UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa I

Imputación de costes y beneficios: Aportaciones desde la teoría de juegos cooperativos

Elisenda Molina Ferragut

Madrid, Septiembre de 1998

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa I

Imputación de costes y beneficios: Aportaciones desde la teoría de juegos cooperativos [1]

ELISENDA MOLINA FERRAGUT

Memoria para optar al grado de Doctora en CC. Matemáticas, realizada bajo la dirección del Dr. D. Juan A. Tejada Cazorla.

[1] Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto PB91–0389.

JUAN A. TEJADA CAZORLA, PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA I DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

CERTIFICA:

Que la presente memoria titulada:

Imputación de costes y beneficios:

Aportaciones desde la teoría de juegos cooperativos

ha sido realizada bajo mi dirección por Elisenda Molina Ferragut, Licenciada en Ciencias Matemáticas y constituye su Tesis para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Madrid a 29 de septiembre de mil novecientos noventa y ocho.

A mi familia y a mis amigos

Intentar enumerar a todos los que han hecho posible este trabajo sería imposible. Aún así, no quisiera por ello dejar de nombrar a aquellas personas que más directamente han influido en su desarrollo a lo largo de estos últimos años.

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Juan Tejada por la oportunidad que me ha dado de trabajar con él y enseñarme tanto como he necesitado. Sus consejos, su dedicación y su constante apoyo han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo, que de otro modo ni siquiera se habría iniciado.

Sin duda alguna este trabajo no habría sido posible sin las oportunidades que me brindó el disfrutar de una Beca de Formación de Personal Investigador en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense. Quiero agradecer a todos los miembros de este departamento el apoyo prestado durante el tiempo que pasé en él. En especial, al Profesor Javier Montero, investigador principal del proyecto al que se encontraba vinculada la beca, por la confianza depositada en mi trabajo desde el primer momento.

Entre otras muchas cosas, la beca me permitió realizar una estancia en la Facultad de Económicas y Administración de Empresas (Universidad de Tilburg, Holanda), donde tuve la gran suerte de trabajar con los Profesores Stef Tijs y Maurice Koster y con el Profesor Yves Sprumont, de la Universidad de Montreal. A ellos tres quiero agradecer no sólo lo que me enseñaron, sino también su apoyo y la ilusión que ponían en su trabajo, ilusión que supieron transmitirme. Así mismo, quiero extender mi agradecimiento al resto de miembros del Departamento de Económicas por todo el apoyo prestado durante los tres meses que pasé con ellos. Tampoco querría dejar de nombrar a las personas que hicieron de mi estancia en Holanda una experiencia entrañable, mis compañeros de piso Christine Holder y Paul Smit.

La beca también me permitió realizar una estancia en la Naval Postgraduate School (Monterey), donde por segunda vez tuve la suerte de trabajar al lado de personas de gran calidad, tanto a nivel científico como humano, los Profesores Guillermo Owen y Gordon McCormick. También quiero agradecer a todos lo miembros del Departamento de Matemáticas el apoyo prestado. En especial, al Profesor Guillermo Owen y a su mujer, María Owen, por el cariño recibido y la oportunidad que me dieron de conocer y aprender tanto como aprendí. Tampoco querría olvidar a Janet Barnes y toda su familia, que me acogieron como si de una más se tratara.

En cualquier caso, este trabajo es el resultado de todo lo que he aprendido en estos últimos años, por lo que quiero expresar mi agradecimiento a todos los "jugadores" que de una manera u otra me han ayudado.

A todos mis nuevos compañeros del Departamento de Estadística y Matemática Aplicada quiero agradecerles el apoyo y el ánimo incondicional que me han prestado en este último año, quizá el más difícil de todos. En especial, al grupo de Teoría de Juegos por su presencia y a mi compañero de despacho, el Profesor José Luis Ruiz, por sufrir pacientemente los "humos" que inundaban el despacho.

Sin embargo, que duda cabe, que este trabajo no podría haberse llevado a cabo sin la ayuda, colaboración y ánimos constantes que mi familia y mis amigos me han dado a lo largo de estos años. A ellos les dedico mi trabajo, en compensación por todo el tiempo que no les dediqué mientras lo realizaba. A la "mami" (mi abuela), a mis padres, a mis hermanos, Luis, Kati, Maiti y Fina, a mis cuñados, a mis sobrinos, Miriam, Mireya, Blanca y Jaime, y a todos mis amigos.

A todos aquellos que además de compañeros de trabajo han sabido ser amigos míos, los profesores Ana del Amo, Luis Sanz, Javier Montero, Javier Yáñez, Domingo Morales, Teresa Ortuño, Begoña Vitoriano y otros muchos, gracias.

Quiero acabar expresando mi más sincero agradecimiento a tres personas que me han ayudado en todo lo que estaba en su mano. Al profesor Antonio Alonso por todo el tiempo que ha empleado en darme ánimos y por el tiempo dedicado a este trabajo. Muchas gracias Antoñiiito. Me resulta imposible enumerar todo lo que quiero agradecer a la profesora M.Dolores Esteban. Simplemente muchas gracias Lola. Finalmente, a mi director de tesis también por su comprensión y paciencia ante los ataques de desesperación que en ocasiones he sufrido. Muchas gracias Juan.

Índice General

Notación

A lo largo de toda la memoria hemos denotado a los vectores por letras minúsculas en negrita; x_i, $i = 1, \ldots, n$, representan las coordenadas del vector $\mathbf{x} \in I\!R^n$. Las mayúsculas en negrita denotan matrices; a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, representan los elementos de la matriz $\mathbf{A}$. Los escalares, conjuntos y aplicaciones están impresos en la calidad usual del texto en estilo cursivo, reservando las letras mayúsculas para referirse a conjuntos. Generalmente se ha tratado de mantener el convenio de reservar la tilde para denotar todos aquellos conceptos referentes a juegos con tasas de participación.

Con el objetivo de facilitar la lectura de la memoria, a continuación se lista parte de la notación empleada. En primer lugar se muestra la notación común a todos los capítulos, para, a continuación, detallar la notación específica de cada uno de ellos.

N	Conjunto de jugadores $\{1, \ldots, n\}$.
$S \subseteqq N$	Coalición (nítida) de N.
$S \subseteq T$	S contenido o igual que T.
$S \subsetneq T$	S contenido estrictamente en T.
$s = \|S\|$	Cardinal del conjunto S.
$\|x\|$	Valor absoluto de $x \in I\!R$.
$x(S)$	Con $S \subseteq N$, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, denota $\sum_{i \in S} x_i$.
$\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$	Coalición con (infinitas) tasas de participación de N.
$\mathrm{Sop}(\boldsymbol{\tau})$	Soporte de la coalición $\boldsymbol{\tau}$, $\{i \in N \,/\, \tau_i > 0\}$.
$(t_i, \boldsymbol{\tau})$	$(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, t_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n)$.
$\boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}'$	$\tau_i \leq \tau_i' \;\; \forall \; i = 1, \ldots, n$.
$\boldsymbol{\tau} < \boldsymbol{\tau}'$	$\boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}'$ y $\tau_i < \tau_i'$ para algún $i \in N$.
$\mathcal{P}(N)$	Partes de N.
(N, v)	Juego cooperativo con utilidad transferible, N es el conjunto de jugadores y $v : \mathcal{P}(N) \to I\!R$ es la función característica del juego.
$(N, \widetilde{v})$	Juego cooperativo con utilidad transferible y coaliciones con (infinitas) tasas de participación, N es el conjunto de jugadores y $\widetilde{v} : [0,1]^n \to I\!R$ es la función característica del juego.

G^n	Conjunto de todos los juegos TU n–personales, $G = \bigcup_{n \in I\!N} G^n$.
$F\Gamma^n$	Conjunto de todos los juegos TU n–personales con tasas de participación, $F\Gamma = \bigcup_{n \in I\!N} F\Gamma^n$.
$PI(v) \subseteq I\!R^n$	Conjunto de preimputaciones del juego (N, v).
$PI(\widetilde{v}) \subseteq I\!R^n$	Conjunto de preimputaciones del juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$.
$I(v) \subseteq I\!R^n$	Conjunto de imputaciones del juego (N, v).
$I(\widetilde{v}) \subseteq I\!R^n$	Conjunto de imputaciones del juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$.
IG^n	Conjunto de todos los juegos TU n–personales con conjunto de imputaciones no vacío, $IG = \bigcup_{n \in I\!N} IG^n$.
$IF\Gamma^n$	Conjunto de todos los juegos TU n–personales con tasas de participación tales que $I(\widetilde{v}) \neq \emptyset$, $IF\Gamma = \bigcup_{n \in I\!N} IF\Gamma^n$.
$F\Gamma_1^n$	Subconjunto de $F\Gamma^n$ compuesto por todos los juegos $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma^n$ tales que $\widetilde{v}$ es integrable en $[0,1]^n$, $F\Gamma_1 = \bigcup_{n \in I\!N} F\Gamma_1^n$.
$IF\Gamma_1^n$	Subconjunto de $IF\Gamma^n$ compuesto por todos los juegos $(N, \widetilde{v}) \in IF\Gamma^n$ tales que $\widetilde{v}$ es integrable en $[0,1]^n$, $IF\Gamma_1 = \bigcup_{n \in I\!N} IF\Gamma_1^n$.
$C(v)$	Corazón del juego (N, v). También se denotará por core(v).
$C(\widetilde{v})$	Corazón del juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$. También se denotará por core(v).
Θ^n	Conjunto de todas las posibles permutaciones de N.
$\mathbf{x}^\theta$	Vector de pago marginal asociado a $\theta \in \Theta^n$.
$\mathcal{W}(v)$	Conjunto de Weber del juego (N, v).
$\text{Con}\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p\}$	Envoltura convexa de los puntos $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^p$.
$\text{int}(A)$	Interior del conjunto A.
$\partial f(\mathbf{x})$	Subdiferencial (conjunto de subgradientes) de la función $f : A \to I\!R$ en $\mathbf{x} \in A$.

Capítulo 2

$e(S,\mathbf{x})$	$v(S) - x(S)$, exceso de la coalición $\emptyset \neq S \subsetneq N$ con respecto a $\mathbf{x}$.
$\overline{E}(v)$	$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} e(S,\mathbf{x})$, exceso medio asociado a las coaliciones correspondiente a $\mathbf{x}$ en el juego (N,v).
$\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x})$	$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$, exceso de la coalición $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$ con respecto a $\mathbf{x}$.
$\overline{E}(\widetilde{v})$	$\int_{[0,1]^n} \widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau}$, exceso medio asociado a las coaliciones correspondiente a $\mathbf{x}$ en el juego $(N,\widetilde{v})$.
$w(i,\mathbf{x})$	$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} e(S,\mathbf{x})$, exceso del jugador $i \in N$ con respecto a $\mathbf{x}$ en el juego (N,v).
$\widetilde{w}(i,\mathbf{x})$	$\int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau}$, exceso del jugador $i \in N$ con respecto a $\mathbf{x}$ en el juego $(N,\widetilde{v})$.
$\theta(\mathbf{x})$	Vector de excesos de los jugadores con respecto a $\mathbf{x}$.
$\lambda(v)$	Prenucléolo mínimo cuadrático del juego (N,v).
$\Lambda(v)$	Nucléolo mínimo cuadrático del juego (N,v).
$\mathcal{E}(\widetilde{v})$	Solución igualadora del juego $(N,\widetilde{v})$.
$L(\widetilde{v})$	Solución lexicográfica del juego $(N,\widetilde{v})$.
$\Omega = (\Pi, F)$	Dominio del nucléolo general.
$\mathcal{N}(\Pi, F)$	Nucléolo general.
$\mathcal{LC}(\Pi, F)$	Mínimo corazón general.
$(c,\boldsymbol{\alpha})$	Problema de asignación de costes, $c : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ es la función de coste y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)$ es el vector de demandas.
$D(\boldsymbol{\alpha})$	$\prod_{i=1}^{m} [0,\alpha_i]$.
CA^m	Conjunto de todos los problemas de asignación de costes asociados a la producción de $m \in \mathbb{Z}_+$ bienes sin coste fijo ($c(\mathbf{0}) = 0$) tales que c es de clase 1 (diferenciable con continuidad) en $D(\boldsymbol{\alpha})$, $CA = \bigcup_{m \geq 1} CA^m$.

$p : CA \to \bigcup_{m\geq 1} I\!R^m$	Mecanismo de asignación de costes.
$\gamma : [0,T] \to D(\boldsymbol{\alpha})$	Curva de demanda.
$P : I\!R^m \times I\!R^m_+ \to I\!R$	Función de pago.
$H(c,\boldsymbol{\alpha})$	Conjunto de los vectores de precios unitarios $\mathbf{p} \in I\!R^m$ que recuperan costes al final del período de acuerdo con la función de coste c y el vector de demandas $\boldsymbol{\alpha}$.
$LC(c,\boldsymbol{\alpha})$	Corazón mínimo del problema de asignación de costes $(c,\boldsymbol{\alpha})$.
$RLC(c,\boldsymbol{\alpha})$	Corazón mínimo inverso del problema de asignación de costes $(c,\boldsymbol{\alpha})$.
$(M,\widetilde{v}_c)$	Juego de ganancias asociado a $(c,\boldsymbol{\alpha})$.
$\widetilde{w}_i(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p})$	Riesgo promedio asociado a la producción del producto i, cuando se han asignado precios unitarios $\mathbf{p}$, $i = 1,\ldots,m$.
p^e	Sistema igualador de precios.

Capítulo 3

$\mathbf{b}^i$	Vector de recursos iniciales del jugador $i \in N$.
$\mathbf{b}(S)$	$\sum_{i\in S} \mathbf{b}^i$, vector de recursos de la coalición S.
$\mathbf{A}$	Matriz de producción.
$\mathbf{c}$	Vector de beneficios asociados a la venta de los productos.
$Op(N)$	Conjunto de óptimos del dual del problema de programación lineal asociado al valor de la coalición total N.
$DP(v)$	Conjunto de pagos según precios sombra:

$$DP(v) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in I\!R^n \;/\; \varphi_i = \sum_{k=1}^{m} y_k^* b_k^i \;,\;\; i = 1,\ldots,n,\;\; \boldsymbol{y}^* \in Op(N) \right\}.$$

B_k^q	Lote q, $q = 1,\ldots,d_k$, de recurso k, $k = 1,\ldots,m$, disponible en el mercado.

(N, u_k^q)	Juego simple que describe el control sobre el lote B_k^q.
V_k^q	Conjunto de jugadores veto del juego simple (N, u_k^q).
$\mathcal{MW}(u_k^q)$	Conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego simple (N, u_k^q).
$\mathcal{B}(u_k^q)$	Conjunto de coaliciones de bloqueo del juego simple (N, u_k^q).
$I_k(S)$	$\{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, S \cap V_k^q \neq \emptyset \,\}$.
$J_k(S)$	$\{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, S \in \mathcal{B}(u_k^q) \,\}$.
$(N, c_{\boldsymbol{\xi}})$	Juego de coste asociado a $\boldsymbol{\xi} \in Op(N)$:

$$c_{\boldsymbol{\xi}}(S) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{q \in J_k(S)} B_k^q , \quad \forall \ S \subseteq N\,,\ S \neq \emptyset\,,$$
$$c_{\boldsymbol{\xi}}(\emptyset) = 0\,.$$

$B_k^q(S)$	$B_k^q u_k^q(S)$, $\ \forall\ S \subseteq N$.
$B_k(S)$	$\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q(S)$, cantidad total de recurso k, de que dispone la coalición S, $k = 1, \ldots, m$.
$\mathbf{B}(S)$	$\big(B_1(S), \ldots, B_m(S)\big)$, vector de recursos de la coalición S.
$CDP(v)$	Conjunto de pagos según precios sombra y repartos equilibrados:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{z} \in I\!R^n \quad / & z_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \xi_k^q(i) \right) y_k^* , \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \\ & \mathbf{y}^* \in Op(N), \\ & \boldsymbol{\xi}_k^q \in C(u_k^q)\,, \quad \forall\, q = 1, \ldots, d_k\,; \quad \forall\, k = 1, \ldots, m. \end{array} \right\}.$$

(rN, w^r)	r–replicación del juego de producción lineal (N, v), $r \in \mathbb{Z}_+$.
(rN, v^r)	r–refinamiento del juego de producción lineal (controlado por comités) (N, v), $r \in \mathbb{Z}_+$.
$q_i(S)$	Número de jugadores de tipo i que contiene $S \subsetneq rN$, $\ \forall\ i \in N$.

$\tau_i^r(S)$ Proporción de jugadores de tipo i que contiene $S \subsetneq rN$, $\forall\ i \in N$.

$\mathcal{R}(u_k^q)$ Refinamiento del juego simple (N, u_k^q), $\{(rN, u_k^{qr}),\ r \in \mathbb{Z}_+\}$:

$$u_k^{qr}(S) = \frac{1}{r} \max_{P \in \mathcal{MW}(u_k^q)} \min_{i \in P} q_i(S)\,, \quad \forall\ S \subsetneq rN\,, \quad \forall\ r \in \mathbb{Z}_+\,.$$

$B_k^r(S)$ $\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q u_k^{qr}(S)$, cantidad total de recurso k, $k = 1, \ldots, m$, de que dispone la coalición $S \subsetneq rN$, en el juego r–refinado (rN, v^r).

M^r Conjunto de coaliciones con (finitas) tasas de participación:

$$\left\{\, \mathbf{x} \in I\!R^n \ /\ x_i = \frac{q_i}{r}\,,\ q_i \in \mathbb{Z}\,,\ 0 \leq q_i \leq r\,,\ i = 1, \ldots, n \,\right\}.$$

$(N, \widetilde{u}_k^{qr})$ Juego con (finitas) tasas de participación asociado a (rN, u_k^{qr}) a partir de la correspondencia $\tau^r : rN \to M^r$, $\boldsymbol{\tau}^r(S) = (\tau_1^r(S), \ldots, \tau_n^r(S))$.

$(N, \widetilde{u}_k^q)$ Juego simple con infinitas tasas de participación que genera el refinamiento:

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \max_{P \in \mathcal{MW}(u_k^q)} \min_{i \in P} \tau_i\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

$(N, \widetilde{v}^r)$ Juego con (finitas) tasas de participación asociado a (rN, v^r) a partir de la correspondencia $\tau^r : rN \to M^r$.

$\widetilde{\mathcal{R}}(v)$ Refinamiento de (N, v), $\{\, (N, \widetilde{v}^r),\ r \in \mathbb{Z}_+ \,\}$.

$(N, \widetilde{v})$ Juego de producción lineal (controlado por comités) con infinitas tasas de participación que genera el refinamiento.

$(S, v_S^{\mathbf{x}})$ Juego reducido (Davis–Maschler) con respecto a S y a $\mathbf{x}$.

$\mathbf{t}^j,\ j \in J$	Vectores adicionales de recursos en un juego de producción lineal extendido.
d^j	Precio de compra de $\mathbf{t}^j$, $j \in J$.
T	Conjunto de paquetes de acciones disponibles en el mercado en un juego de producción lineal controlado por comités extendido.
$p(t)$	Precio de compra del paquete de acciones $t \in T$.
D_k^ℓ	Lote adicional de recurso k, $\ell = 1, \ldots, \ell_k$, $k = 1, \ldots, m$.
$(N, w_k^\ell[T'])$	Juego simple que describe el control sobre el lote D_k^ℓ que adquiere una coalición cuando compra el paquete de acciones $T' \subseteq T$.
$(N, u_k^q[T'])$	Juego simple que describe el control sobre el lote B_k^q que adquiere una coalición cuando compra el paquete de acciones $T' \subseteq T$.
$(N \cup T, \overline{v})$	Juego de producción lineal controlado por comités (usual) asociado a un juego extendido.

Capítulo 4

$\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$	Problema del árbol fijo de conexión (problema FTC).
$G = (V, E)$	Árbol con un único vértice raíz, r.
$V = N \cup \{r\}$	Vértices del árbol, N es el conjunto de usuarios de la red de conexión.
E	Conjunto de arcos del árbol.
$c : E \to I\!R$	Función de coste del modelo.
P_i	Único camino en el árbol G del vértice raíz a i, $\forall\ i \in N$.
$\pi(i)$	Predecesor (o padre) de i en el árbol G, $\forall\ i \in N$.
e_i	Arco $(\pi(i), i)$, $\forall\ i \in N$.
$(V, \preceq)$	Relación de precedencia sobre el conjunto de vértices, $i \preceq j$ si y sólo si $i \in P_j$.
$(E, \preceq)$	Relación de precedencia sobre el conjunto de arcos, $e_i \preceq e_j$ si y sólo si $i \in P_j$.
$T \subseteq V$	Tronco de G, conjunto de vértices cerrado bajo la relación de precedencia $(V, \preceq)$.

$c(T)$	Coste asociado al tronco T de G, denota $\sum_{i \in T \setminus \{r\}} c(e_i)$.
$\ell(T)$	Conjunto de arcos que parten de T, $e = (i,j) \in E$ tal que $i \in T$ y $j \notin T$.
$F(i)$	Conjunto de sucesores del vértice i, $\{j \in N \,/\, j \succeq i\}$.
$V_k \subseteq V$	Subconjunto de vértices $\{i \in N \,/\, \lvert F(i)\rvert = k\}$, $k = 1, \ldots, n$.
$(N, c_{\mathcal{G}})$	Juego de coste generado por $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$.
T_S	Mínimo tronco que contiene a todos los miembros de S, $\forall\ S \subseteq N$.
(N, u_S^*)	Juego dual de unanimidad respecto de la coalición S.
(B_e, V_e)	Rama de G enraizada en $e = (i,j) \in E$, subárbol de G generado por el conjunto de vértices $F(j) \cup \{i\}$.
$\mathcal{S}_G$	Partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas.
$\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$	Partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$.
$\mathcal{W}(\mathcal{G})$	Conjunto de pesos admisibles (tasas de contribución), $\boldsymbol{\omega} \in I\!R^n$, para $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$.
$\alpha_{\boldsymbol{\omega}}(S)$	Coste medio ponderado (con respecto a $\boldsymbol{\omega}$) bajo $\mathcal{G}$ de la coalición $S \neq \emptyset$,

$$\alpha_{\boldsymbol{\omega}}(S) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i \in S} c(e_i)}{\omega_S}, & \text{si } \ \omega_S := \sum_{i \in S} \omega_i > 0\,, \\ \infty\,, & \text{si } \ \omega_S = 0\,. \end{cases}$$

$\mathcal{G}_T$	Contracción de $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ por T.
$\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$	Solución $\boldsymbol{\omega}$–igualitaria restringida del problema $\mathcal{G}$.
$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$	$\{T_1^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, T_p^{\boldsymbol{\omega}}\}$, partición de N inducida por el algoritmo que define $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$.
$\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$	Reparto raíz–casa asociado a $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$.
$\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$	$\{A_1^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, A_K^{\boldsymbol{\omega}}\}$, partición de N definida por el tiempo de finalización inducida por $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$.

$\xi^{\mathcal{G}}$	Aplicación que asigna a cada $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$ la solución ω–igualitaria restringida del problema $\mathcal{G}$.
$\mathcal{F}$	Conjunto de todos los problemas SFTC.
ξ^e	Regla igualitaria restringida de asignación de costes.
ω	Sistema admisible de pesos, aplicación $\omega : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ \|N\|<\infty}} \mathbb{R}^n_+$ que verifica $\omega(G, c, N) \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$ para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$.
ξ^ω	Regla ω–igualitaria restringida de asignación de costes.
$\mathcal{M}$	Clase de procedimientos de asignación de costes en $\mathcal{F}$ compuesta por todos aquellos procedimientos de asignación de costes que verifican las propiedades de monotonicidad con respecto a la función de coste y pertenencia al corazón.
$\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}$	Reparto de costes raíz–casa asociado al vector de tasas de contribución γ y a la partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas $\mathcal{S}$.
$\mathbf{\Phi}^\omega$	Valor de Shapley (dual) ponderado asociado al sistema de pesos $\omega = (\boldsymbol{\lambda}, \Sigma)$.
$\widetilde{\mathcal{G}} = \langle \mathcal{G}, \widetilde{C}, d \rangle$	Problema SFTC con tasas de participación y con pérdidas.
$\widetilde{C}$	$(\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_n)$, $\widetilde{C}_i : [0,1] \to [0, c(e_i)]$, $i = 1, \ldots, n$, función de coste extendido.
d	$(d_1, \ldots, d_n)$, $d_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, n$, función de pérdida.
$(N, c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$	Juego de coste con tasas de participación generado por $\widetilde{\mathcal{G}}$.
$(N, c^{\widetilde{s}}_{\mathcal{G}})$	$t_{\widetilde{s}}$–extensión de $(N, c_{\mathcal{G}})$ definida por la conorma triangular $\widetilde{s}$.
$(N, \omega c_{\mathcal{G}})$	Extensión de Cornet del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$.
$\mathcal{F}_*$	Problemas FTC que verifican todas las propiedades de un problema estándar con la posible excepción de la propiedad (ii) (del vértice raíz parte un único arco).
$\lambda(G, c, N)$	Prenucléolo mínimo cuadrático del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$ generado por $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}_*$.

Prólogo

La Teoría de Juegos se ocupa de la modelización y análisis matemático de situaciones de conflicto, total o parcial, en las que intervienen dos o más decisores racionales (*jugadores*), de cuya interacción depende el resultado final de la situación (*juego*). Lo que cada jugador obtiene, no sólo depende de su propia decisión, sino que también depende de las decisiones tomadas por el resto de los participantes.

Si bien los trabajos de Cournot (1838), sobre el modelo del duopolio, y de Zermelo (1913), sobre el juego del ajedrez, ya apuntan algunas ideas propias de la Teoría de Juegos, se puede considerar que esta teoría se inició con los trabajos publicados por el matemático húngaro John von Neumann en 1928. No obstante, su difusión y desarrollo no se produciría hasta 1944, año en que von Neumann y Oskar Morgenstern, economista austriaco, publican el libro *Theory of Games and Economic Behavior*. El objetivo inicial de esta teoría era proporcionar un marco teórico que promoviera la racionalidad en la actividad económica. Sin embargo, el trabajo de numerosos investigadores ha conducido a que el ámbito de aplicación de la Teoría de Juegos se haya extendido a otras disciplinas: Ciencias Sociales, Ciencias Políticas y Biología Evolutiva.

Se distingue, fundamentalmente, entre dos tipos de juegos: *Juegos Cooperativos* y *Juegos No Cooperativos*, dependiendo de si los jugadores pueden o no coordinar y negociar sus estrategias mediante acuerdos vinculantes. En particular, en los juegos cooperativos se contempla la posibilidad de que los jugadores formen *coaliciones*. A su vez, los juegos cooperativos se clasifican en *Juegos con utilidad transferible* (juegos TU) y *Juegos sin utilidad transferible* (juegos NTU), dependiendo de que la utilidad pueda o no ser representada por algún medio de cambio que sea perfectamente transferible de un jugador a otro.

En esta memoria nos restringimos al ámbito de los juegos cooperativos con utilidad transferible. En particular, a aquella parte de su estudio que comprende el establecimiento de reglas que indiquen, para cada posible juego, cómo repartir entre los jugadores el beneficio o el coste que se ha generado cuando todos ellos han cooperado. Como indica el título de la memoria, nuestro interés reside en estudiar algunas de las respuestas que la Teoría de Juegos puede ofrecer al problema que se plantea cuando un grupo de agentes participa conjuntamente en la producción o el consumo de un bien: ¿Cómo repartir el beneficio o el coste que se ha generado?

En el desarrollo de este trabajo abordamos tres situaciones concretas, que serán descritas posteriormente. Su modelización como juegos cooperativos con utilidad transferible, no sólo nos permitirá analizar las posibilidades que soluciones de la Teoría de Juegos (ya establecidas en la literatura) ofrecen como propuestas de reparto en cada una de las situaciones consideradas, sino que también motivará la consideración de nuevas soluciones.

En el primer capítulo, de carácter introductorio, se recogen las nociones y elementos básicos de la Teoría de Juegos cooperativos con utilidad transferible necesarios para el desarrollo de este trabajo. En particular, se introduce el concepto de *coalición con tasas de participación*. Generalmente, se considera que un jugador, por el hecho de formar parte de una coalición, pone a disposición de la misma toda su "capacidad de actuación". Sin embargo, existen situaciones en las que los jugadores tienen la posibilidad de firmar acuerdos vinculantes que no suponen la cesión de todo su potencial. Los *Juegos cooperativos con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación* incorporan al modelo convencional la posibilidad de que un jugador decida el grado en que quiere involucrarse en una coalición, considerando para ello la formación de *coaliciones con tasas de participación*, en el sentido dado por Aubin (1974a) al concepto de *coalición difusa*. No obstante, queremos destacar el hecho de que a lo largo de esta memoria en ningún momento se emplea metodología propia de la Teoría de Conjuntos Difusos (Zadeh (1965)); únicamente se emplea la interpretación física nítida de *tasa de participación*. Estos juegos han sido tratados, bajo distintas denominaciones, por Aubin (1974a, 1981), Hsiao y Raghavan (1992, 1993, 1995) y Nouweland, Tijs, Potters y Zarzuelo (1995), entre otros.

En el estudio expuesto en el segundo capítulo se establece una regla de reparto para la clase de *Juegos cooperativos con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación*. Proponemos una solución para este tipo de juegos basada en el *prenucléolo mínimo cuadrático* (Ruiz *et al.* (1996)): la *solución igualadora*. En una primera parte se analizan sus propiedades y se obtiene una caracterización axiomática. En una segunda parte, se aborda el problema conocido genéricamente como *problema de asignación de costes* (Shubik (1962), Billera y Heath (1982), Mirman y Tauman (1982), Samet y Tauman (1982), Young (1985b)). Una de las cuestiones que se plantean cuando varios productos heterogéneos y divisibles son elaborados por un proceso de producción común es redistribuir el coste derivado de su producción conjunta en forma de precios asignables a la producción de cada uno de los bienes individuales. Considerando que un jugador (en este caso, un producto) puede participar parcialmente en una coalición para consumir un bien (en este caso, el proceso de producción), la situación anterior puede ser interpretada en forma de juego cooperativo con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación. Exploramos, entonces, las posibilidades que la solución igualadora puede tener como solución al problema de asignación de costes planteado.

El tercer capítulo se centra en los *Juegos de producción lineal* introducidos por Owen (1975). Este tipo de juegos modeliza economías de producción en las que el proceso de producción es lineal y los recursos necesarios para elaborar los productos finales que serán vendidos en el mercado no pertenecen a un único decisor. Por el contrario, los recursos pertenecen a un grupo de decisores (jugadores), que pueden compartirlos si llegan a un acuerdo. El problema a resolver consistirá en repartir el beneficio obtenido en la venta cuando todos los jugadores cooperan; es decir, cuando unen todos sus recursos. Desde que Owen introdujera este tipo de juegos han sido propuestas diversas generalizaciones (Dubey y Shapley (1984), Granot (1986) y Curiel, Derks y Tijs (1989)). Estas generalizaciones suponen que los recursos son bienes colectivos, no individuales, de manera que un grupo de jugadores podrá disponer de ellos siempre y cuando tenga el "poder" suficiente para hacerlo. En particular, en este capítulo nos centramos en la generalización propuesta por Curiel *et al.* (1989): *Juegos de Producción Lineal Controlados por Comités.* Nuestro objetivo es llevar cabo un estudio, análogo al desarrollado por Owen para el modelo original, acerca del comportamiento del corazón de estos juegos cuando el número de jugadores "tipo" presentes en el mercado aumenta. Este estudio se puede llevar a cabo suponiendo que los jugadores pueden participar *parcialmente* en una coalición, esto es, la evolución del corazón cuando se replica el conjunto de jugadores se puede estudiar a partir de la evolución del corazón de juegos de producción lineal controlados por comités con tasas de participación. Será este último enfoque el que, precisamente, nosotros adoptaremos. Así mismo, siguiendo el trabajo de Granot (1994), se estudia la reducción (en el sentido de Davis–Maschler) de un juego de producción lineal controlado por comités.

El problema que se aborda en el capítulo 4 es el de repartir los costes derivados del mantenimiento de una red de conexión a un punto de suministro entre los usuarios de la misma. Para ello, la situación a la que se enfrentan los usuarios de la red es previamente modelizada como un juego de coste. En particular, nos restringimos a aquellos casos en los que la red de conexión tiene estructura de árbol: *Juego del árbol fijo*. Este tipo de situaciones han sido tratadas por Granot, Maschler, Owen y Zhu (1996) y Maschler, Potters y Reijnierse (1995), entre otros. El caso particular en que el árbol que define la red de conexión es una cadena, conocido con el nombre de *problema del aeropuerto*, ha sido también extensamente estudiado: véase Littlechild (1974), Littlechild y Owen (1977), Dubey (1982), Sudhölter y Potters (1995), Aadland y Kolpin (1998). El capítulo puede dividirse en dos partes. La primera parte ha sido desarrollada en colaboración con los profesores M.Koster y S.Tijs de la Universidad de Tilburg (Holanda) y el profesor Y.Sprumont de la Universidad de Montréal (Canadá) y aparece parcialmente recogida en Koster, Molina, Sprumont y Tijs (1998). En ella se analiza en profundidad el corazón de este tipo de juegos, destacando la definición de la *familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas*, que coincide con el corazón del juego y que será objeto de un amplio estudio. En la segunda parte se estudian las posibilidades que ofrece el considerar la formación de coaliciones con tasas de participación en el modelo y las propiedades del prenucléolo mínimo cuadrático como solución de un juego del árbol fijo.

Por último, se incluye un apéndice en el que se desarrollan detalladamente algunas cuestiones planteadas a lo largo de la memoria.

La estructura de los capítulos 2, 3 y 4 es la misma. Se inicia cada capítulo con una breve introducción en la que se motiva y describe el problema tratado, dando unos apuntes acerca de los trabajos relacionados ya existentes en la literatura. En el núcleo central del capítulo se desarrolla el trabajo, para terminar con un epígrafe en el que se recogen las conclusiones.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se recogen todos aquellos conceptos y resultados básicos de la Teoría de Juegos cooperativos con utilidad transferible que son empleados a lo largo de esta memoria. El caso en que se considera la posibilidad de que los jugadores gradúen su tasa de participación en una coalición queda recogido en la sección 1.2. Para un estudio más extenso remitimos al libro "Mathematical Methods of Game and Economic Theory" (Aubin (1980)), en lo que a juegos difusos se refiere, y a los libros "Cooperative Games, Solutions and Applications" (Driessen (1988)) y "Game Theory" (Owen (1995)), en lo referente a juegos TU.

1.1 Juegos cooperativos con utilidad transferible: Juegos TU

Un juego n–personal cooperativo con utilidad transferible modeliza aquellas situaciones en las que confluyen dos supuestos básicos: cualquier grupo de jugadores puede negociar y coordinar sus estrategias mediante la firma de acuerdos vinculantes (formación de coaliciones) y existe un bien, totalmente divisible, que los jugadores pueden transferir libremente de unos a otros, siendo la tasa de transferencia de utilidad entre los jugadores (de acuerdo con dicho bien) de 1 a 1. En este contexto, un juego n–personal cooperativo con utilidad transferible queda determinado por un par (N, v), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ representa el conjunto de jugadores y $v : \mathcal{P}(N) \to I\!R$, a la que se denomina *función característica del juego*, es una función que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un número real $v(S)$, *valor de la coalición* S, verificando $v(\emptyset) = 0$.

Intuitivamente, $v(S)$ representa la máxima utilidad que los jugadores de S pueden garantizarse obtener en el juego, independientemente de lo que haga el resto de jugadores (jugadores en $N \setminus S$).

El conjunto de todos los juegos TU n–personales se denota por G^n, mientras que $G = \bigcup_{n \in I\!N} G^n$ denota al conjunto de todos los juegos TU.

Definición 1.1. Se dice que dos juegos n–personales, (N, u) y (N, v), son *estratégicamente* *equivalentes* si existen $k > 0$, y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, tales que para toda coalición $S \subseteq N$, se verifica

$$v(S) = ku(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i \,.$$

Esencialmente, si dos juegos son estratégicamente equivalentes, entonces se puede obtener uno a partir del otro sin más que aplicar una transformación lineal a los espacios de utilidad de los jugadores. Obviamente, la relación definida es una relación de equivalencia. Como representante de las clases de equivalencia definidas por esta relación se suele emplear, siempre que sea posible, el siguiente juego.

Definición 1.2. Se dice que $(N, v) \in G^n$ es un juego *normalizado* $(0,1)$ si y sólo si $v(\{i\}) = 0$, $\forall\ i \in N$ y $v(N) = 1$.

Como ya se ha mencionado en el prólogo, uno de los principales problemas que trata de resolver la teoría de juegos en este contexto es cómo repartir entre los jugadores los beneficios derivados de la cooperación. No obstante, los jugadores no tienen siempre los mismos incentivos para coaligarse. A continuación se exponen una serie de definiciones que hacen referencia a propiedades del juego en relación con este hecho.

Definición 1.3. Se dice que $(N, v) \in G^n$ es *propio* si su función característica v es superaditiva, esto es,

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)\,, \quad \forall\ S, T \subseteq N \quad \text{tales que} \quad S \cap T = \emptyset\,.$$

Definición 1.4. Se dice que $(N, v) \in G^n$ es *monótono* si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$, tales que $S \subseteq T$, se tiene que $v(S) \leq v(T)$.

Definición 1.5. Se dice que un juego $(N, v) \in G^n$ es *convexo* si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$, se verifica

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)\,.$$

Alternativamente, si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$, se da la desigualdad en sentido contrario, entonces se dice que el juego es *cóncavo.*

En cualquier caso, dado el juego TU, $(N, v) \in G^n$, el problema que se plantea es cómo repartir equitativamente entre los jugadores el beneficio $v(N)$ que se genera cuando se forma la coalición total. Para que una propuesta de reparto sea aceptada por todos los jugadores deberá cumplir ciertos requisitos, que vendrán dados por la situación concreta de que se trate. En este sentido, la Teoría de Juegos ofrece distintas "soluciones" en forma de *conceptos de solución*, entendiéndose por concepto de solución para juegos TU un mecanismo de selección (regla) que asigne a cada posible juego un conjunto de propuestas de reparto.

Definición 1.6. *Un concepto de solución* para la clase de juegos $G_0 \subseteq G$, es una aplicación punto-a-conjunto, φ, definida sobre G_0, que asigna a cada juego $(N, v) \in G_0^n$, un subconjunto de vectores de pago $\varphi(N, v) \in I\!R^n$. Un concepto de solución que asigne un único vector de pagos a todo juego de G_0 se denomina *valor*.

El establecimiento de conceptos de solución constituye en la actualidad una de las líneas de investigación más prolijas dentro de la Teoría de Juegos cooperativos con utilidad transferible. Sin embargo, esto no fue así hasta 1953, año en que Donald Gillies introduce el concepto de *corazón*[1] y Lloyd S. Shapley define el valor conocido comúnmente como *valor de Shapley.* Hasta ese momento el concepto de solución más utilizado era el de los *conjuntos estables*, introducido por von Neumann y Morgenstern. De entre los conceptos de solución ya clásicos en la literatura queremos destacar aquellos que, tanto por su impacto inmediato en el trabajo desarrollado en este memoria, como por su impacto en el ámbito de la Teoría de Juegos Cooperativos TU, resultan más interesantes: el corazón y el valor de Shapley, previamente mencionados, el nucléolo (Schmeidler (1969)) y el prenucléolo (Sobolev (1975)).

Definición 1.7. Dado un juego $(N, v) \in G^n$, se define una *preimputación* como un vector

[1]Nos hemos decantado por la traducción de *core* como corazón, en lugar de emplear la traducción más generalizada de *núcleo*, porque en el campo de las matemáticas la palabra núcleo se emplea comúnmente como traducción de *kernel*, que se corresponde con un concepto de solución diferente que también aparece en la Teoría de Juegos.

$\mathbf{x} \in I\!R^n$ verificando $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (propiedad de *eficiencia*). El conjunto de preimputaciones del juego se denota por $PI(v)$.

Definición 1.8. Dado el juego $(N, v) \in G^n$, se define una *imputación* como un vector $\mathbf{x} \in PI(v)$ verificando $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ (propiedad de *racionalidad individual*). El conjunto de todas las imputaciones del juego se denota por $I(v)$.

El conjunto de todos los juegos *TU* n–personales con conjunto de imputaciones no vacío se denota por IG^n, mientras que $IG = \bigcup_{n \in I\!N} IG^n$ denota al conjunto de todos los juegos *TU* con $I(v) \neq \emptyset$.

El corazón (Gillies (1953)) es un concepto de solución conjuntista; más que proponer un reparto concreto, lo que proporciona es un conjunto de repartos que son propuestas de pago difícilmente cuestionables por las diferentes coaliciones que se pueden formar. Una propuesta de reparto que conceda a una coalición menos de lo que sus miembros se pueden garantizar obtener sin contar con apoyos, puede ser cuestionada por dicha coalición que, en tal caso, podría optar por abandonar la coalición total.

Definición 1.9 (Gillies,1953). Se define el *corazón* $C(v)$ del juego $(N, v) \in G^n$ como el conjunto de vectores $\mathbf{x} \in I\!R^n$ que verifica:

(i) Propiedad de eficiencia: $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

(ii) Racionalidad coalicional: $x(S) \geq v(S)$, siendo $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, $\quad \forall\ S \subseteq N$.

Si una preimputación pertenece al corazón del juego, entonces ninguna coalición dispone de medios propios para cuestionarla: lo que una coalición S puede obtener si abandona la coalición total ($v(S)$) no excede el pago que le concede dicha preimputación ($x(S)$). Uno de los problemas que plantea este concepto de solución, además de la no unicidad de las propuestas contenidas en él, es que, en general, no se puede garantizar que sea distinto del vacío. Bondareva (1963) y Shapley (1967) caracterizan los juegos con corazón no vacío a partir de la condición de *juego equilibrado*. En lo que sigue, cada vez que nos refiramos a $(N, v) \in G^n$ como un juego equilibrado estaremos indicando que $C(v) \neq \emptyset$.

Observación 1.1. Si el juego (N, v) es un juego de coste, es decir, $v(S)$ es interpretado como el coste en que la coalición S puede garantizarse incurrir a lo sumo, entonces la condición de racionalidad coalicional que define el corazón del juego vendrá dada por:

$$\text{(ii')} \qquad \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\,, \quad \forall\ S \subseteq N\,.$$

Rigurosamente, el conjunto definido por (i) y (ii') recibe el nombre de *anticorazón*. Sin embargo, siempre que quede claro que el juego con el que se está trabajando es un juego de coste, nos referiremos a él simplemente como corazón. Así mismo, siempre que no se haga mención explícita de lo contrario, se trabaja con juegos de beneficio.

A continuación se exponen las propiedades del corazón (anticorazón) de un juego de beneficios (de coste) convexo (cóncavo), que serán empleadas en los capítulos 3 y 4.

Definición 1.10. Dado $(N, v) \in G^n$, y $\theta \in \Theta^n$, siendo Θ^n el conjunto de todas las posibles permutaciones de $N = \{1, \ldots, n\}$, que representaremos como una aplicación biyectiva de N en N . Se define el *vector de pago marginal asociado a* θ, $\mathbf{x}^\theta$, como

$$x_i^\theta = v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta)\,,$$

donde $P_i^\theta = \{j \in N \,/\, \theta(j) < \theta(i)\}$.

Definición 1.11. Dado un juego $(N, v) \in G^n$, se define el *conjunto de Weber del juego*, $W(v)$, como

$$W(v) = \text{Con}\,\{\ \mathbf{x}^\theta \ /\ \theta \in \Theta^n\ \}\,,$$

donde Con denota la envoltura convexa.

Proposición 1.1 (Weber, 1988). *Sea $(N, v) \in G$ un juego, y sea $C(v)$ su corazón, entonces se verifica $C(v) \subseteq W(v)$.*

Shapley (1971) demuestra que para juegos de beneficios (de coste) convexos (cóncavos) el corazón coincide con el conjunto de Weber. Ichiishi (1983) demuestra el recíproco: si $C(v) = W(v)$, entonces el juego de beneficio (coste) es convexo (cóncavo).

El valor de Shapley fue introducido originalmente por Shapley (1953) como un valor para juegos TU. Dicho valor ha ocupado, y sigue ocupando, un lugar predominante en lo que a valores se refiere. Prueba de ello es el elevado número de trabajos que ha generado y la diversidad de sus aplicaciones (como mecanismo de asignación de costes, como índice de poder,...), así como el hecho de que sea precisamente el valor de Shapley, y no otro, el que comúnmente se extiende a cualquier nuevo modelo de juegos cooperativos. En esta introducción nos limitaremos a exponer la definición original dada por Shapley; para ello, es necesario introducir una serie de conceptos previos.

Definición 1.12 (von Neumann y Morgenstern). Dado el juego $(N, v) \in G^n$, se dice que J_i es un *jugador títere*[2] si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}), \ \forall \ S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Definición 1.13. Dado el juego $(N, v) \in G^n$, se dice que J_i es un *jugador irrelevante* si $v(S \cup \{i\}) = v(S), \ \forall \ S \subseteq N \setminus \{i\}$.

von Neumann y Morgenstern hacen referencia, en el contexto de juegos simples, al concepto de jugador irrelevante, al que denominan *jugador insignificante.* Un jugador irrelevante no influye directamente en el juego, ya que no contribuye en nada a ninguna coalición.

Definición 1.14. Dado $(N, v) \in G$, cualquier coalición $S \subseteq N$ tal que

$$v(T) = v(T \cap S), \quad \forall \ T \subseteq N,$$

se dice que es una *coalición soporte* para el juego (N, v).

[2]en inglés, *dummy*.

Un jugador que no pertenezca a alguna de las coaliciones soporte es un jugador irrelevante. El uso de este concepto permite obviar la clasificación de los juegos en función del número de jugadores.

Definición 1.15.

(i) Dados (N,u), $(N,v) \in G^n$ se define el *juego suma*, $(N,u+v) \in G^n$, como

$$(u+v)(S) = u(S) + v(S)\,, \quad \forall\ S \subseteq N\,.$$

(ii) Sea $(N,v) \in G^n$ y sea $\theta \in \Theta^n$, se define el *juego permutado*, $(N,\theta v)$, como

$$\theta v(S) = v(\{i \in N \,/\, \theta(i) \in S\})\,, \quad \forall\ S \subseteq N\,.$$

Definición 1.16 (Shapley, 1953). Se define el *valor de Shapley* de un juego $(N,v) \in G$ como una aplicación, $\Phi(N,v)$, que asigna a cada jugador $i \in N$ un número real, $\Phi_i(N,v)$, verificando los siguientes axiomas:

$(S1)$ $\sum_{i\in S} \Phi_i(N,v) = v(S)\,, \quad \forall\ S \subseteq N$ coalición soporte de v.

$(S2)$ Dados $(N,u)\,,(N,v) \in G^n$, se verifica $\Phi_i(N,u+v) = \Phi_i(N,u) + \Phi_i(N,v)$, $\forall\ i \in N$.

$(S3)$ $\Phi_{\theta(i)}(N,\theta v) = \Phi_i(N,v)$, $\forall\ \theta \in \Theta^n$ y $\forall\ i \in N$.

Teorema 1.1 (Shapley, 1953). *Existe un único valor,* $\Phi\colon G \to \bigcup_{n\in I\!N} I\!R^n$, *verificando* $(S1), (S2)$ *y* $(S3)$. *Dicho valor viene dado por*

$$\Phi_i(N,v) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\,(v(S) - v(S\setminus\{i\}))\,, \quad \forall\, i \in N\,, \quad \forall\,(N,v) \in G^n\,, \quad \forall\, n \in I\!N\,,$$

donde $s = |S|$.

Un concepto de solución alternativo lo proporcionan el nucléolo (Schmeidler (1969)) y el prenucléolo (Sobolev (1975)). El procedimiento de selección en que se basan, tanto el nucléolo como el prenucléolo, valora cada posible propuesta de pago a partir del vector de excesos asociado a la misma. Dado el juego $(N, v) \in G^n$, asociado a cualquier vector de pagos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se define el *exceso de la coalición*[3] no vacía $S \subseteq N$ con respecto a $\mathbf{x}$, como la diferencia entre el valor de dicha coalición y el pago que recibirían los miembros de S si $\mathbf{x}$ fuera la propuesta de reparto definitiva, esto es,

$$e(S, \mathbf{x}) = v(S) - x(S)\,.$$

El exceso de la coalición S puede entonces ser interpretado como una medida del descontento que sentirían los miembros de la coalición S si $\mathbf{x}$ fuera sugerido como reparto final.

Una vez establecido el criterio de valoración de una propuesta de reparto, se debe seleccionar aquel vector de pagos que resulte "mejor" valorado, de entre todos aquellos que son considerados "admisibles" (que verifican ciertas propiedades deseables). En este sentido, el prenucléolo considera como admisible cualquier preimputación, mientras que el nucléolo exige que la propuesta de reparto a considerar sea una imputación. En ambos casos, teniendo en cuenta que siempre que $\mathbf{x} \in PI(v)$ el exceso global (la suma de los correspondientes excesos asociados a todas las coaliciones) es el mismo, se tiene que, si se quiere minimizar el exceso asociado a "todas" las coaliciones, entonces se deberá optar por un mecanismo de selección que reparta *equitativamente* el exceso global entre todas las coaliciones. Una forma de repartir equitativamente es la que propone el nucléolo (prenucléolo): seleccionar como propuesta final de reparto aquella imputación (preimputación) que minimiza el descontento de las coaliciones más insatisfechas.

Formalmente, considérese un vector de pagos cualquiera $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y sea $\theta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2^n-1}$,

[3]Posiblemente, dada su interpretación, la palabra en castellano más adecuada para denominar *excess* sería "descontento" o "insatisfacción", no obstante, dado que *exceso* es la traducción comúnmente empleada, será la que nosotros adoptaremos.

denominado *vector de excesos*, aquel vector cuyas componentes representan los excesos de las coaliciones con respecto a $\mathbf{x}$, $e(S, \mathbf{x})$, $\emptyset \neq S \subseteq N$, ordenadas no crecientemente. A partir de $\theta(\mathbf{x})$, el nucléolo se define como sigue:

Definición 1.17 (Schmeidler, 1969). Dado $(N, v) \in G$, el *nucléolo* del juego es la imputación $\nu(v)$ que verifica

$$\theta(\nu(v)) \leq_L \theta(\mathbf{x}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in I(v),$$

donde $\leq_L$ es el orden lexicográfico en $I\!R^{2^n-1}$.

El prenucléolo (Sobolev (1975)) se define de forma análoga, siendo la única diferencia que, en este caso, es el conjunto de preimputaciones sobre el que se obtiene el mínimo.

Sobolev (1975) obtiene una caracterización axiomática del prenucléolo a partir de una *propiedad de consistencia*. Una caracterización axiomática del nucléolo, basada en la dada por Sobolev para el prenucléolo, se puede encontrar en Snijders (1995). Para una extensa revisión acerca del nucléolo remitimos a Maschler (1992).

Por último, con el fin de introducir conceptos que serán utilizados posteriormente, se presenta un breve resumen acerca de los *juegos simples*.

Un juego simple, tal y como fue concebido por von Neumann y Morgenstern, es aquel juego en el que el elemento cuantitativo, i.e., los pagos expresados por la función característica, puede ser tratado como algo secundario. El principal objetivo de los jugadores es formar coaliciones "decisivas". Estos autores definen un juego simple (de suma constante) en términos de coaliciones "ganadoras" y coaliciones "perdedoras".

Shapley (1964) generaliza esta definición introduciendo el concepto de juego simple, no necesariamente de suma constante. Esta será la definición que emplearemos en la memoria.

Definición 1.18 (Shapley, 1964). Un *juego simple*, $(N, \mathcal{W})$, viene dado por N, conjunto de jugadores, y por $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(N)$, conjunto de coaliciones ganadoras. $\mathcal{W}$ debe verificar:

(i) $N \in \mathcal{W}$, $\emptyset \notin \mathcal{W}$

(ii) Monotonía: si $S \in \mathcal{W}$ y $S \subseteq T \Rightarrow T \in \mathcal{W}$

En términos de la función característica, se define como sigue:

Definición 1.19. $(N, v) \in G^n$ es un *juego simple* si se verifican:

(i) $v(S) \in \{0, 1\}$, $\forall\ S \subseteq N$.

(ii) $v(N) = 1$, $v(\emptyset) = 0$.

(iii) (N, v) es monótono.

Si el juego simple viene dado en forma de función característica (N, v), entonces se le puede asignar el juego $(N, \mathcal{W}(v))$, donde $\mathcal{W}(v)$, conjunto de coaliciones ganadoras del juego, viene dado por todas aquellas coaliciones verificando $v(S) = 1$.

Un caso al que prestaremos una especial atención es el de los *juegos de unanimidad.*

Definición 1.20. El *juego de unanimidad* con respecto a la coalición $S \subseteq N$, (N, u_S), viene dado por

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación se exponen las definiciones y propiedades de un juego simple que serán empleadas en la memoria.

Definición 1.21. Sea (N, v) un juego simple cualquiera, se dice que $B \subseteq N$ es una *coalición de bloqueo* si $N \setminus B$ es una coalición perdedora ($v(N \setminus B) = 0$). El conjunto de todas las coaliciones de bloqueo del juego se denota por $\mathcal{B}(v)$.

Si $\{i\} \in \mathcal{B}(v)$, entonces se dice que $i \in N$ es un *jugador veto.* El conjunto de jugadores veto del juego se denota por V.

Definición 1.22. Sea (N, v) un juego simple cualquiera, se dice que $S \subseteq N$ es una *coalición minimal ganadora* si S es una coalición ganadora ($v(S) = 1$) y cualquier subcoalición propia de S no lo es ($v(T) = 0$, para toda coalición $T \subsetneq S$). El conjunto de todas las coaliciones minimales ganadoras del juego se denota por $\mathcal{MW}(v)$.

Un juego simple queda perfectamente determinado por el conjunto de sus coaliciones minimales ganadoras. El comportamiento del corazón de este tipo de juegos está bien determinado:

$$C(v) \neq \emptyset \iff V \neq \emptyset\,.$$

En tal caso, el corazón del juego viene dado por

$$C(v) = \Big\{ \mathbf{x} \in I\!R^n \;/\; \sum_{i \in V} x_i = 1\,, \;\; x_i \geq 0, \quad \forall\; i \in N \Big\}.$$

1.2 Juegos cooperativos con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación

Como ya se ha apuntado en el prólogo, el concepto de coalición que tradicionalmente se emplea resulta, en ocasiones, inadecuado por su incapacidad para recoger todas las características del problema. Este es el caso de aquellas situaciones en las que, por su naturaleza, los jugadores tienen la opción de involucrarse en una coalición en mayor o menor grado. Supóngase, por ejemplo, que un grupo de agentes participa conjuntamente en una inversión. El beneficio que obtengan dependerá de la inversión inicial que cada uno de ellos haga. En este contexto, el concepto tradicional de coalición sólo contempla dos posibilidades: un jugador entra a formar parte de una coalición, lo que le supone la cesión de todo su capital a la misma, o por el contrario, no se adhiere a la coalición. La generalización del concepto de coalición, incorporando la posibilidad de que un jugador decida en que grado se involucra en ella, permitiría incorporar al modelo otras opciones. Concretamente, en el ejemplo anterior permitiría considerar el que un jugador decidiera ceder a la coalición una cierta proporción de su capital, no necesariamente la totalidad.

Consideraciones de este tipo son las que han llevado a diversos autores a generalizar el concepto de coalición introduciendo el concepto de *tasa de participación en una coalición.* Fundamentalmente, dentro de la clase de juegos *TU* que surgen cuando se emplea este concepto se distinguen dos tipos de juegos, dependiendo de si los jugadores pueden graduar de forma continua su tasa de participación en una coalición (que se correspondería con el ejemplo anterior) o, alternativamente, sólo disponen de una cantidad finita de opciones. El tipo de juegos que surge en este último caso, denominados *Juegos multi–elección* (en inglés *multi–choice cooperative games*) ha sido estudiado por Hsiao y Raghavan (1992, 1993) y por Nouweland *et al.* (1995). El caso en que un jugador dispone de una "cantidad infinita" de opciones ha sido estudiado por Aubin (1974a, 1981), Butnariu (1978), Butnariu y Klement (1996) y Billot (1990), entre otros, bajo la denominación de *juegos TU con coaliciones difusas* (en inglés, *fuzzy cooperative games*), y más recientemente por Hsiao y Raghavan (1995), bajo la denominación de *juegos TU con un continuo de opciones* (en inglés, *continuously–many–choice cooperative games*). En ambos casos el concepto de coalición que se emplea es matemáticamente el mismo, siendo su interpretación física lo que difiere.

Los juegos cooperativos con utilidad transferible y coaliciones difusas están basados en la Teoría de Conjuntos Difusos, introducidos por Zadeh en 1965, año en el que se publica su artículo seminal "*Fuzzy Sets*". Esta teoría proporciona una base para la construcción de modelos y la aplicación de técnicas capaces de trabajar con información de carácter ambiguo o impreciso no asimilable a ningún fenómeno aleatorio o probabilístico. Permite aproximar situaciones reales en las que los modelos clásicos, basados en la lógica binaria (de tipo Si/No), resultan inadecuados, ya sea por su excesiva complicación o por su incapacidad para recoger todas las características del problema; en particular, permite modelizar aquellos casos en los que el problema que se está tratando incluye relaciones u objetos vagamente definidos, incertidumbre debida a que el sistema no está perfectamente definido, evaluaciones de carácter lingüístico, **gradación de estados**, etc ... Esta última posibilidad, que se corresponde con la interpretación nítida de tasa de participación, es la que nosotros consideraremos y es también la considerada por Hsiao y Raghavan (1995).

A continuación se recoge la definición formal de conjunto difuso y de coalición difusa.

Definición 1.23 (Zadeh, 1965). Sea X un conjunto clásico (nítido, no difuso) de objetos, que se denominará conjunto referencial o universo y sea x un elemento genérico de X. Un *conjunto difuso A de X* es un conjunto de pares $\{\,(x, \mu_A(x))\,\}_{x\in X}$ donde $\mu_A(\cdot)$ es la llamada *función de pertenencia (o función característica) de A*, que asocia a cada $x \in X$ un número real $\mu_A(x) \in [0,1]$ que indica el grado de pertenencia de x al conjunto difuso A.

Definición 1.24 (Aubin, 1974a). Dado un conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$, se define una *coalición difusa de jugadores de N* como un conjunto difuso de N.

Una coalición difusa de N se puede identificar con un vector de $[0,1]^n$. Así, si $\boldsymbol{\tau}$ pertenece al conjunto de coaliciones difusas de jugadores de N, entonces es de la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)\,, \qquad 0 \leq \tau_i \leq 1\,, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n\,,$$

donde τ_i indica el grado de pertenencia o tasa de participación del jugador i en la coalición difusa $\boldsymbol{\tau}$.

Las coaliciones nítidas son un caso particular de las coaliciones difusas en las que la tasa de participación de cada uno de los jugadores en la coalición es $x_i^S \in \{0,1\}$. A lo largo de la memoria, siempre que no haya confusión, la coalición difusa $\mathbf{x}^S \in \{0,1\}^n$ se denotará simplemente por S.

Billot (1990) describe una coalición difusa como una colección de agentes económicos (jugadores) que ceden una fracción de su representatividad a un decisor colectivo: la coalición difusa.

Butnariu (1978) argumenta la necesidad de considerar coaliciones difusas en juegos políticos para modelizar situaciones en las que un país no puede ceder la totalidad de su poder de decisión a una coalición, pero que, sin embargo, puede ser simultáneamente miembro de varias coaliciones. Como ejemplo se refiere a la posición del Reino Unido: "*...which refuses to transfer its economic decisional rights to the West-European Parliament, but it is a member of E.C.C. and of the Commonwealth in spite of their contradictory requests in many questions.*"[4] [Butnariu (1978), pág. 190].

Definición 1.25 (Aubin, 1974a). Un *juego n-personal cooperativo con utilidad transferible y coaliciones difusas* viene dado por el par $(N, \widetilde{v})$, donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y $\widetilde{v} : [0,1]^n \to I\!R$ es la función característica del juego, que asigna a cada coalición difusa $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, su valor $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$, verificando $\widetilde{v}(\emptyset) = 0$.

El concepto de juego difuso con utilidad transferible aparece, de hecho, en el trabajo de Shapley-Shubik (1969) al hablar de jugadores participando en una coalición a niveles fraccionales de intensidad a través de lotes de bienes personales en el contexto de juegos de mercado.

En el ejemplo considerado al inicio de esta sección, el grado de pertenencia de un jugador a la coalición difusa $\boldsymbol{\tau}$ representa la fracción de su capital que pone a disposición de la coalición; mientras que $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$ representa el beneficio que se obtiene cuando se forma la coalición difusa $\boldsymbol{\tau}$ (cada jugador invierte una fracción τ_i de su capital).

Ya que en esta memoria no se emplea metodología difusa alguna, sino únicamente el concepto de tasa de participación, al que se le da una interpretación física nítida, hemos optado por referirnos a las coaliciones difusas como *coaliciones con tasas de participación*. En lo que sigue emplearemos la denominación más simple de "juego con tasas de participación". Por analogía con la terminología difusa, seguiremos empleando la palabra "nítida" para referirnos a una coalición en la que todos los jugadores participan con tasas de 0 ó 1.

[4]...que se niega a transferir todo su poder económico al Parlamento Europeo (Oeste), pero es miembro de la C.E.E. y de la Commonwealth, a pesar de que estos organismos tienen intereses antagónicos en numerosas cuestiones.

El conjunto de todos los juegos TU n–personales con tasas de participación se denota por $F\Gamma^n$, mientras que $F\Gamma = \bigcup_{n \in I\!N} F\Gamma^n$ denota al conjunto de todos los juegos TU con tasas de participación.

Al igual que ocurre en el caso nítido, uno de los principales problemas que se abordan en este contexto es el estudio de conceptos de solución que proporcionen una respuesta satisfactoria a la pregunta de cómo repartir los beneficios $\widetilde{v}(N)$. Aubin (1974a, 1981) extiende al caso difuso conceptos de solución clásicos: el corazón y el valor de Shapley. Diversos autores proponen extensiones alternativas del valor de Shapley, véase Hsiao y Raghavan (1995), Butnariu y Klement (1996). A continuación se recoge la extensión del corazón propuesta por Aubin, así como sus principales propiedades, que serán empleadas en el capítulo 3.

Definición 1.26. Un *concepto de solución* para la clase de juegos con tasas de participación $F\Gamma_0 \subseteq F\Gamma$, es una aplicación punto–a–conjunto, φ, definida sobre $F\Gamma_0$, que asigna a cada juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_0^n$, un subconjunto de vectores de pago $\varphi(N, \widetilde{v}) \in I\!R^n$. Un concepto de solución que asigne un único vector de pagos a todo juego de $F\Gamma_0$ se denomina *valor*.

La subclase de juegos con tasas de participación sobre la que se van a definir los valores tratados en el segundo capítulo es:

$F\Gamma_1^n$: Subconjunto de $F\Gamma^n$ compuesto por todos aquellos juegos con tasas de participación n–personales $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma^n$ tales que $\widetilde{v} \in L^1(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue en $[0,1]^n$, i.e., $\int_{[0,1]^n} |\widetilde{v}| \, d\mu < \infty$.

$F\Gamma_1$: Subclase de $F\Gamma$ definida por la unión $\bigcup_{n \geq 1} F\Gamma_1^n$.

Definición 1.27. Se define el conjunto de *imputaciones* de un juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$ como el conjunto de vectores $I(\widetilde{v}) \subseteq I\!R^n$ verificando:

(i) Eficiencia: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \widetilde{v}(N)$.

(ii) Racionalidad individual: $x_i \geq \widetilde{v}(\{i\})\,, \quad \forall\, i \in N\,.$

El conjunto $PI(\widetilde{v})$ de vectores que verifica (i) se denomina conjunto de *preimputaciones* del juego.

Siempre que a una subclase de juegos con tasas de participación $F\Gamma_0 \subseteq F\Gamma$ se le anteponga una letra I mayúscula, estaremos denotado la subclase de $F\Gamma_0$ compuesta por todos aquellos juegos en $F\Gamma_0$ con conjunto de imputaciones no vacío.

Para generalizar el corazón, en primer lugar debe decidirse qué pago otorga la preimputación $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a una coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}$. Se pueden dar multitud de respuestas a ésta pregunta; cuál de ellas es la más acertada está en función del problema que se esté modelizando. Aubin (1981) asume que el reparto es lineal en la tasa de participación de los jugadores; es decir, el pago que recibe una coalición $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$ de acuerdo con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es $x(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} x_i \tau_i$. Esto es lo que nosotros asumiremos en esta memoria. En tal caso, el corazón de un juego con tasas de participación vendrá dado por la siguiente definición:

Definición 1.28 (Aubin, 1981). Se define el corazón $C(\widetilde{v})$ del juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$ como el conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ verificando:

(i) Eficiencia: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \widetilde{v}(N)$.

(ii) Racionalidad coalicional: $x(\boldsymbol{\tau}) \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$.

Para los resultados que aparecen recogidos a continuación, se debe asumir que la función característica del juego es homogénea de grado 1, i.e.,

$$\widetilde{v}(\lambda\boldsymbol{\tau}) = \lambda\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\,, \quad \forall\ \lambda > 0 \ \text{ tal que } \ \lambda\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

Si todos los jugadores aumentan en la misma proporción su tasa de participación, entonces el valor de la coalición aumenta en la misma proporción. En dicho caso, su definición puede extenderse a $I\!R^n_+$ como sigue:

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} \tau_i \, \widetilde{v}\Big(\frac{1}{\sum_{i \in N} \tau_i} \boldsymbol{\tau} \Big), \quad \forall \quad \boldsymbol{\tau} \in I\!R^n_+ .$$

Definición 1.29. Sea S un conjunto convexo no vacío, y sea $f : S \longrightarrow I\!R$ una función cóncava. Se dice que $\boldsymbol{\xi}$ es un *subgradiente* de f en $\bar{\mathbf{x}} \in S$ si

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\xi}^t(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \quad \forall \ \mathbf{x} \in S .$$

El conjunto $\partial f(\bar{\mathbf{x}})$ de subgradientes de f en $\bar{\mathbf{x}}$ se denomina *subdiferencial.*

Teorema 1.2 (Aubin, 1981). *Sea $(N, \widetilde{v})$ un juego con tasas de participación tal que $\widetilde{v}$ es una función cóncava homogénea de grado 1, entonces $C(\widetilde{v})$ es convexo, compacto y no vacío. Concretamente, el corazón del juego es igual a la subdiferencial, $\partial\widetilde{v}(N)$, de $\widetilde{v}$ en N. Además, si $\widetilde{v}$ es diferenciable en N, entonces $C(\widetilde{v}) = \{D\widetilde{v}(N)\}$, siendo $D\widetilde{v}(N)$ la diferencial de v en $N \equiv \mathbf{1}$.*

En el tercer capítulo de esta memoria se hace uso implícitamente del concepto de *juego simple con tasas de participación*, por lo que nos ha parecido conveniente esbozar este tipo de juegos con tasas de participación en esta introducción. La siguiente definición generaliza a este contexto la definición de juego simple nítido en forma de función característica.

Definición 1.30. Un *juego simple con tasas de participación* es un juego cooperativo con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación verificando:

(i) $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) \in [0,1], \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$.

(ii) $\widetilde{v}$ es un juego monótono: $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) \leq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}'), \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}'$.

(iii) $\widetilde{v}(N) = 1$.

Un juego simple con tasas de participación puede venir dado como extensión de un juego simple nítido. En este caso, la función característica del juego con tasas de participación se define como una extensión de la función característica del correspondiente juego nítido. Para cada problema concreto se deberá decidir qué extensión resulta más adecuada. Esta situación, será precisamente la que dé lugar a los juegos simples con tasas de participación que aparecen en el capítulo 3 de la presente memoria. No obstante, en ocasiones el juego simple con tasas de participación viene dado directamente a partir de las características concretas de la situación que se está modelizando. En ambos casos, la definición de la función característica para juegos con tasas de participación no es una tarea fácil. Para un estudio más extenso del tema remitimos a Molina y Tejada (1996).

