hay 3 gallinas y otras tres van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?*", Israel (4

años) puso tres gallinas dentro de la casa azul, las sacó y dijo: "*tres menos tres son 0, no queda ninguna*" (ver Gráfica 9).

Cuando los problemas se presentaron en términos de *no acción*, tanto en la adición como en la sustracción y en ambos grupos de edad el error más habitual consistió en que los niños interpretaban la proposición relacional como una proposición de asignación (62,86%, 60,87%, 77,14% y 68% de ensayos, respectivamente para la adición y sustracción en los grupos I y II). Por ejemplo: "*Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa roja 4 sacos de trigo y en la casa verde ponen 5 sacos de trigo más que en la casa roja ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa verde?*", consideraban la proposición relacional "*en la casa verde ponen 5 sacos de trigo más que en la casa roja*" como una proposición de asignación "*en la casa verde ponen 5 sacos de trigo*". Las respuestas al azar fueron el siguiente error más frecuente en ambas operaciones y grupos (14,29%, 26,09%, 20% y 28%, respectivamente para la adición y sustracción en los grupos I y II) (ver Gráfica 9).

A modo de resumen, destacamos que en los problemas de adición y sustracción que presentaban estructura de no acción las respuestas erróneas eran similares en ambos grupos y operaciones. Sin embargo, cuando la estructura era de *acción* se producía una mayor diversidad y diferencia entre ambas operaciones y grupos.



Error 1: respondían con una de las cantidades del enunciado. Error 2: introducían cantidades nuevas diferentes a las mencionadas en el enunciado. Error 3: respuestas al azar. Error 4: transformaban adición en sustracción. Error 5: transformaban sustracción en adición. Error 6: representaban correctamente el problema, pero no ofrecían ninguna respuesta. Error 7: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación. Error 8: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional. Error 9: resolvían el problema utilizando la operación que les resulta más fácil. Error 10: comprendía el sentido de la relación comparativa "más que" / "menos que", pero no podían establecer una cuantificación precisa a partir de ella. Error 11: intentaban representar cantidades que superaban los 10 dedos de las manos. Error 12: producían un error de conteo.

C) Procedimientos correctos en problemas verbales de multiplicación y

división:

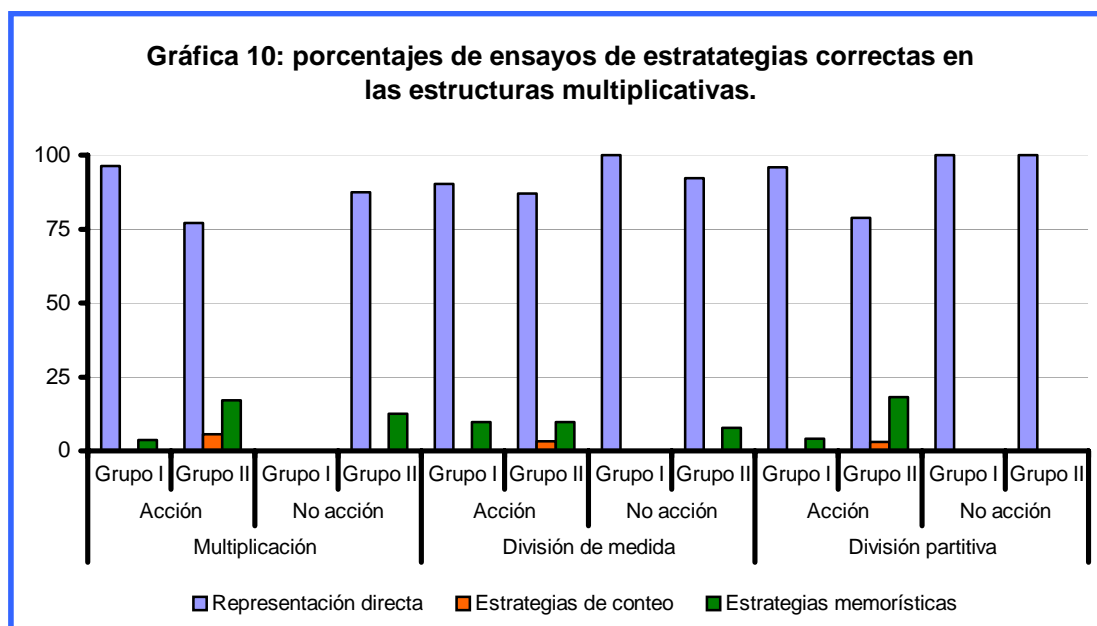
En primer lugar, nuestros datos pusieron de manifiesto, una vez más, que el tipo de problema que implicaba acción resultaba más sencillo en ambos grupos de

edad y en cualquier operación (i.e., multiplicación, división partitiva y división de medida). En segundo lugar, indicaron que el grupo de 5-6 años utilizaba, en general, un mayor número de procedimientos correctos (Tabla 11).

	Multiplicación		División partitiva		División de medida	
	Acción	No acción	Acción	No acción	Acción	No acción
GRUPO I	75	--	66,67	5,56	86,11	19,44
GRUPO II	97,22	22,22	91,66	13,89	86,11	36,11

Tabla 11: Distribución de porcentajes correctos de ensayos según la edad y la estructura semántica del problema.

Asimismo, en tercer lugar, mostraron que todos los niños, independientemente de la edad, tipo de problema y operación, recurrían mayoritariamente a los procedimientos basados en la representación directa (88,43% de ensayos), seguidos de los memorísticos (10,18% de ensayos), si bien estos últimos resultaban más frecuentes en el grupo de los mayores (ver Gráfica 10). En cuarto lugar, evidenciaron que las estrategias de conteo eran privativas de este último grupo. Por ejemplo: *"en la casa verde hay 5 gallinas y en la amarilla hay 2 veces las gallinas que hay en la casa verde. ¿Cuántas gallinas hay en la casa amarilla?"* Chandra (5 años), colocó 5 gallinas en la casa amarilla y respondió: "son 10", explicando que los había contado a partir de las gallinas de la casa amarilla.

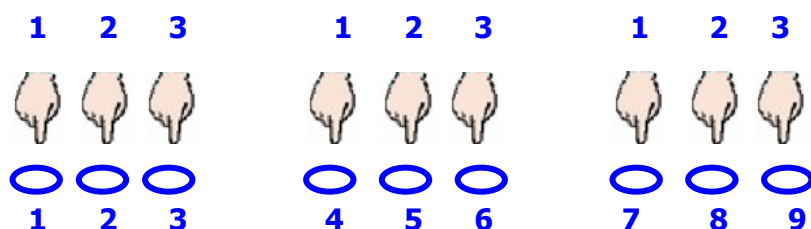


No obstante, el análisis detallado de los datos reveló que si bien la estrategia de representación directa era la más frecuente, el modo de ejecutarla difería, lógicamente, dependiendo de la operación.

Concretamente, en la multiplicación, hemos encontrado 4 tipos de estrategias de representación directa, que hemos ordenado, de acuerdo con su nivel de complejidad, en 4 niveles:

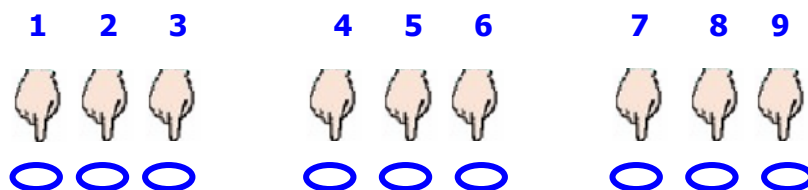
Nivel 1º, *adición repetida con representación uno a uno*: formaban tantos grupos como indicaba el multiplicador y añadían elementos, uno a uno en cada grupo, hasta completar el número correspondiente al multiplicando. Por último, contaban todos los elementos. Por ejemplo: *“las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?”*. Oscar (5 años) colocó 3 casas (para representar el multiplicador) y a continuación, un saco en cada casa,

después otro y así hasta 3 en cada una (i.e., multiplicando). Una vez hecho esto, contó uno a uno todos los sacos.

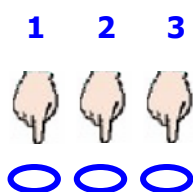


Nivel 2º, *adición repetida con representación por múltiplos:* como en el nivel anterior, formaron tantos grupos como indicaba el multiplicador y añadieron elementos a cada grupo según el multiplicando, pero esta vez la representación la hacían grupo por grupo y no pasaban al siguiente hasta que no habían finalizado el anterior. Finalmente, contaban todos los elementos. En el ejemplo anterior, Ana (5 años) colocó 3 casas, cogió 3 sacos y los colocó en una, de nuevo tomó otros 3 y los puso en otra casa y tres más para la última. Después contó uno a uno todos los sacos.

Nivel 3º, *adición repetida con representación uno a uno y doble conteo:* representaban el primer conjunto equivalente al multiplicando y así sucesivamente tantos conjuntos como indicaba el multiplicador, al tiempo que contaban. Por ejemplo, Chandra (5 años) cogió 3 sacos, después otros tres y contó 4, 5, 6, y por último 3 más 7, 8 y 9.



Nivel 4º, adición repetida con representación de un único factor y doble conteo: representaban un conjunto equivalente al multiplicando y mentalmente añadían tantos conjuntos como indicaba el multiplicador. Por ejemplo, Adrián (5 años) cogió 3 sacos y añadió los que le faltaban mentalmente 4, 5, 6 (pausa), 7, 8 y 9.



Y cuenta 4, 5, 6 (pausa), 7, 8, y 9

El orden que hemos impuesto a estos procedimientos responde a que suponen distintos grados de elaboración que acercan a los niños a dar el salto a estrategias progresivamente más complejas. Así, en primer lugar, podemos apreciar que en los Niveles 1º y 2º precisaban material físico para representar los dos términos de la operación (i.e., multiplicando y multiplicador), mientras que en el 3º y 4º representaban sólo físicamente el multiplicando y aparecía el doble conteo (i.e., llevar paralelas dos secuencias de conteo). En segundo lugar, el Nivel 2º superaba al 1º en que el reparto se realizó por múltiplos lo que suponía menor tiempo de resolución y menor carga cognitiva. A su vez, los niños del Nivel 4º mostraban una mayor abstracción del número, ya que tan sólo representaban uno de los conjuntos y añadían el resto mentalmente. Sin embargo, en el 3º representaban tantos conjuntos equivalentes como indicaba el multiplicador. Teniendo en cuenta esto, hemos encontrado que el grupo de 5-6 años utilizaba con mayor frecuencia, tanto en los problemas que implicaban acción como en los de no acción, las estrategias de

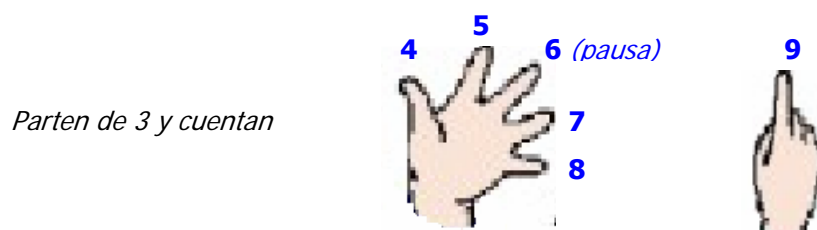
representación directa en las que hacían uso del doble conteo, es decir, Niveles 3° y 4°. En cambio, el grupo de 4-5 años recurría a las estrategias de los Niveles 1° y 2° en los problemas de acción, pero en los de no acción no empleaban ningún procedimiento correcto (Tabla 12).

A pesar de que la presencia de las estrategias de conteo fue apenas apreciable, hemos tenido ocasión de observar dos modos de ejecutarlas:

Nivel 1°, contar todo: contaban el primer conjunto que representaba al multiplicando y seguían contando al tiempo que añadían tantos conjuntos equivalentes como indicaba el multiplicador. En el ejemplo, Enrique (5 años) contó 1, 2, 3 (pausa), 4, 5, 6 (pausa) 7, 8 y 9 y utilizó los dedos como apoyo.



Nivel 2°, contar a partir del primer factor: partiendo del cardinal del primer conjunto (i.e., el multiplicando), añadían los restantes contando. Por ejemplo: 3 y sigue contando 4, 5, 6 (pausa) 7, 8, 9. En consecuencia, se acortaba el proceso anterior de conteo.



			R. D. Nivel 1	R. D. Nivel 2	R. D. Nivel 3	R. D. Nivel 4	E. C. Nivel 5	E. C. Nivel 6
MULTIPLICACIÓN	ACCIÓN	GRUPO I	76,92	23,08	--	--	--	--
		GRUPO II	85,18	7,40	3,70	3,70	50	50
	NO ACCIÓN	GRUPO I	--	--	--	--	--	--
		GRUPO II	57,14	--	14,29	28,57	--	--

R.D. = Representación directa, E.C. = Estrategias de conteo

Tabla 12: porcentajes de ensayos correspondientes a los diferentes niveles de estrategias de representación directa y de conteo en la multiplicación.

Terminamos este análisis de las estrategias correctas de los problemas de multiplicación, recalcando, una vez más, que los procedimientos memorísticos que utilizaban los niños estaban basados en el repertorio de "sumas de dobles" que ya dominaban. Por ejemplo, en el problema: *"las gallinas preparan la cena, colocan en la casa roja y en la casa verde 4 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?"*, Chandra (5 años) respondió: *"8, porque 4 y 4 son 8*, y señalando las dos casas añadió: *"cuatro aquí y cuatro aquí son 8"*.

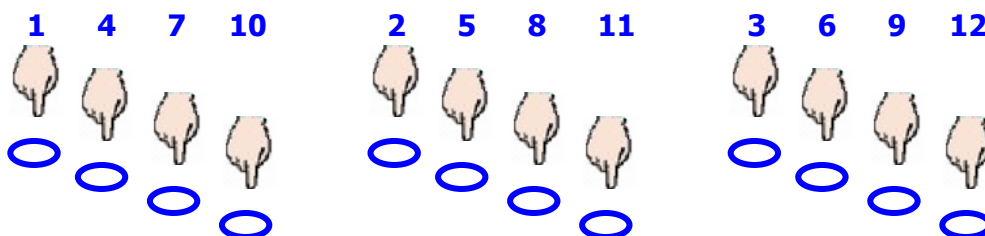
En los problemas de división hemos apreciado múltiples maneras de abordarlos, de ahí que las hayamos clasificado en dos grandes grupos. En el primero hemos incluido las estrategias basadas en el reparto, es decir, los niños tomaban el dividendo y "repartían" elementos formando los conjuntos que indicaba el divisor; en el segundo las estrategias utilizadas se basaron en la "adición repetida", de modo que los niños formaban un primer conjunto como indicaba el divisor y añadían conjuntos equivalentes hasta alcanzar el dividendo.

Además, en cada grupo de estrategias hemos establecido distintos niveles:

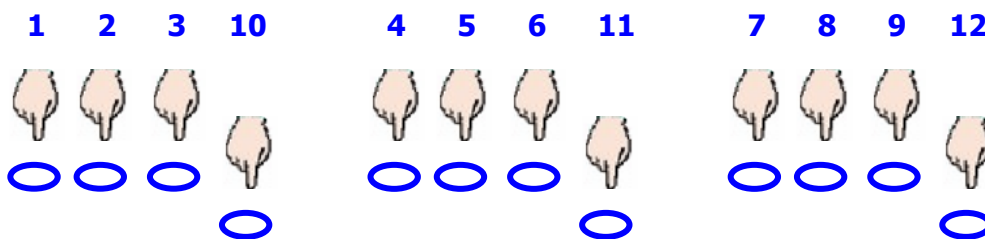
Estrategias basadas en el reparto:

Nivel 1^oa, reparto por ensayo y error: repartían al azar la cantidad correspondiente al dividendo formando tantos grupos como indicaba el divisor y a continuación, redistribuían los elementos repartidos hasta igualar los conjuntos. Por ejemplo: *“tenemos 12 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, la amarilla y la verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?* Ana María (5 años) cogió 12 gallinas y las casas azul, amarilla y verde. Después, procedió a distribuir las gallinas formando las siguientes agrupaciones: 3, 3 y 6; 2, 5 y 5; 4, 5 y 3; hasta conseguir grupos equivalentes de 4 elementos: 4, 4, 4.

Nivel 2^oa, reparto de 1 en 1: repartían el dividendo asignando cada vez una unidad a cada elemento del divisor. En el ejemplo anterior, representaron las 12 gallinas y las tres casas. A continuación, pusieron una gallina en la casa azul, otra en la amarilla y otra en la verde, después otra en la azul, otra en la amarilla y otra en la verde y así sucesivamente hasta repartir las 12 gallinas. Una vez hecho esto, contaron el número de gallinas que había en cada casa y dieron la respuesta, 4.



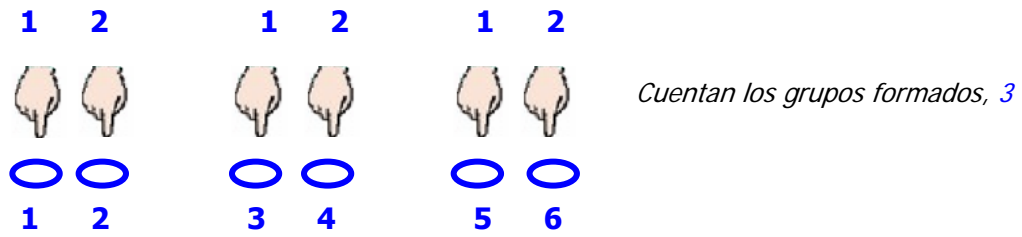
Nivel 3^oa, reparto por múltiplos: a cada elemento del divisor le hacían corresponder más de una unidad cada vez. Por ejemplo, María R. (5 años) cogió 12 gallinas y las casas azul, amarilla y verde, colocó 3 gallinas en la casa amarilla, 3 en la azul y otras 3 en la verde y al no haber agotado los elementos del dividendo situó otra gallina en cada casa.



