

17.953



* 5 3 0 9 5 7 0 4 3 2 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

ESTIMACION DEL ESPECTRO EN MODELOS ALEATORIOS

Memoria que presenta
M^a Dolores Sánchez Muñoz
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Madrid Junio de 1992

A MIS PADRES ...

Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección de la Profesora Doctora Dña. Carmen Santisteban Requena, a quien quiero expresar aquí mi mas profundo agradecimiento, por sus valiosas orientaciones, eficaz ayuda y generosa dedicación durante la preparación del mismo.

Mi agradecimiento especial al profesor Doctor D. Miguel Sánchez Garcia por el interés y valioso asesormiento que ha dedicado a esta memoria.

Agradezco a la Doctora Dña Pilar Zuloaga Arias su incondicional apoyo tanto personal como académico.

También quiero agradecer a mi familia y amigos la ayuda prestada, así como a todas aquellas personas que de una manera u otra me han alentado dándome su estímulo y comprensión.

Maria Dolores Sánchez Muñoz.

PROLOGO

La experiencia del Psicólogo en el estudio del comportamiento humano, pone de manifiesto la influencia que cierto tipo de estímulos, entre ellos los de naturaleza sonora o visual, ejercen sobre el individuo llegando a modificar a veces sesgadamente su conducta.

Dado el interés siempre creciente por llegar hasta el conocimiento más profundo en la esencia del ser humano, a través de sus repuestas, se considera indispensable la interrelación entre los distintos campos de la actividad humana, con el fin de que, poniendo en común los diferentes puntos de vista, se llegue a una mayor información sobre este tipo de planteamientos.

También se conoce el avance tanto teórico como práctico en el desarrollo de métodos y técnicas de predicción, así como del amplio rango de sus aplicaciones. De otro lado, es cada vez mayor el empeño por modelizar adecuadamente situaciones de la vida actual con el fin de lograr mayor información sobre ellas.

El interés hacia estos temas le debo fundamentalmente a tres motivaciones:

1^o A que mi formación Matemática y Estadística me acercan al estudio y modelización formal de fenómenos de la vida real que gracias al avance de nuevas técnicas, pueden ser modelizados y estudiados en profundidad.

2^a A mis vinculaciones con la Facultad de Psicología donde a través de su Escuela recibí mi formación como psicóloga y donde sigo colaborando en cursos e investigaciones dirigidos por la D^{ra} Carmen Sasteban quien también ha dirigido asesorado y estimulado este

trabajo.

3º Por mi pertenencia en calidad de profesora Asociada de la disciplina de Bioestadística de la Facultad de Medicina, donde se abordan métodos formales encaminados al estudio y conocimiento del ser humano.

El estudio de los modelos aquí propuestos, está realizado fundamentalmente en el dominio de la frecuencia tomando como base las técnicas del Análisis Espectral, si bien se incide también en el estudio de los mismos en el dominio del tiempo, estableciendo comparaciones entre ambos.

Este trabajo monográfico, a la vez que recoge gran parte de las técnicas desarrolladas en el estudio y estimación del espectro teórico en modelos aleatorios, poniendo marcado interés, sobre modelos donde el ruido es parte fundamental en el proceso, propone otras que se estudian en él.

La presentación de los contenidos, se hace a lo largo de cinco capítulos.

En el primer capítulo, se realiza una revisión sobre los conceptos fundamentales básicos en el estudio de la descomposición espectral de señales. Partiendo del análisis de Fourier, su descomposición en serie, y el concepto de transformada, se llega a las definiciones de espectros unidimensionales, unilaterales y bilaterales, relacionando conceptos y operaciones entre los dominios del espacio, del tiempo y de la frecuencia. Haciendo por último una breve mención al concepto de espectro bidimensional.

En el capítulo segundo, se realiza un estudio sobre transformaciones y modificaciones de funciones reproduciendo algún transmisor ideal. Se hace referencia al operador delta de Dirac,

completando el capítulo con un estudio sobre filtros lineales como operadores importantes en la modificación de señales.

En el tercer capítulo se exponen los conceptos teóricos básicos sobre los procesos estacionarios, desarrollando la integración respecto de un proceso estocástico para comprender la descomposición y la representación espectral de estos procesos. Se dan importantes conceptos sobre muestreo, alisamiento y modelos en tiempo discreto finalizando el capítulo con un estudio sobre teoría general de filtros lineales.

En el capítulo cuarto se recogen algunos filtros especiales de ruidos blancos exponiendo algunas técnicas sobre la estimación de frecuencias en espectros discretos destacando una técnica de optimización global. Se estudian métodos de optimización global. Se estudian también métodos para estimar la densidad espectral de procesos discretos y la modificación de estos estimadores mediante "ventanas espectrales", exponiendo las distintas características que debe cumplir la ventana espectral para obtener estimadores precisos. Se finaliza el capítulo exponiendo algunas pautas útiles para la determinación de la ventana espectral.

En el capítulo quinto, se da una generalización a procesos aleatorios bivariantes, partiendo de las funciones de autocorrelación cruzada y covarianza cruzada. Se analiza el espectro cruzado, analizando los dos tipos de información dados por los dos tipos de espectros; el espectro coherente y el espectro fase. Se muestra la relación entre el espectro cruzado muestra y la función de covarianza cruzada muestra haciendo notar la necesidad de proceder a una estimación del espectro cruzado. Utilizando el *estimador espectral cruzado óptimo* del que se analizan sus propiedades, se llega a estimar

el espectro teórico óptimo. Se citan algunos de los resultados obtenidos.

El trabajo se concluye con una exposición bibliográfica sobre las fuentes de información utilizadas.

Madrid, Junio 1992.

INDICE

PROLOGO	pág. 1
<u>CAPITULO I.</u>	
<u>Conceptos fundamentales básicos en el estudio de la</u> <u>descomposición espectral de señales</u>	1
1.1. Introducción	
1.2. Desarrollo en series de Fourier de funciones periódicas	
1.3. Espectros.....	
1.3.1. Espectros unilaterales	
1.3.2. Espectros bilaterales	
1.3.3. Estudio del espectro de la función de onda cuadrada	
1.3.3.1. Espectro unilateral	
1.3.3.2. Espectro bilateral.....	
1.3.4. Espectros de frecuencia	
1.3.5. Conclusiones	
1.4. Modulación de amplitud y fase en funciones periódicas	
1.5. Transformada de Fourier.....	
1.5.1. Teorema de la integral de Fourier	
1.5.2. Teorema de Wiener	
1.6. Propiedades de la transformada de Fourier	
1.7. Convolución	

CAPITULO II.

Transformaciones de funciones. Filtrado lineal.

Alisamientos.

2.1. Introducción

2.2. Función delta de Dirac

2.3. Propiedades de la función delta

2.4. La función delta en dos dimensiones

2.5. Transformada de Fourier de funciones singulares

2.6. Transformada de Fourier del producto de dos
funciones

2.7. Transformadas de Fourier de funciones muestrales

2.8. Filtros lineales. Propiedades generales.

2.9. Tipos especiales de filtros lineales.

2.9.1. Filtro derivado y filtros de alta frecuencia..

2.9.2. Filtros convolución

2.9.3. Filtros de baja frecuencia

2.9.4. Filtros alisamiento de procesos acumulados ...

2.9.5. Filtro amplificado ó amplificador ideal.....

2.10 Combinaciones de filtros

CAPITULO III.

Procesos aleatorios y series temporales.

3.1. Introducción

3.2. Análisis en Media Cuadrática de procesos aleatorios..

3.2.1. Continuidad en media cuadratica de un proceso.

3.2.2. Derivada de un proceso estocástico

3.2.3. Integral de un proceso estocástico en media
cuadrática

3.3.	Integración respecto de un proceso estocástico
3.4.	Procesos determinísticos e indeterminísticos
3.4.1.	Desarrollos de KARHUMEN LOEVE.....
3.5.	Procesos estocásticos estacionarios.....
3.5.1.	Introducción
3.6.	Representación espectral de procesos estacionarios...
3.6.1.	Representación espectral multidimensional
3.7.	Teorema ergódico en procesos estacionarios
3.8.	Resultados notables sobre procesos estacionarios
3.8.1.	Descomposición de Wold de procesos estacionarios
3.9.	Teoremas ergódicos sobre procesos estacionarios
3.10.	Muestreo alisamiento y modelos en tiempo discreto...
3.10.1.	Teorema muestral
3.11.	Filtros lineales. Propiedades Generales.
Aplicaciones	
3.11.1.	Filtros lineales en procesos estacionarios ..

CAPITULO IV

Estimación espectral en procesos aleatorios univariantes.

	<u>Espectro de un proceso aleatorio</u>
4.1.	Introducción
4.2.	Filtros digitales.....
4.2.1.	Filtraje lineal para transformadas de Fourier
4.3.	Modelización discreta. Medias móviles
4.3.1.	Modelos autorregresivos
4.3.2.	Proceso de medias móviles-autorregresivo

4.3.3.	Filtraje en tiempo real	
4.4.	Estimación en procesos con espectros discretos	
4.4.1.	Algunos test sobre frecuencias y periodo- gramas	
4.4.2.	Análisis Secundario	
4.4.3.	Otras técnicas de estimación de frecuencias .	
4.5	Estimación espectral en procesos discretos con espectros continuos.....	
4.5.1.	Propiedades del periodograma modificado	
4.6.	Estimadores consistentes de la densidad espectral. Ventanas espectrales	
4.7.	Propiedades muestrales de los estimadores espec- trales	
4.7.1.	Expresiones aproximadas para el sesgo	
4.7.4.	Contraste de bondad de ajuste.....	
4.8.	Técnica interactiva de estimación de la densidad espectral	
4.9.	Análisis espectral en proceos continuos	
4.9.1	Medidas de precisión de las estimaciones espectrales	
4.10.	Papel de la ventana espectral	
4.11.	Diseños relacionados con estimaciones espectrales.	
4.11.1.	Registros con longitudes fijas	
4.11.2.	Preblanqueo o prefiltrado	
4.11.3.	Método tapering	
4.12.	Elecciones de la ventana	
4.23.	Separación de tendencia y ajuste estacional	

CAPITULO V.

Estimación espectral en procesos aleatorios bivariantes.....

- 5.1. Introducción
- 5.2. Función de covarianza cruzada para un proceso estacionario bivalente. Propiedades
- 5.3. Función de correlación cruzada. Propiedades
- 5.4. Función de correlación cruzada para un proceso lineal
- 5.5. Proceso lineal bivalente. Función de covarianza ...
- 5.6. Proceso bivalente autorregresivo de medias móviles
- 5.7. Estimación de la función de covarianza cruzada
- 5.8. Espectro cruzado.....
- 5.9. Estimación del espectro cruzado
- 5.10. Propiedades del estimador espectral cruzado
- 5.10.1. Propiedades del estimador espectral cruzado muestra para ruido blanco
- 5.10.2. Propiedades generales del estimador del espectro cruzado muestra
- 5.11. Espectro cruzado en procesos lineales
- 5.12. Corrección de estimadores espectrales cruzados
- 5.13. Estimación de la función respuesta frecuencia

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES BASICOS, EN
EL ESTUDIO DE LA DESCOMPOSICION
ESPECTRAL DE SEÑALES.

CAPITULO I

1.1. INTRODUCCION

Jean-Baptiste Toseph-Fourier (1768-1830) apoyándose en la teoría atomista formulada por Demócrito en el siglo V a. c., cuyo fundamento supone que toda sustancia material puede obtenerse combinando unas cuantas clases de átomos de todas formas posibles, afirmó en 1807 que una función periodica *que cumple ciertas condiciones*, pueden expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos.

Para introducir el concepto de espectro de una señal física, resulta imprescindible la utilización del desarrollo en serie de Fourier, es por esto que en el apartado 2 de este capítulo se tratan de recordar las ideas basicas sobre este desarrollo.

En el apartado 3 se definen los conceptos de espectros unilaterales y bilaterales de funciones periodicas mostrando un ejemplo.

Muchas veces en el estudio e interpretación de señales, es necesario modificarlas mediante otra señal de propiedades adecuadas, para ello se procede a una modulación en su frecuencia y en su fase, mediante la utilización de multiplicadores convenientes. Sobre este problema de modulación en funciones periodicas, se trata en el apartado 4.

Posteriormente Fourier afirmó que algunas funciones, aunque no fueran periódicas, bajo ciertas condiciones, se podían expresar mediante una integral llamada transformada de Fourier. Esta teoría de las transformaciones convenientemente interpretada, es aplicable a funciones más generales; de ello trata en el apartado 5, concluyéndose el capítulo con un último punto 6, que recoge las propiedades de estas transformadas de Fourier.

1-2 DESARROLLOS EN SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS.

DEFINICION 1-2-1.- Sea $f(x)$ una función periódica de período T y $u_0 = \frac{1}{T}$. Se dice que $f(x)$ es desarrollable en serie de Fourier si y solo si existe una serie trigonométrica convergente

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n u_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} 2\pi n u_0 x$$

de tal forma que respecto de la medida de Lebesgue que, $f(x)$ y $S(x)$ son iguales casi seguro.

Las condiciones para que una función periódica, admita un desarrollo de Fourier, quedan expuestas en los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 1-2-1 (TEOREMA DE DIRICHELET). Sea $f(x)$ una función periódica de período 2π . Si $f(x)$ es continua, salvo en un número finito de puntos, en los que solo admite discontinuidades de primera especie, entonces $f(x)$ es desarrollable en serie de Fourier. Además si el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ es $S(x)$, se tiene que:

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[f(x_+) + f(x_-) \right] \quad \forall x.$$

TEOREMA 1-2-2.- Sea $f(x)$ una función periódica de periodo T . Si $\int_{-T/2}^{T/2} [f(x)]^2 dx < \infty$, entonces $f(x)$ es desarrollable en serie de Fourier.

Veamos como se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n del desarrollo en serie de Fourier. Sabemos que

$$[I] \quad \frac{2}{T} \left[\frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\pi n u_0 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\pi n u_0 x \cos 2\pi m u_0 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\pi n u_0 x \cos 2\pi m u_0 x dx \right] = a_m$$

$$[II] \quad \frac{2}{T} \left[\frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\pi n u_0 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\pi n u_0 x \cos 2\pi m u_0 x dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\pi n u_0 x \sin 2\pi m u_0 x dx \right] = b_m$$

TEOREMA 1-2-3.- Si en [I] y [II] conmutan el sumatorio con la integral se tiene:

$$a_m = \int_{-T/2}^{T/2} S(x) \cos 2\pi m u_0 x dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos 2\pi m u_0 x dx.$$

$$b_m = \int_{-T/2}^{T/2} S(x) \sin 2\pi m u_0 x dx, \quad \forall m \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx.$$

La demostración es evidente.

Son resultados interesantes de los desarrollos en serie de Fourier, los siguientes:

R1) Si $f(x)$ es una función par, entonces $\forall_m, b_m = 0$

R2) Si $f(x)$ es una función impar, entonces $\forall_m, a_m = 0$

R3) (Lema de Riemman-Lebesgue). Si $f(x)$ es periódica de periodo T y

continua a trozos en el intervalo $\left[-T/2, T/2\right]$ entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (b_m) = 0$$

R4) La serie de Fourier, por lo general, se puede integrar término a término, sin embargo, si $f(x)$ es desarrollable en serie de Fourier, la serie solo es derivable término a término en los puntos x_0 , en los que exista $f'(x_0)$.

Al senoide de frecuencia $n u_0$ se le denomina n -ésimo armónico de la función $f(x)$. Cuando $n = 1$ se le llama armónico principal.

Los coeficientes b_m y a_m representan, respectivamente las amplitudes de las funciones seno y coseno en la frecuencia $2\pi n u_0$. El coeficiente $\frac{a_0}{2}$ es el valor medio de la función en el intervalo $\left[-T/2, T/2\right]$.

Frecuentemente, es mas conveniente expresar el desarrollo en serie de Fourier $S(x)$ de una función periodica $f(x)$ en forma compleja.

Para ello solo hay que tener en cuenta que:

$$\cos 2\pi n u_0 x = \frac{1}{2} \left[\exp(i2\pi n u_0 x) + \exp(-i2\pi n u_0 x) \right]$$

$$\sin 2\pi n u_0 x = \frac{1}{2} \left[\exp(i2\pi n u_0 x) - \exp(-i2\pi n u_0 x) \right]$$

y sustituirlos en el desarrollo en serie de $f(x)$, obteniendo:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) \exp(i2\pi n u_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) \exp(-i2\pi n u_0 x)$$

$$\text{Llamando } c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{y} \quad c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

se puede sintetizar la fórmula de $S(x)$, quedando:

$$\text{[III]} \quad S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i2\pi n u_0 x]$$

La fórmula [III] generaliza el desarrollo de Fourier a funciones complejas. Solo cuando $f(x)$ es real se tiene que $C_{-n} = \bar{C}_n$.

Teniendo en cuenta las fórmulas [I] y [II], el cálculo de los coeficientes c_n , se obtiene por la fórmula.

$$[IV] C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp(-2\pi n u_0 x) dx.$$

Para lograr una mejor interpretación de desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$, conviene expresarla en forma módulo argumental, según la siguiente expresión:

$$[V] f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \exp[i(2\pi n u_0 x + \varphi_n)]$$

siendo:

$$|c_n| = (C_n \bar{C}_n)^{1/2}$$

$$\varphi_n = \text{arc tg} \left[\frac{-b_n}{a_n} \right] ; n \in \mathbb{N}$$

Suelen ser interesantes los siguientes resultados que resultan evidentes:

R5) Si $f(x)$ es real y par entonces:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2} a_n$$

$$|C_n| = \frac{1}{2} |a_n|$$

$$\varphi_n = 0$$

R6) Si $f(x)$ es real e impar entonces:

$$C_{-n} = \frac{1}{2} ibn$$

$$C_n = \frac{1}{2} ibn ; n > 0$$

$$c_0 = 0 ; |C_n| = |C_{-n}| = \frac{1}{2} |bn|$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2}$$

Si consideramos la función $\hat{f}(x) = f(x - \Delta)$, $\hat{f}(x)$ no es mas que una traslación en el tiempo de $f(x)$, y su desarrollo en serie de Fourier es:

$$\begin{aligned}\hat{S}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[i2\pi n u_0 (x - \Delta)\right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left[-i2\pi n u_0 \Delta\right] \exp\left[i2\pi n u_0 x\right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_n \exp\left[i2\pi n u_0 x\right]\end{aligned}$$

Si lo que se observa con la función f en $t - \Delta$, se observa con \hat{f} en t , los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de \hat{f} , \hat{C}_n , están ligados con C_n por la fórmula:

$$\hat{C}_n = C_n \exp(-i2\pi n u_0 \Delta)$$

El valor φ_n de la fórmula [V] es el ángulo fase inicial, medido en radianes del n -ésimo armónico del desarrollo en serie de Fourier expresado en forma compleja.

~~DEFINICION 1-2-2.~~ Se llama potencia media p asociada a una función periodica f de periodo T , a la expresión:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)]^2 dx.$$

El teorema de Parseval indica cual es la contribución de cada componente de la frecuencia a la potencia de la función. Es interesante saber la contribución de los n -primeros armónicos, ya que si esta es suficientemente grande, cabe la posibilidad de poder desechar el resto de los armónicos.

~~1-2-4 TEOREMA DE PARSEVAL.~~ « La potencia media de la función periodica $f(x)$, es la suma de las potencias medias $|C_n|^2$ de cada una

de las componentes de la frecuencia, es decir:

$$\bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Si suponemos que $\frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \bar{P} < \infty$: \bar{P} recibe el nombre de

potencia media de la función periódica $f(x)$. Puesto que:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n u_0 x) \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{C}_m \exp(-i2\pi m u_0 x) \right] dx$$

y puesto que la integral es absolutamente convergente se tiene:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_n \cdot \bar{C}_m \exp(i2\pi(n-m)u_0 x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

que recibe el nombre de fórmula o teorema de Parseval.

Si definimos de otro lado $g_N(x) = \sum_{n=-N}^N d_n \exp(i2\pi n u_0 x)$, siendo d_n

cualquier número complejo, se verifica:

$$\begin{aligned} \epsilon^2(d) &= \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - g_N(x)|^2 dx \right] \geq \\ &\geq \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - \sum_{n=-N}^N C_n \exp(i2\pi n u_0 x)|^2 dx \right] = \\ &= \bar{P} - \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 \epsilon_N^2 \end{aligned}$$

Fórmula que nos dice que el desarrollo de Fourier finito, da la mejor aproximación a $f(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados.

En el desarrollo en serie de Fourier en forma compleja de $f(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \exp[i2\pi n u_0 x + \varphi_n]$$

son importantes los coeficientes $\{|C_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{|\varphi_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $u_0 = \frac{1}{T}$, que representan la amplitud, la fase y la frecuencia principal de la función $f(x)$; cuyo valor, en términos físicos, representan alguna medida sobre una señal física.

La función $A(n) = |C_n|$ se denomina espectro de amplitud, y la función $F(n) = \varphi_n$ se llama espectro de fase de la función periódica $f(x)$.

A veces se dá el nombre de espectros a las gráficas de las funciones previas.

1-3 ESPECTROS

1-3-1 ESPECTROS UNILATERALES

En el desarrollo en serie de Fourier en forma compleja de $f(x)$, que es:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \exp \left[i2\pi n u_0 x + \varphi_n \right]$$

Son importantes las familias de coeficientes $\left\{ |C_n| \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\left\{ |\varphi_n| \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, así como el valor de la frecuencia principal $U_0 = \frac{1}{T}$. Estas tres piezas son las fundamentales, para el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$.

Consideradas como funciones A y F de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, las dos familias de coeficientes reciben el nombre de Espectro de Amplitud y Espectro de Fase, respectivamente, de la función periódica $f(x)$.

Si se elige para la función la representación trigonométrica, se obtienen los espectros unilaterales, si se elige la forma compleja, espectros bilaterales.

En el espectro de amplitud unilateral, se representa la amplitud A de la señal, en función de la frecuencia u , así como en el espectro de fase unilateral, se representa la fase φ en función de dicha frecuencia u .

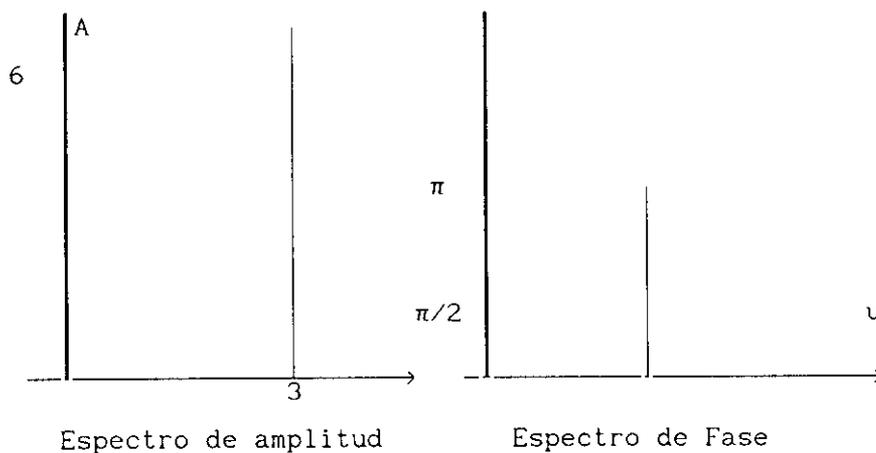
Se debe tener en cuenta que los ángulos de fase inicial vienen expresados en radianes y se referencian respecto de la función coseno de forma que las funciones seno, tienen fases relativas de $-\pi/2$ radianes.

La amplitud es siempre positiva, aunque a veces aparece un signo negativo precediéndola, esto indica que la señal se ha desplazado de fase $\pm \pi$ radianes. Los ángulos de fase pueden ser positivos o negativos.

Ejemplo 1. - Sea la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \underset{\text{c.s.}}{S(x)} = A_0 \text{sen}(2\pi u_0 x + \varphi_0) = A_0 \cos(2\pi u_0 x + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})$$

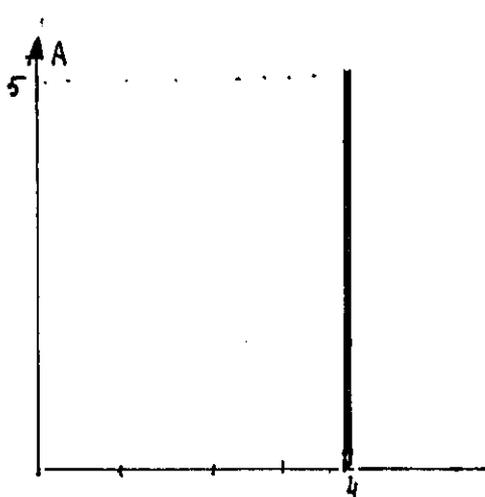
Las gráficas de los espectros de amplitud y fase de esta función, para $u_0 = 3$; $A_0 = 6$ y $\varphi_0 = \pi$. Son los de la siguiente figura.



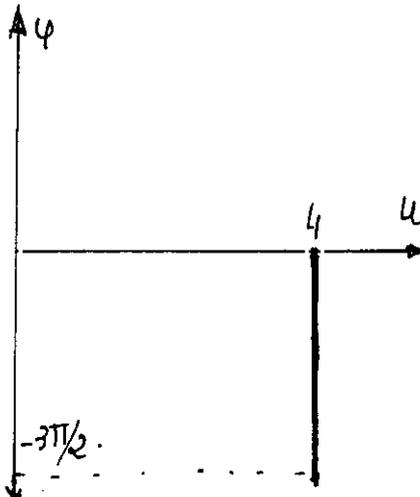
Ejemplo 2. - Sea una señal definida por $f(x)$ y cuyo desarrollo es:

$$S(x) = 5\text{sen}(2\pi 4x) = -5\cos\left(2\pi 4x - \frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\left(2\pi 4x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Los espectros de amplitud y de fase correspondientes son:



Espectro de amplitud



Espectro de Fase

1-3-2 ESPECTROS BILATERALES

Los espectros bilaterales de amplitud y fase se definen de forma análoga que los espectros unilaterales pero, al utilizar en ellos la representación exponencial compleja de la señal seno y coseno, ofrecen las siguientes características.

- 1.- Aparecen frecuencias positivas y negativas.
- 2.- En el espectro de amplitud bilateral, la amplitud para cada frecuencia es la mitad de la amplitud de la señal, por lo que la altura de la línea que representa este espectro es la mitad de la altura que tendría en el espectro de amplitud unilateral.
- 3.- El espectro de amplitud bilateral tiene simetría par ya que la amplitud es igual para la frecuencia positiva que para la

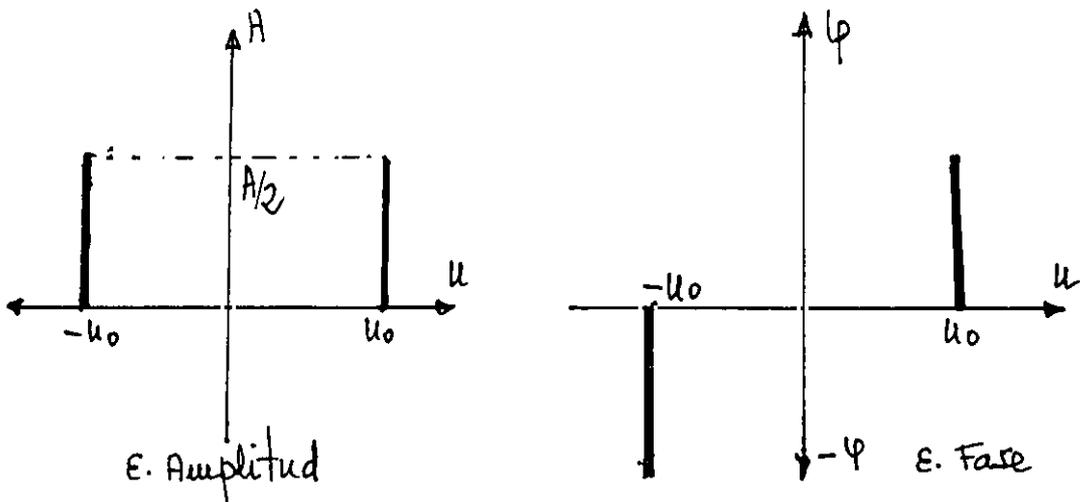
negativa. A u_0 le corresponde $\frac{1}{2}A$, y a $-u_0$, le correspondería también $\frac{1}{2}A$.

4.- El espectro de fase bilateral tiene simetría impar, puesto que la fase correspondiente a la frecuencia negativa, tiene signo opuesto que la fase correspondiente a la frecuencia positiva.

Ejemplo 2 Sea la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) =_{c.s.} A \cos(2\pi u_0 x + \varphi) = \frac{1}{2}A \left[e^{i(2\pi u_0 x + \varphi)} + e^{-i(2\pi u_0 x + \varphi)} \right]$$

Suponiendo que $\varphi > 0$, las gráficas de los espectros bilaterales de amplitud y fase de esta función aparecen en la figura:



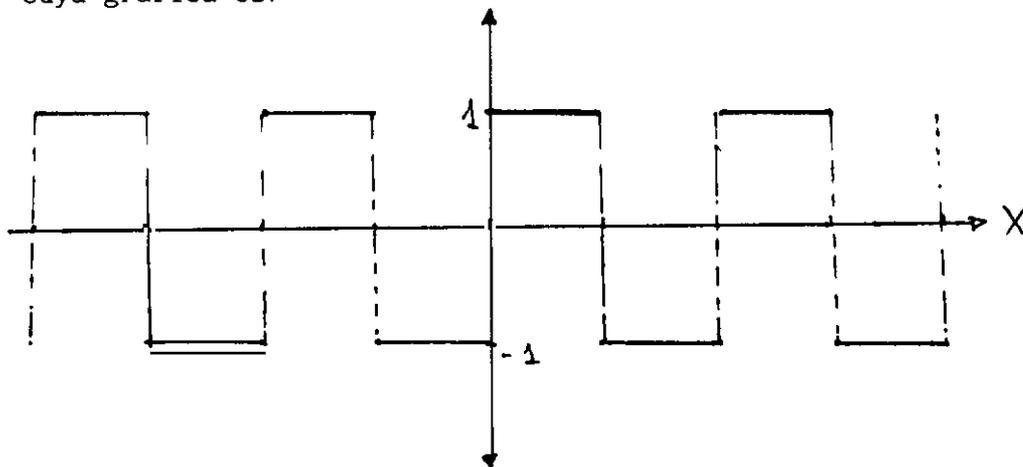
1-3-3.- ESTUDIO DEL ESPECTRO DE LA FUNCION DE ONDA CUADRADA

Campell y Robson (1968) observaron que uno de los estímulos mas utilizados en psicofísica visual, estaba constituido por un conjunto de franjas paralelas, oscuras y claras alternadas, es decir por franjas paralelas cuya luminancia varía en forma de función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < T/2 \\ -1, & \text{si } -T/2 < x < 0 \end{cases} \quad y$$

$$f(x) = f(y + nT) \quad \text{si } x = y + nT ; \quad -\frac{T}{2} \leq y < \frac{T}{2}$$

cuya gráfica es:



Estudiaremos los espectros unilaterales y bilaterales de esta función de onda cuadrada $f(x)$.

Puesto que $\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$, $f(x)$ es desarrollable en serie de

Fourier, siendo su desarrollo:

$$f(x)_{c.s.} S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n2\pi u_0 x) ; \text{ y } u_0 = \frac{1}{T}$$

es decir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(2\pi u_0 x) + \frac{1}{3} \text{sen}(2\pi 3u_0 x) + \frac{1}{5} \text{sen}(2\pi 5u_0 x) + \dots \right]$$

Por cálculo sencillo se comprueba, que el valor de los coeficientes es:

$$a_0 = 0 ; b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La función de onda cuadrada puede considerarse como una suma infinita de funciones seno, cuyas frecuencias son la frecuencia de la función cuadrada (no frecuencia fundamental) y los múltiplos impares de esa frecuencia ($3u_0$, $5u_0$, $7u_0 \dots$) ó frecuencias del tercero, quinto, séptimo... armónico.

La amplitud del componente fundamental es $\frac{4}{\pi}$ veces mayor que la amplitud de la función cuadrada.

1-3-3-1 ESPECTRO UNILATERAL

Partiendo del desarrollo de Fourier de la función de onda cuadrada expresado como:

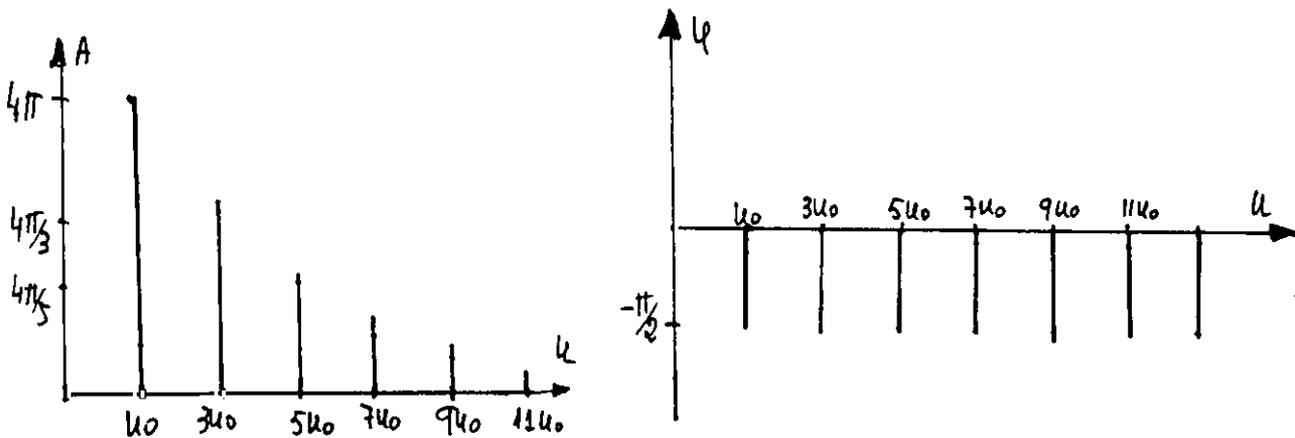
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \left(2\pi n u_0 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_0 = 0 ; A_n = \frac{4}{\pi n} ; \text{ para } n \text{ par} ; \varphi_n = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

La expresión de $f(x)$ mediante espectro unilateral está dado por:

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n u_0 - \varphi_n).$$

Los espectros de amplitud unilateral y de fase unilateral están representados en las siguientes gráficas.



Espectro de amplitud Unilateral

Espectro de Fase Unilateral

En el espectro de amplitud unilateral, se representa A_0 . Sobre el origen del eje de frecuencias; A_1 sobre u_0 ; A_2 sobre $3u_0$ y así sucesivamente.

En el espectro de fase representamos $-\varphi_n$ sobre el punto nu_0 (n

impar) del eje de frecuencia.

1-3-3-2 ESPECTRO BILATERAL

Para el espectro bilateral o complejo de Fourier, se utiliza la expresión:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{i(2\pi n u_0 x + \varphi_n)} \text{ siendo}$$

$$C_n = |C_n| e^{i\varphi_n}$$

El desarrollo de Fourier en forma compleja para la función de onda cuadrada se expresa mediante:

$$S(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impar} \\ n \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right| e^{i(n\omega_0 x - \frac{\pi}{2})}$$

donde

$$C_0 = 0 ; |C_n| = |C_{-n}| = \left| \frac{2}{\pi n} \right|$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} ; \varphi_{-n} = \frac{\pi}{2}$$

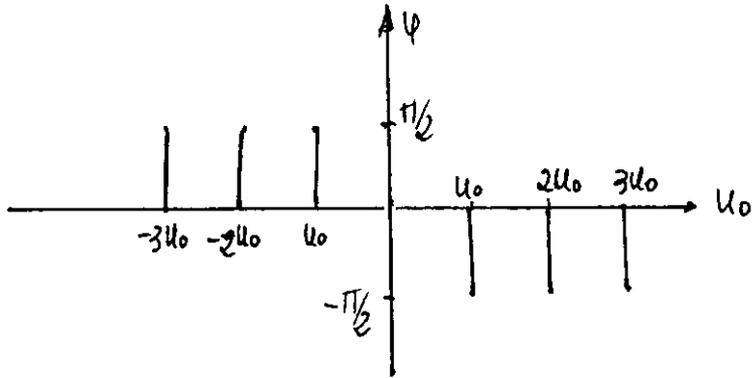
En el espectro de amplitud se representan C_n sobre los puntos nu_0 ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) del eje de frecuencias.

En el espectro de fase se representa φ_n (radianes) sobre los puntos nu_0 ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) del eje de frecuencias.

Los espectros de amplitud y de fase bilaterales están representados en las siguientes gráficas.



Espectro de Amplitud Bilateral



Espectro de fase Bilateral

1-3-4 ESPECTRO DE FRECUENCIA.-

Utilizando la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier, para la función f , es posible representar el espectro de frecuencia, es decir el de amplitud y el de fase en la misma gráfica, utilizando el plano real y el plano complejo. La función de onda cuadrada, puede expresarse como:

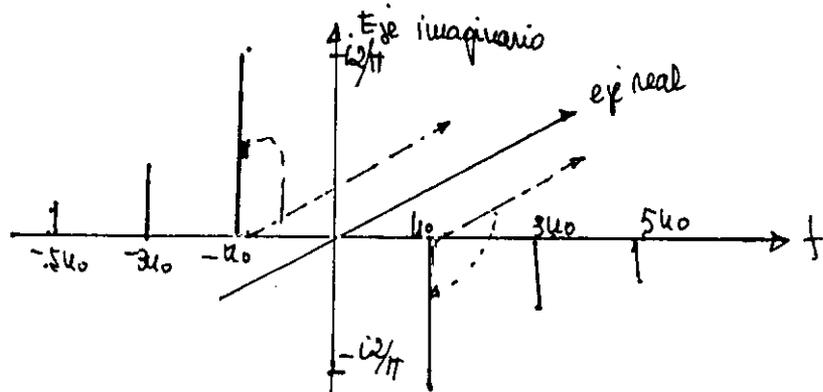
$$S(x) = -i \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-in\omega_0 x}$$

impar
 $n \neq 0$

donde:

$$C_n = \begin{cases} -i \frac{2}{\pi n} & \text{si } n > 0 \\ i \frac{2}{\pi n} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

El espectro de frecuencia, es decir la representación gráfica de C_n será:



Espectro de Frecuencia de la Función cuadrada

Las flechas han sido giradas del plano real $-\pi/2$ y $\pi/2$ radianes que son las transformaciones que convierten a un número real en imaginario puro.

1-3-5 CONCLUSIONES

- a) Todas las funciones sinusoidales, se transforman en funciones coseno, con la amplitud precedida del signo positivo.
- b) En el espectro de amplitud, se representan las amplitudes de las funciones coseno que componen la señal, en función de sus frecuencias.
- c) En el espectro de fase, se representan las fases de las funciones coseno componentes de la señal, en función de sus frecuencias.
- d) Las constantes se interpretan como señales sinusoidales de frecuencia y de fase cero.
- e) El espectro de amplitud de una función, indica qué frecuencias están presentes en esa función y en qué proporción relativa.
- f) El espectro de fase indica la posición relativa de las funciones coseno.
- g) Conocidos el espectro de amplitud y el espectro de fase de una señal, se puede sintetizar esa señal, y solo en ese caso, ya que si se conoce uno solo de los espectros la determinación no es única.

- h) El espectro de amplitud de toda función periódica real es función par (simetría respecto eje y' y) de $n\omega_0$, y el espectro de fase es función impar (simetría respecto origen).
- i) Si se desplaza el origen de la función f en una cantidad h el espectro de amplitud u_0 varía, pero la fase del componente n -ésimo se desplaza en una cantidad igual a $n\omega_0 h$ radianes.
- j) Si el periodo T de la función aumenta, esto se manifiesta en una disminución de la separación de las líneas del espectro, y recíprocamente.

1-4 MODULACION DE AMPLITUD Y FASE EN FUNCIONES PERIODICAS

Con frecuencia conviene modificar una señal física, mediante otra señal que tenga propiedades adecuadas. En el modelo teórico esto se corresponde con la realización del producto de funciones. Supongamos que $g(x)$, $h(x)$ son funciones periódicas del mismo periodo T . Sea $f(x) = g(x).h(x)$. Supongamos también que f , g y h son desarrollables en serie de Fourier, y sean $S(x)$, $t(x)$ y $u(x)$ sus correspondientes series. En estas condiciones se tiene el resultado siguiente:

R-4-1 Si
$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi n u_0 x)$$

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(i2\pi n u_0 x) , \text{ y}$$

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i2\pi n u_0 x)$$

entonces
$$a_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k b_{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-k} b_k$$

La fórmula anterior no es correcta cuando las frecuencias de g y h son distintas.

Uno de los multiplicadores más frecuentemente usados en la

práctica es la función $h(x) = 2\pi\lambda_0 x$ que se utiliza para modular la amplitud de un tren de impulsos cortos; según muestran las gráficas adjuntas.

Figura 1

Figura 2

La señal de la figura 2 se obtiene multiplicando la señal de la figura 1 $g(x)$ por $h(x)$, obteniendo la señal:

$$f(x) = \cos\left[2\pi\lambda_0 x\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[i2\pi n u_0 x\right]$$

con $u_0 = \frac{1}{T}$

Siendo C_n el coeficiente de Fourier del tren de impulsos de la figura 1.

Si definimos la función $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, el coeficiente de Fourier C_n es:

$$C_n = \frac{a\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)$$

Escribiendo $\cos 2\pi\lambda_0 x = \frac{1}{2}\exp(2\pi i\lambda_0 x) + \frac{1}{2}\exp(-2\pi i\lambda_0 x)$ podemos escribir la función $f(x)$ mediante la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[i2\pi(\lambda_0 + n u_0)x\right] + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[-i2\pi(\lambda_0 - n u_0)x\right]$$

Si λ_0 es mucho mayor que $\frac{1}{T} = u_0$, la ecuación previa prueba que las componentes de la frecuencia no están centradas en cero, como sucede cuando $h(x)$ está ausente, sino que aparecen trasladados por λ_0 y $-\lambda_0$. El espectro de amplitud se define en términos de la frecuencia como:

$$\lambda_n = \lambda_0 + nu_0$$

La modulación de señales en frecuencia y en fase, se usa con frecuencia en una variedad de aplicaciones tales como radar y comunicaciones. Son frecuentes las señales de frecuencia modulada (FM) en radio.

El ejemplo mas simple de una señal modulada en su fase es:

$$g(t) = A \cos [2\pi\lambda_0 t + \phi(t)]$$

donde hemos cambiado x por t para significar tiempo, A es una constante y la función $\phi(t)$, varía con el tiempo.

Se define la frecuencia instantanea W_i , medida en radianes, de la señal armónica, como la derivada de su fase, es decir como:

$$W_i = \frac{d[2\pi\lambda_0 t + \phi(t)]}{dt} = 2\pi\lambda_0 + \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Cuando $\phi(t)$ es derivable, y la frecuencia instantanea λ_i , esta dada por la expresión:

$$\lambda_i = \frac{W_i}{2\pi} = \lambda_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Si $\phi(t)$ es constante ó lineal, la frecuencia instantanea es constante. Si la frecuencia instantanea, no es constante se dice que la señal está modulada, en su frecuencia, y el objetivo de la modulación consiste en que la frecuencia varía de forma prescrita. Bajo estas

mismas condiciones, la fase no se incrementa linealmente, como sucede cuando $\varphi(t)$ es una función afín, y en esta sentido se entiende el que la señal esté modulada también en su fase. Con frecuencia los términos «Modulación de la Fase» y «Modulación de la Frecuencia» se usan intercambiabilmente.

