UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE FILOSOFÍA
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia

ANÁLISIS MAGNITUDINAL Y LA ESTRUCTURA MÉTRICA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carmen Sánchez Ovcharov

Bajo la dirección del doctor
Andrés Rivadulla Rodríguez

Madrid, 2007

- **ISBN: 978-84-669-3047-5**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Filosofía

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia

ANÁLISIS MAGNITUDINAL
Y LA ESTRUCTURA MÉTRICA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Tesis Doctoral presentada por:

Carmen Sánchez Ovcharov
Licenciada en Filosofía por la UCM

Y dirigida por:

Dr. D. Andrés Rivadulla Rodríguez
Profesor y Vicedecano de la Facultad de Filosofía (UCM)

A mi padre, mi madre y mi hermano.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera expresar mi agradecimiento a D. Andrés Rivadulla, mi profesor de carrera y mi director de tesis, por su dedicación, su paciencia, por transmitirme el valor del rigor, tanto filosófico, como científico, y acostumbrarme al equilibrio en el juicio y las valoraciones.

En segundo lugar, agradezco a la Fundación Caja Madrid su contribución económica a la realización de mi tesis, por medio de la beca doctoral concedida.

Mis agradecimientos a D. Antonio Fernández-Rañada por sus valiosos consejos en el ámbito físico, y por su amabilidad al recibirme. Asimismo, gracias a D. José A. Díez por la atención y el interés que ha mostrado por mi trabajo, y por su ayuda.

Por último, dar las gracias a mi madre, a mi hermano y a mi marido, por su ilusión, su apoyo, sus consejos y su ayuda. Muy especialmente, gracias a mi padre, a quien debo mi pasión por la filosofía de la ciencia y mi interés por la física. Sin él, esta investigación no habría sido posible.

Índice

SEGUNDA PARTE
La no fundamentalidad de la constante de Planck.
Reconstrucción de la estructura métrica de la mecánica cuántica

TERCERA PARTE
Sistema natural fundamental de unidades SF.
La unicidad del cuanto de acción.

Resumen de la tesis doctoral

Este trabajo doctoral está dedicado al estudio de la generación del significado (entendido como contenido métrico-operacional) de las magnitudes físicas, durante el proceso de la metrización derivada, y a la aplicación de dicho estudio al análisis del significado de las magnitudes más relevantes de la mecánica cuántica, en particular, el cuanto de acción.

La primera parte está dedicada a la particularidad de los términos teóricos (o conceptos) métricos (magnitudes), sus formas de metrización derivada y el análisis de su interpretación. El estudio de la generación del significado de magnitudes físicas en el proceso de la metrización derivada parte de una noción específica de *interpretación* de un concepto métrico derivado, a saber: la determinación de su significado en función de su relación funcional con los conceptos involucrados en su metrización, esto es, en función de su contenido métrico-operacional. El análisis de este contenido requiere un método. Se argumentará que la determinación de relación funcional señalada queda fuera del alcance metodológico del análisis dimensional, por lo que éste no puede analizar la generación del significado de las magnitudes derivadas.

En este trabajo se presenta la propuesta de un nuevo método de análisis de la metrización derivada, complementario al dimensional, que denomino *análisis magnitudinal*. Se apoya sobre tres pilares:

- un criterio de *fundamentalidad métrica*, según el cual son fundamentales los conceptos métricos indefinidos y unidimensionales;
- una norma de *invariabilidad de las magnitudes canónicas base*, pues un sistema de magnitudes generado a partir de cualquier

otra base quebranta, no sólo las normas del análisis dimensional, sino, como se verá, las del magnitudinal;

- dos *reglas de derivación* de magnitudes, aplicando las cuales se puede determinar el contenido métrico-operacional de cualquier magnitud derivada.

La aplicación conjunta de los análisis dimensional y magnitudinal al sistema de magnitudes de cualquier teoría física permite determinar sus conexiones métrico-operacionales y representarlas en una estructura métrica, donde se puede seguir la generación del significado de las magnitudes derivadas. En este trabajo, se componen las estructuras métricas de las principales magnitudes mecánico-clásicas, electromagnéticas clásicas y mecánico-cuánticas. Uno de los resultados es que las magnitudes de fuerza gravitatoria y fuerza eléctrica (de Coulomb) no son interpretables a partir de su contenido métrico-operacional. Especialmente interesante resulta el estudio de las conexiones métrico-operacionales de las magnitudes mecánico-cuánticas: pone de manifiesto, primero, que la mayoría quebrantan las normas de los análisis dimensional y magnitudinal y, segundo, que el cuanto de acción $\hbar$ no es una constante métricamente fundamental. Ello conduce a una sospecha: la cuantización representada por $\hbar$ puede deberse a otro factor (constante) de cuantización previo (más fundamental).

La segunda parte se centra en la interpretabilidad de los principales conceptos métricos de la mecánica cuántica a partir de su contenido métrico-operacional y en la cuestión de la fundamentalidad del cuanto de acción. Partiendo de la sugerencia de P.A.M. Dirac sobre la posible relación entre la no fundamentalidad de $\hbar$ y la constante de estructura fina α, aplicando el análisis magnitudinal se determina la metrización por definición de $\hbar$ en función de α y, con ello, se demuestra su carácter métricamente derivado.

Posteriormente, se procede a la reconstrucción, en función de α, de la estructura métrica (conexiones métrico-operacionales) de las magnitudes mecánico-cuánticas estudiadas en la primera parte del trabajo. La nueva estructura métrica es interpretable: al cumplir las normas de los análisis dimensional y magnitudinal, el significado de cualquier magnitud es interpretable a partir de su ecuación de metrización. En particular, la metrización del cuanto de acción $\hbar$ pone de manifiesto que su no fundamentalidad métrica se debe a la presencia, dentro de su contenido métrico-operacional, de un factor constante métricamente más fundamental: la longitud de onda de Compton λ_C (constante que caracteriza determinadas interacciones entre materia y radiación). Esta longitud de onda *precuantiza* cualquier energía y momento cuantizados por el cuanto de acción $\hbar$, lo que sugiere una reformulación métrica de las relaciones de indeterminación de Heisenberg. En las relaciones nuevas, la cuantización debida al cuanto de acción se muestra reducida a la cuantización previa representada por λ_C.

En la tercera y última parte del trabajo, se recurre al valor heurístico de las unidades naturales de medida (como el que posee en la actualidad la longitud de Planck para la hipótesis de la discontinuidad del espacio-tiempo), para ofrecer una interpretación de la unicidad del cuanto de acción, desde la idea de la longitud de onda de Compton como factor de precuantización. Tomando como longitud fundamental la longitud de onda de Compton, para el caso concreto del electrón, esto es: λ_0, se propone un sistema natural fundamental de unidades de medida (sistema SF) basado en tres constantes métricamente fundamentales más: el tiempo t_0 (según $t_0 = \lambda_0/c$, siendo c la velocidad de la luz), la masa m_0 del electrón y la carga eléctrica unidad e. La aplicación del sistema SF a las principales magnitudes del electrón ofrece una *interpretación métrico-operacional* de la unicidad del cuanto de acción, que se hace extensible a cualquier partícula con masa en reposo distinta de cero. Suponiendo que una partícula material está caracterizada de forma fundamental por su λ_C, y tomando ésta como unidad de longitud en un sistema natural fundamental SF (como el propuesto para el electrón), siempre se obtendrá h=1 y $\hbar$=1/2π, esto es: todas las propiedades cuánticas de una partícula material caracterizada por λ_C están determinadas por *el cuanto de acción unidad*. Este resultado confirma lo puesto de manifiesto por el análisis magnitudinal, a saber: primero, el carácter *derivado* de la constante $\hbar$ y de su cuantización, y, segundo, el carácter fundamental y, por tanto, *precuantizador* del factor λ_C.

El carácter metodológico de este trabajo y su especial enfoque en los términos teóricos métricos de la mecánica cuántica, responde a dos propósitos concretos: el primero, enlazar de forma directa la disciplina filosófica de metodología de la ciencia, en este caso, de la física, con la metodología de la propia física, proponiendo un análisis extra-teórico (el análisis magnitudinal) de los términos teóricos más relevantes de esta ciencia empírica: las magnitudes; y el segundo, proponer un enfoque diferente, métrico-operacional, para el tratamiento del problema del significado físico de algunas magnitudes mecánico-cuánticas y, en particular, de su núcleo teórico: el cuanto de acción.

Introducción a la tesis doctoral

Sentado a mi mesa de despacho o a alguna mesa de café, yo manipulo las expresiones matemáticas y me siento como Fausto jugando con sus pentagramas antes de la llegada de Mefistófeles.

Steven Weinberg

Ante esta comparación se hace inevitable esbozar una sonrisa comprensiva. Fausto es un hombre de ciencia con una gran sed de saber, que lucha por alcanzar la clave del conocimiento de la Naturaleza. Sus esfuerzos son inútiles, pues el saber que él ansía no lo puede alcanzar por vía experimental:

> Ustedes, instrumentos, sin duda se burlan de mí con esas ruedas y esos dientes, cilindros y arcos. Yo estaba ante la puerta; ustedes debían ser las llaves, y con todo, no mueven el pestillo. Misteriosa en pleno día, la Naturaleza no se deja despojar de su velo, y lo que ella se niega a revelar a tu espíritu, no se lo arrancarás a fuerza de palancas y tornillos.[1]

Como la Naturaleza no desvela sus secretos a la luz de la ciencia experimental, Fausto la abandona y se sumerge en la magia. Ésta le proporciona unos nuevos instrumentos: símbolos mágicos de invocación de espíritus. Jugando con uno de estos símbolos, un pentagrama, Fausto permite entrar al diablo (Mefistófeles) en su gabinete de estudio, pero un error casual en el trazado del símbolo no le permite salir…

La sonrisa asoma, pues la analogía de Fausto con el físico es profunda. El físico choca frecuentemente contra el hecho de que algunas de las respuestas que busca, por mera cuestión de tamaño, no son alcanzables por medios tecnológicos. La Naturaleza "no permite" crear instrumentos (dispositivos experimentales) con los que medir sus componentes últimos, puesto que

[1] Fragmento tomado de Goethe J.W. (2001) *Fausto*, Pehuen Editores, Santiago de Compostela (Chile), p. 14.

dichos instrumentos, indefectiblemente, deben funcionar con esos mismos componentes. No obstante, el físico, como Fausto, para estudiar la Naturaleza puede "abandonar" los experimentos y sumergirse en la magia de los símbolos matemáticos. ¿No es, en cierto sentido, mágico que podamos operar con las ecuaciones físicas como si manejáramos los fenómenos mismos? La afirmación de Galileo parece que ya no puede ser puesta en duda; la Naturaleza está escrita en lenguaje matemático, y nuestras teorías físicas matematizadas contienen esa magia fáustica de poder "interrogarla" por medio de los símbolos. Ambos, teoría y experimento, son "herramientas complementarias para entender mejor cómo se comporta la materia" (Fernández-Rañada 2000, p.48).

Pero la magia de las herramientas teóricas que emplea el físico para manejar *simbólicamente* el comportamiento de la materia está en que no son meramente matemáticas, sino híbridas: asocian números a propiedades físicas, proporcionando una *conexión* (Reichenbach 1944, Cramer 1986) o *puente* (Díez-Moulines 1997, Mosterín 2000) que permite traer lo empírico (propiedades y relaciones de propiedades físicas) a lo numérico (funciones monádicas; Stegmüller 1981) y manejar procesos reales como operaciones matemáticas. Esta conexión la realiza un tipo especial de términos teóricos: los símbolos mágicos de la física, los *conceptos cuantitativos o métricos* (magnitudes). Gracias a ellos, el físico puede manipular las ecuaciones[2], como Fausto juega con sus pentagramas, y avanzar respuestas predictivas sin recurrir a la experimentación.

La posibilidad de este manejo simbólico es esencial en la investigación de ámbitos fenoménicos cuyos objetos son *no-medibles directamente*, esto es, aquellos que, por cuestión de tamaño, resultan inaccesibles experimentalmente de forma directa, como ocurre en física del micromundo

[2] De aquí en adelante me referiré a las ecuaciones de magnitudes o ecuaciones físicas simplemente como "ecuaciones". Para cualquier otra referencia haré una especificación.

y, más concretamente, en física de partículas, con objetos como fotones, electrones, quarks, neutrinos, etc. Disciplinas como la mecánica, electrodinámica o cromodinámica cuánticas, manejan de forma *indirecta* estos objetos *no-medibles*, a través de sus interacciones con objetos *medibles* (sustancias ionizadas, placas, etc., como ocurre en una cámara de niebla o en un detector de partículas). La determinación de las propiedades de estos objetos no-medibles se realiza también de forma indirecta, por medio de las denominadas *metrizaciones derivadas*, en las que "obtenemos el valor buscado de la magnitud correspondiente a un objeto a partir de otros valores conocidos (de la misma magnitud para otros objetos y/o otras magnitudes para el mismo objeto), que están relacionados con el primero de cierta manera expresada por una *fórmula de conexión*" (Díez 2000, p.1).

No obstante, debido al carácter híbrido, indisolublemente dual (cuantitativo-conceptual) de los símbolos, el manejo métrico "indirecto" de objetos no-medibles implica algo más que la búsqueda de una concordancia numérica entre predicción teórica y resultados experimentales. Dentro de una ecuación, a cada relación numérica entre ciertas magnitudes corresponde una relación entre sus significados físicos. Así pues, en la predicción en cierto ámbito fenoménico, lo que se maneja cuantitativamente es parte de la *concepción teórica*[3] de dicho ámbito. Con razón Weinberg habla de la manipulación de ecuaciones, como de un juego cuyas consecuencias pueden ser inesperadas, pues, efectivamente, se está "jugando" con el *significado físico* de las magnitudes que componen las ecuaciones, con el puente que nos permite manejar sus referentes empíricos. En este punto debo aclarar

[3] Aquí, el término "concepción" no contiene implicaciones realistas. Aunque se encuentra sumergido en un extenso (histórica y bibliográficamente) debate, en el que no puedo entrar por cuestión de espacio, tomo este término en el significado más literal: "concepción" es el resultado de un proceso de *conceptualización*, de asociación de conceptos a objetos y propiedades de objetos. Concepción "teórica" se refiere a la asociación de conceptos teóricos a objetos y propiedades de objetos, en el marco de una teoría científica. (El debate realismo-instrumentalismo en los momentos cruciales del pensamiento científico de la física, en Rivadulla 2004).

que, en este trabajo se entenderá y empleará la noción de *significado físico* de forma muy restringida: como *contenido métrico-operacional* de una magnitud derivada. En este sentido, en el marco de este trabajo, la noción de *significado físico* siempre estará referida a los términos teóricos *métricos*, esto es, a las *magnitudes físicas*. En Filosofía de la Ciencia se pueden encontrar formas más amplias de estudio del contenido y del significado de los conceptos científicos, principalmente de la mano de: J.A.Díez, Ch.Peacocke, U.Moulines y D.Lewis[4]. Sin embargo, para la consecución de los objetivos de este trabajo es relevante únicamente el *contenido métrico-operacional de los términos teóricos métricos*, por lo que no entraré en el estudio de: (en su caso) el contenido no métrico-operacional de dichos términos, y el significado de términos teóricos no métricos.

No son pocos los ejemplos históricos del "juego" de la manipulación de ecuaciones: Max Planck y la cuantización de la energía, Albert Einstein y la relativización del espacio y el tiempo, o Paul Dirac y el descubrimiento de la antimateria. Manipulando ecuaciones revolucionaron las concepciones teóricas vigentes y ello no habría sido posible si los términos teóricos métricos no fueran una herramienta indisolublemente dual, *cuantitativa y conceptual*, de manejo de la realidad empírica. En concreto, manipulando ciertas ecuaciones, Planck halló la ley que describía la distribución de la densidad de la energía de radiación del cuerpo negro, introduciendo una suposición "puramente formal", una constante ($\hbar$). Cuando esta constante cobró *significado físico* como magnitud de acción, se produjo una revolución en física: se estableció la naturaleza discreta y discontinua de la radiación electromagnética (para los procesos de emisión y, más tarde, de la

[4] Cito las principales obras de estos autores sobre la cuestión del significado de los conceptos científicos: Díez (2002): "A program for the individuation of scientific concepts", en *Synthese*; Peacocke (1992): *A study of Concepts*, MIT Press, Cambridge; Moulines (1998): "Esbozo de ontoepistemosemantica", en *Theoria*, vol.13, nº31, pp. 141-159 ; Lewis (1970): *How to Define Theoretical Terms*, en D.Lewis, Philosophical Papers I, Oxford University Press, Oxford, 78-95.

mano de Einstein, de propagación y de absorción), y se inauguró la mecánica de las propiedades y procesos discretos, cuantizados por $\hbar$: la mecánica cuántica.

Este trabajo doctoral reúne ambas cuestiones, a saber: la metrización derivada de magnitudes y la mecánica cuántica, proponiéndose dos objetivos principales:

1 – un análisis de la generación del significado físico (entendido como contenido métrico-operacional) de magnitudes derivadas, durante el proceso de la metrización derivada;

2 – la reconstrucción de la estructura métrica (de generación del significado físico) de las magnitudes mecánico-cuánticas.

La consecución de ambos objetivos divide el trabajo en tres partes y lleva a una serie de propuestas y resultados que expongo a continuación siguiendo el orden de dichas partes y de sus correspondientes capítulos.

PRIMERA PARTE: El contenido métrico-operacional de la metrización derivada. El análisis magnitudinal.

La primera parte consta de cuatro capítulos dedicados al estudio del contenido métrico-operacional de la metrización derivada de magnitudes.

La relación funcional que una magnitud derivada guarda con aquellos conceptos métricos que intervienen en el proceso de su metrización (derivación), la denomino *contenido métrico-operacional* de la magnitud en cuestión. A este contenido me referiré también como significado físico de la magnitud derivada.