Por último, se recoge la definición de juego multi–elección propuesta por Nouweland *et al.* (1995). Un juego multi–elección es un juego TU en el que cada jugador puede participar en una coalición a distintos *niveles de actividad* (tasas de participación). El beneficio que un cierto grupo de jugadores pueda obtener en el juego dependerá del *esfuerzo* que cada uno de los miembros del mismo haya realizado.

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores y supóngase que cada jugador $i \in N$ puede decidir participar activamente a m_i niveles diferentes en el juego. El *espacio de acciones del jugador* $i \in N$ viene dado por el conjunto $M_i = \{0, 1, \ldots, m_i\}$, donde la acción 0 se corresponde con no participar. Por tanto, cada jugador tiene $m_i + 1$ niveles de actividad (incluyendo el 0) y una coalición vendrá dada por un vector $\mathbf{s} \in \prod_{i \in N} M_i$.

Definición 1.31 (Nouweland et al., 1995). Un *juego multi-elección* es una tripleta (N, m, v), donde N es el conjunto de jugadores, $m \in \mathbb{N}^n$ es un vector describiendo el número de niveles de actividad de cada jugador y $v : \prod_{i \in N} M_i \to \mathbb{R}$ es la función característica del juego, verificando $v(\mathbf{0}) = 0$.

La definición anterior difiere de la propuesta originalmente por Hsiao y Raghavan (1992). En esta última, más restrictiva, el espacio de acciones es el mismo para todos los jugadores. En ambos casos, un juego multi–elección es isomorfo a un juego con tasas de participación. Para trasladar un juego multi–elección es suficiente con identificar el nivel de actividad de un jugador i en la coalición $\mathbf{s} \in \prod_{i \in N} M_i$ con su tasa de participación en una coalición $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{s}) \in \prod_{i \in N} \widetilde{M_i}$, siendo

$$\widetilde{M_i} = \left\{0, \frac{1}{m_i}, \dots, \frac{m_i - 1}{m_i}, 1\right\}, \qquad \forall \; i = 1, \dots, n,$$

$$\tau_i = \frac{s_i}{m_i}, \qquad \forall \; i \in N, \quad \forall \; \mathbf{s} \in \prod_{i \in N} M_i.$$

No obstante, debe notarse que M_i representa una escala ordinal, mientras que $\widetilde{M_i}$ es una escala de razón; luego, se debe hacer la salvedad de que, posiblemente, la interpretación de τ_i, $i = 1, \dots, n$, que se esté haciendo no sea la correcta. En los juegos multi–elección que son tratados en esta memoria (capítulo 3) el espacio de acciones de los jugadores representa efectivamente una escala de razón, por lo que nos referiremos a ellos como "juegos con (finitas) tasas de participación".

Capítulo 2

Solución igualadora: Aplicación a problemas de asignación de costes

2.1 Introducción

El procedimiento de selección empleado por numerosos conceptos de solución clásicos para juegos TU está basado en el siguiente esquema: En primer lugar se establece un criterio de valoración, ya sea por parte de las coaliciones o de los jugadores, de las diferentes propuestas de reparto consideradas como admisibles. Una vez establecida dicha valoración y, basado en ella, se adopta un criterio de equidad en función del cual son seleccionados aquellos vectores de pagos que compondrán la solución.

Entre ellos cabe destacar: el nucléolo (Schmeidler (1969)), el prenucléolo (Sobolev (1975)), el núcleo (en inglés, *kernel*)(Davis y Maschler (1965)) y el prenúcleo (en inglés, *prekernel*) (Maschler, Peleg y Shapley (1972), (1979)). Todos estos conceptos de solución se basan en la consideración del exceso de una coalición $S \subsetneqq N$ con respecto a un vector de pagos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como una medida de la insatisfacción que sentiría la coalición S en caso de que $\mathbf{x}$ fuera propuesto como reparto definitivo. En particular, el nucléolo y el prenucléolo, conceptos de solución unipuntuales, valoran una propuesta de reparto a través del exceso asociado a cada coalición, seleccionando como propuesta final aquella imputación, respectivamente preimputación, que minimiza el descontento de la coalición más insatisfecha.

Sakawa y Nishizaki (1994) introducen un nuevo concepto de solución para juegos TU inspirado en el nucléolo: *la solución lexicográfica.* El criterio de equidad adoptado es el mismo pero, en este caso, son los jugadores y no las coaliciones, los que valoran una propuesta de reparto. Para ello, definen el *exceso de un jugador $i \in N$ con respecto a un vector de pagos* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, exceso que interpretan como una medida de la insatisfacción que sentiría el jugador i si $\mathbf{x}$ fuera sugerido como reparto definitivo.

El objetivo que, en un principio, nos habíamos planteado era el estudio del comportamiento de la solución lexicográfica como un concepto de solución para juegos TU con tasas de participación tal y como había sido extendido a esta clase de juegos por Sakawa y Nishizaki (1994). Este estudio nos condujo hasta otro concepto de solución unipuntual para juegos

TU nítidos, el *nucléolo mínimo cuadrático* (Ruiz, Valenciano y Zarzuelo (1996)). Dicho valor se basa, al igual que el nucléolo, en la valoración de una propuesta de pagos a partir del descontento de las coaliciones; pero el criterio de equidad que se emplea para la selección de la propuesta final de pago es distinto.

La solución lexicográfica y el nucléolo mínimo cuadrático, aunque inspirados ambos valores en el nucléolo, aparentemente no guardan relación alguna; sin embargo, como se verá a continuación, ambos conceptos de solución coinciden. Este hecho, no sólo nos ha permitido llevar a cabo un estudio más profundo de la solución lexicográfica como un concepto de solución para juegos *TU* con tasas de participación, sino que nos ha llevado a definir y a estudiar la *solución igualadora para juegos con utilidad transferible y coaliciones con tasas de participación* como la extensión a este tipo de juegos del *prenucléolo mínimo cuadrático* (Ruiz *et al.* (1996)), solución estrechamente ligada al nucléolo mínimo cuadrático. El capítulo se cierra con un estudio acerca de las posibilidades de la solución igualadora como procedimiento de asignación de costes.

La tabla 2.1 muestra las analogías y diferencias, en cuanto a la valoración y el criterio de equidad empleados, entre los distintos conceptos de solución unipuntuales mencionados en esta introducción.

	CRITERIO DE EQUIDAD	
VALORACIÓN	**Mínimo Lexicográfico**	**Minimizar la Varianza**
Exceso Coaliciones	nucléolo (prenucléolo)	nucléolo mínimo cuadrático (prenucléolo mínimo cuadrático)
Exceso Jugadores	solución lexicográfica (solución igualadora)	solución lexicográfica (solución igualadora)

Tabla 2.1: Clasificación en función de la valoración y el criterio de equidad.

2.2 El nucléolo mínimo cuadrático como un mínimo lexicográfico

Como ya se ha mencionado en la introducción, el nucléolo mínimo cuadrático y la solución lexicográfica se basan en la consideración de una cierta medida de descontento asociada a cualquier propuesta de pago, diferenciándose no sólo en la definición de dicha medida, sino también en el criterio de equidad empleado para seleccionar el vector de pagos propuesto finalmente. No obstante, ambos valores, aparentemente distantes, están íntimamente relacionados con un tercer valor, el 2–*centro*, propuesto por Spinetto (1974)[1]. Este hecho motivó el estudio que se lleva a cabo en esta sección. Se mostrará que ambos valores, el nucléolo mínimo cuadrático y la solución lexicográfica, coinciden.

La equivalencia entre ellos no sólo dota al nucléolo mínimo cuadrático de una interesante propiedad contribuyendo a su estabilidad, sino que nos permite considerarlo como un *nucléolo general* (Maschler, Potters y Tijs (1992)), englobándolo dentro de una familia de conceptos de solución más amplia. Además, esta equivalencia será tenida en cuenta en la sección 2.4 y, gracias a ella, se llevará a cabo un estudio en profundidad de la solución lexicográfica para juegos *TU* con tasas de participación como una extensión del nucléolo mínimo cuadrático a este tipo de juegos.

El nucléolo mínimo cuadrático tiene en común con el nucléolo la valoración de una propuesta de reparto en función del vector de excesos de las coaliciones asociado y el considerar como conjunto de repartos admisibles al conjunto de imputaciones. La diferencia entre ambos valores viene dada por el criterio de equidad empleado para seleccionar el vector de pagos solución del juego. El nucléolo mínimo cuadrático selecciona como propuesta final de reparto aquella imputación que minimiza la varianza de los correspondientes excesos de todas las coaliciones sobre el conjunto de imputaciones.

[1]la relación entre todos ellos se recoge en la tabla 2.2 (pág. 94).

Formalmente, considérese el siguiente problema de minimización para cualquier juego TU (N, v):

Problema 1

$$\min \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \left(e(S, \mathbf{x}) - \overline{E}(v, \mathbf{x}) \right)^2$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde el *exceso medio* correspondiente a $\mathbf{x}$, $\overline{E}(v, \mathbf{x})$, viene dado por

$$\overline{E}(v, \mathbf{x}) = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} e(S, \mathbf{x}).$$

Ruiz *et al.* (1996) prueban la existencia y unicidad de la solución del problema anterior sobre la clase IG y definen el nucléolo mínimo cuadrático como sigue:

Definición 2.1 (Ruiz et al., 1996). Dado el juego $(N, v) \in IG^n$, el *nucléolo mínimo cuadrático* del juego, $\Lambda(v)$, se define como la solución del problema 1.

Alternativamente, Sakawa y Nishizaki (1994) consideran una medida de la insatisfacción de los jugadores, que definen agregando las correspondientes insatisfacciones de todas aquellas coaliciones en las que un jugador puede formar parte. Dado un vector de pagos cualquiera, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, definen el *exceso del jugador* $i \in N$ con respecto a $\mathbf{x}$ como

$$w(i, \mathbf{x}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} e(S, \mathbf{x}).$$

Así, cada jugador puede evaluar globalmente una propuesta de reparto teniendo en cuenta todas las posibles coaliciones en las que puede formar parte. Al igual que ocurre cuando se considera el exceso asociado a las coaliciones, siempre que $\mathbf{x} \in PI(v)$, la suma de los correspondientes excesos de todos los jugadores es la misma. En este caso, el criterio elegido para repartir *equitativamente* el exceso total entre los jugadores es análogo al empleado para la selección del nucléolo.

Considérese un vector de pagos $\mathbf{x} \in I\!R^n$, y sea $\theta(\mathbf{x}) \in I\!R^n$, al que denominaremos *vector de excesos (de los jugadores)*, aquel vector cuyas componentes representan los excesos de los jugadores con respecto a $\mathbf{x}$, $w(i, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$, ordenados en orden no creciente. A partir de $\theta(\mathbf{x})$, la solución lexicográfica se define como sigue:

Definición 2.2 (Sakawa y Nishizaki, 1994). Dado $(N, v) \in IG^n$, se define la *solución lexicográfica* del juego como la imputación, $L(v)$, que verifica

$$\theta(L(v)) \leq_L \theta(\mathbf{x}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in I(v),$$

donde $\leq_L$ es el orden lexicográfico en $I\!R^n$.

Observación 2.1. La solución lexicográfica es un nucléolo general.

En efecto, el *nucléolo general* (Maschler, Potters y Tijs (1992)) generaliza el nucléolo a un par arbitrario (Π, F), donde Π es un espacio topológico y $F = \{ F_j \}_{j=1}^m$ es un conjunto finito de funciones reales continuas definidas sobre Π. En este contexto, definen el *nucléolo general* como

$$\mathcal{N}(\Pi, F) := \left\{ \mathbf{x} \in \Pi \ / \ \theta(F(\mathbf{x})) \leq_L \theta(F(\mathbf{y})), \ \text{ para todo } \ \mathbf{y} \in \Pi \right\},$$

donde $\theta(F(\mathbf{x}))$ es un vector m–dimensional con las mismas componentes que $F(\mathbf{x})$ reordenadas en orden no creciente y $\leq_L$ es el orden lexicográfico en $I\!R^m$. La solución lexicográfica se obtiene como un nucléolo general considerando como dominio del nucléolo el par $\Omega = (\Pi, F)$ derivado de la clase IG. Para cada juego, el conjunto Π de propuestas de reparto consideradas como *admisibles* es el conjunto de imputaciones del juego, mientras que el conjunto de criterios de evaluación de las diferentes propuestas de pago, $F = \{ F_i \}_{i \in N}$, viene dado por el descontento de cada uno de los jugadores, i.e., F_i es la función de exceso del jugador i, $i = 1, \ldots, n$.

A continuación se prueba la equivalencia entre el nucléolo mínimo cuadrático y la solución lexicográfica. Como consecuencia de dicha coincidencia, se tiene que el nucléolo mínimo cuadrático se obtiene no sólo como resultado de un criterio de selección justo con las coaliciones, sino que también puede ser obtenido como resultado de un proceso de selección justo con los jugadores.

Para demostrar la equivalencia entre ambas soluciones, previamente es necesario el siguiente lema debido a Ruiz *et al.* (1996).

Lema 2.1 (Ruiz et al., 1996). *Para cualquier juego $(N, v) \in IG^n$ una imputación $\mathbf{x}$ es el nucléolo mínimo cuadrático del juego si y sólo si para todo $j \in N$ se verifica:*

$$x_j > v(\{j\}) \Rightarrow w(j, \mathbf{x}) = \max_{i \in N} w(i, \mathbf{x}) .$$

Proposición 2.1. *Sea $(N, v) \in IG^n$ un juego cualquiera, entonces $\Lambda(v) = L(v)$.*

Demostración : En primer lugar demostraremos que para cualquier juego (N, v), la suma de los excesos de todos los jugadores es la misma para todo vector de pagos $\mathbf{x}$ eficiente. Sea $a_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} v(S)$, entonces

$$w(i, \mathbf{x}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} e(S, \mathbf{x}) = a_i(v) - 2^{n-1} x_i - 2^{n-2} \sum_{j \neq i} x_j = a_i(v) - 2^{n-2} x_i - 2^{n-2} v(N) . \quad (2.1)$$

Luego,

$$\sum_{i\in N} w(i,\mathbf{x}) = \sum_{i\in N} a_i(v) - 2^{n-2}\sum_{i\in N} x_i - n2^{n-2}v(N) = \sum_{i\in N} a_i(v) - (n+1)2^{n-2}v(N) = \beta\,.$$

Sea $\mathbf{z}$ el nucléolo mínimo cuadrático del juego, que existe y es único. Considérese el conjunto de jugadores $M = \{j \in N \,/\, z_j = v(\{j\})\}$, entonces del lema 2.1 se deduce que $w(j,\mathbf{z}) = w(k,\mathbf{z})$, para todo par de jugadores $j,k \notin M$ y por consiguiente,

$$w(j,\mathbf{z}) = \frac{\beta - \overline{\beta}}{n-m}, \quad \text{para todo } \ j \notin M\,,$$

donde $\overline{\beta} = \sum_{i\in M} w(i,\mathbf{z})$ y $m = |M|$.
A continuación se demuestra que cualquier imputación $\mathbf{x}$ verificando $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, debe satisfacer $w(i,\mathbf{x}) = w(i,\mathbf{z})$, para todo $i \in N$.

(a) En primer lugar se probará que si $\mathbf{x}$ es una imputación tal que $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, entonces se debe verificar que $w(j,\mathbf{x}) = w(j,\mathbf{z})$ para todo $j \notin M$.

En efecto, sea $\mathbf{x}$ una imputación cualquiera, entonces de la expresión (2.1) de $w(i,\mathbf{x})$, se deduce que $w(i,\mathbf{x}) \leq w(i,\mathbf{z})$, para todo $i \in M$. Luego

$$\sum_{i\in M} w(i,\mathbf{x}) \leq \sum_{i\in M} w(i,\mathbf{z}) = \overline{\beta}\,. \tag{2.2}$$

Entonces,

$$\sum_{i\notin M} w(i,\mathbf{x}) \geq \beta - \overline{\beta}\,. \tag{2.3}$$

Si existe un jugador $j \notin M$ tal que $w(j,\mathbf{x}) < \frac{\beta-\overline{\beta}}{n-m}$, entonces de (2.3) se deduce la existencia de un jugador $\ell \neq j$, $\ell \notin M$ tal que $w(\ell, \mathbf{x}) > \frac{\beta-\overline{\beta}}{n-m}$ y, en consecuencia, se tiene que

$$\theta_1(\mathbf{x}) = \max_{i \in N} w(i, \mathbf{x}) > \frac{\beta - \overline{\beta}}{n - m} = \max_{i \in N} w(i, \mathbf{z}) = \theta_1(\mathbf{z}) .$$

Esto es, $\theta(\mathbf{x}) >_L \theta(\mathbf{z})$; luego, si $\mathbf{x}$ es una imputación verificando $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, entonces

$$w(j, \mathbf{x}) \geq \frac{\beta - \overline{\beta}}{n - m}, \quad \forall \ j \notin M .$$

Por otro lado, si $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, entonces

$$w(j, \mathbf{x}) \leq \max_{i \in N} w(i, \mathbf{x}) \leq \max_{i \in N} w(i, \mathbf{z}) = \frac{\beta - \overline{\beta}}{n - m}, \quad \forall \ j \notin M .$$

Luego se tiene que $w(j, \mathbf{x}) = \frac{\beta-\overline{\beta}}{n-m} = w(j, \mathbf{z})$, para todo $j \notin M$.

(b) Veamos que si $\mathbf{x}$ es una imputación tal que $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, entonces se debe verificar que $w(i, \mathbf{x}) = w(i, \mathbf{z})$, para todo $i \in M$.

En efecto, sea $\mathbf{x}$ una imputación tal que $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, entonces, teniendo en cuenta que en el apartado anterior se ha probado que $w(j, \mathbf{x}) = \frac{\beta-\overline{\beta}}{n-m}$, para todo $j \notin M$, se deduce que

$$\sum_{i \in M} w(i, \mathbf{x}) = \overline{\beta} = \sum_{i \in M} w(i, \mathbf{z}) .$$

Además, $w(i, \mathbf{x}) \leq w(i, \mathbf{z})$, para todo $i \in M$, entonces $w(i, \mathbf{x}) = w(i, \mathbf{z})$, para todo $i \in M$.

De (a) y (b) se sigue que $w(i, \mathbf{x}) = w(i, \mathbf{z})$, $\forall \ i \in N$, siempre que $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, luego de la expresión (2.1) se deduce que $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, y por consiguiente el nucléolo mínimo cuadrático es el mínimo lexicográfico. □

Observación 2.2. Teniendo en cuenta que en la demostración anterior, del hecho de que $\theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{z})$, siendo $\mathbf{z}$ el nucléolo mínimo cuadrático del juego, solamente se ha hecho uso de la condición

$$\max_{i\in N} w(i,\mathbf{x}) = \theta_1(\mathbf{x}) \leq \theta_1(\mathbf{z}) = \max_{i\in N} w(i,\mathbf{z}),$$

se deduce trivialmente que, en este caso, considerando como dominio del nucléolo general el definido previamente, el *mínimo corazón general* (Maschler, Potters y Tijs (1992)), dado por

$$\mathcal{LC}(\Pi, F) := \left\{ \mathbf{x} \in \Pi \,/\, \max_{1\leq j\leq m} F_j(\mathbf{x}) \leq \max_{1\leq j\leq m} F_j(\mathbf{y}), \text{ para todo } \mathbf{y} \in \Pi \right\},$$

contiene a un único punto: la solución lexicográfica.

2.3 Extensión del prenucléolo mínimo cuadrático: Solución igualadora

Sakawa y Nishizaki (1994) argumentan a favor de un concepto de solución que seleccione como propuesta final de pago aquella imputación que reparta el exceso total entre los jugadores de manera que todos ellos queden igualmente insatisfechos. Con este fin, definen la *solución que asigna el mismo exceso a todos los jugadores*. Dicha solución presenta dos inconvenientes: por un lado, su existencia no puede ser asegurada, aún restringiéndose a la clase de juegos con conjunto de imputaciones no vacío; por otro lado, caso de existir, Sakawa y Nishizaki (1994) prueban su coincidencia con la solución lexicográfica. No obstante, si se amplía el conjunto de propuestas de reparto admisibles relajando la condición de racionalidad individual impuesta, entonces dicha solución resulta ser el *prenucléolo mínimo cuadrático* (ver Ruiz *et al.* (1996)).

En esta sección se introduce la *solución igualadora* para juegos *TU* con coaliciones con tasas de participación como extensión del prenucléolo mínimo cuadrático. Se obtiene una expresión analítica que permite calcular de forma sencilla la solución igualadora de un juego con tasas de participación y se estudian sus propiedades. Se concluye dando una caracterización axiomática.

Antes de iniciar el estudio de la solución propuesta se recuerda la definición del prenucléolo mínimo cuadrático, así como su caracterización alternativa en función del vector de excesos de los jugadores.

Dado un juego *TU* $(N, v) \in G^n$ cualquiera, considérese el siguiente problema de minimización:

Problema 2

$$\begin{aligned} \text{mín} & \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \Big(e(S, \mathbf{x}) - \overline{E}(v, \mathbf{x}) \Big)^2 \\ \text{s.a.} & \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N). \end{aligned}$$

Ruiz *et al.* (1996) prueban la existencia y unicidad de la solución del problema anterior sobre la clase G y definen el prenucléolo mínimo cuadrático como sigue:

Definición 2.3 (Ruiz et al., 1996). Dado el juego $(N, v) \in G^n$, el *prenucléolo mínimo cuadrático* del juego, $\lambda(v)$, se define como la solución del problema 2.

Proposición 2.2 (Ruiz et al., 1996). *Para todo juego $(N, v) \in G^n$, una preimputación $\mathbf{x}$ es el prenucléolo mínimo cuadrático del juego si y sólo si verifica*

$$\sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} e(S, \mathbf{x}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ j \in S}} e(S, \mathbf{x}) , \qquad \forall \; i, j \in N .$$

2.3.1 Solución igualadora: Definición y propiedades

Dado el juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, asociado a cualquier vector de pagos $\mathbf{x} \in I\!R^n$, se define el *exceso de la coalición* $\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$ *con respecto a* $\mathbf{x}$, como la diferencia entre el valor de dicha coalición y el pago que recibirían los miembros de la coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}$ si $\mathbf{x}$ fuera la propuesta de reparto definitiva[2], esto es,

$$\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}) = \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{x}\boldsymbol{\tau}\,.$$

Como en el contexto nítido, el exceso de la coalición $\boldsymbol{\tau}$ puede ser interpretado como una medida del descontento que sentirían los miembros de la coalición $\boldsymbol{\tau}$ si $\mathbf{x}$ fuera sugerido como reparto final. Análogamente, Sakawa y Nishizaki (1994) definen el *exceso del jugador* i con respecto a $\mathbf{x}$ como

$$\widetilde{w}(i, \mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{e}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau}\,,$$

que interpretan como una medida del descontento que sentiría el jugador i si $\mathbf{x}$ fuera sugerido como reparto final.

Proposición 2.3. *Para todo juego con tasas de participación* $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, *existe una única preimputación* $\mathbf{x}$ *verificando*

$$\widetilde{w}(1, \mathbf{x}) = \widetilde{w}(2, \mathbf{x}) = \cdots = \widetilde{w}(n, \mathbf{x})\,. \tag{2.4}$$

Dicha preimputación viene dada por

$$x_i = \frac{\widetilde{v}(N)}{n} + 12(c_i(\widetilde{v}) - \overline{c}(\widetilde{v}))\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.5}$$

[2]Se supone que el reparto es lineal en la tasa de participación de los jugadores.

donde $c_i(\widetilde{v}) = \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau}$ *y* $\overline{c}(\widetilde{v}) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j(\widetilde{v})}{n}$.

Demostración : Sea $\mathbf{x}$ una preimputación cualquiera, entonces el exceso del jugador i con respecto a $\mathbf{x}$ viene dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(i,\mathbf{x}) &= \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau} = \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}x_i - \frac{1}{4}\sum_{j\neq i} x_j = \\ &= c_i(\widetilde{v}) - \frac{1}{12}x_i - \frac{1}{4}\widetilde{v}(N)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Luego, si $\mathbf{x} \in PI(\widetilde{v})$ satisface la condición (2.4), entonces

$$x_i - x_j = 12(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v}))\,, \qquad \text{para todo} \quad i,j \in N\,. \tag{2.7}$$

Considérense las constantes $d^{ij} = 12c_i(\widetilde{v}) - 12c_j(\widetilde{v})$ para todo par de jugadores $i,j \in N$. El sistema de constantes así definido es *compatible* en el sentido dado por Hart y Mas-Colell (1989), i.e., $d^{ii} = 0$, $d^{ij} = -d^{ji}$ y $d^{ij} + d^{jk} = d^{ik}$, para todo $i,j,k \in N$. Además, de (2.7) se deduce que $\mathbf{x}$ debe preservar diferencias con respecto a dicho sistema de constantes, $x_i - x_j = d^{ij}$, $\forall\ i,j \in N$. Entonces trivialmente se tiene que $\mathbf{x}$ existe, es único y viene dado por

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{n}\Big(\widetilde{v}(N) + \sum_{j=1}^n d^{ij}\Big)\,, \\ x_j &= x_i - d^{ij}\,. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$x_i = \frac{\widetilde{v}(N)}{n} + \frac{12}{n}\Big(nc_i(\widetilde{v}) - \sum_{j=1}^n c_j(\widetilde{v})\Big)\,, \qquad i = 1,\dots,n\,. \qquad \square$$

Definición 2.4. Sea $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ un juego con tasas de participación, entonces la *solución igualadora* del juego, que notaremos por $\mathcal{E}(\widetilde{v})$, se define como la preimputación que satisface la condición (2.4).

En la sección 2.3.3 se muestra un ejemplo. Veamos que relación guarda con la solución lexicográfica (Sakawa y Nishizaki (1994)), solución que definen del mismo modo que en el caso nítido (ver definición 2.2).

Lema 2.2. *Para todo juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, la suma de los excesos de todos los jugadores es independiente de la preimputación considerada.*

Demostración : De la expresión del exceso de un jugador con respecto a una preimputación (2.6) se deduce que

$$\sum_{i \in N} \widetilde{w}(i, \mathbf{x}) = \sum_{i \in N} c_i(\widetilde{v}) - \frac{1}{12} \sum_{i \in N} x_i - \frac{n}{4} \widetilde{v}(N) = \sum_{i \in N} c_i(v) - \frac{1+3n}{12} \widetilde{v}(N) = \beta .$$

□

Proposición 2.4. *Sea $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ un juego con tasas de participación cualquiera, si $\mathcal{E}(\widetilde{v})$ es individualmente racional, entonces $\mathcal{E}(\widetilde{v}) = L(\widetilde{v})$.*

Demostración : Se deduce trivialmente del lema 2.2.

La solución igualadora extiende el prenucléolo mínimo cuadrático a partir de su caracterización en función del vector de excesos de los jugadores. A continuación se prueba que también admite una caracterización en base a la función de exceso de las coaliciones que extiende al caso continuo la definición del prenucléolo mínimo cuadrático.

Dado un juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ cualquiera, considérese el siguiente problema de minimización:

Problema continuo 2

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \displaystyle\int_{[0,1]^n} \left(\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v},\mathbf{x})\right)^2 d\boldsymbol{\tau} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{i\in N} x_i = \widetilde{v}(N)\,, \end{array}$$

donde el *exceso medio* correspondiente a $\mathbf{x}$, $\overline{E}(\widetilde{v},\mathbf{x})$, viene dado por

$$\overline{E}(\widetilde{v},\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau}\,.$$

Lema 2.3. *Para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ el exceso medio es independiente de la preimputación considerada.*

Demostración : Sea $\mathbf{x}$ una preimputación cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \overline{E}(\widetilde{v},\mathbf{x}) &= \int_{[0,1]^n} (\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{i\in N} x_i\tau_i)\, d\boldsymbol{\tau} = \int_{[0,1]^n} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2}\sum_{i\in N} x_i = \\ &= \int_{[0,1]^n} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2}\widetilde{v}(N) = \overline{E}(\widetilde{v})\,. \end{aligned}$$

□

En lo que sigue denotaremos al exceso medio correspondiente a cualquier preimputación por $\overline{E}(\widetilde{v})$.

Proposición 2.5. *Para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, existe una única solución del problema continuo 2 : la solución igualadora.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker son condiciones necesarias y suficientes de optimalidad global para el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. } & h(\mathbf{x}) = 0, \\ & \mathbf{x} \in I\!R^n, \end{aligned}$$

donde la función objetivo del problema $f : I\!R^n \to I\!R$ viene dada por

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \left(\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v})\right)^2 d\boldsymbol{\tau}\,, \quad \forall\ \mathbf{x} \in I\!R^n\,,$$

y donde,

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i - \widetilde{v}(N)\,, \quad \forall\ \mathbf{x} \in I\!R^n\,.$$

En tal caso,

- La función objetivo es diferenciable en $I\!R^n$ y la restricción del problema es lineal.
- Aplicando directamente la definición se deduce que f es estrictamente convexa, además como es diferenciable, es pseudoconvexa. Por otro lado, la función h es cuasicóncava y cuasiconvexa para todo $\mathbf{x} \in I\!R^n$.

Luego, las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker son necesarias y suficientes de optimalidad global. Entonces, $\mathbf{x} \in I\!R^n$ es solución del problema anterior si y sólo si existe $\lambda \in I\!R$ verificando:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,, \tag{2.8}$$

$$h(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{2.9}$$

A continuación comprobamos que la solución igualadora del juego es el único vector en $\mathbb{R}^n$ que verifica las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker del problema.

La función característica del juego es integrable en $[0,1]^n$, entonces f es de clase 1 en $\mathbb{R}^n$ y la derivada parcial de f con respecto a x_i viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\partial(\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v}))^2}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau} = \int_{[0,1]^n} -2\tau_i\Big(\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{i\in N} x_i\tau_i - \overline{E}(\widetilde{v})\Big)\, d\boldsymbol{\tau} =$$

$$= -2\widetilde{w}(i,\mathbf{x}) + \overline{E}(\widetilde{v})\,.$$

Luego la condición (2.8) se puede expresar para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como

$$-2\widetilde{w}(i,\mathbf{x}) + \overline{E}(\widetilde{v}) + \lambda = 0\,, \qquad \forall\ i = 1,\ldots,n\,. \tag{2.10}$$

De la expresión (2.6) del exceso de un jugador respecto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ verificando la condición (2.9), i.e., eficiente, se deduce que la condición (2.10) se puede expresar de forma equivalente como

$$-2c_i(\widetilde{v}) + \frac{1}{6}x_i + \frac{1}{2}\widetilde{v}(N) + \overline{E}(\widetilde{v}) + \lambda = 0\,, \qquad \forall\ i = 1,\ldots,n\,.$$

Despejando x_i, $i \in N$, se obtiene:

$$x_i = 12c_i(\widetilde{v}) - 3\widetilde{v}(N) - 6\overline{E}(\widetilde{v}) - 6\lambda\,, \qquad \forall\ \ i = 1,\ldots,n\,. \tag{2.11}$$

De donde, imponiendo la condición de eficiencia, se sigue que

$$6\lambda = 12\overline{c}(\widetilde{v}) - \frac{3n+1}{n}\widetilde{v}(N) - 6\overline{E}(\widetilde{v})\,.$$

Entonces, sustituyendo en la expresión (2.11) el valor de λ obtenido, se tiene que

$$x_i = \frac{\widetilde{v}(N)}{n} + 12\big(c_i(\widetilde{v}) - \overline{c}(\widetilde{v})\big) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}), \qquad \forall \;\; i = 1, \dots, n.$$

□

A continuación se estudiará qué propiedades verifica la solución igualadora, centrándonos en aquellas que extienden al contexto continuo las verificadas por el prenucléolo mínimo cuadrático. Veamos, en primer lugar, cómo se extienden las propiedades clásicas.

Notación. Para todo vector $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^{n-1}$, y para todo escalar $t \in [0,1]$, $(t_i, \boldsymbol{\tau})$ denota el vector $(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, t_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n) \in [0,1]^n$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Definición 2.5. Dado el juego $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma^n$, se dice que J_i es un *jugador títere* si

$$\widetilde{v}(t_i, \boldsymbol{\tau}) = \widetilde{v}(0_i, \boldsymbol{\tau}) + t\widetilde{v}(\{i\}), \qquad \forall \;\; t \in [0,1], \qquad \forall \;\; \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^{n-1}.$$

Definición 2.6. Dado el juego $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma^n$, se dice que dos jugadores, $i, j \in N$, son *sustitutos* si se verifica

$$\widetilde{v}(t'_i, t''_j, \boldsymbol{\tau}) = \widetilde{v}(t''_i, t'_j, \boldsymbol{\tau}), \qquad \forall \;\; t', t'' \in [0,1], \qquad \forall \;\; \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^{n-2},$$

donde $(t'_i, t''_j, \boldsymbol{\tau}) = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, t'_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{j-1}, t''_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_n)$.

Definición 2.7. Se dice que dos juegos con tasas de participación n–personales, $(N, \widetilde{v})$ y $(N, \widetilde{w})$, son *estratégicamente equivalentes* si existen $k > 0$ y $\mathbf{a} \in I\!R^n$, tales que para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, se verifica

$$\widetilde{w}(\boldsymbol{\tau}) = k\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) + \sum_{i \in N} a_i \tau_i .$$

El paso del juego original $(N,\widetilde{v})$ al juego $(N,\widetilde{w})$ se interpreta de forma análoga a como es interpretado en el contexto nítido. Se corresponde con un cambio de unidad de medida (multiplicación por k) y la asignación de un beneficio ($a_i > 0$) o de un coste ($a_i < 0$) fijo asociado a la inclusión de cada uno de los jugadores en una coalición. En este caso, la cantidad fija que aporta un jugador a una coalición $\boldsymbol{\tau}$ es proporcional a su grado de participación en dicha coalición.

Definición 2.8. Un valor φ en $F\Gamma_1^n$ verifica la propiedad de:

(i) <u>*Tratamiento igualitario*</u> si y sólo si para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ se verifica que dos jugadores $i,j \in N$ que son sustitutos en el juego $(N,\widetilde{v})$ reciben el mismo pago, i.e., $\varphi_i(\widetilde{v}) = \varphi_j(\widetilde{v})$.

(ii) <u>*Anonimato*</u> si y sólo si para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ y para toda permutación $\pi : N \to N$ del conjunto de jugadores se verifica

$$\varphi_i(\pi\widetilde{v}) = \varphi_{\pi^{-1}(i)}(\widetilde{v}), \quad \forall\ i \in N,$$

donde el juego permutado $(N,\pi\widetilde{v})$ se define como

$$\pi\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \widetilde{v}(\tau_{\pi(1)},\dots,\tau_{\pi(n)}), \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n.$$

(iii) <u>*Aditividad*</u> si y sólo si para todo par de juegos con tasas de participación $(N,\widetilde{v}_1)$, $(N,\widetilde{v}_2)$ en $F\Gamma_1^n$ se tiene que

$$\varphi_i(\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2) = \varphi_i(\widetilde{v}_1) + \varphi_i(\widetilde{v}_2), \quad \forall\ i \in N.$$

(iv) <u>*Juego inesencial*</u> si y sólo si para todo *juego inesencial* ($\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i\in N} \tau_i\widetilde{v}(\{i\})$,

$\forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$) se verifica

$$\varphi_i(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(\{i\})\,, \qquad \forall\ i \in N\,.$$

(v) *Equivalencia estratégica* si y sólo si para todo par de juegos estratégicamente equivalentes $(N,\widetilde{v})$, $(N,\widetilde{w}) \in F\Gamma_1^n$, se verifica

$$\varphi_i(\widetilde{w}) = k\varphi_i(\widetilde{v}) + a_i\,, \qquad \forall\ i \in N\,,$$

donde k y $\mathbf{a}$ son tales que $\widetilde{w}(\boldsymbol{\tau}) = k\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) + \sum_{i\in N} a_i\tau_i$, $\forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$.

(vi) *División estándar en juegos bipersonales* si y sólo si para todo juego con tasas de participación bipersonal $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\widetilde{v}) &= \widetilde{v}(\{i\}) + \frac{1}{2}\big(\widetilde{v}(N) - \widetilde{v}(\{i\}) - \widetilde{v}(\{j\})\big)\,,\\
\varphi_j(\widetilde{v}) &= \widetilde{v}(\{j\}) + \frac{1}{2}\big(\widetilde{v}(N) - \widetilde{v}(\{i\}) - \widetilde{v}(\{j\})\big)\,.
\end{aligned}$$

(vii) *Jugador títere* si y sólo si para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ y para todo $i \in N$, jugador títere, se tiene que $\varphi_i(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(\{i\})$.

(viii) *Monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias* si y sólo para todo par de jugadores $i,j \in N$ se verifica que $c_i(\widetilde{v}) \geq c_j(\widetilde{v})$ implica $\varphi_i(\widetilde{v}) \geq \varphi_j(\widetilde{v})$.

(ix) *Monotonía agregada* si y sólo si para todo par de juegos con tasas de participación $(N,\widetilde{v})$, $(N,\widetilde{w})$ en $F\Gamma_1^n$ tales que $\widetilde{v}(N) \geq \widetilde{w}(N)$ y $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \widetilde{w}(\boldsymbol{\tau})$, $\forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, se verifica $\varphi_i(\widetilde{v}) \geq \varphi_i(\widetilde{w})$, para todo jugador $i \in N$.

(x) *Monotonía coalicional* si y sólo si para todo par de juegos con tasas de participación $(N,\widetilde{v})$, $(N,\widetilde{w})$ en $F\Gamma_1^n$ tales que para algún subconjunto de jugadores $T \subseteq N$ se verifican las condiciones 1,2,3 y 4, descritas a continuación, se tiene que $\varphi_i(\widetilde{v}) \geq \varphi_i(\widetilde{w})$, $\forall\ i \in T$.

1. $\widetilde{v}(\tau) = \widetilde{w}(\tau), \ \forall \ \tau \in [0,1]^n$ tal que $T \subsetneq \mathrm{Sop}(\tau) = \{ i \in N \,/\, \tau_i > 0 \}$.
2. $\widetilde{v}(\tau) \geq \widetilde{w}(\tau), \ \forall \ \tau \in [0,1]^n$ tal que $T \subseteq \mathrm{Sop}(\tau)$.
3. El juego diferencia $(N, f) \in F\Gamma_1^n$ definido por $f(\tau) = \widetilde{v}(\tau) - \widetilde{w}(\tau), \ \forall \ \tau \in [0,1]^n$, es no decreciente en aquellos jugadores que son miembros de T y es no creciente en aquellos jugadores que no forman parte de T.
4. En el juego diferencia todos los miembros de T (respectivamente, jugadores que no pertenecen a T) son sustitutos entre sí.

(xi) <u>*Monotonía coalicional estricta*</u> si y sólo si para todo par de juegos con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$, $(N, \widetilde{w})$ en $F\Gamma_1^n$ en las condiciones de la propiedad anterior tales que la función característica del juego diferencia sobre $(0,1)^n$ es estrictamente creciente (decreciente) en aquellos jugadores que forman parte de T $(N \setminus T)$, se verifica $\varphi_i(\widetilde{v}) > \varphi_i(\widetilde{w}), \quad \forall\, i \in T$.

(xii) <u>*Continuidad débil*</u> si y sólo si para toda sucesión de juegos con tasas de participación $\{(N, \widetilde{v}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ contenida en $F\Gamma_1^n$ tal que la sucesión de funciones $\{\widetilde{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\widetilde{v}_0$ se verifica $(N, \widetilde{v}_0) \in F\Gamma_1^n$ y $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(\widetilde{v}_k) = \varphi(\widetilde{v}_0)$.

Observación 2.3. La propiedad (viii), que establece que el pago que, según la solución φ reciben los jugadores i y j debe estar en la misma relación que los valores $c_i(\widetilde{v})$ y $c_j(\widetilde{v})$, extiende al contexto continuo la propiedad esencial del prenucléolo mínimo cuadrático introducida por Ruiz *et al.* (1996) como *monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.*

En efecto, la desigualdad $c_i(\widetilde{v}) \geq c_j(\widetilde{v})$ puede expresarse de forma equivalente como sigue:

$$\int_{\{\tau_i > \tau_j\}} (\tau_i - \tau_j)\widetilde{v}(\tau)\, d\tau \geq \int_{\{\tau_j > \tau_i\}} (\tau_j - \tau_i)\widetilde{v}(\tau)\, d\tau \,.$$

Expresión que permite dar la siguiente interpretación de la propiedad (viii): "Si el valor medio ponderado de aquellas coaliciones en las que la participación del jugador i es superior a la participación del jugador j, es mayor o igual que el valor medio ponderado de aquellas coaliciones en la que, por el contrario, el jugador j participa en mayor grado, entonces el pago recibido por el jugador i no debe ser inferior al pago recibido por el jugador j".

El preservar el espíritu de la propiedad original en el contexto nítido ha sido la razón por la que nos hemos decantado por referirnos a la propiedad (viii) como monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.

En cuanto a la extensión de las propiedades de monotonía introducidas por Young (1985a), únicamente la propiedad de *monotonía fuerte*[3] ha sido extendida al caso continuo (véase Young (1985b)). La extensión de la propiedad de monotonía agregada (en inglés, *aggregate monotonicity*), así como la de la propiedad de monotonía coalicional (en inglés, *coalitional monotonicity*), que proponemos (propiedades (ix) y (x), respectivamente) cumplen los requisitos que consideramos debe cumplir una buena extensión: extienden las propiedades originales (particularizadas al caso nítido coinciden con las clásicas) preservando su espíritu. Si un cierto grupo de jugadores se pone de acuerdo en cooperar para llevar a cabo una inversión con el fin de desarrollar un proyecto más eficiente, hecho que se traduce en una mejora de su productividad, entonces ninguno de los inversores puede verse perjudicado por ello. Un caso particular que surge de modo natural es aquel en el que la función característica del juego diferencia viene dada por

$$f(\tau) = \prod_{i \in T} \tau_i \prod_{i \notin T} (1 - \tau_i)\alpha, \quad \forall \ \tau \in [0,1]^n,$$

donde $\alpha > 0$ representa el aumento del beneficio generado por la mejora del proceso de producción de los miembros de la coalición T.

Proposición 2.6. *La solución igualadora,* $\mathcal{E} : F\Gamma_1^n \longrightarrow I\!R^n$, *verifica las siguientes propiedades:*

(i) *Anonimato.*

(ii) *Aditividad.*

[3]Si $v(S \cup \{i\}) \geq w(S \cup \{i\}), \quad \forall\, S \subseteq N \setminus \{i\} \Rightarrow \varphi_i(v) \geq \varphi_i(w)$.

(iii) *Juego inesencial.*

(iv) *Equivalencia estratégica.*

(v) *Monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.*

(vi) *Continuidad débil.*

(vii) *Monotonía coalicional estricta.*

Demostración: Las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) y (v) se deducen trivialmente de la expresión (2.5) de la solución igualadora obtenida en la proposición 2.3.

En cuanto a la propiedad de continuidad, sea $\{(N, \widetilde{v}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $F\Gamma_1^n$ cualquiera. Si $\{\widetilde{v}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\widetilde{v}_0$, entonces $\widetilde{v}_0 \in L^1(\mu)$ y para todo $i \in N$ se verifica

$$\lim_{k \to \infty} \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}_k(\tau)\, d\tau = \int_{[0,1]^n} \lim_{k \to \infty} \tau_i \widetilde{v}_k(\tau)\, d\tau = \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}_0(\tau)\, d\tau .$$

Esto es, para todo $i \in N$,

$$\lim_{k \to \infty} c_i(\widetilde{v}_k) = c_i(\widetilde{v}_0) .$$

Además,

$$\lim_{k \to \infty} \widetilde{v}_k(N) = \widetilde{v}_0(N) .$$

Luego, para todo $i \in N$ se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{E}_i(\widetilde{v}_k) = \lim_{k \to \infty} \Big(\frac{\widetilde{v}_k(N)}{n} + 12\big(c_i(\widetilde{v}_k) - \overline{c}(\widetilde{v}_k)\big)\Big) = \frac{\widetilde{v}_0(N)}{n} + 12(c_i(\widetilde{v}_0) - \overline{c}(\widetilde{v}_0)) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}_0) .$$

Por último se demostrará que la solución igualadora verifica la propiedad de monotonía coalicional estricta: Sean $(N, \widetilde{v})$, $(N, \widetilde{w})$ dos juegos con tasas de participación cualesquiera en las condiciones de la propiedad en cuestión, entonces la aditividad implica $\mathcal{E}(\widetilde{v}) = \mathcal{E}(\widetilde{w}) + \mathcal{E}(f)$.

Teniendo en cuenta que en el juego diferencia (N, f), los jugadores de T (respectivamente de $N \setminus T$) son sustitutos, se tiene que

$$\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{w}) + \frac{f(N)}{n} + 12(a_1 - \overline{a}), \quad \forall\ i \in T,$$
$$\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{w}) + \frac{f(N)}{n} + 12(a_2 - \overline{a}), \quad \forall\ i \notin T,$$

donde $a_1 = c_i(f)$, $\forall\ i \in T$, $a_2 = c_i(f)$, $\forall\ i \notin T$, y $\overline{a} = \dfrac{ta_1 + (n-t)a_2}{n}$, siendo $t = |T|$.

$f(N) > 0$, entonces si $T = N$ se verifica

$$\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{w}) + \frac{f(N)}{n} > \mathcal{E}_i(\widetilde{w}), \quad \forall\ i \in N.$$

En otro caso, $T \subsetneq N$, para probar la desigualdad $\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) > \mathcal{E}_i(\widetilde{w})$, para todo $i \in T$, es suficiente con probar que $a_1 > \overline{a}$, o equivalentemente que $a_1 > a_2$.

Sean $i \in T$, $j \notin T$, entonces de las propiedades de monotonía del juego diferencia se deduce

$$f(t'_i, t''_j, \tau) \geq f(t''_i, t''_j, \tau) \geq f(t''_i, t'_j, \tau), \quad \forall\ t' \geq t'' \quad \text{y} \quad \forall\ \tau \in [0,1]^{n-2},$$

mientras que

$$f(t'_i, t''_j, \tau) > f(t''_i, t''_j, \tau) > f(t''_i, t'_j, \tau), \quad \forall\ 1 > t' > t'' > 0 \quad \text{y} \quad \forall\ \tau \in (0,1)^{n-2}.$$

Entonces,

$$\int_{\{\tau_i > \tau_j\}} (\tau_i - \tau_j) f(\boldsymbol{\tau})\, d\tau > \int_{\{\tau_i < \tau_j\}} (\tau_j - \tau_i) f(\boldsymbol{\tau})\, d\tau\,,$$

y, por tanto, se verifica $a_1 > a_2$. □

Obviamente, al igual que ocurre en el caso nítido, anonimato implica la propiedad de *tratamiento igualitario*.

Una de las propiedades del prenucléolo mínimo cuadrático que se pierden en la extensión es la de división estándar en juegos bipersonales, como se muestra con el siguiente contraejemplo. El que se pierda esta propiedad es razonable si se tiene en cuenta que, salvo en casos triviales, en un juego con tasas de participación las posibilidades de actuación de los jugadores aumentan considerablemente. Luego, el que la solución igualadora no verifique la propiedad de división estándar en juegos bipersonales pone de manifiesto su capacidad para incorporar la información adicional que recoge el modelo cuando se permite a los jugadores graduar su tasa de participación en una coalición.

Ejemplo 2.1. Considérese el juego bipersonal con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^2$ definido por

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} \tau_1 + \tau_2 - \frac{1}{2}\,, & \text{si } \tau_1 > \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{si } \tau_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces $c_1(\widetilde{v}) = \dfrac{7}{24}$ y $c_2(\widetilde{v}) = \dfrac{11}{48}$. Así, $\mathcal{E}(\widetilde{v}) = (\frac{9}{8}, \frac{3}{8}) \neq (1, \frac{1}{2})$.

El siguiente resultado, que muestra cómo calcular el prenucléolo mínimo cuadrático de un juego nítido a través de su extensión multilineal (Owen (1972)), nos permitirá comprobar que la solución igualadora no cumple aquellas propiedades que no son verificadas por el prenucléolo mínimo cuadrático.

Proposición 2.7. *Dado un juego $(N,v) \in G^n$ cualquiera, sea $(N,\widetilde{v})$ el juego con tasas de participación definido por su extensión multilineal, entonces $\lambda(v) = \mathcal{E}(\widetilde{v})$.*

Demostración: El juego con tasas de participación definido por la extensión multilineal de (N,v) viene dado por

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{S\subseteq N} \prod_{i\in S} \tau_i \prod_{i\notin S}(1-\tau_i)v(S)\,, \qquad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

Por tanto, los coeficientes $c_i(\widetilde{v})$, $i = 1,\dots,n$, pueden expresarse como

$$\begin{aligned} c_i(\widetilde{v}) &= \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \;=\; \sum_{S\subseteq N} \int_{[0,1]^n} \tau_i \prod_{j\in S} \tau_j \prod_{j\notin S}(1-\tau_j)v(S) d\boldsymbol{\tau} \;= \\ &= \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}} v(S) + \frac{1}{3\cdot 2^n} \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} v(S) \;=\; \frac{1}{3\cdot 2^n} a_i(v) + \frac{1}{3\cdot 2^n} \sum_{S\subseteq N} v(S)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Luego,

$$\bar{c}(\widetilde{v}) = \frac{1}{3n\cdot 2^n} \sum_{j\in N} a_j(v) + \frac{1}{3\cdot 2^n} \sum_{S\subseteq N} v(S)\,,$$

y, en consecuencia, para todo $i = 1,\dots,n$, se tiene que

$$\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) = \frac{\widetilde{v}(N)}{n} + 12\big(c_i(\widetilde{v}) - \bar{c}(\widetilde{v})\big) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}}\Big(na_i(v) - \sum_{j\in N} a_j(v)\Big)\,,$$

que coincide con la expresión del prenucléolo mínimo cuadrático obtenida por Ruiz *et al.* (1996). □

Observación 2.4. Como consecuencia de la proposición anterior se obtiene:

1. La solución igualadora de un juego con tasas de participación con corazón no vacío no

pertenece necesariamente al corazón del juego.

2. La solución igualadora no verifica la propiedad de jugador títere (en inglés, *dummy property*).

En efecto, para ello basta con tener en cuenta que el corazón de un juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$ definido como la extensión multilineal de un juego nítido (N, v) coincide con el corazón del juego nítido (ver Tejada (1986)), y que el prenucléolo mínimo cuadrático no necesariamente pertenece al corazón del juego cuando éste es no vacío (ver Ruiz *et al.* (1996)). Por otro lado, para ver que no verifica la propiedad de jugador títere es suficiente con tener en cuenta que si $i \in N$ es un jugador títere en el juego nítido (N, v), entonces i también es un jugador títere en el juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$ generado por su extensión multilineal y que el prenucléolo mínimo cuadrático no verifica esta propiedad (ver Ruiz *et al.* (1996)).

2.3.2 Caracterización axiomática

Por último, se comprueba que la caracterización axiomática del prenucléolo mínimo cuadrático para juegos TU nítidos se extiende al caso que nos ocupa.

Teorema 2.1. *La solución igualadora es el único valor en $F\Gamma_1^n$ que verifica las siguientes propiedades:*

(i) *Eficiencia.*

(ii) *Juego inesencial.*

(iii) *Aditividad.*

(iv) *Monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.*

Demostración : En la proposición 2.6 se estableció que la solución igualadora, eficiente por definición, verifica las propiedades (ii), (iii) y (iv).

Veamos, pues, que se trata del único valor en $F\Gamma_{\mathrm{I}}^n$ verificando todas ellas.

Sea φ un valor en $F\Gamma_{\mathrm{I}}^n$ verificando (i), (ii), (iii) y (iv) cualquiera. Dado un juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_{\mathrm{I}}^n$, a continuación se demostrará que $\varphi(\widetilde{v}) \in PI(\widetilde{v})$ preserva diferencias con respecto al sistema de constantes $\{d^{ij}\}$ definido previamente.

Para cualquier par de jugadores distintos $i, j \in N$, considérese el juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}_{ij})$ definido como la suma del juego original $(N, \widetilde{v})$ y el juego inesencial $(N, \widetilde{w}_{ij})$ dado por

$$\widetilde{w}_{ij}(\tau) = a_i\tau_i + a_j\tau_j\,, \quad \forall\ \tau \in [0,1]^n\,,$$

donde

$$a_i = -\frac{36}{7}\big(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v})\big)\,,$$

$$a_j = \frac{48}{7}\big(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v})\big)\,.$$

$(N, \widetilde{w}_{ij})$ es un juego inesencial, luego de la propiedad (ii) se deduce:

$$\varphi_i(\widetilde{w}_{ij}) = a_i \qquad \text{y} \qquad \varphi_j(\widetilde{w}_{ij}) = a_j\,.$$

Por otro lado, la aditividad implica:

$$\varphi_i(\widetilde{v}_{ij}) = \varphi_i(\widetilde{v}) + \varphi_i(\widetilde{w}_{ij}) = \varphi_i(\widetilde{v}) - \frac{36}{7}\big(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v})\big)\,, \tag{2.13}$$

$$\varphi_j(\widetilde{v}_{ij}) = \varphi_j(\widetilde{v}) + \varphi_j(\widetilde{w}_{ij}) = \varphi_j(\widetilde{v}) + \frac{48}{7}\big(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v})\big)\,. \tag{2.14}$$

Mediante meros ejercicios de cálculo se comprueba que $c_i(\widetilde{v}_{ij}) = c_i(\widetilde{v}) = c_j(\widetilde{v}_{ij})$, luego de la propiedad (iv) se sigue que $\varphi_i(\widetilde{v}_{ij}) = \varphi_j(\widetilde{v}_{ij})$. Así, las expresiones (2.13) y (2.14) coinciden, y despejando se obtiene

$$\varphi_i(\widetilde{v}) - \varphi_j(\widetilde{v}) = 12\big(c_i(\widetilde{v}) - c_j(\widetilde{v})\big)\,, \qquad \forall\ i,j \in N\,.$$

Por otro lado, se tiene que $\mathcal{E}(\widetilde{v})$ es la única preimputación que preserva diferencias con respecto a dicho sistema de constantes, entonces se debe verificar $\mathcal{E}(\widetilde{v}) = \varphi(\widetilde{v})$. □

Proposición 2.8. *Los axiomas* (i), (ii), (iii), (iv) *son lógicamente independientes; i.e., existen valores en* $F\Gamma_1^n$ *que no satisfacen exactamente cada uno de ellos.*

Demostración: Para cada axioma propondremos un valor que no lo verifica en tanto que si verifica el resto.

($\neg$ i) Sea φ^1 el valor en $F\Gamma_1^n$ definido como

$$\varphi_i^1(\widetilde{v}) = \int_{[0,1]^n} 6\tau_i\big(\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \widetilde{v}((1-\tau_i)_i, \boldsymbol{\tau})\big)\, d\boldsymbol{\tau}\,, \quad \forall\ i \in N\,, \quad \forall\ (N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n\,. \tag{2.15}$$

Entonces, φ^1 satisface todos los axiomas a excepción del axioma de eficiencia. En efecto, la expresión anterior (2.15) se puede escribir como

$$\varphi_i^1(\widetilde{v}) = 6\Big(2c_i(\widetilde{v}) - \int_{[0,1]^n} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau}\Big)\,, \tag{2.16}$$

y de aquí, se deduce trivialmente que φ^1 verifica (ii), (iii) y (iv). Veamos que, en general, no es eficiente. Para ello se comprobará que para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v})$ multilineal se verifica $\varphi^1(\widetilde{v}) = \beta(v)$, siendo $\beta(v)$ el valor de Banzhaf–Coleman (Banzhaf (1965), Coleman (1971)) del juego nítido (N,v), definido por la restricción de $\widetilde{v}$ al conjunto de coaliciones nítidas: Sustituyendo en la expresión (2.16) el valor de

$c_i(\widetilde{v})$ dado por (2.12), y teniendo en cuenta que

$$\int_{[0,1]^n} \widetilde{v}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2^n} \sum_{S \subseteq N} v(S),$$

se tiene que para todo jugador $i \in N$ se verifica

$$\varphi_i^1(\widetilde{v}) = \frac{1}{2^{n-1}} \Big(\sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} v(S) - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} v(S) \Big) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \big(v(S) - v(S \setminus \{i\}) \big) = \beta_i(v).$$

Luego, $\varphi^1(\widetilde{v}) = \beta(v)$. Entonces, como el valor de Banzhaf–Coleman no es eficiente en general, y $\widetilde{v}(N) = v(N)$, se tiene el resultado.

($\neg$ ii) Sea φ^2 el valor en $F\Gamma_1^n$ definido por

$$\varphi_i^2(\widetilde{v}) = \frac{\widetilde{v}(N)}{n} + \big(c_i(\widetilde{v}) - \bar{c}(\widetilde{v}) \big), \quad \forall\ i \in N, \quad \forall\ (N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n.$$

Trivialmente, se comprueba que φ^2 satisface todos los axiomas excepto el axioma de juego inesencial.

($\neg$ iii) Sea φ^3 el valor en $F\Gamma_1^n$ que asigna a cada juego $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ el vector de pagos que se obtiene mediante el siguiente algoritmo.

PASO 1: Considérese el conjunto $K = \big\{ j \in N \,/\, \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) < \widetilde{v}(\{j\}) \big\}$. Si $K = \emptyset$, entonces $\varphi^3(\widetilde{v}) := \mathcal{E}(\widetilde{v})$. Parar.

En otro caso, ir al paso siguiente.

PASO 2: Sea $j_0 \in K$ tal que $\mathcal{E}_{j_0}(\widetilde{v}) = \min_{j \in K} \mathcal{E}_j(\widetilde{v})$.

Considérese la partición S, T del conjunto de jugadores N dada por

$$\begin{aligned} T &:= \big\{ i \in N \setminus K \,/\, c_i(\widetilde{v}) < c_{j_0}(\widetilde{v}) \big\}, \\ S &:= \big\{ i \in N \,/\, c_i(\widetilde{v}) \geq c_{j_0}(\widetilde{v}) \big\}. \end{aligned}$$

Si $T = \emptyset$, entonces $\varphi^3(\widetilde{v}) := \mathcal{E}(\widetilde{v})$. Parar.

En otro caso, ir al paso siguiente.

PASO 3:

$$\varphi_j^3(\widetilde{v}) := \begin{cases} \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - \dfrac{s\delta}{t}, & si \quad j \in T, \\ \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) + \delta, & si \quad j \in S, \end{cases}$$

donde $\delta = \widetilde{v}(\{j_0\}) - \mathcal{E}_{j_0}(\widetilde{v}) > 0$, $s = |S|$ y $t = |T|$. Parar.

φ^3 verifica todos los axiomas menos el referente a la aditividad. La demostración de la primera afirmación se remite al apéndice A. El siguiente ejemplo muestra que, en general, φ^3 no es aditivo.

Sean $(N, \widetilde{v}_1)$ y $(N, \widetilde{v}_2)$ los juegos con tasas de participación definidos por $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$\widetilde{v}_1(\boldsymbol{\tau}) = \tau_1\tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_3 - \tau_2\tau_3 + \tau_2, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n,$$

$$\widetilde{v}_2(\boldsymbol{\tau}) = \tau_1\tau_3 + 2\tau_1\tau_2 + 2\tau_2\tau_3 - \tau_2 - 2\tau_1\tau_2\tau_3, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n,$$

entonces, se verifica

	$\mathcal{E}(\widetilde{v})$	K	T	S	δ	$\varphi^3(\widetilde{v})$
$\widetilde{v}_1$	$(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3})$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\frac{1}{6}$	$(1,1,0)$
$\widetilde{v}_2$	$(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$	$\emptyset$				$(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$
$\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2$	$(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6})$	$\emptyset$				$(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6})$

($\neg$ iv) Sea φ^4 el valor en $F\Gamma_1^n$ definido como el valor de Shapley (Shapley (1953)) del juego TU nítido (N, v) dado por la restricción de $\widetilde{v}$ al conjunto de coaliciones nítidas, i.e.,

$$\varphi_i^4(\widetilde{v}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(\widetilde{v}(\mathbf{x}^S) - \widetilde{v}(\mathbf{x}^{S\setminus\{i\}})\right), \quad \forall\, i \in N, \quad \forall\, (N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n.$$

Obviamente, φ^4 verifica los axiomas (i), (ii) y (iii). En lo que respecta al axioma de monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias, sea $(N,\widetilde{v})$ un juego con tasas de participación multilineal cualquiera, entonces de la expresión (2.12) se deduce:

$$c_i(\widetilde{v}) \geq c_j(\widetilde{v}) \iff a_i(v) \geq a_j(v)\,.$$

Luego, como el valor de Shapley para juegos TU nítidos no verifica la propiedad de monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias nítida[4] (ver Ruiz *et al.* (1996)), entonces φ^4 no verifica el axioma (iv). □

2.3.3 Ejemplo

El ejemplo que vamos a considerar modeliza la siguiente situación:

1. Cada jugador $i \in N$ dispone de un capital $\omega_i \in I\!R_+$ para invertir en un proyecto urbanístico.
2. Para poder llevar a cabo el proyecto se debe realizar una inversión mínima de $\ell \in I\!R_+$, $\ell \leq \sum_{i\in N} \omega_i$.
3. Para finalizar las obras dentro del plazo estipulado en el contrato se debe realizar una inversión mínima de $u \in I\!R_+,\ \ell \leq u$. Si se finaliza a tiempo se recibe un pago de $k \in I\!R_+$, $k \geq u$.
4. Cuando se invierte una cantidad superior a ℓ, pero inferior a u, el proyecto se puede llevar a cabo, pero no se finaliza a tiempo. En dicho caso, se debe asumir una penalización que dependerá del tiempo transcurrido entre la fecha límite y la fecha de entrega. Se supone que el tiempo que el proyecto se retrasa se puede estimar en función de la inversión

[4] Si $a_i(v) \geq a_j(v)$, entonces el jugador i no debe recibir un pago inferior al recibido por el jugador j.

realizada, entonces el pago que reciben los inversores viene dado por $k - p(z)$, siendo z la inversión realizada, y $p : [\ell, u] \to I\!R_{+}$, a la que denominaremos *función de penalización*, una función monótona no creciente verificando las condiciones de contorno $p(\ell) = k$ y $p(u) = 0$.

Si los jugadores pueden participar en el proyecto invirtiendo cualquier fracción de su capital, entonces la situación anterior se puede describir mediante un juego TU con tasas de participación, $(N, \widetilde{v})$. La tasa de participación de un jugador en la coalición $\tau \in [0,1]^n$, representa la fracción de su capital que pone a disposición de la coalición. Para toda coalición con tasas de participación $\tau \in [0,1]^n$, el pago que recibe viene dado entonces por

$$\widetilde{v}(\tau) = \begin{cases} 0\,, & \sum\limits_{i\in N} \omega_i \tau_i \leq \ell\,, \\ k - p(\sum\limits_{i\in N} \omega_i \tau_i)\,, & \ell < \sum\limits_{i\in N} \omega_i \tau_i < u\,, \\ k\,, & \sum\limits_{i\in N} \omega_i \tau_i \geq u\,. \end{cases}$$

Las funciones de penalización que consideramos más factibles son:

- *Penalización por tramos*: Funciones de penalización en escalera.
- *Penalización exponencial*: Familia paramétrica continua en α de funciones de la forma

$$p_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{k}{(u-\ell)^\alpha}\,(u-z)^\alpha\,, & \forall\ z \in [\ell, u]\,, \quad \text{si } \alpha \in (0,1]\,, \\ k\, I_{[\ell,u)}(z)\,, \quad \forall\ z \in [\ell, u]\,, & \quad \text{si } \alpha = 0\,, \end{cases}$$

donde $I_{[\ell,u)}$ denota la función indicatriz del conjunto $[\ell, u)$.

Consideremos el ejemplo definido por $N = \{1,2,3\}$, $\omega = (500, 1.000, 800)$, $\ell = 1.000$, $u = 2.000$ y $k = 3.000$. Para p_α, función exponencial con $\alpha = \frac{1}{2}$, se tiene que para toda coalición $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^3$,

$$\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 0\,, & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i \tau_i \leq 1.000\,, \\ 3.000 - \dfrac{300}{\sqrt{10}}\sqrt{2.000 - 500\tau_1 - 1.000\tau_2 - 800\tau_3}\,, & 1.000 < \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i \tau_i < 2.000\,, \\ 3.000\,, & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i \tau_i \geq 2.000\,. \end{cases}$$

Considérense los siguientes subconjuntos del hipercubo unidad $[0,1]^3$:

$$B_1 = \{\, \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^3 \,/\, 500\tau_1 + 1.000\tau_2 + 800\tau_3 \geq 1.000 \,\}\,,$$

$$B_2 = \{\, \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^3 \,/\, 1.000 \leq 500\tau_1 + 1.000\tau_2 + 800\tau_3 \leq 2.000 \,\}\,.$$

Entonces, para cada $i \in N$, $c_i(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}})$, viene dado por:

$$c_1(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = \int_{B_1} 3.000\tau_1 d\boldsymbol{\tau} - \int_{B_2} \Big(\tau_1 \frac{300}{\sqrt{10}}\sqrt{2.000 - 500\tau_1 - 1.000\tau_2 - 800\tau_3}\Big) d\boldsymbol{\tau} = 290'905\,,$$

$$c_2(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = 345'235\,,$$

$$c_3(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = 323'331\,.$$

Entonces,

$$\mathcal{E}_1(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = \frac{3.000}{3} + 12(290'95 - 319'824) = 652'972\,,$$

$$\mathcal{E}_2(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = \frac{3.000}{3} + 12(345'235 - 319'824) = 1.304'93\,,$$

$$\mathcal{E}_3(\widetilde{v}_{\frac{1}{2}}) = \frac{3.000}{3} + 12(323'331 - 319'824) = 1.042'08\,.$$

Teniendo en cuenta que la familia paramétrica $\{p_\alpha,\ \alpha \in [0,1]\}$ es continua en α, y que $|\widetilde{v}_\alpha(\boldsymbol{\tau})| \leq 3.\underline{000}$, para toda coalición $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^3$, siendo $\widetilde{v}_\alpha$ la función característica del juego cuando la función de penalización es p_α, $\alpha \in [0,1]$, se tiene que, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in[0,1]}} \mathcal{E}(\widetilde{v}_\alpha) = \mathcal{E}(\widetilde{v}_{\alpha_0}), \qquad \forall\ \alpha_0 \in [0,1].$$

Para $\alpha = 0$, la solución igualadora del juego es

$$\mathcal{E}(\widetilde{v}_0) = (982'281, 1.012'66, 1.005'06).$$

A medida que α crece hacia 1 las diferencias entre el pago que la solución igualadora otorga a los jugadores se van acentuando, preservando siempre el orden relativo dado por el capital de que dispone cada jugador. $\mathcal{E}_2(\widetilde{v}_\alpha)$ y $\mathcal{E}_3(\widetilde{v}_\alpha)$, como funciones de α, son crecientes, mientras que $\mathcal{E}_1(\widetilde{v}_\alpha)$ es decreciente. Para $\alpha = 1$, se tiene que

$$\mathcal{E}(\widetilde{v}_1) = (471'052, 1.476'44, 1.052'5).$$

2.4 La solución lexicográfica para juegos con tasas de participación

En esta sección se analiza la solución lexicográfica para juegos con tasas de participación (Sakawa y Nishizaki (1994)) como extensión al caso continuo del nucléolo mínimo cuadrático (Ruiz *et al.* (1996)). En primer lugar, comprobamos que la solución lexicográfica admite una caracterización en base a la función de exceso de las coaliciones análoga a la que define dicho valor. El adoptar este enfoque nos permitirá extender al caso continuo el estudio del nucléolo mínimo cuadrático llevado a cabo por Ruiz *et al.* (1996). En particular, nos proporcionará un algoritmo polinomial para obtener la solución lexicográfica de un juego con tasas de participación a partir de su solución igualadora, para la que se obtuvo en la sección anterior una expresión analítica.