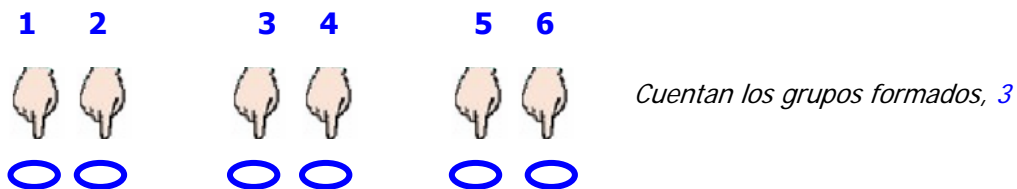
Las diferencias entre unos niveles y otros resultaron evidentes en este grupo de estrategias. En efecto, los repartos en los Niveles 2 y 3 denotaban una mayor habilidad en la forma de efectuarlo, siendo menor el tiempo de reparto en el nivel 3. Además, a diferencia del Nivel 1, el hecho de que el reparto se efectuase de manera adecuada ofrecía más garantías de éxito.

Estrategias basadas en la adición repetida:

Nivel 1^ob, representa y cuenta: formaban grupos a partir del divisor y después contaban para averiguar si tenían tantos elementos como indicaba el dividendo. Por ejemplo: *“6 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 2 gallinas. ¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?*, Virginia (4 años) cogió dos gallinas y las metió en una casa, otras dos en otra casa y dos más en una tercera, después contó todas las gallinas colocadas para comprobar si tenía 6 (que era el dividendo). Por último, contó todas las casas y respondió 3.



Nivel 2ºb, representa con doble conteo: hacían tantos grupos como indicaba el divisor al tiempo que contaban los elementos que iban introduciendo en cada casa. Blanca (4 años) dispuso 2 gallinas en una casa, cogió otra casa y colocó otras dos gallinas, pero al mismo tiempo contó "3 y 4". Por último, cogió otra casa y situó otras dos "5 y 6" (i.e., 6 era el dividendo) y respondió "3". Esta estrategia es conocida con el nombre de *doble recuento* (Baroody, 1988). Este segundo nivel resultaba más complejo que el primero, ya que integraban dos secuencias de conteo al mismo tiempo.



Nivel 4º, representa un único término y prosigue mentalmente: representaban el dividendo o el divisor y llevaban a cabo un reparto mental sin usar objetos físicos.

Este último nivel sería el más evolucionado, porque los niños prescindían de la representación física y utilizaban la representación mental.

Siguiendo esta clasificación, en la Tabla 13 hemos recogido los porcentajes correspondientes a los diferentes niveles, teniendo en cuenta la edad y la estructura semántica en ambos tipos de división.

			ESTRATEGIAS DE REPARTO			ESTRATEGIAS DE ADICIÓN		R. D. Nivel 4º
			R. D. Nivel 1ºa	R. D. Nivel 2ºa	R. D. Nivel 3ºa	R. D. Nivel 1ºb	R. D. Nivel 2ºb	
DIVISIÓN PARTITIVA	ACCIÓN	GRUPO I	13,04	8,69	43,48	21,74	--	13,04
		GRUPO II	38,46	7,69	42,30	3,84	7,69	--
	NO ACCIÓN	GRUPO I	--	--	100	--	--	--
		GRUPO II	--	--	100	--	--	--
DIVISIÓN DE MEDIDA	ACCIÓN	GRUPO I	--	--	50	32,15	17,85	--
		GRUPO II	--	--	59,26	14,81	25,93	--
	NO ACCIÓN	GRUPO I	--	100	--	--	--	--
		GRUPO II	--	100	--	--	--	--

R.D. = Representación directa.

Tabla 13: porcentajes de ensayos correspondientes a los diferentes niveles dentro de las estrategias de representación directa en la división.

A la vista de esta tabla, un primer dato que llamó nuestra atención fue que en los problemas de *acción* de división partitiva los niños, independientemente del grupo de edad, utilizaban mayoritariamente estrategias de representación directa basadas en "el reparto" (especialmente reparto por múltiplos), mientras que en los de medida la presencia de las estrategias basadas en la "adición repetida" aumentó hasta

igualarse con las de reparto. Esta diferencia en el uso de estrategias reveló que en los problemas de división partitiva los niños resolvían agrupando por el divisor, mientras que en los de medida basaban sus estrategias en el cociente. Estos resultados eran acordes con los de Bryant y Squire (2002, 2003) ya que habían encontrado que el éxito de niños de 5 a 8 años en problemas de división partitiva y de medida dependía del modo de presentación del problema, siendo más sencilla la división partitiva cuando se agrupaba por el divisor y la división de medida si se agrupaba por el cociente. Sin embargo, en la estructura de no acción no hemos hallado diferencias, ya que ambos grupos se decantaron por las de reparto.

Además, en cierto modo estos resultados también sintonizan con los de Dopico (2001) en 3º, 4º y 5º de Primaria, ya que los niños utilizaban estrategias *basadas en la adición* en los problemas de división de medida.

Por último, las estrategias de conteo tan sólo estaban presentes en el grupo de los mayores en los problemas de división de medida y partitiva con estructura de *acción*. Las memorísticas se basaban, en ambos grupos y en los dos tipos de división, en el recuerdo de "sumas de dobles". Por ejemplo: "4 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 2 gallinas. ¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?", Israel (4 años) respondió "son 2 porque 2 y 2 son 4".

D) Procedimientos incorrectos en los problemas de multiplicación y división:

Como en las situaciones aditivas, clasificaremos los errores de multiplicación y división en tres grupos: conceptuales, procedimentales y de ejecución.

1 Errores conceptuales

ERROR 1: no entendían el problema. Por ejemplo: *las gallinas de la casa azul comen 4 sacos de trigo y las gallinas de la casa verde comen la mitad que las gallinas de la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?*, Karen (4 años) colocó 4 sacos en una casa y dijo: *"no se que es la mitad"* y no ofreció respuesta alguna.

ERROR 2: respondían con una de las cantidades del enunciado. Siguiendo el ejemplo anterior, Raúl (4 años) respondió "4".

ERROR 3: representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta. Por ejemplo: *"las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 2 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?"*, Jonathan (4 años) cogió las tres casas y colocó 2 sacos en cada casa, pero respondió que no sabía cuantas había en total para la cena.

ERROR 4 : respuestas al azar. Es decir, respondían con diferentes números sin dar una explicación razonada: "3", "4", "5".

ERROR 5: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado. Por ejemplo: *"las gallinas preparan la cena, colocan en la casa roja y en la casa verde 2 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?"*. Jonathan (4 años) desplegó 8 casas, en vez de 2 como indicaba el multiplicando, y colocó 2 sacos en cada una.

ERROR 6: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación. Por ejemplo: *"En la casa verde hay 5 gallinas, y en la amarilla 2 veces las gallinas de*

la casa verde. *¿Cuántas gallinas hay en la casa amarilla?*”, Ana (5 años) respondió que en la casa amarilla había 2 gallinas *“porque has dicho dos veces”*.

ERROR 7: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional. Siguiendo con el ejemplo anterior, María (5 años) dispuso 5 gallinas en la casa verde, 2 gallinas y otras 2 más en la casa amarilla, respondiendo 4. En este caso consideró la proposición *“2 veces más”* como dos veces 2, en vez de 2 veces 5.

ERROR 8: interpretaban erróneamente el término de la comparación. Por ejemplo, Adrián (5 años) colocó en la casa verde 5 gallinas y en la amarilla 5 para que hubiese las mismas que en la casa verde. A continuación, añadió 5 y 5 gallinas más para tener *“2 veces más”*. Después las contó todas y respondió *“15”*.

ERROR 9: adicionaban simplemente las cantidades del enunciado. Es decir, sumaban 2 más 5 .

ERROR 10: sustraían las cantidades del enunciado. Como en el caso anterior, pero esta vez restaban 5 menos 2.

ERROR 11: transformaban la estructura semántica del problema, convirtiendo un problema de *no acción* en *acción*. Por ejemplo en el siguiente problema de división: *“las gallinas de la casa azul comen 6 sacos de trigo y las de la casa verde comen 2 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 2 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa azul?*, Noelia (4 años) cogió los 6 sacos de trigo de la casa azul e hizo grupos de 2 en 2, para representar cada uno de los viajes ejecutados y respondió *“3”*, olvidando la comparación *“¿Cuántos viajes más...?”*.

ERROR 12: transformaban los problemas de división en multiplicación. Por ejemplo en el problema: *"tenemos 4 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul y la roja. En todas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?"*, Nieves (4 años) cogió las dos casas y colocó 4 (i.e., dividendo) gallinas en cada casa, en total 8 gallinas (i.e., 4×2).

2. Errores procedimentales.

ERROR 13: alteraban el tamaño del dividendo. Por ejemplo: *"tenemos 12 gallinas que hay que guardar entre la casa azul, amarilla y verde. En todas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?"*, Miguel Ángel (5 años) dispuso sobre la mesa las tres casas y metió gallinas en cada una de ellas hasta un total de 6 en cada casa (repartiendo un total de 18 gallinas), de tal manera que la respuesta fue "6" en vez de "4".

ERROR 14: no percibían la igualdad del cociente. En el ejemplo anterior, cogían las 12 gallinas y las distribuían en las 3 casas de forma desigual (p.e., 5, 4 y 3), sin tener en cuenta que debía haber el mismo número en cada una.

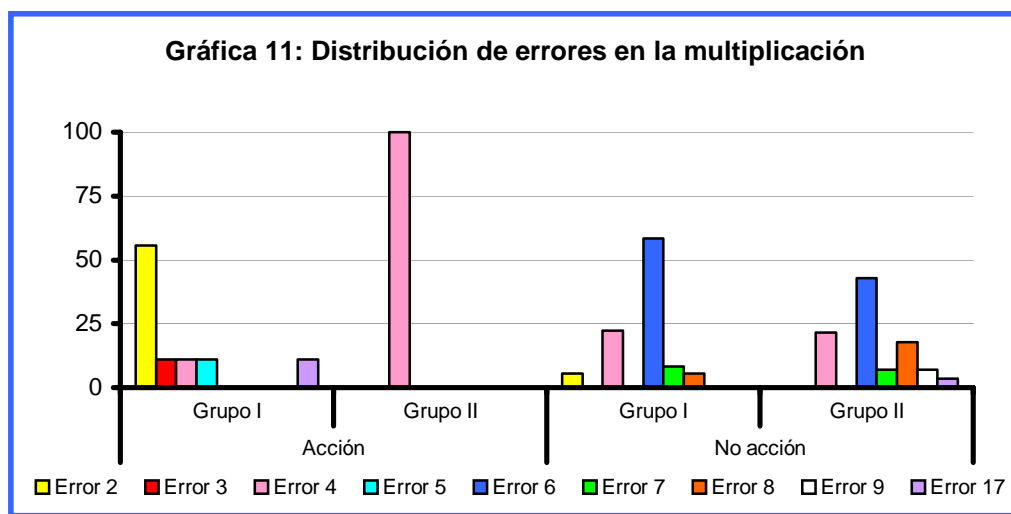
ERROR 15: alteraban el tamaño del divisor. En este caso, repartían 12 gallinas en 4 casas (en vez de en 3), colocando 3 en cada una.

ERROR 16: alteraban el tamaño del dividendo y divisor en un mismo problema. Por ejemplo: *"tenemos 4 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul y la roja. En todas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?"*, Jonathan (4 años) cogió 4 casas (i.e., divisor) y colocó 2 gallinas en cada casa (i.e., dividendo), en total 8.

3. Errores de ejecución.

ERROR 17: errores de conteo. Por ejemplo: *“las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 2 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?, Miguel Ángel (4 años) representó las tres casas y a cada una le asignó 2 sacos, pero al contar los sacos se olvidó de uno y respondió 5 en vez de 6.*

En cuanto a los resultados, hemos hallado diferencias en el tipo de errores que cometían los niños en la multiplicación en función de la estructura semántica (ver Gráfica 11). En concreto, en los problemas de *acción* el error más frecuente, en el grupo I, fue el Error 2 (i.e., responder con una de las cantidades del enunciado), mientras que en el grupo II hubo una única respuesta errónea que consistió en responder al azar.

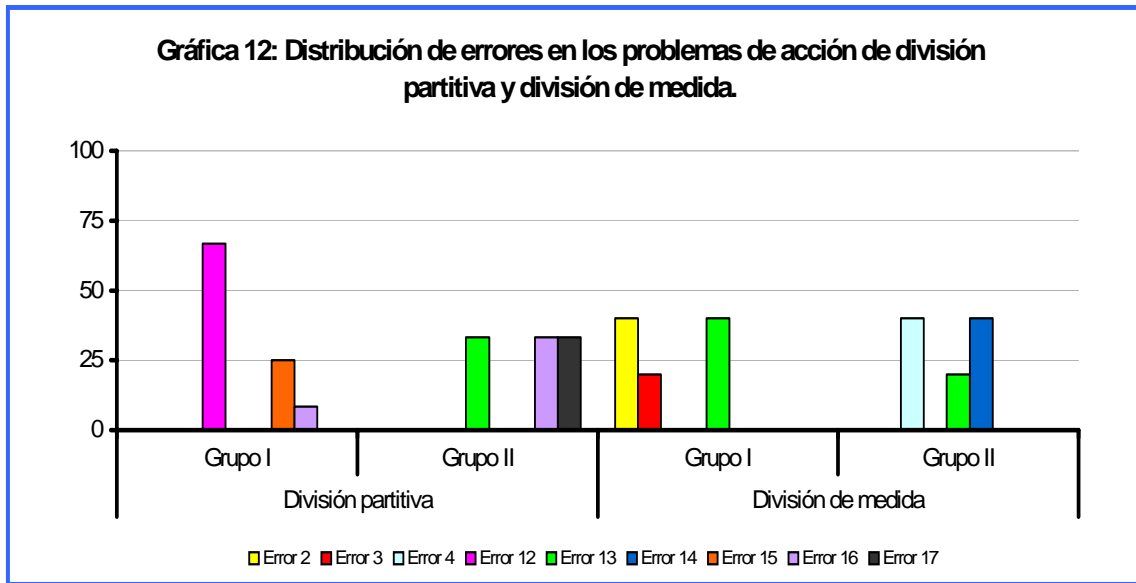


Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado. Error 3: representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta. Error 4: respuestas al azar. Error 5: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado. Error 6: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación. Error 7: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional. Error 8: interpretaban erróneamente el término de la comparación. Error 9: adicionaban las cantidades del enunciado. Error 17: errores de conteo.

Ahora bien, cuando los problemas de multiplicación eran de *no acción* destacó el Error 6 (i.e., transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación), en ambos grupos de edad. Asimismo, en el grupo de los mayores, aparecía con cierta frecuencia el Error 8 (i.e., interpretan erróneamente el término de la comparación). Ello viene a demostrar la mayor habilidad de estos sujetos para entender la relación de comparación, en el sentido de que empiezan a elaborar la expresión "veces más", aunque todavía no les conduzca al éxito deseado.

En la división partitiva los errores, en los problemas de *acción*, fueron diferentes en ambos grupos de edad (Gráfica 12). Así, el grupo I cometió principalmente el error conceptual 12, consistente en convertir un problema de división en multiplicación (i.e., 66,67% de ensayos).

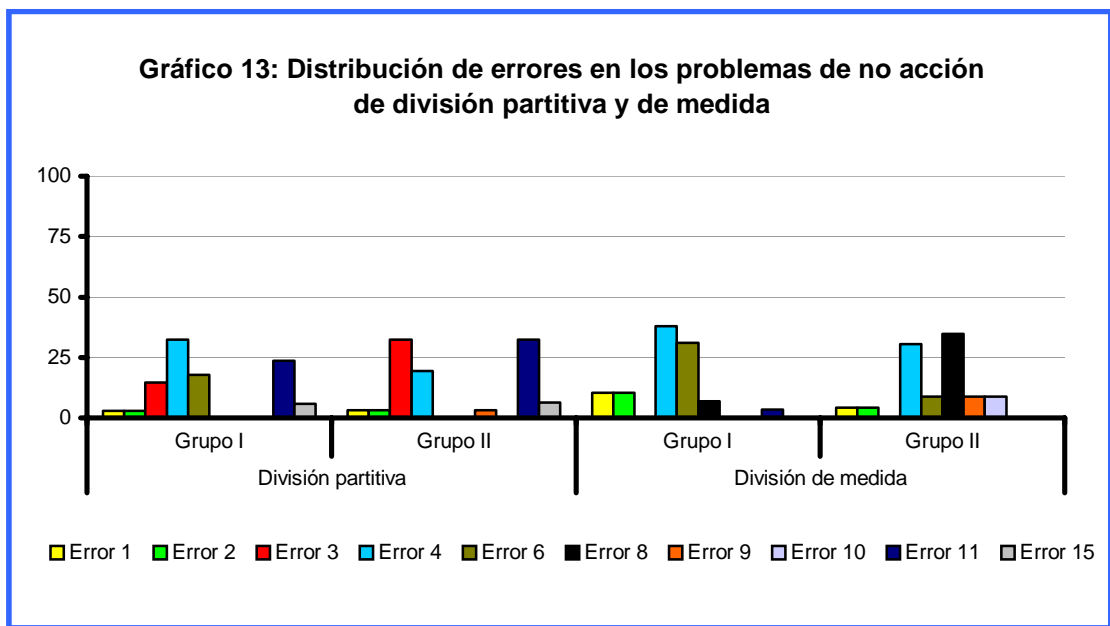
En cambio, el grupo II presentó un mayor porcentaje de errores procedimentales (66,66% de ensayos) relacionados con los términos de la división (i.e., dividendo, divisor y cociente), como los Errores 13 y 16 (i.e., alterar el tamaño del dividendo; alterar el tamaño del dividendo y divisor) y de ejecución (i.e, error 17). Estos errores procedimentales de nuevo aparecieron en este mismo grupo en la división de medida (i.e., Errores 13 y 14).



Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado. Error 3: representaban correctamente el problema con los objetos, pero no daban ninguna respuesta. Error 4: respuestas al azar. Error 12: transformaban los problemas de división en multiplicación. Error 13: alteraban el tamaño del dividendo. Error 14: no percibían la igualdad del cociente. Error 15: alteraban el tamaño del divisor. Error 16: alteraban el tamaño del dividendo y divisor. Error 17: errores de conteo.

En los problemas con estructura de no acción (Gráfica 13) los errores fueron frecuentes en ambos tipos de división. Esta variabilidad se debió a que resultaron más difíciles. En la división partitiva hemos hallado tres tipos de errores en ambos grupos: los Errores 11 (i.e., transformaban la estructura semántica del problema, convirtiendo un problema de *no acción* en *acción*), 3 y 4 (i.e., representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta y respuestas al azar, respectivamente). En la división de medida el error más frecuente en ambos grupos fue el Error 4 (i.e., respuestas al azar). Además, en el grupo de 4-5 años destacó el Error 6, mientras que en el grupo de 5-6 años lo hizo el Error 8. En el primer caso, los niños interpretaban incorrectamente el término comparativo. Por ejemplo en el problema: *“las gallinas de la casa azul comen 4 sacos de trigo y las gallinas de la casa*

verde comen la mitad que las gallinas de la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?, Virginia de 4 años representó la casa azul, colocó 4 sacos de trigo y respondió que las gallinas de la casa verde "comen cuatro mitades de sacos", al tiempo que con su mano hacía el gesto de partir los sacos por la mitad.



Error 1: no entendían el problema. Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado. Error 3: representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta. Error 4: respuestas al azar, Error 6: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación, Error 8: interpretaban erróneamente el término comparativo. Error 9: adicionaban simplemente las cantidades del enunciado. Error 10: sustraían las cantidades del enunciado. Error 11: transformaban la estructura semántica del problema, convirtiendo un problema de no acción en acción. Error 15: alteraban el tamaño del divisor.

En general, los resultados de la división han permitido extraer al menos 3 conclusiones. En primer lugar, los niños mayores resolvieron mejor los problemas con estructura semántica de acción que los pequeños debido, entre otras cosas, a sus

crecientes capacidades lingüísticas y su mayor experiencia con el reparto. Ahora bien, como señalaron Correa, Bryant y Nunes (1998) dividir supone algo más que repartir, implica establecer relaciones entre los términos de la división y comprender que la alteración en el tamaño de uno de ellos afecta al resultado. Este conocimiento resulta frágil, por el momento, en nuestros sujetos, posiblemente por su corta experiencia matemática.

En segundo lugar, en los problemas de acción no se apreciaron diferencias en los errores dependiendo de que la división fuese partitiva o de medida, lo que nos conduce a pensar de nuevo que existe mayor relación entre ellas de lo que habían sospechado Fischbein et al (1985).

Finalmente, como en la multiplicación, las diferencias entre los grupos se situaban en los problemas de acción y así, los mayores cometían errores procedimentales mientras que entre los pequeños abundaban los conceptuales. Por el contrario, la dificultad extrema de los problemas de no acción equiparaba a ambos grupos.

3.2. DATOS LONGITUDINALES

Los análisis hasta ahora realizados han puesto de manifiesto diferencias sustanciales entre los grupos de 2º y 3º de Educación Infantil en la resolución de problemas con estructuras semánticas y operaciones diferentes. En este nuevo apartado nos proponemos ahondar en el análisis de estas diferencias y para ello hemos realizado un seguimiento longitudinal de los niños de 2º de EI a lo largo del siguiente curso escolar. Por este motivo, comenzaremos determinando la

significatividad de los diferentes factores considerados (i.e., Momento de la medición, Operación y Tipo de problema). A continuación, analizaremos los procedimientos correctos e incorrectos, que conducían a las respuestas de los niños en los problemas, haciendo especial hincapié en las diferencias entre ambas mediciones. Finalmente, estableceremos a que sujetos concretos afecta especialmente el cambio y la consistencia del mismo en función de la Operación, el Tipo de Problema y los procedimientos de resolución.

3.2.1. Análisis cuantitativo.

De acuerdo con los objetivos de esta investigación interesaba determinar el efecto que tenían las variables Operación y Tipo de problema o Estructura Semántica en un mismo grupo de niños en dos momentos diferentes de su desarrollo evolutivo (i.e., Medición I: cuando los niños cursaban 2º de EI y Medición II: cuando los niños cursaban 3º de EI). En consecuencia, hemos realizado un ANOVA 2 (Momento de la Medición: Medición I vs Medición II) X 5 (Operación: adición vs sustracción vs multiplicación vs división partitiva vs división de medida) X 2 (Tipo de Problema: *acción vs no acción*) con medidas repetidas y ejecutado con el programa SPSS (ver Tabla 14).

Este análisis mostró que eran significativos los efectos principales de los factores Medición ($F_{1,14} = 6.000$, $p < 0.05$), Operación ($F_{4,56} = 4.482$, $p < 0.01$) y Tipo de Problema ($F_{1,14} = 101.083$, $p < 0.01$). Ninguna interacción, doble o triple, fue significativa.

Tabla 14: Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, del ANOVA.

	Medición I		Medición II	
	Acción	No acción	Acción	No acción
Adición	1.53 (0.74)	0.00 (0.00)	1.87 (0.35)	0.27 (0.59)
Sustracción	1.53 (0.83)	0.00 (0.00)	1.40 (0.83)	0.33 (0.62)
Multiplicación	1.47 (0.74)	0.00 (0.00)	1.60 (0.74)	0.33 (0.62)
División partitiva	1.27 (0.88)	0.07 (0.26)	1.53 (0.83)	0.07 (0.26)
División de medida	1.67 (0.72)	0.47 (0.52)	1.60 (0.74)	0,60 (0.63)

Puntuación máxima posible: 2

En el factor Medición, las puntuaciones medias indicaron que el rendimiento de los niños era ligeramente superior cuando cursaban 3º de Educación Infantil (\underline{M} :0.96) que cuando se hallaban en 2º curso (\underline{M} :0.80).

Asimismo, el rendimiento de los niños variaba en función de la Operación, como pone de relieve la significación de este factor. En concreto, se apreciaron diferencias significativas en las comparaciones entre la división de medida y los restantes niveles del factor (i.e., sustracción ($p < 0.01$), multiplicación ($p < 0.01$) y división partitiva ($p < 0.01$)) excepto la adición. Por tanto, a los niños parecían resultarles más sencillas las tareas de división de medida (\underline{M} :1.08) y adición (\underline{M} :0.92) que todas las demás.

El tercer factor que resultó significativo fue el Tipo de Problema (i.e., acción vs. no acción). En este caso las puntuaciones medias se distanciaron notablemente, siendo mayor el nivel de rendimiento alcanzado en los problemas que implicaban *acción* (M : 1.55) frente a los de *no acción* (M : 0.21).

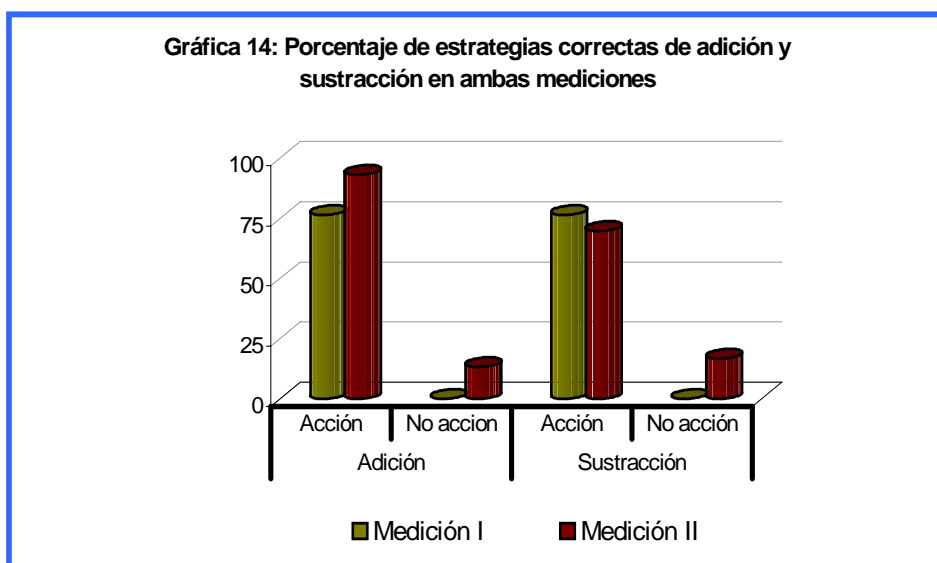
3.2.2. Análisis cualitativo.

1. Procedimientos de resolución: correctos e incorrectos.

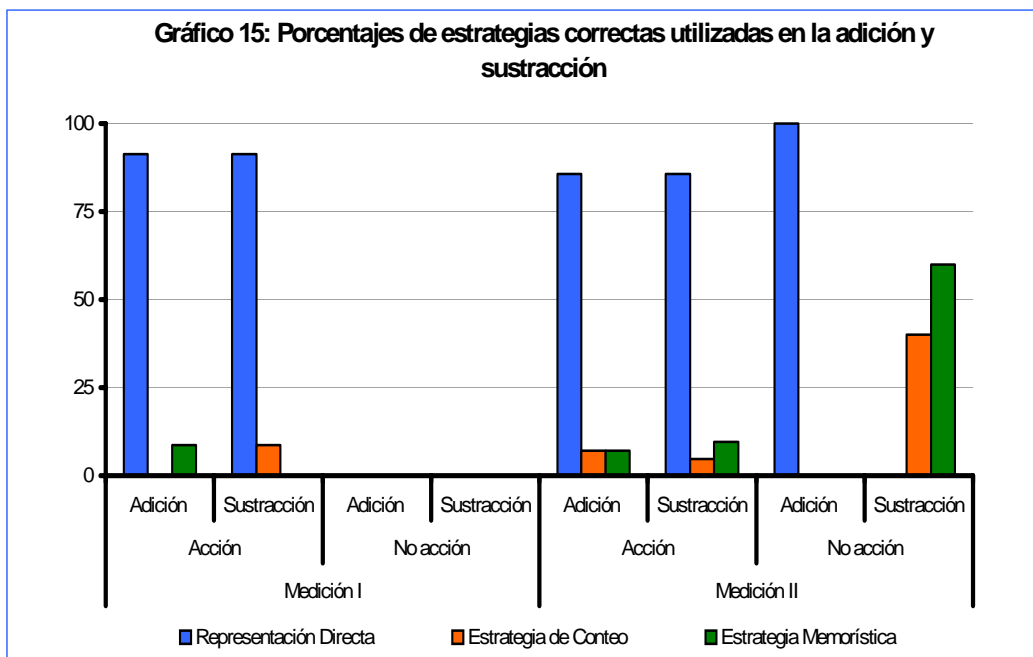
En este apartado, tanto en el caso de las estructuras aditivas como en las multiplicativas, nos mantendremos fieles a la clasificación de los procedimientos correctos e incorrectos realizada en el estudio transversal.

A) Procedimientos correctos en problemas verbales de adición y sustracción:

En ambas operaciones (i.e., adición y sustracción) y mediciones, la estructura que implicaba acción obtuvo un mayor porcentaje de estrategias correctas que la estructura de *no acción* (ver Gráfica 14). Si consideramos por separado ambas operaciones, en la adición los niños emplearon un número mayor de procedimientos correctos en la Medición II, independientemente del Tipo de Problema. En cambio, en la sustracción el porcentaje de procedimientos correctos fue superior en la Medición I cuando la estructura del problema era de *acción*, debiéndose este efecto probablemente al tamaño de las cantidades utilizadas de la Medición II, ya que superaban la decena (i.e., *En la casa amarilla hay 11 gallinas y 6 se van de paseo ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa amarilla?*).



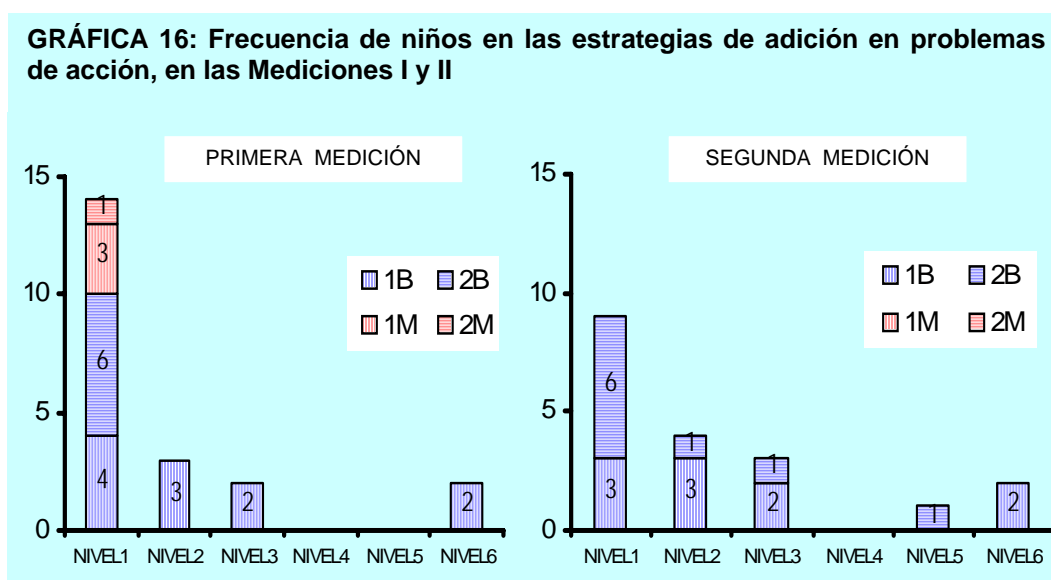
Igualmente, en ambas mediciones, hemos encontrado que las estrategias más utilizadas en orden de aparición fueron las de representación directa, seguidas con una incidencia similar, por las memorísticas y las de conteo. Además en la Medición II, en los problemas con estructura de no acción *de sustracción*, hemos hallado un mayor número de estrategias memorísticas y de conteo (ver Gráfica 15). De nuevo, la explicación de que hayan recurrido a estrategias más evolucionadas en problemas que les resultaban más complejos guardó relación con las cantidades. Por ejemplo, *En la casa verde están descansando 10 gallinas y en la casa amarilla están descansando 5 gallinas menos que en la verde. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa amarilla?*, los niños solucionaron este problema sin necesidad de recurrir a la representación de las cantidades, porque sabían que el resultado de la adición $5 + 5$ se correspondía con los dedos de las 2 manos.



Como indicábamos al inicio de este apartado, en el análisis de las estrategias hemos considerado los mismos niveles que en el análisis transversal y han sido recogidos en la Tabla 15. No obstante, en este caso hemos reflejado también aquellas estrategias que, a pesar de ser adecuadas, no conducían a la solución correcta, es decir, las que presentaban un *"Déficit de utilización"*.