El objetivo de esta primera parte de la tesis es *establecer las reglas generales de la determinación del significado físico de las magnitudes derivadas*.

En el capítulo I se establece que:

- La *metrización* es la actividad teórica de introducción de un concepto métrico. En un primer momento incorpora la actividad práctica de la medición (directa o indirecta), con el fin de cuantificar una propiedad física cualitativa (de un objeto empírico) susceptible de comparación cuantitativa. Si bien este trabajo se centra en el aspecto teórico de la metrización.

- La *interpretación* de un concepto métrico derivado consiste en la determinación de su significado físico *en función de su contenido métrico-operacional*, esto es, su relación funcional con los conceptos métricos involucrados en su metrización, siempre que ésta sea una metrización por definición[5].

  Esta forma de entender la interpretación de un concepto métrico derivado requiere poder determinar *cuándo* una metrización dada constituye una metrización por definición. Para esta labor se necesita un método.

En el capítulo II se estudia el método del que dispone la física para asegurar la legitimidad de la metrización derivada: el análisis dimensional. Se verá que este método resulta empero *inadecuado* o, al menos, *insuficiente*, para el estudio del contenido métrico-operacional de la metrización derivada de magnitudes, por las siguientes razones:

- La homogeneidad dimensional no permite concluir de forma unívoca si una metrización derivada corresponde o no a una situación física.

- Los grupos dimensionales (magnitudes de significado físico aparentemente diferente, pero con las mismas dimensiones) no permiten determinar qué propiedad física exactamente está siendo metrizada en una ecuación.

[5] Idea que expuse en el *IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España* (Valladolid, 3-6 noviembre 2004), en la comunicación "El estatuto ontológico de los conceptos métricos derivados introducidos por definición".

- A partir de las dimensiones de una magnitud no es posible determinar si ésta ha sido metrizada por definición o por cualquier otra forma de metrización derivada (por ley, indirectamente, etc.).

En definitiva, el análisis dimensional no dispone de las reglas adecuadas para determinar cuándo una metrización dada constituye una metrización por definición, con lo cual, no sirve para alcanzar el objetivo de *establecer las reglas generales de determinación del significado físico de las magnitudes derivadas*.

En el capítulo III se propone una herramienta metodológica complementaria al análisis dimensional que denomino *análisis magnitudinal*[6]. Éste se asienta sobre:

- Una norma de *invariabilidad de las magnitudes canónicas base* MLT, por razón de que cualquier base alternativa genera un sistema de magnitudes en el que magnitudes unidimensionales aparecen metrizadas como derivadas, lo que contradice las normas del análisis dimensional.
- Un *criterio de fundamentalidad métrica* según el cual se consideran métricamente fundamentales aquellas magnitudes que: 1) son conceptos métricos indefinidos, y 2) son unidimensionales y dimensionalmente fundamentales, esto es, que su dimensión corresponde a un concepto métrico indefinido.
- Dos *reglas para la determinación de la forma de cualquier metrización derivada*, por medio de las cuales es posible determinar el contenido métrico-operacional de un concepto métrico y establecer si es o no interpretable (en el sentido indicado arriba).

[6] Lo expuse por primera vez en Sánchez Ovcharov (2002) "Algunos razonamientos sobre el aparato formal de la mecánica clásica, relativista y cuántica", *Revista de Filosofía* Vol.27, nº2, Madrid, pp. 419-430.

Sobre estos elementos el análisis magnitudinal permite determinar las conexiones métrico-operacionales entre los conceptos métricos (magnitudes) de una teoría dada y representar dichas conexiones en forma de una *estructura métrica*, donde se puede seguir la generación del significado físico de las magnitudes derivadas.

En el capítulo IV se muestran las conexiones métrico-operacionales de magnitudes relevantes de tres disciplinas físicas en sus estructuras métricas respectivas. Se trata de las magnitudes de la mecánica clásica (Estructura MC), el electromagnetismo (Estructura EM) y la mecánica cuántica (Estructura MQ). Los resultados destacables son:

- Estructura MC: el significado físico de la magnitud de fuerza gravitatoria no es interpretable desde la estructura métrica de las magnitudes mecánico-clásicas.
- Estructura EM: el significado físico de la magnitud de fuerza eléctrica no es interpretable desde la estructura métrica de las magnitudes electromagnéticas expresadas en el sistema gaussiano (*cgs*).
- Estructura MQ: el significado físico de gran parte de las magnitudes mecánico-cuánticas no es interpretable desde su estructura métrica. La constante de Planck (h, $\hbar$) *no es métricamente fundamental* dentro de esta estructura[7].

Los resultados relativos a la estructura de los conceptos métricos mecánico-cuánticos son los más interesantes, pues ponen de manifiesto que las conexiones métrico-operacionales de dichos conceptos deben ser *reconstruidas* para poder ser interpretables, esto es, para poder determinar el

---

[7] Expuse esta idea en la comunicación "The redefinition of Planck's constant", en el *12th Internacional Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Oviedo, 8-13 agosto de 2003).

significado físico de gran parte de las magnitudes cuánticas. Por otra parte, la no fundamentalidad métrica de la constante $\hbar$ de Planck pone de manifiesto que la cuantización representada por $\hbar$ puede deberse a otro factor (constante) de cuantización previo (más fundamental). A estas dos cuestiones está dedicada la segunda parte del trabajo.

SEGUNDA PARTE: La no fundamentalidad de la constante de Planck. Reconstrucción de la estructura métrica de la mecánica cuántica

La segunda parte consta de dos capítulos dedicados al análisis del carácter derivado de la constante de Planck, y a la reconstrucción de estructura métrica de las magnitudes más relevantes de la mecánica cuántica.

Comienzo pues, en el capítulo V abordando la cuestión de la no fundamentalidad métrica de la constante de Planck desde la perspectiva de P.A.M. Dirac, quien ha sugerido que la no fundamentalidad de $\hbar$ puede estar relacionada con la existencia de un factor adimensional, denominado *constante de estructura fina* α, según la ecuación $\hbar = e^2/\alpha c$ (donde e es la carga de electrón y c la velocidad de la luz). En este capítulo:

- Se estudia el factor α y su intervención en procesos cuánticos como la interacción espín-órbita del electrón y las divergencias en electrodinámica cuántica.
- Por medio del análisis magnitudinal se verá que la ecuación $\hbar = e^2/\alpha c$ se corresponde métricamente con la ecuación de Planck de la cuantización de la energía E, según $\hbar = E/2\pi\nu$ (donde ν es la frecuencia). Este hecho permite reconstruir la *metrización por definición* de $\hbar$ a partir de la ecuación $\hbar = e^2/\alpha c$, demostrando así su carácter derivado.

La conclusión es que el factor de proporcionalidad α está contenido en la cuantización de la energía, y como $\hbar$ es el elemento central de las metrizaciones de magnitudes mecánico-cuánticas, todas ellas pueden ser reconstruidas métricamente en función de dicho factor.

En el capítulo VI se procede a la reconstrucción de la estructura métrica de las magnitudes derivadas mecánico-cuánticas, aplicando el análisis magnitudinal. Los resultados más destacados de esta reconstrucción son:

- Por medio del análisis magnitudinal se determina que la cuantización (por medio de $\hbar$) de la energía *del electrón* se deriva métricamente de la longitud de onda de Compton λ_0. Esto permite considerar λ_0 como un factor de *precuantización* de la energía del electrón.

- Se pueden expresar las relaciones de indeterminación de Heisenberg en función de la longitud de onda de Compton para el electrón (λ_0), con lo que parece que la indeterminación debida a $\hbar$ puede ser reformulada como una indeterminación debida a λ_0.

  Este último resultado sugiere la posibilidad de que la longitud de onda de Compton sea considerada como una constante fundamental en el fenómeno de la cuantización.

- Se consigue reconstruir las conexiones métrico-operacionales entre las metrizaciones derivadas de las magnitudes mecánico-cuánticas, en una nueva estructura MQα. Esta estructura sí es interpretable (en el sentido indicado).

TERCERA PARTE: Sistema natural fundamental de unidades SF.
La unicidad del cuanto de acción.

Finalmente, en el capítulo VII propongo un sistema natural de unidades de medida basado en la longitud de onda de Compton λ_0 para el electrón, como unidad de longitud, más otras tres constantes métricamente fundamentales: el tiempo t_0 (según $t_0= \lambda_0/c$), la masa m_0 del electrón y la carga eléctrica unidad e. Lo denomino *sistema natural fundamental de unidades SF.* La expresión de las magnitudes principales de la mecánica cuántica en el sistema SF conduce a los resultados siguientes:

- Una importante simplificación de las magnitudes referidas al electrón.
- Una interpretación del carácter unitario e indivisible de la constante de Planck, en calidad de cuanto acción unidad: en el sistema SF, $\hbar$=1 [ML^2T^{-2}], lo que implica que, si consideramos que la energía E del electrón está determinada por λ_0, obtenemos que E está cuantizada por el cuanto de acción unidad $\hbar$.

Aunque la metodología empleada en esta parte final del trabajo sólo se refiere al electrón, y por tanto su aplicación al resto de partículas materiales originaría múltiples sistemas de unidades, no obstante, todos y cada uno de los sistemas SF correspondientes deben llevarnos a concluir la *unicidad del cuanto de acción* $\hbar$. Lo que constituye un resultado teórico altamente interesante.

Es evidente que todas las conclusiones físico-matemáticas a las que se llega a lo largo de todo este trabajo dependen de la herramienta metodológica que se ha empleado para obtenerlas, a saber, el análisis magnitudinal. Ello implica que las citadas conclusiones dependen de la aceptación de los fundamentos (expuestos en el capítulo III) de dicho análisis.

Para finalizar quiero decir que, en verdad, todo este trabajo está dedicado a la lucha científica y filosófica contra la ininteligibilidad de la Naturaleza que proclaman las teorías denominadas “cuánticas”. Si se me permite acudir de nuevo a la analogía con Fausto, el juego con las ecuaciones físicas puede dejar entrar al Mefistófeles de la ininteligibilidad en nuestro “gabinete de estudio”, que es la física, pero considero que unas reglas para el trazado de los símbolos (en este caso, métricos) puede permitirle salir.

PRIMERA PARTE

El contenido métrico-operacional de la metrización derivada. El análisis magnitudinal

Capítulo I

Términos teóricos métricos: la herramienta cuantitativo-conceptual de la ciencia empírica

Esquema del capítulo

1. Introducción

Junto a los dispositivos experimentales, los modelos teóricos y materiales y el aparato matemático, una de las herramientas principales de la actividad científica son los términos teóricos. Sin voluntad de entrar en el debate filosófico acerca de la estructura de las teorías, podríamos convenir en que cada teoría particular contiene enunciados, que a su vez incorporan diferentes tipos de términos teóricos, en forma de axiomas, leyes, principios, postulados, ecuaciones, etc., establecidos y formulados para "describir adecuadamente [a la experiencia] el funcionamiento presente del sistema, así como […] predecir lo que pasará en dicho sistema en el futuro" (Mosterín 2000, p.245). Como veremos más adelante, existen varios tipos de términos teóricos, pero el éxito predictivo de una teoría física depende principalmente de un tipo de términos y, sobre todo, de la actividad teórica responsable de su introducción; son, respectivamente: los términos teóricos *cuantitativos* o *métricos* (magnitudes) y la *metrización*. En realidad, el físico puede manejar predictivamente sólo aquellos objetos empíricos y fenómenos cuyas propiedades y relaciones de propiedades físicas ha logrado *metrizar*, esto es: *conceptualizar* (asignar un término teórico) y *cuantificar* (medirlas directa o indirectamente: a partir de una relación cuantitativa entre otras propiedades previamente medidas). En este sentido, la actividad de la metrización y su resultado, los conceptos métricos, son herramientas indisolublemente duales, cuantitativo-conceptuales.

Consideremos, siguiendo a Cramer (1986), que una teoría física se compone de dos partes: el formalismo y la interpretación. El formalismo es el conjunto de ecuaciones de magnitudes que permite manejar predictivamente los fenómenos estudiados por la teoría. Y esas magnitudes forman parte de los términos teóricos de la teoría. Proporcionar un significado físico a, e.d. interpretar, esos términos teóricos tiene, a su vez, *dos funciones* (Cramer 1986; Reichenbach 1944). La primera función de la interpretación es establecer una *conexión o puente* (Díez y Moulines 1997, Mosterín 1993) entre lo matemático (formalismo) y lo físico (los objetos empíricos, sus propiedades, estados e interacciones):

> This connection makes it possible to test the formalism by confronting its predictions with experimental results. Without some interpretation of the symbols of the formalism in terms which can be related to experimental observables the formalism remains abstract mathematics without a physical context. (Cramer 1986, §2.0.1.)

Esta conexión entre lo matemático y lo empírico, o entre lo cuantitativo y lo conceptual, propia de los términos teóricos métricos, *es la que posibilita contrastar las predicciones con los resultados experimentales*. En concreto, son los conceptos métricos *derivados* los que intervienen en los cálculos de las predicciones más complicadas y exactas. Cramer (op.cit., §2.0.1.) añade que, "a change in interpretation can alter the meaning of the formalism, can extend the range of its application, and can deal with "paradoxical" or unphysical results". Precisamente, el cambio que introdujo Planck en la concepción de la energía, suponiendo su carácter discreto, le posibilitó resolver el resultado paradójico que mostraba la distribución del espectro de radiación del cuerpo negro[8].

La segunda función de la interpretación está relacionada con la primera: tiene que ver cómo trata la teoría con los "inobservables", esto es, objetos experimentalmente no medibles de forma directa[9] (como electores, quarks, fotones, etc.,), pero cuyo referente se considera real, puesto que se pueden

---

[8] Experimentalmente se había determinado que la distribución espectral de la energía radiante tenía, para cada temperatura, un valor máximo de longitud de onda. W.Wien encontró que, a medida que la temperatura del cuerpo aumenta, su espectro de emisión se desplaza hacia longitudes de onda más cortas (ley de desplazamiento de Wien). Sin embargo, O.Lummer y E.Pringsheim detectaron (en 1899) que la ley de Wien fallaba para frecuencias muy bajas (longitudes de onda muy largas) de la radiación emitida, dato que resultaba paradójico, suponiendo la naturaleza continua de la radiación.

[9] Prefiero evitar el término "inobservable" a secas, por la connotación que tiene con el debate por la distinción entre términos observacionales (con referente observable) y no-observacionales o teóricos (con referente inobservable). Por cuestión de espacio no puedo entrar en consideraciones sobre este tema. Ver Suppe (1979), Carnap, R. (1966) *Philosophical Foundations of Physics* y Moulines (1993).

medir sus interacciones con otros objetos. Son verdaderas "entidades teóricas" según Moulines (1993, p.147). Las teorías que manejan este tipo de objetos (como p.e., las teorías cuánticas) metrizan de forma *indirecta* o *derivada* sus propiedades físicas; esta metrización comprende igualmente una cuantificación y una conceptualización, pero por medio de ecuaciones donde intervienen los valores conocidos de otras magnitudes.

Quiero mostrar en este capítulo, que la *interpretación* de las ecuaciones de una teoría, ya traten de entidades experimentalmente observables o inobservables de forma directa, *depende del significado físico que se pueda dar a las magnitudes involucradas en la ecuación*[10]. Por una parte, debido al carácter dual, cuantitativo-conceptual, de los conceptos métricos, las metrizaciones aportan información tanto física (cualitativa), como numérica (cuantitativa) sobre las propiedades representadas. Sin embargo, no siempre aportan ambos tipos de información a la vez. Hay cuatro tipos de metrización derivada y quiero mostrar que únicamente la metrización derivada que define o introduce una magnitud nueva puede aportar, junto a la información numérica, *información física* sobre la propiedad que representa.

2. Tipos de términos teóricos.

Moulines (1993, p.147), en su tratamiento de los "Conceptos teóricos y las teorías científicas", desarrolla una triple división de los términos teóricos que forman el vocabulario de las ciencias empíricas (entre las que se encuentran las teorías de la física cuántica): los conceptos *ficcionales* o *idealizaciones* (que denominaré "abstracciones"), los términos *inobservables con referente real* (que denominaré "observables por propiedades") y, componiendo la inmensa mayoría de los términos teóricos

[10] Idea defendida en el *IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España* (Valladolid, 3-6 noviembre 2004), en mi comunicación titulada "El estatuto ontológico de los conceptos métricos derivados introducidos por definición".

propiamente científicos, los *conceptos métricos* (magnitudes). Yo he tomado esta división de Moulines como base, he introducido mis modificaciones y he añadido un tipo más de términos, los *hipotéticos*. Para facilitar la comprensión de estos diferentes tipos de términos presento a continuación un esquema con la clasificación que propongo. Después procederé a la explicación de cada tipo de términos.

Términos teóricos referentes a objetos

1. *Abstracciones*
   1.1. *En objetos*
   1.2. *En procesos*
2. *Observables por propiedades*
3. *Hipotéticos*

Términos teóricos referentes a propiedades: magnitudes.

Los términos teóricos se diferencian según el tipo de referente. Primero se puede distinguir entre la referencia a objetos y referencia a propiedades de objetos. Así, por ejemplo, un electrón o un fotón son *objetos* del mundo subatómico, mientras que su carga, masa o velocidad respectivas son sus *propiedades* físicas. Comencemos con la referencia a objetos.

2.1. Términos teóricos referentes a objetos

Para referirnos según a qué clase de *objetos*, necesitamos tres tipos de términos teóricos: *abstracciones*, *observables por propiedades* e *hipotéticos*.