Asociado a cualquier juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, considérese el siguiente problema de minimización:

Problema continuo 1

$$\begin{aligned} \text{mín} & \int_{[0,1]^n} \left(\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v})\right)^2 d\boldsymbol{\tau} \\ \text{s.a.} & \quad \sum_{i\in N} x_i = \widetilde{v}(N)\,, \\ & \quad\quad x_i \geq \widetilde{v}(\{i\})\,, \quad i = 1,\dots,n\,. \end{aligned}$$

En primer lugar, y con el fin de caracterizar a la solución lexicográfica como la única solución del problema anterior, será necesario, una vez comprobada la existencia y unicidad de dicha solución, obtener una caracterización en función del vector de excesos de los jugadores similar a la obtenida por Ruiz *et al.* (1996) en el lema 2.1.

Lema 2.4. *Para todo juego con tasas de participación $(N,\widetilde{v}) \in IF\Gamma_1^n$ existe una única solución del Problema continuo 1 definido anteriormente. Dicha solución se caracteriza por ser la única imputación $\mathbf{z}$ verificando para todo jugador $j \in N$,*

$$z_j > \widetilde{v}(\{j\}) \;\Rightarrow\; \widetilde{w}(j,\mathbf{z}) = \max_{i\in N} \widetilde{w}(i,\mathbf{z})\,. \tag{2.17}$$

Demostración: El conjunto de imputaciones del juego, región factible del problema de minimización 1, es compacto. Por otro lado, de la definición se deduce directamente que la función objetivo f, dada por

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \left(\widetilde{e}(\tau,\mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v})\right)^2 d\tau\,, \qquad \forall\ \mathbf{x} \in I\!R^n\,,$$

es estrictamente convexa, luego el mínimo se alcanza y es único.

Obviamente, si $I(\widetilde{v}) = \left\{\left(\widetilde{v}(\{1\}),\dots,\widetilde{v}(\{n\})\right)\right\}$, entonces el mínimo del problema se alcanza en $\left(\widetilde{v}(\{1\}),\dots,\widetilde{v}(\{n\})\right)$, que trivialmente verifica la condición (2.17).

En otro caso, para demostrar que el mínimo del problema se caracteriza por ser la única imputación verificando la condición (2.17) para todo jugador $j \in N$, veamos, en primer lugar, que si $I(\widetilde{v}) \neq \{(\widetilde{v}(\{1\}),\dots,\widetilde{v}(\{n\}))\}$, entonces las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker son necesarias y suficientes de optimalidad global para el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0\,, \qquad i = 1,\dots,n\,, \\ & h(\mathbf{x}) = 0\,, \\ & \quad \mathbf{x} \in I\!R^n\,, \end{array}$$

donde f es la función objetivo anterior, $g_i(\mathbf{x}) = \widetilde{v}(\{i\}) - x_i$, para todo $i = 1,\dots,n$, y $h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} x_i - \widetilde{v}(N)$.

- La función objetivo f es diferenciable y las restricciones del problema son lineales, entonces g_i es diferenciable en $\mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in I\!R^n$, $\forall\ i = 1,\dots,n$, y h es una función de clase 1 en $I\!R^n$.
  Además, $\nabla g_i(\mathbf{x}) = (-1_i, \mathbf{0})$, $\forall\ \mathbf{x} \in I\!R^n$, $i = 1,\dots,n$, y $\nabla h(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$, $\forall \mathbf{x} \in I\!R^n$, luego los vectores $\{\nabla h(\mathbf{x}), \nabla g_i(\mathbf{x}),\, i \in I\}$, donde $I = \{i \,/\, g_i(\mathbf{x}) = 0\}$, son linealmente dependientes si y sólo si $I = \{1,\dots,n\}$, en cuyo caso $x_i = \widetilde{v}(\{i\})$, $\forall i = 1,\dots,n$ y

$\sum_{i\in N} x_i = \widetilde{v}(N)$, entonces $I(\widetilde{v}) = \left\{ \left(\widetilde{v}(\{1\}), \ldots , \widetilde{v}(\{n\})\right) \right\}$.

– La función objetivo es pseudoconvexa. Las restricciones son cuasiconvexas y cuasicóncavas, para todo $\mathbf{x} \in I\!R^n$.

Luego, las *condiciones de Karush–Kuhn–Tucker son necesarias y suficientes de optimalidad global*. Entonces, la solución del problema 1 se caracteriza por ser la única solución factible $\mathbf{z} \in I\!R^n$ para la que existen constantes $v \in I\!R$, $u_1, \ldots , u_n$, $u_i \geq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots , n$, verificando:

$$\nabla f(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{n} u_i \nabla g_i(\mathbf{z}) + v\nabla h(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\,, \tag{2.18}$$

$$u_i g_i(\mathbf{z}) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots , n\,. \tag{2.19}$$

La función característica del juego es integrable en $[0,1]^n$, entonces la función objetivo f es de clase 1 en $I\!R^n$ y la derivada parcial de f con respecto a x_i viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\partial(\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}) - \overline{E}(\widetilde{v}))^2}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, d\boldsymbol{\tau} = \int_{[0,1]^n} -2\tau_i\Big(\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{i\in N} x_i\tau_i - \overline{E}(\widetilde{v})\Big)\, d\boldsymbol{\tau} =$$

$$= -2\widetilde{w}(i, \mathbf{x}) + \overline{E}(\widetilde{v})\,.$$

Así, las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker, quedan como

$$-2\widetilde{w}(i, \mathbf{z}) + \overline{E}(\widetilde{v}) - u_i + v = 0\,, \qquad i = 1, \ldots , n\,, \tag{2.20}$$

$$u_i g_i(\mathbf{z}) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots , n\,. \tag{2.21}$$

Luego, de (2.21) se deduce que, para todo $j \in N$ tal que $z_j > \widetilde{v}(\{j\})$ debe ser $u_j = 0$ y, por consiguiente, de (2.20) se sigue que

$$\widetilde{w}(j,\mathbf{z}) = \frac{\overline{E}(\widetilde{v}) + v}{2}.$$

Por otro lado, como $u_i \geq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, entonces de (2.20) se deduce

$$\widetilde{w}(i,\mathbf{z}) = \frac{\overline{E}(\widetilde{v}) + v - u_i}{2} \leq \frac{\overline{E}(\widetilde{v}) + v}{2} = \widetilde{w}(j,\mathbf{z}), \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Luego, la solución de las ecuaciones de Karush–Kuhn–Tucker es una imputación verificando la condición establecida en la proposición. En particular, existe una imputación en esas condiciones.

Veamos que si $\mathbf{z} \in I(\widetilde{v})$ verifica la condición establecida en la proposición, entonces es solución de las ecuaciones de Karush–Kuhn–Tucker. Para ello, sea $M = \max_{i \in N} \widetilde{w}(i,\mathbf{z})$, entonces es suficiente con tomar

$$\begin{aligned} v &= 2M - \overline{E}(\widetilde{v}), \\ u_i &= 2(M - \widetilde{w}(i,\mathbf{z})), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Obviamente, $u_i \geq 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, $v \in I\!R$ y se satisfacen las condiciones (2.20) y (2.21). □

Proposición 2.9. *Para todo juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in IF\Gamma_1^n$ la solución del problema continuo 1 es la solución lexicográfica del juego.*

Demostración: Análoga a la demostración de la equivalencia entre la solución lexicográfica para juegos nítidos y el nucléolo mínimo cuadrático (proposición 2.1).

La caracterización de la solución lexicográfica obtenida en el lema 2.4 valida el uso del algoritmo propuesto por Ruiz *et al.* (1996) para calcular el nucléolo mínimo cuadrático a partir del prenucléolo mínimo cuadrático como un método para obtener la solución lexicográfica a través de su solución igualadora.

Algoritmo (Ruiz *et al.*, 1996): Constrúyase la secuencia de pares $(\mathbf{x}^\ell, M^\ell)$, $\ell = 1,\dots,k$, $1 \leq k \leq n$, donde $\mathbf{x}^\ell$ es un vector de pagos y M^ℓ es un subconjunto de jugadores, definidos inductivamente por

PASO 1 : $\mathbf{x}^1 := \mathcal{E}(\widetilde{v})$, $M^1 := \{j \in N \,/\, \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) < \widetilde{v}(\{j\})\}$ y $\ell = 1$,

donde $\mathcal{E}(\widetilde{v})$ es la solución igualadora del juego.

PASO 2 :
$$x_j^{\ell+1} := \begin{cases} x_j^\ell + \dfrac{\sum\limits_{j \in M^\ell} (x_j^\ell - \widetilde{v}(\{j\}))}{n - m_\ell}, & \text{para todo } j \notin M^\ell, \\ \widetilde{v}(\{j\}), & \text{para todo } j \in M^\ell, \end{cases}$$

y $M^{\ell+1} := M^\ell \cup \{j \in N \,/\, x_j^{\ell+1} < \widetilde{v}(\{j\})\}$.

PASO 3 : Si $M^{\ell+1} = M^\ell$, entonces $\mathbf{z} := \mathbf{x}^{\ell+1}$. PARAR.

En otro caso, $\ell := \ell + 1$ e ir al PASO 2.

Obviamente, el proceso descrito anteriormente finaliza, a lo sumo tras $n-1$ iteraciones, y el vector de pagos que se obtiene al final del proceso $\mathbf{z}$ es una imputación verificando la condición (2.17).

El siguiente resultado, que muestra cómo calcular el nucléolo mínimo cuadrático de un juego clásico a través de su extensión multilineal (Owen (1972)), viene a reforzar la consideración de la solución lexicográfica como la extensión natural del nucléolo mínimo cuadrático al caso continuo.

Proposición 2.10. *Dado un juego TU nítido $(N, v) \in IG^n$, sea $(N, \widetilde{v})$ el juego con tasas de participación definido por su extensión multilineal, entonces $\Lambda(v) = L(\widetilde{v})$.*

Demostración: La demostración de este resultado se basa en el hecho de que el exceso de un jugador $i \in N$ con respecto a cualquier imputación $\mathbf{x}$, en el juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$, se puede expresar en función del correspondiente exceso en el juego nítido como sigue: De las expresiones (2.6) y (2.12) se deduce

$$\widetilde{w}(i, \mathbf{x}) = \frac{1}{3 \cdot 2^n} a_i(v) - \frac{1}{12} x_i - \frac{1}{4} v(N) + \frac{1}{3 \cdot 2^n} \sum_{S \subseteq N} v(S).$$

Luego,

$$3 \cdot 2^n \widetilde{w}(i, \mathbf{x}) = a_i(v) - 2^{n-2} x_i - 2^{n-2} \widetilde{v}(N) - 2^{n-1} \widetilde{v}(N) + \sum_{S \subseteq N} v(S).$$

Entonces, teniendo en cuenta la expresión (2.1) del exceso en un juego nítido de un jugador $i \in N$ respecto de $\mathbf{x}$, se tiene que para todo vector de pagos $\mathbf{x} \in I(v) = I(\widetilde{v})$, se verifica

$$\widetilde{w}(i, \mathbf{x}) = k w(i, \mathbf{x}) + a,$$

donde k y a se definen como

$$k = \frac{1}{3 \cdot 2^n} > 0,$$

$$a = \frac{\sum_{S \subseteq N} v(S) - 2^{n-1} v(N)}{3 \cdot 2^n}.$$

Así, el exceso de un jugador en el juego con tasas de participación se obtiene mediante una transformación afín positiva del correspondiente exceso en el juego nítido; entonces, teniendo en cuenta que el conjunto de imputaciones de ambos juegos es el mismo, se obtiene el resultado deseado. $\square$

Por último, comprobaremos qué propiedades del nucléolo mínimo cuadrático siguen siendo satisfechas por la solución lexicográfica.

Proposición 2.11. *La solución lexicográfica,* $L : IF\Gamma_1^n \longrightarrow I\!R^n$, *verifica las siguientes propiedades:*

(i) *Anonimato.*

(ii) *Juego inesencial.*

(iii) *Equivalencia estratégica.*

(iv) *Continuidad débil.*

Demostración: Las propiedades (i), (ii) y (iii) se deducen trivialmente de la definición de la solución lexicográfica sin mas que aplicar la expresión (2.6) del exceso de un jugador con respecto a una preimputación obtenida en la sección anterior.

En cuanto a la continuidad, sea $\{(N, \widetilde{v}_r)\}_{r\in I\!N}$ una sucesión de juegos con tasas de participación contenida en $IF\Gamma_1^n$ cualquiera.

Si la sucesión $(\widetilde{v}_r)_{r\in I\!N}$ converge uniformemente a $\widetilde{v}_0$ y $L(\widetilde{v}_r) \to L_0$ cuando $r \to \infty$, entonces $\widetilde{v}_0 \in L^1(\mu)$ e $I(\widetilde{v}_0) \neq \emptyset$, i.e., $\widetilde{v}_0 \in IF\Gamma_1^n$.

Además, para todo $i \in N$, se verifica

$$\lim_{r\to\infty} \widetilde{w}_r(i, L(\widetilde{v}_r)) = \lim_{r\to\infty} \int_{[0,1]^n} \tau_i\Big(\widetilde{v}_r(\tau) - \sum_{j\in N} \tau_j L_j(\widetilde{v}^r)\Big)\, d\tau =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}_r(\tau)\, d\tau - \lim_{r\to\infty} \sum_{j\in N} \Big(L_j(\widetilde{v}_r) \int_{[0,1]^n} \tau_i\tau_j\, d\tau\Big) =$$

$$= \int_{[0,1]^n} \tau_i \widetilde{v}_0(\tau)\, d\tau - \frac{1}{3} L_i(\widetilde{v}_0) + \frac{1}{4} \sum_{j\neq i} L_j(\widetilde{v}_0) = \widetilde{w}_0(i, L_0)\,.$$

Veamos que $L_0 \in I(\widetilde{v}_0)$ verifica la condición (2.17) establecida en el lema 2.4.

Sea $i \in N$, un jugador tal que $L_{0i} > \widetilde{v}_0(\{i\})$. Las sucesiones $(L_i(\widetilde{v}_r))_{r\in I\!N}$ y $(\widetilde{v}_r(\{i\}))_{r\in I\!N}$ convergen, respectivamente, a L_{0i} y $\widetilde{v}_0(\{i\})$, cuando r tiende a infinito. Entonces, la desigualdad $L_i(\widetilde{v}_r) > \widetilde{v}_r(\{i\})$ se debe satisfacer para infinitos r. Sea $\mathcal{P} = \{r \in I\!N \,/\, L_i(\widetilde{v}_r) > \widetilde{v}_r(\{i\})\}$, entonces

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in\mathcal{P}}} L(\widetilde{v}_r) = L_0\,, \tag{2.22}$$

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in\mathcal{P}}} \widetilde{w}_r(j, L(\widetilde{v}_r)) = \widetilde{w}_0(j, L_0)\,, \quad \forall\ j \in N\,. \tag{2.23}$$

Por otro lado, por ser $L(\widetilde{v}_r)$ la solución lexicográfica del juego $(N, \widetilde{v}_r)$, se tiene que

$$\max_{j\in N} \widetilde{w}_r(j, L(\widetilde{v}_r)) = \widetilde{w}_r(i, L(\widetilde{v}_r))\,, \quad \forall\ r \in \mathcal{P}\,,$$

entonces, de (2.23) y de la continuidad de la función máximo, se deduce que

$$\widetilde{w}_0(i, L_0) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in\mathcal{P}}} \widetilde{w}_r(i, L(\widetilde{v}_r)) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in\mathcal{P}}} \max_{j\in N} \widetilde{w}_r(j, L(\widetilde{v}_r)) = \max_{j\in N} \widetilde{w}_0(j, L_0)\,.$$

Así pues, L_0 satisface la condición que caracteriza a la solución lexicográfica del juego. □

Observación 2.5. Con respecto a la solución igualadora se han perdido las propiedades de aditividad y de monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias (contra–ejemplo 2.2). Sin embargo, esta última se preserva restringiéndonos a la subclase de los juegos normalizados $(0, 1)$, como se comprueba a continuación (proposición 2.12).

Ejemplo 2.2. Considérese el juego tripersonal con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$ definido por

$$\widetilde{v}(\tau) = \tau_2 - \tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_3 + \tau_1\tau_2\tau_3\,,$$

entonces,

$$c_1(\widetilde{v}) = \int_{[0,1]^3} \tau_1 \widetilde{v}(\tau)\, d\tau = \frac{3}{8},$$

$$c_2(\widetilde{v}) = \int_{[0,1]^3} \tau_2 \widetilde{v}(\tau)\, d\tau = \frac{3}{8},$$

$$c_3(\widetilde{v}) = \int_{[0,1]^3} \tau_3 \widetilde{v}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{3}.$$

Luego, la solución igualadora del juego es $\mathcal{E}(\widetilde{v}) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right)$. Como $\mathcal{E}_2(\widetilde{v}) = \frac{5}{6} < \widetilde{v}(\{2\})$, entonces, aplicando el algoritmo de Ruiz *et al.* (1996), se tiene que $L(\widetilde{v}) = \left(\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}\right)$. Pero $c_1(\widetilde{v}) = c_2(\widetilde{v})$, entonces la solución lexicográfica no verifica la propiedad de monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.

Proposición 2.12. *Sea* $\widetilde{F\Gamma}_1^n = \left\{(N, \widetilde{v}) \in IF\Gamma_1^n \,/\, \widetilde{v}(\{i\}) = \widetilde{v}(\{j\})\ \forall i, j \in N\right\}$*, entonces sobre la clase de juegos* $\widetilde{F\Gamma}_1^n$*, la solución lexicográfica verifica la propiedad de monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.*

Demostración: Se basa en el hecho de que la solución igualadora verifica esta propiedad y se deduce aplicando el algoritmo descrito anteriormente para obtener la solución lexicográfica a partir de la solución igualadora.

Dado un juego con tasas de participación cualquiera $(N, \widetilde{v}) \in \widetilde{F\Gamma}_1^n$, sean $i, j \in N$ dos jugadores cualesquiera. Sin perdida de generalidad supóngase que $c_i(\widetilde{v}) \geq c_j(\widetilde{v})$. Se demostrará a continuación que $L_i(\widetilde{v}) \geq L_j(\widetilde{v})$.

Si la solución igualadora del juego $\mathcal{E}(\widetilde{v})$ es individualmente racional, entonces $L(\widetilde{v}) = \mathcal{E}(\widetilde{v})$ y, por tanto $L_i(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) \geq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) = L_j(\widetilde{v})$. En otro caso, se deben considerar las siguientes posibilidades:

1. Si $\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) < \widetilde{v}(\{i\})$, entonces $\widetilde{v}(\{j\}) = \widetilde{v}(\{i\}) > \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) \geq \mathcal{E}_j(\widetilde{v})$. Luego

$$L_i(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(\{i\}) = \widetilde{v}(\{j\}) = L_j(\widetilde{v})\,.$$

2. Si $\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) \geq \widetilde{v}(\{i\})$, entonces se pueden dar dos casos:

   (a) Si $\mathcal{E}_j(\widetilde{v}) < \widetilde{v}(\{j\})$, entonces $L_j(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(\{j\}) = \widetilde{v}(\{i\}) \leq L_i(\widetilde{v})$.

   (b) Si $\mathcal{E}_j(\widetilde{v}) \geq \widetilde{v}(\{j\})$, entonces existen $p_i \geq 0$ y $p_j \geq 0$ tales que

$$L_i(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) - p_i\,,$$
$$L_j(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - p_j\,.$$

   Obviamente, como $\mathcal{E}_i(\widetilde{v}) \geq \mathcal{E}_j(\widetilde{v})$ y $\widetilde{v}(\{i\}) = \widetilde{v}(\{j\})$ del algoritmo se deduce que $p_i \geq p_j$. Además se verifica:

   Si $p_j < p_i \implies L_j(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(\{j\}) = \widetilde{v}(\{i\}) \leq L_i(\widetilde{v})$.

   Si $p_j = p_i \implies L_j(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - p_i \leq \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) - p_i = L_i(\widetilde{v})$.

□

Volviendo al ejemplo 2.2, si se considera la normalización $(0,1)$ del juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v})$, cuya función característica viene dada por

$$\widetilde{v}_{(0,1)}(\boldsymbol{\tau}) = -\tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_3 + \tau_1\tau_2\tau_3\,,$$

entonces $L(\widetilde{v}_{(0,1)}) = L(\widetilde{v}) - (0,1,0) = (\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$, que no viola la condición de monotonía con respecto a las contribuciones marginales. Esto se debe a que la operación de normalización de un juego no respeta el orden relativo entre los coeficientes de contribución de los jugadores.

En este caso, se tiene que

$$c_1(\widetilde{v}_{(0,1)}) = c_1(\widetilde{v}) - \int_{[0,1]^3} \tau_1 \tau_2 \, d\tau = \frac{1}{8} > \frac{1}{24} = c_2(\widetilde{v}) - \int_{[0,1]^3} \tau_2^2 \, d\tau = c_2(\widetilde{v}_{(0,1)}) \, .$$

2.5 La solución igualadora como un sistema de precios

En esta sección se estudian las posibilidades de la solución igualadora como método de solución al *problema de asignación de costes.* En dicho problema se supone que varios productos heterogéneos y divisibles son elaborados por un proceso de producción común de manera que, una vez establecida la cantidad de cada uno de ellos a ser producida, el coste derivado de su producción conjunta debe ser redistribuido en forma de costes asignables a la producción de cada uno de los bienes individuales.

Para resolver este problema, ya clásico, se supone que la única información de que se dispone es de una *función de coste*, que asigna a cada *vector de producción*[5] su coste conjunto de producción, así como de la cantidad total a producir.

De entre las diversas soluciones propuestas en la literatura destacamos las siguientes:

- Mecanismo de asignación de costes determinado por los *costes marginales* (Samet y Tauman (1982)), cuyo principal problema radica en el hecho de que, en general, no se recupera el coste conjunto de producción.
- Mecanismo de asignación de costes de Shapley–Shubik (Shubik (1962)), que se define como el valor de Shapley (Shapley (1953)) de un cierto juego *TU* asociado al problema.
- Sistema de precios de Aumann–Shapley (Billera y Heath (1982), Mirman y Tauman (1982), Young (1985b)), inspirado en el valor de Aumann–Shapley (1974) para juegos no atómicos.

[5]vector que indica la cantidad que se produce de cada uno de los productos.

- Distintas extensiones del *mecanismo de reparto de costes en serie* para bienes homogéneos de Moulin y Shenker (1992): Friedman y Moulin (1995), Sprumont (1996) y Koster, Tijs y Borm (1996).

Todos estos mecanismos de asignación de precios, aunque algunos de ellos den soluciones inspiradas en un proceso de producción dinámico, resuelven el problema descrito anteriormente desde un punto de vista estático; es decir, asumen que el bien no es servido hasta que la producción de la cantidad prevista no ha finalizado. Por el contrario, el mecanismo que proponemos en esta sección está basado en la hipótesis de que el producto es elaborado y servido a medida que va siendo demandado.

2.5.1 Problema de asignación de costes: Interpretación dinámica del modelo

Formalmente, el problema clásico de asignación de costes viene dado por un par $(c, \boldsymbol{\alpha})$, donde $c : I\!\!R^m_+ \to I\!\!R$ es la función de coste del modelo, verificando $c(\mathbf{0}) = 0$; esto es, se trabaja con modelos en los que se supone que no hay un coste fijo de producción, y $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{int}(I\!\!R^m_+)$ es el *vector de demandas.*

Nota 2.1. La función de coste puede incluir los beneficios del productor.

En lo que sigue, sólo consideraremos aquellos problemas de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha})$ tales que la función de coste c sea de clase 1 en $D(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^m [0, \alpha_i]$. Se denotará por

$$CA^m = \left\{ (c, \boldsymbol{\alpha}) \,/\, \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{int}(I\!\!R^m_+) \,,\, c : I\!\!R^m_+ \to I\!\!R \,,\, c(\mathbf{0}) = 0 \,,\, c \in \mathcal{C}^1(D(\boldsymbol{\alpha})) \right\},$$

al conjunto de todos los problemas de asignación de costes asociados a la producción de m bienes, para todo $m \geq 1$ finito, y por CA a la unión de todos ellos.

En este contexto, una solución al problema de asignación de costes vendrá dada por una función $p : CA \to \cup_{m \geq 1} I\!\!R^m$ que redistribuya, en forma de precios unitarios, el coste conjunto de producción entre los bienes a ser elaborados; esto es, una función que a cada problema $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$ le asigne un vector de precios $p(c, \boldsymbol{\alpha}) \in I\!R^m$, siendo $p_i(c, \boldsymbol{\alpha})$ el precio por unidad de producto i-ésimo, $i = 1, \dots, m$.

Supondremos que el sistema de producción debe satisfacer la demanda a lo largo de un cierto período de tiempo y que, a diferencia del modelo clásico, ésta no es satisfecha de una vez al finalizar dicho período, sino que el producto es servido a medida que va siendo demandado. En este caso $\boldsymbol{\alpha}$ se corresponde con una *estimación* de la demanda acumulada a lo largo de todo el período para el cual se ha planificado la producción. Más concretamente, supondremos que la demanda se realiza de acuerdo al siguiente esquema:

A. Los consumidores realizan su demanda a lo largo de un cierto intervalo de tiempo $[0, T]$ describiendo una *curva de demanda* γ desconocida al inicio del período. Dicha curva viene dada por un camino regular monótono no decreciente $\gamma : [0, T] \to D(\boldsymbol{\alpha})$, siendo $\gamma(t_0)$ la demanda acumulada hasta el instante t_0.

Una vez que la demanda acumulada a lo largo de todo el período ha sido estimada por $\boldsymbol{\alpha}$, trabajaremos bajo esta hipótesis para fijar los precios; es decir, actuaremos en el supuesto de que la producción alcanza el nivel $\boldsymbol{\alpha}$ en el instante T. Por consiguiente, únicamente consideraremos aquellas curvas de demanda γ verificando las condiciones de contorno $\gamma(0) = \mathbf{0}$ y $\gamma(T) = \boldsymbol{\alpha}$.

B. La demanda en cada instante es el resultado de la demanda agregada de un cierto conjunto de consumidores.

Se supone también que los consumidores pagan por los productos recibidos a medida que su demanda va siendo satisfecha. Teniendo todo esto en cuenta, el problema ante el que se enfrenta el productor es el de decidir al inicio del período, en base a una *estimación* de la demanda acumulada a lo largo del período y del coste conjunto de producción, el precio unitario al que va a cobrar cada uno de los productos durante todo el período; esto es, el sistema de precios vigente durante el período para el cual se ha fijado la producción.

En este punto queremos destacar el hecho de que el objetivo que se persigue no es otro que establecer un sistema de precios que tenga en cuenta las hipótesis **A** y **B** establecidas en el modelo. No se trata en ningún caso de buscar aquel sistema de precios que optimice el comportamiento global del sistema productor–consumidores.

A continuación, se analizará cómo afectan las hipótesis anteriores al establecimiento de posibles criterios de selección de mecanismos de asignación de precios adecuados. En primer lugar se analizará el efecto aislado de cada una de las hipótesis **A** y **B**, para luego analizar su efecto conjunto.

Con el fin de simplificar la notación introducimos la *función de pago* $P : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$, que asigna a cada vector de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ y a cada vector de producción $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+$, la cantidad que debe ser pagada por el vector de productos $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+$ al precio unitario dictado por $\mathbf{p}$.

En lo que sigue supondremos que la función de pago es lineal, $P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} z_i p_i$, *para todo* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_+$, *para todo* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$. *Asimismo, sólo consideraremos sistemas de precios que recuperen costes al final del período, i.e.,*

$$P(p(c, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \ (c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m .$$

Dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, denotaremos por $H(c, \boldsymbol{\alpha})$ al conjunto compuesto por todos aquellos vectores de precios unitarios que recuperan costes al final del período, de acuerdo con la función de coste c y el vector de demandas $\boldsymbol{\alpha}$, es decir,

$$H(c, \boldsymbol{\alpha}) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m \,/\, P(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha})\right\}.$$

Veamos cómo afecta el asumir la hipótesis **A**. Dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, supongamos que la curva de demanda de los consumidores viene dada por $\gamma_0 : [0, T] \to D(\boldsymbol{\alpha})$, camino regular tal que $\gamma_0(0) = \mathbf{0}$ y $\gamma_0(T) = \boldsymbol{\alpha}$. Entonces, el coste acumulado en el que ha incurrido el productor hasta el instante $t_0 < T$ viene dado por $c(\mathbf{z}_0)$, donde $\mathbf{z}_0 = \gamma(t_0) \in D(\boldsymbol{\alpha})$ se corresponde con la demanda acumulada hasta el instante t_0 de acuerdo con la curva de demanda γ_0.

Por otro lado, fijado el vector de precios unitarios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, el pago recibido por el productor hasta el instante t_0 viene dado por $P(\mathbf{p}, \mathbf{z}_0)$. En tal caso, si la demanda se corta en el instante t_0 entonces, la pérdida asumida por el productor por cobrar la producción, de acuerdo con la función de pago $P(\mathbf{p}, \cdot)$, viene dada por la diferencia entre el coste de producir $\mathbf{z}_0$ y el coste, en función de $P(\mathbf{p}, \cdot)$, cobrado por la producción de $\mathbf{z}_0$. Luego, la diferencia $c(\mathbf{z}_0) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z}_0)$ puede ser interpretada como el *riesgo con el que se está produciendo en el instante* t_0 *cuando se han asignado precios unitarios* $\mathbf{p}$.

Así, si se considera la posibilidad de que la demanda finalice antes del momento T previsto, entonces parece razonable pensar que el productor tratará de definir aquel sistema de precios que minimice el riesgo con el que está produciendo.

La curva de demanda se desconoce al inicio del período; entonces, en primer lugar, se deberá definir una medida del *riesgo global* que considere el riesgo asociado a cualquier posible curva de demanda para, una vez definida dicha medida, seleccionar aquel (o aquellos) sistema de precios que la minimicen.

A continuación, se proponen algunas medidas de riesgo global basadas en criterios clásicos y se estudian los sistemas de precios que serían seleccionados de acuerdo con cada una de ellas.

Riesgo máximo

La evaluación del riesgo global desde un punto de vista pesimista implica que el criterio de selección del sistema de precios que se siga sea un criterio *minimax*.

Dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, el criterio minimax conduce a la selección de cualquier vector de precios unitarios que pertenezca al conjunto $LC(c, \boldsymbol{\alpha}) \subseteq \mathbb{R}^m$

definido como

$$LC(c,\boldsymbol{\alpha}) = \Big\{\mathbf{p}_0 \in H(c,\boldsymbol{\alpha}) \;/\; \min_{\mathbf{p}\in H(c,\boldsymbol{\alpha})} \max_{z\in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p},\mathbf{z})\Big) = \max_{z\in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0,\mathbf{z})\Big)\Big\}.$$

En el apéndice B se lleva a cabo un análisis del mecanismo de asignación de costes así definido, al que nos referiremos como *corazón mínimo*. En particular, se estudia su relación con el corazón mínimo de un cierto juego con tasas de participación asociado, relación que nos permite establecer su conexión con conceptos de solución para juegos TU continuos ya asentados en la literatura. A continuación, enumeramos sus principales propiedades sin detenernos en su demostración, para la cual nos remitimos al apéndice B.

Proposición 2.13. *Para todo problema de asignación de costes* $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$*, se verifica que* $LC(c,\boldsymbol{\alpha})$ *es no vacío, convexo y compacto.*

La proposición anterior establece que el criterio de selección de precios propuesto está bien definido: siempre proporciona alguna solución al problema planteado. Veamos, a continuación, cómo puede ser interpretado desde el punto de vista que ofrece la teoría de juegos cooperativos.

Definición 2.9. Para todo problema de asignación de costes $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, se define el *juego de ganancias asociado a* $(c,\boldsymbol{\alpha})$, como el juego con tasas de participación $(M,\widetilde{v}_c)$ definido por $M = \{1,\dots,m\}$ y

$$\widetilde{v}_c(\tau_1,\dots,\tau_m) = c(\alpha_1\tau_1,\dots,\alpha_m\tau_m), \quad \forall\ \tau \in [0,1]^m,$$

donde τ_i representa la proporción de la demanda de producto i–ésimo satisfecha, $i = 1,\dots,m$.

En tal caso, si existen sistemas de precios tales que, independientemente de la curva de demanda considerada, permiten producir sin riesgo en todo momento; i.e., el conjunto

$$C(c,\boldsymbol{\alpha}) = \Big\{\mathbf{p}_0 \in H(c,\boldsymbol{\alpha}) \;/\; \min_{\mathbf{p}\in H(c,\boldsymbol{\alpha})} \max_{\mathbf{z}\in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p},\mathbf{z})\Big) = \max_{\mathbf{z}\in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0,\mathbf{z})\Big) = 0\Big\}$$

es no vacío, entonces se verifica:

$$\mathbf{p}_0 \in C(c,\boldsymbol{\alpha}) \iff \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}_0 = (\alpha_1 p_{01}, \dots, \alpha_m p_{0m}) \in C(\widetilde{v}_c)\,,$$

donde $C(\widetilde{v}_c)$ es el corazón del juego de ganancias asociado. Además, $LC(c,\boldsymbol{\alpha}) = C(c,\boldsymbol{\alpha})$.

Riesgo esperado

Si el riesgo global se evalúa mediante el riesgo esperado, entonces cualquier vector de precios que recupere costes podría ser seleccionado.

En efecto, dado un problema de asignación de costes cualquiera, $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, se verifica que el riesgo medio asociado a un vector de precios, $\mathbf{p}$, es independiente del sistema de precios considerado siempre que $\mathbf{p} \in H(c,\boldsymbol{\alpha})$, como se comprueba a continuación:

$$\begin{aligned} \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p},\mathbf{z})\Big)\, d\mathbf{z} &= \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \;-\; \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{m}\alpha_j \cdot P(\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}) \;= \\ &= \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \;-\; \frac{1}{2} c(\boldsymbol{\alpha}) \prod_{i=1}^{m}\alpha_j \;=\; \beta\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Luego, cualquier sistema de precios que recupere costes al final del período para el que se ha planificado la producción, minimiza el riesgo de producción esperado.

A continuación, se lleva a cabo un estudio análogo para la hipótesis **B**. Supongamos que la demanda acumulada a lo largo del período de un cierto subconjunto de consumidores S es de $\mathbf{z}_0 \in D(\boldsymbol{\alpha})$, entonces dado el vector de precios unitarios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, la diferencia entre la cantidad pagada por el vector de productos $\mathbf{z}_0$ y el coste conjunto de producir $\mathbf{z}_0$, $P(\mathbf{p}, \mathbf{z}_0) - c(\mathbf{z}_0)$, representa el exceso asumido por dicho conjunto de consumidores.

Si la diferencia anterior es positiva entonces, teniendo en cuenta que sólo se consideran admisibles aquellos sistemas de precios que recuperan costes al final del período, los miembros de S pueden decidir hacer su demanda por separado; en cuyo caso, para todo vector de precios $\mathbf{p}'$ admisible, de acuerdo con la función de coste c y el vector de demandas $\mathbf{z}_0$, la función de pago $P(\mathbf{p}', \cdot)$ sería tal que $P(\mathbf{p}', \mathbf{z}_0) = c(\mathbf{z}_0)$. Luego, la diferencia $P(\mathbf{p}, \mathbf{z}_0) - c(\mathbf{z}_0)$ puede ser interpretada como el *riesgo de disgregación de la demanda asumido por el productor cuando se asignan precios unitarios* $\mathbf{p}$.

En general, el hecho de que la demanda se disgregue no es conveniente para el productor, entonces, como en el caso anterior, parece razonable pensar que el productor tratará de definir aquel sistema de precios que minimice el riesgo de disgregación de la demanda.

La demanda de todos los posibles subconjuntos de consumidores es desconocida (por el productor) al inicio del período, luego el razonamiento seguido anteriormente es aplicable también en este caso.

Dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, la evaluación del riesgo global mediante los criterios anteriormente propuestos nos conduce a las mismas conclusiones con la salvedad de que en este caso, la aplicación del criterio minimax nos lleva a la selección de aquellos vectores de precios unitarios en el conjunto $RLC(c, \boldsymbol{\alpha})$, definido como

$$RLC(c, \boldsymbol{\alpha}) = \Big\{ \mathbf{p}_0 \in H(c, \boldsymbol{\alpha}) \;/\; \min_{\mathbf{p} \in H(c,\boldsymbol{\alpha})} \max_{\mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) - c(\mathbf{z}) \Big) = \max_{\mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) - c(\mathbf{z}) \Big) \Big\}.$$

Las propiedades del concepto de solución así definido, al que nos referiremos como *corazón mínimo inverso*, son análogas a las del corazón mínimo definido anteriormente. En este caso, el juego asociado a un problema de asignación de costes debe ser interpretado como un juego de coste: involucra a los consumidores, no al productor.

Combinando los criterios de selección deducidos del establecimiento de ambas hipótesis, resulta que un buen sistema de precios no debe cobrar la producción ni excesivamente por debajo del coste real de producción ni, por el contrario, excesivamente por encima. Así, la(s) función(es) de pago seleccionada(s) deberá(n) aproximar lo mejor posible la función de coste; esto es, deberá(n) ser seleccionada(s) minimizando una distancia a la función de coste. Dependiendo de la distancia elegida se obtendrán como solución distintos sistemas de precios.

Si se elige la distancia dada por la norma ℓ_1, entonces, dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, un vector de precios $\mathbf{p} \in I\!R^m$ será seleccionado si y sólo si es solución del siguiente problema:

Problema ℓ_1

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} |c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z})|\, d\mathbf{z} \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad\qquad P(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que la solución del problema anterior, caso de existir, no tiene por qué ser única.

Proposición 2.14. *Dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, si $C(c, \boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset$, entonces $C(c, \boldsymbol{\alpha})$ es el conjunto de soluciones del problema ℓ_1.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que el problema ℓ_1 es equivalente al siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad \int_{E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z})\Big)\, d\mathbf{z} \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad\qquad P(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha}), \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = \big\{\, \mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha}) \,/\, c(\mathbf{z}) \geq P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) \,\big\}$.

En efecto, de la expresión (2.24) se deduce que para todo vector $\mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha})$, la función objetivo del problema de minimización ℓ_1 se puede expresar de forma equivalente como sigue:

$$\int_{D(\boldsymbol{\alpha})} |c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z})| \, d\mathbf{z} = 2 \int_{E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) \Big) \, d\mathbf{z} - \beta \,,$$

donde $\beta = \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) \big) \, d\mathbf{z}$ es una constante independiente de $\mathbf{p}$.

Se comprobará que si $C(c, \boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset$, entonces el problema (2.25) tiene solución y el conjunto de soluciones coincide con $C(c, \boldsymbol{\alpha})$.

Sea $\mathbf{p}_0$ un vector de precios en $C(c, \boldsymbol{\alpha})$ cualquiera, entonces $c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) = 0$, para todo $\mathbf{z} \in E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha})$, y por consiguiente se verifica

$$\int_{E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) \Big) \, d\mathbf{z} \geq 0 = \int_{E(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) \Big) \, d\mathbf{z} \,, \quad \forall \ \mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha}) \,.$$

Luego, todo vector de precios $\mathbf{p} \in C(c, \boldsymbol{\alpha})$ es solución del problema.

Por otro lado, si $\mathbf{p}_0 \in H(c, \boldsymbol{\alpha})$ es tal que

$$\int_{E(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) \Big) \, d\mathbf{z} = 0 \,, \tag{2.26}$$

entonces $\mathbf{p}_0 \in C(c, \boldsymbol{\alpha})$: Supóngase, por el contrario, que $\mathbf{p}_0 \notin C(c, \boldsymbol{\alpha})$, entonces existe $\mathbf{z}_0 \in E(\mathbf{p}_0, \alpha)$, tal que $c(\mathbf{z}_0) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}_0) > 0$. Como la función $c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z})$ es continua en $\mathbf{z}$, entonces, por el teorema de conservación del signo, se verifica:

$$\exists \quad \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) > 0 \qquad \forall \ \mathbf{z} \in B(\mathbf{z}_0, \varepsilon) \,.$$

Luego, como $B(\mathbf{z}_0, \varepsilon) \cap E(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\alpha})$ es un conjunto de medida estrictamente positiva, entonces

$$\int_{E(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) \Big) \, d\mathbf{z} > 0 \,,$$

en contradicción con (2.26). □

El objetivo que nos planteábamos en esta sección era la búsqueda de un criterio de selección que recogiera la interpretación dinámica del modelo y que seleccionara un único vector de precios, por lo que una vez se ha comprobado que la elección de la norma ℓ_1 no garantiza la unicidad de la solución, hemos optado por considerar la distancia dada por la norma ℓ_2, en cuyo caso se garantiza la existencia y unicidad. La solución así obtenida se estudia detalladamente en la sección siguiente.

2.5.2 Riesgo cuadrático: Sistema igualador de precios

A continuación, se introduce el sistema de precios que resulta de considerar la distancia dada por la norma ℓ_2. Se prueba la existencia y unicidad sobre la clase de problemas de asignación con la que se trabaja y se establece su relación con la solución igualadora de un cierto juego con tasas de participación. Dicha relación nos facilita una caracterización alternativa del sistema de precios obtenido en función del riesgo asociado a la producción de cada uno de los bienes individuales y nos permite establecer una caracterización axiomática.

Proposición 2.15. *Para cualquier problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, existe una única solución del problema:*

Problema ℓ_2

$$\min \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z})\Big)^2 d\mathbf{z}$$

s.a.

$$P(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha}).$$

Dicha solución viene dada por

$$p_i(c,\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\alpha_i}\Big(\frac{c(\boldsymbol{\alpha})}{m} + \frac{12}{\prod_{k=1}^{m}\alpha_k}\big(b_i(c,\boldsymbol{\alpha}) - \bar{b}(c,\boldsymbol{\alpha})\big)\Big), \quad \forall\ i = 1,\ldots,m,$$

donde $b_i(c,\boldsymbol{\alpha}) = \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \frac{z_i}{\alpha_i} c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}$ *y* $\bar{b}(c,\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i(c,\boldsymbol{\alpha})}{m}$.

Demostración: Se demostrará estableciendo la relación existente entre la solución del problema ℓ_2 y la solución igualadora del juego de ganancias asociado.

Sea $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$ un problema de asignación de costes cualquiera, entonces aplicando el cambio de variable $h(\boldsymbol{\tau}) = (\tau_1\alpha_1,\ldots,\tau_m\alpha_m)$, $\forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^m$, se deduce que

$$f(\mathbf{p}) = \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p},\mathbf{z})\Big)^2 d\mathbf{z} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m}\alpha_k \int_{[0,1]^m} \Big(c(\tau_1\alpha_1,\ldots,\tau_m\alpha_m) - \sum_{i=1}^{m}\tau_i\alpha_i p_i\Big)^2 d\boldsymbol{\tau}, \quad \forall\ \mathbf{p} \in I\!R^m, \quad (2.27)$$

siendo $\prod_{k=1}^{m}\alpha_k > 0$.

Sea $(N,\widetilde{v}_c)$ el juego de ganancias asociado a $(c,\boldsymbol{\alpha})$, entonces de (2.27) se deduce que $\mathbf{p} \in H(c,\boldsymbol{\alpha})$ es solución del problema ℓ_2 si y sólo si $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = (\alpha_1 p_1,\ldots,\alpha_m p_m) \in PI(\widetilde{v}_c)$ es solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \int_{[0,1]^n} \Big(\widetilde{v}_c(\tau) - \sum_{i\in N} x_i\tau_i\Big)^2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \sum_{i\in N} x_i = \widetilde{v}_c(N). \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta (ver Ruiz *et al.* (1996)) que de la caracterización de la solución igualadora a partir de la función de exceso de las coaliciones, aplicando el lema 2.3, se deduce que para todo juego con tasas de participación en $F\Gamma_1^n$ la solución igualadora del juego puede ser obtenida como la única solución del problema anterior, se tiene que

$$x_i^{\mathrm{P}} = \frac{\widetilde{v}_c(M)}{m} + 12\big(c_i(\widetilde{v}_c) - \bar{c}(\widetilde{v}_c)\big)\,, \qquad \forall\ i = 1, \dots, m\,.$$

Aplicando el cambio de variable anterior se tiene que

$$c_i(\widetilde{v}_c) = \int_{[0,1]^m} \tau_i \widetilde{v}_c(\boldsymbol{\tau})\, d\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k} \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \frac{z_i}{\alpha_i} c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k} b_i(c, \boldsymbol{\alpha})\,,$$

$$\forall \quad i = 1, \dots, m\,.$$

Luego,

$$x_i^{\mathrm{P}} = \frac{c(\boldsymbol{\alpha})}{m} + \frac{12}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}\big(b_i(c, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{b}(c, \boldsymbol{\alpha})\big)\,, \qquad \forall \quad i = 1, \dots, m\,.$$

y, por consiguiente,

$$p_i = \frac{1}{\alpha_i}\Big(\frac{c(\boldsymbol{\alpha})}{m} + \frac{12}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k}\big(b_i(c, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{b}(c, \boldsymbol{\alpha})\big)\Big)\,, \qquad \forall \quad i = 1, \dots, m\,.$$

□

Observación 2.6. De la demostración anterior se deduce que dado un problema de asignación de costes $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, si se considera el juego con tasas de participación de ganancias asociado, $(M, \widetilde{v}_c)$, se tiene que el vector de precios obtenido en la proposición 2.15 guarda la siguiente relación con la solución igualadora del juego:

$$p_i(c, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\alpha_i} \mathcal{E}_i(\widetilde{v}_c)\,, \qquad \forall \ \ i = 1, \dots, m\,.$$

Esta relación nos lleva a referirnos al mecanismo de asignación de precios en cuestión como *sistema igualador de precios* y motiva la caracterización en función del riesgo asociado a la producción de cada bien que se obtiene a continuación, así como su caracterización axiomática.

Definición 2.10. Sea $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$ un problema de asignación de costes, entonces dado el vector de precios unitarios $\mathbf{p} \in I\!R^m$ se define el *riesgo promedio asociado a la producción del producto i, $i = 1, \ldots, m$, cuando se han asignado precios unitarios* $\mathbf{p}$, como

$$\widetilde{w}_i(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}) = \int_{D(\boldsymbol{\alpha})} \frac{z_i}{\alpha_i}\Big(c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p},\mathbf{z})\Big)\, d\mathbf{z}\,.$$

Proposición 2.16. *Para todo problema de asignación de costes $(c,\boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, existe un único vector de precios unitarios que recupera costes al final del período y verifica*

$$\widetilde{w}_1(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}) = \widetilde{w}_2(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}) = \cdots = \widetilde{w}_m(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p})\,. \tag{2.28}$$

Además, dicho vector de precios coincide con el definido por el sistema igualador de precios.

Demostración: Sea $\mathbf{p} \in H(c,\boldsymbol{\alpha})$ un vector de precios que recupera costes, entonces aplicando el cambio de variable $h(\boldsymbol{\tau}) = (\tau_1\alpha_1, \ldots, \tau_m, \alpha_m)$,

$$\widetilde{w}_i(c,\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^{m} \alpha_k \int_{[0,1]^m} \tau_i\Big(\widetilde{v}_c(\boldsymbol{\tau}) - \sum_{i=1}^{m} \tau_i\alpha_i p_i\Big)\, d\boldsymbol{\tau} = \prod_{k=1}^{m} \alpha_k \widetilde{w}_i(\widetilde{v}_c, (\alpha_1 p_1, \ldots, \alpha_m p_m))\,,$$
$$\forall \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Luego, $\mathbf{p} \in H(c,\boldsymbol{\alpha})$ satisface la condición (2.28) si y sólo si $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = (\alpha_1 p_1, \ldots, \alpha_m p_m) \in PI(\widetilde{v}_c)$ es la solución igualadora del juego de ganancias asociado $(M, \widetilde{v}_c)$. □

Por último se estudian sus propiedades y se propone una caracterización axiomática.

Definición 2.11. Un mecanismo de asignación de precios q en CA^m verifica la propiedad de:

(i) *Recuperación de costes al final del período* si y sólo si para todo problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, se verifica $P(q(c, \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = c(\boldsymbol{\alpha})$.

La función de pago es tal que se cubren objetivos, en el sentido de que los costes de producción, en base a la demanda estimada, son recuperados al final del período.

(ii) *Aditividad* si y sólo si para todo par de problemas de asignación de costes, $(c_1, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$ y $(c_2, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, se verifica

$$q_i(c_1 + c_2, \boldsymbol{\alpha}) = q_i(c_1, \boldsymbol{\alpha}) + q_i(c_2, \boldsymbol{\alpha}), \quad \forall\ i = 1, \ldots, m.$$

Si los costes de producción son debidos a dos factores independientes, esto es, el sistema de producción c es tal que $c \equiv c_1 + c_2$, entonces el sistema de precios se puede obtener como la suma de los precios debidos a cada uno de los sistemas de producción independientes, c_1 y c_2.

(iii) *Invariancia frente a cambios de escala* si y sólo si para todo problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, y para todo vector $\boldsymbol{\lambda} \in I\!R^m$ tal que $\lambda_i > 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$, se verifica

$$q_i(c \cdot \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda_i q_i(c, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}), \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,$$

donde $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\lambda_1 \alpha_1, \ldots, \lambda_m \alpha_m)$ y $c \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{z}) = c(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{z}),\ \forall\ \mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})$.

La función de pago no se ve afectada por cambios en las unidades de medida de los productos, es decir, una variación en la unidad de medida de un producto conlleva un cambio equivalente en el precio unitario correspondiente a dicho producto.

(iv) *Preservar costes lineales* si y sólo si para todo problema de asignación de costes,

$(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, tal que $c(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i, \ \forall \ \mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})$, se verifica

$$q_i(c, \boldsymbol{\alpha}) = a_i\,, \qquad \forall \ i = 1, \dots, m\,.$$

Si la función de coste es lineal, entonces la función de pago se corresponde con la propia función de coste. El precio unitario de cada producto coincide con el precio unitario de producción real dado por la función de coste.

(v) *Monotonicidad con respecto al coste medio ponderado debido a la urgencia* si y sólo si para todo problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, y para todo par de productos i, j, se verifica:

$$\text{Si } \ b_i(c, \boldsymbol{\alpha}) \geq b_j(c, \boldsymbol{\alpha}) \implies \alpha_i q_i(c, \boldsymbol{\alpha}) \geq \alpha_j q_j(c, \boldsymbol{\alpha})\,.$$

La interpretación de esta propiedad se analiza detalladamente en la observación 2.7 expuesta a continuación.

Todas estas propiedades, a excepción de la última de ellas, son algunas de las propiedades clásicas que se exigen a un mecanismo de asignación de costes. La propiedad (iv) fue propuesta por Aumman y Shapley (1964) en el contexto de juegos no atómicos con el nombre de *projection axiom.*

Observación 2.7. La propiedad (v), que establece que el precio cobrado por satisfacer la demanda a lo largo de todo el período de los productos i y j debe estar en la misma relación que los valores $b_i(c, \boldsymbol{\alpha})$ y $b_j(c, \boldsymbol{\alpha})$, se puede interpretar como sigue: " Si el coste medio ponderado de todas aquellas curvas de demanda en las que la demanda relativa de producto i se mantiene por encima de la demanda relativa de producto j, y en consecuencia el productor debe atender (en términos relativos) antes la demanda de i que la de j, es mayor o igual que el correspondiente coste asociado a aquellas curvas de demanda en la que, por el contrario, la demanda de producto j es más urgente, entonces el precio cobrado por satisfacer la demanda global de producto j no debe exceder el precio cobrado por satisfacer la demanda global de producto i".

Para ello basta con tener en cuenta que la desigualdad $b_i(c, \boldsymbol{\alpha}) \geq b_j(c, \boldsymbol{\alpha})$ puede expresarse de forma equivalente como

$$\int_{D_{ij}(\boldsymbol{\alpha})} \Big(\frac{z_i}{\alpha_i} - \frac{z_j}{\alpha_j}\Big) c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \geq \int_{D_{ji}(\boldsymbol{\alpha})} \Big(\frac{z_j}{\alpha_j} - \frac{z_i}{\alpha_i}\Big) c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}\,,$$

donde

$$D_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = \{\, \mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha}) \;/\; \frac{z_i}{\alpha_i} \geq \frac{z_j}{\alpha_j} \,\} = \{\, (z_i, z_j) \in [0, \alpha_i] \times [0, \alpha_j] \;/\; \frac{z_i}{\alpha_i} \geq \frac{z_j}{\alpha_j} \,\} \times \prod_{k \neq i,j} [0, \alpha_k]\,,$$

es el conjunto de aquellos vectores de producción tales que la proporción de la demanda total de producto i satisfecha es mayor o igual que la proporción de la demanda total de producto j satisfecha.

Considérese la función de *coste marginal medio* asociado a la producción de los bienes i y j definida por

$$mc_{ij}(z_i, z_j) = \int_{\prod_{k \neq i,j} [0, \alpha_k]} c(z_i, z_j, \mathbf{z}_{-ij})\, d\mathbf{z}_{-ij}\,, \quad \forall\ (z_i, z_j) \in [0, \alpha_i] \times [0, \alpha_j]\,,$$

donde $\mathbf{z}_{-ij} = (z_k)_{k \neq i,j}$, entonces

$$\int_{D_{ij}(\boldsymbol{\alpha})} \Big(\frac{z_i}{\alpha_i} - \frac{z_j}{\alpha_j}\Big) c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \int_{F_{ij}(\boldsymbol{\alpha})} \Big(\frac{z_i}{\alpha_i} - \frac{z_j}{\alpha_j}\Big) mc_{ij}(z_i, z_j)\, d(z_i, z_j)\,,$$

donde $F_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = \{\, (z_i, z_j) \in [0, \alpha_i] \times [0, \alpha_j]) \;/\; \frac{z_i}{\alpha_i} \geq \frac{z_j}{\alpha_j} \,\}$.

Haciendo el cambio de variable $h(t, r) = (\alpha_i t, \alpha_j t^r)$, para todo $(t, r) \in [0, 1] \times [1, +\infty)$, se tiene que

$$\int_{D_{ij}(\boldsymbol{\alpha})}\Big(\frac{z_i}{\alpha_i}-\frac{z_j}{\alpha_j}\Big)c(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}=\int_1^{+\infty}\int_0^1 k_{ij}(t,r)(t-t^r)mc_{ij}(\alpha_i t,\alpha_j t^r)\,dt\,dr\,, \tag{2.29}$$

donde $k_{ij}(t,r)=-\alpha_i\alpha_j t^r\ln t\geq 0,\ \ \forall\ \ (t,r)\in(0,1]\times[1,+\infty)$.

Entonces, tomando k_{ij} como una función de ponderación, la integral (2.29) se puede interpretar como el coste medio ponderado de todas aquellas curvas de demanda en las que la demanda de producto i urge más que la de producto j. Análogamente, a la integral $\int_{D_{ji}(\boldsymbol{\alpha})}\Big(\frac{z_j}{\alpha_j}-\frac{z_i}{\alpha_i}\Big)c(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}$ se le puede dar la interpretación simétrica.

Proposición 2.17. *El sistema igualador de precios, $p^e: CA^m\rightarrow I\!R^m$, verifica las propiedades* (i) *hasta* (v).

Todas ellas se deducen trivialmente de la expresión del sistema igualador de precios obtenida en la proposición 2.15.

Teorema 2.2. *El sistema igualador de precios es el único mecanismo de asignación de precios en CA^m que verifica las propiedades* (i), (ii), (iii), (iv) *y* (v).

Demostración: En la proposición anterior se establece que el sistema igualador de precios verifica las propiedades (i) hasta (v). Veamos pues que se trata del único mecanismo de asignación de precios en CA^m que verifica todas ellas.

Sea $q: CA^m\rightarrow I\!R^m$ un mecanismo de asignación de precios verificando las propiedades (i), (ii), (iii), (iv) y (v), entonces en primer lugar se probará que q coincide con p^e sobre $CA^m(1)=\big\{(c,\boldsymbol{\alpha})\in CA^m\,/\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}\big\}$.

Sea $q^{(1)}$ la restricción de q al conjunto $CA^m(1)$, entonces $q^{(1)}: CA^m(1)\rightarrow I\!R^m$ verifica las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^m q_i^{(1)}(c,\mathbf{1})=c(\mathbf{1})\,,\quad\forall\ \ (c,\mathbf{1})\in CA^m(1).$

2. $q^{(1)}(c_1 + c_2, \mathbf{1}) = q^{(1)}(c_1, \mathbf{1}) + q^{(1)}(c_2, \mathbf{1}), \quad \forall\ (c_1, \mathbf{1}),\ (c_2, \mathbf{1}) \in CA^m(1)$.

3. Para todo $(c, \mathbf{1}) \in CA^m(1)$ tal que $c(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i, \quad \forall\ \mathbf{z} \in [0,1]^m$, se verifica

$$q_i^{(1)}(c, \mathbf{1}) = a_i, \quad \forall\ i = 1, \dots, m.$$

4. Para todo $(c, \mathbf{1}) \in CA^m(1)$ y para todo par i, j se verifica:

$$\text{Si } b_i(c, \mathbf{1}) = \int_{[0,1]^m} z_i c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \geq b_j(c, \mathbf{1}) = \int_{[0,1]^m} z_j c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \implies$$

$$\implies q_i^{(1)}(c, \mathbf{1}) \geq q_j^{(1)}(c, \mathbf{1}).$$

$CA^m(1)$ es isomorfo al conjunto compuesto por todos aquellos juegos con tasas de participación m–personales cuya función característica es de clase 1, entonces teniendo en cuenta que la caracterización axiomática establecida en la proposición 2.1 sigue siendo válida cuando la solución igualadora se restringe a dicho subconjunto de $F\Gamma_1^m$, se deduce que $q^{(1)}$ debe venir dado por

$$q_i^{(1)}(c, \mathbf{1}) = \frac{c(\mathbf{1})}{m} + 12\Big(b_i(c, \mathbf{1}) - \bar{b}(c, \mathbf{1})\Big) = p_i^e(c, \mathbf{1}), \quad \forall\ i = 1, \dots, m. \tag{2.30}$$

Dado $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, un problema de asignación de costes cualquiera, considérese el problema de asignación de costes $(c_0, \mathbf{1}) \in CA^m(1)$ definido como

$$c_0(\mathbf{z}) = c(z_1\alpha_1, \dots, z_m\alpha_m), \quad \forall\ \mathbf{z} \in [0,1]^m,$$

entonces de la propiedad (iii) se deduce

$$q_i(c_0, \mathbf{1}) = \alpha_i q_i(c, \boldsymbol{\alpha}), \quad \forall\ i = 1, \dots, m,$$

donde $q_i(c_0, \mathbf{1})$, $i = 1, \ldots, m$, viene dado por la expresión (2.30). Aplicando el cambio de variable $h(\mathbf{z}) = (z_1\alpha_1, \ldots, z_m\alpha_m)$, $\forall\ \mathbf{z} \in [0,1]^m$, entonces para todo $i = 1, \ldots, m$ se verifica

$$b_i(c_0, \mathbf{1}) = \int_{[0,1]^m} z_i c_0(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k} \int_{D(\alpha)} \frac{z_i}{\alpha_i} c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} \alpha_k} b_i(c, \boldsymbol{\alpha}).$$

Así,

$$q_i(c, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\alpha_i}\Big(\frac{c(\boldsymbol{\alpha})}{m} + \frac{12}{\prod_{i=1}^{m} \alpha_i}\big(b_i(c, \boldsymbol{\alpha}) - \bar{b}(c, \boldsymbol{\alpha})\big)\Big) = p_i^e(c, \boldsymbol{\alpha}), \quad \forall\ i = 1, \ldots, m.$$

□

Para finalizar, se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3. (Samet, Taumang y Zang (1984)) Considérese un problema del transporte en el que hay dos destinos, A_1 y A_2, y dos orígenes, B_1 y B_2. Los costes de transportar una unidad de recurso de cada uno de los orígenes a los distintos destinos vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A_1	A_2	
B_1	$c_{11} = 10$	$c_{12} = 15$	$b_1 = 20$
B_2	$c_{21} = 1.000$	$c_{22} = 1.500$	$b_2 = 20$
	$x_1 = 20$	$x_2 = 20$	

En cada origen hay 20 unidades de recurso disponibles, y cada destino tiene una demanda de 20 unidades. La solución óptima consiste en enviar 20 unidades de B_2 a A_1, con un coste de 20.000, y 20 unidades de B_1 a A_2, con un coste de 300.

En situaciones de este tipo, Samet *et al.* (1984) proponen calcular el precio unitario de transporte a cada destino a partir de los precios de Aumann–Shapley de un problema de asignación de costes asociado. Definen la función de coste del problema como la función que asigna a cada posible vector de demandas, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $z_1 + z_2 \leq 40$, $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, el coste mínimo del problema del transporte en el que la demanda de A_1 es de z_1 unidades de recurso, y la de A_2 es de z_2 unidades. En dicho caso,

$$c(z_1, z_2) = \begin{cases} 10z_1 + 15z_2\,, & z_1 + z_2 \leq 20,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0, \\ 1.000z_1 + 1.005z_2 - 19.800\,, & 20 \leq z_1 + z_2 \leq 40,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0, \\ 1.000z_1 + 1.500z_2 - 29.700\,, & z_1 + z_2 \leq 40,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Para este ejemplo, el precio (unitario) que se carga al transporte a cada unidad de destino dictado por el sistema igualador de precios del problema $(c, \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} = (20, 20)$, coincide con el precio calculado a partir de los precios de Aumann–Shapley, $\mathrm{AS}(c, \boldsymbol{\alpha}) = (505, 510)$.

$$\begin{aligned} b_1(c, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{[0,20]^2} \frac{z_1}{20}\, c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} &= \int_0^{20} \Big(\int_0^{20-z_1} \frac{z_1}{20}(10z_1 + 15z_2)\, dz_2 \Big) dz_1 + \\ &+ \int_0^{20} \Big(\int_{20-z_1}^{20} \frac{z_1}{20}(1.000z_1 + 1.005z_2 - 19.800)\, dz_2 \Big) dz_1 \cong 1'04667 \cdot 10^6\,, \end{aligned}$$

y $b_2(c, \boldsymbol{\alpha}) \cong \int_{[0,20]^2} \frac{z_2}{20}\, c(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = 1'05 \cdot 10^6$.

Así,

$$p_1^e(c, \boldsymbol{\alpha}) \cong \frac{1}{20}\Big(\frac{20.300}{2} + \frac{12 \cdot 10^6}{400}(1'04667 - 1'04834) \Big) = 504'995\,,$$

$$p_2^e(c, \boldsymbol{\alpha}) \cong \frac{1}{20}\Big(\frac{20.300}{2} + \frac{12 \cdot 10^6}{400}(1'05 - 1'04834) \Big) = 509'99\,.$$

Ejemplo 2.4. Sea $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^2$, el problema con función de coste $c(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 + z_2}$, para todo vector de producción $(z_1, z_2) \in [0, \alpha_1] \times [0, \alpha_2]$.

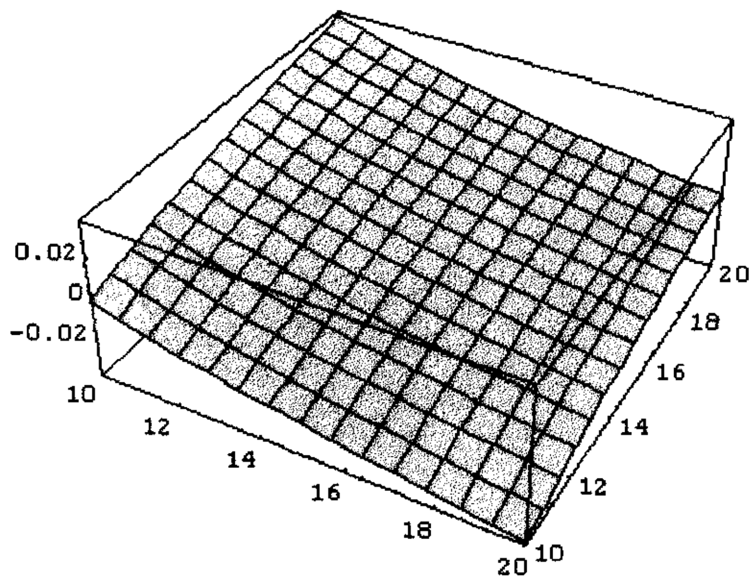
Para este problema, aún siendo la función de coste simétrica, el precio unitario dictado por el *sistema igualador de precios* tiene en cuenta la cantidad demandada de cada bien individual. No carga el mismo coste unitario a los dos bienes. En general, el precio unitario del producto con una demanda mayor es ligeramente inferior al precio unitario del bien menos demandado, en consonancia con el hecho de que la función de coste es cóncava. No obstante, el coste cobrado por satisfacer la demanda del bien más demandado es superior al coste de atender la demanda del menos solicitado.

$$p_1^e(c, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}}{2} + \frac{8}{35}\,\frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\,k(\alpha_1, \alpha_2)\Big),$$
$$p_2^e(c, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\alpha_2}\Big(\frac{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}}{2} - \frac{8}{35}\,\frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\,k(\alpha_1, \alpha_2)\Big),$$

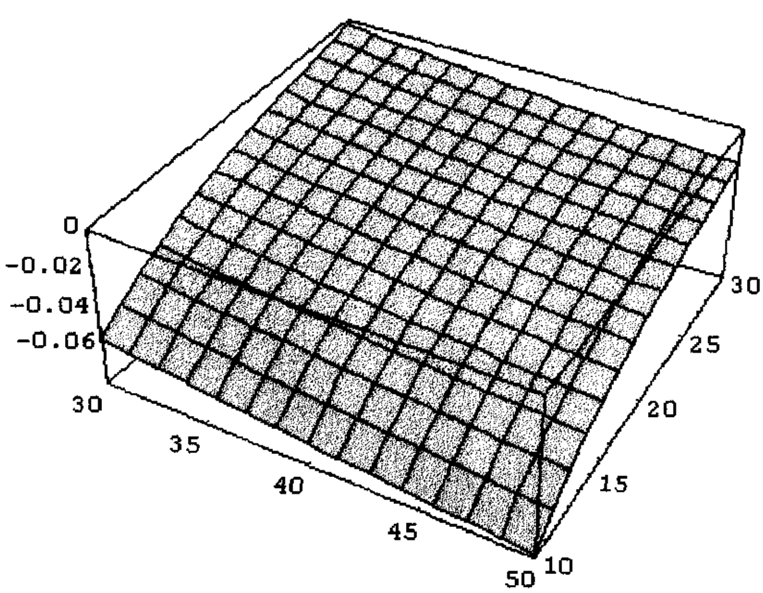
donde

$$k(\alpha_1, \alpha_2) = 2(\alpha_1 + \alpha_2)^3\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2}(\alpha_1 - \alpha_2) + 2(\alpha_2^4\sqrt{\alpha_2} - \alpha_1^4\sqrt{\alpha_1}) - 5\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2\sqrt{\alpha_2} - \alpha_1^2\sqrt{\alpha_1}).$$

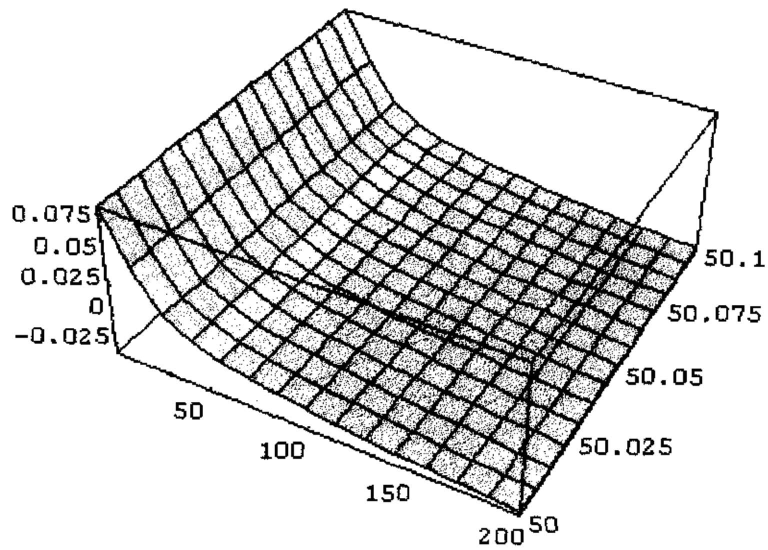
$k(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, si y sólo si $\alpha_1 > \alpha_2$, luego el precio por satisfacer la demanda del bien más solicitado es siempre superior al precio por satisfacer la demanda del producto menos pedido. En cuanto a la afirmación hecha anteriormente sobre la relación entre el precio unitario cargado a la producción de cada bien en función de las cantidades demandadas, no se ha probado analíticamente. No obstante, en las siguientes figuras, que representan las gráficas de la función $p_1^e(c, \boldsymbol{\alpha}) - p_2^e(c, \boldsymbol{\alpha})$ en distintas regiones de $\mathrm{int}(\mathbb{R}^2_+)$, se puede observar el comportamiento que se le ha supuesto.