Supongamos que $\varphi(t)$ es una función periódica tal que:

$$e^{i\varphi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi n u_0 t)$$

Sustituyendo $u_0 = \frac{1}{T}$ tenemos:

$$g(t) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left[i2\pi(\lambda_0 + nu_0)t\right] + \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-i2\pi(\lambda_0 + nu_0)t\right] \text{ donde los coeficientes}$$

a_n están expresados mediante:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[i\varphi(t) - i \frac{2\pi n t}{T}\right] dt$$

1-5 TRANSFORMADA DE FOURIER

Si $h(x)$ no es una función periódica, entonces $h(x)$ no cumple las condiciones para ser desarrollada en serie de Fourier. No obstante, si $\forall T > 0; T > \infty$, se verifica que $\int_{-T/2}^{T/2} |h(x)|^2 dx < \infty$, podemos construir

en función de h , la familia de funciones periódicas

$$f_T(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } |x| \leq T/2 \\ h(y) & \text{si } x = y + nT; |y| \leq T/2 \end{cases}$$

En este supuesto, para cada T , $f_T(x)$ es desarrollable en serie de Fourier, y por tanto, llamando

$$(Tg_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{\frac{-i\pi n x}{T}} dx \text{ obtenemos:}$$

$$1.5.1 \quad f_T(x) \underset{\text{c. s.}}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Tg_n) \exp(i2\pi nx/T)$$

llamando $u_n = \frac{n}{T}$, $g(u_n) = Tg_n(T)$; $\Delta u_n = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T}$

podemos escribir la fórmula previa:

$$1.5.2 \quad f_T(x) \underset{\text{c. s.}}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(u_n) \exp(i2\pi u_n x) \Delta u_n$$

Admitiendo que existe límite cuando $T \rightarrow \infty$ en (1-5-2) y puesto que $\forall x$ tal que $|x| < \infty$, $\exists T$ tal que $T \geq |x|$, se deduce que $\forall T \geq |x|$, es $f_T(x) = h(x)$ y por tanto

$$1.5.3 \quad h(x) = \lim_{T \uparrow \infty} f_T(x) = \lim_{\Delta u_n \downarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(u_n) \exp(i2\pi u_n x) \Delta u_n = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi u x} g(u) du$$

Es conocido que si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$, entonces existe una función $g(u)$ tal que:

$$h(x) \underset{\text{c. s.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ux} g(u) du \Rightarrow$$

De donde una condición suficiente, para que exista el límite en 1-5-3 es que se verifique:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$$

También es un resultado muy conocido el que si $h(x)$ y $g(u)$ están relacionados por (1-5-3) entonces se verifica que:

$$[1-5-4] \quad g(u) \underset{\text{c. s.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} h(x) dx$$

Con relación a (1-5-3) y (1-5-4), se llama a $g(u)$ la transformada de Fourier de $h(x)$, mientras que $h(x)$ es la transformada inversa de Fourier de $g(u)$.

1-5-1 TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Sea $f(x)$ una función real tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, y que solo admite discontinuidades de primera especie. Si en el punto x_0 , existen las derivadas unidireccionales de f , por la derecha (f'_D) y por la izquierda (f'_I), entonces se verifica:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\cos v(u - x_0) \right] du dv$$

Además si f es real, y se cumplen las condiciones previas, entonces:

$$\frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \left[v(u - x_0) \right] du dv$$

Si f es a valores complejos, con solo discontinuidades de 1ª especie y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, entonces:

$$\frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \uparrow \infty} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iv(u-x)} du \right] dv$$

1-5-7 TEOREMA DE WIENNER (1943)

«La transformada de Fourier de una función, cuando existe, es única casi seguro.

1-6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En este apartado suponemos que todas las funciones que utilizamos tienen transformada de Fourier. Denotamos por $TF(h)$, la transformada de Fourier de h ; esto es si $g = TF(h)$, entonces

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} h(x) dx$$

c. s.

Entre las propiedades mas importantes de la transformada de

Fourier están:

1) Linealidad. - si h_1 y h_2 tienen transformadas de Fourier, entonces $\forall a, b \in \mathbb{R}$; $ah_1 + bh_2 = h$ tiene transformada de Fourier y

$$TF(h) = TF(ah_1 + bh_2) = aTF(h_1) + bTF(h_2)$$

2) Complejo conjugado. - Si $h(x)$ es real y $g = TF(h)$ entonces $\forall u > 0$; $g(-u) = \overline{g(u)}$; siendo $\overline{g(u)}$ el complejo conjugado de $g(u)$.

3) Par. - Si h es real y par, entonces:

$$g(u) = TF(h) = 2 \int_0^{\infty} h(x) \cos 2\pi u x dx.$$

4) Impar. - Si h es real e impar, entonces:

$$g(u) = TF(h) = -2 \int_0^{\infty} h(x) \sin 2\pi u x dx.$$

5) Cambio de escala en las frecuencias. - Si $g = TF(h)$ y $\beta \neq 0$ es un número real, entonces la transformada de Fourier inversa de $g(\beta u)$ es:

$$h_{\beta}(x) = \frac{1}{|\beta|} h(x/\beta)$$

6) Cambio de escala en el tiempo. - Si $g = TF(h)$ y $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, entonces

$$TF[h(ax)] = g_a(u) = \frac{1}{|a|} g(u/a)$$

7) Desplazamiento en el tiempo. - Sea $g = TF(h)$ y sea

$h_{x_0}(x) = h(x - x_0)$, entonces:

$$TF(h_{x_0}) = g_{x_0}(u) = e^{-i2\pi u x_0} g(u).$$

8) Desplazamiento en la frecuencia. - Sea $g = TF(h)$; $h = TF^{-1}(g)$; y

sea $h_{u_0}(u) = g(u - u_0)$ entonces:

$$TF^{-1}(g_{u_0}) = h_{u_0}(x) = e^{i2\pi u_0 x} h(x)$$

9) Derivabilidad. - Se $g = TF(h)$ y supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n h(x)| dx < \infty$, entonces g es derivable n veces y $g^{(n)}(u) = (-i2\pi u)^n g(u)$

10) Area. - Si $g = TF(h)$, colocando $u = 0$, tenemos:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$$

11) Complejo conjugado 2. - Si h es complejo y $g = TF(h)$, entonces la $g_1 = TF(h_1)$, siendo $h_1(x) = \overline{h(x)}$ es tal que $g_1(u) = \overline{g(-u)}$

12) Lema de Riemman-Lebesgue. - Si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$ y $g = TF(h)$

entonces $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} g(\lambda) = 0$

1-7 CONVOLUCION

Definición 1-7-1. - Sean h_1 y h_2 dos funciones definidas en los reales R , con valores en R ó en los complejos. Se llama convolución de h_1 , h_2 , que denotaremos por $h_1 * h_2$, a la función h , supuesto que existe, que se obtiene por la fórmula

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) h_2(x - t) dt.$$

Teorema 1-7-1. - Si $\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(x)| dx < \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(x)| dx < \infty$ entonces existe $h_1 * h_2$ $TF(h) = TF(h_1) \cdot TF(h_2)$

Demostración

Es una clara consecuencia de la desigualda de Schwarz.

Teorema 1-7-2 - Si $h=h_1 \times h_2$; $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(x)| dx < \infty$,

entonces $TF(h) = TF(h_1) \cdot TF(h_2)$.

Demostración

$$\begin{aligned} TF(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi ux} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi ux} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(S) h_2(x - S) dS dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi us} h_1(S) e^{-12\pi u(x-s)} h_2(x - S) dS dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi us} h_1(S) e^{-12\pi uv} h_2(V) dS dV = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi us} h_1(S) dS \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-12\pi uv} h_2(V) dV = TF(h_1) \cdot TF(h_2) \end{aligned}$$

Propiedades - Las siguientes propiedades son inmediatas.

- 1) Conmutativa: $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$
- 2) Asociativa: $(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3)$
- 3) Distributiva respecto de la suma

$$h_1 * (h_2 + h_3) = h_1 * h_2 + h_1 * h_3$$

CAPITULO II

TRANSFORMACION DE FUNCIONES.

FILTRADO LINEAL. ALISAMIENTOS.

2.1. INTRODUCCION

Este capítulo se dedica al estudio de transformaciones y modificaciones de funciones, con el fin de reproducir algún transmisor ideal. Se recogen los mas importantes conceptos sobre el tema, y se sintetizan algunas ideas sobre filtros y relaciones entre filtros.

En el apartado nº 2 se introduce el importante concepto de tren de impulsos, como preambulo del operador delta de Dirac, operador que facilita la notación y comprensión de importantes nociones matemáticas, entre ellas la de muestra discreta sobre una señal continua. En el epígrafe 3 se desarrollan las principales propiedades del operador delta, completándose el estudio, en el párrafo 4, con el concepto de función delta en varias dimensiones. Resaltamos la conexión que establecemos entre función delta y función de distribución concentrada en un punto.

En el epígrafe 5, se desarrolla el concepto de transformada de Fourier del producto de dos funciones, concepto que se utiliza en la modificación de la señal recibida, para transformarla en una señal próxima a la emitida, originando el concepto de ventana. Estas ideas se completan en el epígrafe 6, con el estudio de señales discretas, que corresponden a muestras tomadas sobre señales continuas, precisando como tiene que ser la razón de muestreo, para reproducir el espectro de la señal continua en términos de la discreta.

Se completa el capítulo con el estudio de los filtros lineales, que son los mas importantes operadores de modificación de señales; destacando el concepto de amplificador ideal así como la conexión

operar sobre la función $g(t)$ produce

$$\delta(t)[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt = g(0)$$

Por convenio, representamos a $\delta(t)[g(t)]$ por $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt$.

Esta operación produce el mismo resultado que el que origina la integración de la función g respecto de la función de distribución

$$F_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{ya que } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF_0(t) = g(0)$$

A la función generalizada, u operador $\delta(t)$ se le conoce con el nombre de delta de Dirac.

Si definimos la función:

$$S_{nT}^{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}; & nT - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT + \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es claro que $S_{\tau}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{nT}^{\tau}(t)$. Si la función g es regular en todo

$t \in \mathbb{R}$; es claro que

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) S_{nT}^{\tau}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - nT) dt = g(nT)$$

Supuesto que la función g cumple propiedades adecuadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) S_{\tau}(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) S_{nT}^{\tau}(t) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT). \end{aligned}$$

Es en este sentido en el que se suele utilizar la fórmula

$$\lim_{\tau \downarrow 0} S_{\tau}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Llamando $\text{sinc } x = \frac{\text{Sen } x}{x}$, y desarrollando en serie de Fourier $S_{\tau}(t)$ se tiene:

$$S_{\tau}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N S_n \exp\left(j \frac{2\pi nt}{T}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right); \text{ con } S_n = \frac{1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n - \pi t}{T}\right)$$

Supongamos que $\tau \downarrow 0$ más rápido que M a infinito, de tal forma que $\frac{N\pi\tau}{T}$ sea muchísimo menor que uno, para que $S_n \approx \frac{1}{T}$. con este supuesto tenemos que:

$$\begin{aligned} S_\tau(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{n=0}^N \exp\left(-i \frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=0}^N \exp\left(i \frac{2\pi n t}{T}\right) - 1 \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\left[\frac{1 - \exp\left(-i \frac{2\pi(N+1)t}{T}\right)}{1 - \exp\left(-i \frac{2\pi t}{T}\right)} \right] + \left[\frac{1 - \exp\left(-i \frac{2\pi(N+1)t}{T}\right)}{1 - \exp\left(i \frac{2\pi t}{T}\right)} \right] - 1 \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(2N+1)(\pi t/T)}{T \operatorname{sen}(\pi t/T)} \right] \end{aligned}$$

De las fórmulas anteriores se concluye que si g es regular se verifica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt = \lim_{N \uparrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \frac{\operatorname{sen}(2N+1)(\pi t/T)}{T \operatorname{sen}(\pi t/T)} dt.$$

Se puede eliminar la restricción $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, haciendo que $T \rightarrow \infty$; de tal forma que $\Omega = \frac{(2N+1)\pi}{T}$ tienda a infinito; (es decir que N tienda a infinito más rápido que T). En estos supuestos se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\pi t/T) \approx \frac{\pi t}{T}$$

y la fórmula

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(2N+1)(\pi t/T)}{T \operatorname{sen}(\pi t/T)} = \lim_{\Omega \uparrow \infty} \left(\frac{\operatorname{sen}\Omega t}{-\pi t} \right)$$

Llamando

$$I = \lim_{\Omega \uparrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\operatorname{sen}\Omega t}{\pi t} dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(t) \frac{\operatorname{sen}\Omega t}{\pi t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} g(t) \frac{\operatorname{sen}\Omega t}{\pi t} dt \right]$$

siendo $\varepsilon > 0$ un número suficientemente pequeño.

Es claro que la 1ª y 3ª se anulan; mientras que la 2ª vale:

$$\lim_{\Omega \uparrow \infty} g(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}\Omega t}{\pi t} dt = \frac{g(0)}{\pi} \lim_{\Omega \uparrow \infty} \int_{-\varepsilon\Omega}^{\varepsilon\Omega} \frac{\operatorname{sen}x}{x} dx = g(0)$$

Los resultados previos se pueden usar para obtener un importante y útil resultado. Consideremos, para ello, la integral

$$T_1 = \lim_{\Omega \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega$$

Calculando la integral obtenemos:

$$\begin{aligned} T_1 &= \lim_{\Omega \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\Omega}^{\Omega} \cos \omega t d\omega + i \int_{-\Omega}^{\Omega} \sen \omega t d\omega \right] = \\ &= \lim_{\Omega \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{\sen \omega t}{t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} - i \left[\frac{\cos \omega t}{t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} \right) = \lim_{\Omega \uparrow \infty} \frac{\sen \Omega t}{\pi t} \end{aligned}$$

que considerada como operador, se comporta igual que $\delta(t)$.

$$\text{Análogamente, se observa que } \lim_{\Omega \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega$$

se comporta como operador como $\delta(t - t_0)$.

2-3 PROPIEDADES DE LA FUNCION DELTA

I - Derivabilidad. Suponiendo que la función g es derivable cuantas veces sea necesario, y admitiendo que es válida la integral por partes y que la evaluación de $g(t) \delta(t)$ es nula en ∞ y en $-\infty$, podemos definir $\delta'(t)$ de tal forma que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta'(t) dt = \left[g(t) \delta(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \delta(t) dt = -g'(0)$$

De igual forma se puede definir la derivada $\delta^{(n)}(t)$ por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta^{(n)}(t) dt = \left[g(t) \delta^{(n-1)}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \delta^{(n-1)}(t) dt = (-1)^n g^{(n)}(0)$$

II Propiedades de simetría, traslación y cambio de escalas

Es claro que $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(-t) dt = g(0)$, que indica la simetría de la función delta de Dirac.

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - a)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(u + a)\delta(u)du = g(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{u}{a}\right)\delta(u)du = g(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(at - b)dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{u + b}{a}\right)\delta(u)du = g\left(\frac{b}{a}\right)$$

Igualdades que se obtienen después de realizar el cambio de variable apropiado.

III Integral

Si recordamos que $\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\delta(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)dF_0(s)$, y admitimos que dicha igualdad se verifica integrando desde $-\infty$ hasta t , para todo t , tomando como $g(s)$ la función que vale idénticamente uno, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^t g(s)\delta(s)ds = \int_{-\infty}^t g(s)dF_0(s) = \int_{-\infty}^t \delta(s)ds = F_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En teoría de operadores, a la función $F_0(t)$ se la conoce con el nombre de función de Heaviside.

FUNCION MUESTRAL Y FUNCION MUESTRAL AGRUPADA

Es claro que si muestreamos $g(t)$ a razón constante T , obtenemos las observaciones $\{g(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, que se pueden denotar por $[\delta(t-n)(g(t))\]_{n \in \mathbb{Z}}$. Suponiendo que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(nT)| < \infty$, podemos denotar la muestra agrupada

$$MA(t) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T \rfloor} \delta(t - nT)(g(t))$$

Estas fórmulas unifican y simplifican las notaciones de la muestra y muestra agrupada de una señal $g(t)$.

2-4 LA FUNCION DELTA EN DOS DIMENSIONES

La función delta se generaliza con facilidad a más de una dimensión. Téngase en cuenta, para ello, que la función de distribución que concentra toda su probabilidad en un punto (x_0, y_0) es de la forma:

$$F_{(x_0, y_0)}(x, y) = F_{(x_0)}(x) \cdot F_{(y_0)}(y)$$

Y por tanto $\delta_{(0,0)}(x, y) = \delta_0(x) \cdot \delta_0(y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$; esto es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot \delta_{(x_0, y_0)}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) dx dy = \\ &= g_{(x_0, y_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF_{(x_0, y_0)}(x, y). \end{aligned}$$

Admitiendo las mismas reglas de integración que para una variable se tiene:

$$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s g(x, y) \delta(x) \delta(y) dx dy = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s g(x, y) dF_{(0,0)}(x, y)$$

y tomando $g(x, y) = 1$. Se obtiene:

$$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \delta(x) \delta(y) dx dy = F_{(0,0)}(s, t)$$

2-5 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES SINGULARES

Sean $W(t) = x(t)\bar{y}(t + \tau)$ donde x e y pueden ser funciones con valores complejos. Sean $X(\lambda), Y(\lambda)$ las transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, el objetivo es hallar la transformada de Fourier de $W(t)$. Sabemos que:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\lambda' t} X(\lambda') d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\lambda'' (t+\Delta)} \overline{Y(\lambda'')} d\lambda''$$

Para obtener la transformada de Fourier de $W(t)$, multiplicamos ambos lados de la ecuación previa por $\exp(-i2\pi\lambda t)$ e integramos en t de $-\infty$ a ∞ , obteniendo :

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\lambda' - \lambda'' - \lambda)t} e^{-i2\pi\lambda'' \Delta} X(\lambda') \overline{Y(\lambda'')} d\lambda'' d\lambda' dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\lambda'' \Delta} X(\lambda') \overline{Y(\lambda'')} \delta(\lambda' - \lambda'' - \lambda) d\lambda'' d\lambda' = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\lambda' - \lambda)\Delta} X(\lambda') \overline{Y(\lambda' - \lambda)} d\lambda'$$

Cuando el producto $W(t) = X(t)y(t + \tau)$, entonces $\overline{Y(\lambda' - \lambda)}$, debe ser reemplazado por $Y(\lambda - \lambda')$.

Si en las ecuaciones previas reemplazamos λ por cero obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t+\Delta)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda') \overline{Y(\lambda')} e^{-i2\pi\lambda'\Delta} d\lambda'$$

Cuando $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\Delta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda') \overline{Y(\lambda')} e^{-i2\pi\lambda'\Delta} d\lambda'$$

y si $x(t) = y(t)$, obtenemos la fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{x(t+\Delta)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 e^{-i2\pi\lambda\Delta} d\lambda \quad \text{y como consecuencia se}$$

obtiene las fórmulas siguientes:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 e^{-i2\pi\lambda\Delta} d\lambda \quad \left(\text{Fórmula de Parseval} \right) \text{ donde a}$$

E se le suele llamar energía de la señal $x(t)$, y $W(\lambda)$ se expresa como:

$$W(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda') \overline{Y(\lambda' - \lambda)}| d\lambda' \quad \text{cuando } w(t) = x(t)y(t)$$

El producto de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ se suele emplear en la práctica para limitar el rango de una de ellas, (por ejemplo $x(t)$) por una función $y(t)$ adecuada. En estas situaciones, la función $y(t)$ recibe el nombre de ventana.

$$\text{Si } y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

entonces la transformada de Fourier de $y(t)$ viene dado por:

$$Y(\lambda) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-i2\pi\lambda t} y(t) dt = \frac{2\text{sen } \pi\lambda T_0}{2\pi\lambda} = T_0 \text{sinc}(\pi T_0)$$

En estas condiciones, si $X(\lambda)$ es la transformada de $X(t)$, la transformada de $Y(t) \circ X(t) = w(t)$ es:

$$W_{T_0}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda') T_0 \text{sinc}[\pi T_0(\lambda - \lambda')] d\lambda'$$

Solo cuando T_0 es muy grande, $W_{T_0}(\lambda)$ es próxima a $X(\lambda)$.

El problema de la utilización de una ventana, viene propiciado por el siguiente hecho práctico. Se suele recibir una señal $x(t)$ que corresponde a la suma de dos señales, una $v(t)$ que es la verdadera señal y otra $\Gamma(t)$ que es el ruido con el que hemos perturbado a $V(t)$; esto es:

$$X(t) = v(t) + \Gamma(t)$$

El hecho de utilizar una ventana $y(t)$; es con el fin de que $x(t)y(t)$ esté mas próxima a $V(t)$, que la propia $X(t)$. En este sentido se pretende que $W(\lambda)$, la transformada de $x(t)y(t)$, coincida con $V(\lambda)$ la transformada de $v(t)$. Si $X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\lambda t} x(t) dt$, asociados con $X(\lambda)$, hay tres funciones, la propia $X(\lambda)$, su módulo $|X(\lambda)| = A(\lambda)$ y su argumento $\theta(\lambda)$.

$X(\lambda)$ recibe el nombre de espectro de frecuencias de $x(t)$; $A(\lambda)$ espectro de amplitud y $\theta(\lambda)$ el de espectro fase.

La operación que hemos hecho de multiplicar las funciones $x(t)$ $y(t)$, que se corresponde con una convolución de sus espectros de frecuencias respectivas se puede realizar en la otra dirección, esto es, multiplicando los espectros de frecuencias $X(\lambda) Y(\lambda) = W(\lambda)$ de dos señales $x(t)$ e $y(t)$, siendo $W(\lambda)$ el espectro de frecuencia de la señal $w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')y(t - t') dt'$.

2-6 SEÑALES DISCRETAS Y SUS TRANSFORMADAS DE FOURIER

En esta sección suponemos que todas las funciones tienen transformada de Fourier.

Una función se llama de banda limitada, si y solo si existe $\lambda_0 > 0$

tal que su transformada de Fourier $X(\lambda) = \text{TF}[x(t)]$ es tal que $X(\lambda) = 0; \forall |\lambda| \geq \lambda_0$.

Si $x(t)$ es de banda limitada, entonces

$$x(t) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} X(\lambda) e^{i2\pi\lambda t} d\lambda$$

Se puede obtener una cota de $x(t)$ utilizando la desigualdad de Schwarz:

$$|x(t)| \leq \left[2\lambda_0 \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} |x(\lambda)|^2 d\lambda \right]^{1/2} \leq (2\lambda_0 E)^{1/2}$$

donde E , es virtud de la desigualdad de Parseval, es la energía de la señal $x(t)$.

Si la señal $x(t)$ es derivable n veces, se obtiene que:

$$x^{(n)}(t) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} (i2\pi\lambda)^n e^{i2\pi\lambda t} X(\lambda) d\lambda$$

y una cota para $x^{(n)}(t)$ es por la misma técnica, obteniendo:

$$|x^{(n)}(t)| \leq \left(\frac{(2\lambda_0)^{2n+1} \pi^{2n} E}{2n+2} \right)^{1/2}$$

Puesto que $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds$, se obtiene que

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \left(\frac{(2\lambda_0)^3 \pi^2 E}{3} \right)^{1/2} (t_2 - t_1)$$

Tras este preambulo, pasamos al objetivo principal de esta sección, que es el de observar la señal $x(t)$ en intervalos de tiempo equiespaciados; esto es de $x(t)$ solo conocemos $X(nT)$ para $n \in \mathbb{Z} = \text{enteros}$. Simbolicamente, podemos representar el conjunto $\{X(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ por la expresión:

$$\hat{x}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT); \text{ siendo } \delta(t - nT) = \begin{cases} 1; & \text{si } t = nT \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Puesto que la transformada de Fourier de la señal discreta $\hat{x}(t)$ es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i2\pi\lambda nT}$, podemos utilizar simbólicamente y prácticamente la siguiente expresión:

$$\hat{x}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\lambda t} x(t) \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i2\lambda nT}$$

Si $X(\lambda)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, pretendemos ver la relación entre $X(\lambda)$ y $\hat{x}(\lambda)$. Para ello, tengamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\lambda + m/T) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-i2\pi n\lambda T - i2\pi nm) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \exp(-i2\pi n\lambda T) = \hat{x}(\lambda) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\hat{x}(\lambda)$ es una función periódica de periodo T .

Puesto que $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda' t} X(\lambda') d\lambda'$ sustituyendo en la expresión que calcula $\hat{x}(\lambda)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n\lambda T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda' nT} X(\lambda') d\lambda' = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n(\lambda - \lambda') T} X(\lambda') d\lambda' = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\lambda - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

Si $X(\lambda) = 0$, para $|\lambda| \geq T/2$, entonces $X(\lambda)$ coincide con $\hat{x}(\lambda)$, salva por el factor $\frac{1}{T}$; esto es $X(\lambda)$ es un alisamiento de $X(\lambda)$, en el sentido de que:

$$\hat{x}(\lambda)T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\lambda - \frac{n}{T}\right)$$

Cuando $X(\lambda) \neq 0$, para $|\lambda| \geq T/2$; $\hat{x}(\lambda)$ es un alisamiento de $X(\lambda)$, en el sentido de que $\hat{x}(\lambda)T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\lambda - \frac{n}{T}\right)$. Cuando $X(\lambda) \neq 0$; si $-B/2 \leq \lambda \leq B/2$ y se toma $T = \frac{1}{B}$, se dice que hemos utilizado la razón de muestreo de Nyquist, algunas veces llamada razón de muestreo crítica.

Pretendemos reconstruir la señal continua $x(t)$ con el solo

conocimiento de la señal discreta $\hat{X}(nT)$. Cuando $\frac{1}{T} \geq B$, se verifica que $X(\lambda) = T\hat{X}(\lambda)$ y por tanto:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda t} X(\lambda) d\lambda = T \int_{-B}^B e^{i2\pi\lambda t} \hat{X}(\lambda) d\lambda = \\ T &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-B}^B e^{i2\pi\lambda t(t-nT)} d\lambda = \\ &= BT \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}[\pi B(t - nT)] \end{aligned}$$

siendo la función sinc $x = \frac{\text{sen } x}{x}$, para $x \neq 0$ y $\text{sinc}(0) = 1$.

Cuando $B = \frac{1}{T}$, las fórmulas previas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\right)(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \Psi_n(t) \\ x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{B}\right) \text{sinc}(\pi B)\left(t - \frac{n}{B}\right) \end{aligned}$$

Las funciones $\Psi_n(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}\right)(t - nT)$ satisfacen las propiedades:

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t) \Psi_m(t) dt = \begin{cases} T, & \text{si } |\lambda| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{si } |\lambda| > \frac{1}{2T} \end{cases}$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\lambda t} \Psi_n(t) dt = \begin{cases} T e^{-i2\pi n\lambda T}; & \text{si } |\lambda| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{si } |\lambda| > \frac{1}{2T} \end{cases}$

que son las típicas características de ortogonalidad.

Finalmente la igualdad de Parseval para señales de bajas frecuencias quedaria:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 d\lambda$$

2-7 FILTROS LINEALES. PROPIEDADES GENERALES

El término filtro lineal significa que transforma una serie temporal, en una nueva serie temporal, donde el término serie temporal se debe interpretar en sentido amplio, cualquier función numérica del

tiempo, continua o discreta, aleatoria o no. Un importante t3pico es como construir filtros, que modifiquen los datos de forma adecuada.

Definici3n Un filtro lineal F es una transformaci3n de una serie temporal, la entrada $x(t)$; en una serie temporal, la salida $y(t)$, que cumple adem3s las dos propiedades siguientes:

(i) Linealidad:

$$F[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 F[x_1(t)] + \alpha_2 F[x_2(t)]$$

(ii) Invariancia en el tiempo:

si $F[x(t)] = y(t)$ y $x_\tau(t) = x(t + \tau)$; $y_\tau(t) = y(t + \tau)$ entonces

$$F[x_\tau(t)] = y_\tau(t)$$

Es claro que si $x(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t)$ entonces

$$F[x(t)] = \sum_{j=1}^n \alpha_j F[x_j(t)]$$

Exigiremos tambi3n la propiedad de conmutaci3n de F con el l3mite, siempre que los l3mites existan, es decir:

$$\begin{aligned} F\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t)\right] &= F\left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j(t)\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j F[x_j(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j F[x_j(t)] \end{aligned}$$

El tipo de l3mite depender3 del problema particular, ya que en unos casos representar3 una suma infinita, mientras que en otros casos el l3mite se transformar3 en una integral.

Simb3licamente este hecho queda representado mediante la expresi3n:

$$F\left[\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} x_{\lambda}(t)\right] = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} F[x_{\lambda}(t)]$$

En el caso particular de que $x_{\lambda}(t) = e^{i\lambda t}$, tendremos

que $x(t) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} e^{i\lambda t}$. La acci3n del filtro F , sobre $x(t)$, queda

totalmente determinado por $F\left(e^{i\lambda t}\right) = \varphi_\lambda(t)$.

Como $F\left[e^{i\lambda(t+h)}\right] = \varphi_\lambda(t+h) = e^{i\lambda h}\varphi_\lambda(t)$, se sigue que:

$$\varphi_\lambda(h) = \varphi_\lambda(0)e^{i\lambda h}$$

Llamando $T(\lambda) = \varphi_\lambda(0) = F\left(e^{i\lambda 0}\right) = \lim_{t \downarrow 0} F\left(e^{i\lambda t}\right)$ se obtiene que :

$$F\left[x(t)\right] = F\left[\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} e^{i\lambda t}\right] = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} T(\lambda) e^{i\lambda t}$$

A la función $T(\lambda)$ se le llama función de transferencia del filtro F , y si llamamos:

$$H = \left\{x(t) / x(t) = \lim \sum \alpha_{\lambda} e^{i\lambda t}\right\}$$

entonces F operando sobre H , queda totalmente determinada, por su función de transferencia.

Si escribimos $\alpha_{\lambda} e^{i\lambda t} T(\lambda)$ en forma módulo argumental, obtenemos:

$$x(t) = \sum_{\lambda} |\alpha_{\lambda}| e^{i\{(\lambda t + \varphi(\lambda))\}}$$

$$T(\lambda) = |T(\lambda)| e^{i\theta(\lambda)}$$

De donde se obtiene que:

$$F\{x(t)\} = \sum_{\lambda} |\alpha_{\lambda}| |T(\lambda)| e^{i\{(\lambda t + \Psi(\lambda) + \theta(\lambda))\}}$$

Es decir si λ representa una frecuencia de la señal $x(t)$, la amplitud de cada frecuencia λ está multiplicada por el factor $|T(\lambda)|$ y la fase se cambia de $\Psi(\lambda)$ a $\Psi(\lambda) + \theta(\lambda)$.

Las funciones $T(\lambda)$ y $\theta(\lambda)$, se denominan ganancia y fase del filtro lineal, respectivamente.

Cuando $x(t)$ es real, se debe verificar que $\alpha_{\lambda} = \alpha_{-\lambda}$ y para que la salida del filtro F sea real, se debe verificar que $T(-\lambda) = \overline{T(\lambda)}$, en cuyo caso, se tiene que:

$$|T(\lambda)| = |T(-\lambda)|, \text{ y } \theta(-\lambda) = -\theta(\lambda)$$

Sabemos que si $x(t)$ es una función periódica de periodo T , entonces:

$$x(t)_{c.s.} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n u_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}$$

con $\lambda_n = 2\pi n u_0$; $u_0 = \frac{1}{T}$; $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

En este supuesto la salida del filtro es:

$$F[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \text{ que es una función periodica con potencia}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 |T(\lambda_n)|^2 < \infty .$$

Si $x(t)$ es una función real tal que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$, entonces existe $h(\lambda)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, y

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} h(\lambda) d\lambda$$

Por tanto si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 |T(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, entonces

$$F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 |T(\lambda)| e^{i\lambda t} dx < \infty \text{ es una función de cuadrado}$$

integrable (energía finita) bien definida.

2-8 TIPOS ESPECIALES DE FILTROS LINEALES

De lo dicho se desprende que al aplicar un filtro lineal F , a la función $e^{i\lambda t}$, el resultado es la misma función multiplicada por la función de transferencia del filtro $T(\lambda)$ en la frecuencia de λ .

$$\text{Esto es } F(e^{i\lambda t}) = T(\lambda) e^{i\lambda t} .$$

A1 — Filtro derivado y Filtros de Alta Frecuencia

Partiendo de $F_D(e^{i\lambda t}) = \frac{de^{i\lambda t}}{dt} = i\lambda e^{i\lambda t}$, se obtiene que $T(\lambda) = i\lambda$. Por tanto la función de ganancia del filtro derivada F_D es $G(\lambda) = |\lambda|$ y su función fase es:

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} \pi/2 ; & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -\pi/2 ; & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Tipos especiales de Filtros lineales

Observemos que el filtro derivado F_D , actúa atenuando el efecto de las frecuencias pequeñas, y amplificando el efecto de las frecuencias altas.

Un filtro se llama de alta frecuencia cuando atenúa o disminuye las frecuencias inferiores a una determinada frecuencia λ_0 , mientras que refuerza o deja igual las frecuencias superiores a λ_0 . El punto λ_0 , se llama corte en las frecuencias del filtro, y la frecuencia para este valor, por lo general, no se transforma por el filtro. Un filtro ideal de alta frecuencia está dado por:

$$T_{AF}(\lambda) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{si } |\lambda| < \lambda_0 \\ 1 & ; \quad \text{si } |\lambda| \geq \lambda_0 \end{cases}$$

A₂ FILTRO CONVOLUCION

Sea $x(t)$ una función real de cuadrado integrable, y sea $h(u)$ una función tal que la función $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du$ sea de cuadrado integrable. demostraremos que la transformación

$$F_{hc}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du = y(t)$$

es un filtro lineal, denominado filtro convolución. Para ello es claro que:

$$F_{hc}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha F_{hc}[x_1(t)] + \beta F_{hc}[x_2(t)] \quad y$$

$$F_{hc}[x_{t+\tau}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(\tau+u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u')x(u')du' = y(t+\tau)$$

A la función $h(u)$ se la denomina función de respuesta al impulso, ya que $h(t)$ es la transformada por el filtro de la función delta de Dirac, que equivale en el filtro convolución, a integrar respecto de una distribución que concentra su probabilidad en t .

Facilmente se comprueba que la función de transferencia del

filtro F_{hc} , es $T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du$.

Es claro que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du < \infty$, entonces $T(\lambda)$ es una función acotada.

Def. Un filtro se llama estable, si y solo, si, cuando la entrada $x(t)$ está acotada, también está acotada la salida $y(t)$.

Si $|x(t)| \leq M$, entonces:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)||x(t-u)| du \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du$$

Por tanto si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du < \infty$, entonces el filtro F_{hc} es estable.

Def. El filtro F_{hc} se llama realizable, si y solo si $h(u) = 0$; para $u < 0$

A₃ FILTROS DE BAJA FRECUENCIA

Un filtro de baja frecuencia, es aquél que atenúa o debilita el efecto de las altas frecuencias, y refuerza el efecto de las frecuencias bajas. Frecuentemente se les llama también filtros de alisamiento.

Un filtro ideal de baja frecuencia, tiene por función de transferencia:

$$F_{BF}(\lambda) = \begin{cases} 1; & \text{si } \lambda \leq \lambda_0 \\ 0; & \text{si } \lambda > \lambda_0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1.- PROCESO ACUMULADO Y SU ESPECTRO ALISADO

En muchos ejemplos, las series temporales en tiempo discreto, se obtienen mediante la acumulación de material en tiempos igualmente espaciados. Por ejemplo el grosor anual de los anillos de los troncos de los árboles, es la acumulación de madera producida por el proceso de crecimiento continuo del árbol.

Si representamos por $X(t)$ el proceso en tiempo continuo, el

proceso acumulado en tiempo discreto es:

$$Y(nT) = \int_{nT}^{(n+1)T} X(u)du$$

Mediante el cambio de variable $V = nT - u$, la representación anterior se puede escribir en la forma:

$$Y(nT) = - \int_0^{-T} X(nT - v)dv = \int_0^T X(nT - v)dv$$

Generalizando este hecho y tomando $Y(t)$ como la cantidad de medida acumulada en el tiempo $(t - T, t)$ se tiene:

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t - v)dv$$

La función de respuesta al impulso del filtro convolución es

$$h(u) = \begin{cases} 1/T & \text{si } 0 \leq u \leq T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y la función de transferencia de este filtro convolución es:

$$T(\lambda) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda v} dv = e^{-i\lambda T/2} \frac{\text{sen}(\lambda T/2)}{\lambda T/2}$$

EJEMPLO 2 EL AMPLIFICADOR IDEAL

Los amplificadores físicos, son dispositivos cuyo objeto es transformar una señal debil, en una versión fuerte de la misma señal, con tan pequeñas distorsiones como sea posible. El modelo matemático para un amplificador ideal realizable es:

$$A[x(t)] = CX(t - \tau)$$

Siendo C el factor de amplificación y τ el retardo de la salida sobre la entrada A es un filtro lineal cuyas funciones de transferencia, ganancia y fase son respectivamente:

$$T_A(\lambda) = ce^{-i\lambda\tau}$$

$$G(\lambda) = c$$

$$\theta(\lambda) = -\lambda\tau$$

Los modernos amplificadores de alta fidelidad, están muy próximos

de alcanzar el objetivo ideal sobre un amplio rango de frecuencias. Esto ha hecho posible amplificar con precisión señales previamente registradas con baja fidelidad, como sucede con electroencefalogramas, electrocardiogramas, rayos cósmicos, seismogramas, etc.

La función $\theta(\lambda)$ recibe también el nombre de desplazamiento de la fase. También es interesante la función desplazamiento en el tiempo $\tau(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)}{\lambda}$, cuya introducción viene motivada por el segundo ejemplo: $\tau(\lambda)$ mide el desplazamiento de la fase en unidades de tiempo.

Como consecuencia tenemos que si $\left(\pi(\lambda) = |T(\lambda)| \right)$ y $\theta(\lambda)$ son las funciones ganancia y desplazamiento de la fase de un filtro F, entonces:

$$F\left(e^{i\lambda t}\right) = G(\lambda)e^{i\lambda[t+\tau(\lambda)]}$$

Es decir que F desplaza el origen del tiempo de los armónicos de frecuencia λ en $\tau(\lambda)$ unidades.

Puesto que $\theta(\lambda)$ y λ son funciones impares, $\tau(\lambda)$ es una función par. En el ejemplo 2, $\tau(\lambda) = -\tau$, que significa que todos los armónicos se han desplazado hacia atrás en el tiempo, en la misma cantidad.

Cuando esto no sucede, tiene una distorsión de la fase.

Def. Un filtro se llama simétrico, si y solo si, $\tau(\lambda) = \theta(\lambda) = 0$.

Esto sucede cuando la función respuesta al impulso es simétrica. Los filtros simétricos no son realizables salvo que sean instantáneos, esto es $A\left[X(t)\right] = CX(t)$.

De donde, todo filtro realizable no instantáneo, debe ser tal que $\theta(\lambda) \neq 0$, para algún valor de λ .

2-9 COMBINACIONES DE FILTROS

R1 Si F_1 y F_2 son filtros lineales con funciones de transferencia

$T_1(\lambda)$ y $T_2(\lambda)$, entonces a $F_1 + bF_2 = F$ es un filtro lineal con función de transferencia a $T_1(\lambda) + bT_2(\lambda)$.

R2 Si F_1 y F_2 son dos filtros lineales con funciones de transferencia $T_1(\lambda)$ y $T_2(\lambda)$, tales que F_1 opera sobre $x(t)$ y F_2 sobre $F_1[x(t)]$, entonces $F_2 \circ F_1$ es un filtro lineal con función de transferencia:

$$T(\lambda) = T_2(\lambda) \cdot T_1(\lambda)$$

Basándonos en estas transformaciones, y representando por I el filtro identidad, esto es $I[x(t)] = x(t)$, y por F el filtro de baja frecuencia, con función de transferencia $T(\lambda) = \begin{cases} 1; & \text{si } |\lambda| \leq \lambda_1 \\ 0; & \text{si } |\lambda| > \lambda_2 \end{cases}$, entonces el filtro $F_1 = I - F$, es un filtro de altas frecuencias.

Los filtros de bajas y altas frecuencias, se pueden componer secuencialmente, para obtener filtros de frecuencias intermedias. Por ejemplo, si F_1 es un filtro con función de transferencia

$$T_1 = \begin{cases} 1; & \text{si } |\lambda| \geq \lambda_1 \\ 0; & \text{en el resto} \end{cases}, \text{ y } F_2 \text{ un filtro con función de transferencia}$$

$$T_2(\lambda) = \begin{cases} 1; & \text{si } |\lambda| \leq \lambda_2 \\ 0; & \text{en el resto} \end{cases}, \text{ con } \lambda_1 < \lambda_2, \text{ entonces el filtro } F = F_2 \circ$$

$F_1 = F_1 \circ F_2$ tiene por función de transferencia

$$T(\lambda) = \begin{cases} 1; & \text{si } |\lambda| \leq \lambda_2 \\ 0; & \text{en el resto} \end{cases}$$

El intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ se llama la banda que pasa el filtro.

Otra combinación interesante son los filtros de la forma:

$$F = I - (F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k)$$

siendo cada F_i un filtro que solo pasa las frecuencias comprendidas entre $\lambda_1^i < |\lambda| \leq \lambda_2^i$

Es interesante señalar que todos los filtros previos se pueden

componer a partir de filtros de bajas frecuencias y de las operaciones básicas de combinación lineal y composición.

CAPITULO III

PROCESOS ALEATORIOS Y SERIES
TEMPORALES.

3.1. INTRODUCCION

En el estudio de las series temporales que admiten descomposición espectral se han desarrollado, históricamente, dos líneas de investigación. La primera de ellas, tuvo su origen en el estudio que realizó sobre la luz Sir Arthur Schuster (1898, 1906), y se culminó con el tratado que publicó Wiener (1930) sobre Análisis Armónico Generalizado, aplicado a Geofísica. En este importante trabajo, quedó completamente explicado el análisis espectral de funciones de potencia finita. La teoría de Wiener abarcaba series temporales univariantes y multivariantes y sus aplicaciones se extendían a modelo de series temporales tanto aleatorias, como no aleatorias o determinísticas; aunque por esta época no se comprendían en todo su significado las series aleatorias.

El matemático ruso Khintchine desarrolló la segunda línea, al introducir los procesos estocásticos estacionarios tanto en el sentido fuerte, como en el débil, y estudiar su estructura de correlación. Esta línea, además de la importancia que tuvo en facilitar el conocimiento de las series aleatorias, fue uno de los trabajos pioneros en el desarrollo de la teoría sobre procesos estocásticos estacionarios. Cramer (1942) formuló el importante teorema sobre descomposición espectral de los procesos débilmente estacionarios. En 1971 Kolmogoroff amplió la teoría sobre dichos procesos, introduciendo una concepción geométrica.

La teoría desarrollada por Wiener es adecuada para explicar un gran número de fenómenos reales que admiten una modelización tanto

determinística como aleatoria. Trabajos mas recientes dedicados a estos temas consideran que estos fenómenos son de naturaleza puramente probabilística y desarrollan teorías estadísticas para la estimación de los modelos mas idóneos.

En este capítulo exponemos los conceptos teóricos sobre los procesos estacionarios. En el epígrafe 3-2 se desarrolla el análisis en media cuadrática de procesos, englobando el análisis de correlación iniciado por Khintchine.

En 3-3 se desarrolla la integración respecto de un proceso estocástico, exponiendo una serie de resultados básicos, para el desarrollo y comprensión de la descomposición espectral de un proceso estacionario.

En 3-4 se clasifican los procesos en función de la información que el pasado tiene sobre el futuro.

En 3-5 se desarrollan los conceptos básicos sobre procesos estacionarios, ampliándose en [3-6] con los resultados relativos al importante hecho de la representación espectral de estos procesos y de su ergodicidad.

En 3-8 se dan importantes conceptos sobre muestreo, alisamiento y modelos en tiempo discreto, y se explica como se pueden reproducir, parcialmente la estructura espectral del proceso continuo en términos del discreto.

Se finaliza el capítulo con un estudio sobre teoría general de filtros lineales.

En los epígrafes [3-2] al [3-6] se han seguido las notas de Velez (Preprint).

3-2 ANALISIS EN MEDIA CUADRATICA DE PROCESOS ESTOCASTICOS

Sea $\{Z_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico a valores complejos en general. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $E(Z_t) = 0$; pues en otro caso, llamando $m(t) = E(Z_t)$ construiremos el proceso:

$$Z^*(t) = Z(t) - m(t)$$

y $Z^*(t)$ tendría medio cero.

Def. 3-2-1 Si representamos $Z(t) = X(t) + iY(t)$, se llama función de autocovarianza del proceso $Z(t)$ a:

$$\gamma(t, s) = E\left[Z(t)\overline{Z(s)}\right] = E\left[X(t)X(s) + Y(t)Y(s)\right] + iE\left[Y(t)X(s) - Y(s)X(t)\right]$$

Son bien conocidas las siguientes propiedades de la función de autocovarianza.