1. Abstracciones

Términos teóricos abstractos (*ficcionales*, para Moulines) o *abstracciones*, son conceptos que no corresponden o representan ninguna entidad real susceptible de ser encontrada dentro del mundo empírico. Se utilizan cuando, en el estudio de un objeto dado, se puede prescindir de ciertas propiedades suyas, abstrayéndolas, para simplificar el estudio. El referente de este tipo de término, digamos, no existe empíricamente, es una idealización o aproximación ideal a una entidad real. Un ejemplo general de de abstracción es el término de "posición", como localización referida a un punto espacial, pues para hablar de la posición de objetos asimétricos o con formas huecas es necesario posicionar el centro geométrico del objeto o su centro de masas, pero no se puede posicionar el objeto mismo. A continuación veremos ejemplos según el *tipo* de abstracción (distinción que no contempla Moulines).

Se puede abstraer propiedades de dos maneras: se puede idealizar un objeto concreto a partir de ciertas propiedades o abstraer en un proceso los elementos que intervienen en él. En función de esto, divido las *abstracciones* en dos tipos:

1.1. En objetos

Se idealiza un objeto empírico respecto de algunas de sus propiedades. Por ejemplo: el término "superficie sin rozamiento", representa una superficie de la que se ha abstraído toda fuerza de rozamiento. Otro ejemplo es "punto material", que es un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables frente a las distancias entre él y los cuerpos con los que interacciona, por lo que su masa se considera concentrada en un punto (normalmente, en el "centro de masas"). Esta abstracción es central en la mecánica clásica, fue heredada por la mecánica cuántica y se sigue aplicando en electrodinámica cuántica[11].

[11] El procedimiento de considerar los efectos de apantallamiento de carga y polarización del vacío conduce, dentro de los cálculos (de integración), a un valor infinito para la masa en reposo del electrón real, produce las denominadas *divergencias*. Los físicos teóricos consideran que una de las claves relevantes de éstas puede estar en que, en la teoría mecánico-cuántica de partículas elementales (con la que funcionan las teorías cuánticas de campos) los campos están referidos a un mismo punto del espacio-tiempo, esto es, las partículas se suponen *puntuales* (Feynman 1985). Sin embargo, como portadoras de una determinada masa, es más lógico atribuirles unas *dimensiones*, aunque muy pequeñas, pero *concretas*. (Prójorov 1998, T.5, p.608)

1.2. En procesos

Se idealiza un proceso atendiendo únicamente a su *forma*, sin considerar los objetos que intervienen. Por ejemplo: el término "órbita" es una abstracción del proceso de traslación de uno o varios objetos en torno a un punto. Otro ejemplo es el término "onda", que representa la forma curvilínea que adopta un medio o superficie durante la propagación de una perturbación por él. En este caso se realiza una abstracción de los elementos del medio por los que se transmite un estado de movimiento. Este tipo de abstracción fue la que tomó Huygens para su teoría ondulatoria de la luz, por analogía con las ondas materiales de sonido[12].

En este punto, quiero introducir como término teórico abstracto respecto a procesos, el concepto de "bordear" (rodear) obstáculos, que se emplea en mecánica ondulatoria clásica. En este caso se abstrae un conjunto de *dispersiones individuales* de los elementos componentes del medio que pasan a través de un obstáculo o una rendija. *El resultado de esas dispersiones, tomadas en conjunto, es un efecto colectivo de desviación de los elementos hacia la zona de sombra del obstáculo*. Esta desviación se interpreta como "bordeo" del obstáculo. Evidentemente, lo que acabo de describir es el fenómeno clásicamente ondulatorio denominado *difracción*[13].

---

[12] La idea de una concepción ondulatoria de la naturaleza de la luz surgió por analogía con las ondas sonoras de la mano de F.Grimaldi, R.Hooke, I.G. Pardies y P. Ango. En 1678, C. Huygens presentó ante la Académie de Sciences (Rivadulla 2003, p.119) su teoría ondulatoria de la luz y en 1690 salió publicado el tratado correspondiente: *Traité de la lumière*. En apoyo a la hipótesis sobre la naturaleza ondulatoria de las ondas luminosas Huygens expuso la siguiente razón (S. del Río 1985, p. 101): la luz debe ser una especie de movimiento que actúa sobre nuestra retina, su velocidad finita corrobora que se trata de un proceso mecánico, pero no puede ser un proceso correspondiente a un chorro de materia, pues los haces luminosos se entrecruzan sin estorbarse, como las ondas del sonido. Por medio de esta teoría se explicaba bien la refracción (simple y doble) y la reflexión. Huygens también formuló un importante principio, el principio de Huygens, según el cual cada punto de un frente de onda es un foco de emisión de ondas secundarias.

[13] F. Grimaldi descubre y publica (1665: *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride alliisque anexis libri II*) el fenómeno de la difracción, como un modo de propagación de la luz. Observa que la sombra que produce el borde un obstáculo iluminado no es nítida, ni la región oscura está situada donde dicta una construcción geométrica, basada en la propagación rectilínea de la luz. Grimaldi no ofreció ninguna interpretación física a su descubrimiento.

Asimismo, “trayectoria” es una abstracción doble, pues a) representa la suma de posiciones sucesivas de un objeto, y b) cada posición es una abstracción de la forma geométrica del objeto posicionado, siendo necesario, para objetos materiales, identificar su posición con su “centro de masas” (otra abstracción, pues involucra el término de “punto material”).

Otra clase de objetos a los que el físico se refiere teóricamente son objetos inobservables, pero que se presume que tienen un referente real:

2. Observables por propiedades

En el caso de estos términos, la teoría con respecto a la cual son “teóricos” supone la existencia de la entidad empírica designada mediante el término y, sin embargo, se afirma la imposibilidad de su observación directa (por cualquier medio). Por una parte, Moulines (1993, p.156) los denomina *inobservables con referente real* y afirma que podemos caracterizar sus referentes como “entidades teóricas”. Son muy frecuentes en las teorías físicas del mundo subatómico: “fotón”, “positrón”, “neutrino”, etc., constituyen un ejemplo de estos términos. Por otra parte, sabemos que “en la literatura de la Mecánica Cuántica las cantidades [magnitudes] físicas que la teoría supone que se pueden medir se llaman *observables*” (Mosterín, Torreti 2002, p.413), y estos observables son, precisamente, las propiedades de los “inobservables” de Moulines. Así, cuando se realiza la medida de un observable de un sistema cuántico, la función de onda (la función que describe la evolución del sistema) se convierte en una función o estado propio *del observable* en cuestión (este proceso es conocido como reducción de la función de onda). Considerándose “observables” ciertas propiedades físicas de las entidades empíricas a las que se refieren términos teóricos como fotón o electrón, he preferido denominar dichos términos “observables por propiedades” (en lugar de “inobservables con referente real”).

Finalmente, propongo una tercera clase de objetos a los que el físico puede referirse teóricamente: los objetos hipotéticos, esto es, postulados por una teoría física, por lo general, nueva:

3. Hipotéticos

Los términos teóricos *hipotéticos* tienen cabida formal en las teorías, pero sus referentes no se han podido detectar ni directa ni indirectamente en la experimentación. Estos son, por ejemplo, "cuerda"[14], "gravitón"[15] o "monopolo magnético" (postulado por Dirac[16]). En su momento, pertenecieron a este tipo de términos el *condensado* (estado condensado de la materia), el *positrón*, el *neutrino* y los *agujeros negros*. La postulación de este tipo de términos teóricos "hipotéticos" es sumamente importante, puesto que, algunas veces, contienen la semilla de un gran avance o una revolución científica (p.e., están a la espera de convertirse en teorías físicas, la teoría de supercuerdas, la teoría de la gravitación cuántica, etc.).

Vistas las formas teóricas de referencia a los objetos, pasemos a la referencia a propiedades de objetos.

[14] Según la teoría de cuerdas, cada electrón y quark (componente de los protones y neutrones) "está formado por un diminuto *bucle* unidimensional. Cada partícula [no es puntual, sino] contiene un filamento que vibra, oscila y baila como un elástico de goma infinitamente delgado que los físicos han denominado *cuerda*" (Greene 2005)

[15] La característica quizá más importante de la teoría estándar de partículas es que explica, en términos de teoría cuántica de campos (TCC), las "fuerzas" como interacciones resultado de un intercambio de cuantos de campo, unas partículas llamadas *bosones* (llamados así en honor a Satyendra Nath Bose). Cada tipo de interacción posee su bosón característico: en la electromagnética se intercambian *fotones*, en la nuclear fuerte *gluones* y en la nuclear débil los bosones W^{+}, W^{-} y Z^{0}. Debido al éxito de las TCC, se pretende explicar la cuarta fuerza existente, la gravitatoria, en términos de bosones portadores de esta interacción, que se denominarían *gravitones* y que están siendo "buscados" experimentalmente en la actualidad.

[16] Presentación y desarrollo de la idea del monopolo magnético en Dirac (1931). El monopolo magnético explicaría la existencia de la carga unidad en la Naturaleza, esto es, la carga del electrón.

2.2. Términos teóricos referentes a propiedades

Para referirnos teóricamente a *propiedades* de objetos, disponemos de un tipo especial de términos teóricos: los *términos métricos* o *magnitudes*.

Gran parte de los términos teóricos que son empleados en la formulación de teorías científicas son *conceptos métricos* o cuantitativos, comúnmente denominados magnitudes. La revolución científica del siglo XVII consolidó el uso de estos conceptos en la física (masa, fuerza, etc.)[17], en sustitución y/o adición a los conceptos cualitativos, clasificatorios y comparativos. Por medio de los conceptos métricos se puede describir hechos, formular hipótesis y realizar predicciones con más sencillez y precisión que con ningún otro tipo de conceptos, ya que constituyen modos de representar cuantitativamente ciertas propiedades relacionales cualitativas de los objetos: aquellas, que son susceptibles de comparación cuantitativa (Díez-Moulines, 1997). En esta *cuantificación de lo cualitativo* se asigna números a propiedades por medio de funciones matemáticas y esta asignación no es arbitraria: se expresan con ella conexiones empíricas entre objetos y sus propiedades. Por ello, a través de los conceptos métricos se puede operar con números "como si" operásemos con los objetos mismos (*Ídem*, p.114).

El carácter dual, cuantitativo-conceptual, de los términos teóricos métricos no pasa desapercibido ni en física ni en filosofía de la ciencia, pues muchas cuestiones ampliamente discutidas parecen estar directamente relacionadas con él. Antes de profundizar en la cuestión de los conceptos métricos, me gustaría referirme, brevemente, a dos casos que constituyen un claro ejemplo de las consecuencias de este carácter dual: el problema de la inconmensurabilidad de los términos teóricos de teorías sucesivas (planteado por T.Kuhn) y el problema de la completitud de las teorías físicas (planteado por A.Einstein).

[17] Con todo detalle expuesto en "La revolución Newtoniana", Rivadulla (2003, cap.II).

2.3. Términos teóricos métricos y problemas conceptuales en física

Comencemos con la *inconmensurabilidad* de las magnitudes físicas de teorías sucesivas[18]. Lo plantea Kuhn (citado por Rivadulla 2004, p.130) en "Reflections on My Critics"[19]:

> Con el paso de una teoría a la que sigue, las palabras transforman sus significados o las condiciones de su aplicabilidad de una forma muy sutil. Aunque mayormente se utilizan los mismos signos antes y después de la revolución -p.e. fuerza, masa, elemento, compuesto, célula- se ha modificado de alguna manera el tipo y modo de su aplicación a la naturaleza. Por ello decimos que las teorías sucesivas son inconmensurables.

Como comenta Rivadulla (2004, p.114), Kuhn y Feyerabend[20] consideraron de hecho que el concepto métrico de masa es diferente en la mecánica clásica (donde es invariante en un objeto) y en la relativista (donde supuestamente varía con la velocidad del objeto), por lo que resulta *inconmensurable* en ambas teorías. En otras palabras, para estos autores el problema estaría en que cada teoría estaría cuantificando un *referente* diferente, una masa cualitativamente diferente. Sin embargo, Rivadulla[21] muestra que la medida de la masa, ya esté en reposo o en movimiento respecto de un sistema de referencia dado, no varía, pues el módulo cuadrimomento mc (donde m es la masa de la partícula y c la velocidad de la luz) de una partícula es un invariante relativista: c es invariante, con lo que m debe serlo también. Por ello, "nada autoriza a pensar que la referencia del término *masa* ha cambiado en el paso de la mecánica newtoniana a la teoría

---

[18] Sobre la inconmensurabilidad y la comparabilidad de las teorías físicas – Rivadulla 2004 (pp. 130-133). Inconmensurabilidad en relación con la Teoría de la Relatividad en Rivadulla 2003b.

[19] Artículo que aparece en Lakatos, I. y Musgrave, A. *Criticism and the Growth of Knowledge*, CUP, Cambridge/London.

[20] Feyerabend, P. (1981) "Explanation, Reduction and Empiricism", en Feyerabend, P. *Realism, Rationalism & Scientific Method. Philosophical Papers.* Vol. 1. CUP, Cambridge.

[21] En "Invariancia de los módulos de cuadrivectores en el espacio-tiempo. Invariancia relativista de la masa" (2004, pp. 114-120) y en "Inconmensurabilidad y relatividad. Una revisión de la tesis de Thomas Kuhn" (2003). Rivadulla parte de una idea de Taylor, E.F. y Wheeler, J.A.

especial de la relatividad" (*ídem*, p.120). Entonces, en términos de metrización, se puede decir que, en el caso expuesto, ambas teorías *metrizan de forma diferente la misma propiedad física* (la masa), lo que puede constatar el análisis dimensional (*ídem*, p.132), que garantiza la legitimidad de la metrización derivada. Esta "confusión" respecto de la masa relativista revela un hecho muy importante relativo a la metrización en física: la misma propiedad, metrizada de forma diferente, puede conducir a errores a la hora de otorgarle significado físico.

Tomemos ahora un ejemplo de complicaciones físicas (aunque no dejan de ser filosóficas) derivadas del carácter dual, cuantitativo-conceptual, de los términos teóricos métricos. En 1935, casi una década después de establecerse la mecánica cuántica (1926), un grupo de científicos consideró que, si la posibilidad de la determinación exacta del valor de una magnitud permite afirmar la existencia de un referente empírico *correspondiente* a esa magnitud, la indeterminación del valor de la misma magnitud (en otras circunstancias) debe implicar la *incompletitud* de la teoría que la está determinando. Se trataba de A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen (EPR), quienes exponían de la siguiente manera la condición de *completitud* de una teoría física:

> "In attempting to judge the success of a physical theory, we may ask to ourselves two questions: (1) "Is the theory correct?" and (2) "Is the description given by the theory complete?". […] The correctness of the theory is judged by the degree of agreement between the conclusions of the theory and human experience [experiment and measurement]. […] the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one: *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*". (Einstein-Podolski-Rosen 1935, p.777)

Entonces, como argumenta A. Witaker (citado por Rivadulla 2004, p.158) si la mecánica cuántica "no permite valores precisos para todos los observables", esto es, para propiedades físicas susceptibles de medición, "el realista clásico cree que tales valores tienen que existir "en la realidad física", pero como no tienen "contrapartida en la teoría", de aquí se desprende la afirmación de incompletitud". En términos de metrización, en las exigencias de completitud de EPR hay dos aspectos entrelazados: la *cuantificación* y la *conceptualización* de propiedades físicas. Como ya he dicho y vamos a ver en este capítulo, ambos van indisolublemente unidos dentro de la metrización, por lo que un dato "inesperado" (como la indeterminación de un parámetro) en la cuantificación de una propiedad física puede estar indicando un nuevo aspecto a tener en cuenta en la conceptualización de la misma. Como ejemplo vale el caso de Planck, quien al cuantizar numéricamente la emisión de la energía, la modificó cualitativamente, pues ésta pasó a ser una propiedad discontinua. EPR pretendían metrizar propiedades físicas en condiciones mecánico-cuánticas, empleando términos válidos en condiciones mecánico-clásicas. La inviabilidad de esta empresa les hacía concluir la incompletitud de la teoría cuántica. Sin embargo, la teoría incompleta o limitada podría ser perfectamente la mecánica clásica y no al contrario, por no contemplar en sus metrizaciones la posibilidad de la existencia de una propiedad física intrínsecamente indeterminada.

Tanto en el caso de la inconmensurabilidad, como en el de incompletitud, la cuestión de fondo es: qué significado físico atribuir a las metrizaciones de propiedades físicas, esto es, cómo *interpretar* los conceptos métricos.

En el próximo apartado vamos a profundizar en la cuestión de los conceptos métricos, para mostrar su absoluta necesidad para la *construcción* de las teorías físicas matematizadas y también para la *interpretación* de las mismas.

3. El papel central de los conceptos métricos en las teorías físicas

El trato cuantitativo que admiten ciertas propiedades físicas da lugar a teorías físicas matematizadas (como la mecánica clásica y cuántica, la termodinámica, etc.). Los conceptos métricos se introducen como funciones numéricas que asignan valores numéricos a las propiedades físicas cuantificables, matematizando nuestro conocimiento de la naturaleza. Díez y Moulines (1997, p.114) explican cómo comienza este proceso de matematización a través de la metrización:

> "El problema básico en el intento de metrizar un área de conocimiento consiste en encontrar la función o el conjunto de funciones métricas apropiadas. Una vez encontrado ello, podemos decir que, en cierto sentido, hemos "identificado" los objetos del dominio estudiado con números reales (o entidades matemáticas derivadas, como vectores, matrices, tensores, etc.). Entonces, en vez de considerar directamente las relaciones y operaciones empíricas que se dan entre los objetos estudiados, podemos concentrar nuestra atención sobre las relaciones y operaciones entre los números que representan las propiedades de los objetos empíricos, y a través de ello, indirectamente, ganamos información sobre los mismos objetos y sus propiedades."

Ahora bien, no siempre *identificar* (objetos físicos con números) implica *ganar información* (sobre los objetos). La mecánica cuántica, por ejemplo, ha identificado los objetos del dominio subatómico con entidades matemáticas, así lo demuestra su gran poder de predicción, sin embargo, cuánta información ha ganado sobre esos objetos es una cuestión delicada (basta con ver las diferentes interpretaciones que admite[22]).

