

19.824



\* 5 3 0 9 5 4 7 1 4 3 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

# **LA GEOMETRIA DE LOS ABANICOS EN DIMENSION 2**

M. Pilar Vélez Melón

Tesis doctoral. Noviembre de 1994

**Universidad Complutense de Madrid**

Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

**LA GEOMETRIA  
DE LOS  
ABANICOS EN DIMENSION 2**

Memoria presentada por

**M. PILAR VÉLEZ MELÓN**

para optar al grado de

Doctor en Matemáticas

por la Universidad Complutense de Madrid

Madrid, Noviembre de 1994

*Iban por los caminos del oeste sin prisa y  
sin rumbo obligatorio, cambiando la ruta de  
acuerdo al capricho de un instante, al signo  
premonitorio de una bandada de pájaros,  
a la tentación de un nombre desconocido.*

ISABEL ALLENDE

# Agradecimientos

Estas páginas recogen unos años de trabajo dirigido, con todo acierto, por el profesor Jesús Ruiz Sancho, cuya ayuda y apoyo han sido primordiales todo este tiempo. A él quiero agradecer especialmente el haberme infundido la confianza necesaria para llegar hasta aquí, el haber atendido solícito todas mis dudas y las que no lo eran tanto y, cómo no, el verme metida en este “berengenal”.

A Fabrizio Broglia y Francesca Acquistapace (y a su hijo Claudio) agradezco la hospitalidad con que me acogieron en las dos ocasiones que visité la Universidad de Pisa, y durante las cuales se realizó parte de esta tesis. Trabajando con ellos descubrí las ventajas del trabajo en equipo.

Mi agradecimiento a todas las personas de los Departamentos de Geometría y Topología y de Álgebra (de la Universidad Complutense) que de uno u otro modo me han ayudado. Especialmente quiero agradecer a Mariemi Alonso las largas conversaciones matemáticas que hemos mantenido y todo el ánimo que me ha dado. Mi agradecimiento también a Carlos Andradas, Jose Manuel Gamboa y M. Jesús de la Puente por su ayuda; a Raquel Díaz y Eugenia Rosado por el día a día en el despacho; y a Fernando San Jose y Enrique Arrondo por haber sido mis maestros en el arte del T<sub>E</sub>X y del MAC.

Esta tesis, y casi todo, no habría sido posible sin el cariño incondicional y los medios que mi familia puso a mi alcance. A Ellos corresponde mi agradecimiento infinito. Va por Ellos.

*A mi madre y mi abuela,  
al fin y al cabo, mis madres.  
A la memoria de mi padre.*

# Introducción

## 1. Basicidad de semialgebraicos.

La geometría semialgebraica estudia, dicho de manera intuitiva, los conjuntos que aparecen como soluciones de sistemas de ecuaciones e inecuaciones polinomiales sobre los números reales; estos conjuntos se llaman semialgebraicos (ver [BCR], [BR] y el capítulo I de esta memoria). Un aspecto esencial dentro de este estudio es conocer propiedades geométricas de los conjuntos semialgebraicos que se deriven de la naturaleza de los sistemas que los definen.

Atendiendo a aspectos cuantitativos de las posibles presentaciones de los semialgebraicos se define una subfamilia de estos, los semialgebraicos básicos. En general, un conjunto semialgebraico es básico si puede ser descrito por un único sistema de desigualdades polinomiales estrictas (abiertos básicos) o laxas (cerrados básicos). Por tanto, el primer problema que se plantea es decidir CUÁNDO un semialgebraico es básico, y a ser posible de modo ALGORÍTMICO. No es difícil hacer esto en dimensión 1: todo semialgebraico 1-dimensional se puede describir con una única desigualdad ([Rz], 1984).

En dimensión 2 aparecen los primeros conjuntos semialgebraicos no básicos (el primer ejemplo fue dado por Łojasiewicz en 1965 [L]), con lo cual ésta es la menor dimensión en que el problema tiene interés. Pero además, se sabe que en cualquier dimensión la basicidad siempre se puede detectar via intersección con ciertas superficies algebraicas bien escogidas ([AR1], 1991). En consecuencia, la dimensión 2 no sería sólo la primera sino, esencialmente, la única que se necesitaría tratar. Así, este trabajo está dedicado al estudio de los *conjuntos semialgebraicos básicos en superficies reales*.

## 2. Precedentes.

El problema de saber cuándo un conjunto semialgebraico es básico ha sido abordado desde dos vertientes contrapuestas:

- *algebraica* (escuela alemana: Bröcker, Scheiderer, Marshall, Becker), desde 1974 ;
- *geométrica* (escuela italiana: Galbiati, Tognoli, Acquistapace, Broglia, Fortuna), desde 1988.

Desafortunadamente, la interrelación entre ambas vertientes es escasa, excepto por algunos trabajos recientes de Andradás y Ruiz (a partir de 1991).

En general, la teoría algebraica es la que va por delante desde el punto de vista cuali-

tativo. Sus técnicas, principalmente la teoría de abanicos en espacios de órdenes ([Br2]), permiten obtener resultados muy completos, pero no constructivos, por lo que no generan soluciones algorítmicas. Habitualmente, estas soluciones algorítmicas sólo han aparecido después, recurriendo a métodos geométricos. Es por ello muy importante entender mejor toda la geometría contenida en la teoría de abanicos. Esto explica la idea que trata de expresar el título: LA GEOMETRÍA DE LOS ABANICOS EN DIMENSIÓN 2.

### 3. Resultados obtenidos.

Los resultados centrales de esta tesis son:

- A. *Un criterio geométrico de basicidad* (II.2.15). La basicidad de un conjunto semialgebraico está determinada por dos obstrucciones:
- una GLOBAL que controla el comportamiento de la frontera del semialgebraico dado; y
  - otra LOCAL que controla la basicidad en un entorno de cada punto (de hecho, una vez controlada la obstrucción global, la local se reduce a controlar un número finito de puntos).

Además, la obstrucción local se hace global después de una cantidad finita de transformaciones cuadráticas.

Como consecuencia de esto obtenemos, de un modo sencillo, un criterio para que un semialgebraico sea principal (es decir, pueda ser descrito mediante una única desigualdad). Dedicamos el capítulo II a las demostraciones y otras consecuencias de estos criterios, siempre desde un punto de vista geométrico.

- B. *Una descripción explícita de todos los abanicos de una superficie*, mediante parametrizaciones de Puiseux generalizadas. Esto incluye el estudio exhaustivo de todas las valoraciones reales del cuerpo de funciones racionales de la superficie.

A la vista de esta descripción deducimos que para controlar la basicidad bastan aquellos abanicos que vienen descritos, salvo transformaciones cuadráticas, por auténticas parametrizaciones de Puiseux. El estudio de las valoraciones y los abanicos de una superficie constituyen el contenido del capítulo III.

En el capítulo IV convertimos estos resultados en *algoritmos* teóricamente viables. Concretamente, comprobamos que es posible resolver algorítmicamente los siguientes problemas:

- Verificación de la obstrucción global,
- Verificación de la obstrucción local.

En consecuencia, la basicidad es verificable algorítmicamente. Además, en caso de obtener respuesta negativa a la basicidad, la lista de abanicos obtenida en el capítulo III proporciona una solución algorítmica a la siguiente cuestión:

- Construcción de abanicos que obstruyan la basicidad en el sentido de Bröcker ([Br2]).

#### 4. Métodos.

Los métodos que utilizamos son mayoritariamente de naturaleza geométrica: desigualdad de Lojasiewicz, homología de semialgebraicos y aproximación de funciones  $C^\infty$ , separación de semialgebraicos, etc. Incluso las técnicas del capítulo III, que en apariencia son estrictamente algebraicas, descansan en la búsqueda de una curva que represente los órdenes (y por consiguiente las valoraciones y los abanicos) por evaluación. Por supuesto, el estudio de valoraciones, un tema que siempre ha interesado en geometría algebraica (ver [Z], [Ab]; [AGR], [Pu] para el caso de superficies reales), involucra argumentos específicos de teoría de valoraciones, como extensiones de Galois, la desigualdad fundamental, etc.

Todo esto tiene dos consecuencias importantes:

- (i) Se reinterpreta geoméricamente toda de la teoría de valoraciones y abanicos que subyace a la basicidad en dimensión 2. De hecho, no se usan los resultados generales de esa teoría, si no que se obtienen a partir de nuestros criterios.
- (ii) Se dan algoritmos que resuelven los problemas tratados.

Estos procedimientos algorítmicos se consiguen combinando nuestros resultados con diversos algoritmos de geometría algebraica real (alguno de ellos modificado). Destaquemos aquí los siguientes: computación de las ramas analíticas locales y globales de una curva algebraica real ([CPRRR]), computación de la topología de un semialgebraico plano ([AIRa]), computación de factores irreducibles de polinomios ([Ka]), verificación de la propiedad de separación local de semialgebraicos ([ABF1]).



# Indice

<b>I Preliminares</b>	<b>1</b>
1 Conjuntos semialgebraicos básicos . . . . .	1
2 Espacios de órdenes . . . . .	5
3 Valoraciones reales . . . . .	9
4 Abanicos . . . . .	12
<b>II Conjuntos semialgebraicos básicos</b>	<b>15</b>
1 Conjuntos básicos y genéricamente básicos . . . . .	15
2 Caracterización de básicos y principales . . . . .	21
Aproximación y separación . . . . .	21
Semialgebraicos básicos . . . . .	23
Semialgebraicos principales . . . . .	33
3 Cotas de Bröcker-Scheiderer y estructura de los conjuntos semialgebraicos .	35
4 Revisión geométrica de la teoría de abanicos . . . . .	39
<b>III Descripción de abanicos</b>	<b>47</b>
1 Descripción de órdenes . . . . .	47
Órdenes centrados en el origen . . . . .	50
Órdenes en una superficie . . . . .	53
2 Valoraciones compatibles . . . . .	55
Cuerpos de series . . . . .	57
Cuerpos de funciones . . . . .	67
3 Abanicos . . . . .	70
Teorema de Trivialización . . . . .	70
Abanicos centrados en el origen . . . . .	78
Abanicos en superficies no singulares . . . . .	99
<b>IV Aspectos algorítmicos</b>	<b>102</b>
1 Obstrucción global . . . . .	102
2 Obstrucción local . . . . .	109
3 Basicidad y abanicos . . . . .	116
<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>

# Capítulo I

## Preliminares

En este capítulo recopilaremos algunos conceptos y notaciones que usaremos a lo largo de la memoria. Comenzaremos recordando, en las secciones 1 y 2, algunas generalidades sobre los conjuntos semialgebraicos y el espectro real. En la sección 3 repasaremos cuestiones concernientes a la compatibilidad de órdenes y valoraciones. Finalmente, en la sección 4, haremos una breve introducción al concepto de abanico. Todo lo relativo a conjuntos semialgebraicos y álgebra real que se usará puede encontrarse, principalmente, en [BCR].

### 1 Conjuntos semialgebraicos básicos

Sea  $X$  un conjunto algebraico irreducible de  $\mathbb{R}^n$ , es decir

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0, \dots, f_r(x) = 0\}$$

con  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  (=anillo de polinomios en  $n$  variables con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ). Podemos considerar  $X$  como el conjunto de ceros de un único polinomio  $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , tomando  $h = f_1^2 + \dots + f_r^2$ .

Sea  $\mathcal{R}(X)$  el anillo de funciones regulares de  $X$ , definido como sigue:  $h \in \mathcal{R}(X)$  si y sólo si  $h = f/g$  en  $X$  con  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}(X)$  y  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 1.1** *Un subconjunto  $S$  de  $X$  es semialgebraico si existen funciones regulares sobre  $X$ ,  $f_{i1}, \dots, f_{is_i}, g_i \in \mathcal{R}(X)$  con  $1 \leq i \leq t$  tales que*

$$S = \bigcup_{i=1}^t \{x \in X : f_{i1}(x) > 0, \dots, f_{is_i}(x) > 0, g_i(x) = 0\}.$$

Escribiremos  $S = \bigcup \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\}$ .

**Teorema 1.2 (Teorema de finitud)** *Sea  $S \subseteq X$  un conjunto semialgebraico abierto (resp. cerrado) en la topología usual de  $\mathbb{R}^n$  restringida a  $X$ . Entonces  $S$  es unión finita de conjuntos semialgebraicos del tipo:*

$$\{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \\ (\text{resp. } \{x : f_1 \geq 0, \dots, f_s \geq 0\})$$

con  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$ .

*Demostración:* En [BCR, 2.7.1] está demostrado el teorema de finitud para semialgebraicos de  $\mathbb{R}^n$ . Un semialgebraico cerrado en  $X$  se puede poner con  $S = \bar{S} \cap X$ ; con lo cual, se deduce inmediatamente el teorema para cerrados. Por otra parte si  $S$  es abierto semialgebraico, se aplica el caso cerrado, ya probado, al complementario  $X \setminus S$ .  $\square$

A la vista del teorema de finitud se plantea de forma inmediata el definir los semialgebraicos abiertos básicos y cerrados básicos.

**Definición 1.3** *Un subconjunto semialgebraico  $S$  de  $X$  es abierto básico (resp. cerrado básico) si existen  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  tales que*

$$S = \{x : f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$$

$$(\text{resp. } S = \{x : f_1 \geq 0, \dots, f_s \geq 0\}).$$

**Definición 1.4** *Un conjunto semialgebraico  $S$  de  $X$  es abierto principal (resp. cerrado principal) si existe  $f \in \mathcal{R}(X)$  tal que*

$$S = \{f > 0\} \quad (\text{resp. } S = \{f \geq 0\})$$

**Observación 1.5** En  $X$  manejaremos dos topologías: la topología usual heredada de  $\mathbb{R}^n$  y la topología de Zariski. Denotaremos con un subíndice  $Z$  las operaciones en esta última topología.

Sea  $S$  un subconjunto de  $X$ . Entenderemos por *frontera de Zariski* de  $S$ , y la denotaremos  $\partial_z S$ , la adherencia en la topología de Zariski de la frontera usual  $\partial S$  de  $S$ :

$$\partial_z S = \text{Adh}_z(\bar{S} \setminus \text{Int}(S)) = \text{Adh}_z(\bar{S} \cap \overline{X \setminus S}).$$

**Observaciones 1.6** *Sea  $S$  un conjunto semialgebraico en  $X$ .*

- 1) *Si  $S$  es cerrado básico, entonces  $S$  es cerrado.*
- 2) *Si  $S$  es abierto básico en  $X$ , entonces  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ .*

En efecto, supongamos  $S = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$  con  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$ . Para cada  $x \notin S$  existe  $i \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_i(x) \leq 0$ ; si además  $x \in \bar{S}$ , sólo puede ser  $f_i(x) = 0$ . Consecuentemente,  $\bar{S} \setminus S \subset \{f_1 \cdots f_s = 0\}$ . Teniendo en cuenta que  $\{f_1 \cdots f_s = 0\}$  es un cerrado de Zariski,  $\text{Adh}_Z(\bar{S} \setminus S) \subset \{f_1 \cdots f_s = 0\}$ . Por otra parte  $\{f_1 \cdots f_s = 0\} \cap S = \emptyset$ , con lo cual  $S \cap \text{Adh}_Z(\bar{S} \setminus S) = \emptyset$ .  $\square$

**Observación 1.7** ([BCR, 2.8]) Se define la dimensión de un conjunto semialgebraico  $S$  como la dimensión de su adherencia de Zariski,  $\text{Adh}_z(S)$  (es decir, la dimensión del anillo  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}(S)$ ). Evidentemente,  $\dim(S) \leq \dim(X)$ , y como es de esperar coincide con la dimensión topológica usual usual. En particular se tiene:

- a)  $\dim(S) = \dim(\bar{S}) = \dim(\text{Adh}_z(S))$ ,
- b)  $\dim(\bar{S} \setminus S) < \dim(S)$ ,
- c) Si  $S$  es un abierto no vacío contenido en  $\text{Reg}(X)$ , entonces  $\dim(S) = \dim(X)$ .

**Definición 1.8** *Dos conjuntos semialgebraicos  $S$  y  $T$  de  $X$  son genéricamente iguales si*

$$\dim((S \setminus T) \cup (T \setminus S)) < \dim(X);$$

*en otras palabras, existen  $h \in \mathcal{R}(X)$ ,  $h \neq 0$ , tal que  $S \setminus \{h = 0\} = T \setminus \{h = 0\}$ .*

**Observación 1.9** Evidentemente, *ser genéricamente igual* es una relación de equivalencia, cuyas clases son estables por isomorfismos birracionales de  $X$ . Además, genéricamente no es posible distinguir entre abiertos y cerrados.

Dado un semialgebraico  $S$  de  $X$ , sea

$$S^* = \text{Int} \left( \overline{\text{Int}(S) \cap \text{Reg}(X)} \right);$$

Llamaremos a este conjunto semialgebraico abierto, el semialgebraico *regularmente abierto* asociado a  $S$ . Claramente,  $S$  y  $S^*$  son genéricamente iguales; además, se obtienen de modo inmediato las siguientes propiedades:

- a)  $S$  y  $T$  son genéricamente iguales si y sólo si  $S^* = T^*$ ;
- b)  $(S^*)^* = S^*$ ;
- c)  $S = T^*$  para algún semialgebraico  $T$  si y sólo si  $S = S^*$ ;
- d) Si  $S = S^*$ , entonces  $\text{Int}(\overline{S}) = S$ .

**Definición 1.10** Un conjunto semialgebraico  $S$  de  $X$  es genéricamente básico si es genéricamente igual a un abierto básico; y es genéricamente principal si es genéricamente igual a un abierto principal.

**Observaciones 1.11** 1) Un semialgebraico es genéricamente básico si y sólo si existe un conjunto algebraico  $C$  estrictamente contenido en  $X$  tal que  $S \setminus C$  es abierto básico.

En efecto, si  $S \setminus \{h = 0\} = B \setminus \{h = 0\}$ , donde  $B$  es abierto básico, entonces  $S \setminus \{h = 0\} = B \cap \{h^2 > 0\}$ .

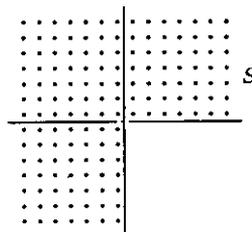
2) Un semialgebraico  $S$  es genéricamente básico si y sólo si su asociado  $S^*$  es genéricamente básico.

3) Ser genéricamente básico se conserva por isomorfismos birracionales. □

Para  $\dim(X) \leq 1$  todo semialgebraico abierto (resp. cerrado) es abierto (resp. cerrado) principal (ver [Rz]). Sin embargo, en dimensión 2 es sencillo encontrar ejemplos de semialgebraicos no básicos.

**Ejemplo 1.12** El primer ejemplo de un semialgebraico abierto  $S$ , no abierto básico fue dado por Lojasiewicz (ver [L, n°15]):

$$S = \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

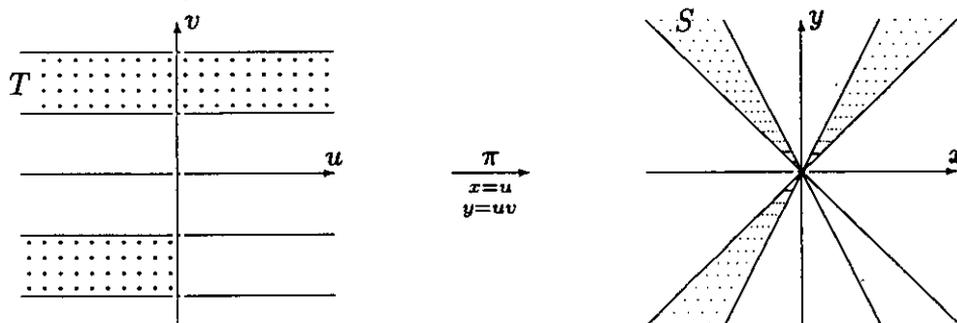


La frontera de Zarsiki de  $S$  es  $\partial_z S = \{xy = 0\}$ . Por lo tanto  $\partial_z S \cap S \neq \emptyset$ . Entonces, como hemos observado en 1.5,  $S$  no es abierto básico.

De hecho, podríamos decir que éste es el único ejemplo de no básico; ya que este fenómeno (i.e., la adherencia de Zariski de un abierto de la frontera de  $S$  atraviese  $S$ ) resulta ser la única obstrucción “genérica” a la basicidad. Para detalles sobre estas afirmaciones remitimos a [AR2] y al capítulo II de esta memoria.

A continuación daremos un ejemplo de semialgebraico  $S \subset \mathbb{R}^2$  que no interseca a su frontera de Zariski, pero no es abierto básico. Con ello pretendemos aclarar en qué sentido el ejemplo de Lojasiewicz es el único y plantear una cuestión que se resolverá en los capítulos II y IV.

**Ejemplo 1.13** Sea  $S = \{(y-x)(y-2x) < 0\} \cup \{(y+x)(y+2x) < 0, x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Con un dibujo de  $S$  es fácil ver que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Por otra parte, haciendo una explosión  $\pi : \mathbb{R}^2 \times P_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  en el origen obtenemos un semialgebraico  $T$  cuya imagen  $\pi(T)$  (que es birregularmente isomorfa a  $T$ ) es genéricamente igual a  $S$ . Obsérvese que  $T$  presenta la misma obstrucción que el ejemplo de Lojasiewicz; luego,  $S$  no es genéricamente básico.



Una de las cuestiones que nos planteamos en esta tesis es encontrar condiciones geométricas en  $X$  (esto es, sin necesidad de realizar transformaciones birracionales) que expliquen situaciones de este tipo. En este ejemplo, es fácil dar un argumento que demuestre la no basicidad sin necesidad de explotar.

Supongamos que  $S = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$  con  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x, y]$ . Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  denotemos por  $L_\lambda$  la recta a través de  $(0, 0)$  de pendiente  $\lambda$ ,  $L_\lambda = \{(t, \lambda t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Por un lado, para todo  $\lambda \in (1, 2)$  tenemos que  $L_\lambda \setminus \{(0, 0)\} \subset S$ . Entonces, para todo  $x \in L_\lambda \setminus \{(0, 0)\}$  y para todo  $j = 1, \dots, s$  se verifica que  $f_j(x) > 0$ .

Por otro lado, para todo  $\lambda \in (-2, -1)$  tenemos que  $\{(x, y) \in L_\lambda : x > 0\} \subset S$  y que  $\{(x, y) \in L_\lambda : x < 0\} \subset X \setminus S$ ; es decir, existe  $j_0 \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_{j_0}$  cambia de signo en un entorno de 0 cortado con  $L_\lambda$ . Sea  $f_{j_0}(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k$ , con lo cual  $f(t, \lambda t) = \sum a_{ik} \lambda^k t^{i+k}$ . Tomemos  $l = \min\{i+k : a_{ik} \neq 0\}$ . Entonces, para todo  $\lambda \in (-2, -1)$  excepto un número finito, se tiene

$$\begin{aligned} t^l \sum_{i+k=l} a_{ik} \lambda^k &> 0 \quad \text{para } t > 0 \text{ suficientemente pequeño;} \\ t^l \sum_{i+k=l} a_{ik} \lambda^k &< 0 \quad \text{para } t < 0 \text{ suficientemente pequeño.} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $l$  tiene que ser impar.

Pero, también para todo  $\lambda \in (1, 2)$  excepto un número finito, se tiene

$$\begin{aligned} t^l \sum_{i+k=l} a_{ik} \lambda^k &> 0 \quad \text{para } t > 0 \text{ suficientemente pequeño;} \\ t^l \sum_{i+k=l} a_{ik} \lambda^k &> 0 \quad \text{para } t < 0 \text{ suficientemente pequeño.} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $l$  tiene que ser par. Lo cual es una contradicción con lo obtenido arriba.

En consecuencia,  $S$  no puede ser abierto básico.

## 2 Espacios de órdenes

En esta sección incluiremos algunas generalidades sobre el espectro real, los conjuntos constructibles y el operador tilde ([BCR], [Lm] y [ABR2]).

### Espectro real

Sea  $A$  un anillo conmutativo con unidad. Recordemos que un *cono primo*  $\alpha$  de  $A$  es un subconjunto de  $A$  que verifica las siguientes propiedades:

- (i)  $a + b, ab \in \alpha$ , para todo  $a, b \in \alpha$ ;
- (ii)  $a^2 \in \alpha$ , para todo  $a \in A$ ;
- (iii)  $-1 \notin \alpha$ ;
- (iv)  $ab \in \alpha \Rightarrow a \in \alpha$  ó  $-b \in \alpha$ .

Un cono primo es equivalente a un par  $(\mathfrak{p}, \leq)$  donde  $\mathfrak{p} = \alpha \cap -\alpha$  es un ideal primo de  $A$  y  $\leq$  es un orden en el cuerpo residual  $k(\mathfrak{p})$  de  $\mathfrak{p}$ . El ideal  $\mathfrak{p}$  se llama *soporte de  $\alpha$*  y se denota  $\text{Sop}(\alpha)$ . Adoptaremos la notación  $f(\alpha) > 0$  (resp.  $= 0, < 0$ ) ó  $\alpha(f) > 0$  (resp.  $= 0, < 0$ ) para indicar que  $f + \mathfrak{p}$  es  $> 0$  (resp.  $= 0, < 0$ ) para el orden  $\leq$  de  $k(\mathfrak{p})$ .

**Definición 2.1** El espectro real de  $A$ , que denotaremos  $\text{Spec}_r(A)$ , es el espacio topológico formado por todos los conos primos de  $A$ , con la topología dada por la base de abiertos

$$\mathcal{U}(f_1, \dots, f_r) = \{\alpha \in \text{Spec}_r(A) : f_1(\alpha) > 0, \dots, f_r(\alpha) > 0\}$$

con  $f_1, \dots, f_r \in A$ .

**Observación 2.2** Un caso al que prestaremos especial atención, es el de un cuerpo  $A = K$ . Entonces,  $\text{Spec}_r(K)$  es el *espacio de órdenes de  $K$* .

Si  $A$  es un dominio de integridad y  $K$  su cuerpo de fracciones, el espectro real de  $K$  resulta ser el subespacio topológico del espectro real de  $A$  formado por todos los conos primos con soporte  $(0)$ .

**Definición 2.3** Sean  $\alpha, \beta \in \text{Spec}_r(A)$ . El cono primo  $\beta$  es una *especialización de  $\alpha$* , lo que denotamos  $\alpha \rightarrow \beta$ , si  $\alpha \subset \beta$ . En este caso decimos también que  $\alpha$  es una *generalización de  $\beta$* .

**Observación 2.4** Un cono primo  $\beta$  es una especialización de  $\alpha$  si y sólo si  $\beta \in \text{Adh}(\{\alpha\})$ . Las especializaciones de un elemento  $\alpha \in \text{Spec}_r(A)$  forman una cadena totalmente ordenada.

**Definición 2.5** Un subconjunto  $C$  del espectro real de  $A$  es un *conjunto constructible* si existen  $f_{ij}, g_i \in A$ , con  $i = 1, \dots, t$ ,  $j = 1, \dots, s_i$ , tales que

$$C = \bigcup_{i=1}^t \{\alpha \in \text{Spec}_r(A) : f_{i1}(\alpha) > 0, \dots, f_{is_i}(\alpha) > 0, g_i(\alpha) = 0\}.$$

Escribiremos  $C = \bigcup \{\alpha : f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\}$ .

Los constructibles de  $\text{Spec}_r(A)$  generan otra topología en  $\text{Spec}_r(A)$ , más fina que la de Harrison, que llamaremos topología constructible. El espectro real con la topología constructible resulta ser un espacio topológico compacto y totalmente desconectado, en el cual los conjuntos a la vez abiertos y cerrados son precisamente los constructibles. Si  $A$  es un cuerpo, ambas topologías coinciden. En lo que sigue, consideraremos la topología de Harrison, salvo mención expresa de otra cosa.

**Definición 2.6** *La dimensión de un cono primo  $\alpha \in \text{Spec}_r(A)$  es la dimensión del anillo  $A/\mathfrak{p}$ .*

*La dimensión de un constructible  $C$  de  $\text{Spec}_r(A)$  es el supremo de las dimensiones de los conos primos de  $A$  contenidos en  $C$ .*

**Ejemplo 2.7** ([BCR, 1.1.2 y 7.1.4]) Sea  $A = \mathbb{R}[x]$  el anillo de polinomios en una variable con coeficientes reales, el espectro real de  $A$  está formado por los siguientes elementos:

- El soporte  $\mathfrak{p}$  de  $\alpha$  es un ideal maximal, entonces  $k(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}$  y  $\alpha$  se identifica de modo natural con un punto  $a \in \mathbb{R}$  como sigue: dado  $f \in \mathbb{R}[x]$ ,  $f(\alpha) > 0$  (resp.  $= 0, < 0$ ) si y sólo si  $f(a) > 0$  (resp.  $= 0, < 0$ ).
- El soporte  $\mathfrak{p}$  de  $\alpha$  es  $(0)$ , en este caso  $\alpha$  es un elemento de  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}(x))$  y se identifica de modo natural con uno de los siguientes conos primos: sea  $a \in \mathbb{R}$ ,

- $a^+ : f(a^+) > 0$  si y sólo si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(y) \geq 0$  para todo  $y \in (a, a + \varepsilon)$
- $a^- : f(a^-) > 0$  si y sólo si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(y) \geq 0$  para todo  $y \in (a - \varepsilon, a)$
- $+\infty : f(+\infty) > 0$  si y sólo si existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $f(y) \geq 0$  para todo  $y > m$
- $-\infty : f(-\infty) > 0$  si y sólo si existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $f(y) \geq 0$  para todo  $y < m$

En lo que respecta a la topología, no es difícil comprobar que está generada por los intervalos  $[a^+, b^-]$ ,  $[-\infty, b^-]$  y  $[a^+, +\infty]$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ .

En consecuencia,  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}(x)) = \{a^+, a^-, +\infty, -\infty : a \in \mathbb{R}\}$ . Además, tenemos las siguientes especializaciones en  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}[x])$ :  $a^+$  y  $a^-$  especializan al cono primo  $a$ , mientras que  $+\infty$  y  $-\infty$  no tienen especialización de dimensión 0.  $\square$

Concluimos este repaso general del espectro real de un anillo, reseñando el carácter functorial de este. Concretamente, si  $\psi : A \rightarrow B$  es un homomorfismo de anillos, entonces tenemos una aplicación  $\psi^* : \text{Spec}_r(B) \rightarrow \text{Spec}_r(A)$ , donde  $\psi^*(\alpha)(f) = \alpha(\psi(f))$  para  $f \in A$ .

## Operador tilde

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto algebraico real irreducible, denotemos por  $\mathcal{R}(X)$  el anillo de funciones regulares de  $X$  y por  $\mathcal{K}(X)$  su cuerpo de fracciones, esto es, el cuerpo de funciones racionales de  $X$ . El cuerpo  $\mathcal{K}(X)$  es formalmente real.

El operador tilde nos da la relación entre los semialgebraicos de  $X$  y los constructibles de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  (o de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ ). Denotaremos por  $\mathcal{A}$  el conjunto de semialgebraicos de  $X$ , y por  $\tilde{\mathcal{A}}$  el conjunto de constructibles de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$ .

**Definición 2.8** El operador tilde, entre  $\mathcal{A}$  y  $\tilde{\mathcal{A}}$  es la siguiente correspondencia: a un conjunto semialgebraico

$$S = \bigcup_{i=1}^r \{x : f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\} \subseteq X$$

le hacemos corresponder el constructible

$$\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^r \{\sigma : f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\} \subseteq \text{Spec}_r(\mathcal{R}(X)).$$

Este operador es, de hecho, un isomorfismo entre  $\mathcal{A}$  y  $\tilde{\mathcal{A}}$ . En el siguiente teorema aparece recogida esta afirmación. Este resultado es una consecuencia del teorema del homomorfismo de Artin-Lang ([BCR, 4.1.2]) y del teorema de finitud (1.2), su demostración completa opuede verse en [BCR, 7.2].

**Teorema 2.9** El operador tilde está bien definido y da una biyección entre  $\mathcal{A}$  y  $\tilde{\mathcal{A}}$  que conserva las operaciones conjuntistas (uniones finitas, intersecciones finitas y complementarios) y las operaciones topológicas (adherencias e interiores).

**Observación 2.10** Tenemos una inmersión canónica de  $X$  en  $\text{Spec}_r(A)$ , de tal modo que cada  $x \in X$  puede ser visto como el cono primo de soporte el ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$  de  $x$  y con el único orden de  $\mathbb{R}$  en el cuerpo residual  $k(\mathfrak{m}_x) = \mathbb{R}$ . De hecho, estos son los únicos conos primos de dimensión 0 de  $A$ . Así, para todo constructible  $C$  de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$ ,  $C \cap X$  es un semialgebraico definido por la misma fórmula que  $C$ . La aplicación  $C \rightarrow C \cap X$  es la inversa del operador tilde.

**Observación 2.11** En relación con el carácter functorial del espectro real, cabe señalar que el operador tilde se comporta bien con respecto a las funciones semialgebraicas (i.e., las funciones entre conjuntos semialgebraicos cuyo grafo es también un conjunto semialgebraico [BCR, 2.2.5]). En concreto, dada una función semialgebraica  $f : S \rightarrow T$ , existe una única aplicación  $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{T}$  tal que  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{T}') = \widetilde{f^{-1}(T')}$ , para todo semialgebraico  $T' \subset T$ ; además, si  $f$  es homeomorfismo entonces  $\tilde{f}$  es homeomorfismo (ver [BCR, 7.2.8]).

**Definición 2.12** El operador tilde genérico entre  $\mathcal{A}$  y  $\tilde{\mathcal{A}} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  asigna a un semialgebraico  $S$  el constructible  $\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ .

El operador tilde genérico es obviamente suprayectivo. Sin embargo, no es inyectivo, como podemos comprobar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.13** Sea  $X = \mathbb{R}$  y consideremos los semialgebraicos  $S = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{t \neq 1\}$  y  $T = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{t \neq 0\}$ . Cualquier orden en  $\mathcal{K}(X)$  hace  $t \neq 1$  y  $t \neq 0$ , luego

$$\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{T} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)).$$

Pero,  $S \neq T$ , con lo cual no se tiene la inyectividad.

Explicitemos a continuación hasta que punto no es inyectivo el operador tilde genérico.

**Proposición 2.14** *Sean  $S$  y  $T$  dos conjuntos semialgebraicos contenidos en  $X$ . Entonces,  $\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{T} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  si y sólo si  $S$  y  $T$  son genéricamente iguales.*

*Demostración:* Supongamos que  $S$  y  $T$  no son genéricamente iguales y sea, por ejemplo,  $\dim(X) = \dim(S \setminus T)$ . Entonces existe  $x \in \text{Reg}(X)$  y un entorno semialgebraico  $U \subset S \setminus T$  de  $x$  de dimensión igual a la dimensión de  $X$ . Como el anillo  $\mathcal{R}(X)_{m_x}$  es regular existe un cono primo  $\alpha$  en  $\mathcal{R}(X)$  de soporte  $(0)$  tal que  $\alpha \rightarrow x$  ([BCR], cap.10). Puesto que  $x \in U$ ,  $\alpha \in \tilde{U} \subset \tilde{S} \setminus \tilde{T}$ . Por lo tanto,  $\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) \neq \tilde{T} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ , ya que que  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ .

Recíprocamente, supongamos que  $S$  y  $T$  son genéricamente iguales. Obsérvese que  $S \setminus \{h = 0\} = S \cap \{h^2 > 0\}$  y como el operador tilde conserva las operaciones conjuntistas, tenemos

$$\widetilde{S \setminus \{h = 0\}} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)).$$

De aquí obtenemos el resultado. □

Denotemos  $\mathcal{A}^* = \{S^* : S \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}$ , donde  $S^*$  es el semialgebraico regularmente abierto asociado a  $S$ , definido en la observación 1.9.

**Proposición 2.15** *El operador tilde genérico restringido a  $\mathcal{A}^*$  es biyectivo.*

*Demostración:* Dados dos semialgebraicos  $S$  y  $T$  en  $X$ , aplicando 2.14.y 1.9 se tiene:  $\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{T} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  si y sólo si  $S$  y  $T$  son genéricamente iguales si y sólo si  $S^* = T^*$ . Con lo cual el operador tilde genérico restringido a  $\mathcal{A}^*$  es inyectivo.

Por otra parte, todo semialgebraico  $S$  es genéricamente igual a  $S^*$ . En consecuencia, tenemos la sobreyectividad. □

### 3 Valoraciones reales

En esta sección pondremos de manifiesto las relaciones entre los elementos del espectro real de un cuerpo y los anillos de valoración de este. Para generalidades sobre anillos de valoración remitimos a [Bou] y [ZS].

Un anillo de valoración  $V$  de un cuerpo  $K$  es un *anillo de valoración real* si el cuerpo residual  $k_V$  de  $V$  es formalmente real.

Sea  $K$  un cuerpo real y  $V$  un anillo de valoración de  $K$

**Definición 3.1** Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(K)$ . Un anillo de valoración  $V$  de  $K$  es compatible con  $\alpha$  si para todo  $x \in K$ ,  $y \in V$  tales que  $0 < x < y$  es  $x \in V$  (i.e.  $V$  es convexo en  $K$  para  $\alpha$ ). Diremos también que  $V$  y  $\alpha$  son compatibles.

**Notación 3.2** Sea  $V$  un anillo de valoración de  $K$ . Denotaremos por  $m_V$  su ideal maximal, por  $k_V$  su cuerpo residual y por  $p : V \rightarrow k_V = V/m_V$  el homomorfismo  $p(x) = x + m_V = \bar{x}$ , que da el lugar canónico asociado a  $V$ .

En la siguiente proposición recogeremos algunas propiedades de órdenes y valoraciones compatibles; las demostraciones pueden verse en [BCR, 10.1].

**Proposición 3.3** Sea  $V$  un anillo de valoración de  $K$  y  $\alpha \in \text{Spec}_r(K)$ . Se verifica:

- 1)  $V$  y  $\alpha$  son compatibles si y sólo si  $1 + m_V$  está contenido en el cono positivo de  $\alpha$ .
- 2) Si  $V$  es compatible con  $\alpha$ , podemos dar un orden  $\bar{\alpha}$  en el cuerpo residual  $k_V$  de  $V$ , que llamaremos orden inducido por  $\alpha$ , de la siguiente forma: dado  $\bar{x} \in k_V$ ,  $\bar{x} > 0$  si y sólo si  $x$  es unidad en  $V$  y  $x > 0$ . Tenemos que  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  en  $\text{Spec}_r(V)$ .

3) Sea  $W$  otro anillo de valoración de  $K$  compatibles con  $\alpha$ , entonces  $V \subseteq W$  o  $W \subseteq V$ ; es decir, los anillos de valoración compatibles con un orden forman una cadena totalmente ordenada por inclusión.

**Definición 3.4** Sean  $A$  un anillo conmutativo con unidad y  $\alpha$  un orden en un cuerpo  $K \supset A$ . Se define el cierre convexo de  $A$  en  $K$  respecto de  $\alpha$  como el conjunto siguiente:

$$V_0 = \{x \in K : \text{existe } a \in A \text{ con } -a < x < a\}.$$

**Proposición 3.5** El cierre convexo de  $A$  en  $K$  respecto de  $\alpha$  es el menor anillo de valoración de  $K$  compatible con  $\alpha$  que contiene a  $A$ . Además, todo anillo de valoración  $W$  de  $K$  tal que  $V_0 \subset W$  es compatible con  $\alpha$ .

*Demostración:* Es sencillo comprobar que  $V_0$  es un anillo de valoración y que  $A \subset V_0$ . Sea  $W$  anillo de valoración de  $K$  compatible con  $\alpha$  tal que  $A \subset W$  y sea  $x \in V_0$ . Supongamos que  $x > 0$  (en caso contrario se reemplaza  $x$  por  $-x$ ). Existe  $a \in A \subset W$  tal que  $0 < x < a$  y por ser  $W$  convexo para  $\alpha$ ,  $x \in W$ . Luego,  $V_0 \subset W$  y es compatible con  $\alpha$ .

Sea  $W$  un anillo de valoración de  $K$  tal que  $V_0 \subset W$ , entonces existe un ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $V_0$  tal que  $W = (V_0)_{\mathfrak{p}}$  ([Bou, §4]). Sean  $x \in K$ ,  $y \in W$  tales que  $0 < x < y$ ; pongamos  $y = z/s$  con  $z \in V_0$ ,  $s \in V_0 \setminus \mathfrak{p}$  y  $s > 0$ . Entonces,  $0 < sx < z \in V_0$ , con lo cual  $sx \in V_0$  y  $x \in W$ .  $\square$

**Ejemplo 3.6** Sean  $K$  un cuerpo y  $\alpha$  un orden en  $K$ . Denotemos por  $V_0$  el cierre convexo de  $\mathbb{Q}$  en  $K$  respecto de  $\alpha$ . Cualquier anillo de valoración  $W$  de  $K$  compatible con  $\alpha$  contiene a  $\mathbb{Q}$ , con lo cual  $V_0 \subseteq W$  (3.7). En consecuencia,  $V_0$  es el menor anillo de valoración de  $K$  compatible con  $\alpha$ .

**Proposición 3.7** Sea  $p : K \rightarrow k_V \cup \{\infty\}$  el lugar canónico asociado a un anillo de valoración  $V$  de  $K$  y sea  $\bar{\alpha} \in \text{Spec}_r(k_V)$ . Entonces, se tiene:

1) Existe  $\alpha \in \text{Spec}_r(K)$  compatible con  $V$  y que induce  $\bar{\alpha}$  en  $k_V$ . En este caso decimos que  $\alpha$  es una elevación a  $K$  de  $\bar{\alpha}$ .

2) Si  $W_0$  es un anillo de valoración no trivial de  $k_V$  compatible con  $\bar{\alpha}$ , entonces el anillo de valoración  $V_0 = p^{-1}(W_0)$  es compatible con  $\alpha$ . Además,  $W_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{Q}$  en  $k_V$  respecto de  $\bar{\alpha}$  si y sólo si  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{Q}$  en  $K$  respecto de  $\alpha$ .

*Demostración:* Para la primera parte ver [BCR,10.1.8]. Para la segunda basta observar que todos los anillos de valoración contenidos en uno dado están en biyección con los anillos de valoración de su cuerpo residual ([Bou, §4]), con lo cual los anillos de valoración de  $k_V$  compatibles con  $\bar{\alpha}$  se corresponden a través de  $p$  con los anillos de valoración de  $K$  compatibles con  $\alpha$  y contenidos en  $V$ .  $\square$

Para finalizar este repaso general por las valoraciones reales, recordaremos el teorema de Baer-Krull que determina el número de órdenes compatibles con  $V$  que elevan un orden dado en  $k_V$ . La demostración de este resultado puede verse en [BCR, 10.1.10].

**Teorema 3.8** Sea  $V$  un anillo de valoración de  $K$  y sea  $\tau \in \text{Spec}_r(k_V)$ . Existe una biyección entre el conjunto de elementos de  $\text{Spec}_r(K)$  compatibles con  $V$  que inducen  $\tau$  en  $k_V$  y el conjunto de homomorfismos de grupos del grupo de valores  $\Gamma_V$  de  $V$  en  $\mathbb{Z}_2$ .

En el resto de la sección sea  $K$  una extensión finitamente generada de  $\mathbb{R}$  y  $\alpha$  un orden en  $K$ . A continuación estudiaremos algunas propiedades de los anillos de valoración compatibles con  $\alpha$ . Tomemos un modelo compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$  de  $K$ ; es decir,  $X$  es un conjunto algebraico real irreducible y compacto tal que su cuerpo de funciones racionales  $\mathcal{K}(X)$  es isomorfo a  $K$ . Tal modelo siempre existe: basta tomar la adherencia de Zariski de  $X$  en  $P_n(\mathbb{R})$ .

**Definición 3.9** Un elemento  $\alpha$  de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  está centrado en un punto  $a \in X$  si para todo  $f \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $f(a) > 0$  se verifica que  $f(\alpha) > 0$ ; en otras palabras  $\alpha$  es una generización del cono positivo de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  definido por  $a$ .

Obsérvese que, en este caso,  $V_0$  es también el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $K$  respecto de  $\alpha$ .

**Proposición 3.10** Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ . Entonces, el cierre convexo  $V_0$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  verifica las siguientes propiedades:

- 1) El cuerpo residual  $k_{V_0}$  de  $V_0$  es  $\mathbb{R}$ .
- 2) El anillo de funciones regulares  $\mathcal{R}(X)$  de  $X$  está contenido en  $V_0$ .
- 3)  $\alpha$  está centrado en un punto  $a \in X$  tal que  $V_0$  domina al anillo local de  $a$ ,  $\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{m}_a}$ ; es decir, el ideal maximal  $\mathfrak{m}_a$  de  $a$  en  $\mathcal{R}(X)$  coincide con la contracción  $\mathfrak{m}_{V_0} \cap \mathcal{R}(X)$ .

*Demostración:* 1) Basta observar que  $(k_{V_0}, \bar{\alpha})$  es una extensión ordenada arquimediana de  $\mathbb{R}$ , y  $\mathbb{R}$  no posee extensiones arquimedianas propias.

2) Sea  $f \in \mathcal{R}(X)$ . Por ser  $X$  compacto existe  $M \in \mathbb{Q}$  tal que para todo  $x \in X$ ,  $-M < f(x) < M$ . Entonces para todo  $x \in X$ ,  $(M - f)(x) > 0$  y  $(M + f)(x) > 0$ . Por el homomorfismo de Artin-Lang ([BCR, 4.1]) se obtiene que  $M - f$  y  $M + f$  son positivos en cualquier orden de  $\mathcal{K}(X)$ . Así,  $f <_{\alpha} M$  y  $-M <_{\alpha} f$ ; con lo cual,  $f \in V_0$ .

3) Consideremos el ideal primo  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{V_0} \cap \mathcal{R}(X)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathcal{R}(X) & \hookrightarrow & V_0 \\ & & \searrow j & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{R}(X)/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Tenemos  $\mathcal{R}(X)/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$  y por lo tanto  $\mathfrak{m}$  es maximal. Sea  $p : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$  el homomorfismo canónico, y  $a_i = p(\mathbf{x}_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), siendo  $\mathbf{x}_i$  la clase de la coordenada  $x_i$  en  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}(X) \subset \mathcal{R}(X)$ . Tenemos  $\mathbf{x}_i - a_i \in \mathfrak{m}$  y  $(\mathbf{x}_1 - a_1, \dots, \mathbf{x}_n - a_n) \subseteq \mathfrak{m}$ , ya que  $p(a_i) = a_i$ . Así,  $\mathfrak{m} = (\mathbf{x}_1 - a_1, \dots, \mathbf{x}_n - a_n)$  es el ideal maximal de  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Sea ahora  $f \in \mathcal{R}(X)$ ,  $f \notin \mathfrak{m}$ ; entonces,  $f \notin \mathfrak{m}_{V_0}$ , con lo cual  $1/f \in V_0$  y con esto  $\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{m}} \subseteq V_0$ . Notese que  $p : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f \rightarrow f(a)$ , pues  $f - f(a) \in \mathfrak{m}$ .

Finalmente, veamos que  $\alpha$  está centrado en  $a$ : sea  $f \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $f(a) > 0$ . Sea  $p_0 : V_0 \rightarrow k_{V_0} = \mathbb{R}$  el homomorfismo canónico y  $\bar{\alpha}$  el orden inducido en  $k_{V_0}$ . Entonces  $\bar{f} = f(a) \in k_{V_0}$  y es distinto de cero. Con lo cual  $f$  es unidad y  $\bar{f} > 0$ , luego  $f(\alpha) > 0$ .  $\square$

**Observación 3.11** Si  $X$  no es un modelo compacto de  $K$ , existen órdenes  $\alpha$  de  $\mathcal{K}(X)$  tal que  $\mathcal{R}(X)$  no está contenido en el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$ ; en este caso, diremos que el centro de un orden de  $K$  es un punto del infinito. De hecho, en una compactificación  $(\hat{X}, i)$  de  $X$ ,  $\alpha$  estará centrado en un punto de  $\hat{X} \setminus i(X)$ .

Por ejemplo, el orden de  $\mathbb{R}(x)$  que hemos denotado  $+\infty$  en 2.6, tiene por cierre convexo el anillo  $\mathbb{R}[1/x]_{(1/x)}$ . Si consideramos la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{R}$ , que es la circunferencia unidad en  $\mathbb{R}^2$  con la proyección estereográfica desde el punto  $(0, 1)$ , tenemos que  $+\infty$  está centrado en  $(0, 1)$ .

**Ejemplo 3.12** ([BCR, 10.3]) Usando los resultados anteriores podemos describir el espectro real del cuerpo de funciones racionales de una curva.

Sea  $X \in \mathbb{R}^n$  una curva algebraica real compacta. Un elemento  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ , está centrado en un punto  $a \in X$  de tal modo que  $\mathfrak{m}_{V_0} \cap \mathcal{R}(X) = \mathfrak{m}_a$ , donde  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$ . Además, dado que  $\mathcal{K}(X)$  es una extensión finitamente generada de  $\mathbb{R}$  de grado de trascendencia 1, tenemos que  $\text{rg}(V_0) = 1$ . Luego,  $V_0$  es el único anillo de valoración compatible con  $\alpha$ .

Así,  $\alpha$  admite una especialización de dimensión 0,  $\alpha \rightarrow a$ . Con lo cual,  $\alpha \in \tilde{B}$ , donde  $B$  es una semirrama de  $X$  en  $a$ . Por lo tanto, tenemos un homeomorfismo semialgebraico  $\varphi : [0, 1) \rightarrow B \cup \{a\}$  ([BCR, 9.4.1]), que nos da un homeomorfismo  $\tilde{\varphi} : (0, 1] \rightarrow \tilde{B}$  (2.11). Teniendo en cuenta que  $0^+ \in [0, 1)$  es el único punto de  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}[x])$  que admite a 0 por especialización, obtenemos que  $\alpha$  es el único elemento de  $\tilde{B}$  que especializa en  $a$ . Por lo tanto,  $\alpha$  está caracterizado por una semirrama de  $X$  en  $a$ .

## 4 Abanicos

Un orden en un cuerpo  $K$  puede interpretarse como una signatura; esto es, una aplicación  $\alpha : K \setminus \{0\} \rightarrow \{+1, -1\}$  definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \alpha(x) = +1 & \text{si } x > 0 \\ \alpha(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Recíprocamente, toda signatura  $\alpha : K \setminus \{0\} \rightarrow \{+1, -1\}$  tal que  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ ,  $\alpha(-1) = -1$  y  $\alpha(x+y) = 1$  si  $\alpha(x) = \alpha(y) = 1$ , induce un orden en  $K$  cuyos elementos positivos son  $\{x \in K : \alpha(x) = +1\}$ .

En lo que sigue trabajaremos indistintamente con órdenes y signaturas. Consideraremos el *producto* de dos órdenes su producto como signaturas.

**Definición 4.1** *Sea  $K$  un cuerpo real. Un subconjunto  $F$  de  $\text{Spec}_r(K)$  es un abanico de  $K$  si el producto de cualesquiera 3 elementos de  $F$  es un cuarto elemento de  $F$ .*

Se deduce inmediatamente de la definición que el cardinal de un abanico  $F$  de  $K$  es de la forma  $2^k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ . A los abanicos de 1 ó 2 elementos los llamaremos *triviales*.

**Observación 4.2** *Cuatro órdenes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\alpha_4$  de  $K$  forman un abanico si y sólo si  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \alpha_4$ .*

En efecto, basta comprobar que si  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \alpha_4$  entonces cualquiera de los cuatro órdenes es igual al producto de los otros tres. Sea  $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_4 = \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \alpha_l.$$

(En otras palabras: ninguno de estos órdenes puede ser separado de los otros tres mediante un elemento de  $K$ .)

**Ejemplo 4.3** *Sea  $K = \mathcal{K}(X)$ , siendo  $X$  una curva algebraica real. Entonces todo abanico de  $K$  es trivial.*

Sea  $F$  un abanico no trivial de  $K$ , entonces existen al menos 4 elementos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  en  $F$  que forman un abanico. Tomemos  $f, g \in K$  de tal modo que  $f$  separa  $\alpha_1$  de  $\alpha_2$  (y por lo tanto separa  $\alpha_3$  de  $\alpha_4$ ) y  $g$  separa  $\alpha_1$  de  $\alpha_3$  (y por lo tanto separa  $\alpha_2$  de  $\alpha_4$ ). Luego, eligiendo convenientemente  $f$  y  $g$ , podemos suponer que  $f, g \in \mathcal{R}(X)$  y que

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1(f) < 0 & \alpha_2(f) > 0 & \alpha_3(f) < 0 & \alpha_4(f) > 0 \\ \alpha_1(g) > 0 & \alpha_2(g) < 0 & \alpha_3(g) < 0 & \alpha_4(g) > 0 \end{array}$$

Consideremos ahora el constructible  $\tilde{S} = \{\alpha : f > 0, g > 0\}$  de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$ ; tenemos que  $\alpha_4 \in \tilde{S}$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \notin \tilde{S}$ . Sea  $S = \{f > 0, g > 0\}$  el semialgebraico de  $X$  que se corresponde con  $\tilde{S}$ . Entonces, existe  $h \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $S = \{h > 0\}$ , ya que todo semialgebraico en  $X$  es principal.

Por lo tanto,  $\alpha_4(h) > 0$ , mientras que  $\alpha_i(h) < 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . En consecuencia, estos 4 elementos no forman un abanico, en contra de nuestra hipótesis.  $\square$

(4.4) **Construcción de abanicos sobre un anillo de valoración discreta.** Sea  $V$  un anillo de valoración discreta no trivial de un cuerpo arbitrario  $K$ ,  $m_V$  su ideal maximal,  $k_V = V/m_V$  su cuerpo residual y  $p : V \rightarrow k_V; f \rightarrow \bar{f} = f + m_V$ . Sea  $t$  un parámetro uniformizador de  $V$ .

**Lema** Sea  $\tau \in \text{Spec}_r(k_V)$ . Entonces, podemos definir dos órdenes totales distintos  $\alpha$  y  $\beta$  en  $V$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \tau(\bar{u})(+1)^n \\ \beta(f) &= \tau(\bar{u})(-1)^n. \end{aligned}$$

siendo  $f \in V$  tal que  $f = u \cdot t^n$ .

*Demostración:* Comprobaremos que  $\beta$  es orden total en  $V$ ; para  $\alpha$  la demostración es análoga. Sean  $f, g \in V$  tales que  $f = u \cdot t^n$  y  $g = v \cdot t^m$  con  $n \leq m$  y  $u, v$  unidades.

(i) Supongamos que  $\beta(f) = \beta(g) = +1$ ; entonces  $f + g = (u + vt^{m-n})t^n = wt^n$ . Si  $n < m$  se tiene que  $\bar{w} = \bar{u}$  y  $w$  es unidad. Así,

$$\beta(f + g) = \tau(\bar{w})(-1)^n = \tau(\bar{u})(-1)^n = \beta(f) = +1.$$

Si  $n = m$  se tiene  $f + g = (u + v)t^n$  y  $\tau(\bar{u}) = \tau(\bar{v})$ , luego  $\tau(\bar{u} + \bar{v}) = \tau(\bar{u})$  y  $u + v$  es unidad. Así,

$$\beta(f + g) = \tau(\bar{u} + \bar{v})(-1)^n = \beta(f) = +1.$$

(ii) Supongamos que  $\beta(f) = \beta(g) = +1$ . Se tiene  $fg = uvt^{n+m}$  y  $uv$  es unidad, entonces

$$\beta(fg) = \tau(\overline{uv})(-1)^{n+m} = \tau(\bar{u})(-1)^n \tau(\bar{v})(-1)^m = \beta(f)\beta(g) = +1.$$

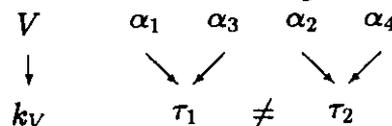
(iii)  $\beta(f^2) = \tau(\bar{u}^2)(-1)^{2n} = +1$ , para todo  $f \in V$ .

Luego  $\beta$  es un orden en  $V$ . □

Recordemos que  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) es una generización de  $\tau$ , cuando consideramos  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) y  $\tau$  en  $\text{Spec}_r(V)$ . Así mismo, esta condición  $\alpha \rightarrow \tau$  (resp.  $\beta \rightarrow \tau$ ) y el signo  $\alpha(t)$  (resp.  $\beta(t)$ ) determinan completamente  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). En consecuencia,  $\alpha$  y  $\beta$  son las únicas generizaciones con soporte  $(0)$  de  $\tau$  en  $\text{Spec}_r(V)$ , que denominamos *elevaciones* de  $\tau$  a  $K$  (3.7).