P1. - $\gamma(t, s) = \overline{\gamma(s, t)}$

P2. - $\gamma(t, t) = E\left[Z(t) \cdot \overline{Z(t)}\right] \geq 0$

P3. - $|\gamma(t, s)| \leq \left[\gamma(t, t) \cdot \gamma(s, s)\right]^{1/2}$ (Desigualdad de Schwartz)

P4. - $\forall n, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}^n$ y $\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(t_i, t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0$$

Puesto que exigiremos que $E\left[Z(t) \cdot \overline{Z(t)}\right] < \infty$, consideraremos como básico el espacio

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ Z: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid E|Z|^2 = \int_{\Omega} |Z|^2 P(dw) < \infty \right\}$$

es decir el espacio de variables aleatorias, definidas sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{a}, P) , con los valores en los complejos y de cuadrado integrable. En dicho espacio se define el producto escalar $\langle u, v \rangle = E\left[U(w)\overline{V(w)}\right]$ y por tanto

$$\|U\| = \left[E(U\overline{U}) \right]^{1/2}$$

Por tanto la convergencia en medio cuadrático no es mas que la convergencia en el espacio de Hilbert \mathcal{L}^2 , con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3-2-1 CONTINUIDAD EN MEDIA CUADRATICA DE UN PROCESO

Sea $Z(t)$ un proceso estocástico tal que $\forall t, E\gamma|z(t)|^2 < \infty$

Def. 3-2-1 Se dice que $Z(t)$ es continuo en media cuadeática en t_0 , si y solo si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E|Z(t_0 + h) - Z(t_0)|^2 = 0$$

Teorema 3-2-1. - $Z(t)$ es continuo en media cuadrática en t_0 , si y solo si su función de autocovarianza $\gamma(t,s)$ es continua en (t_0, t_0) .

Demostración

$E|Z(t_0 + h) - Z(t_0)|^2 = \gamma(t_0 + h, t_0 + h) - \gamma(t_0 + h, t_0) - \gamma(t_0, t_0 + h) + \gamma(t_0, t_0)$. Tomando límites , cuando $h \rightarrow 0$ y suponiendo que γ es continua en (t_0, t_0) se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} E|Z(t_0 + h) - Z(t_0)|^2 = 0$$

Recíprocamente si $Z(t)$ es continuo en m.c., entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{h' \rightarrow 0} E \left[Z_{t_0+h} \bar{Z}_{t_0+h'} \right] = \lim_{h, h' \rightarrow 0} \gamma(t_0 + h, t_0 + h') = E \left[Z_{t_0} \bar{Z}_{t_0} \right] = \gamma(t_0, t_0)$$

Corolario 3-2-1. - Si γ es continua en todos los puntos de la diagonal, entonces es continua y, además, $Z(t)$ es continuo en media cuadrática en todo t .

Teorema 3-2-2. - Sea $\left\{ Z_n(t) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos continuos en media cuadrática y tales que $E \left[Z_n(t) \bar{Z}_n(t) \right] < \infty$. Si $Z_n(t) \xrightarrow{m.c.} Z(t)$ uniformemente en t ; entonces el proceso estocástico $Z(t)$ es continuo en media cuadrática.

3-2-2 DERIVADA DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO

Def. 3-2-2-1. Sea $\{Z(t)\}_{t \in T}$ un proceso estocástico tal que $E[Z(t)\overline{Z(t)}] < \infty$. Se dice que $Z(t)$ es derivable en media cuadrática en t_0 si y solo si existe una variable aleatoria $U(t_0)$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{m.c.} \frac{Z(t_0 + h) - Z(t_0)}{h} = U(t_0) \quad \text{c.s.}$$

Teorema 3-2-2-1. Si $Z(t)$ es derivable en media cuadrática en t_0 , entonces $Z(t)$ es continua en media cuadrática en t_0 .

Teorema 3-2-2-2. $Z(t)$ es derivable en media cuadrática en t_0 , si y solo si $\gamma(s, t)$ es dos veces derivable en (t_0, t_0) .

Demostración. - Puesto que:

$$E \left[\frac{Z_{t_0+h} - Z_{t_0}}{h} \cdot \frac{\overline{Z}_{t_0+h} - \overline{Z}_{t_0}}{h'} \right] = \frac{\gamma(t_0 + h, t_0 + h') - \gamma(t_0 + h, t_0)}{h \cdot h'} =$$

$$- \left[\gamma(t_0, t_0 + h) - \gamma(t_0, t_0) \right]$$

Tomando límites cuando h y h' tienden a cero, se obtiene el resultado deseado.

Corolario 3-2-2-1. Si Z_t es derivable en t_0 y llamamos \dot{Z}_{t_0} a su derivada, entonces $E[\dot{Z}_{t_0} Z_t] = \left[\frac{\partial \gamma(s, u)}{\partial s} \right] (t_0, t)$. Además si Z_t es

derivable en media cuadrática en todo t , entonces:

$$E[\dot{Z}_t \dot{Z}_t] = \left[\frac{\partial^2 \gamma(u, v)}{\partial u \partial v} \right] (t, t)$$

también $E[\dot{Z}_t] = \frac{dE[Z_t(E)]}{dt} = m'(t)$, siendo

$m(t) = E[Z(t)]$ y el operador derivado en media cuadrática es lineal.

3-2-3 INTEGRAL DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO EN MEDIA CUADRÁTICA

Def. 3-2-3-1.- Sea $\{Z(t)\}$ un proceso estocástico de cuadrado integrable. Se dice que $Z(t)$ es integrable en media cuadrática en $[a, b]$ si y solo si las sumas

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i), \quad \text{con } a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

y $\rho = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$, converge en media cuadrática cuando $\rho \rightarrow 0$.

Utilizaremos entonces la notación

$$\int_a^b Z(t) dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{m. c.} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i).$$

Teorema 3-2-3-1.- $Z(t)$ es integrable en $[a, b]$ si y solo si $\gamma(t, s)$ es integrable en $[a, b] \times [a, b]$.

Demostración.- Si $\gamma(t, s)$ es integrable en $[a, b] \times [a, b]$ será:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \gamma(t, s) dt ds &= \lim_{\rho, \rho' \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{\rho, \rho' \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma(t_i, t'_j) (t'_{j+1} - t'_j) = \\ &= \lim_{\rho, \rho' \rightarrow 0} E \left[\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i) \right] \left[\sum_{j=0}^{m-1} (t'_{j+1} - t'_j) Z(t'_j) \right] \end{aligned}$$

Por tanto $\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i)$ converge en media cuadrática cuando

$\rho \rightarrow 0$. Recíprocamente, si

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i) \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{\text{m. c.}} \int_a^b Z(t) dt \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) Z(t_i) \right] \left[\sum_{j=0}^{m-1} (t'_{j+1} - t'_j) Z(t'_j) \right] \xrightarrow[\rho, \rho' \rightarrow 0]{} \\ E \left| \int_a^b Z(t) dt \right|^2 \text{ y por tanto } \int_a^b \int_a^b \gamma(t, s) ds dt \end{aligned}$$

existe y coincide con $E \left(\left| \int_a^b Z(t) dt \right|^2 \right)$

Corolario 3-2-3-1.- Si $Z(t)$ es continuo en media cuadrática en todo punto de un intervalo finito $[a, b]$, entonces es integrable en media

cuadrática en $[a, b]$

Demostración Puesto que $\gamma(t, s)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$.

PROPIEDADES

$$\underline{P1.} - E \left[\int_a^b Z(t) dt \right] \int_a^b E [Z(t)] dt.$$

$$\underline{P2.} - E \left[\int_a^b Z(t) dt \int_c^d \overline{Z(u)} du \right] = \int_a^b \int_c^d \gamma(t, u) du dt.$$

$$\underline{P3.} - \int_a^b \left[(C_1 Z(t)) + C_2 V(t) \right] dt = C_1 \int_a^b Z(t) dt + C_2 \int_a^b V(t) dt$$

$$\underline{P4.} - \int_a^b Z(t) dt = \int_a^c Z(t) dt + \int_c^b Z(t) dt ; \forall c \in (a, b)$$

Teorema 3-2-3-2. - Suponemos que $Z(u)$ es integrable en $[a, b]$ y sea

$$S(t) = \int_a^t Z(u) du ; \forall t \in [a, b].$$

a) $S(t)$ es continuo en media cuadrática en todo $[a, b]$, $S(t)$ es derivable en (a, b) y $\dot{S}(t) = Z(t)$.

Demostración: Son evidentes en función de los resultados previos.

Teorema 3-2-3-3. - Sea $Z(t)$ derivable en media cuadrática en $[a, b]$, y sea $\dot{Z}(t)$ su derivable. Si $\dot{Z}(t)$ es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$Z(t) - Z(u) = \int_a^t \dot{Z}(u) du$$

c. s.

Demostración:

$$\begin{aligned} E \left| Z(b) - Z(a) - \int_a^b \dot{Z}(u) du \right|^2 &= E \left| Z(b) - Z(a) \right|^2 + \\ &+ E \left| \int_a^b \dot{Z}(u) du \right|^2 - E \left[Z(b) - Z(a) \right] \int_a^b \overline{\dot{Z}(u)} du - \\ &- E \left[\left(\overline{Z(b)} - \overline{Z(a)} \right) \int_a^b \dot{Z}(u) du - \gamma(b, b) - \gamma(b, a) - \right. \\ &- \gamma(a, b) + \gamma(a, a) + \int_a^b \int_a^b \frac{\partial^2 \gamma(s, t)}{\partial s \partial t} ds dt - \\ &\left. - \int_a^b E \left[\left(Z(b) - Z(a) \right) \overline{\dot{Z}(u)} \right] du - \int_a^b E \left(\overline{Z(b)} - \overline{Z(a)} \right) \dot{Z}(u) du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma(b,b) - \gamma(b,a) - \gamma(a,b) + \gamma(a,a) + \gamma(b,b) - \gamma(a,b) - \\
&- \gamma(b,a) + \gamma(a,a) - 2\gamma(b,b) - 2\gamma(a,a) + 2\gamma(b,a) + 2\gamma(a,b) = 0
\end{aligned}$$

3-2-4 TEOREMA ERGODICO EN MEDIA CUADRATICA

Sea $Z(t)$ un proceso estocástico $\forall t \in [0, \infty)$ tal que $E[Z(t)] = 0$

TEOREMA. - « Si $\gamma(t,s)$ es continua $\forall t, \forall s$ y se cumple que

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \gamma(t,s) ds dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \text{ equivale a } \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{m. c.} 0 \text{ »}$$

Demostración. - El resultado se desprende de

$$E \left| \frac{1}{T} \int_0^T Z(u) du \right|^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \gamma(t,s) ds dt.$$

3-3 INTEGRACION RESPECTO DE UN PROCESO ESTOCASTICO

Sea $\{Z(t)\}_{t \in T}$ un proceso estocástico, al que $E[|Z(t)|^2] < \infty$. $Z(t)$

es un proceso de incrementos ortogonales si y solo si satisface:

a) $E[Z(t) - Z(s)] = 0; \forall t, s \in T$

b) $E|Z(t) - Z(s)|^2 < \infty; \forall t, s \in T$

c) $\forall t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \in T; E\left[\left(Z(t_2) - Z(t_1)\right)\left(\overline{Z(t_4)} - \overline{Z(t_3)}\right)\right] = 0$

TEOREMA 3-3-1. - « Si $Z(t)$ es un proceso de incrementos ortogonales,

entonces existe una función $F(x)$ tal que

$$\forall s \leq t \in T \text{ es } F(t) - F(s) = E|Z(t) - Z(s)|^2.$$

Dicha función es monótona, no decreciente y queda definida salvo por una constante aditiva. »

Demostración. - fijemos $t_0 \in T$ y sea

$$F(t) = \begin{cases} E|Z(t) - Z(t_0)|^2 & \text{si } t \geq t_0 \\ - E|Z(t) - Z(t_0)|^2 & \text{si } t \leq t_0 \end{cases}$$

$$\text{Si } t_0 \leq s \leq t; F(t) = E|Z(t) - Z(t_0)|^2 = E|Z(t) - Z(s) + Z(s) - Z(t_0)|^2 = \\ E|Z(t) - Z(s)|^2 + F(s)$$

$$\text{Si } s \leq t_0 \leq t; E|Z(t) - Z(s)|^2 = E|Z(t) - Z(t_0)|^2 - E|Z(s) - Z(t_0)|^2 = \\ = F(t) - F(s).$$

$$\text{Si } s \leq t \leq t_0; -F(s) = E|Z(t_0) - Z(s)|^2 = E|Z(t_0) - Z(t)|^2 + E|Z(t) - Z(s)|^2 = \\ = F(t) + E|Z(t) - Z(s)|^2.$$

La monotonía resulta trivialmente de que

$$E|Z(t) - Z(s)|^2$$

por último si $G^2(t)$ es otra función que

$$G(t) - G(s) = E|Z(t) - Z(s)|^2; \forall s \leq t, \text{ entonces}$$

$$G(t) - F(t) = G(s) - F(s) = \text{constante.}$$

Apartir de este resultado, es claro que el proceso $\left\{Z(t)\right\}_{t \in T}$ es continuo en media cuadrática en t si y solo si F es continuo en t .

Por comodidad y sin pérdida de generalidad, suponemos que $Z(t)$ es continuo por la derecha.

Definimos la integración de una función no aleatoria $g(t)$, respecto de un proceso de incrementos ortogonales en $[a, b]$. Comenzamos con funciones $g(t)$ escalonadas, es decir, cuando

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i I_{(t_{i-1}, t_i)}(t),$$

siendo $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$

$$\text{Por definición: } \int_a^b g(t) dZ(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i [Z(t_{i+1}) - Z(t_i)]$$

Es claro que $E \int_a^b g(t) dZ(t) = 0$, y,

$$E \left[\int_a^b g(t) dZ(t) \int_a^b h(u) dZ(u) \right] = \int_a^b g(t) h(t) dF(t)$$

Extendemos la definición de integral a otras funciones.

Consideremos, para ello, los espacios de Hilbert:

$$L^2 = \left\{ g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} / \int_a^b |g(t)|^2 dF(t) < \infty \text{ con } \langle g, h \rangle = \int_a^b g(t)h(t)dF(t) \right\}$$

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ Z: (\Omega, a, p) \rightarrow \mathbb{C} / E|Z|^2 < \infty, \text{ y } \langle z, v \rangle = \int_{\Omega} Z(W)\bar{V}(W)P(dW) \right\}$$

La definición anterior de integral, hace corresponder a las funciones escalonadas de L^2 , variables aleatorias de \mathcal{L}^2 , y dicha correspondencia, conserva el producto escalar.

Si $g \in L^2$, entonces existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas tales que $g_n \xrightarrow{L^2} g$. Entonces la sucesión $\int_a^b g_n(t)dZ(t)$ de variables en \mathcal{L}^2 es convergente, y por definición, su límite se define como $\int_a^b g(t)dZ(t)$.

Por tanto $\int_a^b g(t)dZ(t) = \lim_{m.c.} \int_a^b g_n(t)dZ(t)$; donde $g_n(t)$ son funciones escalonadas tales que $g_n \xrightarrow{L^2} g$.

Esta definición de integral, cumple las propiedades siguientes:

$$P1.- E \int_a^b g(t)dZ(t) = 0$$

$$P2.- E \left[\int_a^b g(t)dZ(t) \overline{\int_a^b h(t)dZ(t)} \right] = \int_a^b g(t)\overline{h(t)}dF(t) \Rightarrow$$

$$P3.- E \left| \int_a^b g(t)dZ(t) \right|^2 = \int_a^b |g(t)|^2 dF(t)$$

Si $g \in L^2$ es continua, se puede tomar:

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) T_{(t_i, t_{i+1})}(t)$$

Con $t_i = a + i \frac{b-a}{n}$, y simplemente,

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) [Z(t_{i+1}) - Z(t_i)] \xrightarrow{m.c.} \int_a^b g(t)dZ(t).$$

TEOREMA 3-3-1 « La integral en $[a, b]$ de una función $g(t)$, respecto a un proceso de incrementos ortogonales existe si y solo si

$$\int_a^b |g(t)|^2 dF(t) < \infty$$

En este caso $E \int_a^b g(t) dZ(t) = 0$, y

$$E \left[\int_a^b g(t) dZ(t) \cdot \overline{\int_a^b h(u) dZ(u)} \right] = \int_a^b g(t) \overline{h(t)} dF(t) \gg$$

Demostración. - Según el criterio de convergencia en media cuadrática

$\int_a^b g(t) dZ(t)$ existe si y solo si

$$E \left[\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \left(Z(t_{i+1}) - Z(t_i) \right) \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \bar{g}(t'_j) \left(\bar{Z}(t_{j+1}) - \bar{Z}(t_j) \right) \right\} \right],$$

converge a una constante, cuando los radios ρ y ρ' de las particiones

$\{t_i\}_{i=0}^n$, y $\{t'_j\}_{j=0}^m$ tienden a cero.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{t'_j\}$ es una subpartición de $\{t_i\}$; lo cual permite expresar el criterio en la

forma:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \sum_{j=0}^{m-1} \bar{g}(t'_j) \left(Z_{t'_{j+1}} - Z_{t'_j} \right) \left(\bar{Z}_{t'_{j+1}} - \bar{Z}_{t'_j} \right) \right] = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \sum_{j=0}^{m-1} \bar{g}(t'_j) \left\{ F(t'_{j+1}) - F(t'_j) \right\} \end{aligned}$$

En el caso de que $g(t)$ sea real, esta última expresión, es mayor o igual que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min \left[g(t'_j) \right]^2 \left\{ F(t_{i+1}) - F(t_i) \right\} \text{ y menor o igual que:}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \max_{j=1-m} \left[g(t'_j) \right]^2 \left\{ F(t_{i+1}) - F(t_i) \right\} \text{ de forma que si existe } \int_a^b g(t)^2 dF(t)$$

entonces existe $\int_a^b g(t) dZ(t)$.

Por tanto, si existe $\int_a^b |g(t)| dF(t)$, existen $\int_a^b Rg(t) dZ(t)$ y

$\int_a^b Ig(t)dZ(t)$, $\left[\text{puesto que } \int_a^b (Rg(t))^2 dF(t) \text{ y } \int_a^b (Ig(t))^2 dF(t) \text{ existen} \right]$
 y por tanto $\int_a^b g(t)dZ(t)$ existe.

Recíprocamente si $\int_a^b g(t)dZ(t)$ existe, el criterio converge para cualquier par de particiones $\{t_i\}$ y $\{t'_j\}$, en particular, cuando ambas coinciden, es claro que definen $\int_a^b |g(t)|^2 dF(t)$.

Esta última afirmación prueba además que

$$E \left| \int_a^b g(t)dZ(t) \right|^2 = \lim E \left| \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (Z(t_{i+1}) - Z(t_i)) \right|^2$$

$$\text{Por último } E \int_a^b g(t)dZ(t) = \lim_{p \rightarrow 0} E \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (Z(t_{i+1}) - Z(t_i)) = 0$$

ya que $E [Z(t_{i+1}) - Z(t_i)] = 0$.

El mismo razonamiento hecho en el caso de la demostración, permite afirmar que si $g(t)$ y $h(t)$ son integrables en $[a,b]$, respecto a $Z(t)$ será:

$$E \left[\int_a^b g(t)dZ(t) \int_a^b h(s)dZ(s) \right] = \int_a^b \overline{g(t)h(t)} dF(t).$$

Teorema 3-3-2. - « Si $Z(t)$ es un proceso de incrementos ortogonales tal que $E|Z(t) - Z(s)|^2 = \sigma^2(t - s)$ y

$$S(u) - S(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iut} - e^{-ivt}}{-it} dZ(t) \text{ entonces}$$

$$Z(t) - Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iut} - e^{-ivt}}{iu} dS(u)$$

El teorema recibe el nombre de transformada de Fourier respecto de un proceso de incrementos ortogonales.

3-4 PROCESOS DETERMINISTICOS E INDETERMINISTICOS

Sea $Z(t)$ un proceso estocástico tal que $\forall t, E[Z(t)\bar{Z}(t)] < \infty$; esto es $Z(t) \in \mathcal{L}^2 \forall t \in \mathbb{R}$. Representamos por $H_z(T)$ el espacio vectorial engendrado por $\{Z(t)/t \leq T\}$.

Si queremos predecir el valor de $Z(T+h)$, en función de $\{Z(t)/t \leq T\}$, lo lógico es dar como predicción el valor de la proyección Y de $Z(T+h)$ sobre $H_z(T)$; es decir buscar aquella variable Y , engendrada por la historia del proceso, que sea lo más próxima posible a $Z(T+h)$ en el sentido de los mínimos cuadrados, de forma tal que el error de predicción $E|Z(T+h) - Y|^2$ sea mínimo.

Consideramos ahora la familia de subespacios $H_z(T)$ al variar T . Es claro que $H_z(T)$ es monótona creciente con T y por tanto existe

$$H_z(-\infty) = \bigcap_{T \in \mathbb{R}} H_z(T)$$

$H_z(-\infty)$ se llama pasado remoto del proceso. Por otra parte $H_z(+\infty)$ es el espacio engendrado por $\{Z(t)/t \in \mathbb{R}\}$ y representa la evolución completa del proceso, y es claro que $\forall T; H_z(T) \subset H_z(+\infty)$.

Pueden ocurrir tres casos.

$$1^{\circ}) \quad H_z(-\infty) = H_z(+\infty)$$

$$2^{\circ}) \quad H_z(-\infty) = 0 \neq H_z(+\infty)$$

$$3^{\circ}) \quad 0 \neq H_z(-\infty) \neq H_z(+\infty)$$

En el 1^{er} caso $H_z(-\infty)$ contiene toda la información sobre el proceso, y este recibe el nombre de proceso determinístico o singular.

En el segundo caso $H_z(-\infty) = 0$, el pasado remoto del proceso, no contiene información alguna sobre el proceso. Se dice entonces que el proceso es indeterminístico puro.

En el tercer caso, el proceso se llama no determinístico ó regular. Vamos a probar que en tal caso el proceso es suma de dos procesos incorrelados, uno determinístico y otro indeterminístico puro.

TEOREMA 3-4-1. - « Si $\{Z(t)\}$ es un proceso tal que $\forall t E|Z(t)|^2 < \infty$, entonces se puede escribir $Z(t) = D(t) + I(t)$, siendo $D(t)$ determinístico e $I(t)$ indeterminístico puro y ambos incorrelados. Además dicha descomposición es única ».

Demostración.- Dado $Z(t)$, sea $D(t)$ la proyección de $Z(t)$ sobre $H_z(-\infty)$ e $I(t) = Z(t) - D(t)$. es claro que $Z(t) = D(t) + I(t)$, y $E[D(t)\overline{I(t)}] = 0$, por el teorema de la proyección ortogonal en espacios de Hilbert, con lo cual

$$E[d(t)\overline{I(t)}] = 0; \forall s < t \in \mathbb{R}.$$

Para ver que $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es indeterminístico puro basta observar que los subespacios de Hilbert, $H_I(T)$ definidos por el proceso $I(t)$ han de cumplir:

- a) $H_I(T) \subset H_z(T)$; $\forall T \in \mathbb{R}$ puesto que $I(t) = Z(t) - D(t) \in H_z(T)$
- b) $H_I(T) \perp H_z(-\infty)$; $\forall T \in \mathbb{R}$; donde \perp , significa ortogonal.

Luego $H_I(-\infty) \subset H_z(-\infty)$ y $H_I(-\infty) \perp H_z(-\infty)$; lo cual indica que $H_I(-\infty) = 0$

En cuanto al proceso $\{D_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, observemos que

$H_z(T) = H_D(T) \circ H_I(T)$; $\forall T \in \mathbb{R}$, y por tanto $H_z(-\infty) \subset H_D(T) \circ H_I(T)$; $\forall T \in \mathbb{R}$ y debido a que $H_z(-\infty) \perp H_I(T)$; $\forall T \in \mathbb{R}$, será $H_z(-\infty) \subset H_D(T)$, $\forall T \in \mathbb{R}$, se concluye que $H_D(T) = H_z(-\infty)$; $\forall T \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $Z_t = D'_t + I'_t$, entonces.

$H_D(T) \circ H_{I'}(T) = H_D(T) \circ H_I(T)$; $\forall T \in \mathbb{R}$. Por tanto

$H_z(-\infty) = H_D(+\infty) \circ H_{I'}(-\infty) = H_D(+\infty)$ y por tanto

$D'_t \in H_z(-\infty)$ y como $I_t, H_z(-\infty)$, resulta que

$D'_t = \text{proy. } (Z_t) \text{ sobre } H_z(-\infty)$, y la unicidad queda probada.

Para el caso discreto, el resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 3-4-2. « Un proceso $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $E|Z_n|^2 < \infty$

$\forall n$ es indeterminístico puro si y solo si $Z_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^n \varepsilon_{(n-j)}$

Siendo $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso de variables ortonormales

y $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j^n|^2 < \infty, \forall n$ »

Comentario Por $P_{n-1}(Z_n)$ representamos la proyección del proceso Z_n sobre el espacio $H_z(n-1)$ y $\varepsilon_n = Z_n - P_{n-1}(Z_n)$

Por tanto ε_n es ortogonal a ε_m para $n \neq m$.

3-4-3 DESARROLLOS DE KARHUNEN LOEVE

Sea $z(t)$ un proceso estocástico tal que $E|Z(t)|^2 < \infty, \forall t \in [a, b]$, $E[Z(t)] = 0$ y función de autocovarianza continua $\gamma(t, s)$. Pretendemos conseguir un desarrollo en serie de $Z(t)$ en la forma

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) Y_k$$

de tal forma que las sucesiones de v.a. $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{M}}$ sean ortonormales de media cero, y la sucesión de funciones $f_k(t)$ sean también ortonormales. Queremos que el desarrollo sea válido en media cuadrática; esto es:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E \left[\sum_{j=1}^n f_j(t) Y_j - \sum_{j=1}^m \overline{f_j(s)} \overline{Y_j} \right] = \gamma(t, s)$$

es decir, que llamando $\lambda_k = E|Y_k|^2$ tengamos:

$$\gamma(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(t) \overline{f_k(s)}$$

Si en la igualdad pr evia, multiplicamos por $f_j(s)$ e integramos, tenemos:

$$\int_a^b \gamma(t,s) f_j(s) ds = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{f_k(s)} f_j(s) ds.$$

Supuesto que se pueden intercambiar los operadores integraci3n y suma, obtendríamos:

$$\int_a^b \gamma(t,s) f_j(s) ds = \lambda_k f_j(t)$$

de tal forma que λ_j ser a un autovalor del operador que a $g(s)$ le har a corresponder

$$\int_a^b \gamma(t,s) g(s) ds = h(t)$$

y $f_j(t)$ un auto vector, asociado con el auto valor λ_j .

El operador que hemos citado está definido sobre $L^2[a,b] = \{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}\}$, siendo \mathbb{C} los números complejos y f tal que

$$\int_a^b |f(s)|^2 ds < \infty.$$

Se puede demostrar que todos los autovalores de este operador son mayores 3 iguales que cero, y que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal del espacio vectorial engendrado por los autovectores del operador asociados a autovalores no nulos, entonces

$$\gamma(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(t) \overline{f_k(s)}$$

Tenemos asi el siguiente resultado.

TEOREMA 3-4-4. - « Si $\{Z(t)\}_{t \in [a,b]}$ es un proceso tal que

$E[Z(t)]^2 < \infty$; $E[Z(t)] = 0$, a y b finitos y funci3n de autocovarianza continua, entonces existe una sucesi3n de variables aleatorias

ortogonales $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $E[Y_k] = 0$, $\forall k$, y una sucesi3n de

funciones ortogonales $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $Z(t) = \lim_{m.c.} \sum_{j=1}^n Y_j f_j(t)$ ».

Demostración.- Sean $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ los autovalores no nulos del operador asociado con γ , $\{f_k(t)\}_{k=1, \dots, \infty}^{\infty}$ una base ortonormal del espacio engendrado por los autovectores asociados con autovalores no nulos. Definimos

$$Y_n(w) = \int_a^b Z(t, w) \overline{f_n(t)} dt.$$

Es claro que $E[Y_n(w)] = 0$ y $E[Y_n(w)Y_m(w)] = \delta_{nm} \forall n, m$

Llamando $S_n(t, w) = \sum_{k=1}^n Y_k(w) f_k(t)$ tendremos:

$$E|Z(t, w) - S_n(t, w)|^2 = \gamma(t, t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k |f_k(t)|^2 -$$

$$- 2R \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \overline{f_k(t)} = \gamma(t, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k |f_k(t)|^2.$$

y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} E|Z(t, w) - S_n(t, w)|^2 = 0$

3-5 PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS. INTRODUCCION

Definición 3-5-1.- Un proceso estocástico $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se dice que es estrictamente estacionario si $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $\forall h > 0$, las variables aleatorias n - dimensionales $\{Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n)\}$, y $\{Z(t_1 + h), Z(t_2 + h), \dots, Z(t_n + h)\}$ son igualmente distribuidas.

Esto quiere decir que $\forall B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ (σ - álgebra de Borel del plano complejo o de la recta real):

$$P\{Z(t_1) \in B_1, Z(t_2) \in B_2, \dots, Z(t_n) \in B_n\} =$$

$$= P\{Z(t_1 + h) \in B_1, Z(t_2 + h) \in B_2, \dots, Z(t_n + h) \in B_n\}.$$

Está claro que si $E|Z(t)| < \infty$, entonces se verifica que $E\{Z(t)\} = \mu$, cuando el proceso es estrictamente estacionario. De igual

modo las distribuciones bidimensionales del proceso estacionario, solo dependen de la diferencia $t - s$, y como consecuencia la función de autocovarianza del proceso $Z(t)$ sólo depende de $t - s$, esto es $\gamma(t,s) = R(t - s) = R(\tau)$.

Esto nos lleva a debilitar la definición de proceso estrictamente estacionario, dando el concepto de proceso debilmente estacionario.

Def.3-5-2.- Un proceso estocástico $Z(t)$ es debilmente estacionario si y solo si $E|Z(t)|^2 < \infty ; \forall t \in \mathbb{R}$; y

$$E\left[Z(t + \tau) \cdot \bar{Z}(t)\right] = R(\tau); \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Es evidente que $R(\tau)$ cumple las condiciones siguientes:

a) $R(-\tau) = \overline{R(\tau)} ; \forall \tau \in \mathbb{R}$

b) $R(0) = E\left[Z(t)\right]^2 \geq 0$

c) $|R(\tau)| \leq R(0) ; \forall \tau \in \mathbb{R}$

d) R es semidefinida positiva; esto es $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$,

$\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

Es bien conocido que la propiedad d) caracteriza a las funciones de autocovarianza de los procesos estacionarios.

Sea $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente de valores reales y

$\xi_{\lambda_i}(w)$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Podemos construir el proceso

$$S(\lambda, w) = \sum_{i \in I(\lambda)} e^{it\lambda_i} \xi_{\lambda_i}(w), \text{ siendo } I(\lambda) = \{ i / \lambda_i \leq \lambda \}.$$

Es claro que el proceso $S(\lambda, w)$ es un proceso de incrementos ortogonales. Haremos la hipótesis de que $\lim_{\lambda \uparrow \infty} E\left[S(\lambda, w)\right]^2 < \infty$. En estas condiciones podemos construir:

$$Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dS(\lambda) = \sum_{\lambda \in M} e^{it\lambda} \xi_{\lambda}(w)$$

que obviamente es un proceso estacionario.

En general, supongamos que $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es un proceso de incrementos ortogonales, tal que su distribución asociada $F(\lambda)$ está acotada. En tal supuesto, puede considerarse el proceso

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dS(\lambda)$$

El proceso $Z(t)$, está compuesto por una suma ó superposición de armónicos de los distintas frecuencias. Además según las propiedades de la integral en media cuadrática, se tiene que,

$$E[Z(t)] = 0$$

$$E[Z(t)\overline{Z(s)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda) = R(t - s)$$

$$\text{Siendo } R(0) = E[|Z(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda)$$

lo que indica que el proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es estacionario de

Se llama la representación espectral de $Z(t)$ a $\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dS(\lambda)$ y el proceso $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ se llama su espectro. Si $S(\lambda)$ es continuo por la derecha en media cuadrática, entonces $F(\lambda)$ es monótona, no decreciente y continua por la derecha.

Dividiendo a $F(\lambda)$ por $R(0)$, obtenemos la función $G(\lambda) = \frac{1}{R(0)}F(\lambda)$, y la función $G(\lambda)$ se llama función de distribución espectral propia del proceso estacionario $Z(t)$.

Puesto que $F(\lambda) - F(\mu) = E|S(\lambda) - S(\mu)|^2$, $\forall \lambda \geq \mu \in \mathbb{R}$ resulta que $F(\lambda) - F(\mu)$ mide la contribución de los armónicos de la banda de frecuencia $[\mu, \lambda]$ a la varianza del proceso $Z(t)$. De las fórmulas previas se deduce que:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$$

y por la fórmula de inversión se puede obtener $F(\lambda)$, cuando se conoce $R(\tau)$.

3-6 REPRESENTACION ESPECTRAL DE PROCESOS ESTACIONARIOS

Comenzamos enunciando el teorema de Bochner, que utilizaremos despues

TEOREMA 3-6-1 (Bochner).- « una función es continua y definida no negativa si y solo si existe una función $F(\lambda)$, real, no decreciente y continua por la derecha, tal que $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = R(0)$ y tal que

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda). \text{ »}$$

Con este resultado podemos abordar el problema de la representación espectral de un proceso estacionario

TEOREMA 3-6-2.- (Teorema de la representación espectral de un proceso estacionario). Si $\left\{ Z(t) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un proceso estacionario, continuo en media cuadrática, entonces existe un proceso de incrementos ortogonales

$$\{S(\lambda)\} \text{ tal que } Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dS(\lambda)$$

Ademas si $E|S(\lambda) - S(\mu)|^2 = F(\lambda) - F(\mu)$, $\forall \mu \leq \lambda$, entonces la función de autovarianza del proceso $R(t)$ se puede escribir como:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dF(\lambda) = R(t) \text{ »}$$

~~Demostración.~~ Consideremos los dos espacios de Hilbert $H_z =$ espacio vectorial engendrado por $\left\{ Z(t) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$, dotado del producto escalar

$$\langle Z(t), Z(s) \rangle = E[Z(t)\overline{Z(s)}]$$

$$G_F = \left\{ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty, \text{ dotado del producto escalar} \right.$$

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{h(\lambda)} dF(\lambda)$$

Construiremos, por pasos sucesivos, un operador entre H_Z y G_F

$$1^\circ \quad A(Z(t)) = e^{it\lambda} = g(\lambda)$$

$$\text{Puesto que } R(t-s) = E[Z(t)\overline{Z(s)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(Z(t))\overline{A(Z(s))} dF(\lambda) \text{ resulta que } A \text{ conserva el producto escalar.}$$

2^o Para combinaciones lineales $\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(t_j)$, definimos A por la linealidad $A\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j Z(t_j)\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{i\lambda t_j}$ y evidentemente A sigue conservando el producto escalar para combinaciones lineales de funciones $Z(t)$

3^o Si $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ es una sucesión de v.a. tales que cada η_j es una combinación lineal de variables aleatorias Z , tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_n$, m.c. entonces $E|\eta_n - \eta_m|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\eta_n) - A(\eta_m)|^2 dF(\lambda)$ de tal forma que $A(\eta_n)$ converge en la norma de C_{DF} hacia un límite, que llamaremos, por definición $A(\eta)$.

Las propiedades de la convergencia en media cuadrática indican que A sigue conservando el producto escalar y la norma. Es decir:

$$E[\eta_1 \overline{\eta_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} A(\eta_1)\overline{A(\eta_2)} dF(\lambda), \text{ y}$$

$$E|\eta_1 - \eta_2|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\eta_1) - A(\eta_2)|^2 dF(\lambda)$$

La última relación permite afirmar que A es inyectiva, puesto que si $A(\eta_1) = A(\eta_2)$, el segundo miembro es cero y por tanto el número también.

A es sobreyectiva, ya que cualquier elemento G_F , admite un

desarrollo en serie de Fourier $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{itj\lambda}$, que converge a G en la norma G_F .

Puesto que A es una correspondencia biyectiva, esto es, un operador que conserva la norma y el producto escalar, definimos $\{S(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ por:

$$\text{Para cada } \lambda_0 \in \mathbb{R}, g_{\lambda_0}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda \leq \lambda_0 \text{ y } S(\lambda_0) = A^{-1}(g_{\lambda_0}) \\ 0, & \text{si } \lambda > \lambda_0 \end{cases}$$

ya que evidentemente $g_{\lambda_0} \in G_F$, y será entonces

$$S_{\lambda_0} = A^{-1}(g_{\lambda_0}).$$

ya que evidentemente $g_{\lambda_0} \in G_F$, y será entonces

$S_{\lambda_0} = A^{-1}(g_{\lambda_0})$. Sean $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3$, como A conserva el producto escalar y

$S_{\lambda_1} - S_{\lambda_2} = A^{-1}(g_{\lambda_1}) - A^{-1}(g_{\lambda_2})$; se tiene

$$E[(S_{\lambda_3} - S_{\lambda_2})(\bar{S}_{\lambda_1} - \bar{S}_{\lambda_0})] = \int_{-\infty}^{\infty} [g_{\lambda_0}(\lambda) - g_{\lambda_2}(\lambda)][\bar{g}_{\lambda_1}(\lambda) - \bar{g}_{\lambda_0}(\lambda)] dF(\lambda) = 0$$

y,

$$E|S_{\lambda_1} - S_{\lambda_0}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g_{\lambda_1}(\lambda) - g_{\lambda_0}(\lambda)|^2 dF(\lambda) = F(\lambda_1) - F(\lambda_0) < \infty$$

por último sea $-a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = a$ una partición de $(-a, a)$ es claro

que $\sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} (S_{\lambda_{j+1}} - S_{\lambda_j}) = A^{-1}(g)$ siendo

$$g(\lambda) = \begin{cases} e^{it\lambda_j} & ; \text{ si } \lambda_j < \lambda \leq \lambda_{j+1} \\ 0 & ; \text{ si } \lambda < -a \text{ ó } \lambda > a \end{cases}$$

cuando a tiende a ∞ y el radio de la partición tiende a cero, $A^{-1}(g)$

converge a $e^{it\lambda}$ con la norma de G_F . Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dS_{\lambda} = A^{-1}(e^{it\lambda}) = z(t)$$

3-6-1. REPRESENTACION ESPECTRAL MULTIDIMENSIONAL

Sea $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_p(t))$ un proceso estocástico

multidimensional tal que $E|Z_t^j|^2 < \infty \quad \forall j=1,2,\dots,n, \quad EZ_t^j=0 \quad \forall j=1,2,\dots,n$ y $E[Z_t^j \bar{Z}_s^k] = r_{jk}(t-s) \quad \forall j=1,2,\dots,n; \forall s,t$

Formamos el proceso $Y(t) = \sum_{j=1}^n a_j Z_j(t)$, que es estacionario y tiene por función de autocovarianza $\rho(t) = \sum_{j,k=1}^n a_j \bar{a}_k \gamma_{jk}(t)$

Por el teorema de Bochner $\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_a(\lambda)$ siendo G real, no decreciente y acotada. En particular para $a_j = a_k = 1$ y $a_\ell = 0 \quad \forall \ell, k$, tendremos

$$\gamma_{jj}(t) + \gamma_{jk}(t) + \gamma_{kj}(t) + \gamma_{kk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_1(\lambda) \quad \text{y para } a_j = i, \quad a_k = 1$$

$a_\ell = 0 \quad \forall \ell \neq j, k.$

$$\gamma_{jj}(t) + \gamma_{jk}(t) - i\gamma_{kj}(t) + \gamma_{kk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_2(\lambda)$$

de donde

$$2\gamma_{jk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_1(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_2(\lambda) - (2-i)(\gamma_{jj}(t) + \gamma_{kk}(t))$$

es decir

$$\gamma_{jk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_{1*}(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG_2(\lambda) - (2-i)(\gamma_{jj}(t) + \gamma_{kk}(t))$$

Como consecuencia $\gamma_{jk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF_{jk}(\lambda)$ con

$$F_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ G_1(\lambda) - iG_2(\lambda) - (1-i)(\gamma_{jj}(\lambda) + \gamma_{kk}(\lambda)) \right\}$$

Podemos señalar además que la relación entre γ_{jk} y γ_{kj} obliga a que sea $dF_{jk}(\lambda) = \overline{dF_{kj}(\lambda)}$ y también que puesto que

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \sum_{j,k=1}^n a_j \bar{a}_k dF_{jk}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^n a_j \bar{a}_k dF_{jk}(\lambda) = dG(\lambda)$$

de manera que $\sum_{j,k=1}^n a_j \bar{a}_k dF_{jk}(\lambda) \geq 0$. Es decir que la matriz $(dF_{jk}(\lambda))_{j,k=1,2,\dots,n}$ es hermitica y definida no negativa.

Intuitivamente $|dF_{jk}(\lambda)|$ mide la importancia relativa que tiene el armónico de frecuencia λ en los procesos $Z_j(t)$ y $Z_k(t)$, mientras que $\arg[dF_{jk}(\lambda)]$ mide el desfase entre las aportaciones del armónico

de frecuencia λ a cada uno de dichos procesos. En este sentido a

$\frac{|dF_{jk}(\lambda)|^2}{dF_{jjh}(\lambda) dF_{kk}(\lambda)}$ se le llama la coherencia entre ambos procesos y a

$\arg dF_{jk}(\lambda)$ la fase entre ambos.

3.7. TEOREMA ERGODICO EN PROCESOS ESTACIONARIOS.

Sea $Z(t)$ un proceso estacionario con función de autocovarianza continua $r(t)$. El teorema ergódico en media cuadrática, aplicado a este proceso, afirma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt \xrightarrow{\text{m. c.}} 0 \text{ si y sólo si } \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^T r(s-t) ds dt = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T r(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du = 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que $r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} dF(\lambda)$, sustituyendo en la ecuación previa, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T}^T r(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \lambda T)}{\lambda^2 T^2} dF(\lambda) = \\ = F(\{0\}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \lambda T)}{\lambda^2 T^2} d\hat{F}(\lambda) \end{aligned}$$

siendo la función \hat{F} continua en cero, ya que $\hat{F}(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda) & \text{si } \lambda < 0 \\ F(\lambda) - F(0) & \text{si } \lambda \geq 0 \end{cases}$ y $F(\{0\}) = F(0) - F(0-)$ es la probabilidad que F asigna al cero.

Es obvio que $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \lambda T)}{\lambda^2 T^2} d\hat{F}(\lambda) = 0$, y, como consecuencia, obtenemos:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt \xrightarrow{\text{m. c.}} 0 \text{ si y sólo si } F(\{0\}) = 0$$

Como consecuencia obtenemos el siguiente.

TEOREMA 3-7-1 Sea $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso estacionario, con la función

de autocovarianza continua asociada con $\{Z(t)\}$ y $F(\lambda)$ su función de distribución espectral. En estas condiciones se verifica:

- (1) $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{m. c.} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) e^{-it\mu} dt = S(\mu) - S(\mu-)$ y
- (2) $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(t) e^{-it\mu} dt = F(\mu) - F(\mu-)$

Con facilidad se comprueba que, para b fijo, y $a \rightarrow -\infty$

$$\lim_{a \downarrow -\infty} \text{m.c.} \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t) e^{-it\mu} dt = S(\mu) - S(\mu-)$$

y que para a fijo, b tendiendo a $+\infty$

$$\lim_{a \uparrow \infty} \text{m.c.} \frac{1}{b-a} \int_a^b Z(t) e^{-it\mu} dt = S(\mu) - S(\mu-)$$

Este resultado, tiene una importancia e intuitiva consecuencia:

Si la función de distribución espectral de un proceso estacionario es discreta, entonces el proceso es determinístico.

Esto quiere decir que, F concentra toda su probabilidad en las frecuencias $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (enteros), entonces

$$Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t} (S(\lambda_n) - S(\lambda_n-))$$

3-8 RESULTADOS NOTABLES SOBRE PROCESOS ESTACIONARIOS

Enunciaremos, sin demostración, algunos importantes resultados sobre representación espectral de procesos estacionarios $Z(t)$, cuando su función de distribución espectral es absolutamente continua.