Tomemos una propiedad física común de los objetos, como por ejemplo, el peso. Se puede hablar acerca del peso en términos cotidianos: así decimos que algo es pesado, ligero, grave, liviano, etc. Si reunimos todos estos conceptos clasificatorios en un único concepto métrico "peso", bastará con establecer un patrón unidad de medida (y su escala) y los objetos pesados podrán ser comparados entre sí con precisión numérica. El concepto métrico

---

[22] Interpretación estándar (grupo de Copenhague), interpretación de los mundos múltiples (H.Everett), interpretación del amigo de Wigner (E.Wigner), mecánica bohmiana, etc.

“peso” ha cuantificado la propiedad física del peso, que ahora puede ser puesta en relación matemática con otras propiedades: así, el peso P de un cuerpo en la Tierra será 9,8 veces su masa m (P=9,8m, donde 9,8 es la aceleración media de la gravedad terrestre). “La escala asigna números a los elementos de un sistema empírico, de tal manera que esos números y sus interrelaciones matemáticas reflejen las interrelaciones empíricas entre los elementos del sistema empírico” (Mosterín 1993, p.17). Es evidente que P=9,8m expresa una relación empírica, de constante proporcionalidad entre la masa de los cuerpos y su peso sobre la superficie terrestre. Los conceptos métricos de masa, peso y aceleración (de la gravedad) permiten expresar esta relación empírica mediante una función matemática, gracias a la cual no es necesario acudir a la experimentación para determinar el peso o la masa de cualquier objeto; expresando numéricamente las propiedades de peso o masa en las escalas correspondientes, se podrá deducir matemáticamente el valor exacto buscado en la ecuación.

Con los conceptos métricos se construye lo que algunos han coincidido en llamar un *puente* entre el mundo empírico y el mundo de las matemáticas, a través del cual nuestro conocimiento puede “traer” lo empírico a lo numérico (aunque, de nuevo, puntualizo que no siempre sabemos qué es exactamente lo que hemos “traído”), estudiarlo, sacar conclusiones y después llevarlas a través del puente de vuelta a lo empírico, para corroborarlas:

> “[Los conceptos métricos] hacen de puente entre el mundo empírico real y el mundo ideal de las matemáticas, permitiéndonos así construir modelos matemáticos de la realidad (Mosterín, 2000, p.45). […] Y trasladamos a esos modelos los problemas que la realidad nos plantea. Esos problemas así traducidos al lenguaje matemático son susceptibles de ser analizados y resueltos matemáticamente. Y la solución matemática, retraducida al lenguaje empírico, se convierte en una solución satisfactoria de nuestros iniciales problemas reales” (Mosterín, 1993, p.30).

Díez y Moulines (1997, p.113) comparten esta concepción del papel conectivo de *puente* que desempeñan los conceptos métricos en nuestro conocimiento del mundo empírico:

> "Es sólo a través del puente que constituyen los conceptos métricos entre la realidad empírica y [las porciones más potentes de] la matemática (aritmética, geometría, cálculo) que un amplio espectro de procesos empíricos puede tratarse como si fueran operaciones matemáticas, y esto es lo que a su vez permite un alto grado de precisión en la explicación y la predicción de dichos procesos."

El puente de la metrización, entre el mundo empírico y el matemático, está constituido por *funciones métricas monádicas* que establecen una correspondencia unívoca entre propiedades físicas cuantificables y valores numéricos. Stegmüller (1979, p.61) apunta que el paso a los conceptos cuantitativos, es decir, la metrización, se caracteriza por la introducción de una función que "no es más que una correspondencia unívoca de los objetos de un dominio [realidad empírica] a los objetos de otro [matemática]". Las leyes físicas son funciones de este tipo, lo que, aparte de suponer la gran ventaja de representar de forma sencilla y precisa complejos procesos empíricos, permite *buscar* nuevas leyes:

> "Si sospechamos una correlación entre dos magnitudes f y h, podemos medir los valores de f y h para diversos objetos o sucesos y, mediante un eje de coordenadas en el que los valores de f y h estén marcados en los ejes de ordenadas y abscisas, recíprocamente, señalar en el plano los puntos $<f(x_1),h(x_1)>$, $<f(x_2),h(x_2)>$,… A continuación podemos trazar la curva más sencilla que pase por esos puntos y considerar la fórmula analítica que describa esa curva como hipótesis. Posteriores mediciones confirmarán esa fórmula, o bien nos obligarán a trazar una curva más complicada, reformulando entonces la hipótesis, etc." (Mosterín 2000, p. 43)

Efectivamente, a veces la curva de una gráfica ha revolucionado la física, obligando a los científicos a reformular sus hipótesis iniciales. Recordemos la *catástrofe del ultravioleta*: la incapacidad de hallar una ley para explicar la curva de la función $f(\nu/T)$, donde ν es la frecuencia de la radiación emitida por un cuerpo con temperatura T. La explicación, como sabemos, llegó con la hipótesis de la *cuantización de la emisión de la energía* de Planck[23].

Pasemos a la cuestión de cómo se introduce un nuevo concepto métrico o cómo se metriza una nueva propiedad física. Para poder introducir conceptos cuantitativos se necesita una técnica de medición: un instrumento (p.e., una regla) y un patrón de medida (p.e., el metro). La técnica permite que observadores distintos lleguen al mismo resultado acerca de la comparación de objetos; como señala Stegmüller (1979, p.83), se llega a la *intersubjetividad*, con lo que el proceso de introducción de conceptos cuantitativos, denominado *metrización*, es, en definitiva, un proceso de *objetivización* de nuestro conocimiento acerca de propiedades de objetos empíricos. Los conceptos métricos establecen la *intersubjetividad* de la obtención, tratamiento y transmisión de información acerca del mundo empírico.

La actividad teórica de la metrización implica, pues, la actividad práctica de la medición (por medio de un aparato de medida, un patrón unidad –un estándar – y una escala) y esta última puede ser llevada a cabo de forma directa o indirecta. La diferencia entre ambas formas reside en los procedimientos de *asignación*. En la medición directa o *fundamental* se asigna un valor a una propiedad sin recurrir a asignaciones (mediciones) previas (de la misma y/o de otras propiedades); tiene lugar una comparación de la propiedad medida con el valor asignado al estándar elegido como patrón unidad. Por ejemplo, medir la longitud de una mesa por medio de una regla (aparato de medida) que asigna valores de longitud por comparación con la unidad de *metro* (estándar). En la medición indirecta o *derivada* se asigna un valor a una propiedad calculándolo a partir de asignaciones (mediciones) previas (de la misma y/o de otras propiedades). En este

[23] Exposición del problema que lleva a la catástrofe del ultravioleta y su resolución, en Rivadulla (2002, pp.43-55) y (2003, pp.166-172).

cálculo, los valores conocidos (de las mediciones previas) están correlacionados con el valor buscado por medio de una ley o ecuación física. Por ejemplo, medir la velocidad v de un ciclista implica medir previamente la distancia l que recorre, el tiempo t que emplea para ello y determinar v según la correlación $v = l/t$.

Entenderemos, pues, por metrización *la actividad teórica de introducir un concepto métrico, empleando la actividad práctica de la medición* (directa o indirecta) *para cuantificar una propiedad física cualitativa* (de un objeto) *susceptible de comparación cuantitativa* (respecto de otros objetos portadores de la misma propiedad y habiendo sido tomado uno de ellos como patrón de medida de dicha propiedad).

Partiendo de las dos formas de la actividad práctica de la medición (directa e indirecta) se establecen dos formas de la actividad teórica de metrización, a saber: la metrización fundamental y la metrización derivada. En la metrización *fundamental*[24], la asignación de valores numéricos a una propiedad tiene lugar directamente a partir de datos empíricos (inclinación de una balanza, desplazamiento de la aguja de un cronómetro). Además, debido al carácter dual, cuantitativo-conceptual, de los términos teóricos métricos, el concepto introducido de forma fundamental es un concepto *indefinido* o *primitivo* (G. de Posada 1994, p.48), pues no tiene referencia a ningún otro y, por lo tanto, no se define en función de ningún otro. Estos conceptos métricos indefinidos son los que se toman, generalmente, como magnitudes fundamentales o base (como es el caso de “longitud”, “tiempo” y “masa” en mecánica), para derivar de ellas (a través de leyes y ecuaciones) un sistema de magnitudes. Hablaremos de la cuestión de las magnitudes base y la arbitrariedad o no de su elección, en el capítulo III.

---

[24] Sobre la teoría de la metrización fundamental, Díez (1992, 2000).

En el siguiente apartado veremos en qué consiste la metrización derivada y en qué casos permite la interpretación del significado físico de la magnitud así metrizada. Sólo mencionar que la metrización derivada es la que interviene en procedimientos sofisticados de contrastación (p.e. en experimentos de física de partículas), por lo que, el *puente* entre la realidad empírica y la matemática está compuesto, principalmente, por magnitudes derivadas, aunque sus pilares sean magnitudes fundamentales. Se puede afirmar, con total convicción, que la capacidad predictiva de disciplinas como la mecánica o la electrodinámica cuánticas, la teoría de la relatividad, etc., depende, definitivamente, de *magnitudes derivadas*.

3.1. La metrización derivada, sus formas y su interpretación

En la metrización *derivada* se asignan valores numéricos a propiedades físicas de forma indirecta, esto es, a partir de otras mediciones directas y/o indirectas previamente realizadas y relacionadas con el valor buscado por medio de una ecuación. Como lo expresan Díez y Moulines (1997, p.200-201), la metrización derivada es posible en virtud de "mediciones previas conocidas" y de "la existencia de ciertas fórmulas que expresan correlaciones entre los valores conocidos y el que se desea medir, [siendo dichas correlaciones o bien] *leyes empíricas* [o bien] *definiciones*". En el caso de la metrización derivada, debido al carácter dual, cuantitativo-conceptual, de los términos teóricos métricos, el concepto introducido de forma indirecta es un concepto *derivado* o *definido* y, por lo tanto, su significado físico depende de otros conceptos métricos (fundamentales y/o derivados) previamente introducidos. Denomino al conjunto de estos conceptos previos y sus relaciones funcionales (en forma de leyes empíricas o definiciones) *contenido métrico-operacional* del concepto derivado. A partir de esto se puede establecer que:

La *interpretación* de un concepto métrico derivado consiste en la determinación de su significado físico *en función de su contenido métrico-operacional*, esto es, su relación funcional con los conceptos métricos involucrados en su metrización, siempre que ésta sea una metrización por definición.

Existen varias formas de metrización derivada y no todas introducen un concepto métrico nuevo por definición. Por esta razón (y como mostraré en el capítulo III, por medio de la aplicación del análisis magnitudinal a diferentes sistemas de magnitudes), no todas las metrizaciones derivadas de una magnitud son susceptibles de ofrecer la interpretación de su significado físico. Veámoslo considerando cada una de las formas de metrización derivada[25]:

3.1.1. Forma I. Metrización por ley.

La metrización por ley introduce, o bien un determinado tipo de constante física (como la relación carga-masa del electrón $-e/m_0$), o bien una magnitud cuyo valor permanece constante en determinadas circunstancias (como la masa inercial m_i de un cuerpo es siempre proporcional a la fuerza F_i ejercida sobre él y la aceleración a que experimenta: $m_i=F_i/a$). En ninguno de los dos casos, se ofrece una definición de la magnitud o constante así metrizada.

En el caso de la relación carga-masa del electrón $(-e/m_0)$[26], se obtiene un número constante dimensional ($-1{,}758\cdot10^{11} C\cdot kg^{-1}$), pero que no corresponde

[25] Las cuatro formas de metrización derivada están tomadas de Díez y Moulines (1997, pp.200-204), sin embargo, ellos presentan más formas, como la dimensional o las obtenidas por medio de escalas. Por cuestión de espacio no puedo entrar en consideraciones acerca si esas dos son o no formas de derivación, pero considero sinceramente que no lo son.

[26] Presentada por primera vez en 1897, por J.J. Thomson en su artículo "Cathode Rays" de *Proceedings of the Royal Instutition.*

a ninguna magnitud física, por lo que es imposible, a su vez, que corresponda a una definición de un concepto métrico. En el caso de $m_i=F_i/a$, se está metrizando un concepto métrico (la masa inercial) en función de otros dos. Sin embargo, la relación F_i/a no da la definición de m_i, pues "masa" es un concepto métrico indefinido, primitivo. Entonces, de acuerdo con lo que hemos establecido como "interpretación" de un concepto métrico, el significado físico de la magnitud metrizada m_i no es interpretable a partir de la metrización $m_i= F_i/a$.

3.1.2. Forma II. Metrización indirecta.

> La metrización indirecta corresponde a la medición *indirecta* de una propiedad física representada por una magnitud fundamental.

Como explica Díez (1992), no es posible realizar la medición directa en todos los objetos que exhiben la propiedad a medir. El único modo de medir p.e., la masa de algunos objetos (como los estelares) es utilizando procedimientos indirectos: "en estos casos, la medición directa "entra en la magnitud" a través de unos pocos objetos y se expande al resto mediante las cadenas de medición indirecta a partir de aquellos". Del mismo modo, por ejemplo, no podemos hallar la distancia de la Tierra a Andrómeda con una regla, entonces, recurrimos a un "truco" para medirla "indirectamente": determinando cuánto tarda la luz (cuya velocidad conocemos) en llegarnos desde esa galaxia podemos *medir* y metrizar indirectamente la distancia buscada en función de la velocidad de la luz, pues: $1 \textit{año luz} = c \cdot t = 9{,}46 \cdot 10^{15}\, m$.

De nuevo, y por las mismas razones que en el caso $m_i=F_i/a$, de acuerdo con nuestra definición de interpretación del significado físico de un concepto métrico, la metrización indirecta de una magnitud fundamental no puede constituir su definición. Por lo tanto, el significado físico de un concepto métrico fundamental metrizado de forma indirecta no es interpretable.

3.1.3. Forma III. Metrización por definición.

> La metrización por definición corresponde a la introducción de magnitudes nuevas a partir de otras magnitudes fundamentales y/o derivadas ya conocidas, con la condición de que estas últimas sean las *inmediatamente anteriores en el proceso de derivación*.

La cuestión que surge inmediatamente es ¿cómo determinar que las magnitudes introductorias son las inmediatamente anteriores?

Tomemos la aplicación más importante del cálculo diferencial en física: el concepto de *derivada temporal* (la tasa de cambio en el tiempo). Se requiere en mecánica clásica para la definición precisa de unos conceptos métricos muy importantes, en particular, las derivadas con respecto al tiempo de la posición y de la velocidad de un objeto. Por ejemplo, la velocidad instantánea υ es la *derivada*, con respecto al tiempo (dt), de la posición (dx) de un objeto:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt}$$

En este caso, podemos afirmar que, de acuerdo con el sistema de magnitudes mecánicas, x y t son las magnitudes inmediatamente anteriores a υ en el proceso de derivación, no sólo en el sentido matemático, sino también en el físico. La siguiente magnitud en el proceso de derivación es la aceleración, que es la derivada, con respecto al tiempo (dt), de la velocidad ($d\upsilon$) de un objeto:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Entonces, de acuerdo con nuestra definición de interpretación del significado físico de un concepto métrico, en estos dos casos de metrización indirecta, el significado físico de υ y a sí sería interpretable, pues ambas están metrizadas en función de sus magnitudes inmediatamente anteriores (en el proceso de derivación), que son las que proporcionan su significado físico.

No todos los casos son tan sencillos y sería necesario disponer de un método para poder determinar de una forma más generalizada cuándo una metrización derivada constituye una definición de la magnitud metrizada. Estudiaremos en el capítulo II si el análisis dimensional es un método adecuado para este fin y en el capítulo III se propondrá un análisis nuevo, complementario al dimensional.

Nos queda por considerar una última forma de metrización derivada.

3.1.3.1. Forma IIIa. Metrización sin eliminabilidad.

> La metrización sin eliminabilidad corresponde a la metrización de una magnitud nueva que no ofrece ni su definición, ni tampoco representa una medición indirecta de la misma; es una "regularidad entre magnitudes independientemente determinadas" (Díez-Moulines 1997, p.204).

Se considera que éste es el caso de la segunda ley de Newton $F_i = m_i \cdot a$, que establece que una cierta propiedad empírica (fuerza inercial) actúa cuantitativamente de forma directamente proporcional a la masa y la aceleración del objeto involucrado. Esta ley, estrictamente hablando, no *define*[27] el concepto de fuerza inercial, sino establece *cómo* funciona la propiedad que representa. Igualmente se considera (*ídem*) que éste es el caso de la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

[27] Efectivamente, se considera que esta ley no define propiamente la magnitud de fuerza inercial F_i, sin embargo, desde las consideraciones del análisis magnitudinal (capítulo III) veremos cómo se puede ofrecer una definición de F_i a partir de la segunda ley de Newton.

según la cual la resistencia R de la carga es directamente proporcional al voltaje V aplicado e inversamente proporcional a la intensidad de corriente I que circula por un circuito eléctrico cerrado. Esta ley, en principio, no ofrece una definición de la magnitud *resistencia eléctrica*, que es la resistencia que ofrece un material o aparato al paso de una corriente continua. En este caso, se podría optar por considerar que esta metrización sin eliminabilidad es una metrización por ley, sin embargo, la ley de Ohm no proviene de ninguna ley, sino *es* ella misma una ley.

Análogamente, las leyes de Coulomb $\left(F_c = k\,qq'/d^2\right)$ y de Gravitación Universal de Newton $\left(F_g = G\,mM/d^2\right)$, aunque introducen una magnitud nueva (la fuerza eléctrica F_c y la gravitatoria F_g, respectivamente) tampoco dan su definición, por lo que pueden ser consideradas como otros casos de metrización sin eliminabilidad. Es una cuestión delicada que retomaremos desde otro punto de vista con el análisis magnitudinal, por lo tanto la dejamos por ahora aquí.