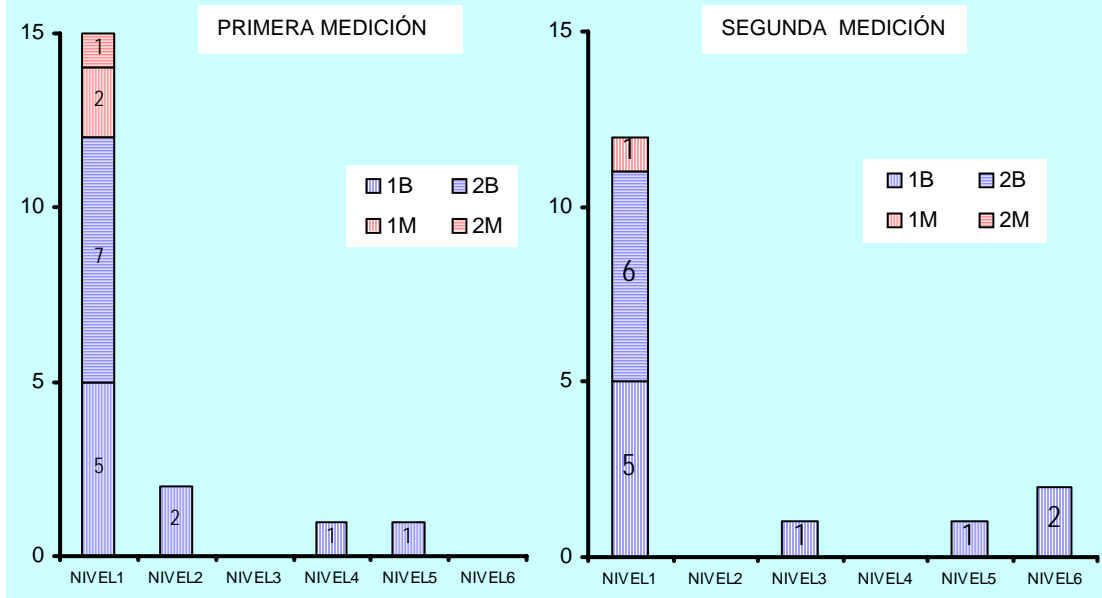
TABLA 15: CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS CORRECTAS TENIENDO EN CUENTA EL FACTOR OPERACIÓN.			
ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN DE MEDIDA Y DIVISIÓN PARTITIVA.
<p>-Nivel 1°: representa y vuelve a contar.</p> <p>-Nivel 2°: representa y cuenta a la vez.</p> <p>-Nivel 3°: representa un único término y cuenta.</p> <p>-Nivel 4°: contar todo sin objetos físicos.</p> <p>-Nivel 5°: contar a partir del primer sumando.</p> <p>-Nivel 6°: estrategias memorísticas.</p>	<p>-Nivel 1°: quitar de.</p> <p>-Nivel 2°: quitar a.</p> <p>-Nivel 3°: estrategias basadas en la adición</p> <p>-Nivel 4°: contar hacia delante.</p> <p>-Nivel 5°: contar hacia atrás.</p> <p>-Nivel 6°: estrategias memorísticas.</p>	<p>-Nivel 1°: adición repetida con representación uno a uno.</p> <p>-Nivel 2°: adición repetida con representación por múltiplos.</p> <p>-Nivel 3°: adición repetida con representación uno a uno y doble conteo.</p> <p>-Nivel 4°: adición repetida con representación de un único factor y doble conteo.</p> <p>-Nivel 5°: contar todo.</p> <p>-Nivel 6°: contar a partir del primer factor.</p> <p>-Nivel 7°: estrategias memorísticas.</p>	<p>-Nivel 1°a: reparto por ensayo y error</p> <p>-Nivel 2°a: reparto de 1 en 1.</p> <p>-Nivel 3°a: reparto por múltiplos.</p> <p>-Nivel 1°b: representa y cuenta.</p> <p>-Nivel 2°b: representa con doble conteo.</p> <p>-Nivel 4°: representa un único término y prosigue mentalmente.</p> <p>-Nivel 5°: estrategias de conteo.</p> <p>-Nivel 6°: estrategias memorísticas.</p>

Las gráficas 16 y 17 muestran la distribución de estos niveles en la adición y sustracción en **problemas de acción**. Como se puede observar hemos procedido a comparar los resultados de la Medición I y II, lo que nos ha permitido verificar, en primer lugar, que en la Medición II tendían a aparecer procedimientos más complejos. No obstante, conviene no perder de vista que dichas estrategias se hallaban ya presentes en la Medición I, aunque con un grado bajo de eficacia. La mejora que se produce en la Medición II tiene que ver precisamente con la disminución de los errores en la aplicación de estos procedimientos. En segundo lugar, en adición, las estrategias más primitivas de Representación Directa (nivel 1) han sido sustituidas por estrategias de los niveles 2, 3 y 5 (ver Tabla 15). En la sustracción, las diferencias no resultaron sustanciales, destacando el dato de que en la Medición II aparecían por primera vez los procedimientos memorísticos.



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

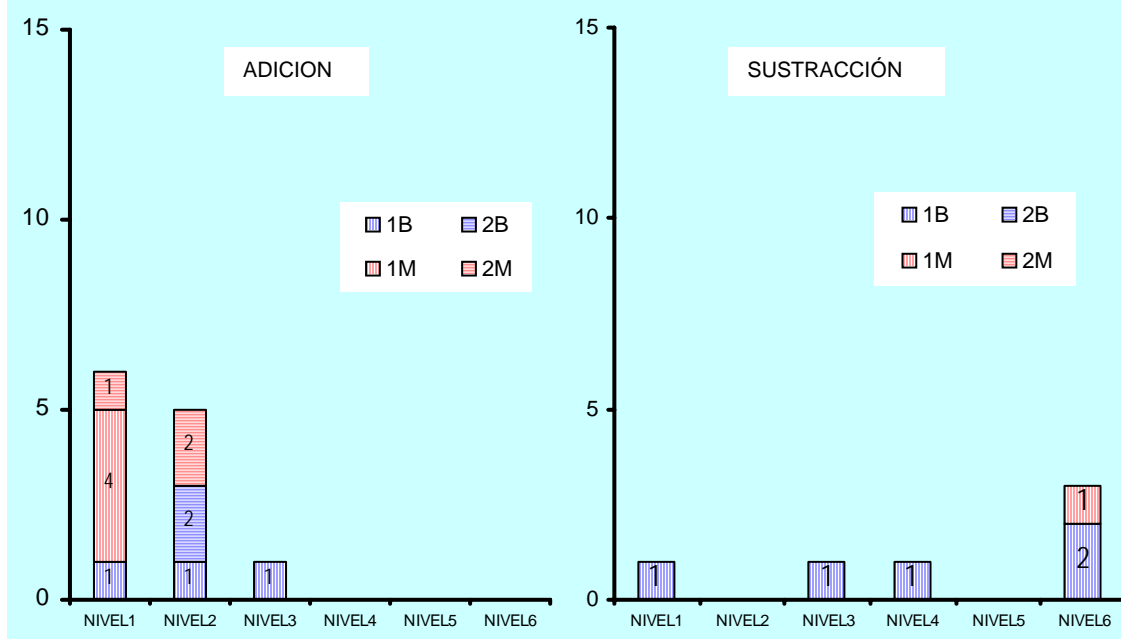
GRÁFICA 17: Frecuencia de niños en las estrategias de sustracción en problemas de acción, en las Mediciones I y II



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

En los **problemas de no acción** la Gráfica 18 pone de manifiesto los avances que tenían lugar en la Medición II. En efecto, en la adición y en la sustracción, no hemos hallado estrategias correctas o con “déficit de utilización” en la Medición I, pero si las hemos encontrado en la segunda puesto que los niños recurrían a la Representación Directa, aunque en varias ocasiones no les llevó a la respuesta correcta. Incluso se arriesgaban a emplear, con éxito, las Memorísticas en la sustracción.

GRÁFICA 18: Frecuencias de niños en las diferentes estrategias en la medición II en problemas de no acción de adición y sustracción



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

En resumen, a la vista de estos resultados, estamos en condiciones de afirmar que las experiencias escolares de los niños ha redundado en una mejora en la Medición II, que se ha reflejado no sólo en que eran capaces de resolver un número mayor de situaciones de adición y sustracción, sino también en los procedimientos de resolución empleados, ya que ahora resultaban más complejos. No obstante, hay que tener en cuenta que si bien las experiencias escolares de los niños con los números eran cada vez mayores, no podemos pensar que sean éstas las únicas responsables de estas mejoras, puesto que deberíamos contar también con las experiencias informales que tenían lugar fuera del colegio.

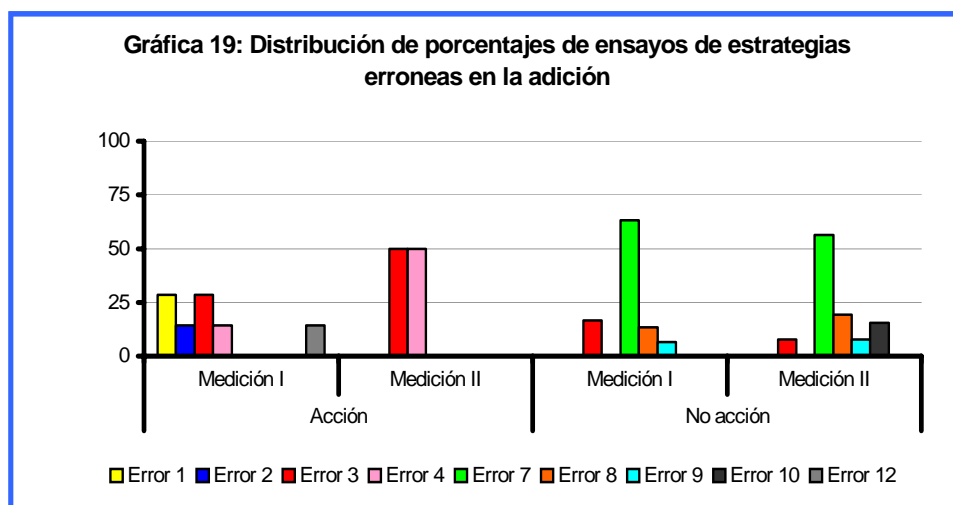
B) Procedimientos incorrectos en problemas verbales de adición y sustracción:

Comenzamos mostrando, a modo de resumen, una tabla con la clasificación de los diferentes errores cometidos por los niños en las estructuras aditivas y multiplicativas (ver Tabla 16).

En lo que sigue analizaremos las estrategias incorrectas, comparando ambas mediciones, para determinar si se produce un cambio sustancial en el tipo de errores cometidos por los niños.

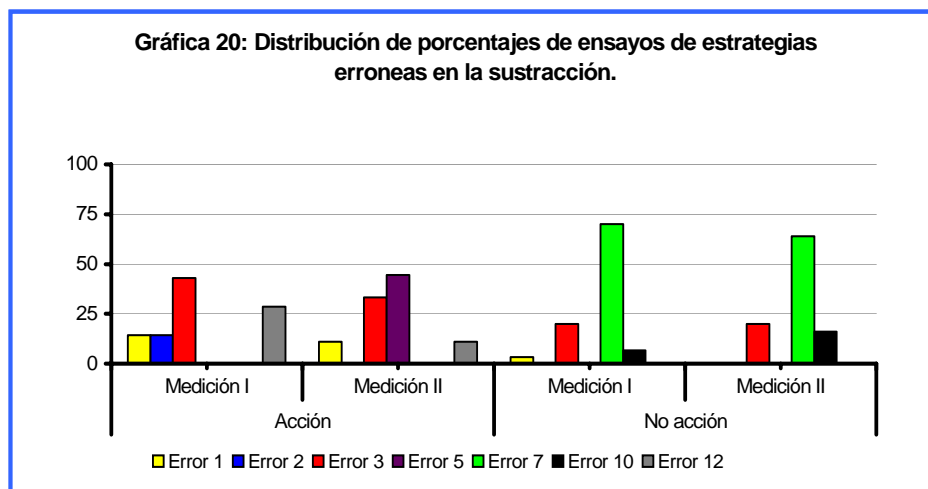
En el caso de la adición no hemos hallado diferencias sustanciales entre la Medición I y II, puesto que los errores de los niños eran conceptuales, tanto en problemas de acción como en los de no acción. No obstante, se producían algunos cambios que merecen ser destacados. En efecto, aunque todos los errores eran conceptuales en los problemas de acción, hemos podido apreciar un cierto progreso en el sentido de que disminuyeron drásticamente aquellos en los que no producían cómputo alguno (p.e., repetir una de las cantidades dadas en el enunciado), siendo sustituidos por errores que implicaban un esfuerzo por operar con las cantidades en la Medición II (p.e., error 4), (ver Gráfica 19). Sin embargo, en los problemas de no acción, en ambas mediciones, la mayor frecuencia de errores consistió en transformar la proposición relacional en una proposición de asignación, lo que de nuevo dejaba constancia de la dificultad manifiesta de estos problemas. Desde el punto de vista evolutivo, cabe señalar que el cambio conceptual se propicia primero en los problemas de acción.

TABLA 16: CLASIFICACIÓN DE ESTRATEGIAS INCORRECTAS TENIENDO EN CUENTA EL FACTOR OPERACIÓN		
ESTRUCTURAS ADITIVAS.		ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS
ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN DIVISIÓN DE MEDIDA Y DIVISIÓN PARTITIVA
<p>Error 1: respondían con una de las cantidades del enunciado.</p> <p>Error 2: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado.</p> <p>Error 3: respuestas al azar.</p> <p>Error 4: transformaban la adición en sustracción.</p> <p>Error 5: transformaban la sustracción en adición.</p> <p>Error 6: representaban correctamente el problema pero no ofrecían ninguna respuesta.</p> <p>Error 7: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación.</p> <p>Error 8: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional.</p> <p>Error 9: resolvían el problema utilizando la operación que les resultaba más sencilla.</p> <p>Error 10: comprendían la relación comparativa "más que" / "menos que", pero no tenían en cuenta la cantidad indicada en el enunciado.</p> <p>Error 11: intentaban representar cantidades que superaban los 10 dedos de la mano.</p> <p>Error 12: error de conteo.</p>	<p>Error 1: no entendían el problema.</p> <p>Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado.</p> <p>Error 3: representaban correctamente el problema pero no ofrecían ninguna respuesta.</p> <p>Error 4: respuestas al azar.</p> <p>Error 5: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado.</p> <p>Error 6: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación.</p> <p>Error 7: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional.</p> <p>Error 8: Interpretaban erróneamente el término comparativo.</p> <p>Error 9: adicionaban simplemente las cantidades del enunciado.</p> <p>Error 10: sustraían las cantidades del enunciado.</p> <p>Error 11: transformaban la estructura semántica del problema, convirtiendo un problema de no acción en acción.</p> <p>Error 12: transformaban los problemas de división en multiplicación.</p> <p>Error 13: alteraban el tamaño del dividendo.</p> <p>Error 14: no percibían la igualdad del cociente.</p> <p>Error 15: alteraban el tamaño del divisor.</p> <p>Error 16: alteraban el tamaño del dividendo y divisor.</p> <p>Error 17: errores de conteo.</p>	



Error 1: respondían con una de las cantidades del enunciado, Error 2: introducían cantidades nuevas diferentes a las mencionadas en el enunciado, Error 3: respuestas al azar, Error 4: transformaban adición en sustracción, Error 7: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación, Error 8: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional, Error 9: resolvían el problema utilizando la operación que les resulta más fácil, Error 10: comprendían la relación comparativa "más que" / "menos que", pero no tenían en cuenta la cantidad indicada en el enunciado, Error 12: producían un error de conteo.

En cuanto a la sustracción, cuando el problema era de *acción* en la Medición I el error más frecuente fue el Error 3 (respuestas al azar), mientras que en la Medición II aunque persistía este tipo de error también destacó el Error 5 (i.e., cambio de sustracción por adición). La dificultad de los problemas de *no acción* provocó que no hubiese diferencias destacables entre ambas mediciones, salvo la aparición del Error 10 (i.e., comprendían la relación comparativa "más que" / "menos que", pero no tenían en cuenta la cantidad indicada en el enunciado) (ver Gráfica 20)



Error 1: respondían con una de las cantidades del enunciado, Error 2: introducían cantidades nuevas diferentes a las mencionadas en el enunciado, Error 3: respuestas al azar, Error 5: transformaban la sustracción en adición, Error 7: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación, Error 10: comprendía la relación comparativa "más que" / "menos que" , pero no tenían en cuenta la cantidad indicada en el enunciado, Error 12: producían un error de conteo.

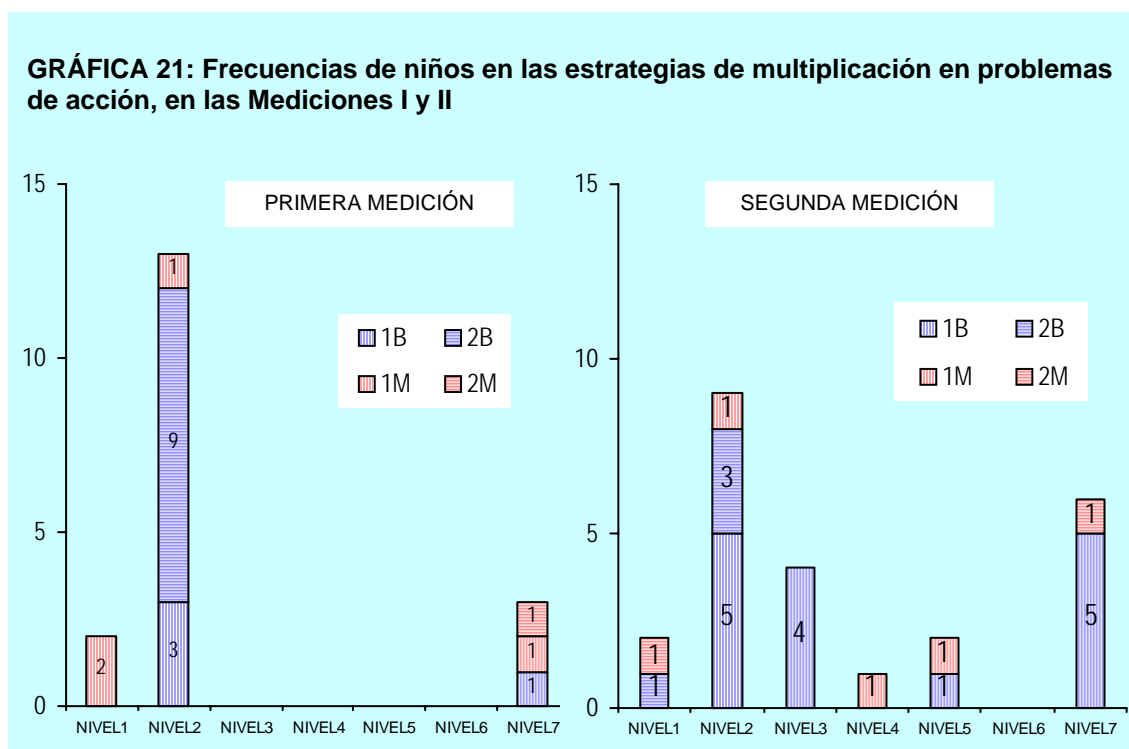
C) Procedimientos correctos en problemas verbales de multiplicación y división:

En general, se ha producido una cierta mejora en los resultados tras la Medición II en la multiplicación y división, independientemente de que el problema implicase o no acción. Este cambio vino propiciado, en cierto modo, por los cambios acaecidos en los procedimientos de resolución. Veamos esto con más detalle.