Señalemos que el modo en que hemos construido  $\alpha$  y  $\beta$  no es más que un caso particular del teorema de Baer-Krull (ver [BCR, 10.1.10]).

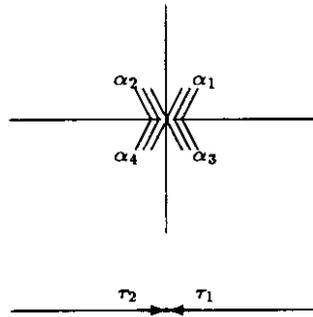
Si consideramos dos órdenes distintos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  en  $k_V$ , es sencillo comprobar que sus cuatro elevaciones forman un abanico tal que todos sus elementos son compatibles con  $V$ . Gráficamente representaremos este abanico de la siguiente forma:



Si todos los elementos de un abanico  $F$  de  $K$  son compatibles con un anillo de valoración  $V$ , diremos que  $V$  y  $F$  son *compatibles*.

Si un abanico  $F$  y una valoración  $V$  son compatibles,  $F$  induce un abanico en el cuerpo residual  $k_V$  de  $V$ . Así, si  $k_V$  posee un único orden, todo abanico compatible con  $V$  es trivial. En general, las elevaciones de un abanico de  $2^k$  elementos en  $k_V$  forman un abanico de  $2^{k+1}$  elementos en  $K$ .

**Ejemplo 4.5** Construyamos un abanico en  $\mathbb{R}(x, y)$  por el procedimiento anterior. Para ello consideremos el anillo de valoración discreta  $\mathbb{R}[x, y]_{(y)}$  de  $\mathbb{R}(x, y)$  cuyo cuerpo residual es  $\mathbb{R}(x)$ . Y tomemos en  $\mathbb{R}(x)$  los órdenes  $\tau_1 = 0^+$  que hace  $x > 0$  y estrictamente menor que todo número real positivo, y  $\tau_2 = 0^-$  que hace  $x < 0$  y estrictamente mayor que todo número real negativo. Sus generizaciones a  $\mathbb{R}[x, y]_{(y)}$  se obtienen haciendo  $y$  mayor y menor que cero en ambos casos. Obtenemos así un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  compatible con  $\mathbb{R}[x, y]_{(y)}$ . Geométricamente representaremos este abanico a través del operador tilde del siguiente modo:



Concretamente, todo abanico no trivial de  $\mathbb{R}(x, y)$  compatible con  $\mathbb{R}[x, y]_{(y)}$  está formado por las elevaciones de dos órdenes distintos de  $\mathbb{R}(x)$ , ya que en  $\mathbb{R}(x)$  no hay abanicos de más de 2 elementos.

# Capítulo II

## Conjuntos semialgebraicos básicos

En este capítulo incluimos uno de los principales resultados de la memoria: *un criterio de basicidad en superficies compactas y no singulares*. Dicho criterio nos permitirá reconstruir, para dimensión 2, toda la teoría de semialgebraicos básicos y abanicos de 4 elementos. De hecho, un aspecto fundamental de nuestro trabajo es que las demostraciones se hacen con técnicas puramente geométricas, esto es, sin hacer uso del espectro real, los espacios de órdenes, las formas cuadráticas, etc. Además, como veremos en el capítulo IV, estos resultados proporcionan un procedimiento algorítmico para determinar la basicidad.

Primero estableceremos las relaciones entre semialgebraicos básicos y genéricamente básicos (sección 1). En la sección 2 daremos los criterios de basicidad y principalidad (2.15 y 2.20). La sección 3 estará dedicada a la obtención de algunos resultados ya conocidos sobre básicos (como por ejemplo las cotas de Bröcker-Scheiderer) usando lo expuesto en la sección 2. Finalmente, en la sección 4, comenzaremos a vislumbrar el asunto a que alude el título de esta memoria, *la geometría de los abanicos*: hay una estrecha relación entre las propiedades que caracterizan la basicidad (2.15) y el comportamiento de ciertos abanicos, lo cual nos lleva a una demostración geométrica de la caracterización de la basicidad de Bröcker (4.9) mediante abanicos de 4 elementos.

### 1 Conjuntos básicos y genéricamente básicos

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto algebraico real irreducible de dimensión  $d$  y sea  $S \subset X$  un conjunto semialgebraico abierto (resp. cerrado); esto es,

$$(II.1) \quad S = \bigcup_{i=1}^t \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0\}$$
$$(resp. S = \bigcup_{i=1}^t \{f_{i1} \geq 0, \dots, f_{is_i} \geq 0\})$$

para ciertos  $f_{i1}, \dots, f_{is_i} \in \mathcal{R}(X)$ ,  $i = 1, \dots, t$ .

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de los conjuntos abiertos (resp. cerrados) básicos en superficies; es decir, aquellos semialgebraicos que pueden ser descritos mediante una expresión II.1 con  $t = 1$  (I.1.3).

**Observación 1.1** Sea  $S \subset X$  un conjunto semialgebraico. Recordamos que

$$S^* = \text{Int}(\overline{\text{Int}(S) \cap \text{Reg}(X)})$$

es el semialgebraico regularmente abierto asociado a  $S$ .

Obsérvese que en el paso de  $\text{Int}(S)$  a  $S^*$  hemos eliminado los puntos de  $\text{Int}(S)$  de dimensión menor que 2, mientras que hemos añadido los puntos de dimensión 2 interiores a la adherencia de  $S$  que no estaban en  $\text{Int}(S)$ . Con esto no es difícil comprobar que

$$\partial_2 S^* \subset \partial_2 S$$

En efecto, como  $\overline{S^*} \subset \overline{S}$  y  $\overline{S^*} \cap \text{Int}(S) \subset S^*$ , entonces  $\overline{S^*} \setminus S^* \subset \overline{S} \setminus \text{Int}(S)$ .  $\square$

Recordemos del capítulo I que un conjunto semialgebraico  $S$  de  $X$  es *genéricamente básico* si el complementario en  $S$  de algún cerrado de Zariski es abierto básico. En esta sección daremos primero una condición suficiente para que un semialgebraico (en dimensión arbitraria) sea genéricamente básico, para pasar luego a resultados característicos de la dimensión 2.

**Proposición 1.2** *Sea  $S$  un conjunto semialgebraico en  $X$ . Si  $S$  es genéricamente básico entonces  $\dim(S^* \cap \partial_2 S^*) < d - 1$ .*

*Demostración:* Podemos suponer que  $S = S^*$ , ya que  $(S^*)^* = S^*$  y si  $S$  es genéricamente básico entonces  $S^*$  también lo es.

Supongamos primero que  $X$  es un conjunto algebraico normal y sea  $S \subset X$  un semialgebraico genéricamente básico tal que  $S = S^*$ . Consideremos  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  y un conjunto algebraico  $C \subset X$  con  $\dim(C) \leq d - 1$  tales que

$$S \setminus C = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}.$$

Finalmente supongamos que  $\dim(H \cap S) = d - 1$  para alguna componente irreducible  $H$  de  $\partial_2 S$ .

Sea  $\mathfrak{p}$  el ideal de  $H$  en  $\mathcal{R}(X)$ . Como  $\dim(\text{Sing}(X)) \leq d - 2$ , podemos tomar un punto  $x_0 \in \text{Reg}(X) \cap \text{Reg}(H)$ , entonces el anillo local  $\mathcal{R}(X)_{x_0}$ , localización de  $\mathcal{R}(X)$  en el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $x_0$ , es factorial. Por lo tanto, dado que  $\text{ht}(\mathfrak{p}\mathcal{R}(X)_{x_0}) = 1$ , existe  $h \in \mathfrak{p}$  tal que  $\mathfrak{p}\mathcal{R}(X)_{x_0} = h\mathcal{R}(X)_{x_0}$ . Sean ahora  $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{R}(X)$  tales que  $\mathfrak{p} = (g_1, \dots, g_r)$ ; entonces existen  $\lambda_i, s_i \in \mathcal{R}(X)$  con  $s_i(x_0) \neq 0$  (en particular  $s_i \notin \mathfrak{p}$ ) tales que  $s_i g_i = \lambda_i h$ , para  $i = 1, \dots, r$ .

Consideremos  $U = (X \setminus \{s_1 \cdots s_r = 0\}) \cap \text{Reg}(H)$ , que es un abierto de Zariski en  $H$  con la propiedad de que para todo  $x \in U$ ,  $\mathfrak{p}\mathcal{R}(X)_x = h\mathcal{R}(X)_x$ . Sea  $x_0 \in U$ . Entonces, para cada  $j = 1, \dots, s$ ,  $f_j = \rho_j h^{\alpha_j}$  para algún  $\alpha_j \geq 0$  y  $\rho_j \in \mathcal{R}(X)_{x_0}$  tal que  $h$  no divide a  $\rho_j$  (en particular  $\rho_j \notin \mathfrak{p}\mathcal{R}(X)_{x_0}$ ). Luego  $\rho_j = p_j/q_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , donde  $p_j, q_j \in \mathcal{R}(X)$  y  $q_j(x_0) \neq 0$ .

Tomemos ahora  $W = U \setminus \{p_1 \cdots p_s = 0, q_1 \cdots q_s = 0\}$  que es un abierto de Zariski de  $H$ , en el cual  $q_j f_j = p_j h^{\alpha_j}$ , para  $j = 1, \dots, s$ . Además, para todo  $x \in W$ ,  $p_j$  y  $q_j$  no cambian de signo en un entorno de  $x$ , mientras que  $h$  cambia de signo en un entorno de  $x$ .

Teniendo en cuenta todo esto, dado  $x \in W$ ,  $f_j$  cambia de signo en un entorno de  $x$  si y sólo si  $\alpha_j$  es impar y no cambia de signo si y sólo si  $\alpha_j$  es par.

Por otra parte, usando que  $\dim(S \cap H) = d - 1$ , que  $\dim(C) \leq d - 1$  y que  $s_i, p_j, q_j \notin \mathfrak{p}$ , concluimos que existe un abierto  $\Omega$  denso de Zariski en  $W$  tal que  $f_j$  no cambia de signo a través de  $\Omega$ , para todo  $j = 1, \dots, s$ ; luego,  $\alpha_j$  es par para todo  $j = 1, \dots, s$ . Pero también, dado que  $H$  es una componente de  $\partial_z S$ , tenemos que existe otro abierto  $\Omega'$  denso de Zariski en  $W$  tal que  $\Omega' \subset \overline{S} \setminus S$ ; entonces, puesto que  $S = S^*$ , existe  $l \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_l$  cambia de signo a través de  $\Omega'$ , luego  $\alpha_l$  es impar. Lo cual nos lleva a una contradicción.

Si  $X$  no es normal, tomemos su normalización real  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$  (ver [To]) y denotemos  $T = \pi^{-1}(S)$ , donde  $S$  es un conjunto semialgebraico de  $X$  en las hipótesis de la proposición. Entonces se verifica lo siguiente:

1) Dado que  $\pi$  es un morfismo birrational,  $S$  es genéricamente básico si y sólo si  $T$  es genéricamente básico.

2)  $\pi(\hat{X}) = \{x \in X : \dim_x(X) = d\}$ .

3) Como  $\hat{X}$  es normal y  $S = S^* = \text{Int}(\overline{S})$ , tenemos que

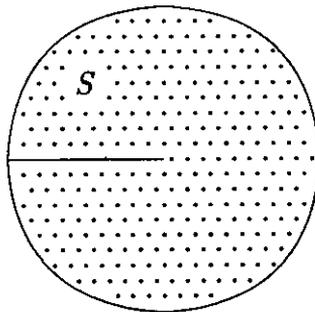
$$T^* = \text{Int}(\overline{T}) = \text{Int}(\overline{\pi^{-1}(S)}) = \pi^{-1}(\text{Int}(\overline{S})) = T$$

4)  $\pi(\partial T) = \pi(\overline{T} \setminus T) = \partial T$ .

Supongamos ahora que existe una componente  $H$  de  $\partial_z S$  tal que  $\dim(H \cap S) = d - 1$ . Sean  $H_1, \dots, H_l$  las componentes irreducibles de  $\pi^{-1}(H)$ , entonces, para todo  $j = 1, \dots, l$ ,  $\dim(\pi^{-1}(H \cap S) \cap H_j) = d - 1$ , ya que al menos un  $H_j$  de dimensión  $d - 1$  está en  $\partial_z T$ . Con lo cual,  $\dim(T \cap \partial_z T) = d - 1$ , lo que es imposible por la primera parte de esta demostración.  $\square$

En el estudio de la basicidad genérica, no de la basicidad propiamente dicha, el regularmente abierto  $S^*$ , asociado a un conjunto semialgebraico  $S$ , juega un papel importante, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

**Ejemplos 1.3** 1) Sean  $X = \mathbb{R}^2$  y  $S = \{x^2 + y^2 < 1, y^2 > 0\} \cup \{y = 0, 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , el semialgebraico abierto de  $\mathbb{R}^2$  formado por el interior de la circunferencia unidad menos un radio.



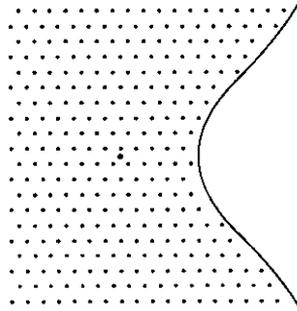
Tenemos que  $\partial_z S = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{y = 0\}$ , luego  $\dim(\partial_z S \cap S) = 1$ . Sin embargo  $S$  es genéricamente básico, ya que

$$S \setminus \{y = 0\} = \{x^2 + y^2 < 1, y^2 > 0\}$$

De hecho  $S \neq S^* = \{x^2 + y^2 < 1\}$  y  $\partial_z S^* \cap S^* = \emptyset$ .

Pero, en general el conjunto  $S^*$  no es el candidato a básico dentro de los semialgebraicos genéricamente iguales a  $S$ , como comprobaremos en el siguiente ejemplo.

2) Sea  $S = \{x^2 + y^2 - x^3 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  el semialgebraico determinado por la cúbica con un punto aislado.



El semialgebraico  $S$  es básico por definición, sin embargo  $S^* = S \cup \{(0,0)\}$  no es básico ya que  $\partial_z S^* \cap S^* = \{(0,0)\}$ . Luego en este caso  $S^*$  no es básico, pero es genéricamente básico.

Un hecho característico de la dimensión 2 es la equivalencia entre semialgebraicos básicos y genéricamente básicos; resultado, por otra parte, bien conocido (ver [Br2] y [FG]). Daremos aquí una demostración directa de esto, inspirada en los citados trabajos. En el resto de esta sección  $X$  será una superficie real contenida en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.4** Sea  $S$  un conjunto semialgebraico de  $X$ .

(1) Sea  $S$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Entonces,  $S$  es genéricamente básico si y sólo si  $S$  es abierto básico; además, si  $S \setminus C = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$  para algún conjunto algebraico  $C \subset X$  con  $\dim(C) \leq 1$ , entonces  $S = \{F_1 > 0, \dots, F_s > 0\}$  para  $F_1, \dots, F_s \in \mathcal{R}(X)$ .

(2) Sea  $S$  cerrado. Entonces,  $S$  es genéricamente básico si y sólo si  $S$  es cerrado básico; además, si  $S \setminus C = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$  para algún conjunto algebraico  $C \subset X$  con  $\dim(C) \leq 1$ , entonces  $S = \{F_1 \geq 0, \dots, F_s \geq 0, F_{s+1} \geq 0\}$  para  $F_1, \dots, F_{s+1} \in \mathcal{R}(X)$ .

*Demostración:* (1) Trivialmente si  $S$  es abierto básico, entonces  $S$  es genéricamente básico. Recíprocamente supongamos que  $S$  es genéricamente básico y que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Entonces,  $S$  es abierto y existen  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  y un conjunto algebraico  $C \subset X$  con  $\dim(C) \leq 1$  tales que

$$S \setminus C = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$$

Podemos suponer que  $\{f_1 \cdots f_r = 0\} \subset C$ .

Como  $\dim(C) \leq 1$  y  $C \cap S$  es un semialgebraico abierto en  $C$ , aplicando [Rz, 2.2], existe  $g_1 \in \mathcal{R}(C)$  tal que

$$C \cap S = \{x \in C : g_1(x) > 0\}, \quad \overline{C \cap S} = \{x \in C : g_1(x) \geq 0\}$$

Podemos elegir  $g_1$  de forma que sea la restricción de una función regular  $g \in \mathcal{R}(X)$ . Obsérvese que  $g$  no se anula sobre  $C$ .

Consideremos ahora, para cada  $i = 1, \dots, s$ , el abierto  $B_i = \{x \in X : f_i(x) < 0\}$  y el cerrado  $T_i = (\overline{S} \cap \{g \leq 0\}) \cup (\overline{B}_i \cap \{g \geq 0\})$ . Aplicando la desigualdad de Lojasiewicz como en [BCR, 7.7.10], al cerrado  $T_i$  y las funciones regulares  $f_i, g$ , podemos encontrar  $p_i, q_i \in \mathcal{R}(X)$ , con  $p_i > 0$  y  $q_i \geq 0$  en  $X$  tales que

- (i) La función  $F_i = p_i f_i + q_i g$  tiene el mismo signo que  $f_i$  en  $T_i$ .
- (ii) El conjunto de ceros  $Z(q_i)$  de  $q_i$  es el conjunto  $\text{Adh}_z(Z(f_i) \cap T_i)$ .

De esta forma observemos los siguientes hechos:

- a) Para todo  $i = 1, \dots, s$ ,  $F_i(S \setminus C) > 0$ .
- b) Para todo  $i = 1, \dots, s$ ,  $F_i(B_i) < 0$ .
- c)  $Z(q_i) \subset \partial_z S$ .

En efecto,  $F_i$  tiene el mismo signo que  $f_i$  en  $T_i \cap S$  (resp. en  $B_i \cap T_i$ ) y fuera de este subconjunto es la suma de una función estrictamente positiva (resp. negativa) y una no negativa (resp. no positiva), entonces tenemos probado a) (resp. b)). Para probar c), consideremos, para cada  $i = 1, \dots, s$ , los conjuntos  $Z_1^i = Z(f_i) \cap \overline{S} \cap \{g \leq 0\}$  y  $Z_2^i = Z(f_i) \cap \overline{B}_i \cap \{g \geq 0\}$  que verifican  $Z(q_i) = \text{Adh}_z(Z_1^i \cup Z_2^i)$ ; comprobaremos que estos conjuntos están contenidos en la frontera usual  $\partial S$  de  $S$ . Como  $C \cap S = \{g > 0\} \cap C$  y  $Z_1^i \subset C \cap \{g \leq 0\}$ , tenemos  $Z_1^i \cap S = \emptyset$ ; pero  $Z_1^i \subset \overline{S}$ , luego  $Z_1^i \subset \partial(S)$ . Por otra parte, dado que  $S$  y  $B_i$  son abiertos y  $B_i \cap S = \emptyset$ , tenemos que  $\overline{B}_i \cap S = \emptyset$  y  $B_i \cap \overline{S} = \emptyset$ ; además,  $\overline{C \cap S} = \{g \geq 0\} \cap C$ . Por lo tanto  $Z_2^i \subset \{g \geq 0\} \cap C \subset \overline{S} \cap \overline{B}_i \cap \partial(S)$ .

Teniendo en cuenta estas observaciones, denotemos  $Z = \bigcup_{i=1}^s Z(q_i)$ , entonces

$$S \setminus Z = \{F_1 > 0, \dots, F_s > 0\}$$

Por una parte, si  $x \in S \setminus C$  entonces  $F_i(x) > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ . Si  $x \in (C \cap S) \setminus Z$  entonces  $f_i(x) \geq 0$ ,  $q_i(x) \geq 0$  y  $g(x) > 0$ , luego  $F_i(x) > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ ; con lo cual  $S \setminus Z \subset \{F_1 > 0, \dots, F_s > 0\}$ .

Por otra parte, si  $x \notin S \setminus Z$ , tenemos  $x \in (X \setminus S) \cup (S \cap Z)$ . Entonces si  $x \in X \setminus S$  existe  $l \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_l(x) \leq 0$  y podemos tener  $x \notin C$  ó  $x \in C$ . En el primer caso  $f_i(x) \neq 0$  para todo  $i$ , luego  $x \in B_l$  y  $F_l(x) < 0$ ; en el segundo caso  $g(x) \leq 0$ ,  $q_l(x) \geq 0$ , luego  $F_l(x) \leq 0$ . Ahora si  $x \in S \cap Z$  existe  $l \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $q_l(x) = 0$ , luego  $f_l(x) = 0$  y  $F_l(x) = 0$ . En cualquier caso, si  $x \notin S \setminus Z$  existe  $l$  tal que  $F_l(x) \leq 0$ .

En consecuencia, como  $Z \subset \partial_z S$  y  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  tenemos que

$$S = \{F_1 > 0, \dots, F_s > 0\}$$

con lo cual  $S$  es abierto básico.

(2) Si  $S$  es cerrado básico, entonces  $S$  es genéricamente básico. Recíprocamente, supongamos  $S$  cerrado y genéricamente básico, entonces

$$S \setminus C = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\}$$

con  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  y  $\dim(C) \leq 1$ . Podemos suponer  $\{f_1 \cdots f_r = 0\} \subset C$ .

El conjunto  $C \cap S$  es un semialgebraico cerrado en  $C$ , luego por [Rz, 2.2] existe  $g_1 \in \mathcal{R}(C)$  restricción de una función  $g \in \mathcal{R}(X)$  tal que

$$C \cap S = \{x \in C : g_1(x) \geq 0\}$$

Consideremos  $f \in \mathcal{R}(X)$  una ecuación positiva de  $C$  y el cerrado  $T = S \cap \{g \leq 0\}$ . Aplicando de nuevo [BCR, 7.7.10] a  $T$ ,  $f$  y  $g$ , podemos encontrar  $p, q \in \mathcal{R}(X)$  con  $p > 0$  y  $q \geq 0$  en  $X$  tales que

(i) La función  $h = pf + qg$  tiene el mismo signo que  $f$  en  $T$ .

(ii) El conjunto  $Z(q)$  es igual a  $\text{Adh}_z(Z(f) \cap T)$ .

Obsérvese que  $h(S) \geq 0$  y que  $Z(f) \cap T = C \cap S \cap \{g \leq 0\} = \{g = 0\} \cap C$ , ya que  $C \cap S = \{g \geq 0\} \cap C$ . Por lo tanto  $Z(q)$  es un conjunto finito contenido en  $S$ .

Denotemos  $F_1 = f \cdot f_1, \dots, F_s = f \cdot f_s, F_{s+1} = h$ , probaremos que

$$S = \{F_1 \geq 0, \dots, F_s \geq 0, F_{s+1} \geq 0\}$$

En efecto, si  $x \in S \setminus C$  entonces  $F_i(x) > 0$  para todo  $i$ ; mientras que si  $x \in S \cap C$  entonces  $F_i(x) \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, s+1$ . Luego  $S \subset \{f_1 \geq 0, \dots, f_s \geq 0, h \geq 0\}$ .

Por otra parte supongamos  $x \notin S \supset S \setminus C$ , entonces existe  $l \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $f_l(x) \leq 0$ . Si  $x \notin C$ , tenemos  $f_l(x) \neq 0$  y  $f(x) \neq 0$ , luego  $F_l(x) < 0$ . Si  $x \in C \setminus (C \cap S)$ , entonces  $f(x) = 0$ ,  $q(x) \neq 0$  y  $g(x) < 0$ , luego  $F_{s+1}(x) < 0$ . Con lo que concluimos que  $S$  es cerrado básico.  $\square$

**Observaciones 1.5** (1) Sea  $S \subset X$  un semialgebraico cerrado, entonces  $S$  es cerrado básico si y sólo si  $S \setminus \partial_z S$  es abierto básico. Con lo cual a partir de ahora podemos trabajar con semialgebraicos  $S$  que no intersecan a su frontera de Zariski.

(2) Sea  $S \subset X$  un semialgebraico. Entonces,  $S$  es abierto básico si y sólo si  $S^*$  es genéricamente básico y  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ .

(3) Recordemos que un modelo birracional de un conjunto semialgebraico  $S \subset X$  es otro conjunto semialgebraico  $T \subset X'$  birracionalmente isomorfo a  $S$  (i.e. hay un isomorfismo birregular entre  $S \setminus C_1$  y  $T \setminus C_2$  donde  $\dim(C_i) \leq 1$ , para  $i = 1, 2$ ). Por lo tanto, para que un semialgebraico  $S$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  sea abierto básico es necesario y suficiente que algún modelo birracional suyo sea genéricamente básico.

## 2 Caracterización de básicos y principales

Sea  $X$  una superficie algebraica real compacta y no singular. El resultado central de esta sección, uno de los más importantes de la memoria, es un criterio de basicidad en  $X$  que se obtendrá con técnicas puramente geométricas.

### Aproximación y separación

Con las palabras *aproximación* y *separación* queremos resumir las técnicas más importantes que usaremos en las secciones 2 y 3. Incluimos aquí sólo los enunciados de algunos resultados que utilizaremos posteriormente, aludiendo siempre a una referencia precisa.

Los resultados clásicos sobre fibrados fuertemente algebraicos y aproximación quedan referidos al capítulo 12 de [BCR]. Daremos a continuación un resultado de aproximación de Broglia y Tognoli que puede encontrarse en [BT]. Este teorema es una versión mejorada del teorema de aproximación relativa de Stone-Weierstrass ([BCR, 12.5.5]); se trata de aproximar funciones  $C^\infty$  por funciones regulares en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , relativamente a un conjunto algebraico y a menos de una función de crecimiento controlado. El enunciado que damos a continuación está restringido al caso en que lo usaremos, para evitar añadir terminología inútil, si bien en [BT, 4.3] puede verse un resultado más general.

Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto algebraico. Una función continua  $\sigma : U \rightarrow [0, \infty)$  es de *crecimiento controlado* a lo largo de  $Y$  si verifica:

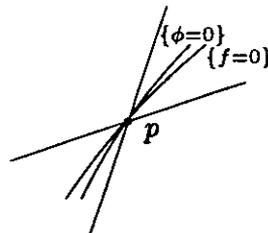
- 1) Para todo  $x \in Y$ ,  $\sigma(x) = 0$ .
- 2) Existe un sistema de generadores  $f_1, \dots, f_q$  del ideal  $\mathcal{J}(Y)$  de  $Y$  (de hecho, vale cualquier sistema de generadores) y funciones continuas positivas  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$  en  $U$  tales que

$$\sigma(x) \geq \sum_{i=1}^q \varepsilon_i(x) |f_i(x)| \quad \text{en } U$$

**Teorema 2.1** ([BT, 4.3]) *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto finito de puntos (i.e. un conjunto algebraico de dimensión 0). Sea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ . Entonces, para todo compacto  $K \subset U$ , todo  $\varepsilon > 0$  y toda función continua  $\sigma$  de crecimiento controlado a lo largo de  $Y$  tal que  $\sigma(x) \leq \varepsilon$  en  $K$ , existe una función regular  $f \in \mathcal{R}(U)$  tal que*

- a)  $|f(x) - \phi(x)| \leq \sigma(x)$ , para todo  $x \in K$ .
- b)  $f = \phi$  en  $Y \cap U$ .

*Observación:* Una aproximación  $f \in \mathcal{R}(X)$  de  $\phi$  como en 2.1 relativa a un punto  $p \in X$  se puede hacer de tal forma que los conjuntos de ceros de  $f$  y  $\phi$ , en un entorno de  $p$ , esten contenidos en un cono de centro  $p$  y sean transversales, en  $p$ , a la frontera de este.



Basta tomar coordenadas locales  $(x, y)$  en un entorno  $V \subset X$  de  $p$  tal que  $p = (0, 0)$ ,  $\phi(0, 0) = 0$  y  $\partial\phi/\partial x(0, 0) = \partial\phi/\partial y(0, 0) = 1$ . Sean  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  funciones de crecimiento controlado a lo largo de  $\{p\}$  en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  conteniendo a  $X$  tales que

$$\sigma_{0|_V}(x, y) < \min\{|\phi(x, y) - x|, |\phi(x, y) - y|\}$$

Entonces, por 2.1, para todo compacto  $K \subset U$  podemos aproximar  $\phi$  relativamente a  $p$  en la topología  $\mathcal{C}^1$  por una función  $f \in \mathcal{R}(X)$  y a menos de  $\sigma_0$ . En particular, podemos encontrar un compacto  $C \subset K \cap V$  tal que  $f$  en las coordenadas  $(x, y)$  verifique  $f(0, 0) = 0$ ,  $|f(x, y) - \phi(x, y)| < \sigma_0(x, y)$  para todo  $(x, y) \in C$ ,  $|\partial f/\partial x(x, y) - \partial\phi/\partial x(x, y)| < \sigma_1(x, y)$  y  $|\partial f/\partial y(x, y) - \partial\phi/\partial y(x, y)| < \sigma_2(x, y)$  para todo  $(x, y) \in C$ .  $\square$

Pasemos ahora a las nociones y resultados sobre separación, en concreto referimos a [ABF] donde se trata la separación de semialgebraicos en superficies compactas y no singulares. En esta memoria hemos cambiado un poco la terminología de [ABF] a fin de hacerla más simple y conveniente a nuestros propósitos.

Sean  $A, B$  dos conjuntos semialgebraicos en  $X$  tales que sus interiores no se cortan (i.e.  $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ ). Denotemos por  $Z$  el conjunto  $\text{Adh}_z(\overline{A} \cap \overline{B})$ .

**Definiciones 2.2** 1) *Los semialgebraicos  $A$  y  $B$  se separan (por una función regular de  $X$ ) si existe una función regular  $f \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $f$  es positiva en  $A \setminus Z$  y negativa en  $B \setminus Z$  (escribiremos  $f(A \setminus Z) > 0$  y  $f(B \setminus Z) < 0$ ).*

2) *Los semialgebraicos  $A$  y  $B$  se separaran localmente en un punto  $p \in X$  si existe un entorno abierto de  $p$  en  $X$  en el cual  $A$  y  $B$  se separan.*

**Notación 2.3** Denotemos  $Y = \partial_z A \cup \partial_z B$  y  $M = \text{Adh}_z(\overline{A^*} \cap \overline{B^*}) \subset Y$ . Obsérvese que las componentes de dimensión 1 de  $M$  son aquellas componentes de  $Y$  que podríamos ver como muros entre  $A$  y  $B$ , es decir las componentes que en algún abierto de dimensión 1 tienen de un lado a  $A$  y del otro a  $B$ . De hecho, llamaremos a  $M$  (y por extensión a sus componentes) el *muro entre  $A$  y  $B$* .

**Teorema 2.4** ([ABF, 1.4 y 1.7]) *Sean  $A$  y  $B$  dos semialgebraicos con  $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \emptyset$ . Entonces,  $A$  y  $B$  se separan si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

a)  $\dim(M \cap A^*) < 1$ ,  $\dim(M \cap B^*) < 1$ .

b)  $A$  y  $B$  se separan localmente en cada punto  $y \in \text{Sing}(Y)$ .

c) *Existe una curva algebraica  $H \subset X$  tal que  $H \cap ((A \setminus Z) \cup (B \setminus Z)) = \emptyset$  y  $[H] = [M]$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ .*

*Además la condición b) se transforma en la condición a) tras las explosiones de la resolución estandar de  $Y$  (ver [EC] y [BK]). Concretamente, supongamos que se verifica a) y sea  $\pi : X' \rightarrow X$  la resolución estandar de  $Y$  con  $P = \pi^{-1}(A)$  y  $Q = \pi^{-1}(B)$ , entonces existe un punto  $y \in \text{Sing} Y$  tal que  $A$  y  $B$  no se separan localmente en  $y$  si y sólo si existe una componente irreducible  $D$  de  $\pi^{-1}(p)$  que es componente de  $L = \text{Adh}_z(\overline{P^*} \cap \overline{Q^*})$  y tal que  $\dim(D \cap (P^* \cup Q^*)) = 1$ .*

**Observación 2.5** El resultado 2.4 juega un papel importante en las demostraciones los resultados que expondremos en las próximas páginas. Por ello anotaremos brevemente

los argumentos usados en su demostración. Por otra parte, queremos evidenciar con esto el uso de técnicas puramente geométricas en [ABF].

Para la demostración de la primera parte de 2.4 los resultados claves son la desigualdad de Lojasiewicz como en [BCR, 7.7.10] y un resultado de separación en [F,3.2] que afirma que si dos semialgebraicos compactos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  son tal que  $A \cap B$  es un conjunto finito y se separan localmente en cada punto de  $A \cap B$ , entonces  $A$  y  $B$  se separan. Para la segunda parte se usa la desingularización de curvas en superficies mediante explosiones ([EC]) y el teorema de inmersión minimal de una singularidad algebraica ([BCR, 8.6.15]).

Cabe añadir que la condición c) resulta superflua; es decir, la separación queda caracterizada con las condiciones a) y b). Este resultado ha sido obtenido con posterioridad a la publicación de [ABF] y aparece en la tesis de licenciatura de Ludovico Penazza de la Universidad de Pisa. Sin embargo, este hecho no resulta significativo para nuestras demostraciones.

Finalmente, queremos aclarar que por resolución estandar de una curva  $Y$  en una superficie lisa  $X$  entendemos una resolución en el sentido de Enriques-Chisini ([EC]) trasladada al caso real; esto es, la resolución de  $Y$  mediante un número finito de explosiones en sus puntos singulares hasta obtener una curva con componentes lisas que se intersequen normalmente.  $\square$

Geoméricamente hablando, la condición  $\dim(M \cap A^*) \leq 1$  (resp.  $\dim(M \cap B^*) \leq 1$ ) significa que existe una componente irreducible de dimensión 1 del muro entre  $A$  y  $B$  que cruza  $A$  (resp. cruza  $B$ ); es decir, existen dos abiertos  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \text{Reg}(Y)$  tal que  $\Omega_1 \subset \overline{A^*} \cap \overline{B^*}$  y  $\Omega_2 \subset A^* \cup B^*$ , como muestra la figura II.2.

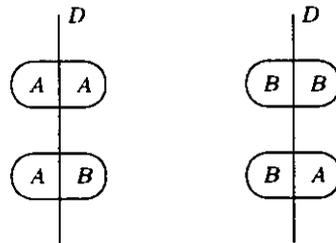


Figura II.2

Mientras que la no local separación en un punto  $y \in \text{Sing}(Y)$  da lugar a una componente irreducible  $D$  del divisor excepcional  $E$  de la resolución estandar de  $Y$  en  $y$  que se comporta como en la figura II.2 con respecto de las imagenes inversas de  $A$  y  $B$  por la resolución.

### Semialgebraicos básicos

Sea  $S \subset X$  un semialgebraico y sean  $A_1, \dots, A_t$  las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$ . En esta sección veremos que la basicidad de  $S$  puede ser determinada mediante ciertas propiedades de separación entre  $S$  y cada uno de los  $A_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ).

Para cada  $i = 1, \dots, t$ , denotemos por  $Z_i$  y por  $M_i$  los conjuntos  $\text{Adh}_z(\overline{S} \cap \overline{A_i})$  y  $\text{Adh}_z(\overline{S^*} \cap \overline{A_i^*})$ , respectivamente. Luego,  $M_i \subset \partial_z S^*$  es el muro entre  $S$  y  $A_i$ .

**Observación 2.6** Obsérvese que  $\partial_z S^*$  es la unión de todos los muros  $M_j$ , es decir

$$\bigcup_{i=1}^t \text{Adh}_z (\overline{S^* \cap \overline{A_i^*}}) = \partial_z S^*$$

En efecto, teniendo en cuenta que por ser  $A_i$  abierto se tiene,

$$X \setminus S^* = \overline{\text{Int} (X \setminus (S \cup \partial_z S))} = \bigcup_{i=1}^t \overline{A_i^*}$$

deducimos inmediatamente que

$$\overline{S^*} \setminus S^* = \overline{S^*} \cap \left( \bigcup_{i=1}^t \overline{A_i^*} \right) = \bigcup_{i=1}^t (\overline{S^*} \cap \overline{A_i^*})$$

Con lo que se tiene el resultado.  $\square$

**Observación 2.7** Si para cada  $i = 1, \dots, t$ ,  $S$  y  $A_i$  se separan, entonces  $S \setminus \partial_z S$  es abierto básico.

Para cada  $i = 1, \dots, t$  sea  $f_i$  la función regular que separa  $S$  de  $A_i$ . Entonces,  $f_i(S \setminus Z_i) > 0$  y  $f_i(A_i \setminus Z_i) < 0$ . Obsérvese que  $Z_i \subset \partial_z S$  para todo  $i$ . Comprobaremos que  $S \setminus \partial_z S = \{f_1 > 0, \dots, f_t > 0, h > 0\}$ , siendo  $h \in \mathcal{R}(X)$  una ecuación positiva de  $\partial_z S$ .

En efecto, si  $x \in S \setminus \partial_z S \subset S \setminus Z_i$ , entonces  $f_i(x) > 0$  para todo  $i$  y  $h(x) > 0$ . Si por el contrario  $x \notin S \setminus \partial_z S$ , entonces bien existe  $i_0$  tal que  $x \in A_{i_0}$  o bien  $x \in \partial_z S$ . Como  $A_i \cap \partial_z S = \emptyset$ , si  $x \in A_{i_0}$  entonces  $f_{i_0}(x) < 0$ . Y en el caso  $x \in \partial_z S$ ,  $h(x) = 0$ .  $\square$

Como podemos ver en la siguiente proposición, en algunos casos la separación de cada componente conexa del complementario de  $S \cup \partial_z S$  es una condición necesaria y suficiente para la basicidad de  $S$ .

**Proposición 2.8** Sea  $S$  un conjunto semialgebraico en la esfera  $\mathbb{S}^2$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  (resp. un semialgebraico cerrado en  $\mathbb{S}^2$ ). Entonces,  $S$  es abierto (resp. cerrado) básico si y solo si  $S$  y  $A_i$  se separan, para todo  $i = 1, \dots, t$ , siendo  $A_1, \dots, A_t$  las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$ .

*Demostración:* Es suficiente hacer la demostración para  $S$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ , ya que si  $S$  es cerrado, trabajando análogamente con  $S \setminus \partial_z S$  y aplicando 1.4 se tiene el resultado.

En la observación 2.7 anterior está probado que si  $S$  se separa de los  $A_i$  entonces  $S$  es abierto básico. Supongamos entonces que  $S$  es abierto básico.

Como  $S$  y  $A_i$  están en las hipótesis de 2.4, comprobemos que para cada  $i = 1, \dots, t$  se verifican las condiciones a), b) y c) de 2.4. En este caso, de acuerdo con la notación establecida anteriormente,  $Y_i = \partial_z S \cup \partial_z A_i = \partial_z S$  y  $M_i = \text{Adh}_z (\overline{S^* \cap \overline{A_i^*}})$  ( $i = 1, \dots, t$ ), con lo cual tenemos:

a) Dado que  $S$  es abierto básico, en particular es genéricamente básico, luego por 1.2 tenemos que  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$  y por 2.6 concluimos que  $\dim(M_i \cap S^*) < 1$ .

Comprobemos ahora que,  $\dim(M_i \cap A_i^*) < 1$  para todo  $i$ . En efecto, dado que toda curva de  $\xi^2$  tiene entornos orientables, no existe una curva  $C$  en  $\xi^2$  que divida  $\xi^2$  en componentes conexas de tal modo que alguna de ellas permanezca a ambos lados de una componente irreducible de dimensión 1 de  $C$ . Por lo tanto, como toda componente irreducible de dimensión 1 de  $M_i$  es una componente irreducible de  $\partial_z S$  y  $A_i$  es una componente conexas determinada por la traza de  $\partial_z S$  en  $\xi^2$ , tenemos que  $\dim(\partial_z S \cap \text{Int}(\overline{A_i})) < 1$ , luego  $\dim(M_i \cap A_i^*) < 1$ .

b) Para todo  $y \in \text{Sing}(Y)$ ,  $S$  y  $A_i$  se separan en un entorno de  $y$ . En efecto, supongamos que no es así y consideremos la resolución estandar  $\pi : X' \rightarrow \xi^2$  de  $Y = \partial_z S$  en  $y$ . Denotemos  $T = \pi^{-1}(S)$ ,  $B_i = \pi^{-1}(A_i)$  y  $L_i = \text{Adh}_z(\overline{T^*} \cap \overline{B_i^*}) \subset \partial_z T^*$  el muro entre  $T$  y  $B_i$ . Notese que  $B_1, \dots, B_t$  son las componentes conexas de  $X' \setminus (T \cup \partial_z T)$ , entonces  $\cup L_i = \partial_z T^*$ . Por 2.4 existe una curva algebraica  $E \subset X'$  que se contrae al punto  $y \in \text{Sing}(Y)$  tal que una componente irreducible  $D$  de  $E$  es una componente irreducible de  $L_i$  para algún  $i$  verificando que  $\dim(D \cap T^*) = 1$  o que  $\dim(D \cap B_i^*) = 1$ .

El proceso de resolución  $\pi$  de  $Y$  en  $y$  consiste en un número finito de explosiones en  $y$ , pongamos  $\pi = \pi_r \cdots \pi_1$ . Para cada  $j = 1, \dots, r$ , sea  $\Delta_j = \pi_j \cdots \pi_1 : X_j \rightarrow X$  que llamaremos la etapa  $j$ -ésima de la resolución de  $Y$  en  $y$ . La curva  $D$  es la transformada estricta en  $X' = X_r$ , del divisor excepcional de una explosión, pongamos la  $j$ -ésima, en el proceso de resolución de  $Y$  en  $y$ ; supongamos entonces que nos encontramos en la etapa  $j$ -ésima  $\Delta_j$  de la resolución de  $Y$  en  $y$ . Con abuso de notación seguiremos denotando  $D$ ,  $T$ ,  $B_i$  y  $L_i$  a las imágenes de estos en  $X_j$ , ya que se comportan de igual modo.

Dado que  $S$  es abierto básico y  $\Delta_j$  es un morfismo birracional, tenemos que  $T$  es genéricamente básico y entonces  $\dim(T^* \cap \partial_z T^*) < 1$  (Proposición 1.2). Luego, tiene que ser  $\dim(D \cap T^*) < 1$ . Con lo cual  $\dim(D \cap B_i^*) = 1$ . En consecuencia, existen dos abiertos 1-dimensionales  $\Omega, \Omega'$  en  $D$  tal que  $B_i$  permanece a ambos lados de  $\Omega$ , mientras que  $\Omega'$  divide  $B_i$  de  $T$ . Entonces existe una componente irreducible  $Z'$  de  $\partial_z T$  que cruza  $D$  entre  $\Omega$  y  $\Omega'$ ; además,  $Z'$  debe cruzar  $B_i$ , ya que  $B_i$  es un abierto conexo (es la imagen inversa de un conexo por un morfismo birracional) y  $D$  es un  $P_1(\mathbb{R})$ . Luego  $Z' \subset L_i$ , como podemos ver en la siguiente figura ilustrativa:

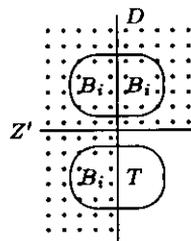


Figura II.2.8

Ahora bien,  $Z'$  puede ser la transformada estricta de alguna componente irreducible  $Z$  de  $\partial_z S$  por la resolución u otra componente irreducible del divisor excepcional de la resolución. En el primer caso, como  $\pi$  es la contracción de una curva  $E$  a  $y$ , tenemos que  $Z$  verifica  $\dim(Z \cap A_i^*) = 1$ . Pero esto no es posible, según hemos visto en el apartado a). En el segundo caso,  $D$  y  $Z'$  son componentes de  $\pi^{-1}(y)$ , entonces  $Z'$  es la transformada estricta del divisor excepcional de la  $h$ -ésima explosión en  $y$ , siendo  $h < i$ . Por lo tanto, en la etapa  $h$ -ésima nos encontramos la situación anterior y trabajando recursivamente,

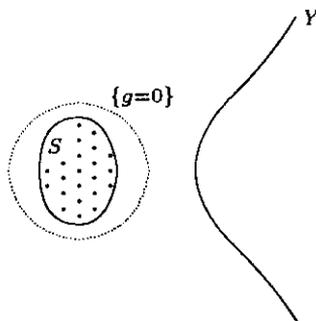
dado que hay un número finito de explosiones sobre  $y$ , tenemos que llegar a un  $Z'$  que sea la transformada estricta de alguna componente de  $\partial_z S$ ; pero este caso hemos visto que no se puede dar. Luego, para todo  $y \in \text{Sing}(Y)$ ,  $S$  y  $A_i$  se separan localmente en  $y$ .

c) La condición c) de 2.4 se cumple trivialmente ya que  $H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}_2) = 0$ .

Luego aplicando 2.4 tenemos que  $S$  y  $A_i$  se separan.  $\square$

Sin embargo, la condición de separación es más fuerte que la basicidad, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.9** Tomemos la clausura proyectiva, en el plano proyectivo real  $P_2(\mathbb{R})$ , de la cúbica  $Y$  con dos componentes conexas y sea  $S$  el interior de su ovalo orientable.



Obsérvese que  $S^* = S$ ,  $\partial_z S = Y$  y  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Denotemos  $A = P_2(\mathbb{R}) \setminus (S \cup \partial_z S)$  que es un semialgebraico conexo tal que  $\dim(\partial_z S \cap A^*) = 1$ . Por lo tanto,  $S$  no puede ser separado de  $A$ .

Sin embargo,  $S$  es abierto básico. Basta tomar una ecuación  $f \in \mathcal{R}(P_2(\mathbb{R}))$  de  $Y$  que cambie de signo a través de  $Y$  y la ecuación  $g \in \mathcal{R}(P_2(\mathbb{R}))$  de una circunferencia en torno a  $S$  que no interseque la componente no orientable de  $Y$  y que cambie de signo, entonces

$$S = \{f > 0, g > 0\}$$

Luego en este caso  $S$  y  $A$  no se separan, pero  $S$  es abierto básico.

A la vista del ejemplo anterior daremos las siguientes definiciones:

**Definición 2.10** Sea  $S \subset X$  un conjunto semialgebraico. Una componente irreducible  $H$  de  $\partial_z S^* \subset \partial_z S$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S$  si  $\dim(H \cap S^*) = 1$ .

**Observación 2.11** Teniendo en cuenta 2.6 se concluye inmediatamente que una componente irreducible  $H$  de  $\partial_z S^* \subset \partial_z S$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S$  si y sólo si  $H$  es un muro entre  $S$  y  $A_i$  tal que  $\dim(H \cap S^*) = 1$ , para algún  $i = 1, \dots, t$ , siendo  $A_1, \dots, A_t$  las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$ .

Como hemos visto en el ejemplo 2.9. el que  $H$  interseque  $A_i^*$  en dimensión 1 no obstruye la basicidad de  $S$ . Por lo tanto, una obstrucción global puede considerarse como la mitad de la condición a) de separación entre  $S$  y los  $A_i$ 's en la proposición 2.4.

**Definición 2.12** Un conjunto semialgebraico  $S \subset X$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  (resp.  $S$  es cerrado) es localmente abierto (resp. cerrado) básico en un punto  $x \in X$  si existe un

entorno abierto  $U$  de  $x$  en  $X$  y funciones regulares  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  tal que

$$S \cap U = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \cap U$$

(resp.  $S \cap U = \{f_1 \geq 0, \dots, f_s \geq 0\} \cap U$ )

En caso de que  $S$  no sea localmente básico en algún punto  $x \in X$  diremos que tenemos una obstrucción local a la basicidad de  $S$  en  $x$ .

Al igual que en el caso de la separación veremos que la obstrucción local a la basicidad se transforma en la global tras las explosiones de la resolución estandar de  $\partial_z S$ .

**Proposición 2.13** *Sea  $S \subset X$  un semialgebraico tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Supongamos que  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$  y fijemos  $y \in \partial S$ . Entonces,  $S$  es localmente básico en  $y$  si y sólo si para toda contracción  $\pi : X' \rightarrow X$  de una curva  $E$  a  $y$  y ninguna componente irreducible de  $E$  da una obstrucción global a la basicidad de  $\pi^{-1}(S)$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $S$  es localmente básico en  $y$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $y$  y funciones  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  tales que

$$S \cap U = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \cap U$$

Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  una contracción de una curva  $E \in X'$  a  $y$  y supongamos que existe una componente irreducible  $D$  de  $E$  tal que  $D$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T = \pi^{-1}(S)$ . Podemos tomar  $U$  de tal modo que  $\pi|_V : V \setminus E \rightarrow U \setminus \{y\}$  sea un homeomorfismo, siendo  $V = \pi^{-1}(U)$ .

Sea  $B = \pi^{-1}(\{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\})$ , luego  $B$  es genéricamente básico y por 1.2  $\dim(\partial_z B^* \cap B^*) < 1$ . Por otra parte, como  $D$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T$ , entonces  $D$  tiene que ser una componente de  $\partial_z T^*$  tal que  $\dim(D \cap T^*) = 1$ . Pero,  $D \subset V$  y  $T \cap V = B \cap V$ , entonces  $D$  tiene que ser una componente irreducible de  $\partial_z B^*$  verificando

$$\dim(D \cap B^*) = \dim(D \cap V \cap B^*) = \dim(D \cap V \cap T^*) = \dim(D \cap T^*) = 1.$$

Lo cual no es posible.

Recíprocamente, supongamos que para toda contracción  $\pi : X' \rightarrow X$  de una curva  $E$  a  $y$  y ninguna componente irreducible de  $E$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T = \pi^{-1}(S)$ .

Tomemos un entorno semialgebraico  $U$  de  $y$ , homeomorfo a un disco en  $\mathbb{R}^2$  ( $X$  es no singular), tal que  $U$  no contenga puntos singulares de  $\partial_z S$  distintos de  $y$  y no corte ninguna componente irreducible de  $\partial_z S$  al menos que contenga a  $y$ . Sean entonces  $B_1, \dots, B_l$  las componentes conexas de  $U \setminus (S \cup \partial_z S)$ , comprobaremos que para todo  $j = 1, \dots, l$  es posible separar  $U \cap S$  de  $B_j$  localmente en  $y$ .

Sean  $A_1, \dots, A_t$  las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$  y sea  $Y = \partial_z(S \cap U) \subset \partial_z S \cup \partial_z U$ . Sea, para cada  $j = 1, \dots, l$ ,  $M_j = \text{Adh}_z((S \cap U)^* \cap B_j^*)$  el muro entre  $S \cap U$  y  $B_j$ . Entonces  $M_j \subset \partial_z S^*$ , ya que para todo  $j = 1, \dots, l$  existe  $i = 1, \dots, t$  tal que  $B_j \subset A_i$  y como  $U$  es homeomorfo a un disco los semialgebraicos  $S \cap U$  y  $B_j$  están contenidos en el interior de  $U$ .

Sea  $H$  una componente irreducible de dimensión 1 de  $\cup M_j$ , como  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$  deducimos que  $\dim(\partial_z S^* \cap (S \cap U)^*) < 1$ . Luego,  $\dim(H \cap S^*) < 1$ . Por otra parte, como  $U$  es homeomorfo a un disco, ninguna componente conexa determinada por una curva en  $U$  puede permanecer a ambos lados de esta, por lo tanto  $\dim(H \cap B_j^*) < 1$ . Con lo cual, se verifica la condición a) de separación entre  $S \cap U$  y  $B_j$ .

Ahora bien, si  $\partial_z S$  es lisa o presenta un cruzamiento normal en  $y$  la condición a) de separación implica que hay sólo tres posibles situaciones en un entorno de  $y$  (ver figura II.2.13), en las cuales se tiene de inmediato, tomando coordenadas locales en  $y$ , la separación de  $S \cap U$  y  $B_j$  en un entorno de  $y$ .

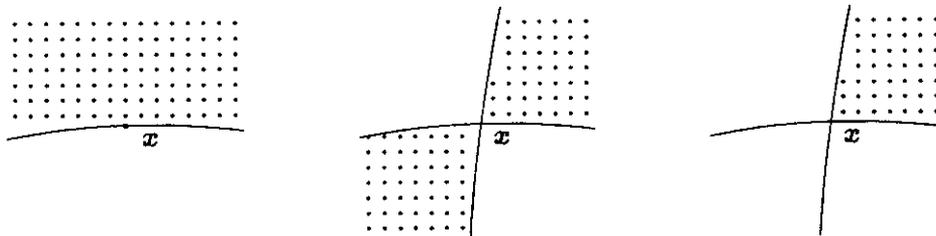


Figura II.2.13

Si  $y \in \text{Sing}(\partial_z S)$  y no es cruzamiento normal, consideremos  $\pi : X' \rightarrow X$  la resolución estandar de  $\partial_z S$  en  $y$ , que es una contracción de una curva  $E$  a  $y$ . Sea  $T = \pi^{-1}(S \cap U)$ ,  $C_j = \pi^{-1}(B_j)$  y  $L_j = \text{Adh}_z(\overline{T^*} \cap \overline{C_j^*})$  con  $j = 1, \dots, l$ . Obsérvese que  $C_1, \dots, C_l$  son las componentes conexas de  $\pi^{-1}(U) \setminus (T \cap \partial_z T)$ , ya que tal y como hemos elegido  $U$  la contracción  $\pi$  da un homeomorfismo de  $\pi^{-1}(U) \setminus E$  en  $U \setminus \{y\}$ . Por hipótesis ninguna componente irreducible  $D$  de  $E$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T$ , luego  $\dim(D \cap T^*) < 1$ , para toda componente irreducible  $D$  de  $E \cap \partial_z T^*$ . Por otra parte, una tal componente  $D$  tampoco interseca  $C_j^*$  en dimensión 1, ya que cada una de estas componentes tienen como entorno en  $\pi^{-1}(U)$  una banda de Möbius y por un razonamiento análogo al de la demostración 2.8 (figura II.2.8) tenemos que, para cada  $j = 1, \dots, l$ , toda componente  $D$  de  $E \cap L_j$  tiene que verificar  $\dim(D \cap C_j) < 1$ .

En consecuencia, tras resolver  $\partial_z S$  no encontramos ningún muro entre  $T$  y  $C_j$  que interseque  $T^* \cup C_j^*$  en dimensión 1, ya que al explotar la transformada estricta de las componentes de  $\partial_z S$  se comportan igual con respecto a  $T$  y  $C_j$  que las de  $\partial_z S$  con respecto a  $S$  y  $B_j$ , y las componente nuevas, es decir las de  $E$ , hemos visto que no dan problema. Por lo tanto, usando 2.4,  $S \cap U$  y  $B_j$  se separan localmente en  $y$ . Entonces, para cada  $j = 1, \dots, l$  existe  $U_j \subset U$  entorno de  $y$  y  $f_j \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $f_j$  separa  $S \cap U_j$  de  $B_j \cap U_j$ .

Consideremos  $\mathcal{U} = \bigcap_{j=1}^l U_j$  entonces

$$S \cap \mathcal{U} = \{f_1 < 0, \dots, f_l < 0\} \cap \mathcal{U}$$

Con lo cual  $S$  es localmente básico en  $y$ . □

Antes de dar el criterio general de caracterización de la basicidad en superficies no singulares necesitamos el siguiente lema:

**Lema 2.14** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  una superficie algebraica real compacta y no singular. Sea  $S \subset X$  un conjunto semialgebraico tal que  $S = S^*$ ,  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y  $\partial_z S$  es una curva*

con cruzamientos normales en  $X$  siendo sus componentes irreducibles no singulares. Entonces, para cada componente  $H$  de  $\partial_z S$  existe una curva algebraica no singular  $H' \subset X$  verificando que  $[H] = [H']$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}^2)$ , que  $H$  y  $H'$  son transversales, y que  $H' \cap S = \emptyset$ .

*Demostración:* Cada componente irreducible  $H$  de  $\partial_z S$  es una curva algebraica lisa y compacta, consistente en varios ovalos  $H_1, \dots, H_m$  y que localmente desconecta su entorno. Además, dado que  $S = S^*$  y que  $H \cap S = \emptyset$ , al menos fuera de los puntos singulares de  $\partial_z S$  que están en  $H$  (i.e. los puntos en que  $H$  cruza otra componente de  $\partial_z S$ ) localmente  $S$  se encuentra sólo a un lado de  $H$ . En cada uno de estos puntos tenemos sólo dos posibles situaciones como muestra la figura II.2.14.