4. Conclusiones del capítulo

Los conceptos métricos, como hemos visto, son el único tipo de términos teóricos que denotan "observables", esto es, propiedades físicas (de objetos) *medibles* (directa o indirectamente). En este sentido, estos conceptos son absolutamente esenciales dentro de las teorías de la ciencia empírica, pues hacen posible la predicción.

El carácter indisolublemente dual, cuantitativo-conceptual, de los conceptos métricos permite manejar cuantitativamente (por medio de operaciones matemáticas) sistemas de objetos empíricos. En el manejo indirecto de objetos observables únicamente a través de la medición de sus propiedades (los *inobservables con referente real* de Moulines), el citado carácter dual permite no sólo cuantificar, sino también *interpretar* (dar significado físico

a) esas propiedades. La actividad teórica que *introduce* los conceptos nuevos, que representan las nuevas propiedades físicas susceptibles de ser observadas experimentalmente (medidas), es la metrización derivada.

La metrización derivada *por definición* es la única que introduce un concepto métrico nuevo cuyo significado físico es interpretable desde su ecuación de metrización. En qué relación *formal* (en qué ecuación) y *métrica* (por medio de qué magnitudes) es introducido ese concepto nuevo es lo que *indica* si puede o no ser interpretado (dotado de significado físico), dentro de la ecuación. Para analizar esas relaciones métricas debemos poder distinguir metodológicamente la metrización derivada por definición de las demás formas de metrización. ¿Cómo lograr este objetivo?

La física ya dispone de un método de análisis, el análisis dimensional, cuyas características básicas y adecuación para el objetivo expuesto se estudian en el siguiente capítulo.

Capítulo II

El análisis dimensional: características e insuficiencias para el manejo de la metrización derivada

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **Análisis dimensional. Nociones Básicas.**
   El análisis dimensional se basa en el cumplimiento de la condición de homogeneidad dimensional, sintetizada en el *teorema π de Buckinham*.
   - **2.1.** Condición de homogeneidad dimensional.
   - **2.2.** Teorema π de Buckinham.
3. **Primera insuficiencia: ¿qué asegura la homogeneidad dimensional?**
   El análisis dimensional no asegura que una ecuación que cumple la homogeneidad dimensional represente un proceso físico.
4. **Segunda insuficiencia: las clases dimensionales.**
   Las dimensiones o ecuaciones dimensionales no caracterizan a las magnitudes de forma unívoca, pudiendo tener las mismas dimensiones magnitudes con significado físico diferente.
5. **Tercera insuficiencia: falta de criterio dimensional para distinguir la metrización derivada por definición.**
   Todas las formas de metrización derivada cumplen el principio de homogeneidad dimensional, mas no existe criterio dimensional para la distinción entre dichas formas.
6. **Delimitación de la aplicabilidad del análisis dimensional.**
   El análisis dimensional se aplica indiscriminadamente a todo tipo de metrización derivada, sin poder distinguir la metrización por definición, que es la que importa a la hora de interpretar el significado físico de la ecuación.
7. **Conclusiones del capítulo.**
   Ni la homogeneidad dimensional, ni las clases dimensionales son herramientas adecuadas para poder manejar el contenido métrico-operacional de la metrización derivada de magnitudes. El análisis dimensional no dispone de un criterio para poder distinguir metodológicamente entre los tipos de metrización derivada.

1. Introducción

El análisis dimensional[28] es la herramienta metodológica que permite estudiar sistemas empíricos en los que intervienen magnitudes físicas. Fundamentalmente tiene tres funciones: asegurar la legitimidad de la metrización derivada, detectar errores en los cálculos científicos (producto de sustituciones entre magnitudes o cambios de unidades de medida) y posibilitar el diseño de modelos a escala (geométrica y dinámicamente iguales al prototipo). La función del análisis dimensional que interesa a este trabajo es la primera.

En el capítulo anterior, habíamos llegado a la conclusión de que para el manejo del contenido métrico-operacional de las magnitudes derivadas debemos poder distinguir, de entre las diferentes formas de metrización derivada, la metrización derivada por definición. En esta forma de metrización, el significado físico de la magnitud metrizada puede ser determinado a partir de los significados físicos de las magnitudes intervinientes en la metrización. En este sentido decíamos que el significado físico de una magnitud derivada por definición puede ser *interpretado* a partir de su contenido métrico-operacional.

Comencemos viendo de qué manera el análisis dimensional cumple con la función de asegurar la legitimidad de la metrización derivada y, a partir de ello, consideraremos si este método es adecuado para manejar el contenido métrico-operacional de este tipo de metrización.

[28] El desarrollo de este método se asocia a Lord Rayleigh (1842-1919) y se considera que el matemático y físico francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue pionero en el análisis dimensional. El físico español Julio Palacios contribuyó considerablemente al desarrollo del análisis dimensional con su obra *Análisis dimensional* (Espasa-Calpe, Madrid, 1964).

2. El análisis dimensional. Nociones Básicas

Debido al proceso de medición, la metrización de una propiedad física, esto es, su transformación en una magnitud, le adjudica cierta(s) unidad(es) de medida. La unidad que corresponde a la nueva magnitud depende de la ecuación que la introduce dentro del sistema de magnitudes del que entra a formar parte. Así, por ejemplo, si las unidades de nuestras magnitudes base son centímetro *cm*, gramo *g*, segundo *s* (sistema *cgs*), e introducimos dentro del sistema de magnitudes mecánicas la magnitud de presión *P*, a través de la fuerza *F* y la superficie *S*, según $P = F/S$, entonces, las unidades de medida de *P* se deducirán de esa ecuación. Como hemos considerado el sistema *cgs* para la base, por consiguiente:

$$\frac{F(dina)}{S(cm^2)} = P(dina{\cdot}cm^{-2}).$$

En este sistema de unidades, la unidad de presión no recibe un nombre especial. Sin embargo, como una misma magnitud puede tener unidades diferentes en dos sistemas de unidades, si estuviésemos en el sistema SI, la presión se mediría en la unidad *pascal* (equivalente a $Newton{\cdot}m^{-2}$). Si no damos ningún nombre especial a ninguna de las unidades de magnitudes derivadas, comprobamos que la presión se mide en:

$$\frac{F(g{\cdot}cm{\cdot}s^{-2})}{S(cm^2)} = P(g{\cdot}cm^{-1}{\cdot}s^{-2})$$

Para relacionar entre sí las magnitudes sin que intervengan las unidades en las que se expresan en los diferentes sistemas, se aplica a las magnitudes físicas el concepto de dimensión, que hace referencia a su la naturaleza cualitativa. En nuestro ejemplo, si cambiamos la nomenclatura en las unidades de la presión, y en vez de *g,cm,s* escribimos las siglas de los nombres de sus magnitudes correspondientes M, L, T (masa, longitud, tiempo), obtenemos sus *dimensiones*, a saber: $ML^{-1}T^{-2}$. Lo mismo ocurriría si expresáramos de esta manera la unidad de presión "pascal", pues

$1 pascal = 1 kg \cdot 1 m^{-1} \cdot s^{-2} = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$. Por consiguiente, *se puede hablar de la dimensionalidad únicamente en relación a un sistema de unidades de medida* (Sedov, 1982).

Las dimensiones expresan, por lo tanto, la dependencia de la unidad de medida de una magnitud respecto de las unidades de medida de las magnitudes fundamentales. En virtud de ello, formalmente, la ecuación dimensional de cualquier magnitud física A tiene la forma:

$$\dim(A) = [A] = \mathrm{M}^m \cdot \mathrm{L}^l \cdot \mathrm{T}^t \cdot \ldots \cdot \mathrm{X}^x$$

Donde M,L,T,…,X son los símbolos de las magnitudes establecidas como base (masa, longitud, tiempo, etc.) y *m,l,t,…,x* son los *índices de dimensión*; números reales enteros o fraccionados, positivos o negativos. Los símbolos de las magnitudes base son a su vez los símbolos de su dimensión, por lo tanto, la ecuación dimensional de una magnitud base contiene, por definición, un único elemento:

> “Se ha adoptado que la dimensión de una magnitud básica respecto a sí misma es igual a la unidad y no depende de otras magnitudes; entonces la fórmula dimensional de la magnitud básica coincide con su símbolo” (Prójorov 1995, p.44).

Tomando como punto de partida ciertas magnitudes base (dimensiones base) y *disponiendo* de un sistema de magnitudes con ecuaciones de definición, se puede comenzar a analizar dimensionalmente las magnitudes derivadas. Es muy importante destacar que para que el análisis dimensional sea aplicable a una teoría, es *condición previa y necesaria* que ésta disponga de un sistema de magnitudes. La relación cuantitativa en la que se encuentran las dimensiones de la magnitud derivada está ligada indisolublemente a sus relaciones métricas con otras magnitudes (dentro de un sistema de magnitudes dado). Por lo tanto, la dimensión es una característica de *carácter relacional*.

2.1. Condición de homogeneidad dimensional

Para asegurar la legitimidad de la metrización derivada, el análisis dimensional impone una condición a todas las ecuaciones de magnitudes, a saber: la igualdad dimensional entre ambos lados de la ecuación. De acuerdo con esta *condición de homogeneidad dimensional*, si una ecuación expresa correctamente la relación entre las magnitudes intervinientes en un proceso físico, debe ser dimensionalmente homogénea, esto es, sus miembros deben tener las mismas dimensiones.

Efectivamente, los lados derecho e izquierdo de *cualquier* ecuación física deben ser *dimensionalmente idénticos*. Por ejemplo, si expresamos $P = F/S$ como $P = mv/St$ (donde m es masa, v velocidad y t tiempo) y queremos comprobar si esta última ecuación es correcta, no tenemos más que comprobar su homogeneidad dimensional. Sabemos que $[P]=ML^{-1}T^{-2}$ y obtenemos que $[mvS^{-1}t^{-1}]=MLT^{-1}\cdot L^{-2}\cdot T^{-1}= ML^{-1}T^{-2}$, por lo tanto, se concluye que $P = mv/St$ es correcta.

La homogeneidad dimensional está también directamente relacionada con las unidades de medida. Como lo expresan Mosterín y Torreti (2002, p.32):

> "Las cantidades cuya igualdad aseveran las ecuaciones de la física frecuentemente son cantidades dimensionales; en tal caso, la cantidad que figura al lado izquierdo de una ecuación y la que figura al lado derecho tienen necesariamente la misma dimensión (si el lado izquierdo es una energía y se mide en joules, el lado derecho no puede ser una diferencia de potencial y medirse en voltios)".

Gracias a esta relación entre dimensiones y unidades, el análisis dimensional es también un método que asegura la validez de una ecuación frente a cualquier cambio de unidades en sus magnitudes. Como consecuencia, los diferentes sistemas de unidades son "traducibles" entre sí. Es lo que hemos visto más arriba en el ejemplo de la magnitud de presión expresada en los sistemas de unidades *cgs* y MKS.

2.2. Teorema π de Buckinham

El denominado teorema π de Buckinham es una herramienta muy interesante que permite determinar la forma que ha de tener una ecuación, conocidas las magnitudes que han de ser puestas en relación. Mediante el análisis dimensional, un proceso físico se puede representar por una función de los denominados “grupos adimensionales” (números de Reynolds), en vez de por las magnitudes que intervienen. El teorema determina el número de estos grupos. Con este procedimiento, se reduce el número de variables y se simplifica el manejo del proceso.

Este teorema π establece lo siguiente:

Si se sabe que un proceso físico se rige por una relación dimensionalmente homogénea que comprende n parámetros dimensionales, tales como:

$$x_1 = f\,(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

donde las “x” son variables dimensionales (magnitudes), existe una relación equivalente que contiene un número $(n - k)$ de parámetros adimensionales, tales como:

$$\Pi_1 = f'\,(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-k})$$

donde los “Π” son grupos adimensionales que se construyen a partir de las “x”. La reducción “k” debe ser igual o menor al número de dimensiones fundamentales (p.e., M,L,T) contenidas en “x”. En esencia, el teorema expresa que es posible describir un fenómeno con una cantidad de parámetros adimensionales $(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-k})$ que es menor que la cantidad de parámetros dimensionales involucrados $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema π:

Supongamos que queremos saber la relación entre el espacio l recorrido por un móvil que cae libremente (con aceleración de la gravedad g) en el vacío, y el tiempo t empleado para recorrer ese espacio.

Tenemos 3 parámetros dimensionales, a saber: l,g,t. Luego n=3.

El número k de dimensiones de estos parámetros es 2, a saber, L y T, pues: $[l]$=L, $[g]$=LT^{-2} y $[t]$=T.

Por lo tanto, según el teorema π, el número de parámetros adimensionales de la relación buscada debe ser: $\Pi = n - k = 1$.

En efecto, encontramos el siguiente grupo adimensional:

$$\Pi = \frac{[g]}{[l]}\left[t^2\right] = \frac{LT^{-2}}{L}T^2 = 1$$

De esta relación adimensional se concluye que la ecuación que buscamos contiene una constante adimensional Π y tiene la siguiente forma:

$$l = \frac{1}{\Pi}gt^2$$

Esta constante puede ser determinada experimentalmente y es, en este caso 2, pues se trata de la ecuación $l = 1/2(gt^2)$.

La homogeneidad dimensional y el teorema π constituyen, pues, una herramienta metodológica muy importante para la física, en su manejo correcto de ecuaciones, magnitudes y unidades de medida físicas.

No obstante, el carácter dual, cuantitativo-conceptual, de las magnitudes (en calidad de términos teóricos métricos) suscita ciertas cuestiones relativas al contenido métrico-operacional de las magnitudes derivadas, para cuyo manejo el análisis dimensional no dispone de recursos metodológicos, es decir, resulta insuficiente como método.

3. Primera insuficiencia: ¿qué asegura la homogeneidad dimensional?

Decíamos más arriba que, de acuerdo con la condición de homogeneidad dimensional, si una ecuación expresa correctamente (de forma adecuada a la experiencia) la relación entre las magnitudes intervinientes en un proceso físico, debe ser dimensionalmente homogénea. Esta condición tiene dos implicaciones muy interesantes:

1. Si una ecuación física *no* es dimensionalmente homogénea, entonces la condición de homogeneidad dimensional permite concluir, con plena convicción, que esa ecuación no representa una situación física.

Por ejemplo, la ecuación $a=vt$ (donde a es aceleración, v velocidad y t tiempo) no es dimensionalmente homogénea, pues $[a]=LT^{-2}$, mientras que $[vt]=L$. Ambos lados de la igualdad tienen dimensiones diferentes, lo que indica que esta ecuación no representa ningún proceso empírico. De aquí parece que debería seguirse la conclusión de que cumpliéndose la homogeneidad dimensional en una ecuación, ésta sí representaría una situación física. Sin embargo:

2. Si una ecuación física *sí* es dimensionalmente homogénea, la condición de homogeneidad dimensional *no permite concluir de forma unívoca* si esa ecuación representa o no una situación física.

Por ejemplo, la ecuación $v=2a^2l^{-1}t^3$ es dimensionalmente homogénea, pues $[v]=LT^{-1}$ y $[a^2l^{-1}t^3]=L^2T^{-4}\cdot L^{-1}\cdot T^3= LT^{-1}$ (el 2 es una cantidad adimensional, por lo que no afecta dimensionalmente a la igualdad). Pero esta relación entre magnitudes no representa ningún proceso físico de la naturaleza.

De esto se sigue la primera insuficiencia del análisis dimensional como método de manejo del contenido métrico-operacional (de significado físico) de las metrización derivada: *el cumplimiento de la condición de homogeneidad dimensional no asegura la existencia de la relación empírica expresada métricamente por la ecuación.*

4. Segunda insuficiencia: las clases dimensionales

Tomemos, por ejemplo, la ecuación dimensional de la energía cinética: $[E_c]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$. Esta ecuación se determina fácilmente desplegando un esquema arbóreo del proceso de metrización derivada que conduce a la magnitud de energía cinética:

[*masa*]=M [*tiempo*]=T [*longitud*]=L

$$v = l/t \qquad [v] = \mathrm{LT^{-1}}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad [E_c] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$$

Se ve cómo E_c depende directamente de la masa (*m*) y de modo mediato del tiempo (*t*) y la longitud (*l*), de las cuales se deriva previamente la velocidad (*v*). Podemos decir, pues, que E_c se deriva a partir de las magnitudes base {M,L,T} en dos pasos o escalones derivativos (primero, la derivación de *v* y, segundo, la de E_c).

Tomemos una magnitud de mayor derivación: momento *M* de una fuerza. El esquema arbóreo de su metrización nos da su ecuación dimensional:

[*masa*]=M [*tiempo*]=T [*longitud*]=L

$$v = l/t \qquad [v] = \mathrm{LT^{-1}}$$

$$a = v/t \qquad [a] = \mathrm{LT^{-2}}$$

$$F = ma \qquad [F] = \mathrm{MLT^{-2}}$$

$$M = Fd \qquad [M] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$$

Vemos que, en comparación con la energía cinética, el momento de una fuerza requiere del doble de pasos de derivación, pues previamente se deben introducir las magnitudes de velocidad, aceleración y fuerza. A pesar de esta diferencia de complejidad, lo interesante es que las ecuaciones dimensionales de E_c y M son idénticas (ML^2T^{-2}), mientras que su significado físico parece ser diferente. ¿Cómo entender esta identidad?

Analicemos las diferencias entre las magnitudes E_c y M del apartado anterior, siguiendo la caracterización de las magnitudes físicas de González de Posada (1994, p.35):

> "Dos aspectos fundamentales de distinta índole son estrictamente necesarios para caracterizar una determinada magnitud física:
>
> 1. Su significado físico-filosófico: es decir, su caracterización epistémica, cualitativa, su relación con el referente.
>
> 2. Su naturaleza físico-matemática: es decir, la caracterización de y para: 1) su esencialidad; 2) su cuantificabilidad (y medibilidad); y 3) su relacionalidad (legal y de derivación de magnitudes secundarias)."