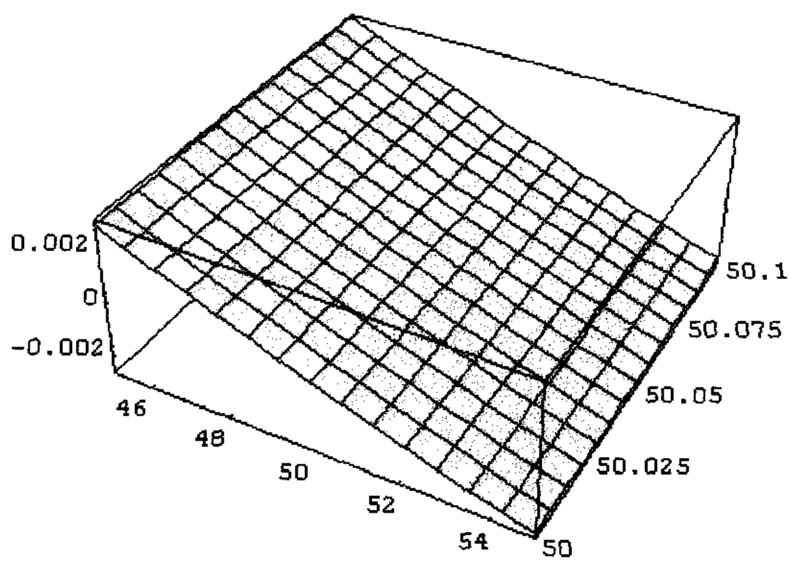


$\alpha \in [10,20]^2$



$\alpha_1 \in [30,50]$, $\alpha_2 \in [10,30]$





$\alpha_1 \in [1, 200]\,,\ \alpha_2 \in [50, 50'1]$

2.6 Conclusiones

En este capítulo hemos abordado principalmente la tarea de extender el prenucléolo mínimo cuadrático al caso continuo. Se han estudiado sus propiedades, se ha dado una caracterización axiomática y se ha analizado detalladamente su aplicación como regla de asignación de costes. No obstante, el fin que perseguíamos en un principio era menos ambicioso. Se reducía al estudio del comportamiento de la solución lexicográfica como concepto de solución para juegos con tasas de participación. Dicho estudio nos llevó al descubrimiento de diversos trabajos que abordaban, bien el mismo problema, bien problemas relacionados, desde distintos puntos de vista. En este capítulo hemos tratado también de conciliar los diversos enfoques desde los que se han estudiado los valores para juegos TU nítidos que dan lugar a los conceptos de solución para juegos con tasas de participación tratados en él.

En lo que respecta a la continuidad del estudio, se pueden distinguir dos líneas de investigación distintas. La primera de ellas, consistiría en estudiar la relación de las soluciones igualadora y lexicográfica con otros conceptos de solución para juegos con tasas de participación. En particular, su relación con el valor de Aubin, que extiende al caso continuo el valor de Shapley, y con el corazón, bajo qué condiciones se puede garantizar su pertenencia al corazón del juego cuando éste es no vacío. La segunda de ellas, estaría motivada por el hecho de que en ocasiones la hipótesis de que el reparto sea lineal en la tasa de participación de los jugadores no es realista. Esta reflexión nos lleva a preguntarnos sobre la adaptación de la solución igualadora y la solución lexicográfica a contextos más generales en los que se trabaje con funciones de reparto no necesariamente lineales. Concretamente, esta generalización podría tener especial interés en el contexto de asignación de costes, lo que supondría trabajar con funciones de pago no lineales.

<table>
<tr><td colspan="2">2–CENTRO (Spinetto, 1974)</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td>Caracterización</td></tr>
<tr><td>Imputación cuyo juego aditivo asociado minimiza la distancia dada por la norma ℓ_2 al juego original (N, v).
$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \Big(\sum_{\substack{S\subset N\\ |S|>2}} \big(v(S)-\mathbf{x}(S)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{x}\in I(v) \end{array}$$</td><td>Exceso del jugador i con respecto al vector de pagos $\mathbf{x}$:
$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{x}) &= \sum_{S\in Q_i} \big(v(S)-\mathbf{x}(S)\big) \\ Q_i &= \{S\subseteq N \,/\, i\in S\,,\, |S|>2\}. \end{aligned}$$
$\theta(\mathbf{x})$: vector de excesos.
<u>2–centro</u>: mínimo lexicográfico sobre $I(v)$.</td></tr>
<tr><td>Nucléolo mínimo cuadrático
(Ruiz et al., 1996)</td><td>Solución lexicográfica
(Sakawa y Nishizaki, 1994)</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\neq\emptyset}} \big(e(S,\mathbf{x})-\overline{E}(v,\mathbf{x})\big)^2 \\ \text{s.a.} & \\ & \mathbf{x}\in I(v) \end{array}$$
$$\overline{E}(v,\mathbf{x}) = \frac{1}{2^n-1}\sum_{\substack{S\subseteq N\\ S\neq\emptyset}} e(S,\mathbf{x})$$</td><td>Exceso del jugador i con respecto al vector de pagos $\mathbf{x}$:
$$w(i,\mathbf{x}) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\in S}} \big(v(S)-\mathbf{x}(S)\big)$$
$\theta(\mathbf{x})$: vector de excesos.
<u>Solución lexicográfica:</u> mínimo lexicográfico sobre $I(v)$.</td></tr>
</table>

Tabla 2.2: Relación con el 2–centro.

Capítulo 3

Juegos de producción lineal controlados por comités: Análisis del corazón

En este capítulo llevamos a cabo un estudio detallado del corazón de un tipo de juegos muy concreto: *Los Juegos de Producción Lineal controlados por Comités* (Curiel, Derks y Tijs (1989)). Principalmente, nuestro interés reside en el análisis de la evolución del corazón de este tipo de juegos cuando el número de jugadores "tipo" presentes en el juego aumenta. Para llevar a cabo dicho análisis se introduce en el modelo la posibilidad de que los jugadores puedan graduar, ya sea de forma discreta o continua, su tasa de participación en una coalición; lo que nos lleva a trabajar con *Juegos de Producción Lineal controlados por Comités con tasas de participación.* Así mismo, se aborda el problema de la reducción (en el sentido de Davis–Maschler) de un juego de estas características.

Los juegos de producción lineal controlados por comités surgen como generalización de los *Juegos de Producción Lineal,* introducidos por Owen (1975). En cuanto al primer problema planteado, la línea de trabajo que seguimos es la desarrollada por Owen (1975) para el modelo original. En lo referente al último problema planteado, ha sido el trabajo de Granot (1994) sobre el juego reducido de un juego de producción lineal, el que nos ha servido de motivación.

El capítulo se inicia con una sección en la que se resumen los trabajos que sirven de base al estudio abordado en el núcleo central del capítulo: Los trabajos de Owen (1975) y Samet y Zemel (1984), sobre la evolución del corazón de un juego de producción lineal, y el trabajo de Curiel, Derks y Tijs (1989) en el que se introduce el concepto de juego de producción lineal controlado por comités. Del mismo modo, antes de abordar el problema de la reducción del juego, se resume también el trabajo de Granot (1994).

3.1 Preliminares

3.1.1 Juegos de producción lineal: Definición y resultados previos

Los juegos de producción lineal, introducidos originalmente por Owen (1975), se engloban dentro de una clase de juegos *TU* más general: La clase de *Juegos de Optimización.* Este tipo de juegos surgen asociados a situaciones modelizables como problemas de optimización en las que hay más de un decisor involucrado. En dicho caso, el valor de una coalición viene dado por la solución del problema de optimización que se plantea cuando todos los miembros de la coalición unen sus recursos con el fin de alcanzar un objetivo determinado. Los *Juegos de Asignación* (Shapley y Shubik (1972)) son un claro referente en el estudio de este tipo de juegos. Posteriormente, han sido tratados por Dubey y Shapley (1984) y Granot (1986), entre otros, y más recientemente, por Sánchez–Soriano (1998), en cuyo trabajo introduce y analiza en profundidad los *Juegos del Transporte* que generalizan los juegos de asignación. En particular, los Juegos de Producción Lineal modelizan economías de producción (lineal) en las que los recursos necesarios para elaborar los productos finales pertenecen a un grupo de decisores, que pueden optar por compartirlos si llegan a un acuerdo.

En el modelo original (Owen (1975)) cada uno de los jugadores, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, dispone de una cierta cantidad de m recursos dada por el vector $\mathbf{b}^i = (b_1^i, \ldots, b_m^i)$. Dichos recursos pueden ser empleados para producir p clases de productos que pueden ser vendidos en el mercado obteniéndose un beneficio (unitario) de c_j, $j = 1, \ldots, p$. Se supone además que los recursos únicamente son útiles en tanto que sirven para producir y que para producir una unidad de producto j se requieren a_{kj} unidades del k-ésimo recurso. El valor de la coalición $S \subseteq N$ viene dado por

$$
\begin{aligned}
v(S) = \quad \text{máx} \quad & \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\
\text{s.a.} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \leq b_k(S), \quad k = 1, \ldots, m, \\
& x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, p,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

donde $\mathbf{A} = [a_{kj}]_{\substack{k=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$ es la matriz de producción[1] y $\mathbf{b}(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{b}^i$ son los recursos de que dispone la coalición $S \subseteq N$.

[1] $a_{kj} \geq 0 \; \forall k = 1, \ldots, m, \; \forall j = 1, \ldots, p$, y para cada $j \in \{1, \ldots p\}$, $\exists k \in \{1, \ldots m\}$ tal que $a_{kj} > 0$.

Owen (1975), después de probar que los juegos de producción lineal son (totalmente) equilibrados, centra su estudio en la obtención de repartos en el *corazón*. Haciendo uso de la teoría de dualidad en programación lineal, demuestra que todos aquellos repartos que se obtienen pagando a los jugadores por sus recursos en función del precio de los mismos dictado por un "precio sombra" pertenecen al corazón del juego. Concretamente, dado un juego de producción lineal (N, v), sea $Op(N)$ el conjunto de óptimos del dual del problema de programación lineal asociado al valor de la coalición total, entonces el conjunto

$$DP(v) = \left\{ \varphi \in I\!R^n \;/\; \varphi_i = \sum_{k=1}^{m} y_k^* b_k^i \;,\;\; i = 1, \ldots, n, \;\; \boldsymbol{y}^* \in Op(N) \right\},$$

al que denominaremos en adelante *conjunto de pagos según precios sombra*, está contenido en $C(v)$. No obstante, en general el recíproco no es cierto, es decir, no toda imputación del corazón se puede obtener a través de precios sombra. Siguiendo una línea de investigación clásica en este contexto (ver Debreu y Scarf (1963)), Owen estudia la evolución del corazón cuando el número de jugadores de cada tipo (disponen del mismo vector de recursos inicial) presentes en el mercado aumenta: Dado un juego n–personal de producción lineal (N, v), para todo $r \in \mathbb{Z}_+$, considera el juego rn–personal (rN, w^r) que surge al r–replicar el conjunto de jugadores original; esto es, (rN, w^r) es el juego de producción lineal definido por los mismos parámetros que (N, v) en el que hay ahora r jugadores que disponen de un vector de recursos inicial $\mathbf{b}^i$, $i = 1, \ldots, n$. El trabajo de Owen se centra entonces en el análisis de la evolución, con respecto al conjunto de repartos según precios sombra, del corazón de los sucesivos juegos replicados.

En primer lugar, Owen demuestra el siguiente resultado sobre la simetría del corazón de los juegos replicados, lo que le permite caracterizar el corazón de los juegos replicados a partir de su proyección sobre $I\!R^n$.

Teorema 3.1 (Owen, 1975). *Para todo $r \geq 2$, en cualquier imputación en el corazón del juego r–replicado (rN, w^r), dos jugadores del mismo tipo reciben el mismo pago.*

Así, toda imputación $(u_1, \ldots, u_n; \ldots\ldots; u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{rn}$ en el corazón del juego r–replicado se puede identificar con un vector $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

En cuanto a la evolución del corazón, Owen obtiene los siguientes resultados sobre la convergencia de la sucesión de conjuntos $\{C(w^r)\}_{r \in \mathbb{Z}_+}$.

Teorema 3.2 (Owen, 1975). *Si* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *pertenece al corazón del juego* r*–replicado para todo* $r \in \mathbb{Z}_+$*, entonces* $\mathbf{u} \in DP(v)$.

En el siguiente teorema se da una condición suficiente para la convergencia finita, entendiéndose por convergencia finita la existencia de $m \in \mathbb{Z}_+$ verificando $DP(v) = \bigcap_{r=1}^{m} C(w^r)$. Obsérvese que la existencia de r_0 verificando $C(w^{r_0}) = DP(v)$ es una condición necesaria y suficiente para que $DP(v) = \bigcap_{r=1}^{m} C(w^r)$.

Teorema 3.3 (Owen, 1975). *Si* $Op(N) = \{\mathbf{y}^*\}$*, entonces existe* $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ *suficientemente grande verificando*

$$C(w^{r_0}) = DP(v) = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* b_k^1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} y_k^* b_k^n \right) \right\}.$$

Samet y Zemel (1984) profundizan en el estudio iniciado por Owen. Obtienen una condición necesaria y suficiente para la convergencia finita. Además, como corolarios, obtienen condiciones suficientes alternativas y refuerzan la condición establecida por Owen en el teorema 3.3. En su trabajo consideran el "refinamiento", en lugar de la replicación, del conjunto de jugadores, que será precisamente el enfoque que nosotros adoptaremos.

Dado un juego n–personal de producción lineal (N, v), se define el r-refinamiento del juego como aquel juego rn–personal de producción lineal (rN, v^r) que se obtiene al considerar que cada uno de los jugadores del juego original se desdobla en r jugadores idénticos, disponiendo cada uno de ellos de $\frac{1}{r}\mathbf{b}^i$, $i = 1, \ldots, n$, recursos iniciales.

Este enfoque, considerar el refinamiento en lugar de la replicación de la economía, es equivalente, como se observa a continuación, a considerar que los jugadores pueden participar en una coalición a distintos niveles de intensidad.

Para cada $r \in \mathbb{Z}_+$, sea M^r el retículo del hipercubo unidad $[0,1]^n$ definido por

$$M^r = \left\{ \mathbf{x} \in I\!\!R^n \;/\; x_i = \frac{q_i}{r}\,,\; q_i \in \mathbb{Z}\,,\; 0 \le q_i \le r\,,\; i = 1,\ldots,n \right\}.$$

Considérese la correspondencia $\tau^r : rN \to M^r$, que a cada coalición $S \subseteq rN$ le hace corresponder la coalición con (finitas) tasas de participación $\boldsymbol{\tau}^r(S) = (\tau_1^r(S),\ldots,\tau_n^r(S)) \in M^r$, donde $\tau_i^r(S) = \dfrac{q_i(S)}{r}$, siendo $q_i(S)$ el número de jugadores de tipo i que contiene S, $i \in N$.

El valor de una coalición en el juego r–refinado depende exclusivamente del número de jugadores de cada tipo que contiene. Entonces, para todo par de coaliciones $S, S' \subseteq rN$, tales que $\tau^r(S) = \tau^r(S')$, se verifica $v^r(S) = v^r(S')$. Así pues, a cada r–refinamiento (rN, v^r) le podemos asociar unívocamente un juego n–personal con (finitas) tasas de participación $(N, \widetilde{v}^r)$, $\widetilde{v}^r : M^r \to I\!\!R$, de la siguiente forma. Para toda coalición, $\boldsymbol{\tau} \in M^r$, definimos

$$\widetilde{v}^r(\boldsymbol{\tau}) = v^r(S)\,, \quad S \subseteq rN \;\text{ tal que }\; \tau^r(S) = \boldsymbol{\tau}\,.$$

Cualquier coalición $S \subseteq rN$ tal que $\tau^r(S) = \boldsymbol{\tau}$ dispone de los recursos iniciales $\sum_{i\in N} \tau_i \mathbf{b}^i$ y, en consecuencia

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{v}^r(\boldsymbol{\tau}) = \quad & \text{máx} \;\; \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\
& \text{s.a.} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \;\le\; \sum_{i\in N} \tau_i b_k^i\,, \quad k = 1,\ldots,m, \\
& \qquad\qquad\quad x_j \;\ge\; 0\,, \qquad\quad j = 1,\ldots,p,
\end{aligned}\right\} \quad \forall\; \boldsymbol{\tau} \in M^r\,.$$

Así pues, el refinamiento,

$$\mathcal{R}(v) = \left\{ (rN, v^r) \,,\ \ r \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

del juego de producción lineal (N, v) se puede describir a partir de una colección de juegos n–personales con (finitas) tasas de participación

$$\widetilde{\mathcal{R}}(v) = \left\{ (N, \widetilde{v}^r) \,,\ \ r \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Refinar el juego es, entonces, equivalente a refinar el conjunto de niveles de actividad a los que un jugador puede participar en el juego.

Consideremos ahora el juego con (infinitas) tasas de participación $(N, \widetilde{v})$, $\widetilde{v} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$, dado por

$$\left.\begin{array}{rll} \widetilde{v}(\tau) = & \text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\ & \text{s.a.} & \\ & & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \ \leq \ \sum_{i \in N} \tau_i b_k^i \,, \quad k = 1, \ldots, m, \\ & & \qquad x_j \ \geq \ 0 \,, \qquad\qquad j = 1, \ldots, p, \end{array}\right\} \ \forall \ \tau \in [0,1]^n .$$

Las funciones $\widetilde{v}^r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, verifican $\widetilde{v}^r \equiv \widetilde{v}|M^r$, $\forall \ r \in \mathbb{Z}_+$, donde $\widetilde{v}|M^r$ es la restricción de la función $\widetilde{v}$ al conjunto de coaliciones con (finitas) tasas de participación M^r. Luego, todas ellas se pueden definir a partir de la función $\widetilde{v}$, a la que denominaremos *función generatriz del refinamiento*. Asimismo, denominaremos *juego de producción lineal generador del refinamiento* al juego $(N, \widetilde{v})$.

De forma análoga al resultado 3.1 de Owen, se obtiene que para todo $r \in \mathbb{Z}_+$, la imputación $\Phi = (\frac{\varphi_1}{r}, \ldots, \frac{\varphi_n}{r}; \ldots\ldots; \frac{\varphi_1}{r}, \ldots, \frac{\varphi_n}{r}) \in \mathbb{R}^{rn}$ pertenece a $C(v^r)$ si y sólo si la imputación

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in I\!R^n$ pertenece al corazón de $(N, \widetilde{v}^r)$, dado por

$$C(\widetilde{v}^r) = \left\{ \varphi \in I\!R^n \ / \ \sum_{i \in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}^r(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \in M^r \right\}.$$

Dado $r \in \mathbb{Z}_+$, para todo $1 \leq \ell < r$, existe $m = \ell r \geq r$ tal que $C(\widetilde{v}^m) \subseteq C(\widetilde{v}^\ell)$, luego $\bigcap_{k=r}^{\infty} C(\widetilde{v}^k) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C(\widetilde{v}^r)$. Así, la sucesión de conjuntos $\left\{C(\widetilde{v}^r)\right\}_{r \in \mathbb{Z}_+}$ verifica

$$\liminf_{r \to \infty} C(\widetilde{v}^r) := \bigcup_{r=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{k=r}^{\infty} C(\widetilde{v}^k) \Big) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C(\widetilde{v}^r).$$

Por otro lado, como consecuencia inmediata de la continuidad de la función $\widetilde{v}$ y la densidad de los racionales en los reales, se tiene que el comportamiento límite[2] de dicha sucesión queda determinado por el corazón del juego de producción lineal generador del refinamiento, dado por

$$C(\widetilde{v}) = \left\{ \varphi \in I\!R^n \ / \ \sum_{i \in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n \right\}.$$

En este contexto se siguen verificando los resultados de Owen y $C(\widetilde{v}) = DP(v)$. Además, Samet y Zemel obtienen, entre otros, los siguientes resultados:

Teorema 3.4 (Samet y Zemel, 1984). *Dado $u \in DP(v)$, sea $T_r(u)$ el cono convexo generado por los puntos de M^r para los que se verifica $\sum_{i=1}^{n} u_i \tau_i = \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$. Entonces, $C(\widetilde{v}^r) = DP(v)$ si y sólo si $\bigcup_{u \in DP(v)} T_r(u)$ contiene a un entorno de $\mathbf{1}$.*

Corolario 3.1 (Samet y Zemel, 1984). *Si el conjunto $DP(v)$ contiene a un único punto, entonces existe $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande verificando $C(\widetilde{v}^{r_0}) = DP(v)$.*

[2]En lo que sigue, cada vez que nos refiramos al comportamiento límite de $\left\{C(\widetilde{v}^r)\right\}_{r \in \mathbb{Z}_+}$, estaremos indicando el límite inferior de dicha sucesión de conjuntos.

Corolario 3.2 (Samet y Zemel, 1984). *Si todas las componentes de la matriz de producción* $\mathbf{A}$*, de los vectores de recursos iniciales* $\mathbf{b}^i$*,* $i \in N$*, y del vector de beneficios* $\mathbf{c}$*, son números racionales, entonces existe* $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ *suficientemente grande verificando* $C(\widetilde{v}^{r_0}) = DP(v)$.

Corolario 3.3 (Samet y Zemel, 1984). *Si* (N, v) *es un juego de producción lineal bipersonal, entonces existe* $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ *suficientemente grande verificando* $C(\widetilde{v}^{r_0}) = DP(v)$.

3.1.2 Juegos de producción lineal controlados por comités: Definición y resultados previos

En el modelo original (Owen (1975)) se supone que cada jugador puede disponer libremente de una cierta cantidad de recursos, es decir, los recursos son bienes individuales. Sin embargo, se puede dar el caso de que los recursos sean bienes colectivos: Un grupo de jugadores podrá disponer libremente de un recurso siempre y cuando tenga "poder" suficiente para ello. En el modelo de Curiel *et al.* (1989), *Juegos de producción lineal controlados por comités*, se supone que los recursos están disponibles en el mercado en lotes, cada uno de ellos controlado por un comité de jugadores. Piénsese, por ejemplo, en la siguiente situación: La producción de PTA (Ácido Tereftálico Puro) y de EtG (Etilen–Glicol) en la cuenca Mediterránea está controlada por tres petroquímicas A, B, C. La capacidad anual de producción disponible, expresada en toneladas, de cada una de ellas viene recogida en la siguiente tabla:

	PTA	EtG
A	150.000	—
B	—	90.000
C	110.000	60.000

A partir de estos productos químicos se puede producir fibra textil sintética (PET–fibra) y plástico para botellas (PET–botella). La siguiente tabla recoge las cantidades (en toneladas) de cada producto necesarias para producir una tonelada de cada uno de estos derivados.

	PET-botella	PET-fibra
PTA	0.966	0.912
EtG	0.365	0.344

La venta en el mercado de fibra textil da un beneficio de 5.000 pts. por tonelada, mientras que la venta de plástico da un beneficio de 6.000 pts. por tonelada.

Las juntas de accionistas de cada una de las compañías tiene la siguiente composición:

A: J_1 controla el 40% de las acciones,
J_2 controla el 20% de las acciones,
J_3 controla el 25% de las acciones,
J_5 controla el 15% de las acciones.

B: J_2 controla el 35% de las acciones,
J_3 controla el 35% de las acciones,
J_4 controla el 30% de las acciones.

C: J_1 controla el 45% de las acciones,
J_4 controla el 45% de las acciones,
J_5 controla el 10% de las acciones,

donde $J_1, \ldots, J_5$ son los cinco grandes inversores que controlan la producción de PTA y EtG en la zona.

En tal caso, si los cinco grandes inversores pudieran firmar acuerdos vinculantes, entonces el juego TU que modelizaría la situación que enfrentan es un juego de producción lineal controlado por comités en el que hay dos recursos (PTA y EtG), disponibles en el mercado en lotes (producción de las compañías A, B y C), cada uno de los cuales está controlado por un comité de jugadores (composición de la junta de accionistas).

Formalmente, dado el recurso k, $k = 1, \ldots, m$, existen d_k lotes de producto k, $B_k^1, \ldots, B_k^{d_k}$, cuyo control viene dado por un juego simple, (N, u_k^q), $q = 1, \ldots, d_k$; la coalición S puede disponer del lote B_k^q si y sólo si S es una coalición ganadora en el juego u_k^q. Así, se tiene que la cantidad total de recurso k de que dispone la coalición S viene dada por

$$B_k(S) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q(S),$$

donde $B_k^q(S) = B_k^q \cdot u_k^q(S)$ y, por consiguiente, el valor de dicha coalición vendrá dado por el óptimo del problema 3.1 reemplazando el vector $\mathbf{b}(S)$ por $\mathbf{B}(S) = (B_1(S), \ldots, B_m(S))$.

En el ejemplo, $p = 2$ (PET–botella = producto 1, PET–fibra = producto 2), $m = 2$ (PTA = recurso 1, EtG = recurso 2), $d_k = 2$, $k = 1, 2$, y

$$B_1^1 = 150.000, \quad B_1^2 = 110.000,$$
$$B_2^1 = 90.000, \quad B_2^2 = 60.000.$$

Los juegos simples de control vienen dados por:

$$u_1^1 \equiv u_A, \quad \mathcal{MW}(u_A) = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3,5\}\big\},$$
$$u_1^2 \equiv u_C, \quad \mathcal{MW}(u_C) = \big\{\{1,4\},\{1,5\},\{4,5\}\big\},$$
$$u_2^1 \equiv u_B, \quad \mathcal{MW}(u_B) = \big\{\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\big\},$$
$$u_2^2 \equiv u_C.$$

La matriz de producción es

$$A = \begin{pmatrix} 0.966 & 0.912 \\ 0.365 & 0.344 \end{pmatrix}$$

Luego, para toda coalición $S \subseteq N = \{1, \dots, 5\}$,

$$\begin{array}{rlrcl} v(S) = & \text{máx} & 6.000x_1 + 5.000x_2 & & \\ & \text{s.a.} & & & \\ & & 0.966x_1 + 0.912x_2 & \leq & 150.000u_A(S) + 110.000u_C(S), \\ & & 0.365x_1 + 0.344x_2 & \leq & 90.000u_B(S) + 60.000u_C(S), \\ & & \mathbf{x} & \geq & 0. \end{array}$$

El trabajo de Curiel, Derks y Tijs (1989) se centra en el corazón de este tipo de juegos. A continuación, se enuncian los resultados que obtienen.

Teorema 3.5 (Curiel et al. (1989)). *Si todos los juegos simples que describen el control de los recursos son equilibrados, entonces el juego de producción lineal controlado por comités tiene corazón no vacío.*

Estos autores consideran el conjunto compuesto por todas aquellas preimputaciones que pueden ser obtenidas mediante el procedimiento que se describe a continuación:

1. Se reparten los recursos entre los jugadores atendiendo a imputaciones en el corazón de cada uno de los juegos simples que describen su control: Cada porción B_k^q, $q = 1, \dots, d_k$, de recurso k, $k = 1, \dots m$, se reparte entre los jugadores de acuerdo con una imputación $\boldsymbol{\xi}_k^q = (\xi_k^q(i))_{i \in N} \in C(u_k^q)$. Así, cada jugador $i \in N$ recibe la cantidad de recurso k dada por $\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \xi_k^q(i)$, $k = 1, \dots, m$.

2. Una vez repartidos los recursos, se paga a cada uno de los jugadores por los recursos de que dispone en función de los precios dictados por un precio sombra $\mathbf{y}^* \in Op(N)$.

Nos referiremos al conjunto de pagos así obtenido como *conjunto de pagos según precios sombra y repartos equilibrados de v* y lo notaremos por $CDP(v)$:

$$CDP(v) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{z} \in I\!R^n & / & z_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \xi_k^q(i) \right) y_k^*, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \\ & & \mathbf{y}^* \in Op(N), \\ & & \xi_k^q \in C(u_k^q), \quad \forall\, q = 1, \ldots, d_k; \quad \forall\, k = 1, \ldots, m. \end{array} \right\}.$$

Curiel *et al.* demuestran la inclusión $CDP(v) \subseteq C(v)$.

Teorema 3.6 (Curiel et al. (1989)). *Si todos los juegos simples que describen el control de los recursos tienen corazón vacío, entonces el juego de producción lineal controlado por comités es no equilibrado.*

En cuanto a lo que ocurre en situaciones intermedias (algunos de los juegos de control son equilibrados y otros no lo son), pueden darse los dos casos (véase el apéndice C). Como nuestro interés reside en el corazón del juego, en lo que sigue nos restringiremos al estudio de aquellos juegos de producción lineal controlados por comités en los que todos los juegos simples de control son equilibrados.

Observación 3.1. Obviamente, el modelo de Owen se puede ver como un caso particular del modelo más general de Curiel *et al.* (1989).

Observación 3.2. Por otro lado, Granot (1986) propone una generalización alternativa del modelo original de Owen que resulta ser equivalente a la propuesta por Curiel *et al.* (1989). En dicha generalización, el control de cada uno de los recursos disponibles en el mercado viene dado por un juego (no necesariamente simple) no negativo y equilibrado.

3.2 Juegos de producción lineal controlados por comités: Evolución del corazón

Nos proponemos reproducir el estudio de Owen (1975) para el modelo propuesto por Curiel, Derks y Tijs (1989). En la sección 3.2.1 definimos el refinamiento con el que vamos a trabajar para, posteriormente, en la sección 3.2.2 analizar la evolución del corazón de los juegos de producción lineal controlados por comités cuando se refina el conjunto de jugadores.

Puente y Marchi (1995) llevan a cabo un estudio similar sobre el modelo de Granot. Sin embargo, el planteamiento y los resultados a los que llegan difieren sustancialmente de los que nosotros obtenemos. En cada sección se recogerá el planteamiento y resultados alternativos que ellos obtienen.

3.2.1 Refinamiento del juego: Definición y propiedades

En esta sección se aborda el problema que se plantea al tratar de extender el modelo de Curiel *et al.* (1989) cuando se refina el conjunto de jugadores.

Dado un juego de producción lineal controlado por comités, (N, v), para definir el juego r–refinado se debe determinar en primer lugar cómo redistribuir entre los nuevos jugadores el control sobre cada uno de los recursos; es decir, cómo refinar cada uno de los juegos simples que describen el control de los recursos.

Sea (N, u) un juego simple describiendo el control sobre un cierto recurso B. A continuación, se expone el razonamiento intuitivo que nos ha llevado a la definición del juego r–refinado, (rN, u^r).

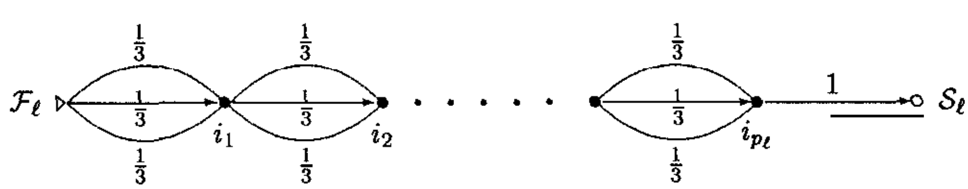
En el juego original, una coalición $S \subseteq N$ dispone del control del recurso B si y sólo si la coalición S contiene a todos los jugadores de, al menos, una coalición minimal ganadora del juego. Sea $\mathcal{MW}(u) = \{P_1, \ldots, P_k\}$ el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego. Asociada a cada coalición minimal ganadora $P_\ell = \{i_1, \ldots, i_{p_\ell}\}$, $\ell = 1, \ldots, k$, considérese la red $\mathcal{G}_\ell$:

compuesta por tantos arcos de capacidad 1 como jugadores en P_ℓ más uno, y en la que cada arco, a excepción del arco que incide en el nodo sumidero $\mathcal{S}_\ell$ (que es de uso común), está controlado por el jugador en que incide dicho arco. Entonces, la coalición $S \subseteq N$ podrá enviar una unidad de flujo del nodo fuente $\mathcal{F}_\ell$ al nodo sumidero $\mathcal{S}_\ell$ a través de la red $\mathcal{G}_\ell$ si y sólo si S contiene a todos los miembros de P_ℓ. De esta forma, el control de una coalición sobre el recurso B vendrá dado por el máximo flujo que dicha coalición puede enviar por alguna de las redes asociadas a cada una de las coaliciones minimales ganadoras del juego. Esto es,

$$u(S) = \max_{1 \leq \ell \leq k} \min_{i \in P_\ell} x_i^S , \qquad \forall\ S \subseteq N ,$$

donde $\mathbf{x}^S$ es el vector característico de la coalición S.

En esta situación, repartir el poder entre los r jugadores idénticos en que se ha desdoblado el jugador original, se corresponderá con desdoblar cada uno de los arcos que controla dicho jugador en r arcos, de capacidades $\frac{1}{r}$, cada uno de ellos controlado por uno de los jugadores en que se desdobla el jugador original. Por ejemplo, si $r = 3$ entonces la red asociada a la coalición minimal ganadora P_ℓ, $\mathcal{G}_\ell^3$, se definirá como



Análogamente, la proporción de recurso B que controla una coalición en el juego r-refinado (que controla tantos arcos como jugadores de cada tipo contiene) vendrá dada, como en el juego original, por el máximo flujo que dicha coalición puede enviar por alguna de las redes asociadas a cada una de las coaliciones minimales ganadoras del juego simple original. El máximo flujo que una coalición $S \subseteq rN$ puede enviar por la red $\mathcal{G}^r_\ell$, asociada a la coalición minimal ganadora P_ℓ, viene dado por $\frac{1}{r}\min_{i \in P_\ell} q_i(S)$, donde $q_i(S)$ representa el número de jugadores de tipo i que contiene la coalición S, $i = 1, \ldots, n$. Luego, la cantidad de recurso B que controla vendrá dada por

$$u^r(S) = \frac{1}{r} \max_{1 \leq \ell \leq k} \min_{i \in P_\ell} q_i(S), \quad \forall \ S \subseteq rN. \tag{3.2}$$

Definición 3.1. Sea (N, u) un juego simple de control, se define el *refinamiento* del juego como la colección, $\mathcal{R}(u) = \left\{ (rN, u^r), \ \ r \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, de juegos r–refinados definidos por la expresión (3.2)

El poder de control sobre el recurso B de una coalición $S \subsetneq rN$ cualquiera depende exclusivamente del número de jugadores de cada tipo que contiene. Así pues, considerando las correspondencias $\tau^r : rN \to M^r$, definidas previamente, se tiene que el refinamiento $\mathcal{R}(u)$ del juego simple de control (N, u) se puede definir a partir de la colección de juegos n–personales con (finitas) tasas de participación $\widetilde{\mathcal{R}}(u) = \left\{ (N, \widetilde{u}^r), \ \ r \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, donde para cada $r \in \mathbb{Z}_+$, y para cada coalición $\boldsymbol{\tau} \in M^r$, definimos

$$\widetilde{u}^r(\boldsymbol{\tau}) = u^r(S), \quad S \subseteq rN \ \text{ tal que } \ \tau^r(S) = \boldsymbol{\tau}.$$

Entonces, el poder de control sobre el recurso B de cualquier coalición $S \subsetneq rN$, tal que $\tau^r(S) = \boldsymbol{\tau}$, viene dado por

$$\widetilde{u}^r(\boldsymbol{\tau}) = \max_{1 \leq \ell \leq k} \min_{i \in P_\ell} \tau_i.$$

Considérese el juego simple con tasas de participación $(N, \widetilde{u})$, $\widetilde{u} : [0,1]^n \to [0,1]$, definido como

$$\widetilde{u}(\tau) = \max_{1\leq \ell \leq k} \min_{i\in P_\ell} \tau_i\,, \qquad \forall\ \tau \in [0,1]^n\,.$$

Entonces, el refinamiento $\widetilde{\mathcal{R}}(u)$ está generado por el juego simple con (infinitas) tasas de participación $(N, \widetilde{u})$.

De acuerdo con el refinamiento de los juegos de control, se define el r–refinamiento de un juego de producción lineal controlado por comités como sigue.

Definición 3.2. Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Para todo $r \in \mathbb{Z}_+$, se define el *juego r-refinado*, (rN, v^r), como

$$\left.\begin{array}{rcl} v^r(S) & = & \max \displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\ & & \text{s.a.} \\ & & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj}x_j \leq B_k^r(S)\,, \quad k=1,\dots,m, \\ & & x_j \geq 0\,, \qquad j=1,\dots,p, \end{array}\right\} \quad \forall\ S \subseteq rN\,, \tag{3.3}$$

donde $B_k^r(S) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q u_k^{qr}(S)$, siendo (rN, u_k^{qr}) el r–refinamiento del juego simple (N, u_k^q) que describe el control sobre la porción B_k^q, $q = 1, \dots, d_k$, de recurso k, $k = 1, \dots, m$.

A la vista del razonamiento anterior, el refinamiento $\mathcal{R}(u_k^q)$ de todo juego simple de control (N, u_k^q), $q = 1, \dots, d_k$, $k = 1, \dots, m$, se puede definir a partir de la colección de juegos n–personales con (finitas) tasas de participación $\widetilde{\mathcal{R}}(u_k^q) = \{\, (N, \widetilde{u}_k^{qr})\,,\ r \in \mathbb{Z}_+ \,\}$.

El poder de control sobre el lote B_k^q, $q = 1, \dots, d_k$, de recurso k, $k = 1, \dots, m$, de cualquier coalición $S \subseteq rN$, tal que $\tau^r(S) = \boldsymbol{\tau}$, viene dado por

$$\widetilde{u}_k^{qr}(\boldsymbol{\tau}) = \max_{P \in \mathcal{MW}(u_k^q)} \min_{i \in P} \tau_i\,,$$

donde $\mathcal{MW}(u_k^q) \subseteq \mathcal{P}(N)$ es el conjunto de coaliciones minimales ganadoras del juego simple (N, u_k^q).

Además, el refinamiento $\widetilde{\mathcal{R}}(u_k^q)$ está generado por el juego simple con (infinitas) tasas de participación $(N, \widetilde{u}_k^q)$, $q = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$, siendo

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \max_{P \in \mathcal{MW}(u_k^q)} \min_{i \in P} \tau_i\,, \qquad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

En consecuencia, el refinamiento $\mathcal{R}(v)$ del juego de producción lineal controlado por comités (N, v) se puede definir a partir de la colección de juegos $\widetilde{\mathcal{R}}(v) = \{\ (N, \widetilde{v}^r)\,,\ r \in \mathbb{Z}_+ \}$, generada por el juego de producción lineal con (infinitas) tasas de participación $(N, \widetilde{v})$, dado por

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \ \ & \max \ \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\ & \text{s.a.} \\ & \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \leq \widetilde{B}_k(\boldsymbol{\tau}) \quad k = 1, \ldots, m, \\ & \qquad\qquad x_j \geq 0 \qquad\quad j = 1, \ldots, p, \end{aligned}\right\} \ \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,, \tag{3.4}$$

donde $\widetilde{B}_k(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau})$, $q = 1, \ldots, d_k$ y para todo $k = 1, \ldots, m$.

Antes de plantearnos iniciar estudio alguno sobre la convergencia del corazón de los sucesivos juegos refinados es necesario generalizar el resultado sobre la simetría del corazón de los juegos refinados obtenido por Owen (Teorema 3.1).

Veamos, en primer lugar, algunas de las propiedades del juego refinado (rN, v^r) que nos permitirán reproducir la demostración de dicho teorema.

La función generatriz $\widetilde{u}$ del refinamiento de un juego simple de control (N, u) verifica las siguientes propiedades:

(P1) $\widetilde{u}$ extiende el juego original (N, u): $\widetilde{u}(\mathbf{x}^S) = u(S)\,, \quad \forall\ S \subseteq N.$

(P2) $\widetilde{u}$ es monótona no decreciente: $\widetilde{u}(\boldsymbol{\tau}) \leq \widetilde{u}(\boldsymbol{\tau}')\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}'.$

(P3) $\widetilde{u}$ es continua.

(P4) $\widetilde{u}$ es homogénea de grado 1:

$$\widetilde{u}(\lambda\boldsymbol{\tau}) = \lambda\widetilde{u}(\boldsymbol{\tau})\,, \qquad \forall \quad \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n \quad \text{y} \quad \forall \quad \lambda \geq 0 \ \text{ tal que } \ \lambda\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

Si todos los jugadores varían su tasa de participación en la misma proporción $\lambda \geq 0$, entonces la proporción de recurso que controlan varía en la misma proporción λ.

Definición 3.3. Para todo $r \geq 1$ y para todo conjunto de jugadores N, se define una *proyección del conjunto de jugadores original* como cualquier coalición de jugadores $N' \subsetneq rN$ compuesta exactamente por un jugador de cada tipo.

Notación. Sea $S \subsetneq rN$ una coalición cualquiera, para todo $h = 0, \dots, \left\lfloor \min_{i \in N} \frac{r}{q_i(S)} \right\rfloor$, se denotará por hS a la coalición que se obtiene cuando el número de jugadores de cada tipo que contiene la coalición S se multiplica por h.

Lema 3.1. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Para todo $r \geq 1$, el juego r-refinado (rN, v^r) verifica:*

(i) $v^r(S) = \dfrac{1}{r}v(S)$, $\forall\ S \subseteq N'$, *para toda $N' \subsetneq rN$, proyección del conjunto de jugadores original.*

(ii) *v^r es homogénea de grado 1:* $v^r(hS) = hv^r(S),\ \forall\ S \subseteq rN,\ \forall\ h = 0, \dots, \left[\min_{i \in N} \frac{r}{q_i(S)}\right]$.

Demostración: (i) Para todo $q = 1, \dots, d_k$, para todo $k = 1, \dots, m$; $(N, \widetilde{u}_k^q)$ extiende el juego original (N, u_k^q) y es homogéneo de grado 1, luego $\forall\ S \subseteq N'$, y para toda $N' \subseteqq rN$, proyección del conjunto de jugadores original, se verifica

$$B_k^r(S) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q u_k^{qr}(S) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\frac{1}{r}\mathbf{x}^S) = \frac{1}{r}\sum_{q=1}^{d_k} B_k^q u_k^q(S) = \frac{1}{r} B_k(S).$$

Por el teorema fundamental de dualidad se tiene que

$$v^r(S) = \min\left\{ \sum_{k=1}^{m} B_k^r(S) y_k \ \ / \ \ \mathbf{y} \in Y \right\},$$

donde la región factible del problema dual asociado al valor de la coalición S,

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in I\!R^m \ \ / \ \ \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k \geq c_j\,,\ j = 1, \dots, p\,,\ y_k \geq 0\,,\ k = 1, \dots, m \right\},$$

es independiente de S. Entonces,

$$v^r(S) = \frac{1}{r} \cdot \min\left\{ \sum_{k=1}^{m} B_k(S) y_k \ \ / \ \ \mathbf{y} \in Y \right\} = \frac{1}{r} v(S).$$

En cuanto a la propiedad (ii), se demuestra de forma análoga teniendo en cuenta que de la homogeneidad de las funciones $\widetilde{u}_k^q$, $q = 1, \dots, d_k$, $k = 1, \dots, m$, se deduce que

$$B_k^r(hS) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q u_k^{qr}(hS) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\tau^r(hS)) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q h \widetilde{u}_k^q(\tau^r(S)) = hB_k^r(S),$$

para toda coalición $S \subseteq rN$, y para todo $h = 0, \ldots, \left[\min\limits_{i \in N} \frac{r}{q_i(S)}\right]$. □

Proposición 3.1. *Para todo $r \geq 2$, en cualquier imputación en el corazón del juego r–refinado, (rN, v^r), dos jugadores del mismo tipo reciben el mismo pago.*

Demostración: Sea $\varphi \in I\!R^{rn}$ una imputación en $C(v^r)$ cualquiera. $rN = \bigcup\limits_{\ell=1}^{r} N^{(\ell)}$, siendo $N^{(\ell)}$, $\ell = 1, \ldots, r$, una proyección de N, entonces de las propiedades del juego r–refinado establecidas en el lema anterior se deduce que

$$\sum_{i \in rN} \varphi_i = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{i \in N^{(\ell)}} \varphi_i = v^r(rN) = rv^r(N) = v(N). \tag{3.5}$$

Por la condición de racionalidad coalicional, se tiene que

$$\sum_{i \in N^{(\ell)}} \varphi_i \geq v^r(N^{(\ell)}) = \frac{1}{r} v(N), \quad \forall \ \ell = 1, \ldots, r. \tag{3.6}$$

Luego, de (3.5) y (3.6) se deduce que

$$\sum_{i \in N^{(\ell)}} \varphi_i = \frac{1}{r} v(N), \quad \forall \ \ell = 1, \ldots, r.$$

Esto es, si N' es una proyección de N, entonces $\sum\limits_{j \in N'} \varphi_j = \frac{1}{r} v(N)$.
Sean i_1, i_2 dos jugadores de tipo i cualesquiera, y sea N' una proyección de N tal que $i_1 \in N'$, entonces $N'' = (N' \setminus \{i_1\}) \cup \{i_2\}$ es también una proyección de N. Así,

$$\sum_{j \in N'} \varphi_j = \sum_{j \in N''} \varphi_j \implies \varphi_{i_1} = \varphi_{i_2}. \qquad \square$$

El resultado establecido en la proposición anterior nos permite llevar a cabo el estudio que nos habíamos planteado mediante el estudio del corazón de juegos n–personales con tasas de participación; ya que, la relación existente entre $C(v^r)$, $C(\widetilde{v}^r)$ y $C(\widetilde{v})$ es la misma que se da en el modelo de Owen entre dichos conjuntos. Esta relación ha sido descrita al final de la sección 3.1.1.

Observación 3.3. Puente y Marchi (1995) introducen el concepto de replicación ψ–convergente, donde $\psi = (\psi^k)_{k=1}^m$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^{n\times m}$ verificando

$$\psi^k = (\psi_1^k, \ldots, \psi_n^k) \in C(b_k), \quad \forall\ k = 1, \ldots, m,$$

siendo (N, b_k) el juego que describe el control del k–ésimo recurso, $k = 1, \ldots, m$.

Una replicación ψ–convergente del juego (N, b_k), $k = 1, \ldots, m$, viene dada por una función b_k^e verificando las propiedades (P1) y (P4) (extiende el juego original y es homogénea de grado 1), cuyo comportamiento límite viene determinado por la función b_k^* (verificándose $b_k^e(S) \leq b_k^*(S)\,,\ \forall\ S \subseteq rN\,,\ \forall\ r \geq 1$), definida como

$$b_k^*(S) = b_k(S/N) + \psi^k[\chi(S) - 1]^+\,,$$

donde $S/N = \{\, i \in N \,/\, z_i \geq 1 \,\}$, siendo z_i el número de jugadores de tipo i que contiene la coalición S, $i = 1, \ldots, n$; $\chi(S) = (z_i)_{i\in N}$ y

$$[a]^+ = \begin{cases} a\,, & \text{si } a \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{si } a < 0\,. \end{cases}$$

Esto es, para toda coalición $S \subseteq rN$, el control que dicha coalición ejerce sobre el recurso k–ésimo en el juego r–replicado, se obtiene como suma de dos contribuciones: La coalición $(S/N) \subseteq N$ de la cual S es una réplica, aporta el control que ejercía sobre el recurso en el juego original; mientras que la aportación del resto de jugadores viene dada por el reparto

ψ^k considerado.

La función $b^* = (b_1^*, \dots, b_m^*)$, que determina el comportamiento límite del juego (rN, v^r), depende en exceso del vector de repartos ψ considerado. Tal dependencia condicionará drásticamente el comportamiento límite del corazón de los sucesivos juegos replicados.

3.2.2 Comportamiento asintótico del corazón

Dado un juego de producción lineal controlado por comités (N, v), el objetivo que nos proponemos es estudiar el comportamiento de la sucesión $\left(C(\widetilde{v}^r)\right)_{r\geq 1}$. En primer lugar, nos preguntamos si los resultados obtenidos por Owen (1975) se generalizan, obteniendo una respuesta negativa. En este caso, en general el corazón del juego no se reduce al conjunto $CDP(v)$. Una vez establecido este hecho, se estudia para qué tipo de juegos de producción lineal controlados por comités se pueden generalizar los resultados obtenidos por Owen, llegando a la conclusión de que si todos los juegos simples que describen el control de los recursos son juegos de unanimidad respecto de una cierta coalición, no necesariamente la total, entonces el corazón del juego se reduce al conjunto de pagos según precios sombra y repartos equilibrados. Así mismo, se dan condiciones bajo las cuales se puede garantizar la convergencia finita. Por último, retomamos el caso general y caracterizamos, para el caso no degenerado, el comportamiento límite del corazón.

Observación 3.4. En cuanto a los resultados obtenidos por Puente y Marchi (1995), para toda extensión ψ–convergente garantizan la convergencia del corazón de los sucesivos juegos replicados al conjunto de imputaciones "ψ–competitivas": imputaciones que se obtienen a partir de un precio sombra, una vez que los recursos han sido repartidos entre los jugadores de acuerdo con ψ,

$$\left\{ \varphi \in I\!R^n \;/\; \varphi_i = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \psi_i^k \,,\ \forall\ i \in N \,,\ \mathbf{y}^* \in Op(N) \right\}.$$

Así mismo, en el caso no degenerado, aseguran la convergencia finita.

3.2.2.1 Análisis preliminar del caso general

Proposición 3.2. *Sea (N,v) un juego de producción lineal controlado por comités y sea $\widetilde{R}(v)$ su refinamiento, entonces $CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v}^r)$, para todo $r \geq 1$.*

Demostración: Sea $(N,\widetilde{v})$ el juego de producción lineal que genera el refinamiento. Puesto que $C(\widetilde{v}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C(\widetilde{v}^r)$, es suficiente probar la inclusión $CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v})$.

Veamos, en primer lugar, que para todo juego simple de control se verifica $C(\widetilde{u}_k^q) = C(u_k^q)$. Para ello, es suficiente con probar que $C(u_k^q) \subseteq C(\widetilde{u}_k^q)$ si $C(u_k^q) \neq \emptyset$.

Sea V_k^q el conjunto de jugadores veto del juego simple nítido (N,u_k^q), entonces, para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, se verifica

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) \leq \min_{i \in V_k^q} \tau_i\,, \tag{3.7}$$

ya que $V_k^q \subseteq P$, para toda coalición $P \in \mathcal{MW}(u_k^q)$. Por otro lado, para toda imputación $\varphi \in C(u_k^q)$, donde

$$C(u_k^q) = \left\{ \mathbf{x} \in I\!R^n \ / \ \sum_{i \in V_k^q} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0, \ \ \forall \ i \in V_k^q, \ \ x_i = 0, \ \ \forall \ i \notin V_k^q \right\},$$

se verifica

$$\sum_{i \in N} \varphi_i \tau_i = \sum_{i \in V_k^q} \varphi_i \tau_i \geq \min_{i \in V_k^q} \tau_i \cdot \sum_{i \in V_k^q} \varphi_i = \min_{i \in V_k^q} \tau_i\,, \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,. \tag{3.8}$$

Luego, de (3.7) y (3.8) se deduce que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau})\,.$$

Además,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i = u_k^q(N) = \widetilde{u}_k^q(N)\,,$$

entonces $\boldsymbol{\varphi} \in C(\widetilde{u}_k^q)$.

Una vez probada la igualdad $C(\widetilde{u}_k^q) = C(u_k^q)$, estamos en condiciones de probar la inclusión $CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v})$. Sea $\mathbf{z}$ un elemento cualquiera de $CDP(v)$, entonces

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \xi_k^q(i)\,, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n,$$

donde $\mathbf{y}^* \in Op(N)$ y $\boldsymbol{\xi}_k^q \in C(u_k^q)\,,\ \forall\ q = 1, \ldots, d_k\,,\ \forall\ k = 1, \ldots, m.$

Obviamente, $\mathbf{z}$ es eficiente. Por otro lado, de la igualdad $C(u_k^q) = C(\widetilde{u}_k^q)$, se sigue que

$$\sum_{i \in N} z_i \tau_i = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \left(\sum_{i \in N} \xi_k^q(i) \tau_i \right) \geq \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau})\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,. \tag{3.9}$$

Por el teorema fundamental de dualidad,

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \text{mín}\Big\{ \sum_{k=1}^{m} B_k(\boldsymbol{\tau}) y_k \ /\ \mathbf{y} \in Y \Big\}, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,,$$

donde la región factible,

$$Y = \Big\{ \mathbf{y} \in I\!R^m \ /\ \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k \geq c_j\,,\ j = 1, \ldots, p\,,\ y_k \geq 0\,,\ k = 1, \ldots, m \Big\}, \tag{3.10}$$

del problema dual asociado al valor de la coalición $\boldsymbol{\tau}$ es independiente de $\boldsymbol{\tau}$. Entonces se verifica

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* B_k(\boldsymbol{\tau}) \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n. \tag{3.11}$$

Luego, de las desigualdades (3.9) y (3.11) se deduce que

$$\sum_{i \in N} z_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n.$$

Es decir, $\mathbf{z} \in C(\widetilde{v})$ y por tanto, $CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v})$ □

En lo que sigue, Y denotará la región factible definida en (3.10).

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que, en general, el recíproco de la proposición anterior no es cierto. Aún refinando el conjunto de jugadores no toda imputación en el corazón se puede obtener mediante el procedimiento de reparto y pago de los recursos considerado en la definición del conjunto $CDP(v)$.

Ejemplo 3.1. Considérese la siguiente situación. Hay dos recursos, B_1 y B_2, y dos productos. Los recursos están controlados por tres jugadores $N = \{1,2,3\}$. El control de dichos recursos viene dado por los juegos simples (N, u_1) y (N, u_2), respectivamente, donde

$$u_1(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \in S \text{ y } |S| \geq 2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y $u_2 \equiv u_N$ es el juego de unanimidad respecto de la coalición total N. Se dispone de 6 y 8 unidades de recursos B_1 y B_2, respectivamente. El beneficio que se obtiene con la venta en el mercado de los productos es de 4 y 6 unidades, respectivamente, y la matriz de producción es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$,

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; & \text{máx} \quad 4x_1 + 6x_2 \\ & \text{s.a.} \\ & \qquad x_1 + 3x_2 \leq \widetilde{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \\ & \qquad 2x_1 + 2x_2 \leq \widetilde{B}_2(\boldsymbol{\tau}), \\ & \qquad x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_1(\boldsymbol{\tau}) &= 6\,\widetilde{u}_1(\boldsymbol{\tau}) = 6 \text{ máx}\{\text{mín}\{\tau_1,\tau_2\}, \text{mín}\{\tau_1,\tau_3\}\}, \\ \widetilde{B}_2(\boldsymbol{\tau}) &= 8\,\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau}) = 8 \text{ mín}\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $Op(N) = \{\hat{\mathbf{y}} = (1, \frac{3}{2})\}$, $C(u_1) = \{(1,0,0)\}$ y $C(u_2) = I(u_2)$, de donde

$$CDP(v) = \{\ (6+\lambda, \mu, 12-\lambda-\mu)\ /\ \lambda+\mu \leq 12\ ,\ \lambda, \mu \geq 0\ \}.$$

Veamos que el corazón del juego con tasas de participación que genera el refinamiento $(N, \widetilde{v})$, viene dado por

$$A = \left\{\ \boldsymbol{\varphi} \in I\!R^3\ /\ \varphi_2, \varphi_3 \leq 12\ ,\ \varphi_i \geq 0\,, \quad \forall\, i = 1,2,3\,, \quad \text{y} \quad \sum_{i \in N} \varphi_i = 18\ \right\}. \tag{3.12}$$

Por el teorema fundamental de dualidad se tiene que

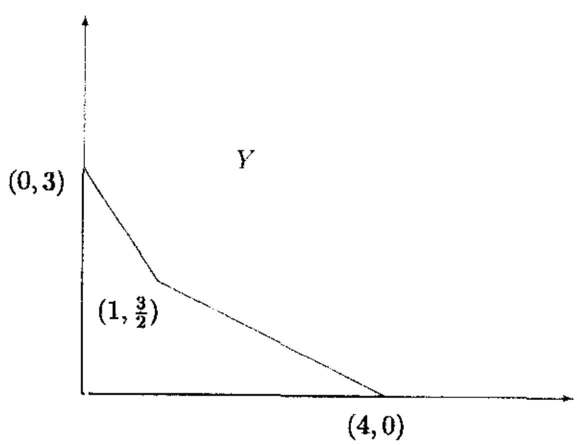
$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \text{mín}\{\, \widetilde{B}_1(\boldsymbol{\tau})y_1 + \widetilde{B}_2(\boldsymbol{\tau})y_2 \;/\; \mathbf{y} \in Y \,\},$$

siendo

$$Y = \{(y_1, y_2) \in I\!R^2 \,/\, y_1 + 2y_2 \geq 4 \;;\; 3y_1 + 2y_2 \geq 6 \;;\; y_1, y_2 \geq 0\},$$

para toda coalición $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$.

La siguiente figura muestra la región factible Y, en color azul, de los problemas duales asociados a cada una de las coaliciones:



Luego,

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; \text{mín}\{24\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau})\,,\, 6\widetilde{u}_1(\boldsymbol{\tau}) + 12\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau})\,,\, 24\widetilde{u}_1(\boldsymbol{\tau})\} \;=\; \text{mín}\{24\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau})\,,\, 6\widetilde{u}_1(\boldsymbol{\tau}) + 12\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau})\}\,.$$

Veamos que $A \subseteq C(\widetilde{v})$. Se distinguen los siguientes casos:

(a) Si $\tau_1 = \text{mín}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, entonces $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = 18\tau_1$ y $\sum_{i \in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$ para todo $\boldsymbol{\varphi}$ vector de pagos eficiente.

(b) Si $\tau_2 = \text{mín}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} < \tau_1$, entonces

(b1) Si $2\tau_2 \leq \text{mín}\{\tau_1, \tau_3\}$, entonces $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = 24\tau_2$ y $\sum_{i\in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$ para todo $\boldsymbol{\varphi}$ vector de pagos eficiente tal que $\varphi_2 \leq 12$.

(b2) Si $2\tau_2 > \text{mín}\{\tau_1, \tau_3\}$, entonces $\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = 6\,\text{mín}\{\tau_1, \tau_3\} + 12\tau_2$ y $\sum_{i\in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$ para todo $\boldsymbol{\varphi}$ vector de pagos eficiente tal que $\varphi_2 \leq 12$.

(c) Si $\tau_3 = \text{mín}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} < \tau_1$, entonces siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior se tiene que $\sum_{i\in N} \varphi_i \tau_i \geq \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau})$ para todo $\boldsymbol{\varphi}$ vector de pagos eficiente tal que $\varphi_3 \leq 12$.

A continuación se probará que $C(\widetilde{v}) \subseteq A$. Para todo jugador $i \in \{2,3\}$ y para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} = (t_i, 1)$ se verifica

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} 24t\,, & \text{si } t \leq \frac{1}{2}\,, \\ 6 + 12t\,, & \text{si } t > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Así, si $\boldsymbol{\varphi} \in C(\widetilde{v})$, entonces debe satisfacer

$$12(1-t) = \widetilde{v}(N) - \widetilde{v}(t_i, 1) \geq (1-t)\varphi_i\,, \quad \forall\ t \in (\frac{1}{2}, 1)\,; \quad i = 2, 3.$$

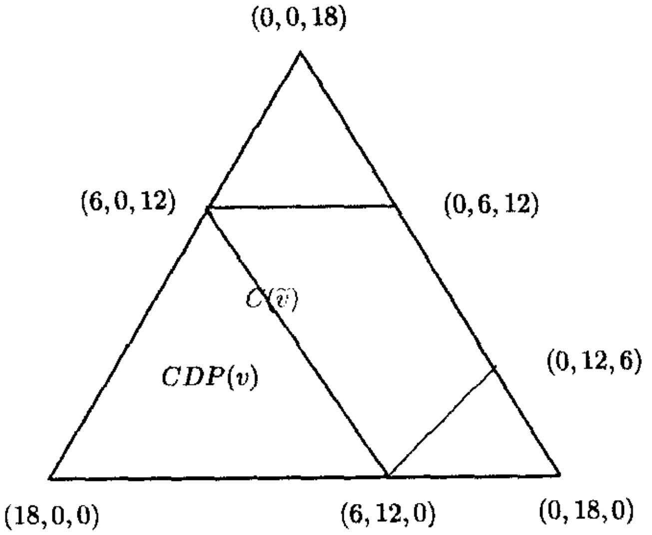
Luego, $\varphi_i \leq 12\,,\ i = 2,3$. El conjunto de imputaciones del juego viene dado por

$$I(\widetilde{v}) = \left\{\ \boldsymbol{\varphi} \in I\!R^3\ /\ \varphi_i \geq 0,\ \forall\ i = 1,2,3\,,\quad \text{y} \quad \sum_{i\in N} \varphi_i = 18\ \right\}.$$

Entonces $C(\widetilde{v}) \subseteq A$, quedando probada la igualdad. Así,

$$CDP(v) \subsetneq C(\widetilde{v}) \subsetneq C(v) = I(v)\,.$$

Gráficamente,



3.2.2.2 Juegos de producción lineal controlados por juegos de unanimidad

Si nos restringimos al caso en que todos los juegos simples que describen el control de los recursos son juegos de unanimidad, entonces los resultados obtenidos por Owen (1975) para el modelo original se generalizan. Previamente se prueban una serie de resultados necesarios para abordar dicha generalización.

Resultados previos

Nota 3.1. Obviamente, el vector de costos del problema dual asociado al valor de la coalición total N, $\mathbf{B}(N) = (B_1(N), \ldots, B_m(N))$, verifica $B_k(N) > 0, \quad \forall\ k = 1, \ldots, m$. Luego, el correspondiente problema de programación lineal no tiene direcciones extremas óptimas y por tanto, el conjunto de óptimos, $Op(N)$, es compacto.

Lema 3.2. *Si todos los juegos simples de control (N, u_k^q), $q = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$, son equilibrados, entonces el conjunto $CDP(v)$ es convexo y compacto.*

Demostración: Veamos que $CDP(v)$ es convexo. Sean $\mathbf{z}^1$ y $\mathbf{z}^2$ dos elementos cualesquiera de $CDP(v)$, entonces:

$$\begin{aligned} z_i^1 &= \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \xi_k^q(i)\,, & i = 1,\dots,n\,, \\ z_i^2 &= \sum_{k=1}^{m} \hat{y}_k \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \gamma_k^q(i)\,, & i = 1,\dots,n\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{y}^*, \hat{\mathbf{y}} \in Op(N)$ y $\boldsymbol{\xi}_k^q, \boldsymbol{\gamma}_k^q \in C(u_k^q)$ para todo $q = 1,\dots,d_k$; $k = 1,\dots,m$. Dado $\lambda \in (0,1)$ cualquiera se tiene que

$$\lambda \mathbf{z}^1 + (1-\lambda)\mathbf{z}^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q (\lambda \boldsymbol{\xi}_k^q y_k^* + (1-\lambda)\boldsymbol{\gamma}_k^q \hat{y}_k)\,.$$

Considérese $\bar{\mathbf{y}} = \lambda \mathbf{y}^* + (1-\lambda)\hat{\mathbf{y}}$, entonces:

(a) Si $\bar{y}_k = 0 \Longrightarrow y_k^* = \hat{y}_k = 0 \Longrightarrow \lambda \boldsymbol{\xi}_k^q y_k^* + (1-\lambda)\boldsymbol{\gamma}_k^q \hat{y}_k = \boldsymbol{\delta}_k^q \bar{y}_k$, para cualquier $\boldsymbol{\delta}_k^q \in C(u_k^q)$, para todo $q = 1,\dots,d_k$.

(b) Si $\bar{y}_k > 0 \Longrightarrow$ Sea $\boldsymbol{\delta}_k^q = \dfrac{\lambda y_k^*}{\bar{y}_k} \boldsymbol{\xi}_k^q + \dfrac{(1-\lambda)\hat{y}_k}{\bar{y}_k} \boldsymbol{\gamma}_k^q \in C(u_k^q)$, para todo $q = 1,\dots,d_k$.

Luego, teniendo en cuenta que $Op(N)$ y $C(u_k^q)$, $q = 1,\dots,d_k$, $k = 1,\dots,m$, son conjuntos convexos, se tiene que existen $\bar{\mathbf{y}} \in Op(N)$ y $\boldsymbol{\delta}_k^q \in C(u_k^q)$, $q = 1,\dots,d_k$, $k = 1,\dots,m$, verificando

$$\lambda \mathbf{z}^1 + (1-\lambda)\mathbf{z}^2 = \sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\delta}_k^q\,.$$

Así, $\lambda \mathbf{z}^1 + (1-\lambda)\mathbf{z}^2 \in CDP(v)$. Por tanto, el conjunto $CDP(v)$ es convexo.

Dado que $C(v)$ es un conjunto compacto, para probar que $CDP(v) \subseteq C(v)$ lo es, es suficiente con probar que es cerrado. Para ello, comprobaremos que contiene a todos sus puntos de acumulación.

Sea $(\mathbf{z}^n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente contenida en $CDP(v)$ y sea $\mathbf{z}^0$ su límite. Veamos que $\mathbf{z}^0 \in CDP(v)$: Por ser $\mathbf{z}^n \in CDP(v)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es de la forma

$$\mathbf{z}^n = \sum_{k=1}^{m} y_k^n \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\xi}_{k,n}^q, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

donde $\mathbf{y}^n \in Op(N)$ y $\boldsymbol{\xi}_{k,n}^q \in C(u_k^q)$ $\forall\ q = 1,\dots,d_k$, $\forall\ k = 1,\dots,m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considérese el conjunto

$$B = Op(N) \times \prod_{k=1}^{m} \prod_{q=1}^{d_k} C(u_k^q).$$

El conjunto de óptimos del problema dual asociado al valor de la coalición total N, así como los corazones de todos los juegos simples de control son compactos, entonces, por el teorema de Tychonoff, B también lo es. Luego, la sucesión $\left(\mathbf{y}^n, (\boldsymbol{\xi}_{k,n}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k\\ k=1,\dots,m}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en B, tiene una subsucesión convergente $\left(\mathbf{y}^{n_\ell}, (\boldsymbol{\xi}_{k,n_\ell}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k\\ k=1,\dots,m}}\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$. Sea $\left(\mathbf{y}^0, (\boldsymbol{\xi}_{k,0}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k\\ k=1,\dots,m}}\right) \in B$ su límite, entonces se verifica

$$\mathbf{z}^0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} y_k^n \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\xi}_{k,n}^q = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{m} y_k^{n_\ell} \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\xi}_{k,n_\ell}^q = \sum_{k=1}^{m} y_k^0 \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\xi}_{k,0}^q,$$

donde $\mathbf{y}^0 \in Op(N)$ y $\boldsymbol{\xi}_{k,0}^q \in C(u_k^q)$, $\forall\ q = 1,\dots,d_k$, $\forall\ k = 1,\dots,m$. Esto es, $\mathbf{z}^0 \in CDP(v)$ y, por consiguiente, $CDP(v)$ es un conjunto cerrado. □

Observación 3.5. Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités y sea

$(N, \widetilde{v})$ el juego con tasas de participación que genera el refinamiento $\widetilde{\mathcal{R}}(v)$. Entonces:

1. Las funciones $\widetilde{v}$, $\widetilde{u}_k^q$, $q = 1, \dots d_k$, $k = 1, \dots m$, son homogéneas[3] de grado 1. Por tanto, su definición se puede extender a $\mathbb{R}_+^n$:

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \alpha \widetilde{u}_k^q(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}) \,, \qquad \forall\ q = 1, \dots, d_k \,, ; \quad k = 1, \dots, m \,,$$
$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \alpha \widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}) \,,$$

donde $\alpha = \sum_{i \in N} \tau_i$ y $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{\tau}$, para todo vector $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^n$ distinto de cero.