Trás estas observaciones está claro como construir una curva diferenciable lisa  $C_H$  tal que  $[C_H] = [H]$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}^2)$ ,  $C_H$  y  $H$  sean transversales y  $C_H \cap S = \emptyset$ :

Para cada ovalo  $H_i$  formando una componente conexa de  $H$  tomemos un entorno tubular  $U_i$  que se retraiga a  $H_i$  y que no contenga puntos de las otras componentes de  $\partial_z S$  a excepción de aquellos en un pequeño entorno de los puntos singulares de  $\partial_z S$  pertenecientes a  $H$ . Podemos tomar  $U_i$  isomorfo a un entorno de la sección nula del fibrado normal a  $H_i$ , lo cual nos permite definir una función distancia  $\rho_i$  en  $U_i$ . Tomemos un punto  $p \in U_i$  tal que  $p \notin \partial_z S \cup S$  y sea  $\rho_i(p) = \varepsilon_i$ . Comencemos a trazar, partiendo de  $p$ , la línea de nivel  $\rho_i = \varepsilon_i$  hasta que encontremos otra componente de  $\partial_z S$ . Ahora estamos en una de las dos situaciones de la figura II.2.14.

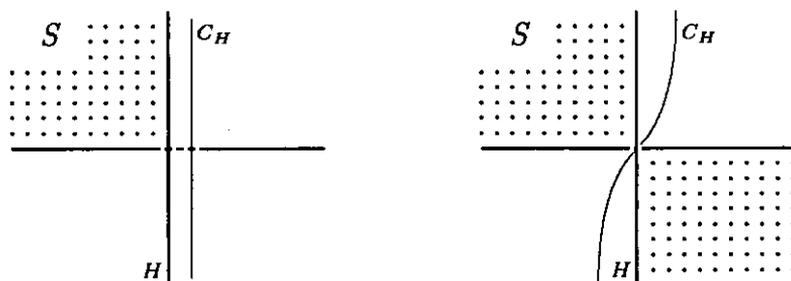


Figura II.2.14

En la situación primera continuamos sobre la línea de nivel  $\rho_i$ , que ha podido ser elegida transversal a la nueva componente.

En la situación segunda cruzamos mediante una línea transversal a ambas componentes sin intersectar  $S$ , hasta encontrar la línea de nivel  $\rho_i = \varepsilon_i$  del otro lado de  $H_i$ , por la cual continuamos.

Seguimos trazando esta curva hasta llegar de nuevo a la fibra de  $p$  (en el fibrado normal). Si nos encontramos al mismo lado que  $p$  con respecto a  $H_i$ , debemos llegar exactamente al punto  $p$ . Si nos encontramos al otro lado, entonces  $S$  no puede intersectar al fibra de  $p$ , con lo cual podemos atravesar  $H_i$  siguiendo la fibra hasta  $p$ .

De este modo hemos construido una curva  $C^\infty$  a trozos, cuyos ángulos están bien en la fibra de  $p$ , bien en un entorno de los puntos singulares de  $H$ ; en la situación 2 de la figura II.2.13. En cualquier caso, los ángulos están lejos de  $S$ , luego esta línea se puede convertir en una curva  $C^\infty$ , que denotaremos  $C_H$ , con las propiedades buscadas.

Ahora queremos aproximar  $C_H$  por una curva algebraica no singular  $H'$  con las propiedades requeridas. Para ello usamos el hecho de que la clase de homología  $[H]$

da un fibrado vectorial de rango 1 fuertemente algebraico  $\pi : E \rightarrow X$  sobre  $X$  (ver [BCR, 12.2.5]), para el cual  $H$  es el conjunto de ceros de una sección algebraica que denotamos  $h$  y  $C_H$  es el conjunto de ceros de una sección  $C^\infty$  que denotamos  $c$ . Por construcción el conjunto  $H \cap C_H$  es finito, sea  $H \cap C_H = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ . Además, para cada  $j = 1, \dots, k$ , la curva  $H$  interseca otra componente  $G^j$  de  $\partial_x S$  en el punto  $Q_j$ .

Es posible elegir un recubrimiento finito  $\{V_1, \dots, V_l\}$  de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  con las siguientes propiedades:

- 1) Para cada  $j = 1, \dots, k$ ,  $Q_j \in V_j$  y  $Q_j \notin V_i$  si  $i \neq j$ .
- 2) Los elementos  $V_1, \dots, V_l$  son dos a dos disjuntos.
- 3) Para cada  $j = 1, \dots, l$ , existe una sección algebraica  $s_j$  de  $E$  tal que  $s_j(x) \neq 0$  para todo  $x \in V_j \cap X$ , es decir  $s_j$  genera  $E_x$  para cada  $x \in V_j \cap X$ .

Tomemos ahora una partición  $C^\infty$  de la unidad  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$  asociada al recubrimiento  $\{V_1, \dots, V_l\}$  con la propiedad de que para  $j = 1, \dots, k$ ,  $K_j = \varphi_j^{-1}(1)$  sea un entorno cerrado de  $Q_j$  en  $V_j$ .

Dado que, para cada  $j = 1, \dots, l$ ,  $s_j$  genera  $E_x$  para todo  $x \in V_j$ , tenemos que la restricción de la sección  $c$  a  $V_j$ , que denotaremos  $c|_{V_j}$ , se puede escribir como  $c|_{V_j} = \alpha_j s_j$ , para cierto  $\alpha_j \in C^\infty(V_j)$ . Podemos suponer también que  $\alpha_j(Q_j) = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ , ya que  $s_j$  genera la fibra. Luego, usando la partición de la unidad anterior, tenemos que

$$c = \sum_{j=1}^l \varphi_j c = \sum_{j=1}^l (\varphi_j \alpha_j) s_j$$

y que las funciones diferenciables  $\beta_j = \varphi_j \alpha_j \in C^\infty(X)$  se anulan en  $Q_1, \dots, Q_k$ .

Por otra parte, para cada  $j = 1, \dots, k$ , podemos tomar coordenadas locales  $(x_j, y_j)$  en  $V_j \cap X$  de tal modo que  $Q_j = (0, 0)$ ,  $H$  este dada por  $x_j s_j$ ,  $G^j$  este dada por  $y_j s_j$  y  $C_H$  este dado por  $\beta_j|_{V_j} s_j$  con  $\partial \beta_j / \partial x_j(0, 0) = \partial \beta_j / \partial y_j(0, 0) = 1$ .

Sea  $V = \bigcup V_j$ , que es un entorno abierto de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\sigma$  un función de crecimiento controlado a lo largo de  $\{Q_1, \dots, Q_k\}$  tal que para todo  $j = 1, \dots, k$

$$\sigma|_{V_j}(x_j, y_j) < \min\{|\beta_j(x_j, y_j) - x_j|, |\beta_j(x_j, y_j) - y_j|\}$$

(una tal  $\sigma$  existe ya que el ideal de  $\{Q_1, \dots, Q_k\}$  está generado por  $x_j, y_j$  localmente en  $V_j$ ). Ahora nos encontramos en la situación de la observación a 2.1, luego para todo compacto  $K \subset V$  podemos aproximar  $\beta_j$  en la topología  $C^1$  por una función  $f_j \in \mathcal{R}(X)$  relativamente a  $\{Q_1, \dots, Q_k\}$  y a menos de  $\sigma$  (resp. a menos de una constante  $\varepsilon_j$ ) para  $j = 1, \dots, k$  (resp. para  $j > k$ ).

Entonces la sección algebraica

$$f = \sum_{j=1}^l f_j s_j$$

tiene conjunto de ceros  $H'$  a través de  $Q_1, \dots, Q_k$ . No es difícil comprobar, restringiéndonos a los compactos  $K_j$ , que  $H'$  es transversal a  $\partial_x S$  y que  $H' \cap S = \emptyset$  (observación siguiente a 2.1). Por último, como  $H'$  aproxima a  $C_H$  entonces  $[H'] = [H]$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ .  $\square$

**Teorema 2.15** *Sea  $X$  una superficie algebraica real compacta y no singular y sea  $S \subset X$  un semialgebraico tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  (resp.  $S$  un semialgebraico cerrado). Entonces  $S$  es abierto básico (resp. cerrado básico) si y sólo si  $S$  verifica las dos propiedades siguientes:*

a) *Ninguna componente de  $\partial_z S$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S$ ; es decir,  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$ .*

b) *Para todo  $x \in \text{Sing}(\partial_z S)$ ,  $S$  es localmente abierto (resp. cerrado) básico en  $x$ .*

*Demostración:* Basta probar el resultado para semialgebraicos  $S$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ , ya que por 1.4 se tiene inmediatamente el caso cerrado.

Si  $S$  es abierto básico entonces por 1.2 tenemos a) y trivialmente tenemos b). Recíprocamente, supongamos que  $S$  verifica a) y b) y procedamos como sigue:

Consideremos la resolución estandar  $\pi : X' \rightarrow X$  de  $\partial_z S$ . Denotemos por  $Y$  la curva  $\pi^{-1}(\partial_z S)$  y por  $T$  el semialgebraico  $\pi^{-1}(S)$ . Cada componente irreducible de  $Y$  es una curva no singular posiblemente constituida de varios ovalos los cuales se intersecan normalmente en  $X'$ . Cada uno de estos ovalos puede tener un entorno orientable o un entorno no orientable isomorfo a una banda de Möbius.

Cada componente irreducible de  $Y$  es la transformada estricta de una componente de  $\partial_z S$  o es una componente del divisor excepcional. Entonces, suponiendo que se cumplen las condiciones a) y b) y usando la proposición 2.13, tenemos que ninguna componente de  $\partial_z T^* \subset Y$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T$ . Esto es,  $\dim(\partial_z T^* \cap T^*) < 1$ ; pero  $\partial_z T^* \subset Y$  no tiene puntos aislados y  $T^*$  es abierto, con lo cual  $\partial_z T^* \cap T^* = \emptyset$ .

Intentaremos separar  $T^*$  de su complementario con unas cuantas funciones regulares. En general, como hemos visto en el ejemplo 2.9, no es posible separar  $S$  de cada componente conexa de  $X' \setminus (T^* \cup \partial_z T^*)$ . Para ello añadimos a  $\partial_z T^*$  otra curva que subdivida el complementario de forma adecuada, como explicamos a continuación.

Aplicamos el lema 2.14 ( $T^*$  está en las hipótesis de 2.14) a cada componente irreducible  $H$  de  $\partial_z T^*$  tal que  $[H] \neq 0$  en  $H_1(X', \mathbb{Z}_2)$ . Entonces encontramos una curva lisa  $H'$  transversal a  $H$  tal que  $H' \cap T^* = \emptyset$  y  $[H'] = [H]$  en  $H_1(X', \mathbb{Z}_2)$ . Podemos elegir estas curvas  $H'$  de modo que sean transversales dos a dos. Sea entonces  $Z$  la curva unión de todas las  $H'$  así construidas.

Sean  $B_1, \dots, B_l$  las componentes conexas de  $X' \setminus (T^* \cup \partial_z T^* \cup Z)$ . Afirmamos que para cada  $j = 1, \dots, l$  es posible separar  $T^*$  de  $B_j$ . De hecho comprobaremos que se verifican las condiciones a), b) y c) de 2.4.

a) Por una parte tenemos  $\partial_z T^* \cap T^* = \emptyset$  y por construcción  $Z \cap T^* = \emptyset$ . Por otra parte, sea  $H$  una componente irreducible de  $\partial_z T^*$  y supongamos que  $\dim(H \cap B_j^*) = 1$  para algún  $j = 1, \dots, l$  (no consideramos el caso  $H$  componente de  $Z$ , ya que nunca sería frontera común de  $T^*$  y  $B_j^*$ ). Observemos que un abierto 1-dimensional de  $H \cap B_j^*$  tiene que estar contenido en un ovalo de  $H$  cuyo entorno sea un banda de Möbius, porque en otro caso los dos lados de  $H$  estarían en diferente componente conexa. Entonces  $[H] \neq 0$ , con lo cual existe  $H'$  en  $Z$  transversal a  $H$  tal que estos dos generados,  $H$  y  $H'$ , de la clase no nula dividen la banda de Möbius en al menos dos componentes conexas. Por lo tanto,  $B_j$  sólo puede estar a un lado del ovalo. Luego  $\dim(H \cap B_j^*) < 1$ .

b) Veamos que  $T^*$  y  $B_j$  se separan localmente en cada punto  $x \in \partial_z T^* \cup Z$ . En efecto, si  $\partial_z T^* \cup Z$  es liso o presenta un cruzamiento normal en  $x$ , por verificarse a) tenemos la

separación local por la misma razón que en 2.13 (ver figura II.2.13).

Si  $x \in \text{Sing}(\partial_z T^* \cup Z)$  y no hay cruzamiento normal, por construcción tenemos dos componentes irreducibles  $H$  y  $H_1$  de  $\partial_z T^*$  y a lo más dos componentes  $H'$  y  $H'_1$  de  $Z$  con  $[H] = [H']$  y  $[H_1] = [H'_1]$ , las cuales se intersecan dos a dos transversalmente en  $x$  (ver figura II.2.15)

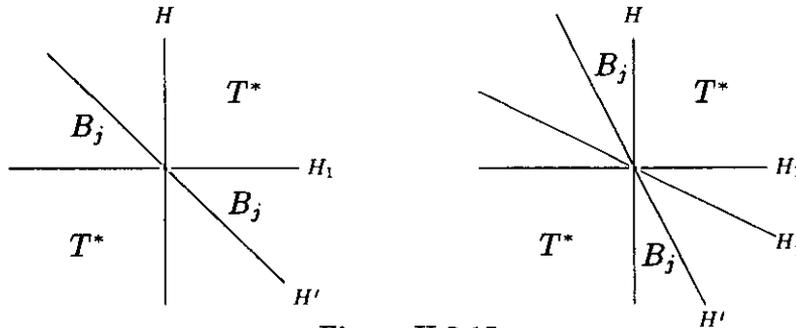


Figura II.2.15

Entonces, por construcción,  $\partial_z T^* \cup Z$  determinaría en un entorno de  $x$  dos componentes conexas de  $T^*$  comprendidas entre  $H$  y  $H_1$  (en otro caso ni  $H'$  ni  $H'_1$  cruzarían  $H$  y  $H_1$  respectivamente) y a lo más dos componentes conexas de cada  $B_j$  (ver figura II.2.15). En cualquier caso,  $T^*$  y  $B_j$  se separan localmente en  $x$ .

c) Para cada componente  $H$  de  $\partial_z T^*$  hemos construido, en el lema 2.13, una curva  $H'$  tal que  $H' \cap T^* = \emptyset$  y  $H' \cap B_j = \emptyset$  para todo  $j$  y  $[H] = [H']$  en  $H_1(X', \mathbb{Z}_2)$ . Con lo cual tenemos la condición c) de 2.4.

Entonces,  $T^*$  se separa de  $B_j$  para todo  $j = 1, \dots, l$ . Luego existen  $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $f_j$  separa  $T^*$  de  $B_j$ , para cada  $j = 1, \dots, l$ . En consecuencia,

$$T^* = \{f_1 > 0, \dots, f_l > 0\}$$

Por lo tanto  $T^*$  es abierto básico y entonces  $S$  es genéricamente básico. Pero por hipótesis  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  luego, por 1.4,  $S$  es abierto básico □

Como consecuencia del teorema 2.15 anterior obtenemos una demostración geométrica, para superficies, de una caracterización general de la basicidad genérica en [AR3]. En este trabajo, Andradas y Ruiz usan la teoría de abanicos de 4 elementos para obtener el citado resultado.

**Corolario 2.16** *Sea  $X$  una superficie y  $S \subset X$  un semialgebraico. Entonces,  $S$  es abierto básico si y sólo si  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y para todo modelo birracional  $T$  de  $S$  se verifica que  $\partial_z T^* \cap T^*$  es un conjunto finito.*

*Demostración:* La condición necesaria es inmediata por 1.2, ya que si  $S$  es abierto básico entonces  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y todo modelo birracional suyo  $T$  es genéricamente básico. Por lo tanto,  $\partial_z T^* \cap T^*$  es un conjunto finito.

Recíprocamente, supongamos que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y para todo modelo birracional  $T$  de  $S$  se verifica que  $\partial_z T^* \cap T^*$  es un conjunto finito. Entonces  $S$  es abierto y comprobaremos que es abierto básico.

Consideremos una compactificación de  $X$  (por ejemplo, su clausura de Zariski en un espacio proyectivo) y entonces tomemos un modelo no singular  $X_1$ , obtenido por una secuencia de explosiones a lo largo de centros lisos. La transformada estricta  $S_1$  de  $S$  en  $X_1$  es un modelo birracional de  $S$ . Hagamos ahora la resolución estandar  $\pi : X_2 \rightarrow X_1$  de  $\partial_z S_1$  y sea  $S_2$  la transformada de  $S_1$  por  $\pi$ . Entonces  $\partial_z S_2^* \cap S_2^*$  es un conjunto finito, ya que  $S_2$  es un modelo birracional de  $S$ . Pero,  $\partial_z S_2^* \subset \partial_z S_2$  no tiene puntos aislados ( $\partial_z S_2$  es la resolución de  $\partial_z S_1$ ) y  $S_2^*$  es abierto, con lo cual  $\partial_z S_2^* \cap S_2^* = \emptyset$ . Luego, no existe obstrucción global a la basicidad de  $S_2^*$  y como  $\partial_z S_2^*$  tiene componentes lisas con cruzamientos normales, tampoco hay obstrucción local en ningún punto singular de  $\partial_z S_2^*$ . Aplicando 2.15 tenemos que  $S_2^*$  es abierto básico. Por lo tanto  $S$  es genéricamente básico y teniendo en cuenta que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ , por 1.4, resulta que  $S$  es abierto básico.  $\square$

**Observación 2.17** Sea  $S$  un semialgebraico en una superficie  $X$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Para determinar si  $S$  es abierto básico basta comprobar si existe una obstrucción global a la basicidad del transformado  $T$  de  $S$  en un modelo birracional de  $X$  compacto y no singular en el cual  $\partial_z T$  tenga componentes lisas con cruzamientos normales.

## Semialgebraicos principales

Usando los resultados precedentes sobre semialgebraicos básicos obtenemos una sencilla caracterización de los semialgebraicos principales. Algunos de estos resultados pueden ser extendidos a dimensión arbitraria.

Mientras no se indique otra cosa,  $X$  será una superficie algebraica real irreducible, compacta y no singular.

**Definición 2.18** Un conjunto semialgebraico  $S \subset X$  es abierto principal (resp. cerrado principal) si existe  $f \in \mathcal{R}(X)$  tal que

$$S = \{x \in X : f(x) > 0\}$$

(resp.  $S = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ )

**Observación 2.19** 1) Un semialgebraico  $S \subset X$  es cerrado principal si y sólo si  $X \setminus S$  es abierto principal. En efecto, si  $S = \{f \geq 0\}$  entonces  $X \setminus S = \{-f > 0\}$  y  $\partial_z S = \{f = 0\}$ , para  $f \in \mathcal{R}(X)$ .

Luego basta trabajar con abiertos principales.

2) Un semialgebraico  $S \subset X$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  es abierto principal si y sólo si  $S$  y  $S^c = X \setminus S$  se separan.

**Teorema 2.20** Sea  $S \subset X$  un semialgebraico tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Entonces,  $S$  es abierto principal si y sólo si  $S$  verifica las siguientes condiciones:

a)  $\dim(S^* \cap \partial_z S^*) < 1$  (i.e. ninguna componente de  $\partial_z S^*$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S$ ).

b)  $\dim((S^c)^* \cap \partial_z S^*) < 1$  (i.e. ninguna componente de  $\partial_z S^*$  da una obstrucción global a la basicidad de  $X \setminus S$ ).

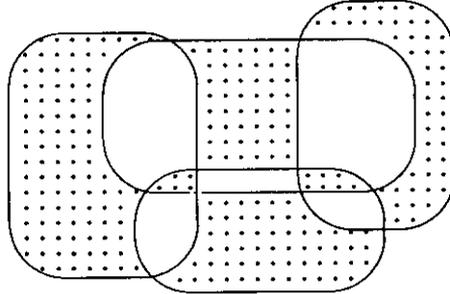
*Demostración:* Supongamos que  $S$  es abierto principal entonces  $S^*$  y  $(S^c)^*$  son genéricamente básicos y por 1.2 tenemos que  $\dim(S^* \cap \partial_z S^*) < 1$  y  $\dim((S^c)^* \cap \partial_z (S^c)^*) < 1$ . Teniendo en cuenta que, siendo  $S$  abierto,  $X \setminus S^* = \overline{(X \setminus S)^*}$ , tenemos que  $\partial_z S^* = \partial_z (S^c)^*$ , con lo cual se tiene un sentido de la equivalencia.

Recíprocamente, supongamos que  $\dim(S^* \cap \partial_z S^*) < 1$  y que  $\dim((S^c)^* \cap \partial_z (S^c)^*) < 1$ . Denotemos por  $Y$  el conjunto de puntos de  $\partial_z S^*$  de dimensión 1. Entonces  $[Y] = [\partial_z S^*]$ ; además  $[Y] = 0$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ , ya que es el borde de los abiertos  $S^*$  y  $(S^c)^*$  utilizando la hipótesis. Entonces, aplicando [BCR, 12.4.6], el ideal  $\mathcal{J}(\partial_z S^*)$  de  $\partial_z S^*$  en  $\mathcal{R}(X)$  es principal; sea entonces  $f$  un generador de  $\mathcal{J}(\partial_z S^*)$ . Por otra parte, aplicando también [BCR, 12.4.6] a cada componente irreducible  $H_k$  de  $\partial_z S$  que no sea componente de  $\partial_z S^*$  podemos elegir un generador  $h_k$  de  $\mathcal{J}(H_k)^2$ , el cual existe porque  $2[H_k] = 0$ .

Sea  $F = f \cdot \prod h_k$ . Entonces  $F$  separa  $S$  de  $S^c$ , con lo cual  $S$  es abierto principal.  $\square$

**Observaciones 2.21** 1) Sea  $S \subset X$  un semialgebraico principal tal que  $S = S^*$  y  $\partial_z S$  tiene componentes lisas con cruzamientos normales. La condición necesaria y suficiente de 2.19 se transforma en este caso en  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y  $\partial_z S \cap (X \setminus S)^* = \emptyset$ , ya que  $\partial_z S$  no tiene puntos aislados.

Lo cual nos sugiere  $X$  como una especie de tablero de ajedrez cuyas casillas están limitadas por  $\partial_z S$  y  $S$  es la unión de todas las casillas negras.



2) Obsérvese que 2.19 puede ser generalizado a un conjunto algebraico real compacto y no singular  $X$ , ya que el argumento y los resultados utilizados en su demostración son válidos en dimensión arbitraria. En consecuencia obtenemos:

*Un semialgebraico  $S$  en un conjunto algebraico real compacto y no singular  $X$  tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  es abierto principal si y sólo si*

$$\dim(S^* \cap \partial_z S^*) < d - 1 \text{ y } \dim((X \setminus S)^* \cap \partial_z S^*) < d - 1$$

*siendo  $d = \dim(X)$ .*

### 3 Cotas de Bröcker-Scheiderer y estructura de los conjuntos semialgebraicos

Explotando los resultados obtenidos en la sección 2 anterior obtendremos sencillas demostraciones de hechos bien conocidos en Geometría Semialgebraica como son las cotas de Bröcker-Scheiderer para el número de funciones regulares necesarias para describir un abierto (o cerrado) básico (ver [Br2] y [Sch]). Para concluir este estudio geométrico de la basicidad en dimensión 2 hemos querido incluir también una prueba de un resultado sobre la estructura de un semialgebraico en una superficie que puede encontrarse en [ABR].

Sea  $X$  un conjunto algebraico de dimensión  $d$  en  $\mathbb{R}^n$ . El mínimo número de funciones regulares necesario para describir cualquier abierto (resp. cerrado) básico en  $X$  depende sólo de la dimensión de  $X$ . Este número, que se denota  $s(d)$  (resp.  $\bar{s}(d)$ ) coincide con  $d$  (resp.  $d(d+1)/2$ ) (ver [Br2], [Sch]). En esta memoria daremos una demostración directa de estas cotas para  $d = 2$ .

**Proposición 3.1**  $s(2) = 2$ ,  $\bar{s}(2) = 3$ .

*Demostración:* Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  una superficie algebraica real y sea  $S$  un abierto básico en  $X$ . Denotaremos por  $s(S)$  el número mínimo de ecuaciones necesarias para describir  $S$  en  $X$ .

Podemos suponer que  $X$  es compacta y no singular. En efecto, siempre es posible tomar un modelo birracional  $S'$  de  $S$  en una desingularización de una compactificación de  $X$  tal que  $\partial_z S' \cap S' = \emptyset$ , entonces  $S'$  es abierto básico y  $s(S) = s(S')$  (Proposición 1.4). Supongamos que  $X$  es compacto y no singular y sea  $S = \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$  con  $f_i \in \mathcal{R}(X)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Entonces  $\partial_z S \subset \{f_1 \cdots f_r = 0\}$  y  $S$  es la union de algunas componentes conexas del abierto principal  $P = \{f_1 \cdots f_r > 0\}$ .

Tomemos la resolución estandar de  $\{f_1 \cdots f_r = 0\}$  dada por  $\pi : X' \rightarrow X$  y sean

$$T = (\pi^{-1}(S))^*, \quad Q = (\pi^{-1}(P))^*$$

El semialgebraico  $Q$  es genéricamente principal, por lo tanto  $\partial_z Q \cap Q$  es un conjunto finito, pero  $\partial_z Q$  tiene todas sus componentes lisas, con lo cual  $\partial_z Q \cap Q = \emptyset$  y  $Q$  es abierto principal por 2.18. Siguiendo un argumento similar tenemos que  $T$  abierto básico.

Así, podemos suponer también que  $S = S^*$ ,  $S \subset P$ , donde  $P = \{f > 0\}$  es un principal tal que  $P = P^*$ ,  $\{f = 0\} = \partial_z P$  tiene componentes lisas que se cruzan transversalmente y  $\partial_z S \subset \partial_z P$ .

El conjunto  $S$  es la union de algunas componentes conexas de  $P$  e intentaremos separar estas del resto por una funcion regular.

Sean  $C_1, \dots, C_l$  las componentes conexas de  $P \setminus S$ . Entonces, para cada  $i = 1, \dots, l$ ,  $\overline{C_i} \cap P \setminus C_i$  es un conjunto finito, denotemos  $p_{i1}, \dots, p_{ik(i)}$  los puntos de este conjunto; además, en cada  $p_{ij}$  dos componentes de  $\partial_z P$  se cortan transversalmente. Por el mismo argumento que en la demostración de 2.14 podemos construir una curva diferenciable lisa  $H_i$  en  $X \setminus P$  que aproxime el borde  $\partial C_i$ , contenga a los puntos  $p_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, k(i)$  y su tangente en  $p_{ij}$  sea transversal a las componentes de  $\partial_z P$  y no interseque a  $P \setminus C_i$  en un entorno de  $p_{ij}$ . Tomemos un entorno tubular  $U_i$  de  $H_i$ , como  $[H_i] = 0$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ ,  $U_i$

es difeomorfo a un fibrado vectorial trivial sobre  $H_i$  ([BCR, 12.4.22]); entonces podemos construir una ecuación lisa  $\psi_i$  de  $H_i$  que tenga rango maximal en cada punto de  $H_i$  y sea negativa en  $U_i \cap C_i$ .

Podemos extender  $\psi_i$  a una función lisa  $\varphi_i \in C^\infty(X)$  tal que  $\varphi_i(P \setminus C_i) > 0$  y  $\varphi_i(C_i) < 0$ . Ahora aproximamos  $\varphi_i$  en compacto  $X$ , relativamente al conjunto  $\{p_{i1}, \dots, p_{ik(i)}\}$ , por una función regular  $g_i$  en la topología  $C^1$  de  $C^\infty(X)$ . Si la aproximación se hace como en 2.1 (más en concreto como en 2.14, controlando la aproximación mediante una función de crecimiento controlado que se comporte bien en un entorno de cada  $p_{ij}$ ), el conjunto de ceros de  $g_i$  está contenido en un entorno tubular de  $\varphi_i^{-1}(0) = H_i$  y la retracción de este entorno induce un difeomorfismo entre  $g_i^{-1}(0)$  y  $\varphi_i^{-1}(0)$ . En particular, puesto que la recta tangente a  $g_i^{-1}(0)$  en el punto  $p_{ij}$  ( $j = 1, \dots, k(i)$ ) no interseca a  $P \setminus C_i$  en un entorno de  $p_{ij}$ , tenemos que  $g_i(P \setminus C_i) > 0$ ,  $g_i(C_i) < 0$ .

Sea  $g = g_1 \cdots g_l \in \mathcal{R}(X)$ , entonces  $g(S) > 0$ ,  $g(C_i) < 0$  para  $i = 1, \dots, l$ . Luego

$$S = P \cap \{g > 0\} = \{f > 0, g > 0\}.$$

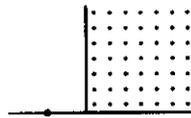
Por lo tanto  $s(2) \leq 2$ .

Por otra parte es fácil encontrar abiertos básicos que no sean principales. Por ejemplo sea  $S$  un cuadrante en  $\mathbb{R}^2$ ;  $S = \{x > 0, y > 0\}$  es abierto básico pero no es principal (basta aplicar el criterio 2.17). Luego,  $s(2) = 2$ .

Consideremos ahora el caso en que  $S$  es cerrado básico. Entonces  $S \setminus \partial_z S$  es abierto básico, por lo tanto existen  $f, g \in \mathcal{R}(X)$  tales que  $S \setminus \partial_z S = \{f > 0, g > 0\}$ . Aplicando 1.4 existen  $F, G, H \in \mathcal{R}(X)$  tal que  $S = \{F \geq 0, G \geq 0, H \geq 0\}$ . Luego  $\bar{s}(2) \leq 3$ .

Por otra parte, tomemos como  $S$  la adherencia de un abierto básico no principal, unión un semialgebraico cerrado de dimensión 1 no adherente al abierto básico y que no sea un conjunto algebraico. Es fácil comprobar que  $S$  no puede ser descrito con menos de 3 ecuaciones. Por ejemplo, el semialgebraico

$$S = \{y^2 x \geq 0, y \geq 0, x + 1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$



Obsérvese que si  $S = \{f \geq 0, g \geq 0\}$  entonces  $\{f > 0, g > 0\}$  es un abierto básico denso en  $\{x > 0, y > 0\}$  y por lo tanto no es principal, con lo cual

$$S \setminus \{f > 0, g > 0\} = \{f > 0, g = 0\} \cup \{f = 0, g > 0\} \cup \{f = 0, g = 0\}$$

está constituido por los puntos adherentes a  $\{f > 0, g > 0\}$  más un conjunto algebraico de dimensión 1. Luego habremos incluido toda la recta  $\{y = 0\}$  y no exactamente el segmento  $[-1, \infty)$  de ésta, que es la parte contenida en  $S$ .

Por lo tanto,  $\bar{s}(2) = 3$ . □

Incluimos el siguiente resultado con el fin de completar el estudio de semialgebraicos en dimensión 2, si bien su interés dentro de esta memoria es hacer uso de los que hemos

obtenido. La demostración aquí incluida difiere sólo en ciertos argumentos de la que puede verse en [ABR, VI.7.11].

**Proposición 3.2** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  una superficie irreducible y  $S \subset X$  un conjunto semialgebraico. Entonces, existen  $f, g, h \in \mathcal{R}(X)$  y un conjunto semialgebraico  $C$  de dimensión 1 verificando que*

$$S = \{f > 0, g > 0\} \cup \{h > 0\} \cup C$$

de tal modo que estas uniones son disjuntas.

*Demostración:* Podemos suponer que  $S$  no es genéricamente básico y que  $\dim(S) = 2$ , ya que si  $S$  es genéricamente básico o  $\dim(S) \leq 1$  tenemos directamente el resultado.

Consideremos primero el caso en que  $X$  es compacto y no singular,  $S = S^*$  y  $\partial_z S$  tenga componentes lisas con cruzamientos normales. Entonces,  $\dim(\partial_z S \cap S) = 1$  (2.13 y 2.15). Luego  $\partial_z S \cap S$  es un abierto semialgebraico de dimensión 1 y su frontera es un conjunto finito de puntos contenidos en  $\partial S$ ; estos puntos pueden ser de dos tipos dependiendo de que pertenezcan a la frontera de una o dos componentes conexas de  $\partial_z S \cap S$ . Sea  $A$  el conjunto formado por estos puntos frontera y los puntos singulares de  $\partial_z S$  contenidos en  $S$ .

Consideremos ahora, para cada  $p \in A$  una bola abierta  $B_p \subset \mathbb{R}^n$  suficientemente pequeña y transversal a  $X$  tal que  $D_p = B_p \cap X$  este contenido en  $S$ , como sigue:

(a) Si  $p$  pertenece a la frontera de una única componente conexa de  $\partial_z S \cap S$ , tomamos  $B_p$  tal que  $\partial B_p$  sea tangente a  $\partial S$  en  $p$  (ver Figura II.4.1).

(b) Si  $p$  pertenece a la frontera de exactamente 2 componentes conexas de  $\partial_z S \cap S$ , tomamos  $B_p$  tal que  $\partial B_p$  corte transversalmente en  $p$  ambas componentes de  $\partial_z S$  (ver Figura II.4.1).

(c) Si  $p \in S$ , tomamos  $B_p$  centrada en  $p$  (ver Figura II.4.1).

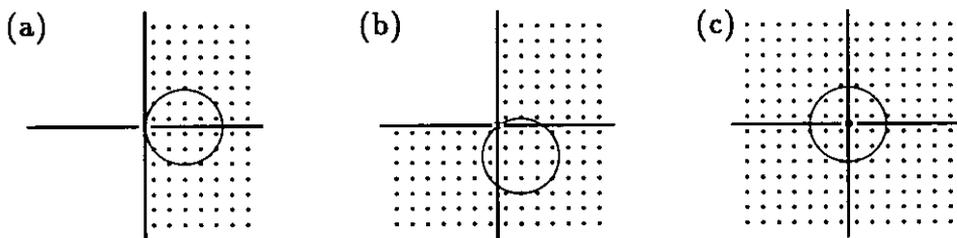


Figura II.4.1

Denotemos  $Y = (\partial_z S \cap S) \setminus ((\cup_{p \in A} D_p) \cap \partial_z S)$ ;  $Y$  está compuesto por la unión de un número finito de variedades compactas de dimensión 1.

Podemos encontrar un número finito de pequeñas bolas euclídeas abiertas disjuntas  $\{B_j\}_{j=1}^l$  en  $\mathbb{R}^n$ , transversales a  $X$ , tales que

- 1)  $D_j = B_j \cap X \subset S$ ;
- 2)  $\partial D_j$  es transversal a  $Y$ ;
- 3)  $Y = (\cup \overline{D}_j) \cap \partial_z S$ ;
- 4) si  $\overline{D}_{j_1} \cap \overline{D}_{j_2} \neq \emptyset$ , para  $j_1 \neq j_2$ , entonces  $\overline{D}_{j_1} \cap \overline{D}_{j_2} = \{q\}$ , con  $q \in Y$  (con lo cual  $\partial D_{j_1}$  y  $\partial D_{j_2}$  son tangentes en  $q$ );

5) si  $\overline{D}_j \cap \overline{D}_p \neq \emptyset$ , para algún  $j = 1, \dots, l$  y algún  $p \in A$ , entonces  $\overline{D}_j \cap \overline{D}_p = \{b\}$ , con  $b \in \partial Y$  (con lo cual  $\partial D_j$  y  $\partial D_p$  son tangentes en  $b$ ).

Por lo tanto,  $(\bigcup_{p \in A} \overline{D}_p) \cup (\bigcup_{j=1}^l \overline{D}_j) \supset (\partial_z S \cap S) \cup A$ . Tomemos una ecuación  $h \in \mathcal{R}(X)$  para la unión de los bordes de esta familia de bolas tal que  $h$  sea positiva dentro de los  $D'_j$ s y los  $D'_p$ s y negativa fuera. Entonces el conjunto  $\{x \in X : h(x) > 0\}$  es un abierto principal contenido en  $S$  y que contiene  $(\partial_z S \cap S) \setminus \{h = 0\}$ .

Consideremos ahora  $B = \{x \in S : h(x) < 0\}$ . Comprobaremos que  $B$  es abierto básico. Esto puede verse fácilmente usando 2.15. De hecho, ninguna componente irreducible de  $\partial_z B$  da una obstrucción global a la basicidad de  $B$ , ya que  $B = B^*$  y  $\partial_z B \subset \partial_z S \cup \{h = 0\}$  no interseca  $B$ . Es prácticamente inmediato verificar que  $B$  es localmente básico en los puntos singulares de  $\partial_z B$ , ya que los puntos que no presentan cruzamiento normal se pueden describir localmente por  $\{h < 0\}$ .

Así  $B$  es abierto básico y  $S = B \cup \{h > 0\} \cup (\{h = 0\} \cap S)$ . Aplicando 3.1 tenemos el resultado.

Para el caso general, consideremos una desingularización  $\pi_1 : X_1 \rightarrow \overline{X}$  de una compactificación  $\overline{X}$  de  $X$ , y entonces una resolución  $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$  de la frontera de Zariski de  $\pi_1^{-1}(S)$ . Definamos  $T = \pi_2^{-1}(\pi_1^{-1}(S))$ . Entonces  $T^*$  verifica 4.1. Pero siempre existe un conjunto semialgebraico  $S'$  en  $X_2$  genéricamente igual a  $T$  y birregularmente isomorfo a  $S$ . Por lo tanto, es suficiente probar lo siguiente:

*Sean  $S$  y  $T$  conjuntos semialgebraicos genéricamente iguales en  $X$  (i.e. existen conjuntos algebraicos  $C_1, C_2$  con  $\dim(C_i) \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ , tales que  $S \setminus (C_1 \cap S) = T \setminus (C_2 \cap T)$ ). Entonces,  $S$  verifica 4.1 si y sólo si  $T$  verifica 4.1.*

En efecto, supongamos que existe un abierto básico  $B = \{f > 0, g > 0\}$ , un abierto principal  $P = \{h > 0\}$  y un semialgebraico  $C$  de dimensión menor que 2, disjuntos dos a dos, tales que  $T = B \cup P \cup C$ . Entonces,

$$\begin{aligned} S \setminus (C_1 \cap S) &= T \setminus (C_2 \cap T) = (B \cup P \cup C) \setminus (C_2 \cap T) = \\ &= (B \setminus (C_2 \cap B)) \cup (P \setminus (C_2 \cap P)) \cup (C \setminus (C_2 \cap C)) = \\ &= B' \cup P' \cup C' \end{aligned}$$

Pero  $B' = \{f > 0, g > 0\} \setminus (C_2 \cap B)$  y  $P' = \{h > 0\} \setminus (C_2 \cap P)$ . Consideremos una ecuación positiva  $p \in \mathcal{R}(X)$  de  $C_2$ , entonces

$$B' = \{pf > 0, pg > 0\}, \quad P' = \{ph > 0\}$$

y además  $\dim(C') \leq 1$ . Por lo tanto  $S = \{pf > 0, pg > 0\} \cup \{ph > 0\} \cup (C' \cup (C_1 \cap S))$ , donde estos tres conjuntos semialgebraicos son disjuntos dos a dos.  $\square$

## 4 Revisión geométrica de la teoría de abanicos

Dedicaremos esta sección al estudio de la teoría de abanicos en relación con la basicidad. Los resultados que trataremos son ya conocidos (ver [Br2], [ABR]) dentro de las teorías de espacios de órdenes y de formas cuadráticas. Sin embargo, para dimensión 2 daremos sencillas demostraciones usando mecanismos puramente geométricos.

Todas las nociones y resultados de algebra real, espectro real, especialización, valoraciones reales, etc., quedan referidas al capítulo I de esta memoria y a [BCR].

Sea  $\mathcal{K}$  un cuerpo real, recordemos que un abanico  $F$  de  $\mathcal{K}$  es un subconjunto finito de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K})$  tal que el producto de tres elementos cualquiera de  $F$  es un cuarto elemento de  $F$  (por producto entendemos el producto como signaturas). Entonces una abanico  $F$  verifica  $\#(F) = 2^k$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ .

A partir de ahora  $\mathcal{K}$  será el cuerpo de funciones racionales  $\mathcal{K}(X)$  de una superficie algebraica real irreducible  $X \subset \mathbb{R}^n$ , es decir  $\mathcal{K}(X) = \text{cf}(\mathcal{R}(X))$ . En la siguiente proposición veremos que sólo hay abanicos de 4 elementos en  $\mathcal{K}(X)$ . Lo cual, junto con 3.1, prueba la *fórmula global de estabilidad* (ver [Sch], [ABR]) para superficies:

$$s(X) = \text{Sup}\{s : \text{existe un abanico } F \text{ en } \mathcal{K}(X) \text{ con } \#(F) = 2^s\}$$

donde en este caso  $s(X) = s(2)$ .

**Proposición 4.1** *Si  $\dim(X) = 2$ , entonces todo abanico no trivial de  $\mathcal{K}(X)$  tiene 4 elementos.*

*Demostración:* Supongamos que existe un abanico  $F$  en  $\mathcal{K}(X)$  tal que  $\#(F) > 4$ , entonces  $F$  tiene al menos 8 elementos y podemos suponer que tiene exactamente 8. Teniendo en cuenta las relaciones entre los elementos de  $F$ , pongamos

$$F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\}$$

Como  $\alpha_4 \neq \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ , podemos encontrar  $f_1 \in \mathcal{K}(X)$  tal que

$$\alpha_1(f_1) < 0, \alpha_2(f_1) > 0, \alpha_3(f_1) > 0, \alpha_4(f_1) > 0$$

Obsérvese que  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3(f_1) = \alpha_1\alpha_3\alpha_4(f_1)$ , entonces existe  $f_2 \in \mathcal{K}(X)$ ,  $f_2 \neq f_1$  tal que

$$\alpha_1(f_2) < 0, \alpha_2(f_2) > 0, \alpha_3(f_2) > 0, \alpha_1\alpha_3\alpha_4(f_2) > 0$$

Obsérvese que  $\alpha_1\alpha_3\alpha_4(f_1) = \alpha_1\alpha_2\alpha_4(f_1)$  y que  $\alpha_1\alpha_3\alpha_4(f_2) = \alpha_1\alpha_2\alpha_4(f_2)$ , entonces existe  $f_3 \in \mathcal{K}(X)$ ,  $f_3 \neq f_1$ ,  $f_3 \neq f_2$  tal que

$$\alpha_1(f_3) < 0, \alpha_3(f_3) > 0, \alpha_4(f_3) > 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_4(f_3) > 0$$

En resumen, los signos de  $f_1, f_2, f_3$  en los elementos de  $F$  se distribuyen según la siguiente tabla:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_3\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
$f_1$	-	+	+	+	-	-	-	+
$f_2$	-	+	+	-	-	+	+	-
$f_3$	-	-	+	+	+	-	+	-

Arreglando denominadores podemos considerar  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{R}(X)$ , con la misma tabla de signos. Consideremos el abierto básico  $S = \{f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0\} \subset X$ , entonces

$$F \cap \tilde{S} = \{\alpha_3\}$$

Aplicando 3.1 a  $S$ , tenemos que existen  $g, h \in \mathcal{R}(X)$  tales que

$$S = \{f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0\} = \{g > 0, h > 0\}$$

Luego,  $\alpha_3(g) > 0$ ,  $\alpha_3(h) > 0$  y para todo  $\beta \in F$ ,  $\beta \neq \alpha_3$  es bien  $\beta(g) < 0$  o bien  $\beta(h) < 0$ .

Como  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \notin \tilde{S}$ , entonces  $\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$  o  $\alpha_1(h) \neq \alpha_2(h)$ . Supongamos que  $\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$  (en otro caso intercambiamos los papeles de  $g$  y  $h$ ). Además, como  $\alpha_1, \alpha_2 \notin \tilde{S}$ , pongamos  $\alpha_1(g) > 0$ ,  $\alpha_2(g) < 0$  (en otro caso intercambiamos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ). Luego  $\alpha_1(h) < 0$ .

*Caso 1:* Supongamos  $\alpha_1(h) = \alpha_2(h)$ . Como  $\alpha_4, \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \notin \tilde{S}$ ,  $\alpha_4(g) \neq \alpha_4(h)$ . Además,  $\alpha_1\alpha_3\alpha_4 \notin \tilde{S}$ , entonces  $\alpha_1(g) \neq \alpha_4(g)$  o  $\alpha_1(h) \neq \alpha_4(h)$ . Con lo cual, teniendo en cuenta también las relaciones entre los elementos de  $F$ , tenemos la siguiente tabla de signos:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_3\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
$g$	+	-	+	-	-	-	+	+
$h$	-	-	+	+	+	-	+	-

Por lo tanto  $\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \in \tilde{S}$ , lo que no es posible.

*Caso 2:* Supongamos entonces  $\alpha_1(h) \neq \alpha_2(h)$ . Luego  $\alpha_1(h) < 0$  y  $\alpha_2(h) > 0$ . Como  $\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_4 \notin \tilde{S}$  entonces  $\alpha_4(g) \neq \alpha_4(h)$ . Además,  $\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \notin \tilde{S}$  luego  $\alpha_2(g) \neq \alpha_4(g)$  o  $\alpha_2(h) \neq \alpha_4(h)$ . Con todo lo cual tenemos la siguiente tabla de signos en este caso:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_1\alpha_3\alpha_4$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_4$	$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
$g$	+	-	+	+	-	+	-	-
$h$	-	+	+	-	-	+	+	-

Por lo tanto,  $\alpha_1\alpha_3\alpha_4 \in \tilde{S}$ , lo cual no es posible.

Luego hemos llegado a una contradicción al suponer que existe un abanico con 8 elementos distintos en  $\mathcal{K}(X)$ .  $\square$

En el resto de esta memoria entenderemos por abanicos sólo aquellos de 4 elementos.

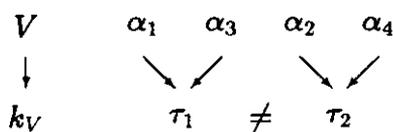
A continuación veremos que las propiedades a) y b) de 2.15 son equivalentes a ciertas propiedades sobre abanicos de  $\mathcal{K}(X)$ . De este hecho deduciremos inmediatamente el criterio de los abanicos de 4 elementos para la basicidad (ver [Br2]) en su versión más geométrica (ver [AR1]), esto es para abanicos asociados a un divisor primo real.

**Definición 4.2** Sea  $\mathcal{K}$  un cuerpo real. Un abanico  $F$  en  $\mathcal{K}$  está asociado a un divisor primo real si existe un anillo de valoración discreta  $V$  de  $\mathcal{K}$  verificando:

- a)  $V$  es compatible con todos los elementos de  $F$ .
- b)  $F$  induce a lo más dos órdenes en el cuerpo residual  $k_V$  de  $V$ .
- c)  $\text{gr.tr.}[\mathcal{K} : \mathbb{R}] = \text{gr.tr.}[k_V : \mathbb{R}] + 1$ .

De hecho, un anillo de valoración discreta  $V$  en las condiciones de la definición es un divisor primo real.

**Observación 4.3** En el caso  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ , si  $F$  es un abanico asociado a un divisor primo real  $V$  entonces  $k_V$  es el cuerpo de funciones racionales de una curva y  $\text{Spec}_r(k_V)$  tiene infinitos elementos. Por lo tanto, siguiendo la construcción I.4.4,  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  está formado por las elevaciones a  $\mathcal{K}$  de 2 órdenes distintos  $\tau_1, \tau_2$  de  $k_V$ , que representabamos en el siguiente diagrama:



Podemos considerar  $\tau_1, \tau_2 \in \text{Spec}_r(k_V)$  como elementos de  $\text{Spec}_r(V)$  con soporte el ideal maximal  $\mathfrak{m}_V$  de  $V$ . Entonces tenemos que  $\alpha_1, \alpha_3$  (resp.  $\alpha_2, \alpha_4$ ) especializan a  $\tau_1$  (resp.  $\tau_2$ ) en  $\text{Spec}_r(V)$ .

Continuamos denotando  $\alpha \rightarrow \tau$ , cuando  $\alpha$  especializa a  $\tau$ . □

Hasta que no indiquemos otra cosa  $X$  será una superficie algebraica real irreducible, compacta y no singular.

**Observación 4.4** Sea  $F$  un abanico de  $\mathcal{K}(X)$  asociado a un divisor primo real  $V$ . Como  $X$  es compacto tenemos que  $\mathcal{R}(X) \subset V$ . Consideremos el ideal primo  $\mathfrak{p} = \mathcal{R}(X) \cap \mathfrak{m}_V$ , entonces  $V$  domina al anillo local  $\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$ . Tenemos dos posibilidades:

1) Si  $\mathfrak{p}$  es de altura 1, entonces es el ideal de una curva algebraica  $H \subset X$ . Puesto que  $X$  es no singular, el anillo  $\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$  es un anillo de valoración discreta que está dominado por  $V$ ; por lo tanto,  $V = \mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$  y  $k_V$  es el cuerpo de funciones racionales de la curva  $H$ .

Dado que todo elemento de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}})$  es un cono primo de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  cuyo soporte está contenido en  $\mathfrak{p}$ , tenemos que  $F$  puede ser representado en  $X$  como indica la figura II.4.4(a); esto es, fijando 2 órdenes distintos  $\tau_1, \tau_2$  en la curva  $H$  (i.e. 2 semirramas distintas centradas en dos puntos  $a, b \in H$  [BCR, 10.3.3], posiblemente con  $a = b$ ) y tomando las dos generizaciones de cada uno de ellos.

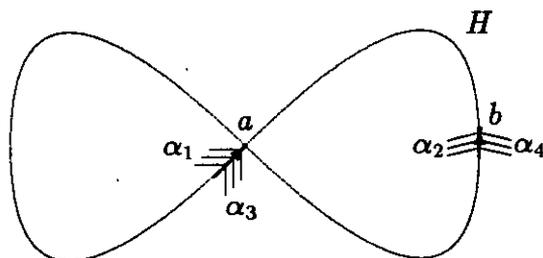
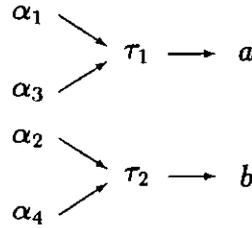


Figura II.4.4(a): Abanico centrado en una curva en  $X$

Entonces, los elementos de  $F$  especializan en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  como sigue:



donde  $a, b \in \text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  representan los conos primos de soporte  $m_a$  y  $m_b$  respectivamente.

2) Si  $p$  es un ideal maximal, entonces es el ideal  $m_p$  de un punto  $p \in X$ , ya que  $X$  es compacto. Pero,  $k_V$  es el cuerpo de funciones racionales de una curva  $C$  en algún modelo  $X'$  de  $\mathcal{K}(X)$ , con lo cual tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{R}(X)_{m_p} & \hookrightarrow & V & \hookrightarrow & \mathcal{K}(X) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{K}(p) & \hookrightarrow & & & \mathcal{K}(C)
 \end{array}$$

Puesto que  $X$  y  $X'$  tienen cuerpos de funciones isomorfos, tienen que existir un morfismo birracional  $\pi : X' \rightarrow X$ . Por otra parte, la inclusión de cuerpos  $\mathcal{K}(p) \hookrightarrow \mathcal{K}(C)$  indica que  $\pi$  produce una contracción de la curva  $C$  al punto  $p$ . Luego, podemos ver  $F$  como la contracción a  $p$  de un abanico centrado en  $C$  (figura II.4.4(b)).

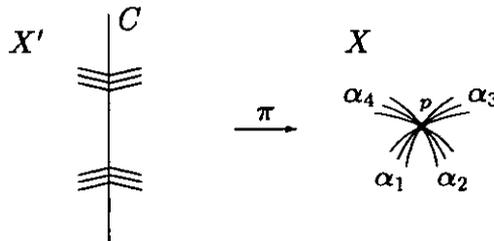


Figura II.4.4(b): Abanico centrado en un punto en  $X$

Por lo tanto la única especialización de los elementos de  $F$  en  $\mathcal{R}(X)$  es el cono primo de soporte  $m_p$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rightarrow p$ . □

**Definición 4.5** Sea  $F$  un abanico en  $\mathcal{K}(X)$  asociado a un divisor primo real  $V$  y sea  $p = \mathcal{R}(X) \cap m_V$ . Llamaremos centro de  $F$  en  $X$  al conjunto de ceros  $Z(p)$  de  $p$ .

Diremos que  $F$  está centrado en una curva  $H$  (resp. en un punto  $p$ ) de  $X$  si  $p$  tiene altura 1 (resp.  $p$  es maximal).

En los siguientes lemas trabajaremos en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  con la topología de Harrison. La especialización juega en esta topología un papel importante; recordamos la caracterización de puntos interiores y adherentes a un constructible mediante especialización, ya que se utilizará en las demostraciones posteriores:

- Sea  $S$  un abierto constructible y  $\beta \in S$  tal que  $\alpha \rightarrow \beta$ . Entonces  $\alpha \in S$ .
- Sea  $S$  un constructible. Entonces,  $\beta \in \overline{S}$  si y sólo si existe  $\alpha \in S$  con  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Recordamos del Capítulo I que la operación tilde da una biyección entre los semialgebraicos abiertos de  $X$  y el conjunto de constructibles abiertos de  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$ .

**Lema 4.6** *Sea  $S \subset X$  un semialgebraico abierto. Entonces los siguientes hechos son equivalentes:*

- (i) *Para todo abanico  $F$  de  $\mathcal{K}(X)$  centrado en una curva se verifica que  $\#(F \cap \tilde{S}) \neq 3$ .*
- (ii) *Ninguna componente irreducible de  $\partial_z S$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S$  (i.e.  $\partial_z S^* \cap S^*$  es un conjunto finito).*

*Demostración:* Supongamos que tenemos un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  centrado en una curva  $H \subset X$  tal que  $\#(F \cap \tilde{S}) = 3$ . Entonces, por ejemplo,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \tilde{S}$  y  $\alpha_4 \notin \tilde{S}$ . Por las observaciones 4.2 y 4.3 el abanico  $F$  verifica:

a) El abanico  $F$  está asociado a un divisor primo real  $V = \mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$ , donde  $\mathfrak{p}$  es el ideal de  $H$  en  $\mathcal{R}(X)$ .

b) Los elementos de  $F$  especializan en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  como sigue:  $\alpha_1, \alpha_3 \rightarrow \tau_1$  y  $\alpha_2, \alpha_4 \rightarrow \tau_2$ , donde  $\tau_1, \tau_2$  tienen soporte  $\mathfrak{p}$ .

Tenemos que  $\tau_1 \in \tilde{S} = \overline{\tilde{S}}$ , ya que  $\alpha_1, \alpha_3 \in \tilde{S}$ . Pero, por [BCR, 10.2.8] existen exactamente dos conos primos diferentes de  $\tau_1$  en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  que especialicen en  $\tau_1$ , luego estos tienen que ser  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ . Además, como todas las generizaciones de  $\tau_1$  están en  $\tilde{S}$ , tenemos que  $\tau_1$  es un punto interior de  $\tilde{S}$ , luego  $\tau_1 \in \tilde{S}^*$ . Con lo cual  $\tau_1 \in \tilde{H} \cap \tilde{S}^*$  y  $\dim(H \cap S^*) = 1$ .

Comprobemos ahora que  $H$  es una componente de  $\partial_z S^*$ . Como  $\alpha_2 \in \tilde{S}$  y  $\alpha_2 \rightarrow \tau_2$ , entonces  $\tau_2 \in \tilde{S}$ . Aplicando de nuevo [BCR, 10.2.8] los conos primos que especializan en  $\tau_2$  y son diferentes de  $\tau_2$  son precisamente  $\alpha_2, \alpha_4$ . Puesto que  $\alpha_4 \notin \tilde{S}$  y  $\tilde{S} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{\tilde{S}} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ , tenemos que  $\alpha_4 \notin \tilde{\tilde{S}}$ , luego  $\tau_2$  no es interior a  $\tilde{\tilde{S}}$  (i.e.  $\tau_2 \notin \tilde{\tilde{S}}^*$ ). Pero  $\tilde{S} = \overline{\tilde{S}^*}$ , con lo cual

$$\tau_2 \in \widetilde{\tilde{S}^* \setminus S^*} \subset \partial_z \tilde{S}^*.$$

Esto implica que  $\dim(H \cap \partial_z S^*) = 1$  y entonces  $H$  es una componente irreducible de  $\partial_z S^*$ . Por lo tanto  $\dim(S^* \cap \partial_z S^*) = 1$  y queda probada una parte de la equivalencia.