PROPOSICION 3-8-1 Sea $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso estacionario, continuo en media cuadrática, con función de densidad espectral $f(\lambda)$.

En estas condiciones, $Z(t)$ admite la siguiente representación espectral:

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi(\lambda) dS^*(\lambda)$$

siendo $|\varphi(\lambda)|^2 = f(\lambda)$ y $\{S^*(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ un proceso de incrementos ortogonales tal que $E|S^*(\lambda_2) - S^*(\lambda_1)|^2 = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \forall \lambda_2 \geq \lambda_1$.

TEOREMA 3-8-2

Un proceso estacionario $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, continuo en media cuadrática tiene función de densidad espectral si y sólo si

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-u) dY(u)$$

siendo $\{Y(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$, un proceso de incrementos ortogonales tal que

$$E|Y(u) - Y(v)|^2 = u - v \quad \forall u \geq v \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} (a(u))^2 du < \infty$$

TEOREMA 3-8-3

Un proceso estacionario discreto $\{Z(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tiene función de densidad espectral si y sólo si

$$Z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(n - k)$$

siendo $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, una sucesión de variables ortogonales.

3-8-1 DESCOMPOSICION DE WOLD DE PROCESOS ESTACIONARIOS

Consideremos sólo procesos estacionarios de cuadrado integrable. Denotando por $H_2(t)$ el espacio vectorial engendrado por $\{Z(s) | s \leq t\}$. Es sabido que la mejor predicción de $Z(t + \tau)$, conociendo el proceso hasta el tiempo t , es la proyección ortogonal de $Z(t + \tau)$ sobre $H_2(t)$. Sea $H_2(-\infty) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} H_2(t)$. Recordemos que:

- Un proceso se llama determinístico puro si $H_2(t) = H_2(-\infty)$; $\forall t$. En este caso se predice la evolución futura del proceso sin error.
- Un proceso es indeterminístico puro si y sólo si $H_2(-\infty) = 0$.

Con esta notación tenemos los siguientes resultados

TEOREMA 3-8-1-1. - « Un proceso estacionario discreto $\{Z(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es

indeterminístico puro si y sólo si $Z(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \bar{y}(n - j)$; siendo

$\{\bar{y}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso de variables ortogonales y $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ »

TEOREMA. 3-8-1-2. - « Un proceso estacionario discreto es

indeterminístico puro si y sólo si tiene función de densidad espectral $f(\lambda)$ satisfaciendo

$$\int_{-M}^M \log f(\lambda) d\lambda > -\infty \text{ »}$$

TEOREMA. 3-8-1-3. - « Un proceso estacionario discreto $\{Z(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se

puede expresar en la forma:

$$Z(n) = D(n) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \bar{y}(n - j),$$

siendo $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$, $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso de variables ortogonales y $\{D(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso estacionario puro; tal que:

$$E[D(n)\bar{y}(m)] = 0 ; \forall n, \forall m.$$

TEOREMA.3-8-1-4.

« Sea $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso estacionario continuo en media cuadrática, con función de densidad espectral $f(\lambda)$, $a(u)$ una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que $\int_{-\infty}^{\infty} (a(u))^2 du < \infty$ e $\{Y(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$ un proceso de incrementos ortogonales tal que $\forall u \geq v, E|Y(u) - Y(v)|^2 = u - v$.

En estas condiciones

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)dY(t - u) \text{ si y sólo si } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty$$

de incrementos ortogonales con

$E|\bar{y}(u) - \bar{y}(v)|^2 = u - v ; \forall u \geq v$ si y sólo si su función de distribución espectral tiene función de densidad $f(\lambda)$ que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty \gg$$

TEOREMA 3-8-1-5. - « Un proceso estacionario $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ continuo en

media cuadrática es indeterminístico puro si y sólo si su función de distribución espectral, tiene función de densidad $f(\lambda)$ que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty \gg$$

3-9. TEOREMAS ERGODICOS SOBRE PROCESOS ESTACIONARIOS

Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso real, estrictamente estacionario, definido sobre un espacio de probabilidad (Ω, a, P) y $R^{\mathbb{R}} = \{f | f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, el espacio de posibles trayectorias del proceso

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$, definimos $U(\tau): \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; por la fórmula $U(\tau)f(t) = f(t + \tau)$; es decir, $U(\tau)$ traslada el argumento de cada función f de t a $t + \tau$. Sea $\{U(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}} = OP$. Dotado con la ley de composición, es claro que OP tiene estructura de grupo conmutativo.

Si S es un conjunto de trayectorias, denotamos por

$$S_{\tau} = \{g \mid \exists f \in S \text{ tal que } g(t) = f(t + \tau)\}$$

Si \hat{P} es la probabilidad que el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ induce sobre el espacio de trayectorias, entonces el hecho de que el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sea estrictamente estacionario significa que para todo conjunto medible S de trayectorias, se verifica $\hat{P}(S) = \hat{P}(S_{\tau})$.

Un conjunto medible de trayectorias S se llama invariante para el proceso $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ si y sólo si

$$\hat{P}(S \Delta S_{\tau}) = \hat{P}\left[(S - S_{\tau}) \cup (S_{\tau} - S)\right] = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Es claro que la familia $I = \{S \mid S \text{ es un conjunto de trayectorias invariantes para el proceso } \{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}\}$ es un σ -álgebra.

El proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se llama ergódico si y sólo si σ -álgebra I contiene exclusivamente conjuntos de trayectorias de probabilidad nula, evaluada con \hat{P} .

Con esta breve introducción tenemos los siguientes resultados.

TEOREMA. 3-9-1. - « Si $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso discreto, estrictamente estacionario con $E[X(0)] < \infty$, entonces $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(i)$ converge casi seguro hacia $E[X_0 / X^{-1}(I)]$, siendo I la σ -álgebra de conjuntos de trayectorias invariantes. »

Si $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ergódico entonces

$$E[X_0 / X^{-1}(I)] = E[X_0]$$

COROLARIO 3-9-2. - « Si $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un proceso estrictamente

estacionario y $\mu \in (-\pi, \pi)$ entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(k) e^{-ik\mu}$$

converge seguro ».

TEOREMA. 3-9-3. - « Sea $\{X(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$ es un proceso estacionario con media cero y función de autocovarianza $\gamma(u)$ continua, y sea

$$\tilde{\gamma}(S) = \frac{1}{S} \int_0^S \gamma(u) du. \text{ Si se cumple}$$

$\int_1^\infty \frac{|\log^2 u|}{u} |\tilde{\gamma}(u)| du < \infty$, entonces $\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ converge casi seguro a cero ».

COROLARIO 3-9-4. - « Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso estrictamente estacionario y $\mu \in (-\pi, \pi)$, entonces

$\frac{1}{t} \int_0^t X(s) e^{-is\mu} ds$ converge casi seguro: a $S(\mu) - S(\mu-)$; con $S(\lambda)$ el

proceso de incrementos ortogonales que se corresponde con el espectro del proceso $X(t)$ »

3-10. MUESTREO ALISAMIENTO Y MODELOS EN TIEMPO DISCRETO

La operación de tomar muestras en una serie temporal, convierte un proceso en tiempo continuo en uno discreto. Cuando se modeliza la serie temporal original por un proceso estocástico debilmente estacionario, la serie obtenida con el muestreo, es un proceso debilmente estacionario en tiempo discreto. En este contexto, las relaciones entre el espectro de la serie temporal en tiempo continuo y el de la obtenida con el muestreo es importante, ya que la serie muestral se debe utilizar para la estimación del espectro de la serie original. El problema que se plantea es como seleccionar la razón o intervalo de muestreo, para garantizar una buena aproximación de un espectro por el otro. Para formalizar este problema, necesitamos

exponer el siguiente desarrollo:

Supongamos que $X(t)$ es una serie temporal en tiempo continuo, que admite una modelación por un proceso debilmente estacionario. Consideremos que el muestreo en $X(t)$ es equiespaciado. Sea Δt , el intervalo de tiempo entre muestras. Se llama razón de muestreo, al número de muestras por unidad de tiempo, que es igual a $1/\Delta t$. La serie muestral obtenida es:

$$Y_{\Delta t}(K) = X(K\Delta t) \quad ; \quad K = 0, \pm 1, \pm 2; \dots$$

Sea $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} S(d\lambda)$ la representación espectral del proceso $X(t)$. En este supuesto $Y_{\Delta t}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k \Delta t} S(d\lambda)$

Se puede ver la fórmula previa como una combinación lineal, en λ , de las funciones periodicas $\varphi_{\lambda}(K) = e^{i\lambda k \Delta t}$, con coeficientes $S(d\lambda)$.

Con este punto de vista, es claro que:

$$\varphi_{\lambda + \frac{2\pi n}{\Delta t}}(K) = \varphi_{\lambda}(K) \quad , \quad \text{y por tanto, llamando}$$

$$S_{\Delta t}(d\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(d\left(\lambda + \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)\right) \quad \text{se tiene que}$$

$$y_{\Delta t}(K) = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{i\lambda k \Delta t} S_{\Delta t}(d\lambda)$$

, que explica como la representación espectral del proceso muestral, se reduce a las frecuencias del intervalo $\left[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$.

Si $F(\lambda)$ es la función de distribución espectral de $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ entonces

$$F_{\Delta t}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F\left(\lambda + \frac{2\pi n}{\Delta t}\right) - F\left(\frac{2\pi n - \pi}{\Delta t}\right) \right]; \quad -\frac{\pi}{\Delta t} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{\Delta t}$$

es la función de distribución espectral de la serie muestral.

Si $F(\lambda)$ tiene función de densidad $f(\lambda)$, entonces la función de densidad espectral muestral es:

$$f_{\Delta t}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\lambda + \frac{2\pi n}{\Delta t}\right); \quad -\frac{\pi}{\Delta t} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{\Delta t}$$

Por tanto, todas las líneas o rayas espectrales (puntos de potencia discreta) aparecerán como líneas del espectro muestral en el rango $\left[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$, y el espectro continuo se transforma en dicho rango, formando la componente continua del espectro muestral. El límite superior del rango del proceso muestral se llama frecuencia de Nyquist, y puede ser evaluada por la expresión $\lambda_N = \pi/\Delta t$ (en radianes por unidad de tiempo) ó por $f_N = \frac{1}{2\Delta t}$ (ciclos por unidad de tiempo). La elección de la razón de muestreo Δt , equivale a seleccionar la frecuencia de Nyquist. El proceso muestral en la frecuencia λ , $-\lambda_N < \lambda \leq \lambda_N$, acumula o alisa toda la medida correspondiente a las frecuencias $\lambda \pm 2\pi n/\Delta t$; $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4$.

De lo anteriormente expuesto, se intuye la dependencia entre la razón de muestreo y el rango del espectro muestral.

Cuando el espectro del proceso $X(t)$ está acotado en las frecuencias, tomando una razón de muestreo apropiada, se puede reproducir el espectro del proceso original, con el sólo conocimiento del espectro muestral, según confirma el teorema siguiente.

TEOREMA MUESTRAL 3-10-1. - « Si para algún número Λ , el espectro de

$X(t)$ es cero fuera de intervalo de frecuencias $-\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda$; entonces el espectro de $X(t)$, así como el mismo proceso $X(t)$, se pueden reconstruir del todo sólo conociendo los valores de $X(t)$ en los puntos $\frac{\pi K}{\Lambda}$, siendo $K = 0, \pm 1; \pm 2 \dots$; es decir con mas precisión, podemos deducir que:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\Lambda\left(t - \left(\frac{\pi K}{\Lambda}\right)\right)}{\Lambda\left(t - \left(\frac{\pi K}{\Lambda}\right)\right)} X\left(\frac{\pi K}{\Lambda}\right); \quad -\infty < t < \infty; \gg$$

Demostración.— Sea $e_{\Lambda}^{i\lambda t}$ la función de que es igual a $e^{i\lambda t}$ para $-\Lambda < \lambda \leq \Lambda$, y fuera de este intervalo es igual a la extensión periódica, con periodo 2Λ , de esta función. La expansión en serie de Fourier de esta función viene dada por la expresión:

$$e_{\Lambda}^{i\lambda t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)}{\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)} e^{i\lambda \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right)}$$

Por hipótesis es claro que $F(d\lambda) = 0$ para $|\lambda| > \Lambda$ y por tanto $D(d\lambda) = 0$. Como consecuencia, se obtiene:

$$\forall t, X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dS(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\lambda t} S(d\lambda)$$

Aplicando las fórmulas previas obtenemos:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\lambda t} dS(\lambda) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\lambda t} S(d\lambda) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)}{\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\lambda \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right)} S(d\lambda) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)}{\Lambda \left(t - \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \right)} X \left(\frac{\pi n}{\Lambda} \right) \end{aligned}$$

La implicación de la convergencia en media cuadrática de esta suma, y el intercambio de la suma y la integral se puede ver en ROZANOV Yu(1967) "Stationary Random Processes" Holden Day. c.q.d.

Consecuencia del teorema es que si la frecuencia de Nyquist $\lambda_N \geq \Lambda$, entonces $F_{\Lambda t}(t) = F(t)$, $\forall t$, y las descomposiciones espectrales del proceso continuo y del muestral son idénticas.

3-11 FILTROS LINEALES. PROPIEDADES GENERALES. APLICACIONES

Sea $X(t)$ un proceso debilmente estacionario tal que su representación espectral es:

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dS(\lambda)$$

y sea $F(\lambda)$ la función de distribución espectral

$$\langle U_s(X(t)), U_s(X(u)) \rangle = \langle X(t+s), X(s+u) \rangle = \langle X(t), X(u) \rangle = R(t,s)$$

Se concluye que las operaciones U_s conservan el producto escalar.

Extendemos U_s por linealidad a las combinaciones lineales finitas:

$$U_s\left(\sum_j \alpha_j X(t_j)\right) = \sum_j \alpha_j \left(X(t_j)\right) = \sum_j \alpha_j X(t_j + s)$$

y por continuidad a límites de sucesiones de Cauchy de combinaciones lineales, obteniendo:

$$U_s\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_s(Y_n)$$

Es claro que, representando por $M(X)$ el espacio de Hilbert engendrado por el proceso $X(t)$, U_s es un operador lineal sobre este espacio, conservando el producto escalar.

3-11-1 FILTROS LINEALES EN PROCESOS ESTACIONARIOS.

Def 3-9-1-1 Un filtro lineal F , es una transformación lineal continua de un espacio $D(F) \subseteq M(X)$, invariante por los operadores U_s , $\forall s \in \mathbb{R}$; en si mismo; cumpliendo además la siguiente propiedad de invariancia en el tiempo:

$$\forall s \in \mathbb{R} \text{ y } \forall f \in D(F) \quad U_s F(f) = F\left(U_s(f)\right)$$

Sintetizando $F : D(F) \rightarrow D(F)$ es un filtro lineal si y sólo si $\forall s \in \mathbb{R}$ y $\forall f \in D(F)$, $U_s \circ F(f) = F \circ U_s(f)$ y F es lineal y continua. La definición previa conlleva el que $D(F)$ sea invariante por los operadores U_s .

TEOREMA 3-11-1-1 Si F_1 es la función de distribución espectral del proceso $X(t)$, entonces los filtros lineales están en correspondencia biunívoca con el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}, B, F_1)$.

Además, si $F(x(0)) = \int_{\mathbb{R}} T(\lambda) dS(\lambda, \omega)$, entonces la correspondencia biunívoca entre los filtros y $L^2(\mathbb{R}, B, F_1)$ es $F \leftrightarrow T(\lambda)$. Esto nos confirma que los filtros lineales quedan caracterizados por el valor

$$F_1(X(0))$$

Nota A la función $T(\lambda) \in L_2(R, B, F_1)$ se la llama función de transferencia del filtro.

Demostración

Sabemos que $L_2(\Omega, a, P_x)$ y $L_2(R, B, F_1)$ son isomorfos. Puesto que $F(X(0, \omega)) \in L_2(\Omega, a, P_x)$, existe $T(\lambda) \in L_2(R, B, F_1)$ tal que

$$F(X(0, \omega)) = \int_R T(\lambda) dS(\lambda, \omega)$$

siendo $S(\lambda, \omega)$ el proceso espectral asociado con $X(t, \omega)$.

$$\text{Probamos seguidamente que } F(X(0, \omega)) = \int_R e^{i\lambda t} T(\lambda) dS(\lambda, \omega).$$

Para ello, puesto que $T(\lambda) \in L_2(R, B, F_1)$ existe una sucesión de Cauchy $T_n(\lambda)$, tal que $T_n(\lambda) = \sum_{j \in J_n} a_{n,j} e^{-i\lambda t_n, j}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda) = T(\lambda)$

Puesto que:

$$\begin{aligned} F(X(0, \omega)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R T_n(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_n} a_{n,j} \int_R e^{-i\lambda t_n, j} dS(\lambda, \omega) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_n} a_{n,j} X(-t_n, j) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} F(X(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_n} a_{n,j} X(t - t_n, j) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_n} a_{n,j} \int_R e^{i\lambda(t-t_n, j)} dS(\lambda, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R e^{i\lambda t} T_n(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \\ &= \int_R e^{i\lambda t} T(\lambda) dS(\lambda, \omega) \end{aligned}$$

Sea $U \in \mathcal{D}(F)$ y supongamos que $U(\omega) = \int_R g(\lambda) dS(\lambda, \omega)$, siendo

$$\int_R |g(\lambda)|^2 dF_1(\lambda) < \infty. \text{ Supongamos además que } \int_R [g(\lambda)T(\lambda)]^2 dF_1(\lambda) < \infty.$$

Esta hipótesis supone que tanto $g(\lambda)$, como $g(\lambda) \cdot T(\lambda) \in L_2(R, B, F_1)$

En este contexto, sabemos que existe una sucesión $g_n(\lambda)$ de exponenciales complejos; esto es

$$g_n(\lambda) = \sum_{k \in K_n} b_{n,k} e^{i\lambda t_{n,k}}$$

tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\lambda) = g(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ y $g_n(\lambda) \cdot T(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}, B, F_1)$ y además la sucesión $\{g_n(\lambda)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\mathbb{R}, B, F_1)$.

Por tanto

$$U = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K_n} b_{n,k} X(t_{n,k}).$$

Por las propiedades de linealidad y continuidad del filtro F tenemos:

$$\begin{aligned} F(U) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K_n} b_{n,k} F\left(X(t_{n,k})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K_n} b_{n,k} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t_{n,k}} T(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) T(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) T(\lambda) dS(\lambda, \omega). \end{aligned}$$

Como consecuencia el filtro queda caracterizado por $T(\lambda)$, que determina su valor en $X(0, \omega)$, $F\left(X(0, \omega)\right)$.

Además si $U = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dS(\lambda, \omega)$ entonces $F(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) T(\lambda) dS(\lambda, \omega)$ c. q. d.

En teoría se pueden construir una gran variedad de filtros lineales, para ejecutar una amplia cantidad de operaciones sobre series temporales. Para ello es necesario especificar la función de transferencia del filtro. En la práctica sólo se usan una clase muy restringida de filtros. Por ejemplo, si $X(t)$ es un proceso en tiempo continuo que tiene densidad espectral acotada, entonces:

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ g / \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \right\} \subset L_2(\mathbb{R}, B, F_1).$$

Es claro que cada elemento de \mathcal{L}_2 se corresponde con un filtro convolución, puesto que si $g(\lambda) \in \mathcal{L}_2$, entonces

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda u} h(u) du; \text{ valiendo } \int_{\mathbb{R}} \left(h(u) \right)^2 du < \infty$$

Si F es el filtro que se corresponde con $g(\lambda)$ tenemos:

$$\begin{aligned} F[X(t)] &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} g(\lambda) dS(\lambda, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dS(\lambda, \omega) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda u} h(u) du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u) X(t - u) du. \end{aligned}$$

que es el filtro convolución anunciado.

Ahora bien, si F es un filtro que se corresponde con una función de transferencia $T(\lambda)$ acotada, tomando

$$T_k(\lambda) = \begin{cases} T(\lambda) & \text{si } |\lambda| \leq K \\ 0 & \text{si } |\lambda| > K \end{cases}$$

se tiene que $\int_{\mathbb{R}} (T_k(\lambda))^2 d\lambda < \infty$; correspondiendo a $T_k(\lambda)$, para cualquier K , un filtro convolución.

Puesto que dado $\varepsilon > 0$, se puede elegir K de tal forma

que $\int_{\mathbb{R}} |T(\lambda) - T_k(\lambda)|^2 dF_1(\lambda) < \varepsilon$, se tiene

que $E[F_k(X(t)) - F(X(t))]^2 < \varepsilon \forall t$, siendo

$$F_k(X(t)) = \int_{\mathbb{R}} h_k(u) X(t - u) du$$

En este sentido, se dice que los filtros convolución aproximan cualquier tipo de filtros; justificandose así, el amplísimo uso práctico de los filtros convolución.

CAPITULO IV

ESTIMACION ESPECTRAL EN PROCESOS
ALEATORIOS UNIVARIANTES. ESPECTRO
DE UN PROCESO ALEATORIO.

4-1. INTRODUCCION

El teorema de representación espectral para los procesos estacionarios, suministra información útil para estimar los espectros, o las frecuencias espectrales más relevantes, de dichos procesos. Dicho espectro suele representar, desde el punto de vista físico las frecuencias de emisión de la energía ó de otra señal, que se mide mediante el proceso estacionario $X(t)$. Dedicamos el capítulo IV de esta monografía al estudio de estas cuestiones.

Los apartados 2 y 3 están destinados al estudio de los filtros, y a filtros especiales de ruidos blancos; que generan, en términos amplios, los procesos estacionarios discretos. Se dan algunas pautas sobre distintas formas de encontrar un filtro que se adapte a los datos.

El apartado 4 va dedicado a exponer algunas técnicas sobre la estimación de frecuencias en espectros discretos. Destaca el subapartado 1-4-3 en el que se desarrolla una técnica de optimización global destinada a tal fin.

En los apartados 5,6 y 7 se estudian diversos métodos de estimar la densidad espectral de procesos discretos, analizando sus propiedades. Conviene destacar la modificación de dichos estimadores mediante las ventanas espectrales, que corrigen algunas deficiencias de estimadores naturales. El apartado 7 está dedicado al estudio y presentación de las propiedades muestrales de los estimadores espectrales. Estos aspectos se completan en el apartado 8, teniendo en cuenta algunas de las características expuestas en los apartados 2 y 3.

El apartado 9 se dedica a analizar las características especiales

que se presentan al tener que estimar las densidades espectrales de procesos estacionarios continuos, mediante muestras u observaciones discretas de dichos procesos. El intervalo ó razón de muestreo es fundamental en este apartado.

El apígrafe 10 está destinado a exponer distintas características que deben cumplir la ventana espectral, para obtener estimadores preciosos. El inconveniente de muchas de estas características es que se definen en función de la densidad espectral, que es desconocida. En el apartado 11 se completan algunos de estos aspectos, especialmente los destinados a la elección de los parámetros de la ventana, la longitud de los registros ó tamaño muestral y los intervalos de frecuencias. Destacan en este apartado las técnicas de preblanqueo ó prefiltrado y el tapering.

Se finaliza el capítulo con el apartado 12, destinado a exponer algunas pautas útiles para la determinación de la ventana.

4-2. FILTROS DIGITALES

El término filtro digital significa un filtro lineal en tiempo discreto. Su principal uso es la modificación de datos obtenidos en tiempo discreto. Se llama diseño del filtro el proceso de seleccionar los parámetros adecuadamente para alcanzar los objetivos pretendidos en la modificación de los datos.

Como ya vimos en capítulos precedentes, gran parte de los filtros son tipo convolución, y su función u operador es

[4-2-1] $L\{X(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j X(t - j)$; $t = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$ donde C_j son números reales llamados pesos del filtro, que satisfacen la condición $\sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j^2 < \infty$

El principio general para evaluar la función de transferencia en tiempo discreto, es análoga a las versiones en tiempo continuo. Se aplica el filtro digital a la entrada $X(t) = e^{it\lambda}$ y se obtiene como salida $y(t) = B(\lambda)e^{i\lambda t}$ donde $B(\lambda)$ es la función de transferencia del filtro. Aplicando este criterio, se obtiene que la función de transferencia de $L\{X(t)\}$ definida por [4-2-1] es:

$$[4-2-2] \quad B(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{-i\lambda j} ; -\pi < \lambda \leq \pi$$

de donde $C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} B(\lambda) d\lambda$, para todo k ,

y por la relación de Parseval se obtiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B(\lambda)|^2 d\lambda$$

Por tanto, cualquier función $B(\lambda)$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |B(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, tiene una expansión o desarrollo en serie de Fourier como [4-2-2] y por tanto puede ser función de transferencia de un filtro digital.

Si los pesos de los filtros satisfacen la condición, algo mas fuerte $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_j| < \infty$, entonces el filtro tiene una función de transferencia continua y acotada, y por tanto se puede asociar con una entrada debilmente estacionaria con potencia finita.

Tomando como unidad el valor Δt , intervalo que transcurre entre la toma de dos señales consecutivas, podemos utilizar la notación de 1

por Δt : k por $K\Delta t$, y $c(k)$ por $C_x(K\Delta t)$, donde $C_x(K\Delta t)$ es la función de covarianza, calculando la densidad espectral por:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{-i\lambda k} ; \quad -\pi < \lambda \leq \pi$$

con esta transformación se verifica que $\frac{-\pi}{\Delta t} < \lambda \leq \frac{\pi}{\Delta t}$ y la función de densidad espectral es:

$$f_{\Delta t}(\lambda) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_x(k\Delta t) e^{-i\lambda k\Delta t}$$

existiendo la relación entre ambas de $f_{\Delta t}(\lambda) = \Delta t f(\lambda \Delta t)$,

Según vimos en capítulos precedentes, si L es un filtro lineal, con función de transferencia $B(\lambda)$ e $Y(t) = L[X(t)]$, entonces la medida espectral y la función de densidad espectral de la salida son

$$Z_Y(d\lambda) = B(\lambda) Z_X(d\lambda), \quad \text{y}, \quad F_Y(d\lambda) = |B(\lambda)|^2 F_X(d\lambda)$$

En particular, la función espectral y las funciones de densidad espectral están relacionadas por las expresiones:

$$P_Y(\lambda) = |B(\lambda)|^2 P_X(d\lambda); \quad f_Y(\lambda) = |B(\lambda)|^2 f_X(d\lambda)$$

Si $C_{-j} = C_j; \forall j$; entonces $B(\lambda)$ es a valores reales y por tanto la fase solo puede tomar valores 0 y $\pm \pi$ y los filtros que tienen esta propiedad se llaman filtros simétricos.

Si $Y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X(t - j)$ es un filtro digital, se llama transformada Z del filtro a la función a valores complejos $A(Z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j Z^j$; y si $A(\lambda)$ es la función de transferencia del filtro, entonces $A(\lambda) = A(e^{-i\lambda})$.

Se define el operador salto hacia atrás por B , donde

$B(X(t)) = X(t - 1)$, filtro que tiene por función de transferencia $e^{-i\lambda}$. Consecuentemente, si definimos el filtro combinación lineal por

$$\mathcal{A}(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j B^j, \quad \text{con } B^{-j} = |B^{-1}|^j; \quad \text{siendo } B^{-j} \text{ el inverso de } B,$$

entonces $\mathcal{A}(B)$ es el filtro lineal, con función de transferencia

$$A(\lambda) = \mathcal{A}(e^{-i\lambda}), \quad \text{que se puede escribir como:}$$

$$Y(t) = \mathcal{A}(B)X(t).$$

Una medida razonable de la desviación de $U(t)$ de la señal ideal $Y(t)$

es $E[u(t) - Y(t)]^2$, cantidad que se puede evaluar por:

$$\begin{aligned} E[u(t) - Y(t)]^2 &= E \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} [A_{N,t}(\lambda) - A(\lambda)] Z_x(d\lambda) \right|^2 = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\substack{k > t-1 \\ k < t-N}} a_k e^{-i\lambda k} \right|^2 F_x(d\lambda). \end{aligned}$$

4-2-1. FILTRAGE LINEAL PARA TRANSFORMADAS DE FOURIER

Las relaciones $Y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} C(\lambda) Z_x(d\lambda)$ para salida de un filtro lineal con entrada $X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} Z_x(d\lambda)$, y función de transferencia $C(\lambda)$ sugiere el siguiente procedimiento. Se obtiene en primer lugar la transformada de Fourier rápida

$$\begin{aligned} Z_{x,\nu} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{-i\lambda\nu t} Z(t) \\ \text{con } \lambda\nu &= \frac{2\pi\nu}{N}; \quad -[N-1]/2 \leq \nu \leq \left[\frac{N}{2} \right] \end{aligned}$$

después multiplicando a $Z_{x,\nu}$ por la función de transferencia $C(\lambda)$ evaluada en los puntos λ_ν y el producto se transforma hacia atrás, en el dominio del tiempo por la transformada de Fourier rápida para obtener:

$$W(t) = \sum_{\nu=-[(N-1)/2]}^{[N/2]} e^{i\lambda\nu t} C(\lambda_\nu) Z_{x,\nu}$$

Si los pesos del filtro son b_k ; $k = 0; \pm 1; \dots$ y si la densidad espectral de las entradas satisface la desigualdad $0 < m \leq f_x(\lambda) \leq M$, entonces

$$2\pi m \rho_{N,t} \leq E \left[W(t) - Y(t) \right]^2 \leq 2\pi M \rho_{N,t}$$

donde

$$\rho_{N,t} = \sum_{k=-\infty}^{t-N-1} b_k^2 + \sum_{k=t}^{\infty} b_k^2 + \sum_{k=t-N}^{t-1} (b_k - \tilde{b}_k)^2; \text{ y}$$

$$\tilde{b}_k = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_k + pN$$

Suponiendo que los pesos b_k decrecen de forma monótona razonable cuando $|k| \rightarrow \infty$, entonces los valores mayores de $\rho_{N,t}$, se producen al comienzo y al final del rango $1 \leq t \leq N$; por tanto prescindiendo de algunos valores extremos, se obtendrán buenas aproximaciones.

4-3. MODELIZACION DISCRETA. MEDIAS MOVILES

Recordemos que un proceso de ruido blanco es una sucesión de v.a; incorreladas $\varepsilon(t)$; $t = 0; \pm 2, \dots$, con media común $E[\varepsilon(t)] = 0$ y varianza común $E[\varepsilon^2(t)] = \sigma^2$.

Un proceso de medias móviles es un proceso que se puede modelizar por

$$[4-3-1] \quad X(t) = \sum_{j=-m}^n a_j \varepsilon(t - j); \quad t = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$$

donde m y n son enteros no negativos y los coeficientes a_j son constantes reales. En general, se dice que $X(t)$, modelizado por [4-3-1] es un proceso de medias móviles finito.

Un proceso de medias móviles infinito modelizado por

$$[4-3-2] \quad X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon(t - j), \text{ con } \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$$

se denomina un proceso lineal.

El proceso $X(t)$, modelizado por [4-3-1] ó [4-3-2] se puede ver como una versión filtrada del proceso de ruido blanco $\varepsilon(t)$. La versión transferencia del filtro es :

$$B(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\lambda j}$$

Teniendo en cuenta que la función de densidad espectral de $\varepsilon(t)$ es

$$h\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}, \text{ se obtiene que la función de densidad espectral de } X(t)$$

es

$$h_X(\lambda) = |B(\lambda)|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

El proceso $X(t)$ definido por [4-3-2] tiene media cero y varianza

$$\sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2, \text{ y según vimos en el capítulo 3}^\circ \text{ de esta monografía, todo}$$

proceso estacionario de media cero y cuadrado integrable, se puede representar por [4-3-2].

No obstante [4-3-2] no es una buena modelización para $X(t)$, por depender tanto de las innovaciones pasadas $\varepsilon(t - j)$ para $j \leq t$, como de las futuras $\varepsilon(t - j)$ $j < 0$.

Cuando en el modelo [4-3-2] suponemos $a_j = 0$, para $j < 0$, nos queda la representación

$$[4-3-3] \quad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon(t - j) \text{ con } \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty$$

Cambiando con el modelo [4-3-1] el índice j por $s=j+m$ y llamando

$\eta(t) = \varepsilon(t - s)$, dicha formulación se transforma en:

$$[4-3-4] \quad X(t) = \sum_{s=0}^q b_s \eta(t - s)$$

modelización que es la que se usa más ampliamente.

Si $X(t)$ está bien modelizado por [4-3-4], entonces basta con determinar los parámetros b_s para calcular la densidad espectral de $X(t)$.

4-3-1. MODELOS AUTORREGRESIVOS

Si $\varepsilon(t)$ es un proceso de ruido blanco, de media cero y varianza σ^2 , y $X(t)$ un proceso tal que $E[X(s)\varepsilon(t)] = 0 \forall t$ y $\forall s < t$, diremos que $X(t)$ es un proceso autorregresivo finito cuando se puede representar por el modelo

$$[4-3-1-1] \quad X(t) + b_1 X(t-1) + b_2 X(t-2) + \dots + b_q X(t-q) = \varepsilon(t)$$

El proceso $X(t)$ es autorregresivo de orden finito, cuando se puede representar por

$$[4-3-1-2] \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k X(t-k) = \varepsilon(t); \text{ con } b_0 = 1; \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$$

Demostramos en el capítulo (3^o) que todo proceso discreto estacionario de cuadrado integrable admite una representación como un proceso autorregresivo de orden infinito de tal forma que $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ sea

una serie con radio de convergencia $p > 1$. En este supuesto:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left[\frac{1}{B(\lambda)} \right] Z_{\xi}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-i\lambda j} \right) Z_{\xi}(d\lambda) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi(t-j) \end{aligned}$$

Siendo $B(\lambda) = \mathcal{B}(e^{-i\lambda})$; y $1/B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$

Puesto que los procesos autorregresivos, finitos o infinitos, son expresables como transformaciones lineales de procesos de ruido blanco, tienen espectros continuos con densidad espectral.

$$f_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|B(\lambda)|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-i\lambda k} \right|^2}$$

4-3-2. PROCESO DE MEDIAS MOVILES-AUTORREGRESIVO

El modelo ARMA es:

$$[4-3-2-1] \quad \sum_{j=0}^q d_j X(t-j) = \sum_{k=0}^p C_k \varepsilon(t-k)$$

donde $\varepsilon(t)$ es un proceso de ruido blanco, con varianza σ^2 . Una solución $X(t)$ debilmente estacionaria del modelo previo, se llama proceso de medias móviles autorregresivo.

Se supone que $c_0 = d_0 = 1$, y que $C(z) = \sum_{k=0}^p c_k z^k$ no tiene ceros en $\{z/|z| < 1\}$ y $D(z) = \sum_{j=0}^q d_j z^j$; no tiene ceros en $\{z/|z| \leq 1\}$.

La razón de estas hipótesis, es garantizar la existencia de solución en el modelo [4-3-2-1].

Visto $X(t)$ como la salida de un filtro lineal con entrada $\varepsilon(t)$, la función de transferencia $A(\lambda)$ viene definida por

$$A(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^q c_k e^{-i\lambda k}}{\sum_{j=0}^q d_j e^{-i\lambda j}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\lambda j}$$

con $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty$, siempre que $D(z) = 0$ no tenga raíces sobre el círculo unidad.

En este supuesto la función de densidad espectral del proceso $X(t)$ es igual a:

$$f_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |A(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\left| \sum_{k=0}^p C_k e^{-i\lambda k} \right|^2}{\left| \sum_{j=0}^q d_j e^{-i\lambda k} \right|^2}$$

4-3-3. FILTRAJE EN TIEMPO REAL

Sean $X(t)$ e $Y(t)$ procesos debilmente estacionarios, siendo $x(t)$ no observable e $y(t)$ observable. Suponiendo que $Y(t)$ es observable para $-\infty < t < \infty$, el proceso de filtraje real consiste, a nivel teórico, a aproximar $X(t)$ tanto como sea posible, en función de $Y(t)$; lo cual equivale a encontrar un filtro lineal L tal que minimice $E\left[X(t) - L\left\{Y(t)\right\}\right]^2$. Si ambos procesos tienen espectros continuos con densidad espectral $f_x(\lambda)$ y $f_y(\lambda)$ y densidad espectral cruzada $f_{xy}(\lambda)$; la función de transferencia del filtro L es:

$$B(\lambda) = f_{xy}(\lambda)/f_y(\lambda)$$

Mas realisticamente, para un tiempo dado t , solo disponemos de observaciones $Y(s)$ para $s \leq t$. Por tanto, debemos preguntarnos por el filtro de mejor predicción de $X(t + \nu)$, para algún $\nu \geq 0$; esto es debemos determinar el filtro L_ν que minimice $E\left[X(t + \nu) - L_\nu\left\{Y(t)\right\}\right]^2$ entre los filtros lineales restringidos a que $Y(s)$, sea menor que $s \leq t$.

La solución a este problema es la proyección de $X(t + \nu)$ sobre el subespacio lineal engendrado $\left\{Y(s)/s \leq t\right\}$ resuelve el problema. El

filto $L_\nu = PL$, donde L es el filtro que proyecta $X(t + \nu)$ sobre el espacio generado por $\{Y(s) / -\infty < s < \infty\}$ y P es la proyección sobre el espacio generado por $\{Y(s) / s \leq t\}$.

El filtro L está determinado por la primera versión del problema de filtrage, operando sobre $Y_\nu(t) = Y(t + \nu)$, en vez de sobre $Y(t)$. Su función de transferencia es $B(\lambda)e^{i\lambda\nu}$ donde

$B(\lambda) = f_{xy}(\lambda)/f_Y(\lambda)$, y la salida es

$$\hat{X}_\nu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+\nu)} B(\lambda) Z_Y(d\lambda)$$

Si $Y(t)$ tiene una representación unilateral de medias móviles, con respecto al proceso de ruido blanco $\varepsilon(t)$, y que

$$EE\{Y(s) | s \leq t\} = EE\{\varepsilon(s) | s \leq t\} ; \text{ donde}$$

$EE \equiv$ Espacio engendrado, entonces $Z_Y(d\lambda) = C(\lambda)Z_\xi(d\lambda)$

con $C(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-i\lambda j}$; y $\sum C_j^2 < \infty$

Se sigue que $\hat{X}_\nu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+\nu)} D(\lambda) Z_\xi(d\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \varepsilon(t + \nu - j)$

donde $D(\lambda) = C(\lambda)B(\lambda)$. Puesto que $EE\{Y(s) | s \leq t\} = EE\{\varepsilon(s) | s \leq t\}$, la proyección de $\hat{X}_\nu(t)$ sobre $EE\{Y(s) | s \leq t\}$ tiene representación:

$$P\left[\hat{X}_\nu(t)\right] = \sum_{j=\nu}^{\infty} d_j \varepsilon(t + \nu - j) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j + \nu \varepsilon(t - j) = \tilde{X}_\nu(t)$$

El proceso $\tilde{X}_\nu(t) = P\left[X_\nu(t)\right]$ es $L_\nu\left\{Y(t)\right\}$, que es la solución al problema, y solo queda por calcular la función de transferencia de este filtro.

No obstante observemos que:

$$Z_{\tilde{X}_\nu}^{\sim}(d\lambda) = D_\nu(\lambda)Z_\xi(d\lambda) \text{ donde } D_\nu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j + \nu e^{-i\lambda j}$$

Por tanto la función de transferencia de L_ν es:

$$A_{\nu}(\lambda) = D_{\nu}(\lambda) | C(\lambda); \text{ donde } Z_{X_{\nu}} \sim = A_{\nu}(\lambda) Z_Y(d\lambda)$$

4-4. ESTIMACION EN PROCESOS CON ESPECTROS DISCRETOS

Un proceso con espectro discreto se puede modelizar por

$$[4-4-1] \quad X(t) = \sum_{i=1}^k A_i \cos(\lambda_i t + \phi_i) + \varepsilon(t).$$

donde $\varepsilon(t)$ es un proceso aleatorio ó de ruido blanco, que tiene poca influencia sobre el valor de $X(t)$, y que representa un proceso de ajuste o error de medida en el modelo.

El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ representa la frecuencia de emisión, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ las fases y $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ las amplitudes de los distintos armónicos.

Con el fin de facilitar el proceso de estimación, podemos operar en el modelo [4-4-1] para obtener:

$$[4-4-2] \quad X(t) = \sum_{i=1}^k \left[A_i \cos \phi_i \cos \lambda_i t - A_i \sin \phi_i \sin \lambda_i t \right] + \varepsilon(t) = \\ = \sum_{i=1}^k \left[A'_i \cos \lambda_i t + B'_i \sin \lambda_i t \right] + \varepsilon(t).$$

El problema que abordamos en esta sección, consiste en:

Dadas N observaciones X_1, X_2, \dots, X_N de un proceso estocástico, que se puede modelizar por [4-4-1], estimar los parámetros

$$\left\{ K; \left\{ A'_i, B'_i \right\}_{i=1,2,\dots,k}; \left\{ \lambda_i \right\}_{i=1,2,\dots,k}; \sigma_{\varepsilon}^2 \right\}$$

donde σ_{ε}^2 es la varianza del error $\varepsilon(t)$.

Supuesto k conocido, podemos estimar el resto de parámetros mediante técnicas de regresión mínimo cuadráticas. Para ello debemos minimizar la función:

$$\sum_{t=1}^N \left[X(t) - \sum_{i=1}^k \left(A'_i \cos \lambda_i t + B'_i \operatorname{sen} \lambda_i t \right) \right]^2$$

Diferenciando respecto de A'_i y B'_i obtenemos:

$$[4-4-3] \quad \sum_{t=1}^N X(t) \cos \lambda_j t = \sum_{i=1}^k A'_i \gamma_{ij} + \sum_{i=1}^k B'_i U_{ij}$$

$$\sum_{t=1}^N X(t) \operatorname{sen} \lambda_j t = \sum_{i=1}^k A'_i U_{ij} + \sum_{i=1}^k B'_i S_{ij}$$

donde $\gamma_{ij} = \sum_{t=1}^N \cos \lambda_i t \cos \lambda_j t$.

$$U_{ij} = \sum_{t=1}^N \operatorname{sen} \lambda_i t \cos \lambda_j t$$

$$S_{ij} = \sum_{t=1}^N \operatorname{sen} \lambda_i t \operatorname{sen} \lambda_j t$$

El desconocimiento de las frecuencias $\left\{ \lambda_i \right\}_{1 \leq i \leq k}$, no hace fácil la resolución de las ecuaciones [4-4-3]. Sin embargo, cuando se supone que las frecuencias λ_i son de la forma:

$$\lambda_i = 2\pi \frac{m_i}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

con m_1, m_2, \dots, m_k enteros; entonces se facilita notablemente la resolución de las ecuaciones, ya que:

$$\sum_{t=1}^M \cos \frac{2\pi p t}{N} \cos \frac{2\pi q t}{N} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq p \neq q \leq [N/2] \\ N/2, & \text{si } 0 < p = q < [N/2] \\ N, & \text{si } p = q = 0, \text{ ó } p = q = N/2 \end{cases}$$

cuando N es par

$$\sum_{t=1}^M \operatorname{sen} \frac{2\pi p t}{N} \cos \frac{2\pi q t}{N} = 0; \quad \forall p, \forall q \text{ enteros.}$$

$$\sum_{t=1}^M \operatorname{sen} \frac{2\pi p t}{N} \operatorname{sen} \frac{2\pi q t}{N} = \begin{cases} 0; & 0 \leq p \neq q < [N/2] \\ N/2; & 0 \leq p = q < [N/2] \\ 0; & p = q = 0; \text{ ó } p = q = N/2; \end{cases}$$

N par

Bajo estas hipótesis se tiene que:

$$\hat{A}'_i = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N X(t) \cos 2\pi \frac{m_i}{N} t.$$

$$\hat{B}'_i = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N X(t) \operatorname{sen} 2\pi \frac{m_i}{N} t.$$

Además:

$$\begin{aligned} E(\hat{A}'_i) &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N E[X(t)] \cos \lambda_i t = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{j=1}^k [A'_j \cos \lambda_j t + B'_j \operatorname{sen} \lambda_j t] \cdot \cos \lambda_i t = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{t=1}^N [A'_j \cos \lambda_j t \cos \lambda_i t + B'_j \operatorname{sen} \lambda_j t \cos \lambda_i t] \right] = A'_j. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $E[\hat{B}'_i] = B_i$

y que:

$$\operatorname{Var}(\hat{A}'_i) = \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \sum_{t=1}^N \cos^2 \lambda_i t = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{N}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{B}'_i) = \left(\frac{2}{N}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \sum_{t=1}^N \operatorname{sen}^2 \lambda_i t = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{N}$$

$$\operatorname{Cov}(\hat{A}'_i, \hat{B}'_i) = 0.$$

Las fórmulas previas son puramente matemáticas, ya que por lo general las frecuencias $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son desconocidas.