2. Si todos los juegos simples nítidos que describen el control de los recursos son juegos de unanimidad entonces $\widetilde{v}$ es una función cóncava.

Nota 3.2. Aubin (1981) prueba que para todo juego con tasas de participación, $(N, \widetilde{v})$, tal que $\widetilde{v}$ es una función cóncava y homogénea de grado 1, se verifica $C(\widetilde{v}) = \partial \widetilde{v}(N)$, siendo $\partial \widetilde{v}(N)$ la subdiferencial de $\widetilde{v}$ en $N \equiv \mathbf{1}$.

Lema 3.3. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control son de unanimidad, entonces para todo $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, vector distinto de cero, existe una imputación $\boldsymbol{\xi} \in CDP(v)$ verificando*

$$D_d \widetilde{v}(N) \geq \mathbf{d}^t \boldsymbol{\xi} \,,$$

donde $(N, \widetilde{v})$ es el juego que genera el refinamiento de (N, v) y $D_d \widetilde{v}(N)$ es la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{d}$ de $\widetilde{v}$ en $N \equiv \mathbf{1}$.

Demostración: Sea $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vector cualquiera. Considérese la sucesión $(N + \lambda_p \mathbf{d})_{p \in \mathbb{N}}$, donde $\lambda_p \to 0^+$ cuando $p \to \infty$, siendo, para todo $p \in \mathbb{N}$, $\lambda_p \geq 0$ lo suficientemente pequeño, de manera que $N + \lambda_p \mathbf{d} \in \mathbb{R}_+^n$.

[3] La homogeneidad de $\widetilde{v}$ se deduce trivialmente de la homogeneidad de las funciones $\widetilde{u}_k^q$ y de la expresión de $\widetilde{v}$ en términos del dual.

(N, u_k^q) es un juego simple de unanimidad respecto de una cierta coalición $V_k^q \subseteq N$, $q = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$; entonces para todo $\tau_p \equiv N + \lambda_p \mathbf{d} \in \mathbb{R}_+^n$, $p \in \mathbb{N}$, para todo $q = 1, \ldots, d_k$; y $\forall\ k = 1, \ldots, m$, existe una imputación $\mathbf{z}_{k,p}^q \in C(u_k^q)$, $\mathbf{z}_{k,p}^q = (1_{i_0}, \mathbf{0})$, donde $1 + \lambda_p d_{i_0} = \min_{i \in V_k^q}(1 + \lambda_p d_i)$, tal que

$$\widetilde{u}_k^q(N + \lambda_p \mathbf{d}) = \sum_{i \in N} (1 + \lambda_p d_i)\, z_{k,p}^q(i)\,,$$

de donde se deduce

$$\widetilde{B}_k(N + \lambda_p \mathbf{d}) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(N + \lambda_p \mathbf{d}) = \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \left(\sum_{i \in N} (1 + \lambda_p d_i) z_{k,p}^q(i) \right), \qquad \forall\ k = 1, \ldots, m.$$

Entonces, para todo $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(N + \lambda_p \mathbf{d}) &= \min\left\{ \sum_{k=1}^{m} \widetilde{B}_k(N + \lambda_p \mathbf{d}) y_k \ /\ \mathbf{y} \in Y \right\} = \\ &= \min\left\{ \sum_{k=1}^{m} y_k \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \left(\sum_{i \in N} (1 + \lambda_p d_i) z_{k,p}^q(i) \right) \ /\ \mathbf{y} \in Y \right\}. \end{aligned}$$

Sea $\overline{Y}$ el conjunto de puntos extremos de Y, entonces para todo $p \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{y}^p \in \overline{Y}$ tal que

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(N + \lambda_p \mathbf{d}) &= \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \left(\sum_{i \in N} (1 + \lambda_p d_i) z_{k,p}^q(i) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \left(\sum_{i \in N} z_{k,p}^q(i) \right) + \lambda_p \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{d}^t \mathbf{z}_{k,p}^q. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Así, para todo $p \in I\!N$, se verifica

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(N+\lambda_p\mathbf{d})-\widetilde{v}(N) &= \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(N) + \lambda_p \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{d}^t \mathbf{z}_{k,p}^q - \widetilde{v}(N) \geq \\ &\geq \lambda_p \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{d}^t \mathbf{z}_{k,p}^q ,\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\frac{\widetilde{v}(N+\lambda_p\mathbf{d})-\widetilde{v}(N)}{\lambda_p} \geq \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{d}^t \mathbf{z}_{k,p}^q , \quad \forall\ p \in I\!N . \tag{3.14}$$

$\left(\mathbf{y}^p, (\mathbf{z}_{k,p}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k \\ k=1,\dots,m}}\right)_{p\in I\!N}$ es una sucesión contenida en $B = \overline{Y} \times \prod_{\substack{q=1,\dots,d_k \\ k=1,\dots,m}} C(u_k^q)$, siendo (por el teorema de Tychonoff) B un conjunto compacto. Luego la sucesión anterior tiene una subsucesión convergente $\left(\mathbf{y}^p, (\mathbf{z}_{k,p}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k \\ k=1,\dots,m}}\right)_{p\in \mathcal{P}_1}$. Sea $\left(\mathbf{y}^*, (\mathbf{z}_{k}^q)_{\substack{q=1,\dots,d_k \\ k=1,\dots,m}}\right) \in B$ el límite de dicha subsucesión y sea $\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{z}_k^q$.

Como $\widetilde{v}$ es cóncava y $I\!R_+^n$ es convexo, entonces existe la derivada direccional y, de (3.14) se deduce

$$\begin{aligned}D_d\widetilde{v}(N) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\widetilde{v}(N+\lambda\mathbf{d})-\widetilde{v}(N)}{\lambda} = \lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathcal{P}_1}} \frac{\widetilde{v}(N+\lambda\mathbf{d})-\widetilde{v}(N)}{\lambda_p} \geq \\ &\geq \lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathcal{P}_1}} \sum_{k=1}^{m} y_k^p \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{d}^t \mathbf{z}_{k,p}^q = \mathbf{d}^t \cdot \boldsymbol{\xi} .\end{aligned}$$

Veamos que $\boldsymbol{\xi} \in CDP(v)$. Obviamente, $\mathbf{z}_k^q \in C(u_k^q)$, $\forall\ q = 1,\dots,d_k$, $\forall\ k = 1,\dots,m$. Luego, es suficiente con probar que $\mathbf{y}^* \in Op(N)$.

De la igualdad (3.13) se sigue que

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathcal{P}_1}} \widetilde{v}(N+\lambda_p\mathbf{d}) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q . \tag{3.15}$$

Por otro lado, $\widetilde{v}$ es una función cóncava y, por tanto, es continua en el interior de $I\!R_+^n$, entonces

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathcal{P}_1}} \widetilde{v}(N+\lambda_p\mathbf{d}) = \widetilde{v}\Big(\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\mathcal{P}_1}} (N+\lambda_p\mathbf{d})\Big) = \widetilde{v}(N) . \tag{3.16}$$

Así, de (3.15) y (3.16) se deduce que $\mathbf{y}^* \in \overline{Y}$ es un óptimo del problema dual asociado al valor de la coalición total N. Luego, $\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \mathbf{z}_k^q \in CDP(v)$ y, por tanto, existe $\boldsymbol{\xi}$ en las condiciones establecidas en el lema. □

Corolario 3.4. *Sea (N,v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control son de unanimidad entonces, para todo $\mathbf{d} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ se verifica*

$$D_d\widetilde{v}(N) = \min\Big\{ \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} \,/\, \boldsymbol{\xi} \in CDP(v) \Big\} .$$

Demostración: $\widetilde{v}$ es una función cóncava y homogénea de grado 1, entonces $C(\widetilde{v}) = \partial\widetilde{v}(N)$, donde $\partial\widetilde{v}(N)$ es la subdiferencial de $\widetilde{v}$ en $N \equiv \mathbf{1}$.
$CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v})$ (proposición 3.2) entonces, para toda imputación $\boldsymbol{\xi} \in CDP(v)$ y para todo $\lambda > 0$ tal que $N + \lambda\mathbf{d} \in \operatorname{int}(I\!R_+^n)$, se verifica

$$\widetilde{v}(N+\lambda\mathbf{d}) - \widetilde{v}(N) \le \lambda\mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} .$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\widetilde{v}(N \pm \lambda\mathbf{d}) - \widetilde{v}(N)}{\lambda} \le \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} .$$

Luego,

$$D_d\widetilde{v}(N) \leq \text{ínf}\left\{ \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} \,/\, \boldsymbol{\xi} \in CDP(v) \right\}. \tag{3.17}$$

Por el lema anterior, existe $\boldsymbol{\xi}_0 \in CDP(v)$ tal que $D_d\widetilde{v}(N) \geq \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi}_0$, entonces de la desigualdad (3.17), se deduce que

$$D_d\widetilde{v}(N) = \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi}_0 = \text{mín}\left\{ \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} \,/\, \boldsymbol{\xi} \in CDP(v) \right\}.$$

□

Teorema 3.7. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control son juegos de unanimidad, entonces $C(\widetilde{v}) = CDP(v)$, siendo $(N, \widetilde{v})$ el juego con tasas de participación que genera el refinamiento.*

Demostración: Por la proposición 3.2 es suficiente con probar que $C(\widetilde{v}) \subseteq CDP(v)$. Lo demostraremos por reducción al absurdo.

Supóngase que existe una imputación $\varphi \in C(\widetilde{v})$ tal que $\varphi \notin CDP(v)$. En el lema 3.2 se probó que $CDP(v) \neq \emptyset$ es convexo y cerrado, entonces, por el teorema del hiperplano separador, existe un vector $\mathbf{d} \in I\!R^n$ distinto de cero y un escalar $\alpha \in I\!R$, verificando:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} \geq \alpha, \qquad \forall\ \boldsymbol{\xi} \in CDP(v), \\ &\mathbf{d}^t\varphi < \alpha. \end{aligned}$$

De donde, teniendo en cuenta el resultado establecido en el corolario anterior, se deduce que

$$D_d\widetilde{v}(N) = \text{mín}\left\{ \mathbf{d}^t\boldsymbol{\xi} \,/\, \boldsymbol{\xi} \in CDP(v) \right\} \geq \alpha. \tag{3.18}$$

Por otro lado, $\varphi \in C(\widetilde{v}) = \partial\widetilde{v}(N)$, entonces

$$D_d\widetilde{v}(N) \leq \mathbf{d}^t\varphi < \alpha\,. \tag{3.19}$$

En contradicción con la desigualdad (3.18). Luego, si $\varphi \in C(\widetilde{v})$, entonces φ debe pertenecer al conjunto $CDP(v)$. □

Por último, se da una condición suficiente de convergencia finita del corazón de los juegos de producción lineal con (finitas) tasas de participación que componen el refinamiento al conjunto $CDP(v)$.

Observación 3.6. Para todo J_i jugador *irrelevante* en el juego (N,v) de producción lineal controlado por comités, se verifica:

(i) $\varphi_i = 0\,, \quad \forall\ \varphi \in C(\widetilde{v}^r)\,, \quad \forall\ r \geq 1.$

(ii) $\varphi_i = 0\,, \quad \forall\ \varphi \in CDP(v).$

Entonces, la convergencia de la sucesión $\left(C(\widetilde{v}^r)\right)_{r\geq 1}$ al conjunto de pagos según precios sombra y repartos equilibrados viene dada por la convergencia de la sucesión $\left(D(\widetilde{v}^r)\right)_{r\geq 1}$, donde $D(\widetilde{v}^r)$ es el corazón del juego de producción lineal que se obtiene al restringir el juego original al conjunto de jugadores *relevantes*.

Por tanto, y con el fin de no complicar innecesariamente las demostraciones, en los resultados que se dan a continuación se supone que todos los jugadores del juego de producción lineal (N,v) son relevantes.

Lema 3.4. *Sea (N,v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control son de unanimidad entonces, en ausencia de degeneración en el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición total N, para toda* *coalición $S \neq \emptyset$ existe un escalar $t(S) \in [0,1)$ tal que para todo $\tau \in [t(S),1]$ se verifica*

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}(S)) = \widetilde{v}(N) - (1-\tau)\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q ,$$

donde $Op(N) = \{\mathbf{y}^*\}$ e $I_k(S) = \{\, q \in \{1,\ldots,d_k\} \,/\, S \cap V_k^q \neq \emptyset \,\}$, siendo $V_k^q \subsetneqq N$, el conjunto de jugadores veto del juego simple de control (N, u_k^q), $\forall\ q = 1,\ldots,d_k$, $\forall\ k = 1,\ldots,m$, y donde la coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}(S)$ está definida por:

$$\tau(S)_i = \begin{cases} \tau, & si\ \ i \in S, \\ 1, & si\ \ i \notin S, \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Demostración: Sea $S \subsetneqq N$ una coalición cualquiera. Para todo $\tau \in [0,1]$, $\forall\ q = 1,\ldots,d_k$, $\forall\ k = 1,\ldots,m$; se verifica

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}(S)) = \begin{cases} \tau, & \text{si}\ \ S \cap V_k^q \neq \emptyset, \\ 1, & \text{si}\ \ S \cap V_k^q = \emptyset. \end{cases}$$

Así, el valor de la coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}(S)$ en el juego $(N, \widetilde{v})$ generador del refinamiento de (N, v), viene dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}(S)) \ = \ \text{máx} \ & \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\ \text{s.a.} \ & \\ & \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \leq \widetilde{B}_k(\boldsymbol{\tau}(S)), \qquad k = 1,\ldots,m, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{B}_k(\boldsymbol{\tau}(S)) = \sum_{q \notin I_k(S)} B_k^q + \tau \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q = B_k(N) - (1-\tau) \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q .$$

Luego, el valor de las coaliciones con tasas de participación de la forma $\boldsymbol{\tau}(S)$, cuando τ decrece desde 1 hasta 0, se puede obtener mediante un análisis paramétrico del problema de programación lineal asociado al valor de la coalición total N, cuando se perturba el vector del lado derecho en la dirección del vector $\mathbf{v}$, donde

$$v_k = \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q , \qquad k = 1, \ldots , m.$$

Sea $\mathbf{B}$ una base óptima del problema primal asociado a la coalición N. Considérese $\hat{\lambda}$ definido por

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{si } \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}\right)_k < 0 \quad \forall\ k \in I, \\ \text{máx}\Big\{1 - \dfrac{\left(\mathbf{B}^{-1}B(N)\right)_k}{\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}\right)_k} \;/\; k \in I \ \text{ t.q. } \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{v}\right)_k > 0\Big\}, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde I es el conjunto de índices correspondientes a las variables básicas asociadas a la base óptima $\mathbf{B}$. Entonces, para todo $\tau \geq \hat{\lambda}$ la base actual $\mathbf{B}$ sigue siendo óptima y, por tanto, el valor del óptimo es $\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\big(B(N) - (1-\tau)\mathbf{v}\big)$, siendo $\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{y}^*$.

En ausencia de degeneración, $\left(\mathbf{B}^{-1}B(N)\right)_k > 0$, para todo $k \in B$, entonces tomando $t(S) = \hat{\lambda} < 1$ se tiene que, para todo $\tau \geq t(S)$ se verifica

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}(S)) = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\big(B(N) - (1-\tau)\mathbf{v}\big) = \sum_{k=1}^{m} B_k(N) y_k^* - (1-\tau) \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q . \qquad \square$$

Observación 3.7. Si el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición N es degenerado, pero el problema dual tiene un único óptimo, entonces el resultado del lema anterior se sigue verificando. En dicho caso, el dual es también degenerado verificándose $\mathbf{c_{B_1}B_1}^{-1} = \cdots = \mathbf{c_{B_\ell}B_\ell}^{-1} = \mathbf{y}^*$, donde $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_\ell$, son las bases óptimas asociadas al óptimo primal degenerado $\mathbf{x}^* \in I\!\!R^p$.

Teorema 3.8. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control son de unanimidad entonces, en ausencia de degeneración en el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición total N, existe $r_0 \in I\!\!N$ suficientemente grande tal que $C(\widetilde{v}^{r_0}) = CDP(v)$.*

Demostración: Sea $t_0 = \text{máx}\{\, t(S) \,/\, S \subseteq N \,\} < 1$, donde para cada coalición $S \subseteq N$, $t(S)$ se corresponde con el escalar obtenido en el lema 3.4, y sea $r_0 = \text{mín}\{r \in I\!\!N \,/\, \frac{r-1}{r} \geq t_0\}$. Para toda coalición nítida $S \subsetneqq \underline{N}$, considérese la coalición $\gamma(S) \in M^{r_0}$ dada por

$$\gamma(S)_i = \begin{cases} \frac{r_0-1}{r_0}, & \text{si } i \in S, \\ 1, & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Entonces, si $\varphi \in C(\widetilde{v}^{r_0})$ se debe verificar

$$\widetilde{v}^{r_0}(N) - \widetilde{v}^{r_0}(\gamma(S)) \geq (1 - \tfrac{r_0-1}{r_0}) \sum_{i \in S} \varphi_i, \quad \forall\ S \subseteq N. \tag{3.20}$$

Del lema 3.4 se deduce que

$$\widetilde{v}^{r_0}(N) - \widetilde{v}^{r_0}(\gamma(S)) = \widetilde{v}(N) - \widetilde{v}(\gamma(S)) = (1 - \tfrac{r_0-1}{r_0}) \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q. \tag{3.21}$$

De (3.20) y (3.21) se tiene que

$$\sum_{i \in S} \varphi_i \leq \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(S)} B_k^q, \quad \forall\ S \subseteq N. \tag{3.22}$$

Considérese el juego de coste, (N,c), definido como

$$c(S) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q\in I_k(S)} B_k^q, \quad \forall\ S \subseteq N\,,\ S \neq \emptyset\,,$$

$$c(\emptyset) = 0\,.$$

Obsérvese que

$$c(N) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q = v(N) = \widehat{v}^{ro}(N)\,.$$

Luego, de (3.22) se deduce que $C(\widehat{v}^{ro})$ está contenido en el (anti)corazón del juego de coste (N,c). A continuación se comprueba que dicho juego es cóncavo: Sean $S,T \subseteqq N$ dos coaliciones cualesquiera, entonces se verifica

$$\sum_{q\in I_k(S\cup T)} B_k^q = \sum_{q\in I_k(S)} B_k^q + \sum_{q\in I_k(T)} B_k^q - \sum_{q\in I_k(S\cap T)} B_k^q - \sum_{q\in J_k(S,T)} B_k^q\,,$$

donde $J_k(S,T) = \{\, q \notin I_k(S\cap T)\,/\,V_k^q \cap (S\setminus T) \neq \emptyset$ y $V_k^q \cap (T\setminus S) \neq \emptyset \,\}$.

Luego,

$$\begin{aligned} c(S\cup T) &= \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q\in I_k(S\cup T)} B_k^q \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q\in I_k(S)} B_q^k + \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q\in I_k(T)} B_k^q - \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q\in I_k(S\cap T)} B_k^q = \\ &= c(S) + c(T) - c(S\cap T)\,. \end{aligned}$$

Esto es, (N,c) es un juego cóncavo y, por tanto, el (anti)corazón del juego, que denotaremos por core(c), coincide con la envoltura convexa del conjunto $\{\mathbf{x}^\theta\,/\,\theta \in \Theta^n\,\}$, donde $\mathbf{x}^\theta$ es el vector de coste marginal asociado a la ordenación θ del conjunto de jugadores, es decir,

$$\mathbf{x}_i^\theta = c(P_i^\theta \cup \{i\}) - c(P_i^\theta), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

donde $P_i^\theta = \{j \in N \,/\, \theta(j) < \theta(i)\}$.

Así, para demostrar la inclusión $C(\widetilde{v}^{r_0}) \subseteq CDP(v)$, será suficiente con demostrar la inclusión $\mathrm{Con}\{\mathbf{x}^\theta \,/\, \theta \in \Theta^n\} \subseteq CDP(v)$, donde Con denota la envoltura convexa.

Veamos que $\{\mathbf{x}^\theta \,/\, \theta \in \Theta^n\} \subseteq CDP(v)$, esto es, todo vector de coste marginal se corresponde con un vector de pago dual asociado a un reparto equilibrado.

Para toda permutación $\theta \in \Theta^n$, considérese el vector de repartos $\mathbf{x}^\theta$ definido por

$$\mathbf{x}_i^\theta = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in L_k(\theta,i)} B_k^q, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

siendo $L_k(\theta, i) = \{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, i \in V_k^q \text{ y } V_k^q \cap P_i^\theta = \emptyset \,\}$, esto es, el jugador de V_k^q que llega en primer lugar recibe el valor, en función del precio sombra $\mathbf{y}^*$, del lote B_k^q.

Para todo $q = 1, \ldots, d_k$, para todo $k = 1, \ldots, m$, sea $\boldsymbol{\xi}_k^q \in C(u_k^q)$ definido por:

$$\xi_k^q(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta(i) = \min\limits_{j \in V_k^q} \theta(j), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $\mathbf{x}^\theta = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \boldsymbol{\xi}_k^q$. Luego, se tiene que $\{\mathbf{x}^\theta \,/\, \theta \in \Theta^n\} \subseteq CDP(v)$, siendo $CDP(v)$ un conjunto convexo. Entonces $\mathrm{Con}\{\mathbf{x}^\theta \,/\, \theta \in \Theta^n\} \subseteq CDP(v)$. Por otro lado, anteriormente se probó (proposición 3.2) que

$$CDP(v) \subseteq C(\widetilde{v}) \subseteq C(\widetilde{v}^{r_0}).$$

Obteniéndose el resultado deseado. □

Observación 3.8. En las condiciones de la observación 3.7, se sigue garantizando la convergencia finita.

En el caso degenerado (múltiples óptimos duales) únicamente se puede garantizar la convergencia en el límite (véase el contra–ejemplo dado por Owen (1975)). Como apunta Owen, el problema radica en el hecho de que a jugadores de distinto tipo se les puede pagar de acuerdo con distintos precios sombra. Debe tenerse en cuenta que, en este caso, la interpretación de los óptimos duales como "precios sombra" no es directa; dado $\mathbf{y} \in Op(N)$, y_k, $k = 1, \ldots, m$, no nos indica el precio máximo al que interesa comprar recurso k adicional, sino que, en el caso degenerado, es $y_k^c = \max_{\mathbf{y} \in Op(N)} y_k$, quien nos proporciona dicha información. Así como, $y_k^v = \min_{\mathbf{y} \in Op(N)} y_k$ nos indica el precio mínimo al que interesa vender el recurso k, $k = 1, \ldots, m$. (véase León y Liern (1996)).

3.2.2.3 Revisión del caso general

La demostración de la convergencia finita en el caso no degenerado cuando los juegos de control son todos de unanimidad se basa en dos resultados: (i) El corazón de un cierto juego de coste, definido a partir del precio sombra de los recursos y del poder de bloqueo de cada coalición sobre el uso de los mismos, es una cota superior[4] de $C(\widetilde{v}^{r_0})$ para algún r_0 suficientemente grande, y además (ii) dicho conjunto coincide con $CDP(v)$, que a su vez es una cota inferior.

Para el caso en que los juegos de control no sean necesariamente de unanimidad, si se generaliza de forma natural el juego de coste, entonces el resultado (i) se sigue verificando. Este hecho nos ha llevado a replantearnos qué ocurre en el caso general. Se comprueba que, en ausencia de degeneración, el corazón del juego de coste (con coaliciones nítidas) coincide con $C(\widetilde{v})$. En el caso degenerado se intuye el comportamiento límite.

[4] con respecto al orden dado por la inclusión.

Lema 3.5. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités, en ausencia de degeneración en el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición total N, para toda coalición $S \neq \emptyset$, existe un escalar $t(S) \in [0,1)$ tal que para todo $\tau \in [t(S), 1]$ se verifica*

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}(S)) = \widetilde{v}(N) - (1-\tau)\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in J_k(S)} B_k^q,$$

donde $Op(N) = \{\mathbf{y}^*\}$ y $J_k(S) = \left\{ q \in \{1,\ldots,d_k\} \,/\, S \in \mathcal{B}(u_k^q) \right\}$, siendo $\mathcal{B}(u_k^q) \subseteq \mathcal{P}(N)$, el conjunto de coaliciones de bloqueo del juego simple de control (N, u_k^q), $\forall\ q = 1, \ldots, d_k$, $\forall\ k = 1, \ldots, m$, y donde la coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}(S)$ está definida como en el lema 3.4.

Demostración: La demostración es análoga a la del lema 3.4, sin más que tener en cuenta que, en este caso, dada una coalición $S \subseteq N$, para todo $\tau \in [0,1]^n$, el poder de control de la coalición $\boldsymbol{\tau}(S)$ sobre el lote B_k^q, $q = 1, \ldots, d_k$, de recurso k, $k = 1, \ldots, m$, viene dado por

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}(S)) = \begin{cases} \tau\,, & \text{si } \ S \in \mathcal{B}(u_k^q)\,, \\ 1\,, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, el valor de las coaliciones con tasas de participación de la forma $\boldsymbol{\tau}(S)$, cuando τ decrece desde 1 hasta 0, se puede obtener mediante un análisis paramétrico del problema de programación lineal asociado al valor de la coalición total N, cuando se perturba el vector del lado derecho en la dirección del vector $\mathbf{v}$, donde

$$v_k = \sum_{q \in J_k(S)} B_k^q, \qquad k = 1, \ldots, m. \qquad \square$$

Notación. Dado un juego de producción lineal controlado por comités, (N, v), tal que

$Op(N) = \{\mathbf{y}^*\}$, notaremos por $(N, c_{\mathbf{y}^*})$ al juego de coste definido por:

$$c_{\mathbf{y}^*}(S) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in J_k(S)} B_k^q, \quad \forall\ S \subseteq N\,,\ S \neq \emptyset\,,$$

$$c_{\mathbf{y}^*}(\emptyset) = 0\,.$$

Teorema 3.9. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités, en ausencia de degeneración en el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición total N, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $C(\widetilde{v}^r) = \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$, para todo $r \geq r_0$.*

Demostración: Veamos que se verifica la igualdad probando la doble inclusión. En primer lugar, la inclusión $C(\widetilde{v}^r) \subseteq \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$ se demuestra siguiendo un razonamiento análogo al desarrollado en la demostración del teorema 3.8, aplicando en este caso el lema 3.5 para la determinación de r_0 y para el cálculo del valor de la coalición $\gamma(S)$ en el juego $(N, \widehat{v}^{r_0})$. Obsérvese que la demostración sigue siendo válida para cualquier $r \geq r_0$.

En cuanto a la otra inclusión, $C(\widetilde{v}^r) \supseteq \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$, sea $(N, \widetilde{v})$ el juego de producción lineal con tasas de participación que genera el refinamiento, puesto que $C(\widetilde{v}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C(\widetilde{v}^r)$, es suficiente probar la inclusión $\text{core}(c_{\mathbf{y}^*}) \subseteq C(\widetilde{v})$.

Sea $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$ una coalición con tasas de participación cualquiera, entonces se verifica

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) = \text{mín}\left\{ \sum_{k=1}^{m} y_k \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) \ /\ y \in Y \right\} \leq \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau})\,.$$

Luego, como toda propuesta de pago $\varphi \in \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$, pertenece al conjunto $PI(\widetilde{v})$, sólo es necesario probar que

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) \leq \sum_{i \in N} \tau_i \varphi_i\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,.$$

Dada una coalición, $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, sean $\tau_{(1)} \leq \tau_{(2)} \leq \cdots \leq \tau_{(n)}$ las coordenadas de $\boldsymbol{\tau}$ reordenadas en orden no decreciente. Consideremos, en primer lugar, el caso en que no hay empates; esto es, $\tau_{(1)} < \tau_{(2)} < \cdots < \tau_{(n)}$. Sea $\theta \in \Theta^n$ la permutación de N tal que $\theta(i) = j$ si y sólo si $\tau_i = \tau_{(j)}$. Entonces, para todo $i \in N$ y para todo juego simple de control $(N, \widetilde{u}_k^q)$, se verifica:

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \tau_i \iff \Big[\big(P_i^\theta \cup \{i\}\big) \in \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \ \text{ y } P_i^\theta \notin \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \Big] . \tag{3.23}$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \Big(\sum_{i \in N} \tau_i \sum_{q \in H_k(i)} B_k^q \Big) = \sum_{i \in N} \tau_i \Big(\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in H_k(i)} B_k^q \Big) , \tag{3.24}$$

donde el conjunto de índices $H_k(i)$, $k = 1, \ldots, m$, viene definido como

$$H_k(i) = \Big\{ q \in \{1, \ldots, d_k\} \ / \ \big(P_i^\theta \cup \{i\}\big) \in \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \ \text{ y } P_i^\theta \notin \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \Big\} .$$

Obsérvese que

$$c_{\mathbf{y}^*}\big(P_i^\theta \cup \{i\}\big) - c_{\mathbf{y}^*}\big(P_i^\theta\big) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in H_k(i)} B_k^q . \tag{3.25}$$

Sustituyendo la expresión (3.25) en (3.24) y reagrupando los términos de la suma, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\ell=2}^{n} \big(\tau_{(\ell-1)} - \tau_{(\ell)}\big)\, c_{\mathbf{y}^*}\big(\{\theta^{-1}(1), \ldots, \theta^{-1}(\ell-1)\}\big) + \tau_{(n)} c_{\mathbf{y}^*}(N) . \tag{3.26}$$

Por otro lado, si $\varphi \in \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$, entonces para todo $\ell = 2, \ldots, n$, se verifica

$$c_{\mathbf{y}^*}\left(\{\theta^{-1}(1), \ldots, \theta^{-1}(\ell-1)\}\right) \geq \sum_{j=1}^{\ell-1} \varphi_{\theta^{-1}(j)} .$$

Luego, para todo $\varphi \in \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$, se tiene que

$$\left(\tau_{(\ell-1)} - \tau_{(\ell)}\right) c_{\mathbf{y}^*}\left(\{\theta^{-1}(1), \ldots, \theta^{-1}(\ell-1)\}\right) \leq \left(\tau_{(\ell-1)} - \tau_{(\ell)}\right) \sum_{j=1}^{\ell-1} \varphi_{\theta^{-1}(j)}, \quad \forall\ \ell = 2, \ldots, n .$$

En consecuencia, de la igualdad (3.26), se deduce que

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) \leq \sum_{\ell=2}^{n} \left(\tau_{(\ell-1)} - \tau_{(\ell)}\right) \sum_{j=1}^{\ell-1} \varphi_{\theta^{-1}(j)} + \tau_{(n)} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{\theta^{-1}(j)} = \sum_{i \in N} \tau_i \varphi_i ,$$

para toda propuesta de pago $\varphi \in \text{core}(c_{\mathbf{y}^*})$. Por tanto, en ausencia de empates, se verifica la desigualdad que queríamos probar.

En caso de que hubiera empates, entonces el razonamiento anterior se generaliza teniendo en cuenta algunas consideraciones. Supongamos, por ejemplo, $\tau_{(j)} = \tau_{(j+1)}$, y sean i_1 e i_2 los jugadores tales que $\tau_{(j)} = \tau_{i_1}$ y $\tau_{(j+1)} = \tau_{i_2}$. Entonces, la relación (3.23) se sigue verificando para todo $i \in N \setminus \{i_1, i_2\}$; mientras que para i_1 e i_2 se tiene que:

$$\widetilde{u}_k^q(\boldsymbol{\tau}) = \tau_{i_1} = \tau_{i_2} \iff \left[\ \left(P_{i_1}^\theta \cup \{i_1, i_2\}\right) \in \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \ \text{ y } \ P_{i_1}^\theta \notin \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q)\ \right] .$$

Luego, redefiniendo los conjuntos $H_k(i)$ para $i \in \{i_1, i_2\}$ como:

$$H_k(i_1) = \left\{\ q \in \{1, \ldots, d_k\} \ / \ \left(P_{i_1}^\theta \cup \{i_1, i_2\}\right) \in \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q) \ \text{ y } \ P_{i_1}^\theta \notin \mathcal{B}(\widetilde{u}_k^q)\ \right\},$$

$$H_k(i_2) = \emptyset ,$$

y teniendo en cuenta que $\tau_{(j)} - \tau_{(j+1)} = 0$, se reproduce el razonamiento seguido en el caso en el que no había empates. □

Ejemplo 3.2. Considérese el ejemplo 3.1 (pág. 121). El juego de coste asociado $(N, c_{\mathbf{y}^*})$, $\mathbf{y}^* = (1, \frac{3}{2})$, viene dado por:

$$\begin{aligned}
&c_{\mathbf{y}^*}(\{1\}) = 18\,,\\
&c_{\mathbf{y}^*}(\{2\}) = c_{\mathbf{y}^*}(\{3\}) = 12\,,\\
&c_{\mathbf{y}^*}(S) = 18\,, \quad \forall\ S \subseteq N \ \text{ tal que } |S| \geq 2\,.
\end{aligned}$$

Es trivial comprobar que $(N, c_{\mathbf{y}^*})$ es un juego cóncavo y, por tanto,

$$\text{core}(c_{\mathbf{y}^*}) = \mathcal{W}(c_{\mathbf{y}^*}) = \text{Con}\left\{\, (18,0,0), (6,12,0), (0,12,6), (0,6,12), (6,0,12) \,\right\} = C(\widetilde{v})\,.$$

Corolario 3.5. *Sea (N, v) un juego de producción lineal controlado por comités. Si todos los juegos simples de control tienen un único jugador veto, entonces, en ausencia de degeneración en el problema de programación lineal primal asociado al valor de la coalición total N, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $C(\widetilde{v}^{r_0}) = CDP(v)$.*

Además, $CDP(v)$ coincide con el conjunto de pagos según precios sombra del juego de producción lineal (N, v'), definido por los mismos parámetros que (N, v), en el que el vector de recursos iniciales de cada jugador $i \in N$, se corresponde con

$$b_k^i = \sum_{q \in I_k(i)} B_k^q\,, \qquad k = 1, \ldots, m\,,$$

siendo $I_k(i) = \left\{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, V_k^q = \{i\} \,\right\}$, $k = 1, \ldots, m$.

Demostración: Si todos los juegos simples de control tienen un único jugador veto, entonces el juego de coste (N, c_{y^*}), satisface

$$c_{y^*}(\{i\}) = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(i)} B_k^q, \quad \forall\ i \in N\,,$$

y

$$\sum_{i \in N} c_{y^*}(\{i\}) = c_{y^*}(N) = \widetilde{v}(N)\,.$$

Luego, el corazón del juego de coste viene dado por

$$\text{core}(c_{y^*}) = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(1)} B_k^q, \ldots, \sum_{k=1}^{m} y_k^* \sum_{q \in I_k(n)} B_k^q\right) \right\},$$

que obviamente coincide con $CDP(v) = DP(v')$. Así pues, para todo $r \geq r_0$, se verifica

$$CDP(v) = C(\widetilde{v}^r) = \text{core}(c_{y^*})\,. \qquad \square$$

En el caso degenerado, cabe esperar que, en el límite, los resultados obtenidos para el caso no degenerado se generalicen en el siguiente sentido: Dado un juego de producción lineal controlado por comités (N, v), para todo óptimo dual $\boldsymbol{\xi} \in Op(N)$, considérese el juego de coste asociado, $(N, c_{\boldsymbol{\xi}})$, entonces se debe verificar:

$$C(\widetilde{v}) = \bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in Op(N)} \text{core}(c_{\boldsymbol{\xi}})\,.$$

Obviamente, de la demostración del teorema 3.9 se deduce la inclusión

$$\bigcup_{\xi \in Op(N)} \mathrm{core}(c_{\xi}) \subseteq C(\widetilde{v}).$$

Se debe notar que, en este caso, el corazón del juego límite es "grande", i.e., puede coincidir con el corazón del juego original. A continuación se desarrolla un ejemplo a modo ilustrativo.

Ejemplo 3.3. Considérese la siguiente situación. Hay dos recursos, B_1 y B_2, y dos productos. Los recursos están controlados por tres jugadores $N = \{1, 2, 3\}$. El control de dichos recursos viene dado por los juegos simples (N, u_1) y (N, u_2), respectivamente, donde

$$u_1(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \in S \text{ y } |S| \geq 2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $u_2 \equiv u_{\{2,3\}}$ es el juego de unanimidad respecto de la coalición $\{2, 3\}$. Se dispone de 2 unidades de cada recurso. El beneficio que se obtiene con la venta en el mercado de los productos es de 1 y 2 unidades, respectivamente, y la matriz de producción es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

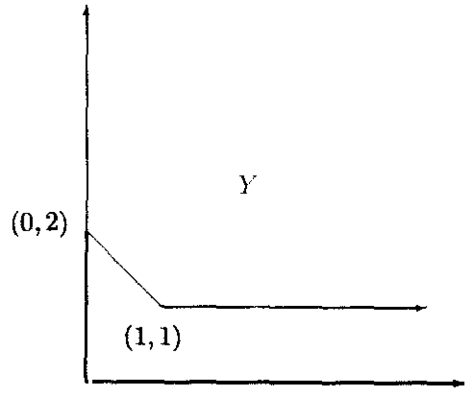
Entonces, para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0, 1]^n$,

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(\boldsymbol{\tau}) \;=\; \text{máx} \;\; & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \;\; & \\ & x_2 \leq \widetilde{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \\ & x_1 + x_2 \leq \widetilde{B}_2(\boldsymbol{\tau}), \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_1(\boldsymbol{\tau}) &= 2\,\widetilde{u}_1(\boldsymbol{\tau}) = 2\ \text{máx}\{\text{mín}\{\tau_1,\tau_2\},\text{mín}\{\tau_1,\tau_3\}\}\,,\\ \widetilde{B}_2(\boldsymbol{\tau}) &= 2\,\widetilde{u}_2(\boldsymbol{\tau}) = 2\ \text{mín}\{\tau_2,\tau_3\}\,.\end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la región factible Y, en azul, del problema dual asociado a N, siendo el conjunto de óptimos duales el segmento $Op(N) = \{\,(\xi, 2-\xi)\,/\,\xi \in [0,1]\,\}$.



Por otro lado,

$$\begin{aligned}&C(u_1) = \{(1,0,0)\}\,,\\ &C(u_2) = \Big\{\mathbf{x} \in I\!R^3\,/\,x_2 + x_3 = 1\,,\ x_i \geq 0\,,\ i \in N\,,\ \sum_{i\in N} x_i = 1\Big\}\,,\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$CDP(v) = \Big\{\ \varphi \in I\!R^3\ /\ \varphi_2 + \varphi_3 \geq 2,\ \ \varphi_i \geq 0,\ \ \forall\ i = 1,2,3,\ \ \text{y}\ \ \sum_{i\in N} \varphi_i = 4\ \Big\}.$$

Obsérvese que, en este caso, el juego de producción lineal viene dado por:

$$\begin{aligned}&v(S) = 0\,,\quad \forall\ S \subseteq N\,,\ S \neq \{2,3\}\ \text{ó}\ S \neq N\,,\\ &v(\{2,3\}) = 2\ \ \text{y}\ \ v(N) = 4\,.\end{aligned}$$

Luego, $CDP(v) = C(v)$ y, en consecuencia, $C(\widetilde{v}) = C(\widetilde{v}^r) = CDP(v)$, para todo $r \in \mathbb{Z}_+$.

A continuación, comprobamos que $CDP(v)$ coincide con $\displaystyle\bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in Op(N)} \text{core}(c_{\boldsymbol{\xi}})$:

Dado $\boldsymbol{\xi} = (\xi, 2-\xi) \in Op(N)$, el juego de coste asociado, $(N, c_{\boldsymbol{\xi}})$, viene dado por:

$$c_{\boldsymbol{\xi}}(\{1\}) = 2\xi\,,$$

$$c_{\boldsymbol{\xi}}(\{2\}) = c_{\boldsymbol{\xi}}(\{3\}) = 4 - 2\xi\,,$$

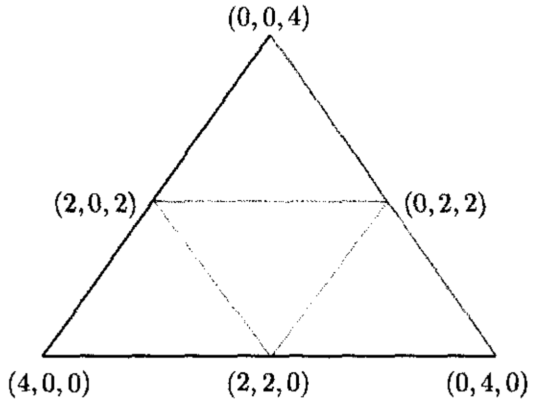
$$c_{\boldsymbol{\xi}}(S) = 4\,, \quad \forall\ S \subseteq N \ \text{ tal que } |S| \geq 2\,.$$

Como el juego de coste $(N, c_{\boldsymbol{\xi}})$ es cóncavo para todo $\boldsymbol{\xi} \in Op(N)$, se tiene que el corazón del juego es

$$\text{core}(c_{\boldsymbol{\xi}}) = \mathcal{W}(c_{\boldsymbol{\xi}}) =$$

$$= \text{Con}\left\{\, (2\xi, 0, 4-2\xi), (2\xi, 4-2\xi, 0), (0, 4-2\xi, 2\xi), (2\xi, 0, 4-2\xi), (0, 2\xi, 4-2\xi) \,\right\}.$$

Es fácil comprobar que $\displaystyle\bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in Op(N)} \text{core}(c_{\boldsymbol{\xi}}) = CDP(v)$. En la siguiente figura se representan los casos extremos: el corazón de $c_{\boldsymbol{\xi}}$, con $\boldsymbol{\xi} = (1,1)$ en azul, y el corazón de $c_{\boldsymbol{\xi}}$, con $\boldsymbol{\xi} = (0,2)$ en verde. El corazón del juego original se corresponde con el área del triángulo que queda entre la línea verde y la línea azul paralela a ella.



3.3 Juego reducido de un juego de producción lineal controlado por comités

Desde que Davis y Maschler (1965) consideraran por primera vez el concepto de *juego reducido*, la *propiedad de juego reducido* ha adquirido un papel relevante en el análisis de conceptos de solución dentro de la teoría de juegos cooperativos. Desde esta reflexión, Granot (1994) se plantea el sentido que el juego reducido de Davis–Maschler tiene en algunas aplicaciones prácticas: Juegos de producción lineal y Juegos simples asociados a redes (*Simple Network Games*, en inglés).

Nosotros nos proponemos, siguiendo el estudio llevado a cabo por Granot, analizar el juego reducido de un juego de producción lineal controlado por comités.

3.3.1 Preliminares: Juego reducido de un juego de producción lineal

En esta sección recogemos, a modo de introducción, el concepto de *juego de producción lineal extendido*, introducido por Granot (1994). Asimismo, se recogen también los resultados sobre el corazón de este tipo de juegos obtenidos por Granot en el citado trabajo.

Definición 3.4 (Davis y Maschler (1965)). Sea $(N, v) \in G$, sea $S \subsetneq N$, una coalición no vacía, y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, un vector de pagos eficiente. Se define el *juego reducido con respecto a S y a $\mathbf{x}$*, como el juego TU, $(S, v_S^{\mathbf{x}})$, donde

$$v_S^{\mathbf{x}}(T) = \begin{cases} x(S)\,, & T = S\,, \\ 0\,, & T = \emptyset\,, \\ \max\{\, v(T \cup Q) - x(Q) \,/\, Q \subseteq N \setminus S \,\}\,, & \emptyset \neq T \subsetneq S\,. \end{cases}$$

Intuitivamente, el valor de una coalición $T \subseteq S$ en el juego reducido $(S, v_S^{\mathbf{x}})$, representa la máxima utilidad que los miembros de dicha coalición pueden garantizarse obtener cuando se asume que todos los jugadores en $N \setminus S$ están dispuestos a cooperar a cambio de obtener el pago dictado por la preimputación $\mathbf{x}$.

Granot (1994) obtiene el siguiente resultado, que simplifica la representación del juego reducido cuando $\mathbf{x} \in C(v)$.

Lema 3.6 (Granot (1994)). *Sea $(N, v) \in G$. Supongamos que $C(v) \neq \emptyset$ y sea $\mathbf{x} \in C(v)$. Entonces, para cada $S \subseteq N$ y $T \subseteq S$,*

$$v_S^{\mathbf{x}}(T) = \hat{v}_S^{\mathbf{x}}(T) := \max\{\, v(T \cup Q) - x(Q) \,/\, Q \subseteq N \setminus S \,\}.$$

Definición 3.5. Un concepto de solución φ en $G_0 \subseteq G$ tiene la *propiedad de juego reducido* si para todo juego $(N, v) \in G_0$, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, y $\mathbf{x} \in \varphi(N, v)$, se verifica $(S, v_S^{\mathbf{x}}) \in G_0$ y $\mathbf{x}^S = (x_i)_{i \in S} \in \varphi(S, v_S^{\mathbf{x}})$.

La propiedad de juego reducido es esencialmente una propiedad de *consistencia*. Intuitivamente, considérese una sociedad cuyos miembros "creen" todos en la solución φ como regla de reparto. Si se considera el juego reducido en el que una parte de la sociedad cede toda su capacidad estratégica a cambio de recibir lo que dicha solución otorga a sus miembros, y se vuelve a aplicar la misma solución para repartir las ganancias entre los miembros de la sociedad restantes, entonces cada uno de ellos recibe el mismo pago que recibía en la situación original. Si $\mathbf{x}$ es una solución consistente con las expectativas de los jugadores en el juego (N, v), entonces $\mathbf{x}^S$ es una solución consistente con las expectativas de los jugadores en el juego reducido $(S, v_S^{\mathbf{x}})$.

El juego reducido de un juego de producción lineal no es, en general, un juego de producción lineal. Con el fin de solventar este problema Granot (1994) considera una extensión del modelo original de Owen (1975), los *juegos de producción lineal extendidos*. Este tipo de juegos incorpora al modelo original la posibilidad de que los jugadores adquieran en el mercado, a un cierto precio, recursos adicionales. Concretamente, los parámetros que definen un juego de producción lineal extendido son, además de los que ya definen a un juego de producción lineal, $(N;\ \mathbf{A};\ \mathbf{c};\ \mathbf{b}^i,\ i \in N)$, un conjunto adicional de vectores de recursos $(\mathbf{t}^j \in I\!R^m,\ j \in J)$ y su precio en el mercado $(d_j,\ j \in J)$.

Definición 3.6 (Granot (1994)). Un *juego de producción lineal extendido* es un par (N, v), donde $v(\emptyset) = 0$, y para cada coalición $S \subseteq N$,

$$
\begin{aligned}
v(S) = \quad & \text{máx} \quad \sum_{j=1}^{p} c_j x_j - \sum_{j \in J} d_j y_j \\
& \text{s.a.} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j - \sum_{j \in J} y_j t_k^j \leq b_k(S)\,, \quad k = 1, \dots, m, \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad x_j \geq 0\,, \qquad j = 1, \dots, p, \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad y_j \in \{0,1\}\,, \quad j \in J.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que esta definición no contempla la posibilidad de que los jugadores adquieran una fracción de un vector de recursos adicional.

Proposición 3.3 (Granot (1994)). *El juego reducido de Davis-Maschler de un juego de producción lineal extendido, calculado en una imputación en el corazón, vuelve a ser un juego de producción lineal extendido. Concretamente, el juego reducido en $S \subseteq N$ en $\mathbf{x} \in C(v)$ es un juego de producción lineal extendido con parámetros:*

$$(S;\ \mathbf{A};\ \mathbf{c};\ \mathbf{b}^i,\ i \in S;\ \mathbf{t}^j,\ j \in J \ \text{ y } \ \mathbf{b}^i,\ i \in N \setminus S;\ d_j,\ j \in J \ \text{ y } \ x_j,\ j \in N \setminus S)\,.$$

Granot (1994) nota que, al contrario de lo que ocurre para los juegos de producción lineal, el corazón de un juego de producción lineal extendido puede ser vacío. Obviamente, este hecho dependerá del vector de precios $\mathbf{d}$ asociado al conjunto de recursos adicionales. A partir del juego reducido, Granot deduce algunas condiciones suficientes para que el corazón del juego extendido sea no vacío.

Notación. Dado un juego de producción lineal extendido (N, v), se denota por $(N \cup J, \overline{v})$ al juego de producción lineal (ordinario) con vector de beneficios $\mathbf{c}$, matriz de producción $\mathbf{A}$ y conjunto de jugadores $N \cup J$, siendo el vector de recursos iniciales del jugador $i \in N$ $(j \in J)$ $\mathbf{b}^i$ $(\mathbf{t}^j)$.

Teorema 3.10 (Granot (1994)). *Sea* $\mathbf{x} \in C(\overline{v})$, *y sea* $d_j = x_j$, *para todo* $j \in J$ *en el correspondiente juego de producción lineal extendido* (N, v). *Entonces* $C(v) \neq \emptyset$. *De hecho, la restricción de* $\mathbf{x}$ *al conjunto de jugadores en* N, *pertenece al corazón del juego.*

El recíproco del teorema anterior no es cierto. No obstante, se verifica la siguiente modificación del recíproco.

Teorema 3.11 (Granot (1994)). *Sea* (N, v) *un juego de producción lineal extendido tal que* $C(v) \neq \emptyset$, *y sea* $\mathbf{u} \in C(v)$. *Entonces,* $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{d}) \in I\!R^{n+|J|}$ *pertenece al corazón del juego de producción lineal asociado* $(N \cup J, \overline{v})$ *si se verifica* $\overline{v}(N \cup J) = u(N) + d(J)$.

3.3.2 Juego de producción lineal controlado por comités extendido

3.3.2.1 Definición del modelo

Antes de definir qué entendemos por un *juego de producción lineal controlado por comités extendido*, analizamos qué tipo de situaciones, que afecten tanto a la distribución del poder sobre los lotes de recursos controlados por los jugadores, como a la cantidad de recursos disponible en el mercado, pueden plantearse.

La primera situación generaliza el supuesto introducido por Granot (1994) al extender el modelo de Owen (1975): Los jugadores tienen la posibilidad de comprar lotes adicionales de cada uno de los recursos. Dicha compra puede serbien una decisión individual, o bien, una decisión colectiva de un grupo de agentes, que pueden optar por adquirir recursos adicionales conjuntamente. Dicha compra se realiza a través de la adquisición de capital en la empresa que controla la gestión de los recursos adicionales en cuestión. La capacidad de disposición por parte de un grupo de compradores de cada uno de los lotes dependerá, por un lado, del esfuerzo inversor realizado y, por otro lado, de si el grupo de compradores ya contaba con parte del capital de la empresa. Considérese, por ejemplo, un *holding* que aglutine a varias empresas que adquiera capital de otra compañía.

Una segunda situación a tener en cuenta es aquella que no involucra la compra de recursos adicionales, sino la redistribución del poder de control sobre los lotes de recursos ya considerados en el modelo mediante la compra, por ejemplo, de acciones. Situaciones de este tipo se dan cuando una empresa lleva a cabo una ampliación de capital, o cuando los grandes inversores compran acciones a los pequeños inversores (cuya representatividad individual en la junta es despreciable), o bien, cuando uno, o varios, de los grandes inversores compran a otro gran inversor, bien una parte o bien la totalidad de sus acciones.

Las dos situaciones descritas se pueden ver, de hecho, como una misma situación. La única diferencia radica en el hecho de que, en la primera de las situaciones consideradas, ningún grupo de potenciales compradores dispone, con anterioridad a la compra, del poder suficiente como para disponer del lote. No obstante, a la hora de definir el juego extendido, hemos creído conveniente considerarlas como dos situaciones distintas.

Veamos cómo introducir en el modelo original las dos posibilidades descritas:

A. Compra de recursos adicionales: Se supone que en el mercado se encuentran disponibles lotes adicionales de cada uno de los recursos, $D_k^1, \ldots, D_k^{\ell_k}$, $k = 1, \ldots, m$. La adquisición de cada uno de estos lotes se realiza mediante la compra de paquetes de acciones. Para cada $\ell = 1, \ldots, \ell_k$, $k = 1, \ldots, m$, sean $e_k^\ell(1), \ldots, e_k^\ell(f_k^\ell)$, los paquetes de acciones correspondientes al lote D_k^ℓ. Cada uno de ellos tiene un precio de compra en el mercado de $c_k^\ell(f)$, $f = 1, \ldots, f_k^\ell$.

Para cada posible combinación de paquetes de acciones y para cada coalición $S \subseteq N$ se conoce el poder de control que adquiere dicha coalición con la compra adicional de acciones. Para cada posible combinación de paquetes de acciones $F \subseteq F_k^\ell = \{1, \ldots, f_k^\ell\}$, esta información vendrá dada por un juego[5] $(N, w_k^\ell[F])$, tal que $(w_k^\ell[F])(S) \in \{0,1\}$, $\forall\, S \subseteq N$[6]. En tal caso, la coalición $S \subseteq N$, puede disponer del lote D_k^ℓ de recurso k mediante la compra del paquete de acciones $\{e_k^\ell(f)\,/\,f \in F\}$ si y sólo si $(w_k^\ell[F])(S) = 1$. Obviamente, debe verificarse $(w_k^\ell[F_k^\ell])(N) = 1,\ \forall\, \ell,\ \forall\, k$. En otro caso, el correspondiente lote no se tendría en cuenta.

B. Adquisición de poder adicional: Se supone que en el mercado se encuentran disponibles paquetes de acciones adicionales de los lotes que ya están en poder de los jugadores. Para cada $q = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$, sean $a_k^q(1), \ldots, a_k^q(h_k^q)$ los paquetes de acciones correspondientes al lote B_k^q. Cada uno de ellos tiene un precio de compra en el mercado de $p_k^q(h)$, $h = 1, \ldots, h_k^q$.

Para cada posible combinación de paquetes de acciones $H \subseteq H_k^q = \{1, \ldots, h_k^q\}$, se conoce el juego simple $(N, w_k^q[H])$ que describe el nuevo control sobre el lote B_k^q cuando se adquiere el paquete de acciones $\{a_k^q(h)\,/\,h \in H\}$. Esto es, la coalición $S \subseteq N$ puede disponer del lote B_k^q de recurso k, mediante la compra del paquete de acciones $\{a_k^q(h)\,/\,h \in H\}$, si y sólo si S es una coalición ganadora en el juego simple $(N, w_k^q[H])$.

Ejemplo 3.4. Considérese la siguiente situación. Hay dos productos, $\mathbf{c} = (8,6)$, y dos recursos. Del primer recurso hay dos lotes, $B_1^1 = 4$ y $B_1^2 = 2$, y un único lote $B_2^1 = 5$ del segundo recurso. El control sobre dichos recursos viene dado por los juegos simples (N, u_1^1), (N, u_1^2) y (N, u_2^1), respectivamente, donde

$$
\begin{aligned}
&u_1^1 \equiv u_{\{1,2\}}\,,\\
&u_1^2 \text{ es el juego de voto ponderado } u(50; 20, 25, 35)\,,\\
&u_2^1\,,\ \mathcal{MW}(u_2^1) = \{\,\{1,2\}, \{1,3\}\,\}\,.
\end{aligned}
$$

[5] En particular, $(w_k^\ell[F])(\emptyset) = 0,\ \forall\, F \subseteq F_k^\ell,\ \forall\, \ell = 1, \ldots, \ell_k,\ k = 1, \ldots, m$.

[6] Se contempla la posibilidad de que el paquete de acciones $F \subsetneq F_k^\ell$ no sea suficiente para disponer del recurso, i.e., $(N, w_k^\ell[F])$ puede ser el juego trivial nulo.

La matriz de producción es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se encuentran disponibles en el mercado participaciones en el control de dos lotes adicionales, uno de cada uno de los recursos: $D_1 = 3$ y $D_2 = 6$. Las participaciones en el control de D_1 disponibles son:

$e_1(1)$: Representación del 40%, con un precio de compra de 2.

$e_1(2)$: Representación del 30%, con un precio de compra de 1.

J_1 tiene una representación del 20% en el control de D_1, mientras que J_2 y J_3 no tienen representación alguna. En cuanto al control de D_2, sólo hay disponible una participación $e_2(1)$ del 30%, con un precio de compra de 3. La coalición $S = \{1, 2\}$ cuenta con una representación del 30% en el control de D_2 y J_3 no está representado.

Así mismo, se encuentra disponible un paquete de acciones, $a_1^2(1)$, que se corresponde con una ganancia de 20 puntos en el juego de voto ponderado u_1^2. El precio de compra es de 1. Los juegos que describen el efecto de comprar cada posible combinación de paquetes de acciones son:

- $w_1[\{1\}] \equiv w_1[\{2\}] \equiv u_{\{1\}}$.

- $w_1[\{1,2\}]$ es un juego trivial verificando $(w_1[\{1,2\}])(S) = 1$, para toda coalición $S \subseteq N$, no vacía.

- $w_2[\{1\}] \equiv u_{\{1,2\}}$.

- $u_1^2[\emptyset] \equiv u_1^2$ y $u_1^2[\{1\}]$ es el juego simple con conjunto de coaliciones minimales ganadoras $\{\{3\}, \{1,2\}\}$.

Una situación como la considerada queda descrita por los siguientes parámetros:

$$\Big(N;\ \mathbf{A};\ \mathbf{c};$$

$$\big(D_k^\ell;\ (e_k^\ell(1),c_k^\ell(1)),\dots,(e_k^\ell(f_k^\ell),c_k^\ell(f_k^\ell)),\ (N,w_k^\ell[F]), F\subseteq F_k^\ell, \ell=1,\dots,\ell_k\big), k=1,\dots,m;$$

$$\big(B_k^q;\ (a_k^q(1),p_k^q(1)),\dots,(a_k^q(h_k^q),p_k^q(h_k^q)),\ (N,u_k^q[H]), H\subseteq H_k^q, q=1,\dots,d_k\big), k=1,\dots,m\Big).$$

Obviamente, puede darse el caso de que la compra de alguno de los paquetes de acciones modifique el control sobre más de un lote. Lo que vendría reflejado en la duplicidad de paquetes de acciones. Este hecho, junto con lo farragoso de la notación, nos lleva a describir la situación anterior de una forma más compacta. Para ello, se considera un único conjunto de paquetes de acciones disponibles en el mercado T, esto es, se elimina la distinción entre paquetes de acciones en función del lote sobre cuyo control tienen efecto. En tal caso, los parámetros necesarios para describir situaciones del tipo considerado son:

$$\Big(N;\ \mathbf{A};\ \mathbf{c};\ T;\ p(t),\ t\in T;$$

$$\big(D_k^\ell;\ (N,w_k^\ell[T']), T'\subseteq T, \ell=1,\dots,\ell_k, k=1,\dots,m\big);$$

$$\big(B_k^q;\ (N,u_k^q[T']), T'\subseteq T, q=1,\dots,d_k, k=1,\dots,m\big)\Big),$$

donde $p(t)$ es el precio de compra del paquete de acciones t, $t\in T$, y todos los juegos que aparecen tienen el mismo sentido y propiedades que los juegos considerados en **A.** y **B.**

Obsérvese que si $T'\subseteq T$ no afecta al control sobre D_k^ℓ, entonces $(N,w_k^\ell[T'])$ es el juego trivial nulo; mientras que si no afecta al control de B_k^q, entonces $(N,u_k^q[T'])$ coincidirá con el juego de control original (N,u_k^q).

Definición 3.7. Un *juego de producción lineal controlado por comités extendido* es un par (N,v), donde $v(\emptyset)=0$, y para cada coalición $S\subseteq N$,

$$
\begin{aligned}
v(S) = \quad & \text{máx} \quad \sum_{j=1}^{p} c_j x_j - \sum_{t \in T} p(t) y_t \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} D_k^\ell \Big[\sum_{T' \subseteq T} \Big(\prod_{t \in T'} y_t \prod_{t \notin T'} (1 - y_t) \Big) (w_k^\ell [T'])(S) \Big] \leq \\
& \qquad \leq \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \Big[\sum_{T' \subseteq T} \Big(\prod_{t \in T'} y_t \prod_{t \notin T'} (1 - y_t) \Big) (u_k^q [T'])(S) \Big], \\
& \qquad\qquad k = 1, \dots, m, \\
& x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, p, \\
& y_t \in \{0, 1\}, \quad t \in T.
\end{aligned}
$$

En el ejemplo considerado, tomando $T = \{1, 2, 3, 4\}$, e identificando $e_1(1) = 1$, $e_1(2) = 2$, $e_2(1) = 3$ y $a_1(1) = 4$, se tiene que, para toda coalición $S \subseteq N$ no vacía,

$$
\begin{aligned}
v(S) = \quad & \text{máx} \quad 8x_1 + 6x_2 - 2y_1 - y_2 - 3y_3 - y_4 \\
& \text{s.a.} \\
& x_1 + 3x_2 - 3\big((y_1 + y_2 - 2y_1 y_2) u_{\{1\}}(S) + y_1 y_2\big) \leq \\
& \qquad \leq 4u_1^1(S) + 2\big((1 - y_4) u_1^2(S) + y_4 (u_1^2[\{1\}])(S)\big), \\
& 2x_1 + x_2 - 6y_3 u_{\{1,2\}}(S) \leq 5u_2^1(S), \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\
& \mathbf{y} \in \{0, 1\}^4.
\end{aligned}
$$

Directamente de la definición de juego reducido y de la aplicación del lema 3.6 para la obtención del juego reducido, se deduce el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *El juego reducido de Davis-Maschler de un juego de producción lineal controlado por comités extendido, calculado en una imputación en el corazón, vuelve a ser un juego de producción lineal controlado por comités extendido. Concretamente, el juego reducido con respecto a $S \subseteq N$ y a $\mathbf{x} \in C(v)$ es un juego de producción lineal extendido con* *parámetros:*

$$\Big(S;\ \mathbf{A};\ \mathbf{c};\ T \cup (N \setminus S);\ p(t),\ t \in T \ \text{ y } \ x_j,\ j \in N \setminus S;$$

$$\big(D_k^\ell,\ (S, \hat{w}_k^\ell[Q]), \ell = 1, \ldots, \ell_k, \quad \text{y} \quad B_k^q,\ (S, \hat{u}_k^q[Q]),\ q \in Z_k^0(S),\ Q \subseteq T \cup (N \setminus S),$$

$$k = 1, \ldots, m\big);$$

$$\big(B_k^q;\ (S, \hat{u}_k^q[Q]),\ Q \subseteq T \cup (N \setminus S), q \in Z_k^1(S),\ k = 1, \ldots, m\big) \Big),$$

donde $(\hat{w}_k^\ell[Q])(L) = (w_k^\ell[Q \cap T])(L \cup (Q \setminus T))$, $\forall\, L \subseteq S$, *para todo* $\ell = 1, \ldots, \ell_k$, $k = 1, \ldots, m$, *y para cada* k,

$$Z_k^0(S) = \{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, u_k^q(S) = 0 \,\},$$

$$Z_k^1(S) = \{\, q \in \{1, \ldots, d_k\} \,/\, u_k^q(S) = 1 \,\}.$$

En ambos casos $(\hat{u}_k^q[Q])(L) = (u_k^q[Q \cap T])(L \cup (Q \setminus T))$, $\forall\, L \subseteq S$.

Ejemplo 3.5. En el ejemplo 3.3, el juego reducido con respecto a $S = \{1, 2\}$ y a la imputación $\mathbf{x} = (1, 1, 2) \in C(v)$, se corresponde con el juego de producción lineal controlado por comités extendido definido por los siguientes parámetros: S es el conjunto de jugadores, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{A}$, son el vector de beneficios y la matriz de producción, respectivamente, como en (N, v), un único paquete de acciones $T = \{1\}$, con un precio de compra de 2 y dos recursos, de los cuales, los jugadores de S tienen poder suficiente como para controlar el primero de ellos, sin necesidad de adquirir el paquete de acciones; mientras que para poder disponer del segundo recurso necesitan comprar acciones. Esto es, los lotes de productos disponibles en el mercado son: $B_1 = 2$ y $B_2 = 2$, cuyo control viene dado por:

$$u_1[\emptyset] \equiv u_S \quad \text{y} \quad u_1[\{1\}] \equiv u_{\{1\}},$$

$$u_2[\emptyset] \equiv 0 \quad \text{y} \quad u_2[\{1\}] \equiv u_{\{2\}}.$$

Para toda coalición $T \subseteq S$ no vacía, se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
v_S^{\mathbf{x}}(T) \;=\; & \max \quad x_1 + 2x_2 - 2y_1 \\
& \text{s.a.} \\
& \qquad x_2 \le 2\big((1-y_1)u_S(T) + y_1 u_{\{1\}}(T)\big), \\
& \qquad x_1 + x_2 - 2y_1 u_{\{2\}}(T) \le 0, \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0, \\
& \qquad y_1 \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

3.3.2.2 Corazón del juego

En esta sección generalizamos los resultados sobre el corazón de un juego de producción lineal extendido obtenidos por Granot a partir del juego reducido. En este caso, el hecho de que el juego extendido tenga corazón no vacío, no sólo depende de la elección del precio de compra de las acciones, sino que también depende de la naturaleza de los juegos que describen el control de los recursos.

Notación. Dado un juego de producción lineal controlado por comités extendido (N, v), se denota por $(N \cup T, \overline{v})$ al juego de producción lineal controlado por comités (ordinario) con vector de beneficios $\mathbf{c}$, matriz de producción $\mathbf{A}$ y conjunto de jugadores $N \cup T$, donde para cada recurso k, $k = 1, \ldots, m$, se dispone de $d_k + \ell_k$ lotes, cuyo control viene dado por:

- Control sobre B_k^q, $q = 1, \ldots, d_k$,

$$
\overline{u}_k^q(S) = \begin{cases} 0\,, & S \subseteq T\,, \\ u_k^q(S)\,, & S \subseteq N\,, \\ (u_k^q[S \cap T])(S \cap N)\,, & S \cap T \neq \emptyset \text{ y } S \cap N \neq \emptyset\,, \end{cases} \qquad \forall\; S \subseteq N \cup T\,.
$$

- Control sobre D_k^ℓ, $\ell = 1, \ldots, \ell_k$,

$$\overline{w}_k^\ell(S) = \begin{cases} 0, & S \subseteq T \text{ ó } S \subseteq N, \\ (w_k^q[S \cap T])(S \cap N), & S \cap T \neq \emptyset \text{ y } S \cap N \neq \emptyset, \end{cases} \qquad \forall\ S \subseteq N \cup T.$$

Resulta natural exigir que la compra de acciones no empeore la situación de la coalición que las adquiere, i.e., para toda coalición $S \subseteq N$, y para todo $k = 1, \ldots, m$, se debe exigir:

$$(u_k^q[T'])(S) \leq (u_k^q[T''])(S), \quad \forall\ T' \subseteq T'', \quad \forall\ q = 1, \ldots, d_k,$$
$$(w_k^\ell[T'])(S) \leq (w_k^\ell[T''])(S), \quad \forall\ T' \subseteq T'', \quad \forall\ \ell = 1, \ldots, \ell_k.$$

Así como el que $(w_k^\ell[T])(N) = 1$, $\forall\ \ell = 1, \ldots, \ell_k$, $k = 1, \ldots, m$. En consecuencia, todos los juegos de control considerados en la definición anterior son juegos simples y, por tanto, el juego $(N \cup T, \overline{v})$ así definido es efectivamente un juego de producción lineal controlado por comités.