Recíprocamente, sea  $H$  una componente irreducible de  $\partial_z S^*$  que de una obstrucción global a la basicidad de  $S$ . Entonces podemos encontrar dos abiertos  $\Omega_1, \Omega_2$  de  $H$  contenidos en  $H \cap \text{Reg}(\partial_z S)$  tal que

a)  $\Omega_1 \subset \overline{S^*} \cap \overline{A_i^*}$  para algún  $A_i$  (i.e.  $H$  es una componente 1-dimensional del muro  $M_i$ ), donde  $A_1, \dots, A_t$  son las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$ .

b)  $\Omega_2 \subset S^*$  (i.e.  $\dim(H \cap S^*) = 1$ ).

Sea  $\mathfrak{p}$  el ideal de  $H$  en  $\mathcal{R}(X)$  y  $V$  el anillo de valoración discreta  $\mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$ . Consideremos dos órdenes  $\tau_1, \tau_2 \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(H))$ , con  $\tau_1 \in \tilde{\Omega}_1$ ,  $\tau_2 \in \tilde{\Omega}_2$  y sea  $F$  el abanico obtenido elevando  $\tau_1, \tau_2$  a  $V$ . Con lo cual,  $\alpha_1, \alpha_3 \rightarrow \tau_1$ ,  $\alpha_2, \alpha_4 \rightarrow \tau_2$  en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$ .

Tenemos, por una parte, que  $\alpha_2, \alpha_4 \in \tilde{S}^*$ , ya que  $\tau_2 \in \tilde{S}^*$  y  $S^*$  es abierto. Por otra parte,  $\tau_1 \in \tilde{\tilde{S}^*} \cap \overline{A_i^*}$ . Luego existen  $\alpha \in \tilde{S}^*$  y  $\beta \in \overline{A_i^*}$  con  $\alpha, \beta \rightarrow \tau_1$ . Entonces aplicando de nuevo [BCR, 10.2.8] tiene que ser  $\alpha = \alpha_1$  y  $\beta = \alpha_3$ .

Pero  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4 \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  y para todo semialgebraico  $T \subset X$  se verifica que  $\tilde{T} \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = \tilde{T}^* \cap \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  (operador tilde genérico), entonces  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \tilde{S}$

y  $\alpha_3 \in \tilde{A}_i$ . Por lo tanto,  $\#(F \cap \tilde{S}) = 3$ . □

**Lema 4.7** *Sea  $S \subset X$  un semialgebraico abierto tal que  $\partial_z S^* \cap S^*$  es un conjunto finito. Fijemos un punto  $p \in \partial S$ . Entonces los siguientes hechos son equivalentes:*

- (i) *Para cada abanico  $F$  centrado en  $p$  se verifica que  $\#(F \cap \tilde{S}) \neq 3$ .*
- (ii) *El semialgebraico  $S$  es localmente básico en  $p$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $S$  no es localmente básico en  $p$ . Entonces, aplicando 2.13, existe una contracción  $\pi : X' \rightarrow X$  de una curva  $E \subset X'$  a  $p$  tal que alguna componente irreducible  $D$  de  $E$  da una obstrucción global a la basicidad de  $T = \pi^{-1}(S)$ . Entonces, por 4.5, existe un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  de  $\mathcal{K}(X')$  centrado en la curva  $D$  tal que  $\#(F \cap \tilde{T}) = 3$ .

La contracción  $\pi$  induce un isomorfismo de cuerpos  $\pi_* : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X')$  y un monomorfismo de anillos  $\pi_*|_{\mathcal{R}(X)} : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X')$ . Sea  $G$  el abanico de  $\mathcal{K}(X')$  imagen inversa de  $F$  por  $\pi_*$ , es decir

$$G = \{\pi_*^{-1}(\alpha_1), \pi_*^{-1}(\alpha_2), \pi_*^{-1}(\alpha_3), \pi_*^{-1}(\alpha_4)\} \subset \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$$

Entonces, dado que  $S$  y  $T$  son birracionalmente equivalentes,  $\#(G \cap \tilde{S}) = 3$ .

Comprobemos ahora que  $G$  está centrado en  $p$ . Sea  $V$  el divisor primo real asociado a  $F$ , entonces  $\pi_*^{-1}(V) = W$  es el divisor primo real asociado a  $G$ . Con lo cual,

$$\mathfrak{m}_W \cap \mathcal{R}(X) = \pi_*^{-1}(\mathcal{J}(H))$$

donde  $\mathcal{J}(H)$  denota el ideal de  $H$  en  $\mathcal{R}(X')$ . Por lo tanto,

$$\mathfrak{m}_W \cap \mathcal{R}(X) = \mathcal{J}(\pi(H)) = \mathfrak{m}_p$$

con  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal de  $p$ .

Recíprocamente, supongamos que  $S$  es localmente básico en  $p$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $X$  y un abierto básico  $B$  en  $X$  tal que  $S \cap U = B \cap U$ .

Sea  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  un abanico de  $\mathcal{K}(X)$  centrado en  $p$ . Claramente  $F \subset \tilde{U}$ , ya que  $\alpha_i$  especializa en  $\text{Spec}_r(\mathcal{R}(X))$  al cono primo que tiene a  $\mathfrak{m}_p$  como soporte. Supongamos que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \tilde{S}$  y  $\alpha_4 \notin \tilde{S}$ . Entonces,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \tilde{U} \cap \tilde{S}$  y  $\alpha_4 \notin \tilde{U} \cap \tilde{S}$ . Luego, para todo  $j = 1, \dots, l$ ,  $\alpha_i(f_j) > 0$  para  $i = 1, 2, 3$  y existe  $j_0$  tal que  $\alpha_4(f_{j_0}) < 0$ . Pero esto es imposible ya que  $F$  es un abanico y  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3(f_{j_0}) \neq \alpha_4(f_{j_0})$ . □

**Observación 4.8** *Sea  $S$  un semialgebraico abierto tal que  $\partial_z S^* \cap S^*$  es un conjunto finito. Sea  $p \in \partial_z S$  tal que  $p \notin \partial S$  ó  $\partial_z S$  presenta un cruzamiento normal en  $p$ , entonces para todo abanico centrado en  $p$  se tiene  $\#(F \cap \tilde{S}) \neq 3$ .*

De los dos lemas precedentes deduciremos inmediatamente *el criterio de los abanicos de 4 elementos para la basicidad y la principalidad* en el caso de superficies. Este resultado, que fue originariamente probado por Bröcker (ver [Br2]) para cuerpos reales

y usando formas cuadráticas, afirma que un semialgebraico  $S$  es genéricamente básico (resp. principal) si y sólo si no existe un abanico de 4 elementos con 3 (resp. 1 ó 3) de sus elementos contenidos en  $\bar{S}$ . Posteriormente ha sido mejorado por Andradas y Ruiz (ver [AR1]) al demostrar el *teorema de densidad para abanicos*. El teorema de densidad afirma que los abanicos asociados a un divisor primo real son densos dentro del conjunto de abanicos de un cuerpo con la topología producto de la Harrison en cada factor. Y de aquí el enunciado de este teorema cambia abanico por abanico asociado a un divisor primo real. En esta memoria obtendremos esta última versión como consecuencia de nuestro criterio 2.15. Lo cual nos proporciona, además, el teorema de densidad para extensiones finito generadas de  $\mathbb{R}$  de grado 2.

**Teorema 4.9** *Sea  $X$  una superficie algebraica real irreducible y sea  $S \subset X$  un semialgebraico. Entonces,*

1)  $S$  es abierto (resp. cerrado) básico si y sólo si  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  (resp.  $S$  es cerrado) y para cada abanico  $F$  de  $\mathcal{K}(X)$  asociado a un divisor primo real se tiene  $\#(F \cap \bar{S}) \neq 3$ .

2)  $S$  es abierto (resp. cerrado) principal si y sólo si  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  (resp.  $\partial_z S \subset S$ ) y para cada abanico  $F$  de  $\mathcal{K}(X)$  asociado a un divisor primo real se tiene  $\#(F \cap \bar{S}) \neq 1, 3$ .

*Demostración:* 1) Supongamos que  $S$  abierto básico, luego  $S = \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$ , con  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{R}(X)$  y  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Sea  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  un abanico en  $\mathcal{K}(X)$  y supongamos que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S$  y  $\alpha_4 \notin S$ . Entonces para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $f_i(\alpha_j) > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) y existe  $i_0 \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\alpha_4(f_{i_0}) > 0$ ; lo cual es imposible ya que  $F$  es un abanico.

En el caso en que  $S$  sea cerrado básico (i.e.  $S = \{f_1 \geq 0, \dots, f_r \geq 0\}$ , con los  $f_j \in \mathcal{R}(X)$ ), basta trabajar con  $S \setminus \{f_1 \cdots f_r = 0\}$  y tener en cuenta que se puede aplicar el operador tilde genérico ya que  $F \subset \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y  $\#(F \cap \bar{S}) \neq 3$  para todo abanico  $F$  asociado a un divisor primo real. Si  $X$  es compacta y no singular, por 4.4 tenemos que los abanicos asociados a un divisor primo real son de 2 tipos: centrados en una curva o centrados en un punto. Entonces, 4.5 y 4.6 nos permiten afirmar que  $\partial_z S^* \cap S^*$  es un conjunto finito y que  $S$  es localmente básico en todo punto de  $\partial S$ . Por lo tanto, por 2.15,  $S$  es abierto básico.

Si  $X$  no es compacto o es singular tomamos un modelo birracional  $X_1$  de  $X$  obtenido compactificando y desingularizando  $X$ . Sea  $S_1$  la transformada estricta de  $S$  en  $X_1$ , entonces  $\partial_z(S_1) \cap S_1 = \emptyset$  ya que  $S$  verifica esta propiedad. Además,  $\#(F \cap \bar{S}_1) \neq 3$  para todo abanico asociado a un divisor primo real  $F$  de  $\mathcal{K}(S_1)$ , puesto que  $\mathcal{K}(X)$  y  $\mathcal{K}(X_1)$  son isomorfos y  $S$  y  $S_1$  son genéricamente iguales. Entonces,  $S_1$  es abierto básico. Con lo cual, dado que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ ,  $S$  es abierto básico (Observación 1.5).

Para el caso  $S$  cerrado, basta tomar  $S \setminus \partial_z S$ , aplicar lo anterior y por 1.4 se tiene el resultado.

2) Supongamos  $S = \{f > 0\}$  un principal abierto entonces  $\partial_z S \cap S = \emptyset$ . Sea un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  en  $\mathcal{K}(X)$  y supongamos que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in S$  y  $\alpha_4 \notin S$  o bien supongamos que  $\alpha_1 \in S$  y  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \notin S$ . Entonces,

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3(f) \neq \alpha_4 \quad \text{o} \quad \alpha_1(f) \neq \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4(f)$$

Luego  $F$  no sería un abanico.

Recíprocamente, supongamos que  $\partial_2 S \cap S = \emptyset$  y que  $\#(F \cap \tilde{S}) \neq 3$  para todo abanico centrado en una curva. Entonces como en el caso 1) y aplicando ahora 2.20, tenemos que  $S$  es abierto principal. Obsérvese que al compactificar y desingularizar algún punto de  $X$  puede convertirse en una curva de  $X_1$ , con lo cual en  $X$  hay que tener en cuenta también los abanicos centrados en puntos, mientras que en  $X_1$  no es necesario (véase observación a continuación).

El caso  $S$  cerrado es consecuencia del anterior trabajando con  $X \setminus S$ .  $\square$

**Observación 4.10** En el caso de superficies compactas y no singulares el apartado 2) del teorema 4.8 se puede enunciar (vasta aplicar 2.20) como sigue:

*$S$  es abierto (resp. cerrado) principal si y sólo si  $\partial_2 S \cap S = \emptyset$  (resp.  $\partial_2 S \subset S$ ) y para cada abanico  $F$  de  $\mathcal{K}(X)$  centrado en una curva en  $X$  se tiene  $\#(F \cap \tilde{S}) \neq 1, 3$ .*

Este enunciado tiene un sentido más geométrico ya que alude a un modelo  $X$  de  $\mathcal{K}(X)$ . Por último, anótase que esta versión del criterio de los abanicos de 4 elementos para la principalidad puede ser extendido a un conjunto algebraico  $X$  compacto y no singular, puesto que según indicamos en 2.21 el criterio 2.20 puede ser extendido y, por otra parte, la demostración de 4.5 también.

# Capítulo III

## Descripción de abanicos

Este capítulo contiene una descripción completa del conjunto de abanicos de una superficie algebraica real irreducible. Tomamos como punto de partida la construcción explícita del espectro real de una superficie ([AGR]).

Como hemos notado en el Capítulo I, la cadena de anillos de valoración compatibles con un orden nos aporta información geométrica sobre este. En el estudio de los abanicos el concepto de anillo de valoración compatible adquiere gran importancia: todo abanico trivializa según un anillo de valoración; es decir, existe un anillo de valoración compatible con todos sus órdenes y estos inducen en el cuerpo residual un abanico trivial. Este resultado se conoce como *Teorema de trivialización de Bröcker*. En el caso de dimensión 2 este hecho se simplifica notablemente, lo cual nos permite: primero, agrupar órdenes según sus valoraciones compatibles, para luego, elevando los órdenes del cuerpo residual según el *Teorema de Baer-Krull*, determinar completamente el conjunto de abanicos.

En la sección 1 daremos una descripción completa del conjunto de órdenes totales de una superficie: asociaremos a cada orden unos invariantes que lo caracterizan, los cuales nos permiten definirlo mediante un homomorfismo en un cuerpo de series. Usando estos homomorfismos, en la sección 2, conseguiremos dar la cadena de valoraciones compatibles con un orden según sus invariantes. Finalmente en la sección 3, daremos una demostración sencilla del Teorema de Trivialización para dimensión 2 y determinaremos el conjunto de abanicos utilizando las técnicas antes expuestas, concretamente estableceremos la relación entre los invariantes de los cuatro órdenes que constituyen un abanico.

### 1 Descripción de órdenes

En esta sección determinaremos completamente el espectro real del cuerpo de funciones racionales de una superficie algebraica real irreducible. Con el propósito de describir todos los órdenes, añadiremos nuevos invariantes a los introducidos en [AGR] para determinar el espectro real de los cuerpos de series y mediante henselización trasladaremos estos resultados a un modelo liso de una superficie real.

A modo introductorio, damos las notaciones y principales resultados de [AGR], que nos servirán como punto de partida.

Primero se construye explícitamente cada orden de  $\mathbb{R}[[x, y]]$  que hace  $y/x$  finito con respecto de  $\mathbb{R}$  y  $x > 0$ . Para ello se hace una especie de expansión de Puiseux de cada orden, comparando  $y$  con las potencias racionales de  $x$ , como sigue:

Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y)))$  tal que  $y/x$  es finito respecto de  $\mathbb{R}$  y  $x > 0$ . El orden  $\alpha$  está determinado por su restricción a  $\mathbb{R}[[x]][y]$  (basta aplicar el teorema de preparación de Weierstrass) y ésta se extiende de modo único a  $F[y]$  (ver [Ma]), donde  $F$  es el cuerpo de series formales de Puiseux con coeficientes en  $\mathbb{R}$  (i.e. la clausura real de  $(\mathbb{R}((x)), 0^+)$ ). Con lo cual, tenemos el lugar  $p : F(y) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $p(h) = \text{Sup}\{r \in \mathbb{R} : r < h\}$ , cuya restricción a  $\mathbb{R}((x))(y)$  determina el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((x))(y)$  respecto de  $\alpha$ .

Se define inductivamente una familia:

$$\varepsilon_0, M_1, \theta_1, c_1, \varepsilon_1, \dots, M_n, \theta_n, c_n, \varepsilon_n, \dots$$

donde  $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ ,  $M_n \subset \mathbb{Q}^+$ ,  $\theta_n \in \mathbb{Q}$ ,  $c_n \in \mathbb{R}$ , de la siguiente forma:

Se toma  $\varepsilon_0$  igual a  $+1$  ó a  $-1$  según sea  $y > 0$  ó  $y < 0$ . Supuestos dados todos los términos hasta el índice  $n - 1$ , sea:

$$M_n = \left\{ \theta \in \mathbb{Q}^+ : p \left( \frac{y - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^{\theta_i}}{\varepsilon_{n-1} x^\theta} \right) = +\infty \right\}$$

Si  $M_n = \emptyset$  la construcción acaba en  $M_n$ . En otro caso, sea  $\eta = \inf(M_n)$ .

- Si  $\eta$  es irracional, la construcción acaba también en  $M_n$ .
- Si  $\eta$  es racional, sea

$$a = p \left( \frac{y - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^{\theta_i}}{\varepsilon_{n-1} x^\eta} \right)$$

- Si  $a = 0$ ,  $+\infty$ , la construcción acaba también en  $M_n$ .
- Si  $a \neq 0$ ,  $+\infty$ , se toma  $\theta_n = \eta$  y  $c_n = \varepsilon_{n-1} a$ .

Finalmente sea  $\varepsilon_n$  igual a  $+1$  ó a  $-1$  según sea  $y - \sum_{i=1}^n c_i x^{\theta_i} > 0$  ó  $y - \sum_{i=1}^n c_i x^{\theta_i} < 0$ .

Sea  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la última etapa de esta construcción. De aquí se obtiene una serie de potencias formales  $\xi(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^{\theta_i}$  con coeficientes reales y exponentes racionales crecientes  $\geq 1$ ; un número  $\theta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  que es

$$\theta = \begin{cases} \infty & \text{si } M_n = \emptyset \text{ ó } n = \infty \\ \theta_n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

además, se añade un símbolo  $\sigma \in \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$ , elegido del siguiente modo:

- (i)  $\sigma = 0$  si  $\xi(x)$  no es de Puiseux.
- (ii)  $\sigma$  igual a  $1$  ó a  $-1$  según sea  $y - \xi(x) > 0$  ó  $y - \xi(x) < 0$ , en el caso que  $\xi(x)$  sea una serie de Puiseux y  $\theta = \infty$ .
- (iii)  $\sigma = \varepsilon_n$  si  $\theta = \eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ó si  $\theta = \eta \in \mathbb{Q}$  y  $a = 0$ .
- (iv)  $\sigma = \varepsilon_n a$  si  $\theta = \eta \in \mathbb{Q}$  y  $a = +\infty$ .

Entonces, como  $\alpha$  está determinado conociendo el signo de elementos del tipo  $y + \zeta(x)$  con  $\zeta(x) \in F$  se obtiene el resultado siguiente:

**Teorema 1.1** ([AGR]) *Un orden  $\alpha$  de  $\mathbb{R}((x, y))$  tal que  $x > 0$  e  $y/x$  es finito respecto de  $\mathbb{R}$ , tiene asociada de forma unívoca una 3-upla  $(\xi, \theta, \sigma)$ , donde  $\xi(x), \theta, \sigma$  son como arriba, de uno de los siguientes tipos:*

- (1)  $(\xi(x), \infty, 0)$ , con  $\xi$  no Puiseux.
- (2)  $(\xi(x), \infty, \sigma)$ , con  $\xi$  una serie de Puiseux y  $\sigma \in \{1, -1\}$ .
- (3)  $(\xi(x), \theta, \sigma)$ , con  $\xi$  finita ( $i = 1, \dots, s$ ),  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\theta_s < \theta$  y  $\sigma \in \{1, -1\}$ .
- (4)  $(\xi(x), \theta, \sigma)$ , con  $\xi$  finita ( $i = 1, \dots, s$ ),  $\theta \in \mathbb{Q}$  y  $\sigma \in \{-\infty, -1, 1, \infty\}$  tales que  $\theta_s \leq \theta$  si  $\sigma \in \{-1, 1\}$  y  $\theta_s < \theta$  si  $\sigma \in \{-\infty, \infty\}$ .

En concreto  $\alpha$  queda determinado por un  $\mathbb{R}$ -homomorfismo ordenado  $\psi$  de  $\mathbb{R}((x, y))$  en uno de los siguientes cuerpos:

$C$ , el cuerpo de series formales con exponentes reales, en la variable  $x$ , con coeficientes en  $\mathbb{R}$  (casos (1) y (3));

$F((y))$ , el cuerpo de series formales, en la variable  $y$ , con coeficientes en  $F$  (cuerpo de series formales de Puiseux, en la variable  $x$ , con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ) (caso (2));

$L$ , cuerpo de series formales de Puiseux, en la variable  $x$ , con coeficientes en  $\mathbb{R}((y))$  (caso (4))

(todos ellos con el orden que hace  $x > 0$  e  $y > 0$ ). Este  $\psi$  es, en cada caso:

- (1)  $\psi : \mathbb{R}((x, y)) \rightarrow C : \begin{cases} \psi(x) = x \\ \psi(y) = \xi(x) \end{cases}$
- (2)  $\psi : \mathbb{R}((x, y)) \rightarrow F((y)) : \begin{cases} \psi(x) = x \\ \psi(y) = \xi(x) + \sigma y \end{cases}$
- (3)  $\psi : \mathbb{R}((x, y)) \rightarrow C : \begin{cases} \psi(x) = x \\ \psi(y) = \xi(x) + \sigma x^\theta \end{cases}$
- (4)  $\psi : \mathbb{R}((x, y)) \rightarrow L : \begin{cases} \psi(x) = x \\ \psi(y) = \xi(x) + x^\theta y' \end{cases}$

donde  $y' = \sigma y$  si  $\sigma \in \{-1, 1\}$ ,  $y' = \varepsilon/y$  si  $\sigma \in \{-\infty, \infty\}$  (con  $\varepsilon = 1$  si  $\sigma = \infty$ ,  $\varepsilon = -1$  si  $\sigma = -\infty$ ).

**Corolario 1.2** ([AGR]) (1) *Cada orden de  $\mathbb{R}\{x, y\}$  se extiende de forma única a  $\mathbb{R}[[x, y]]$  si y sólo si  $\xi(x)$  no es de Puiseux o es convergente. En otro caso, posee dos extensiones que se diferencian sólo en el símbolo  $\sigma$ .*

(2) *Cada orden de  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$  o  $\mathbb{R}[x, y]$  (en este caso centrado en el origen) se extiende de forma única a  $\mathbb{R}[[x, y]]$  si y sólo si  $\xi(x)$  no es de Puiseux o es de Nash. En otro caso, posee dos extensiones que se diferencian sólo en el símbolo  $\sigma$ .*

**Observación 1.3** Se obtiene una descripción análoga a 1.1 para órdenes de  $\mathbb{R}\{x, y\}$  (resp. de  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$  y de  $\mathbb{R}[x, y]$ , centrados en el origen), sin más que poner  $\sigma = 0$  en el caso en que  $\alpha$  no posea extensión única. Con lo cual se tiene 1.1 para estos anillos con las siguientes modificaciones: en el caso (1)  $\xi(x)$  es una serie no convergente (resp. no de Nash); y en el caso (2)  $\xi(x)$  es una serie convergente (resp. de Nash).

## Ordenes centrados en el origen

En lo que sigue denotaremos por  $\mathcal{A}$  (resp.  $A$ ) uno de los anillos de series siguientes:  $\mathbb{R}[[x, y]]$  (resp.  $\mathbb{R}[[x]]$ ),  $\mathbb{R}\{x, y\}$  (resp.  $\mathbb{R}\{x\}$ ) ó  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$  (resp.  $\mathbb{R}[[x]]_{\text{alg}}$ ); y por  $\mathcal{K}$  (resp.  $K$ ) el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{A}$  (resp.  $A$ ). El conjunto de órdenes totales de  $\mathcal{A}$  coincide con  $\text{Spec}_r(\mathcal{K})$ .

**Definición 1.4** Sea  $T(\mathcal{K})$  el conjunto de las uplas  $(\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w)$  donde  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $\delta \in \{-1, 1\}$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\xi(t) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{n_i}$  es una serie con coeficientes reales y exponentes racionales crecientes mayores o iguales que  $N$ ,  $m \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  tal que  $m \geq 0$ , y  $w \in \{-1, 0, 1\} \cup \{z + a, -z + a, -1/z, 1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ , verificando las siguientes relaciones:

- (1) Si  $m = 0$  y  $w = 0$ , entonces  $N = 1$  y  $\xi(t)$  es no algebraica sobre  $K$  ( $\xi(t) \neq 0$ ). Además, si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $N < n_i$ .
- (2) Si  $m = 0$  y  $w \neq 0$ , entonces  $n_i \in \mathbb{Z}_+$  ( $i \geq 1$ ),  $(N, n_1, n_2, \dots, n_{i_0}) = 1$  para algún  $i_0$ ,  $\xi(x^{1/N})$  es algebraica sobre  $K$  y  $w \in \{z, -z\}$ . Además, si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $\xi(t) = 0$ , ó  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_i$ .
- (3) Si  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , entonces  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} \in \mathbb{R}[t]$  con  $(N, n_1, \dots, n_s) = 1$ ,  $n_i < m$  y  $w \in \{-1, 1\}$ . Además, si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $\xi(t) = 0$ , ó  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_i$ .
- (4) Si  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ , entonces  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} \in \mathbb{R}[t]$  con  $(N, n_1, \dots, n_s, m) = 1$ ,  $n_i < m$  y  $w \in \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$  es tal que si  $w \in \{1/z, -1/z\}$  se tiene  $\xi(t) \neq 0$  ó  $N < m$ . Además, si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $\xi(t) = 0$  y  $n < m$ , ó bien  $\xi(t) = 0$ ,  $N = m = 1$  y  $w \in \{-z, z\}$ , ó bien  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_i$ .

**Proposición 1.5** El espectro real de  $\mathcal{K}$  está en biyección con el conjunto  $T(\mathcal{K})$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$ , asociaremos a  $\alpha$  una upla  $(\Upsilon_\alpha, \delta_\alpha, N_\alpha, \xi_\alpha(t), m_\alpha, w_\alpha)$  que lo determinará unívocamente.

*Caso 1:*  $\alpha$  hace  $y/x$  finito con respecto de  $\mathbb{R}$ .

Sea entonces  $\Upsilon_\alpha = 1$  y  $\delta_\alpha = \alpha(x) \in \{1, -1\}$ , donde  $\alpha(x)$  indica el signo de  $x$  en el orden  $\alpha$ . Consideremos el  $\mathbb{R}$ -automorfismo ordenado

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{K}, \alpha) &\rightarrow (\mathcal{K}, \alpha') \\ x &\rightarrow \delta_\alpha x \\ y &\rightarrow y \end{aligned}$$

es decir,  $\alpha'$  es el orden inducido por  $\alpha$  a través de  $\varphi$ . Entonces  $\alpha'$  hace  $y/x$  finito con respecto de  $\mathbb{R}$  y  $\alpha'(x) > 0$ , con lo cual estamos en las hipótesis de 2.1:  $\alpha'$  tiene asociada de forma unívoca una 3-upla  $(\xi, \theta, \sigma)$  como en 1.1 ó 1.3 (según  $\mathcal{K}$ ), la cual nos da un  $\mathbb{R}$ -homomorfismo ordenado  $\psi'$  que lo define.

Sean ahora, en cada caso de 1.1,  $N, \xi, m, w$  como sigue:

- (1)  $N = 1$ ,  $\xi(t) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{\theta_i}$ ,  $m = 0$  y  $w = 0$ .
- (2)  $N$  es el mínimo entero positivo tal que  $\xi(x) \in \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ ,  $\xi(t) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{n_i}$  ( $n_i = N\theta_i$ ),  $m = 0$  y  $w = y$  si  $\sigma = 1$ ,  $w = -y$  si  $\sigma = -1$ .

(3)  $N$  es el mínimo entero positivo tal que  $\xi(x) \in \mathbb{R}[x^{1/N}]$ ,  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i}$  ( $n_i = N\theta_i$ ),  $m = N\theta$  y  $w = \sigma$ .

(4)  $N$  es el mínimo comun denominador de los exponentes de  $\xi(x)$  y  $\theta$ ,

$$\begin{cases} \xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i}, & w = y' & \text{si } \theta_s < \theta \\ \xi(t) = \sum_{i=1}^{s-1} c_i t^{n_i}, & w = y' + c_s & \text{si } \theta_s = \theta \end{cases}$$

con  $n_i = N\theta_i$  y  $m = N\theta \in \mathbb{Z}$ .

Con este convenio consideremos el siguiente cambio de variable en  $\text{Im}(\psi)$  definido por  $x \rightarrow t^N$ ,  $y \rightarrow z$ . Denotamos por  $E$  cualquiera de los cuerpos:  $C$  con el orden que hace  $t > 0$ , para casos (1) y (3);  $\mathbb{R}((t))((z))$  con el orden que extiende  $0^+$  en  $\mathbb{R}((t))$  haciendo  $z > 0$ , para el caso (2); y  $\mathbb{R}((z, t))$  con el orden que hace  $t > 0, z > 0$ , para el caso (4). Entonces tenemos  $\alpha$  definido por un  $\mathbb{R}$ -homomorfismo, composición de los tres anteriores,

$$(III.1) \quad \begin{aligned} \psi_\alpha : \mathcal{K} &\rightarrow E \\ x &\rightarrow \delta_\alpha t^N \\ y &\rightarrow \xi(t) + t^m w. \end{aligned}$$

Con lo cual a  $\alpha$  le hacemos corresponder la upla  $(\Upsilon_\alpha = 1, \delta_\alpha, N, \xi(t), m, w) \in T(\mathcal{K})$  según los casos (1) a (4) discutidos anteriormente.

Recíprocamente, para cada upla diferente con  $\Upsilon = 1$  se tiene a través de un homomorfismo  $\psi$  como (III.1) un orden diferente en  $\mathcal{K}$ .

*Caso 2:*  $\alpha$  hace  $y/x$  infinito con respecto de  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\Upsilon_\alpha = \infty$  y consideremos el  $\mathbb{R}$ -automorfismo ordenado

$$\begin{aligned} \gamma : (\mathcal{K}, \alpha) &\rightarrow (\mathcal{K}, \alpha') \\ x &\rightarrow y \\ y &\rightarrow x \end{aligned}$$

es decir,  $\alpha'$  es el orden inducido por  $\alpha$  a través de  $\gamma$ . Con lo cual  $\alpha'$  está en el caso 1, luego podemos definirlo por un homomorfismo  $\psi'$  como (III.1). Ahora bien,  $\alpha$  queda definido por  $\psi = \psi' \cdot \gamma$  como sigue:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{K} &\rightarrow E \\ x &\rightarrow \xi(t) + t^m w \\ y &\rightarrow \delta t^N. \end{aligned}$$

con  $\delta, N, \xi(t), m, w$  como en el caso 1.

Así,  $\alpha$  está unívocamente determinado por  $\psi$  si y sólo si hace  $y/x$  infinito con respecto de  $\mathbb{R}$  (en otro caso ya está descrito en 1). Supongamos  $y/x$  infinito con respecto de  $\mathbb{R}$ , es decir, para todo  $r \in \mathbb{R}$  se tiene  $r < |y/x|$ . Si utilizamos la descripción de  $\alpha$  por  $\psi$  se tiene,

$$r < \left| \frac{\delta t^N}{\xi(t) + t^m w} \right|$$

luego, ó bien para todo  $r \in \mathbb{R}$

$$(III.2) \quad 0 < \frac{\delta t^N - r(\xi(t) + t^m w)}{\xi(t) + t^m w}$$

ó bien para todo  $r \in \mathbb{R}$

$$(III.3) \quad \frac{\delta t^N - r(\xi(t) + t^m w)}{\xi(t) + t^m w} < 0$$

en el orden determinado por  $t > 0, z > 0$  en  $E$ .

Comprobemos cuándo se tiene una de las desigualdades (III.2) o (III.3):

- (1) En este caso  $E = C$  y  $\xi(t) \neq 0$ , con lo cual se verifica (III.2) o (III.3) si y sólo si  $N < n_1$ .
- (2) En este caso  $E = \mathbb{R}((t))((z)), m = 0$  y  $w = z, -z$ , con lo cual se verifica (III.2) o (III.3) si y sólo si  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_1$  ó  $\xi(t) = 0$ .
- (3) En este caso  $E = C, m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $w = 1, -1$ , con lo cual se verifica (III.2) o (III.3) si y sólo si  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_1$  ó  $\xi(t) = 0$ .
- (4) En este caso  $E = \mathbb{R}((z, t)), m \in \mathbb{Z}$  y  $w = z + a, -z + a, 1/z, -1/z$ , con lo cual se verifica (III.2) o (III.3) si y sólo si  $\xi(t) \neq 0$  y  $N < n_1$  ó  $\xi(t) = 0$  y  $N < m$  ó  $\xi(t) = 0, N = m = 1$  y  $w = z, -z$ .

Luego la upla  $(\Upsilon_\alpha = \infty, \delta, N, \xi(t), m, w) \in T(\mathcal{K})$  determina unívocamente  $\alpha$ . □

**Notación 1.6** Podemos descomponer  $\text{Spec}_r(\mathcal{K})$  en cuatro subconjuntos disjuntos, según los casos de 1.4, que denotaremos  $S_1(\mathcal{K}), S_2(\mathcal{K}), S_3(\mathcal{K}), S_4(\mathcal{K})$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} S_1(\mathcal{K}) &= \{\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}) : m = 0, w = 0\} \\ S_2(\mathcal{K}) &= \{\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}) : m = 0, w \in \{-z, z\}\} \\ S_3(\mathcal{K}) &= \{\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}) : m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \\ S_4(\mathcal{K}) &= \{\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}) : m \in \mathbb{Z}_+\} \end{aligned}$$

**Observación 1.7** 1) Téngase en cuenta que la descomposición de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K})$  dada por los  $S_i$  (1.6), vale para los tres cuerpos  $\mathbb{R}((x, y)), \mathbb{R}(\{x, y\})$  y  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$ . Entre los espectros reales de estos cuerpos tenemos aplicaciones canónicas

$$\text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))) \rightarrow \text{Spec}_r(\mathbb{R}(\{x, y\})) \rightarrow \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$$

que respetan esas descomposiciones salvo por lo siguiente. Un elemento  $\alpha$  de  $S_1(\mathbb{R}(\{x, y\}))$  (resp. de  $S_1(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ ) no es restrcción de un elemento de  $S_1(\mathbb{R}((x, y)))$  si y sólo si la serie  $\xi(x)$  es de Puiseux no convergente (resp. no algebraica); en este caso,  $\alpha$  posee dos extensiones en  $S_2(\mathbb{R}((x, y)))$  (ver 1.2).

2) Cada orden de  $\mathbb{R}(x, y)$  centrado en el origen se extiende de forma única a  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  (1.2 ó [BCR, 8.8.11]). Luego 1.4 y 1.5 se enuncian de igual modo si cambiamos el espectro real de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  por el subconjunto del espectro real de  $\mathbb{R}(x, y)$  formado por los órdenes centrados en el origen.

## Órdenes en una superficie

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  una superficie algebraica real irreducible y no singular. Denotemos  $\mathcal{R}(X)$  el anillo de funciones regulares de  $X$ . Para cada  $x \in X$  el anillo  $\mathcal{R}(X)$  localizado en el ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$  de  $x$ , que denotamos  $\mathcal{R}(X)_x$ , es local regular de dimension 2 y su henselizado  ${}^h\mathcal{R}(X)_x$  es isomorfo al anillo de series formales algebraicas  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$  ([BCR, Cap.8] o [ABR]).

Denotemos  $\overline{X}$  una compactificación no singular de  $X$  ([BCR, Cap.3] y desingularización de superficies).

**Proposición 1.8** *Elegida una compactificación no singular  $\overline{X}$  de  $X$ , existe una biyección entre  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  y el conjunto  $\overline{X} \times \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$*

*Demostración:* Podemos suponer  $X$  compacto, ya que una compactificación es un morfismo birracional, luego da un isomorfismo entre los respectivos cuerpos de funciones racionales, con lo cual podemos identificar los espectros reales de estos.

Fijemos para cada  $a \in X$  un isomorfismo  ${}^h\mathcal{R}(X)_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$ .

Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$ , entonces existe  $a \in X$  tal que  $\alpha$  está centrado en  $a$ . Un orden  $\alpha$  centrado en  $a$  se extiende de forma única a un orden total  $\tilde{\alpha}$  de  ${}^h\mathcal{R}(X)_a$  ([ABR]), que es isomorfo a  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$ . Consideremos entonces  $\tilde{\alpha} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . Así asociamos a  $\alpha$  el par  $(a, \tilde{\alpha})$ .

Recíprocamente, dado  $(a, \beta) \in X \times \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  consideremos

$$\mathcal{R}(X)_a \hookrightarrow {}^h\mathcal{R}(X)_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$$

Sea  $\alpha$  la restricción de  $\beta$  a  $\mathcal{R}(X)_a$ , entonces  $\alpha$  es un orden total de  $\mathcal{R}(X)$  centrado en  $a$ .

Como todos los morfismos utilizados dan homeomorfismos sobre el espectro real de los respectivos cuerpos de funciones tenemos que esta correspondencia es efectivamente una biyección.  $\square$

**Notación 1.9** Identificando  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  con  $\overline{X} \times \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  a través de la biyección de 1.8, denotaremos por  $S_i(\mathcal{K}(X))$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , el subconjunto de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  definido como sigue:

$$S_i(\mathcal{K}(X)) = \{\alpha = (a, \tilde{\alpha}) : \tilde{\alpha} \in S_i(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})\} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Con lo cual, análogamente a 1.6, tenemos:

$$\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X)) = S_1(\mathcal{K}(X)) \cup S_2(\mathcal{K}(X)) \cup S_3(\mathcal{K}(X)) \cup S_4(\mathcal{K}(X)).$$

**(1.10) Caso particular:** Sea  $X = \mathbb{R}^2$  y consideremos  $\overline{X} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unitaria que es una compactificación no singular de  $\mathbb{R}^2$ .

Sean  $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$  y sea  $\pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección estereográfica de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  desde  $N$ , que es un isomorfismo. Luego  $\mathbb{S}^2$  es birregularmente isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , con lo cual

$$\pi_N^* : \mathbb{R}(x, y) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{S}^2)$$

es isomorfismo de cuerpos.

Sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(\mathbb{S}^2))$  y  $a \in \mathbb{S}^2$  tal que  $\alpha$  está centrado en  $a$ . Es posible dar explícitamente la biyección de 1.8 que asocia a  $\alpha$  un elemento  $\tilde{\alpha}$  de  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ :

1) Si  $a \neq N$  consideremos el isomorfismo

$$\varphi_a = \pi_N^* \cdot \tau_{-b}^* : \mathbb{R}(x, y) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{S}^2)$$

donde  $b = \pi_N(a)$  y  $\tau_{-b}^*$  es el automorfismo de  $\mathbb{R}(x, y)$  inducido por la traslación de vector  $-b$  en  $\mathbb{R}^2$ .

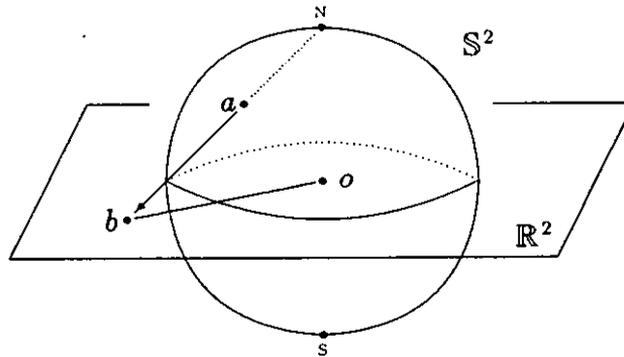


Figura III.1.10

Entonces  $\varphi_a^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}$  es un orden de  $\mathbb{R}(x, y)$  centrado en el origen y el par  $(a, \tilde{\alpha})$  (o equivalentemente el par  $(b, \tilde{\alpha})$ ) caracteriza  $\alpha$ . Además en 1.5 hemos obtenido una descripción explícita de  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  mediante el morfismo (III.1), luego podemos describir  $\alpha$  con la notación de 2.5, salvo intercambio entre  $x$  e  $y$ , como sigue:

$$(III.4) \quad \begin{aligned} \psi_\alpha : \mathbb{R}(x, y) &\rightarrow E \\ x &\rightarrow b_1 + \delta_\alpha t^N \\ y &\rightarrow b_2 + \xi(t) + t^m w. \end{aligned}$$

con  $b = (b_1, b_2)$ .

2) Si  $a = N$  consideremos el isomorfismo

$$\varphi_a = \pi_s^* : \mathbb{R}(x, y) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{S}^2)$$

donde  $\pi_s$  es la proyección estereográfica de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  desde  $s = (0, 0, -1)$ . Entonces  $\varphi_a^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}$  es un orden de  $\mathbb{R}(x, y)$  centrado en el origen y el par  $(N, \tilde{\alpha})$  (o equivalentemente el par  $(\infty, \tilde{\alpha})$ ) caracteriza  $\alpha$ .

En otras palabras, podemos ver el espectro real de  $\mathbb{R}(x, y)$  como el espectro real de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  en cada punto de  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , aunque se debe considerar con precaución la manera en que se comportan las topologías.

## 2 Valoraciones compatibles

El conjunto de todos los anillos de valoración de un cuerpo compatibles con un orden forman una cadena totalmente ordenada por inclusión I.3.3. En esta sección determinaremos esta cadena y el cuerpo residual de cada una de sus valoraciones para cada orden  $\alpha$  en una superficie.

Dado que cada orden en los cuerpos de series tiene una descripción explícita, trabajaremos primero en estos cuerpos, que hemos denotado indistintamente por  $\mathcal{K}$  en la sección 1 anterior; luego, mediante henselización pasaremos estos resultados a una superficie lisa.

Comencemos viendo unos lemas técnicos que utilizaremos posteriormente.

**Lema 2.1** *Sea  $A$  un anillo de series de potencias formales con exponentes en un subgrupo  $\Gamma$  del grupo aditivo  $\mathbb{R}$  ( $1 \in \Gamma$ ), y con coeficientes en un cuerpo  $k$  (es decir, un elemento  $\eta \in A$  es de la forma  $\eta(t) = \sum_{j \geq 0} a_j t^{\theta_j}$  con  $a_j \in k$ ,  $\theta_j \in \Gamma$  con  $\theta_0 < \theta_1 < \dots$ ). Entonces existe una valoración  $\nu$  del cuerpo de fracciones  $K$  de  $A$ , con cuerpo residual  $k$ , dada por*

$$\begin{aligned} \nu(\eta_1(t)/\eta_2(t)) &= \text{ord}_t(\eta_1(t)) - \text{ord}_t(\eta_2(t)) \\ \nu(0) &= \infty \end{aligned}$$

Además, supuesto  $k$  real y fijado un orden en  $k$ , sea  $\beta$  el orden de  $K$  que lo extiende y hace  $t > 0$ . Entonces, el anillo de valoración asociado a  $\nu$  es el cierre convexo de  $k$  en  $K$  respecto de  $\beta$ .

*Demostración:* Sin más que aplicar la definición se comprueba que  $\nu$  es una valoración. Sean entonces  $V = \{\eta \in K : \nu(\eta) \geq 0\}$  el anillo de valoración asociado a  $\nu$  y  $\mathfrak{m} = \{\eta \in K : \nu(\eta) > 0\}$  el ideal maximal de  $V$ . Entonces  $k_\nu = V/\mathfrak{m}$  es el cuerpo residual de la valoración.

Sea  $p : V \rightarrow k$  el homomorfismo dado por  $p(\eta(t)) = \eta(0) \in k$ . El homomorfismo  $p$  está bien definido, ya que  $\nu(\eta(t)) \geq 0$ , para todo  $\eta(t) \in V$ . Además  $p$  es sobreyectivo, ya que en particular  $p(a) = a$  para todo  $a \in k \subset K$ . Comprobemos que  $\ker(p) = \mathfrak{m}$  y entonces  $k_\nu \simeq k$ . En efecto,  $p(\eta(t)) = \eta(0) = 0$  si y sólo si  $\nu(\eta) > 0$  si y sólo si  $\eta(t) \in \mathfrak{m}$ .

Supongamos ahora que  $k$  es real y fijemos un orden en  $k$ . Sea  $\beta$  el orden de  $K$  que hace  $t > 0$ , entonces

$$B = \{\eta \in K : \text{existe } a \in k \text{ con } -a < \eta(t) < a\}$$

es el cierre convexo de  $k$  en  $K$  respecto de  $\beta$ . Comprobemos que  $V = B$ .

Sea  $\eta(t) \in B$ , entonces existe  $a \in k$  con  $-a < \eta(t) < a$ . Supongamos  $\eta > 0$ , ya que en otro caso se trabajaría con  $-\eta$ . Entonces, si  $\eta(t) = \sum_{j \geq 0} a_j t^{\theta_j}$ , con  $\theta_0 < \theta_1 < \dots$ , se tiene  $a_0 > 0$ . Teniendo en cuenta que  $a - \eta(t) > 0$ , se tiene:

- Si  $\theta_0 < 0$ , entonces  $-a_0 > 0$ . Lo cual es imposible.
- Si  $\theta_0 = 0$ , entonces  $a - a_0 > 0$ . Luego vale cualquier  $a$  con  $a > a_0$ .
- Si  $\theta_0 > 0$ , entonces vale cualquier  $a > 0$ .

Con lo cual  $\eta(t) \in V$ .

Recíprocamente, si  $\eta(t) \in V$ , basta tomar  $a > |a_0|$  para que  $-a < \eta(t) < a$ .  $\square$

**Lema 2.2** Sea  $k$  un cuerpo ordenado, y sean  $(L, \alpha)$  y  $(K, \beta)$  cuerpos ordenados que extienden  $k$ . Denotemos por  $\psi : (L, \alpha) \rightarrow (K, \beta)$  un  $k$ -homomorfismo ordenado y por  $W$  un anillo de valoración de  $K/k$  compatible con  $\beta$ . Entonces, la imagen inversa  $V$  de  $W$  a través de  $\psi$  es un anillo de valoración de  $L/k$  compatible con  $\alpha$ , cuyo grupo de valores  $\Gamma_V$  es un subgrupo ordenado del grupo de valores  $\Gamma_W$  de  $W$ , y cuyo cuerpo residual  $k_V$  es isomorfo a un subcuerpo del cuerpo residual  $k_W$  de  $W$ .

Además, si  $W$  es el cierre convexo de  $k$  en  $K$  respecto de  $\beta$ , entonces  $V$  es el cierre convexo de  $k$  en  $L$  respecto de  $\alpha$ .

*Demostración:* Sea  $w$  una valoración asociada a  $W$ , entonces basta tomar  $\nu = w \cdot \psi$ , que es una valoración de  $L$  asociada a  $V$ , para obtener el resultado.  $\square$

**Ejemplo 2.3 (a)** Consideremos el cuerpo ordenado  $(C, 0^+)$ , donde  $C$  es el cuerpo de series formales en  $t$  con exponentes en un subgrupo ordenado de  $\mathbb{R}$  y coeficientes en  $\mathbb{R}$  y sea  $0^+$  el orden en  $C$  extensión del de  $\mathbb{R}$  que hace  $t > 0$ .

Por el lema 2.1, la valoración,

$$\begin{aligned} \omega_0 : C &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \eta(t) &\rightarrow \text{ord}_t(\eta(t)) \end{aligned}$$

tiene como anillo asociado  $W_0$  al cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $C$  con respecto a  $0^+$ , y su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ .

Además,  $W_0$  es de rango 1, con lo cual es el único anillo de valoración de  $C$  compatible con  $0^+$ .

(b) Consideremos ahora  $\mathbb{R}((u))((v))$ , el cuerpo de series formales en  $v$  con coeficientes en  $\mathbb{R}((u))$ , con el orden  $\beta$  que extiende  $0^+$  y hace  $v > 0$ .

Por el lema 2.1, tenemos la valoración

$$\begin{aligned} \omega_1 : \mathbb{R}((u))((v)) &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \eta(u, v) &\rightarrow \text{ord}_v(\eta(u, v)) \end{aligned}$$

de rango 1 y compatible con  $\beta$ , que nos da el cierre convexo de  $\mathbb{R}((u))$  en  $\mathbb{R}((u))((v))$  con respecto de  $\beta$  y cuyo cuerpo residual es  $(\mathbb{R}((u)), 0^+)$ .

Por otra parte, existe un único anillo de valoración  $\overline{W}_0$  de  $\mathbb{R}((u))$  compatible con  $0^+$  y cuyo cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ . Luego tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} W_0 & \hookrightarrow & W_1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}((u))((v)) \\ & & \downarrow p & & \downarrow p \\ & & \overline{W}_0 & \hookrightarrow & \mathbb{R}((u)) \end{array}$$

donde  $p$  es el lugar canónico asociado a  $W_1$  (es decir,  $p(\eta(u, v)) = \eta(u, 0)$ ). Entonces,  $W_0 = p^{-1}(\overline{W}_0)$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((u))((v))$  respecto de  $\beta$ .

Por lo tanto existen exactamente dos anillos de valoración de  $\mathbb{R}((u))((v))$  compatibles con  $\beta$ :  $W_1 = \mathbb{R}((u))[[v]]$  de rango 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}((u))$  y  $W_0$  de rango 2 y cuerpo residual  $\mathbb{R}$ .

(c) Consideremos el subcuerpo  $\mathbb{R}((u, v))$  de  $\mathbb{R}((u))((v))$  con el orden que hace  $u > 0$ ,  $v > 0$ . Este orden es restricción del considerado en (b), luego aplicando 2.2 a la inclusión,  $\mathbb{R}((u, v)) \hookrightarrow \mathbb{R}((u))((v))$ , tenemos dos anillos de valoración compatibles que denotaremos, con abuso de notación,  $W_0$  y  $W_1$ . Entonces,  $W_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((u, v))$  y tiene rango 2,  $W_1 = \mathbb{R}[[u, v]]_{(u)}$  tiene rango 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}((u))$ .

## Cuerpos de series

En esta sección conservaremos las notaciones establecidas en la primera parte de la sección 1 anterior. En concreto  $\mathcal{A}$  (resp.  $A$ ) será uno de los anillos de series en 2 variables (resp. en 1 variable) y  $\mathcal{K}$  (resp.  $K$ ) su cuerpo de fracciones. Hemos obtenido una descripción explícita de cada orden de  $\mathcal{K}$  mediante un homomorfismo en uno de los cuerpos ordenados de los ejemplos 2.3. A través de este homomorfismo trasladaremos las valoraciones de estos, ya determinadas en 2.3, a nuestro cuerpo  $\mathcal{K}$ .

**Proposición 2.4** *Sea  $\alpha \in S_1(\mathcal{K})$ . Entonces, existe un único anillo de valoración  $V_0$  de  $\mathcal{K}$  compatible con  $\alpha$ . Además,  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ , tiene rango 1, rango racional 1 y su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración:* Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, 1, \xi(t), 0, 0) \in S_1(\mathcal{K})$ , con  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $\delta \in \{1, -1\}$ ,  $\xi(t)$  una serie, con coeficientes reales y exponentes racionales  $\geq 1$ , no algebraica sobre  $K$  (i.e. no de Puiseux si  $\mathcal{K} = \mathbb{R}((x, y))$ , no convergente si  $\mathcal{K} = \mathbb{R}(\{x, y\})$ , no de Nash si  $\mathcal{K} = \mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$ ). Salvo un cambio entre las coordenadas  $x$  e  $y$ , podemos suponer  $\Upsilon = 1$  y  $\alpha$  dado por el  $\mathbb{R}$ -homomorfismo,

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow C; \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t \\ \psi(y) = \xi(t) \end{cases}$$

donde  $\xi(t) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{\theta_i}$ , con  $1 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots$ .

$C$  es el cuerpo ordenado del ejemplo (a) de 2.3, luego existe un único anillo de valoración  $W_0$  de  $C$  compatible con el orden que hace  $t > 0$ , que coincide con el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $C$  y tiene asociada la valoración  $\omega_0$  de 2.3. Ahora bien, puesto que  $\psi$  es un homomorfismo en las hipótesis de 2.2, la aplicación

$$\nu_0 = \omega_0 \cdot \psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

es una valoración de  $\mathcal{K}$  compatible con  $\alpha$ , cuyo anillo de valoración asociado es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ . Luego, el cuerpo residual  $k_{V_0}$  de  $V_0$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

Además, el grupo de valores  $\Gamma_{V_0}$  de  $V_0$  es el subgrupo de  $\mathbb{R}$  generado por  $\{1, \theta_1, \theta_2, \dots\}$ . Luego, es un subgrupo de  $\mathbb{Q}$ , con lo cual  $V_0$  tiene rango 1 y rango racional 1.  $\square$

*Observación:* Puede existir  $\alpha \in S_1(\mathcal{K})$  con  $\mathcal{K} = \mathbb{R}(\{x, y\})$  ó  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  tal que su serie asociada  $\xi(t)$  sea de Puiseux (en cuyo caso,  $\xi(t)$  no es algebraica sobre  $\mathbb{R}(\{x\})$  ó  $\mathbb{R}((x))_{\text{alg}}$ ). En este caso,  $V_0$  es anillo de valoración discreta de  $\mathcal{K}$ , pero no es un divisor primo (real) de  $\mathcal{K}$ .

**Proposición 2.5** Sea  $\alpha \in S_2(\mathcal{K})$ . Entonces, existen exactamente 2 anillos de valoración  $V_0$  y  $V_1$  de  $\mathcal{K}$  compatibles con  $\alpha$ , los cuales verifican:

(a)  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 2.

(b)  $V_1$  es un anillo de valoración discreta, cuyo maximal  $\mathfrak{m}_{V_1}$  se contrae a un ideal primo  $\mathfrak{p}$  de altura 1 en  $\mathcal{A}$ , y cuyo cuerpo residual  $k_{V_1}$  es el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{A}/\mathfrak{p}$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, w) \in S_2(\mathcal{K})$  con  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $\delta \in \{1, -1\}$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\xi(t) \in \mathbb{R}[[t]]$  tal que  $\xi(x^{1/N})$  es una serie algebraica sobre  $K$  (por lo tanto es entera sobre  $A$ ) y  $w \in \{z, -z\}$ . Salvo un cambio entre  $x$  e  $y$ , podemos suponer  $\Upsilon = 1$  y  $\alpha$  dado por el  $\mathbb{R}$ -homomorfismo,

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) + w \end{cases}$$

donde  $\xi(t) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{n_i}$ , con  $N \leq n_1 < n_2 < \dots$  y existe  $i_0 \geq 1$  tal que  $(N, n_1, n_2, \dots, n_{i_0}) = 1$ .

Como hemos visto en el ejemplo (b) de 2.3,  $\mathbb{R}((t))((z))$  posee dos anillos de valoración compatibles: uno,  $W_1$ , de rango 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}((t))$ ; y el otro,  $W_0$ , de rango 2 y cuerpo residual  $\mathbb{R}$ , el cual es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((t))((z))$ . Con lo cual, aplicando 2.2 a  $\psi$ , tenemos el siguiente diagrama de anillos de valoración y homomorfismos,

$$\begin{array}{ccccc} V_0 & \hookrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & \mathcal{K} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ W_0 & \hookrightarrow & W_1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}((t))((z)) \\ \downarrow \mathfrak{p} & & \downarrow \mathfrak{p} & & \\ \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}((t)) & & \end{array}$$

Así,  $V_0 = \psi^{-1}(W_0)$  es un anillo de valoración de rango 2, compatible con  $\alpha$  y coincide con el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ . Por otra parte  $V_1 = \psi^{-1}(W_1)$  tiene asociada la valoración,

$$\nu_1 = \omega_1 \cdot \psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

definida por  $\nu_1(F(x, y)) = \text{ord}_z(F(\delta t^N, \xi(t) + w))$ , para  $F \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ . Luego el grupo de valores  $\Gamma_1$  de  $\nu_1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , con lo cual  $V_1$  es anillo de valoración discreta.

Comprobemos ahora que el ideal maximal  $\mathfrak{m}_{V_1}$  de  $V_1$ , verifica,

$$\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{A} = (P(\delta x, y))\mathcal{A}$$

donde  $P(x, y) \in A[y]$  es un polinomio distinguido e irreducible con  $\xi(x^{1/N}) = \sum c_i x^{n_i/N}$  como raíz. En efecto,

$$\mathfrak{m}_{V_1} = \{F(x, y) \in \mathcal{K} : \nu_1(F(x, y)) > 0\}.$$

Sea  $f(x, y) \in \mathfrak{m}_{V_1}$ , luego  $\text{ord}_z(f(\delta t^N, \xi(t) + w)) > 0$ . Escribamos,

$$f(\delta t^N, \xi(t) + w) = f(\delta t^N, \xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\delta t^N, \xi(t))w + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\delta t^N, \xi(t))w^2 + \dots$$

Entonces,  $\text{ord}_z(f(\delta t^N, \xi(t) + w)) > 0$  si y sólo si  $f(x, y) \in (P(\delta x, y))\mathcal{A}$ .