Se puede desarrollar un proceso iterativo para mejorar las estimaciones, tanto de los parámetros A'_i y B'_i , como de las frecuencias λ_j . El proceso iterativo se concreta en los siguientes pasos:

I) Se eligen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ arbitrarios, con $\lambda_j = 2\pi \frac{m_j}{N}$; $0 \leq m \leq [N/2]$ y se calculan los estimadores \hat{A}'_i ; \hat{B}'_i y el error cuadrático medio:

$$\text{E.C.M.} = \sum_{t=1}^N \left[X(t) - \sum_{i=1}^k (\hat{A}'_i \cos \lambda_i t + \hat{B}'_i \operatorname{sen} \lambda_i t) \right]^2$$

II) Se selecciona un $\lambda = 2\pi \frac{m}{N} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ y se sustituye por cada uno de los λ_i , calculando E.C.M. (λ, λ_i) , el error cuadrático

medio que se obtiene al sustituir λ por λ_1 . Si E.C.M. (λ, λ^*) , se sustituye λ^* por λ y se repite el proceso, hasta que E.C.M. $(\lambda, \lambda^*) \geq$ E.C.M.

III) Se busca un $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ conjunto de frecuencias actuales tales que:

$$\text{Mín E.C.M.}(\lambda, \lambda_1) = \text{E.C.M.}(\lambda, \lambda^*) < \text{E.C.M.}$$

Si es posible encontrar un tal λ , se sustituye en $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$; λ por λ^* y se coloca E.C.M. = E.C.M. (λ, λ^*) . El proceso finaliza cuando no se puede hallar tal λ . La elección de λ se simplifica teniendo en cuenta las ecuaciones [4-4-3] y observando que solo uno de los valores γ_{ij} ; U_{ij} y S_{ij} es no numérico.

Otra forma de obtener buenos valores iniciales para las frecuencias λ , es mediante la técnica de periodograma. Dicha técnica consiste en:

Dados N observaciones X_1, X_2, \dots, X_N ; de un proceso estacionario discreto, se llama periodograma del proceso para los N observaciones a la función $I_N(\lambda)$ definida por:

$$I_N(\lambda) = \left\{ A(\lambda) \right\}^2 + \left\{ B(\lambda) \right\}^2 \text{ definida para } -N \leq \lambda \leq N \text{ siendo}$$

$$[4-4-4] \quad A(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \cos \lambda t, \text{ y } B(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \sin \lambda t,$$

fórmulas que son similares a las que servían para estimar A' y B' en los supuestos previos.

Otra forma, más sintética, de definir el periodograma es:

$$I_N(\lambda) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N X(t)e^{-i\lambda t} \right|^2$$

Aunque $I_N(t)$ está definida $\forall \lambda \in [-N, N]$, es claro que no se puede evaluar dicha función numéricamente para todos los valores de λ . Por lo general se suele evaluar $I_N(\lambda)$ en las frecuencias $\frac{2m\pi}{N} = \lambda_m$; en cuyo caso se verifica que:

$$A(\lambda_m) = \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{A}'_m, \text{ y } B(\lambda_m) = \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{B}'_m.$$

Se llama gráfica del Periodograma a la que resulta de dibujar m versus $I_N\left(\frac{2m\pi}{N}\right)$

Supuesto que el proceso se puede modelizar por [4-4-1], con $\lambda_1 = \frac{2m\pi}{N}$, entonces:

$$E\left[I_N\left(\frac{2m_1\pi}{N}\right)\right] = \frac{N}{2} E\left[\hat{A}'_1{}^2 + \hat{B}'_1{}^2\right] = \frac{N}{2} (A_1^2 + B_1^2) + 2\sigma_\varepsilon^2$$

mientras que si $m \neq m_1$ entonces:

$$E\left[I_N\left(\frac{2m\pi}{N}\right)\right] = 2\sigma_\varepsilon^2$$

Al ser $I_N(\lambda)$ función de una sola variable, se pueden aplicar técnicas de programación matemática global, para buscar los máximos de la función periodograma. Respecto de este periodograma se tienen los siguientes resultados.

TEOREMA. 4-4-1. - « Si $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de media cero y varianza σ_x^2 , entonces $I_M\left(\frac{2m\pi}{N}\right)$; $m = 0, 1, 2, \dots, [N/2]$ son variables aleatorias independientes que se distribuyen según:

$$I_N\left(\frac{2m\pi}{N}\right) = \begin{cases} \sigma_x^2 X_2^2; & \text{si } k \neq 0; k \neq N/2 \\ 2\sigma_x^2 X_1^2; & \text{si } k = 0; \text{ ó } k = N/2; \text{ con } N \text{ par} \end{cases} \text{ »}$$

DEMOSTRACION. - Clara consecuencia de la ortogonalidad de las

funciones seno y coseno.

Llamando $\hat{R}(s) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|s|} X(t)X(t+|s|)$, podemos escribir el

periodograma por la fórmula:

$$I_N(\lambda) = 2 \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}(S) \cos S\lambda.$$

TEOREMA 4-4-2.- (PRIESTLEY) « Supongamos que $X(t)$ se ajusta al modelo [4-4-1]; $X(t) = \sum_{i=1}^k A_i \cos(\lambda_i t + \phi_i) + \varepsilon(t)$ entonces, $\forall \lambda$, se verifica:

$$E[I_N(\lambda)] = 2\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^k A_i^2 \left\{ \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}N(\lambda + \lambda_i)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}(\lambda + \lambda_i)\right)} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}N(\lambda - \lambda_i)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_i)\right)} \right\} \gg$$

TEOREMA [4-4-3].- (PRIESTLEY) « si LOS $\{x_t\}_{1 \leq t \leq N}$ son independientes y tienen cumulante de cuarto orden finito $k_4 = \mu_4 - 3\sigma_x^4$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{cov}[I_N(\lambda_1), I_N(\lambda_2)] &= \frac{4k_4}{N} + \frac{4\sigma_x^4}{N^2} \left\{ \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}N(\lambda_1 + \lambda_2)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right)} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}N(\lambda_1 - \lambda_2)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\right)} \right\} = \\ &= \frac{4k_4}{N} + \frac{8\pi\sigma_x^2}{N} \left\{ F_N(\lambda_1 + \lambda_2) + F_N(\lambda_1 - \lambda_2) \right\} \end{aligned}$$

siendo F_N el núcleo de Fejer, definido por la fórmula:

$$2\pi F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(N\theta/2)}{\text{sen}^2(\theta/2)} = \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \cos s\theta.$$

4-4-1. ALGUNOS TEST SOBRE FRECUENCIAS Y PERIODOGRAMAS

Aunque se observen en el periodograma una serie de picos, no podemos concluir, sin realizar previamente un contraste adecuado, que las abcisas de estos picos se corresponden con las frecuencias del modelo [4-4-1].

El dibujo de $\lambda_m = \frac{2\pi m}{N}$; $m = 0, 1, 2, \dots, [N/2]$, versus $I_N(\lambda_m)$, ó la gráfica del periodograma, nos proporciona información relevante para decidir si podemos admitir la hipótesis de que $k = 0$; esto es; $X(t)$ es un proceso puramente aleatorio ó no. Hemos visto que cuando el proceso $X(t)$ es puramente aleatorio, para $1 \leq m < [N/2]$, la variable $I_N(\lambda_m) / \sigma_x^2$ se distribuye como una χ^2 , siendo todas estas variables independientes, obteniéndose como consecuencia el siguiente resultado.

TEOREMA 4-4-1-1.- « La función de distribución de la v.a. $S = \text{Máx.}_{1 \leq m < [N/2]} \left[I_N(\lambda_m) / \sigma_x^2 \right]$, cuando el proceso es puramente aleatorio, es

$$F_S(z) = \left[1 - e^{-z/2} \right]^{[N/2]} \text{ si } N \text{ es par } \text{ »}.$$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned} F_S(z) &= P[S \leq z] = P\left[I_N(\lambda_m) \leq z; \forall_m \right] = \\ &= \prod_{m=1}^{[N/2]} P\left[I_N(\lambda_m) \leq z \right] = \left[1 - e^{-z/2} \right]^{[N/2]} \end{aligned}$$

cuando N es impar, $F_S(z) = \left(1 - e^{-z/2} \right)^{[N/2]}$.

S solo se conoce cuando sabemos quién es σ_x^2 , aunque dicho valor en la práctica es desconocido.

Cuando el modelo $X(t)$ es puramente aleatorio es

$$E\left[I_N(\lambda_m)\right] = 2\sigma_x^2, \text{ y por tanto } \hat{S}_x^2 = \frac{1}{2[N/2]} \sum_{k=1}^{[N/2]} I_M(\lambda_m)$$

es un estimador insesgado de σ_x^2 .

Si reemplazamos σ_x^2 por su estimador \hat{S}_x^2 en la definición de S, podemos construir un test aproximado para contrastar la hipótesis:

$H_0 \equiv$ El modelo [4-4-1] es puramente aleatorio, frente a

$H_a \equiv$ El modelo [4-4-1] no es puramente aleatorio.

Para ello, sea Z^* un valor tal que $\left[1 - e^{-z^*/2}\right]^{[N/2]} = 1 - \alpha$

El test decide H_0 , si $S^* \leq Z^*$ y H_1 en caso contrario

No obstante, Fisher (1929) obtuvo la distribución exacta del estadístico:

$$S_1 = \frac{\text{Máx.} \left[I_N(\lambda_m) \right]}{\sum_{m=1}^{[N/2]} I_N(\lambda_m)}, \text{ bajo la hipótesis } H_0$$

TEOREMA 4-4-1-2. (Fisher 1929).- « Si N es impar y H_0 es cierta,

la distribución de S_1 es:

$$F_{S_1}(z) = 1 - n(1-z)^{n-1} + \binom{n}{2}(1-2z)^{n-1} - \binom{n}{3}(1-3z)^{n-1} + \dots + (-1)^a \binom{n}{a}(1-az)^{n-1}; \text{ donde } n = [N/2] \text{ y } a \text{ es el mayor entero menor que } 1/z; 0 < z \leq 1 \text{ »}.$$

El test se realiza hallando un valor z_α tal que

$$F_{S_1}(z_\alpha) = 1 - \alpha \text{ y decide } H_0 \text{ si } S_1 \leq z_\alpha, \text{ y } H_1 \text{ si } S_1 > z_\alpha.$$

Si las verdaderas frecuencias no son de la forma $\lambda_m = 2\pi \frac{m}{N}$, Whittle (1952) demostró que bajo la hipótesis de que las frecuencias estén suficientemente espaciadas, y tomando como estimador de la frecuencia λ_i , los correspondientes máximos sucesivos del periodograma más

próximos, correspondientes a $\hat{\lambda}_m = 2\pi \frac{m}{N}$, se obtiene que:

$$E(\hat{\lambda}_1) = \lambda_1 + O(1/N)$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_1) = \frac{24\sigma_\varepsilon^2}{N^3(A_1'^2 + B_1'^2)} + O(1/N^3)$$

El procedimiento de Whittle trabaja bien siempre que las verdaderas frecuencias del modelo [4-4-1], estén próximas al conjunto $\left\{\frac{2m\pi}{N}\right\}$; $0 \leq m \leq \left[\frac{N}{2}\right]$; en otro caso, los resultados se debilitan notablemente.

$$\text{Llamando } S_r = \frac{I_{(r)}\left[\frac{\lambda}{N}\right]}{\sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} I_N(\lambda_k)} ; \text{ donde } I_{(r)}(\lambda_m)$$

es el r-ésimo valor mayor de $\left\{I_N(\lambda_m)\right\}_{1 \leq m \leq \lfloor N/2 \rfloor}$

Grenander y Rosenblatt, obtuvieron el siguiente resultado.

TEOREMA 4-4-1-3 (Grenander, Rosenblatt 1957) « La función de distribución de S_r , supuesta que es cierta la hipótesis nula H_0 , es:

$$F_{g_r}(z) = 1 - \frac{n!}{(r-1)!} \sum_{j=1}^a \frac{(-1)^{j-r} (1-jz)^{n-1}}{j(n-j)!(j-r)!}$$

siendo a el mayor entero menor que $1/z$ ».

La distribución se puede usar para contrastar el número de términos periódicos que tiene el modelo [4-4-1], aunque no es exacto aplicar sucesivamente el contraste previo para distintos valores consecutivos el citado modelo.

4-4-3 ANALISIS SECUNDARIO. - Es una técnica muy usada en mejorar

la estimación de las frecuencias en procesos estocásticos con espectros discretos. Para facilitar la exposición suponemos que el modelo es:

$$X(t) = A \cos(\lambda_1 t + \phi_1) + \varepsilon(t)$$

Supondremos que λ_0 es la frecuencia estimada de λ_1 y sea $T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, la correspondiente estimación del periodo. Dividimos las observaciones en grupos, conteniendo mT_1 observaciones cada grupo. Para el s -ésimo grupo las amplitudes son estimadas por:

$$\hat{A}'_s = \left(\frac{2}{mT_1} \right) \sum_{t=(s-1)mT_1}^{smT_1} A \cos(\lambda_1 t + \phi_1) \cos \lambda_0 t$$

$$\hat{B}'_s = \left(\frac{2}{mT_1} \right) \sum_{t=(s-1)mT_1}^{smT_1} A \cos(\lambda_1 t + \phi_1) \sin \lambda_0 t$$

Llamando $t' = smT_1 - t$ podemos escribir

$$\left(\frac{mT_1}{2} \right) \hat{A}'_s = \frac{A}{2} \sum_{t'=0}^{mT_1} \left[\cos \left\{ (\lambda_0 + \lambda_1)(SmT_1 - t') + \phi_1 \right\} + \right. \\ \left. + \cos(\lambda_0 - \lambda_1)(SmT_1 - t') - \phi_1 \right]$$

con una expresión similar para $\frac{mT_1}{2} \hat{B}'_s$

Por tanto:

$$\frac{mT_1}{2} (\hat{A}'_s + i \hat{B}'_s) = \frac{1}{2} A \left[\sum_{t'} \exp \left[i(\lambda_0 + \lambda_1)(SmT_1 - t') + \phi_1 \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[i(\lambda_0 + \lambda_1)(SmT_1 - t') - \phi_1 \right] \right] = \frac{1}{2} A \left| \mathbb{G}(\lambda_0 + \lambda_1) \right| \left[\exp \left(i(\lambda_0 + \lambda_1) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. SmT_1 + \phi_1 + \Psi_1 \right) + \frac{1}{2} A \left| \mathbb{G}(\lambda_2 - \lambda_0) \right| \exp \left[i(\lambda_0 - \lambda_1) SmT_1 - \phi_1 + \Psi_1 \right] \right];$$

$$\text{donde } \mathbb{G}(\theta) = \sum_{t'=0}^{mT_1} \exp(-it'\theta) \text{ y } \Psi_1 = \arg \left\{ \mathbb{G}(\lambda_0 + \lambda_1) \right\}; \Psi_2 = \arg \left| \mathbb{G}(\lambda_0 - \lambda_1) \right|$$

Ahora bien, si mT_1 es suficientemente grande (y λ_1 suficientemente alejado de cero) entonces:

$$\left| \mathbb{G}(\lambda_0 + \lambda_1) \right| = \frac{\text{sen} \left(\frac{1}{2} T_1 (\lambda_0 + \lambda_1) \right)}{\text{sen} \left(\frac{1}{2} (\lambda_0 + \lambda_1) \right)}$$

será pequeño. En estas condiciones, tendremos la aproximación

$$\phi_s = \text{tang}^{-1} \left(\frac{\hat{B}'_s}{\hat{A}'_s} \right) = (\lambda_0 - \lambda_1) S m T_1 - \phi_1 + \psi_2 \pmod{2\pi}$$

Si computamos \hat{A}'_s y \hat{B}'_s para cada grupo, evaluamos ϕ_s y dibujamos ϕ_s frente a S, el grafo debe ser lineal con tangente.

$\beta = (\lambda_0 - \lambda_1) m T_1 = 2\pi m (1 - \lambda_0/\lambda_1)$ y por tanto

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left[1 - \left(\beta / 2\pi m \right) \right]$$

El valor de β se estima por regresión, obteniéndose una mejor estimación de la frecuencia.

4-4-3.- OTRAS TÉCNICAS DE ESTIMACION DE FRECUENCIAS

Dedicamos este epígrafe a dar una técnica, basada en optimización global, para la estimación de las frecuencias de un espectro discreto. Como ya se ha dicho, la estimación consiste, desde el punto de vista de la programación matemática, en calcular los máximos relativos de la función

$$I_N(\lambda) = \{A(\lambda)\}^2 + \{B(\lambda)\}^2 = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\lambda t} \right|^2$$

siendo $A_X(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \cos \lambda t$ y $B_X(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \text{sen } \lambda t$

la derivadas de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son, respectivamente:

$$A'(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N t X_t \text{sen } \lambda t \quad \text{y} \quad B'(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N t X_t \cos \lambda t$$

Llamando $Y_t = tX_t$, se tiene que $B'_Y(\lambda) = A'_X(\lambda)$ y $A'_Y(\lambda) = -B'_X(\lambda)$ y suponemos que disponemos de una técnica para evaluar $A_X(\lambda)$ y $B_X(\lambda)$ para cualquier serie de datos X.

La técnica de optimización local que utilizamos en el procedimiento de optimización global, es una técnica discreta basada en el gradiente. Dicha técnica consiste, esencialmente, en el siguiente proceso:

Suponiendo evaluadas $I_N(\lambda)$, $A_X(\lambda)$, $B_X(\lambda)$ y $A_Y(\lambda)$ y $B_Y(\lambda)$ en la frecuencia λ_0 formamos

$$\{A_X(\lambda_0) + tB_Y(\lambda_0)\}^2 + \{B_X(\lambda_0) + tA_Y(\lambda_0)\}^2 = f(t) \quad t > 0$$

La derivada de $f(t)$ respecto de t se calcula por

$$f'(t) = 2[A_X(\lambda_0) B_Y(\lambda_0) + B_X(\lambda_0) A_Y(\lambda_0)] + 2t[B_Y^2(\lambda_0) + A_Y^2(\lambda_0)]$$

Llamando $u_0(\lambda_0) = 2[A_X(\lambda_0)B_Y(\lambda_0) + B_X(\lambda_0)A_Y(\lambda_0)]$ se tiene que cuando $u_0(\lambda_0) > 0$ entonces $f'(t) > 0 \quad \forall t > 0$, mientras que si $u_0(\lambda_0) < 0$, $f'(t)$ es negativa en un entorno de $t=0$.

Si $U(\lambda_0) > 0$,.. evaluaremos $I_N(\lambda)$ en los puntos $\lambda = \lambda_0 + t$ para $t \in [\frac{k_0}{N}, \frac{k_0}{2N}, \dots, \frac{k_0}{2^s N}, \dots]$ quedandonos con el primer valor para el cual

$I_N(\lambda_0 + t) > I_N(\lambda_0)$. Cada vez que se produce el proceso de evaluación, si se ha tomado como valor de t , $t = \frac{k_0}{2^s N}$, se cambia el valor de k_0 a $\frac{k_0}{2^{s+1}}$

, comenzando con un valor de $k_0=1$.

Cuando $U(\lambda_0) < 0$, se evalúa $I_N(\lambda)$ en los puntos $\lambda = \lambda_0 - t$ para $t \in [\frac{k_0}{N}, \frac{k_0}{2N}, \dots, \frac{k_0}{2^s N}, \dots]$, quedándonos con el primer valor para el cual

$I_N(\lambda_0 - t) > I_N(\lambda_0)$.

El proceso finaliza cuando $U(\lambda_0) = 0$ ó es muy proximo a cero; es decir $|U(\lambda_0)| < \epsilon$ para algún ϵ prefijado de antemano.

La optimización global consistiría en aplicar el procedimiento de optimización local, en los puntos $\lambda=0$, y en los valores medios entre un máximo relativo y un valor extremo del intervalo $[-\pi, \pi]$ ó en el punto medio entre dos máximos relativos, ó el punto medio entre un valor inicial y el máximo relativo más próximo.

4-5. ESTIMACION ESPECTRAL EN PROCESOS DISCRETOS

CON ESPECTROS CONTINUOS

Si examinamos los resultados sobre procesos estacionarios discretos, resumiendo en la parte 2 del tercer capítulo de esta monografía, y que se concretan en los teoremas [3-6-6], [3-6-7], [3-6-8] y [3-6-9], podemos obtener las siguientes conclusiones:

Todo proceso estacionario discreto $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de cuadrado integrable, se puede siempre expresar como:

$$X(t) = D(t) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j Y(t-j); \quad \text{con } \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \text{ y siendo } \{Y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$$

un proceso aleatorio indeterminístico puro; esto es, $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, es una doble sucesión de variables aleatorias independientes de media cero y varianza común σ_Y^2 . Además $\{D(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, es un proceso determinístico puro, tal que $\forall t$ y $\forall s$:

$$E[D(t), \bar{Y}(s)] = 0$$

Es claro que el proceso previo es indeterminístico puro si y solo si $D(t) = 0, \forall t$, y esto se cumple si y solo si la función de distribución espectral $H(\lambda)$, tiene función de densidad espectral $h(\lambda)$ satisfaciendo que:

$\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda) d\lambda > -\infty$; hecho que implica que $h(\lambda) > 0$ c.s.; en todo el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Nos proponemos estimar la función de densidad espectral $h(\lambda)$ de procesos estacionarios discretos indeterminísticos puros. En virtud de

lo expuesto, este tipo de procesos se puede modelizar por

$$[4-5-1] \quad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon(t - j)$$

donde $\{\varepsilon(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un proceso puramente aleatorio y

$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$. Para este tipo de procesos, la función de densidad

espectral es:

$$[4-5-2] \quad h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) \cos \lambda n; \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

siendo $R(n) = E[X(t)X(t+n)]$ la función de autocovarianza del proceso.

Si solo conocemos M valores de $X(t)$, denotamos por $X(1); X(2) \dots X(N)$; $R(n)$ se puede estimar por analogía para valores de n tales que $|n| \leq N$. La estimación por analogía de $R(n)$ es:

$$\hat{R}(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|n|} X(t)X(t+|n|)$$

y de la $h(\lambda)$ por:

$$\hat{h}(\lambda) = I_N^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}(n) \cos \lambda n.$$

Puesto que habíamos definido el periodograma por la fórmula

$$I_N(\lambda) = 2 \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}(n) \cos \lambda n, \text{ se tiene que}$$

$$I_N^*(\lambda) = \frac{1}{4\pi} I_N(\lambda)$$

A $I_N^*(\lambda)$ se le denomina periodograma modificado o función de densidad espectral muestral, y cuando no hay peligro de confusión periodograma.

Es claro que

$$[4-5-3] \quad E[I_N^*(\lambda)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} E[\hat{R}(n)] \cos \lambda n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) R(n) \cos \lambda n$$

y por tanto, $\lim_{N \uparrow \infty} E \left[I_N^*(\lambda) \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} R(n) \cos \lambda n = h(\lambda)$

Fórmula que dice que para cada λ , $I_N^*(\lambda)$ es un estimador asintóticamente insesgado de $h(\lambda)$.

La fórmula previa se puede obtener también por el siguiente procedimiento

Sabemos que

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta.$$

Al sustituir dicha fórmula en [4-5-3] obtenemos

$$[4-5-4] \quad E \left[I_N^*(\lambda) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left\{ \cos n(\theta + \lambda) + \cos n(\theta - \lambda) \right\} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left\{ \frac{1}{2} F_N(\theta - \lambda) + \frac{1}{2} F_N(\theta + \lambda) \right\} d\theta$$

siendo $F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\text{sen}^2(N\theta/2)}{\text{sen}^2(\theta/2)}$ el núcleo de Fejer

Puesto que h y F_N son simétricas, se concluye que:

$$[4-5-5] \quad E \left[I_N^*(\lambda) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) F_N(\theta - \lambda) d\theta = h(\lambda) + o\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

ya que cuando $N \uparrow \infty$; $F_N(\theta - \lambda)$ tiende a la función delta de Dirac.

Llamando $Z_x(\lambda)$ a la transformada de Fourier finita de $X(t)$ se tiene que:

$$Z_x(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-it\lambda}; \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

Teniendo en cuenta la representación espectral

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta t} dS(\theta), \text{ hallamos que:}$$

$$\begin{aligned} [4-5-6] \quad Z_x(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\sum_{t=1}^N e^{it(\theta-\lambda)} \right) dS(\theta) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_N^{1/2}(\theta - \lambda) e^{i(N+1)(\theta-\lambda)/2} dS(\theta); \end{aligned}$$

puesto que:

$$\sum_{t=1}^N e^{it\phi} = \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{i\phi}}{e^{i\phi} - 1} = e^{i(N+1)\phi/2} \frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}\phi/2}$$

De [4-5-6] se sigue que $I_N^*(\lambda) = |Z_x(\lambda)|^2 = \left(Z_x(\lambda) \overline{Z_x(\lambda)} \right)$ y,

como consecuencia

$$\begin{aligned} E\left[I_N^*(\lambda)\right] &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N^{1/2}(\theta - \lambda) e^{i(N+1)(\theta-\lambda)/2} F_N^{1/2}(\theta - \lambda) e^{i(N+1)(\theta-\lambda)/2} \\ &\cdot E\left[dZ_x(\lambda) d\overline{Z_x(\lambda)}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta - \lambda) E\left[d\|Z_x(\theta)\|^2\right] = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\theta - \lambda) h(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Fórmula que coincide con la [4-5-3] previamente hallada.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{S\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - S\left(\frac{2(k-1)\pi}{N}\right)}{\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{1/2}} = \frac{\Delta S(\lambda_k)}{(\Delta\lambda_k)^{1/2}} \text{ se obtiene:}$$

$$\begin{aligned} E\left[I_N^*\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right] &= \left[\left| Z_x\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \right|^2 \right] \approx E\left[\left(\frac{\Delta S(\lambda_k)}{\Delta\lambda_k} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\Delta H(\lambda_k)}{\Delta\lambda_k} \approx h(\lambda_k) = h\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \end{aligned}$$

Donde $H(\lambda)$ es la función de distribución espectral, y las fórmulas aproximadas, cuando $N \uparrow \infty$ se convierten en igualdades.

4-5-1 PROPIEDADES DEL PERIODOGRAMA MODIFICADO

A pesar de que $I_N^*(\lambda)$ es un estimador asintóticamente insesgado de $h(\lambda)$, su comportamiento es extremadamente errático, debido a los siguientes hechos:

- 1) $\left(I_N^*(\lambda) \right)$ no es un estimador consistente de $h(\lambda)$, ya que $\text{Var}\left(I_N^*(\lambda) \right)$ no tiene a cero cuando N tiende a ∞ .
- 2) Como función de λ , $I_N^*(\lambda)$ es una función muy fluctuante.

Teniendo en cuenta la fórmula [4-5-1]

$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon(t-j)$ es claro que $X(t)$ es una filtración del proceso aleatorio puro $\varepsilon(t)$, con función de transferencia del filtro.

$$T(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\lambda} \text{ y por tanto } dS_x(\lambda) = T(\lambda)dS_\varepsilon(x);$$

siendo $S_x(\lambda)$ y $S_\varepsilon(\lambda)$ los procesos de incrementos ortogonales ó. espectros de los procesos $X(t,w)$ y $\varepsilon(t,w)$

De este hecho se deduce que:

$$I_{N_x}^*(\lambda) \approx |T(\lambda)|^2 I_{N_\varepsilon}^*(\lambda), \text{ y puesto que } h_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}; \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

se concluye que $h_x(\lambda) = |T(\lambda)|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$

Fórmula que nos permitiría calcular con exactitud $h_x(\lambda)$, si conocemos σ_ε^2 y $T(\lambda)$, datos que, por regla general, son desconocidos.

Teniendo en cuenta que $I_{N_x}^*(\lambda) \sim |T(\lambda)|^2 I_{N_\varepsilon}^*(\lambda)$ y que

$$|T(\lambda)|^2 = \frac{h_x(\lambda)2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} \text{ se obtiene que:}$$

$I_{N_x}^*(\lambda) \sim 2\pi h_x(\lambda) \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} I_{N\varepsilon}^*(\lambda)$, aproximación que fué obtenida por Bartlett (1955).

Para precisar esta aproximación, enunciamos seguidamente una serie de resultados extraídos de Priestley

TEOREMA 4-5-2-1 (Priestley) «Sea $X(t)$ un proceso modelizado por [4-5-1]. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| |n|^{1/2} < \infty$, entonces $Z_x(\lambda) = T(\lambda)Z_\varepsilon(\lambda) + \gamma_N(\lambda)$ donde $E[|\gamma_N(\lambda)|^2] = O(1/N)$ uniformemente en λ . Además, si las variables $\{\varepsilon(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ son independientes y $E[\varepsilon(t)^4] < \infty$, entonces $E[|\gamma_N(\lambda)|^4] = O(1/N^2)$ uniformemente en λ ».

TEOREMA 4-5-2-2 (PRIESTLEY) Sea $X(t)$ un proceso modelizado por [4-5-2] tal que $\{\varepsilon(t)\}$ sean variables independientes con $E[\varepsilon(t)] = 0$, $E[\varepsilon^2(t)] = \sigma_\varepsilon^2$, $E[\varepsilon(t)^4] < \infty$, y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| |n|^\alpha < \infty$, $\alpha > 0$. Entonces:

$$I_{N_x}^*(\lambda) \sim 2\pi h_x(\lambda) \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} I_{N\varepsilon}^*(\lambda) + R_N(\lambda)$$

donde $E|R_N(\lambda)|^2 = O(1/N^{2\alpha})$ uniformemente en λ ».

Si las variables $\varepsilon(t)$ son normales y a_n satisfacen las hipótesis del teorema previo, se deduce que el conjunto de variables aleatorias

$$\left\{ I_{N_x}^*(2\pi k/M) / 2\pi h_x\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right\}; k = 0; 1; 2; \dots [M/2]$$

son independientes y se distribuyen asintóticamente, para

$k \neq 0$ y $k \neq [N/2]$ (Npar) como una χ_2^2 ; esto es:

$$I_{N_x} \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \sim \begin{cases} 2\pi h_x \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \chi_2^2; & k \neq 0; k \neq N/2 \\ 4\pi h_x \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \chi_1^2; & k = 0, \text{ ó } M/2; N \text{ par} \end{cases}$$

En particular se cumple, asintóticamente, que

$$\lim_{N \uparrow \infty} E \left[I_{N_x} \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \right] = 4\pi h_x \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \text{ y}$$

$$\lim_{N \uparrow \infty} \text{Var} \left[I_{N_x} \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \right] = 16\pi^2 h_x^2 \left(\frac{2k\pi}{N} \right)$$

Puesto que $I_{N_x}^*(\lambda) = \frac{1}{4\pi} I_{N_x}(\lambda)$, se obtiene que

$$\lim_{N \uparrow \infty} E \left[I_{N_x}^* \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \right] = h_x \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \text{ y}$$

$$\lim_{N \uparrow \infty} \text{Var} \left[I_{N_x}^* \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \right] = h_x^2 \left(\frac{2k\pi}{N} \right) \text{ que prueba que}$$

$$I_{N_x}^*(\lambda), \text{ no es estimador consistente de } h(\lambda)$$

TEOREMA 4-5-2-3 (PRIESTLEY) « Sea $X(t)$ un proceso modelizado por [4-5-1], donde a_n y $\varepsilon(t)$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema [4-5-2-2] y sea

$$e = \left[k_4(\varepsilon) / \sigma_\varepsilon^4 \right] = \left[E[\varepsilon_t^4] - 3 \right] / \sigma_\varepsilon^4, \text{ y } F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\text{sen}^2(N\theta/2)}{\text{sen}^2(\theta/2)}$$

el núcleo de Fejer. En estas condiciones se verifica:

$$\text{cov} \left(I_{N_x}^*(\lambda_1) I_{N_x}^*(\lambda_2) \right) = \left[\frac{e}{N} + \frac{2\pi}{N} \left(F_N(\lambda_1 + \lambda_2) + F_N(\lambda_1 - \lambda_2) \right) \right].$$

$$.h(\lambda_1)h(\lambda_2) + o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \text{ donde el resto es uniforme en } \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ »}.$$

TEOREMA 4-5-2-4 (PRIESTLEY). « Sean $\phi_1(\lambda)$ y $\phi_2(\lambda_2)$ dos funciones a valores reales, con dominio $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, de tal forma que cada una tenga a lo más un número finito de discontinuidades y que ambas sean absolutamente integrables. Sea $X(t)$ un proceso modelizado por [4-5-1], satisfaciendo las condiciones del teorema [4-5-2-2] y $a_n = o\left(\frac{1}{|n|}\right)^k$, para algún $k > 2$. Para $i = 1, 2$ sean

$$\hat{\Psi}_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda) I_{N_x}^*(\lambda) d\lambda \text{ y } \Psi_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda) h(\lambda) d\lambda$$

En estos supuestos se verifica:

- 1) $\lim_{N \uparrow \infty} E(\hat{\Psi}_1) = \Psi_1$
- 2) $\lim_{N \uparrow \infty} N \text{ cov}(\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2) = e \Psi_1 \Psi_2 + 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda) \bar{\phi}_2(\lambda) h^2(\lambda) d\lambda$

Siendo $e = [E(\varepsilon_t^4) - 3]$ y $\bar{\phi}_2(\lambda) = \frac{1}{2} [\phi_2(\lambda) + \phi_2(-\lambda)]$

En particular, cuando $\phi_1(\lambda) = \phi_2(\lambda) \approx \phi(\lambda)$ se tiene

$$\lim_{N \uparrow \infty} N \text{ Var}(\Psi) = e \Psi^2 + 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda) \bar{\phi}(\lambda) h^2(\lambda) d\lambda \gg$$

Como conclusiones de los resultados y discusiones previas obtenemos:

- a) El periodograma modificado no es un estimador satisfactorio de la función de densidad espectral
- b) Si modelizamos un proceso con espectro continuo, por un proceso con espectro discreto, los test para el contraste de frecuencias discretas, pueden dar significativo en un gran número de frecuencias espúreas.

4-6 ESTIMADORES CONSISTENTES DE LA DENSIDAD ESPECTRAL.

VENTANAS ESPECTRALES

Es sorprendente la inconsistencia de $I_{N_x}^*(\lambda)$ como estimador de $h(\lambda)$, a pesar de que $h(\lambda)$ se expresa en función de $R(n)$, de idéntica forma a como $I_{N_x}^*(\lambda)$ se expresa en función de $R(n)$. Algunos autores achacan este resultado al hecho de utilizar todas las autocovarianzas $\hat{R}(n)$ en el cálculo $I_{N_x}^*(\lambda)$; pues cuando N se aproxima a $N - 1$, $\hat{R}(n)$ es un pobre estimador de $R(n)$; aportando gran varianza al estimador

$I_{N_x}^*(\lambda)$.

En opinión de Priestley, la razón principal por la que $\text{Var}\left(I_{N_x}^*(\lambda)\right)$ no tiende a cero, se debe al hecho de que dicha varianza depende de N autocovarianzas muestrales, y aunque la varianza del estimador de cada una de ellas es de $O(1/N)$, el efecto acumulativo de los N términos produce una varianza que es $O(1)$.

Una forma de salvar estos inconvenientes consiste en omitir algún término de las colas en la estimación de la densidad espectral. Con esta omisión el periodograma recibe el nombre de periodograma truncado.

$$[4-6-1] \quad \hat{h}_0(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{n=-M}^M \hat{R}(n) \cos n\lambda \quad \text{con } M < N - 1$$

El número natural M se llama punto de truncación. Es claro que cuando M tiende a infinito

$E\left[\hat{h}_0(\lambda)\right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^M E\left[\hat{R}(n)\right] \cos n\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^M \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \cos n\lambda$ tiende hacia $h(\lambda)$, y por tanto $\hat{h}_0(\lambda)$ es un estimador asintóticamente insesgado de $h(\lambda)$.

Además, como $V\left(\hat{h}_0(\lambda)\right) \approx O\left(\frac{M}{N}\right)$; si $\lim_{N \uparrow \infty} \frac{M}{N} = 0$, entonces $\hat{h}_0(\lambda)$ es un estimador asintóticamente consistente de $h(\lambda)$.

El estimador $h_0(\lambda)$ es un caso particular de estimar por la fórmula:

$$[4-6-2] \quad \hat{h}_\nu(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(M-1)}^M \nu(\hat{n}) R(n) \cos n\lambda$$

Cuando se toma $\nu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq M \\ 0 & \text{si } |n| > M \end{cases}$

4-6. VENTANAS ESPECTRALES

También se puede poner

$$I_{N_x}^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}(n) \cos n\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} R(n) e^{-in\lambda},$$

dando lugar, por inversión a

$$\hat{R}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} I_{N_x}^*(\lambda) e^{in\lambda} d\lambda$$

Sustituyendo esta expresión en el estimador $\hat{h}(\lambda)$ de $h(\lambda)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{h}_\nu(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{N_x}^*(\theta) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \nu(n) e^{-in(\lambda-\theta)} \right\} d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{N_x}^*(\theta) W(\lambda-\theta) d\theta \text{ siendo} \\ W(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \nu(n) e^{-in\theta} \end{aligned}$$

Como vimos, $I_{N_x}^*(\lambda)$ es un estimador muy fluctuante de $h(\lambda)$, aunque la integral

$$\hat{h}_W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_{N_x}^*(\theta) W(\lambda-\theta) d\theta$$

que produce el mismo efecto que la ponderación de la autocovarianza muestral, reduce notablemente las contribuciones de las colas.

Además, si $W(\theta)$ es una función periódica de periodo 2π , e integrable se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{h}_W(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{N_x}^*(\theta) W(\lambda-\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} e^{-in\lambda} \hat{R}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\lambda-\theta)} W(\lambda-\theta) d\theta = \\ [4-6-4] \quad &\frac{1}{2\pi} \nu(n) \hat{R}(n) e^{-i\lambda n} ; \text{ con } \nu(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} W(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Observamos que en [4-6-4], $\hat{h}_W(\lambda)$ depende de los coeficientes de Fourier $\nu(n)$ de $W(\theta)$, sólo para $|n| \leq N-1$; incluso aunque $W(\theta)$ pueda

tener coeficientes de Fourier no nulos para $|n| > N - 1$. Por tanto,

si $W^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \nu(n)e^{-in\theta}$, entonces

$\int_{-\pi}^{\pi} I_{N \times}^*(\theta)W(\lambda-\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} I_{N \times}^*(\theta)W^*(\lambda-\theta)d\theta$; debido a que $I_{N \times}^*(\theta)$ es un polinomio trigonométrico de grado $(N - 1)$. Es claro que si $\nu(n)$ es una función real par de n , entonces:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \nu(n)\cos n\theta$$

A la función $\nu(n)$ se la denomina ventana retardo, ("lag window") y a $W(\theta)$ ventana espectral.

Exponemos seguidamente las principales ventanas sintetizando sus propiedades. El resumen está extraído de la obra de Priestley [1981].

I VENTANA PERIODOGRAMA TRUNCADO O VENTANA RETARDO

RECTANGULAR

Se caracteriza porque su ventana retardo es

$$\lambda(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| \leq M \\ 0 & \text{si } |S| > M \end{cases}$$

y su función ventana es $W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M \cos n\theta =$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen}\left(M + \frac{1}{2}\right)\theta}{\text{sen}(\theta/2)} \right\} = D_M(\theta)$$

A $D_M(\theta)$ se le conoce con el nombre de nucleo de Dirichlet.

$$\exp(-iS\theta) = aD_M\left(\theta - \frac{\pi}{M}\right) + (1 - 2a)D_M(\theta) + aD_M\left(\theta + \frac{\pi}{M}\right)$$

V VENTANA DE TUKEY-HAMMING

Es un caso particular de la ventana general de Tukey. Su ventana retardo es:

$$\lambda(S) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi S/M) & \text{si } |S| \leq M \\ 0 & \text{si } |S| > M \end{cases}$$

VI VENTANA DE TUKEY-HANNING

Es otro caso particular de la ventana general de Tukey. En ella

$$\lambda(S) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 + \cos(\pi S/M)\} & ; \text{ si } |S| \leq M \\ 0 & ; \text{ si } |S| > M \end{cases}$$

y su correspondiente estimador espectral es:

$$\hat{h}_{TH}(\lambda) = \frac{1}{4} \hat{h}_0\left(\lambda - \frac{\pi}{M}\right) + \frac{1}{2} \hat{h}_0(\lambda) + \frac{1}{4} \hat{h}_0\left(\lambda + \frac{\pi}{M}\right)$$

con $\hat{h}_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S=-M}^M \hat{R}(S) \cos S\lambda$

VII VENTANA DE PARZEN

Su ventana retardo es:

$$\lambda(S) = \begin{cases} 1 - 6\left(S/M\right)^2 + 6\left(|S|/M\right)^3 & ; \text{ si } |S| \leq M/2 \\ 2\left(1 - |S|/M\right)^3 & ; \text{ si } M/2 < |S| \leq M \\ 0 & ; \text{ si } |S| > M \end{cases}$$

y su función ventana o ventana espectral es:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{S=-M/2}^{M/2} \left\{ 1 - 6\left(S/M\right)^2 + 6\left(|S|/M\right)^3 \right\} \cos S\theta + \right.$$

$$+ 2 \sum_{\substack{|S| \leq M \\ |S| > M/2}} \left(1 - \frac{|S|}{M} \right)^3 \cos S\theta = \frac{3}{8\pi M^3} \left(\frac{\text{sen}(M\theta/4)}{\frac{1}{2} \text{sen}(\theta/2)} \right)^4 \left[1 - \frac{2}{3} \text{sen}^2(\theta/2) \right]$$

VIII VENTANA DE BARTLET-PRIESTLEY

Su ventana retardo es $\lambda(S) = \frac{3M^2}{(\pi S)^2} \left\{ \frac{\text{sen}(\pi S/M)}{\pi S/M} - \cos(\pi S/M) \right\}$

y su función ventana ó ventana espectral es:

$$W(\theta) = \begin{cases} \frac{3M}{4\pi} \left\{ 1 - \left(\frac{M\theta}{\pi} \right)^2 \right\} & ; \text{ si } |\theta| \leq \pi/M \\ 0 & ; \text{ si } |\theta| > \pi/M \end{cases}$$

IX VENTANA LOMNICKI ZAREMBA

Su ventana retardo es:

$$\lambda^*(S) = \frac{R^2(S)}{\text{Var} \{ \hat{R}^*(S) \} + R^2(S)} ; \text{ siendo desconocido } R^2(S)$$

Lomnicki y Zaremba, sugirieron utilizar

$$\lambda^*(S) = \frac{\rho |S|}{\frac{1}{N - |S|} \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) + \rho |S|} ; \text{ con } 0 < \rho < 1$$

4-7 PROPIEDADES MUESTRALES DE LOS ESTIMADORES ESPECTRALES

Consideremos un estimador $h(\lambda)$, de la función espectral $\hat{h}(\lambda)$ definido por:

$$[4-7-1] \quad \hat{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(S) \hat{R}(S) e^{-iS\lambda} = \int_{-\pi}^{\pi} T_N^*(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta$$

$$\text{donde } W_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(S) e^{-iS\theta}$$

Suponemos que $\lambda_N(S)$ es una función par a valores reales, tal que implica que $W_N(\theta)$ cumple las propiedades siguientes:

(i) $W_N(\theta) \geq 0$; $\forall N$ y $\forall \theta$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\theta) d\theta = 1 \iff \lambda_N(\theta) = 1$; $\forall M$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta < \infty$; $\forall N$

(iv) Para cualquier $\epsilon > 0$; $W_N(\theta) \rightarrow 0$ uniformemente cuando $N \rightarrow \infty$; $\forall |\theta| > \epsilon$

(v) $\lim_{N \uparrow \infty} \left[\sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{|S|}{N} \right) \lambda_N^2(S) \right] / \left[\sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{|S|}{N} \right) \lambda_N(S) \right] = 0$

LEMA 4-7-1 $\lim_{N \uparrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta \leq K < \infty$; $\forall N$ entonces

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\theta) g(\theta) d\theta \right| \leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq K \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2} \quad \text{que cuando } N \uparrow \infty \text{ implicaría}$$

$$g(0) \leq K \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\theta) d\theta \right\}^{1/2}$$

Tomando $g(\theta) = \exp\left(-\theta^2/4\sigma^2\right)$, y eligiendo σ^2 adecuadamente se llega a contradicción.