Al contrario de lo que ocurre en el caso tratado por Granot, el corazón del juego $(N \cup T, \overline{v})$ puede ser vacío. Una condición suficiente para que $C(\overline{v}) \neq \emptyset$ es que se verifique:

(i) Para todo $q = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$, el juego simple $(N, u_k^q[T])$ tiene jugadores veto. Obviamente el conjunto de jugadores veto verifica $V_k^q(T) \subseteq V_k^q$.

(ii) Para todo $\ell = 1, \ldots, \ell_k$, $k = 1, \ldots, m$, el juego simple $(N, w_k^\ell[T])$ tiene jugadores veto. El conjunto de jugadores veto verifica $\hat{V}_k^\ell(T) \subseteq T$.

Ahora estamos en condiciones de generalizar los resultados sobre el corazón del juego extendido obtenidos por Granot (1994). La demostración de los teoremas que se dan a continuación son una adaptación de la de los teoremas 3.10 y 3.11, respectivamente. No obstante, hemos optado por incluirlas por completitud en la exposición.

Teorema 3.12. *Dado un juego $(N \cup T, \overline{v})$ con $C(\overline{v}) \neq \emptyset$. Para cada propuesta de pago*

$\mathbf{x} \in C(\overline{v})$, *considérese el juego de producción lineal controlado por comités extendido,* $(N, v_{\mathbf{x}})$, *en el que el vector de precios de compra de las acciones,* $(p(t))_{t\in T}$, *viene dado por* $\mathbf{x}^T$. *Entonces* $C(v) \neq \emptyset$. *De hecho, la restricción de* $\mathbf{x}$ *al conjunto de jugadores en* N *pertenece al corazón del juego.*

Demostración: Sea $\mathbf{x} \in C(\overline{v})$, entonces de la proposición 3.4 se deduce que el juego reducido con respecto a N y a $\mathbf{x}$ coincide con el juego de producción lineal controlado por comités extendido $(N, v_{\mathbf{x}})$. Luego, el resultado establecido en el teorema se deduce del hecho de que el corazón verifica la propiedad de juego reducido. □

Teorema 3.13. *Sea* (N, v) *un juego de producción lineal controlado por comités extendido con* $C(v) \neq \emptyset$, *y sea* $\mathbf{u} \in C(v)$. *Entonces,* $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, (p(t))_{t\in T}) \in \mathbb{R}^{n+|T|}$ *pertenece al corazón del juego de producción lineal controlado por comités asociado,* $(N \cup T, \overline{v})$, *si se verifica*

$$\overline{v}(N \cup T) = \sum_{i\in N} u_i + \sum_{t\in T} p(t)\,.$$

Demostración: Sea $\mathbf{u} \in C(v)$, entonces para toda coalición $S \subsetneq N$, se tiene que

$$\sum_{i\in S} u_i \geq v(S) = \Big\{ \text{máx} \quad \sum_{j=1}^{p} c_j x_j - \sum_{t\in T'} p(t)$$

$$\text{s.a.}$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} D_k^\ell \overline{w}_k^\ell (S \cup T') \leq \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \overline{u}_k^q (S \cup T')\,, \quad \forall\ k$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$T' \subseteq T \qquad \Big\}.$$

Luego, para todo subconjunto $L \subsetneq T$ de acciones y para toda coalición $S \subsetneq N$, se verifica

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in S} u_i + \sum_{t\in L} p(t) \geq \\
&\geq \sum_{t\in L} p(t) + \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_j x_j - \sum_{t\in T'} p(t) \\ \text{s.a.} & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} D_k^\ell \overline{w}_k^\ell (S\cup T') \leq \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \overline{u}_k^q (S\cup T'), \quad \forall\ k \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & T' \subseteq T \end{array} \right\} \geq \\
&\geq \sum_{t\in L} p(t) + \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_j x_j - \sum_{t\in L} p(t) \\ \text{s.a.} & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} D_k^\ell \overline{w}_k^\ell (S\cup L) \leq \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \overline{u}_k^q (S\cup L), \quad \forall\ k \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \\ \text{s.a.} & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj} x_j \leq \sum_{\ell=1}^{\ell_k} D_k^\ell \overline{w}_k^\ell (S\cup L) + \sum_{q=1}^{d_k} B_k^q \overline{u}_k^q (S\cup L), \quad \forall\ k \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} = \\
&= \overline{v}(S\cup L).
\end{aligned}
$$

Así pues, $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, (p(t))_{t\in T})$ pertenecerá a $C(\overline{v})$, siempre y cuando sea eficiente, i.e.,

$$\overline{v}(N \cup T) = \sum_{i\in N} u_i + \sum_{t\in T} p(t)\,. \qquad \square$$

3.4 Conclusiones

Resumiendo, en este capítulo se ha tratado de dar respuesta a dos cuestiones planteadas y resueltas para los juegos de producción lineal, en el contexto más general, en el que los recursos están controlados por comités de jugadores: Evolución del corazón cuando el número de jugadores de cada tipo presentes en el mercado aumenta y reducción del juego.

En cuanto a la evolución del corazón, cabe destacar el papel que juegan los juegos de coste asociados a los diferentes precios sombra. Toda imputación en el corazón del juego límite se puede obtener a partir del corazón de dichos juegos de coste, cuya función característica es extremadamente sencilla de calcular. Como ya sucede para el modelo original, las demostraciones de los resultados sobre convergencia finita se deducen directamente de la teoría de dualidad en programación lineal. Sin embargo, para demostrar la convergencia general en el caso cóncavo, ha sido necesario recurrir a la teoría de dualidad en programación no lineal. Concretamente, dicha demostración se basa en la adaptación de las propiedades del dual Lagrangiano.

En lo referente a la reducción del juego, la definición del modelo extendido generaliza de forma natural la definición dada por Granot de juego de producción lineal extendido. Su interés no sólo reside en el hecho de que la reducción de un juego de producción lineal controlado por comités extendido vuelve a ser un juego del mismo tipo, sino que también incorpora al modelo la posibilidad de tratar situaciones, bastante realistas, que de otro modo no serían modelizables mediante un juego de producción lineal.

Capítulo 4

Distribución del coste de una red de conexión: Juego del árbol fijo

4.1 Introducción

Antes de entrar en la descripción del trabajo contenido en este capítulo, queremos recordar que la primera parte, que abarca la práctica totalidad del capítulo, ha sido desarrollada en colaboración con los profesores M.Koster y S.Tijs de la Universidad de Tilburg y el profesor Y.Sprumont de la Universidad de Montreal, durante una estancia de tres meses realizada en la Universidad de Tilburg (Holanda), y aparece recogida en Koster, Molina, Sprumont y Tijs (1998).

Un problema que surge en diversos escenarios es el de distribuir el coste fijo, ya sea de mantenimiento, de modernización, etc..., de una red (ya construida) de conexión a un cierto punto de suministro entre sus usuarios. En este capítulo abordamos este problema a partir de su planteamiento como un juego de coste. En particular, nos centramos en aquellos problemas que surgen asociados a redes de conexión con una estructura muy peculiar, la de *árbol.*

Problemas de este tipo, así como el problema más general en el que la red de conexión debe ser previamente construida, han sido tratados extensamente. A modo orientativo, citaremos los trabajos de Bird (1976b), Claus y Granot (1976), Megiddo (1978), Galil (1980), Granot y Huberman (1981),(1984), Granot y Granot (1992), Granot, Maschler, Owen y Zhu (1996), Maschler, Potters y Reijnierse (1995) y Gellekom y Potters (1997). El caso particular en que el árbol que define la red de conexión es una cadena se conoce con el nombre de *problema del aeropuerto* y ha sido también objeto de un amplio estudio: véase Littlechild (1974), Littlechild y Owen (1977), Dubey (1982), Sudhölter y Potters (1995) y Aadland y Kolpin (1998).

Una vez que el problema descrito se plantea como un juego de coste, el objetivo final es seleccionar propuestas de reparto eficientes, es decir, que repartan el coste total de la red entre sus usuarios. Concretamente, en la primera parte del capítulo, nuestro interés se centra en el análisis del corazón de aquellos juegos de coste que surgen asociados a problemas de esta naturaleza: ¿existe algún procedimiento general de selección que permita obtener cualquier reparto en el corazón del juego? La respuesta a esta pregunta es bien conocida. El juego de coste asociado a un problema de estas características es cóncavo (Granot *et al.* (1996)) y, por consiguiente, el corazón del juego coincide con el conjunto de valores de Shapley (duales) ponderados (Monderer, Samet y Shapley (1992)). De forma similar, introducimos una familia de conceptos de solución, la *familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas*, basada en la solución *igualitaria restringida* de Dutta y Ray (1989), y demostramos su coincidencia con el corazón del juego. Así mismo, proponemos un esquema dinámico de reparto de costes, noción de *reparto casa–raíz*, inspirado en la *historia sobre el pintado de carreteras* de Maschler, Potters y Reijnierse (1995), para la obtención de cada uno de los elementos de la familia. Dicho esquema no sólo nos ayuda a comprender el proceso de selección que lleva a cada elemento del corazón del juego, sino que también nos permite deducir algunas de las propiedades más relevantes de esta familia de soluciones. En particular, el adoptar este enfoque dinámico nos permite observar la relación en cierto modo *dual* existente entre las soluciones igualitarias restringidas ponderadas y los valores de Shapley (duales) ponderados en este tipo concreto de juegos: basándonos en la representación del corazón del juego a partir de dicha familia (Monderer *et al.* (1992)), se propone un esquema dinámico, simétrico al considerado en el caso anterior, para la obtención de los valores de Shapley (duales) ponderados (noción de *reparto raíz–casa*). Se concluye el estudio de la familia de soluciones considerada obteniendo una caracterización del conjunto de soluciones igualitarias restringidas ponderadas como procedimientos de asignación de costes.

En la segunda parte, y conectando con los temas tratados en los capítulos previos, se analizan las posibilidades que ofrece el considerar la formación de coaliciones con tasas de participación en el modelo. Concretamente, nos centraremos en el análisis del comportamiento del corazón del juego con tasas de participación en relación con el corazón del juego nítido. Asimismo, se estudian las propiedades del prenucléolo y del nucléolo mínimos cuadráticos como propuestas de reparto para este tipo de juegos.

4.2 Descripción del modelo: Juego del árbol fijo

Un problema de distribución del coste de una red de conexión con estructura de árbol como el descrito anteriormente, al que denominaremos *problema del árbol fijo de conexión* (*fixed tree connection problem*, en inglés), viene dado por una tripleta $\mathcal{G} := \langle G, c, N \rangle$, donde $G = (V, E)$ es un árbol con un único vértice raíz, i.e., un digrafo conexo sin ciclos, siendo E el conjunto de arcos y V el conjunto de vértices del árbol. G describe la estructura física de la red. El vértice *raíz* del árbol, que se denotará por r, representa en este caso el punto de suministro de la red. La función $c : E \to I\!R$, es la *función de coste* del modelo, que asigna a cada arco $e \in E$ del árbol su coste (de mantenimiento, de reparación, etc...), $c(e)$. $N = \{1, \ldots, n\}$, finito, es el conjunto de usuarios de la red, cada uno de los cuales se encuentra localizado en un cierto vértice del árbol G y cuyo objetivo es ser conectado al punto de suministro, r. Con el fin de no complicar el modelo se supondrá que cada uno de los vértices de la red, a excepción del vértice raíz, está ocupado por un usuario, de manera que, en lo que sigue, vértices y usuarios serán identificados, esto es, $V = N \cup \{r\}$. Los resultados obtenidos en este capítulo pueden ser generalizados al caso en que los vértices del árbol estén ocupados por un conjunto de usuarios, siendo el único problema añadido la complejidad de notación y lo farragoso del modelo (véase el Apéndice D).

Antes de definir el juego de coste generado por un problema del árbol fijo de conexión, problema FTC en adelante, introducimos parte de la notación y de los conceptos que van a ser empleados a lo largo de todo el capítulo. Para cada vértice $i \in N$, el único camino en el árbol G de r a i se denotará por P_i. Si P_i está compuesto por los vértices $j_0 = r, j_1, \ldots, j_{q-1}, j_q = i$, entonces nos referiremos al vértice j_{q-1} como el *predecesor* (o padre) $\pi(i)$ del vértice i. El arco $(\pi(i), i)$ se denotará por e_i. La *relación de precedencia* $(V, \preceq)$ sobre el conjunto de vértices se define como $i \preceq j$ si y sólo si $i \in P_j$. Análogamente, se define la relación de precedencia $(E, \preceq)$ sobre el conjunto de arcos. Un *tronco* del árbol $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices $T \subseteq V$ cerrado bajo la relación de precedencia definida previamente, i.e., si $i \in T$ y $j \preceq i$, entonces $j \in T$. El conjunto de *sucesores* de un vértice i se define como el conjunto $F(i) = \{j \in N \,/\, j \succeq i\}$. Por último, un vértice i se denomina *hoja* si $F(i) = \{i\}$.

Un problema FTC genera un juego de coste de forma natural, sin más que identificar al conjunto de usuarios con el conjunto de jugadores. El coste de una coalición vendrá dado por el mínimo coste necesario para conectar al punto de suministro a todos sus miembros.

Definición 4.1. Para todo problema FTC $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, se define el *juego de coste generado por* $\mathcal{G}$ como el juego $(N, c_{\mathcal{G}})$, cuya función característica viene dada por

$$c_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{i \in T_S} c(e_i), \quad \forall\ \emptyset \neq S \subseteq N, \tag{4.1}$$

donde $T_S = \{\, i \in N \ / \ \exists \ \ j \in S \ \text{ con } \ i \preceq j \,\}$ es el mínimo[1] tronco que contiene a todos los miembros de S, y $c_{\mathcal{G}}(\emptyset) = 0$.

En lo que sigue sólo consideraremos aquellos problemas FTC $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ que verifican las siguientes condiciones:

(i) $c(e) \geq 0$, para todo arco $e \in E$.

(ii) Del vértice raíz parte un único arco.

Obsérvese que en la definición de un problema FTC hemos asumido además,

(iii) No hay ningún usuario localizado en el punto de suministro, esto es, el vértice raíz está libre.

(iv) Exactamente un usuario vive en cada vértice $v \in V \setminus \{r\}$.

Definición 4.2. Se define un problema *estándar* del árbol fijo de conexión, problema SFTC, como un problema FTC verificando las condiciones (i) e (ii).

La definición anterior únicamente difiere del modelo propuesto por Granot *et al.* (1996) (*standard tree enterprise*, en inglés) en la condición (iv). En el modelo considerado por ellos

[1] con respecto al orden dado por la inclusión.

se permite que un vértice esté ocupado por más de un usuario; no obstante, como ya se ha mencionado, el asumir dicha hipótesis no resulta restrictivo, en el sentido de que los resultados obtenidos pueden ser generalizados al modelo más general de Granot *et al.* (véase el Apéndice D).

Observación 4.1. Las condiciones (ii) y (iii) no son restrictivas. En cuanto a la condición (iii), si el vértice raíz está ocupado, entonces se puede añadir un arco con coste cero desde un nuevo vértice raíz libre hasta el vértice raíz del árbol original sin que ello modifique en forma alguna la función de coste del juego (Granot *et al.* (1996)). En lo que respecta a la condición (ii), si varios arcos, $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$, parten del vértice raíz, entonces considérense los p subárboles, $G_{i_1}, \ldots, G_{i_p}$, generados por $F(i_1) \cup \{r\}, \ldots, F(i_p) \cup \{r\}$, respectivamente. Cada subárbol define un problema SFTC, sean $(N_1, c_G^1), \ldots, (N_p, c_G^p)$ los juegos de coste generados por cada uno de ellos. Se verifica que el juego de coste asociado a $\mathcal{G}$, $(N, c_{\mathcal{G}})$, puede ser *descompuesto* (Shapley (1971)) en $p \geq 2$ *componentes*, siendo cada una de ellas un juego de coste asociado a un problema SFTC; es decir, existe una partición $\{N_1, \ldots, N_p\}$ del conjunto de jugadores N en p subconjuntos no vacíos tal que

$$c_{\mathcal{G}}(S) = c_{\mathcal{G}}(S \cap N_1) + \cdots + c_{\mathcal{G}}(S \cap N_p), \quad \forall\ S \subseteq N. \tag{4.2}$$

Las restricciones del juego original a cada elemento de la partición, $(N_1, c_G^1), \ldots, (N_p, c_G^p)$, donde $c_G^k = c_{\mathcal{G}}|\mathcal{P}(N_k)$, $\forall\ k = 1, \ldots, p$, se denominan *componentes* y se corresponden con los juegos de coste asociados a los distintos subárboles $G_{i_1}, \ldots, G_{i_p}$. En estas condiciones, todos los conceptos de solución tratados en este capítulo se pueden obtener como el producto Cartesiano de las correspondientes soluciones en cada una de sus componentes (ver observaciones 4.2 y 4.3).

A continuación, se obtiene la expresión de un juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, asociado a un problema SFTC con respecto a la base del espacio de juegos G^n, compuesta por los *juegos duales de unanimidad* (Kalai y Samet (1988)).

Definición 4.3 (Kalai y Samet). Se define el *juego dual de unanimidad con respecto a la* *coalición no vacía* $S \subseteq N$ (*representation game for the coalition* S, en inglés) como el juego (N, u_S^*) dado por

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \cap T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica que (N, u_S^*) es un juego cóncavo para toda coalición no vacía S. Además el conjunto $\{(N, u_S^*)\}_{S \subseteq N}$, compuesto por los juegos duales de unanimidad, es una base del espacio de juegos G^n.

Proposición 4.1. *Sea* $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ *un problema SFTC. Entonces el juego de coste asociado,* $(N, c_{\mathcal{G}})$*, puede ser representado como*

$$c_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{i \in N} c(e_i) u_{F(i)}^* . \tag{4.3}$$

Demostración: Sea $S \subseteq N$ una coalición no vacía cualquiera. De la expresión (4.1) se deduce trivialmente que S debe hacerse cargo del coste del arco $e_i \in E$ si y sólo si existe un jugador $j \in S$ tal que $j \in F(i)$, i.e., si y sólo si $S \cap F(i) \neq \emptyset$. □

Este resultado nos será de utilidad en secciones posteriores, entre otras aplicaciones la concavidad de todo juego de coste de este tipo (Granot *et al.* (1996)) puede ser obtenida como consecuencia inmediata de la representación anterior.

4.3 El corazón de un juego del árbol fijo

Planteado el modelo como un juego de coste, el objetivo que se persigue consiste en seleccionar conceptos de solución eficientes. De entre todos los conceptos de solución clásicos, nos ocuparemos del *corazón* de un juego de coste. El juego de coste generado por un problema SFTC es cóncavo y, por tanto, la estructura y propiedades de su corazón son bien conocidas. En esta sección obtenemos caracterizaciones alternativas y llevamos a cabo un estudio geométrico del corazón de este tipo de juegos.

En este contexto, dado el juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, cada vez que nos refiramos a un *vector de reparto de costes*, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, nos estaremos refiriendo a una preimputación del juego. x_i representa el coste que el usuario i, $i = 1, \ldots, n$, debe asumir de acuerdo con $\mathbf{x}$. Entonces el corazón del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, que denotaremos por core$(c_{\mathcal{G}})$, viene dado por

$$\text{core}(c_{\mathcal{G}}) = \Big\{ \mathbf{x} \in I\!R^n \;/\; \sum_{i \in S} x_i \leq c_{\mathcal{G}}(S)\,, \;\; \forall \;\; S \subseteq N \;\; \text{y} \;\; \sum_{i \in N} x_i = c_{\mathcal{G}}(N) \Big\}.$$

Observación 4.2. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema FTC verificando todas aquellas propiedades que caracterizan a un problema FTC estándar, a excepción de la propiedad (ii). Se verifica (ver Shapley (1971) y Granot y Huberman (1981)) que el corazón del juego original $(N, c_{\mathcal{G}})$ se obtiene como el producto Cartesiano del corazón de cada una de sus componentes.

4.3.1 Expresiones alternativas del corazón

A continuación se deducen caracterizaciones alternativas del corazón de un juego de coste asociado a un problema SFTC. Dichas caracterizaciones serán empleadas reiteradamente en los razonamientos seguidos en las demostraciones de los principales resultados que se presentan en este capítulo.

Lema 4.1. *Para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, se verifica*

$$\text{core}(c_{\mathcal{G}}) = \Big\{ \mathbf{x} \in PI(c_{\mathcal{G}}) \;/\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \;\; \text{y} \;\; x(T) \leq c(T)\,, \;\; \forall \;\; T \;\; \text{tronco de} \;\; G \Big\},$$

donde $x(T) := \sum_{i \in T \setminus \{r\}} x_i$, *y* $c(T) := \sum_{i \in T \setminus \{r\}} c(e_i)$, *es el coste asociado al tronco* T *de* G.

Demostración: Trivialmente, si $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces

$$x_i \geq c_{\mathcal{G}}(N) - c_{\mathcal{G}}(N \setminus \{i\}) \geq 0\,, \qquad \forall\ i \in N\,,$$

y $x(T) \leq c(T)$, para todo tronco T de G.

Veamos que si $\mathbf{x}$ es un vector de reparto de costes no negativo verificando la desigualdad $x(T) \leq c(T)$, para todo tronco T, entonces $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$. En efecto, sea $S \subseteqq N$ una coalición cualquiera no vacía, entonces $S \subseteqq T_S$ y, por consiguiente, se verifica

$$c_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{i \in T_S} c(e_i) \geq \sum_{i \in T_S} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i\,.$$

□

Notación. Dado un arco $e = (i,j) \in E$ del árbol G, denotaremos por $B_e = (V_e, E_e)$ al subárbol de G generado por el conjunto de vértices $F(j) \cup \{i\}$. Nos referiremos a B_e como la *rama de* G *enraizada en* e[2].

De acuerdo con la notación introducida, el lema anterior se puede establecer en términos de ramas como sigue.

Lema 4.2. *Sea* $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ *un problema SFTC. Entonces un vector de reparto de costes* $\mathbf{x}$ *pertenece al corazón del juego* $(N, c_{\mathcal{G}})$ *si y sólo si* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ *y se verifica*

$$\sum_{j \in V_e} x_j - x_i \geq \sum_{e' \in E_e} c(e')\,, \quad \forall\ e = (i,j) \in E\,, \tag{4.4}$$

[2]Obsérvese que, siguiendo la notación introducida en Granot *et al.*, si $e = (i,j)$ entonces B_e se corresponde con la *rama en* i *en la dirección de* j.

donde $B_e = (V_e, E_e)$ es la rama de G enraizada en e.

Demostración: Teniendo en cuenta el resultado establecido en el lema 4.1, es suficiente demostrar que la condición (4.4) es equivalente a la condición $x(T) \leq c(T), \quad \forall\ T$, tronco de G.

Obviamente, para todo vector de reparto de costes $\mathbf{x}$ y para todo tronco T, se verifica:

$$x(T) \leq c(T) \iff x(T^c) \geq \sum_{i \in T^c} c(e_i)\,,$$

donde $T^c = V \setminus T$.

Así, la equivalencia entre ambas condiciones se deduce de las siguientes relaciones de complementariedad:

1. El complementario del tronco T viene dado por la unión finita

$$T^c = \bigcup_{e \in \ell(T)} V_e \setminus \{i\}\,,$$

   donde $\ell(T) \subseteq E$ es el conjunto (finito) de arcos que parten de T[3] y $B_e = (V_e, E_e)$ es la rama de G enraizada en $e = (i, j)$, para todo arco $e \in \ell(T)$.

2. Para todo arco $e = (i, j) \in E$, B_e^c es un tronco de G. □

Nota 4.1. El que la no negatividad junto con la condición (4.4) son condiciones suficientes de pertenencia de una preimputación al corazón del juego ya aparece en el trabajo de Granot *et al.* (1996).

El lema siguiente muestra como todo elemento del corazón del juego se obtiene repartiendo

[3] $e = (i, j) \in E$ tal que $i \in T$ y $j \notin T$.

de forma arbitraria, obviamente sin violar la condición de no negatividad, el coste de cada arco entre sus usuarios.

Lema 4.3. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema SFTC. Entonces el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pertenece al corazón del juego de coste asociado $(N, c_{\mathcal{G}})$ si y sólo si existen $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^n$, elementos del simplex unidad*[4] *en $\mathbb{R}^{F(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, respectivamente, tales que*

$$x_i = \sum_{j \in P_i} y_i^j c(e_j), \quad \forall\ i \in N, \tag{4.5}$$

donde P_i es el camino que une el vértice raíz con el vértice i.

Demostración: El corazón es aditivo sobre el cono de juegos cóncavos (ver Dragan, Potters y Tijs (1989)). Luego, teniendo en cuenta que todos los elementos de la base $\{(N, u_S^*)\}_{S \subseteq N}$ son juegos cóncavos, entonces de la expresión (4.3) se deduce

$$\text{core}(c_{\mathcal{G}}) = \sum_{j \in N} c(e_j)\text{core}(u^*_{F(j)}), \tag{4.6}$$

donde $\text{core}(u^*_{F(j)})$ es el simplex unidad en $\mathbb{R}^{F(j)}$, $j \in N$. □

Los resultados obtenidos a continuación están encaminados a probar que todo elemento del corazón de un juego de coste asociado a un problema SFTC se puede obtener *descomponiendo* el problema original de conexión a un punto de suministro en varios subproblemas de conexión a diversos *puntos de suministro intermedios*, cada uno de los cuales es en si mismo un problema SFTC; resultado crucial a la hora de establecer las propiedades esenciales de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas que será estudiada en la sección 4.4. Formalmente, considérese la siguiente definición.

Definición 4.4. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema SFTC y sea $\mathcal{S}_G = \{G^1, \ldots, G^p\}$ una colec-

[4]Para todo $j \in N$, $\mathbb{R}^{F(j)}$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre $F(j)$ y el simplex unidad en $\mathbb{R}^{F(j)}$ es el conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{F(j)} \,/\, \mathbf{x} \geq 0\,,\ \sum_{i \in F(j)} x_i = 1\}$.

ción de subgrafos de G. Entonces, diremos que $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ es una *partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas* si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

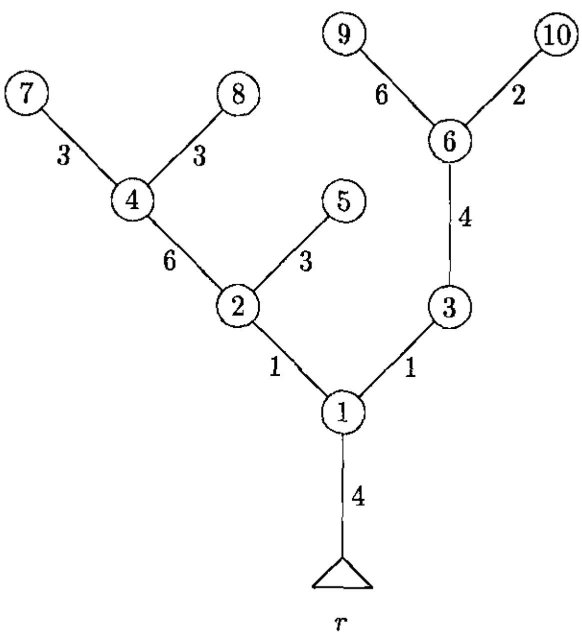
(i) Para todo $k = 1, \ldots, p$, existe un vértice $r_k \in V$ tal que $G^k = (S_k \cup \{r_k\}, E_k)$ es el subárbol[5] de G con raíz en r_k generado por $(S_k \cup \{r_k\}) \subseteq V$.

(ii) $\{S_1, \ldots, S_p\}$ es una partición ordenada (el orden es relevante) del subconjunto de vértices $V \setminus \{r\}$.

(iii) $r_1 = r$ y para todo $k = 2, \ldots, p$, existe $\ell < k$ tal que $r_k \in S_\ell$.

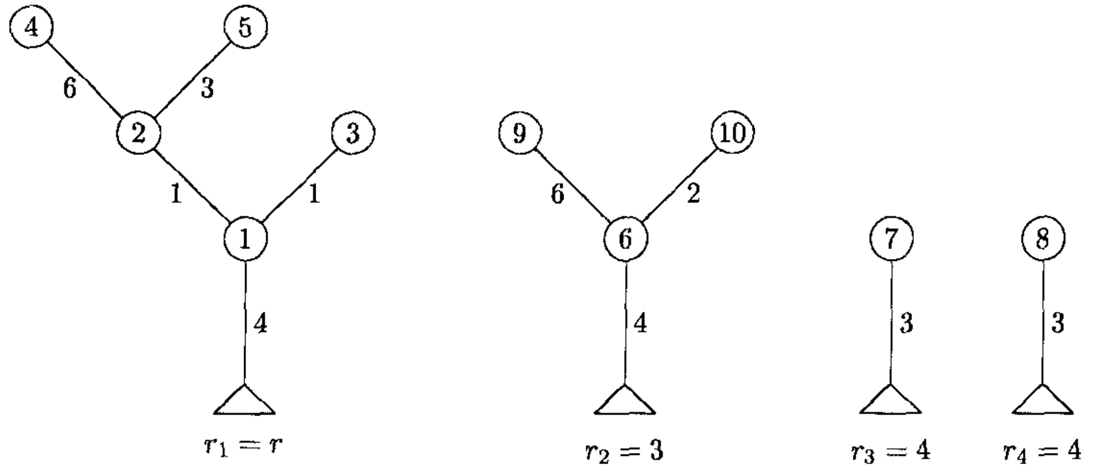
(iv) Para todo $k = 1, \ldots, p$, $\mathcal{G}^k = \langle G^k, c^k, S_k \rangle$, donde c^k es la restricción de c a E_k, es un problema SFTC.

Ejemplo 4.1. Considérese el problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, representado en la siguiente figura. Los jugadores (vértices) están representados por círculos, el vértice raíz por un triángulo y el coste de cada arco viene dado por el número que aparece a su lado.



[5]Por subárbol, entenderemos cualquier subgrafo dirigido de G conexo y sin ciclos.

La colección $\mathcal{S}_G = \{G^1, G^2, G^3, G^4\}$, representada a continuación, es una partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas.



Proposición 4.2. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema SFTC y sea $\mathcal{S}_G = \{G^1, \dots, G^p\}$ una partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas cualquiera, entonces*

$$\prod_{k=1}^{p} \text{core}(c_{\mathcal{G}^k}) \subseteq \text{core}(c_{\mathcal{G}}), \tag{4.7}$$

donde $(c_{\mathcal{G}^k}, S_k)$ es el juego de coste asociado al problema SFTC restringido $\mathcal{G}^k = \langle G^k, c^k, S_k\rangle$, $k = 1, \dots, p$.

Demostración: Sea $\mathbf{x} = \prod_{k=1}^{p} \mathbf{y}^k \in \prod_{k=1}^{p} \text{core}(c_{\mathcal{G}^k})$. Entonces $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y es un vector eficiente, ya que

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in S_k} y_i^k = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in S_k} c^k(e_i) = \sum_{i \in N} c(e_i)\,.$$

Sea T un tronco de G cualquiera, considérense los subconjuntos $T^k = T \cap S_k$, $k = 1, \dots, p$, entonces $T^k \cup \{r_k\}$ es un tronco de $G^k = (S_k \cup \{r_k\}, E_k)$ para todo $k \in \{1, \dots, p\}$ tal que

$T^k \neq \emptyset$. Entonces,

$$x(T) = \sum_{\substack{1 \le k \le p \\ T^k \neq \emptyset}} \sum_{i \in T^k} y_i^k \le \sum_{\substack{1 \le k \le p \\ T^k \neq \emptyset}} \sum_{i \in T^k} c^k(e_i) = \sum_{i \in T} c(e_i).$$

Luego, $x(T) \le c(T)$ para todo tronco T de G. Entonces, de acuerdo con el lema 4.1, se tiene el resultado. □

Recíprocamente, asociado a todo elemento $\mathbf{x}$ del corazón del juego existe una única partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas más fina, que denotaremos por $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$, verificando que la restricción de $\mathbf{x}$ a cada uno de los subproblemas SFTC definidos por $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$ pertenece al corazón del correspondiente subjuego de coste.

Definición 4.5. Dado un problema SFTC $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, sea T un tronco de G, y sea $\mathbf{x}$ un vector de reparto de costes, diremos que T es un *tronco autónomo en* $\mathbf{x}$ si y sólo si $x(T) = c(T)$.

Lema 4.4. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{core}(c_\mathcal{G})$, entonces existe un único tronco autónomo en $\mathbf{x}$ minimal (con respecto al orden dado por la inclusión).*

Demostración: Sea $\mathbf{x} \in \mathrm{core}(c_\mathcal{G})$. Como V es un tronco autónomo en $\mathbf{x}$, entonces es suficiente probar que la intersección de dos troncos autónomos en $\mathbf{x}$ sigue siendo un tronco autónomo en $\mathbf{x}$. Así, el (único) mínimo tronco autónomo en $\mathbf{x}$ vendrá dado por la intersección de todos aquellos troncos de G que son autónomos en $\mathbf{x}$.

Sean T_1, T_2 dos troncos autónomos en $\mathbf{x}$ cualesquiera, entonces $T_1 \cap T_2$ es obviamente un tronco. Además,

$$\begin{aligned} x(T_1 \cap T_2) &\le c(T_1 \cap T_2) = c_\mathcal{G}(T_1 \cap T_2) \le c_\mathcal{G}(T_1) + c_\mathcal{G}(T_2) - c_\mathcal{G}(T_1 \cup T_2) = \\ &= x(T_1) + x(T_2) - c_\mathcal{G}(T_1 \cup T_2) \le x(T_1) + x(T_2) - x(T_1 \cup T_2) = \\ &= x(T_1 \cap T_2), \end{aligned}$$

donde todas las desigualdades, a excepción de la segunda de ellas, que se deduce de la concavidad del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$, son desigualdades correspondientes al corazón del juego. En particular, de la cadena de desigualdades se deduce que $c(T_1 \cap T_2) = x(T_1 \cap T_2)$, i.e., $T_1 \cap T_2$ es un tronco autónomo en $\mathbf{x}$. □

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC. Para todo $\mathbf{x} \in \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$ existe una única partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas más fina tal que $\mathbf{x} \in \prod_{k=1}^{p} \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}^k})$.*

Demostración: Sea $\mathbf{x} \in \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$ cualquiera y sea T_1 el mínimo tronco autónomo en $\mathbf{x}$, que existe y es único como se ha comprobado en el lema 4.4. Considérese el subárbol $G^1 = (S_1 \cup \{r_1\}, E_1)$ generado por T_1 ($S_1 = T_1 \setminus \{r\}$ y $r_1 = r$). Obviamente, $\mathbf{x}^1 = (x_i)_{i \in S_1}$ pertenece al corazón del juego $(S_1, c_{\mathcal{G}^1})$.

Sea $\ell(T_1) \subseteq E$ el conjunto de arcos que parten de T_1. Selecciónese un arco $e_0 = (i_0, j_0)$ en $\ell(T_1)$ cualquiera. Considérese la rama $B_{e_0} = (V_{e_0}, E_{e_0})$ de G enraizada en e_0. Se probará, a continuación, que $\mathbf{x}^{e_0} = (x_j)_{j \in V_{e_0} \setminus \{i_0\}}$ pertenece al corazón del subproblema SFTC definido por B_{e_0}.

En efecto, $\mathbf{x}^{e_0} \geq \mathbf{0}$. Veamos que además es eficiente: del lema 4.2 se deduce

$$\sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i'\}} x_j \geq \sum_{e \in E_{e'}} c(e) , \quad \forall \ e' = (i', j') \in \ell(T_1) . \tag{4.8}$$

Por otro lado, por ser T_1 autónomo en $\mathbf{x} \in PI(c_{\mathcal{G}})$, se tiene que

$$\sum_{e' \in \ell(T_1)} \sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i'\}} x_j = x(N) - x(T_1) = c(N) - c(T_1) = \sum_{e' \in \ell(T_1)} \sum_{e \in E_{e'}} c(e) . \tag{4.9}$$

De la combinación de (4.8) y (4.9) se deduce

$$\sum_{j \in V_{e'} \setminus \{i\}} x^{e'} = \sum_{e \in E_{e'}} c(e), \quad \forall\ e' = (i', j') \in \ell(T_1).$$

En particular, $\mathbf{x}^{e_0}$ es un vector de reparto de costes para el subproblema SFTC definido por B_{e_0}.

Por otro lado, para todo tronco T^0 de B_{e_0}, $T^0 \cup T_1$ es un tronco de G, entonces

$$x(T_1) + \sum_{j \in T^0 \setminus \{i_0\}} x_j = x(T^0 \cup T_1) \leq$$

$$\leq c(T^0 \cup T_1) = c(T_1) + \sum_{j \in T^0 \setminus \{i_0\}} c(e_j) = x(T_1) + \sum_{j \in T^0 \setminus \{i_0\}} c(e_j).$$

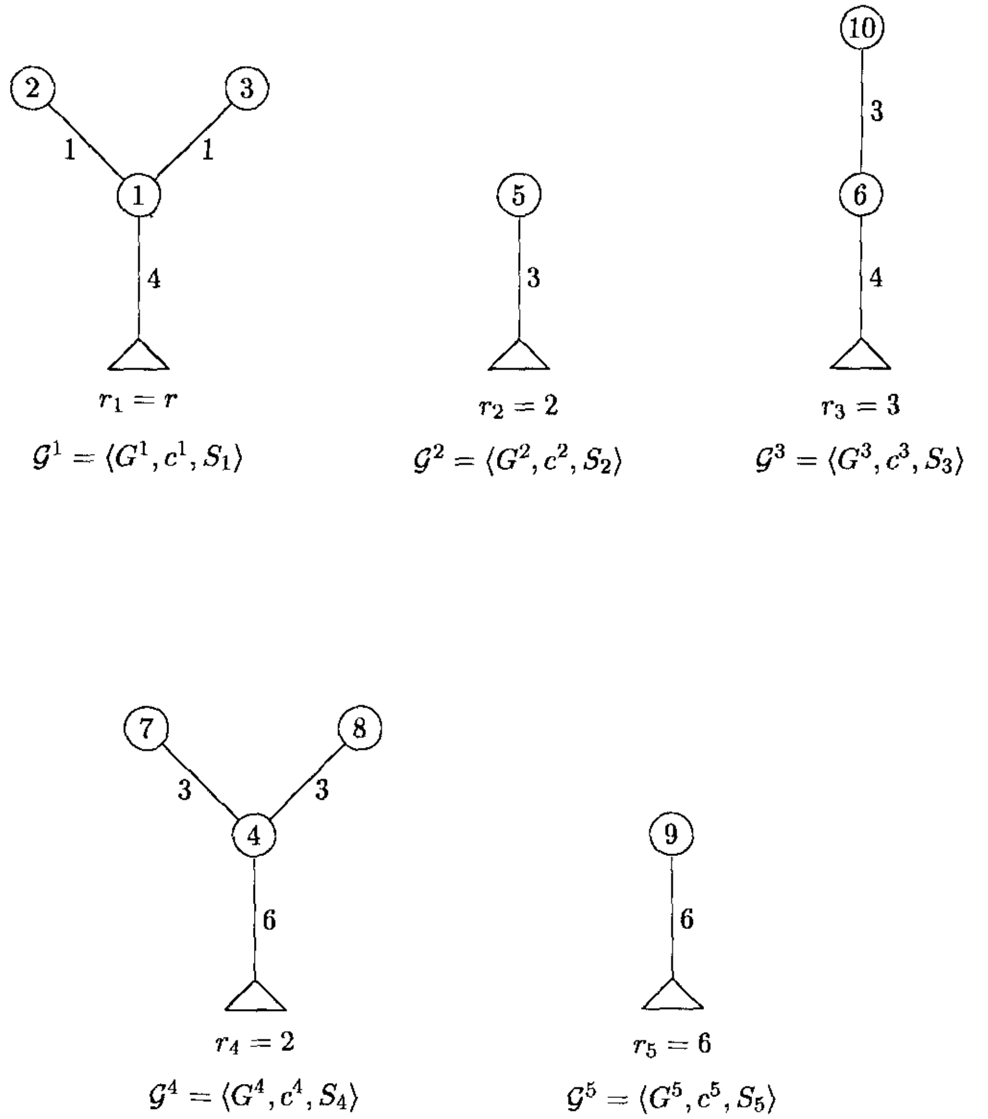
Luego, efectivamente, aplicando el lema 4.1, se tiene que $\mathbf{x}^{e_0}$ pertenece al corazón del juego restringido, $(N, c_{\mathcal{G}^{e_0}})$.

Sea T_2 el mínimo tronco de B_{e_0} autónomo en $\mathbf{x}^{e_0}$, defínase $G^2 = (S_2 \cup \{r_2\}, E_2)$ como el subárbol generado por T_2 ($S_2 = T_2 \setminus \{i_0\}$ y $r_2 = i_0$). Una vez definido G^2, selecciónese un arco e_1 en $\ell(T_2) \subsetneq E_{e_0}$ cualquiera y aplíquese el razonamiento anterior a $\mathbf{x}^{e_1}$ con respecto a la rama de G^2 enraizada en e_1.

Sígase aplicando el razonamiento hasta que el tronco autónomo correspondiente T^*, sea tal que $\ell(T^*) = \emptyset$. En este punto ir deshaciendo el camino seleccionando aquellos arcos que no han sido seleccionados previamente. De esta forma, cuando ya no quedan arcos por seleccionar, la colección de subproblemas de $\mathcal{G}$, $S_G = \{G^1, \ldots, G^p\}$, así construida verifica las condiciones establecidas en la proposición. $\square$

Dado $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$ nos referiremos a la partición verificando las condiciones establecidas en la proposición 4.3 como la *partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por* $\mathbf{x}$, partición que denotaremos por $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$.

Ejemplo 4.2. Considérese el problema SFTC definido en el ejemplo 4.1. La siguiente figura representa la partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por el elemento del corazón del juego $\mathbf{x} = (2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3)$.



4.3.2 Estudio poliédrico

Finalizamos esta sección con un estudio poliédrico del corazón de un juego del árbol fijo de tipo estándar. Dicho estudio está basado en las propiedades geométricas del corazón de un juego convexo (cóncavo) (Shapley (1971), Ichiishi (1983), Monderer, Samet y Shapley (1992)). Se comprueba que el corazón de un juego de coste asociado a un problema SFTC tiene dimensión completa y se describen sus facetas. La primera de las afirmaciones se deduce de la concavidad y la no descomponibilidad del juego (ver Shapley (1971)). En cuanto a la descripción facial del poliedro, la siguiente proposición establece que se distinguen dos tipos de facetas: las que denominaremos facetas de *tipo* (I) se encuentran asociadas a particiones en subproblemas no triviales; mientras que el resto de facetas, que denominaremos de *tipo* (II), se encuentran asociadas a grupos de usuarios (jugadores) que hacen uso del sistema sin cargo alguno (no pagan nada). Para demostrar este último resultado se debe tener en cuenta que si (N, v) es un juego cóncavo, entonces para toda partición ordenada de N, $\sigma = \{S_1, \ldots, S_p\}$, el conjunto

$$F_\sigma = \Big\{ \mathbf{x} \in C(v) \;/\; x\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} S_\ell\Big) = v\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} S_\ell\Big), \;\; \forall\; 1 \leq k \leq p \Big\},$$

es una faceta no vacía del poliedro $C(v)$ de dimensión, a lo sumo, $n-k$ (ver Monderer *et al.* (1992)).

Nota 4.2. En lo que sigue diremos que $i \in N$ es un vértice hoja si realmente lo es, i.e., $F(i) = \{i\}$, o si $c(e_i) > 0$ y $c(e_j) = 0, \;\; \forall\; j \in F(i) \setminus \{i\}$.

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC. Si $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces $\mathbf{x}$ pertenece a una faceta del poliedro $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$ si y sólo si $\mathbf{x}$ verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(I) *Existe un tronco de G no trivial, $T \subsetneq V$, autónomo en $\mathbf{x}$.*

(II) *$x(T) < c(T)$, para todo tronco T de G no trivial y existe una coalición no vacía $S \subseteq N \setminus \{\, i \in N \;/\; i$ vértice hoja $\}$ tal que $x(S) = 0$*

Demostración: $\Rightarrow$) Veamos que si $\mathbf{x}$ verifica (I) o (II), entonces $\mathbf{x}$ pertenece a una faceta del poliedro core$(c_{\mathcal{G}})$: Sea $\mathcal{S}_G(\mathbf{x}) = \{G^1, \dots, G^p\}$, donde $G^\ell = (S_\ell \cup \{r_\ell\}, E_\ell)$, para todo $\ell = 1, \dots, p$, la partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por $\mathbf{x}$.

(I) Si $\mathbf{x}$ satisface la condición (I), entonces $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$ es una partición no trivial y $\mathbf{x}$ pertenece a la faceta no vacía del corazón del juego definida por

$$F_\sigma = \Big\{ \mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}}) \;/\; x\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} S_\ell\Big) = c_{\mathcal{G}}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} S_\ell\Big), \;\; \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq p \Big\},$$

donde $\sigma = \{S_1, \dots, S_p\}$ es la partición ordenada del conjunto de jugadores N definida por $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$.

(II) Si $\mathbf{x}$ satisface la condición (II), entonces $x(N \setminus S) = x(N) = c_{\mathcal{G}}(N) = c_{\mathcal{G}}(N \setminus S)$. Luego, $\mathbf{x}$ pertenece a la faceta no vacía de core$(c_{\mathcal{G}})$ definida por

$$F_\sigma = \Big\{ \mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}}) \;/\; x\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} T_\ell\Big) = c_{\mathcal{G}}\Big(\bigcup_{\ell=1}^{k} T_\ell\Big), \;\; \text{para todo} \;\; 1 \leq k \leq 2 \Big\},$$

donde $\sigma = \{T_1, T_2\}$ es la partición ordenada del conjunto de jugadores N definida por $T_1 = N \setminus S$ y $T_2 = S$.

$\Leftarrow$) Veamos que si $\mathbf{x}$ pertenece a una faceta del poliedro core$(c_{\mathcal{G}})$, entonces $\mathbf{x}$ debe satisfacer alguna de las condiciones (I) o (II). Para ello se demostrará que si no verifica ninguna de ellas, entonces $\mathbf{x}$ pertenece al interior relativo de core$(c_{\mathcal{G}})$.

Sea $L \subsetneq N$ una coalición no vacía, a continuación se comprobará que $x(L) < c(L)$. Considérese el tronco de G, $T_L \cup \{r\}$, siendo $T_L = \big\{ i \in N \;/\; \exists\, j \in L \text{ tal que } i \preceq j \big\}$. Se distinguen dos casos:

1. Si $T_L \subsetneq N$, entonces

$$x(L) \leq x(T_L) < c(T_L) = c_{\mathcal{G}}(L) .$$

La primera desigualdad se deduce de la no negatividad de $\mathbf{x}$ (ver lema 4.1); mientras que la segunda de ellas se deduce de la negación de la condición (I).

2. Si $T_L = N$, entonces L contiene a todos los vértices hoja del árbol G y, por consiguiente, el subconjunto de vértices $N \setminus L \neq \emptyset$ está contenido en $N \setminus \{ i \in N \ / \ i$ vértice hoja $\}$.

   $\mathbf{x}$ no verifica la condición (II), entonces como $\mathbf{x}$ no satisface la condición (I), i.e., $x(T) < c(T)$, $\forall$ T, tronco no trivial, debe verificarse $x(S) > 0$ para toda coalición no vacía $S \subseteq N \setminus \{ i \in N \ / \ i$ vértice hoja $\}$. En particular, $x(T_L \setminus L) > 0$, entonces $x(L) < x(T_L) = c_{\mathcal{G}}(L)$.

Así, $x(L) < c_{\mathcal{G}}(L)$ para toda coalición no vacía $L \subsetneq N$, esto es, $\mathbf{x}$ pertenece al interior relativo del poliedro core$(c_{\mathcal{G}})$. □

Ejemplo 4.3. Sea $\mathcal{G}^1$ el subárbol definido en el ejemplo 4.2. Entonces el corazón del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}^1})$ tiene las siguientes facetas:

$$F_1 = \{ (\alpha, 5-\alpha, 1) \ / \ \alpha \in [0,4] \} \quad \text{y} \quad F_2 = \{ (\alpha, 1, 5-\alpha) \ / \ \alpha \in [0,4] \} ,$$

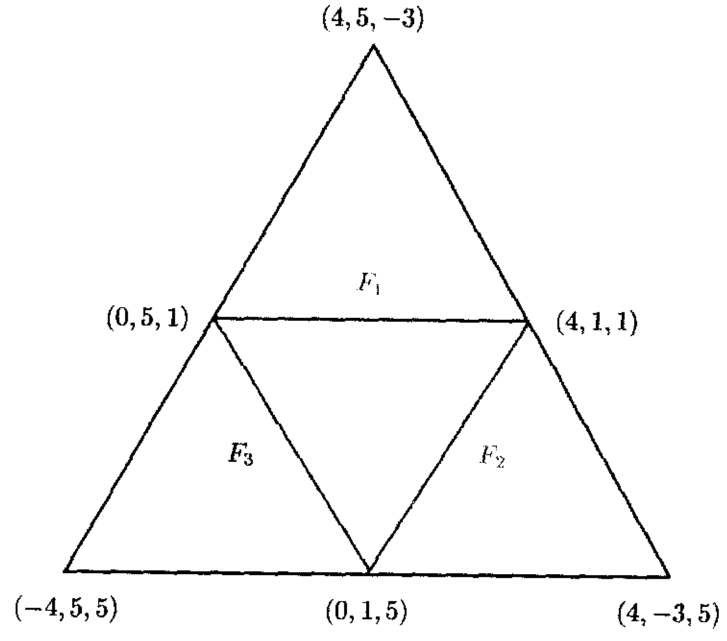
que son facetas de tipo (I) asociadas a las particiones en subárboles no triviales $\mathcal{S}_1 = \{G_1^1, G_1^2\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{G_2^1, G_2^2\}$, respectivamente, donde

$$G_1^1 = (\{1,2\} \cup \{r\}, \{e_1, e_2\}) , \qquad G_2^1 = (\{1,3\} \cup \{r\}, \{e_1, e_3\}) ,$$

$$G_1^2 = (\{3\} \cup \{r_2\}, \{e_3\}) , \ \text{con} \ r_2 = 1 , \qquad G_2^2 = (\{2\} \cup \{r_2\}, \{e_2\}) , \ \text{con} \ r_2 = 1 ,$$

y $F_3 = \{ (0, 1+\alpha, 5-\alpha) \ / \ \alpha \in [0,4] \}$ es una faceta de tipo (II).

En la siguiente figura se representa core($c_{\mathcal{G}}$), en rojo, contenido en el conjunto de imputaciones del juego:



4.4 Soluciones igualitarias restringidas ponderadas

La *solución igualitaria restringida* (*constrained egalitarian solution*, en inglés), propuesta por Dutta y Ray (1989), es un concepto de solución unipuntual para juegos *TU* que concilia de forma consistente dos posturas contrapuestas: el compromiso para con la igualdad y la promoción de intereses individuales. Este concepto de solución surge en un marco en el que, por un lado, los individuos creen en la *igualdad* como un *valor social*; mientras que contrariamente, por otro lado, las preferencias personales de cada individuo le dictan una *conducta egoísta*. En este contexto se supone que todos los individuos son esencialmente iguales, en el sentido de que todas las posibles diferencias entre ellos vienen dadas únicamente por los parámetros del modelo, i.e., quedan reflejadas en la función característica del juego; sin embargo, en numerosas ocasiones esta hipótesis no es realista (para una discusión más detallada, con ejemplos, véase Shapley (1981) y Kalai y Samet (1988)).

En esta sección estudiamos el comportamiento de la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray y proponemos una generalización *ad hoc* capaz de recoger la posible asimetría entre los jugadores. Para ello, supondremos que todas aquellas consideraciones que *no* han sido reflejadas en el modelo pueden ser descritas a partir de un cierto vector de pesos dado *exógenamente.* Cada vector de pesos define una solución igualitaria restringida ponderada sin mas que asignar un peso a cada jugador. Los pesos asignados a los jugadores se pueden interpretar como *medidas a priori del impacto de cada usuario en el sistema.* En tal caso, la solución de Dutta y Ray se corresponde con el vector de pesos $(1,\ldots,1)$.

Una vez definida la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas en el contexto que nos ocupa, clase de juegos asociados a problemas SFTC (sección 4.4.1), en la sección 4.4.2 se adopta un enfoque dinámico que nos proporciona un algoritmo polinomial para calcular cada uno de los elementos de la familia previamente definida. Este algoritmo es constructivo, en el sentido de que *describe* el proceso por el cual cada uno de estos elementos es seleccionado como propuesta final de reparto de costes. En la sección 4.4.3, gracias a la reinterpretación de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas desde un punto de vista dinámico, se obtiene la propiedad esencial de la familia de soluciones considerada: para todo juego del árbol fijo de tipo estándar dicha familia coincide con el corazón del juego. Por último, en la sección 4.4.4 se obtiene una caracterización axiomática del conjunto de soluciones igualitarias restringidas ponderadas como procedimientos de asignación de costes.

4.4.1 Familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas: Definición

Dutta y Ray (1989) prueban la existencia y unicidad de la solución igualitaria restringida sobre la clase de juegos convexos (cóncavos) y proponen un algoritmo para su obtención. Dicho algoritmo se basa en la búsqueda de la máxima, con respecto al orden dado por la inclusión, coalición con mayor (menor) *valor (coste) medio* de un cierto juego en cada una de sus etapas. La generalización que proponemos parte, precisamente, del citado algoritmo. Haciendo uso del hecho de que todo juego de coste asociado a un problema SFTC es cóncavo (ver Granot *et.al.* (1996)), lo que proponemos es modificar el algoritmo de Dutta y Ray considerando la asimetría entre los jugadores. Dicha modificación consiste en trabajar con *costes medios por unidad de medida.*

Intuitivamente, supóngase que cada individuo de la sociedad N cree que las proporciones, de acuerdo con las que el coste total debe ser compartido, vienen dadas por el vector de pesos $\boldsymbol{\omega} \in I\!R^n_+$. Entonces, la solución $\boldsymbol{\omega}$–igualitaria restringida trata de reconciliar dicha creencia con el hecho de que la sociedad no está dispuesta a aceptar ningún reparto del coste total que pueda ser bloqueado. Así, si la propuesta de reparto $(\frac{\omega_i}{\omega_N}c(N))_{i\in N}$ no puede ser bloqueada (pertenece al corazón del juego), entonces coincide con la solución $\boldsymbol{\omega}$–igualitaria restringida. En otro caso, la sociedad es disgregada en *subsociedades* de tal manera que el coste marginal de cada una de las subsociedades es compartido entre sus miembros de acuerdo con las proporciones dictadas por el vector de pesos $\boldsymbol{\omega}$ y la propuesta de reparto resultante no puede ser bloqueada. Concretamente, la solución $\boldsymbol{\omega}$–igualitaria restringida busca la partición de la sociedad en subsociedades más grosera posible, de manera que, el vector de repartos así definido pertenezca al corazón del juego.

Nota 4.3. Aadland and Kolpin (1998) introducen un concepto de solución unipuntual para juegos de coste del árbol fijo en el caso particular en que el árbol que define el juego es una cadena, la *regla media restringida de reparto de costes* (*restricted average cost share rule*, en inglés) que resulta ser la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray (1989) sobre la clase de juegos del aeropuerto.

Antes de definir la familia de soluciones igualitarias restringidas son necesarias algunas definiciones.

Definición 4.6. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema FTC y sea $\boldsymbol{\omega} \in I\!R^n$, diremos que $\boldsymbol{\omega}$ es un vector de pesos *admisible* para $\mathcal{G}$ si y sólo si $\boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}$ y para todo $i \in N$ tal que $c(e_i) > 0$, existe un sucesor $j \in F(i)$ del jugador i tal que $\omega_j > 0$. El conjunto de todos los vectores de pesos admisibles para $\mathcal{G}$ se denotará por $\mathcal{W}(\mathcal{G})$.

El concepto de admisibilidad formaliza la idea de que para todo arco del árbol debe existir, al menos, un usuario de dicho arco que se responsabilice de su coste.

Definición 4.7. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema FTC. Dado un vector de pesos admisible para $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, se define el *coste medio ponderado (con respecto a $\boldsymbol{\omega}$) bajo $\mathcal{G}$* de una coalición $S \subseteq N$ no vacía como

$$\alpha_\omega(S) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{i\in S} c(e_i)}{\omega_S}, & \text{si } \omega_S := \displaystyle\sum_{i\in S} \omega_i > 0\,, \\ \infty\,, & \text{si } \omega_S = 0\,. \end{cases}$$

Definición 4.8. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema FTC y sea $T \subseteq V$ un tronco de $G = (V, E)$. Entonces, se define la *contracción de $\mathcal{G}$ por T* como el problema FTC $\mathcal{G}_T = \langle G_T, c_T, N_T\rangle$, donde el árbol contraído $G_T = (V_T, E_T)$ viene dado por

$$V_T = (V \setminus T) \cup \{r_T\}\,,$$

$$E_T = (E \setminus E(T)) \cup E_r(T)\,,$$

donde $E(T) = \{e_i \,/\, i \in T\} \cup \ell(T)$ y $E_r(T) = \{\, e_j^T = (r_T, j) \,/\, j \in N \setminus T \text{ y } \pi(j) \in T\}$. La función de coste c_T asociada al árbol G_T viene dada por

$$c_T(e) = c(e)\,, \qquad \forall\; e \in E \setminus E(T)\,,$$

$$c_T(e_j^T) = c(e_j)\,, \qquad \forall\; e_j^T \in E_r(T)$$

y el conjunto de usuarios es $N_T = N \setminus T$.

La operación de contracción de un árbol consiste en eliminar un tronco del árbol y en conectar todas las componentes conexas que han quedado a un nuevo vértice raíz, manteniendo siempre el coste original de los arcos del árbol no eliminados.

Obsérvese que si $\mathcal{G}$ es un problema SFTC, entonces el problema contraído $\mathcal{G}_T$ verifica todas las condiciones que definen un problema FTC de tipo estándar salvo, posiblemente, la condición (ii)[6]. Queremos hacer notar que, no obstante, el juego de coste asociado a $\mathcal{G}_T$ sigue siendo cóncavo, propiedad necesaria para que el algoritmo que proponemos esté bien definido.

Definición 4.9. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema FTC verificando todas las condiciones que caracterizan a un problema de tipo estándar con la posible excepción de la condición (ii). Dado un vector de pesos admisible con respecto a $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, se define la *solución $\boldsymbol{\omega}$-igualitaria restringida del problema $\mathcal{G}$*, que se denotará por $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, como el vector de reparto de costes obtenido a través del siguiente algoritmo:

Algoritmo 1

PASO 0. Inicialización.

$k := 1$ y $\mathcal{G}^1 := \mathcal{G}$.

PASO 1.

Sea $\mu_k = \min \left\{ \alpha_{\boldsymbol{\omega}}(T \setminus \{r_k\}) \; / \; T \text{ es un tronco de } G^k \right\}$ el mínimo coste medio ponderado (con respecto a $\boldsymbol{\omega}$) bajo $\mathcal{G}^k$.

Sea $T_k(\boldsymbol{\omega}) \subseteq N^k \cup \{r_k\}$ el único máximo (con respecto al orden dado por la inclusión) tronco[7] de G^k de coste medio ponderado mínimo, μ_k.

Defínase $\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) := \omega_i \mu_k \,, \ \forall \ i \in T_k(\boldsymbol{\omega}) \setminus \{r_k\}$.

PASO 2. Criterio de parada.

Si $\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{k} T_\ell(\boldsymbol{\omega}) = N \cup \{r\}$, entonces parar. $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) := (\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}))_{i \in N}$ es la solución $\boldsymbol{\omega}$-igualitaria restringida ponderada del problema $\mathcal{G}$.

En otro caso, defínase $\mathcal{G}^{k+1} := \langle G^{k+1}, c^{k+1}, N^{k+1} \rangle$ como la contracción de $\mathcal{G}^k$ por $T_k(\boldsymbol{\omega})$, tómese $k := k + 1$ y repítase el paso anterior.

[6]Del vértice raíz parte un único arco.

[7]La existencia de $T_k(\boldsymbol{\omega})$ se deduce de la concavidad del juego de coste $(N^k, c_{\mathcal{G}^k})$.

Obviamente, el algoritmo termina, a lo sumo, en $n = |N|$ iteraciones. Teniendo en cuenta las características del problema que estamos tratando, se verifica que la solución así obtenida coincide con la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray, cuando se toma $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}$. Además, si $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{T_1^{\omega}, \ldots, T_p^{\omega}\}$ es la partición del conjunto de jugadores N inducida por el algoritmo, i.e., $T_\ell^{\omega} = T_\ell(\boldsymbol{\omega}) \setminus \{r_\ell\}$, $\forall\ \ell = 1, \ldots, p$, entonces el reparto de costes obtenido verifica las siguientes condiciones:

$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_i \alpha_\omega(T_\ell^{\omega}), \qquad \forall\ i \in T_\ell^{\omega}, \quad \forall\ \ell = 1, \ldots, p, \tag{4.10}$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i \in T_\ell^{\omega}} \xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i \in T^{\omega}(k)} c(e_i), \tag{4.11}$$

donde $T^{\omega}(k)$ es el tronco de G definido como $\bigcup_{\ell=1}^{k} T_\ell^{\omega} \cup \{r\}$ y

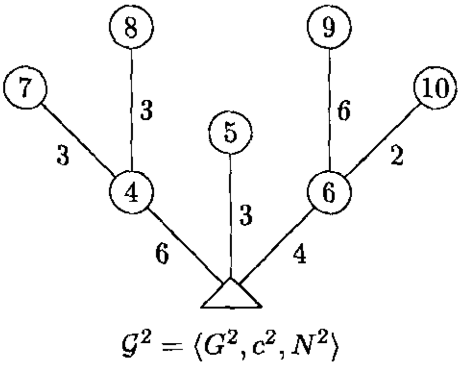
$$\frac{\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})}{\omega_i} < \frac{\xi_j^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})}{\omega_j}, \qquad \forall\ i \in T_\ell^{\omega},\ j \in T_s^{\omega}\ \text{ y }\ \ell < s. \tag{4.12}$$

Ejemplo 4.4. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ el problema SFTC definido en el ejemplo 4.2. Entonces, la solución igualitaria restringida para este problema es $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = (2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3)$.

Para $k = 1$, se tiene que $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}$, $\mu_1 = 2$, $T_1^1 = \{1, 2, 3\}$ y $\xi_i^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = 2$, $\forall\ i \in T_1^1$.

Para $k = 2$:

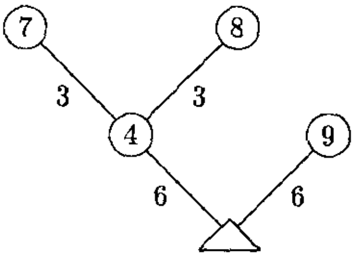
$$\mu_2 = 3,$$
$$T_2^1 = \{5, 6, 10\},$$
$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = 3, \quad \forall\ i \in T_2^1.$$



$\mathcal{G}^2 = \langle G^2, c^2, N^2 \rangle$

Para $k = 3$:

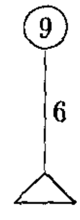
$$\mu_3 = 4\,,$$
$$T_3^1 = \{4, 7, 8\}\,,$$
$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = 4\,, \quad \forall\ i \in T_3^1\,.$$



$\mathcal{G}^3 = \langle G^3, c^3, N^3 \rangle$

Para $k = 4$:

$$\mu_4 = 6\,,$$
$$T_4^1 = \{9\}\,,$$
$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = 6\,, \quad \forall\ i \in T_4^1\,.$$



$\mathcal{G}^4 = \langle G^4, c^4, N^4 \rangle$

Obsérvese que la partición $\mathcal{T}(\mathbf{1})$ puede ser refinada obteniendo una partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas de tal manera que la restricción de $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1})$ a cada subárbol de la nueva partición coincide con la solución igualitaria restringida del subproblema SFTC correspondiente. En este caso, la partición en subproblemas que se obtiene es la partición inducida por $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1})$ descrita en el ejemplo 4.2. Esta propiedad es verificada por toda la familia de soluciones. Para todo problema SFTC, $\mathcal{G}$, y para todo vector de pesos admisible, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, la partición inducida por el algoritmo, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, puede ser refinada obteniéndose una partición del problema original, tal que la restricción de la solución $\boldsymbol{\omega}$-igualitaria restringida a cada uno de los subproblemas se corresponde con la correspondiente solución del subproblema considerado[8].

[8] donde el vector de pesos viene dado por la restricción del vector de pesos original al subárbol correspondiente.

4.4.2 Interpretación dinámica

El algoritmo formulado previamente es de complejidad exponencial, cada iteración conlleva la búsqueda (exponencial) del máximo tronco con coste medio ponderado mínimo. A continuación se propone un algoritmo alternativo (algoritmo 2) de complejidad polinomial $O(n^2)$, donde $n = |N|$ es el número de usuarios del sistema. Este algoritmo surge como resultado de dar una reinterpretación *dinámica* del modelo inspirada en la ***historia sobre el pintado de carreteras*** de Maschler *et al.* (1995). Considérense los vértices del árbol como pueblos en los que residen los diferentes jugadores y los arcos como carreteras de conexión con la capital de la región (raíz del árbol). El coste de un tramo de carretera se expresa en función del tiempo que un trabajador emplea en pintar las líneas de dicho tramo. Así, la solución igualitaria restringida viene dada por el tiempo que cada uno de los jugadores emplea en pintar la carretera teniendo en cuenta que: (i) todos los jugadores siguen pintando mientras la carretera que une su pueblo con la capital no haya sido pintada en su totalidad, (ii) cada jugador sólo pinta aquellos tramos de carretera que conectan su pueblo con la capital, (iii) todos empiezan a pintar a la vez y (iv) todos pintan a la misma velocidad. Maschler *et al.* (1995) consideran una condición adicional, ***obligación social***, necesaria para la obtención del nucléolo del juego. Para todo vector de pesos admisible, ω, la solución ω–igualitaria restringida se obtiene considerando que los jugadores pintan a distintas velocidades, ω_i representa la velocidad a la que pinta el jugador i, $i \in N$. En este caso, el coste que cada jugador debe asumir se obtiene, no como el tiempo que ha estado pintando, sino como el tramo del camino que une su pueblo con la capital que ha pintado.

Cada iteración del algoritmo describe el estado en que quedan las carreteras y prescribe como repartir los costes entre los trabajadores después de una jornada de trabajo. Las jornadas de trabajo vienen dadas por el mínimo tiempo necesario para acabar de pintar, al menos, una de las carreteras que todavía no han sido completamente pintadas. El coste que cada trabajador asume es proporcional a su peso, que dada su interpretación en este contexto, denominaremos *tasa de contribución*.

A continuación, se describe el algoritmo que proponemos y se demuestra su validez para la obtención de todo elemento de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas.

La notación empleada en el algoritmo es la siguiente:

(1) $\omega_S = \sum_{i \in S} \omega_i, \quad \forall\ S \subseteq N, \quad \forall\ \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$.

(2) $x(e,k) \in [0, c(e)]$ es la fracción del coste del arco $e \in E$ que ha sido pagada (tramo de carretera que ha sido pintado) antes de la etapa k.

(3) $E_k \subseteq E$ es el subconjunto de arcos que se acaban de pagar (pintar) en la etapa k.

(4) $E(k) = \bigcup_{j<k} E_j$ es el subconjunto de arcos que se han pagado (pintado) antes de la etapa k.

(5) Para todo $i \in N$, $e(i,k)$ es el arco a cuyo coste está contribuyendo (que está pintando) el jugador i en la etapa k.