En el aspecto *físico-matemático*, la relacionalidad de ambas magnitudes, E_c y M, (que es lo que ponen de manifiesto sus respectivos esquemas arbóreos) es muy diferente: M parece que posee mayor grado de relacionalidad con respecto a otras magnitudes que E_c, que depende únicamente de una magnitud derivada. En el aspecto *físico-filosófico*, el referente de ambas magnitudes no es el mismo: M caracteriza el efecto de giro de una fuerza, cuando esta se aplica sobre un sólido, mientras que E_c es la energía (capacidad de realizar trabajo) de un cuerpo en movimiento.

¿Por qué siendo las dos magnitudes aparentemente tan diferentes tienen la misma ecuación dimensional? En primer lugar, evidentemente, porque contienen las mismas magnitudes base en la misma potencia. En segundo lugar, porque el análisis dimensional es *indiferente* respecto del grado en que puede darse el segundo aspecto que, según González de Posada, caracteriza una magnitud física: la relacionalidad. El análisis dimensional calcula la relación de la magnitud derivada *únicamente* respecto a las magnitudes base, pero no puede analizar esa relación como una característica que puede variar *en grado según etapas de metrización* (a mayor contenido métrico derivativo, mayor grado de relacionalidad y viceversa).

Respecto al primer aspecto, la *relación con el referente*, éste tampoco se refleja de forma estricta en las ecuaciones dimensionales; magnitudes con significado físico diferente, poseen las mismas dimensiones. Por ejemplo, las magnitudes de energía, como trabajo, calor, energía cinética, energía total relativista, etc., poseen la misma ecuación dimensional $[energía] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$ pero, ¿qué tiene que ver con ellas el momento de una fuerza? Esto permite afirmar que el análisis dimensional clasifica las magnitudes según *clases dimensionales*, sin distinguir etapas de metrización ni significado físico. Estas clases se forman únicamente según la dependencia *cuantitativa* respecto de las magnitudes base; es decir, según el número de veces que una magnitud base *interviene* en una magnitud derivada.

He aquí otros ejemplos de magnitudes con diferentes significados físicos, pero pertenecientes a una misma clase dimensional:

CLASE DIMENSIONAL	MAGNITUDES
L	Longitud de onda, radio, generatriz, perímetro.
$\mathrm{L^3}$	Volumen, momento cuadrático lineal.
$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$	Densidad de energía, presión.
$\mathrm{ML^2T^{-1}}$	Acción, momento angular orbital, espín.
$\mathrm{ML^2T^{-2}}$	Energía, trabajo, calor, momento de una fuerza.
$\mathrm{ML^2T^{-3}}$	Potencia, flujo radiante.

Por ejemplo, Planck al introducir su constante, la denominó *cuanto de acción*[29] por tener dimensiones de acción ML^2T^{-1}, *sin embargo, estas dimensiones también corresponden a las magnitudes de momento angular orbital y momento angular intrínseco*.

De estas observaciones se sigue la segunda insuficiencia del análisis dimensional como método de manejo del contenido métrico-operacional (de significado físico) de la metrización derivada: *las dimensiones de una magnitud física no pueden servir estrictamente ni como indicativo de su grado de relacionalidad ni como determinación de su caracterización epistémica*.

5. Tercera insuficiencia: falta de criterio dimensional para distinguir la metrización derivada por definición

Para el análisis dimensional son *dimensionalmente indistinguibles todas las formas de metrización derivada* de una misma magnitud.

Tomemos los siguientes ejemplos. Las ecuaciones presentadas a continuación son métricamente diferentes (a la derecha de la ecuación se muestra sus dimensiones). La primera es una metrización derivada *por ley*:

$$a = \frac{F_i}{m_i} = \left[LT^{-2} \right] \qquad (*)$$

La segunda es una metrización derivada *indirecta*:

$$a = \frac{W}{m \cdot l} = \left[LT^{-2} \right] \qquad (**)$$

donde W es el trabajo. Y la tercera es una metrización derivada *por definición*:

$$a = \frac{v}{t} = \left[LT^{-2} \right] \qquad (***)$$

---

[29] "[…] buscando el significado del cuanto de energía *hv*, únicamente en las *acciones* [cursiva mía, C.S.] mutuas con las que los osciladores se influyen entre sí" Planck (1998, p.96).

Estas tres ecuaciones introducen (metrizan) de forma derivada la misma magnitud, la aceleración *a*, cuyas dimensiones son LT^{-2}. Sin embargo, sólo en una de esas ecuaciones es *interpretable* la magnitud metrizada; sólo en una, a partir del significado físico de las magnitudes introductorias, es posible inferir el significado físico de la magnitud "aceleración". En concreto, a partir de la (***); las demás ecuaciones solamente ofrecen datos *cuantitativos*, esto es, una forma de hallar el valor numérico de una magnitud ya conocida.

De estas observaciones se sigue la tercera insuficiencia del análisis dimensional como método de manejo del contenido métrico-operacional (de significado físico) de las metrización derivada: *las dimensiones de una magnitud física no son indicativo de la forma en que ha sido metrizada, por lo tanto, no hay manera de decidir, a partir de sus dimensiones, si la magnitud es o no interpretable desde su ecuación de metrización.*

Esta última conclusión nos lleva a la cuestión de la delimitación de la aplicabilidad del análisis dimensional a las ecuaciones físicas.

6. Delimitación de la aplicabilidad del análisis dimensional

Denominemos U_T al conjunto de todas las ecuaciones de metrización derivada de una teoría física *T*:

$$U_T = \{ecuaciones\ físicas\}$$

En este conjunto entrarían las metrizaciones derivadas por ley, indirectas, por definición y sin eliminabilidad.

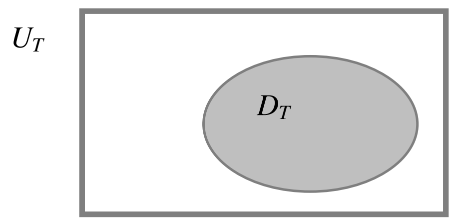
Denominemos como conjunto D_T al conjunto formado únicamente por las ecuaciones de metrización derivada por definición:

$$D_T = \{ecuaciones\ de\ definición\}$$

Resultará que:

$$D_T \subset U_T$$

Es decir, que el conjunto de las ecuaciones de definición es un subconjunto de todas las ecuaciones físicas de una teoría. Visto en un diagrama de Venn:



Tomemos como ejemplo concreto el momento angular L de una partícula, en la forma L=pr (donde p es la cantidad de movimiento y r el radio de giro); constituye la introducción, por metrización derivada, del concepto métrico de momento angular, término teórico de la mecánica clásica (T_C). La ecuación de definición de esta magnitud es:

$$L = pr$$

Ahora deducimos todas las ecuaciones posibles contenidas en ella, despejando una por una las magnitudes del lado derecho de la igualdad:

$$p = \frac{L}{r} \quad , \quad r = \frac{L}{p}$$

Denominamos U_C al conjunto formado por *todas* las ecuaciones correspondientes a la metrización del momento angular (todas las formas de metrización derivada). Este será un conjunto finito de tres elementos:

$$U_C = \left\{ (L = pr), \left(p = \frac{L}{r} \right), \left(r = \frac{L}{p} \right) \right\}$$

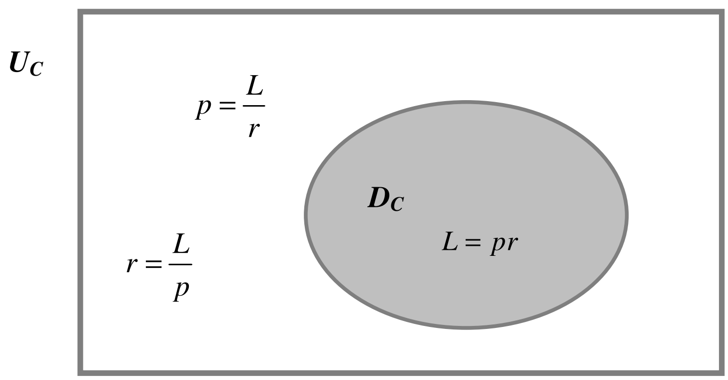
El subconjunto de las ecuaciones de definición D_C contendrá un único elemento, el correspondiente a la introducción del momento angular:

$$D_C = \{ L = pr \}$$

Es evidente que:

$$D_C \subset U_C$$

Que representado en un diagrama de Venn queda de la siguiente forma:



Como se puede ver en el diagrama, las metrizaciones derivadas forman a su vez otro conjunto, el conjunto complementario de D_C, esto es, $\overline{D}_C$, formado por las ecuaciones de metrización de las formas I y II (según las formas establecidas en pp.49-52). Este será el conjunto de todos los elementos que forman U_C menos el elemento de D_C (la ecuación de introducción del momento angular) y lo denomino *conjunto ecuaciones complementarias*:

$$\overline{D}_C = \left\{ \left(p = \frac{L}{r} \right), \left(r = \frac{L}{p} \right) \right\}$$

Generalizando, podemos decir que las ecuaciones de una teoría física T pueden ser clasificadas en tres grupos:

$$conjunto\ U_T = conjunto\ de\ ecuaciones$$

$$subconjunto\ D_T = conjunto\ de\ ecuaciones\ de\ definición$$

$$subconjunto\ \overline{D}_T = conjunto\ de\ ecuaciones\ complementarias$$

$\overline{D}_T$ contendría además las ecuaciones correspondientes a las metrizaciones indirecta, por ley y sin eliminabilidad.

Cumpliéndose para todo elemento t (concepto métrico o magnitud) de la teoría T:

$$\forall t \in T \;/\; (t \in D_T) \wedge (D_T \subset U_T) \Rightarrow (t \in U_T)$$

$$\forall t \in T \;/\; (t \in \overline{D}_T) \wedge (\overline{D}_T \subset U_T) \Rightarrow (t \in U_T)$$

En definitiva, toda magnitud de una teoría física, pertenece necesariamente al *conjunto de ecuaciones* de la teoría, pudiendo pertenecer después, bien al *conjunto de ecuaciones de definición*, responsable de las metrizaciones derivadas por definición; bien al *conjunto de ecuaciones complementarias,* compuesto por todas las demás formas de metrización derivada.

Por consiguiente, como el análisis dimensional no proporciona un criterio de discriminación entre los elementos que pertenecen a los subconjuntos D_T y $\overline{D}_T$, se concluye que *el examen de la metrización derivada que realiza el análisis dimensional recae sobre el conjunto U_T de ecuaciones.* En otras palabras, este análisis se aplica a *todas* las ecuaciones físicas posibles de cualquier teoría. En este sentido, por definición de su ámbito de aplicación, el análisis dimensional no es *capaz* de distinguir la metrización derivada por definición, puesto que, de cara a su examen esta distinción es *irrelevante*. De nuevo, se confirma que *el análisis dimensional no puede pronunciarse acerca del significado físico de la metrización derivada.*

7. Conclusiones del capítulo

Recapitulemos las características del análisis dimensional:

> *1) Es un método que opera sobre el conjunto de ecuaciones* U_T *de una teoría física.*
>
> *2) Asigna a cada magnitud fundamental del sistema una única dimensión y contabiliza cuántas veces interviene en una magnitud derivada.*
>
> *3) Organiza las magnitudes del sistema en clases dimensionales circunstanciales, es decir, la clase no remite al referente de la magnitud.*
>
> *4) No requiere de la distinción entre los tipos de metrización derivada a las que se aplica el análisis, o sea, entre las metrizaciones indirecta, por ley y de definición.*

La *única* condición que el análisis dimensional impone a las metrizaciones derivadas es la de *homogeneidad dimensional* que, como ya hemos visto, no es condición suficiente ni siquiera para saber si una ecuación representa o no una situación física.

Además, aunque determinemos que la ecuación sí representa un proceso real, sus dimensiones no pueden indicarnos de forma unívoca qué propiedad exactamente interviene en el proceso, pues el análisis dimensional no asigna unas dimensiones determinadas a cada propiedad, sino incorpora la propiedad en un grupo dimensional (donde las mismas dimensiones pueden pertenecer a diferentes propiedades físicas).

Y, por último, aunque sí logremos averiguar qué propiedad física exactamente está siendo metrizada en la ecuación, el análisis dimensional no nos permitirá determinar cómo ha sido metrizada (a través de qué forma de metrización derivada), con lo que nos será imposible saber si podemos o no interpretar el significado físico de la magnitud a partir de su ecuación de metrización.

En definitiva, saber si una ecuación representa o no una situación física real, determinar qué propiedad física interviene en el proceso representado por la ecuación dada, y decidir si el significado físico de la magnitud es interpretable o no desde la ecuación, son cuestiones *extra-teóricas* (independientes de las teorías físicas concretas) de la metrización, que el análisis dimensional no puede resolver.

Se hace patente que el análisis dimensional como herramienta metodológica ha de ser perfeccionada o completada con algún otro tipo de análisis que permita *decidir*, por lo menos, en alguno de los casos que hemos presentado como las tres insuficiencias del análisis dimensional.

Capítulo III

Una propuesta nueva: el análisis magnitudinal.
La interpretación de las magnitudes físicas

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **La noción de *fundamentalidad métrica*.**
   Todas las estructuras métricas de la física descansan sobre el mismo grupo de conceptos primitivos, que son *indefinidos*, esto es, que no se pueden derivar de ningún otro término teórico métrico. En este sentido podemos establecer un criterio de fundamentalidad métrica.
   - **2.1. Invariabilidad de las magnitudes base.**
     Sólo la base de magnitudes canónicas MLT genera sistemas de magnitudes que no quebrantan las normas del análisis dimensional.
     - **2.1.1.** Base alternativa {L,T,E}: L (longitud), T (tiempo), E (energía).
     - **2.1.2.** Base reducida {T,M}: T (tiempo), M (masa).
   - **2.2. Criterio de fundamentalidad métrica.**
     Son fundamentales las magnitudes indefinidas, unidimensionales y dimensionalmente fundamentales, esto es, cuya dimensión corresponde a un concepto métrico indefinido.
3. **Análisis magnitudinal. Reconstrucción de la metrización derivada por definición.**
   Partiendo de una base de conceptos indefinidos se puede desarrollar una estructura métrica en la que toda magnitud depende cuantitativa y conceptualmente de la(s) anterior(es), que la definen.
   - **3.1. Reglas generales de la metrización derivada.**
     - **3.1.1.** Primera regla
     - **3.1.2.** Segunda regla
   - **3.2. Reconstrucción de la metrización derivada.**
   - **3.3. La peculiaridad de la metrización sin eliminabilidad.**
4. **Conclusiones del capítulo.**
   La posibilidad de un análisis magnitudinal extra-teórico señala la necesidad de desarrollar una disciplina independiente para el estudio de la metrización derivada.

1. Introducción

En los capítulos precedentes nos hemos aproximado a la cuestión de la metrización derivada desde dos frentes: primero, analizándola como una actividad teórica de introducción de nuevos conceptos métricos (de carácter dual, cuantitativo-conceptual), fundamental para la actividad predictiva de una teoría física; y, segundo, comprobando la adecuación del análisis dimensional para el manejo del contenido métrico-operacional de estos términos teóricos métricos, dentro de la actividad de la metrización derivada. La inadecuación del análisis dimensional para este manejo lleva a la conclusión de que ciertos aspectos propios de y generales a la metrización derivada – aspectos extra-teóricos (independientes de las teorías físicas particulares) – no están ni determinados, ni reglados dentro de ningún tipo de análisis específico.

Díez-Moulines (1997, p.200) y Díez (2000) consideran que la metrización derivada "no tiene contenido en tanto que disciplina empírica específica diferente de las teorías cuantitativas usuales", y afirman que "la tarea de la metrización derivada se reduce pues al estudio y determinación de las correlaciones entre magnitudes que se usan en el "cálculo" de una cantidad a partir de otras". Efectivamente, de la legitimidad de esas correlaciones empleadas para el "cálculo" de una magnitud se ocupa el análisis dimensional. Pero este análisis resulta insuficiente para el manejo de unos términos teóricos como los métricos, cuyo contenido métrico-operacional escapa al alcance de esta herramienta metodológica. La indecidibilidad de la homogeneidad dimensional respecto de la realidad empírica del proceso representado por una ecuación física, la ambigüedad de la pertenencia de magnitudes conceptualmente diferentes a la misma clase dimensional, y la indistinguibilidad dimensional de las diferentes formas de metrización derivada, constituyen las tres insuficiencias que convierten el análisis dimensional en una herramienta superable para el manejo del contenido métrico-operacional de la metrización derivada.

Ahora el objetivo es intentar completar el análisis dimensional, de forma que sea posible, por medio de algún tipo de reglas, discriminar entre los tres tipos de metrización derivada (por definición, indirecta y por ley), y para poder decidir qué metrizaciones son interpretables (en el sentido indicado en el capítulo I, p.49). En particular, las reglas que buscamos deben poder determinar cuáles son las metrizaciones derivadas por definición (subconjunto D_T, de cualquier teoría física T), pues son las únicas en las que se puede establecer una relación entre: las proporcionalidades intermagnitudinales y las dependencias métrico-operacionales (de significado físico) de las magnitudes.

Es evidente que, si el ámbito de aplicación del nuevo análisis es el subconjunto D_T mientras que el del análisis dimensional es U_T, y por definición $D_T \subset U_T$, entonces, el nuevo análisis se aplicará a una fracción del ámbito de aplicación del análisis dimensional. En consecuencia, ambos análisis serán *compatibles y complementarios* dentro de esa fracción de aplicación, que en concreto es el sistema de magnitudes derivadas de cualquier teoría física.