Si en el teorema [5-4-2-4] tomamos $\phi_1(\theta) = W_n(\lambda_1 - \theta)$, y

$\phi_2(\theta) = W_N(\lambda_1 - \theta)$, cuando los datos cumplen las hipótesis de dicho teorema tenemos:

$$[I] \quad \lim_N E \left[\hat{h}(\lambda) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta = h(\lambda), \text{ siendo}$$

$$E \left[\hat{h}(\lambda) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta + o\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

$$[II] \quad N \text{ Var} \left[\hat{h}(\lambda) \right] \sim e \left\{ \left(h^2(\lambda) \right)^2 + 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) W_N(\lambda_1 - \theta) \cdot \left\{ W_N(\lambda_2 - \theta) + W_N(\lambda_2 + \theta) \right\} d\theta \right.$$

donde $\hat{h}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) W_N(\lambda_1 - \theta) d\theta$, donde e es el cumulante de

cuarto orden proceso residual.

$$[III] \quad N \text{ cov} \left\{ \hat{h}(\lambda_1), \hat{h}(\lambda_2) \right\} \sim e \hat{h}(\lambda_1) \hat{h}(\lambda_2) +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) W_N(\lambda_1 - \theta) \left\{ W_N(\lambda_1 - \theta) + W_N(\lambda_2 + \theta) \right\} d\theta$$

Se observa que el primer término es $O(1)$, mientras que el segundo tiende a infinito cuando $N \rightarrow \infty$.

Cuando $X(t)$ es un proceso Gaussiano, el primer término se anula automáticamente.

Puesto que $W_N(\lambda + \theta)$ converge a $\delta(\lambda - \theta)$ y

$W_N(\lambda + \theta)$ converge a $\delta(\lambda + \theta)$, el término:

$\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) W_N(\lambda - \theta) W_N(\lambda + \theta) d\theta$ tiende a cero cuando $N \uparrow \infty$, salvo que

$\lambda = 0$ ó $\lambda = \pm\pi$

Por tanto, llamando $\delta_{\lambda}(0, \pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = \pm\pi \\ 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ ó } \lambda \neq \pm\pi \end{cases}$

se puede escribir $\text{Var} \left[\hat{h}(\lambda) \right] \sim \left(1 + \delta_{\lambda}(0, \pi) \right) \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) W_N^2(\lambda - \theta) d\theta$

de donde se obtiene:

$$\lim_{N \uparrow \infty} \text{Var} \left[\hat{h}(\lambda) \right] = \left(1 + \delta_{\lambda}(0, \pi) \right) \frac{2\pi}{N} h^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_N^2(\theta) d\theta =$$

$$= \left(1 + \delta_{\lambda}(0, \pi) \right) h^2(\lambda) \frac{1}{N} \left\{ \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N^2(S) \right\}$$

que es una fórmula standard para estimar la varianza de la función de densidad espectral.

También tenemos que

$$\lim_{N \uparrow \infty} \text{cov} \left\{ \hat{h}(\lambda_1), \hat{h}(\lambda_2) \right\} = 0 ; \quad \forall \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Cuando se utilizan parámetros de escala se obtienen:

$$\frac{1}{M} \sum_{\gamma=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N^2(\gamma) = \frac{1}{M} \sum_{\gamma=-(N-1)}^{N-1} (\gamma/M) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du$$

cuando M y N tienden a infinito, por tanto podemos escribir:

$$\lim_{N \uparrow \infty} \left[\frac{N}{M} \text{Var} \left[\hat{h}(\lambda) \right] \right] = \left(1 + \delta_{\lambda}(0, \pi) \right) h^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du$$

y además

$$\lim_{N \uparrow \infty} \left[\frac{N}{M} \text{cov} \left\{ \hat{h}(\lambda_1), \hat{h}(\lambda_2) \right\} \right] = 0 ; \quad \forall \lambda_1 \neq \lambda_2$$

4-7-1 EXPRESIONES APROXIMADAS PARA EL SESGO

Sea $S_N(\lambda) = E \left[\hat{h}_N(\lambda) - h(\lambda) \right]$ el sesgo del estimador $\hat{h}_N(\lambda)$. Del desarrollo previo se obtiene:

$$S_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ h(\theta) - h(\lambda) \right\} W_N(\lambda - \theta) d\theta + o \left(\frac{\log N}{N} \right)$$

De la fórmula previa se obtiene

$$S_N(\lambda) \sim \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ h(\lambda - \theta) - h(\theta) \right\} W_N(\theta) d\theta$$

Puesto que $h(\lambda - \theta) - h(\lambda) \sim \theta h'(\lambda) + \frac{\theta^2}{2} h''(\lambda) + o(\theta^2)$,

y suponiendo que $E[\theta] = 0$ se obtiene

$$S_N(\lambda) \sim \frac{1}{2} h''(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 W_N(\theta) d\theta$$

Un tratamiento mas preciso y elegante del sesgo se obtiene utilizando ventanas con parámetros de escala.

Llamando $\lambda_N(\gamma/N)$ y tomando esperanzas tenemos:

$$\begin{aligned} S_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma=-(N-1)}^{N-1} \left\{ K\left(\frac{\gamma}{M}\right) \left(1 - \frac{|\gamma|}{N}\right) - 1 \right\} R(\gamma) e^{-i\gamma\lambda} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{|\gamma| \geq N}^{N-1} R(\gamma) e^{-i\gamma\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma=-(N-1)}^{N-1} \left\{ K\left(\frac{\gamma}{M}\right) - 1 \right\} R(\gamma) e^{-i\gamma\lambda} - \\ &- \frac{1}{2\pi N} \sum_{\gamma=-(N-1)}^{N-1} |\gamma| \left\{ K\left(\frac{\gamma}{M}\right) R(\gamma) e^{-i\gamma\lambda} - \frac{1}{2\pi} \sum_{|\gamma| \geq N}^{N-1} R(\gamma) e^{-i\gamma\lambda} \right\} \end{aligned}$$

Sea u el mayor entero mayor que cero tal que $K^{(u)} = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1-K(u)}{|u|^v} \right)$ existe, es finito y no nulo. Supongamos que $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |r|^q R(r) < \infty$ para $q \leq u$, y

que $(N/M^r) \rightarrow \infty$. Tomando límites, cuando $N \uparrow \infty$, en la expresión anterior de $S_N(\lambda)$, se observa que el segundo y tercer términos son nulos; ya que tienden a cero, según tiende a cero $o(M^{-u})$, uniformemente en λ , mientras que el primer término es asintóticamente igual a

$$-K^{(u)} M^{-u} h^{(u)}(\lambda) \text{ siendo } h^{(u)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |r|^{uu} R(r) e^{-ir\lambda},$$

siendo el sesgo asintóticamente igual a $b(\lambda) \sim -M^{-u} K^{(u)} h^{(u)}(\lambda)$.

$$H^*(\lambda) = \int_{\pi}^{\lambda} h(\theta) d\theta, \text{ donde } \hat{h}(\theta) \text{ es el estimador}$$

Versión alisada del periodograma con ventana de alisamiento $W_N(\theta)$. No obstante se puede obtener un estimador satisfactorio de $H(\lambda)$ integrando directamente el periodograma $I_N^*(\lambda)$, sin necesidad de aislamiento.

No obstante, abordaremos un problema mas general como es el

estimador de cantidad.

$$H_A = \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta)h(\theta)d\theta$$

donde $A(\theta)$ es una función fija, acotada e independiente del tamaño muestral N . En este caso particular de que $A(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq \theta \leq \lambda \\ 0 & \text{si } \theta > \lambda \end{cases}$ se

obtiene espectro integrado.

Suponemos que consideramos como estimador de H_A :

$$\hat{H}_A^* = \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta)\hat{h}(\theta)d\theta; \text{ con } \hat{h}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N^*(\phi)W_N(\theta - \phi)d\phi$$

lo que da lugar a $H_A^* = \int_{-\pi}^{\pi} I_N^*(\theta)A_N(\theta)d\theta$, donde

$$A_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\phi - \theta)A(\phi)d\phi.$$

Como $A(\phi)$ es una función acotada fija, (independientemente de N), mientras que $W_N(\theta)$ tiende a una función delta cuando $N \uparrow \infty$, se tiene que si M es grande y θ_0 es un punto de continuidad de $A(\theta)$ que $A_N(\theta_0) \sim A(\theta_0)$, y supuesto que $A(\theta)$ es continua casi seguro, se obtendría que

$$\hat{H}_A = \int_{-\pi}^{\pi} I_N^*(\theta)A(\theta)d\theta \text{ es esencialmente igual a}$$

$$H_A^* = \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi)\hat{h}(\phi)d\phi$$

De lo anterior, se deduce que un estimador del espectro integrado es :

$$\hat{H}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} I_N^*(\theta)d(\theta)$$

Como propiedades de este estimador, se tiene que:

$$\lim_{N \uparrow \infty} E \left[\hat{H}_N(\lambda) \right] = H(\lambda) \text{ , y}$$

$$\lim_{N \uparrow \infty} N \text{ cov} \left[\hat{H}(\lambda_1), \hat{H}(\lambda_2) \right] = eH(\lambda_1)H(\lambda_2) +$$

$$+ 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} A_{\lambda_1}(\phi)\bar{A}_{\lambda_2}(\phi)h^2(\phi)d\phi \text{ donde}$$

$$\bar{A}_{\lambda_2}(\phi) = \frac{1}{2} \left[\bar{A}_{\lambda_2}(\phi) + (-\phi) \right] \text{ y } e = \left\{ E[\varepsilon_t^4] - 3 \right\};$$

siendo ε_t el proceso residual.

Puesto que $A_\lambda(\phi)$ es una función acotada es claro que $\text{Var}[\hat{H}(\lambda)] = O(1/N) \rightarrow 0$ cuando $N \uparrow \infty$; de donde se deduce que $\hat{H}(\lambda)$ es un estimador consistente de $H(\lambda)$.

4-7-2 CONTRASTE DE BONDAD DE AJUSTE

Debido a la forma de trabajar de algunos test llamamos:

$$\hat{H}_+(\lambda) = 2 \int_0^\lambda I_N^*(\theta) d\theta$$

CONTRASTE DE GRENANDER Y ROSENBLATT

Grenander y Rosenblatt, propusieron el estadístico

$$\max_{0 \leq \lambda \leq \pi} \left[\sqrt{N} |\hat{H}_+(\lambda) - H_+(\lambda)| \right]$$

siendo N el número de observaciones y $\hat{H}_+(\lambda)$ el espectro integrado computado y $H_+(\lambda)$ el valor que la hipótesis nula supone para el espectro integrado.

El intervalo de confianza que define el test de Grenander y Rosenblatt es

$$H_+(\lambda) - a \sqrt{\frac{8\pi\hat{G}(\pi)}{N}} \leq H_+(\lambda) \leq \hat{H}_+(\lambda) + a \sqrt{\frac{8\pi\hat{G}(\pi)}{N}}$$

donde $\hat{G}(\pi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{S=-M}^M \hat{R}^2(S)$ y a se calcula de la forma

$$\lim_{N \uparrow \infty} \left[\frac{\max_{0 \leq \lambda \leq \pi} \sqrt{N} |\hat{H}(\lambda) - H(\lambda)|}{\sqrt{8\pi G(\pi)}} \leq a \right] = \Delta^{(1)}(a)$$

$$y \quad \Delta^{(1)}(X) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-k)^k \left[\phi\{(2k+1)x\} - \phi\{2k-1\}x \right]$$

Siendo $\phi(x)$ la función de distribución de la $N(0,1)$. Los valores de a se calculan de tablas.

CONTRASTE DE QUE H SEA EL ESPECTRO INTEGRADO DE UN RUIDO BLANCO

Se rechaza la hipótesis nula si el estadístico

$$\max_{0 \leq \lambda \leq \pi} \left| \frac{\hat{H}_+(\lambda)}{\sigma_x^2} - \frac{\lambda}{\pi} \right| > a \sqrt{\frac{2}{N}}; \text{ siendo } \Delta^{(1)}(a) = 1 - \alpha$$

y α el nivel de significación

TEST DE BARTLETT PARA EL ESPECTRO INTEGRADO NORMALIZADO

Un estimador natural de $\hat{F}_+(\lambda)$ es $\hat{H}_+(\lambda) / \hat{S}_x^2$, donde \hat{S}_x^2 denota la varianza muestral. Dicho estimador se puede escribir como

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\int_0^\lambda I_N^*(\theta) d\theta}{\int_0^\pi I_N^*(\theta) d\theta}$$

Aproximando la fórmula previa por

$$\hat{F}_+^{(\varepsilon)}(\lambda) = \frac{\sum_{q=1}^P I_{N, \varepsilon}^*(\lambda q)}{\sum_{q=1}^P I_{N, \varepsilon}^*(\lambda q)}; \quad \lambda q = \frac{2\pi q}{N}; \quad 1 \leq q \leq [N/2]$$

y $\hat{F}_+^{(\epsilon)}(\lambda p)$ tiene la misma distribución que la de las variables

$$W_q = \frac{\sum_{q=1}^p H_q}{\sum_{q=1}^m H_q}$$

donde H_1, \dots, H_m son independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial.

Si $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(m)} \leq 1$ es muestra aleatoria ordenada de una distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$; la distribución de $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(m)}$ coincide con la de W_1, W_2, \dots, W_m .

La distribución empírica de $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(m)}$ es $\hat{\Psi}(x) = k/m$ para $x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)}$ y se sabe que

$$\lim_{m \uparrow \infty} p \left[\max_x \sqrt{m} \left| \hat{\Psi}(x) - U(x) \right| \leq a \right] = \Delta^{(2)}(a)$$

donde $\Delta^{(2)}(a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \exp(-2a^2 j^2)$

Por tanto

$$\lim_{m \uparrow \infty} p \left[\max_p \sqrt{\frac{N}{2}} \left| \hat{F}_+^{(\epsilon)}(\lambda p) - \frac{p}{m} \right| \leq a \right] = \Delta^2(a)$$

Siendo $m = \{N/2\}$

Para $a = 1,36$; $\Delta^{(2)}(a) = 0,95$, mientras que para

$a = 1,63$; $\Delta^{(2)}(a) = 0,99$

La fórmula previa es el fundamento del test de Bartlett.

4-8. TECNICA INTERACTIVA DE ESTIMACION DE LA DENSIDAD ESPECTRAL

En los epígrafes previos hemos visto que la fórmula general para estimar la densidad espectral es

$$(4-7-1) \quad \hat{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(s) \hat{R}(s) e^{-is\lambda} = \int_{-M}^M I_M^*(\theta) W_N(\lambda-\theta) d\theta$$

siendo W_N la ventana espectral y $\lambda_{N_1}(s)$ el log retardo.

En este apartado damos métodos para estimar dicha densidad espectral combinando la fórmula (4-7-1) con el hecho de que todo proceso estacionario discreto, débilmente estacionario y de cuadrado integrable, se puede modelizar como un proceso autorregresivo ó de medias móviles infinito.

Si $B_k(z)$ es un operador autorregresivo operando sobre $X(t)$, de orden k ; de tal forma que

$$B_k(z) X(t) = Y(t)$$

resulta que tenemos dos métodos ó técnicas para estimar la densidad espectral $\hat{h}_X(\lambda)$ por 4-7-1, y otra mediante el cociente entre $\hat{h}_Y(\lambda)$ y $|B(e^{-i\lambda})|^2$ es decir, por

$$\hat{h}_X^*(\lambda) = \hat{h}_Y(\lambda) / |B(e^{-i\lambda})|^2$$

resultado que nos permite describir un algoritmo interactivo para lograr un mejor ajuste de la densidad espectral. Dicho algoritmo se puede esquematizar en los siguientes pasos

Paso 1. Estimar $h_X(\lambda)$ por (4-7-1).

Paso 2. Estimar el operador autorregresivo $B_k(z)$, por técnicas de regresión.

Paso 3. Evaluar $Y(t) = B_k(z)X(t)$

Paso 4. Evaluar por [4-7-1] $\hat{h}_Y(\lambda)$.

Paso 5. Calcular $B_k^1(z)$ de tal forma que

$$[V-5] \quad \|B_k^1(e^{-i\lambda}) \hat{h}_X(\lambda) - \hat{h}_Y(\lambda)\| \text{ sea mínimo}$$

Repetir iterativamente los pasos 3, 4 y 5 hasta la convergencia.

Paso 6. Modificar $\lambda_N(s)$ en 4-7-1 de tal forma que se minimice

[V-5], utilizando como $B_k^1(e^{-i\lambda})$ el operador obtenido despues de usar el proceso de convergencia.

Expuesto el esquema del algoritmo, queda el hecho de como calcular practicamente los distintos términos que en él intervienen.

El operador autorregresivo $B_k(Z)$ del paso 2, se estima resolviendo el problema

$$\text{Min} \sum_{t=k+1}^N \|X(t) - \sum_{j=1}^k a_j X(t-j)\|_*$$

donde * es una norma adecuada al problema La serie $Y(t)$ se calcula por diferencias

$$Y(t) = X(t) - \sum_{j=1}^k \hat{a}_j X(t-j)$$

y $\hat{h}_X(\lambda)$, $\hat{h}_Y(\lambda)$ se calculan por procedimientos habituales.

El calculo de $B_k^1(e^{-i\lambda})$ en el paso 5 del algoritmo, se puede realizar tomando como norma V-5, la del supremo; o bien, discretizando los valores de λ , adecuándolos a los valores de $\hat{h}_X(\lambda)$ y $\hat{h}_Y(\lambda)$, y estimando los parámetros autorregresivos por procedimientos de regresión habituales. En ambos casos, es conveniente ir modificando los coeficientes del polinomio de forma secuencial.

Para que cobre interés la modificación de $\lambda_N(s)$ en [V-5] conviene cambiar estos coeficientes en las estimaciones de $\hat{h}_Y(\lambda)$ y $\hat{h}_X(\lambda)$ de forma secuencia, y término a término. El proceso no tiene porqué converger globalmente, pero es claro que los coeficientes empleados en cada proceso individualmente considerado si convergen. La diferencia entre los coeficientes límites es de gran interés, para ver como influyen los distintos procesos autorregresivos sobre el proceso original. Queda pendiente para investigaciones futuras, estimar la influencia de dichas estimaciones sobre el proceso observado.

4-9 ANALISIS ESPECTRAL EN PROCESOS CONTINUOS

Sea $X(t)$ un proceso estacionario con parámetro discreto y de cuadrado integrable, y sea $h(\lambda)$ su función de densidad espectral. Según hemos visto en los epígrafes precedentes, dada una muestra x_1, x_2, \dots, x_N ; de N observaciones del proceso $X(t)$, una clase general de estimadores de la función de densidad espectral del proceso $X(t)$ es

$$[4-9-1] \quad \hat{h}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(r) \hat{R}(r) e^{-i\lambda r} \quad \text{siendo}$$

$$\hat{R}(r) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|r|} \left(X(t) - \bar{X} \right) \left(X(t + |r|) - \bar{X} \right) \quad \text{y} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X(t)$$

También vimos que dicha estimación se podía escribir como

$$[4-9-2] \quad \hat{h}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} I_{N, x-x}^*(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta; \quad \text{donde}$$

$$I_{N, x-x}^*(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N \left(X(t) - \bar{X} \right) e^{-i\theta t} \right|^2 \quad \text{es el}$$

periodograma de $X(t) - \bar{X}$; y

$$W_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(r) e^{-ir\theta} \quad \text{la ventana espectral}$$

correspondiente a la ventana retardo $\left\{ \lambda_N(r) \right\}$. Suponemos ahora que $X(t)$

es un proceso estacionario, de parámetro continuo y cuadrado integrable y con función de densidad espectral $h(\lambda)$. Suponiendo que podemos muestrear (observar), el proceso $X(t)$ cada Δt unidades. Nuestro problema consiste en decidir como estimar la función $h(\lambda)$ del proceso $X(t)$. Para resolver adecuadamente este problema debemos decidir sobre los siguientes apartados.

- 1) La forma matemática de la ventana retardo $\lambda_N(r)$, ó de su equivalente la ventana espectral $W_N(\theta)$.
- 2) Los valores de los parámetros M y N .

3) El valor de Δt , conocido con el nombre de intervalo o razón de muestras.

4) Como computar eficientemente $\hat{h}(\lambda)$, y en que puntos se debe evaluar.

Un fenómeno que se debe tener en cuenta en el proceso de estimación de $h(\lambda)$, es el conocido con el nombre de alisamiento.

Para explicar dicho fenómeno se parte de la ecuación

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_X(\lambda)$$

siendo $Z(\lambda)$ un proceso de incrementos ortogonales.

Llamando $Y(k) = X(k\Delta t)$ y aplicando la ecuación previa obtenemos.

$$\begin{aligned} Y(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda\Delta t} dZ_X(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/\Delta t}^{(2k+1)\pi/\Delta t} e^{ik\lambda\Delta t} dZ_X(\lambda) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{ik\Delta t(\lambda + \frac{2k\pi}{\Delta t})} dZ_X\left(\lambda + \frac{2k\pi}{\Delta t}\right) = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{ik\Delta t\lambda} dZ_Y(\lambda) \end{aligned}$$

donde $dZ_Y(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} dZ_X\left(\frac{2k\pi}{\Delta t}\right)$

Como se deduce de la ecuación previa, el proceso $Y(k)$ tiene una representación espectral que se extiende únicamente sobre el rango de frecuencias $\left[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t\right]$.

Este hecho se debe a que en la representación espectral del proceso $Y(k)$, no se distingue entre la contribución a la frecuencia de las funciones $e^{i\lambda t}$, y $e^{i[\lambda+2k\pi/\Delta t]t}$ ya que contribuyen de forma conjunta, alisando sus efectos.

Es claro que $h_x(\lambda)$ es función de densidad espectral del proceso $X(t)$, entonces la función de densidad espectral del proceso $Y(k)$ es:

$$h_Y(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_x\left(\lambda + \frac{2k\pi}{\Delta t}\right); \text{ si } |\lambda| \leq \frac{\pi}{\Delta t}$$

fórmula que se conoce con el nombre del teorema de alisamiento.

Si resulta que existe $\lambda_0 > 0$, tal que $h_x(\lambda) = 0$ para $|\lambda| \geq \lambda_0$; entonces podemos reproducir $h_x(\lambda)$ por $h_Y(\lambda)$, siempre que la razón de muestreo $\Delta t \leq \frac{\pi}{\lambda_0}$, siendo $\frac{\pi}{\lambda_0}$ es la mejor razón de muestreo posible, para que $h_Y(\lambda)$ reproduzca con exactitud $h_x(\lambda)$. A la frecuencia $\frac{\pi}{\lambda_0}$, se la conoce con el nombre de « Frecuencia Nyquist ».

Si hacemos el cambio en la frecuencia $\nu = \frac{\lambda}{2\pi}$, la frecuencia ν se mide en Herzios ó ciclos por segundo, y en esta escala de frecuencia, la densidad espectral de $h_Y(\lambda)$ se extiende entre $\left[\frac{-1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}\right]$

con otro cambio de escala en las frecuencias lograremos

$$Y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda'} dZ_Y\left(\frac{\lambda'}{\Delta t}\right)$$

Diremos que un muestreo está libre de alisamiento cuando $h_Y(\lambda) = h_x(\lambda)$; que equivale a que $h_x(\lambda)$ sea una función de banda acotada.

4-9-1 MEDIDAS DE PRECISION DE LAS ESTIMACIONES ESPECTRALES

Llamando $V(\lambda) = \text{var}\left\{\hat{h}(\lambda)\right\}$ y $\text{ses}(\lambda) = E\left\{\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)\right\}$, Parzen sugirió utilizar medidas de precisión:

(I) El rango del porcentaje de error Gaussiano de nivel α definido

por:

$$RP_{\alpha}(\lambda) = \gamma_{\alpha} \frac{V(\lambda)}{h(\lambda)} + \frac{|\text{ses}(\lambda)|}{h(\lambda)}$$

donde γ_{α} es tal que $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_{\alpha}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1-\alpha}{2}$

(II) El error medio cuadrático porcentual EMCP, definido por la fórmula:

$$EMCP^2(\lambda) = E\left[\frac{\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)}{h(\lambda)}\right]^2 = \frac{V(\lambda) + \text{ses}^2(\lambda)}{h^2(\lambda)}$$

Es claro que:

$$P\left[\frac{|\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)|}{h(\lambda)} \leq RP_{\alpha}(\lambda)\right] \leq 1 - \left\{\frac{EMCP(\lambda)}{RP_{\alpha}(\lambda)h(\lambda)}\right\}^2$$

fórmula ~~que denota~~ la relación entre ambos errores. Además, es cierto que si $\text{ses}(\lambda) = 0$, entonces $RP_{\alpha}(\lambda) = r_{\alpha} EMCP(\lambda)$. Si se usan las expresiones asintóticas para $V(\lambda)$ y $\text{Ses}(\lambda)$, dadas por las fórmulas.

$\lim_{N \uparrow \infty} \left[\frac{N}{M} \text{Var}(\hat{h}(\lambda)) \right] = \left(1 + \delta_{\lambda}(0, \pi) \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du$ es $(\lambda) \sim -M^{-r} k^{(r)}(\lambda)$

apropiadas en el uso de una función núcleo $K(u)$, tenemos que:

$$RP_{\alpha}(\lambda) = \gamma_{\alpha} \left\{ \frac{M}{N} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du \right\}^{1/2} + \frac{K^{(r)}}{M^{(r)}} \frac{1}{\{u^{(r)}(\lambda)\}^r}$$

donde r es el exponente característico de $k(u)$, para el cual el límite previo existe, es finito y no nulo, y $u^{(r)}(\lambda) = \left| \frac{h(\lambda)}{h^{(r)}(\lambda)} \right|^{1/r}$, siendo

$h^{(r)}(\lambda)$ la r -ésima derivada generalizada de $h(\lambda)$ definida por:

$$h^{(r)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{S=-\infty}^{\infty} |S|^r R(S) e^{-is\lambda}$$

Parzen denominó anchura espectral de orden r en la frecuencia λ , a la función $u^{(r)}(\lambda)$.

De forma similar podemos expresar:

$$E.M.C.P.^2(\lambda) = \frac{M}{N} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du \right\} + \left[\frac{K^{(r)}}{M^{(r)} \{u^{(r)}(\lambda)\}^r} \right]$$

fórmula que nos dice que ambas medidas de precisión dependen de $h(\lambda)$.

Una tercera medida de precisión, llamada razón de la señal al ruido, fué también introducida por Parzen, por la fórmula

$$\text{SNR}(\hat{h}(\lambda)) = \frac{E[\hat{h}(\lambda)]}{\text{Var.}(\hat{h}(\lambda))}$$

4-10 EL PAPEL DE LA VENTANA ESPECTRAL

Del epígrafe previo se deduce que la cantidad $u^{(r)}(\lambda)$ afecta tanto a la definición de $\text{RP}_\alpha(\lambda)$, como de $\text{EMCP}(\lambda)$.

Ahora bien $u^{(r)}(\lambda)$ es una función muy complicada de $h(\lambda)$, y por tanto complicada de estimar. No obstante en algunas situaciones se puede obtener una idea rigurosa del orden de magnitud de $\inf_\lambda \{u^{(r)}(\lambda)\}$, relacionando esta cantidad con el concepto físico de « anchura de banda ».

Para una función unimodal $h(\lambda)$, que alcanza el máximo en λ_0 , sean dos puntos λ_1 y λ_2 tales que $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ y $h(\lambda_1) = h(\lambda_2) = \frac{1}{2}h(\lambda_0)$; entonces se llama anchura de banda de h , a:

$$\text{AB}(h) = \lambda_2 - \lambda_1 \approx 2 \left| \frac{h(\lambda_0)}{h''(\lambda_0)} \right|^{1/2}$$

cuando $h(\lambda)$ es tal que el término de tercer orden de su desarrollo en serie de Taylor es despreciable.

Cuando K es un núcleo con exponente característico $r = 2$, se tiene que $h^{(2)}(\lambda) = h''(\lambda)$ y por tanto

$$u^{(2)}(\lambda) = |h(\lambda)/h''(\lambda)| = \frac{1}{2}\text{AB}(h) \Rightarrow \text{AB}(h) \approx 2u^{(2)}(\lambda).$$

Esta fórmula no es tan simple cuando el exponente característico r no es igual a 2.

Hemos visto previamente que cuando se utiliza un núcleo en la estimación de $h(\lambda)$ se tiene que

$$\text{Var}[\hat{h}(\lambda)] = O(m/N) \text{ y Sesgo}(\hat{h}(\lambda)) = O(1/M^r)$$

Por tanto $\text{Var}[\hat{h}(\lambda)]$ crece con M , mientras que Sesgo de $\hat{h}(\lambda)$ decrece, cuando M crece.

Si consideramos la ventana de Daniell

$$W_N(\theta) = \begin{cases} \frac{M}{2\pi} & ; \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{M} \\ 0 & ; \quad |\theta| > \frac{\pi}{M} \end{cases}$$

se tiene $V(\lambda) = \text{var}[\hat{h}(\lambda)] \sim \frac{M}{N} h^2(\lambda)$, y

$\text{Ses}(\lambda) = \text{SESGO}(\hat{h}(\lambda)) \approx -\frac{\pi^2}{6M^2} h''(\lambda)$, supuesto que h es dos veces

derivable. Ahora bien, utilizando la ventana de Daniell tenemos:

$$E[\hat{h}(\lambda)] \sim \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta = \frac{M}{2\pi} \int_{\lambda - \frac{\pi}{M}}^{\lambda + \frac{\pi}{M}} h(\theta) d\theta$$

Cuando $h(\lambda)$ tiene dos picos en λ_1 y λ_2 , y M es suficientemente pequeño como para que $\frac{2\pi}{M} > |\lambda_2 - \lambda_1|$, resulta que los dos picos en λ_1 y λ_2 se mezclan conjuntamente en la estimación de $h(\lambda)$, mediante $\hat{h}(\lambda)$, cuestión que se evita si $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{2\pi}{M}$. Este fenómeno va unido al concepto de resolubidad en óptica y otras ramas de la física, que denota el grado de detalle con que un dispositivo óptico (por ejemplo un microscopio), puede reproducir un objeto.

Otro problema, es el que lleva consigo la reproducción de cada uno de los picos de $h(\lambda)$ en su estimador $\hat{h}(\lambda)$. Para conseguirlo se

debe elegir M de tal forma que la anchura de $W_N(\theta)$ no sea mayor que la anchura de banda del pico mas estrecho. No obstante, si la anchura de $W_N(\theta)$ es estrecha, M debe ser grande lo que llevaría consigo que N debería ser muy grande. Estas consideraciones hacen ver la dificultad de definir adecuadamente el concepto de anchura de ventana, y como consecuencia, se obtiene que haya varias definiciones de dicho concepto. Entre ellas citaremos:

(1) Definición de puntos de Semi-Potencia.

Suponemos que $W_N(\theta)$ es una función par de θ que alcanza su máximo en $\theta = 0$. La anchura Semi-Potencia de $W_N(\theta)$ se define como:

$$A_{SP} = 2\theta_1$$

donde θ_1 es tal que $W_N(\theta_1) = W_N(-\theta_1) = \frac{1}{2}W_N(0)$,

cuando θ_2 es el primer cero, la interpolación lineal rigurosa hace $2\theta_1 = \theta_2$

(2) Definición de Parzen

Parzen mide la anchura de ventana AV_p , como la anchura de una ventana rectangular que tenga el mismo área que $W_N(\theta)$ y la misma

altura que $W_N(\theta)$ en $\theta = 0$. Por tanto $AV_p = \frac{1}{W_N(\theta)}$

(3) Definición de Jenkins

Jenkins define la anchura de ventana, como la anchura de una ventana rectangular que produce una estimación con la misma varianza asintótica que la correspondiente a $W_N(\theta)$. Esto induce que:

$$AV_J = \frac{2\pi}{\sum_S \lambda_N^2(S)} \sim \frac{2\pi}{M \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du} \text{ donde } \lambda_N(S) = K(SLM).$$

es el parámetro de escala.

(4) Definición de Grenander

Grenander definió la anchura de ventana como la desviación típica de una variable aleatoria, que tuviera a $W_N(\theta)$ como la densidad generalizada, obteniendo así:

$$AV_G = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 W_N(\theta) d\theta \right\}^{1/2}$$

(5) Definición de Brillinger

Define la anchura de ventana en el contexto de un núcleo general, obteniendo la fórmula

$$AV_B \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\theta) W_N(\theta) d\theta \right\}; \text{ siendo}$$

$$\lambda_N(S) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) W_N(\theta) d\theta$$

(6) Definición

Sea $W_N(\theta)$ una ventana espectral con parámetro de escala, cuya ventana retardo correspondiente tiene exponente característico r y sea

$$K^{(r)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - K(S)}{|S|^r} \right\}$$

donde r es el mayor entero para el cual el límite previo existe, es finito y no nulo.

La anchura de ventana de $W_N(\theta)$ se define por:

$$AV_W = C \left\{ \frac{1}{M^r} K^{(r)} \right\}^{1/r} = \frac{2V_6}{M} \left\{ K^{(r)} \right\}^{1/r}$$

ANCHURAS DE VENTANAS STANDARD (PRIESTLEY)

VENTANA	r	$K^{(r)}$	AV_W	ASP	AV_P	AV_J
---------	-----	-----------	--------	-----	--------	--------

BARLETT	1	1	4,9/M	2π/M	2π/M	3π/M
DANIELL	2	π ² /M	2π/M	2π/M	2π/M	2π/M
PARZEN	2	6	12/M	4π/M	8π/3M	3,72π/M
TUKEY- -HANNING	2	π ² /4	2,45π/M	2π/M	2π/M	8π/3M
TUKEY- -HAMMING	2	0,23π ²	2,35π/M	2π/M	2π/M	2,52π/M
BARTLETT- -PRIESTLEY	2	π ² /10	1,55π/M	1,41π/M	4π/3M	5π/3M

La relación:

$$\text{Varianza } \left(\hat{h}(\lambda) \right)_{\text{AW}_w} = \left(\frac{2V_6}{N} \right) \left\{ K^{(\Gamma)} \right\}^{1/\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du \right\} \approx \text{constante, nos}$$

dice que para N fijo, no se puede obtener simultaneamente bajos valores arbitrarios para ambos la varianza y al anchura de ventana. Por tanto si elegimos M pequeño para tener una varianza pequeña, tendremos una anchura de ventana grande y reciprocamente. Este hecho tiene alguna similitud con el principio de incertidumbre de Heisenberg en mecánica cuántica. Relacionando la anchura de banda ó ventana con la "resolubilidad" y la varianza con la "fiabilidad" se puede formular el principio de incertidumbre de estimación espectral como: « La fiabilidad y la resolubilidad son antagónicos ».

4-11 DISEÑOS RELACIONADOS CON ESTIMACIONES ESPECTRALES.

ELECCION DE PARAMETROS DE LA VENTANA, LONGITUD DE REGISTRO

F INTERVALOS DE FRECUENCIA

I) Longitud ilimitada de Registros. Suponemos que podemos elegir de

forma arbitraria los valores de M y N. En este caso, la estrategia básica consiste en seleccionar M para que la estimulación tenga un grado (prescrito) de resolución, determinando después N para obtener una precisión determinada. Con respecto a la primera cuestión, si $h(\lambda)$ tiene varios picos; por ejemplo en las frecuencias $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, con $\lambda_i < \lambda_{i+1}$; \forall_i ; entonces la anchura de ventana crítica $A_h = \min |\lambda_{i+1} - \lambda_i|$; $i = 1, 2, \dots, q-1$. Además, si $\hat{h}(\lambda)$ quiere recomponer la forma global de $h(\lambda)$, entonces la anchura de banda, o ventana crítica debe de ser $A_h = AV_h$; donde $AV_h = \left\{ \inf. |h(\lambda)/h''(\lambda)|^{1/2} \right\}$ supuesto que $h(\lambda)$ es dos veces diferenciable.

Teniendo en cuenta el razonamiento previo se debe elegir

$$AV_w = \alpha A_h \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

siendo α tanto mas pequeño cuanto mejor queramos reproducir la forma de $h(\lambda)$; observando que el valor mayor de A_h se corresponde con el valor mayor de M. Elegido M, se puede calcular N para que $\hat{h}(\lambda)$ adquiera un grado de precisión determinado.

Tomando como medida natural de precisión el valor

$$RP_\alpha(\lambda) = \theta \frac{V(\lambda)}{\alpha h(\lambda)} + \frac{|Ses(\lambda)|}{h(\lambda)}$$

evaluada por:

$$4-11-(I) \quad RP_\alpha(\lambda) = r_\alpha \left[\frac{M}{N} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du \right]^{1/2} + \frac{K^{(r)}}{M^r} \frac{1}{[u^{(r)}(\lambda)]^r}$$

donde r es el exponente característico de K(u), ó mayor entero para el

cual $K^{(r)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - K(s)}{|s|^r} \right\}$ existe, es finito y no nulo; y

$u^{(r)}(\lambda) = \left| \frac{h(\lambda)}{h^{(r)}(\lambda)} \right|^{1/r}$; siendo $h^{(r)}(\lambda)$ la r-ésima derivada

generalizada de $h(\lambda)$ definida por:

$$h^{(r)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} |s|^r R(s) e^{-is\lambda}$$

Por tanto si en la fórmula de $RP_{\alpha}(\lambda)$ sustituimos $u^{(r)}(\lambda)$ por una cota inferior, el valor de N proporcionará el grado de precisión requerida sobre las porciones más difíciles del espectro.

Para un parámetro de escala general, que define la ventana $W_N(\theta)$ con exponente característico r, podemos expresar:

$$I_w = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du, \text{ y } AV'_w = 2\sqrt{6} \left\{ k^{(r)} \right\}^r$$

De $AV_w = \frac{2\sqrt{6}}{M} \left\{ K^{(r)} \right\}^{1/r}$ vemos que AV'_w coincide con AV_w , cuando $M = 1$, y por tanto a AV'_w se le llama de anchura de la ventana estandarizada.

Partiendo de la fórmula (4-11-(I)), $RP_{\alpha}(\lambda)$ se puede escribir como:

$$r_{\alpha} = \sqrt{\frac{I_w M}{N}} + \frac{1}{M^2} \left\{ \frac{AV'_w}{2\sqrt{6} u^{(2)}(\lambda)} \right\}^2 = RP_{\alpha}(\lambda)$$

y sustituyendo $u^{(2)}(\lambda)$ por su cota inferior, $\frac{1}{2} A_h$, donde

$A_h = \left\{ \inf. \left(|h(\lambda)| \right) \right\}^{1/2}$; supuesto que $h''(\lambda)$ es dos veces diferenciable,

se obtiene

$$RP_{\alpha}(\lambda) = r_{\alpha} \sqrt{\frac{I_w M}{N}} + \frac{1}{6M^2} \left| \frac{AV'_w}{A_h} \right|^2$$

Este procedimiento solo es válido cuando $\frac{1}{6M^2} \left| \frac{AV'_w}{A_h} \right|^2$ es pequeño con

el valor elegido de $RP_{\alpha}(\lambda)$.

Despejando N en la fórmula previa obtenemos:

$$N = \frac{r_{\alpha}^2 I_w M}{\left\{ RP_{\alpha}(\lambda) - \frac{1}{6M^2} \left\{ \frac{AV'_w}{A_h} \right\}^2 \right\}^2}$$

y el valor de M que minimiza N es

$$M_{\min} = \left[\frac{5}{6RP_{\alpha}(\lambda)} \right]^{1/2} \frac{AV'_w}{A_h} \text{ de donde se obtiene}$$

$$Nm_{\min} \left(\frac{25\sqrt{5}}{16\sqrt{6}} \right) \frac{r_{\alpha}^2}{\left[RP_{\alpha}(\lambda) \right]^{5/2} A_h} \left(AV'_w I_w \right)$$

4-11-1 REGISTROS CON LONGITUDES FIJAS.

Si conocemos N, la longitud de registros de la serie temporal y este es fijo, no podemos estimar $h(\lambda)$ de tal forma que mantenga conjuntamente y a la vez unos niveles determinados de resolución y precisión. Aún, con todo, debemos decidir sobre el tamaño mas adecuado de M. Como no se puede controlar conjuntamente por su antagonismo, se debe buscar un equilibrio o solución de compromiso entre ambos objetivos.

Puesto que:

$$EMCP^2(\lambda) = \frac{V(\lambda) + \text{Ses}^2(\lambda)}{h^2(\lambda)} = g(\lambda, M)$$

El objetivo es hallar M que minimice alguna función criterio u objetivo de $g(\lambda, M)$.

En el caso particular de la ventana de Daniell:

$$EMCP^2(\lambda) = \frac{M}{N} + \frac{4\pi^4}{9M^4 AV_h^4}$$

que es independiente de λ , y por tanto el valor de M que minimiza

$$EMCP^2(\lambda) \text{ es } M = \left[\frac{16\pi^4 N}{9AV_h^4} \right]^{1/5}$$

La bondad con que podemos elegir M, depende fuertemente del

conocimiento de $g(\lambda, M)$, así como de los estimadores de las cantidades desconocidas, como por ejemplo, AV_h que intervienen en su evaluación.

4-11-2 PREBLANQUEO O PREFILTRADO

La parte mas difícil de estimar de una función de densidad espectral es la que contiene picos muy afilados. En esos valores de las frecuencias, la constante M , y por tanto N , deben ser muy grandes, con el fin de mantener la varianza en un nivel razonable; ya que si M y N son fijos, la varianza debe ser sustancial en la región de los picos. Por otra parte si el proceso es un ruido blanco, entonces $h(\lambda)$ es constante, y como consecuencia:

$$E\left[\hat{h}(\lambda)\right] \sim \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)W_N(\lambda - \theta)d\theta = h(\lambda)$$

independientemente de $W_N(\theta)$, con tal de que

$$\int_{[-\pi, \pi]} W(\theta)d\theta = 1$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el método de preblanqueo, consiste en alisar los datos de la serie original, mediante un filtro adecuado, con el fin de obtener un proceso próximo al ruido blanco.

Si llamamos $Y(t) = \sum_k a(k)X(t - k)$, la relación entre las densidades de ambos procesos se mide por:

$$h_Y(\lambda) = |H(\lambda)|^2 \text{ donde } H(\lambda) = \sum_k a(k)e^{-i\lambda k}$$

Si el filtro fuera adecuadamente elegido, e $Y(t)$ fuera casi un ruido blanco, tendríamos que

$$h_x(\lambda) = |H(\lambda)|^{-2}h_Y(\lambda) ; \text{ y por tanto } |H(\lambda)| \propto h_x^{-1}(\lambda),$$

cuestión que nos informa sobre la dificultad de elegir un filtro adecuado.

Por otra parte, si $h_x(\lambda)$ tiene picos muy afilados, debe suceder que $\left\{a(k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tenga unas colas muy largas, hecho que implica que $Y(t)$ no puede ser bien evaluado con los datos $X(t)$, a menos que se disponga de un gran número de registros $X(t)$.

Es interesante observar la relación

$$\hat{h}_x(\lambda) = |H(\lambda)|^2 \int_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)|^{-2} I_{N,x}^*(\theta) W_N(\lambda - \theta) d\theta$$

que modifica los estimadores clásicos de $h_x(\lambda)$.