(6) Para todo arco $e \in E$, $S(e,k) = \{i \in N \,/\, e(i,k) = e\}$ es el subconjunto de jugadores que contribuye a sufragar su coste (que está trabajando en él) en la etapa k.

(7) Para todo $i \in N$, la etapa en la que el jugador i deja de pagar (pintar) se denotará por $K(i)$.

Definición 4.10. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC. Dado un vector de tasas de contribución, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, se define el *reparto casa–raíz asociado a* $\boldsymbol{\omega}$, que denotaremos por $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, como el vector de reparto de costes obtenido al final del algoritmo 2 descrito a continuación.

Algoritmo 2

PASO 0 : Inicialización.

$k := 1$,

$x(e,1) := 0, \quad \forall\ e \in E$,

$E(1) := \emptyset$,

$e(i,1) := e_i, \quad \forall\ i \in N,$

$S(e_i,1) := \{i\}, \quad \forall\ i \in N.$

PASO 1 : Pintar y pagar.

El tiempo que se emplearía en terminar de pintar el arco $e \in E \setminus E(k)$, que todavía no ha sido pintado, en función de la tasa de contribución de todos aquellos jugadores que en la etapa actual están trabajando en él, viene dado por

$$t(e,k) = \frac{c(e) - x(e,k)}{\omega_{S(e,k)}}.$$

El tiempo mínimo necesario para acabar de pintar alguno de los arcos no finalizados en etapas anteriores es

$$t(k) = \min\{t(e,k) \,/\, e \in E \setminus E(k)\}.$$

Así, en la etapa actual se trabajará durante $t(k)$ unidades de tiempo. Entonces, la fracción de cada arco $e \in E \setminus E(k)$ que se pinta viene dada por $\omega_{S(e,k)}t(k)$, mientras que la parte del coste de dicho arco que ha sido pagada hasta el momento es

$$x(e,k+1) = x(e,k) + \omega_{S(e,k)}t(k), \qquad \forall\ e \in E \setminus E(k).$$

Una vez pintado el tramo correspondiente de cada arco $e \in E \setminus E(k)$, aquellos usuarios cuyo camino de conexión al punto de suministro no había sido pintado en etapas anteriores debe pagar por el trabajo realizado en la etapa actual en función de su tasa de contribución. El subconjunto de arcos finalizados en la etapa actual es,

$$E_k = \{e \in E \setminus E(k) \,/\, t(e,k) = t(k)\},$$

y el subconjunto de arcos finalizados hasta el momento es $E(k+1) = E(k) \cup E_k$.

PASO 2 : Criterio de parada.

Si el árbol se ha pintado por completo, i.e., $E(k+1) = E$, entonces parar. El coste que cada usuario debe asumir viene dado por

$$x_i^{\mathcal{G}}(\omega) = \sum_{k=1}^{K(i)} \omega_i t(k), \quad \forall\ i \in N,$$

donde $K(i)$ es el momento en que el jugador i, $i = 1, \ldots, n$, ha dejado de pintar.

Si todavía quedan arcos por pintar, entonces para todo arco $e \in E_k$ se distinguen dos casos:

1. Si $e' \in E(k+1)$ para todo arco $e' \preceq e$, entonces todos los jugadores que estaban trabajando en el arco e dejan de pagar en este momento. Luego, defínase $K(i) = k$, para todo $i \in S(e,k)$.

2. Si existe un arco $e' \preceq e$ que todavía no ha sido pintado por completo, entonces todos los jugadores en $S(e,k)$ empiezan a trabajar en el arco $e' \notin E(k+1)$, todavía no finalizado de su camino hasta el punto de suministro, más cercano al arco e en que se encontraban trabajando. Actualícese $S(e,k+1)$ de acuerdo con este razonamiento. Defínase $k := k+1$ y repítase el paso anterior.

Obviamente el algoritmo está bien definido, i.e., para a lo sumo en $K \leq n$ iteraciones y el vector obtenido, $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, es un vector de reparto de costes (i.e., es eficiente). Sea $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$ el reparto casa–raíz asociado a $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$ obtenido, entonces se verifica:

$(C1)$ Si $e_i \preceq e_j$, entonces $K(i) \leq K(j)$. Los usuarios más cercanos al punto de suministro acaban de pagar antes.

$(C2)$ Para todo $i, j \in N$, $K(i) \leq K(j)$ si y sólo si $\dfrac{x_i^{\mathcal{G}}(\omega)}{x_j^{\mathcal{G}}(\omega)} \leq \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$.

$(C3)$ Sea $A_k^{\omega} = \{\, i \in N \ /\ K(i) = k \,\}$[9]. Entonces, $A^{\omega}(k) = \bigcup_{j \leq k} A_j^{\omega} \cup \{r\}$ es un tronco de G,

[9]Obsérvese que alguno de los subconjuntos de vértices así definido puede ser vacío si ningún jugador acaba de pagar en la correspondiente etapa.

para todo $k = 1, \ldots, K$.

(C4) $x_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_i \frac{c(A_k^{\boldsymbol{\omega}})}{\omega_{A_k^{\boldsymbol{\omega}}}}$ para todo $i \in A_k^{\boldsymbol{\omega}}$, donde $c(A_k^{\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{i \in A_k^{\boldsymbol{\omega}}} c(e_i)$.

Nos referiremos a la partición del conjunto de usuarios $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{A_1^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, A_K^{\boldsymbol{\omega}}\}$ como la *partición definida por el tiempo de finalización inducida por* $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$.

A continuación se muestra con un ejemplo ilustrativo cómo funciona el algoritmo 2.

Ejemplo 4.5. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ el problema SFTC considerado en el ejemplo 4.2. Entonces, el reparto de costes casa–raíz asociado a $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}$ se obtiene como sigue:
En la etapa $k = 1$:

$$x(e_i, 1) = 0\,, \;\; S(e_i, 1) = \{i\} \;\text{ y }\; t(e_i, 1) = c(e_i)\,, \qquad \forall\; i \in N\,.$$

Entonces, $t(1) = 1\,, E_1 = \{e_2, e_3\}$ y $E(2) = E_1$.

En la etapa $k = 2$:

i	$x(e_i, 2)$	$S(e_i, 2)$	$t(e_i, 2)$
1	1	$\{1, 2, 3\}$	1
2	1		
3	1		
4	1	$\{4\}$	5
5	1	$\{5\}$	2
6	1	$\{6\}$	3
7	1	$\{7\}$	2
8	1	$\{8\}$	2
9	1	$\{9\}$	5
10	1	$\{10\}$	1

Entonces, $t(2) = 1\,, E_2 = \{e_1, e_{10}\}$ y $E(3) = \{e_1, e_2, e_3, e_{10}\}$. Por consiguiente, $K(1) = K(2) = K(3) = 2$.

En la etapa $k = 3$:

i	$x(e_i, 3)$	$S(e_i, 3)$	$t(e_i, 3)$
1	4		
2	1		
3	1		
4	2	$\{4\}$	4
5	2	$\{5\}$	1
6	2	$\{6, 10\}$	1
7	2	$\{7\}$	1
8	2	$\{8\}$	1
9	2	$\{9\}$	4
10	2		

Entonces, $t(3) = 1$, $E_3 = \{e_5, e_6, e_7, e_8\}$ y $E(4) = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$. Luego, $K(5) = K(6) = K(10) = 3$.

En la etapa $k = 4$:

i	$x(e_i, 4)$	$S(e_i, 4)$	$t(e_i, 4)$
1	4		
2	1		
3	1		
4	3	$\{4, 7, 8\}$	1
5	3		
6	4		
7	3		
8	3		
9	3	$\{9\}$	3
10	2		

Entonces, $t(4) = 1$, $E_4 = \{e_4\}$ y $E(5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_{10}\}$. Luego, $K(4) = 4$. En la etapa $k = 5$, $t(5) = 2$, $E_5 = \{e_9\}$ y $E(6) = E$. Entonces, $K(9) = 5$ y $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\mathbf{1}) = (2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 6, 3)$.

Proposición 4.5. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema SFTC. Entonces, para todo vector de tasas de contribución, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, el reparto de costes casa-raíz asociado a $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, coincide con la solución $\boldsymbol{\omega}$-igualitaria restringida de $\mathcal{G}$.*

Demostración: Dado un vector de tasas de contribución (vector de pesos admisible) $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, sea $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{T_1^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, T_p^{\boldsymbol{\omega}}\}$ la partición del conjunto de jugadores asociada a $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$. Probaremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$ coincide con la partición $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{A_1^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, A_K^{\boldsymbol{\omega}}\}$ definida por los tiempos de finalización inducidos por el vector de reparto de costes $\mathbf{x}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$.

Sea $A_\ell^{\boldsymbol{\omega}}$ el primer subconjunto no vacío de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$. Comprobaremos que $T_1^{\boldsymbol{\omega}} = A_\ell^{\boldsymbol{\omega}}$. Para probar dicha igualdad es suficiente con tener en cuenta que:

(i) $A_\ell^{\boldsymbol{\omega}}$ es el máximo tronco del árbol G que se acaba de pintar primero.

(ii) El tiempo que se tarda en pintar un tronco, T, de G viene dado por

$$\alpha_{\boldsymbol{\omega}}(T \setminus \{r\}) = \frac{c(T)}{\omega_{T\setminus\{r\}}}.$$

De la igualdad $T_1^{\boldsymbol{\omega}} = A_\ell^{\boldsymbol{\omega}}$, se deduce

$$x_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}), \quad \forall\ i \in A_\ell^{\boldsymbol{\omega}} = T_1^{\boldsymbol{\omega}}.$$

Contráigase $\mathcal{G}$ por $T_1^{\boldsymbol{\omega}}$, obviamente $\mathcal{T}'_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{T_2^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots T_p^{\boldsymbol{\omega}}\}$ y $\mathcal{A}'_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{A_{\ell+1}^{\boldsymbol{\omega}}, \ldots, A_K^{\boldsymbol{\omega}}\}$ se corresponden, respectivamente, con las particiones inducidas por ambas soluciones[10] en el problema contraído. Así, aplicando el mismo razonamiento al problema contraído, se tiene que $T_2^{\boldsymbol{\omega}} = A_t^{\boldsymbol{\omega}}$, donde $A_t^{\boldsymbol{\omega}}$ es el segundo subconjunto no vacío de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$ y, por consiguiente, $x_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, para todo $i \in A_t^{\boldsymbol{\omega}} = T_2^{\boldsymbol{\omega}}$. El resultado se deduce de la aplicación reiterada

[10] donde el vector de pesos (tasas de contribución) en el problema contraído viene dado por la restricción del vector de pesos original.

del razonamiento anterior sobre los sucesivos problemas contraídos. □

Observación 4.3. Trivialmente, de la interpretación dinámica de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas dada por el algoritmo 2, se deduce que dicha familia es *descomponible.* Es decir, dado un problema FTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, verificando todas las condiciones que caracterizan a un problema SFTC a excepción de la condición (ii), se verifica que para todo vector de pesos admisible para $\mathcal{G}$, $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, la solución ω–igualitaria restringida de $\mathcal{G}$ se obtiene como el producto cartesiano de las correspondientes soluciones de cada una de sus componentes.

4.4.3 Relación con el corazón del juego

La aproximación dinámica al problema no sólo nos proporciona una herramienta sencilla de cálculo, sino que también nos permite obtener el principal resultado acerca de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas. Para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, el conjunto compuesto por todas las soluciones ω–igualitarias restringidas, cuando ω varía sobre el conjunto $\mathcal{W}(\mathcal{G})$ de vectores de pesos (tasas de contribución) admisibles para $\mathcal{G}$, coincide con el corazón del juego de coste asociado, $(N, c_{\mathcal{G}})$. Una vez establecida dicha equivalencia, se estudian las propiedades de la aplicación $\xi^{\mathcal{G}} : \mathcal{W}(\mathcal{G}) \to \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$, que asigna a cada vector de pesos admisible ω la solución ω–igualitaria restringida del problema $\mathcal{G}$.

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ un problema SFTC, entonces $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) = \xi^{\mathcal{G}}(\mathcal{W}(\mathcal{G}))$, donde $\xi^{\mathcal{G}}(\mathcal{W}(\mathcal{G}))$ es el conjunto de todas las soluciones igualitarias restringidas ponderadas de $\mathcal{G}$.*

Demostración: Veamos que se verifica la igualdad probando la doble inclusión. En primer lugar, la inclusión $\xi^{\mathcal{G}}(\mathcal{W}(\mathcal{G})) \subseteq \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$ se deduce trivialmente del lema 4.3.

Veamos que se verifica la otra inclusión, $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) \subseteq \xi^{\mathcal{G}}(\mathcal{W}(\mathcal{G}))$. Para ello, comprobaremos que para todo vector de reparto de costes, $\mathbf{x} \in \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$, existe un vector de pesos admisible, $\omega \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, tal que $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\omega) = \mathbf{x}$.

Sea $\mathcal{S}_G(\mathbf{x}) = \{G^1, \ldots, G^p\}$ la partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por $\mathbf{x}$ (proposición 4.3). Se distinguen dos casos:

Caso 1. Si $\mathcal{S}_G(\mathbf{x})$ es la partición trivial $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \{G\}$, entonces defínase $\omega_i = x_i$ para todo $i \in N$. Obviamente, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{x} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$ y de las desigualdades del corazón $c(T) \geq x(T)$, $\forall\ T$ tronco de G, se deduce que

$$\mu_1 = \min \{ \alpha_{\boldsymbol{\omega}}(T \setminus \{r\}) \,/\, T\,,\ \text{tronco de } G \} = \alpha_{\boldsymbol{\omega}}(N) = \frac{c(N)}{\omega_N} = 1\,.$$

Luego, $\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_i \alpha_{\boldsymbol{\omega}}(N) = x_i\,,\ \forall\ i \in N.$

Caso 2. Si $\mathcal{S}_G(\mathbf{x}) = \{G^1, \ldots, G^p\}$, donde $G^k = (S_k \cup \{r_k\}, E_k)$, $\forall\ k = 1, \ldots, p$, es una partición no trivial, entonces considérese la relación de precedencia $\preceq$ definida sobre el conjunto $\{S_1, \ldots, S_p\}$ como sigue:

$$S_\ell \preceq S_t \iff \exists\ i \in S_\ell \ \text{ tal que } \ S_t \subseteq F(i)\,.$$

Entonces, defínase $\omega_i = \alpha_\ell x_i$, $\forall\ i \in S_\ell$, $\forall\ \ell = 1, \ldots, p$, siendo $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) > \mathbf{0}$ y verificando:

$$\Big[\text{Si } \ S_\ell \preceq S_t \implies \alpha_\ell \geq \alpha_t \Big]\,, \quad \forall\ 1 \leq \ell, t \leq p\,.$$

Obviamente, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$. Veamos que efectivamente $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{x}$. Lo probaremos por reducción al absurdo. Se comprobará que de la negación de $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega})^{\mathcal{G}} = \mathbf{x}$ se deduce que $\mathbf{x} \notin \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$.

De la elección de $\boldsymbol{\omega}$ se deduce trivialmente que si S_ℓ precede a S_t, entonces los jugadores de S_ℓ cubren el coste correspondiente al pintado de S_ℓ ($\sum_{i \in S_\ell} c(e_i)$) antes de que los jugadores en S_t hayan cubierto el coste correspondiente a S_t $\left(\sum_{i\in S_t} c(e_i)\right)$. Así pues, se tiene que

$$\sum_{i\in S_\ell} \xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i\in S_\ell} c(e_i) = \sum_{i\in S_\ell} x_i\,, \quad \forall\ \ell = 1,\dots,p\,. \tag{4.13}$$

Si $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) \neq \mathbf{x}$, entonces de (4.13) se sigue que para algún $t \in \{1,\dots,p\}$ deben existir dos jugadores $i, j \in S_t$, verificando

$$\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) < x_i \quad \text{y} \quad \xi_j^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) > x_j\,. \tag{4.14}$$

Por otro lado, $\omega_r = \alpha_t x_r$, $\alpha_t > 0$, para todo $r \in S_t$, entonces de la condición (4.14) se deduce que

$$\frac{\xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})}{\xi_j^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})} < \frac{\omega_i}{\omega_j}\,.$$

Por tanto, de la condición $(C2)$[11] se deduce que el jugador i acaba de pagar antes de que lo haga el jugador j, i.e., $K(i) < K(j)$.

Sea j^* el jugador en el camino P_j más cercano al vértice raíz que deja de pagar en la misma etapa en que lo hace el jugador j, sea $\ell \in \{1,\dots,p\}$ tal que $j^* \in S_\ell$, y sea

$$F_t(j^*) = \left\{\, r \in S_k \;/\; j^* \preceq r\,,\;\; S_k \preceq S_t \,\right\},$$

el conjunto de sucesores de j^* en $\{\, S_k \;/\; S_k \preceq S_t \,\}$.

Para todo $r \in F_t(j^*)$ se tiene que $\omega_r = \alpha_{k_r} x_r \geq \alpha_t x_r$. Entonces, de las condiciones $(C1)$[12]

[11] $\left[\, K(i) \leq K(j) \iff \frac{\mathbf{x}_i^{\mathcal{G}}(\omega)}{\mathbf{x}_j^{\mathcal{G}}(\omega)} \leq \frac{\omega_i}{\omega_j} \,\right]$, $\forall\ i,j \in N$.

[12] Si $e_i \preceq e_j \;\Rightarrow\; K(i) \leq K(j)$.

y $(C2)$ se deduce

$$K(r) \geq K(j^*) = K(j) \implies \frac{\xi_r^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})}{\xi_j^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})} \geq \frac{\omega_r}{\omega_j} = \frac{\alpha_{k_r} x_r}{\alpha_t x_j} \geq \frac{x_r}{x_j}, \quad \forall\ r \in F_t(j^*). \tag{4.15}$$

Luego, como $\xi_j^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) > x_j$, de (4.15) se tiene que

$$\xi_r^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) > x_r, \quad \forall\ r \in F_t(j^*). \tag{4.16}$$

Sea S_t^- la unión de todos aquellos elementos en $\{S_1, \dots, S_p\}$ que preceden estrictamente a S_t, entonces S_t^- y $S_t^- \cup S_t$ son troncos autónomos en $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$. A continuación, comprobaremos que $L_t = (S_t^- \cup S_t) \setminus F_t(j^*)$ es también un tronco autónomo en $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$.

Como $K(i) < K(j) = K(j^*)$, de la condición $(C1)$ se deduce que $i \notin F(j^*)$. Entonces, teniendo en cuenta que G es un árbol estándar, se tiene que $i^* = \pi(j^*)$, predecesor del jugador j^*, no es el vértice raiz[13]. Además, por la elección de j^*, $K(i^*) < K(j^*) \leq K(r)$, $\forall\ r \in F_t(j^*)$. Entonces ningún jugador de $F_t(j^*)$ contribuye al pago de arco alguno del camino $P_{i^*} \neq \emptyset$. Por tanto, L_t es un tronco autónomo en $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$, i.e.,

$$\sum_{i \in L_t} \xi_i(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i \in L_t} c(e_i). \tag{4.17}$$

Pero, de (4.16), (4.17) y de la definición de $S_G(\mathbf{x})$, se obtiene

$$\sum_{i \in L_t} x_i = \sum_{i \in S_t^- \cup S_t} x_i - \sum_{i \in F_t(j^*)} x_i > \sum_{i \in S_t^- \cup S_t} x_i - \sum_{i \in F_t(j^*)} \xi_i^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) =$$

$$= \sum_{i \in S_t^- \cup S_t} c(e_i) - \sum_{i \in F_t(j^*)} c(e_i) = \sum_{i \in L_t} c(e_i),$$

[13] G es un árbol estándar, si $r = \pi(j)$, entonces de la condición (ii) se deduce $F(j) = N$.

violando la restricción del corazón correspondiente al tronco $L_t = (S_t^- \cup S_t) \setminus F_t(j^*)$.

Así, se tiene que la negación de la tesis que queríamos probar contradice la pertenencia de $\mathbf{x}$ a $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$ y, por tanto, el resultado queda probado. □

De la demostración del teorema anterior se deduce trivialmente el siguiente resultado, en el que se establecen las propiedades de la aplicación $\xi^{\mathcal{G}}$. Como se ha visto, un mismo elemento del corazón del juego se puede obtener a partir de distintos vectores de pesos admisibles, siempre y cuando para todo jugador se siga manteniendo su impacto relativo con respecto al resto de jugadores.

Proposición 4.6. *Para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, sea $\xi^{\mathcal{G}} : \mathcal{W}(\mathcal{G}) \to \text{core}(c_{\mathcal{G}})$ la aplicación que asigna a cada vector de pesos admisible con respecto a $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, la solución $\boldsymbol{\omega}$–igualitaria restringida de $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega})$. Entonces*

(i) Para todo vector de reparto de costes, $\mathbf{x}$, perteneciente al interior relativo del poliedro $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$ o a una faceta de tipo (I), se verifica

$$(\xi^{\mathcal{G}})^{-1}(\mathbf{x}) = \{\, \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G}) \;/\; \xi^{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{x} \,\} = \{\, \alpha\mathbf{x} \;/\; \alpha > 0 \,\}.$$

(ii) Para todo vector de reparto de costes, $\mathbf{x} \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, perteneciente a una faceta de tipo (II), se verifica

$$\begin{aligned}(\xi^{\mathcal{G}})^{-1}(\mathbf{x}) = \{\, \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G}) \;/\; \omega_i = \alpha_\ell x_i\,,\ \ \forall\ i \in S_\ell\,,\ \ \alpha_\ell > 0\,,\ \ \forall\ \ell = 1, \dots, p \ \ \text{y} \\ \alpha_\ell \geq \alpha_t\,,\ \ \forall\ \ell, t \ \ \text{tales que} \ \ S_\ell \preceq S_t \,\}\,,\end{aligned}$$

donde $S_G(\mathbf{x}) = \{G^1, \dots, G^p\}$, $G^\ell = (S_\ell \cup \{r_\ell\}, E_\ell)$, $\ell = 1, \dots, p$, es la partición de $\mathcal{G}$ en subproblemas inducida por $\mathbf{x}$ y $(\{S_1, \dots, S_p\}, \preceq)$ es la relación de precedencia definida anteriormente.

4.4.4 Caracterización

Se concluye el estudio de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas obteniendo una caracterización de los elementos de dicha familia como procedimientos de asignación de costes.

Sea $\mathcal{F}$ el espacio de todos los problemas SFTC, entonces un *procedimiento de asignación de costes para problemas SFTC* es una función, $\xi : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}^n$, asignando a cada problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, un vector de reparto de costes, $\xi(G, c, N) \in \mathbb{R}^n$.

La *regla igualitaria restringida* se define como el procedimiento de asignación de costes, $\xi^e : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}^n_+$, que asigna a cada $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$ su solución igualitaria restringida, $\xi^e(G, c, N)$.

Extender la regla igualitaria restringida requiere la consideración de una función que asigne a cada problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$, un vector de pesos admisible para $\mathcal{G}$, i.e., $\omega : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}^n_+$ verificando $\omega(G, c, N) \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$ para todo problema SFTC, $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$. A toda función, ω, que cumpla dicha condición la denominaremos *sistema admisible de pesos*. La *regla ω–igualitaria restringida* se define como el procedimiento de asignación de costes, $\xi^\omega : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}^n_+$, que asigna a cada problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$, su solución $\omega(G, c, N)$–igualitaria restringida, $\xi^\omega(G, c, N)$.

El objetivo que nos planteamos es obtener una caracterización de dichos procedimientos de asignación de costes que refleje las características esenciales de las soluciones en las que se basan: igualitarismo y promoción de intereses individuales. La primera de ellas es reflejada por medio de una propiedad de minimización del rango de los vectores de reparto de costes obtenidos; mientras que la segunda queda reflejada mediante la exigencia de que dichos vectores de reparto pertenezcan al corazón del juego de coste asociado. Sin embargo, estas dos condiciones no son suficientes para caracterizar a las reglas ω–igualitarias restringidas, sino que será necesario considerar una propiedad adicional de carácter dinámico, *monotonicidad con respecto a la función de coste.*

Veamos en primer lugar algunas de las propiedades satisfechas por las reglas ω–igualitarias restringidas.

Definición 4.11. Sea $\xi : \mathcal{F} \to \cup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}^n_+$ un procedimiento de asignación de costes para problemas SFTC . Se dice que ξ verifica la propiedad de:

(i) *Monotonicidad con respecto a la función de coste* si y sólo si para todo par de problemas SFTC , $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ y $\mathcal{G}' = \langle G, c', N \rangle$, tales que $c' \geq c$ se verifica

$$\xi_i(G, c', N) \geq \xi_i(G, c, N), \quad \forall\ i \in N.$$

(ii) *Pertenencia al corazón* si y sólo si $\xi(G, c, N) \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$.

Obviamente, las reglas ω–igualitarias restringidas verifican ambas propiedades. Sea $\xi^e(G, c, N)$ la solución igualitaria restringida del problema $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$ y sea $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(1) = \{T_1, \ldots, T_p\}$ la partición del conjunto de jugadores N asociada a $\xi^e(G, c, N)$ inducida por el algoritmo 1, entonces las condiciones (4.10), (4.11) y (4.12) se pueden expresar como sigue:

$$\xi^e_i(G, c, N) = \xi^e_j(G, c, N), \quad \forall\ i \in T_\ell,\ j \in T_\ell, \text{ para todo } \ell = 1, \ldots, p, \tag{4.18}$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i \in T_\ell} \xi^e_i(G, c, N) = \sum_{i \in T(k)} c(e_i), \quad \forall\ k = 1, \ldots, p, \tag{4.19}$$

donde $T(k)$ es el tronco de G definido como $\bigcup_{\ell=1}^{k} T_\ell$ y

$$\xi^e_i(G, c, N) < \xi^e_j(G, c, N), \quad \forall\ i \in T_k,\ j \in T_\ell \text{ si } k < \ell. \tag{4.20}$$

Lema 4.5. *Dado un problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle \in \mathcal{F}$, sea $\xi^e(G, c, N)$ su solución igualitaria restringida y $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(1) = \{T_1, \dots, T_p\}$ la partición del conjunto de jugadores N asociada a $\xi^e(G, c, N)$ inducida por el algoritmo 1. Para cualquier $k \in \{1, \dots, p-1\}$, considérese el problema SFTC $\mathcal{G}^k = \langle G, c^k, N\rangle$, donde la función de coste c^k viene dada por*

$$\begin{aligned} c^k(e_i) &= c(e_i)\,, & \forall\ i \in T_\ell \text{ y } \ell \leq k\,,\\ c^k(e_i) &= c(e_i) - \varepsilon_\ell\,, & \forall\ i \in T_\ell \text{ y } \ell \geq k+1\,, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_\ell = \frac{\sum_{i\in T_\ell} c(e_i)}{|T_\ell|} - \frac{\sum_{i\in T_k} c(e_i)}{|T_k|}$. Entonces, $\{T_1^k, \dots, T_k^k\}$, donde $T_\ell^k = T_\ell$ para todo $\ell \leq k-1$ y $T_k^k = \cup_{\ell \geq k} T_\ell$ es la partición del conjunto de jugadores N inducida por $\xi^e(G, c^k, N)$. Además,

$$\begin{aligned} \xi_i^e(G, c^k, N) &= \xi_i^e(G, c, N)\,, & \forall\ i \in T_\ell \text{ y } \ell \leq k\,,\\ \xi_i^e(G, c^k, N) &= \frac{\sum_{i\in T_k} c(e_i)}{|T_k|}\,, & \forall\ i \in T_\ell \text{ y } \ell \geq k+1\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Demostración: Sea φ el vector definido por la expresión (4.21). Se debe demostrar que $\varphi = \xi^e(G, c^k, N)$. En primer lugar, se prueba que $\varphi \in \text{core}(c_{\mathcal{G}^k})$.

En efecto, $\varphi_i \geq 0$ para todo $i \in N$ y, como se comprueba a continuación, es eficiente.

$$\sum_{i\in N} c^k(e_i) = \sum_{i\in T(k)} c(e_i) + |\bigcup_{\ell>k} T_\ell| \frac{\sum_{i\in T_k} c(e_i)}{|T_k|} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i\in T_\ell} \xi_i^e(G, c, N) + \sum_{\ell>k} \sum_{i\in T_\ell} \varphi_i = \sum_{i\in N} \varphi_i\,,$$

donde la segunda igualdad se deduce de la condición (4.19). Luego, por el lema 4.1 es suficiente probar que $\sum_{i\in T} \varphi_i \leq \sum_{i\in T} c^k(e_i)$, para todo tronco T de G.

Sea T un tronco cualquiera de G, se distinguen dos casos:

(i) Si $T \subseteq \bigcup_{\ell \leq k} T_\ell$, entonces

$$\sum_{i \in T} \varphi_i = \sum_{i \in T} \xi_i^e(G, c, N) \leq \sum_{i \in T} c(e_i) = \sum_{i \in T} c^k(e_i).$$

(ii) Si $T \cap (\bigcup_{\ell > k} T_\ell) \neq \emptyset$, entonces considérense los subconjuntos de vértices $T' = T \cap T(k)$ y $T'' = T \setminus T'$. Se verifica

$$\begin{aligned}\sum_{i \in T''} c^k(e_i) &= \sum_{i \in T''} c(e_i) - \sum_{\ell > k} |T'' \cap T_\ell| \cdot \varepsilon_\ell = \\ &= \sum_{i \in T''} c(e_i) - \sum_{\ell > k} \Big(|T'' \cap T_\ell| \cdot \frac{\sum_{i \in T_\ell} c(e_i)}{|T_\ell|} \Big) + |T''| \cdot \frac{\sum_{i \in T_k} c(e_i)}{|T_k|} = \\ &= \sum_{i \in T''} c(e_i) - \sum_{i \in T''} \xi_i^e(G, c, N) + |T''| \cdot \frac{\sum_{i \in T_k} c(e_i)}{|T_k|}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

De la expresión (4.22) y del hecho de que $\xi^e(G, c, N)$ pertenece al corazón del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$, se deduce

$$\begin{aligned}\sum_{i \in T} \varphi_i &= \sum_{i \in T'} \xi_i^e(G, c, N) + |T''| \cdot \frac{\sum_{i \in T_k} c(e_i)}{|T_k|} = \\ &= \sum_{i \in T'} \xi_i^e(G, c, N) + \sum_{i \in T''} \xi_i^e(G, c, N) + \sum_{i \in T''} c^k(e_i) - \sum_{i \in T''} c(e_i) \leq \\ &\leq \sum_{i \in T'} c(e_i) + \sum_{i \in T''} c^k(e_i) = \sum_{i \in T} c^k(e_i).\end{aligned}$$

Así, se tiene que $\varphi \in \text{core}(c_{\mathcal{G}^k})$. A continuación, se probará que la partición del conjunto de jugadores inducida por el algoritmo 1 para calcular la solución igualitaria restringida de $\mathcal{G}^k$, $\{T_1^k, \dots, T_k^k\}$, coincide con la partición definida en el enunciado del lema.

De la pertenencia de φ a core$(c_{\mathcal{G}^k})$, de la definición de φ y de la condición (4.20), se deduce

$$\sum_{i\in T} c^k(e_i) \geq \sum_{i\in T} \varphi_i \geq \sum_{i\in T}\Big(\frac{\sum_{j\in T_1} c(e_j)}{|T_1|}\Big) = |T|\cdot\frac{\sum_{j\in T_1} c^k(e_j)}{|T_1|}\,, \qquad \forall\ T\,,\ \text{tronco de}\ G\,.$$

Además, obsérvese que si $T_1 \subsetneq T$, entonces la segunda desigualdad es estricta. Luego, el máximo tronco de coste (con respecto a c^k) medio mínimo es T_1, i.e., $T_1^k = T_1$.

Aplicando reiteradamente el razonamiento anterior a cada problema contraído se obtiene el resultado (téngase en cuenta que $\varphi^1 = (\varphi_i)_{i\in N\setminus T_1}$ pertenece al corazón del correspondiente juego de coste asociado al problema contraído por T_1, como quedó probado en la proposición 4.3). □

El lema anterior se extiende al caso en que la solución considerada sea una solución igualitaria restringida ponderada como sigue:

Lema 4.6. *Dado $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle \in \mathcal{F}$, para todo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}(\mathcal{G})$, vector de pesos admisible para $\mathcal{G}$, sea $\xi^\omega(G,c,N)$ su solución $\boldsymbol{\omega}$-igualitaria restringida y sea $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\omega}) = \{T_1^\omega, \dots, T_p^\omega\}$ la partición del conjunto de jugadores N asociada a $\xi^\omega(G,c,N)$ inducida por el algoritmo 1. Para cualquier $k \in \{1,\dots,p-1\}$, considérese el problema SFTC, $\mathcal{G}^k = \langle G, c^k, N\rangle$, donde la función de coste c^k viene dada por*

$$\begin{aligned} c^k(e_i) &= c(e_i)\,, && \forall\ i \in T_\ell^\omega\ \ \text{y}\ \ \ell \leq k\,,\\ c^k(e_i) &= c(e_i) - \omega_i\varepsilon_\ell\,, && \forall\ i \in T_\ell\ \ \text{y}\ \ \ell \geq k+1\,, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_\ell = \alpha_\omega(T_\ell^\omega) - \alpha_\omega(T_k^\omega)$. Entonces $\{L_1^\omega, \dots, L_k^\omega\}$, donde $L_\ell^\omega = T_\ell^\omega$, para todo $\ell \leq k-1$ y $L_k^\omega = \cup_{\ell\geq k} T_\ell^\omega$ es la partición del conjunto de jugadores N inducida por $\xi^\omega(G,c^k,N)$.

Además,

$$
\begin{aligned}
&\xi_i^\omega(G,c^k,N)=\xi_i^\omega(G,c,N)\,, && \forall\ i\in T_\ell^\omega \ \text{ y } \ \ell\leq k\,,\\
&\xi_i^\omega(G,c^k,N)=\omega_i\alpha_\omega(T_k^\omega)\,, && \forall\ i\in T_\ell^\omega \ \text{ y } \ \ell\geq k+1\,.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Demostración: Si $\boldsymbol{\omega}$ es un vector de pesos admisible para $\mathcal{G}$, entonces $\boldsymbol{\omega}$ es también admisible para $\mathcal{G}^k$, luego $\xi^\omega(G,c^k,N)$ está bien definida. Además, las condiciones (4.18), (4.19) y (4.20) se extienden a $\xi^\omega(G,c,N)$, entonces el resultado se obtiene adaptando de forma directa la demostración del lema anterior. □

Notación. Se denotará por $\mathcal{M}$ a la clase de procedimientos de asignación de costes en $\mathcal{F}$ compuesta por todos aquellos procedimientos de asignación de costes para problemas SFTC que verifican las propiedades de monotonicidad con respecto a la función de coste y pertenencia al corazón.

Teorema 4.2. *La regla igualitaria restringida es el único procedimiento de asignación de costes en $\mathcal{F}$ que minimiza el rango de los vectores de reparto de costes*[14] *sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración: En primer lugar, se probará que efectivamente la regla igualitaria restringida minimiza el rango de los vectores de reparto de costes sobre la clase considerada, para luego probar que el mínimo es único.

1) Dado $\varphi\in\mathcal{M}$, se demostrará que para todo problema SFTC, $\mathcal{G}=\langle G,c,N\rangle\in\mathcal{F}$, se verifica

$$
\text{máx}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\geq\text{máx}\{\,\xi_i^e(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\,,
\tag{4.24}
$$

[14]rango$(\xi^e(G,c,N))=\text{mín}\{\text{rango}(\varphi(G,c,N))\,/\,\varphi\in\mathcal{M}\}$, para todo $\mathcal{G}=\langle G,c,N\rangle\in\mathcal{F}$.

y

$$\min\{\, \varphi_i(G,c,N)\,/\,i \in N\,\} \le \min\{\, \xi_i^e(G,c,N)\,/\,i \in N\,\}\,, \tag{4.25}$$

donde $\xi^e(G,c,N)$ es la solución igualitaria restringida de $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle$.

Sea $\{T_1,\ldots,T_p\}$ la partición del conjunto de jugadores asociada a $\xi^e(G,c,N)$ inducida por el algoritmo 1. Se distinguen dos casos:

(i) Si $p = 1$, entonces $\xi^e(G,c,N) = c(N)\cdot(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$. Luego, las desigualdades (4.24) y (4.25) se deducen trivialmente de la eficiencia de $\varphi(G,c,N)$.

(ii) Si $p > 1$, entonces en primer lugar probaremos que

$$\max\{\, \varphi_i(G,c,N)\,/\,i \in T_p\,\} \ge \max\{\, \xi_i^e(G,c,N)\,/\,i \in N\,\}\,.$$

Supóngase, por el contrario, que

$$\max\{\, \varphi_i(G,c,N)\,/\,i \in T_p\,\} < \max\{\, \xi_i^e(G,c,N)\,/\,i \in N\,\}\,,$$

entonces de la condición (4.20) se deduce

$$\varphi_i(G,c,N) \le \max\{\, \varphi_i(G,c,N)\,/\,i \in T_p\,\} < \xi_i^e(G,c,N)\,, \qquad \forall\ i \in T_p\,.$$

Entonces, de la condición (4.19) y de la eficiencia de ambas soluciones, se tiene que

$$\sum_{i\in T(p-1)} c(e_i) = \sum_{i\in T(p-1)} \xi_i^e(G,c,N) < \sum_{i\in T(p-1)} \varphi_i\,, \tag{4.26}$$

donde $T(p-1)$ es el tronco de $G, \bigcup_{\ell<p} T_\ell$, en contradicción con la propiedad de pertenencia al corazón.

Así,

$$\text{máx}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\geq \text{máx}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in T_p\,\}\geq \text{máx}\{\,\xi_i^e(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\,.$$

Análogamente se demuestra que

$$\text{mín}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\leq \text{mín}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in T_1\,\}\leq \text{mín}\{\,\xi_i^e(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\,.$$

Así pues, se ha probado que para todo procedimiento de asignación de costes $\varphi \in \mathcal{M}$ y para todo problema SFTC, $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$, se verifican las desigualdades (4.24) y (4.25). Luego,

$$\begin{aligned}\text{rango}(\varphi(G,c,N)) &= \text{máx}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}-\text{mín}\{\,\varphi_i(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}\geq\\ &\geq \text{máx}\{\,\xi_i^e(G,c,N)\,/\,i\in N\,\}-\text{mín}\{\,\xi_i^e(G,c,N)\,/\,i\in N\,\} = \text{rango}(\xi^e(G,c,N))\,,\\ &\qquad\qquad\forall\ \mathcal{G}=\langle G,c,N\rangle\in\mathcal{F}\,,\quad \forall\ \varphi\in\mathcal{M}\,.\end{aligned}$$

2) A continuación se establece la unicidad. Sea $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $\text{rango}(\varphi(G,c,N)) = \text{rango}(\xi^e(G,c,N))$, para todo $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle \in \mathcal{F}$.

Dado $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle \in \mathcal{F}$, se demostrará que $\varphi_i(G,c,N) = \xi_i^e(G,c,N),\ \ \forall\ i \in N$.

Como antes, sea $\{T_1,\dots,T_p\}$ la partición del conjunto de jugadores asociada a $\xi^e(G,c,N)$ inducida por el algoritmo 1. Se distinguen dos casos:

(i) Si $p=1$, entonces trivialmente debe ser $\varphi(G,c,N) = \xi^e(G,c,N) = c(N)\cdot(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$.

(ii) Si $p>1$, entonces se demostrará que $\varphi_i(G,c,N) = \xi_i^e(G,c,N)$, para todo $i \in T_k$, para todo $k = 1, \dots, p$, por inducción hacia atrás en el índice k.

Veamos que se verifica la igualdad para $k = p$: Si rango$(\varphi(G, c, N))$ = rango$(\xi^e(G, c, N))$, entonces de las desigualdades (4.24) y (4.25), se deduce

$$\text{máx}\{\, \varphi_i(G, c, N) \,/\, i \in N \,\} = \text{máx}\{\, \xi_i^e(G, c, N) \,/\, i \in N \,\},$$

entonces,

$$\varphi_i(G, c, N) \leq \xi_i^e(G, c, N), \qquad \forall i \in T_p.$$

Luego, si $\big(\varphi_i(G, c, N)\big)_{i \in T_p} \neq \big(\xi_i^e(G, c, N)(G, c, N)\big)_{i \in T_p}$, entonces debe existir $i \in T_p$ tal que $\varphi_i(G, c, N) < \xi_i^e(G, c, N)$, de donde

$$\sum_{i \in T_p} \varphi_i(G, c, N) < \sum_{i \in T_p} \xi_i^e(G, c, N) = \sum_{i \in T_p} c(e_i),$$

y, por consiguiente, de la eficiencia de $\varphi(G, c, N)$, se deduce

$$\sum_{i \in T(p-1)} c(e_i) < \sum_{i \in T(p-1)} \varphi_i(G, c, N),$$

en contradicción con la propiedad de pertenencia al corazón. Luego,

$$\varphi_i(G, c, N) = \xi_i^e(G, c, N), \quad \forall\; i \in T_p.$$

Supóngase que $\varphi_i(G, c, N) = \xi_i^e(G, c, N)$, para todo $i \in T_\ell$, para todo $\ell = k, \dots, p$. Se comprobará que, en tal caso, $\varphi_i(G, c, N) = \xi_i^e(G, c, N)$ para todo $i \in T_{k-1}$.

Considérese el problema SFTC, $\langle G, c^{k-1}, N\rangle$, definido en el lema 4.5, entonces se verifica:

(a) $c^{k-1} \leq c$.

(b) $\xi_i^e(G,c,N) = \xi_i^e(G,c^{k-1},N)\,, \quad \forall\ i \in T_\ell\,,\ \forall\ l \leq k-1\,.$

(c) $\varphi_i(G,c^{k-1},N) = \xi_i^e(G,c^{k-1},N)\,, \quad \forall\ i \in T_\ell\,,\ \forall\ l \geq k-1\,.$

Obsérvese que la condición (c) se deduce del hecho de que $\{T_1^{k-1}, \ldots, T_{k-1}^{k-1}\}$, donde $T_{k-1}^{k-1} = \bigcup_{\ell \geq k-1} T_\ell$ es la partición del conjunto de jugadores asociada a $\xi^e(G,c^{k-1},N)$ inducida por el algoritmo 1 (véase el lema 4.5) y de la aplicación del razonamiento anterior al problema $\langle G, c^{k-1}, N\rangle$.

De la condición (c) y de la eficiencia de ambas soluciones, se deduce

$$\sum_{i \in T(k-1)} \varphi_i(G,c^{k-1},N) = \sum_{i \in T(k-1)} \xi_i^e(G,c^{k-1},N)\,.$$

Por tanto, por la condición (b) se tiene que

$$\sum_{i \in T(k-1)} \varphi_i(G,c^{k-1},N) = \sum_{i \in T(k-1)} \xi_i^e(G,c,N)\,. \tag{4.27}$$

Por otro lado, por hipótesis de inducción, se verifica

$$\sum_{\ell \geq k} \sum_{i \in T_\ell} \varphi_i(G,c,N) = \sum_{\ell \geq k} \sum_{i \in T_\ell} \xi_i^e(G,c,N)\,. \tag{4.28}$$

Luego, de (4.27), (4.28) y de la eficiencia de ambas soluciones, se deduce

$$\begin{aligned}\sum_{i\in T(k-1)} \varphi_i(G,c^{k-1},N) &= \sum_{i\in T(k-1)} \xi_i^e(G,c,N) = c(N) - \sum_{\ell\geq k}\sum_{i\in T_\ell} \xi_i^e(G,c,N) = \\ &= c(N) - \sum_{\ell\geq k}\sum_{i\in T_\ell} \varphi(G,c,N) = \sum_{i\in T(k-1)} \varphi_i(G,c,N)\,.\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta que la propiedad de monotonicidad implica

$$\varphi_i(G,c^{k-1},N) \leq \varphi_i(G,c,N)\,, \quad \forall\ i\in N\,,$$

se tiene que

$$\varphi_i(G,c,N) = \varphi_i(G,c^{k-1},N)\,, \quad \forall\ i\in T(k-1)\,.$$

Luego, de (b) y (c) se deduce

$$\varphi_i(G,c,N) = \varphi_i(G,c^{k-1},N) = \xi_i^e(G,c^{k-1},N) = \xi_i^e(G,c,N)\,, \quad \forall\ i\in T_{k-1}\,.$$

□

La caracterización de la regla igualitaria restringida se adapta al caso asimétrico siempre y cuando el sistema admisible de pesos ω que define la regla igualitaria restringida ponderada verifique ciertas condiciones.

Definición 4.12. Se dirá que un sistema admisible de pesos ω es *positivo* si $\omega_i(G,c,N) > 0$, $\forall\ i\in N$, $\forall\ \mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle \in \mathcal{F}$.

Proposición 4.7. *Sea* $\omega : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N\subseteq \mathbb{N}\\ |N|<\infty}} \mathbb{R}_+^n$ *un sistema admisible de pesos positivo. Entonces,* *la regla ω–igualitaria restringida minimiza el rango ponderado (con respecto a ω)*[15] *de los vectores de reparto sobre la clase de todos aquellos procedimientos de asignación de costes para problemas SFTC verificando la propiedad de pertenencia al corazón.*

Demostración: Se demuestra adaptando de forma directa el apartado 1) de la demostración del teorema anterior.

Si ω es un sistema admisible de pesos *no* positivo, el teorema 4.7 se extiende siempre y cuando el máximo y el mínimo sean calculados sobre el subconjunto de jugadores con peso estrictamente positivo y la clase de procedimientos de asignación de costes considerada se reduzca a todos aquellos procedimientos de asignación de costes para problemas SFTC, ξ, verificando la propiedad de pertenencia al corazón, tales que para todo $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}$ satisfacen $\xi_i(G,c,N) = 0$, para todo $i \in N$ tal que $\omega_i(G,c,N) = 0$. A continuación se obtiene una caracterización de las reglas ω–igualitarias restringidas en el caso particular en que ω sea un sistema admisible de pesos positivo y *homogéneo.*

Definición 4.13. Se dirá que un sistema admisible de pesos ω es *homogéneo* si y sólo si ω es independiente de la función de coste del problema SFTC, i.e., $\omega(G,c,N) = \omega(G,c',N)$ para todo par de funciones de coste c, c'.

Teorema 4.3. *Sea ω un sistema admisible de pesos positivo y homogéneo. Entonces, la regla ω–igualitaria restringida es el único procedimiento de asignación de costes para problemas SFTC que minimiza el rango ponderado (con respecto a ω) de los vectores de reparto de costes sobre la clase $\mathcal{M}$.*

Demostración: La suficiencia se demuestra adaptando de forma directa el apartado 2) de la demostración del teorema 4.2; mientras que la necesidad ha sido probada en la proposición 4.7.

□

De hecho, el resultado de caracterización de la regla igualitaria restringida (teorema 4.2)

[15] $\max\left\{\frac{\xi_i(G,c,N)}{\omega_i(G,c,N)} / i \in N\right\} - \min\left\{\frac{\xi_i(G,c,N)}{\omega_i(G,c,N)} / i \in N\right\}$.

es similar al resultado de caracterización de la regla media restringida de reparto propuesta por Aadland y Kolpin (1998) para problemas del aeropuerto. No obstante, además de que la caracterización que nosotros proponemos es válida en un contexto más amplio, la caracterización propuesta por ellos involucra una propiedad adicional, *ordenación* (*ranking*, en inglés). Dicha propiedad establece que el coste asumido por los usuarios de acuerdo con el procedimiento de asignación de costes en cuestión debe preservar el orden establecido por la relación de precedencia $(V, \preceq)$.

Por último, se establece la independencia lógica de las propiedades que caracterizan a las reglas consideradas.

Proposición 4.8. *Las propiedades consideradas en el teorema de caracterización 4.3 son lógicamente independientes, i.e., existen procedimientos de asignación de costes para problemas SFTC que no satisfacen exactamente cada una de ellas.*

Demostración:

1. No minimización del rango ponderado: Para todo sistema admisible de pesos positivo y homogéneo, el correspondiente valor de Shapley (dual) ponderado (ver sección 4.5) definido por el sistema de pesos $(\omega(G,c,N), \{N\})$ para todo problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, verifica las propiedades de monotonicidad con respecto a la función de coste y pertenencia al corazón, pero no minimiza el rango ponderado sobre la clase considerada.

2. No pertenencia al corazón: Para todo sistema admisible de pesos positivo y homogéneo, el procedimiento de asignación de costes para problemas SFTC que se obtiene repartiendo el coste global proporcionalmente al peso de cada jugador, i.e.,

$$\varphi_i(G,c,N) = \frac{\omega_i(G,c,N)}{\omega_N(G,c,N)} \cdot c(N)\,, \quad \forall\ i \in N\,, \quad \forall\ \mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle \in \mathcal{F}\,,$$

minimiza el rango medio ponderado[16] y verifica la propiedad de monotonicidad con respecto a la función de coste, pero no verifica la propiedad de pertenencia la corazón.

[16]sobre la clase de todos los procedimientos de asignación eficientes.

3. No monotonicidad con respecto a la función de coste: Para todo sistema admisible de pesos positivo y homogéneo, considérese el procedimiento de asignación de costes definido como sigue:

Dado $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$, sea $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\omega(G,c,N)) = \{A_1^{\omega}(\mathcal{G}), \ldots, A_{k(\mathcal{G})}^{\omega}(\mathcal{G})\}$ la partición definida por el tiempo de finalización inducida por la solución $\omega(G,c,N)$–igualitaria restringida de $\mathcal{G}$.

Sea $\mathcal{C}$ la subclase de problemas SFTC compuesta por todos aquellos problemas del aeropuerto para los que $k(\mathcal{G}) = |\mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\omega(G,c,N))| \geq 3$, y tales que $|A_\ell^{\omega}(\mathcal{G})| \geq 2$, para algún $1 < \ell < k(\mathcal{G})$.

Entonces, para todo problema SFTC, $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, sea i^* el jugador en $A_{\ell(\mathcal{G})}^{w}$ más pequeño (con respecto a $\omega(G,c,N)$) y j^* el jugador más grande. Es sencillo definir una perturbación de la regla ω–igualitaria restringida que coincida con dicho procedimiento fuera de $\mathcal{C}$ y difiera en $\mathcal{C}$ transfiriendo una cantidad lo suficientemente pequeña del jugador i^* al jugador j^* como para que la única propiedad que se viole sea la de monotonicidad con respecto a la función de coste.

Por ejemplo, para el sistema de pesos $\omega(G,c,N) = \mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^n$, defínase $\varphi : \mathcal{F} \to \bigcup_{\substack{N \subseteq \mathbb{N} \\ |N| < \infty}} \mathbb{R}_+^n$ como el procedimiento de asignación de costes en $\mathcal{F}$ que coincide con la regla igualitaria restringida sobre $\mathcal{F} \setminus \{\mathcal{G}_0\}$ y $\varphi(\mathcal{G}_0) = (1, 1'5, 2'5, 3)$, donde $\mathcal{G}_0$ es el problema del aeropuerto definido por $N = \{1, \ldots, 4\}$, $1 \prec 2 \prec 3 \prec 4$, $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 2$ y $c_4 = 3$. □

4.5 Valores de Shapley ponderados: Un enfoque dinámico

En la sección anterior se ha descrito un proceso dinámico (repartos casa–raíz) para la obtención de cada uno de los elementos de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas. Dicho procedimiento se basa en la idea de que cada usuario pinta parte de las carreteras que conectan su pueblo con la capital. En esta sección proponemos un proceso dinámico (repartos raíz–casa) basado en la misma idea, pero con un planteamiento *dual*. En este caso, cada usuario pinta también parte de las carreteras que conectan su pueblo con la capital, pero el sentido considerado es el opuesto. En primer lugar, se fijan exógenamente puntos de suministro intermedios en el árbol de conexión original, de forma que el interés de cada usuario se centra, en esta nueva situación, en ser conectado al punto de suministro intermedio más cercano a su lugar de residencia. Qué fracción de cada carretera del camino que conecta su pueblo con su correspondiente capital local pinta cada jugador depende, por un lado del hecho de que cada jugador empieza trabajando en la carretera que parte de su capital local (vértice raíz local que le corresponde) y, por otro lado, al igual que en el caso anterior, de su tasa de contribución. Se demuestra que el conjunto compuesto por todos aquellos repartos obtenidos mediante este nuevo procedimiento coincide con el conjunto de valores de Shapley (duales) ponderados (Kalai y Samet (1988)) del juego de coste asociado al problema de conexión.

Definición 4.14. Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC. Un *reparto de costes raíz-casa para* $\mathcal{G}$ se define como el vector de reparto de costes, $\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$, que se obtiene siguiendo el *procedimiento que se describe a continuación:*

El coste que cada usuario debe asumir se determina en un número finito de etapas en base a:

1. Una partición $\mathcal{S} = \{G^1, \ldots, G^p\}$ de $\mathcal{G}$ en subproblemas (ver definición 4.4).

2. Un vector de tasas de contribución, $\gamma \in I\!R^n_+$, asignadas a priori a cada uno de los jugadores, admisible para cada uno de los elementos de la partición $\mathcal{S}$. Esto es, $\gamma^{S_k} = (\gamma_i)_{i \in S_k} \in \mathcal{W}(\mathcal{G}^k), \ \forall\ k = 1, \ldots, p$.

3. La partición considerada en **1.** determina los puntos intermedios de suministro, i.e., para todo $i \in N$, el jugador i es asignado a la raíz local r_k si $i \in S_k$, $k \in \{1, \ldots, p\}$.

En cada etapa cada jugador contribuye a costear un determinado arco del camino que le conecta con el punto intermedio de suministro que le ha sido asignado, empezando a contribuir al coste del arco que parte de su raíz local.

Claramente, el coste que cada usuario debe asumir viene dado por

$$\mathbf{x}_i^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \sum_{j\in P_i^{k(i)}} \frac{\gamma_i}{\gamma(F_{k(i)}(j))} c(e_j)\,, \quad \forall\ i \in N\,, \tag{4.29}$$

donde $k(i) \in \{1,\dots,p\}$ es tal que $i \in S_{k(i)}$, $P_i^{k(i)} = P_i \cap S_{k(i)}$, $F_{k(i)}(j) = F(j) \cap S_{k(i)}$ y $\gamma(F_{k(i)}(j)) = \sum_{\ell\in F_{k(i)}} \gamma_\ell$.

Ejemplo 4.6. Sea $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ el problema SFTC definido en el ejemplo 4.1. Para el vector de tasas de contribución $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1} \in I\!R^{10}$ y la partición trivial $\mathcal{S} = \{G\}$, obviamente el reparto raíz–casa, $\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$, coincide con el valor de Shapley del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$.

Para la partición no trivial $\mathcal{S} = \{G^1, G^2, G^3, G^4\}$, definida en ese mismo ejemplo, se tiene:

1. Los jugadores J_1, J_2, J_3, J_4, y J_5 empiezan trabajando en el arco e_1. En la primera jornada de trabajo cada uno pinta la quinta parte de e_1. En la segunda jornada J_1 deja de trabajar ($\mathbf{x}_1^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \frac{4}{5}$), J_2, J_4 y J_5 trabajan en e_2 y J_3 trabaja en e_3, se pinta e_2 y un tercio de e_3. En la tercera jornada J_2 deja de trabajar ($\mathbf{x}_2^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 1\frac{2}{15}$), J_4 trabaja en e_4, J_3 en e_3 y J_5 en e_5, se termina de pintar e_3 ($\mathbf{x}_3^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 1\frac{4}{5}$) y se pinta una novena parte de e_4 y dos novenas partes de e_5. En las jornadas cuarta y quinta dejan de pintar J_5 y J_4, respectivamente, y cada uno debe pagar $\mathbf{x}_4^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 7\frac{2}{15}$ y $\mathbf{x}_5^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 4\frac{2}{15}$.
2. Los jugadores J_6, J_9, y J_{10} empiezan trabajando en el arco e_6. En la primera jornada de trabajo cada uno pinta la tercera parte de e_6. En la segunda jornada J_6 deja de trabajar ($\mathbf{x}_6^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 1\frac{1}{3}$), J_9 trabaja en e_9 y J_{10} trabaja en e_{10}, se pinta e_{10} y un tercio de e_9. En la tercera jornada J_{10} deja de trabajar ($\mathbf{x}_{10}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 3\frac{1}{3}$) y J_9 acaba de pintar e_9 ($\mathbf{x}_9^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 7\frac{1}{3}$).
3. Los jugadores J_7 y J_8 pintan e_7 y e_8, respectivamente: $\mathbf{x}_7^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \mathbf{x}_8^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = 3$.

La demostración de la coincidencia de la familia de soluciones definida previamente con el conjunto de valores de Shapley (duales) ponderados se basa en el resultado establecido por Monderer *et al.* (1992) sobre la coincidencia del corazón de un juego cóncavo con la familia de valores de Shapley (duales) ponderados. En particular, se hace uso de aquellos resultados del citado trabajo que estudian las propiedades de la aplicación Φ_v, definida sobre el conjunto de sistemas de pesos del juego cóncavo (N, v), que asigna a cada sistema de pesos el correspondiente valor de Shapley (dual) ponderado del juego (N, v). A continuación se recuerda la definición de los valores de Shapley (duales) ponderados.

Definición 4.15 (Monderer et al.). Un *sistema de pesos*, ω, es un par. $(\boldsymbol{\lambda}, \Sigma)$, donde $\boldsymbol{\lambda} \in I\!R^n$, $\lambda_i > 0$, $\forall\ i \in N$, y $\Sigma = (S_1, S_2, \ldots S_p)$ es una partición ordenada del conjunto de jugadores N.

Definición 4.16 (Monderer et al.). Dado un sistema de pesos, ω, se define el *valor de Shapley (dual) ponderado* como la función lineal, $\Phi^\omega : G^n \to I\!R^n$, definida para cada juego dual de unanimidad, u_S^*, como sigue:

Sea $k = \text{máx}\{j \,/\, S_j \cap S \neq \emptyset\}$, denótese $\overline{S} = S \cap S_k$. Entonces,

$$\Phi_i^\omega(u_S^*) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda(\overline{S})}, & i \in \overline{S}, \\ 0, & i \notin \overline{S}. \end{cases} \tag{4.30}$$

La fracción $\dfrac{\lambda_i}{\lambda(\overline{S})}$, siendo $\lambda(\overline{S}) = \sum_{j \in \overline{S}} \lambda_j$, representa el peso relativo del jugador i en la coalición S.

Observación 4.4. Por la proposición 4.1 y la linealidad del valor de Shapley, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Phi_i^\omega(c_{\mathcal{G}}) = \sum_{j \in N} c(e_j)\Phi_i^\omega(u_{F(j)}^*), \quad \forall\ i \in N. \tag{4.31}$$

Trivialmente del lema 4.3 se deduce que todo reparto raíz–casa pertenece al corazón del juego de coste $(N, c_{\mathcal{G}})$. Luego, como el conjunto de todos los valores de Shapley (duales) ponderados coincide con el corazón del juego (Monderer *et al.* (1992)), entonces todo reparto raíz–casa resulta ser un valor de Shapley (dual) ponderado. Como se demuestra a continuación el recíproco también es cierto.

Teorema 4.4. *Sea $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$ un problema SFTC, entonces para todo sistema de pesos ω, $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ es un reparto raíz-casa.*

Demostración: Sea $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ un valor de Shapley (dual) ponderado cualquiera, entonces $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$.

Si $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ pertenece al interior relativo de $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces el sistema de pesos ω viene dado por $(\boldsymbol{\lambda}, \{N\})$ (ver Monderer *et al.* (1992)). En tal caso, se verifica

$$\Phi_i^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = \sum_{j \in P_i} \frac{\lambda_i}{\lambda(F(j))} c(e_j), \quad \forall\ i \in N.$$

Entonces, $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = \mathbf{x}^{\gamma, \mathcal{S}}(\mathcal{G})$, donde $(\boldsymbol{\gamma}, \mathcal{S})$ se define como $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\lambda}$ y $\mathcal{S} = \{G\}$.

Si $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ pertenece a una de las facetas del poliedro $\text{core}(c_{\mathcal{G}})$, entonces dependiendo del tipo de faceta de que se trate (ver proposición 4.4), se distinguen dos casos:

Caso 1. Si $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ pertenece a una faceta de tipo (II), sea

$$L = \left\{ i \in N \,/\, \Phi_i^{\omega} = 0 \right\} \subseteq N \setminus \left\{ i \in N \,/\, i \text{ vértice hoja } \right\}.$$

Entonces, el sistema de pesos $\omega = (\boldsymbol{\lambda}, \Sigma)$ es tal que $\Sigma = \{L, N \setminus L\}$ (ver Monderer *et al.* (1992) y el estudio poliédrico llevado a cabo en la sección 4.3). Se demostrará que $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = \mathbf{x}^{\gamma, \mathcal{S}}(\mathcal{G})$, donde $\mathcal{S} = \{G\}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ viene dado por

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in L, \\ \lambda_i, & \text{si } i \notin L. \end{cases}$$

En tal caso, de la expresión (4.29) del reparto raíz–casa, $\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$, se deduce

$$\mathbf{x}_i^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in P_i} \frac{\gamma_i}{\gamma(F(j))} c(e_j)\,, & \text{si } i \notin L\,, \\ 0\,, & \text{si } i \in L\,. \end{cases}$$

Nótese que $\gamma(F(j)) > 0\ \forall j \in N$, ya que $\{i \in N \,/\, i \text{ vértice hoja } \} \subseteq N \setminus L$ y $\gamma_i = \lambda_i > 0$, para todo $i \in N \setminus L$.

Sean $S_1 = L$ y $S_2 = N \setminus L$, entonces $\max\{k \,/\, F(j) \cap S_k \neq \emptyset\} = 2$, para todo $j \in N$. Luego,

$$\overline{F(j)} = F(j) \cap S_2 = \{i \in F(j) \,/\, \gamma_i = \lambda_i > 0\} \subseteq N \setminus L\,.$$

Así, para todo jugador $j \in N$ se verifica

$$\Phi_i^{\omega}(u^*_{F(j)}) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \in L\,, \\ \dfrac{\lambda_i}{\lambda(\overline{F(j)})} = \dfrac{\gamma_i}{\gamma(F(j))}\,, & \text{si } i \notin L\,. \end{cases}$$

Luego, de la expresión (4.31) se deduce $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = \mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$.

Caso 2. Si $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ pertenece a una faceta de tipo (I), sea $\mathcal{T} = \{S_1, \dots S_p\}$ la partición del conjunto de jugadores N asociada a la partición en subproblemas $\mathcal{S}(\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})) = \{G^1, \dots, G^p\}$ inducida por $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}})$ (proposición 4.2). Se verifica (ver Monderer *et al.* (1992) y el estudio poliédrico llevado a cabo en la sección 4.3) que el sistema de pesos ω es tal que $\Sigma = \{\widetilde{S_p}, \widetilde{S_{p-1}}, \dots, \widetilde{S_1}\}$, donde para todo $k = 1, \dots, p$, se tiene que:

$$\widetilde{S_k} = S_k\,, \qquad \text{si } \Phi_i^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) > 0 \quad \forall\ i \in S_k,$$

$$\widetilde{S_k} = \{L_k, S_k \setminus L_k\}\,, \qquad \text{si } L_k = \{i \in S_k \,/\, \Phi_i^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = 0\} \neq \emptyset.$$

Se demostrará que $\Phi^\omega(c_\mathcal{G}) = \mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$, donde $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Phi^\omega(c_\mathcal{G}))$ es la partición en subproblemas inducida por $\Phi^\omega(c_\mathcal{G})$ y γ viene dado por

$$\gamma_i = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) = 0, \\ \lambda_i\,, & \text{si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) > 0. \end{cases}$$

Entonces, el reparto casa–raíz, $\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$, viene dado por

$$\mathbf{x}_i^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) = 0\,, \\ \displaystyle\sum_{j\in P_i^{k(i)}} \frac{\gamma_i}{\gamma(F_{k(i)}(j))} c(e_j)\,, & \text{si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) > 0\,. \end{cases}$$

Veamos que $\Phi^\omega(c_\mathcal{G})$ coincide con $\mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$. Si $j \notin P_i$, entonces $\Phi_i^\omega(u^*_{F(j)}) = 0$. En otro caso, cabe distinguir entre dos posibilidades:

(i) Si $j \notin P_i \cap S_{k(i)}$, entonces $\overline{F(j)} \subseteq F(j) \cap S_\ell$, para algún $\ell < k(i)$. Luego, $i \notin \overline{F(j)}$ y, por consiguiente, $\Phi_i^\omega(u^*_{F(j)}) = 0$.

(ii) Si $j \in P_i \cap S_{k(i)}$, entonces se debe distinguir, de nuevo, entre dos casos:

A. Si $\widetilde{S_{k(i)}} = S_{k(i)}$, entonces $\overline{F(j)} = F_j \cap S_{k(i)} \subseteq \{i \in N \,/\, \lambda_i = \gamma_i\}$ y, por tanto,

$$\Phi_i^\omega(u^*_{F(j)}) = \frac{\lambda_i}{\lambda(\overline{F(j)})} = \frac{\gamma_i}{\gamma(F_{k(i)}(j))}\,.$$

B. Si $\widetilde{S_{k(i)}} = \{L_{k(i)}, S_{k(i)} \setminus L_{k(i)}\}$, entonces siguiendo el mismo razonamiento que en el caso 1, se tiene que:

$$\text{Si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) = 0 \text{ (i.e., } i \in L_{k(i)}) \implies \Phi_i^w(u^*_{F(j)}) = 0\,.$$
$$\text{Si } \Phi_i^\omega(c_\mathcal{G}) > 0 \implies \Phi_i^\omega(u^*_{F(j)}) = \frac{\lambda_i}{\lambda(\overline{F(j)})} = \frac{\gamma_i}{\gamma(F_{k(i)}(j))}\,.$$

Luego, de la expresión (4.31) se deduce $\Phi^{\omega}(c_{\mathcal{G}}) = \mathbf{x}^{\gamma,\mathcal{S}}(\mathcal{G})$. □

La coincidencia entre la familia de repartos raíz–casa y la familia de valores de Shapley (duales) ponderados pone de manifiesto la relación en cierto modo dual existente entre ambas familias de soluciones. En particular, tiene especial interés la relación entre el valor de Shapley ($\omega = (\mathbf{1}, \{N\})$) y la solución igualitaria restringida de Dutta y Ray ($\omega = \mathbf{1}$): mientras que esta última trata de ser lo más solidaria posible, siempre manteniendo una conducta consistente con sus preferencias personales, el valor de Shapley tiende a acentuar las diferencias.

4.6 Extensión del modelo: Juego del árbol fijo con tasas de participación

En esta sección estudiamos las posibilidades que ofrece el considerar la formación de coaliciones con tasas de participación en el contexto que nos ocupa: Juegos del árbol fijo.

En el modelo presentado en las secciones anteriores no se han considerado ni el nivel de rendimiento de cada una de las conexiones que componían la red, ni las necesidades de suministro específicas de cada uno de los usuarios. En este modelo se asume implícitamente que, o bien el coste involucrado no depende del nivel de uso que se haga de la conexión, o bien los costes vienen dados en función del precio que cuesta mantener la red en condiciones óptimas y los usuarios no se plantean la posibilidad de modificar el servicio de mantenimiento de la red.

Basándonos en este planteamiento, proponemos y exploramos diferentes extensiones del juego original, incorporando al modelo la posibilidad de que los usuarios se planteen qué nivel de uso van a solicitar. La primera de ellas, *problema* SFTC *con tasas de participación y con pérdidas*, extiende un juego del árbol fijo a partir del problema SFTC que lo define. La segunda, *familia de t–extensiones*, lo extiende a través de la representación del juego en función de la base de juegos duales de unanimidad. Por último, consideramos dos extensiones de carácter general: la extensión multilineal (Owen (1972)) y la extensión de Cornet (Cornet (1975)). Para cada una de ellas, se analiza el comportamiento del corazón del juego con tasas de participación en relación con el corazón del juego nítido.