Denotemos por  $\mathfrak{p}$  el ideal  $(P(\delta x, y))\mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$ , entonces  $V_1$  domina al anillo local  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Pero  $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$  es un anillo local regular de dimensión 1, luego es anillo de valoración discreta, y  $V_1 = \mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ . Por lo tanto,  $\tau = P(\delta x, y)$  es un parámetro uniformizador de  $V_1$  y su cuerpo residual  $k_{V_1}$  es isomorfo a  $\text{cf}(\mathcal{A}/\mathfrak{p})$ .  $\square$

**Corolario 2.6** *En las hipótesis de 2.5,  $k_{V_1}$  es una extensión algebraica finita de grado  $N$  de  $K$ .*

*Demostración:* Por 2.5,  $k_{V_1} = \text{cf}(\mathcal{A}/\mathfrak{p})$ , donde  $\mathfrak{p}$  es un ideal principal de altura 1 generado por un elemento  $P(\delta x, y) \in A[y]$  distinguido e irreducible (salvo un cambio de  $x$  por  $y$ ). Como,

$$\mathcal{A}/\mathfrak{p} \simeq \frac{A[y]}{\mathfrak{p} \cap A[y]}$$

(ver [Z-S, Teor. 6, pag.149]), tenemos que,

$$k_{V_1} \simeq \text{cf} \left( \frac{A[y]}{(P(\delta x, y))} \right)$$

que es una extensión algebraica finita de  $K$ , de polinomio mínimo  $P(\delta x, y)$  y por lo tanto de grado  $N$ .  $\square$

**Proposición 2.7** *Sea  $\alpha \in S_3(\mathcal{K})$ . Entonces, existe un único anillo de valoración  $V_0$  de  $\mathcal{K}$  compatible con  $\alpha$ . Además  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ , tiene rango 1, rango racional 2 y su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración:* Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \in S_3(\mathcal{K})$  con  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $\delta \in \{1, -1\}$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\xi(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $w \in \{1, -1\}$ . Salvo un cambio entre  $x$  e  $y$ , podemos suponer  $\Upsilon = 1$  y  $\alpha$  dado por el  $\mathbb{R}$ -homomorfismo,

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow C; \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) \pm t^m \end{cases}$$

donde  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i}$ , con  $N \leq n_1 < \dots < n_s < m$  y  $(N, n_1, \dots, n_s) = 1$ .

Obsérvese que  $\psi(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}((t, t^m)) \subset C$ . Luego, si consideramos  $\mathbb{R}((t, t^m))$  con el orden definido por  $t > 0$  (es decir, la restricción del que teníamos en  $C$ ), aplicando 2.2 y 2.3.(a), tenemos un único anillo de valoración  $W_0$  de  $\mathbb{R}((t, t^m))$  compatible con este orden; el cual es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((t, t^m))$ . Luego, por 2.2,  $V_0 = \psi^{-1}(W_0)$  es un anillo de valoración de  $\mathcal{K}$  compatible con  $\alpha$ , que coincide con el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ .

Además, sabemos que una valoración asociada a  $V_0$  es,

$$\nu_0 : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida por  $\nu_0(f(x, y)) = \text{ord}_t(f(\delta t^N, \xi(t) \pm t^m))$ , con  $f \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ . Luego, el grupo de valores  $\Gamma_{V_0}$  de  $V_0$  es el subgrupo de  $\mathbb{R}$  generado por  $\{1, N, n_1, \dots, n_s, m\}$ ; con lo cual,  $\Gamma_{V_0} \simeq \mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$  y  $V_0$  tiene rango 1 y rango racional 2.  $\square$

**Proposición 2.8** *Sea  $\alpha \in S_4(\mathcal{K})$ . Entonces, existen exactamente 2 anillos de valoración  $V_0$  y  $V_1$  de  $\mathcal{K}$  compatibles con  $\alpha$ , los cuales verifican:*

(a)  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 2.

(b)  $V_1$  es un anillo de valoración discreta cuyo ideal maximal  $\mathfrak{m}_{V_1}$  se contrae al ideal maximal en  $\mathcal{A}$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \in S_4(\mathcal{K})$  con  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $\delta \in \{1, -1\}$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\xi(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$  y  $w \in \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ . Salvo un cambio entre  $x$  e  $y$ , podemos suponer  $\Upsilon = 1$  y  $\alpha$  dado por el  $\mathbb{R}$ -homomorfismo,

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((z, t)); \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) + t^m w \end{cases}$$

donde  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i}$ , con  $N \leq n_1 < \dots < n_s < m$  y  $(N, n_1, \dots, n_s, m) = 1$ .

En el ejemplo (c) de 2.3 hemos visto que  $\mathbb{R}((z, t))$  posee dos anillos de valoración compatibles, uno  $W_1$  de rango 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}((z))$ , y el otro  $W_0$  de rango 2, el cual es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((z, t))$ . Aplicando 2.2 tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} V_0 & \hookrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & \mathcal{K} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ W_0 & \hookrightarrow & W_1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}((z, t)) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \\ \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}((z)) & & \end{array}$$

Entonces,  $V_0 = \psi^{-1}(W_0)$  tiene rango 2 y es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ , luego  $k_{V_0} = \mathbb{R}$ . Por otra parte,  $V_1 = \psi^{-1}(W_1)$  es un anillo de valoración de  $\mathcal{K}$  de rango 1 compatible con  $\alpha$  y tiene asociada la valoración,

$$\nu_1 = \omega_1 \cdot \psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

definida por  $\nu_1(f(x, y)) = \text{ord}_t(f(\delta t^N, \xi(t) + t^m w))$ , con  $f \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ . Luego el grupo de valores  $\Gamma_{V_1}$  de  $V_1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , y  $V_1$  es anillo de valoración discreta.

Comprobemos ahora que  $\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{A} = (x, y)\mathcal{A}$ . En efecto,  $\nu_1(x) = \text{ord}_t(\delta t^N) = N > 0$  y  $\nu_1(y) = \text{ord}_t(\xi(t) + t^m w) = n_1 > 0$ , luego  $(x, y)\mathcal{A} \subset \mathfrak{m}_{V_1}$ . Pero,  $\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{A}$  es un ideal primo en  $\mathcal{A}$ , luego  $\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{A} \subset (x, y)\mathcal{A}$ .  $\square$

En el caso de órdenes en  $S_4(\mathcal{K})$  no resulta tan sencillo, como en los casos anteriores, encontrar el cuerpo residual de  $V_1$ . El cálculo de éste requiere una larga discusión que incluimos a continuación. Parte de esta demostración nos ha sido sugerida por Mariemi Alonso, a quien agradecemos, además, el gran interés con que ha revisado el contenido de estas páginas.

**Proposición 2.9** En las hipótesis de 2.8,  $k_{V_1} \simeq \mathbb{R}(w^d)$ , siendo  $d = (N, n_1, \dots, n_s)$ .

*Demostración:* La demostración de 2.9 requiere de varios resultados previos, que iremos incluyendo según los vayamos necesitando. Comenzamos con un resultado general sobre números enteros que nos será de gran utilidad.

**(2.9.1) Lema.** Sean  $b_0, b_1, \dots, b_s \in \mathbb{Z}_+$  y denotemos

$$\delta(b_0, \dots, b_s) = \{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < b_0, b_0 \mid kb_1, \dots, b_0 \mid kb_s\}$$

(donde  $a \mid b$ , para  $a, b \in \mathbb{Z}$ , significa "a divide a b"). Entonces,  $k \in \delta(b_0, \dots, b_s)$  si y sólo si  $k = a(b_0/d)$  con  $0 \leq a < d = (b_0, b_1, \dots, b_s)$ ; con lo cual  $\#\delta(b_0, \dots, b_s) = d$ .

*Demostración:* Lo demostraremos por inducción sobre  $s$ .

Supongamos  $s = 1$  y sean  $\delta(b_0, b_1) = \{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < b_0, b_0 \mid kb_1\}$  y  $d = (b_0, b_1)$ . Sea  $k \in \delta(b_0, b_1)$ , entonces  $b_0 \mid kb_1$  si y sólo si  $(b_0/d)$  divide a  $k(b_1/d)$ . Como  $(b_0/d, b_1/d) = 1$ ,  $b_0/d$  divide a  $k$ , luego  $k = a(b_0/d)$ , con  $0 \leq a < d$  (ya que  $0 \leq k < b_0$ ).

Supongamos que dados  $b_0, \dots, b_{s-1} \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \in \delta(b_0, \dots, b_{s-1})$  si y sólo si  $k = a(b_0/d')$ , para  $0 \leq a < d'$ , con  $d' = (b_0, \dots, b_{s-1})$ . Sean  $b_0, \dots, b_s \in \mathbb{Z}_+$ , entonces

$$\delta(b_0, \dots, b_s) = \delta(b_0, \dots, b_{s-1}) \cap \delta(b_0, b_s).$$

Con lo cual  $k \in \delta(b_0, \dots, b_s)$  si y sólo si

$$\begin{cases} k = a(b_0/d'), & 0 \leq a < d' \\ k = b(b_0/e), & e = (b_0, b_s), 0 \leq b < e. \end{cases}$$

Luego,  $a(b_0/d') = b(b_0/e)$ ,  $b = ae/d'$ . Por lo tanto  $d' \mid ae$ ; y como  $(d', e) = d$  y  $0 \leq a < d'$ , tenemos por el caso  $s = 1$  que  $a = c(d'/d)$  con  $0 \leq c < d$ . Así,

$$k = c \frac{d' b_0}{d d'} = c \frac{b_0}{d}$$

con  $0 \leq c < d$ . Con lo cual se tiene el resultado. □

**(2.9.2) Lema.** Sea  $K$  un cuerpo y  $V_1$  un anillo de valoración de  $K((x, y))$  asociado a la valoración dada por

$$\nu_1(f(x, y)) = \text{ord}_t(f(\delta t^N, \xi(t) + t^m w))$$

donde  $\delta = 1, -1$ ,  $\xi(t) \in K[[t]]$  con  $(N, \exp(\xi)) = d$  y  $(d, m) = 1$ . Entonces, se tiene

1) El cuerpo residual  $k_{V_1}$  de  $V_1$  es una extensión algebraica de  $K(w)$ , verificando que  $[K(w) : k_{V_1}] \geq d$ . Además, en el caso  $\xi(t) = 0$  tenemos que  $k_{V_1}$  es isomorfo a  $K(w^d)$ .

2) Sea  $V_1' = V_1 \cap K(x, y)$ , entonces  $k_{V_1} = k_{V_1'}$ .

*Demostración:* Un anillo de valoración  $V_1$  en nuestras hipótesis está dado por el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\psi} & K[[w, t]]_{(t)} \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ k_{V_1} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & K((w)) \end{array}$$

donde  $p : K[[w, t]]_{(t)} \rightarrow \mathbb{R}((w))$  es el lugar canónico asociado a  $K[[w, t]]_{(t)}$ , dado por  $p(f(t, w)) = f(0, w)$ . Así,  $k_{V_1}$  es isomorfo a un subcuerpo de  $K((w))$  via  $\bar{\psi}$ . Comprobemos que realmente  $k_{V_1}$  es isomorfo a un subcuerpo de  $K(w)$  el cual seguiremos denotando  $k_{V_1}$ .

Sea  $H(x, y)/G(x, y)$  una unidad en  $V_1$ , con  $H(x, y), G(x, y) \in K[[x, y]]$ ; entonces,

$$\text{ord}_t(H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)) = \text{ord}_t(G(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)) = \nu.$$

De esta forma,

$$\frac{H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)}{G(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)} = \frac{t^\nu(f(w)h(w) + tH_1(t, w))}{t^\nu(f(w)g(w) + tG_1(t, w))},$$

entonces,  $p_1(H(t, w)/G(t, w)) = h(w)/g(w)$ .

Supongamos que  $h(w)/g(w) \in K((w)) \setminus K(w)$ , entonces, por ejemplo,  $h(w) \notin K[w]$ . Luego, existen infinitos  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \geq 0$  tal que

$$\nu = \beta_0^i N + \sum_{j=1}^s \beta_j^i n_j + im$$

para  $\beta_0^i, \beta_1^i, \dots, \beta_s^i \in \mathbb{Z}$ , ya que

$$H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w) = H(\delta t^N, \xi(t)) + \frac{\partial H}{\partial y}(\delta t^N, \xi(t))t^m w + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(\delta t^N, \xi(t))(t^m w)^2 + \dots$$

Pero, entonces  $\nu = \infty$  y  $H(x, y)/G(x, y) = 0$ .

Con lo cual  $k_{V_1} \subset K(w)$ ; pero además  $k_{V_1} \neq K$ , porque, si  $P(x, y)$  es el polinomio mínimo de  $\xi(x^{1/N})$  en  $A[y]$  ( $P$  es irreducible y distinguido), entonces  $(P(\delta x, y))^N/x^\pi$ , con  $\pi = \nu_1(P(\delta x, y))$ , es una unidad en  $V_1$  cuyo residuo no pertenece a  $K$ . Basta considerar el desarrollo de Taylor de  $P$  en  $(t^N, \xi(t))$ , teniendo en cuenta que  $P(t^N, \xi(t)) = 0$ .

Por lo tanto,  $k_{V_1}$  es una extensión trascendente de  $K$  contenida en  $K(w)$ . Por el Teorema de Lüroth ([GR, Cap.VI, 2]),  $k_{V_1}$  es una extensión simple trascendente de  $K$ , y además

$$k_{V_1} = K \left( \frac{h(w)}{g(w)} \right)$$

donde  $h(w)/g(w) \in K(w)$  se toma entre los elementos de  $k_{V_1}$  que hacen mínimo el número  $e = \max\{\text{gr}(h(w)), \text{gr}(g(w))\}$ . Además,  $h/g$  es la imagen por  $p_1$  de un elemento  $H/G \in V_1$ .

Con esto hemos comprobado, además, que para obtener el cuerpo residual de  $V_1$ , es suficiente considerar los elementos de  $K(x, y)$ . En efecto, el cociente  $h(w)/g(w) \in K(w)$  que genera  $k_{V_1}$  sobre  $\mathbb{R}$  es residuo de todos los elementos  $H'/G'$  de  $K((x, y))$  tales que  $H'$  y  $G'$  coinciden con  $H$  y  $G$ , respectivamente, hasta un cierto grado. En consecuencia,  $k_{V_1'} = k_{V_1}$ , siendo  $V_1' = V_1 \cap K(x, y)$ .

Luego sólo queda probar que  $[K(w) : k_{V_1}] \geq d$ .

Supongamos  $d > 1$ , ya que el caso  $d = 1$  es trivial. Sea  $e = \max(\text{gr}(h), \text{gr}(g))$ ; esto es,  $[K(w) : k_{V_1}] = e$ . Supongamos  $e < d$ .

Podemos suponer  $e = \text{gr}(g)$  y  $f = \text{gr}(h) < e$ ; ya que si  $\text{gr}(h) > \text{gr}(g)$ , tomamos  $g/h$  y si  $\text{gr}(h) = \text{gr}(g) = e$ , basta tomar  $(h(w)/g(w)) - (a/b)$ , siendo  $a, b \in K$  los coeficientes de

término de grado  $e$  en  $h$  y  $g$  respectivamente.

Puesto que  $h(w)/g(w) \in k_{V_1}$ , existe una unidad  $H(x, y)/G(x, y)$  en  $V_1$  tal que

$$p_1 \left( \frac{H(x, y)}{G(x, y)} \right) = p \cdot \psi \left( \frac{H(x, y)}{G(x, y)} \right) = \frac{h(w)}{g(w)}$$

con lo cual,

$$\frac{H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)}{G(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)} = \frac{q(w)h(w) + H_1(t, w)}{q(w)g(w) + G_1(t, w)},$$

con  $H_1(0, w) = 0$  y  $G_1(0, w) = 0$ . Además, por ser  $H/G$  una unidad,

$$\nu_1(H(x, y)) = \nu_2(G(x, y)) = r.$$

Veamos que  $r \neq 0$ . En efecto, cada sumando del desarrollo de Taylor de  $H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)$  en  $(\delta t^N, \xi(t))$  verifica que

$$\text{ord}_t \left( \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k H}{\partial y^k}(\delta t^N, \xi(t))(t^m w)^k \right) \geq km > 0$$

Entonces, si  $r = 0$  se tendría  $h(w) \in K$ , y análogamente  $g(w) \in K$ . Con lo cual  $h(w)/g(w) \in K$  y  $k_{V_1} \simeq K$ , lo que no es posible por hipótesis.

Denotemos  $l = \text{gr}(q(w))$ , entonces  $q(w)h(w)$  (resp.  $q(w)g(w)$ ) posee un monomio de grado  $l + f$  (resp.  $l + e$ ), y por lo tanto en  $H(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)$  (resp.  $G(\delta t^N, \xi(t) + t^m w)$ ) tenemos un monomio de la forma  $ct^r w^{l+f}$  con  $c \in K$  (resp.  $c't^r w^{l+e}$  con  $c' \in K$ ). Este monomio sólo puede proceder de un sumando de la forma

$$\frac{1}{(l+f)!} \cdot \frac{\partial^{l+f} H}{\partial y^{l+f}}(\delta t^N, \xi(t))(t^m w)^{l+f}$$

(resp.  $\frac{1}{(l+e)!} \cdot \frac{\partial^{l+e} G}{\partial y^{l+e}}(\delta t^N, \xi(t))(t^m w)^{l+e}$ ).

Entonces, existen  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$  con  $0 \leq j \leq s$  tal que

$$r = (l+f)m + \alpha_0 N + \sum_{j=1}^s \alpha_j n_j = (l+e)m + \beta_0 N + \sum_{j=1}^s \beta_j n_j;$$

luego,

$$(\alpha_0 - \beta_0)N + \sum_{j=1}^s (\alpha_j - \beta_j)n_j = (e-f)m \neq 0$$

ya que  $e > f$ .

Como  $d = (N, n_1, \dots, n_s)$ ,  $d$  divide a la primera parte de la igualdad anterior, luego también divide a la segunda, es decir,  $d$  divide a  $(e-f)m$ . Teniendo en cuenta que  $0 \leq f < e < d$ , se tiene  $0 < e-f < d$ . Por otra parte usando (2.9.1)  $\#\{k \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq k < d, d \mid (e-f)m\} = (d, m) = 1$ ; de lo que resulta  $e = f$ . Con lo cual, tiene que ser  $e \geq d$ .  $\square$

Del lema (2.9.2) se sigue que podemos suponer  $\mathcal{K} = \mathbb{R}(x, y)$  para el cálculo de  $k_{V_1}$ . Seguiremos denotando  $V_1$  su restricción a  $\mathbb{R}(x, y)$ . A continuación probaremos que  $[\mathbb{R}(w) : k_{V_1}] \leq d$ . Para ello necesitaremos extender  $V_1$  a  $\mathbb{C}(x, y)$ ; el siguiente lema nos asegura una única extensión.

**(2.9.3) Lema.** *Sea  $V$  un anillo de valoración real de  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$  y  $k_V$  su cuerpo residual. Entonces,  $V$  se extiende de modo único a  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ . Además, si denotamos  $V^{\mathbb{C}}$  esta extensión y  $k_V^{\mathbb{C}}$  su cuerpo residual, se tiene que  $[k_V^{\mathbb{C}} : k_V] = 2$  y el índice de ramificación de  $V^{\mathbb{C}}$  sobre  $V$  es 1.*

*Demostración:* La extensión de cuerpos  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es algebraica de grado 2, luego  $V$  se extiende a  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  ([Bou, §8]). Sean  $V_1, \dots, V_r$  las extensiones de  $V$  a  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ , entonces tenemos la desigualdad siguiente (ver [Bou, §8, n°3])

$$2 \geq \sum_{i=1}^r e_i f_i$$

donde  $e_i$  es el índice de ramificación de  $V_i$  sobre  $V$  y  $f_i$  es el grado  $[k_{V_i} : k_V]$  de la extensión de cuerpos residuales, para  $i = 1, \dots, r$ .

Puesto que  $V$  es real,  $\sqrt{-1} \notin k_V$  y  $\mathbb{R} \subset k_V$ . en suma,  $\mathbb{C} \subset k_{V_i}$  y  $[k_{V_i} : k_V] \geq 2$ . En consecuencia, tenemos

$$2 \geq \sum_{i=1}^r e_i f_i \geq \sum_{i=1}^r 2e_i$$

Y como  $e_i \geq 1$ , tiene que ser  $r = 1$ ,  $e_1 = 1$  y  $f_1 = 2$ . Luego, hay una única extensión, que denotamos  $V^{\mathbb{C}}$  de  $V$ . Además,  $[k_V^{\mathbb{C}} : k_V] = 2$  y el índice de ramificación  $e = 1$ .  $\square$

Sea  $V_1^{\mathbb{C}}$  la extensión de  $V_1$  a  $\mathbb{C}(x, y)$ . Este  $V_1^{\mathbb{C}}$  es el anillo de la valoración de  $\mathbb{C}(x, y)$  dado por

$$\nu_1^{\mathbb{C}}(f(x, y)) = \text{ord}_t(f(\psi(x), \psi(y)))$$

donde  $\psi(x), \psi(y)$  está definido como en 2.8, pero de  $\mathbb{C}(x, y)$  en  $\mathbb{C}(t, z)$ .

Podemos suponer  $\delta = 1$  (es decir,  $\psi(x) = t^N$ ), ya que en otro caso basta aplicar el isomorfismo de  $\mathbb{C}(x, y)$  que envía  $x$  a  $-x$  y deja fijo  $y$ .

Los anillos de valoración  $V_1$  y  $V_1^{\mathbb{C}}$  son isomorfos a través de  $\psi$  a los anillos de valoración

$$\psi(V_1) = \mathbb{R}(w)[t]_{(t)} \cap \mathbb{R}(t^N, \xi(t) + t^m w) \quad \text{y} \quad \psi(V_1^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(w)[t]_{(t)} \cap \mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w)$$

de  $\mathbb{R}(t^N, \xi(t) + t^m w)$  y  $\mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w)$ , respectivamente. Evidentemente,  $\psi(V_1^{\mathbb{C}})$  es la extensión de  $\psi(V_1)$  a  $\mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w)$ . Denotamos estos anillos  $V_1$  y  $V_1^{\mathbb{C}}$  en lugar de  $\psi(V_1)$  y  $\psi(V_1^{\mathbb{C}})$ , para descargar la escritura.

Dado que  $d = (N, \exp(\xi))$ , tenemos las siguientes extensiones algebraicas de cuerpos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(t^N, \xi(t) + t^m w) &\subset \mathbb{R}(t^d, t^m w) \subset \mathbb{R}(t, w) \\ \mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w) &\subset \mathbb{C}(t^d, t^m w) \subset \mathbb{C}(t, w) \end{aligned}$$

Sean  $W_1 = \mathbb{R}(t^d, t^m w) \cap \mathbb{R}(w)[t]_{(t)}$  y  $W_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(t^d, t^m w) \cap \mathbb{C}(w)[t]_{(t)}$ . Obsérvese que,  $W_1$  y  $W_1^{\mathbb{C}}$  son casos particulares de nuestros anillos  $V_1$  y  $V_1^{\mathbb{C}}$ , para  $\xi(t) = 0$ . Luego, por (2.9.2),

tenemos que  $k_{W_1} = \mathbb{R}(w^d)$  y  $k_{W_1}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(w^d)$ . Trivialmente,  $V_1$  y  $V_1^{\mathbb{C}}$  son las restricciones de  $W_1$  y  $W_1^{\mathbb{C}}$  a  $\mathbb{R}(t^N, \xi(t) + t^m w)$  y  $\mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w)$ , respectivamente.

A continuación, veremos un par de lemas sobre  $\mathbb{C}$ , que nos permitirán probar que  $k_{V_1}^{\mathbb{C}} \simeq k_{W_1}^{\mathbb{C}}$  y de aquí se obtendrá el resultado.

Denotemos  $L = \mathbb{C}(t, w)$ ,  $L_d = \mathbb{C}(t^d, t^m w)$  y  $L_N = \mathbb{C}(t^N, \xi(t) + t^m w)$ . Tenemos el siguiente diagrama de extensiones algebraicas de cuerpos y anillos de valoración

$$\begin{array}{ccccc} L_N & \subseteq & L_d & \subseteq & L \\ V_1^{\mathbb{C}} & \subseteq & W_1^{\mathbb{C}} & \subseteq & \mathbb{C}(w)[t]_{(t)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k_{V_1}^{\mathbb{C}} & \subseteq & \mathbb{C}(w^d) & \subseteq & \mathbb{C}(w) \end{array}$$

**(2.9.4) Lema.**  $[L : L_N] = N$  y  $[L : L_d] = d$ .

*Demostración:* Basta probar que el grado de la extensión  $L_N \subset L$  es  $N$ , ya que  $L_d$  es un caso particular de  $L_N$  con  $\xi(t) = 0$  y  $N = d$ , entonces  $[L : L_d] = d$ .

Dado que  $t$  es una raíz de  $T^N - t^N \in L_N[T]$  y que  $L = L_N(t)$ , es  $[L : L_N] \leq N$ . Si encontramos  $N$  automorfismos distintos de  $L$  que dejen fijo  $L_N$ , se tendrá la igualdad, ya que el orden del grupo de Galois de una extensión algebraica es menor o igual al el grado de esta (ver [GR, 1.4]).

Para cada raíz  $N$ -ésima de la unidad  $\varepsilon$ , consideramos el automorfismo  $\sigma_\varepsilon : L \rightarrow L$  tal que  $\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon t$ . Entonces  $\sigma_\varepsilon(t^N) = t^N$ . Para que  $\sigma_\varepsilon$  deje fijo  $L_N$ , tiene que ser

$$\sigma_\varepsilon(\xi(t) + t^m w) = \xi(t) + t^m w$$

luego,

$$\xi(\varepsilon t) + \varepsilon^m t^m \sigma_\varepsilon(w) = \xi(t) + t^m w$$

y entonces

$$\sigma_\varepsilon(w) = \frac{\xi(t) - \xi(\varepsilon t)}{\varepsilon^m t^m} + \varepsilon^{-m} w$$

Como las imagenes de  $t$  y  $w$  por  $\sigma_\varepsilon$  son lineales en  $t$  y  $w$ , respectivamente, resulta que  $\sigma_\varepsilon$  es un automorfismo de  $L$  que deja fijo  $L_N$ . Además, tenemos un automorfismo distinto para cada raíz  $N$ -ésima de la unidad. Luego, hemos encontrado  $N$  automorfismos distintos de  $L$  que dejan fijo  $L_N$ .

Por lo tanto,  $[L : L_N] = N$ . □

**(2.9.5) Lema.** El número de extensiones de  $V_1^{\mathbb{C}}$  a  $L$  es  $N/d$ . Por lo tanto,  $W_1^{\mathbb{C}}$  tiene una única extensión a  $L$ .

*Demostración:* En la demostración de (2.9.4) comprobábamos que

$$N \leq \#(\text{Gal}(L : L_N)) \leq [L : L_N] \leq N$$

Luego, la extensión  $L_N \subset L$  es de Galois y

$$\text{Gal}(L : L_N) = \{\sigma_\varepsilon : \varepsilon \text{ es raíz } N\text{-ésima de la unidad}\}$$

Sean  $B_1, \dots, B_r$  las extensiones de  $V_1^{\mathbb{C}}$  a  $L$  y supongamos que  $B_1 = \mathbb{C}(w)[t]_{(t)}$ . Como  $L : L_N$  es un extensión de Galois, para cada  $j = 1, \dots, r$  existe una raíz  $N$ -ésima de la unidad  $\varepsilon$  tal que  $B_j = \sigma_\varepsilon(B_1)$  ([Bou, §8, n°3]). Luego, el número de extensiones de  $V_1^{\mathbb{C}}$  a  $L$  coincide con el número de elementos distintos del conjunto

$$\{\sigma_\varepsilon(B_1) : \varepsilon \text{ es una raíz } N\text{-ésima de la unidad}\}$$

Supongamos que  $\sigma_{\varepsilon_1}(B_1) = \sigma_{\varepsilon_2}(B_1)$ . Lo que es equivalente a  $\sigma_{\varepsilon_2}^{-1}\sigma_{\varepsilon_1}(B_1) = B_1$ , y como  $B_1$  tiene rango 1, esto es lo mismo que  $\sigma_{\varepsilon_2}^{-1}\sigma_{\varepsilon_1}(B_1) \subset B_1$ .

Pero  $\sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1} = \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1}$  para todo par de raíces  $N$ -ésimas de la unidad. En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}(t) &= s_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1 t) = \varepsilon_2 \varepsilon_1 t = \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1}(t) \\ \sigma_{\varepsilon_2}\sigma_{\varepsilon_1}(w) &= s_{\varepsilon_2} \left( \frac{\xi(t) - \xi(\varepsilon_1 t)}{\varepsilon_1^m t^m} + \varepsilon_1^{-m} w \right) = \\ &= \frac{\xi(\varepsilon_2 t) - \xi(\varepsilon_1 \varepsilon_2 t)}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^m t^m} + \varepsilon_1^{-m} \left( \frac{\xi(t) - \xi(\varepsilon_2 t)}{\varepsilon_2^m t^m} + \varepsilon_2^{-m} w \right) = \\ &= \frac{\xi(t) - \xi(\varepsilon_1 \varepsilon_2 t)}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^m t^m} + (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-m} w = \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1}(w) \end{aligned}$$

Con lo cual, basta determinar para qué  $\varepsilon$ 's se tiene  $\sigma_\varepsilon(B_1) \subset B_1$ .

Comprobaremos que  $\sigma_\varepsilon(B_1) \subset B_1$  si y sólo si  $\varepsilon = \varepsilon \zeta^{kh}$  con  $\zeta$  una raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad y  $k_h = h(N/d)$ ,  $0 \leq h \leq d-1$ .

En efecto, supongamos que  $\sigma_\varepsilon(B_1) \subset B_1$  para cierto  $\varepsilon = \zeta^k$ , con  $k = 0, \dots, N-1$  y  $\zeta$  raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad. Se tiene

$$\sigma_\varepsilon(w) = \frac{\xi(t) - \xi(\zeta^k t) + t^m w}{\zeta^{km} t^m} \in B_1$$

Esto es cierto si y sólo si  $\xi(t) = \xi(\zeta^k t)$ , lo que quiere decir que  $(\zeta^k)^{d'} = 1$ , siendo  $d' = (n_1, \dots, n_s)$ . Pero,  $\zeta$  es una raíz  $N$ -ésima primitiva de la unidad, luego  $N \mid kd'$  con  $k = 0, \dots, N-1$ . Entonces, por (2.9.1), existen exactamente  $d = (N, d')$  enteros  $k = 0, \dots, N-1$  tal que  $N \mid kd'$ . Estos enteros son  $k_h = h(N/d)$  con  $h = 0, \dots, d-1$ . Recíprocamente, supongamos  $\varepsilon = \zeta^{k_h}$ , entonces  $\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon t$  genera el ideal maximal de  $B_1$  y  $\sigma_\varepsilon(w) = \zeta^{-k_h m} w \in B_1$ . Luego,  $\sigma_\varepsilon(B_1) \subset B_1$ .

Por lo tanto,  $\sigma_{\varepsilon_2}^{-1}\sigma_{\varepsilon_1}(B_1) \subset B_1$  si y sólo si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \zeta^{k_h}$  ( $h = 0, \dots, d-1$ ). Luego el número de extensiones de  $V_1^{\mathbb{C}}$  a  $L$  es  $N/d$ .  $\square$

Por el lema (2.9.5) tenemos que el número de extensiones de  $V_1^{\mathbb{C}}$  a  $L_d$  es  $N/d$ . Apliquemos ahora la desigualdad para extensiones de valoraciones (ver [Bou, §8, n°3])

$$\frac{N}{d} = [L_d : L_N] \geq e_1 f_1 + \dots + e_{N/d} f_{N/d} \geq \frac{N}{d}$$

ya que  $e_i, f_i \geq 1$ , siendo  $e_i$  el índice de ramificación y  $f_i$  el grado de la extensión de cuerpos residuales. Con lo cual  $e_i = 1$  y  $f_i = 1$ , para todo  $i$ .

En particular,  $[k_{W_1}^{\mathbb{C}} : k_{V_1}^{\mathbb{C}}] = 1$  y el índice de ramificación de  $W_1^{\mathbb{C}}$  sobre  $V_1^{\mathbb{C}}$  es 1. Entonces, por (2.9.2),

$$k_{W_1}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(w^d) \simeq k_{V_1}^{\mathbb{C}}.$$

Además, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de cuerpos residuales, donde todas las flechas son extensiones algebraicas

$$\begin{array}{ccc} k_{V_1} & \longrightarrow & k_{W_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_{V_1}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & k_{W_1}^{\mathbb{C}} \end{array}$$

deducimos que

$$[k_{W_1}^{\mathbb{C}} : k_{W_1}][k_{W_1} : k_{V_1}] = [k_{W_1}^{\mathbb{C}} : k_{V_1}^{\mathbb{C}}][k_{V_1}^{\mathbb{C}} : k_{V_1}]$$

Entonces,  $[k_{W_1} : k_{V_1}] = 1$  y por (2.9.2)  $k_{W_1} = \mathbb{R}(w^d) \simeq k_{V_1}$ . □

**Observación 2.10** *Manteniendo la notación de 2.8, existe un elemento  $\tau \in V_1$  tal que  $\nu_1(\tau) = 1$ ; es decir,  $\tau$  es un parámetro uniformizador de  $V_1$ . De hecho,  $\tau \in \mathbb{R}(x, y)$ .*

En efecto, podemos restringirnos a  $\mathbb{R}(x, y)$ , ya que todo elemento de  $S_4(\mathbb{R}(x, y))$  centrado en el origen se extiende de modo único a  $\mathcal{K}$  y esta extensión pertenece a  $S_4(\mathcal{K})$ ; entonces, si  $\tau \in \mathbb{R}(x, y)$  es un parámetro uniformizador para  $V_1 \cap \mathbb{R}(x, y)$ , lo es también para  $V_1$ . Adoptando la notación establecida en 2.9, tenemos que el índice de ramificación de  $W_1^{\mathbb{C}}$  sobre  $V_1^{\mathbb{C}}$  es 1. Por otra parte, de modo análogo, se prueba que el índice de ramificación de  $\mathbb{R}(w)[t]_{(t)}$  sobre  $W_1^{\mathbb{C}}$  es 1; entonces el grupo de valores de  $\nu_1^{\mathbb{C}}$  es  $\mathbb{Z}$ . En consecuencia, basta aplicar (2.9.3) para tener el resultado.

## Cuerpos de funciones

Sea  $\mathcal{K}$  una extensión finitamente generada de  $\mathbb{R}$  de grado de trascendencia 2 y  $X$  una superficie real irreducible compacta y no singular tal que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ ; en otras palabras  $X$  es un modelo compacto y no singular de  $\mathcal{K}$ . En la sección 1 hemos descrito completamente  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  como el conjunto de pares  $(a, \bar{\alpha})$ , donde  $a \in X$  y  $\bar{\alpha} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . De esta forma dado un par  $(a, \bar{\alpha})$  el monomorfismo de anillos

$$\mathcal{R}(X)_a \hookrightarrow {}^h\mathcal{R}(X)_a \rightarrow \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$$

nos da una extensión algebraica de cuerpos

$$\varphi_a : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$$

y obtenemos un único  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  como  $\varphi_a^{-1}(\bar{\alpha}) = \alpha$ . Además la imagen inversa por  $\varphi_a$  de  $(\text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}))$  es el conjunto de todos los elementos de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  centrados en  $a$ ; en otras palabras,  $\text{Spec}_r(\mathcal{K}(X))$  es igual a  $\text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  en cada punto de  $X$ .

Dado que conocemos la cadena de valoraciones compatibles con un orden de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  y los cuerpos residuales de éstas intentaremos trasladar estos resultados a  $\mathcal{K}(X)$  mediante el homomorfismo  $\varphi_a$ .

**Proposición 2.11** Sea  $\alpha \in S_1(\mathcal{K}(X))$ . Entonces existe un único anillo de valoración  $V_0$  de  $\mathcal{K}(X)$  compatible con  $\alpha$ . Además,  $V_0$  tiene rango 1, rango racional 1 y su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha = (a, \tilde{\alpha}) \in X \times S_1(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . Por 2.4 existe un único anillo de valoración  $W_0$  de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  compatible con  $\tilde{\alpha}$ , además  $W_0$  tiene rango 1, rango racional 1 y es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  respecto de  $\tilde{\alpha}$ . Entonces,  $V_0 = \varphi_a^{-1}(W_0)$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  (2.2), luego su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ . Además, el rango y el rango racional de  $W_0$  y de  $V_0$  coinciden ya que  $\varphi_a$  es una extensión algebraica de cuerpos.

Con lo cual, puesto que  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  y tiene rango 1, es el único anillo de valoración compatible con  $\alpha$ .  $\square$

**Proposición 2.12** Sea  $\alpha \in S_2(\mathcal{K}(X))$ . Entonces existen exactamente dos anillos de valoración  $V_0$  y  $V_1$  de  $\mathcal{K}(X)$  compatibles con  $\alpha$ , tales que:

(a)  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 2.

(b)  $V_1 = \mathcal{R}(X)_{\mathfrak{p}}$ , donde  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de altura 1 (i.e.  $V_1$  es anillo de valoración discreta), luego el cuerpo residual  $k_{V_1}$  de  $V_1$  es el cuerpo de funciones algebraicas de una curva irreducible en  $X$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha = (a, \tilde{\alpha}) \in X \times S_2(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . Por 2.5 existen dos anillos de valoración  $W_0$  y  $W_1$  de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  compatibles con  $\tilde{\alpha}$ , verificando:

(a)  $W_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  respecto de  $\tilde{\alpha}$  y tiene rango 2.

(b)  $W_1 = (\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}})_{\mathfrak{q}}$ , donde  $\mathfrak{q}$  es un ideal primo de altura 1.

Sean  $V_0 = \varphi_a^{-1}(W_0)$  y  $V_1 = \varphi_a^{-1}(W_1)$ . Entonces, aplicando 2.2 y por ser  $\varphi_a$  una extensión algebraica de cuerpos, tenemos que  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}(x, y)$  respecto de  $\tilde{\alpha}$  y tiene rango 2;  $V_1$  es un anillo de valoración de rango 1 compatible con  $\alpha$  y su grupo de valores  $\Gamma_{V_1}$  es un subgrupo ordenado de  $\Gamma_{V_1} = \mathbb{Z}$ , luego  $V_1$  es anillo de valoración discreta. Con lo cual, estas son todas las valoraciones compatibles con  $\alpha$ .

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{R}(X)_a & \hookrightarrow & V_0 & \hookrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & \mathcal{K}(X) \\ & & \downarrow \varphi_a & & \downarrow \varphi_a & & \downarrow \varphi_a \\ \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}} & \hookrightarrow & W_0 & \hookrightarrow & W_1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}} \end{array}$$

Sea  $\mathfrak{m}_{V_1}$  el ideal maximal de  $V_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_a &= \mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{R}(X)_a = \\ &= \varphi_a^{-1}(\mathfrak{m}_{W_1}) \cap \varphi_a^{-1}(\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}) = \\ &= \varphi_a^{-1}(\mathfrak{m}_{W_1} \cap \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}) = \\ &= \varphi_a^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

luego  $\mathfrak{p}_a$  es un ideal primo de altura 1.

Sea  $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}(X)$  el ideal primo contracción de  $\mathfrak{p}_a$  a  $\mathcal{R}(X)$ , entonces  $\mathfrak{p}$  está estrictamente

contenido en  $\mathfrak{m}_a$ , luego tiene altura 1 y

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{R}(X) &= (\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{R}(X)_a) \cap \mathcal{R}(X) = \\ &= \mathfrak{p}_a \cap \mathcal{R}(X) = \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Luego  $V_1$  domina a  $\mathcal{R}(X)_\mathfrak{p}$ , y como es anillo de valoración discreta  $V_1 = \mathcal{R}(X)_\mathfrak{p}$  y entonces

$$k_{V_1} \simeq \text{cf} \left( \frac{\mathcal{R}(X)}{\mathfrak{p}} \right)$$

□

**Proposición 2.13** *Sea  $\alpha \in S_3(\mathcal{K}(X))$ . Entonces existe un único anillo de valoración  $V_0$  de  $\mathcal{K}(X)$  compatible con  $\alpha$ . Además,  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$ , tiene rango 1 y rango racional 2.*

*Demostración:* Sea  $\alpha = (a, \tilde{\alpha}) \in X \times S_3(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . Por 2.7 existe un único anillo de valoración  $W_0$  de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  compatible con  $\tilde{\alpha}$  tal que  $W_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  respecto de  $\tilde{\alpha}$ , tiene rango 1 y rango racional 2. Consideremos  $V_0 = \varphi_a^{-1}(W_0)$  que es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 1 y rango racional 2, por ser  $\varphi_a$  una extensión algebraica de cuerpos. Luego  $V_0$  es el único anillo de valoración de  $\mathcal{K}(X)$  compatible con  $\alpha$ . □

**Proposición 2.14** *Sea  $\alpha \in S_4(\mathcal{K}(X))$ . Entonces existen exactamente 2 anillos de valoración  $V_0$  y  $V_1$  de  $\mathcal{K}(X)$  compatibles con  $\alpha$ , los cuales verifican:*

- (a)  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 2.
- (b)  $V_1$  es un anillo de valoración discreta tal que su ideal maximal  $\mathfrak{m}_{V_1}$  se contrae al ideal maximal de un punto  $a \in X$  en  $\mathcal{R}(X)$  y su cuerpo residual es isomorfo a  $\mathbb{R}(w^d)$  con  $d$  un entero positivo.

*Demostración:* Sea  $\alpha = (a, \tilde{\alpha}) \in X \times S_4(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ . Por 2.8 existen exactamente dos anillos de valoración  $W_0$  y  $W_1$  de  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  compatibles con  $\tilde{\alpha}$ , tales que:

- (a)  $W_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$  respecto de  $\tilde{\alpha}$  y tiene rango 2;
- (b)  $W_1$  es anillo de valoración discreta que domina a  $\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$ .

Sean  $V_0 = \varphi_a^{-1}(W_0)$  y  $V_1 = \varphi_a^{-1}(W_1)$ ; puesto que  $\varphi_a$  es una extensión algebraica de cuerpos y aplicando 2.2, obtenemos que  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}(X)$  respecto de  $\alpha$  y tiene rango 2,  $V_1$  es anillo de valoración discreta compatible con  $\alpha$  y su ideal maximal  $\mathfrak{m}_{V_1}$  verifica,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{R}(X) &= (\mathfrak{m}_{V_1} \cap \mathcal{R}(X)_a) \cap \mathcal{R}(X) = \\ &= \varphi_a^{-1}((x, y)\mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}) \cap \mathcal{R}(X) = \\ &= \mathfrak{m}_a \mathcal{R}(X)_a \cap \mathcal{R}(X) = \mathfrak{m}_a \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (2.9.2), es inmediato que  $k_{V_1} \simeq \mathbb{R}(w^d)$ . □

### 3 Abanicos

El Teorema de Trivialización de Bröcker (ver [Br1], [ABR]) afirma que para todo abanico de un cuerpo real existe un anillo de valoración compatible con todos sus elementos y tal que el abanico inducido en su cuerpo residual es trivial. En la primera parte de esta sección veremos que en el caso particular de los cuerpos que venimos tratando la trivialización se da según un anillo de valoración de rango 1. En la segunda y tercera parte determinaremos completamente el conjunto de abanicos de 4 elementos de los cuerpos de series en dos variables y del cuerpo de funciones de una superficie, usando el Teorema de Trivialización y los resultados obtenidos en la sección 2 anterior.

#### Teorema de Trivialización

Las cadenas de anillos de valoración compatibles con los órdenes de un abanico presentan ciertas coincidencias. El resultado más importante en este sentido es el Teorema de Trivialización de Bröcker (ver [Br1], [ABR]).

**Teorema de Trivialización:** *Sea  $K$  un cuerpo real y  $F$  un abanico de  $K$ . Entonces existe un anillo de valoración  $V$  de  $K$  tal que:*

- a) *El anillo de valoración  $V$  es compatible con todos los elementos de  $F$ .*
- b) *El abanico inducido por  $F$  en el cuerpo residual  $k_V$  de  $V$  es trivial (i.e. tiene a lo más 2 elementos).*

Con el fin de hacer lo más autocontenida posible esta memoria en esta sección daremos una demostración sencilla del Teorema de Trivialización para los cuerpos de series en dos variables y los cuerpos de funciones racionales de superficies de  $\mathbb{R}^n$ , si bien observaremos como obtener el resultado de un modo simple para extensiones finitas generadas de  $\mathbb{R}$  de grado arbitrario.

Mientras no se indique otra cosa, denotaremos por  $\mathcal{K}$  una extensión ordenada propia de  $\mathbb{R}$ . Recordamos aquí las definiciones de algunos conceptos ya aparecidos en capítulos anteriores y que son de vital importancia en esta sección.

**Definición 3.1** *Un anillo de valoración  $V$  de  $\mathcal{K}$  es compatible con un abanico  $F$  de  $\mathcal{K}$  si es compatible con todos los elementos de  $F$ .*

**Definición 3.2** *Un abanico  $F$  de  $\mathcal{K}$  trivializa según un anillo de valoración  $V$  si  $V$  verifica el Teorema de Trivialización para  $F$ .*

**Ejemplo 3.3** Sea  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$  el cuerpo de funciones racionales de un conjunto algebraico real irreducible. Los abanicos construidos en I.4.4 sobre un divisor primo real  $V$  de  $\mathcal{K}$  trivializan según  $V$ . Es más, por el Teorema de Baer-Krull (I.3.8), todo abanico de  $\mathcal{K}$  que trivialice según un divisor primo real  $V$  se construye como en I.4.4., esto es mediante las elevaciones a  $V$  de dos órdenes distintos  $\tau_1, \tau_2$  del cuerpo residual  $k_V$  de  $V$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & V_1 & & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_4 \\
 & & \downarrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
 & & k_{V_1} & & \tau_1 & \neq & \tau_2 & 
 \end{array}$$

**Observación 3.4** Si  $\mathcal{K}$  es una extensión ordenada de  $\mathbb{R}$  y  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$ , existe un anillo de valoración de rango 1 de  $\mathcal{K}$ , no trivial, compatible con  $\alpha$ .

En efecto, basta comprobar que el cierre convexo  $V_0$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$  es no trivial ya que todos los anillos de valoración no triviales que contienen a  $V_0$  son compatibles con  $\alpha$  y el mayor de todos ellos es de rango 1. Por otra parte, es fácil ver que  $V_0$  es no trivial, ya que si  $V_0 = \mathcal{K}$ , para todo  $x \in \mathcal{K}$  existe  $q \in \mathbb{Q}$  con  $|x| < q$ , entonces  $(\mathcal{K}, \alpha)$  es una extensión arquimediana de  $\mathbb{R}$ , pero  $\mathbb{R}$  no posee extensiones arquimedianas propias.

**Lema 3.5** Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$  distintos tales que  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \alpha_4$ . Si  $V_1$  y  $V_2$  son los anillos de valoración de rango 1 compatible con  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente, entonces  $V_1 = V_2$ .

*Demostración:* Por 3.4 los anillos de valoración  $V_1$  y  $V_2$  son no triviales. Supongamos  $V_1 \neq V_2$ , entonces por ser ambos de rango 1 se tiene que  $V_1 \not\subseteq V_2$ ,  $V_2 \not\subseteq V_1$ . Luego existen  $a, b \in \mathcal{K}$  tales que  $a \in V_1 \setminus V_2$  y  $b \in V_2 \setminus V_1$ . Sean  $\nu_1$  y  $\nu_2$  valoraciones asociadas a  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente; entonces,  $a_1 = a/b$  (resp.  $a_2 = b/a$ ) verifica  $\nu_1(a_1) > 0, \nu_2(a_1) < 0$  (resp.  $\nu_1(a_2) < 0, \nu_2(a_2) > 0$ ).

Por otra parte sean  $f, g \in \mathcal{K}$  tales que

$$\begin{array}{lll} \alpha_1(f) < 0 & \alpha_2(f) > 0 & \alpha_3(f) > 0 \\ \alpha_1(g) > 0 & \alpha_2(g) < 0 & \alpha_3(g) > 0 \end{array}$$

Consideremos  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $\rho > \max\{|\nu_1(f)|, |\nu_2(f)|, |\nu_1(g)|, |\nu_2(g)|\}$ ; existe dicho  $\rho$  porque  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son valoraciones de rango 1, luego su grupo de valores es un subgrupo ordenado de  $\mathbb{R}$ .

Así, tenemos  $\rho > 0$  y  $\nu_1(a_1) > 0, -\nu_2(a_1) > 0$  (resp.  $-\nu_1(a_2) > 0, \nu_2(a_2) > 0$ ). Entonces existe un entero  $m$  tal que  $m\nu_1(a_1) > \rho, -m\nu_2(a_1) > \rho$  (resp.  $-m\nu_1(a_2) > \rho, m\nu_2(a_2) > \rho$ ). Sea  $z_1 = a_1^{2m}f$  (resp.  $z_2 = a_2^{2m}g$ ),

$$\begin{array}{l} \nu_1(z_1) = 2m\nu_1(a_1) + \nu_1(f) > 2\rho + \nu_1(f) > 0 \\ \nu_2(z_1) = 2m\nu_2(a_1) + \nu_2(f) < -2\rho + \nu_2(f) < 0 \end{array}$$

Análogamente se comprueba que  $\nu_1(z_2) < 0, \nu_2(z_2) > 0$ .

Con lo cual hemos obtenido  $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$  tales que  $z_1 \in V_1 \setminus V_2, z_2 \in V_2 \setminus V_1$  y

$$\begin{array}{lll} \alpha_1(z_1) < 0 & \alpha_2(z_1) > 0 & \alpha_3(z_1) > 0 \\ \alpha_1(z_2) > 0 & \alpha_2(z_2) < 0 & \alpha_3(z_2) > 0 \end{array}$$

Además, es  $0 < \alpha_1(-z_1) < \alpha_1(z_2)$ , ya que si fuese al contrario, el hecho de que  $z_1 \in V_1$ , implica que  $z_2 \in V_1$ , lo que no es cierto. Entonces,  $\alpha_1(z_1 + z_2) > 0$  y análogamente se prueba que  $\alpha_2(z_1 + z_2) > 0$ . Luego,  $\alpha_4(z_1 + z_2) > 0$ ; y por otra parte  $\alpha_4(z_1) < 0, \alpha_4(z_2) < 0$ , lo que es imposible.

Por lo tanto  $V_1 = V_2$ . □

**Observación 3.6** Del Lema 3.5 anterior se deduce el Teorema de Trivialización para extensiones finito generadas  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}$ .

En efecto, obsérvese que dados  $V$  y  $F$  compatibles tenemos un abanico  $\overline{F}$  en  $k_V$ .

Consideremos  $V$  el anillo de valoración de rango 1 compatible con  $F$  (3.5), y supon-  
gamos que  $\overline{F}$  está formado por al menos cuatro órdenes distintos  $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_4$  ya que  
en caso contrario  $F$  trivializaría según  $V$ . En efecto, si por ejemplo  $\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_3$  entonces  
 $\overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_3 \cdot \overline{\alpha}_4 = \overline{\alpha}_4$ .

Por 3.5 dado un abanico  $\overline{F}$  en  $k_W$  existe un anillo de valoración  $V_1$  de  $k_V$  compatible  
con  $\overline{F}$  y  $\overline{F}$  induce un abanico  $F_1$  sobre  $k_{V_1}$ . Si  $F_1$  no está formado por al menos cuatro  
órdenes distintos se tiene el resultado, basta tomar  $V' = \pi^{-1}(V_1)$ , siendo  $p : V \rightarrow k_V$  la  
proyección; en otro caso tomaríamos  $V_2$  anillo de valoración compatible con  $F_1$ . Siguiendo  
este proceso y teniendo en cuenta que los anillos de valoración de  $\mathcal{K}$  contenidos en un  
anillo de valoración dado están en biyección con los anillos de valoración de su cuerpo  
residual ([Bou], §4), tenemos una cadena descendente de anillos de valoración de  $\mathcal{K}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \subset & p^{-1}(p_1^{-1}(V_2)) & \subset & p^{-1}(V_1) & \subset & V & \subset & \mathcal{K} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \subset & p_1^{-1}(V_2) & \subset & V_1 & \subset & k_V & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \cdots & \subset & V_2 & \subset & k_{V_1} & & & & \end{array}$$

Como  $\text{gr.tr.}(\mathcal{K} : \mathbb{R}) = d < \infty$  se tiene que ningún anillo de la cadena puede tener rango  
mayor que  $d$  ([Bou], §10), por lo tanto en un número finito de pasos tiene que aparecer  
un anillo de valoración que trivialice.

Antes que la versión del Teorema de Trivialización en el caso de dimensión 2 veremos  
unos lemas sobre los cuerpos de series en dos variables que nos serán útiles posteriormente.

**Lema 3.7** Sea  $P(x, y) \in \mathbb{R}[[x]][y]$  un polinomio irreducible y distinguido. Si

$$\xi(x) = \sum_{i \geq 1} c_i x^{ni/N} \in \mathbb{C}[[x^{1/N}]],$$

es una raíz de  $P(x, y)$ , siendo  $N$  es el menor entero positivo tal que  $\xi(x) \in \mathbb{C}[[x^{1/N}]]$ ;  
entonces,

$$\eta_k(x) = \sum_{i \geq 1} c_i (\theta \zeta^k)^{ni} x^{ni/N}, \quad 1 \leq k < N$$

son las raíces de  $P(-x, y)$ , donde  $\theta$  es una raíz  $N$ -ésima de  $-1$  y  $\zeta$  es una raíz primitiva  
 $N$ -ésima de la unidad.

*Demostración:*  $P(-x, y)$  es irreducible y distinguido por serlo  $P(x, y)$ . Consideremos el  
 $\mathbb{C}$ -automorfismo,

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}[[x]] & \rightarrow & \mathbb{C}[[x]] \\ x & \rightarrow & -x \end{array}$$

que se extiende al  $\mathbb{C}$ -automorfismo,

$$\begin{array}{ccc} \overline{\phi} : \mathbb{C}[[x^{1/N}]] & \rightarrow & \mathbb{C}[[x^{1/N}]] \\ x^{1/N} & \rightarrow & \theta x^{1/N} \end{array}$$

siendo  $\theta$  una raíz  $N$ -ésima de  $-1$ .

Podemos extender estos automorfismos, que seguiremos denotando  $\phi$  y  $\bar{\phi}$ , a los respectivos anillos de polinomios en  $y$ , enviando  $y$  a  $y$ ; con lo cual tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[[x]][y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[[x^{1/N}]] [y] \\ \downarrow \phi & & \downarrow \bar{\phi} \\ \mathbb{C}[[x]][y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[[x^{1/N}]] [y] \end{array}$$

Puesto que  $P(x, \xi(x)) = 0$  y  $\xi(x) \in \mathbb{C}[[x^{1/N}]]$ , entonces  $\bar{\phi}(P(x, \xi(x))) = 0$ . Con lo cual,

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\phi}(P(x, \xi(x))) = \bar{\phi}(P(x, \sum c_i (x^{1/N})^{n_i})) = \\ &= P(-x, \sum c_i (\theta x^{1/N})^{n_i}) = P(-x, \eta_0(x)) \end{aligned}$$

Luego,  $\eta_0(x)$  es raíz de  $P(-x, y)$ , y además  $N$  es mínimo verificando que  $\eta_0(x) \in \mathbb{C}[[x^{1/N}]]$ , ya que tiene los mismos exponentes que  $\xi(x)$ . Dado que  $P(-x, y)$  es irreducible y distinguido tiene grado  $N$  como polinomio de  $\mathbb{R}[[x]][y]$ , y el resto de sus raíces son,

$$\eta_k(x) = \sum_{i \geq 1} c_i \theta^{n_i} (\zeta^k x^{1/N})^{n_i}$$

para  $k = 1, \dots, N-1$  y siendo  $\zeta$  una raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad.  $\square$

**Corolario 3.8** Sea  $K$  uno de los cuerpos  $\mathbb{R}((x))$ ,  $\mathbb{R}(\{x\})$  o  $\mathbb{R}((x))_{\text{alg}}$  y sea  $P(x, y) \in K[y]$  irreducible y distinguido tal que posee una raíz  $\xi(x) \in \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$  ( $N$  mínimo). Entonces:

- 1) Si  $N$  es par,  $P(-x, y)$  no tiene raíces en  $\mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ .
- 2) Si  $N$  es impar,  $P(-x, y)$  posee exactamente una raíz en  $\mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ .