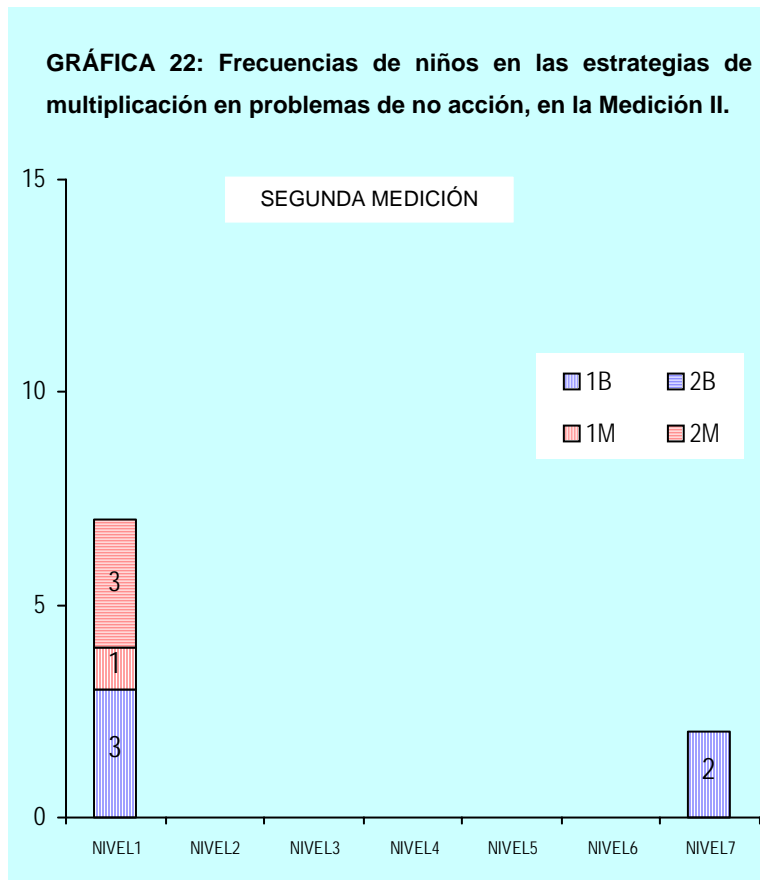
En la multiplicación, cuando los problemas eran de *acción*, la mayoría de los niños recurrían principalmente, en ambas mediciones, a las estrategias de Representación Directa. No obstante como se puede apreciar en la Gráfica 21, en la Medición II estos procedimientos se flexibilizaban dando lugar a nuevas formas de aplicación, que implicaban un grado mayor de desarrollo. En efecto, los niños recurrían a *la representación con doble conteo* y a *la representación de un único*

factor y doble conteo. Además, algunos niños comenzaron a experimentar con los procedimientos de conteo y se incrementó la presencia de las estrategias memorísticas.

Cuando los problemas eran de no acción no hemos registrado ningún procedimiento correcto en la Medición I. Sin embargo, en la segunda, algunos niños resolvieron estos problemas con éxito recurriendo a la *representación directa* uno a uno (ver Gráfica 22).



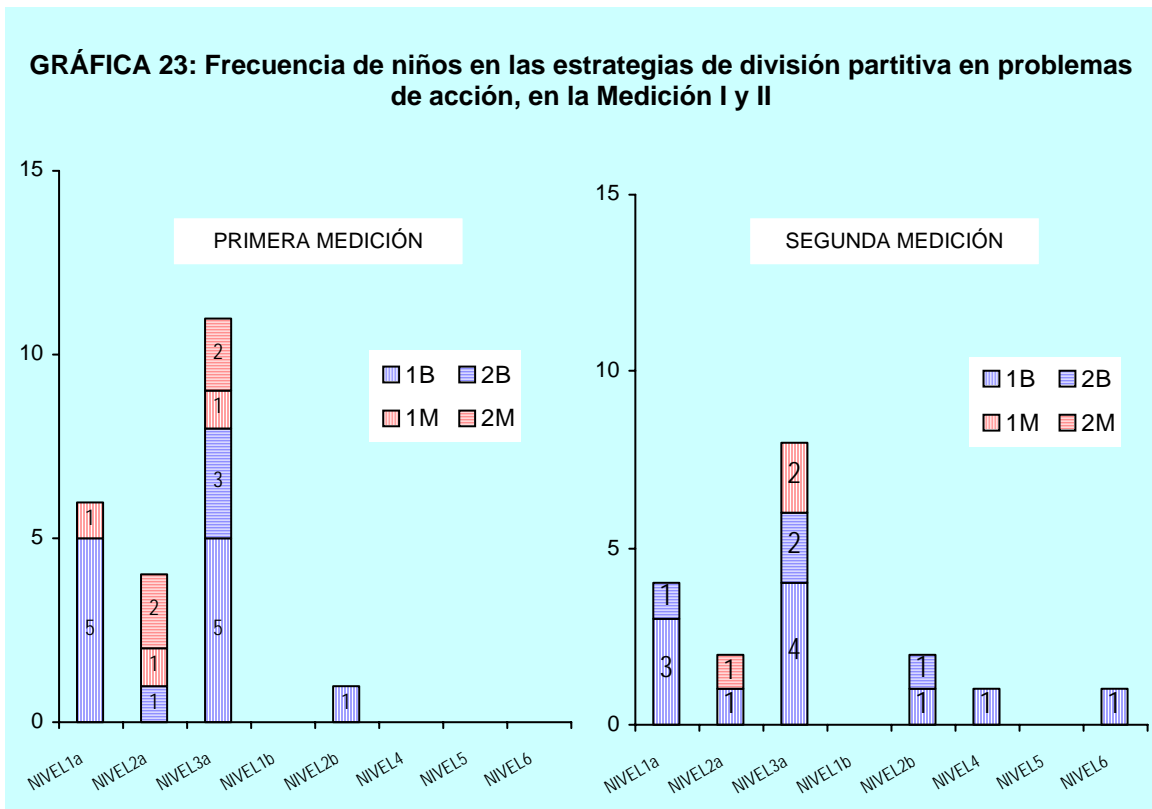
1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

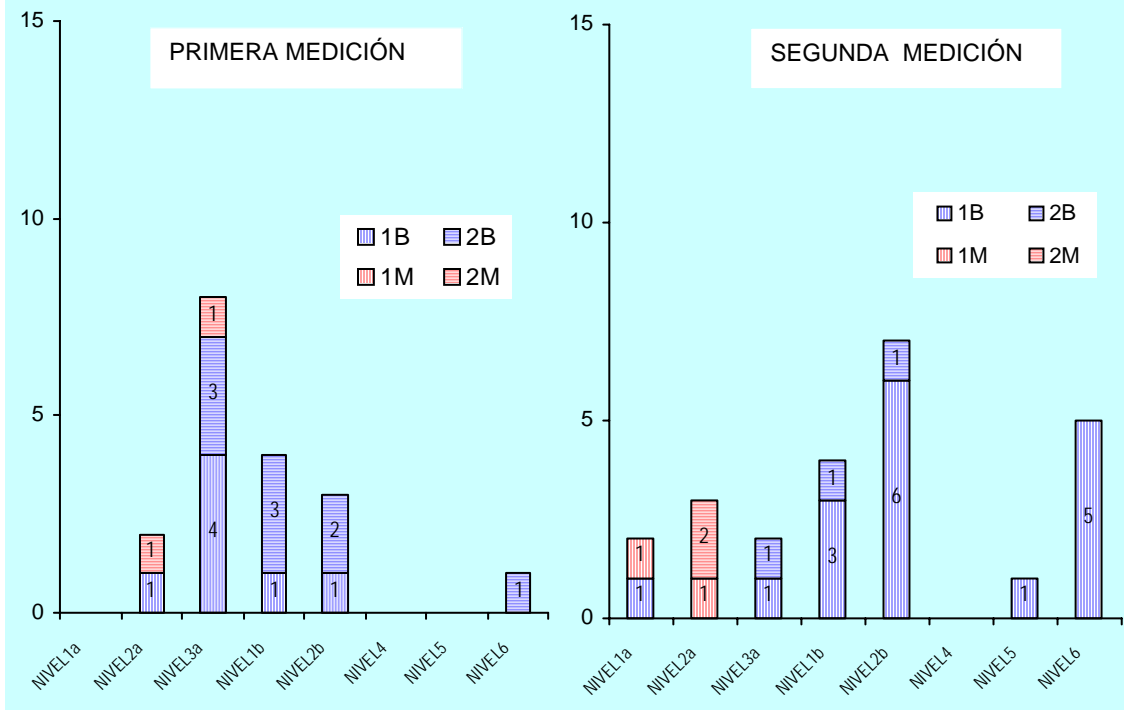
En la división partitiva hemos apreciado algunas diferencias entre la Medición I y II cuando los problemas eran de acción, ya que se producía una mayor variación en los procedimientos en esta última. En la Medición I fueron más consistentes en la utilización de la misma estrategia de un ensayo a otro, aún cuando eso les llevase a una respuesta equivocada. Resumiendo, hemos comprobado que, en ambas mediciones, primaron las estrategias basadas en el reparto y además, en la Medición II había una mayor consolidación de estrategias, disminuyendo las que implicaban “déficit de utilización”.

De forma similar en la división de medida, los niños fueron más consistentes en las estrategias que utilizaban en ambos ensayos durante la Medición I. Pero, a diferencia de la división partitiva, predominaron las estrategias basadas en la adición repetida (i.e., Nivel 1b y Nivel 2b). Estas diferencias en los procedimientos, en ambos tipos de división mostró que los niños se acomodaban al enunciado del problema para poner en marcha una u otra estrategia (ver Gráficas 23 y 24).



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

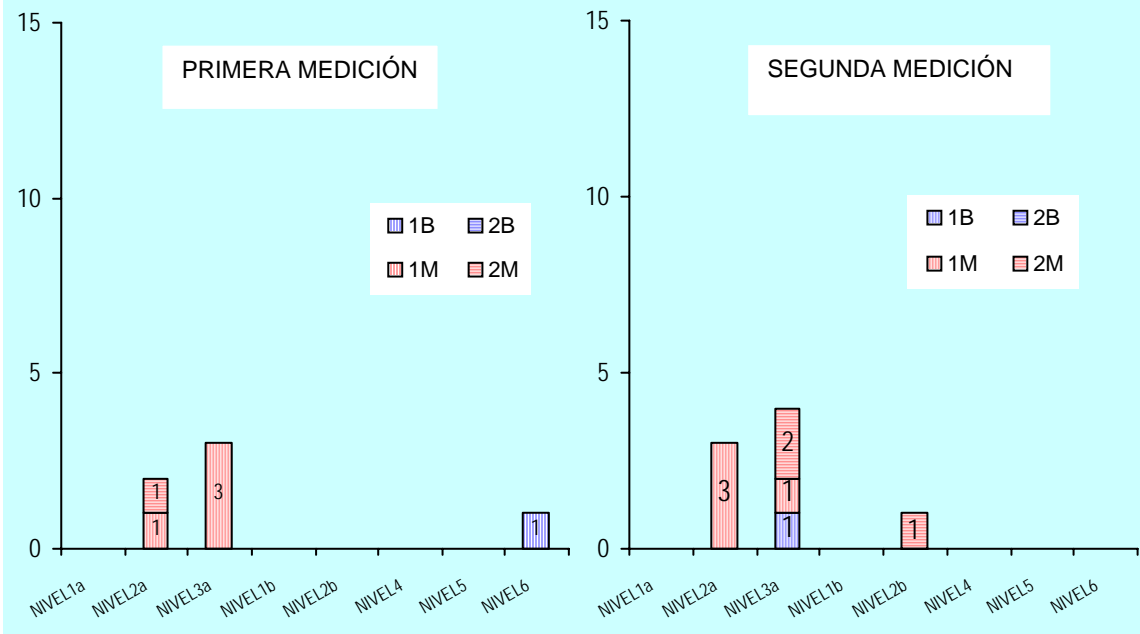
GRÁFICA 24: Frecuencia de niños en las estrategias de división de medida en problemas de acción, en la Medición I y II



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

Cuando los problema fueron de no acción, en la división partitiva encontramos datos similares en ambas mediciones, ya que sólo hubo una respuesta correcta en cada caso. No obstante, se constataron varios intentos por parte de los niños para poner en marcha algunas estrategias que no daban lugar a la respuesta correcta (ver Gráfica 25).

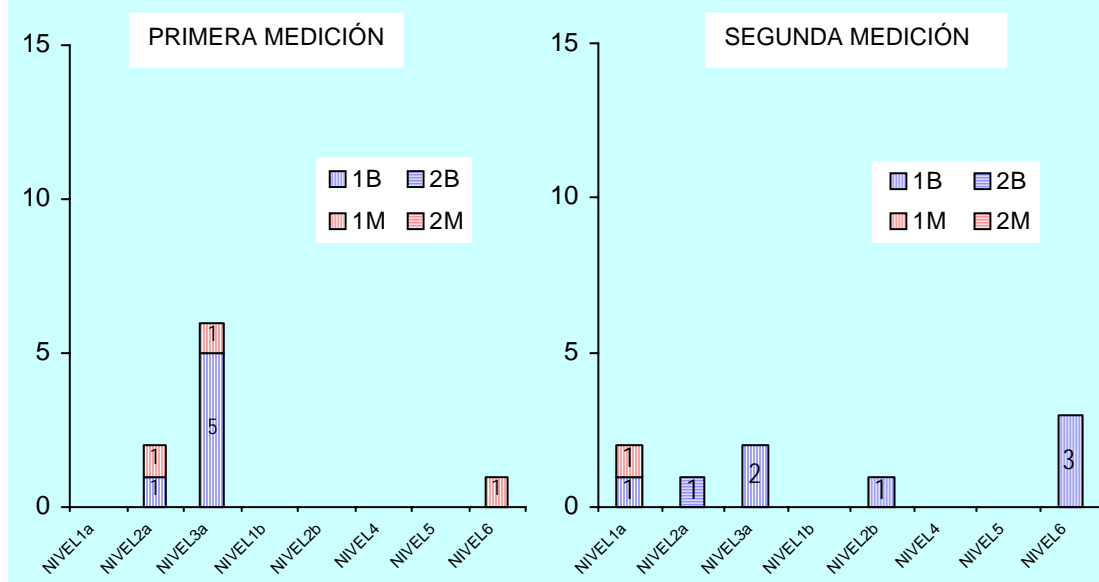
GRÁFICA 25: Frecuencia de niños en las estrategias de división partitiva en problemas de no acción, en la Medición I y II



1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

En la división de medida predominaron las estrategias correctas basadas en el reparto en ambas mediciones. Estos datos comparados con los de la división partitiva mostraron que no hubo diferencias en como los más pequeño afrontaban la división partitiva y la de medida cuando los problemas eran de no acción, aunque el éxito en esta última fue mayor en ambas mediciones (Gráfica 26).

GRÁFICA 26: Frecuencia de niños en las estrategias de división de medida en problemas de no acción, en la Medición I y II



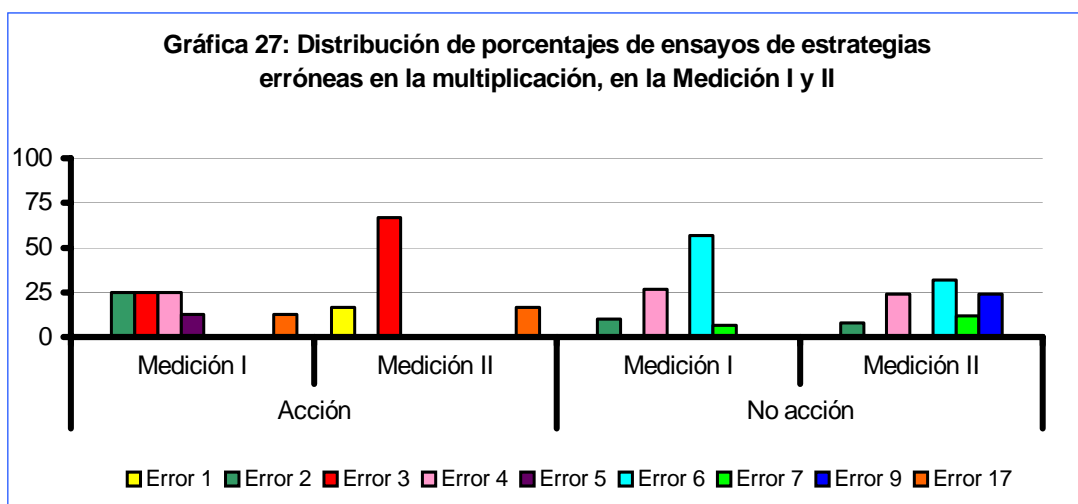
1B= un ensayo correcto, 2B= dos ensayos correctos, 1M= un ensayo incorrecto, 2M= dos ensayos incorrectos.

D) Procedimientos incorrectos en los problemas verbales de multiplicación y división:

Siguiendo la tabla de clasificación de errores (ver Tabla 16), hemos constatado que en los problemas de multiplicación se producían cambios en los errores cometidos por los niños de una medición a otra. Así, en los problemas de acción, en la Medición II los errores fueron debidos a que representaban correctamente el problema aunque no eran capaces de ofrecer ninguna respuesta numérica (Error 3). Sin embargo, en la Medición I, aunque también eran frecuentes estos errores los niños optaban igualmente por responder al azar o con una de las cantidades del enunciado (Gráfica

27). Estas últimas denotaban un grado de comprensión muy pobre, que les alejaba aún más de la posibilidad de conseguir una respuesta correcta.