El análisis complementario al análisis dimensional, que he elaborado y que propongo en este capítulo como herramienta metodológica para manejo del contenido métrico-operacional de la metrización derivada de magnitudes, lo denomino *análisis magnitudinal*[30]. Se basa, como veremos a continuación, en una noción de fundamentalidad métrica, en una norma de invariabilidad de las magnitudes base, y en dos reglas de derivación de magnitudes por definición. Considero que este análisis puede subsanar algunas de las

[30] Propuesto por mí en Sánchez Ovcharov (2002) “Algunos razonamientos sobre el aparato formal de la mecánica clásica, relativista y cuántica” en la *Revista de Filosofía* Vol.27, nº2, Madrid, pp. 419-430.

insuficiencias del análisis dimensional en su manejo del contenido métrico-operacional de las magnitudes derivadas.

2. La noción de *fundamentalidad métrica*

La *fundamentalidad métrica* está relacionada con las magnitudes que se eligen como base para la construcción de un sistema de magnitudes. Una de las condiciones que el análisis dimensional impone a las magnitudes tomadas como base consiste en lo siguiente:

> "Se ha adoptado que la dimensión de una magnitud básica respecto a sí misma es igual a la unidad y no depende de otras magnitudes; entonces la fórmula dimensional de la magnitud básica coincide con su símbolo." (Prójorov 1996, p.44)

De acuerdo con esto, la ecuación dimensional de una magnitud base contiene, por definición, un único elemento.

Por otra parte, respecto de la elección de las magnitudes base se dice lo siguiente:

> "El hecho de que Gauss y Weber hayan destacado como magnitudes básicas la longitud y de la masa de inercia no debe mover a la creencia de que necesariamente tengan que serlo. Podrían haberse considerado como básicas otras tres cualesquiera, siempre que ninguna de ellas fuese función de las otras dos o una de las otras dos". (Alvargonzález Cruz 1999, p. 22)

Reúno estas dos afirmaciones en una:

> Elegidas *n* magnitudes, tal que ninguna de ellas sea función de ninguna de las otras y que la dimensión de cada una coincida con su símbolo, se considerarán *magnitudes base*. Y añado: si estas *n* magnitudes base son *unidimensionales y además dimensionalmente fundamentales*, esto es, si su dimensión corresponde a un concepto métrico indefinido, la base formada por esas *n* magnitudes es *invariable*.

Ahora procedo a argumentar a favor de la *invariabilidad* de las magnitudes base mecánico-clásicas {MLT} y, por lo tanto, a favor de la no arbitrariedad ni convencionalidad de la elección de dichas magnitudes.

2.1. La invariabilidad de las magnitudes base

Cito a Alvargonzález Cruz (1999, p.22) para introducir el tema de los cambios de base magnitudinal:

> "Gauss y Weber pusieron de manifiesto que toda magnitud física puede ser expresada en función del tiempo, la longitud y la masa de inercia; es decir, de tres solas magnitudes, las cuales pueden, por tanto, ser consideradas como únicas independientes en el entramado de las teorías de la Física. De hecho las leyes de ésta no son otra cosa que la expresión de relaciones entre diferentes magnitudes, y la definición de no pocas de las unidades físicas es, en último extremo, la de un experimento del cual se deriva una relación entre las tres magnitudes básicas y la magnitud considerada. Por esto puede decirse que *aprender la definición de las unidades de las magnitudes físicas es aprender los mismísimos fundamentos de la Física* [cursiva mía, C.S.]".

Debo discrepar con la afirmación en cursiva. Contiene el error fundamental que subyace a la consideración de la arbitrariedad en la elección de las magnitudes base: la equivalencia entre unidades de medida y conceptos métricos (magnitudes).

Los fundamentos de la física yacen sobre términos teóricos, no sobre la definición de las unidades de medida. La unidad de medida es un mero complemento para una magnitud previamente introducida en calidad de concepto métrico. Podemos medir la fuerza inercial en las unidades $kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}$ y no designarlas como Newtons; ello no cambia nada dentro del sistema de magnitudes mecánicas. Sin embargo, no dar un significado físico a la conexión empírica que existe entre la masa inercial y la aceleración $m_i{\cdot}a$, introduciendo un término teórico, la magnitud de fuerza inercial F_i, significaría *no haber metrizado una propiedad física*. Ésta es la diferencia entre unidades y magnitudes.

Cualitativamente es diferente definir una unidad de medida (en lo cual no hay, en principio ninguna necesidad) y definir una magnitud, ya que las magnitudes proporcionan los términos teóricos que maneja la física para la descripción de los fenómenos. Por lo tanto, hablando con rigor, las unidades de medida *nada* tienen que ver con los fundamentos de ninguna disciplina que opera con magnitudes. Hablar de unidades es lo mismo que hablar de dimensiones y, como hemos visto en el capítulo anterior, estas últimas rara vez aportan información sobre el significado físico de la magnitud. Podríamos sustituir las unidades por las dimensiones y no alteraríamos el contenido métrico-operacional de la teoría. Por ello, debe decirse que los fundamentos de la física están en sus leyes, principios, postulados y ecuaciones, muchos de los cuales contienen y establecen la definición de sus magnitudes.

La tendencia al establecimiento de esta especie de *equivalencia* entre magnitudes físicas y unidades de medida, como acabo de argumentar brevemente, no parece legítima, sin embargo está muy extendida. José Catalán Chillerón (1983, p.10) la expresa de la siguiente manera:

> "Actualmente, está ampliamente admitido que el conjunto de las magnitudes físicas forma un grupo multiplicativo abeliano de generación finita, libre de torsión, en el que toda magnitud se puede expresar en función de las potencias enteras de un número dado de magnitudes (en principio arbitrarias) llamadas base. Este es el fundamento teórico del Sistema Internacional de Unidades o sistema SI".
>
> "[…] Una vez establecido el grupo de magnitudes físicas se demuestra que las magnitudes base o generadoras se pueden escoger por convenio entre las infinitas opciones posibles".

Catalán Chillerón afirma que el fundamento teórico del sistema de unidades de medida SI recae sobre un grupo de magnitudes generadas en función de potencias enteras de unas magnitudes base (o generadoras), que pueden ser escogidas *arbitrariamente*, siempre que ninguna de ellas sea función de las otras (como señalaba más arriba Alvargonzález Cruz).

Ahora bien, esto es así exclusivamente si lo que estamos *generando* por metrización es un sistema de unidades de medida. Si, por el contrario, lo que se *genera* es un sistema de magnitudes físicas, las magnitudes base no pueden ser arbitrarias. Vamos a aplicar las condiciones del análisis dimensional y de la elección de las magnitudes base (reunidas en la afirmación de la p.79) a varias muestras de magnitudes con diferentes bases magnitudinales. Quiero mostrar que el cambio de base magnitudinal incumple estas condiciones.

Consideremos dos propuestas concretas de cambio de magnitudes base, ambas de J. Catalán Chillerón.

2.1.1. Base alternativa {L,T,E}: L (longitud), T (tiempo), E (energía)

Catalán Chillerón propone (1983, p.20) las magnitudes base *longitud* (L), *tiempo* (T), *energía* (E), de modo que todas las magnitudes de dimensiones $[ML^2T^{-2}]$ pasan a tener dimensión [E]. Desde esta base redefine las dimensiones de las magnitudes más relevantes de la cinemática y dinámica clásicas[31].

Vamos a elegir una de las magnitudes derivadas en esta base {LTE} y, desde las reglas del análisis dimensional desplegamos el árbol de su contenido métrico-operacional (relacional o de derivación). Catalán Chillerón presenta la magnitud momento dinámico o angular como $m_d = l \cdot F$, que considera una *definición* de m_d, puesto esta magnitud ha sido introducida por una relación $a=b \cdot c$ que "es la base del cálculo formal de magnitudes [y] una relación de definición [que] nos ha servido para nominar un concepto" (C. Chillerón 1983, p.19).

De acuerdo con las condiciones del análisis dimensional y el establecimiento de las magnitudes base, las magnitudes *longitud* (L), *tiempo*

[31] Las tablas completas del cambio de base de las magnitudes citadas se encuentran en Catalán Chillerón (1983, pp. 20-21).

(T)*, energía* (E) deben: ser unidimensionales y no ser ninguna función de ninguna de las otras dos. Comprobémoslo:

[*longitud*]=L [*tiempo*]=T [*energía*]=E

$$\left[v = l/t\right] = \mathrm{LT}^{-1}$$

$$\left[p = E/v\right] = \mathrm{ETL}^{-1}$$

$$\left[F = p/t\right] = \mathrm{EL}^{-1}$$

$$\left[m_d = l \cdot F\right] = \mathrm{E}$$

Vemos que: *el momento dinámico m_d, en la forma* $m_d = l \cdot F$ *, resulta ser una magnitud unidimensional (*[m_d]=E*) y, por lo tanto, una magnitud base* ***definida en función*** *de una de otra de las magnitudes base, a saber, la longitud l.*

Este resultado pone de manifiesto que sistema de magnitudes generado en la base {LTE} quebranta tanto las condiciones del análisis dimensional, como las condiciones del establecimiento de las magnitudes base, pues: toda magnitud de dimensiones *E* (pertenecientes al grupo dimensional [$\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$]: energía, trabajo, calor, momento de una fuerza), sería *base* por ser unidimensional y, a la vez, estaría definida *en función* de otra de las magnitudes elegidas como base.

Este quebrantamiento de normas dentro del sistema de magnitudes generado en la base {LTE}, nos obliga a concluir que la base propuesta por Catalán Chillerón es inviable.

Tomemos otro ejemplo.

2.1.2. Base reducida {T,M}: T (tiempo), M (masa)

Ahora vamos a ver otra propuesta de base magnitudinal alternativa a la {MLT}, propuesta por Catalán Chillerón (1983, p.41). Esta vez se trata de reducir una de estas magnitudes base a otra y dejar sólo dos.

La ley física que justifica de la reducción de la base es la invarianza de la velocidad de la luz, *c*, frente a los cambios de sistemas de referencia:

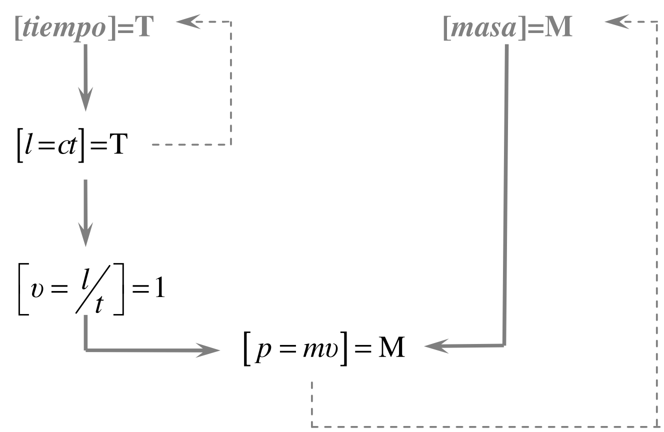
> "En un sistema de referencia determinado, la definición del metro se puede expresar como el camino recorrido por la luz en un intervalo dado de tiempo. En esta definición nosotros podemos considerar dos cosas: a) lo tradicional: decir que el metro es una longitud fija y expresar la medida de la velocidad de la luz como un número de metros por segundo más-menos el error estimado de la medida, o bien, b) decir que la velocidad de la luz es una magnitud fija (*c*=299 792 458 *m/s*), y expresar la medida de la longitud del metro como un número real más-menos el error de medida." (Ídem)

En este último caso, "la base {MLT} se puede reducir a dos magnitudes {MT}. Una consecuencia evidente es que la masa y la energía serían dimensionalmente idénticas, pues *c* queda como una constante adimensional. En esta base reducida {MT} las unidades de masa y tiempo podrían ser el *kg** y el *s**" (*Íbidem*, p.42).

Catalán Chillerón está realizando aquí la reducción de la base magnitudinal de la mecánica {MLT}, consistente en la redefinición de la unidad de medida de la longitud (L) en función del tiempo (T), tomando como coeficiente de proporcionalidad la constante de la velocidad de la luz:

$$1m[\mathrm{L}] = \frac{1}{299.792.458}\, s[\mathrm{T}]$$

De esto se deduce que la velocidad de la luz se convierte en un coeficiente adimensional y, con ella, cualquier velocidad también lo es. El autor genera nuevas unidades de medida a partir de esta base reducida, reformulando ciertas ecuaciones. Tomemos como ejemplo una de ellas: cantidad de movimiento *p*. Desplegamos el esquema arbóreo de su contenido métrico-operacional:



En esta base {TM}: primero, *la longitud l resulta ser una magnitud unidimensional y, por consiguiente, base,* ***definida en función*** *de la magnitud base tiempo t,* y, segundo, *la cantidad de movimiento p resulta ser una magnitud unidimensional y, por consiguiente, base,* ***definida en función*** *de otra de las magnitudes base (la masa m).*

Este resultado contradice doblemente, tanto las condiciones del análisis dimensional, como las condiciones del establecimiento de las magnitudes base.

La conclusión que se impone es que un sistema de magnitudes generado sobre la base {TM} quebranta las normas del análisis dimensional y las condiciones del establecimiento de las magnitudes base (como mínimo, dos magnitudes son *a la vez* base y derivadas), pues sus magnitudes nuevas pertenecen a la vez al grupo dimensional de las magnitudes base. Por tanto, la base reducida propuesta por Catalán Chillerón es, de nuevo, inviable.

Estos resultados se obtienen con cualquier cambio de magnitudes base que realicemos. ¿Por qué surge la contradicción dentro de los sistemas de magnitudes generados sobre otras bases? Porque se confunden las tres formas de introducción de una magnitud derivada: la derivada por definición, la derivada por ley y la derivada indirectamente. El uso *conjunto* de estas tres formas es válido únicamente en los sistemas de unidades de medida y en los dimensionales, pues tanto para las unidades como para las dimensiones, la distribución de las magnitudes dentro de la ecuación no es relevante, siempre que se cumpla la igualdad entre los miembros. Cuando hablamos de generar un sistema de *magnitudes* estamos hablando de derivar unas de otras *por definición*, introduciendo nuevos conceptos a partir de los conocidos. Esta generación funciona únicamente con las magnitudes base *canónicas* {MLT}. *El cambio de base es, nada más y nada menos, la incorporación al árbol de derivación de una magnitud de las formas indirecta y por ley de metrización derivada: formas de metrización no interpretables*, esto es, no es derivable de ellas el significado físico de la magnitud metrizada.

La mezcla de las tres formas de metrización derivada nos conduce a creer que estamos *derivando* el significado de la cantidad de movimiento p del de la velocidad v (en el último ejemplo), cuando, en realidad, estamos *calculando* p desde la consideración de que la velocidad no es una magnitud sino un coeficiente de proporcionalidad adimensional. Son dos cosas absolutamente diferentes, pero relacionadas debido al carácter dual, cuantitativo-conceptual, de las magnitudes.

La conclusión es que la alteración de las magnitudes base canónicas sirve para simplificar procedimientos de cálculo, pero no para hablar del contenido cualitativo o procedencia métrico-operacional (desde otro término conocido) de un nuevo concepto métrico. En otras palabras: *para el análisis del contenido métrico-operacional de la metrización derivada, las magnitudes base no pueden ser elegidas de forma arbitraria ni convencional, a fin de no quebrantar las normas del análisis dimensional,* *ni las normas de la metrización derivada.* Ésta es la *norma de invariabilidad de las magnitudes base canónicas {MLT}.*

2.2. Criterio de fundamentalidad métrica

Basándome en las norma del establecimiento de la base magnitudinal:

> - Elegidas *n* magnitudes base, ninguna de ellas debe ser función de ninguna de las otras.

Y en la condición que impone el análisis dimensional para la base magnitudinal:

> - La dimensión de una magnitud base respecto a sí misma es igual a la unidad y no depende de otras magnitudes; por tanto, la fórmula dimensional de la magnitud base coincide con su símbolo.

Propongo un *criterio de fundamentalidad métrica*:

> Se considerarán métricamente fundamentales aquellas magnitudes físicas que:
>
> 1) sean conceptos métricos *indefinidos* y, por lo tanto, no exista ninguna metrización por definición en la que estos conceptos sean definidos en función de otros conceptos;
>
> 2) sean *unidimensionales* y además *dimensionalmente fundamentales*, esto es, que correspondan a un concepto métrico indefinido.

El *criterio de fundamentalidad métrica* lo cumplen únicamente las magnitudes base canónicas {MLT}, pues todo sistema generado en base a ellas cumple las normas del análisis dimensional en el proceso de la metrización derivada por definición de sus magnitudes.

De acuerdo con el *criterio de fundamentalidad métrica* se puede establecer la diferenciación de grados de fundamentalidad y, recíprocamente, de derivación para todas los conceptos métricos, partiendo de los fundamentales, tomados como magnitudes de grado cero (0) de derivación. Así, las magnitudes más cercanas en derivación a las magnitudes fundamentales, tendrán mayor grado de fundamentalidad respecto de otros conceptos métricos más derivados.

Pues bien, partiendo de la norma de la invariabilidad de las magnitudes base canónicas y del criterio de fundamentalidad métrica, se puede desarrollar un análisis específico (complementario al dimensional) para el manejo del contenido métrico-operacional de la metrización derivada de magnitudes.

3. Análisis magnitudinal. Reconstrucción de la metrización derivada por definición

Partiendo de las magnitudes base *derivadas de grado cero* –simbólicamente M_0– cualquier metrización por definición contará con *un grado* de derivación, simbólicamente M_n (n=1,2,…n). Por ejemplo, a la velocidad lineal v, por ser la primera derivada a partir de la longitud l y el tiempo t, se asignaría el primer grado de derivación. Simbólicamente:

$$\text{si consideramos que } [[M,L,T]]=M_0$$

donde los paréntesis cuadrados dobles significan, de aquí en adelante, *grado de derivación de la(s) magnitud(es) entre paréntesis*, entonces, la velocidad será:

$$[[v]]=M_1$$

La aceleración tendrá el segundo grado de derivación, por derivarse a partir de la velocidad:

$$[[a]]=M_2$$

Y la fuerza inercial F_i, dependiente de a tendrá un grado mayor:

$$[[F_i]]=M_3$$

Clasificando de esta forma las magnitudes derivadas podemos *estructurar* el sistema de magnitudes derivadas de cualquier teoría física.