*Demostración:* Si  $P(x, y)$  es irreducible y distinguido en  $K[y]$ , entonces lo es en  $\mathbb{R}[[x]][y]$ . Por lo tanto si

$$\xi(x) = \sum_{i \geq 1} c_i x^{n_i/N} \in \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$$

es raíz de  $P(x, y)$ , entonces por 3.3 las raíces de  $P(-x, y)$  son

$$\eta_k(x) = \sum_{i \geq 1} c_i (\theta \zeta^k)^{n_i} x^{n_i/N}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

con  $\theta$  raíz  $N$ -ésima de  $-1$  y  $\zeta$  raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad.

Denotemos  $R = \{\theta \zeta^k : k = 0, \dots, N-1\}$ , que es el conjunto de las raíces  $N$ -ésimas de  $-1$ .

1) Si  $N$  es par,  $R \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ; además, puesto que hemos tomado  $N$  mínimo, existe  $i_0 \geq 1$  tal que  $N$  no divide a  $n_{i_0}$ . Con lo cual,  $c_{i_0} (\theta \zeta^k)^{n_{i_0}} \notin \mathbb{R}$  para todo  $k = 0, \dots, N-1$ . Luego  $\eta_k(x) \notin \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ , para todo  $k = 1, \dots, N-1$ .

2) Si  $N$  es impar,  $R \cap \mathbb{R} = \{-1\}$ . Entonces, existe  $k_0 \in \{0, \dots, N-1\}$  con  $\theta \zeta^{k_0} = -1$  y para todo  $k \neq k_0$ ,  $\theta \zeta^k \notin \mathbb{R}$ . Con lo cual, puesto que  $N$  es mínimo, siguiendo el mismo razonamiento de 1),  $\eta_k(x) \notin \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$  para todo  $k \neq k_0$  y  $\eta_{k_0}(x) \in \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ .  $\square$

**Lema 3.9** Sea  $L$  una extensión algebraica finita de  $K$  (donde  $K$  es uno de los cuerpos  $\mathbb{R}((x))$ ,  $\mathbb{R}(\{x\})$  o  $\mathbb{R}((x))_{\text{alg}}$ ), con polinomio mínimo distinguido  $P(x, y) \in K[y]$ , tal que  $P(x, y)$  posee al menos una raíz en  $\mathbb{R}[[x^{1/N}]]$ , con  $N = \text{gr}_y(P(x, y))$ . Entonces,  $\text{Spec}_r(L)$  posee exactamente 2 elementos.

*Demostración:* Para comenzar señalemos lo siguiente:

1)  $\text{Spec}_r(K) = \{0^+, 0^-\}$ , donde  $0^+$  denota el orden que hace  $x > 0$ , y  $0^-$  denota el orden que hace  $y < 0$ .

2)  $L \simeq \text{cf}(K[y]/(P(x, y)))$ .

Luego, dado un orden  $\tau$  de  $L$ , su restricción a  $K$  tiene que ser  $0^+$  ó  $0^-$ . Por lo tanto el número de órdenes de  $L$  coincide con el número de extensiones de  $0^+$  a  $L$  más el número de extensiones de  $0^-$  a  $L$ .

En general, el número de extensiones de un orden de un cuerpo a una extensión algebraica finita, coincide con el número de raíces del polinomio mínimo de la extensión en una clausura real de este ([BCR, 1.3.7]). Luego utilicemos este resultado en nuestro caso.

Consideremos  $(K, 0^+)$ . Su clausura real, que denotaremos  $R$  es:

- El cuerpo de series formales de Puiseux en la variable  $x$  y con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , si  $K = \mathbb{R}((x))$ .
- El cuerpo de series convergentes de Puiseux en la variable  $x$  y con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , si  $K = \mathbb{R}(\{x\})$ .
- El cuerpo de series formales de Puiseux en la variable  $x$  y con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , algebraicas sobre  $\mathbb{R}(x)$ , si  $K = \mathbb{R}((x))_{\text{alg}}$ .

Puesto que  $P(x, y) \in A[y]$  y  $\xi(x) \in \mathbb{R}[[x^{1/N}]]$  es una raíz de  $P(x, y)$ , entonces  $\xi(x) \in R$ . Luego  $P(x, y)$  posee una raíz en  $R$  si  $N$  es impar, y posee dos raíces en  $R$  si  $N$  es par. Por lo tanto,  $0^+$  se extiende a un solo orden en  $L$  si  $N$  es impar, y se extiende a dos órdenes si  $N$  es par.

Consideremos ahora  $(K, 0^-)$ , y el  $\mathbb{R}$ -isomorfismo ordenado,

$$\begin{array}{ccc} \phi : (K, 0^-) & \rightarrow & (K, 0^+) \\ & & x \rightarrow -x \end{array}$$

que se extiende a las clausuras reales, que denotaremos  $R'$  y  $R$  respectivamente,  $\bar{\phi} : R' \rightarrow R$ .

Con lo cual en los anillos de polinomios obtenemos, haciendo  $y \rightarrow y$ , los siguientes isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} K[y] & \hookrightarrow & R'[y] \\ \downarrow \phi & & \downarrow \bar{\phi} \\ K[y] & \hookrightarrow & R[y] \end{array}$$

Entonces,  $\xi(x) \in R'$  es raíz de  $P(x, y)$  si y sólo si  $\bar{\phi}(\xi(x)) \in R$  es raíz de  $P(-x, y)$ . Luego el número de raíces de  $P(x, y)$  en  $R'$  coincide con el número de raíces de  $P(-x, y)$  en  $R$ .

Por 3.4,  $P(-x, y)$  posee una única raíz en  $R$  si  $N$  es impar y ninguna si  $N$  es par. Luego,  $0^-$  tiene una extensión a  $L$  si  $N$  es impar, y no se extiende si  $N$  es par.

En resumen, si  $N$  es impar,  $0^+$  y  $0^-$  tienen exactamente una extensión a  $L$ ; si  $N$  es par  $0^+$  tiene dos extensiones a  $L$  y  $0^-$  no se extiende a  $L$ .  $\square$

En el resto de esta sección denotaremos por  $\mathcal{K}$  uno de los cuerpos de series  $\mathbb{R}((x, y))$ ,  $\mathbb{R}(\{x, y\})$  o  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$ , o el cuerpo de funciones regulares  $\mathcal{K}(X)$  de una superficie  $X$  irreducible. Para estos cuerpos obtenemos una versión particular de Teorema de Trivialización que nos aporta toda la información sobre las cadenas de anillos de valoración compatibles.

**Observación 3.10** Denotemos  $\Sigma(\mathcal{K})$  el conjunto de abanicos de  $\mathcal{K}$ . Según las características de los anillos de valoración compatibles con los elementos de  $\text{Spec}_r(\mathcal{K})$  obtenidos en la sección 2 anterior y dado que todo abanico es compatible con una valoración de rango 1, se tiene que un abanico  $F$  de  $\mathcal{K}$  está completamente contenido en uno de los subespacios  $S_i(\mathcal{K})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , que forman el espectro real de  $\mathcal{K}$ . Luego, el conjunto  $\Sigma(\mathcal{K})$  se descompone en 4 subconjuntos disjuntos, que denotaremos

$$\Sigma_i(\mathcal{K}) = \{F \text{ abanico} : F \subset S_i(\mathcal{K})\}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

o simplemente  $\Sigma_i$  cuando no haya lugar a confusión.

**Teorema 3.11** *Todo abanico  $F$  de  $\mathcal{K}$  trivializa según un anillo de valoración de rango 1.*

*Demostración:* Sea  $F$  un abanico de  $\mathcal{K}$ , estudiemos  $F$  según el subespacio  $\Sigma_i(\mathcal{K})$  a que pertenece:

*Caso 1:* Si  $F \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ , entonces existe un anillo de valoración  $V_0$  de rango 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}$  compatible con  $F$ . Pero entonces  $F$  trivializa según  $V_0$  a un abanico formado por un elemento, ya que  $\mathbb{R}$  posee un único orden.

*Caso 2:* Si  $F \in \Sigma_2 \cup \Sigma_4$ , entonces existe un anillo de valoración discreta  $V_1$  compatible con  $F$ ; luego  $F$  induce un abanico  $\bar{F}$  en el cuerpo residual  $k_{V_1}$  de  $V_1$ . El cuerpo  $k_{V_1}$  es de uno de los siguientes tipos:

- 1) una extensión algebraica finita de  $\mathbb{R}((x))$ ,  $\mathbb{R}(x)$  ó  $\mathbb{R}((x))_{\text{alg}}$ ,
- 2) el cuerpo de funciones racionales de una curva algebraica contenida en  $\mathbb{R}^n$ .

En cualquier caso  $\bar{F}$  tiene a lo más 2 elementos, ya que si  $k_{V_1}$  es como en 1) su espectro real tiene 2 elementos y si es como en 2) no existen abanicos no triviales en una curva (I.4.3). Luego  $F$  trivializa según  $V_1$ .  $\square$

**Proposición 3.12** *Sea  $V$  un anillo de valoración de rango 1 de  $\mathcal{K}$ . Entonces:*

- 1) *Si  $V$  tiene rango racional 1 y cuerpo residual  $\mathbb{R}$ , no existen abanicos no triviales que trivialicen según  $V$ . Con lo cual,  $\Sigma_1$  contiene sólo abanicos triviales.*
- 2) *Si  $V$  tiene rango racional 2 y cuerpo residual  $\mathbb{R}$ , existe exactamente un abanico no trivial que trivializa según  $V$ .*
- 3) *Si  $V$  es anillo de valoración discreta con cuerpo residual  $k_V$  real, distinto de  $\mathbb{R}$ , cada par de órdenes distintos de  $k_V$  determina un abanico no trivial de  $\mathcal{K}$  que trivializa según  $V$ .*

*Demostración:* Los elementos de los abanicos  $F$  que trivializan según un anillo de valoración  $V$  en los casos 1) y 2), son elevaciones a  $V$  del orden de  $\mathbb{R}$ ; mientras que si  $V$  está en el caso 3) son elevaciones de a lo más dos órdenes en  $k_V \neq \mathbb{R}$ . Pasemos a estudiar el número de elevaciones de un orden de  $k_V$  a  $V$  mediante el Teorema de Baer-Krull (I.3.8), esto es calculando el número de homomorfismos de grupos del grupo de valores  $\Gamma_V$  en  $\mathbb{Z}_2$ .

1) Todo orden de  $F$  proviene de la elevación a  $V$  del único orden de  $k_V = \mathbb{R}$ . Comprobaremos que  $\#(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_V, \mathbb{Z}_2)) \leq 2$ , con lo cual  $F$  posee a lo más dos elementos.

Por 2.4, el grupo de valores  $\Gamma_V$  de  $V$  es un subgrupo de  $\mathbb{Q}$  que contiene infinitos números racionales. Supongamos que existen  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_V, \mathbb{Z}_2)$  distintos. Entonces, existen  $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma_V$  con  $\phi_1(a_1) \neq \phi_2(a_1)$ ,  $\phi_2(a_2) \neq \phi_3(a_2)$  y  $\phi_1(a_3) \neq \phi_3(a_3)$ . Consideremos  $G$  el subgrupo de  $\Gamma_V$  generado por  $\{a_1, a_2, a_3\}$ , entonces  $\phi_i|_G \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}_2)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , y  $\phi_i|_G \neq \phi_j|_G$  si  $i \neq j$ .

Por otra parte,  $G$  es un subgrupo de  $\mathbb{Q}$  generado por 3 elementos. Supongamos  $a_1 = c_1/d_1$ ,  $a_2 = c_2/d_2$  y  $a_3 = c_3/d_3$  ( $c_i, d_i \in \mathbb{Z}$ ), y sea  $d = (d_1, d_2, d_3)$ . Entonces  $a_1 = c_1 b_1/d$ ,  $a_2 = c_2 b_2/d$  y  $a_3 = c_3 b_3/d$  para ciertos  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ . Sea  $c = (c_1 b_1, c_2 b_2, c_3 b_3)$ , entonces es fácil comprobar que  $G \simeq (c/d)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ .

2) En 2.7 hemos visto que el grupo de valores  $\Gamma_V \simeq \mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ , con  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Cada elemento de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$  está unívocamente determinado por sus valores en 1 y  $m$ . Luego las únicas posibilidades son:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & 1 \rightarrow 0 & \varphi_2 : & 1 \rightarrow 0 & \varphi_3 : & 1 \rightarrow 1 & \varphi_4 : & 1 \rightarrow 1 \\ & m \rightarrow 0 & & m \rightarrow 1 & & m \rightarrow 0 & & m \rightarrow 1 \end{array}$$

Entonces existen exactamente 4 órdenes distintos de  $\mathcal{K}$  compatibles con  $V$ , luego tienen que coincidir con los elementos de  $F$ , si existe un abanico  $F$  que trivialice según  $V$ .

Construyamos entonces, siguiendo la demostración del teorema de Baer-Krull (I.3.8), los cuatro órdenes de  $\mathcal{K}$  compatibles con  $V$ , que denotaremos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . El anillo de valoración  $V$  es real, ya que su cuerpo residual es  $\mathbb{R}$ , entonces existe  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$  compatible con  $V$ . De esta forma,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  tienen como cono positivo los conjuntos  $P_{\varphi_1}, P_{\varphi_2}, P_{\varphi_3}, P_{\varphi_4}$ , respectivamente, definidos como sigue:

$$P_{\varphi_i} = \{f \in \mathcal{K} : (f = 0) \text{ ó } (\varphi_i(\nu_0(f)) = 0, \alpha(f) = +1) \text{ ó } (\varphi_i(\nu_0(f)) = 1, \alpha(f) = -1)\}$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $\nu_0$  es la valoración asociada a  $V$  definida en 2.7.

Comprobemos que estos 4 órdenes forman un abanico. Sea  $f \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ ,  $\nu_0(f) = r + sm$ , con  $s, r \in \mathbb{Z}$ . Obsérvese lo siguiente:

- $\varphi_1(\nu_0(f)) = 0$ , con lo cual  $\alpha_1(f) = \alpha(f)$  (en general  $\alpha_1 = \alpha$ ).
- $\varphi_2(\nu_0(f)) \equiv s \pmod{2}$ , con lo cual  $\alpha_2(f) = \alpha(f)$  si  $s$  es par, y  $\alpha_2(f) = -\alpha(f)$  si  $s$  es impar.
- $\varphi_3(\nu_0(f)) \equiv r \pmod{2}$ , con lo cual  $\alpha_3(f) = \alpha(f)$  si  $r$  es par, y  $\alpha_3(f) = -\alpha(f)$  si  $r$  es impar.
- $\varphi_4(\nu_0(f)) \equiv s + r \pmod{2}$ , con lo cual  $\alpha_4(f) = \alpha(f)$  si  $r + s$  es par, y  $\alpha_4(f) = -\alpha(f)$  si  $r + s$  es impar.

Estudiemos entonces la tabla de signos de  $f$ , según la paridad de  $r$  y  $s$ .

	$\alpha_1(f)$	$\alpha_2(f)$	$\alpha_3(f)$	$\alpha_4(f)$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(f)$
$r$ y $s$ pares	$\alpha(f)$	$\alpha(f)$	$\alpha(f)$	$\alpha(f)$	+1
$r$ y $s$ impares	$\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	$\alpha(f)$	+1
$r$ par y $s$ impar	$\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	$\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	+1
$r$ impar y $s$ par	$\alpha(f)$	$\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	$-\alpha(f)$	+1

Luego queda demostrado que  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  es el único abanico compatible con  $V$ .

3) Por ser  $V$  anillo de valoración discreta su grupo de valores  $\Gamma_V$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , luego  $\#(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_V, \mathbb{Z}_2)) = 2$ . Por lo tanto cada orden de  $k_V$  se extiende a exactamente 2 órdenes compatibles con  $V$ . Luego si  $F$  trivializa según  $V$  y es no trivial, tiene que inducir 2 órdenes en  $k_V$ ; con lo cual  $F$  está determinado por un par de órdenes distintos de  $k_V$  y posee 4 elementos, construidos como en I.4.4.  $\square$

**Observación 3.13** De la demostración de 3.12 podemos concluir que *no existen abanicos de más de 4 elementos en  $\mathcal{K}$* . Por otra parte el mismo hecho está probado en II.4.1, con técnicas puramente geométricas en el caso  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ .

En conclusión, las cadenas de anillos de valoración compatibles con los elementos de un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  de  $\mathcal{K}$  son como sigue:

1. Si  $F \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$ , tenemos

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \hookrightarrow & \mathcal{K} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

siendo  $V_0$  el cierre convexo de  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{R}$  respecto de  $\alpha_i$ , para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . Además, si  $F \in \Sigma_1$ , entonces  $V_0$  tiene rango 1 y rango racional 1; si  $F \in \Sigma_3$ , entonces  $V_0$  tiene rango 1 y rango racional 2.

2. Si  $F \in \Sigma_2 \cup \Sigma_4$ , tenemos

$$\begin{array}{ccc} V_0^1 & \searrow & \\ & & V_1 \hookrightarrow \mathcal{K} \\ V_0^2 & \nearrow & \\ & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \hookrightarrow & k_{V_1} \end{array}$$

siendo  $V_0^1$  (resp.  $V_0^2$ ) el cierre convexo de  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{R}$  respecto de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  (resp.  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$ ) y  $V_1$  un anillo de valoración discreta según el cual  $F$  trivializa.

Efectivamente, los cierres convexos respecto de los elementos de  $F$  coinciden al menos dos a dos: Dado que los anillos de valoración contenidos en  $V_1$  y compatibles con  $\alpha_i$  se corresponden biyectivamente con los anillos de valoración de  $k_{V_1}$  compatibles con el orden inducido por  $\alpha_i$  en  $k_{V_1}$  (I. 3.7) y teniendo en cuenta que  $F$  induce 2 órdenes en  $k_{V_1}$ , no puede haber más de dos cierres convexos distintos en las cadenas de anillos de valoración de los  $\alpha_i$ . Además, como cada orden de  $k_{V_1}$  se eleva a dos de  $V_1$ , los cierres convexos respecto de los  $\alpha_i$  coinciden dos a dos, o coinciden todos.

## Abanicos centrados en el origen

En esta sección describiremos completamente el conjunto de abanicos de  $\mathcal{K} (= \mathbb{R}((x, y)), \mathbb{R}(x, y) \text{ o } \mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  a través de los invariantes asociados a cada orden en la sección 1. Conservaremos las notaciones establecidas en las secciones 1 y 2 para los cuerpos de series.

**Proposición 3.14** *Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, w) \in S_2(\mathcal{K})$ , entonces existe un único abanico de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\alpha$  y está formado por:*

$$\begin{cases} \alpha_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, z) \\ \alpha_2 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), 0, z) \\ \alpha_3 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, -z) \\ \alpha_4 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), 0, -z) \end{cases}$$

*Demostración:* Aplicando 3.12 tenemos que un abanico  $F$  que contenga a  $\alpha$  está determinado por las elevaciones a  $V_1$  (anillo de valoración discreta compatible con  $\alpha$ ) de dos órdenes distintos de su cuerpo residual  $k_{V_1}$ , uno de ellos trivialmente es el orden inducido por  $\alpha$  en  $k_{V_1}$ .

Además por 2.6  $k_{V_1}$  es una extensión algebraica de  $k$ , luego aplicando 3.9 existen exactamente 2 órdenes en  $k_{V_1}$ . Por lo tanto existe un único abanico que contiene a  $\alpha$ .

Supongamos  $\Upsilon = 1$ , entonces por 1.5 sabemos que

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) + w \end{cases}$$

define  $\alpha$  y por 2.6 que

$$k_{V_1} = \text{cf} \left( \frac{A[y]}{(P(\delta x, y))} \right)$$

donde  $P(x, y)$  es un polinomio distinguido e irreducible tal que  $P(x, \xi(x^{1/N})) = 0$ . Sean  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  los dos órdenes de  $k_{V_1}$  que están definidos, respectivamente, por los siguientes  $\mathbb{R}$ -homomorfismos de  $k_{V_1}$  en el cierre real  $R$  de  $(K, o^+)$  (ver 3.9 y [BCR, 1.3.7]),

$$\bar{\alpha} : \begin{cases} x &\rightarrow \delta x \\ y &\rightarrow \xi(x^{1/N}) \end{cases} \quad \bar{\beta} : \begin{cases} x &\rightarrow \delta(-1)^N x \\ y &\rightarrow \xi(-x^{1/N}) \end{cases}$$

donde  $x$  e  $y$  denotan respectivamente la clase de  $x$  y la clase de  $y$  en  $k_{V_1}$ .

Un parámetro uniformizador de  $V_1$  es  $P(\delta x, y)$ , con lo cual por I.4.4,  $F$  está formado por  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: \text{ extiende } \bar{\alpha} \text{ y hace } P(\delta x, y) > 0, \\ \alpha_2 &: \text{ extiende } \bar{\beta} \text{ y hace } P(\delta x, y) > 0, \\ \alpha_3 &: \text{ extiende } \bar{\alpha} \text{ y hace } P(\delta x, y) < 0, \\ \alpha_4 &: \text{ extiende } \bar{\beta} \text{ y hace } P(\delta x, y) < 0. \end{aligned}$$

Comprobemos que  $\Upsilon_{\alpha_i} = 1$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . Como  $p_1(y/x) = y/x$ , entonces existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que

$$-r <_{\alpha_i} \frac{y}{x} <_{\alpha_i} r, \text{ para } i = 1, 3 \text{ (resp. para } i = 2, 4)$$

si y sólo si

$$-r <_{\bar{\alpha}} \frac{y}{x} <_{\bar{\alpha}} r \quad (\text{resp. } -r <_{\bar{\beta}} \frac{y}{x} <_{\bar{\beta}} r)$$

si y sólo si

$$-r <_{o^+} \frac{\xi(x^{1/N})}{\delta x} <_{o^+} r \quad (\text{resp. } -r <_{o^+} \frac{\xi(-x^{1/N})}{\delta(-1)^N x} <_{o^+} r);$$

luego, basta tomar  $r \in \mathbb{R}$  como sigue:

$$\begin{aligned} r > 0 & \text{ si } \xi(t) = 0 \text{ o } \xi(t) \neq 0 \text{ y } n_1 > N, \\ r > |c_1/\delta| & \text{ si } \xi(t) \neq 0 \text{ y } n_1 = N. \end{aligned}$$

En lo que sigue podemos suponer  $\Upsilon = 1$ , ya que si es  $\Upsilon = \infty$ , una vez hecho el cambio de coordenadas  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  y razonando de forma análoga obtenemos  $\Upsilon_{\alpha_i} = \infty$ , para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . Luego, el caso  $\Upsilon = \infty$  se obtendría partir del caso  $\Upsilon = 1$  sin más que intercambiar  $x$  e  $y$ .

Consideremos entonces el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\psi} & W_1 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ k_{V_1} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathbb{R}((t)) \end{array}$$

donde  $\bar{\psi}$  es el homomorfismo ordenado inducido por  $\psi$  en los cuerpos residuales. Puesto que  $t = x^{1/N}$ ,  $\bar{\alpha}$  (resp.  $\bar{\beta}$ ) induce, a través de  $\bar{\psi}$ ,  $0^+$  (resp.  $0^-$ ) en  $\mathbb{R}((t))$ .

Consideremos  $(\mathbb{R}((t)), 0^+)$ , por Baer-Krull  $o^+$  se eleva a dos órdenes  $\beta_1, \beta_3$  de  $W_1 = \mathbb{R}((t))[[z]]_{(z)}$ , como sigue:

$$\begin{aligned} \beta_1 & : \text{ extiende } o^+ \text{ y hace } z > 0, \\ \beta_3 & : \text{ extiende } o^+ \text{ y hace } z < 0. \end{aligned}$$

Por 2.2, los órdenes,  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_3$ , inducidos por  $\beta_1$  y  $\beta_3$ , a través de  $\psi$ , en  $V_1$ , son elevaciones de  $\bar{\alpha}$ . Además  $\alpha'_1 \neq \alpha'_3$ , ya que  $\alpha'_1(P(\delta x, y)) \neq \alpha'_3(P(\delta x, y))$  si y sólo si  $\beta_1(P(t^N, \xi(t) + w)) \neq \beta_3(P(t^N, \xi(t) + w))$ . Comprobemos esto último. Como

$$P(t^N, \xi(t) + w) = \frac{\partial P}{\partial y}(t^N, \xi(t))w + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t^N, \xi(t))w^2 + \dots$$

entonces,

$$\begin{aligned} \beta_1(P(t^N, \xi(t) + w)) & = o^+ \left( \frac{\partial P}{\partial y}(t^N, \xi(t)) \right) \beta_1(w) \neq \\ & \neq o^+ \left( \frac{\partial P}{\partial y}(t^N, \xi(t)) \right) \beta_3(w) = \beta_3(P(t^N, \xi(t) + w)) \end{aligned}$$

ya que,  $w = z$  ó  $-z$ . Con lo cual  $\{\alpha'_1, \alpha'_3\} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ .

Ahora bien,  $\beta_i$  está dado por un  $\mathbb{R}$ -isomorfismo

$$\varphi_i : (\mathbb{R}((t))((z)), \beta_i) \rightarrow \mathbb{R}((t))((z))$$

para  $i = 1, 3$ , con  $\varphi_1(t) = \varphi_3(t) = t$  y  $\varphi_1(z) = z$ ,  $\varphi_3(z) = -z$ ; que es un endomorfismo de  $W_1$ . Entonces,  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_3$  están definidos respectivamente por los  $\mathbb{R}$ -homomorfismos:

$$\begin{aligned} \psi_1 = \varphi_1 \cdot \psi : \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); & \begin{cases} \psi_1(x) = \delta t^N \\ \psi_1(y) = \xi(t) + w \end{cases} \\ \psi_3 = \varphi_3 \cdot \psi : \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); & \begin{cases} \psi_3(x) = \delta t^N \\ \psi_3(y) = \xi(t) - w \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, salvo reordenación en  $i = 1, 3$  e intercambiando  $x$  por  $y$  en el caso  $\Upsilon = \infty$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, z) \\ \alpha_3 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, -z) \end{aligned}$$

Consideremos  $(\mathbb{R}((t)), o^-)$ . El orden  $o^-$  se eleva a dos órdenes  $\beta_2$  y  $\beta_4$  de  $\mathbb{R}((t))[[z]]_{(z)}$ :

$$\begin{aligned} \beta_2 &: \text{ extiende } o^- \text{ y hace } z > 0, \\ \beta_4 &: \text{ extiende } o^- \text{ y hace } z < 0. \end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior, si denotamos  $\alpha'_i = \psi^{-1}(\beta_i)$  con  $i = 2, 4$ , entonces  $\alpha'_2 \neq \alpha'_4$  y estas son las dos elevaciones de  $\bar{\beta}$  a  $V_1$ , luego coinciden con  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$ .

Expresemos  $\beta_i$  ( $i = 2, 4$ ) como un  $\mathbb{R}$ -isomorfismo  $\varphi_i$  de  $\mathbb{R}((t))((z))$  que sea un endomorfismo de  $V_1$ :

$$\varphi_i : (\mathbb{R}((t))((z)), \beta_i) \rightarrow \mathbb{R}((t))((z)), \quad i = 2, 4$$

con  $\varphi_2(t) = \varphi_4(t) = \bar{\varphi}(t) = -t$ ,  $\varphi_2(z) = z$  y  $\varphi_4(z) = -z$ . Entonces tenemos expresados  $\alpha'_2$  y  $\alpha'_4$  con  $\mathbb{R}$ -homomorfismos  $\psi_2$  y  $\psi_4$ , respectivamente, de  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{R}((t))((z))$ ,

$$\begin{aligned} \psi_2 = \varphi_2 \cdot \psi : \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); & \begin{cases} \psi_2(x) = \delta(-t)^N \\ \psi_2(y) = \xi(-t) + w \end{cases} \\ \psi_4 = \varphi_4 \cdot \psi : \mathcal{K} &\rightarrow \mathbb{R}((t))((z)); & \begin{cases} \psi_4(x) = \delta(-t)^N \\ \psi_4(y) = \xi(-t) - w \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, salvo reordenación,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), 0, z) \\ \alpha_4 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), 0, -z) \end{aligned}$$

Y por construcción  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  es el único abanico que contiene a  $\alpha$ .  $\square$

**Proposición 3.15** *Sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \in S_3(\mathcal{K})$ , entonces existe un único abanico de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $\alpha$  y está formado por:*

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, +1) \\ \alpha_2 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -1) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, +1) \\ \alpha_4 = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, -1) \end{cases}$$

*Demostración:* Como  $\alpha \in S_3(\mathcal{K})$  existe un anillo de valoración  $V_0$  de rango 1 y rango racional 2, compatible con  $\alpha$ ; por 3.12 existe un único abanico compatible con  $V_0$ , formado por las cuatro elevaciones  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  del único orden de  $k_{V_0}$  a  $V_0$  según los homomorfismos de su grupo de valores en  $\mathbb{Z}_2$ . Luego  $\alpha \in F$ .

Supongamos  $\Upsilon = +1$ , entonces  $y/x \in V_0$ , puesto que  $V_0$  es el cierre de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha$ . Pero  $V_0$  es también el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha_i$ , para todo  $i$ , con lo cual  $\Upsilon_{\alpha_i} = +1$ . Análogamente si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $\Upsilon_{\alpha_i} = \infty$ , para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . Por lo tanto  $\Upsilon_{\alpha_i} = \Upsilon$ .

Entonces, salvo un cambio de  $x$  por  $y$ , podemos suponer  $\Upsilon = +1$  y en este caso  $\alpha$  está dado por un  $\mathbb{R}$ -homomorfismo

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((t, t^m)); \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) + t^m w \end{cases}$$

con  $\xi(t) = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} \in \mathbb{R}(t)$  tal que  $N \leq n_1 < \dots < n_s$ ,  $(N, n_1, \dots, n_s) = 1$  y  $w \in \{1, -1\}$ . Siguiendo la demostración de 2.7 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\psi} & W_0 \\ & \searrow p_0 & \swarrow p \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

donde  $W_0 = \mathbb{R}[[t, t^m]]_{(t)}$  y  $p(G(t, t^m)) = F_1(0)$  con  $F_1(t) = F(t, t^m)$ .

Además el grupo de valores de  $W_0$  es también  $\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ . Con lo cual, análogamente a 3.12, en  $\mathbb{R}((t, t^m))$  tenemos exactamente 4 órdenes  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) compatibles con  $W_0$ , que se corresponden con las cuatro elevaciones del único orden de  $k_{W_0} = \mathbb{R}$ , según los homomorfismos  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de  $\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}_2$  y están definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \beta_1 & : \text{ hace } t > 0 \text{ y } t^m > 0, \\ \beta_2 & : \text{ hace } t > 0 \text{ y } t^m < 0, \\ \beta_3 & : \text{ hace } t < 0 \text{ y } t^m > 0, \\ \beta_4 & : \text{ hace } t < 0 \text{ y } t^m < 0. \end{aligned}$$

Por 2.2 sólo hay que comprobar que los órdenes  $\{\alpha'_i\}_{i=1}^4$  inducidos por  $\{\beta_i\}_{i=1}^4$  en  $V_0$  a través de  $\psi$  son todos distintos; ya que entonces  $\{\alpha'_i\}_{i=1}^4 = \{\alpha_j\}_{j=1}^4$ . Luego, salvo reordenación podemos denotar estos órdenes por  $\alpha_i$ .

En efecto, sea  $P(x, y) \in K[y]$  distinguido e irreducible tal que  $P(t^N, \xi(t)) = 0$ . Entonces,

$$P(x, y) = \prod_{k=0}^{N-1} \left( y - \sum_{i=1}^s c_i (\zeta^k)^{n_i} x^{n_i/N} \right)$$

con  $\zeta$  raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad. Luego,

$$\begin{aligned} \nu_0(P(\delta x, y)) & = \text{ord}_t \left( \prod_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} + w t^m - \sum_{i=1}^s c_i (\zeta^k)^{n_i} t^{n_i} \right) \right) = \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} \text{ord}_t \left( \sum_{i=1}^s (c_i - c_i (\zeta^k)^{n_i}) t^{n_i} + w t^m \right) = m + q \end{aligned}$$

donde  $q \in \mathbb{Z}$  es una combinación de  $N, n_1, \dots, n_s$ . Con lo cual,

$$\begin{aligned}\alpha_1(P(\delta x, y)) &\neq \alpha_2(P(\delta x, y)) \\ \alpha_3(P(\delta x, y)) &\neq \alpha_4(P(\delta x, y))\end{aligned}$$

Además si  $N$  es impar,

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &\neq \alpha_3(x) \quad , \quad \alpha_1(x) \neq \alpha_4(x) \\ \alpha_2(x) &\neq \alpha_3(x) \quad , \quad \alpha_2(x) \neq \alpha_4(x).\end{aligned}$$

Y si  $N$  es par, como  $(N, n_1, \dots, n_s) = 1$ , sea  $j_0 = \min\{j = 1, \dots, s : n_j \text{ es impar}\}$ , luego si denotamos  $n_0 = N$  se tiene que  $n_0, \dots, n_{j_0-1}$  son pares. Sea  $Q(\delta x, y) \in K[y]$  el polinomio distinguido e irreducible tal que  $Q(t^N, \sum_{i=1}^{j_0-1} c_i t^{n_i}) = 0$ , entonces si  $d = (N, n_1, \dots, n_{j_0-1})$  se tiene

$$Q(x, y) = \prod_{k=0}^{N'/d-1} \left( y - \sum_{i=1}^{j_0-1} c_i (\eta^k)^{n'_i} x^{n_i/N} \right)$$

donde  $N' = N/d$ ,  $n'_i = n_i/d$  y  $\eta$  es una raíz primitiva  $N'$ -ésima de la unidad. Entonces,

$$\nu_0(Q(\delta x, y)) = \sum_{k=0}^{N'/d-1} \text{ord}_t \left( \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} + w t^m - \sum_{i=1}^{j_0-1} c_i (\zeta^k)^{n'_i} t^{n_i} \right) = n_{j_0} + b$$

donde  $b \in \mathbb{Z}$  es una combinación de  $N, n_1, \dots, n_{j_0-1}$ , luego es par. Con lo cual se tiene también

$$\begin{aligned}\alpha_1(Q(\delta x, y)) &\neq \alpha_3(Q(\delta x, y)) \quad , \quad \alpha_1(Q(\delta x, y)) \neq \alpha_4(Q(\delta x, y)) \\ \alpha_2(Q(\delta x, y)) &\neq \alpha_3(Q(\delta x, y)) \quad , \quad \alpha_2(Q(\delta x, y)) \neq \alpha_4(Q(\delta x, y)).\end{aligned}$$

Ahora bien, cada orden  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de  $\mathbb{R}((t, t^m))$  está definido por un homomorfismo en  $\mathbb{R}((t, t^m))$  con el orden  $\beta_1$ , como sigue:

$$\rho_i : (\mathbb{R}((t, t^m)), \beta_i) \rightarrow (\mathbb{R}((t, t^m)), \beta_1)$$

$$\begin{cases} \rho_1(t) = t \\ \rho_1(t^m) = t^m \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_2(t) = t \\ \rho_2(t^m) = -t^m \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_3(t) = -t \\ \rho_3(t^m) = t^m \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_4(t) = -t \\ \rho_4(t^m) = -t^m \end{cases}$$

Entonces, para  $i = 1, 2, 3, 4$  los homomorfismos

$$\psi_i = \rho_i \cdot \psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((t, t^m))$$

definen  $\alpha_i$ . En concreto,

$$\begin{aligned}\begin{cases} \psi_1(x) = \delta t^N \\ \psi_1(y) = \xi(t) + w t^m \end{cases} & \quad \begin{cases} \psi_2(x) = \delta t^N \\ \psi_2(y) = \xi(t) - w t^m \end{cases} \\ \begin{cases} \psi_3(x) = \delta (-t)^N \\ \psi_3(y) = \xi(-t) + w t^m \end{cases} & \quad \begin{cases} \psi_4(x) = \delta (-t)^N \\ \psi_4(y) = \xi(-t) - w t^m \end{cases}\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene el resultado. □

**Observación 3.16** Un orden  $\alpha$  de  $S_4(\mathcal{K})$  está determinado por su restricción a  $\mathbb{R}(x, y)$ , que es un elemento de  $S_4(\mathbb{R}(x, y))$  centrado en el origen. Además, ambos ordenes tienen la misma descripción explícita.

Sea  $\alpha \in S_4(\mathcal{K})$  y sigamos denotando  $\alpha$  su restricción a  $\mathbb{R}(x, y)$ . Entonces tenemos:

1. La cadena de valoraciones de  $\mathbb{R}(x, y)$  compatibles con  $\alpha$  es,

$$\begin{array}{ccccc} V'_0 & \hookrightarrow & V'_1 & \hookrightarrow & K(y) \\ \downarrow p'_1 & & \downarrow p'_1 & & \\ \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}(w^d) & & \end{array}$$

donde  $V'_i = V_i \cap K(y)$ ,  $i = 0, 1$ . Además,  $V'_1$  es un anillo de valoración discreta cuyo ideal maximal se contrae al ideal maximal del origen en  $\mathbb{R}[x, y]$  y  $k_{V_1} = k_{V'_1}$  (ver 2.9).

2. Existe  $\tau \in \mathbb{R}(x, y)$  que es parámetro uniformizador de  $V_1$  y  $V'_1$  (2.10).

3. Todo abanico  $F$  de  $\mathbb{R}(x, y)$  tal que  $\alpha \in F$  se extiende a un único abanico  $\overline{F}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $\alpha \in \overline{F}$ . En efecto, ya que  $k_{V_1} = k_{V'_1}$  y un abanico de  $\mathcal{K}$  (resp.  $\mathbb{R}(x, y)$ ) está determinado por 2 órdenes distintos en su cuerpo residual (3.12). Además, como  $\tau \in \mathbb{R}(x, y)$  las 2 elevaciones de un orden  $\gamma$  de  $k_{V'_1}$  a  $V'_1$  se extienden a las dos elevaciones de  $\gamma$  a  $V_1$ .

En la demostración de la siguiente proposición trabajaremos sobre  $\mathbb{R}(x, y)$ . Además, teniendo en cuenta lo anterior, utilizaremos indistintamente las notaciones para  $\mathcal{K}$  y para  $\mathbb{R}(x, y)$ .

**Proposición 3.17** Sean  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \in S_4(\mathcal{K})$  y  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  un abanico. Entonces  $\alpha \in F$  si y sólo si  $F$  es de uno de los siguientes tipos:

- (1) Si  $\xi(t) = 0$  y  $N = m = 1$ , entonces

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\Upsilon, \delta, 1, 0, 1, w) \\ \alpha_2 = (\Upsilon', \delta, 1, 0, 1, v) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, -\delta, 1, 0, 1, -w) \\ \alpha_4 = (\Upsilon', -\delta, 1, 0, 1, -v) \end{cases}$$

con  $v \in \{z + a, -z + a\}_{a \in \mathbb{R}}$  si  $\Upsilon' = 1$ ,  $v \in \{z, -z\}$  si  $\Upsilon' = \infty$  y  $v \neq w$  si  $\Upsilon' = \Upsilon$ .

- (2) Si  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  con  $N < m$ , entonces

- a) Si  $d = (N, n_1, \dots, n_s)$  es impar,

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \\ \alpha_2 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, v) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m w) \\ \alpha_4 = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m v) \end{cases}$$

con  $v \in \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ ,  $v \neq w$ .

- b) Si  $d = (N, n_1, \dots, n_s)$  es par,

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \\ \alpha_2 = (\Upsilon, \delta', N, \xi'(t), m, v) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -w) \\ \alpha_4 = (\Upsilon, \delta', N, \xi'(t), m, -v) \end{cases}$$

con  $\delta' = \delta$ ,  $\xi'(t) = \xi(t)$  y  $v \in \{z + a, -z + a, z, 1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a > 0}$  ( $v \neq w$ ,  $v \neq -w$ ); o bien  $\delta' = (-1)^{N/d} \delta$ ,  $\xi'(t) = \xi((-1)^{1/d} t)$  y  $v \in \{z + a, -z + a, -z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a < 0}$ .

*Demostración:* Por 3.12, como  $\alpha$  es compatible con un anillo de valoración discreta  $V_1$  de cuerpo residual  $k_{V_1}$  real distinto de  $\mathbb{R}$ , un abanico que contenga a  $\alpha$  está determinado por las dos elevaciones del orden  $\bar{\alpha}$  que induce  $\alpha$  en  $k_{V_1}$  (cuerpo residual del anillo de valoración  $V_1$  de rango 1 compatible con  $\alpha$ ) y las dos elevaciones de otro orden  $\bar{\beta}$  (distinto de  $\bar{\alpha}$ ) de  $k_{V_1}$ . Luego, para tener el resultado basta obtener todos los abanicos así descritos.

Para ello determinaremos para cada  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(k_{V_1})$  sus dos elevaciones a  $V_1$ , a partir de los invariantes de  $\alpha$ .

(3.17.1) Sean  $\beta_1, \beta_2 \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$  las dos elevaciones de  $\bar{\beta}$  a  $V_1$ . Entonces  $\Upsilon_{\beta_1} = \Upsilon_{\beta_2}$ , que denotaremos por  $\Upsilon_{\bar{\beta}}$ , tiene los siguientes valores:

a) Si  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  y  $N < m$ ,  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$ .

b) Si  $\xi(t) = 0$  y  $N = m$ , entonces  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$  si y sólo si  $\Upsilon = 1$  y  $\bar{\beta} \neq +\infty, -\infty$ , o bien  $\Upsilon = \infty$  y  $\bar{\beta} = 0^+, 0^-$ .

*Demostración:* Salvo un cambio de  $x$  por  $y$  podemos suponer  $\Upsilon = 1$  y  $\alpha$  definido por el  $\mathbb{R}$ -homomorfismo,

$$\psi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((z, t)); \quad \begin{cases} \psi(x) = \delta t^N \\ \psi(y) = \xi(t) + t^m w \end{cases}$$

Entonces, el anillo de valoración discreta  $V_1$  compatible con  $\alpha$  está dado por el lugar  $p_1 : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}(w^d) \cup \{\infty\}$  definido por,  $p_1(f(x, y)) = p \cdot \psi(f(x, y))$ .

Sea  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(w^d))$ , entonces  $\bar{p}_0 : \mathbb{R}(w^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  un lugar asociado al cierre convexo  $\bar{V}_0^{\bar{\beta}}$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}(w^d)$  respecto de  $\alpha$ , está definido como sigue:

$$\bar{p}_0(w^d) = \begin{cases} c & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \text{ ó } c^- \\ +\infty & \text{si } \bar{\beta} = +\infty \\ -\infty & \text{si } \bar{\beta} = -\infty \end{cases}$$

Así,  $p_0 = \bar{p}_0 \cdot p_1 : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es un lugar asociado al cierre convexo  $V_0^{\bar{\beta}}$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  con respecto a  $\beta_1$  y a  $\beta_2$ .

$$\begin{array}{ccccc} V_0^{\bar{\beta}} & \hookrightarrow & V_1 & \hookrightarrow & \mathcal{K} \\ \downarrow & & \downarrow p_1 & & \\ \bar{V}_0^{\bar{\beta}} & \hookrightarrow & (\mathbb{R}(w^d), \bar{\beta}) & & \\ \downarrow \bar{p}_0 & & & & \\ \mathbb{R} & & & & \end{array}$$

Con lo cual las cadenas de valoraciones compatibles con  $\beta_1$  y  $\beta_2$  coinciden: Luego  $\Upsilon_{\beta_1} = \Upsilon_{\beta_2}$ , ya que sólo depende de  $\bar{\beta}$ . Calculemos  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon_{\beta_1} = \Upsilon_{\beta_2}$ , según el  $\bar{\beta}$  escogido:

$$\begin{aligned}
 p_0(y/x) &= \bar{p}_0 \cdot p_1(y/x) = \bar{p}_0 \cdot p((\xi(t) + t^m w)/\delta t^N) = \\
 &= \begin{cases} \bar{p}_0(\delta w) & \text{si } \xi(t) = 0 \text{ y } N = m = 1 \\ \bar{p}_0(c_1/\delta) & \text{si } \xi(t) \neq 0 \text{ y } N = n_1 \\ \bar{p}_0(0) & \text{si } \xi(t) \neq 0 \text{ y } N < n_1 \text{ ó } \xi(t) = 0 \text{ y } N < m \end{cases}
 \end{aligned}$$

Luego, supuesto  $\Upsilon = 1$  tenemos que para todo  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(w^d))$ ,  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \infty$  si y sólo si  $\xi(t) = 0$ ,  $N = m = 1$  y  $\bar{\beta} = +\infty$  ó  $-\infty$ . Supuesto  $\Upsilon = \infty$  trabajando análogamente y teniendo en cuenta que en este caso  $N < n_1$ , obtenemos  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = 1$  si y sólo si  $\xi(t) = 0$ ,  $N = m = 1$  y  $\bar{\beta} \neq 0^+ \text{ ó } 0^-$ . □

**(3.17.2) Observación.** Consideremos la restricción de  $\alpha$  a  $\mathbb{R}(x, y)$ . Como hemos indicado en la observación 3.16 conservaremos las notaciones de  $\mathcal{K}$  al restringirnos a  $\mathbb{R}(x, y)$  y sea  $W_1 = \mathbb{R}(z)[t]_{(t)}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & \xrightarrow{\psi} & W_1 \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p \\
 \mathbb{R}(w^d) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathbb{R}(z)
 \end{array}$$

Supongamos que  $\bar{\beta}$  se extiende a través de  $\bar{\psi}$  a  $\bar{\beta}'$  en  $\mathbb{R}(w)$ . Sean  $\beta'_1, \beta'_2$  las dos elevaciones de  $\bar{\beta}'$  a  $W_1$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 \beta'_1 &: \text{ extiende } \bar{\beta}' \text{ y hace } t > 0 \\
 \beta'_2 &: \text{ extiende } \bar{\beta}' \text{ y hace } t < 0
 \end{aligned}$$

Si  $\psi^{-1}(\beta'_1) \neq \psi^{-1}(\beta'_2)$ , entonces las dos elevaciones  $\beta_1, \beta_2$  de  $\bar{\beta}$  a  $V_1$  coinciden con  $\psi^{-1}(\beta'_1), \psi^{-1}(\beta'_2)$ . Además, en este caso, la construcción no depende de la extensión  $\bar{\beta}'$  elegida ya que  $\bar{\beta}$  tiene exactamente dos elevaciones a  $V_1$ . Veamos que  $\psi^{-1}(\beta'_1)$  es distinto de  $\psi^{-1}(\beta'_2)$ . En efecto, sea  $\tau$  un parámetro uniformizador de  $V_1$  (existe un tal  $\tau$  por 2.10). Se tiene que  $\psi(\tau) \in \mathbb{R}(z)[t]_{(t)}$  es tal que  $\psi(\tau) = tu(t, z)$  donde  $u(t, z)$  es una unidad de  $W_1$ . Luego,  $\psi^{-1}(\beta'_1)(\tau) \neq \psi^{-1}(\beta'_2)(\tau)$ . □

**(3.17.3) En las hipótesis de (3.17.2), daremos una descripción de  $\beta_1, \beta_2$  supuesto  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$ :**

Dado que en un cuerpo de funciones algebraicas de una variable todos los órdenes son equivalentes mediante isomorfismos del cuerpo. Sea

$$\bar{\phi} : (\mathbb{R}(w), \bar{\beta}') \rightarrow (\mathbb{R}(z), 0^+)$$

el isomorfismo ordenado que trasforma  $\bar{\beta}'$  en  $\mathbb{R}(w)$  en  $0^+$  en  $\mathbb{R}(z)$  que está definido por

$$\bar{\phi}(w) = \begin{cases} z + c & \text{si } \bar{\beta}' = c^+ \\ -z + c & \text{si } \bar{\beta}' = c^- \\ 1/z & \text{si } \bar{\beta}' = +\infty \\ -1/z & \text{si } \bar{\beta}' = -\infty \end{cases}$$

Consideremos para  $i = 1, 2$  los isomorfismos

$$\phi_i : \mathbb{R}(t, z) \rightarrow \mathbb{R}(t, z)$$

definidos por  $\phi_1(t) = t, \phi_2(t) = -t, \phi_1(w) = \phi_2(w) = \bar{\phi}(w)$ .

Comprobaremos primero que  $\phi_1(W_1) = W_1$ . Para ello basta ver que  $\text{ord}_t(f(z, t)) = \text{ord}_t(\phi_i(f(z, t)))$ , para todo  $f \in \mathbb{R}(t, z) \setminus \{0\}$ : Sea  $f(z, t) = f_1/f_2$ , con  $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[t, w]$ ,  $\text{ord}_t(f) = \text{ord}_t(f_1) - \text{ord}_t(f_2)$ . Luego supongamos  $f \in \mathbb{R}[t, w]$ ,

$$f(t, w) = \sum_{j,k} a_{kj} t^k w^j$$

y sea  $l = \text{ord}_t(f(t, w))$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \text{para todo } k < l & \quad \sum_j a_{kj} w^j = 0 \\ \text{para } kj = l & \quad \sum_j a_{kj} w^j \neq 0 \end{aligned}$$

Así,  $a_{kj} = 0$  para todo  $k < l$  y existe  $j$  con  $a_{lj} \neq 0$ .

Denotemos  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ , entonces

$$\phi_i(f(t, w)) = \sum_{j,k} a_{kj} (\varepsilon_i)^k t^k (\bar{\phi}(w))^j$$

y como  $\varepsilon_i = \pm 1$  y  $\bar{\phi}$  es un isomorfismo de  $\mathbb{R}(w)$ , tenemos

$$\begin{aligned} a_{kj} = 0 \text{ para todo } k < l & \Rightarrow \text{para cada } k < l \quad \sum_j a_{kj} (\varepsilon_i)^k (\bar{\phi}(w))^j = 0 \\ a_{lj} \neq 0 \text{ para algún } j & \Rightarrow \text{para } k = l \quad \sum_j a_{lj} (\varepsilon_i)^l (\bar{\phi}(w))^j \neq 0 \end{aligned}$$

Con lo cual  $\text{ord}_t(\phi_i(f(t, z))) = l$ .

Obsérvese que  $\beta'_1$  y  $\beta'_2$  inducen a través de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , respectivamente, el mismo orden en  $\mathbb{R}(t, z) \subset \mathbb{R}((t, z))$ , éste es el orden que extiende  $z > 0$  con  $t > 0$ .

Con lo cual si  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$  podemos dar  $\beta_1, \beta_2$  como en 1.5 por los  $\mathbb{R}$ -homomorfismos

$$\psi_1, \psi_2 : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}((z, t))$$

donde  $\psi_i = \phi_i \cdot \psi$  ( $i = 1, 2$ ). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, \bar{\phi}(w)) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m \bar{\phi}(w)) \end{aligned}$$

Trataremos a parte los casos en que  $\Upsilon_{\bar{\beta}} \neq \Upsilon$  (caracterizados en (2.17.1)). Dado que, aunque podemos aplicarles todo el razonamiento anterior, los invariantes de los  $\beta_i$ 's que se obtienen no guardan las relaciones establecidas en 1.4.  $\square$

Pasemos entonces a determinar los abanicos que contienen a  $\alpha$ . Para ello calcularemos las elevaciones  $\beta_1, \beta_2$  de un  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(w^d))$  a  $V_1$ .

**Caso 1:**  $\xi(t) = 0$  y  $N = m = 1$ .

En este caso  $d = 1$  y trivialmente todo orden de  $k_{V_1}$  se extiende a  $\mathbb{R}(w)$ .

- Supongamos  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$ :

Por (3.17.1),  $\Upsilon = 1, \bar{\beta} \in \{c^+, c^-\}_{c \in \mathbb{R}}$ , ó  $\Upsilon = \infty, \bar{\beta} \in \{0^+, 0^-\}$ ; y por (3.17.3),  $\psi_1 = \phi_1 \cdot \psi$  y  $\psi_2 = \phi_2 \cdot \psi$  nos dan respectivamente  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Luego tenemos

$$(III.5) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= (1, \delta, 1, 0, 1, v) \\ \beta_2 &= (1, -\delta, 1, 0, 1, -v) \end{aligned}$$

con  $v \in \{z + c, -z + c\}_{c \in \mathbb{R}}$ , o bien tenemos

$$(III.5) \quad \begin{aligned} \beta_1 &= (\infty, \delta, 1, 0, 1, v) \\ \beta_2 &= (\infty, -\delta, 1, 0, 1, -v) \end{aligned}$$

con  $v \in \{z, -z\}$ .

-Supongamos  $\Upsilon_{\bar{\beta}} \neq \Upsilon$ :

por (3.17.1),  $\Upsilon = 1, \bar{\beta} \in \{+\infty, -\infty\}$ , ó  $\Upsilon = \infty, \bar{\beta} \in \{c^+, c^-\}_{c \in \mathbb{R}}$ . Sea entonces

$$\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

el  $\mathbb{R}$ -endomorfismo dado por  $\varphi(x) = y, \varphi(y) = x$ . Veamos que  $\varphi(V_1) = V_1$ :

Para ello basta comprobar que  $\nu_1(f(x, y)) = \nu_1(\varphi(f(x, y)))$ , para todo  $f \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ . Podemos suponer  $\Upsilon = 1$ , salvo un cambio de  $x$  por  $y$ . Sea entonces  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathcal{A}$  y sea

$$l = \nu_1(f(x, y)) = \text{ord}_t(f(\delta t, t w)).$$

Como  $f(\delta t, t w) = \sum_{i,j} a_{ij} (\delta t)^i (t w)^j = \sum_{i,j} a_{ij} \delta^i w^j t^{i+j}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=s} a_{ij} \delta^i w^j &= 0 \quad \text{para todo } s < l \\ \sum_{i+j=l} a_{ij} \delta^i w^j &\neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $a_{ij} = 0$  para todo  $i, j$  tal que  $i + j < l$ , y existe  $i, j$  con  $i + j = l$  tal que  $a_{ij} \neq 0$ .

Por otra parte

$$\nu_1(\varphi(f(x, y))) = \text{ord}_t(f(t w, \delta t)) = \text{ord}_t\left(\sum_{i,j} a_{ij} \delta^j w^i t^{i+j}\right)$$

Y como,

$$\begin{aligned} a_{ij} = 0 \text{ para todo } i + j < l &\Rightarrow \sum_{i+j=s} a_{ij} \delta^j w^i = 0 \quad \text{para todo } s < l \\ a_{ij} \neq 0 \text{ para algún } i + j = l &\Rightarrow \sum_{i+j=l} a_{ij} \delta^j w^i \neq 0 \end{aligned}$$

tenemos  $\nu_1(\varphi(f(x, y))) = l$ .

En consecuencia,  $\varphi$  transforma  $\beta_1, \beta_2$  en otros dos órdenes  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\mathcal{K}$  compatibles con  $V_1$  y que dan el mismo orden  $\bar{\gamma}$  en su cuerpo residual. Sea  $\bar{\varphi} : k_{V_1} \rightarrow k_{V_1}$  el automorfismo inducido por  $\varphi$  en el cuerpo residual de tal forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_1 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{R}(w) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbb{R}(w) \end{array}$$

sea conmutativo.

Como  $p_1(\delta(y/x)) = w$ , se tiene

$$\bar{\varphi}(w) = p_1 \cdot \varphi \left( \delta \frac{y}{x} \right) = p_1 \left( \delta \frac{x}{y} \right) = p \left( \delta \frac{\delta t}{tw} \right) = \frac{1}{w}$$

Luego,

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \Upsilon = 1, \bar{\beta} = +\infty \\ 0^- & \text{si } \Upsilon = 1, \bar{\beta} = -\infty \\ (1/c)^+ & \text{si } \Upsilon = \infty, \bar{\beta} = c^- \\ (1/c)^- & \text{si } \Upsilon = \infty, \bar{\beta} = c^+ \end{cases}$$

Entonces  $\gamma_1, \gamma_2$  están en las hipótesis del caso anterior, con lo cual están definidos por  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  como sigue:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \delta t & \Phi_2(x) = -\delta t \\ \Phi_1(y) = tv & \Phi_2(y) = -tv \end{cases}$$

con  $v \in \{z, -z\}$ ; o bien por

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = tv & \Phi_2(x) = -tv \\ \Phi_1(y) = \delta t & \Phi_2(y) = -\delta t \end{cases}$$

con  $v \in \{z + (1/c), -z + (1/c)\}_{c \in \mathbb{R}}$ .