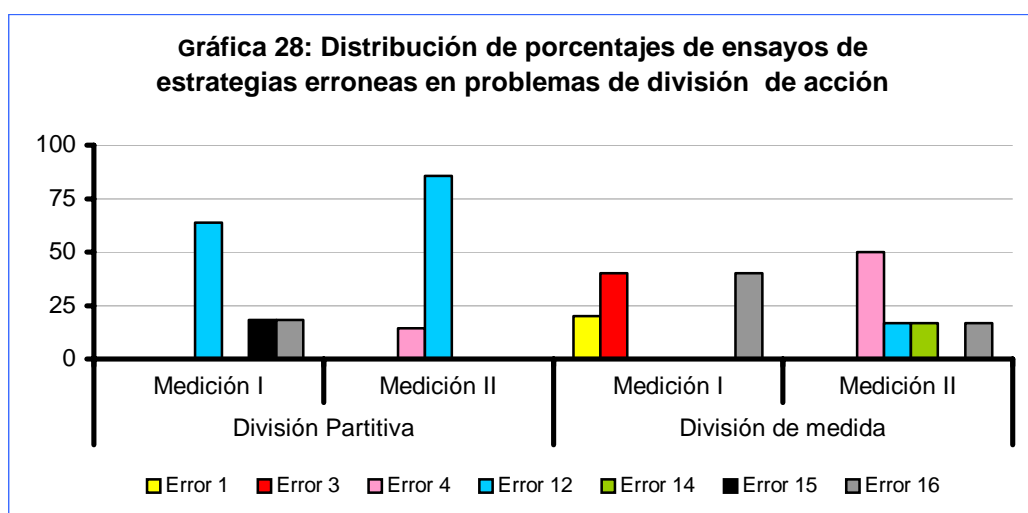
En los problemas de no acción, el resultado más destacado en la Medición II fue la disminución del error en el que transformaban la proposición de relación en una de asignación y el aumento del error en el que adicionaban las cantidades. Este cambio mostró que durante la última medición hubo mayor comprensión de los problemas de no acción, entendiendo que entre las cantidades del problema existía una relación, aunque la elección de la operación no fuese la adecuada.



Error 1: no entienden el problema, Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado, Error 3: representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta, Error 4: respuestas al azar, Error 5: introducían cantidades nuevas diferentes a las del enunciado, Error 6: transformaban la proposición relacional en una proposición de asignación, Error 7: duplicaban la cantidad correspondiente a la proposición relacional, Error 9: adicionaban las cantidades del enunciado, Error 17: errores de conteo.

En los problemas de división partitiva y de medida, consideraremos ambos tipos de división al tiempo para reflejar adecuadamente las diferencias y similitudes entre

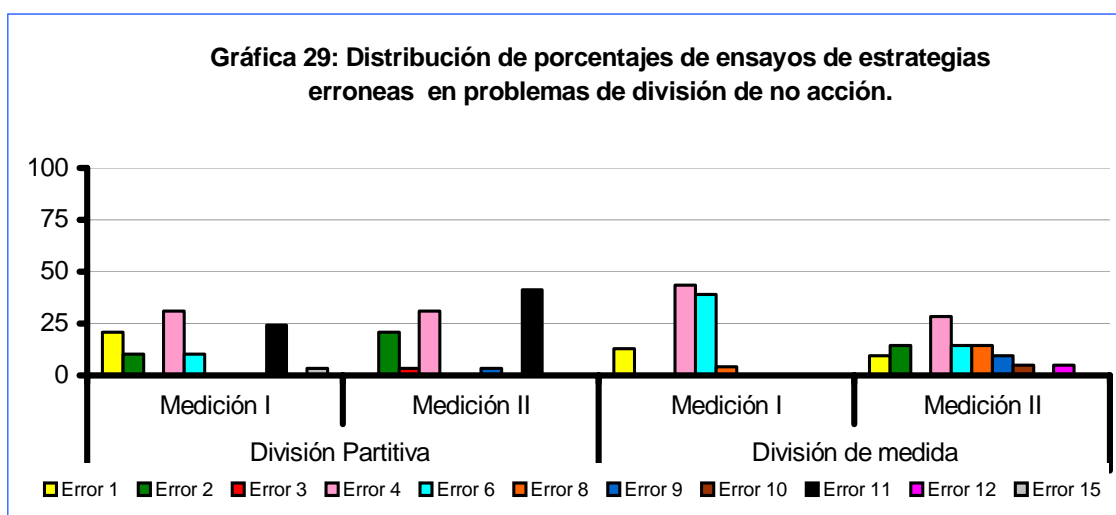
ambas, en los diferentes momentos de la medición. De este modo, en los problemas de acción de división partitiva, en ambas mediciones, transformaron los problemas de división en multiplicación. En la división de medida los errores, en la Medición I, eran conceptuales (Error 3) y procedimentales (Error 16) y en la Medición II predominaron las respuestas al azar, seguidos de los procedimentales (Error 14 y Error 16) (Gráfica 28).



Error 1: no entendían el problema, Error 3: representaban correctamente el problema con los objetos, pero no daban ninguna respuesta, Error 4: respuestas al azar, Error 12: transformaban los problemas de división en multiplicación, Error 14: no percibían la igualdad del cociente, Error 15: alteraban el tamaño del divisor, Error 16: alteraban el tamaño del dividendo y divisor.

En las estructuras de no acción las estrategias erróneas fueron diversas en ambas mediciones. En la división partitiva destacaba el aumento del Error 11 (i.e., convertían el problema de *no acción* en *acción*), lo que indicaba que los niños captaban que se trataba de un problema de división, aunque persistían sus

dificultades para entender el término comparativo y por eso, lo transformaban en una estructura más sencilla. En la división de medida, en la Medición II, los errores fueron muy variables. En efecto, hemos recogido ocho tipos de errores diferentes frente a los 4 de la Medición I, siendo los errores 2, 9, 10 y 12 completamente nuevos. Además, estos tres últimos suponían, junto con el aumento en la frecuencia del Error 8, un esfuerzo claro por parte de los niños para resolver estos problemas, ya que disminuían las respuestas al azar características de la Medición I y eran sustituidas por errores en los que transformaban el problema en estructuras de adición, sustracción y multiplicación (ver Gráfica 29).



Error 1: no entendían el problema, Error 2: respondían con una de las cantidades del enunciado, Error 3: representaban correctamente el problema con objetos, pero no daban ninguna respuesta, Error 4: respuestas al azar, Error 6: consideraban la proposición relacional como una proposición de asignación, Error 8: interpretaban erróneamente el término comparativo, Error 9: adicionaban simplemente las cantidades del enunciado, Error 10: sustraían las cantidades del enunciado, Error 11: transformaban la estructura semántica del problema, convirtiendo un problema de no acción en acción, Error 12: transformaban los problemas de división en multiplicación, Error 15: alteraban el tamaño del divisor.

3.2.3. *El cambio intraindividual.*

A lo largo de este trabajo hemos tenido ocasión de comprobar que la ejecución de los niños, en los dos grupos de edad, difería sustancialmente dependiendo de que los problemas se formularan con estructuras aditivas o multiplicativas y de que implicaran o no acción. En el apartado que sigue, procederemos a examinar estos mismos datos, pero con un objetivo bien distinto, consistente en explicar la forma que adopta el cambio en cada uno de los niños que formaron parte del seguimiento longitudinal.

Esperamos que este análisis nos permita averiguar el efecto conjunto de las variables Operación y Tipo de Problema y los conocimientos previos de cada niño en particular. Para ello, en un primer momento, hemos agrupado los procedimientos de resolución utilizados en las cuatro operaciones en seis niveles, tal y como aparecen recogidos en la Tabla 21.

Tabla 21: equivalencia de las estrategias en las diferentes operaciones.

NIVEL 0 Ninguna estrategia	ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
	- Cuando no utilizan ninguna estrategia.			
NIVEL 1 Representación Directa: contando dos veces.	-Representa y vuelve a contar.	- Quitar de.	-Adición repetida con representación uno a uno. -Adición repetida con representación por múltiplos.	-Reparto ensayo-error. -Reparto uno a uno. -Reparto por múltiplos. -Representa y cuenta.
NIVEL 2 Representación Directa: con doble conteo.	-Representa y cuenta a la vez.	-Quitar de. -Estrategias basadas en la adición.	-Adición repetida con representación uno a uno y doble conteo.	-Representa con doble conteo.
NIVEL 3 Representación Directa: cuentan un único término.	-Representa un único término y cuenta.		-Adición repetida con representación de un único factor y doble conteo.	-Representa un único término y prosigue mentalmente.
NIVEL 4 conteo: cuentan todo.	-Contar todo sin objetos físicos.		- Contar todo.	-Conteo.
NIVEL 5 Conteo: cuentan un término.	-Contar a partir del primer sumando.	-Contar hacia delante. -Contar hacia atrás.	- Contar a partir del primer factor.	
NIVEL 6 Memorísticas.	-Estrategia memorística.	-Estrategia memorística.	-Estrategia memorística.	-Estrategia memorística.

El análisis de datos se realizó con la prueba de Wilcoxon. Hemos considerado como respuestas correctas todos los ensayos en los que los niños seleccionaban una estrategia correcta, aunque la respuesta final no lo fuese por algún error de ejecución (i.e., error de conteo). Además, hemos elegido la estrategia más evolucionada propuesta por los niños, a pesar de que no fuera la misma en los dos ensayos. Los resultados correspondientes a esta prueba se presentan en las gráficas del cuadro 1 (i.e., operaciones con estructura de acción) y del cuadro 2 (i.e., operaciones con estructura de no acción).

En concreto, cuando los problemas eran de acción hemos advertido, por un lado que en las estructuras aditivas ($Z=-0.424$, $p>0.05$ y $Z=-0.566$, $p>0.05$ en adición y sustracción respectivamente) no había diferencias significativas en las estrategias que utilizaban en la Medición I y II (ver Cuadro 1, gráficas correspondientes a estas operaciones). En ambas operaciones no hubo una evolución cualitativa de las estrategias, ya que en la Medición I, cuando los niños tenían 4 años, utilizaban estrategias de Conteo (Nivel 5) y Memorísticas (Nivel 6). No obstante, el uso de estrategias de nivel superior es mayor en la Medición II, lo que demuestra que a lo largo de un año las estrategias se van consolidando y como resultado imponen una menor carga cognitiva a los niños y eso les conduce a usarlas más a menudo.

Por otro lado, en las estructuras multiplicativas ($Z=-2.684$, $p<0.01$; $Z=-2.280$, $p<0.05$ y $Z=-2.356$, $p<0.05$ en multiplicación, división partitiva y división de medida respectivamente) se producían diferencias significativas en las estrategias de una Medición a otra. Así, en la Medición I las estrategias se agrupaban en el Nivel 1, pero

en la Medición II eran más variables abarcando desde el Nivel 1 al 6 (ver en el Cuadro 1 las gráficas correspondientes a estas operaciones).

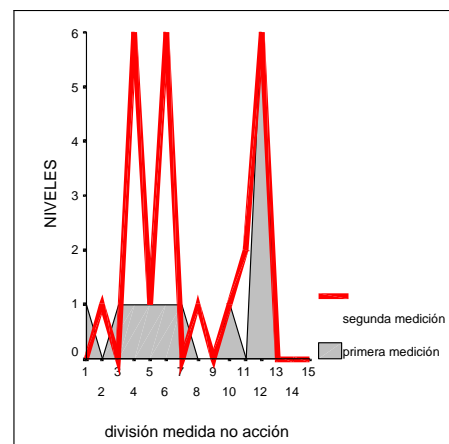
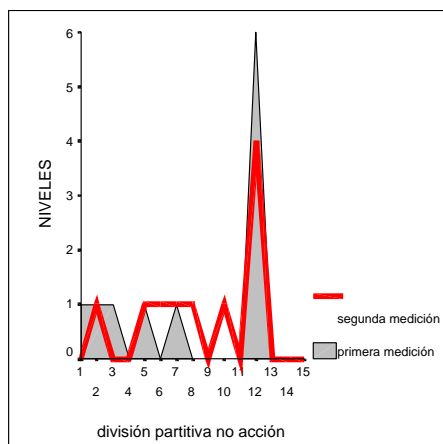
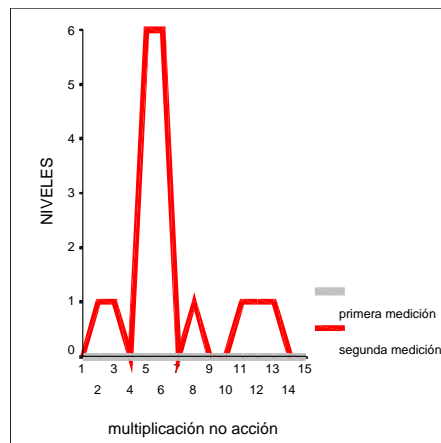
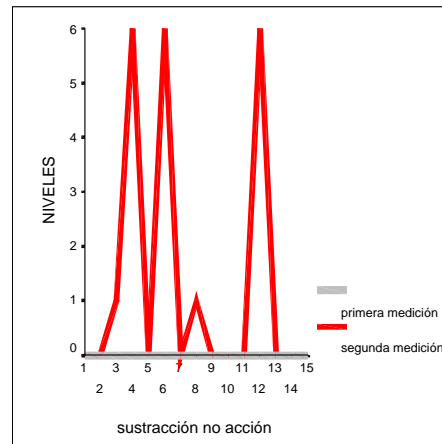
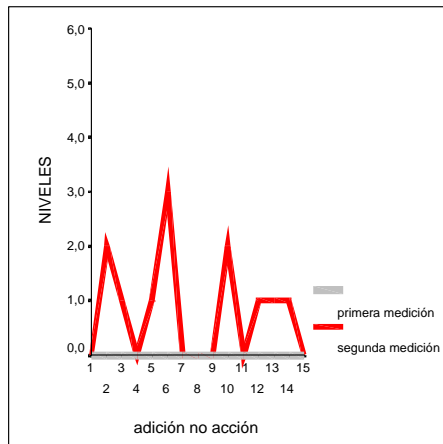
En resumen, tomados conjuntamente los resultados correspondientes a las estructuras aditivas y multiplicativas, en problemas de acción, parecía evidente que si bien los procedimientos de resolución resultaban similares de unas operaciones a otras (i.e., Representación Directa, Conteo y Memorísticas) la aplicación de unas estrategias u otras dependía del tipo de operación implicada. Así, las estrategias más evolucionadas surgían antes en los problemas de adición y sustracción, puesto que ya estaban presentes en la Medición I. Sin embargo en la multiplicación y división había que esperar a la Medición II. Más concretamente, tan solo 3 niños (i.e., el 5, el 7 y el 8) en adición y 4 en sustracción (i.e., el 6, el 8, el 11 y el 12) cambiaban a un procedimiento más evolucionado, pero en la multiplicación lo hacía 10 niños (i.e., el 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 15), 7 en división partitiva (i.e., el 1, 4, 6, 8, 11, 12 y 14) y 9 en división de medida (i.e., 1, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13 y 14).

Cuando las estructuras de los problemas era de no acción, los resultados mostraron que fueron significativos los cambios de estrategias en la Medición II en los problemas de adición, sustracción y multiplicación (ver Cuadro 2). Cuando los niños tenían 4 años no utilizaron ninguna estrategia correcta (i.e., Nivel 0), pero en la Medición II mejoraron claramente su rendimiento 8 niños en adición (i.e., el 2, 3, 5, 6, 10, 12, 13 y 14), 5 en sustracción (i.e., el 3, 4, 6, 8 y 12) y 8 en multiplicación (i.e., 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12 y 13), llegando a poner en marcha estrategias memorísticas.

Sin embargo, no hubo un salto cualitativo tan importante en la división, puesto que el rendimiento de los niños en la Medición I no se situaba en el Nivel 0.

A la vista de estos resultados, se podría concluir que los más pequeños poseen un repertorio amplio de estrategias, aunque no las utilizan por igual en todas las situaciones, siendo determinante el Tipo de Problema y la Operación. Además, las mejoras observadas de una Medición a otra no son sólo cuantitativas, sino también cualitativas en los procedimientos de resolución. En efecto, 6 niños (i.e., el 4, 5, 6, 8, 11 y 12) cambiaban a una estrategia más evolucionada en 5 o más situaciones de acción / no acción entre la Medición I y II.

CUADRO 2: gráficas de la distribución de estrategias en las diferentes operaciones de no acción.



IV. CONCLUSIONES

IV. CONCLUSIONES

En el marco de los análisis efectuados hemos extraído las siguientes conclusiones respecto a las hipótesis formuladas:

Hipótesis 1: los niños de 4-5 años realizarán peor las tareas de resolver problemas verbales que los de 5-6 años, independientemente del Tipo de Operación y Estructura Semántica.

En relación con esta primera hipótesis comprobamos que, efectivamente, en el análisis transversal el nivel de ejecución, independientemente del Tipo de Operación y de la Estructura Semántica, fue superior en el grupo de los mayores, frente a los pequeños. No obstante, cuando tomamos en cuenta los tres factores considerados en este estudio (i.e., Grupo, Operación y Tipo de problema), el rendimiento en ambos grupos resultó similar en la adición, sustracción y división de medida en problemas de acción. Aunque esta tendencia se invirtió a favor del Grupo II en los problemas de multiplicación y división partitiva con estructura de acción y en todas las operaciones cuando la estructura era de no acción. En general, parece que el éxito de los más pequeños tenía lugar en aquellos problemas que podían resolver con *estrategias de adición*, resultándoles más complejos los de multiplicación porque la información no se ofrecía de forma explícita (p.e., 3 por 2, no son cantidades "equivalentes" que se unen o separan, sino que suponen una mayor complejidad porque el niño ha de abstraer su significado, en el sentido de que uno de los términos indica la cuantía y el otro el número de veces que se repite). Asimismo, los de división partitiva eran

difíciles para ellos porque su resolución comportaba poner en marcha estrategias de sustracción repetida. Estos datos concuerdan con los obtenidos en el estudio longitudinal, ya que el rendimiento en la Medición I fue inferior al obtenido en la Medición II. También fueron similares a los encontrados por otros autores quienes demostraron que el rendimiento en los problemas aumentaba de forma proporcional a la edad en niños de 5 a 7 años (p.e., Kuoba, 1989; Kornilaki y Nunes, 1997).