La definición de problema SFTC con tasas de participación y con pérdidas, que denotaremos por problema p–SFTC, generaliza el concepto de problema SFTC a partir del análisis de las características del tipo de situaciones que quieren ser incorporadas al modelo.

Dado un problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, supondremos que el coste asociado a cada conexión se corresponde con el coste de mantener dicha conexión a *pleno rendimiento*, de tal manera que si una cierta conexión e_i es requerida por el sistema con un nivel de rendimiento del τ por uno entonces, el coste de mantenimiento viene dado por una función monótona no decreciente, $\widetilde{C}_i$, definida sobre el intervalo $[0,1]$, verificando las condiciones de contorno $\widetilde{C}_i(0) = 0$ y $\widetilde{C}_i(1) = c(e_i)$. Nos referiremos a la función $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_n)$ como *función de coste extendido.*

Teniendo en cuenta las consecuencias derivadas de que el nivel de rendimiento de la red no sea suficiente para satisfacer óptimamente todas las necesidades de los usuarios, resulta lógico incorporar al modelo una nueva función de coste, $d = (d_1, \dots, d_n)$, definida sobre el intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}^n_+$, que refleje lo que supone para cada usuario la pérdida, en términos relativos, de suministro, i.e., $d_i(\tau)$ representa el coste que debe asumir el usuario i, $i = 1, \dots, n$, por la pérdida del τ por uno de suministro. Cada campo escalar $d_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ deberá ser monótono no decreciente y verificar $d_i(0) = 0$. A esta función la denominaremos *función de pérdida.*

Así, un problema p–SFTC vendrá dado por una tripleta $\widetilde{\mathcal{G}} = \langle \mathcal{G}, \widetilde{C}, d\rangle$, donde $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$ es un problema SFTC y $\widetilde{C}$ y d son las funciones de coste extendido y de pérdida, respectivamente.

Mientras que un problema SFTC genera un juego de coste nítido, un problema p–SFTC generará un juego de coste con tasas de participación $(N, c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$. En este caso, dada una coalición con tasas de participación, $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, τ_i representa el nivel de uso requerido por el jugador (usuario) i, $i = 1, \ldots, n$. El coste $c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\tau})$ de una coalición con tasas de participación vendrá dado por el coste necesario para satisfacer las peticiones de todos sus miembros, y por el coste de no conexión de aquellos jugadores que participan en la coalición en un grado estrictamente positivo (la coalición no se hace cargo del coste por no conexión de aquellos jugadores que no se involucran en ella).

Definición 4.17. Para todo problema p–SFTC, $\widetilde{\mathcal{G}} = \langle \mathcal{G}, \widetilde{C}, d\rangle$, se define el *juego de coste generado por* $\widetilde{\mathcal{G}}$, como el juego con tasas de participación, $(N, c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$, cuya función característica está definida por

$$c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i\in N} \widetilde{C}_i(\delta_i(\boldsymbol{\tau})) + \sum_{i\in \mathsf{Sop}(\boldsymbol{\tau})} d_i(1-\delta_i(\boldsymbol{\tau}))\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,,$$

donde $\delta_i(\boldsymbol{\tau}) = \max\{\tau_j \,/\, j \in F(i)\}$, $i = 1, \ldots n$, $\mathrm{Sop}(\boldsymbol{\tau}) = \{i \in N \,/\, \tau_i > 0\}$ es el soporte de la coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau}$ y $c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}) = 0$.

El juego así definido extiende el juego de coste nítido $(N, c_{\mathcal{G}})$ asociado al problema SFTC $\mathcal{G}$. Luego, cabe esperar que el corazón del juego con tasas de participación reduzca el del juego nítido. Veamos qué ocurre si las funciones de coste $\widetilde{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ son cóncavas, condición que, por otra parte, resulta natural exigir.

Proposición 4.9. *Sea $\langle \mathcal{G}, \widetilde{C}, d\rangle$ un problema p-SFTC tal que $\widetilde{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, es una función cóncava, entonces* $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) = \mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$.

Demostración: Veamos que se verifica la igualdad probando la doble inclusión. Para comprobar la inclusión $\mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$ se probará que $(N, c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ extiende el juego nítido $(N, c_{\mathcal{G}})$.

Sea $\mathbf{x}^S \subseteq N$ una coalición nítida no vacía, entonces

$$\delta_i(\mathbf{x}^S) = 0\,, \quad \forall\ i \notin T_S\,,$$

$$\delta_i(\mathbf{x}^S) = 1, \quad \forall\ i \in \mathrm{Sop}(\mathbf{x}^S) = S.$$

Luego, de las condiciones de contorno impuestas a las funciones $\widetilde{C}$ y d, se deduce trivialmente que $c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(\mathbf{x}^S) = c_{\mathcal{G}}(S)$, $\forall\ S \subseteq N$, y por consiguiente, $\mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$.

En cuanto a la otra inclusión, $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$, considérese el juego con tasas de participación $(N, \widetilde{k})$ definido por

$$\widetilde{k}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} \delta_i(\boldsymbol{\tau}) c(e_i), \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n.$$

Se probará que $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathrm{core}(\widetilde{k}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$.

Veamos que $\mathrm{core}(\widetilde{k}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$: $\widetilde{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, es una función cóncava verificando las condiciones de contorno $\widetilde{C}_i(0) = 0$ y $\widetilde{C}_i(1) = c(e_i)$, entonces,

$$\widetilde{C}_i(\tau) \geq (1-\tau)\widetilde{C}_i(0) + \tau \widetilde{C}_i(1) = \tau c(e_i), \quad \forall\ \tau \in [0,1], \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Luego, para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$ se verifica

$$c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(\boldsymbol{\tau}) \geq \sum_{i \in N} \delta_i(\boldsymbol{\tau}) c(e_i) + \sum_{i \in \mathrm{Sop}(\boldsymbol{\tau})} d_i(1 - \delta_i(\boldsymbol{\tau})) \geq \sum_{i \in N} \delta_i(\boldsymbol{\tau}) c(e_i).$$

Entonces, de la igualdad $c_{\widetilde{\mathcal{G}}}(N) = \widetilde{k}(N)$, se deduce $\mathrm{core}(\widetilde{k}) \subseteq \mathrm{core}(c_{\widetilde{\mathcal{G}}})$.

Veamos que $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}}) \subseteq \mathrm{core}(\widetilde{k})$: Sea $\mathbf{x}$ un vector de reparto de costes en $\mathrm{core}(c_{\mathcal{G}})$ cualquiera, entonces (ver lema 4.3),

$$x_i = \sum_{j \in P_i}^{n} y_i^j c(e_j), \quad \forall\ i \in N,$$

donde $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^n$ pertenecen al simplex unidad en $\mathbb{R}^{F(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, respectivamente. Luego, para toda coalición con tasas de participación $\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$ se verifica

$$\sum_{i \in N} x_i \tau_i = \sum_{i \in N} \tau_i \sum_{j \in P_i} y_i^j c(e_j) = \sum_{j=1}^{n} c(e_j) \sum_{i \in F(j)} y_i^j \tau_i \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} c(e_j) \sum_{i \in F(j)} \delta_j(\boldsymbol{\tau}) y_i^j = \sum_{j=1}^{n} c(e_j) \delta_j(\boldsymbol{\tau}) = \widetilde{k}(\boldsymbol{\tau}).$$

Luego, $\mathbf{x} \in \operatorname{core}(\widetilde{k})$. □

A continuación nos centraremos en aquellas extensiones que se definen a partir del juego de coste asociado a un problema SFTC.

Dado un problema SFTC $\mathcal{G}$, el juego de coste asociado, $(N, c_{\mathcal{G}})$, se puede expresar (ver proposición 4.1) como

$$c_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{i \in N} c(e_i) u^*_{F(i)}.$$

Luego, diferentes extensiones de los juegos duales de unanimidad, $\{(N, \widetilde{u}^*_S)\}_{S \subseteq N}$, darán lugar a diferentes extensiones del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$ sin más que definir

$$\widetilde{c}_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} c(e_i) \widetilde{u}^*_{F(i)}(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall \ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n.$$

Las extensiones de los juegos duales de unanimidad con las que trabajaremos surgen de considerar que dichos juegos se corresponden con el operador lógico clásico "o", i.e., $u^*_S(T) = 1$ si y sólo si $i_1 \in S$ ó $i_2 \in S$ ó $\cdots$ ó $i_t \in S$, siendo $T = \{i_1, \ldots, i_t\}$. En tal caso, todo operador de agregación que generalice la noción de disyunción de la lógica clásica definirá una posible extensión. En el contexto de la lógica difusa estos operadores vienen dados por *conormas* *triangulares.*

Definición 4.18. Se define una *conorma triangular* (t–conorma) como una función $\widetilde{s} : [0,1]^2 \to [0,1]$ que verifica las siguientes propiedades:

(i) Conmutatividad.

(ii) Asociatividad.

(iii) Monotonía.

(iv) Condición de contorno: $\widetilde{s}(x,0) = x\,, \quad \forall\ x \in [0,1]$.

Aplicando la asociatividad, se define recursivamente $\widetilde{s}^n : [0,1]^n \to [0,1]$ como

$$\widetilde{s}^n(x_1,\ldots,x_n) = \widetilde{s}(\widetilde{s}^{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}),x_n) = \widetilde{s}(x_1,\widetilde{s}^{n-1}(x_2,\ldots,x_n))\,, \quad \forall\ \mathbf{x} \in [0,1]^n\,.$$

Definición 4.19. Dado un juego del árbol fijo (N, c_G), se define su *$t_{\widetilde{s}}$–extensión* como el juego con tasas de participación $(N, c_G^{\widetilde{s}})$ dado por

$$c_G^{\widetilde{s}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i\in N} c(e_i)u^{\widetilde{s}}_{F(i)}(\boldsymbol{\tau})\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,,$$

donde, para toda coalición $T \subseteq N$ no vacía, el juego $(N, u_T^{\widetilde{s}})$ es

$$u_T^{\widetilde{s}}(\boldsymbol{\tau}) = \widetilde{s}^t(\boldsymbol{\tau}^T)\,, \quad \forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,,$$

con $\boldsymbol{\tau}^T = (\tau_i)_{i\in T}$ y $t = |T|$.

Ejemplos

1. La extensión multilineal (Owen (1972)) del juego (N, c_G) es un caso particular de

t–extensión. Se corresponde con la $t_{\widetilde{s}}$–extensión asociada a la t–conorma probabilística,

$$\widetilde{s}(x,y) = 1 - (1-x)(1-y) = x + y - xy\,, \quad \forall\ (x,y) \in [0,1]^2\,.$$

En este caso,

$$u^{\widetilde{s}}_{F(i)}(\tau) = 1 - \prod_{j \in F(i)} (1-\tau_j)\,, \quad \forall\ \tau \in [0,1]^n\,, \quad \forall\ i \in N\,.$$

2. La $t_{\widetilde{s}}$–extensión asociada a la t–conorma del máximo es un caso particular de juego asociado a un problema p–SFTC en el que las funciones de coste extendido son $\widetilde{C}_i(x) = c(e_i)x$, $i = 1, \ldots, n$, y la función de pérdida es nula.

Precisamente, este último ejemplo (el que la $t_{\widetilde{s}}$–extensión definida por el máximo sea un juego generado por un problema p–SFTC) pone de manifiesto que ninguna $t_{\widetilde{s}}$–extensión reduce el corazón del juego nítido; ya que el máximo es la mínima t–conorma. Luego, para toda $t_{\widetilde{s}}$–extensión, $(N, c^{\widetilde{s}}_{\mathcal{G}})$, se verifica

$$c^{\widetilde{s}}_{\mathcal{G}}(\tau) \geq c^{\text{máx}}_{\mathcal{G}}(\tau)\,, \quad \forall\ \tau \in [0,1]^n\,,$$

y, por tanto, $\text{core}(c_{\mathcal{G}}) \subseteq \text{core}(c^{\text{máx}}_{\mathcal{G}}) \subseteq \text{core} c^{\widetilde{s}}_{\mathcal{G}}$.

Por último, ya sólo queda por analizar la extensión de Cornet (1975) de un juego del árbol fijo. Se comprobará que esta extensión sí reduce el corazón del juego original. Concretamente, el corazón contiene, a lo sumo, a un único punto, el valor de Shapley del juego del árbol fijo.

Definición 4.20 (Cornet (1975)). Dado un juego TU $(N, v) \in G^n$, se define su *extensión de Cornet* como el juego con tasas de participación, $(N, \omega v) \in F\Gamma^n$, con función característica:

$$\omega v(\tau) = \sum_{S \subseteq N} \alpha_S(v) \Big(\prod_{i \in S} \tau_i \Big)^{\frac{1}{s}}\,, \quad \forall\ \tau \in [0,1]^n\,,$$

donde $s = |S|$ y

$$\alpha_S(v) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)\,, \quad \forall \; S \subseteq N\,,$$

es el *dividendo* de la coalición S, i.e., cantidad de que dispone la coalición S para repartir entre sus miembros[17].

Qué parte del dividendo de la coalición S recibe una coalición con tasas de participación, $\boldsymbol{\tau}$, depende de la participación media[18] de los individuos de S en la coalición $\boldsymbol{\tau}$.

Se comprueba fácilmente que la extensión de Cornet de un juego del árbol fijo, $(N, c_{\mathcal{G}})$, viene dada por

$$\omega c_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} c(e_i) \Big[\sum_{S \subseteq F(i)} (-1)^{s+1} \Big(\prod_{j \in S} \tau_j \Big)^{\frac{1}{s}} \Big]\,, \quad \forall \; \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n\,. \tag{4.32}$$

Proposición 4.10. *Para todo juego del árbol fijo, $(N, c_{\mathcal{G}})$, generado por un problema SFTC se verifica que* $\operatorname{core}(\omega c_{\mathcal{G}}) \subseteq \{\Phi(c_{\mathcal{G}})\}$*, donde $\Phi(c_{\mathcal{G}})$ es el valor de Shapley del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$.*

Demostración: En primer lugar, se demostrará que si $\boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$ entonces $\varphi_i = \Phi_i(c_{\mathcal{G}})$ para todo vértice i que no sea una hoja del árbol, comprobando la desigualdad en ambos sentidos.

Veamos que se verifica la desigualdad $\varphi_i \geq \Phi_i(c_{\mathcal{G}})$, para todo jugador i no residente en las hojas del árbol y para toda imputación $\boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$. Sea $\gamma(i) \in [0,1]^n$ la coalición con tasas de participación $(\gamma_i, \mathbf{1})$, entonces el coste de dicha coalición en el juego extendido viene dado por

$$\omega c_{\mathcal{G}}(\gamma(i)) = c_{\mathcal{G}}(N) + m_i(\gamma)\,, \quad \forall \; \gamma \in [0,1]\,, \quad \forall \; i \in \{j \in N \,/\, |F(j)| \geq 2\}\,,$$

[17]El dividendo de una coalición $S \subsetneqq N$ no vacía se corresponde con el coeficiente asociado al juego de unanimidad, (N, u_S), en la expresión del juego (N, v) en función de la base $\{(N, u_S)\}_{S \subseteq N}$.

[18]Calculada como la media geométrica.

donde m_i es una función, $m_i : [0,1] \to I\!R_+$, que se define como

$$m_i(\gamma) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \gamma^{\frac{1}{\ell}} \sum_{k \geq \ell} \binom{k-1}{\ell-1} \sum_{j \in P_i \cap V_k} c(e_j)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]$$

y siendo $V_k = \{\, j \in N \ /\ |F(j)| = k \,\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Así, si $\varphi \in \text{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$ entonces, de las desigualdades del corazón correspondientes a las coaliciones de la forma $\gamma(i)$, se deduce que

$$\varphi_i \geq \frac{m_i(\gamma)}{\gamma - 1}\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1)\,, \quad \forall\ i \in N \setminus V_1\,.$$

Tomando límites se tiene que

$$\varphi_i \geq \lim_{\gamma \to 1} \frac{m_i(\gamma)}{\gamma - 1}\,, \quad \forall\ i \in N \setminus V_1\,. \tag{4.33}$$

Para calcular este límite se debe tener en cuenta que, reordenando los términos de la suma que define la función m_i, se obtiene

$$m_i(\gamma) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} (-1)^{\ell} \gamma^{\frac{1}{\ell+1}} \Big) \sum_{j \in P_i \cap V_k} c(e_j)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]\,,$$

de donde, aplicando el cálculo combinatorio, se deduce que $m_i(1) = 0$. Entonces, calculando el límite mediante la regla de L'Hôpital, y teniendo en cuenta que

$$\frac{dm_i}{d\gamma}(1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j \in P_i \cap V_k} c(e_j) = \Phi_i(c_{\mathcal{G}})\,, \quad \forall\ i \in N \setminus V_1\,,$$

se tiene que

$$\varphi_i \geq \Phi_i(c_{\mathcal{G}}), \quad \forall\ i \in N \setminus V_1 .$$

Para demostrar la desigualdad en sentido contrario, $\varphi_i \leq \Phi_i(c_{\mathcal{G}}), \ \forall\ i \in N \setminus V_1$, se procede de la misma forma pero, considerando ahora, las desigualdades del corazón correspondientes a coaliciones de la forma $\gamma(N \setminus \{i\}) = (1_i, \boldsymbol{\gamma})$, donde $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma, \ldots, \gamma) \in [0,1]^{n-1}$. En este caso, para todo jugador $i \in N \setminus V_1$ el coste de la coalición $\gamma(N \setminus \{i\})$ en el juego extendido es:

$$\omega c_{\mathcal{G}}(\gamma(N \setminus \{i\})) = \gamma c_{\mathcal{G}}(N) + r_i(\gamma)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]\,, \quad \forall\ i \in N \setminus V_1\,,$$

donde r_i es una función, $r_i : [0,1] \to I\!R_+$, que se define como

$$r_i(\gamma) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \gamma^{\frac{\ell-1}{\ell}} \sum_{k \geq \ell} \binom{k-1}{\ell-1} \sum_{j \in P_i \cap V_k} c(e_j)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]\,, \tag{4.34}$$

Sea $\boldsymbol{\varphi} \in \text{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$, entonces

$$\varphi_i \leq \lim_{\gamma \to 1} \frac{r_i(\gamma)}{1-\gamma}, \quad \forall\ i \in N \setminus V_1 .$$

Siguiendo los mismos pasos que antes para el cálculo del límite, se comprueba que

$$\varphi_i \leq \Phi_i(c_{\mathcal{G}}), \quad \forall\ i \in N \setminus V_1 . \tag{4.35}$$

Una vez probada la igualdad $\varphi_i = \Phi_i(c_{\mathcal{G}})$ para todo jugador i no residente en las hojas del árbol y para toda imputación $\boldsymbol{\varphi} \in \text{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$, estamos en condiciones de probar que dicha igualdad se da también para aquellos jugadores que residen en las hojas.

En primer lugar, se demostrará que para todo $i \in V_1$ se verifica $\varphi_i \leq c(e_i) + \Phi_{j^*}(c_{\mathcal{G}})$, siendo $j^* = \pi(i)$. Para ello seguiremos el mismo razonamiento desarrollado para probar la desigualdad (4.35).

En este caso, para todo jugador $i \in V_1$ el coste de la coalición $\gamma(N \setminus \{i\})$ en el juego extendido viene dado por

$$\omega c_{\mathcal{G}}(\gamma(N \setminus \{i\})) = \gamma(c_{\mathcal{G}}(N) - c(e_i)) + r_i(\gamma)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]\,,$$

donde la función r_i se define como en (4.34). Obsérvese que en este caso, las funciones r_i se pueden expresar como

$$r_i(\gamma) = c(e_i) + r_{j^*}(\gamma)\,, \quad \forall\ \gamma \in [0,1]\,, \quad \forall\ i \in V_1\,.$$

Sea $\varphi \in \mathrm{core}(\omega c_{\mathcal{G}})$, entonces

$$\varphi_i \leq \lim_{\gamma \to 1} \frac{(1-\gamma)c(e_i) + r_{j^*}(\gamma)}{1-\gamma}\,, \quad \forall\ i \in V_1\,,$$

de donde se deduce

$$\varphi_i \leq c(e_i) + \Phi_{j^*}(c_{\mathcal{G}})\,, \quad \forall\ i \in V_1\,. \tag{4.36}$$

Por otro lado, aplicando el lema 4.4, se deduce la existencia de $p_i \geq 0$, $i \in V_1$, tales que

$$\varphi_i = c(e_i) + p_i\,, \quad \forall\ i \in V_1\,,$$

mientras que, de la coincidencia ya probada y de la eficiencia de φ, se deduce que

$$\sum_{i \in V_1} p_i = \sum_{j \in \pi(V_1)} (|F(j)| - 1)\Phi_j(c_\mathcal{G}), \tag{4.37}$$

donde $\pi(V_1) = \{\pi(i) \in N \,/\, i \in V_1\}$ es el conjunto de padres de los vértices hoja. Por tanto, utilizando la desigualdad (4.36), se tiene que

$$\varphi_i = c(e_i) + \Phi_{j^*}(c_\mathcal{G}) = \Phi_i(c_\mathcal{G}), \quad \forall\ i \in V_1 .$$

□

En el caso de que la extensión de Cornet de todo juego dual de unanimidad sea convexa, en cuyo caso se verificaría que la extensión de todo juego del árbol fijo también lo es, se tendría (ver Aubin (1981)) que

$$\text{core}(\omega c_\mathcal{G}) = \{\, D\omega c_\mathcal{G}(N)\,\} = \{\, \Phi(c_\mathcal{G})\,\},$$

donde $D\omega c_\mathcal{G}(N)$ es el gradiente de $\omega c_\mathcal{G}$ evaluado en $\mathbf{1} \equiv N$.

4.7 Prenucléolo mínimo cuadrático: Cálculo y propiedades

Concluimos este capítulo con el estudio de las propiedades del prenucléolo mínimo cuadrático como procedimiento de asignación de costes para problemas FTC no necesariamente estándar. Se considerará el caso más general en el que del vértice raíz puede emanar más de un arco, ya que el prenucléolo mínimo cuadrático no es en general descomponible.

Sea $\mathcal{F}_*$ el conjunto compuesto por todos aquellos problemas FTC verificando las mismas propiedades que un problema estándar, con la posible excepción de la propiedad referente a que del vértice raíz sólo puede partir un arco. En lo que sigue, cada vez que nos refiramos al prenucléolo mínimo cuadrático nos estaremos refiriendo al procedimiento de asignación de costes, $\lambda : \mathcal{F}_* \to \bigcup_{\substack{N \subseteq I\!N \\ |N| < \infty}} I\!R^n$, que asigna a cada problema $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}_*$ el prenucléolo mínimo cuadrático del juego $(N, c_{\mathcal{G}})$, $\lambda(G, c, N) \in I\!R^n$.

A continuación deducimos su expresión en función de los parámetros que definen un juego del árbol fijo generado por un problema FTC $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_*$.

Dado $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle \in \mathcal{F}_*$, sea $L_1(G) = \{ i \in N \ / \ \pi(i) = r \}$ el conjunto de vértices que componen la primera capa del árbol. El prenucléolo mínimo cuadrático del juego del árbol fijo $(N, c_{\mathcal{G}})$ generado por $\mathcal{G}$ viene dado por:

$$\lambda_i(c_{\mathcal{G}}) = \frac{c_{\mathcal{G}}(N)}{n} + \frac{1}{n}\Big((n - f_i)\frac{c(e_i)}{2f_i - 1} - \sum_{j \neq i} f_j \frac{c(e_j)}{2f_j - 1} \Big), \qquad \forall \ i \in L_1(G), \qquad (4.38)$$

$$\lambda_i(c_{\mathcal{G}}) = \lambda_{\pi(i)}(c_{\mathcal{G}}) + \frac{c(e_i)}{2f_i - 1}, \qquad \forall \ i \notin L_1(G), \qquad (4.39)$$

donde $f_i = |F(i)|$, para todo $i \in N$.

Estudiemos algunas de las propiedades que se exigen a un mecanismo de asignación de costes para problemas FTC.

Sea φ un procedimiento de asignación de costes en $\mathcal{F}_*$. Se dice que φ verifica la propiedad de:

(i) Ordenación justa con respecto a la relación de precedencia (Maschler *et al.* (1995)) si para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_*$ se verifica que $i \preceq j$ implica que $\varphi_i(G, c, N) \leq \varphi_j(G, c, N)$, para todo par de jugadores $i, j \in N$.

(ii) Simetría con respecto a los costes individuales si para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_*$ se verifica que $c_{\mathcal{G}}(\{i\}) = c_{\mathcal{G}}(\{j\})$ implica que $\varphi_i(G, c, N) = \varphi_j(G, c, N)$, para todo par de jugadores $i, j \in N$.

(iii) *Ordenación justa con respecto a los costes individuales* si para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{F}_*$ se verifica que $c_{\mathcal{G}}(\{i\}) \leq c_{\mathcal{G}}(\{j\})$ implica que $\varphi_i(G,c,N) \leq \varphi_j(G,c,N)$, para todo par de jugadores $i,j \in N$.

(iv) *Monotonicidad con respecto a la función de coste* (Maschler *et al.* (1995), Sudhölter y Potters (1995), Aadland y Kolpin (1998)) si y sólo si para todo par de problemas en $\mathcal{F}_*$, $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle$ y $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle$, tales que $c' \geq c$ se verifica

$$\varphi_i(G,c',N) \geq \varphi_i(G,c,N)\,, \quad \forall\ i \in N\,.$$

(v) *Monotonicidad en coste* (Gellekom y Potters (1997)) si y sólo si para todo par de problemas en $\mathcal{F}_*$, $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle$ y $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle$, tales que existe $i \in N$ con $c(e_i) < c'(e_i)$ y $c(e_j) = c'(e_j)$ para todo $j \neq i$, se verifica

$$\varphi_j(G,c,N) < \varphi_j(G,c',N)\,, \quad \forall\ j \in F(i)\,.$$

(vi) *Monotonicidad coalicional* (Sudhölter y Potters (1995)) si y sólo si para todo par de problemas en $\mathcal{F}_*$, $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle$ y $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle$, tales que existe un tronco T_0 de G con $c(e_i) \leq c'(e_i)$, $\forall\ i \in N \setminus T_0$ y $c(e_i) = c'(e_i)$, $\forall\ i \in T_0 \setminus \{r\}$, se verifica

$$\varphi_i(G,c,N) \leq \varphi_i(G,c',N)\,, \quad \forall\ i \notin T_0\,.$$

(vii) *Monotonicidad con respecto al camino* si y sólo si para todo par de problemas en $\mathcal{F}_*$, $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle$ y $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle$, tales que existe $j \in N$ con $c(e_i) = c'(e_i)$, $\forall\ i \in P_j$ y $c(e_i) \leq c'(e_i)$, $\forall\ i \in N$, se verifica

$$\varphi_i(G,c',N) \leq \varphi_i(G,c,N)\,, \quad \forall\ i \in P_j\,.$$

(viii) <u>*Pertenencia al corazón*</u> si y sólo si $\xi(G,c,N) \in \text{core}(c_{\mathcal{G}})$, para todo problema SFTC $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle \in \mathcal{F}_*$.

Proposición 4.11. *El prenucléolo mínimo cuadrático verifica las propiedades* (i), (iv), (v) *y* (vi).

Demostración: Sea $\mathcal{G} = \langle G,c,N\rangle \in \mathcal{F}_*$, a continuación comprobaremos que $\lambda(G,c,N)$ verifica las condiciones establecidas en las propiedades (i), (iv) y (vi).

(i) <u>*Ordenación justa con respecto a la relación de precedencia:*</u>

Si $j \preceq i$, entonces de la expresión (4.39) de $\lambda(c_{\mathcal{G}})$ se deduce

$$\lambda_i(G,c,N) = \lambda_j(G,c,N) + \sum_{\substack{k\in P_i\\ j\prec k}} \frac{c(e_j)}{2^{f_j-1}} \geq \lambda_j(G,c,N)\,.$$

(iv) <u>*Monotonicidad con respecto a la función de coste:*</u>

Sea $\mathcal{G}' \in \mathcal{F}_*$ un problema FTC tal que $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle$ con $c' \geq c$. De la expresión (4.39) se deduce que para probar $\lambda(G,c,N) \leq \lambda(G,c',N)$ es suficiente demostrar que $\lambda_i(G,c,N) \leq \lambda_i(G,c',N)$ para todo vértice $i \in L_1(G)$.

Teniendo en cuenta que $2^{x-1} \geq x, \ \forall \ x \in \mathbb{Z}_+, \ x \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_i(G,c,N) &= \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Big(1 - \frac{f_j}{2^{f_j-1}}\Big)c(e_j) + \frac{c(e_i)}{2^{f_i-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{j\in N}\Big(1 - \frac{f_j}{2^{f_j-1}}\Big)c'(e_j) + \frac{c'(e_i)}{2^{f_i-1}} = \lambda_i(G,c',N)\,,\end{aligned}$$

$$\forall \ i \in L_1(G)\,.$$

(v) <u>*Monotonicidad en coste:*</u>

Sea $\mathcal{G}' = \langle G,c',N\rangle \in \mathcal{F}_*$ un problema FTC tal que existe $i \in N$ con $c(e_i) < c'(e_i)$ y $c(e_j) = c'(e_j)$ para todo $j \neq i$. Distinguiremos dos casos:

– Si $i \in L_1(G)$, entonces trivialmente de (4.38) se deduce que

$$\lambda_i(G,c,N) < \lambda_i(G,c',N)\,.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $c(e_j) = c'(e_j),\ \ \forall\ j \in F(i) \setminus \{i\}$, de (4.39) se tiene que

$$\lambda_j(G,c,N) < \lambda_j(G,c',N)\,, \qquad \forall\ j \in F(i)\,.$$

– Si $i \notin L_1(G)$, entonces de la propiedad de monotonicidad con respecto a la función coste, se deduce

$$\lambda_j(G,c,N) \leq \lambda_j(G,c',N)\,, \qquad \forall\ j \in N\,.$$

En particular, $\lambda_{\pi(i)}(G,c,N) \leq \lambda_{\pi(i)}(G,c',N)$. Entonces,

$$\lambda_i(G,c,N) = \lambda_{\pi(i)}(G,c,N) + \frac{c(e_i)}{2^{f_i-1}} \leq \lambda_{\pi(i)}(G,c',N) + \frac{c(e_i)}{2^{f_i-1}} <$$
$$< \lambda_{\pi(i)}(G,c',N) + \frac{c'(e_i)}{2^{f_i-1}} = \lambda_i(G,c',N)\,.$$

De donde, teniendo en cuenta (4.39), se sigue que

$$\lambda_j(G,c,N) < \lambda_j(G,c',N)\,, \qquad \forall\ j \in F(i)\,.$$

(vi) *Monotonicidad coalicional.*

Sea $\mathcal{G}' \in \mathcal{F}_*$ un problema FTC tal que existe un tronco T_0 de G con $c(e_i) \leq c'(e_i)$, $\forall\ \ i \in N \setminus T_0$ y $c(e_i) = c'(e_i),\ \ \forall\ \ i \in T_0 \setminus \{r\}$.

Siguiendo el mismo razonamiento que el desarrollado en (iv), se tiene que

$$\lambda_i(G,c,N) \leq \lambda_i(G,c',N)\,, \quad \forall\ i \in L_1(G)\,.$$

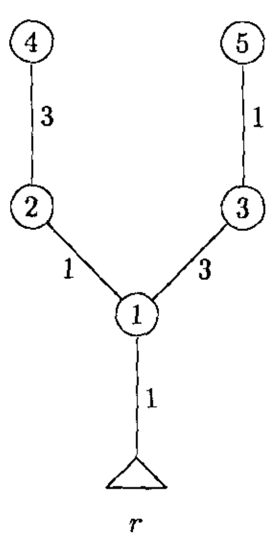
Entonces,

$$\lambda_i(G,c,N) \leq \lambda_i(G,c',N)\,, \quad \forall\ i \in N\,.$$

□

Por el contrario, los siguientes ejemplos muestran que, en general, el resto de las propiedades no se verifican.

Ejemplo 4.7. Considérese el problema FTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$, representado en la siguiente figura:



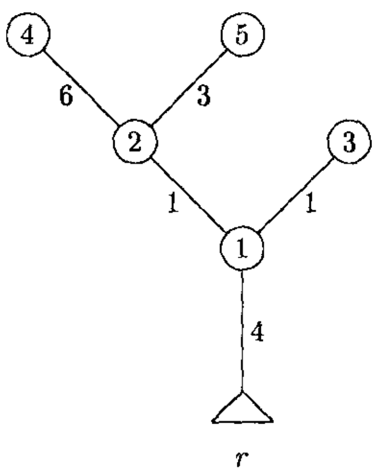
Se tiene que

$$\lambda(G,c,N) = \Phi(c_{\mathcal{G}}) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, 1\frac{7}{10}, 3\frac{7}{10}, 2\frac{7}{10})\,.$$

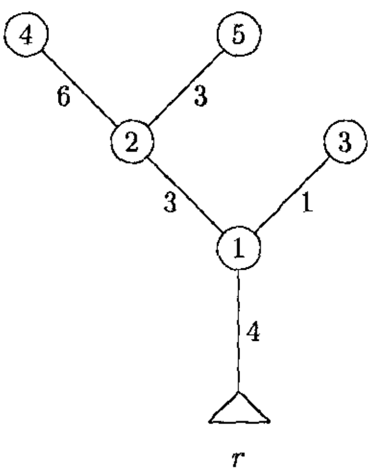
En particular, $\lambda_4(G,c,N) = 3\frac{7}{10} > 2\frac{7}{10} = \lambda_5(G,c,N)$ y $c_{\mathcal{G}}(\{4\}) = c_{\mathcal{G}}(\{5\})$. Luego, λ no verifica la propiedad (ii) de simetría con respecto a los costes individuales y, por tanto, tampoco verifica la propiedad (iii) de ordenación justa con respecto a los costes individuales.

El valor de Shapley y la solución igualitaria restringida tampoco las verifican. Lo que resulta natural, ya que los costes individuales no tienen en cuenta la estructura del árbol.

Ejemplo 4.8. Considérense los problemas FTC, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$, representados a continuación:



$\mathcal{G} = \langle G, c, N\rangle$



$\mathcal{G}' = \langle G, c', N\rangle$

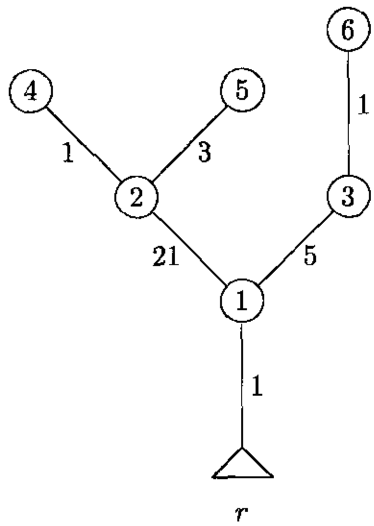
$c'(e_i) = c(e_i)$, $\forall\ i \in P_3$ y $c'(e_j) \geq c(e_j)$, $\forall\ j \in N$, sin embargo

$$\lambda_1(G,c,N) = \frac{17}{20} < \frac{19}{20} = \lambda_1(G,c',N).$$

Luego, el prenucléolo mínimo cuadrático no verifica la propiedad (vii) de monotonicidad con respecto al camino.

Por último se muestra un ejemplo en el que el prenucléolo mínimo cuadrático no pertenece al corazón del juego (propiedad (viii)).

Ejemplo 4.9. Considérese el problema SFTC, $\mathcal{G} = \langle G, c, N \rangle$, representado en la siguiente figura:



De acuerdo con el prenucléolo mínimo cuadrático, el jugador 1 debe asumir un coste de $\lambda_1(c_{\mathcal{G}}) = \frac{25}{24} > 1 = c_{\mathcal{G}}(\{1\})$. Luego, el prenucléolo mínimo cuadrático no es ni siquiera individualmente racional.

En este punto, cabe preguntarse si el nucléolo mínimo cuadrático verifica la propiedad de pertenencia al corazón. No obstante, y pese a que el corazón de un juego del árbol fijo es muy "grande", el nucléolo mínimo cuadrático tampoco pertenece en general al corazón del juego. Se comprueba que para el ejemplo 4.9 $\Lambda(c_{\mathcal{G}}) = (1, 6'3, 3'55, 7'3, 9'3, 4'55)$ y considerando la coalición $S = \{1, 3, 6\}$, se tiene que $\sum_{i \in S} \Lambda_i(c_{\mathcal{G}}) = 9'1 > c_{\mathcal{G}}(S)$.

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos anteriormente. Asimismo, también recoge qué propiedades verifican el valor de Shapley y la regla igualitaria restringida.

Propiedad	Prenucléolo mínimo cuadrático	Solución igualitaria restringida	Valor de Shapley
Ordenación justa con respecto a la relación de precedencia	Si	Si	Si
Simetría con respecto a los costes individuales	No	No	No
Ordenación justa con respecto a los costes individuales	No	No	No
Monotonicidad con respecto a la función de coste	Si	Si	Si
Monotonicidad en coste	Si	Si	Si
Monotonicidad coalicional	Si	Si	Si
Monotonicidad con respecto al camino	No	No	Si
Pertenencia al corazón	No	Si	Si

4.8 Conclusiones

En este trabajo hemos tratado de profundizar en el proceso que lleva a los usuarios de una red de conexión a decantarse por uno u otro reparto en el corazón del juego, a través de la definición de la familia de soluciones igualitarias restringidas ponderadas. En cuanto a su interpretación dinámica, cabe destacar su utilidad a la hora de ayudarnos a comprender el comportamiento local de estas soluciones. En cuanto a su caracterización como reglas de asignación de costes, centrándonos en la caracterización de la regla igualitaria restringida, cabe destacar el hecho de que en ella quedan reflejados los intereses que mueven a los usuarios cuando eligen esta regla como mecanismo de reparto.

En lo que respecta a las diferentes extensiones de un juego del árbol fijo que hemos considerado, se debe hacer notar que cada una de ellas puede dar lugar a diferentes interpretaciones.

Cuál de ellas es la más adecuada dependerá de la situación concreta de que se trate. Por otro lado, el hecho de que el corazón del juego original sólo se reduzca cuando se trabaja con la extensión de Cornet, pone de manifiesto la robustez del corazón de este tipo de juegos.

Por último, del estudio del prenucléolo y el nucléolo mínimos cuadráticos, se desprende que, en este tipo de situaciones, en las que no parece razonable que los usuarios acaben seleccionando una propuesta de reparto que no se auto imponga; estas soluciones no se darán comunmente.

Apéndices

Apéndice A

Proposición 1. *El valor en $F\Gamma_1^n$ φ^3 definido en la demostración de la proposición 2.8 verifica los axiomas de: (i) eficiencia, (ii) juego inesencial y (iii) monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias.*

Demostración: Recordemos que $\varphi^3(N,\widetilde{v})$ viene dado por el vector de pagos que se obtiene mediante el siguiente algoritmo:

PASO 1: Considérese el conjunto $K = \{\, j \in N \,/\, \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) < \widetilde{v}(\{j\}) \,\}$.
Si $K = \emptyset$, entonces $\varphi^3(\widetilde{v}) := \mathcal{E}(\widetilde{v})$. Parar.
En otro caso, ir al paso siguiente.

PASO 2: Sea $j_0 \in K$ tal que $\mathcal{E}_{j_0}(\widetilde{v}) = \min\limits_{j\in K} \mathcal{E}_j(\widetilde{v})$.
Considérese la partición S, T del conjunto de jugadores N dada por

$$\begin{aligned} T &= \left\{\, i \in N \setminus K \,/\, c_i(\widetilde{v}) < c_{j_0}(\widetilde{v}) \,\right\}, \\ S &= \left\{\, i \in N \,/\, c_i(\widetilde{v}) \geq c_{j_0}(\widetilde{v}) \,\right\}. \end{aligned}$$

Si $T = \emptyset$, entonces $\varphi^3(\widetilde{v}) := \mathcal{E}(\widetilde{v})$. Parar.
En otro caso, ir al paso siguiente.

PASO 3:

$$\varphi_j^3(\widetilde{v}) := \begin{cases} \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - \dfrac{s\delta}{t}, & si \quad j \in T, \\ \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) + \delta, & si \quad j \in S. \end{cases}$$

donde $\delta = \widetilde{v}(\{j_0\}) - \mathcal{E}_{j_0}(\widetilde{v}) > 0$, $s = |S|$ y $t = |T|$. Parar.

Comprobemos que, efectivamente, verifica estos axiomas.

(i) Eficiencia:

Sea $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$ un juego difuso cualquiera. Si $\varphi^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}(\widetilde{v})$, entonces,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i^3(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(N).$$

En otro caso, existe una partición $\{T, S\}$ de N, y existe $\delta > 0$, tales que

$$\sum_{i \in N} \varphi_i^3(\widetilde{v}) = \sum_{j \in T}\Big(\mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - \frac{s\delta}{t}\Big) + \sum_{j \in S}(\mathcal{E}_j(\widetilde{v}) + \delta) = \sum_{i \in N} \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) = \widetilde{v}(N),$$

donde $s = |S|$ y $t = |T|$.

(ii) Juego inesencial:

Sea $(N, \widetilde{w})$, $\widetilde{w}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i \in N} a_i \tau_i$, $\forall\ \boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n$, un juego inesencial cualquiera. Entonces,

$$\mathcal{E}_i(\widetilde{w}) = a_i = \widetilde{w}(\{i\}), \quad \forall\ i \in N.$$

Luego $K = \emptyset$ y $\varphi^3(\widetilde{w}) = \mathcal{E}(\widetilde{w}) = \mathbf{a}$.

(iii) Monotonicidad con respecto a las contribuciones marginales medias:

Sea $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma_1^n$, un juego difuso cualquiera, entonces:

Si $\varphi^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}(\widetilde{v})$, entonces para todo par de jugadores $i, j \in N$, $c_i(\widetilde{v}) \leq c_j(\widetilde{v})$ implica $\varphi_i^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) \leq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) = \varphi_j^3(\widetilde{v})$.

En otro caso, sean $i, j \in N$, $i \neq j$ dos jugadores cualesquiera. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $c_i(\widetilde{v}) \leq c_j(\widetilde{v})$. Se deben considerar las siguientes situaciones:

1. Los dos jugadores pertenecen al mismo elemento de la partición $\{S, T\}$

2. $i \in T$, $j \in S$

3. $i \in S$, $j \in T$

Analicemos cada una de ellas por separado.

1. Si $i, j \in T$, entonces,

$$\varphi_i^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) - \frac{s\delta}{t} \leq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - \frac{s\delta}{t} = \varphi_j^3(\widetilde{v}).$$

Si $i, j \in S$, entonces,

$$\varphi_i^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) + \delta \leq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) + \delta = \varphi_j^3(\widetilde{v}).$$

2. Si $i \in T$ y $j \in S$, entonces,

$$\varphi_i^3(\widetilde{v}) = \mathcal{E}_i(\widetilde{v}) - \frac{s\delta}{t} \leq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) - \frac{s\delta}{t} \leq \mathcal{E}_j(\widetilde{v}) + \delta = \varphi_j^3(\widetilde{v}).$$

3. Si $i \in S$ y $j \in T$, entonces,

$$c_i(\widetilde{v}) \geq c_{j_0}(\widetilde{v}) > c_j(\widetilde{v}).$$

Por hipótesis $c_j(\widetilde{v}) \geq c_i(\widetilde{v})$, en contradicción con la desigualdad anterior. Luego, la situación **3** no es factible.

$\square$

Apéndice B

En este apéndice se estudian las propiedades esenciales del corazón mínimo de un problema de asignación de costes, definido en la sección 2.5 del capítulo 2.

Proposición 2. *Para todo problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, se verifica que $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ es no vacío, convexo y compacto. Además, si el conjunto $C(c, \boldsymbol{\alpha})$ es no vacío, entonces $LC(c, \boldsymbol{\alpha}) = C(c, \boldsymbol{\alpha})$.*

Demostración: En primer lugar, se demostrará que el corazón mínimo de todo problema de asignación de costes en CA^m es no vacío.

Dado un problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, sea $\theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, la función definida como

$$\theta(\mathbf{p}) = \text{máx}\left\{ c(\mathbf{z}) - P(\mathbf{p}, \mathbf{z}) \;/\; \mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha}) \right\}, \quad \forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m .$$

θ está bien definida y es una función convexa en $\mathbb{R}^m$, y por consiguiente continua:

(i) Fijado $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, la función $c - P(\mathbf{p}, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}^m$, entonces el supremo en $D(\boldsymbol{\alpha})$, compacto, se alcanza.

(ii) Para cada $\mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})$ la función de pago $P(\cdot, \mathbf{z})$ es lineal en $\mathbf{p}$, luego $c(\mathbf{z}) - P(\cdot, \mathbf{z})$, como función de $\mathbf{p}$, es convexa para todo $\mathbf{z} \in D(\boldsymbol{\alpha})$, y por tanto el máximo en $\mathbf{z}$ es también una función convexa.

Considérese el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{p}} \quad \theta(\mathbf{p}) \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad \mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha}), \\ &\qquad p_i \geq 0\,, \qquad\qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

La región factible del problema es compacta y la función objetivo es continua, entonces el problema tiene solución. Sea ε su valor óptimo, si $\mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha})$ es tal que $p_i < \dfrac{c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \varepsilon}{\alpha_i}$, para algún $1 \leq i \leq m$, entonces se verifica

$$\theta(\mathbf{p}) \;\geq\; c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \alpha_i p_i \;>\; c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \alpha_i \cdot \frac{c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \varepsilon}{\alpha_i} \;=\; \varepsilon \geq \inf\{\, \theta(\mathbf{p}) \,/\, \mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha}) \,\}\,.$$

Luego, calcular el ínfimo de la función θ en $H(c, \boldsymbol{\alpha})$ es equivalente a resolver el problema,

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{p}} \quad \theta(\mathbf{p}) \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad \mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha}), \\ &\qquad p_i \geq \frac{1}{\alpha_i}(c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \varepsilon)\,, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Problema que, obviamente, tiene solución. Luego,

$$LC(c, \boldsymbol{\alpha}) = \{\, \mathbf{p}_0 \in H(c, \boldsymbol{\alpha}) \,/\, \theta(\mathbf{p}_0) = \min_{\mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha})} \theta(\mathbf{p}) \,\} \neq \emptyset\,.$$

La convexidad del conjunto $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ se deduce de la convexidad del hipografo de una función convexa: $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ se puede expresar como intersección de dos conjuntos convexos,

$$LC(c, \boldsymbol{\alpha}) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m \,/\, \theta(\mathbf{p}) \leq \delta \} \cap H(c, \boldsymbol{\alpha}),$$

donde δ es el valor óptimo del problema que define el corazón mínimo.

En cuanto a la compacidad, basta con tener en cuenta que

$$LC(c, \boldsymbol{\alpha}) = \theta^{-1}(\delta) \cap \{ \mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha}) \,/\, p_i \geq \frac{1}{\alpha_i}(c(\alpha_i, \mathbf{0}) - \varepsilon), \;\; \forall \; i = 1, \ldots, m. \}.$$

θ es continua y $\{\delta\}$ es un cerrado, entonces $\theta^{-1}(\delta)$ es cerrado. Luego $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ es cerrado (por ser intersección de cerrados) y está contenido en un compacto. Por lo tanto, $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ es compacto.

Por último, la coincidencia entre $LC(c, \boldsymbol{\alpha})$ y $C(c, \boldsymbol{\alpha})$, en caso de ser éste no vacío, es consecuencia inmediata de la desigualdad $\theta(\mathbf{p}) \geq 0$, para todo $\mathbf{p} \in H(c, \boldsymbol{\alpha})$. □

La siguiente definición hace referencia al concepto de solución para juegos con tasas de participación "equivalente" al corazón mínimo de un problema de asignación de costes.

Definición 1. Dado un juego con tasas de participación $(N, \widetilde{v}) \in F\Gamma^n$, se define el *corazón mínimo* del juego, $LC(\widetilde{v})$, como el siguiente conjunto de preimputaciones

$$LC(\widetilde{v}) = \left\{ \mathbf{x} \in PI(\widetilde{v}) \,/\, \min_{\mathbf{y} \in PI(\widetilde{v})} \max_{\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n} \widetilde{e}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}) = \max_{\boldsymbol{\tau} \in [0,1]^n} \widetilde{e}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) \right\}.$$

Observación 1. Dado un problema de asignación de costes, $(c, \boldsymbol{\alpha}) \in CA^m$, sea $(M, \widetilde{v}_c)$ el juego de ganancias asociado, entonces se verifica:

$$\mathbf{p_0} \in LC(c, \boldsymbol{\alpha}) \iff \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p_0} = (\alpha_1 p_{01}, \ldots, \alpha_m p_{0m}) \in LC(\widetilde{v}_c).$$

Apéndice C

En este apéndice se dan ejemplos de juegos de producción lineal controlados por comités en los que no todos los juegos de control son equilibrados. En el primero de ellos el corazón del juego de producción lineal es no vacío; mientras que, por el contrario, en el segundo de ellos, el juego de producción lineal es no equilibrado.

Ejemplo 1. *Considérese la situación descrita en el ejemplo 3.1 (pág. 121), con la salvedad de que, en este caso, cada uno de los recursos se encuentra disponible en el mercado en dos lotes, B_k^1 y B_k^2, $k = 1, 2$.*

- El control del lote B_1^1, consistente en 2 unidades de producto 1, viene dado por el juego simple (N, u_1^1), definido por $\mathcal{MW}(u_1^1) = \{\{1\}, \{2,3\}\}$. En dicho caso, $C(u_1^1) = \emptyset$.

- El control del lote B_1^2, consistente en 4 unidades de producto 1, viene dado por el juego (equilibrado) de unanimidad respecto de la coalición total, $u_1^2 \equiv u_N$.

- El control del lote B_2^1, consistente en 4 unidades de producto 2, viene dado por el juego simple (equilibrado) (N, u_2^1), definido por $\mathcal{MW}(u_2^1) = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$.

- El control del lote B_2^2, consistente en 4 unidades de producto 2, viene dado por el juego simple (N, u_2^2), definido por $\mathcal{MW}(u_2^2) = \{\{2\}, \{1,3\}\}$. En dicho caso, $C(u_2^2) = \emptyset$.

El juego de producción lineal controlado por comités (N, v), viene dado por:

$$v(\{i\}) = 0, \quad \forall\ i \in N,$$

$$v(\{1,2\}) = 8, \quad v(\{1,3\}) = 8, \quad v(\{2,3\}) = 16,$$

$$v(N) = 3.$$

Verificándose,

$$C(v) = \left\{ \mathbf{x} \in I\!R^3 \;/\; 0 \leq x_1 \leq 2 \;,\; 0 \leq x_2, x_3 \leq 8 \;,\; \sum_{i \in N} x_i = 18 \right\} \neq \emptyset \,.$$

Ejemplo 2. Para la misma situación del ejemplo anterior, considérense los siguientes juegos de control:

- El control del lote B_1^1, consistente en 2 unidades de producto 1, viene dado por el juego simple (N, u_1^1), definido por $\mathcal{MW}(u_1^1) = \{\{1\}, \{2,3\}\}$. En dicho caso, $C(u_1^1) = \emptyset$.
- El control del lote B_1^2, consistente en 4 unidades de producto 1, viene dado por el juego (equilibrado) de unanimidad respecto de la coalición $S = \{2,3\}$, $u_1^2 \equiv u_S$.
- El control del lote B_2^1, consistente en 4 unidades de producto 2, viene dado por el juego simple (equilibrado) (N, u_2^1), definido por $\mathcal{MW}(u_2^1) = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$.
- El control del lote B_2^2, consistente en 4 unidades de producto 2, viene dado por el juego simple (N, u_2^2), definido por $\mathcal{MW}(u_2^2) = \{\{1\}, \{2,3\}\}$. En dicho caso, $C(u_2^2) = \emptyset$.

El juego de producción lineal controlado por comités (N, v), viene dado por:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 8\,, & v(\{i\}) = 0\,, \;\; i = 2,3\,, & \\ v(\{1,2\}) = 8\,, & v(\{1,3\}) = 8\,, & v(\{2,3\}) = v(N) = 18\,. \end{array}$$

En cuyo caso, se verifica $C(v) = \emptyset$.

Apéndice D

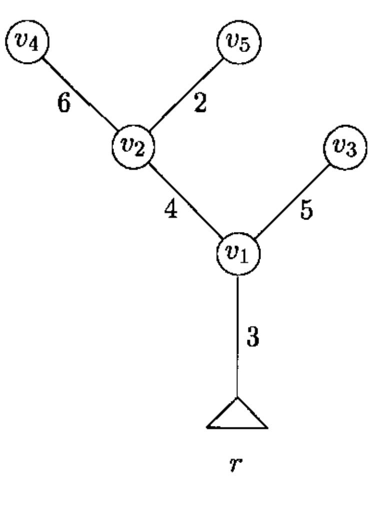
En este apéndice se muestra que el asumir la condición (iv) en el modelo $SFTC$ (cada vértice está ocupado por un único usuario) no es restrictivo.

Se comprobará que dado un problema *standard tree enterprise* (Granot *et al.*, 1996), $\mathcal{E} = \langle G, c, N, f_N \rangle$, donde $G = (V, E)$, $c : E \to I\!R_+$ y N se corresponden con los mismos elementos que en un problema $SFTC$, mientras que $f_N : V \setminus \{r\} \to \mathcal{P}(N)$, es una función que asigna a cada vértice del árbol el subconjunto de jugadores que reside en el mismo, existe un problema $SFTC$, al que denotaremos por $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, tal que los juegos de coste asociados a ambos problemas coinciden.

Dado $\mathcal{E} = \langle G, c, N, f_N \rangle$, considérese el problema $SFTC$ $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ definido a partir de $\mathcal{E}$ mediante el siguiente procedimiento:

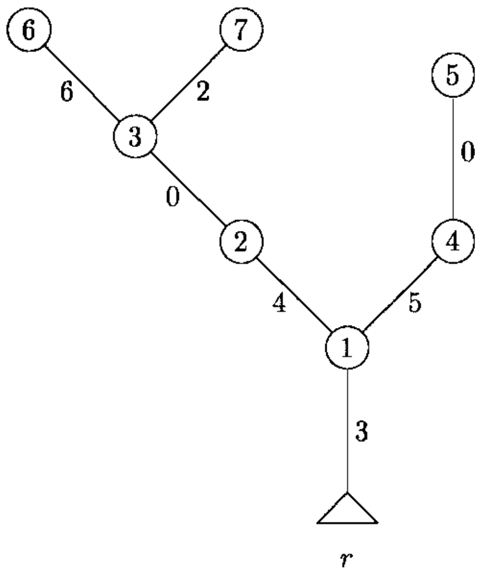
Para todo vértice $\mathbf{p} \in V \setminus \{r\}$, sea $e_{\mathbf{p}}$ el arco de G que incide en dicho vértice, entonces sustitúyase $e_{\mathbf{p}}$ por $|f_N(\mathbf{p})|$ arcos, el primero de ellos (el más cercano al vértice raíz) con coste $c(e_{\mathbf{p}})$, y el resto con coste 0, y sitúese a cada uno de los miembros de $f_N(\mathbf{p})$ en cada uno de los nuevos vértices.

Ejemplo 4.10. Sea $\mathcal{E} = \langle G, c, N, f_N \rangle$ el problema standard tree enterprise definido por $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, el árbol G y la función de coste representados a continuación:



y $f_N(v_1) = \{1\}, f_N(v_2) = \{2,3\}, f_N(v_3) = \{4,5\}, f_N(v_4) = \{6\}$ y $f_N(v_5) = \{7\}$.

El problema SFTC $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ viene dado por



Se comprueba de forma inmediata que los juegos de coste asociados a ambos problemas, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, coinciden.

Del mismo modo, adaptando de forma natural la definición de *vector de pesos admisible* para un problema standard tree enterprise, esto es, teniendo en cuenta que la única restricción que debe incorporarse es la necesaria para impedir que un arco se quede sin pintar, se tiene que $\mathcal{W}(\mathcal{E}) = \mathcal{W}(\mathcal{G}(\mathcal{E}))$, y para todo $\boldsymbol{\omega}$ admisible, las respectivas soluciones $\boldsymbol{\omega}$–igualitarias restringidas coinciden.

Referencias

AADLAND,D AND V.KOLPIN. (1998). Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis. *Mathematical Social Sciences*, **35**, 203-218.

AUBIN,J.P. (1974a). Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **279 A**, 891-894.

AUBIN,J.P. (1980). *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. North-Holland, Amsterdam.

AUBIN,J.P. (1981). Cooperative fuzzy games. *Mathematics of Operations Research*, **6**, 1-13.

AUMANN,R.J. AND L.S.SHAPLEY. (1974). *Values of non–atomic Games*. Princeton. New–Jersey: Princeton University Press.

BANZHAF,J.F. (1965). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, **19**, 317-343.

BILLERA,L.J. AND D.C.HEATH. (1982). Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure. *Mathematics of Operations Research*, **7**, 32-39.

BILLOT,A. (1990). Fuzzy convexity and peripherial core of an exchange economy represented as a fuzzy game. En *Multipersons Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, editado por J.Kacprzyk y M.Fedrizzi, Kluwer, Dordrecht.

BIRD,C.G. (1976b). On cost allocation for spanning tree: A game theoretic approach. *Networks*, **6**, 335-350.

BONDAREVA,O.N. (1963). Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games. *Problemy Kibernet*, **10**, 119-139.

BUTNARIU,D. (1978). Fuzzy games: A description of the concept. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 181-192.

BUTNARIU,D. AND E.P.KLEMENT (1996). Core, value and equilibria for market games: On a problem of Aumann and Shapley. *International Journal of Game Theory*, **25**, 149-160.

CLAUS,A. AND D.GRANOT. (1976). Game theory application to cost allocation for a spanning tree. *Working paper 402*, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver.

COLEMAN,J.S. (1971). Control of collectivities and the power of a collectivity to act. En *Social Choice*, editado por Lieberman,B., London (Gordon and Breach).

CORNET,B. (1975). Prolongement de jeux avec paiements latéraux et jeux flous. *Cahiers de Mathématiques de la Décision.* Univeristé Paris Dauphine.

COURNOT,A. (1838). Recherches sur les principes Mathématics de la théorie des Richesses. Paris. Edición en inglés: Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. Macmillan, New York, 1897.

CURIEL,I.; J.DERKS AND S.H.TIJS. (1989). On balanced games and games with committee control. *OR Spektrum*, **11**, 83-88.

DAVIS,J. AND M.MASCHLER. (1965). The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly*, **12**, 223-259.

DRAGAN,I.; J.POTTERS AND S.TIJS. (1989). Superadditivity for solutions of coalitional games. *Libertas Mathematica*, **9**, 101-110.

DEBREU,G. AND H.SCARF. (1963). A limit theorem on the core of an economy. *International Economical Review*, **4**, 235-246.

DRIESSEN,T.S.H. (1988). *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBEY,P. (1982). The Shapley value as aircraft landing fees revisited. *Management Science*, **28**, 869-874.

DUBEY,P. AND L.S.SHAPLEY. (1984). Totally balanced games arising from controlled programming problems. *Mathematical Programming*, **29**, 245-267.

DUTTA,B. AND D.RAY. (1989). A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica*, **57**, 615-635.

FRIEDMAN,E. AND H.MOULIN. (1995). Three methods to share joint costs (or surplus). *mimeo, Duke University*.

GALIL,Z. (1980). Applications of efficient mergeable heaps for optimization problems on trees. *Acta Informatica*, **13**, 53-58.

GELLEKOM,A. AND J.POTTERS. (1997). Consistent solution rules for standard tree enterprises. *Mimeo*, University of Nijmegen, The Netherlands.

GILLIES,D.B. (1953). *Some Theorems on n–person Games*. Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, Princeton University.

GRANOT,D. (1986). A generalized linear production model: a unifying model. *Mathematical Programming*, **34**, 212-222.

GRANOT,D. (1994). On the reduced game of some linear production games. En *Essays in game theory: in honor of Michael Maschler*, editado por N.Megiddo, Springer–Verlag, New York.

GRANOT,D. AND F.GRANOT. (1992). Computational complexity of a cost allocation approach to a fixed cost spanning forest problem. *Mathematics of Operations Research*, **17**, 765-780.

GRANOT,D. AND G.HUBERMAN. (1981). Minimum cost spanning tree games. *Mathematical Programming*, **21**, 1-18.

GRANOT,D. AND G.HUBERMAN (1984). On the core and nucleolus of minimum cost spanning tree games. *Mathematical Programming*, **29**, 323-347.

GRANOT,D.; M.MASCHLER; G.OWEN AND W.R.ZHU. (1996). The kernel/nucleolus of a standard tree game. *International Journal of Game Theory*, **25**, 219-244.

HART,S. AND A.MAS–COLELL. (1989). Potencial, value and consistency. *Econometrica*, **57**, 589-614.

HSIAO,C.R. AND T.E.S.RAGHAVAN (1992). Monotonicity and dummy free property for multi–choice cooperative games. *International Journal of Game Theory*, **21**, 301-312.

HSIAO,C-R. AND T.E.S.RAGHAVAN (1993). Shapley value for multi–choice cooperative games (1). *Games and Economic Behavior*, **5**, 240-256.

HSIAO,C-R. AND T.E.S.RAGHAVAN (1995). A value for continuously–many–choice cooperative games. *International Journal of Game Theory*, **24**, 273-292.

ICHIISHI,T. (1983). *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press, New York.

KALAI,E. AND D.SAMET. (1988). Weighted Shapley values. En *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*, editado por A.E.Roth, Cambridge University Press, 83-99.

KOSTER,M.; S.TIJS AND P.BORM. (1996). Serial cost sharing methods for multi–commodity situations.

KOSTER,M.; E.MOLINA, Y.SPRUMONT AND S.TIJS. (1998). Core representations of standard tree games. *Report 9821*, CenTER for Economic Research, Tilburg University, The Netherlands.

LEÓN,T. Y V.LIERN (1996). Interpretación de los precios sombra en presencia de degeneración. *Qüestiió*, **20**, 223-238.

LITTLECHILD,S.C. (1974). A simple expression for the nucleolus in a special case. *International Journal of Game Theory*, **3**, 21-29.

LITTLECHILD,S.C. AND G.OWEN. (1977). A simple expression for the Shapley value in a special case. *The Bell Journal of Economics*, **8**, 186-204.

MASCHLER,M. (1992). The bargaining set, kernel and nucleolus. En *Handbook of Game Theory (with economic applications), Vol.1*, editado por R.J. Aumann y Sergiu Hart, North-Holland, 591-667.

MASCHLER,M; B.PELEG AND L.S.SHAPLEY. (1972). The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory*, **1**, 73-93.

MASCHLER,M; B.PELEG AND L.S.SHAPLEY. (1979). Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. *Mathematics of Operation Research*, **4**, 303-338.

MASCHLER,M.; J.POTTERS AND H.REIJNIERSE. (1995). Monotonicity properties of the nucleolus of standard tree games. *Report núm. 9556*, Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands.

MASCHLER,M.; A.M.POTTERS AND S.H.TIJS. (1992). The general nucleolus and the reduced game property. *International Journal of Game Theory*, **21**, 85-106.

MEGIDDO,N. (1978). Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree. *Mathematics of Operations Research*, **3**, 189-196.

MIRMAN,L.J. AND Y.TAUMAN. (1982). Demand compatible equitable cost sharing prices. *Mathematics of Operations Research*, **7**, 40-56.

MOLINA,E. Y J.TEJADA. Juegos simples difusos. *Oviedo, 1996*, VII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy.

MONDERER,D; D.SAMET AND L.S.SHAPLEY. (1992). Weighted values and the core. *International Journal of Game Theory*, **21**, 27-39.

MOULIN,H. AND S.SCHENKER. (1992). Serial cost sharing. *Econometrica*, **60**, 1009-1037.

NEUMANN,J.VON. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*,

100, 295-320. Traducción en inglés en *Contributions to the Theory of Games IV*, 1959, 13-42, Princeton, Princeton University Press.

NEUMANN,J.VON AND O.MORGENSTERN. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior (tercera edición)*. Princeton University Press.

NOUWELAND,A. VAN DEN; S.H.TIJS; J.POTTERS AND J.ZARZUELO. (1995). Cores and related solution concepts for multi–choice games. *ZOR*, **41**, 289-311.

OWEN,G. (1972). Multilinear extensions of games. *Management Science*, **18**, 64-79.

OWEN,G. (1975). On the core of linear production games. *Mathematical Programming*, **9**, 358-370.

OWEN,G. (1995). *Game Theory (tercera edición)*. Academic Press, New York.

PUENTE,R.O. AND E.MARCHI. (1995). On the replica of linear production games with non additive resources. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **39**, 97-104.

RUIZ,L.M.; F.VALENCIANO AND J.M.ZARZUELO. (1996). The least square prenucleolus and the least square nucleolus. Two values for TU games based on the excess vector. *International Journal of Game Theory*, **25**, 113-134.

SAKAWA,M. AND I.NISHIZAKI. (1994). A lexicographical concept in an n–person cooperative fuzzy game. *Fuzzy Sets and Systems*, **61**, 265-275.

SAMET,D. AND Y.TAUMAN. (1982). The determination of marginal cost prices under a set of axioms. *Econometrica*, **50**, 895-909.

SAMET,D.; Y.TAUMAN AND I.ZANG. (1984). An application of the Aumann–Shapley prices to transportation problem. *Mathematics of Operations Research*, **10**, 25-42.

SAMET,D. AND E.ZEMEL. (1984). On the core and dual set of linear programming games. *Mathematics of Operations Research*, **9**, 309-316.

SÁNCHEZ–SORIANO,J. (1998). *El problema del transporte. Una aproximación desde la teoría de juegos.* Tesis Doctoral, Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia.

SCHMEIDLER,D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **17**, 1163-1170.

SHAPLEY,L.S. (1953). A value for n–person games. En *Annals of Mathematical Studies,28*, editado por H.W.Khun y A.W.Tucker, Princeton Academic Press, 307-317.

SHAPLEY,L.S. (1964). Compound simple games. En *Annals of Mathematical Studies,52*, editado por H.W.Khun, Princeton Academic Press.

SHAPLEY,L.S. (1967). On balanced sets and cores. *Naval Res. Logist. Quart.*, **14**, 453-460.

SHAPLEY,L.S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, **1**, 11-26.

SHAPLEY,L.S. (1981). Discussant's comment. En *Joint Cost Allocation*, editado por J.Moriarity, University of Oklahoma Press, Tulsa.

SHAPLEY,L.S. AND M.SHUBIK. (1969). On market games. *Journal of Economic Theory*, **1**, 9-25.

SHAPLEY,L.S. AND M.SHUBIK. (1972). The assignment game : I. The core. *International Journal of Game Theory*, **1**, 111-130.

SHUBIK,M. (1962). Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing. *Management Science*, **8**, 325-343.

SNIJDERS,C. (1995). Axiomatization of the nucleolus. *Mathematics of Operations Research*, **20**, 189-196.

SUDHÖLTER,P. AND J.POTTERS. (1995). Airport problems and consistent solution rules. *Report 9539.* Department of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands.

SOBOLEV,A.I. (1975). The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game. *Mathematical Methods in the Social Sciences*, **6**, 94-151.

SPINETTO,R. (1974). The geometry of solution concepts for n-person cooperative games. *Management Science*, **20**, 1292-1299.

SPRUMONT,Y. (1996). Ordinal cost sharing.

TEJADA,J. (1986). *Juegos Difusos*, Tesis Doctorales 171/92, Universidad Complutense, Madrid.

WEBER,R. (1988). Probabilistic values for games. En *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*, editado por A.E.Roth, Cambridge University Press, 101-119.

YOUNG,H.P. (1985a). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, **14**, 65-72.

YOUNG,H.P. (1985b). Producer incentives in cost allocation. *Econometrica*, **53**, 757-765.

ZADEH,L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.

ZERMELO,E. (1913). Uber eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. *Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians*, **2**, 501-504, Cambridge University Press.