Así,  $\psi_1 = \Phi_1 \cdot \varphi$  y  $\psi_2 = \Phi_2 \cdot \varphi$  determinan  $\beta_1$  y  $\beta_2$  respectivamente. Por lo tanto obtenemos los mismos pares  $\beta_1, \beta_2$  de la expresión III.5.

Luego el par que induce el mismo orden en  $k_{V_1}$  y contiene a  $\alpha$  es

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, 1, 0, 1, w) = \alpha \\ \beta_2 &= (\Upsilon, -\delta, 1, 0, 1, -w) \end{aligned}$$

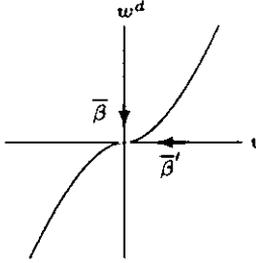
Un abanico  $F$  que contenga a  $\alpha$  es de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\Upsilon, \delta, 1, 0, 1, w) \\ \alpha_2 &= (\Upsilon', \delta, 1, 0, 1, v) \\ \alpha_3 &= (\Upsilon, -\delta, 1, 0, 1, -w) \\ \alpha_2 &= (\Upsilon', -\delta, 1, 0, 1, -v) \end{aligned}$$

con  $v \in \{z + c, -z + c\}$  si  $\Upsilon' = 1$ ,  $v \in \{z, -z\}$  si  $\Upsilon' = \infty$  y  $v \neq w$  si  $\Upsilon' = \Upsilon$ .

**Caso 2 a):**  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  y  $N < m$ , con  $d$  impar.

En este caso cada orden  $\bar{\beta}$  en  $\mathbb{R}(w^d)$  se extiende a un único orden  $\bar{\beta}'$  en  $\mathbb{R}(w)$ , de la siguiente forma:



$$\bar{\beta}' = \begin{cases} (\sqrt[d]{c})^+ & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ (\sqrt[d]{c})^- & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ +\infty & \text{si } \bar{\beta} = +\infty \\ -\infty & \text{si } \bar{\beta} = -\infty \end{cases}$$

donde  $\sqrt[d]{c}$  es la única raíz  $d$ -ésima real de  $c$ .

Además, por (3.17.1),  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$ , luego podemos aplicar (3.17.3) y tenemos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, \bar{\phi}(w)) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m \bar{\phi}(w)) \end{aligned}$$

donde,

$$\bar{\phi}(w) = \begin{cases} z + \sqrt[d]{c} & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ -z + \sqrt[d]{c} & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ 1/z & \text{si } \bar{\beta}' = +\infty \\ -1/z & \text{si } \bar{\beta}' = -\infty \end{cases}$$

Así, el par que induce el mismo orden  $\bar{\alpha}$  en  $k_{V_1}$  y contiene a  $\alpha$  es

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) = \alpha \\ \beta_2 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m w) \end{aligned}$$

y, como la aplicación de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que transforma  $c$  en  $c^d$  es una biyección ( $d$  es impar), cualquier abanico  $F$  que contenga a  $\alpha$  es de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \\ \alpha_2 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, v) \\ \alpha_3 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m w) \\ \alpha_4 &= (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, (-1)^m v) \end{aligned}$$

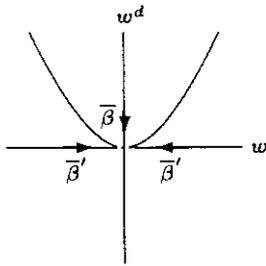
con  $v \in \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}, v \neq w$ .

**Caso 2 b):**  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  y  $N < m$ , con  $d$  par.

En este caso tenemos dos posibilidades:

(i) Supongamos  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(w^d))$  tal que  $\bar{\beta}(w^d) = +1$ .

Entonces  $\bar{\beta} \in \{c^+, c^-, 0^+, +\infty\}_{c > 0}$  y  $\bar{\beta}$  se extiende a  $\mathbb{R}(w)$  de dos modos diferentes como sigue:



$$\bar{\beta}' = \begin{cases} (\sqrt[d]{c})^+ & \text{ó} & (-\sqrt[d]{c})^- & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ (\sqrt[d]{c})^- & \text{ó} & (-\sqrt[d]{c})^+ & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ 0^+ & \text{ó} & 0^- & \text{si } \bar{\beta} = 0^+ \\ +\infty & \text{ó} & -\infty & \text{si } \bar{\beta} = +\infty \end{cases}$$

donde  $\sqrt[d]{c}$  es la raíz  $d$ -ésima real positiva de  $c$ .

En este caso  $\Upsilon = \Upsilon_{\bar{\beta}}$ , luego podemos aplicar (3.17.3). Dado que la construcción (3.17.3) no depende de la extensión de  $\bar{\beta}$  elegida, tomemos como  $\bar{\beta}'$  los elementos de la primera columna.

Como  $d$  es par y  $(d, m) = 1$ ,  $N, n_1, \dots, n_s$  son pares y  $m$  es impar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, \bar{\phi}(w)) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -\bar{\phi}(w)) \end{aligned}$$

donde,

$$\bar{\phi}(w) = \begin{cases} z + \sqrt[d]{c} & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ -z + \sqrt[d]{c} & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ z & \text{si } \bar{\beta} = 0^+ \\ 1/z & \text{si } \bar{\beta} = +\infty \end{cases}$$

Obsérvese que si hubiesemos elegido la segunda columna para  $\bar{\beta}'$  tendríamos  $\beta_1, \beta_2$  cambiados de orden.

Teniendo en cuenta que para todo  $c \in \mathbb{R}$  positivo, existe un único  $a \in \mathbb{R}$  positivo tal que  $a^d = c$ , el par que induce el mismo orden  $\bar{\alpha}$  en  $k_{V_1}$  y contiene a  $\alpha$  es

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) = \alpha \\ \beta_2 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -w) \end{aligned}$$

y cualquier par de órdenes que induzcan el mismo  $\bar{\beta}$  en  $k_{V_1}$  en nuestras hipótesis son:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, v) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -v) \end{aligned}$$

con  $v \in \{z + a, -z + a, z, 1/z\}_{a > 0}$ .

(ii) Supongamos  $\bar{\beta} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(w^d))$  tal que  $\bar{\beta}(w^d) = -1$ .

Entonces  $\bar{\beta} \in \{c^+, c^-, 0^-, -\infty\}_{c < 0}$  y  $\bar{\beta}$  no se extiende a  $\mathbb{R}(w)$ .

Para poder aplicar (3.17.3) modificaremos convenientemente  $\psi$  a fin de obtener un lugar equivalente a  $p_1$  que nos permitirá trabajar como en los casos anteriores.

Podemos suponer  $\Upsilon = 1$ , ya que como  $\Upsilon_{\bar{\beta}} = \Upsilon$ , intercambiando el papel de  $x$  e  $y$  se sigue el mismo proceso en el caso  $\Upsilon = \infty$ .

Restringiéndonos a  $\mathbb{R}(x, y)$ , es  $\psi(\mathbb{R}(x, y)) \subset \mathbb{R}(t^d, t^m w)$  como subcuerpo ordenado de  $\mathbb{R}(t, z)$ . Sea,  $B_1 = W_1 \cap \mathbb{R}(t^d, t^m w)$ , por (2.9.2) tenemos que  $k_{B_1} = \mathbb{R}(w^d)$ .

Consideremos ahora el siguiente automorfismo de  $\mathbb{R}(t^d, t^m w)$ :

$$\Psi : \mathbb{R}(t^d, t^m w) \rightarrow \mathbb{R}(t^d, t^m w); \quad \begin{cases} \Psi(t^d) = (-1)^\mu t^d \\ \Psi(t^m w) = (-1)^\lambda t^m w \end{cases}$$

donde  $\lambda d + \mu m = 1$ .

Comprobaremos que  $\Psi(B_1) = B_1$ , con lo cual podemos definir  $\bar{\Psi} : \mathbb{R}(w^d) \rightarrow \mathbb{R}(w^d)$  del tal forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\Psi} & B_1 \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathbb{R}(w^d) & \xrightarrow{\bar{\Psi}} & \mathbb{R}(w^d) \end{array}$$

sea conmutativo. En efecto, basta ver que  $\text{ord}_t(H(t^d, t^m w)) = \text{ord}_t(\Psi(H(t^d, t^m w)))$  para todo  $H \in \mathbb{R}[t^d, t^m w]$ . Sea

$$H(t^d, t^m w) = \sum_{k,j} a_{kj} (t^d)^k (t^m w)^j = \sum_{k,j} a_{kj} t^{dk+mj} w^j$$

y supongamos  $\text{ord}_t(H(t^d, t^m w)) = l$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{dk+mj < l} a_{kj} w^j &= 0 \\ \sum_{dk+mj=l} a_{kj} w^j &\neq 0 \end{aligned}$$

Luego,  $a_{kj} = 0$  para todo  $k, j$  tal que  $dk + mj < l$  y existen  $(k, j)$  tal que  $dk + mj = l$ , con  $a_{kj} \neq 0$ .

Como,

$$\begin{aligned} \Psi(H(t^d, t^m w)) &= \sum_{k,j} a_{kj} ((-1)^\mu t^d)^k ((-1)^\lambda t^m w)^j = \\ &= \sum_{k,j} a_{kj} (-1)^{\mu k + \lambda j} t^{dk+mj} w^j \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} a_{kj} = 0 \text{ para todo } dk + mj < l &\Rightarrow \sum_{dk+mj < l} a_{kj} (-1)^{\mu k + \lambda j} w^j = 0 \\ a_{kj} \neq 0 \text{ para algun } dk + mj = l &\Rightarrow \sum_{dk+mj=l} a_{kj} (-1)^{\mu k + \lambda j} w^j \neq 0 \end{aligned}$$

Con lo cual  $\text{ord}_t(\Psi(H(t^d, t^m w))) = l$ .

Como  $p\left(\frac{(t^m w)^d}{(t^d)^m}\right) = w^d$ , el isomorfismo  $\bar{\Psi} : \mathbb{R}(w^d) \rightarrow \mathbb{R}(w^d)$  que cierra el diagrama está definido como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(w^d) &= p \cdot \Psi\left(\frac{(t^m w)^d}{(t^d)^m}\right) = \\ &= p\left(\frac{((-1)^\lambda t^m w)^d}{((-1)^\mu t^d)^m}\right) = \\ &= (-1)^{\lambda d + \mu m} w^d = -w^d \end{aligned}$$

Así, tenemos en  $\mathbb{R}(w^d)$  el orden  $\bar{\gamma}$  dado por,

$$\bar{\gamma} = \bar{\Psi}(\bar{\beta}) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \bar{\beta} = 0^- \\ (-c)^- & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ (-c)^+ & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ +\infty & \text{si } \bar{\beta} = -\infty \end{cases}$$

con  $c < 0$ . Y el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xrightarrow{\psi} & B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_1 & \xrightarrow{i} & W_1 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ (\mathbb{R}(w^d), \bar{\beta}) & \hookrightarrow & (\mathbb{R}(w^d), \bar{\beta}) & \xrightarrow{\bar{\Psi}} & (\mathbb{R}(w^d), \bar{\gamma}) & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbb{R}(z) \end{array}$$

Consideremos el homomorfismo  $\psi' : \mathbb{R}(x, y) \rightarrow \mathbb{R}(t, z)$  definido como  $\psi' = i \cdot \bar{\Psi} \cdot \bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \delta(-1)^{(N/d)\mu} t^N \\ \psi'(y) &= \sum_{i=1}^s c_i (-1)^{(n-i/d)\mu} t^{n_i} + (-1)^\lambda t^m w \end{aligned}$$

y el lugar  $p'_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}(w^d)$ , dado por  $p'_1 = \bar{i} \cdot \bar{\Psi} \cdot \bar{\psi} \cdot p_1$ , que es equivalente a  $p_1$ . Entonces, las dos elevaciones de  $\bar{\gamma}$  a  $V_1$  a través de  $p'_1$  coinciden con  $\beta_1, \beta_2$ ; además, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\psi'} & W_1 \\ \downarrow p'_1 & & \downarrow p \\ \mathbb{R}(w^d) & \xrightarrow{\bar{\psi}'} & \mathbb{R}(z) \end{array}$$

es conmutativo y  $\bar{\gamma}$  se extiende a  $\mathbb{R}(w)$ . Luego estamos en el caso (i) anterior.

Como  $d$  es par,  $m$  impar y  $\lambda d + \mu m = 1$ , entonces  $\mu$  es impar. Con lo cual, tenemos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, (-1)^{N/d} \delta, N, \xi((-1)^{1/d} t), m, (-1)^\lambda \bar{\phi}(w)) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, (-1)^{N/d} \delta, N, \xi((-1)^{1/d} t), m, -(-1)^\lambda \bar{\phi}(w)) \end{aligned}$$

donde

$$\bar{\phi}(w) = \begin{cases} z & \text{si } \bar{\beta} = 0^- \\ -z + \sqrt[d]{-c} & \text{si } \bar{\beta} = c^+ \\ z + \sqrt[d]{-c} & \text{si } \bar{\beta} = c^- \\ 1/z & \text{si } \bar{\beta} = -\infty \end{cases}$$

Así, el par de órdenes compatibles con  $V_1$  que inducen  $\bar{\beta}$  (en nuestras hipótesis) en  $k_{V_1}$  son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\Upsilon, (-1)^{N/d} \delta, N, \xi((-1)^{1/d} t), m, v) \\ \beta_2 &= (\Upsilon, (-1)^{N/d} \delta, N, \xi((-1)^{1/d} t), m, -v) \end{aligned}$$

donde tomaremos por convenio  $v \in \{z + a, -z + a, -z, -1/z\}_{a < 0}$ .

En consecuencia, dado  $\alpha$  en el caso 2 b), un abanico  $F$  que contenga a  $\alpha$  es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, w) \\ \alpha_2 &= (\Upsilon, \delta', N, \xi'(t), m, v) \\ \alpha_3 &= (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -w) \\ \alpha_4 &= (\Upsilon, \delta', N, \xi'(t), m, -v)\end{aligned}$$

donde  $\delta' = \delta$ ,  $\xi'(t) = \xi(t)$  y  $v \in \{z+a, -z+a, z, 1/z\}_{a>0}$ ,  $v \neq w$ ,  $v \neq -w$ ; o bien,  $\delta' = (-1)^{N/d}\delta$ ,  $\xi'(t) = \xi((-1)^{1/d}t)$  y  $v \in \{z+a, -z+a, -z, -1/z\}_{a<0}$ .  $\square$

Una vez que hemos establecido, a partir de los invariantes de  $\alpha$ , los invariantes de los elementos de cualquier abanico  $F$  que contenga a  $\alpha$ , pasaremos a definir invariantes que caractericen cada abanico de  $\mathcal{K}$ .

**Notación 3.18** Sea  $V$  un anillo de valoración real de  $\mathcal{K}$ , denotaremos

$$S_V = \{\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K}) : V \text{ es compatible con } \alpha\}$$

**Observación 3.19** Sea  $V$  un anillo de valoración real de  $\mathcal{K}$  de rango 1 y sea  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$  compatible con  $V$ . Si  $\#(S_V) \geq 4$ , entonces

$$S_V = \bigcup_{\alpha \in F} F$$

con lo cual, según los resultados anteriores  $\#(S_V) = 4$  ó  $\infty$ .

En efecto, sea  $F$  un abanico tal que  $\alpha \in F$  y sea  $\beta \in F$ , entonces  $\beta$  es compatible con  $V$ , luego  $\beta \in S_V$ . Recíprocamente, sea  $\beta \in S_V$  y sea  $\bar{\beta}$  (resp.  $\bar{\alpha}$ ) el orden inducido por  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) en  $k_V$ . Si  $k_V = \mathbb{R}$  entonces  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$  y puesto que  $\#(S_V) \geq 4$ ,  $V$  tiene que tener rango racional 2 (ver 2.1) y el único orden de  $\mathbb{R}$  se eleva exactamente a 4 órdenes en  $V$ , que además forman un abanico  $F$  (Proposición 3.12.) tal que  $\alpha, \beta \in F$ . Si  $k_V \neq \mathbb{R}$ , entonces  $V$  es un anillo de valoración discreta y  $\bar{\beta}$  (resp.  $\bar{\alpha}$ ) posee dos elevaciones  $\beta_1, \beta_2$  (resp.  $\alpha_1, \alpha_2$ ) a  $V$ , una de las cuales es  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ). Si  $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$ ,  $F = \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$  es un abanico; si  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ , todo abanico que contenga a  $\alpha$  contiene a  $\beta$  (Proposición 3.12). En cualquier caso  $\beta \in F$ , donde  $F$  es un abanico que contiene a  $\alpha$ .

**Definición 3.20** Una clase de parametrización reducida en  $\mathcal{K}$  es un elemento  $\bar{c}$  del conjunto cociente  $\mathcal{C} = C/\sim$ , donde  $C$  es el conjunto de pares

$$c = (\delta t^M, \xi(t)) = \sum_{i \geq 1} c_i t^{m_i}$$

donde  $\delta \in \{-1, +1\}$ ,  $0 < M \leq m_1 < m_2 < \dots$  con  $(M, m_1, \dots, m_{i_0}) = 1$ , para algún  $i_0$ , y  $\sum c_i x^{m_i/M} \in \mathbb{R}[[x^{1/M}]]$  es algebraico sobre  $K$  (es decir,  $c$  es una parametrización irreducible de una rama de Puiseux de una curva en  $\mathcal{K}$ ); y donde  $\sim$  es la relación de equivalencia siguiente:

$$(\delta t^M, \xi(t)) \sim (\delta' t^{M'}, \xi'(t)) \Leftrightarrow M = M', \delta' = (-1)^M \delta, \xi'(t) = \xi(-t)$$

Si  $\xi(t) \in \mathbb{R}[t]$  diremos que  $\bar{c}$  es polinomial.

**Definición 3.21** Definimos  $R$  como el conjunto de las 4-uplas,  $\rho = (\Upsilon, \bar{c}, d, m)$ , donde  $\Upsilon \in \{0, 1, \infty\}$ ,  $\bar{c} \in \mathcal{C}$ ,  $d \in \mathbb{Z}_+$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , con  $(d, m) = 1$  si  $m \in \mathbb{Z}_+$ , verificando:

- (1) Si  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  entonces  $d = 1$  y  $\bar{c}$  es polinomial.
- (2) Si  $m = 0$  entonces  $d = 1$ .
- (3) Si  $m \in \mathbb{Z}_+$  entonces  $\bar{c}$  es polinomial y  $dm_i < m$ , para todo  $i$ .
- (4) Si  $\Upsilon = \infty$  entonces  $M < m_1$  si  $\xi(t) \neq 0$  ó  $d < m$  si  $\xi(t) = 0$  (en particular, en este caso  $m \neq 0$ ).
- (5)  $\Upsilon = 0$  si y sólo si  $M = d = m = 1$  y  $\bar{c} = [t, 0]$

**Teorema 3.22** El conjunto  $\mathcal{V}$  de anillos de valoración real  $V$  de  $\mathcal{K}$ , de rango 1, tal que  $\#(S_V) \geq 4$  está en biyección con el conjunto  $R$ .

*Demostración:* Sea  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow R$  la siguiente correspondencia:

dado  $V \in \mathcal{V}$ , tomemos  $\alpha \in S_V$  y sea  $\alpha = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t) = \sum c_i t^{n_i}, m, w)$  como en 1.5. Tomemos

$$\begin{aligned} \Upsilon_V &= \begin{cases} 0 & \text{si } \xi(t) = 0 \text{ y } N = m = 1 \\ \Upsilon & \text{en otro caso} \end{cases} \\ d &= \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \text{ ó } m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ (N, n_1, \dots, n_s) & \text{si } m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \\ \bar{c} &= [\delta t^{N/d}, \xi(t^{1/d})] \end{aligned}$$

Entonces,  $\eta(V) = (\Upsilon_V, \bar{c}, d, m)$ .

Comprobemos que  $\eta$  está bien definida: sea  $\alpha' \neq \alpha$  otro orden compatible con  $V$  y supongamos  $\alpha' = (\Upsilon', \delta', N', \xi'(t), m', w')$ . Denotemos por  $\eta'(V) = (\Upsilon', \bar{c}', d', m')$  el elemento de  $R$  asociado a  $V$  como arriba partiendo de  $\alpha'$ . Por 3.19 existe un abanico  $F$  tal que  $\alpha, \alpha' \in F$ , entonces:

1) Si  $V$  es un anillo de valoración discreta cuyo cuerpo residual es una extensión finita de  $K$ , se tiene por 3.14 que

$$\alpha' = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), 0, -w)$$

o bien

$$\alpha' = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), 0, v) \text{ con } v \in \{z, -z\}$$

en cualquier caso  $\Upsilon_V = \Upsilon'_V = \Upsilon$ ,  $d = d' = 1$ ,  $m = m' = 0$  y  $\bar{c} = \bar{c}'$ , ya que  $((-1)^N \delta t^N, \xi(-t)) \sim (\delta t^N, \xi(t))$ , y por lo tanto  $\eta(V) = \eta'(V)$ .

2) Si  $V$  tiene rango racional 2, por 3.15,

$$\alpha' = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, -w)$$

o bien

$$\alpha' = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, v) \text{ con } v \in \{1, -1\}$$

análogamente al caso anterior  $\Upsilon_V = \Upsilon'_V = \Upsilon$ ,  $d = d' = 1$ ,  $m = m'$  y  $\bar{c} = \bar{c}'$ . Por lo tanto  $\eta(V) = \eta'(V)$ .

3) Si  $V$  es anillo de valoración discreta con cuerpo residual el cuerpo de funciones racionales de una curva algebraica, por 3.17 tenemos los siguientes casos:

a) Si  $\xi(t) = 0$  y  $N = m = 1$ , entonces

$$\alpha' = (\Upsilon, \delta, 1, 0, 1, -w)$$

o bien

$$\alpha' = (\Upsilon', \delta', 1, 0, 1, v) \text{ con } \begin{array}{ll} \delta' \in \{\delta, -\delta\} & \\ v \in \{z, -z\} & \text{si } \Upsilon' = +\infty \\ v \in \{z+a, -z+a\}_{a \in \mathbb{R}} & \text{si } \Upsilon' = 1 \end{array}$$

Entonces  $\Upsilon_V = \Upsilon'_V = 0$ ,  $d = d'$ ,  $m = m'$ , y como  $(\delta t, 0) \sim (\delta' t, 0)$  tenemos  $\bar{c} = \bar{c}'$ , luego  $\eta(V) = \eta'(V)$ .

b) Si  $d$  es impar, y  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  con  $N < m$ , entonces

$$\alpha' = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, v)$$

o bien

$$\alpha' = (\Upsilon, (-1)^N \delta, N, \xi(-t), m, v)$$

con  $v \in \{z+a, -z+a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ . Luego  $\Upsilon_V = \Upsilon'_V = \Upsilon$ ,  $d = d'$ ,  $m = m'$  y  $(\delta t^{N/d}, \xi(t^{1/d})) \sim ((-1)^N \delta t^{N/d}, \xi(-t^{1/d}))$ . Observar que al ser  $d$  impar  $N$  y  $N/d$  (resp.  $n_i$  y  $n_i/d$ ) tienen la misma paridad, con lo cual  $\bar{c} = \bar{c}'$  y  $\eta(V) = \eta'(V)$ .

c) Si  $d$  es par, y  $\xi(t) \neq 0$  ó  $\xi(t) = 0$  con  $N < m$ , entonces

$$\alpha' = (\Upsilon, \delta, N, \xi(t), m, v)$$

o bien

$$\alpha' = (\Upsilon, (-1)^{N/d} \delta, N, \xi((-1)^{1/d} t), m, v)$$

con  $v \in \{z+a, -z+a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ . Análogamente a los casos anteriores se tiene  $\eta(V) = \eta'(V)$ .

En resumen, como se quería,  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow R$  es una aplicación. Comprobemos que es inyectiva y sobreyectiva.

Sea  $(\Upsilon, \bar{c}, d, m) \in R$ , veamos que existe  $V \in \mathcal{V}$  con  $\eta(V) = (\Upsilon, \bar{c}, d, m)$ . Supongamos  $\bar{c} = [\delta t^M, \sum_i c_i t^{m_i}]$  y consideremos

$$\alpha = \begin{cases} (\Upsilon, \delta, dM, \sum c_i t^{dm_i}, m, w) & \text{si } \Upsilon \neq 0, \text{ con } w \text{ elegido según 1.4} \\ (1, \delta, 1, 0, 1, z) & \text{si } \Upsilon = 0 \end{cases}$$

Sea  $V$  el anillo de valoración de rango 1 compatible con  $\alpha$ ;  $\eta(V) = (\Upsilon, \bar{c}, d, m)$ .

Sean  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$  tales que  $\eta(V_1) = \eta(V_2)$  comprobaremos que  $V_1 = V_2$ . Pongamos  $\eta(V_1) = \eta(V_2) = (\Upsilon, \bar{c}, d, m)$  siendo  $\bar{c} = [\delta t^M, \xi(t) = \sum c_i t_i^{m_i}]$ . Consideremos  $\alpha_1 = (\Upsilon_1, \delta_1, N_1, \xi_1(t), m_1, w_1)$  (resp.  $\alpha_2 = (\Upsilon_2, \delta_2, N_2, \xi_2(t), m_2, w_2)$ ) compatible con  $V_1$  (resp.  $V_2$ ); entonces, según la definición de  $\eta$ , tenemos:

- $\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = \Upsilon$  si  $\Upsilon \neq 0$ .
- $d_1 = (N_1, \exp(\xi_1)) = d$ ,  $d_2 = (N_2, \exp(\xi_2)) = d$  y  $m_1 = m_2 = m$ .
- $(\delta_1 t^{N_1/d}, \xi_1(t^{1/d})) \sim (\delta t^M, \sum c_i t^{m_i})$ , entonces  $N_1 = dM$ ,  $\delta_1 \in \{\delta, (-1)^M \delta\}$  y  $\xi_1(t^{1/d}) \in \{\sum c_i t^{m_i}, \sum c_i (-1)^{m_i} t^{m_i}\}$ . Análogamente tenemos estas igualdades para  $\alpha_2$  sin más que cambiar el subíndice 1 por 2.

De lo cual concluimos que existe un abanico  $F$  tal que  $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ , y entonces  $V_1 = V_2$ .

Luego  $\eta$  es una biyección entre  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Observación 3.23** Un elemento  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathcal{K})$  puede ser representado también por uplas del tipo

$$(\Upsilon, (\delta t^N, \xi(t)), m, w)$$

que recogen los mismos invariantes de 1.4. Obsérvese que en 3.22 hemos caracterizado sólo los anillos de valoración de rango 1 de  $\mathcal{K}$  según las cuales trivializa un abanico  $F$  no trivial, esto es, todos los anillos de valoración reales de rango 1 excepto las de rango racional 1 con cuerpo residual  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, admitiendo en la definición del conjunto  $C$  (3.20) series con exponentes racionales podemos dar estos invariantes para todos los anillos de valoración de  $K$  de rango 1.

Ahora bien, identificando cada anillo de valoración  $V$  con su upla  $(\Upsilon, \bar{c}, d, m)$  correspondiente, tal y como hemos trabajado en la demostración de 3.22 podemos dar todos los órdenes compatibles con  $V$ . Para ello basta elegir los distintos representantes de la clase de parametrización  $\bar{c}$  y dar a  $w$  los valores permitidos por 1.4 según los invariantes de  $V$ , que trivialmente son un subconjunto de los invariantes de  $\alpha$ .

**Definición 3.24** Sea  $\bar{c} \in C$  una clase de parametrización reducida en  $\mathcal{K}$ , llamaremos representante canónico de  $\bar{c}$  al elemento  $c = (\delta t^M, \sum_{i \geq 1} c_i t^{m_i}) \in C$  de la clase  $\bar{c}$  verificando que  $c_{i_0} > 0$ , donde denotamos  $c_o = \delta$ ,  $m_o = M$  e  $i_0 = \min\{i \geq 0 : \text{sign}(c_i) \neq \text{sign}((-1)^{m_i} c_i)\}$ .

En otras palabras, si  $c$  es el representante canónico de  $\bar{c}$ , entonces  $c$  es, entre los dos elementos de la clase  $\bar{c}$ , aquél que tiene positivo el primer coeficiente distinto entre ambas parametrizaciones.

**Observación 3.25** El representante canónico  $c$  de una clase de parametrización  $\bar{c}$  está bien definido: siempre existe  $i_0$  en las condiciones de la definición 3.24. En efecto, para toda parametrización  $c = (\delta t^M, \sum_{i \geq 1} c_i t^{m_i})$  existe  $j \geq 1$  tal que  $(M, m_1, \dots, m_j) = 1$ .

**Notación 3.26** Sea  $c = (\delta t^M, \sum_{i \geq 1} c_i t^{m_i})$  el representante canónico de una clase de parametrización  $\bar{c}$ , denotaremos por  $-c$  el otro elemento de la clase, esto es

$$-c = (\delta(-1)^M t^M, \sum_{i \geq 1} (-1)^{m_i} c_i t^{m_i})$$

Dado un entero  $d > 0$  denotaremos  $c^d$ ,

$$c^d = (\delta t^{dM}, \sum_{i \geq 1} c_i t^{dm_i})$$

Análogamente se tiene  $(-c)^d$ .

**Teorema 3.27** 1) Un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathcal{K})$  está unívocamente determinado por un anillo de valoración discreta real  $V$ , cuyo ideal maximal interseca a  $\mathcal{A}$  en un ideal primo de altura 1.

2) Un abanico  $F \in \Sigma_3(\mathcal{K})$  está unívocamente determinado por un anillo de valoración real  $V$  de rango 1 y rango racional 2.

3) Un abanico  $F \in \Sigma_4(\mathcal{K})$  está unívocamente determinado por  $(V, \{u, u'\})$ , donde  $V$  es un anillo de valoración discreta real cuyo ideal maximal se contrae al ideal maximal de  $\mathcal{A}$  y  $\{u, u'\} \subset \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$  con  $u \neq u'$ .

*Demostración:* 1) Por 3.12 un abanico  $F$  compatible con un anillo de valoración discreta  $V$  tal que su ideal maximal se contrae a un ideal primo de altura 1 en  $\mathcal{A}$  está formado por 2 órdenes distintos de  $k_V$ ; además  $k_V$  tiene exactamente 2 órdenes, luego  $F$  es único. Recíprocamente, un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathcal{K})$  trivializa según un anillo de valoración discreta en estas condiciones.

2) Es inmediato por 3.12.2)

3) Sea  $V$  un anillo de valoración discreta cuyo maximal se contrae al ideal maximal de  $\mathcal{A}$ , entonces cada par de órdenes distintos  $\tau_1, \tau_2 \in \text{Spec}_r(k_V)$ , determina de forma unívoca un abanico compatible con  $V$ . Según la demostración de 3.17, es posible asignar a cada elemento de  $\text{Spec}_r(k_V)$  un elemento del conjunto  $\{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ , como sigue:

*Caso 1:*  $\xi(t) = 0$  y  $N = m = 1$ . En este caso  $k_V$  es un cuerpo isomorfo a  $\mathbb{R}(z)$ , entonces asignamos

$$\begin{array}{lll} z + a & a & a^+ \in \text{Spec}_r(k_V) \\ -z + a & a & a^- \in \text{Spec}_r(k_V) \\ 1/z & a & +\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \\ -1/z & a & -\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \end{array}$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

*Caso 2 a):* Cualquier caso distinto de 1, con  $d$  impar. Entonces  $\mathbb{R}(z)$  es una extensión algebraica de  $k_V$  de grado  $d$ , entonces asignamos

$$\begin{array}{lll} z + \sqrt[d]{a} & a & a^+ \in \text{Spec}_r(k_V) \\ -z + \sqrt[d]{a} & a & a^- \in \text{Spec}_r(k_V) \\ 1/z & a & +\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \\ -1/z & a & -\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \end{array}$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$ , siendo  $\sqrt[d]{a}$  la única raíz  $d$ -ésima real positiva de  $a$ .

*Caso 2 b):* Cualquier caso distinto de 1, con  $d$  par. Entonces  $\mathbb{R}(z)$  es una extensión algebraica de  $k_V$  de grado  $d$ , entonces asignamos

$$\begin{array}{lll} z + \sqrt[d]{a} & a & a^+ \in \text{Spec}_r(k_V), a \geq 0 \\ -z + \sqrt[d]{a} & a & a^- \in \text{Spec}_r(k_V), a \geq 0 \\ z + \sqrt[d]{-a} & a & a^+ \in \text{Spec}_r(k_V), a < 0 \\ -z + \sqrt[d]{-a} & a & a^- \in \text{Spec}_r(k_V), a < 0 \\ 1/z & a & +\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \\ -1/z & a & -\infty \in \text{Spec}_r(k_V) \end{array}$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$ , siendo  $\sqrt[d]{a}$  (resp.  $\sqrt[d]{-a}$ ), para  $a > 0$  (resp.  $a < 0$ ), la raíz  $d$ -ésima positiva (resp. negativa) de  $a$  (resp.  $-a$ ).  $\square$

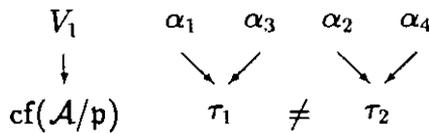
**(3.28) Descripción del conjunto  $\Sigma(\mathcal{K})$ :**

Usando los resultados obtenidos en esta sección, podemos dar una lista completa de abanicos de  $\mathcal{K}$ .

Sean  $\Upsilon \in \{1, \infty\}$ ,  $c = (\delta t^M, \xi(t))$  el representante canónico de una clase de parametrización y  $m \in \mathbb{R}$ . Un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  en  $\mathcal{K}$  es de uno de los siguientes tipos:

$$1. \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = (\Upsilon, c, 0, z) & \alpha_2 = (\Upsilon, -c, 0, z) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, c, 0, -z) & \alpha_4 = (\Upsilon, -c, 0, -z) \end{array}$$

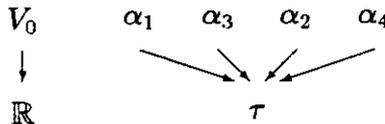
Y su cadena de valoraciones compatibles es  $V_0 \subset V_1 \subset \mathcal{K}$ , donde  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) y  $V_1$  es anillo de valoración discreta cuyo ideal maximal se contrae a un ideal primo  $\mathfrak{p}$  de altura 1 de  $\mathcal{A}$  y tal que  $F$  trivializa según  $V_1$  de la forma siguiente:



$$2. \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = (\Upsilon, c, m, +1) & \alpha_2 = (\Upsilon, c, m, -1) \\ \alpha_3 = (\Upsilon, -c, m, +1) & \alpha_4 = (\Upsilon, -c, m, -1) \end{array}$$

con  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y  $c$  polinomial.

Y su cadena de valoraciones compatibles es  $V_0 \subset \mathcal{K}$ , donde  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), tiene rango 1, rango racional 2 y  $F$  trivializa según  $V_0$  de la siguiente forma:



3. En estos casos  $c$  es polinomial,  $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$  y  $d \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ .

$$a) \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = (\Upsilon, (t, 0), 1, u) & \alpha_2 = (\Upsilon, (t, 0), 1, u') \\ \alpha_3 = (\Upsilon, (-t, 0), 1, -u) & \alpha_4 = (\Upsilon, (-t, 0), 1, -u') \end{array}$$

con  $u, u' \in \{z + a, -z + a\}_{a \in \mathbb{R}}$ ,  $u \neq u'$  si  $\Upsilon = 1$ ; ó  $u = z, u' = -z$  si  $\Upsilon = \infty$ .

$$b) \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = (1, (t, 0), 1, u) & \alpha_2 = (\infty, (t, 0), 1, u') \\ \alpha_3 = (1, (-t, 0), 1, -u) & \alpha_4 = (\infty, (-t, 0), 1, -u') \end{array}$$

con  $u \in \{z + a, -z + a\}_{a \in \mathbb{R}}$ ,  $u' \in \{z, -z\}$ .

$$c) \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = (\Upsilon, c^d, m, u) & \alpha_2 = (\Upsilon, c^d, m, u') \\ \alpha_3 = (\Upsilon, (-c)^d, m, (-1)^m u) & \alpha_4 = (\Upsilon, (-c)^d, m, (-1)^m u') \end{array}$$

con  $d$  impar y  $u, u' \in \{z + a, -z + a, 1/z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}}$ ,  $u \neq u'$ .

$$d) \begin{array}{|l} \alpha_1 = (\Upsilon, c', m, u) \quad \alpha_2 = (\Upsilon, c', m, u') \\ \alpha_3 = (\Upsilon, c', m, -u) \quad \alpha_4 = (\Upsilon, c', m, -u') \end{array}$$

con  $c' = c^d$ ,  $d$  par y  $u, u' \in \{z + a, -z + a, z, 1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a > 0}$ ,  $u \neq u'$   
 ó bien

$c' = (-c)^d$ ,  $d$  par y  $u, u' \in \{z + a, -z + a, -z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a < 0}$ ,  $u \neq u'$

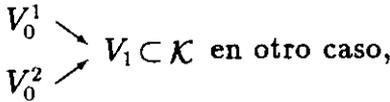
$$e) \begin{array}{|l} \alpha_1 = (\Upsilon, c^d, m, u) \quad \alpha_2 = (\Upsilon, (-c)^d, m, u') \\ \alpha_3 = (\Upsilon, c^d, m, -u) \quad \alpha_4 = (\Upsilon, (-c)^d, m, -u') \end{array}$$

con  $d$  par,  $u \in \{z + a, -z + a, z, 1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a > 0}$  y  $u' \in \{z + a, -z + a, -z, -1/z\}_{a \in \mathbb{R}, a < 0}$

En todos estos casos la cadena de valoraciones compatibles es

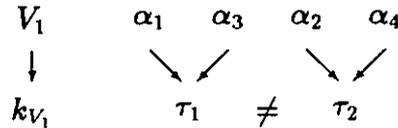
$V_0 \subset V_1 \subset \mathcal{K}$  si  $u = z + a$ ,  $u' = -z + a$  ó  $u = 1/z$ ,  $u' = -1/z$ ,

donde  $V_0$  es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de los cuatro elementos de  $F$ ; ó bien



donde  $V_0^1$  (resp.  $V_0^2$ ) es el cierre convexo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{K}$  respecto de  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  (resp.  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$ ).

En ambos casos  $V_1$  es anillo de valoración discreta cuyo ideal maximal se contrae al ideal maximal de  $\mathcal{A}$  y tal que  $F$  trivializa según  $V_1$  de la siguiente forma:



### Abanicos en superficies no singulares

En la proposición 3.12 hemos dado la estructura de los abanicos del cuerpo de funciones racionales  $\mathcal{K}$  de una superficie real irreducible contenida en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $X$  un modelo compacto y no singular de  $\mathcal{K}$ , luego  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ . Dado que en las secciones 1.2 y 2.1 hemos caracterizado los órdenes de  $\mathcal{K}$  y las valoraciones compatibles con estos, mediante invariantes en  $X$ , en esta sección estableceremos la relación entre los invariantes en  $X$  de los órdenes que constituyen un abanico de  $\mathcal{K}$ .

**Teorema 3.29** 1) Un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathcal{K}(X))$  está unívocamente determinado por dos semirramas distintas  $c_1$  y  $c_2$  de una curva algebraica real irreducible  $C$  contenida en  $X$  centradas en puntos  $a, b \in C$  (posiblemente  $a = b$ ).

2) Un abanico  $F \in \Sigma_3(\mathcal{K}(X))$  (resp.  $F \in \Sigma_4(\mathcal{K}(X))$ ) está unívocamente determinado por un par  $(a, \tilde{F})$  donde  $a \in X$  y  $\tilde{F} \in \Sigma_3(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  (resp.  $\tilde{F} \in \Sigma_4(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ ). En concreto,  $F$  y  $\tilde{F}$  se obtienen el uno del otro a través del isomorfismo de anillos locales  $\varphi_a : \mathcal{R}(X)_a \rightarrow \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$ .

*Demostración:* 1) Un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathcal{K}(X))$  trivializa según un anillo de valoración discreta  $V_1$  cuyo cuerpo residual es el cuerpo de funciones de una curva  $C$ ,  $k_{V_1} = \mathcal{K}(C)$ . Luego  $F$  está determinado por las elevaciones de dos órdenes distintos  $\tau_1, \tau_2$  de  $\mathcal{K}(C)$ .

Ahora bien, por I.3.12 un orden en el cuerpo de funciones racionales de una curva  $C$

está unívocamente determinado por una semirrama  $c$  en un punto  $a \in C$ . Con lo cual se tiene el resultado.

2) Un abanico  $F \in \Sigma_3(\mathcal{K}(X)) \cup \Sigma_4(\mathcal{K}(X))$  trivializa según un anillo de valoración de rango 1 cuyo ideal maximal se contrae al ideal maximal de un punto  $a \in X$  en  $\mathcal{R}(X)$ . Luego  $F \subset \text{Spec}_r(\mathcal{R}(X)_a)$ , y el isomorfismo  $\varphi_a : \mathcal{R}(X)_a \rightarrow \mathbb{R}[[x, y]]_{\text{alg}}$  induce un único abanico  $\tilde{F}$  en  $\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}}$ . Luego el par  $(a, \tilde{F})$  determina  $F$ .  $\square$

**Observación 3.30** El conjunto  $\Sigma_2 \cup \Sigma_4$  contiene todos los abanicos de  $\mathcal{K}$  asociados a un divisor primo real  $V$  de  $\mathcal{K}$ . Si bien la diferencia entre  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_4$  depende del modelo compacto y no singular de  $X$  de  $\mathcal{K}$  que elijamos y no de  $\mathcal{K}$  (ver II.4). Esta diferencia es la siguiente:

1) Si  $V$  es el divisor primo real asociado a un abanico en  $\Sigma_2$ , entonces su ideal maximal  $m_V$  se contrae a un ideal primo de altura 1 en  $\mathcal{R}(X)$ ; es decir, el centro de  $V$  en  $X$  es una curva. Estos son los abanicos centrados en una curva de II.4.5.

2) Si  $V$  es el divisor primo real asociado a un abanico en  $\Sigma_4$ , entonces su ideal maximal  $m_V$  se contrae a un ideal maximal en  $\mathcal{R}(X)$ ; es decir, el centro de  $V$  en  $X$  es un punto  $a$ . Estos son los abanicos centrados en un punto de II.4.5.

De hecho, mediante explosiones podemos convertir un abanico  $F \in \Sigma_4$  en uno  $F_1 \in \Sigma_2$  (ver II.4). En el capítulo IV trataremos más en profundidad esta cuestión.

Finalmente, observar que en el caso de superficies todo abanico no trivial que no está asociado a un divisor primo real pertenece a  $\Sigma_3$  y esta propiedad es independiente del modelo de  $\mathcal{K}$  elegido.

**(3.30) Caso particular:** Demos una interpretación en términos de ramas de Puiseux en  $\mathbb{R}^2$  del conjunto de abanicos de  $\mathbb{R}(x, y)$ . Tal y como hemos indicado en 1.10 tomamos como modelo compacto y no singular  $\mathbb{S}^2$ , entonces en cada caso habrá que escoger la proyección estereográfica a fin de obtener centros finitos en  $\mathbb{R}^2$  para los elementos del abanico. Recordemos que  $\alpha \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}(x, y))$  está caracterizado por un par  $(a, \tilde{\alpha})$  donde  $a \in \mathbb{S}^2$  es el centro de  $\alpha$  en  $\mathbb{S}^2$  y  $\tilde{\alpha} \in \text{Spec}_r(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  se obtiene mediante la proyección de  $\alpha$  a  $\mathbb{R}^2$  seguida de una traslación al origen.

Sea  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  un abanico no trivial de  $\mathbb{R}(x, y)$ , supongamos escogida una proyección estereográfica de modo que todos los elementos de  $F$  tengan centro en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $F$  puede definirse en  $\mathbb{R}^2$  como sigue:

1) Si  $F \in \Sigma_2(\mathbb{R}(x, y))$ ,

$\alpha_1 = (a, (\Upsilon, c, 0, z))$	$\alpha_2 = (b, (\Upsilon', c', 0, z))$
$\alpha_3 = (a, (\Upsilon, c, 0, -z))$	$\alpha_4 = (b, (\Upsilon', c', 0, -z))$

donde se tiene que  $(a_1 + \delta t^N, a_2 + \xi(t))$  si  $\Upsilon = 1$  (resp.  $(a_1 + \xi(t), a_2 + \delta t^N)$  si  $\Upsilon = \infty$ ) y  $(b_1 + \delta' t^{N'}, b_2 + \xi'(t))$  si  $\Upsilon' = 1$  (resp.  $(b_1 + \xi'(t), b_2 + \delta' t^{N'})$  si  $\Upsilon' = \infty$ ), para  $0 < t < \varepsilon$ , son dos semiramas de Puiseux de la misma curva algebraica irreducible  $C \subset X$ , siendo  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ ,  $c = (\delta t^N, \xi(t))$  y  $c' = (\delta' t^{N'}, \xi'(t))$ .

2) Si  $F \in \Sigma_3(\mathbb{R}(x, y))$  (resp.  $F \in \Sigma_4(\mathbb{R}(x, y))$ ), entonces  $F$  es la traslación de un

abanico de  $\Sigma_3(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$  (resp. de  $\Sigma_4(\mathbb{R}((x, y))_{\text{alg}})$ ) a un punto  $a \in \mathbb{R}^2$ . Luego son todos los abanicos de los apartados 2 y 3 de 3.28 en cada punto de  $\mathbb{R}^2$ .

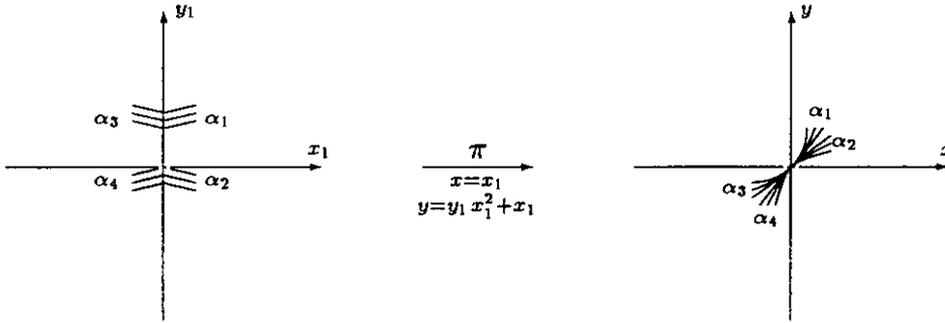
**Ejemplo 3.31** Como ilustración de la observación 3.30, tomemos un abanico  $F \in \Sigma_4(\mathbb{R}(x, y))$  y busquemos coordenadas  $(x_1, y_1)$  de tal modo que  $f \in \Sigma_2(\mathbb{R}(x_1, y_1))$ . Sea  $F$  el abanico

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ((0, 0), (1, (t, t), 2, z + 1)) & \alpha_2 &= ((0, 0), (1, (t, t), 2, -z)) \\ \alpha_3 &= ((0, 0), (1, (-t, -t), 2, z + 1)) & \alpha_4 &= ((0, 0), (1, (-t, -t), 2, -z)) \end{aligned}$$

Consideremos el isomorfismo de  $\mathbb{R}(x, y)$  dado por

$$x_1 = x, \quad y_1 = (y - x)/x^2$$

que, geoméricamente hablando, consiste en una explosión en  $(0,0)$ , seguida de una traslación al origen y de dos explosiones más en  $(0,0)$ . En la siguiente figura podemos ver que el efecto de esta transformación es como una especie de desingularización de  $F$ , además  $V_1$  se convierte en un anillo de valoración centrado en la curva  $\{x_1 = 0\}$ .



$$\alpha_1: \begin{cases} x_1 = t \\ y_1 = 1 + z \end{cases} \quad \alpha_2: \begin{cases} x_1 - 1 = t \\ y_1 - 1 = -z \end{cases}$$

$$\alpha_1: \begin{cases} x = t \\ y = t + t^2(1 + z) \end{cases} \quad \alpha_2: \begin{cases} x = t \\ y = t - t^2z \end{cases}$$

$$\alpha_3: \begin{cases} x_1 = -t \\ y_1 = 1 + z \end{cases} \quad \alpha_4: \begin{cases} x_1 = -t \\ y_1 = -z \end{cases}$$

$$\alpha_3: \begin{cases} x = -t \\ y = -t + t^2(1 + z) \end{cases} \quad \alpha_4: \begin{cases} x = -t \\ y = -t - t^2z \end{cases}$$

# Capítulo IV

## Aspectos algorítmicos

El teorema II.2.15 nos proporciona una caracterización de la basicidad a través de dos obstrucciones (una global y otra local) que pueden ser verificadas algorítmicamente. La justificación de esta afirmación constituirá el contenido de este último capítulo. Intentar desarrollar estas cuestiones de modo algorítmico nos obligará a restringirnos a semialgebraicos del plano, definidos sobre un cuerpo computable contenido en  $\mathbb{R}$ .

En la sección 1 propondremos un algoritmo (G) para verificar la obstrucción global a la basicidad; el cual resulta de la combinación de varios algoritmos ya conocidos ([CR], [AIRa], [CPRRR] y [Ka]). La sección 2 contiene un análisis detallado de la obstrucción local, con el cual pretendemos justificar el algoritmo (L) de verificación de la obstrucción local supuesta verificada la global; dicho algoritmo está inspirado en un algoritmo de separación local ([ABF]). La aplicación sucesiva de (G) y (L) da un procedimiento que decide sobre la basicidad de un semialgebraico. Además, estos algoritmos, en caso de detectar algún tipo de obstrucción, nos proporcionan también un abanico (según la descripción III.3.30) que obstruye la basicidad; este punto será desarrollado en la sección 3.

### 1 Obstrucción global

Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto semialgebraico,

$$(IV.1) \quad S = \bigcup_{k=1}^l \{f_{k1} > 0, \dots, f_{ks_k} > 0, g_k = 0\}$$

con  $f_{kl}, g_k \in \mathbb{R}[x, y]$ . En esta sección pondremos de manifiesto como determinar las condiciones preliminares (i.e.,  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  ó  $S$  cerrado) y la obstrucción global (i.e.,  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$ ) para que  $S$  sea abierto o cerrado básico de un modo algorítmico.

Un conjunto semialgebraico  $S$ , siempre que esté definido sobre un cuerpo computable  $K$  (i.e.,  $f_{kl}, g_k \in K[x, y]$ ), puede ser descrito algorítmicamente por métodos como la *descomposición algebraica cilíndrica* (C.A.D.) de Collins ([Co], 1975), o la descomposición de Coste y Roy ([CR], 1988), basada en el *lema de Thom* para codificar los números algebraicos reales. Por estos procesos se consigue una descripción topológica de  $S$ . Siguiendo la idea de Coste-Roy se han desarrollado algoritmos para curvas y superficies. Estos

algoritmos nos serán útiles para la determinación de la obstrucción global; en concreto usaremos los siguientes:

- Computación de la topología de un semialgebraico plano (ver [AlRa]); y
- Computación de las ramas analíticas globales de una curva real (ver [CPRRR]).

Combinando ambos obtenemos la descripción topológica de  $S$  y la descripción analítica de  $\partial_z S$ . Pero, debido a que la condición global involucra a  $\partial_z S^*$ , encontramos un dato algebraico que hace necesario otro algoritmo:

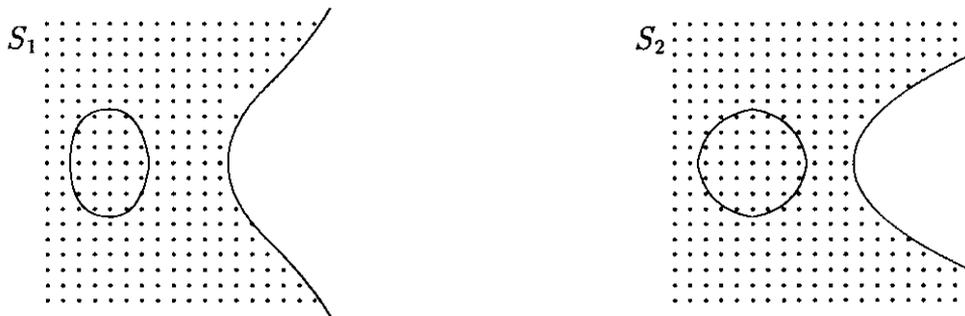
- Factorización de polinomios en  $\mathbb{R}[x, y]$  (ver [Ka]).

Veamos un ejemplo en el cual se refleja este dato algebraico de la obstrucción global.

**Ejemplo 1.1** Consideremos los siguientes semialgebraicos de  $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{y^2 + x - x^3 > 0\} \cup \{y^2 + x - x^3 > 0, x < 0\}$$

$$S_2 = \{x - y^2 - 1 < 0, (x + 1)^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$$



Los semialgebraicos  $S_1$  y  $S_2$  son topológicamente iguales. Pero,  $\partial_z S_1 = \{y^2 + x - x^3 = 0\}$  posee una única componente irreducible (que coincide con  $\partial_z S_1^*$ ), mientras que  $\partial_z S_2 = \{((x + 1)^2 + y^2 - 1)(x - y^2 - 1) = 0\}$  posee dos componentes irreducibles (de las cuales una coincide con  $\partial_z S_2^*$ ).

Es evidente que  $S_1$  presenta una obstrucción global y  $S_2$  no. □

**Observación 1.2** Las principales herramientas que usaremos son:

- (A1) *Los desarrollos racionales de Puiseux* introducidos por Duval (ver [Du]) que permiten computar las ramas complejas de una curva plana (en un punto) en una extensión algebraica minimal del cuerpo base.

Sea  $F(x, y) \in K[x, y]$  ( $K$  cuerpo ordenado) un polinomio libre de cuadrados y tal que  $f(0, 0) = 0$ ,

$$F = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m_j} a_{ij} x^j y^i = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^i, \text{ con } a_{ij} \in K, a_{00} = 0.$$

El primer paso es construir el diagrama de Newton  $E$  de  $F$  y su cierre convexo  $H$ . Para cada lado  $\Delta$  de  $H$  con pendiente  $\mu$  negativa, se escribe  $\mu = p/q$  con  $(p, q) = 1$ . Se define la ecuación característica de  $\Delta$  como

$$\phi(z) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{ij} z^{(j-j_0)/q} \in K[z],$$

donde  $j_0$  es el menor  $j$  tal que  $(i, j) \in \Delta = \{(i, j) : qi + pj = l\}$ . Para cada solución  $\eta$  de la ecuación característica, el algoritmo determina el primer coeficiente de un desarrollo de Puiseux racional de  $F(x, y)$  en  $K[\eta]$ . La sustitución racional es:

$$\begin{cases} x = \eta^{-u} x_1^q \\ y = x_1^p (\eta^v + y_1) \end{cases}$$

con  $(u, v)$  tal que  $up + vq = 1$  y  $(u, v) = (1, 0)$  si  $p = 1$ . Ahora hacemos la misma operación con  $F_1(x_1, y_1) = x_1^{-l} F(x, y) \in K[\eta][x, y]$ .

Continuando de este modo, codificaremos un  $s$ -desarrollo de Puiseux de  $F$  como una lista  $\pi = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ , donde  $\tau_i = (p_i, q_i, l_i, u_i, v_i, \eta_i)$  son los datos obtenidos en la etapa  $i$ -ésima. Obsérvese que bastaría computar la parte singular del desarrollo de Puiseux (i.e., un  $s$ -desarrollo a partir del cual  $q$  tiene valor constante 1 en todas las etapas) para poder distinguir todas las ramas de  $F$  en  $(0, 0)$ . A priori una cota para la suma de todos los  $s$  sería el índice de ramificación de  $F$  en  $(0, 0)$ .

Este argumento se adapta también a las singularidades de  $F$  en infinito.