Hipótesis 2: no esperamos encontrar diferencias entre los grupos en el factor Operación.

Esta hipótesis no se confirmó ni en el análisis transversal, ni en el longitudinal. En general, en ambos análisis encontramos diferencias significativas entre la división de medida y el resto de las operaciones (i.e., sustracción, multiplicación, división partitiva), a excepción de la adición. En concreto, el porcentaje mayor de éxito, en ambos grupos de edad, se situó en los problemas de división de medida y de adición.

Por tanto, lejos de lo que el currículo escolar establece en cuanto al orden de dificultad de las diferentes operaciones (i.e., adición, sustracción, multiplicación, división), los niños de E.I. obtenían mejores resultados en los problemas de adición y división de medida. A nuestro entender, el problema del currículo reside en que olvida los conocimientos informales que construyen los niños sobre la adición, sustracción, multiplicación y división a través de las experiencias de “repartir”, “quitar” y “añadir”, entre otras, antes de conocer los algoritmos. Como se demuestra en este estudio, los niños de E.I. ya han empezado a construir los conceptos relacionados con estas cuatro operaciones aritméticas y debe ser la enseñanza formal la encargada de tender un puente entre estos conocimientos iniciales y los posteriores. El punto de partida

podrían ser los procedimientos ideados por los propios niños conectándolo con otros más formales como los basados en los algoritmos. A este respecto, a nadie se le escapa que el aprendizaje del algoritmo de la división resulta más complejo que el de la multiplicación y así sucesivamente porque, entre otras cosas, se basan unos en otros (p.e., la división es una multiplicación y una resta), del mismo modo que los algoritmos son procedimientos más precisos que los basados en el conteo, pero aún así resulta poco apropiado descartar los conocimientos informales generados por los niños. Además, tampoco se puede basar únicamente la enseñanza de estas cuatro operaciones aritméticas en la resolución de algoritmos, relegando los problemas a un segundo plano. Parece claro, a la luz de estos datos arrojados por este estudio y otros muchos a los que nos hemos referido en este trabajo, que la resolución de problemas podría ser el instrumento que facilitase el establecimiento de nexos entre el aprendizaje informal y el formal.

Hipótesis 3: los niños de EI resolverán mejor los problemas con una Estructura Semántica de *acción* (i.e., cambio, sumas repetidas y restas repetidas) que los problemas con una estructura de *no acción* (i.e., comparación) y ello afectará principalmente al grupo de 4-5 años.

Como esperábamos, los resultados del análisis transversal y longitudinal revelaron que el tipo de estructura afectaba al rendimiento de los niños, siendo éste superior cuando resolvían problemas de *acción*. La explicación radica en la dificultad que tienen los niños, especialmente los más pequeños, para interpretar las

proposiciones relacionales que aparecían en los problemas de *no acción*, ya que tendían a transformarlas en proposiciones de asignación. Estas dificultades fueron, en algunas ocasiones, solventadas por los niños mayores y a ello contribuyeron las crecientes competencias cognitivas, en especial las referidas al lenguaje y las experiencias aritméticas. De manera que se atrevieron a utilizar los procedimientos de resolución en un número de situaciones cada vez mayor.

Hipótesis 4: la progresiva elaboración del conocimiento informal permitirá a los niños, cuando alcancen la edad de 5-6 años, mostrar estrategias más elaboradas para resolver los problemas que a los 4-5 años.

Efectivamente, tanto el análisis transversal como el longitudinal mostraron que el grupo de 5-6 años utilizó con mayor frecuencia estrategias más elaboradas y en un número mayor de situaciones. Hay que tener en cuenta que, algunas de estas estrategias, como las memorísticas, ya estaban presentes a la edad de 4 años e incluso, como se ha puesto de manifiesto en otros estudios, en niños no escolarizados (p.e., Ginsburg, Posner y Russell, 1981; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993). No obstante, como decíamos al inicio de este párrafo, los niños mayores usaban estrategias más elaboradas que suponían una menor carga cognitiva. Por ejemplo, en el análisis transversal las estrategias de conteo, sólo aparecieron en el Grupo I en los problemas de sustracción de acción, mientras que el Grupo II las utilizó en todas las operaciones e incluso en los problemas de no acción. En esta misma línea, los datos del estudio longitudinal mostraron que en las operaciones de adición y sustracción de no acción utilizaron en la Medición II, por primera vez, estrategias de representación

directa, conteo y memorísticas. Estas estrategias solían convivir y tendían a echar mano de las menos desarrolladas en las situaciones más complejas.

Hipótesis 5: las estrategias de resolución estarán determinadas por la Operación y Tipo de Problema.

Los resultados transversales y los longitudinales indicaron que los niños tendían a recurrir a los procedimientos de representación directa. Asimismo, hallamos, en ambos grupos, estrategias de conteo y memorísticas. No obstante, hubo diferencias evidentes en el uso de unas y otras dependiendo del Tipo de Problema. Por ejemplo, utilizaron más las de conteo y memorísticas en los problemas con estructura aditiva (i.e., adición y sustracción) que en los problemas con estructura multiplicativa (i.e., multiplicación, división partitiva y división de medida). Además, las estrategias evolutivamente más desarrolladas, aparecieron, en general, en los problemas de acción.

En otro orden de cosas, las cantidades del enunciado parecían desempeñar un papel importante en la selección de la estrategia más apropiada. De este modo, las estrategias memorísticas aparecieron principalmente cuando los niños podían hacer uso de los dobles.

Por último, queremos resaltar que el hecho de que los niños dispongan de procedimientos de resolución sofisticados no garantiza que resuelvan con éxito los problemas más complejos de no acción, ni que sean estos a los que recurren cuando los resuelven certeramente. Por el contrario, en este último caso solían utilizar, como indicamos antes, procedimientos más simples.

Hipótesis 6: con la edad los errores experimentarán cambios cuantitativos y cualitativos.

Los datos aportados por los estudios transversal y longitudinal revelaron que los niños pequeños cometían más errores que los mayores. Además, si tenemos en cuenta los factores Operación y Tipo de Problema hemos constatado que en los problemas de estructuras aditivas de acción los mayores presentaban más errores de ejecución, mientras que los pequeños mostraban errores conceptuales (p.e., repetir una de las cantidades del enunciado) y errores de conteo. En el primer caso, parecían originarse en que recurrían a estrategias complejas como “contar hacia atrás” y la falta de automatización generaba un gran número de errores de conteo. En los problemas de estructura multiplicativa los errores procedimentales nuevamente proliferaron entre los mayores. Por ejemplo, al resolver los problemas de división no consideraban la necesaria equivalencia del cociente. Los pequeños respondían erróneamente con una de las cantidades del enunciado y también resolvían los problemas de división como si se tratasen de una multiplicación, mientras que los errores procedimentales resultaron escasos.

Cuando la estructura era de no acción, en los problemas con estructura aditiva no hubo diferencias significativas entre ambos grupos, siendo el error más frecuente de transformar una proposición relacional en una proposición de asignación. Este error también predominó en los problemas de multiplicación en ambos grupos. En los de división también fue el más habitual en el grupo de los niños pequeños, junto con las respuestas al azar, mientras

que los mayores cometieron errores en los que transformaban el problema en adición, sustracción o multiplicación.

Para terminar, nos gustaría señalar que este trabajo pretende ser una contribución al estudio de los conocimientos informales sobre la aritmética elemental en niños de Educación Infantil. Nuestro objetivo último era desvelar las características de ese conocimiento para vincularlo con la enseñanza posterior de los conocimientos formales. Para ello, hemos optado por una perspectiva evolutiva, ya que, desde nuestro punto de vista, cualquier pauta educativa ha de tomar en consideración los resultados evolutivos. En efecto, si conseguimos establecer los niveles evolutivos en la adquisición de uno u otro procedimiento, la enseñanza puede facilitar a los niños el tránsito de uno a otro, sin perder de vista las diferencias individuales. Son esas diferencias, precisamente, las que hemos intentado reflejar en el último apartado de la Tesis en el que nos hacemos eco de los cambios individuales en los procedimientos de resolución de un medición a otra. En este estudio hemos obtenido algunos datos evolutivos destacados, que se suman a los encontrados en otros trabajos. No obstante, aún son necesarias nuevas investigaciones que no sólo corroboren, sino que amplíen y abran nuevas perspectivas de trabajo.

V.BIBLIOGRAFÍA

V. BIBLIOGRAFIA

Aguilar, M., Alcalde, C., Marchena, E. Y Navarro, J. (1998). Las dificultades en la resolución de problemas aritméticos al iniciarse el segundo ciclo de la Educación Primaria. Comunicación presentada al II Congreso Iberoamericano de Psicología.

Aguilar, M. y Navarro, J. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53 (1), 63-83.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367 - 385.

Askew, M. (1997) Mental methods of computation. *Mathematic Teacher*, 160, 7-8.

Baillargeon, R. (1994). Physical reasoning in young infants: seeking explanations for impossible events. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 9-23.

Baroody, A.J. (1987). The development of counting strategy for single digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education* 2, 141-157.

Baroody, A. (1988). El pensamiento matemático de los niños. Visor Distribuciones.

Baroody, A.J.y Gannon, K.E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1, 321-339.

Baroody, A.J. y Ginsburg, H.P. (1986). The relationships between initial meaningful

and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A.J., Ginsburg, H.P. y Waxman, B. (1983). Children's use of mathematical structure. *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (3), 156-168.

Bebout, H. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 123-131.

Beishuizen, M., Van Putten, C.M. y Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, 7 (1) 87-106.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (2), 129 - 147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., y Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), 434 - 449.

Bell, A., Swan, M. y Taylor, G. (1981). Choice of operations in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics* 12, 399 - 420.

Bermejo, V. (1990) . El niño y la aritmética. Paidós Ibérica. Barcelona.

Bermejo, V. (1994). Conservaciones e invariantes cognitivos en el desarrollo. Aspectos

- psicológicos y epistemológicos. *Estudios de Psicología*, 17, 80-92.
- Bermejo, V. y Lago, M.O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje* 44, 109-121.
- Bermejo, V. y Lago, M.O. (1990). Developmental proceses and stages in the acquisition of cardinality. *International Journal of Behavioral Development*, 13 (2), 231-250.
- Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. (1986). Tamaño de los conjuntos y actuación de los niños: Estudio piloto. *Investigación no publicada*.
- Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. (1987). Estudio de la relación entre la habilidad de contar y la cardinalidad. *Enseñanza de las Ciencias. Número extra*, 330-331.
- Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. (1989). Procedimientos de cuantificación y cardinalidad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 42, 483-491.
- Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, 6, 159 - 174.
- Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuencias de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 51(3-4), 533 -552.
- Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. y Perez, M. (2000). Fracaso escolar en Matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53 (1), 43-62.
-

- Bermejo, V. Lago, M.O., Rodríguez, P., Pérez, M., Begerano, F., Moriche, E., Dopico, C., Lozano, M.J. y Pintos, M.T. (1998). Intervención psicopedagógica en el aula de matemáticas. Un programa psicoinstruccional para primer ciclo de enseñanza primaria. *En Premios Nacionales de Investigación*. MEC.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. *Psiquis*, 3, 21-30.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987c). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las ciencias número extra*, 332-333.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a): Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, 8, 23 - 41.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo (Ed.), *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós. Bloom.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1992). Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución. *Investigaciones Psicológicas II*, 21-45.
- Bertelli, R., Joanni, E. y Martlew, M. (1988). Relationship between children' s counting ability and their ability to reason about number. *European Journal of psychology of Education*, Vol XIII (3) 371-384.
-

- Blöte, A.W., Klein, A.S. y Beishuizen, M. (2000) Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10*, 221-247.
- Boysen, S.T. y Berntson, G.G. (1989). Numerical competence in a chimpanzee *Pan troglodytes*. *Journal of Comparative Psychology, 103*, 23-31.
- Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.
- Briars, B. y Larkin, J. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.
- Briars, B. y Siegler, R.S. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology, 20*, 607-618.
- Brown, J.S. y Burton, R.B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive science, 2*, 155-192.
- Brown, J.S. y VanLehn K. (1982). Towards a generative theory of "Bugs". En T.P.Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.117-135). Hillsdale, NJ:Erlbaum.
- Bryant, P. (1997). Mathematical understanding in the nursery school years. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics* (pp. 53 - 67). Hove, UK: Psychology Press.
- Caballero, S., Rodríguez, P., Lago, O., Jiménez, L. y Hernández, L. (2005). Are Preschoolers able to solve DWR Problems?. *Poster presentado en el 9th European Congress of Psychology*. Granada del 3 al 11 de Agosto.
-

- Canobi, K.H., Reeve, R.A. y Pattison, P.E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem solving. *Developmental Psychology*, 34 (5), 882-891.
- Canobi, K.H., Reeve, R.A. y Pattison, P.E. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology*, 22 (5), 513-532.
- Carpenter, T.P. (1986). Conceptual Knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarden children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 427 - 440.
- Carpenter, T. y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Educational Research*, 17 (5), 457 - 470.
- Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S. (1999). *Children's Mathematics: cognitively guided instruction*. Heinemann. Portsmouth.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P. y Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 38-401.
-

- Carpenter, T., Hibert, J. y Moser, J.M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.
- Carpenter, T., Hibert, J. y Moser, J.M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational studies in mathematics*, 14, 55-72.
- Carpenter, T., Lindquist, M., Matthews, W. y Silver, E. (1983). Results of the third NAEP mathematics assesment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 76, 652 - 659.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, y T.A. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 7 - 44). NY: Academic Press.
- Carpenter, T. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179 — 202.
- Carpenter, T., Moser, J. y Bebout, H. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*,
-

19, 345-357.

Chomsky, N. (1980). Rules and representations. New York: Columbia University Press.

Christou, C., y Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (4), 436-442.

Clements, D. y Sarama, J. (2000). Standards for preschoolers. *National Council Teachers of Mathematics*, 38-43.

Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematics learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 362-385.

Colburn, W. (1842). *Intellectual arithmetic upon the inductive method of instruction*. Boston: Hilliard, Gray.

Cooper, R.G. (1984). Early number development: Discovering number space with addition and subtraction. En C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skill* (pp. 157-192). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90 (2), 321 - 329.

Cowan, R. y Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutative. *Educational psychology*, 16, 407-420.

Cummins, D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems.

Cognition and Instruction 8, 261-289.

Davis, R.B. (1984). Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood, NJ: Ablex.

Davis, H. y Bradford, S.A. (1986). Counting behavior by rats in simulated natural environment. *Ethology*, 73, 265-280.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. y Morrison, G. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology* 83 (1), 61- 68.

Davydov, V. (1982). The psychological characteristics of the foundation of elementary mathematical operations in children. En T. Carpenter, J. Moser, y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 224-238). Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Deboys, M. y Pitt, E. (1995). Lines of development in primary mathematics. Belfast: The Blackstaff Press.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 42 - 59). NY: Oxford University Press.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive

intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction*, 6 (3), 219 - 242.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win (1985). Influence of rewording verbal

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1996). problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77, 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second grader's eye movements. *Journal of Educational Psychology*, 82, 359 - 365.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Van Collie, V. (1988). Influence of number size, problem structure and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 7 (3), 197 - 216.

Dellarosa, D., Kintsch, W., Reusser, K. Y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. London: Cassel.

Dopico, C., (2001). Adquisición y desarrollo del concepto de división en la educación Primaria: sentencias numéricas y problemas verbales. Tesis doctoral. UCM.

Dowker, A.D. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematic Education*, 18, 83-97.

English, L.D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts.

Journal for Research in Mathematic Education, 29, n° 1, 83-106.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Riedel.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3 - 17.

Flegg, G. (1984). *Numbers: their history and meaning*. Harmondsworth. Penguin.

Frege, G. (1980). *The foundations of arithmetic*. Evanston, IL.: Northwestern University Press.

Frydman, O. y Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, 3, 323 - 339.

Fuson, K.C. (1982). The counting-on solution procedure: Analisis and empirical results. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 67-81). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number* Nueva York: Springer-Verlag.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). NY: MacMillan.

- Fuson, K.C. y Hall, J.W. (1983) The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and overview. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). New York: Academic Press.
- Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J.C., Murray, H.G., Human, P.G., Olivier, A.I., Carpenter, T.P. y Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (2), 130-162.
- Fuson, K., Richards, J. y Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. En C.J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development* (pp.33-92). New York, Springer-Verlag.
- Geary, D. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Geary, D.C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition. *American Psychologist*, 50, 24-37.
- Gelman, R. (1972). The nature and development of early number concepts. En H.W. Reese (Ed.), *Advances in child development and behavior*, (vol.7, pp. 115-167). New York: Academic Press.
- Gelman, R y Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number* Cambridge, MA: Harvard Press.
- Gelman, R y Meck, E. (1983). Pre-schoolers' counting: Principles before skills.
-

Cognition, 13, 343-359.