4-11-3 METODO TAPERING

El objetivo de esta técnica es reducir el sesgo en la estimación de $h_x(\lambda)$, sesgo debido al periodograma. El valor esperado de $\hat{h}(\lambda)$ se puede escribir como:

$$E\left[\hat{h}(\lambda)\right] = \int_{-\pi}^{\pi} E\left[I_{N,x-x}^*(\theta)\right] W_N(\lambda - \theta) d\theta.$$

y en la discusión sobre el sesgo asintótico, se ignora el sesgo debido al periodograma y se reemplaza por

$$E\left[\hat{h}(\lambda)\right] \sim \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda) W_N(\lambda - \theta) d\theta.$$

No obstante el sesgo debido al periodograma que es del orden $O\left[(\log N)/N\right]$, es despreciable cuando se le compara con el sesgo debido a la ventana alisada $W_N(\theta)$ que es del orden de $O(1/M^r)$. No obstante, cuando la ventana tiene discontinuidades, se puede corregir el sesgo del periodograma como sigue:

Se transforman las observaciones X_1, X_2, \dots, X_N en un nuevo conjunto de observaciones $\{Y_t\}$ escribiendo:

$$Y_t = h_t X_t ; t = 1, 2, \dots, N$$

donde $\{Y_t\}$ es una sucesión adecuada de constantes llamadas (taper), (fader) ó datos ventana. En la estimación de la función de densidad espectral de $X(t)$, se reemplaza el periodograma $I_{N, x-x}^*(\theta)$ por

$$|d_N(\theta)|^2 \text{ donde } d_N(\lambda) = \frac{1}{H^{1/2}} \sum_{t=1}^N \left(Y(t) - h_t \tilde{X} \right) e^{-i\lambda t}$$

siendo

$$\tilde{X} = \left(\sum_{t=1}^N Y(t) \right) / \left(\sum_{t=1}^N h(t) \right) ; \text{ y } H = 2\pi \sum_{t=1}^N h_t^2$$

cuando $h(t) = 1 ; \forall t ; |d_N(\lambda)|^2$ coincide con $I_{N, x-x}^*(\theta)$.

Para ver el efecto de esta transformación suponemos que $E(X_t) = 0$ y usamos la representación espectral:

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda)$$

De esta representación y llamando

$$H(\lambda) = \frac{1}{H^{1/2}} \sum_{t=1}^N h_t e^{i\lambda t}, \text{ se deduce que}$$

$$d_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} H(\theta - \lambda) dZ(\theta) \text{ Haciendo uso del hecho de que el proceso}$$

$Z(\lambda)$ es de incrementos ortogonales tenemos:

$$E \left[|d_N(\lambda)|^2 \right] = \int_{-\pi}^{\pi} |H(\theta - \lambda)|^2 E \left[|dZ(\lambda)|^2 \right] = \int_{-\pi}^{\pi} |H(\theta - \lambda)|^2 h(\lambda) d\lambda$$

si como estimador de $h(\lambda)$ utilizamos a:

$$\hat{H}^*(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} |d_N(\theta)|^2 W_N(\lambda - \theta) d\theta \text{ hallamos que:}$$

$$E \left[\hat{h}^*(\lambda) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} W_N^*(\lambda - \theta) h(\theta) d\theta$$

$$\text{donde } W_N^*(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} |H(\phi - \theta)|^2 W_N(\phi) d\phi$$

El resultado de esta operación sobre los datos es reemplazar el nucleo

de Fejer $F_N(\theta) = \frac{1}{2\pi N} \left\{ \frac{\text{sen}(N\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2)} \right\}^2$ por la función mas general

$|H(\theta)|^2$, que coincide con el nucleo de Fe'jer cuando $h_t = 1$, para $t = 1, 2, \dots, N$; teniendo como objetivo elegir una sucesión $\{h_t\}$ de tal forma que $|H(\theta)|^2$ tenga lóbulos laterales mas pequeños que $F_N(\theta)$.

Observando que $W_N^*(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{S=-(N-1)}^{N-1} \lambda_N(S) \hat{h}_S e^{-i\phi S}$,

vemos que $W_N^*(\phi)$ es la convolución de $W_N(\theta)$ y $|H(\theta)|^2$;

siendo $|\hat{h}_S|$ los coeficientes de Fourier de $|H(\theta)|^2$.

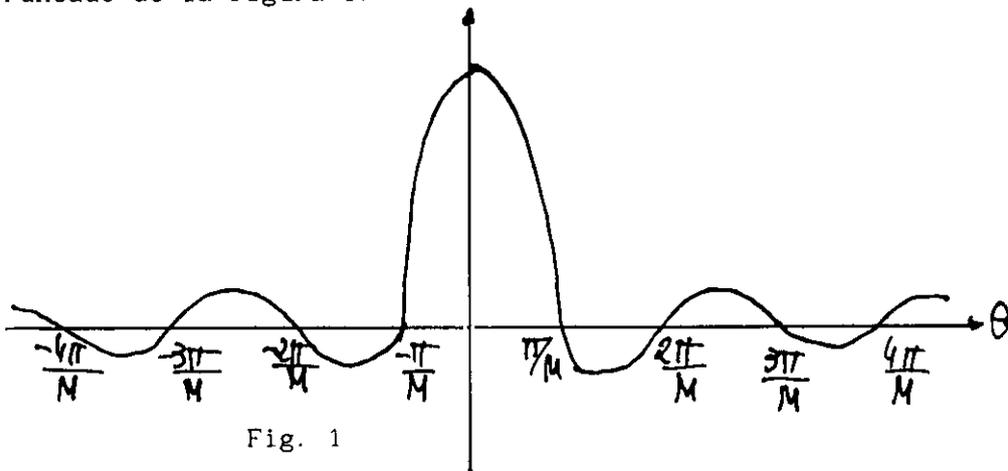
Para datos no transformados $|H(\theta)|^2 = F_N(\theta)$,

$\hat{h}_S = \left(1 - \frac{|S|}{N}\right)$ y $W_N^*(\phi)$ es la n-suma parcial Cesareo de la serie de Fourier de $W_N(\phi)$.

Los valores $h(t)$ de la transformación continua deben ser elegidos de una función $\varphi(u)$ tal que $\varphi(0) = \varphi(N) = 0$; y que en el intervalo $[0, N]$ φ sea positiva. En este supuesto se coloca $h(t) = \varphi(t)$; $t = 0; 1; 2; \dots, N$.

4-12 ELECCIONES DE LA VENTANA

Sabemos que para una ventana general $W_N(\theta)$, $E\{\hat{h}(\lambda)\}$ es una media ponderada de $h(\theta)$ por $W_N(\lambda - \theta)$. Si consideramos el periodograma truncado de la figura 1.



observamos que tiene un lóbulo centrado en $\theta = 0$, y lóbulos alternativos, positivos y negativos, centrados en

$$\theta = \pm \frac{k\pi}{2M + 1} \text{ con } k \text{ impar}$$

con esta ventana deberá haber una contribución a $E[\hat{h}(\lambda)]$ de los valores de $h(\theta)$ en $\theta = \lambda + \frac{(2k + 1)\pi}{2M + 1}$, contribución que afecta notablemente al valor de $E[\hat{h}(\lambda)]$. Este efecto se conoce con el nombre de (leakage) y la idea consiste en que la ventana permita a valores de $h(\theta)$, para θ fuera del lóbulo principal, contribuir al valor de $E[\hat{h}(\lambda)]$, y esta idea se puede utilizar en la selección de la ventana, teniendo como función objetivo minimizar el (leakage).

Se han realizado varias críticas al tomar como función objetivo la minimización del (leakage). Entre ellas podemos citar:

- (i) Evitar dicho efecto, nos llevaría a considerar como ventana ideal una parecida a la de Daniell, ya que no tendría lóbulos laterales.
- (ii) El grado de distorsión producido por los lóbulos laterales, se puede controlar eligiendo M adecuadamente.
- (iii) Este efecto mide solo un aspecto; no el mas importante, de los objetivos a alcanzar con la ventana, pues no es el único aspecto que influye sobre el sesgo y la varianza.

Entre las funciones objetivos sugeridos para medir la bondad de una estimación de $h(\lambda)$ podemos citar:

A₁) ERROR MINIMO CUADRATICO INTEGRADO

$$M_1 = \int_{-\pi}^{\pi} E\left\{\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)\right\}^2 d\lambda$$

A₂)

MAXIMO ERROR CUADRATICO ESPERADO

$$M_M = \left[\text{Máx}_{\lambda} \left\{ |\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)| \right\} \right]^2 d\lambda$$

Parzen demostró que $P \left[\text{Máx}_{\lambda} \left\{ |\hat{h}(\lambda) - h(\lambda)| > \varepsilon \right\} \right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M_M$

$\forall \varepsilon > 0$, hecho que permite construir bandas de confianza para la función de densidad espectral.

A₃)

MAXIMO ERROR CUADRATICO MEDIO RELATIVO

Sea $ECM = E \left[\hat{h}(\lambda) - h(\lambda) \right]^2 = \text{Var} \left\{ \hat{h}(\lambda) \right\} + \left[\text{Sesgo} \left[\left(\hat{h}(\lambda) \right) \right] \right]^2$,

$$\text{y, } EMCP^2(\lambda) = \frac{V(\lambda) + \left[\text{Sesgo}(\lambda) \right]^2}{h(\lambda)}$$

$$\text{y, } M_R = \text{máx}_{0 < \lambda < \pi} \left\{ \eta^2(\lambda) \right\}.$$

Asintóticamente tenemos que

$$EMCP^2(\lambda) \sim \frac{M}{N} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du + \frac{1}{M^{2r}} \left\{ K^r \right\}^2 \left\{ \frac{1}{u^{(r)}(\lambda)} \right\}^{2r}$$

donde r es el exponente característico de $K(u)$

y $K^{(r)}$ se define como

$$K^{(r)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - k(s)}{|s|^r} \right\} \text{ siendo } r \text{ el mayor entero para el cual el}$$

límite previo existe, es finito y no nulo.

$u^{(r)} = \left| h(\lambda) / h^{(r)}(\lambda) \right|^{1/r}$ es la anchura espectral de orden r .

Llamando $\lambda_0^r = \inf_{\lambda} \left\{ u^{(r)}(\lambda) \right\}$ se tiene:

$$M_R \sim \frac{M}{N} I_w + \frac{1}{M^{2r}} \left\{ \frac{AV'_w}{2\sqrt{6} \lambda_0^{(r)}} \right\}, \text{ siendo el valor de } M \text{ que}$$

minimiza M_R igual a:

$$M = \left[2r \left\{ \frac{AV'_w}{2\sqrt{6} \lambda_0^{(r)}} \right\}^{2r} \frac{N}{I_w} \right]^{1/2r+1}$$

A₄)

PROPIEDADES DE OPTIMALIDAD DE LA VENTANA CUADRÁTICA

En las ventanas con $r = 2$,

$$AV'_w \left\{ K^{(2)} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 K(\theta) d\theta \right\}^{1/2}$$

siendo $K(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u) e^{-iu\theta} du$ el generador de la ventana

espectral. Puesto que $I_w = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\theta) d\theta$ y por tanto hallar la

forma funcional $K(\theta)$, que minimiza $(AV'_w \cdot I_w)$ se reduce a hallar la

forma funcional que minimiza

$$C_K = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\theta) d\theta \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 K(\theta) d\theta \right\}^{1/2}$$

Ahora bien el generador de ventana de Bartlett-Priestley

$$K_0(\theta) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^2 \right\} & ; |\theta| \leq \pi \\ 0 & ; |\theta| > \pi \end{cases}$$

minimiza $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\theta) d\theta$ entre las funciones $K(\theta)$ no negativas tales

que verifican:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 K(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 K_0(\theta) d\theta, \text{ y } K(\theta) \geq 0$$

hecho que implica la minimización condicional de C_K .

4-13 SEPARACION DE TENDENCIA Y AJUSTE ESTACIONAL

En las discusiones previas hemos supuesto que $X(t)$ era un proceso estacionario débil ó de segundo orden, hecho que implicaba que $E[X(t)]$ es constante y $E\left[\left(X(t+h) - \mu \right) \left(X(t) - \mu \right) \right] = p(h)$. No obstante hay muchos procesos que no se ajustan a dicho modelo. Si observamos datos que se ajustan al modelo

$$X(t) = \mu(t) + Y(t).$$

Siendo $Y(t)$ un proceso estacionario de segundo orden de media cero, debemos primero estimar el espectro de

$$\hat{Y}(t) = X(t) - \mu(t).$$

Cuando se conoce la forma funcional de $\mu(t)$; $\hat{\mu}(t)$ se calcula por regresión.

Suponemos que disponemos de una serie de funciones conocidas

$\{\phi_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$; tales que $\mu(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(\mu) \phi_i(t)$ y que cumplen las

siguientes condiciones:

$$(1) \quad \Psi_r(n) = \sum_{i=1}^n |\phi_r(i)| \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ para cada } r$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_r(n+1)}{\Psi_r(n)} = 1; \quad \forall r$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \phi_r(t+h) \phi_s^*(t)}{\{\Psi_r(n) \Psi_s(n)\}^{1/2}} = R_{rs}(h)$$

(4) La matriz $R(0)$ es no singular

Para el modelo de regresión escribimos:

$$X = \phi\theta + Y$$

$$\text{donde } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}; \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_r(1) \\ \vdots \\ \phi_r(n) \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q)$$

El estimador $\hat{\theta}^*$ de θ lo podemos escribir como

$$\hat{\theta}^* = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T X = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T [\phi\theta + Y] = \theta + AY$$

$$\text{donde } A = (\phi^T \phi)^{-1} \phi$$

$$E(\hat{\theta}^* - \theta)(\hat{\theta}^* - \theta)^T = A \sum_y A^T = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \sum_y \phi(\phi^T \phi)^{-1}$$

La estimación de θ por mínimos cuadrados pasados de lugar al siguiente resultado:

$$\hat{\theta} = \left(\phi^T \sum_y^{-1} \phi \right)^{-1} \phi^T \sum^{-1} X = \theta + \left(\phi^T \sum_y^{-1} \phi \right)^{-1} \phi^T \sum_y^{-1} Y$$

$$y \quad E \left(\hat{\theta} - \theta \right) \left(\hat{\theta} - \theta \right)^T = \left(\phi^T \sum_y^{-1} \phi \right)^{-1}$$

Otras formas de actuar sobre las tendencias son:

1) Si el proceso $Y(t)$ tiene una tendencia de grado $q-1$, entonces el proceso $Y(t) = [1 - B]^q [X(t)]$ donde 1 es el operador identidad y B es el proceso diferencia hacia atrás, se obtiene que $Y(t)$ es un proceso estacionario.

2) Si $X(t)$ tiene una tendencia estacional periodica de periodo S, la transformación

$$\left[1 - B^S \right] \left[X(t) \right] = Y(t).$$

elimina dicha tendencia estacional y convierte a $Y(t)$ en un proceso estacionario.

3) Si $X(t)$ es periodica con periodo $S = 2r + 1$, se puede eliminar dicha tendencia mediante la transformación o filtro:

$$Y'(t) = \frac{1}{(2r + 1)} \left(X(t - r) + \dots + X(t) + \dots + X(t + r) \right)$$

4) Una versión mas general de dicho filtro es:

$$Y'(t) = \frac{1}{2r + 1} \sum_{u=-r}^r X(t - Su).$$

CAPITULO V

ESTIMACION ESPECTRAL EN PROCESOS
ALEATORIOS BIVARIANTES.

ESTIMACION ESPECTRAL EN PROCESOS ALEATORIOS BIVARIANTES.

5.1. INTRODUCCIÓN.

Antes de proceder a la estimación del espectro en un proceso aleatorio estacionario bivalente, es preciso realizar un estudio previo sobre pares de series de tiempo en procesos aleatorios, definiendo la función de correlación cruzada, que mida la correlación entre los dos procesos en diferentes tiempos t y $t+u$ y la función de covarianza cruzada, que después se mostrará como una generalización de lo expuesto en el capítulo IV en cuanto a su transformada de Fourier dá el espectro cruzado muestra, es decir, que, la función de varianza cruzada y el espectro muestra cruzado forman un par de transformadas de Fourier.

5.2. FUNCIÓN DE COVARIANZA CRUZADA PARA UN PROCESO ESTACIONARIO BIVARIANTE. PROPIEDADES.

Sea la serie de tiempo bivalente observada $\{X_1(t), X_2(t)\}$ considerada como la realización de un proceso aleatorio bivalente $\{X_1(t), X_2(t)\}$. Las cuatro variables aleatorias $X_1(t), X_2(t); X_1(t+u); X_2(t+u)$ para un tiempo t y $t+u$, tienen asociada una función de probabilidad, para la que puede expresarse su primero y segundo momento. Al ser estacionario el proceso estos momentos son funciones de la diferencia de tiempos y no del tiempo absoluto t .

El primer momento puede escribirse como:

$$E[X_i(t)] = \mu_i ; i = 1, 2$$

independiente de t y el segundo momento de la función de probabilidad conjunta de la *función de autocovarianza* que tiene la expresión

$$\gamma_{x_1 x_1}(u) = E\left[(X_1(t) - \mu_1)(X_1(t+u) - \mu_1)\right]$$

$$\gamma_{x_2 x_2}(u) = E\left[(X_2(t) - \mu_2)(X_2(t+u) - \mu_2)\right]$$

La función de *covarianza cruzada* viene dada por

$$\gamma_{x_1 x_2}(u) = E\left[(X_1(t) - \mu_1)(X_2(t+u) - \mu_2)\right]$$

$$\gamma_{x_2 x_1}(u) = E\left[(X_2(t) - \mu_2)(X_1(t+u) - \mu_1)\right]$$

La función $\gamma_{x_1 x_2}(u)$ se llama función de covarianza cruzada de diferencia u .

Se utiliza la notación $\gamma_{11}(u)$; $\gamma_{22}(u)$; $\gamma_{12}(u)$ y $\gamma_{21}(u)$ para designar las funciones de autocovarianza y la notación $\gamma_{x_1 x_1}(u)$; $\gamma_{x_2 x_2}(u)$; $\gamma_{x_1 x_2}(u)$ y $\gamma_{x_2 x_1}(u)$ para designar las funciones de covarianza cruzada respectivamente.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE COVARIANZA

En un proceso real bivalente, se verifica que:

$$1^\circ) \gamma_{11}(0) = \text{Var}\left[X_1(t)\right] = \sigma_{x_1}^2; \quad i = 1, 2$$

$$2^\circ) \gamma_{11}(u) = \gamma_{11}(-u); \quad i = 1, 2$$

Es decir

$$\gamma_{12}(u) = \gamma_{21}(-u)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(u) &= E\left[(X_1(t) - \mu_1)(X_2(t+u) - \mu_2)\right] = \\ &= E\left[(X_1(t-u) - \mu_1)((X_2(t) - \mu_2))\right] = \\ &= E\left[(X_2(t) - \mu_2)(X_1(t-u) - \mu_1)\right] = \gamma_{21}(-u) \end{aligned}$$

y análogamente

$$\gamma_{21}(u) = \gamma_{12}(-u)$$

Entonces, la covarianza entre los dos procesos aleatorios puede describirse mediante la media de la función de covarianza cruzada $\gamma_{12}(u)$ donde $-\infty \leq u \leq \infty$.

5.3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN CRUZADA. PROPIEDADES.

Si se quiere estudiar la interacción entre dos procesos con diferentes posibles escalas de medida y diferentes varianzas, es necesario definir la función de correlación cruzada, dada por:

$$\rho_{12}(u) = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \cdot \gamma_{22}(0)}} = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Esta función tiene las propiedades:

$$1^a) |\rho_{12}(u)| \leq 1$$

que muestra que la variable

$y(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t+u)$ tiene varianza positiva.

2^a) $\rho_{12}(u) = \rho_{21}(-u)$ se deduce de la segunda propiedad dada para la función de covarianza.

5.4. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN CRUZADA PARA UN PROCESO LINEAL.

En procesos continuos, sea $X_1(t)$ la entrada para un sistema lineal y $X_2(t)$ la correspondiente salida mas un ruido $Z(t)$; el proceso queda definido mediante

$$X_2(t) = \int_0^{\infty} h(u) \cdot X_1(t-u) du + Z(t)$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $X_1(t-u)$, y si $X_1(t)$ y $Z(t)$ son procesos con media cero, la función de covarianza cruzada del proceso lineal, viene dada por:

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(u) &= E\left[X_1(t-u) \cdot \int_0^\infty h(v)X_1(t-v)dv + X_1(t-u)Z(t)\right] = \\ &= \int_0^\infty h(v) \cdot \gamma_{11}(u-v)dv; \quad -\infty \leq u \leq \infty\end{aligned}$$

siendo $\gamma_{x_1 z}(u) = 0; \forall u$.

Si $E[X_1(t)] = E[Z(t)] = 0$; y $\gamma_{x_1 z}(u) = 0$

$$\gamma_{22}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(v)h(v')\gamma_{11}(u+v-v')dv dv' + \gamma_{zz}(u); \quad -\infty \leq u \leq \infty$$

que da la función de autocovarianza de un proceso estacionario.

La función de correlación cruzada, entonces, tiene la expresión

$$\rho_{12}(u) = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \gamma_{22}(0)}}$$

donde $\gamma_{22}(0)$ se obtiene de la expresión general dada para $\gamma_{22}(u)$, siendo $u = 0$. En procesos discretos, partiendo del modelo

$$X_{2t} = \sum_{r=0}^{\infty} h_r \cdot X_{1t-r} + Z(t)$$

se obtendría como función de autocovarianza:

$$\gamma_{12}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r \cdot \gamma_{11}(k-r); \quad k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$$

$$\gamma_{22}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h_r h_s \gamma_{11}(k+r-s) + \gamma_{zz}(k); \quad k=0; \pm 1; \pm 2, \dots$$

y la correspondiente función de autocorrelación tiene la expresión

$$\rho_{12}(k) = \frac{\gamma_{12}(k)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \gamma_{22}(0)}}$$

5.5. PROCESO LINEAL BIVARIANTE. FUNCIÓN DE COVARIANZA.

El modelo general para correlación cruzada entre dos procesos aleatorios, ocurre cuando suponemos que las fluctuaciones en $X_1(t)$ y

$X_2(t)$ son causadas por dos fuentes de ruido $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$. Viene definido mediante:

$$X_1(t) = h_{11}Z_1(t) + h_{12}Z_2(t)$$

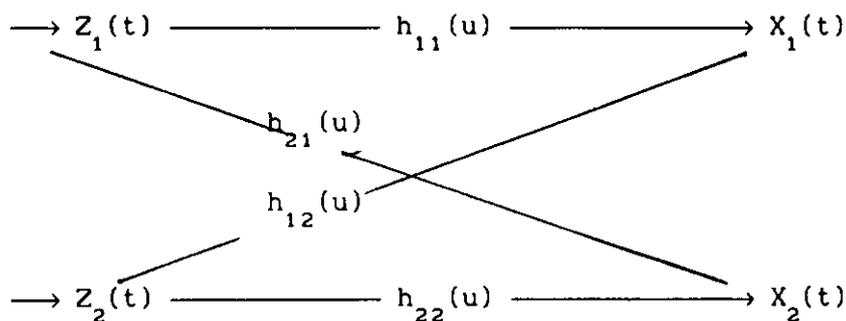
$$X_2(t) = h_{21}Z_1(t) + h_{22}Z_2(t)$$

donde $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ son procesos de ruido blanco incorrelados con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente, de donde:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= E\left[\left\{h_{11}Z_1(t) + h_{12}Z_2(t)\right\} \left\{h_{21}Z_1(t) + h_{22}Z_2(t)\right\}\right] = \\ &= h_{11}h_{21}\sigma_1^2 + h_{12}h_{22}\sigma_2^2 \\ \gamma_{12}(k) &= 0; \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

$h_{11}(u)$; $h_{12}(u)$; $h_{21}(u)$; $h_{22}(u)$ son las funciones respuesta impulso.

Un proceso lineal aleatorio bivariante puede representarse mediante el esquema siguiente



Proceso lineal bivariante

que corresponde al modelo dado por

$$X_1(t) = \int_0^{\infty} h_{11}(v)Z_1(t-v)dv + \int_0^{\infty} h_{12}(v)Z_2(t-v)dv$$

$$X_2(t) = \int_0^{\infty} h_{21}(v)Z_1(t-v)dv + \int_0^{\infty} h_{22}(v)Z_2(t-v)dv$$

Si las fuentes de ruido blanco son mutuamente incorreladas, es decir

$$E[Z_i(t), Z_j(t')] = 0; \quad \forall t, t'; \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

Las funciones de covarianza vienen dadas por las expresiones

$$\gamma_{11}(u) = \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{11}(v)h_{11}(v+u)dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{12}(v)h_{12}(v+u)dv$$

$$\gamma_{22}(u) = \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{21}(v)h_{21}(v+u)dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{22}(v)h_{22}(v+u)dv$$

$$\gamma_{21}(u) = \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{21}(v)h_{11}(v+u)dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{22}(v)h_{12}(v+u)dv$$

$$\gamma_{12}(u) = \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{11}(v)h_{21}(v+u)dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{12}(v)h_{22}(v+u)dv$$

Para el caso discreto, las expresiones son totalmente análogas, bastaría cambiar las integrales por sumas.

Las expresiones anteriores muestran que ajustando la función respuesta impulso $h_{ij}(u)$, es posible generar un modelo aleatorio bivalente $\{X_1(t); X_2(t)\}$ con una función de covarianza cruzada específica y una función de autocovarianza. Esta forma general se da para procesos de ruido blanco que son procesos correlacionados para tiempos simultáneos, es decir

$$E[Z_1(t), Z_2(t')] = \sigma_{12} \delta(t-t')$$

5.6. PROCESO BIVARIANTE AUTORREGRESIVO MEDIAS MÓVILES.

El proceso es un modelo especialmente importante del proceso lineal bivalente. Se da este modelo cuando la función impulso respuesta $h_{ij}(u)$ es cero después de un cierto punto. Un modelo discreto está representado por las ecuaciones

$$X_{1t} = Z_{1t} + \beta_{11} Z_{1t-1} + \beta_{12} Z_{2t-1}$$

$$X_{2t} = Z_{2t} + \beta_{21} Z_{1t-1} + \beta_{22} Z_{2t-1}$$

donde Z_{1t} , Z_{2t} son procesos de ruido blanco incorrelados, con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 . La función de covarianza de proceso bivalente $\{X_{1t}, X_{2t}\}$ está dada por:

$$\gamma_{12}(-1) = \beta_{12} \sigma_2^2$$

$$\gamma_{12}(0) = \beta_{11} \beta_{21} \sigma_1^2 + \beta_{12} \beta_{22} \sigma_2^2$$

$$\gamma_{12}(1) = \beta_{21} \sigma_1^2$$

$$\gamma_{12}(k) = 0; \quad k \neq 0; \pm 1$$

El proceso bivalente autorregresivo, tiene la propiedad de que la función impulso respuesta no desaparece después del último impulso.

En tiempo continuo, un proceso de primer orden se define de forma análoga a como se definió en el capítulo tercero el proceso autorregresivo de primer orden univariante, es decir, un proceso continuo en tiempo bivalente se define como:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} + a_{11} X_1(t) + a_{12} X_2(t) = z_1(t)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} + a_{21} X_1(t) + a_{22} X_2(t) = z_2(t)$$

donde $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ son procesos de ruido blanco correlacionados y simultáneos en tiempo único.

Para tiempo discreto el proceso autorregresivo bivalente está dado por:

$$X_{1t} = \alpha_{11} X_{1t-1} + \alpha_{12} X_{2t-1} + Z_{1t}$$

$$X_{2t} = \alpha_{21} X_{1t-1} + \alpha_{22} X_{2t-1} + Z_{2t}$$

Las funciones de autocovarianza y covarianza cruzada del proceso se pueden escribir como:

$$\gamma_{11}(u) = b_{11} e^{-a_{11}u} + b_{21} e^{-a_{12}u}$$

$$\gamma_{22}(u) = b_{12} e^{-a_{21}u} + b_{22} e^{-a_{22}u}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(u) &= b_{12} e^{-a_{11}u} + b_{22} e^{-a_{12}u} \\ \gamma_{21}(u) &= b_{11} e^{-a_{21}u} + b_{21} e^{-a_{22}u}\end{aligned}$$

donde b_{ij} son funciones a_{ij} . Estos valores se calculan mediante matrices.

Análogamente, para tiempo discreto, se obtendrían:

$$\gamma_{12}(K) = \alpha_{21} \gamma_{11}(K-1) + \alpha_{22} \gamma_{12}(K-1) ; K \geq 1$$

$$\gamma_{11}(K) = \alpha_{11} \gamma_{11}(K-1) + \alpha_{12} \gamma_{12}(K-1) ; K \geq 1$$

$$\gamma_{22}(K) = \alpha_{21} \gamma_{21}(K-1) + \alpha_{22} \gamma_{22}(K-1) ; K \geq 1$$

$$\gamma_{21}(K) = \alpha_{11} \gamma_{12}(K-1) + \alpha_{12} \gamma_{22}(K-1) ; K \geq 1$$

5.6. ESTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE COVARIANZA CRUZADA.

Si la media de los dos procesos es cero, para un mismo valor de u la función de covarianza cruzada se estima mediante el estimador

$$c_{x_1 x_2}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_1(t) \cdot X_2(t+u) dt & ; 0 \leq u \leq T \\ \frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} X_1(t) \cdot X_2(t+u) dt & ; -T \leq u \leq 0 \end{cases}$$

Cuando el estimador tiene un error cuadrático medio pequeño se usa el divisor T y si este error es grande se utiliza el divisor $T-u$.

La esperanza del estimador es

$$E\left[C_{x_1 x_2}(u)\right] = \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \cdot \gamma_{x_1 x_2}(u)$$

que indica que $C_{x_1 x_2}(u)$ es un estimador sesgado de $\gamma_{12}(u)$ y solamente es insesgado cuando T tiende a infinito.

Si la media de los dos procesos es distinta de cero, se usa el estimador:

$$c_{X_1 X_2}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (X_1(t) - \bar{X}_1)(X_2(t+u) - \bar{X}_2) dt & 0 \leq u \leq T \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (X_1(t) - \bar{X}_1)(X_2(t+u) - \bar{X}_2) dt & -T \leq u \leq 0 \end{cases}$$

siendo

$$\bar{X}_i = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_i(t) dt ; i = 1, 2.$$

Haciendo los cálculos convenientes, la esperanza del estimador es:

$$E[C_{X_1 X_2}(u)] = \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1 X_2}(u) + \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1 X_2}(u) du$$

El sesgo aumenta para términos de orden $\frac{1}{T}$, introduciendo una corrección para la media.

La covarianza entre dos estimadores $C_{X_1 X_2}(u_1)$, $C_{X_1 X_2}(u_2)$ y dos u_1 y u_2 diferentes se da mediante la fórmula de Bartlett:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{X_1 X_2}(u_1), C_{X_1 X_2}(u_2)] &= \frac{1}{T^2} \left\{ T' \int_{-T'}^{T'} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) dr - \right. \\ &\quad \left. - T'' \int_{-T''}^{T''} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T''}\right) dr \right\} \end{aligned}$$

siendo

$$T' = T - \frac{|u_1| + |u_2|}{2}$$

$$T'' = T - \frac{|u_2| + |u_1|}{2}$$

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \gamma_{X_1 X_1} \left(r - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) \gamma_{X_2 X_2} \left(r - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) + \\ &\quad + \gamma_{X_1 X_2} \left(r - \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \gamma_{X_2 X_1} \left(r - \frac{u_2 + u_1}{2} \right) + K(r, u_1, u_2) \end{aligned}$$

donde $K(r, u_1, u_2)$ es el punto de acumulación de las variables aleatorias $X_1(t)$, $X_1(t+u_1)$, $X_2(t+r)$; $X_2(t+r+u_2)$.

Para una longitud T en tiempo continuo, la covarianza puede escribirse como:

$$\text{Cov}\left[C_{X_1 X_2}(u_1), C_{X_1 X_2}(u_2)\right] \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r) dr$$

y en caso discreto está dada por la aproximación mediante:

$$\text{Cov}\left[C_{X_1 X_2}(K), C_{X_1 X_2}(\ell)\right] \approx \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_{X_1 X_2}(r) \gamma_{X_2 X_2}(\ell+r-K) + \gamma_{X_1 X_2}(r+\ell) \gamma_{X_2 X_1}(r-k) \right\}$$

Si el proceso es incorrelado, $\gamma_{X_1 X_2}(u) = 0$ para todo u , y la covarianza es:

$$\text{Cov}\left[C_{X_1 X_2}(u_1), C_{X_1 X_2}(u_2)\right] \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1 X_1}\left(r - \frac{u_2 - u_1}{2}\right) \cdot \gamma_{X_2 X_2}\left(r + \frac{u_2 - u_1}{2}\right) dr$$

Análogamente, para dos procesos discretos incorrelados, se tiene que

$$\text{Cov}\left[C_{X_1 X_2}(K), C_{X_1 X_2}(\ell)\right] \approx \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1 X_1}(r) \gamma_{X_2 X_2}(r+\ell-K)$$

Si $X_1(t), X_2(t)$ son procesos de primer orden con parámetros α_1 y β_1 respectivamente

$$\gamma_{X_1 X_1}(K) = \sigma_1^2 \alpha_1^{|K|}$$

$$\gamma_{X_2 X_2}(K) = \sigma_2^2 \beta_1^{|K|}$$

Haciendo $\ell = K$, y sustituyendo en la expresión anterior de covarianza se tiene que

$$\text{Var}\left[C_{X_1 X_2}(K)\right] \approx \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{N} \left(\frac{1 + \alpha_1 \beta_1}{1 - \alpha_1 \beta_1} \right)$$

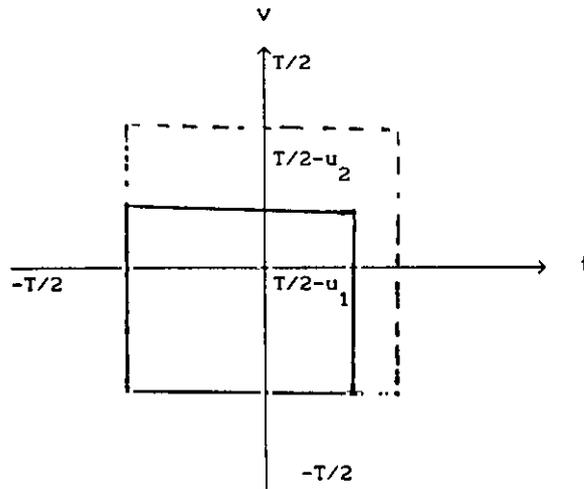
Para ruido blanco, el resultado correspondiente es

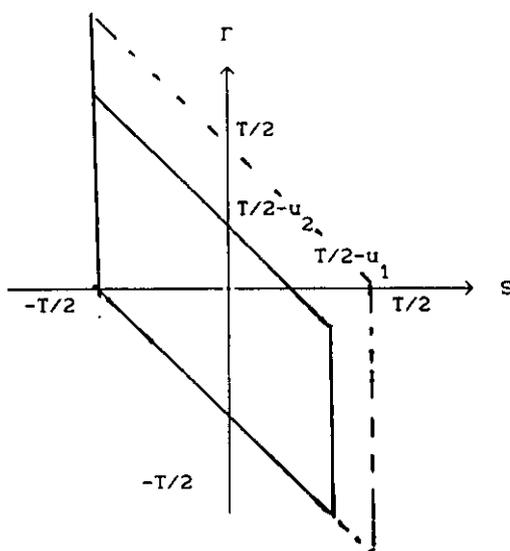
$$\text{Var}\left[C_{X_1 X_1}(K)\right] \approx \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{N}$$

En general la covarianza entre el estimador $C_{1J}(u_1)$ y $C_{K\ell}(u_2)$ está dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}\left[C_{1j}(u_1), C_{kl}(u_2)\right] = \\ & = \frac{1}{T^2} \int_{-(T-|u_1|)/2}^{(T-|u_1|)/2} \int_{-(T-|u_1|)/2}^{(T-|u_1|)/2} \left\{ \gamma_{ik} \cdot \left(v-t - \frac{u_2-u_1}{2}\right) \Gamma_{j\ell} \left(v-t + \frac{u_2-u_1}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \gamma_{i\ell} \left(v-t + \frac{u_2+u_1}{2}\right) \cdot \gamma_{jk} \left(v-t - \frac{u_2+u_1}{2}\right) + K(v-t, u_1, u_2) \right\} dv dt \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $v-t = r$, $t = s$, se transforma la región integración según muestra la gráfica.





Región de integración para la función de covarianza

Obteniéndose tres regiones de integración.

Para $|u_2| > |u_1|$ la covarianza entre los estimadores se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(u_1), C_{kl}(u_2)] &= \frac{1}{T^2} \int_{(-|u_2| - |u_1|)/2}^{(T - |u_1| + |u_2|)/2} \gamma(r) dr \int_{-(T - |u_1|)/2}^{(T - |u_2|)/2} ds + \\ &\frac{1}{T^2} \int_{(-|u_2| - |u_1|)/2}^{(|u_2| + |u_1|)/2} \gamma(r) dr \int_{-[(T - |u_2|)/2] - r}^{[(T - |u_2|)/2] - r} ds + \\ &\frac{1}{T^2} \int_{-[T - (|u_1| - |u_2|)]/2}^{- (|u_2| - |u_1|)/2} \gamma(r) dr \int_{-(T - |u_1|)/2}^{(T - |u_1|)/2} ds \end{aligned}$$

donde

$$\gamma(r) = \gamma_{ik}\left(r - \frac{u_2 - u_1}{2}\right) \gamma_{jl}\left(r + \frac{u_2 - u_1}{2}\right) + \gamma_{il}\left(r + \frac{u_2 + u_1}{2}\right) \cdot \gamma_{jk}\left(r - \frac{u_2 + u_1}{2}\right)$$

Integrando la función de covarianza con respecto a, s, se puede escribir que

$$\text{COV}[C_{ij}(u_1), C_{kl}(u_2)] = \frac{1}{T^2} \left\{ T' \int_{-T'}^{T'} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) - \right.$$

$$-T'' \int_{-T''}^{T''} \Gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T''}\right) dr \Big\}$$

donde

$$T' = T - \frac{|u_1| + |u_2|}{2} ; T'' = \frac{|u_2| + |u_1|}{2}$$

Cuando $|u_1| > |u_2|$ el resultado es análogo, siendo $T'' = (|u_1| - |u_2|)/2$.

Para T suficientemente grande, los términos de orden $\frac{1}{T^2}$, pueden ser despreciados, quedando que:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[C_{ij}(u_1), C_{kl}(u_2) \right] &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r) dr = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_{ik} \left(r - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) \gamma_{jl} \left(r + \frac{u_2 - u_1}{2} \right) + \gamma_{il} \left(r + \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \gamma_{jk} \left(r - \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \right\} dr \end{aligned}$$

5.7. ESPECTRO CRUZADO.

Sean $X_1(t)$, $X_2(t)$ dos ondas coseno, con suma de frecuencias f_0 , diferentes amplitudes A_1 y A_2 y diferentes fases ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente.

Aplicando la definición de espectro para señales determinísticas dado en el capítulo anterior, el espectro muestra de las dos señales es:

$$C_{X_i X_i}(f) = \frac{|X_i(f)|^2}{T} ; i = 1, 2.$$

La covarianza entre las dos ondas coseno esta definida mediante el espectro potencia cruzado muestra, y mas concretamente mediante el espectro cruzado muestra dado por:

$$C_{X_1 X_2}(f) = \frac{X_1^*(f) X_2(f)}{T}$$

donde el asterisco, indica el conjugado complejo. Esta relación define la dependencia entre las dos señales en general. Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son dos señales reales arbitrarias, con transformadas de Fourier $X_1(f)$; $X_2(f)$ dadas respectivamente por

$$X_i(f) = A_i(f) e^{iF_i(f)} \quad ; \quad i = 1, 2$$

donde $A_i(f)$ es una función invariante positiva y $F_{ij}(f)$ es una función impar. El espectro cruzado muestra aplicando la definición dada anteriormente es:

$$C_{X_1 X_2}(f) = A_1(f) \cdot A_2(f) e^{i(F_2(f) - F_1(f))/T}$$

que puede escribirse como

$$C_{12}(f) = A_{12}(f) e^{iF_{12}(f)}$$

Entonces, la covarianza entre las dos series $x_1(t)$ y $x_2(t)$, puede describirse por el *espectro de fase muestra*

$$F_{12}(f) = F_2(f) - F_1(f)$$

y el *espectro amplitud muestra*

$$A_{12}(f) = A_1(f) \cdot A_2(f) / T$$

El espectro cruzado muestra $C_{12}(f)$ puede escribirse como el producto de una función real llamada *espectro amplitud cruzado* y una función compleja llamada *espectro de fase muestra* $F_{12}(f)$, que indica como la componente frecuencia en una serie, induce la longitud de las componentes de la misma frecuencia en las otras series; análogamente el *espectro cruzado de amplitud-muestra* $A_{12}(f)$ indica como la amplitud de las componentes, para un caso particular de frecuencia en una serie, se asocia con amplitudes grandes o pequeñas para la misma frecuencia, en otras series. $A_{12}(f)$ es una función positiva de frecuencias y $F_{12}(f)$ es una función impar.

Una expresión alternativa para el espectro cruzado, dado por

$C_{12}(f) = A_{12}(f)e^{iF_{12}(f)}$, está dada en función de la suma de una parte real y una parte imaginaria mediante la expresión:

$$C_{12}(f) = L_{12}(f) - iQ_{12}(f)$$

donde

$$L_{12}(f) = A_{12}(f) \cdot \cos F_{12}(f)$$

$$Q_{12}(f) = -A_{12}(f) \operatorname{sen} F_{12}(f)$$

y donde:

$$A_{12}^2(f) = L_{12}^2(f) + Q_{12}^2(f)$$

$$F_{12}(f) = \operatorname{arc} \operatorname{tang.} \frac{-Q_{12}(f)}{L_{12}(f)}$$

$L_{12}(f)$ es una función invariante de frecuencias y $Q_{12}(f)$ es una función impar de frecuencias, ya que $A_{12}(f)$ es impar y $F_{12}(f)$ es invariante. Para señales generales $X_1(t)$, $X_2(t)$ las expresiones:

$L_{12}(f) = A_{12}(f) \cos F_{12}(f)$ mide la covarianza de las componentes dentro de fase para una frecuencia f , y la expresión

$$P_{12}(f) = A_{12}(f) \operatorname{sen} F_{12}(f)$$

mide la covarianza de las componente fuera de fase o componentes de cuadratura para una frecuencia f .

Teorema. La transformada de Fourier de la función de covarianza cruzada muestra es el espectro cruzado muestra.

Es decir, que la función de autocovarianza cruzada muestra y el espectro cruzado muestra, forman un par de transformadas de Fourier.

En efecto, partiendo de la definición de espectro cruzado muestra

$$C_{12}(f) = \frac{x_1^*(f) x_2(f)}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t') e^{-i2\pi f(t-t')} dt dt'$$

y haciendo la transformación

$$t' - t = u, \quad t = v$$

se llega a que

$$C_{12}(t) = \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du$$

Luego el espectro cruzado muestra es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza muestra definida por:

$$c_{12}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t+u)dt & ; 0 \leq u \leq T \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t+u)du & ; -T \leq u \leq 0 \\ 0 & ; |u| > T \end{cases}$$

La transformada inversa es:

$$c_{12}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f) e^{i2\pi fu} df$$

Sustituyendo en esta última expresión, los valores en función del espectro de amplitud y del espectro de fase se tiene que

$$\begin{aligned} c_{12}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} (L_{12}(f) - iQ_{12}(f)) e^{i2\pi fu} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L_{12}(f) \cos 2\pi f u df + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{12}(f) \operatorname{sen} 2\pi f u df \end{aligned}$$

ya que $L_{12}(f)$ es una función invariante de f y $Q_{12}(f)$ es una función impar de f .

Haciendo $u = 0$ se tiene que

$$c_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{12}(f) df$$

Es decir que el espectro cruzado muestra da la descomposición en frecuencias de longitud cero de la covarianza cruzada, del mismo modo que el espectro muestra para $u = 0$ da la descomposición en función de frecuencias de la varianza o potencia media de la señal $x(t)$:

$$C_{xx}(0) = s_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(f) df$$

donde C_{xx} es el espectro muestra.