Como consecuencia del carácter racional de estos desarrollos de Puiseux, si  $K \subset \mathbb{R}$ , las ramas reales de  $F$  en  $(0, 0)$  se corresponden con los  $s$ -desarrollos para los cuales  $\eta_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i$ .  $\square$

**(A2)** *La codificación de números algebraicos reales usando el lema de Thom, propuesta por Coste y Roy en [CR].*

Un código de Thom para un número algebraico  $\eta$  consiste en una upla  $(P, \varepsilon)$ , donde  $P$  es un polinomio que se anula en  $\eta$  y  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  es una lista de condiciones de signo para las derivadas de  $P$  con respecto a  $y$  en  $\eta$ ; por el lema de Thom existe un único  $\eta$  raíz de  $P$ , en el cual las condiciones de signo para las derivadas de  $P$  serían las dadas. Además, esta codificación nos permite ordenar de menor a mayor las raíces de  $P$ : sean  $\eta = (P, \varepsilon)$  y  $\eta' = (P, \varepsilon')$  y  $k = \min\{j : \varepsilon_{m-j} \neq \varepsilon'_{m-j}\}$ ; entonces, si  $\varepsilon_{m-k+1} = \varepsilon'_{m-k+1} > 0$  tenemos  $\eta < \eta'$  si y sólo si  $P^{(m-k)}(\eta) < P^{(m-k)}(\eta')$ ; y si  $\varepsilon_{m-k+1} = \varepsilon'_{m-k+1} < 0$  tenemos  $\eta < \eta'$  si y sólo si  $P^{(m-k)}(\eta) > P^{(m-k)}(\eta')$ .

Trabajaremos también con números algebraicos  $\eta$  obtenidos por sucesivas extensiones del cuerpo base; estos números vendrán codificados por

$$\eta = (\xi_1, \dots, \xi_r; P(x_1, \dots, x_r, y), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$$

donde  $P(\xi_1, \dots, \xi_r, \eta) = 0$  y  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$  son las condiciones de signo sobre las derivadas de  $P$  con respecto de  $y$ . Basta razonar inductivamente comenzando por  $r = 0$  que es el caso anterior (ver [CR]).

Para cualquiera de estos códigos es necesario computar el número de raíces de un polinomio  $P$  en las cuales los polinomios  $Q_1, \dots, Q_k$  tienen signos prefijados. Esto se hace mediante sucesiones de Sturm generalizadas como se propone en [CR], o mediante índices de Cauchy como se propone en [CPRRR].  $\square$

**(A3)** *Computación del polinomio mínimo de un desarrollo de Puiseux de un polinomio  $F$  dado.* Para este cálculo utilizamos una modificación de un algoritmo de factorización de polinomios propuesto por Kaltfen para obtener polinomios mínimos de ramas lisas (ver [Ka]).

Sea  $F \in K[x, y]$  un polinomio libre de cuadrados y mónico en la  $y$ . Sean  $n = \text{gr}_y F$ ,  $d = \text{gr}_x F$  y  $l \geq (n^2 - n)d$ . Tras una posible traslación al origen, calculamos un desarrollo de Puiseux de  $F$ ,

$$\begin{cases} x = \eta t^N \\ y = c_1 t^{n_1} + \dots + c_s t^{n_s} (1 + h(t)) \end{cases}$$

de manera que  $\xi(t) = c_1 t^{n_1} + \dots + c_s t^{n_s}$  contenga al menos el desarrollo de la parte singular de la rama y  $l \leq n_s$ . Para  $i = 0, \dots, n-1$ , calculemos los monomios de grado a lo más  $l$  de  $(\xi(t))^i$ , esto es  $\xi^{(i)}(t) = (\xi(t))^i \pmod{(t^{l+1})}$ . Sea,

$$\xi^{(i)}(t) = \sum_{k=in_1}^l a_k^{(i)} t^k$$

Así, para cada  $i = N, \dots, n-1$  (comenzando por  $i = N$ ) planteamos la siguiente ecuación

$$\xi^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-1} u_j (\eta t^N) \xi^{(j)}(t) = 0 \pmod{(t^{l+1})}$$

con  $u_j(x) = u_{j0} + u_{j1}x + \dots + u_{jd}x^d \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $\text{gr}(u_j) \leq d$ . Esta ecuación da lugar a un sistema de ecuaciones lineales con  $i(d+1)$  incógnitas.

Llamaremos ecuación  $k$ -ésima del sistema (para  $k \leq l$ ) a

$$a_k^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{p=0}^d a_{k-pN}^{(j)} u_{jp} = 0.$$

Obsérvese que la incógnita  $u_{jp}$  aparece en la ecuación  $k$ -ésima con coeficiente distinto de cero si y sólo si  $k \geq pN + jn_1$ . Por lo tanto, si el sistema anterior tiene solución, ésta es única. Además, el polinomio

$$g(x, y) = y^i + \sum_{j=0}^{i-1} u_j(x) y_j,$$

obtenido a partir de esta solución, divide a  $F$  y es irreducible si  $j$  es mínimo. Por otra parte, si para ningún  $i = N, \dots, n-1$  tiene solución el sistema, concluimos que  $F(x, y)$  es irreducible.  $\square$

## Verificación de la obstrucción global

A continuación describimos el modo (G) de verificar algorítmicamente la obstrucción global y las hipótesis preliminares a la basicidad. Fijemos un cuerpo computable  $K \subset \mathbb{R}$ .

(G) Dada una familia de polinomios  $f_{kl}, g_k \in K[x, y]$ , este algoritmo *determina si el semialgebraico*  $S \subset \mathbb{R}^2$  descrito por polinomios  $f_{kl}, g_k \in K[x, y]$  como en la expresión IV.1 es

- Cerrado, en cuyo caso verifica si hay obstrucción global;
- Abierto y no existen puntos aislados de  $\partial_x S$  contenidos en  $S$ , en cuyo caso verifica si hay obstrucción global.

(G1) *Computación de la topología de  $S$  y de las componentes analíticas globales de  $\partial_z S$*  (ver [AlRa] y [CPRRR]).

Sea  $F = \left(\prod_{k,l} f_{kl}\right) \left(\prod_k g_k\right) \in K[x, y]$ , salvo una reducción de factores cuadrados (calculamos el máximo común divisor de  $F$  y  $\partial/\partial y(F)$ , mediante el algoritmo de Euclides o mediante las subresultantes generalizadas) y un cambio de coordenadas, podemos suponer  $F$  libre de cuadrados y mónico en la  $y$ . Consideremos la curva  $C = \{F = 0\}$ , que evidentemente contiene a  $\partial_z S$ .

(G1.1) *Construcción de un grafo homeomorfo a  $C$ , el cual nos da una descomposición celular de  $\mathbb{R}^2$ .*

(G1.1.1) Sea  $D(x)$  el discriminante de  $F$  respecto de  $y$ , y sean  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$  sus raíces reales ( $a_i$  viene codificada como en (A2)), con  $a_1 < \dots < a_r$ .

(G1.1.2) Para cada  $i = 1, \dots, r$ , sean  $b_{i,1}, \dots, b_{i,m_i}$  las raíces reales de  $F(a_i, y)$ . Sean  $A_{i,j} = (a_i, b_{i,j})$ , para  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, m_i$ , los puntos de  $C$  (codificadas como en (A2)), que se corresponderán con los vértices del grafo.

(G1.1.3) Descripción algebraica local de  $C$  en  $A_{i,j}$ :

Trasladamos  $A_{i,j}$  al origen ( $x \rightarrow x' + a_i$ ,  $y \rightarrow y' + b_{i,j}$ ) y calculamos los desarrollos de Puiseux de ramas analíticas reales de  $C$  en  $A_{i,j}$  (usando el algoritmo (A1)). De este modo obtenemos dos familias ordenadas de semirramas  $\{\gamma_{i,j,1p} : p = 1, \dots, p_{ij}\}$  y  $\{\gamma_{i,j,2q} : q = 1, \dots, q_{ij}\}$  de  $C$  en  $A_{i,j}$ , las cuales contienen las semirramas a la izquierda y a la derecha, respectivamente, de  $A_{i,j}$ . Además, damos una biyección del conjunto de índices  $\{(1, 1), \dots, (1, p_{ij}), (2, 1), \dots, (2, q_{ij})\}$  que relaciona las dos semirramas de la misma rama analítica (ver [AlRa, 2] y [CPRRR, 4]).

(G1.1.4) Sean  $a_0 = -\infty$  y  $a_{r+1} = +\infty$ . Consideremos el intervalo  $I_{i'} = (a_{i'}, a_{i'+1})$ , para  $0 \leq i' \leq r$ . El número de componentes analíticas de  $C$  sobre cada  $I_{i'}$  es igual a la suma de las semirramas a la derecha de  $a_{i'}$  (o a la izquierda de  $a_{i'+1}$ ), por el teorema de la función implícita. Denotemos  $B_{i',h}$  el segmento  $h$ -ésimo de  $C$  sobre  $I_{i'}$ , donde  $h = 1, \dots, q_{i1} + \dots + q_{im_i}$  (escribamos  $h_i = q_{i1} + \dots + q_{im_i}$ ). Estos segmentos se corresponderán con las aristas del grafo. Codificamos el segmento  $B_{i,h}$  ( $i > 0$ ) como la semirrama que ocupa el lugar  $h$  a la derecha de  $a_i$  (ésta es  $\gamma_{i,j,2q_h}$ , donde para algún  $j$ ,  $h = q_{i1} + \dots + q_{i,j-1} + q_h$ ); y codificaremos  $B_{0,h}$  como la semirrama correspondiente a la izquierda de  $a_1$ .

En esta etapa tenemos construido un grafo homeomorfo a  $C$ , cuyos vértices son los puntos  $A_{i,j}$  y cuyas aristas son los segmentos  $B_{i',h}$ .

(G1.1.5) Para cada  $i = 1, \dots, r$ , sea  $T_{i,j'}$  ( $0 \leq j' \leq m_i$ ) el intervalo  $(b_{i,j'}, b_{i,j'+1})$  de la recta  $x = a_i$  (siendo  $b_{i,0} = -\infty$  y  $b_{i,m_i+1} = +\infty$ ). Añadimos los  $T_{i,j'}$  a nuestro grafo; con lo cual aumenta el número de aristas pero no el de vértices.

Cada componente conexa de

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left( \left( \bigcup B_{i',h} \right) \cup \left( \bigcup T_{i,j'} \right) \cup \left( \bigcup A_{i,j} \right) \right)$$

es un abierto de dimensión 2 de  $\mathbb{R}^2$  que se proyecta sobre algún  $I_{i'}$ . Denotemos  $C_{i',h'}$  ( $h' = 0, \dots, h_{i'}$ ) estas celdas de dimensión 2. Codificamos  $C_{i',h}$  ( $h > 0$ ) como la celda

superior de la arista  $B_{i'h}$  (esto es,  $(\gamma_{ij,2q_h}, +)$ ); y codificaremos  $C_{i'o}$  como la celda inferior de la arista  $B_{i'1}$ .

Por lo tanto, hemos obtenido una descomposición celular de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{R}^2 = \left( \bigcup_{(i,j)} A_{i,j} \right) \cup \left( \bigcup_{(i',h)} B_{i',h} \right) \cup \left( \bigcup_{(i,j')} T_{i,j'} \right) \cup \left( \bigcup_{(i',h')} C_{i',h'} \right),$$

en la cual tenemos diferenciada la curva  $C$  como la unión de la celdas 1-dimensionales etiquetadas  $B_{i',h}$  y las 0-dimensionales  $A_{i,j}$ .

**(G1.2) Computación de la topología de  $S$  y las componentes analíticas globales de  $\partial_z S$ .**

(G1.2.1) Por construcción, los polinomios  $f_{kl}, g_k$  tienen signo constante en cada celda de la descomposición; además, no pueden cambiar de signo en los  $T_{i,j'}$  que han sido introducidos por razones técnicas. Computamos estos signos como hemos indicado en (A2) para las celdas 0-dimensionales, y usando los desarrollos de Puiseux para celdas 1-dimensionales y 2-dimensionales (ver [AlRa, 2.4]).

(G1.2.2) Señalamos el conjunto de celdas correspondientes a  $S$  y a  $S^*$ ; así mismo, el conjunto de vértices y aristas correspondientes a  $\partial S = \overline{S} \setminus \text{Int}(S)$  y a  $\partial S^* = \overline{S^*} \setminus S^*$  ([AlRa]).

(G1.2.3) Computamos las componentes analíticas globales de dimensión 1 de  $C$ , y de éstas aquellas que contienen un abierto de  $\partial S$  y de  $\partial S^*$  (a las que nos referiremos como componentes analíticas globales de  $\partial S$  o de  $\partial S^*$ ). Para ello basta comenzar en un punto de un  $B_{i'h}$ , convenientemente elegido, y seguir la trayectoria del  $B_{i'h}$  de modo que al llegar a un vértice se continua por la semirrama correspondiente a la semirrama de entrada (ver [CPRRR, 4] para detalles técnicos).

(G1.2.4) Contamos el número de ramas analíticas de  $\partial_z S$  en cada vértice  $A_{i,j} \in \partial S$  y en infinito, y guardamos el desarrollo de Puiseux de estas.

(G1.2.5) Comprobamos si existe alguna celda común a  $S$  y a  $\partial S$ . En caso afirmativo el algoritmo responde *S NO ES ABIERTO* y pasamos a (G1.2.6). En otro caso, el algoritmo responde *S ES ABIERTO* y pasamos a (G2.1).

(G1.2.6) Comprobamos si todas las celdas de  $\partial S$  están contenidas en  $S$ . En caso afirmativo, el algoritmo responde *S ES CERRADO* y pasamos a (G2.1). En otro caso, responde *S NO ES CERRADO* y acaba.

**(G2) Verificación de la obstrucción global**

(G2.1) Comprobamos si existe alguna componente analítica global  $\Gamma$  de  $\partial S^*$  que interseque a  $S^*$ . En particular  $\Gamma$  formará parte de una componente irreducible de  $\partial_z S^*$ , con lo cual podemos concluir que  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) = 1$ . En este caso el algoritmo responde *NO HAY OBSTRUCCIÓN GLOBAL* y da dos semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de  $\partial_z S$  tales que  $\gamma_1 \subset \partial S^*$  y  $\gamma_2 \subset S^*$ .

En otro caso, pasamos a (G2.2) si  $S$  es abierto y a (G2.3) si  $S$  es cerrado.

(G2.2) Determinemos el conjunto  $D \subset \{f_{kl}, g_k\}$  de polinomios que se anulan en alguna de las componentes analíticas globales de  $\partial S$  y calculamos

$$H = \prod_{h \in D} h.$$

Si ningún vértice  $A_{i,j}$  pertenece a  $S$ , pasamos a (G2.3). En otro caso, para cada rama analítica global  $\Gamma$  de  $\partial S$  tal que  $A_{i,j} \notin \Gamma$ , elegimos un desarrollo de Puiseux en un punto y calculamos el polinomio mínimo  $f_\Gamma$  de este como divisor de  $H$  (obsérvese que al usar  $H$  baja el grado y con ello el número de test a realizar), usando (A3). Comprobamos si  $f_\Gamma(a_i, b_{i,j}) = 0$ .

Si existe alguna componente  $\Gamma$  tal que  $f_\Gamma(a_i, b_{i,j}) = 0$ , el algoritmo responde  $S$  NO ES ABIERTO BÁSICO y acaba. En otro caso pasamos a (G2.3).

(G2.3) Para cada rama analítica global  $\Gamma$  de  $C$  que interseque a  $S^*$  (en particular  $\Gamma$  no es una componente de  $\partial S^*$ , ya que en ese caso habríamos terminado en (G2.1)), elegimos una rama de Puiseux en un punto y calculamos su polinomio mínimo  $f_\Gamma$  como divisor de  $F$ . Comprobamos si  $f_\Gamma$  se anula en alguna componente analítica global de  $\partial S^*$ . Si existe algún  $\Gamma$  tal que  $f_\Gamma$  se anula en una componente analítica de  $\partial S^*$ , el algoritmo responde  $S$  NO ES BÁSICO y da dos desarrollos de Puiseux  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de  $f_\Gamma$  tal que  $\gamma_1$  pertenece a  $\partial S^*$  y  $\gamma_2$  pertenece a  $\Gamma \cap S^*$ .

En caso contrario, el algoritmo responde VERIFICADA LA OBSTRUCCIÓN GLOBAL.

## 2 Obstrucción local

Sea  $S$  un semialgebraico tal que  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$ . Recordamos que  $S$  es localmente básico en  $p$  si existen funciones  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}(X)$  tales que

$$S \cap U = \{f_1 > 0, \dots, f_s > 0\} \cap U$$

para algún entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $X$ .

En II.2.13 probabamos que, en estas condiciones, una obstrucción local en  $p$  se convierte en global tras las explosiones de la resolución de  $\partial_z S$  en  $p$ . Lo cual relaciona la obstrucción local con una propiedad de separación entre  $S$  y las componentes conexas de  $X \setminus (S \cup \partial_z S)$ , que puede ser comprobada algorítmicamente (ver [ABF]).

Para comenzar, pondremos de manifiesto, mediante ejemplos, las dificultades que se pueden presentar al estudiar la basicidad local de un semialgebraico una vez verificada la obstrucción global.

**Ejemplos 2.1** Los siguientes ejemplos en  $\mathbb{R}^2$  resumen todas las posibles situaciones en torno a un divisor excepcional de la desingularización de  $\partial_z S$  en un punto.

1) El semialgebraico  $S$  de la figura IV.2.1(1) es localmente abierto principal. De hecho, se verifica II.2.20; además, tras explotar el origen,  $\partial_z T^*$  subdivide la superficie transformada en bandas horizontales las cuales están ocupadas por  $T^*$  de modo alterno (la idea de tablero de ajedrez que apuntabamos en II.2.21).

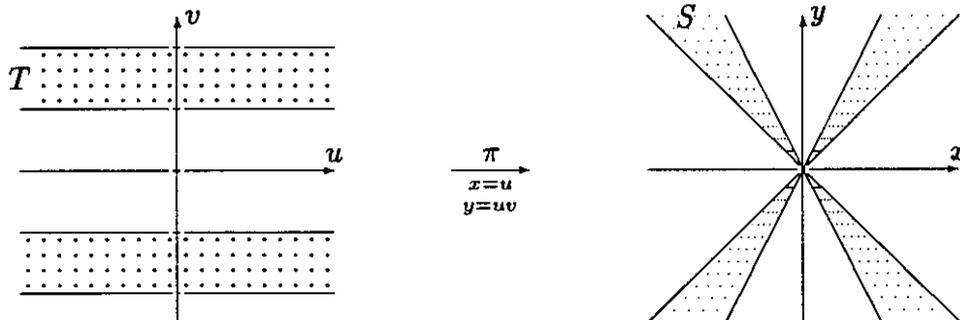


Figura IV.2.1(1)

2) El semialgebraico  $S$  de la figura IV.2.1(2) es localmente básico, pero no principal; puesto que  $S = S^*$  y  $\dim(\partial_z S \cap (\mathbb{R}^2 \setminus S)^*) = 1$ . Obsérvese que al explotar el origen  $\partial_z S$  queda desingularizada y el divisor excepcional no da obstrucción global.

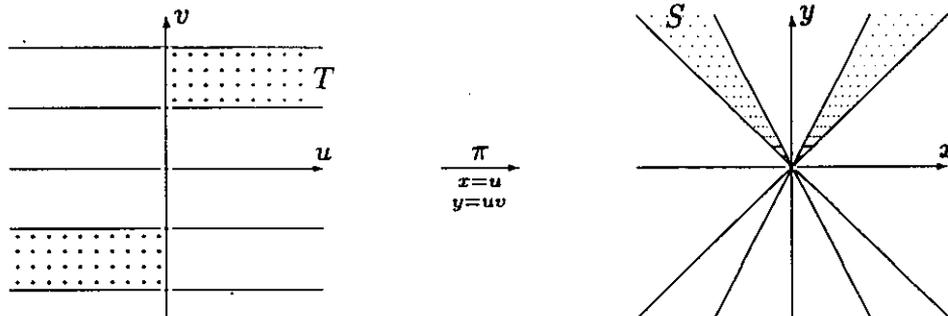


Figura IV.2.1(2)

3) El semialgebraico  $S$  de la figura IV.2.1(3) no es abierto básico (ver I.1.13).

Por otra parte, dada la simplicidad del ejemplo no es difícil encontrar explícitamente un abanico  $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ , según la descripción III.3.30, centrado en el origen de tal forma que  $\#(F \cap \bar{S}) = 3$ ; es decir,  $F$  no verifica el criterio de los abanicos de Bröcker.

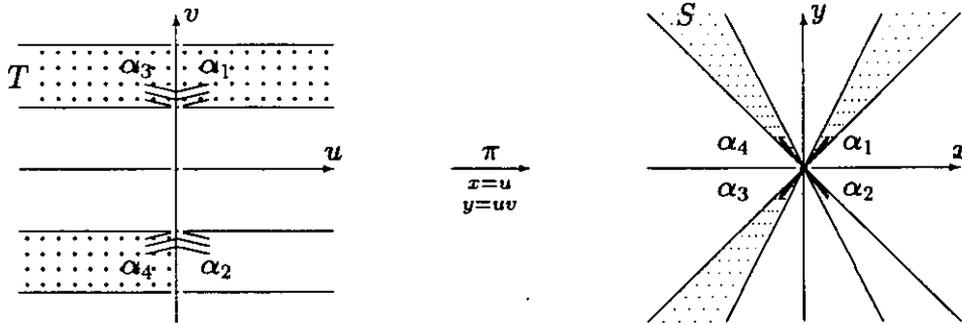


Figura IV.2.1(3)

$$\alpha_1 : \begin{cases} u = t \\ v = 1 + z \end{cases} \quad \alpha_2 : \begin{cases} u = t \\ v = -1 - z \end{cases} \quad \alpha_3 : \begin{cases} u = -t \\ v = 1 + z \end{cases} \quad \alpha_4 : \begin{cases} u = -t \\ v = -1 - z \end{cases}$$

$$\alpha_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t(1 + z) \end{cases} \quad \alpha_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t(-1 - z) \end{cases} \quad \alpha_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t(1 + z) \end{cases} \quad \alpha_4 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t(-1 - z) \end{cases}$$

A la vista de los ejemplos anteriores, parece que el hecho de que concurran un número par o un número impar de sectores de  $S$  en un punto  $p \in \partial S$  tiene algo que ver con la basicidad local. Sin embargo, no es así, como vemos a continuación.

**Ejemplos 2.2** Consideremos los ejemplos a) y b) de la figura IV.2.2, en un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$ . En ningún casos hay obstrucción global.

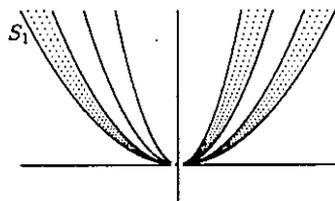


Figura IV.2.2(a):  
Hay obstrucción local

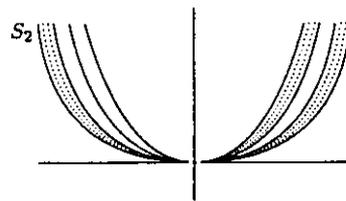


Figura IV.2.2(b):  
No hay obstrucción local

a) El semialgebraico  $S_1$  está dado, en un entorno del origen, por los 3 sectores señalados en la figura IV.2.2(a) delimitados por 4 curvas del tipo

$$\{y = x^2\}, \{y = 2x^2\}, \{y = 3x^2\}, \{y = 4x^2\}.$$

Tras la primera explosión del origen obtenemos un único punto singular en el divisor excepcional, en el cual se presenta la situación del ejemplo 2.1(3). Luego, tras una segunda explosión, la frontera de Zariski de  $S_1$  en el origen queda desingularizada y el divisor excepcional da una obstrucción global. Por lo tanto,  $S_1$  no es localmente básico en el origen.

b) El semialgebraico  $S_2$  está dado, en un entorno del origen, por los 3 sectores señalados en la figura IV.2.2(b) delimitados por 4 curvas del tipo

$$\{y = x^2\}, \{y = x^4\}, \{y = x^6\}, \{y = x^8\}.$$

Como no hay obstrucción global, pasemos a estudiar los divisores excepcionales de las sucesivas explosiones sobre el origen, hasta desingularizar este. Obsérvese que, siguiendo la desingularización de  $\partial_z S_2$  en el origen, las cuatro componentes de  $\partial_z S_2$  se separan cada una en una explosión diferente (por ejemplo, la curva de grado 2 se separa de las otras tres tras la segunda explosión, mientras que estas tres se intersecan en un punto del divisor excepcional en esta etapa de la resolución). Con lo cual, no es difícil comprobar que ningún divisor excepcional da una obstrucción global. Por lo tanto,  $S_2$  es localmente básico en el origen.

A continuación haremos un análisis de la obstrucción local inspirada en [ABF]. Pretendemos con esto justificar el algoritmo (L) que daremos después.

**Observación 2.3** Sea  $S$  un semialgebraico tal que  $\partial_z S \cap S = \emptyset$  y  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) < 1$ . Supongamos que tenemos una obstrucción local a la basicidad de  $S$  en un punto  $p \in \partial S$ ; evidentemente,  $p \in \text{Sing}(\partial_z S)$  y  $\partial_z S$  no es cruzamiento normal en  $p$ . Entonces, aplicando II.2.13, existe una componente irreducible  $D$  del divisor excepcional  $E$  de la resolución  $\pi : X' \rightarrow X$  de  $\partial_z S$  en  $p$ , tal que  $D$  da una obstrucción global a la basicidad de  $\pi^{-1}(S)$ .

La resolución  $\pi : X' \rightarrow X$  de  $\partial_z S$  en  $p$  consiste en una cadena finita de explosiones sobre  $p$ , pongamos  $\pi = \pi_r \cdots \pi_1$  donde  $\pi_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$  es la  $i$ -ésima explosión de la resolución. Sean, para cada  $i = 1, \dots, r$ ,  $\Delta_i = \pi_i \cdots \pi_1$  la etapa  $i$ -ésima de la resolución,  $p_{i-1} \in X_{i-1}$  el punto explotado en la  $i$ -ésima explosión siendo  $\Delta_{i-1}(p_{i-1}) = p$  y  $D_i = \pi_i^{-1}(p_{i-1})$  el divisor excepcional. Luego, existe  $\rho \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $D$  es la transformada estricta del divisor excepcional  $D_\rho$  de la  $\rho$ -ésima explosión. Además,  $D_\rho$  da una obstrucción global a la basicidad de  $S_\rho = \Delta_\rho^{-1}(S)$ , ya que las siguientes transformaciones, hasta  $X'$ , son explosiones en puntos que no alteran esta propiedad.

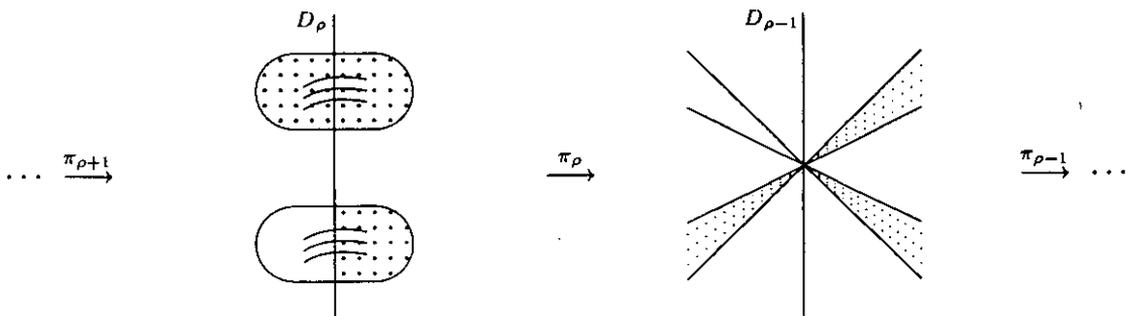


Figura IV.2.3

En esta situación (figura IV.2.3), es posible encontrar dos familias abiertas de arcos analíticos lisos  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset X_\rho$ , transversales a  $D_\rho$  y tales que los elementos de  $\mathcal{G}_1$  unen dos regiones contenidas en  $S_\rho$ , mientras que los elementos de  $\mathcal{G}_2$  unen una región contenida en  $S_\rho$  con otra fuera de  $S_\rho$ . Luego, proyectando en  $X$  tenemos:

1. al menos 4 ramas analíticas de  $\partial_z S$  en  $p$ ;
2. dos familias abiertas de arcos analíticos lisos,  $\mathcal{F}_1 = \Delta_\rho(\mathcal{G}_1)$  y  $\mathcal{F}_2 = \Delta_\rho(\mathcal{G}_2)$ , a través del punto  $p$

de tal forma que que su imagen inversa por  $\Delta_\rho$  se comporta como en la figura IV.2.3.

Obsérvese la analogía de este argumento con el utilizado en el ejemplo I.1.13. En este ejemplo servían como  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  dos familias de rectas por el origen.  $\square$

A continuación incluimos un estudio sobre las relaciones entre los arcos contenidos en las familias  $\mathcal{F}_i$ .

### Arcos con orden de contacto $\rho$

La principal herramienta con que contamos para verificar la obstrucción local son *las familias de arcos con orden de contacto  $\rho$* , introducidas en [ABF] para determinación de la separación local de dos semialgebraicos. Hemos introducido la terminología *arcos con orden de contacto  $\rho$* , que no aparece en [ABF], ya que describe perfectamente la situación geométrica.

Sea  $(C, p)$  un germen de curva analítica en  $(X, p)$ . Denotemos por

$$X_r \xrightarrow{\pi_r} X_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$$

la resolución estandar de la curva  $C$  en  $p$  extendida por explosiones en los puntos  $C_j \cap D_j$ , donde  $j$  es mayor ó igual que el número de explosiones necesarias para desingularizar  $C$ , siendo  $D_i$  el divisor excepcional que aparece en la explosión  $\pi_i$  y  $C_i$  la transformada estricta de  $C$  en  $X_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

**Definición 2.4** *Sea  $\gamma$  un arco analítico a través de  $p$ . El arco  $\gamma$  tiene orden de contacto  $\rho$  con el arco  $C$ , para algún entero  $\rho < r$  si verifica:*

- (a) *La transformada estricta  $\gamma_{\rho-1}$  de  $\gamma$  en  $X_{\rho-1}$  admite una parametrización del tipo*

$$\begin{cases} x = t \\ y = at + \cdots \end{cases}$$

- (b)  $C_{\rho-1} \cap \gamma_{\rho-1} = p_{\rho-1} \in D_{\rho-1}$ ;

- (c) *Las curvas  $C_{\rho-1}$  y  $\gamma_{\rho-1}$  tienen tangentes distintas en  $p_{\rho-1}$ .*

**Observación 2.5** Si la curva analítica  $\gamma$  tiene contacto  $\rho$  con la curva  $C$ , entonces  $C_\rho$  y  $\gamma_\rho$  son transversales a  $D_\rho$  y  $D_\rho \cap C_\rho \neq D_\rho \cap \gamma_\rho$ . Es decir, tras la explosión  $\rho$ -ésima los arcos  $C$  y  $\gamma$  se separan por primera vez.

En lo que sigue trabajaremos con gérmenes analíticos en  $(\mathbb{R}^2, (0, 0))$ , ya que el teorema de inmersión mínima de una singularidad algebraica (ver [BCR, 8.16.15]) nos permite ver

una singularidad de curva contenida en  $X$ , localmente, como una singularidad algebraicamente igual en  $\mathbb{R}^2$ . A continuación damos el enunciado del teorema que caracteriza los arcos con orden de contacto  $\rho$  mediante sus desarrollos de Puiseux.

Sea  $C$  una rama de una curva analítica real en  $(\mathbb{R}^2, 0)$  con desarrollo de Puiseux en un sistema de coordenadas adecuado,

$$\begin{cases} x = \varepsilon t^m \\ y = f(t) = P_0(t^m) + t^{k_1} P_1(t^{d_1}) + \dots + t^{k_s} P_s(t^{d_s}) \end{cases}$$

donde  $\varepsilon \in \{1, -1\}$ ,  $P_0, \dots, P_{s-1}$  son polinomios,  $P_s$  es una serie de potencias convergente de orden 0 y  $m \leq \text{ord}_t(P_0(t^m))$ . Entonces  $(m; k_1, \dots, k_s)$  son los exponentes característicos de  $C$  y la cadena de algoritmos de Euclides que calcula la sucesión de máximos comunes divisores

$$d_1 = (m, k_1), d_i = (d_{i-1}, k_i) = (d_{i-1}, k_i - k_{i-1}), i = 2, \dots, s$$

reconstruye el proceso de resolución de  $C$  en  $(0, 0)$  (ver [EC] o [BK]):

$$\begin{aligned} k_i - k_{i-1} &= \mu_{i,1} d_{i-1} + r_{i,2} \\ d_{i-1} &= \mu_{i,2} r_{i,2} + r_{i,3} \\ &\dots \\ r_{i,q(i)-2} &= \mu_{i,q(i)-1} r_{i,q(i)-1} + r_{i,q(i)} \\ r_{i,q(i)-1} &= \mu_{i,q(i)} r_{i,q(i)} \end{aligned}$$

donde  $k_0 = 0$  y  $d_0 = m$ . Claramente,  $r_{i,q(i)} = d_i$ .

En nuestro caso extendemos este proceso a curvas  $C$  no singulares, para las cuales una upla  $(1; k)$  juega el papel de exponentes característicos.

El proceso de resolución se reconstruye, obteniendo los desarrollos de Puiseux de las transformadas estrictas de  $C$ , como sigue:

- dividimos  $\mu_{1,1}$  veces por la variable  $x$ ,
- dividimos  $\mu_{1,2}$  veces por la variable  $y$ ,
- dividimos  $\mu_{1,3}$  veces por la variable  $x$ , etc.

y así siguiendo todas las filas de los  $s$  algoritmos de Euclides y haciendo una traslación al origen cada vez que sea necesario.

En consecuencia, el número de explosiones que se corresponden con el  $i$ -ésimo algoritmo es  $M_i = \sum_{j=1}^{q(i)} \mu_{i,j}$  y el número total de explosiones es  $M = M_1 + \dots + M_s$ .

Además, previamente a cada explosión, es posible reparametrizar de modo que la variable por la que hay que dividir sea del tipo  $t^h$  (ver [ABF, 2.4]). Teniendo en cuenta todo ello se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.6** ([ABF, 2.19]) *Sea  $C$  como antes y  $\gamma$  un arco analítico que tiene orden de contacto  $\rho$  con  $C$ . Entonces  $\gamma$  admite una parametrización de Puiseux irreducible*

$$\begin{cases} x = \delta t^n \\ y = g(t) = Q_0(t^n) + t^{h_1} Q_1(t^{d_1}) + \dots \end{cases}$$

tal que

(1) Los exponentes característicos  $(n; h_1, \dots, h_l)$  de  $\gamma$  están dados por:

(a) Si  $\rho \geq M$ , entonces  $l = s$ ,  $n = m$  y  $h_i = k_i$  para  $i = 1, \dots, s$ .

(b) Si  $\rho < M$ , entonces  $m = rn$ ,  $k_i = rh_i$  para  $i = 1, \dots, l-1$  con  $r = d_{l-1}/d'_{l-1}$ .

(2)  $\delta$  y  $g(t)$  verifican una de las siguientes condiciones:

(a)  $\delta = \varepsilon$  y el truncamiento de orden  $h_{l-1} + \rho'$  de  $g(t)$  coincide con el correspondiente truncamiento de  $f(t)$ .

(b)  $\delta = \varepsilon(-1)^{n/d'_{l-1}}$  y el truncamiento de orden  $h_{l-1} + \rho'$  de  $g(t)$  se obtiene de  $f(t)$

como sigue:  $Q_i(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x})$  si  $d'_i/d'_{l-1}$  es par

$Q_i(-\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x})$  si  $d'_i/d'_{l-1}$  es impar.

Donde,

$\rho' = \min(\mu_{l,1}, \rho - (M_1 + \dots + M_{l-1} + 1))$  si  $M_1 + \dots + M_{l-1} < \rho \leq M_1 + \dots + M_l$

$\rho' = \rho - (M_1 + \dots + M_s + 1)$  si  $\rho > M$

Además, los primeros coeficientes no determinados arriba son distintos.

**Observación 2.7** Nótese la coincidencia entre el resultado 2.3 y la relación entre exponentes y coeficientes en la descripción explícita de abanicos de  $\Sigma_A(\mathbb{R}(x, y))$  (i.e. abanicos centrados en un punto de  $\mathbb{R}^2$ ) en III.3.23. De hecho, estos abanicos, tras un número finito de explosiones se presentan centrados en el divisor excepcional.

**Observación 2.8** Anotamos aquí los algoritmos auxiliares que usaremos en (L):

(A4) Caracterización en  $X$  (esto es, sin realizar las explosiones) de los arcos con orden de contacto  $\rho$  con respecto a uno dado, para  $\rho$  previamente fijado (2.3).

(A5) Dado un arco analítico  $\gamma$  a través de  $0 \in \mathbb{R}^2$  y una región acotada por dos arcos analíticos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , decidir a partir de las respectivas parametrizaciones de Puiseux si  $\gamma$  cruza la región o no. Para ello basta comparar los exponentes y coeficientes de los respectivos desarrollos de Puiseux (ver [ABF, Solution to problem 2]).

## Verificación de la obstrucción local

A continuación daremos el algoritmo (L) de verificación de la obstrucción local. Este algoritmo requiere la realización previa del algoritmo (G) (o al menos de alguna de sus partes), ya que los datos iniciales se obtienen de (G).

El algoritmo (L), tal y como lo proponemos, consiste en una secuencia de test de basicidad local en cada punto singular de  $\partial S$ . Dado que el criterio de basicidad II.2.15 exige una superficie compacta, consideramos la compactificación de  $\mathbb{R}^2$  por un punto ([BCR, 3.5.3]), que denotamos  $\infty$ . Es posible realizar el mismo test en  $\infty$ , ya que (G) proporciona también una descripción anítica de  $\partial_z S$  en  $\infty$ .

(L) Dado  $N = \{p \in \partial S \cup \{\infty\} : \partial_z S \text{ tiene al menos 4 ramas en } p\} = \{p_1, \dots, p_m\}$  (G1.2.4 ó (G1)), verifica si  $S$  es localmente básico en cada  $p_k \in N$ .

(L1) Fijemos  $p_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  (comenzando por  $p_1$ ) y hagamos una traslación al origen. Calculemos los desarrollos de Puiseux racionales de las ramas  $Y^1, \dots, Y^q$  de  $Y = \partial_z S$  en  $O$  ((G1.2.4) ó (A1)).

(L2) Sea  $X_r \xrightarrow{\pi_r} X_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X$  la resolución estandar de  $Y$  en  $O$ . Para cada  $i = 1, \dots, r$ , sea  $D_i \subset X_i$  el divisor excepcional que aparece en la  $i$ -ésima explosión y sea  $Y_i^\alpha$  la transformada estricta de  $Y^\alpha$  en  $X_i$  ( $1 \leq \alpha \leq q$ ). Consideremos, para cada  $i = 1, \dots, r$ , la relación de equivalencia  $R_i$  en el conjunto  $\{1, \dots, q\}$  definida por:

$$\alpha R_i \beta \Leftrightarrow Y_i^\alpha \text{ y } Y_i^\beta \text{ cortan a } D_i \text{ en el mismo punto.}$$

(Esto quiere decir que  $Y^\alpha$  e  $Y^\beta$  tienen orden de contacto  $\rho > i$ , luego con (A4) podemos computar los elementos de cada clase de equivalencia.)

Sean  $\mathcal{P}_{i,j}$  ( $j = 1, \dots, l(i)$ ) estas clases de equivalencia. Para cada  $i = 1, \dots, r$  tenemos una partición  $\mathcal{P}_i$  del conjunto  $\{1, \dots, q\}$ . Obsérvese que estas particiones se refinan según crece el índice  $i$ .

(L2.1) Fijamos  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq r$  (comenzando por  $\rho = 1$ ) y elegimos un índice  $\alpha$  en  $\mathcal{P}_{\rho-1,j}$ , para cada  $j$ , tal que  $\mathcal{P}_{\rho-1,j}$  contenga al menos 4 elementos.

(L2.2) Determinamos la familia  $\mathcal{A}$  de arcos  $\gamma$  que tienen orden de contacto  $\rho$  con  $Y^\alpha$  (A4).

(L2.3) Comprobamos si  $\mathcal{A}$  contiene dos subfamilias abiertas  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  uniendo, respectivamente, dos regiones en  $S$  o una en  $S$  con otra fuera de  $S$  (A5).

Si existen tales familias de arcos, el algoritmo responde NO ES ABIERTO BÁSICO y da las familias  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ .

En otro caso comenzamos en (L2.1) con  $\rho + 1$  (si  $\rho = r$  vamos a (L3)).

(L3) El algoritmo responde  $S$  ES LOCALMENTE BÁSICO EN  $p_k$  y volvemos a (L1) fijando  $p_{k+1}$  (si  $k = m$  ir a (L4)).

(L4)  $S$  es LOCALMENTE BÁSICO EN TODO PUNTO.

### 3 Basicidad y abanicos

Sea  $S$  un semialgebraico descrito por polinomios  $f_{kl}, g_k \in K[x, y]$  como en la expresión IV.1. Los algoritmos (G) y (L) aplicados sucesivamente dan lugar a un algoritmo (B) de verificación de la basicidad de un semialgebraico. Por otra parte, la aplicación de (G) a  $S$  y a su complementario da lugar a un algoritmo (P) que decide si un semialgebraico es abierto o cerrado principal. Describimos a continuación estos algoritmos.

(B) Dada una familia de polinomios  $f_{kl}, g_k \in K[x, y]$ , este algoritmo *verifica si el semialgebraico  $S$  definido por estos polinomios es abierto o cerrado básico*. Además, en el caso de no ser básico, responde si es debido a uno de los siguientes hechos:

- $S$  no es ni abierto, ni cerrado.
- $S$  es abierto, pero algún punto aislado de  $\partial_z S$  está contenido en  $S$ .
- Hay obstrucción global, en cuyo caso da dos semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de  $\partial_z S$  tal que  $\gamma_1 \subset \partial S^*$  y  $\gamma_2 \subset S^*$ .
- Hay obstrucción local en algún punto  $p$ , en cuyo caso da dos familias abiertas  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  de arcos analíticos en  $p$  con orden de contacto  $\rho$  (fijo) tales que  $\mathcal{F}_1$  une dos regiones en  $S$  y  $\mathcal{F}_2$  une una región en  $S$  con otra fuera de  $S$ .

(G) Verificamos las condiciones preliminares y la obstrucción global.

(L) Verificamos la obstrucción local. □

(P) Este algoritmo tiene los mismos datos iniciales que (B) y *verifica si el semialgebraico  $S$  es abierto o cerrado principal*. Además, en el caso de no ser principal, responde si es debido a uno de los siguientes hechos:

- $S$  no es ni abierto, ni cerrado.
- $S$  es abierto, pero algún punto aislado de  $\partial_z S$  está contenido en  $S$ .
- Hay obstrucción global en  $S$ , en cuyo caso da dos semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de  $\partial_z S$  tal que  $\gamma_1 \subset \partial S^*$  y  $\gamma_2 \subset S^*$ .
- Hay obstrucción global en  $X \setminus S$ , en cuyo caso da dos semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de  $\partial_z S$  tal que  $\gamma_1 \subset \partial S^*$  y  $\gamma_2 \subset (X \setminus S)^*$ .

(P1) Realizamos (G1).

(P2) Aplicamos (G2) a  $S$ .

(P3) Aplicamos (G2) a  $X \setminus S$  (realmente a las celdas correspondientes a  $X \setminus S$ ). □

En consecuencia, tenemos los siguientes resultado para semialgebraicos de  $\mathbb{R}^2$  definidos por polinomios en  $K[x, y]$ , siendo  $K$  un cuerpo computable contenido en  $\mathbb{R}$

**Teorema 3.1** *Es posible determinar algorítmicamente si un semialgebraico  $S \subset \mathbb{R}^2$  es*

a) *Abierto o cerrado básico.*

b) *Abierto o cerrado principal.*

**Proposición 3.2** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un semialgebraico tal que  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) = 1$ . Entonces es posible dar algorítmicamente un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathbb{R}(x, y))$  tal que  $\#(F \cap \bar{S}) = 3$ .*

*Demostración:* En algoritmo (G) detecta la propiedad  $\dim(\partial_z S^* \cap S^*) = 1$  en (G2.1) o en (G2.3) y en ambos casos da dos semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de la misma componente irreducible de  $\partial_z S$  tales que  $\gamma_1 \subset \partial S^*$  y  $\gamma_2 \subset S^*$ .

Según la descripción III.3.30 de abanicos de  $\mathbb{R}(x, y)$ , las semirramas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  determinan de forma unívoca un abanico  $F \in \Sigma_2(\mathbb{R}(x, y))$ . Este  $F$  está formado por las dos elevaciones de ambas semirramas. Con lo cual, si  $\alpha_1, \alpha_3$  son las elevaciones de  $\gamma_1$  a  $\mathbb{R}(x, y)$ , dado que  $\gamma_1 \subset \overline{S^*} \setminus S^*$  tenemos a través del operador tilde

$$\alpha_1 \in \widetilde{S^*}, \quad \alpha_3 \in \widetilde{X \setminus S^*}$$

o viceversa.

Por otra parte, si  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  son las elevaciones de  $\gamma_2$  a  $\mathbb{R}(x, y)$ , como  $\gamma_2 \subset S^*$  que es abierto, tenemos aplicando el operador tilde que

$$\alpha_2, \alpha_4 \in \widetilde{S^*}.$$

En conclusión, dado que  $S$  y  $S^*$  son genéricamente iguales, tenemos  $\#(F \cap \widetilde{S}) = 3$ .  $\square$

**Observación 3.3** La descripción III.3.28 de los abanicos  $F \in \Sigma_4(\mathbb{R}(x, y))$  (i.e., centrados en  $(0, 0)$ ) nos permite asociar a éstos dos familias de arcos en  $(0, 0)$  parametrizadas por  $z \in (0, \epsilon)$ . De hecho, para cada  $z \in (0, \epsilon)$  fijo, los homomorfismos  $\psi_1$  y  $\psi_3$  (resp.  $\psi_2$  y  $\psi_4$ ) definen las dos semirramas del mismo germen de curva analítica  $\gamma_1^z$  (resp.  $\gamma_2^z$ ). Estas curvas  $\gamma_1^z$  y  $\gamma_2^z$  tienen orden de contacto  $\rho$ , para algún  $\rho$  y para todo  $z$  (basta comparar 2.6 con III.3.17).

Conservaremos la notación introducida en la sección 2 para la resolución estandar de un germen de curva en un punto y para los arcos con orden de contacto  $\rho$ . Sea  $F$  un abanico de  $\mathbb{R}(x, y)$  con centro  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  y sea  $C$  un germen de curva analítica en el origen. Para cada  $i = 1, \dots, r$ , denotemos por  $F_i$  el abanico obtenido de  $F$  después de  $i$  explosiones. El abanico  $F_i$  está formado por los transformados de los elementos de  $F$  en  $\mathcal{R}(X_i)$ .

**Definición 3.4** Un abanico  $F$  tiene orden de contacto  $\rho$  con la curva  $C$ , para un entero  $\rho > 0$ , si para todo  $z$ , los arcos  $\gamma_i^z$  ( $i = 1, 2$ ) asociados tienen orden de contacto  $\rho$  con la curva  $C$ .

**Teorema 3.5** Sea  $S$  un semialgebraico abierto. Supongamos que  $S$  no es localmente básico en un punto singular  $p$  de  $\partial_z S$ . Entonces, existe un método algorítmico para dar un abanico  $F$  de  $\mathbb{R}(x, y)$  centrado en  $p$  tal que  $\#(F \cap \widetilde{S}) = 3$ .

*Demostración:* Como  $S$  no es localmente básico en  $x$ , haciendo una traslación al origen y aplicando (L), obtenemos algorítmicamente las familias de arcos  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  con orden de contacto  $\rho$  con respecto a alguna componente analítica de  $\partial_z S$  en  $x$ , para algún  $\rho$ . Consideremos dos arcos  $\gamma_1 \in \mathcal{F}_1$ , que unirá dos regiones en  $S$ ; y  $\gamma_2 \in \mathcal{F}_2$ , que une una región en  $S$  con otra fuera de  $S$ .

Entonces  $(\gamma_1)_\rho$  y  $(\gamma_2)_\rho$  son arcos lisos que cortan al divisor excepcional  $D_\rho$  transversalmente en diferentes puntos  $p, q \in D_\rho$ ; además,  $\rho$  es la primera etapa del proceso de resolución de  $\partial_2 S$  en  $x$  en la que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se separan. Los arcos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  están parametrizados por

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \delta t^N \\ y = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} + f(t) \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = \delta' t^N \\ y = \sum_{i=1}^s d_i t^{n_i} + g(t) \end{cases}$$

donde  $\delta, \delta' \in \{1, -1\}$ ,  $c_i, d_i \in \mathbb{R}$  están determinados hasta el grado  $n_s$  (que depende de  $\rho$ ) según 2.3 como sigue: para  $i = 1, \dots, s$

$$\begin{cases} \delta' = \delta & \text{y } d_i = c_i \\ \delta' = (-1)^{N/d} \delta & \text{y } d_i = (-1)^{n_i/d} c_i \end{cases}$$

siendo  $d = \text{g.c.d.}(N, n_1, \dots, n_s)$ ;  $f(t) = at^m + \dots$  y  $g(t) = bt^m + \dots$  con  $a \neq b$ , donde  $m$  es el último exponente característico de  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Comprobaremos que, para cada par  $\eta, \eta' \in \{1, -1\}$  el abanico  $F_{\eta, \eta'}$  constituido por las familias de arcos

$$\gamma_1^z : \begin{cases} x = \delta t^N \\ y = \sum_{i=1}^s c_i t^{n_i} + (\eta z + a)t^m \end{cases} \quad \gamma_2^z : \begin{cases} x = \delta' t^N \\ y = \sum_{i=1}^s d_i t^{n_i} + (\eta' z + b)t^m \end{cases}$$

verifica que  $\#(F \cap \tilde{S}) = 3$ .

En efecto, elijamos una semirrama en  $p$  y otra semirrama en  $q$  del divisor excepcional  $D_\rho$  que aparece en la etapa  $\rho$ -ésima de la resolución. Estas semirramas determinan un abanico. De hecho, tenemos cuatro posibilidades de elección de semirramas, con lo cual hay cuatro abanicos, tal y como indica la figura siguiente.

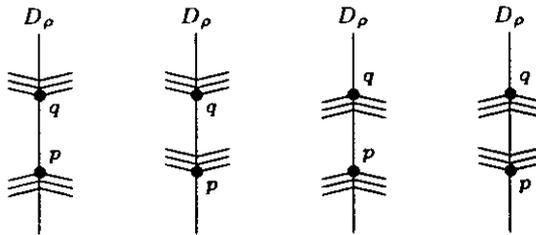


Figura IV.3.5

Tomando imágenes inversas por el homomorfismo birracional  $\pi_\rho \cdots \pi_1$  obtenemos precisamente los cuatro abanicos  $F_{\eta, \eta'}$ . Por otra parte, tal y como hemos construido los abanicos centrados en  $D_\rho$ , tiene que ser  $\#(F_{\eta, \eta'} \cap \tilde{S}) = 3$ . □

# Bibliografía

- [Ab] S. ABHYANKAR: Ramification theoretic methods in algebraic geometry, *Annals of Mathematics Studies* 43, Princeton 1959.
- [AB] F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA: More about signatures and approximation, *Geom. Dedicata* 50, 107-116 (1994).
- [ABF1] F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, E. FORTUNA: When is a distribution of signs locally completable?, *Can. J. Math.* 46, 449-473 (1994).
- [ABV] F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, M.P. VÉLEZ: An algorithmic criterion for basicness in dimensión 2, *Manus. Math.* 85, No. 1 (1994).
- [AGR] M.E. ALONSO, J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: On orderings in Real Surfaces, *J. Pure Appl. Alg.* 36, 1-14 (1985).
- [AlRa] M.E. ALONSO, M. RAIMONDO: The computation of the topology of a planar semialgebraic set, *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino* 46, No. 3 (1988).
- [ABR] C. ANDRADAS, L. BRÖCKER, J.M. RUIZ: Constructible sets in Real Geometry, *por aparecer*.
- [AR1] C. ANDRADAS, J.M. RUIZ: More on basic semialgebraic sets, in *Real Algebraic and Analytic Geometry*, 128-139, L.N.M. 1524, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1992.
- [AR2] C. ANDRADAS, J.M. RUIZ: Low dimensional sections of basic semialgebraic sets, *Illinois J. of Math.* 38, No. 2 (1994).
- [AR3] C. ANDRADAS, J.M. RUIZ: On the ubiquity of Lojasewicz example, *aparecerá en Michigan Math. J.*
- [AR4] C. ANDRADAS, J.M. RUIZ: Algebraic and analytic geometry of fans, *aparecerá en Memoirs of A.M.S.*
- [AR5] C. ANDRADAS, J.M. RUIZ: Algebraic versus analytic basicness, *aparecerá en W. de Gruyter, Berlin.*
- [AMcD] E. ATIYAH, T. McDONALD: Introducción al Algebra Conmutativa, *ed. Reverté*, 1980.
- [BR] R. BENEDETTI, J.J. RISLER: Real Algebraic and Semialgebraic Geometry, *Actualités Mathématiques*, Hermann 1990.

- [BCR] J. BOCKNAK, M. COSTE, M.F. ROY: Géométrie algébrique réelle, *Erg. Math.*, Bd.12, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1987.
- [Bou] N. BOURBAKI: XXX Eléments de Mathématique. Algèbre Commutative, Chapitre 6: Valuations, *Actualités Scientifiques et Industrielles* 1308.
- [BK] E. BRIESKORN, H. KNÖRRER: Plane algebraic curves, *Basel Boston*, Birkhäuser-Verlag, Stuttgart 1986.
- [Br1] L. BROCKËR: Characterization of fans and hereditarily pythagorean fields, *Math. Z.* 151, 149-163 (1976).
- [Br2] L. BROCKER: On basic semialgebraic sets, *Expo. Math.* 9, No. 4, 289-334 (1991).
- [BT] F. BROGLIA, A. TOGNOLI: Some improvements of approximation theorems, *por aparecer*.
- [B] G.W. BRUMFIEL: Partially Ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry, *Lecture Notes series* 17, Cambridge University Press 1979.
- [Co] G. COLLINS: Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition, *Lecture Notes in Comp. Sc.* 33 (1975).
- [CR] M. COSTE, M.F. ROY: Thom's Lemma, the coding of real algebraic numbers and the computation of the topology of semi-algebraic sets, *J. Symbolic Computation* 5, 121-129 (1988).
- [CPRRR] F. CUCKER, L.M. PARDO, M. RAIMONDO, T. RECIO, M.F. ROY: On the computation of the local and global analytic branches of a real algebraic curve, *Lecture Notes in Comp. Sc.* 365 (1989).
- [EC] F. ENRIQUES, O. CHISINI: Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 3 Vols., Bologna 1915,1918, 1924.
- [F] E. FORTUNA: Distribution des signes, *Mathematika* 38, 50-62 (1991).
- [FG] E. FORTUNA, M. GALBIATI: Une note sur la présentation des semi-algébriques de base, *Expo. Math.* 8, 371-378 (1990).
- [GR] J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: Anillos y cuerpos conmutativos, *Cuadernos de la UNED*, Madrid 1987.
- [Ka] E. KALTOFEN: Fast parallel absolute irreducibility testing, *J. Symbolic Computation* 1, 57-67 (1985).
- [Lm] T.Y. LAM: An introduction to Real Algebra, *Rocky Mountain J. Math.* 14, No. 4, 767-814 (1984).
- [L] S. LOJASIEWICZ: Ensembles semi-analytiques, *I.H.E.S., Bures-sur-Yvette; reproduct* No. 466.765, Ecole Polytechnique, Paris 1965.
- [Ma] C. MASSAZA: Sugli ordinamento di un campo estensione puramente trascendente di un campo ordinato, *Rend. Mat.* 6, No. 1, 202-218 (1968).
- [Pu] M.J. DE LA PUENTE: The compatible valuation rings of the coordinate ring of the real plane, *Contemp. Math.* 155 (1994).

- 
- [Rz] J.M. RUIZ: A note on a separation problem, *Arch. Math.*, Vol. 43, 422-426 (1984).
- [Sch] C. SCHEIDERER: Stability index on real varieties, *Invent. Math.* 97, 467-483 (1989).
- [To] A. TOGNOLI: Proprietà globali degli spazi analitici reali, *Ann. Mat. Pura Appl.* (Serie 4) 75, 143-218 (1967).
- [Z] O. ZARISKI: The reduction of the singularities of an algebraic surface, *Collected Papers* Vol. I.
- [ZS] O. ZARISKI, P. SAMUEL: *Commutative Algebra*, Vol. II, Princeton, London-Toronto: van Nostrand 1958.