- Gelman, R y Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, (29-57). Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.
- Ginsburg, H.P. (1977). *Children's arithmetic: The learning process* New York: D. Van Nostrand.
- Ginsburg, H.P., Choi, Y.E., López, L.S., Netley, R. y Chi, C.Y. (1997). Happy birthday to you: The early mathematical thinking of Asian, South American, and U.S. children. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 1-45). East Sussex, England: Erlbaum / Taylor y Francis.
- Ginsburg, H.P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En W. Damon (Ed.), *Handbook of Child Psychology* (pp. 401 - 476). NY: Advisory Board.
- Ginsburg, H.P., Posner, J.K. y Rusell, R.L. (1981). The development of mental additions as a function of schooling and culture. *Journal of Cross-Cultural psychology*, 12, 163-178.
- Ginsburg, H.P. y Russell, R.L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of Society for Research in Child Development*, 46, (6, serial N.193).
- Graeber, A., Tirosh, D., y Glover, R. (1989). Preservice teacher's misconceptions in
-

- solving verbal problem in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 95 - 102.
- Greeno, J.G., Riley, M.S. y Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive psychology*, 16, 94-143.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan Publishing Co.
- Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 61 — 85). Albany, NY: SUNY Press.
- Hamann, M.S. y Ashcraft, M.H. (1986). Textbook presentation of the basic addition facts. *Cognition and Instruction*, 3 (3), 173-192.
- Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: A Japanese perspective. En T. Carpenter , J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 211-223). Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.
- Heller, J.I. y Greeno, J.G. (1978). Semantic processing of arithmetic word problem solving. Congreso anual de la Midwestern Psychological Association. Chicago.
- Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning the struggle to link form and understanding. *Elementary School Journal*, 84, 497-513.
-

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets.

Child Development, 54, 84-90.

Hughes, M. (1981). Can pre-school children add and subtract?. *Educational*

Psychology, 1, 207-219.

Kaplan, R.C., Yamamoto, T. y Ginsburg, H.P. (1996). La enseñanza de los conceptos matemáticos. En L. Resnick y L. Klopfer (Eds.), *Currículum y Cognición* (pp. 105 - 139). Madrid: AIQUE.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science* Cambridge, MA: MIT Press.

Kintsch, W. (1988). The role of Knowledge in discourse comprehension: a construction integration model. *Psychological Review, 95*, 163-182.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Klein, A.S. (1984). The early development of arithmetic reasoning: Numerative activities and logical operations. *Dissertation Abstracts International, 45*, 375B-376B.

Klein, A. y Starkey, P. (1988). Universals in the development of early arithmetic cognition. En G. Saxe y M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics* (pp. 5-26). San Francisco: Jossey Bass.

Koechlin, E., Dehaene, S. y Mehler, J. (1997). Numerical transformation in five month

old human infant. *Mathematical Cognition*, 3, 89-104.

Kornilaki, E., y Nunes, T. (1997). What do young children understand about división?.

Comunicación presentada al 8º congreso European Conference on Developmental Psychology, 3-7 September. Rennes, France.

Kouba, V.L. (1989). Children's solution strategies for equivalente set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), pp. 147—158.

Kouba, V.L. y Franklin, K. (1993). Multiplication and division. En R. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 103 - 126). New York: Macmillan.

Lago, M.O. (1992). Análisis estructural de la adquisición y desarrollo de la habilidad de contar. Tesis doctoral. Editorial de la Universidad Complutense de Madrid.

Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la Instrucción II. Áreas Curriculares* (pp. 75 - 95). Madrid: Síntesis.

Lago, M.O., Rodríguez, P. y Caballero, S. (1999). La resolución de problemas verbales de multiplicación y división en niños de educación infantil. *Comunicación presentada en el III Congreso Internacional de Psicología y Educación. Santiago de Compostela, del 8 al 11 de septiembre.*

Lago, M.O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M.J. (2001). La reformulación de los

enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *Suma*, 37, 55-62.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Zamora, A. y Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de Psicología*, 30 (3), 71- 89.

Langer, J. (1986). *The origins of logic: One o two years*. Orlando, FL: Academic Press.

LeFevre, J., Sadesky, G.S. y Bisanz, J. (1996). Selection of procedures in Mental addition: Reassessing the problem of size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 22 (1), 216-230.

Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 81, 521- 531.

López, A. (2001). Desarrollo de las operaciones de sumar y restar en la comprensión de los problemas verbales. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Lozano, M.J. (2001). Desarrollo evolutivo de las estrategias de calculo mental en la Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Mandler, G. y Shebo, B.J. (1982). Subitizing: an analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology:General*, 11, 1-22.

Matsuzawa, T. (1985). Use of numbers by chimpanzee. *Nature*, 315, 57-59.

Mayer, R. E., (1989). Introduction to special section on cognition and instruction. *Journal of Educational Psychology*, 81, 452- 456.

Maza, (1991). Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Aprendizaje: Visor.

Meck, W.H. y Church, R.M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 9, 320-334.

Miyamoto, T. y Gimbayashi, K. (1983). AMI´s reformation of mathematical education. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 384-386). Boston, Birkhäuser.

Mulligan, J.T. (1992). Children's solutions to multiplication and division problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 4, 24 - 42.

Mulligan, J.T. y Mitchelmore, M.C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309 -330.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 25 — 38). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and

- empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19 — 41). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nesher, P. (1992). Solving Multiplication Word Problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrop (Eds), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Neuman, D. (1999). Early learning and awareness of division: a phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 101-128.
- Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. En T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 29-44). Psychology Press.
- Nunes, T. y Bryant, P.E. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford, England: Basil Blackwell.
- Nunes, T. y Moreno, C. (2002). An Intervention Program for Promoting Deaf Pupils' Achievement in Mathematics. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, 7 (2), 120-133.
- Nunes, T., Schliemann., A.D. y Carraher, D.W. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pepper, K.L. y Hunting, R.P. (1998). Prescolar's counting and sharing. *Journal for Research in Mathematic Education*, 29 (2), 164-183.
-

- Pepperberg, I.M. (1987). Evidence for conceptual quantitative abilities in the African Gray Parrot: Labeling of cardinal sets. *Ethology*, 75, 37-61.
- Piaget, J. (1959). La génesis de las estructuras lógicas elementales. Buenos Aires: Guadalupe.
- Piaget, J. y Szemiska, A. (1941). La genése du nombre chez l´enfant. Neuchatel et Paris: Delachaux et Niestlé.
- Platt, J.R. y Jonson, D.M. (1971). Localization of position within a homogeneous behavior chain: Effects of error contingencies. *Learning and Motivation*, 2, 386-414.
- Putnam, R., deBettencourt, L. y Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and instruction*, 7 (3), 245-285.
- Rathmell, E.C. (1978). Using thinking strategies to learn the basic facts. En M. Suydam (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematic*. Reston Va.: The Council, 1978.
- Renninger, K.A. y Stavis, J. (1995). *The roles of interest, task difficulty, and gender in de process of students´ work with mathematical word problems*. Presentado en: Society for Research in Child Development. Indianapolis.
- Resnick, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H.P.
-

- Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.
- Resnick, L.B. y Omanson, S.F. (1987). Learning to understand arithmetic. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, 3, (pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Riley, M. y Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction* 5, (1), 49-101.
- Riley, M.S., Greeno, J.G. y Héller, J.L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of Mathematic Thinking*. NY: Academ Press.
- Rittle-Johnson, B. y Siegler, s. (1998). The relation between conceptual and procedural, knowledge in learning mathematics: a review. En C. Donlam (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). Psychology Press. London.
- Rodríguez, P. (1992). Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa. Tesis doctoral. Editorial de la Universidad Complutense de Madrid.
- Rodríguez, P. (1993). Children's understanding of the commutative law of addition. *Learning and Instruction*, vol. 3, pp. 55-72.
- Rodríguez, P., Lago, M.O., y Jiménez, L. (2003). El bebé y los números. En I. Enesco
-

- (coord.), *El desarrollo del bebé. Cognición, emoción y afectividad*. Alianza Editorial. Madrid.
- Saxe, G.B. (1979). Children's counting: the early formation of numerical symbols. *New Directions for Child Development*, 3, 73-84.
- Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41- 53). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Secada, W.G., Fuson, K. y Hall, J.W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 47-57.
- Siegler, R.S. (1987). The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: General*, 116, 250-264.
- Siegler, R.S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117, 258-275.
- Siegler, R.S. (1996). *Emerging minds: the process of change in children's thinking*. New York: Oxford University Press.
- Siegler, R.S. Y Jenkins, E.A. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Siegler, R.S. y Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How
-

- do children know what to do?. En C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp.229-293). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Siegler, R.S. y Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategies discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127 (4), 377-397.
- Siegler, R.S. y Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. En H. Reese y L. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behavior* (pp. 241-311). Nueva York: Academic press.
- Simon, T.J., Hespos, S.J. y Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic?, a replication of Wynn (1992). *Cognitive Development*, 10, 253-269.
- Squire, S. y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children`s initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 1-43.
- Squire, S. y Bryant, P. (2003). Children`s models of division. *Cognitive Development*, 18, 355-376.
- Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition*, 43, 93-126.
- Starkey, P. y Cooper, R.G. (1980). Perception of number by human infants. *Science*, 210, 1033-1035.
- Starkey, P. y Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities
-

- prior to formal schooling in arithmetic. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 99-116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Starkey, P., Spelke, E.S., y Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human Infants. *Cognition*, 36, 97-128.
- Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J. y Cobb, P. (1983). Children's counting types-Philosophy theory and application. New York: Praeger.
- Svenson, O. y Sjöberg, K. (1978). Subitizing and counting processes in young children. *Scandinavian Journal of Psychology*, 19, 247-250.
- Tirosh, D. y Graeber, A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 79 - 96.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. *Mathematics in School*, 28 (5), 2-4.
- Trick, L.M. y Pylyshyn, Z.W. (1993). What enumeration studies can show us about spatial attention: Evidence for limited capacity preattentive processing. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 19, 331-351.
- Trick, L.M. y Pylyshyn, Z.W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, 101, 80-102.
-

- Uller, C., Carey, S., Huntley-Fenner, G. y Klatt, L. (1999). What representations might underlie infant numerical knowledge. *Cognitive Development*, 14, 1-36.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 39 - 59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127- 174). London: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141 — 162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why?. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of NY Press.
- Verschaffel, L., De Corte, E., Gielen, I. y Struyf, E. (1994). Clever rearrangement strategies in children`s mental arithmetic: A confrontation of eye-movement data and verbal protocols. *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarden and primary school* (pp.153- 181). Van Luit (Ed.).
-

- Verschaffel, L., De Corte, E., Lamote, C. y Dherdt, N. (1998). The acquisition and use of an adaptative strategy for estimating numerosity. *European Journal of psychology of Educational, XIII* (3), 347-370.
- Verschaffel, L., De Corte, E. y Pawels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology 84*, (1), 85-94.
- Von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie, 50*, 191-218.
- Weaver, J.F. (1982). Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and subtraction. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 60-66). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilkins, J.L., Baroody, A.J. y Tiilikainen, S. (2001). Kindergartners' understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 79*, 23-36.
- Wilkinson, A.C. (1984). Children's partial knowledge of the cognitive skill of counting. *Cognitive Psychology, 16*, 28-64.
- Wright, J., Mulligan, J. y Gould, P. (2000). Extending the learning framework to multiplication and división. En J. Wright, J. Narlland, a.k. Stafford (Eds.), *Assessment for teaching and intervention* (pp. 154-176). Londres. PCP.
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-192.
-

Wynn, K. (1998). An evolved capacity for number. En D. Cummins y C. Allen (Eds.),

The evolution of mind. Oxford: Oxford University Press.

Wynn, K., Bloom, P. y Chiang, W.C. (2002). Enumeration of collective entities by 5

month-old infants. *Cognition*, 83, 55-62.

VI. ANEXO I

1. PROTOCOLO PARA LOS NIÑOS DE 4-5 AÑOS

ADICIÓN-PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 1: En la casa azul hay 3 gallinas, y otras 3 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?

PROBLEMA 2: En la casa verde hay 4 gallinas, y otras 2 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa verde?

ADICIÓN – PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 3: Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa roja 3 sacos de trigo y en la casa verde ponen 2 sacos de trigo más que en la casa roja. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa verde?

PROBLEMA 4: Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa azul 4 sacos de trigo y en la casa amarilla ponen 3 sacos de trigo más que en la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa amarilla?

SUSTRACCIÓN- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 5: En la casa verde hay 6 gallinas y 2 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?

PROBLEMA 6: En la casa amarilla hay 7 gallinas y 4 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa amarilla?

SUSTRACCIÓN- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 7: En la casa azul están descansando 5 gallinas y en la casa roja están descansando 3 gallinas menos que en la azul. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa roja?

PROBLEMA 8: En la casa verde están descansando 6 gallinas y en la casa amarilla están descansando 2 gallinas menos que en la verde. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa amarilla?

MULTIPLICACIÓN- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 9: Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 2 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?.

PROBLEMA 10: Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa roja y en la casa verde 2 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?.

MULTIPLICACIÓN –PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 11: En la casa verde hay 2 gallinas y en la amarilla 3 veces las gallinas que hay en la casa verde. ¿Cuántas gallinas hay en la casa amarilla?.

PROBLEMA 12: En la casa roja hay 3 gallinas y en la casa azul 2 veces las gallinas que hay en la casa roja. ¿Cuántas gallinas hay en la casa azul?.

DIVISIÓN PARTITIVA- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 13: Tenemos 6 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, amarilla y verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿cuántas gallinas metemos en cada casa?.

PROBLEMA 14: Tenemos 4 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, y roja. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?.

DIVISIÓN PARTITIVA- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 15: Las gallinas de la casa verde comen la mitad de sacos de trigo que las gallinas de la casa azul y las de la casa azul comen 4 sacos de trigo. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?.

PROBLEMA 16: Las gallinas de la casa roja comen 6 sacos de trigo y comen 2 veces más sacos de trigo que las gallinas de la casa amarilla. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa amarilla?.

DIVISIÓN DE MEDIDA- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 17: 6 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 2 gallinas.
¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?.

PROBLEMA 18: 4 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 2 gallinas.
¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?.

DIVISIÓN DE MEDIDA- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 19: Las gallinas de la casa azul comen 6 sacos de trigo y las de la casa verde comen 2 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 2 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa azul?

PROBLEMA 20: Las gallinas de la casa roja comen 4 sacos de trigo y las de la casa amarilla comen 2 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 2 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa roja?.

2. PROTOCOLO PARA LOS NIÑOS DE 5-6 AÑOS

ADICIÓN-PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 1: En la casa azul hay 5 gallinas, y otras 3 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa azul?.

PROBLEMA 2: En la casa verde hay 6 gallinas, y otras 4 van a jugar con ellas. ¿Cuántas gallinas hay ahora en la casa verde?.

ADICIÓN – PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 3: Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa roja 4 sacos de trigo y en la casa verde ponen 5 sacos de trigo más que en la casa roja. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa verde?.

PROBLEMA 4: Las gallinas preparan la comida, ponen en la casa azul 7 sacos de trigo y en la casa amarilla ponen 4 sacos de trigo más que en la casa azul. ¿Cuántos sacos de trigo han puesto en la casa amarilla?.

SUSTRACCIÓN- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 5: En la casa verde hay 8 gallinas y 4 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa verde?.

PROBLEMA 6: En la casa amarilla hay 11 gallinas y 6 gallinas se van de paseo. ¿Cuántas gallinas se quedan en la casa amarilla?.

SUSTRACCIÓN- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 7: En la casa azul están descansando 7 gallinas y en la casa roja están descansando 3 gallinas menos que en la azul. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa roja?.

PROBLEMA 8: En la casa verde están descansando 10 gallinas y en la casa amarilla están descansando 5 gallinas menos que en la verde. ¿Cuántas gallinas están descansando en la casa amarilla?.

MULTIPLICACIÓN- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 9: Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa azul, en la casa roja y en la casa amarilla 3 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?.

PROBLEMA 10: Las gallinas preparan la cena, colocan en la casa roja y en la casa verde 4 sacos de trigo en cada una. ¿Cuántos sacos de trigo han colocado en total para la cena?.

MULTIPLICACIÓN –PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 11: En la casa verde hay 5 gallinas y en la amarilla 2 veces las gallinas que hay en la casa verde. ¿Cuántas gallinas hay en la casa amarilla?.

PROBLEMA 12: En la casa roja hay 3 gallinas y en la casa azul 4 veces las gallinas que hay en la casa roja. ¿Cuántas gallinas hay en la casa azul?.

DIVISIÓN PARTITIVA- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 13: Tenemos 12 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, amarilla y verde. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?.

PROBLEMA 14: Tenemos 8 gallinas, que hay que guardar entre la casa azul, y roja. En todas las casas tiene que haber el mismo número de gallinas. ¿Cuántas gallinas metemos en cada casa?.

DIVISIÓN PARTITIVA- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 15: Las gallinas de la casa verde comen la mitad de sacos de trigo que las gallinas de la casa azul y las de la casa azul comen 8 sacos de trigo. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa verde?.

PROBLEMA 16: Las gallinas de la casa roja comen 10 sacos de trigo y comen 2 veces más sacos de trigo que las gallinas de la casa amarilla. ¿Cuántos sacos de trigo comen las gallinas de la casa amarilla?.

DIVISIÓN DE MEDIDA- PROBLEMAS DE ACCIÓN.

PROBLEMA 17: 12 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 4 gallinas. ¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?.

PROBLEMA 18: 10 gallinas se van a dormir y en cada casa caben 5 gallinas. ¿Cuántas casas se necesitan para que quepan todas las gallinas?.

DIVISIÓN DE MEDIDA- PROBLEMAS DE NO ACCIÓN.

PROBLEMA 19: Las gallinas de la casa azul comen 9 sacos de trigo y las de la casa verde comen 3 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 3 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa azul?.

PROBLEMA 20: Las gallinas de la casa roja comen 8 sacos de trigo y las de la casa amarilla comen 2 sacos de trigo. Si en cada viaje traigo 2 sacos de trigo. ¿Cuántos viajes más tendré que ir a la tienda para comprar el trigo de las gallinas de la casa roja?.

ANEXO II