Si llamamos:

$$L_{12}(f) = \int_{-T}^T \ell_{12}(u) \cos 2\pi fu \, du$$

$$Q_{12}(f) = \int_{-T}^T q_{12}(u) \operatorname{sen} 2\pi fu \, du$$

podemos escribir que

$$c_{12}(u) = \ell_{12}(u) + q_{12}(u)$$

y se verifica que $\ell_{12}(u)$ es una función par de $c_{12}(u)$,

$$\ell_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[c_{12}(u) + c_{12}(-u) \right]$$

siendo $q_{12}(u)$ la parte impar de $c_{12}(u)$ dada por

$$q_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[c_{12}(u) - c_{12}(-u) \right]$$

5.8. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO CRUZADO.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas matemáticamente mediante dos series de tiempo, siendo $\{X_1(t), X_2(t)\}$ la realización de un proceso aleatorio estacionario bivariante. Se definió anteriormente el espectro cruzado muestra $c_{12}(u)$, mediante el cual se trata de estimar el espectro cruzado teórico $\Gamma_{12}(f)$ que se acostumbra a llamar co-espectro. Para hacer esta estimación, se define el estimador del espectro cruzado mediante la expresión:

$$C_{x_1 x_2}(f) = \int_{-T}^T C_{x_1 x_2}(u) e^{-i2\pi fu} \, du \quad ; \quad -\infty \leq f \leq \infty$$

para el que se calcula un valor medio

$$E \left[C_{x_1 x_2}(f) \right] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T} \right) \gamma_{x_1 x_2}(u) e^{-i2\pi fu} \, du$$

Cuando $T \rightarrow \infty$; este valor medio tiende al *espectro cruzado de potencia*, que se llamará *espectro cruzado* solamente; de forma análoga a como al

espectro de potencia o espectro con poder se le llamó sencillamente espectro. El espectro cruzado teórico, esperado a través del espectro cruzado muestra está dado por:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[C_{X_1 X_2}(f) \right] = \Gamma_{X_1 X_2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1 X_2}(u) e^{-i2\pi f u} du ; \quad -\infty \leq f \leq \infty$$

Esta expresión muestra que el *espectro cruzado* teórico es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza cruzada. El espectro cruzado teórico es una función de frecuencias en el rango $-\infty \leq f \leq \infty$.

En ingeniería se suele utilizar para este espectro la expresión

$$\Gamma_{X_1 X_2}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_{X_1 X_2}(f)$$

Conviene dar algunas definiciones así como las relaciones y notación respecto al espectro cruzado muestra y el espectro cruzado teórico.

Escribiendo $\gamma_{X_1 X_2}(u)$ como la suma de una función por $\lambda_{12}(u)$ y otra parte impar $\psi_{12}(u)$ se tiene:

$$\lambda_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[\gamma_{12}(u) + \gamma_{12}(-u) \right]$$

$$\psi_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[\gamma_{12}(u) - \gamma_{12}(-u) \right]$$

que sustituida en el espectro cruzado teórico dan:

$$\Gamma_{12}(f) = \Lambda_{12}(f) - i\psi_{12}(f)$$

donde

$$\Lambda_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{12}(u) \cos 2\pi f u du$$

y

$$\psi_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{12}(u) \sen 2\pi f u du$$

A $\Lambda_{12}(f)$ se le llama co-espectro y a $\psi_{12}(f)$ se le llama espectro en

cuadratura de proceso $\{X_1(t), X_2(t)\}$.

Obteniéndose como valores esperados para ellos:

$$\Lambda_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[L_{12}(f) \right]$$

$$\psi_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[Q_{12}(f) \right]$$

El espectro cruzado teórico puede escribirse como:

$$\Gamma_{12}(f) = \alpha_{12}(f) e^{i\phi_{12}(f)}$$

donde $\alpha_{12}(f)$ se llama espectro de amplitud cruzado y está dado por:

$$\alpha_{12}(f) = \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \psi_{12}^2(f)}$$

y $\phi_{12}(f)$ se llama espectro de fase cruzado y está dado por:

$$\phi_{12}(f) = \text{arc tang.} \frac{\psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)}$$

Espectro teórico

Espectro muestra

Autoespectro

$$\Gamma_{11}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{11}(u) e^{-i2\pi fu} du$$

$$C_{11}(f) = \int_{-T}^T c_{11}(u) e^{-i2\pi fu} du$$

Espectro cruzado

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du = \\ &= \alpha_{12}(f) e^{i\phi_{12}(f)} = \\ &= \Lambda_{12}(f) - i \psi_{12}(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}(f) &= \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du = \\ &= A_{12}(f) e^{iF_{12}(f)} = \\ &= L_{12}(f) - i Q_{12}(f) \end{aligned}$$

Espectro de amplitud cruzado

$$\alpha_{12}(f) = |\Gamma_{12}(f)| =$$

$$A_{12}(f) = |C_{12}(f)| =$$

$$= \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \psi_{12}^2(f)}$$

$$= \sqrt{L_{12}^2(f) + Q_{12}^2(f)}$$

Espectro de fase

$$\phi_{12}(f) = \arctang \left\{ \frac{-\psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)} \right\}$$

$$F_{12}(f) = \arctang \left\{ \frac{-Q_{12}(f)}{L_{12}(f)} \right\}$$

co-espectro

$$\Lambda_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_{12}(u) + \gamma_{12}(-u) \right\} \cos 2\pi fu du$$

$$L_{12}(f) = \int_{-T}^T \ell_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T}^T \left\{ c_{12}(u) + c_{12}(-u) \right\} \cos 2\pi fu du$$

Espectro de cuadratura

$$\psi_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma_{12}(u) - \gamma_{12}(-u) \right\} \sin 2\pi fu du$$

$$Q_{12}(f) = \int_{-T}^T q_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-T}^T \left\{ c_{12}(u) - c_{12}(-u) \right\} \sin 2\pi fu du$$

5.9. PROPIEDADES DEL ESTIMADOR ESPECTRAL CRUZADO MUESTRA.

Se hace previamente un estudio sobre las características de los espectros cruzados muestra para dos procesos incorrelados de ruido blanco analizando las propiedades del estimador espectral y posteriormente se generalizan estas propiedades y resultados.

5.9.1. PROPIEDADES DEL ESTIMADOR ESPECTRAL CRUZADO MUESTRA PARA RUIDO BLANCO.

Sean $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ dos procesos de ruido blanco, de media cero.

La transformada de Fourier de $Z_1(f)$ se puede escribir como:

$$Z_1(f) = \int_{-T/2}^{T/2} Z_1(t) e^{-i2\pi ft} dt = A_1(f) - iB_1(f)$$

Siendo $A_1(f)$ y $B_1(f)$ las transformadas coseno y seno de $Z_1(t)$.

El auto y co-espectro está dado por:

$$c_{11}(f) = \frac{|Z_1(f)|^2}{T} = \frac{A_1^2 + B_1^2}{T} ; i = 1,2$$

$$\begin{aligned} C_{12}(f) &= \frac{|Z_1^*(f) \cdot Z_2(f)|}{T} = \frac{1}{T} \left[(A_1 + iB_1)(A_2 - iB_2) \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[(A_1 A_2 + B_1 B_2) - i(B_2 A_1 - B_1 A_2) \right] \end{aligned}$$

De donde el co-espectro y el espectro cuadratura muestra son:

$$L_{12}(f) = \frac{1}{T} (A_1 A_2 + B_1 B_2)$$

$$Q_{12}(f) = \frac{1}{T} (B_2 A_1 - B_1 A_2)$$

Cuando $Z_i(f)$ es un proceso Normal, A_i y B_i son variables aleatorias

Normales y como el proceso $Z_i(f)$ tiene de media cero:

$$E[A_i] = E[B_i] = 0$$

y para la frecuencia armónica $f_m = m/T$ se tiene que

$$\text{Var}[A_i] = \text{Var}[B_i] = \frac{T}{2} \sigma_i^2$$

$$\text{Cov}[A_i, B_i] = 0 ; i = 1,2$$

Sumando, los dos procesos $z_1(t)$ y $z_2(t)$ son incorrelados, luego

$$\text{Cov}[A_1, A_2] = 0 = \text{Cov}[B_1, B_2]$$

$$\text{Cov}[A_1, B_2] = 0 = \text{Cov}[B_1, A_2]$$

Con todo lo anterior se puede escribir

$$1^{\circ}) \quad E[L_{12}(f)] = \frac{1}{T} \left\{ E[A_1, A_2] + E[B_1, B_2] \right\} = 0$$

$$E[\mathcal{P}_{12}(f)] = 0$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \text{Var}[L_{12}(f)] &= \frac{1}{T^2} E[A_1^2 A_2^2 + B_1^2 B_2^2 + 2B_1 B_2 A_1 A_2] = \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\sigma_2^2}{2} + 0 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Var}\left[Q_{12}(f)\right] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2}$$

De donde

$$\text{Cov}\left[L_{12}(f), Q_{12}(f)\right] = 0$$

Se demuestra que $L_{12}(f)$ y $Q_{12}(f)$ están incorreladas con $c_{11}(f)$ y $c_{22}(f)$, entonces la distribución conjunta de los estimadores $C_{11}(f)$; $C_{22}(f)$; $L_{12}(f)$ y $Q_{12}(f)$, pueden caracterizarse por la matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{pmatrix}$$

donde $\sigma_3^2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sigma_2^2$; $\sigma_4^2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sigma_2^2$.

2ª) El cuadrado del estimador espectral de la amplitud cruzada muestra es:

$$\begin{aligned} A_{12}^2(f) &= |C_{12}(f)|^2 = L_{12}(f) + Q_{12}^2(f) = \\ &= \left(\frac{|Z_1(f)|^2}{T} \right) \left(\frac{|Z_2(f)|^2}{T} \right) = c_{11}(f) \cdot c_{22}(f) \end{aligned}$$

3ª) Aplicando la propiedad chi-cuadrado de $c_{11}(f)$ y que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ son dos procesos independientes, se tiene que la variable aleatoria $y^2(f)$ definida mediante:

$$y^2(f) = \frac{4A_{12}^2(f)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \left(\frac{2C_{11}(f)}{\sigma_1^2} \right) \left(\frac{2C_{22}(f)}{\sigma_2^2} \right) = a \cdot b$$

es el producto de dos variables aleatorias, a y b independientes que se distribuyen según una χ^2 con dos grados de libertad.

Entonces:

$$\begin{aligned} E\left[Y^2(f)\right] &= E[a] \cdot E[b] \\ E\left[Y^4(f)\right] &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[Y^2(f)\right] &= 48 \\ E\left[A_{12}^2(f)\right] &= \left(\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4}\right) E\left[Y^2(f)\right] = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \\ \text{Var}\left[A_{12}^2(f)\right] &= \left(\frac{\sigma_1^4 \sigma_2^4}{16}\right) \cdot \text{Var}\left[Y^2(f)\right] = 3\sigma_1^4 \sigma_2^4 \end{aligned}$$

4^a) El estimador espectral fase muestra es:

$$F_{12}(f) = \arctang \left\{ \frac{-\mathcal{P}_{12}(f)}{42(f)} \right\} = \arctang \left\{ -\frac{B_2 A_1 - B_1 A_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right\}$$

Por ser A_1 y B_1 variables que siguen una distribución Normal, el rango de $A_1 A_2 + B_1 B_2$ se extiende de $-\infty$ a ∞ y $L_{12}(f)$ sigue una distribución Normal. Análogamente ocurre con $\mathcal{P}_{12}(f)$. Así $L_{12}(f)$ y $\mathcal{P}_{12}(f)$ son distribuciones aproximadamente normales e independientes y tienen la misma varianza, entonces $F_{12}(f)$ es una distribución aproximadamente uniforme en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$.

5.9.2. PROPIEDADES GENERALES DEL ESTIMADOR DEL ESPECTRO CRUZADO

MUESTRA.

1^a) Para un proceso no Normal incorrelado de ruido blanco y la frecuencia armónica $f_m = m/T$ se tiene que

$$E\left[L_{12}(f)\right] = \Lambda_{12}(f) = 0$$

$$E\left[Q_{12}(f)\right] = \psi_{12}(f) = 0$$

2^a) La matriz de covarianza del estimador de la covarianza entre los estimadores $c_{11}(f)$, $c_{22}(f)$; $L_{12}(f)$, $Q_{12}(f)$ y dos frecuencia f_1 , f_2 está dada por:

$$\begin{pmatrix} W_0 K_4^{(1)} + \sigma_1^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_0 K_4^{(2)} + \sigma_2^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2} \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2} \{W^2(-) + W^2(+)\} \end{pmatrix}$$

donde

$$W(-) = \frac{\Delta \text{sen } \Pi \Delta (f_1 - f_2)}{N \text{sen } \Pi \Delta (f_1 - f_2)} ; W(+) = \frac{\Delta \text{sen } \Pi \Delta (f_1 + f_2)}{N \text{sen } \Pi \Delta (f_1 + f_2)}$$

para proceso discreto; $W_0 = 1/T$ y

$$W(-) = \frac{\text{sen } \Pi T (f_1 - f_2)}{\Pi T (f_1 - f_2)} ; W(+) = \frac{\text{sen } \Pi T (f_1 + f_2)}{\Pi T (f_1 + f_2)}$$

en el caso continuo. $K_4^{(1)}$ y $K_4^{(2)}$ son los acumulantes de cuarto orden de los procesos de ruido blanco $Z_1^{(t)}$ y $Z_2(t)$ respectivamente, que desaparecen si $z_i(t)$ es Normal.

3ª) Si $f_1 = f_2$, la varianza de los estimadores es constante y no depende de la longitud del recorrido T , entonces el estimador espectral cruzado da una mala estimación como estimador autoespectral.

5.10. ESPECTRO CRUZADO EN PROCESOS LINEALES.

I) Se considera en primer lugar dos fuentes de ruido blanco Z_{1t} y Z_{2t} mutuamente incorreladas. El proceso está dado por:

$$X_{1t} = Z_{1t}$$

$$X_{2t} = Z_{2t}$$

Entonces

$$\gamma_{12}(K) = E[Z_{1t}, Z_{2t+k}] = 0; \quad \forall K$$

y el espectro cruzado es:

$$\Gamma_{12}(f) = \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \psi_{12}^2(f)} = 0$$

Esto implica que el espectro amplitud cruzado es siempre nulo y el co-espectro y espectro cuadratura son también idénticamente nulos. El espectro fase es indeterminado, aunque está distribuido uniformemente en el rango $(-\pi/2, \pi/2)$, por lo que la diferencia media de fase entre los dos procesos es cero.

II) Se considera ahora el proceso bivalente, equivalente a ruido blanco

$$X_{2t} = Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t} ; X_{1t} = Z_{1t}$$

Así como $X_{2t} = \beta_1 X_{1t} + Z_{2t}$

Entonces:

$$\gamma_{12}(0) = E[Z_{1t}(Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t})] = \beta_1 \sigma_1^2$$

$$\gamma_{12}(K) = 0; k \neq 0$$

y $\Gamma_{12}(f) = \beta_1 \sigma_1^2$

que implica que:

$$\alpha_{12}(f) = \beta_1 \sigma_1^2 ; \phi_{12}(f) = 0$$

$$\Lambda_{12}(f) = \beta_1 \sigma_1^2 ; \psi_{12}(f) = 0$$

Si los dos procesos son correlados solamente para tiempos simultáneos, el espectro de amplitud cruzado es una constante. Este proceso se toma como modelo para espectro cruzado, del mismo modo a como el proceso de ruido blanco es fundamento en espectros univariantes.

III) Se considera ahora un proceso dado por:

$$\int_0^{\infty} h(u)X_1(t-u)du + Z(t)$$

donde $X_1(t)$ es la entrada de un proceso lineal y $X_2(t)$ la correspondiente salida, mas un ruido independiente $Z(t)$.

La función de covarianza cruzada de la salida es:

$$\gamma_{12}(u) = \int_0^{\infty} \gamma_{11}(u-v)h(v)dv; \quad -\infty \leq u \leq \infty$$

Transformando esta igualdad se tiene el espectro cruzado:

$$\Gamma_{12}(f) = H(f) \cdot \Gamma_{11}(f)$$

La función respuesta frecuencia puede escribirse como

$$H(f) = \frac{\Gamma_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}$$

Esto indica que el análisis de un sistema lineal se simplifica utilizando las transformadas de Fourier. Así la convolución en la definición de función de covarianza cruzada, se reduce a una multiplicación aplicando transformadas. La función respuesta frecuencia, también se puede escribir

$$H(f) = G(f) e^{i\phi(f)} = \frac{\Lambda_{12}(f) - i\psi_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}$$

Las expresiones para ganancia $G(f)$ y fase $\phi(f)$ del sistema lineal son

$$G(f) = \frac{\sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \psi_{12}^2(f)}}{\Gamma_{11}(f)} = \frac{\alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}$$

$$\phi(f) = \text{arc tang} - \frac{\psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)}$$

Así la amplitud cruzada $\alpha_{12}(f)$ es una medida de la covarianza entre $X_1(t)$ y $X_2(t)$ para la frecuencia f y $\Gamma_{11}(f)$ es la varianza en la salida para la frecuencia f .

Análogamente la función de autocovarianza de la salida dada por:

$$\gamma_{22}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v)h(v')\gamma_{11}(u+v-v') dv dv' + \gamma_{zz}(u)$$

se transforma mediante Fourier en:

$$\Gamma_{22}(f) = G^2(f) \Gamma_{11}(f) + \Gamma_{zz}(f)$$

y sustituyendo la función ganancia por la expresión dada anteriormente

$$G(f) = \frac{\alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}$$

se tiene que

$$\Gamma_{22}(f) - \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f)} = \Gamma_{zz}(f)$$

o

$$\Gamma_{zz}(f) = \Gamma_{22}(f) \left[1 - K_{12}^2(f) \right]$$

donde

$$K_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)}$$

a $K_{12}^2(f)$ se la llama *coherencia cuadrado* entre la entrada y la salida en la frecuencia f . Al argumento de $K_{12}^2(f)$ para f se llama *espectro coherente cuadrado*.

Cuando $\Gamma_{zz}(f) = 0$, la coherencia cuadrado es única y el espectro de salida es simplemente el espectro de entrada, multiplicado por el cuadrado de la *ganancia* del sistema.

Eliminando $\Gamma_{22}(f)$ a partir de

$$\begin{cases} \Gamma_{22}(f) = G^2(f) \Gamma_{11}(f) + \Gamma_{zz}(f) \\ K_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)} \end{cases}$$

despejando $\Gamma_{22}(f)$ e igualando se tiene que

$$K_{12}^2(f) = \frac{1}{1 + (\Gamma_{zz}(f)/G^2(f)) \Gamma_{11}(f)}$$

Esta igualdad muestra que la coherencia cuadrado es pequeña, cuando el radio $G^2(f)\Gamma_{11}(f)/\Gamma_{zz}(f)$ para el ruido de salida es pequeño y grande, cuando el radio es grande.

IV) Se considera por último el proceso aleatorio bivariante, obtenido pasando dos fuentes de ruido blanco $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$, a través de un sistema la función de covarianza y autocovarianza cruzada son las propias de un sistema lineal bivariante. La función frecuencia

respuesta es:

$$H_{iJ} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{iJ}(u) e^{-i2\pi fu} du ; \quad i, J = 1, 2$$

El autoespectro está dado mediante:

$$\Gamma_{11}(f) = \sigma_1^2 |H_{11}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{12}(f)|^2$$

$$\Gamma_{22}(f) = \sigma_1^2 |H_{21}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{22}(f)|^2$$

La función de covarianza $\gamma_{12}(u)$ del proceso lineal bivalente es:

$$\gamma_{12}(u) = \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(v) \cdot h_{21}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(v) h_{22}(v+u) dv$$

Tomando transformadas de Fourier, el espectro cruzado es:

$$\Gamma_{12}(f) = \sigma_1^2 H_{11}^*(f) H_{21}(f) + \sigma_2^2 H_{12}^*(f) H_{22}(f)$$

De aquí se puede decir que la estimación del espectro cruzado, se reduce a estimar la función respuesta frecuencia del proceso lineal bivalente.

El cálculo de esta función se puede ver en el ejemplo dado a continuación:

Se considera el proceso continuo bivalente dado por el sistema:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} + a_{11} X_1(t) + a_{12} X_2(t) = Z_1(t)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} + a_{21} X_1(t) + a_{22} X_2(t) = Z_2(t)$$

Transformando las ecuaciones aplicando una de las propiedades de la diferenciación se tiene:

$$[a_{11} + i2\pi f] X_1(f) + a_{12} X_2(f) = Z_1(f)$$

$$a_{21} X_1(f) + [a_{22} + i2\pi f] X_2(f) = Z_2(f)$$

Despejando, se obtiene

$$X_1(f) = \frac{(a_{22} + i2\pi f) Z_1(f) - a_{12} Z_2(f)}{(a_{11} + i2\pi f)(a_{22} + i2\pi f) - a_{12} a_{21}}$$

$$X_2(f) = \frac{-a_{21}Z_1(f) + (a_{11} + i2\pi f)Z_2(f)}{(a_{11} + i2\pi f)(a_{22} + i2\pi f) - a_{12}a_{21}}$$

Aplicando transformadas'

$$X_1(f) = H_{11}(f)Z_1(f) + H_{12}(f)Z_2(f)$$

$$X_2(f) = H_{21}(f)Z_1(f) + H_{22}(f)Z_2(f)$$

donde

$$H_{11}(f) = \frac{a_{22} + i2\pi f}{-D} \quad ; \quad H_{12}(f) = -\frac{a_{12}}{D}$$

$$H_{21}(f) = \frac{-a_{21}}{D} \quad ; \quad H_{22}(f) = \frac{a_{11} + i2\pi f}{-D}$$

Donde $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - (2\pi f)^2 + i2\pi f(a_{11} + a_{22})$, y por último el auto espectro y el espectro cruzado para el proceso bivalente es:

$$\Gamma_{11}(f) = \frac{[a_{22}^2 + (2\pi f)^2] \sigma_1^2 + a_{12}^2 \sigma_2^2}{|D|^2}$$

$$\Gamma_{22}(f) = \frac{a_{21}^2 \sigma_1^2 + [a_{11}^2 + (2\pi f)^2] \sigma_2^2}{|D|^2}$$

$$\Gamma_{12}(f) = \frac{-a_{22}a_{21}\sigma_1^2 - a_{11}a_{12}\sigma_2^2 - i2\pi f(a_{22}\sigma_2^2 - a_{21}\sigma_1^2)}{|D|^2}$$

5.12. CORRECCIÓN DE ESTIMADORES ESPECTRALES CRUZADOS.

Al aumentar el recorrido T, la varianza del estimador del espectro cruzado muestra aumenta, por lo que es necesario hacer una corrección o suavización del estimador espectral cruzado, utilizando el método de ventana.

Se da como estimador el siguiente:

$$\bar{C}_{12}(f) = \int_{-T}^T w(u)c_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du$$

siendo $w(u)$ la longitud de ventana. Descomponiendo $c_{12}(u)$ en funciones de los términos pares e impares, se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{C}_{12}(f) &= \int_{-T}^T w(u) \ell_{12}(u) \cos 2\pi fu \, du - i \int_{-T}^T w(u) q_{12}(u) \sin 2\pi fu \, du = \\ &= \bar{L}_{12}(f) - i \bar{Q}_{12}(f)\end{aligned}$$

donde $\bar{L}_{12}(f)$ y $\bar{Q}_{12}(f)$ son los estimadores coherencia y cuadratura espectral corregidos.

El estimador espectral cruzado muestra dado anteriormente es

$$C_{12}(f) = \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-i2\pi fu} \, du$$

que tiene como valor esperado

$$E[C_{12}(f)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{12}(u) e^{-i2\pi fu} \, du$$

que puede escribirse como

$$E[C_{12}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} T \left(\frac{\sin \pi Tg}{\pi Tg}\right)^2 \Gamma_{12}(f-g) \, dg \approx \Gamma_{12}(f)$$

de donde, cuando T es suficientemente grande, la ventana espectral es muy pequeña, y $C_{12}(f)$ es un estimador insesgado de $\Gamma_{12}(f)$. La media del estimador espectral cruzado es:

$$\begin{aligned}E[\bar{C}_{12}(f)] &= \int_{-T}^T w(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \Gamma_{12}(u) e^{-i2\pi fu} \, du \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Gamma_{12}(f-g) \, dg = \bar{\Gamma}_{12}(f)\end{aligned}$$

A $\bar{\Gamma}_{12}(f)$ se le llama "media corregida del espectro cruzado".

Y ya que $E[\bar{C}_{12}(f)] = E[\bar{L}_{12}(f)] - iE[\bar{Q}_{12}(f)]$, la media corregida del espectro coherencia y cuadratura es:

$$E[\bar{L}_{12}(f)] = \int_{-T}^T w(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \lambda_{12}(u) \cos 2\pi fu \, du \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Lambda_{12}(f-g) dg = \bar{\Lambda}_{12}(f)$$

y

$$E\left[\bar{Q}_{12}(f)\right] = \int_{-T}^T w(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \psi_{12}(u) \text{ sen } 2\pi fu \, du \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \psi_{12}(f-g) dg = \psi_{12}(f)$$

Utilizando la propiedad simétrica de la transformada de Fourier, que permite invertir los términos de la señal y su transformada (propiedad de convolución) el estimador espectral cruzado se escribe también como

$$\bar{C}_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f-g) W(g) \, dg$$

Por tanto

$$\text{Cov}\left[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Cov}\left[C_{ij}(f_1-g), C_{kl}(f_2-h)\right] W(g)W(h) \, dg \, dh$$

Cuando T es grande, la matriz de covarianza para el estimador espectral muestra que

$$\text{Cov}\left[C_{11}(f_1), C_{22}(f_2)\right] \approx |\Gamma_{12}(f_1)| \frac{\delta(f_1 - f_2)}{T}$$

de donde

$$\text{Cov}\left[\bar{C}_{11}(f_1), \bar{C}_{22}(f_2)\right] \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{12}(f_1-g)|^2 \frac{\delta(f_1 - f_2 + g + h)}{T} W(g) W(h) \, dg \, dh =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma_{12}(f_1-g)|^2}{T} W(g) W(f_2 + g - f_1) \, dg$$

Suponiendo que $\Gamma_{12}(f)$ es aproximadamente constante, en todo el ancho de banda de la ventana espectral, y haciendo $h = f_1 - g$ en la expresión anterior se tiene que

$$\text{Cov}[\bar{C}_{11}(f_1), \bar{C}_{22}(f_2)] \approx \frac{|\Gamma_{12}(f_1)|^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1-h) W(f_2-h) dh$$

y en el caso en que $f_1 = f_2 = f$ la expresión de la covarianza queda:

$$\text{Cov}[\bar{C}_{11}(f), \bar{C}_{22}(f)] \approx \frac{|\Gamma_{12}(f)|^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(g) dg = |\Gamma_{12}(f)|^2 \frac{1}{T}$$

Así el efecto de corrección reduce la varianza y la covarianza del estimador no corregido mediante el factor $1/T$,

La matriz de covarianza del estimador corregido se obtiene multiplicando la matriz de covarianza del estimador muestra por $1/T$, en lugar de multiplicarla por W^2 dado anteriormente.

Como estimador amplitud cruzado corregido, se da la expresión:

$$\bar{A}_{12}(f) = \sqrt{\bar{L}_{12}^2(f) + \bar{Q}_{12}(f)}$$

Como estimador espectral fase cruzado

$$\bar{F}_{12}(f) = \text{arc tang} \left(- \frac{\bar{Q}_{12}(f)}{\bar{L}_{12}(f)} \right)$$

y como estimador coherente cuadrado corregido

$$K_{12}^2(f) = \frac{\bar{L}_{12}^2(f) + \bar{Q}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f) \bar{C}_{22}(f)}$$

$\bar{L}_{12}(f)$ y $\bar{Q}_{12}(f)$ son estimadores insesgados, aunque $\bar{A}_{12}(f)$; $\bar{F}_{12}(f)$ y $K_{12}^2(f)$ pueden ser sesgados, pero el sesgo que se produce es pequeño, comparado con el que se produce por truncamiento de la función de correlación cruzada, y por el hecho de que no es simétrica alrededor de cero.

Se consideran ahora perturbaciones más pequeñas $\delta \bar{L}_{12}$ y $\delta \bar{Q}_{12}$ sobre los valores esperados $E[\bar{L}_{12}] = \Lambda_{12}$ y $E[\bar{Q}_{12}] = \psi_{12}$.

Entonces

$$\bar{L}_{12} = \Lambda_{12} + \delta \bar{L}_{12}$$

$$\bar{Q}_{12} = \psi_{12} + \delta \bar{Q}_{12}$$

$$E[\delta \bar{L}_{12}] = 0 = E[\delta \bar{Q}_{12}]$$

Por comodidad se escriben \bar{L}_{12} y \bar{Q}_{12} sin indicar que dependen de f .

Análogamente:

$$E[\delta \bar{L}_{12}] = \text{Var}[\bar{L}_{12}]$$

$$E[\delta \bar{Q}_{12}] = \text{Var}[\bar{Q}_{12}]$$

$$E[\delta \bar{L}_{12}, \delta \bar{Q}_{12}] = \text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}]$$

y escribiendo \bar{A}_{12} como una serie de Taylor se tiene que

$$\bar{A}_{12} = \sqrt{(\Lambda_{12} + \delta \bar{L}_{12}) + (\psi_{12} + \delta \bar{Q}_{12})^2} \approx$$

$$\approx \alpha_{12} \left(1 + \frac{\Lambda_{12} \delta \bar{L}_{12} + \psi_{12} \delta \bar{Q}_{12}}{\alpha_{12}^2} \right)$$

Entonces:

$$E[\bar{A}_{12}] \approx \alpha_{12}$$

$$\text{Var}[\bar{A}_{12}] \approx \frac{\Lambda_{12}^2 \text{Var}[\bar{L}_{12}] + \psi_{12}^2 \text{Var}[\bar{Q}_{12}] + 2\Lambda_{12}\psi_{12} \text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}]}{\alpha_{12}^2}$$

Sustituyendo en la matriz de covarianza $W^2(-)$ por I/T

$$\text{Var}[\bar{L}_{12}] \approx I/2T \left\{ \Gamma_{11} \Gamma_{22} + \Lambda_{12}^2 - \psi_{12}^2 \right\}$$

$$\text{Var}[\bar{Q}_{12}] \approx I/2T \left\{ \Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Lambda_{12}^2 + \psi_{12}^2 \right\}$$

$$\text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}] \approx I/T \Lambda_{12} \Psi_{12}$$

Sustituyendo estos resultados, la matriz para el estimador de amplitud cruzado corregido es

$$\text{Var}[\bar{A}_{12}] \approx \frac{I}{2T} \alpha_{12}^2 \left(1 + \frac{1}{K_{12}^2} \right)$$

Si X_1 y X_2 son procesos idénticos

$$\begin{aligned}\bar{A}_{12} &= \bar{C}_{11} \\ \alpha_{12} &= \Gamma_{11} \\ K_{12}^2 &= 1\end{aligned}$$

en cuyo caso

$$\text{Var}[\bar{C}_{11}] \approx I/T \Gamma_{11}^2$$

Análogamente, la varianza de los estimadores coherencia y coherencia cuadrada corregidos es

$$\begin{aligned}\text{Var}[\bar{K}_{12}] &\approx \frac{I}{2T} \left(1 - K_{12}^2\right)^2 \\ \text{Var}[\bar{K}_{12}^2] &\approx \frac{I}{2T} 4 K_{12} \left(1 - K_{12}^2\right)^2\end{aligned}$$

La varianza del estimador fase corregido es

$$\text{Var}[\bar{F}_{12}] \approx \frac{I}{2T} \left(\frac{1}{K_{12}^2} - 1\right)$$

que es independiente de la función fase teórica. La varianza tiene las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\bar{F}_{12}, \bar{A}_{12}] &\approx 0 \\ \text{Cov}[\bar{F}_{12}, \bar{K}_{12}^2] &\approx 0\end{aligned}$$

Los resultados anteriores muestran que la varianza de estos estimadores depende del factor corrección I/T, que a su vez puede ser controlado mediante la ventana cerrada y el espectro coherente $K_{12}^2(f)$ de los dos procesos $X_1(t)$, $X_2(t)$.

En general, la varianza del estimador es cero cuando la coherencia es uno, y se incremento a medida que la coherencia tiende a cero.

Las propiedades de los estimadores de los espectros amplitud y fase cruzada muestra pueden conocerse mediante la influencia (incontrolada) del mejor espectro coherencia y por la influencia (controlada) del factor corrección I/t.

5.13. Estimación de la función respuesta frecuencia.

El cálculo del espectro cruzado en un proceso lineal bivalente, reduce el cálculo de la función respuesta frecuencia.

Para estimar la función respuesta frecuencia

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(u)e^{-i2\pi fu} du$$

puede utilizarse la ecuación estimación

$$\hat{H}(f) = \frac{\bar{C}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}$$

donde $\bar{C}_{12}(f)$ es el estimador corregido del espectro cruzado entre la entrada y la salida, y $\bar{C}_{11}(f)$ es el estimador corregido del espectro entrada.

El estimador de $h(u)$, función respuesta impulso, se obtiene calculando la transformada inversa de $\hat{H}(f)$ que da una corrección mayor para la obtención de $h(u)$ que la obtenida estimando la función respuesta impulso directamente.

Para aplicar métodos espectrales a la estimación de la función respuesta frecuencia es necesario admitir que $h(u) = 0$, $u < 0$ y que el modelo es lineal

$$X_2(t) - u_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)(X_1(t-u) - \bar{X}_1) du + z(t)$$

$Z(t)$ es ruido blanco. la estimación mínimo cuadrática $\hat{h}(u)$ de $h(u)$ satisface la ecuación integral

$$c_{12}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(v)c_{11}(u-v)dv; \quad -T \leq u \leq T$$

La solución de esta ecuación integral se simplifica aplicando la transformada de Fourier:

$$C_{12}(f) = \hat{H}(f) \cdot C_{11}(f)$$

donde

$$\hat{H}(f) = \int_0^{\infty} h(u) e^{-i2\pi fu} du$$

El estimador de la función repuesta frecuencia es

$$\hat{H}(f) = \frac{C_{12}(f)}{C_{11}(f)}$$

que también puede escribirse como

$$\hat{G}(f) e^{i\hat{F}(f)} = \frac{A_{12}(f)}{C_{11}(f)} e^{iF_{12}(f)}$$

donde

$$\hat{H}(f) = \hat{G}(f) e^{i\hat{F}(f)}$$

El estimador de las funciones ganancia y fase es

$$\hat{G}(f) = \frac{A_{12}(f)}{C_{11}(f)}$$

y

$$\hat{F}(f) = F_{12}(f)$$

Estos estimadores necesitan ser corregidos para disminuir sus varianzas, obteniéndose los respectivos estimadores corregidos:

$$\bar{G}(f) = \frac{\bar{A}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}$$

$$\bar{F}(f) = \text{arctang} \left(- \frac{\bar{Q}_{12}(f)}{\bar{L}_{12}(f)} \right)$$

La estimación de la función respuesta frecuencia por otro lado es formalmente equivalente al análisis de regresión mínimo cuadrático de cada frecuencia.

BIBLIOGRAFIA

- AKAIKE, H. (1964) "Studies on the statistical estimation of frequency response functions". Ann. Inst. Statist. Math. Suppl. III, 15, 5-17.
- AKAIKE, H. (1967) "Some problems in the application of the cross-spectral method". (Ed. Harris). Wiley, New York.
- AKAIKE, H. (1969b) "Power spectrum estimation through autoregressive model fitting". Ann. Inst. Statist. Math., 21, 407-419.
- AKAIKE, H. (1973) "Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models" Biometrika, 60, 255-265.
- ALI, M.M. (1977) "Analysis of autoregressive moving average models: Estimation and prediction" Biometrika, 64.
- ALI, M.M. (1978) "Corrections to analysis of autoregressive moving average Models: Estimation and Prediction" Biometrika 65.
- ANDERSON, C. and KAWATA, T. (1968) "Some Integral transforms of characteristic functions". Ann. Math. Statist. 39.
- ANDERSON, T.W. (1971) "Maximum likelihood. Estimation of Parameters of an Autoregressive Process with Moving Average Residuals and other covariance matrices with linear spectrum"
- ANDERSON, T.W. (1977) "Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains". The Ann. of Statist. Vol. 5, n^o5.
- ANDRIETTI, F. and CANEGALLO, C. (1984) "Variances in Spectral Analysis of membrane noise". Att. Acc. Lincei Rend. Fisiol -s.VIOLII, Vol. LXXVI fasc. 4.
- ANDRIETTI, F. (1986) "Evbaluation of the variance of a particular estimate of indirect power, spectrum: Application to spectral analysis of membrane noise". Att. Acc. Lincei Rend. Fis. - s.VIII Vol. LXXX, fasc. 6.
- ARNOLD, L. (1966) "Random Power Series" Statistical Lab.' RM-159, LA-1. Dept. of Statistics. Michigan State Univ.
- BANACH, S. (1935) "Theorie des Operations Linéaires". Z. Subwencji Funduszu Kultury Narodowej. Warsaw.

- BARTLETT, M.S. (1950) "Periodogram analysis and continuous spectra" *Biometrika* 37.
- BARTLETT, M.S. (1954) "Problemes de l'analyse spectrale des series temporelles stationnaires". *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* III-3.
- BARTLETT, M.S. (1955) "An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications" Cambridge University Press. London.
- BARTLETT, M.S. (1957) "Discussion on "Symposium on spectral approach to time series" *J. Roy Statist. Soc. Ser. B*, 19.
- BENDAT, J.S. and PIERSOL, A.G. (1980) "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis" John Wiley New York.
- BIRKHOFF, G. (1967) "A Limitation of Fourier Analysis" *J. Mathem. Mech.* 17.
- BIRBAUM, A. (1962) "On the foundations of statistical inference" *Jour. Amer. Stat. Assoc.* 57, 269.
- BOAS, Jr. R.P. (1948) "More Inequalities for Fourier Transforms" *Duke Math. J.* 15.
- BOCHNER, S. and CHANDRASEKHARAN, K. (1949) "Fourier Transforms" *Ann. Math. Studies*, Vol. 19. Kraus, New York.
- BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M. (1976) "Time Series Analysis: Forecasting and control" Holden-Day California.
- BREIMAN, L. (1968) "Probability" Addison-Wesley.
- CHATFIELD, C. (1975) "The analysis of time series, theory and practice" Chapman and Hall. London.
- CRAMER, H. (1961) "On some classe of non-stationary processes" *Proc. 4th. Berkeley. Symp. on Math. Statist. and Prob.* 57-78. University of California. Press.
- CRAMER, H. and LEADBETTER, M.R. (1967) "Stationary and Prelated Stochastic. Processes" Wiley, New York.
- DAMSLETH, E. (1979) "Analysis of multi-input transfer function models when the inputs are correlated". Norwegian Computing Center. Publication n. 641, Oslo
- DOOB, B.L. (1953) "Stochastic Processes" John Wiley. Sons. New York.
- DURRANI, T.S. and NIGHTINGALE, J.M. (1972) "Data windows for digital spectral analysis *I.E.E. Proceeding* 119.

- FANTE, R.L. (1987) "Signal Analysis and Introduction". John Wiley Sons.
- FELLER, W. (1957) "An introduction to probability, Theory and its Applications". John Wiley Sons. Vol. I. New York.
- FELLER, W. (1966) "An Introduction to Probability, Theory and its Applications". John Wiley Sons. Vol. II. New York.
- FISHMAN, G.S. (1969) "Spectral methods in econometrics" Harward University Press, Cambdrige.
- FISCHER, R.A. and YATES, F. (1963) "Statistical tables for Biological Agricultural and Medical Research. Oliver and Boyd Ltd, Edinburgh.
- GOODMAN, N.R. (1957) "On the joint estimation of the spectral, co-spectrum and quadrature spectrum of a two-dimensional stationary Gaussian process". Sciewntific. Paper 10, Engineering Statistics Laboratory. New York. University.
- HANNAN, E.J. (1960) "Timer Series Analysis" Methuen and Co. Ltd., London, John Wiley Sons. New York.
- HAYKIN, S. (1979). "Non linear methods of spectral analysis" Springer-Verlag. Berlin.
- HARTLEY, H.O. (1949) "Test of significance in harmonic analysis" Biometrika, 36.
- JENKINS, G.M. (1961) "General considerations in the analysis of spectra" Technometrics 3.
- JENKINS, G.M. and PRIESTLEY, M.B. (1957) "The spectral analysis of time series" Roy Statist. Soc. Ser. B. 19.
- JENKINS, G.M. (1963) "Cross-spectral analysis and the estimation of linear open loop transfer functions. In series analysis". Wiley, New York.
- JENKINS, G.M. and WATTS, D.G. (1968) "Spectral analysis and its applications" Holden-Day, San Francisco.
- JONES, D.A. (1978) "Non-Linear. Autoregressive processes. Proc. Roy Soc. London, A. 360.
- JURY, E.I. (1964) "Theory and application of the Z-transform method" John Wiley. New York.
- KAWATA, T. (1972) "Fourier analysis in probability theory" Academic Press. New York.
- KENDALL, M.G. (1946) "The avanced theory of statistics" Charles-Griffin Vol. II, London.

- KOOPMANS, L.H. (1974) "The spectral analysis of time series" Academic Press. New York and London.
- NEHER, E. and SETEVENS C.F. (1977) "Spectral analysis and its applications" Ann. Rev. Biophys. Bioeng. y
- PAGANO, M. (1974) "Estimation of models of autorregressive signal plus white noise" The Annals of Statist. 2, 1.
- PAPOULIS, A. (1965) "Probability, randon variables and stocastic processes" Mc Graw-Hill.
- PARZEN, E. (1957) "On consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series" Ann. Math. Statist. 28.,
- PARZEN, E. (1962) "Stochastic Processes" Holden-Day. San Francisco.
- PARZEN, E. (1963) "Notes on Fourier analysis and spectral windows" Technical Report. n^o 48. Holden-Day, San Francisco.
- PARZEN, E. (1969) "Multiple time series modelling" (Krishnaiah, Ed.). Academic Press, New York.
- PRIESTLEY, M.B. (1962a) "The analysis of stationary processes with mixed spectra" J. Roy Staist. Sci. Ser. B., 24
- PRIESTLEY, M.B. (1962c) "Basic considerations in the estimation of power spectra" Technometrics, 4.
- PRIESTLEY, M.B. (1963) "The spectrum of a continuous process derived from a discrete process" Biometrika, 50.
- PRIESTLEY, M.B. (1981) "Spectral analysis and time series" Volumen I y II Academic Press. London.
- PUKKILA, T. (1982) "On the identification of tenasfer function noise models with several correlated inputs". Scand. J. Statist. 9.
- RAO, C.R. (1965) "Linear statistical inference and its applications. John Wiley. New York.
- ROBERTSON, G.H. (1979) "Influence of data window. Shape on detectability of small signals in white noise" Bull. Labor. Whippany New Jersey.
- SAVAGE, L.J. (1962) "The Foundations of Statistical Inference". Methuen London 1962.
- SHUYUAN, HE. and KEDEM, B. (1989) "Higher order Crossings Spectral Analysis of an Almost Periodic Random Sequence in Noise" I.E.E.E., TRANS. ON Informat. Thor. Vol. 36 n^o 2.
- SCHMIDT, H. (1985) "Resolution bias errors in spectral density, frequency response and coherence function, measurements, IV. Time

- Delay bias errors" Journal of Sound and Vibration 101.
- SCHMIDT, H. (1985) "Resolution bias errors in spectral density, frequency response and coherence function measurements, I: General theory" Journal of Sound and Vibrations 101, 347-362.
- SCHMIDT, H. (1985) "Resolution bias errors in spectral density, frequency response and coherence function measurements, II: Application to first-order systems (white noise excitation)" Journal of Sound and Vibrations 101, 347-362.
- SCHMIDT, H. (1985) "Resolution bias errors in spectral density, frequency response and coherence function measurements, III: Application to second order systems (white noise excitation). Journal of Sound and Vibrations 101, 347-362.
- SOONG, F. and PETERSON, A.M. (1982) "On the high resolution and unbiased frequency estimates of sinusoids in white noise" Dept. of Elect. Engin. Standford University, Standford.
- WHITTLE, P. (1963) "Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods" Universities Press, London.
- WICHERN, D.W. (1973) "The behaviour of the sample autocorrelation function for an integrated moving average process". Biometrika, 60, 235.