En esta forma de clasificación de magnitudes derivadas se observan ciertas *reglas generales extra-teóricas de derivación (metrización derivada)*. Así, por ejemplo, el que la aceleración (M_2) *depende de* la velocidad (M_1), lo podemos expresar simbólicamente de la siguiente forma:

$$M_2 = \delta M_1$$

donde el símbolo δ (delta) significa, de aquí en adelante "depende derivativa o métricamente de".

La relación de dependencia entre una magnitud M_1 y las magnitudes base (M_0) se representará de la forma:

$$M_1 = \delta M_0$$

Estas dependencias métricas nos permiten estructurar escalonadamente cualquier sistema de magnitudes, desde las fundamentales hasta las derivadas últimas, pasando por todos los niveles intermedios de metrización.

Como habíamos definido (p.49) la interpretación de un concepto métrico derivado como la determinación de su significado físico en función de los conceptos métricos que intervienen en *su metrización por definición*; y habíamos establecido (p.51) que la metrización por definición es aquella en la que una magnitud nueva se introduce a partir de las magnitudes *inmediatamente anteriores a ella* en el proceso de derivación, podemos concluir que las dependencias métricas que hemos generalizado simbólicamente por medio de δ (delta) constituyen el fundamento de la metrización derivada por definición. Ahora debemos reunir esas dependencias en unas reglas generales.

Antes, quiero añadir que no sólo la metrización derivada por definición contiene el significado físico de las propiedades metrizadas; también lo hace otro tipo de relación formal entre magnitudes. Así, a veces, nos encontramos en física con ecuaciones de la forma $Q = Ne$, que cuantifica un hecho empírico fundamental relativo a la electricidad, a saber, que toda carga Q es múltiplo entero de la carga e del electrón. En este tipo de ecuación no se deriva ninguna magnitud nueva, sino se establecen *proporciones entre propiedades fundamentales*. Estas proporciones aportan información sobre conexiones empíricas entre dichas propiedades y, por lo tanto, ofrecen datos sobre el significado físico de las magnitudes que intervienen en ellas.

3.1. Reglas generales de metrización derivada

Generalizando, podemos establecer dos[32] *reglas generales de metrización*.

Primera regla

> *Una metrización derivada es interpretable si una magnitud fundamental se encuentra metrizada por otras magnitudes fundamentales. Entonces decimos que se trata de una ley de proporcionalidad. Simbólicamente:*

$$\mathrm{M}_0 = \delta\ \mathrm{M}_0$$

En este caso, δ evidentemente no significa “depende derivativamente de”, sino “depende métricamente de”, pues una magnitud fundamental, por su carácter indefinido, no puede ser derivada de otra(s). Sin embargo, como no toda metrización es de definición, puede representar también una conexión entre propiedades. Entonces δ puede significar, en este caso particular de las leyes de proporcionalidades, una dependencia métrica no derivativa.

De acuerdo con las reglas del análisis dimensional, las magnitudes fundamentales así metrizadas, siempre serán unidimensionales. En el caso

---

[32] Con respecto a Sánchez Ovcharov (2002), he reducido las reglas de derivación de tres a dos, considerando que la magnitud base o fundamental es una magnitud de grado nulo de derivación. Para esta simplificación me baso en la caracterización de la metrización fundamental: introducción de un concepto métrico nuevo *sin intervención* de ningún otro concepto *previamente definido*.

de que las otras magnitudes fueran derivadas, estaríamos en un caso de metrización derivada por ley o indirecta.

Un ejemplo de ley de proporcionalidad es la cuantización de la carga eléctrica $Q = Ne$ y otra es la ecuación de la frecuencia angular $\omega=2\pi v$, donde v es la frecuencia lineal.

Segunda regla

Una metrización derivada es interpretable si una magnitud derivada de n-simo grado se encuentra metrizada por una magnitud de grado de derivación n-1, pudiendo haber más magnitudes introductoras de menor grado. Entonces decimos que estamos ante una metrización derivada por definición. Simbólicamente:

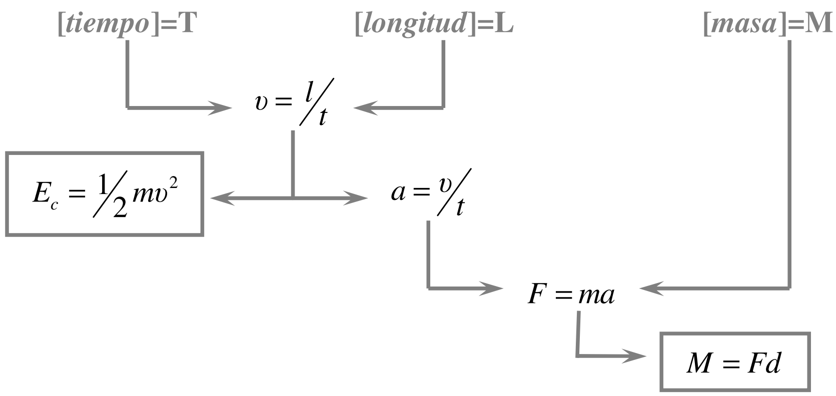
$$\mathrm{M}_n = \delta\ \mathrm{M}_{n-1}$$

(donde n=1,2,3,…). Aquí δ sí significa "depende derivativa y métricamente de". De acuerdo con las reglas del análisis dimensional, las magnitudes así metrizadas siempre serán al menos bidimensionales. Constituye un ejemplo de metrización derivada por definición cualquier ecuación que introduce una magnitud nueva.

La aplicación de estas dos reglas del análisis magnitudinal a cualquier conjunto de magnitudes es lo que denominamos *analizar la generación del significado métrico-operacional de* dichas magnitudes.

3.2. Reconstrucción de la metrización derivada

Recordemos del capítulo anterior las magnitudes *energía cinética* E_c y *momento de una fuerza* M, cuyas metrizaciones desplegamos a continuación en único esquema arbóreo:



El análisis dimensional nos indica que ambas magnitudes tienen la misma ecuación dimensional (ML^2T^{-2}), sin embargo vemos que parecen derivativamente distintas; una magnitud parece contener más pasos intermedios de derivación. Veamos qué nos dice el análisis magnitudinal.

En el caso de algunas metrizaciones, por simplificar la ecuación se obvian pasos intermedios de metrización derivada. Para componer la estructura métrica de un sistema de magnitudes, se deben *reconstruir* estos pasos porque, si siempre los obviáramos, ninguna magnitud derivada tendría un grado de derivación mayor que uno. Por ejemplo, la aceleración se puede expresar como $a=lt^{-2}$ descontando la metrización de la velocidad $\upsilon=lt^{-1}$. El resultado es que el grado de derivación de la aceleración es entonces $[[a]]=M_1$, en lugar de $[[a]]=M_2$. También una magnitud tan compleja como la potencia puede ser de grado de derivación uno, si se expresa descontando todas las metrizaciones derivadas intermedias: $P=ml^2t^3$. Pero, como se puede observar, lo único que se consigue de esta forma es la ecuación dimensional de la magnitud, que efectivamente es $[P]=ML^2T^3$. Y, como sabemos, esta ecuación no muestra la metrización derivada correspondiente a la magnitud *potencia*.

Consideremos ecuación de metrización de la magnitud *energía cinética* E_c=1/2(mv^2). ¿Cómo averiguar qué grado de derivación corresponde a E_c independientemente de las magnitudes que aparecen en su metrización, a saber: masa *m* y velocidad *v*? Debemos determinar el grado de derivación de alguna otra magnitud de energía, pues todas las magnitudes de energía deben ser equivalentes en lo respecta a su *significado físico*, que es lo que pondrá de manifiesto el análisis magnitudinal.

Tomamos la energía potencial E_p, comúnmente expresada como $E_p=mgh$, donde *m* es la masa, *g* la aceleración de la gravedad y *h* la altura. Sabemos que *mg* componen a su vez la magnitud "peso" (una *metrización intermedia* obviada), pues $P_g=mg$. Por lo tanto, a E_p le corresponde el grado de derivación cuatro, lo que se comprueba aplicando las reglas del análisis magnitudinal y reconstruyendo la metrización derivada de E_p incorporando la metrización intermedia correspondiente a P_g:

Aceleración de la gravedad $g=a=v/t \rightarrow [[a]]=M_2$

Metrización intermedia obviada P_g:

Peso $P_g=mg \rightarrow [[P_g]]=M_3$,

Entonces, energía potencial $E_p= P_g h \rightarrow [[E_p]] = M_4$.

Reconstrucción de la metrización de la energía cinética

Análogamente, la energía cinética debe tener el mismo grado de derivación que la energía potencial, lo que indica que debemos reconstruir en la ecuación E_c=1/2(mv^2) las metrizaciones intermedias obviadas hasta alcanzar el grado de derivación M_4. Aplicamos las reglas del análisis magnitudinal para la reconstrucción de E_c:

Tomamos la ecuación E_c=1/2(mv^2) y la expresamos de la forma siguiente:

$$E_c = \frac{1}{2} m\upsilon \frac{l}{t}$$

Vemos, que podemos obtener una *metrización intermedia* más (un grado más de derivación) si combinamos la velocidad υ con el tiempo t^{-1} en una aceleración a. Entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} ma \cdot l \quad \xrightarrow{\text{que equivale a}} \quad E_c = \frac{1}{2} F \cdot l$$

La fuerza F (que puede ser también el peso P_g, en caso de que la aceleración a sea la de la gravedad, esto es, g) tiene un grado de derivación tres ($[[F]]$=M_3), con lo que hemos obtenido el grado buscado para E_c, pues:

Si $\quad [[E_c]] = \delta\,[[F]] \quad$ y $\quad [[F]]$=$M_3 \quad$ entonces $\quad [[E_c]]$=M_4.

Esta forma de metrizar la energía cinética no ha de extrañarnos, porque, en verdad, expresa la establecida equivalencia entre el trabajo W y la energía E, pues, en el caso de la energía cinética:

$$W = F \cdot l \quad \approx \quad E_c = \frac{1}{2} F \cdot l$$

Esta expresión de la *equivalencia métrico-operacional* entre trabajo, energía y momento de una fuerza, por medio del análisis magnitudinal *justifica* la existencia de la clase dimensional a la que pertenecen las tres magnitudes (ML^2T^{-2}).

Hagamos una reconstrucción más, la de la metrización derivada de *energía cinética de rotación* E_k (de nuevo, dimensionalmente idéntica a E_c y M).

Reconstrucción de la metrización de la energía cinética de rotación

Como el procedimiento de reconstrucción sigue los mismos pasos que en caso de E_c, obvio explicaciones adicionales y expongo sólo los pasos:

Ecuación inicial de energía cinética de rotación: $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$

Incorporación de metrizaciones intermedias obviadas:

Velocidad angular ω → grado de derivación $[[\omega]]$=M_1

Momento de inercia $I=mr^2$ → $[[I]]$=M_1

Metrización intermedia obviada a_c:

Aceleración centrífuga $a_c=\omega^2 r$ → $[[a_c]]$=M_2

Metrización intermedia obviada F_c:

Fuerza centrífuga $F_c=ma_c$ → $[[F_c]]$=M_3

Ecuación final de energía cinética de rotación: $E_k=\frac{1}{2}F_c\cdot r$ → $[[E_k]]$=M_4

Estas reconstrucciones, a las que el análisis magnitudinal puede someter la metrización derivada, son de gran relevancia, pues permiten organizar sistemas de magnitudes en verdaderas estructuras métrico-operacionales.

3.3. La peculiaridad de la metrización sin eliminabilidad

Decíamos en el capítulo I, que la metrización sin eliminabilidad corresponde a la metrización de una magnitud nueva que no ofrece ni su definición, ni tampoco representa una medición indirecta de la misma; Díez-Moulines (1997, p.204) la consideran una "regularidad entre magnitudes independientemente determinadas".

Primero una aclaración. El ejemplo más recurrido de este tipo de metrización es, como ya dijimos, el de la segunda ley de Newton: la metrización de la magnitud de *fuerza inercial* según $F_i=m_i a$. Se considera que esta ecuación no representa la definición de F_i. Sin embargo, si lo que estamos definiendo es su significado métrico-operacional, F_i sí puede ser interpretada en función de $m_i a$. Si interpretamos la cantidad de movimiento ($p=m_i v$) como la propiedad de un cuerpo de masa m_i con velocidad puntual v, la fuerza inercial F_i puede ser interpretada como *la cantidad de movimiento de un cuerpo de masa m_i con aceleración puntual a*. De hecho, la fuerza inercial puede ser metrizada como la derivada de la cantidad de movimiento *dp* respecto del tiempo *t* según $F_i = dp/dt$. Por lo tanto, no hay razones métricas para no considerar $F_i = m_i a$ como una *definición* del significado físico (contenido métrico-operacional) de F_i.

Esta aclaración era absolutamente necesaria para desarrollar la argumentación que sigue a continuación y que nos permitirá caracterizar la metrización derivada sin eliminabilidad dentro del marco del análisis magnitudinal.

Consideremos un caso de metrización sin eliminabilidad indiscutible: la ley de gravitación universal

$$F_g = G\frac{mM}{d^2} \qquad (*)$$

donde F_g es la fuerza gravitatoria, m,M las dos masas interactuantes gravitatoriamente y d la distancia que las separa. G es una constante dimensional que no corresponde al valor constante de ninguna magnitud física conocida.

Se considera que la metrización (*) no define F_g y, efectivamente, no podemos inferir el significado físico de la fuerza gravitatoria a partir de los significados de la masa y la distancia.

El análisis dimensional nos indica que la fuerza inercial F_i y la gravitatoria F_g tienen las mismas dimensiones, a saber: MLT^{-2}. En el caso de F_i estas dimensiones se obtienen directamente de las magnitudes que la metrizan:

$$[m_i a] = MLT^{-2} \longrightarrow [F_i] = MLT^{-2}$$

Sin embargo, en el caso de F_g las dimensiones no se pueden obtener directamente de sus *magnitudes*:

$$\left[\frac{mM}{d^2}\right] = M^2L^{-2} \quad \text{mientras} \quad [F_g] = MLT^{-2}$$

Únicamente asociando dimensiones a la constante G ($M^{-1}L^3T^{-2}$) se consigue componer la ecuación dimensional correcta para F_g.

Veamos qué nos puede aportar el análisis magnitudinal de la metrización de F_g. Hemos considerado más arriba $F_i=m_i a$ como una definición del significado métrico-operacional de F_i. Establezcamos por la segunda regla del análisis magnitudinal ($\mathrm{M}_n = \delta\ \mathrm{M}_{n-1}$) el grado de derivación de F_i:

$$[[m_i]] = \mathrm{M}_0 \quad ; \quad [[a]] = \mathrm{M}_2 \quad \rightarrow \quad [[F_i]] = \mathrm{M}_3$$

Análogamente, a la magnitud F_g le debe corresponder el mismo grado de derivación M_3. Entonces, si la metrización (*) de la fuerza gravitatoria fuese derivada por definición, debería cumplir la regla $\mathrm{M}_n = \delta\ \mathrm{M}_{n-1}$. Comprobémoslo:

$$[[m, M]] = \mathrm{M}_0 \quad ; \quad [[d]] = \mathrm{M}_0 \quad \xrightarrow{pero} \quad [[F_g]] = \mathrm{M}_3$$

La regla del análisis magnitudinal se incumple, por lo que debemos concluir que la metrización (*) *no es interpretable*, esto es: a partir del significado físico de las magnitudes introductorias (en este caso, m,M,d) no se puede inferir el significado físico de la magnitud metrizada (F_g).

Se puede ver que, si se aceptan las reglas del análisis magnitudinal, éste, a diferencia del dimensional, puede decidir *metodológicamente* si una ecuación constituye o no una metrización derivada por definición y, por lo tanto, si es o no es interpretable.

Para el caso de F_g se puede sacar otra conclusión a partir de las reglas del análisis magnitudinal: para que la metrización (*) sea una metrización por definición (y F_g sea interpretable) debe cumplir $\mathrm{M}_n = \delta\ \mathrm{M}_{n-1}$, lo que implica que en (*) debe aparecer una magnitud X, correspondiente a una *metrización intermedia* de segundo grado de derivación, tal que $[[X]]=\mathrm{M}_2$.

Es decir, se debería *reconstruir la metrización derivada* de F_g (tarea que se deja planteada en este trabajo).

Lo que he querido ejemplificar es que no sería descabellado suponer que, en lo que se refiere al contenido métrico-operacional, la metrización derivada *sin eliminabilidad* de una magnitud podría ser una metrización por definición *métricamente incompleta*, esto es, con falta de metrizaciones intermedias. Aplicaré esta misma idea en el capítulo V, para determinar la forma de una metrización derivada por definición, en la que interviene la constante de Planck y la constante de estructura fina.

4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo he propuesto un análisis específico de la metrización derivada, el *análisis magnitudinal*, fundamentándolo en tres pilares:

1) la norma de la invariabilidad de las magnitudes base canónicas {MLT};
2) el criterio de fundamentalidad métrica, según el cual es fundamental aquella magnitud que sea: un concepto métrico *indefinido*, *unidimensional* y *dimensionalmente fundamental,* esto es, que corresponda a un concepto métrico indefinido;
3) dos reglas de derivación de magnitudes, que permiten distinguir entre todos los tipos de metrización derivada y decidir sobre el significado físico de cada una de ellas.

Además, como hemos visto, el análisis magnitudinal justifica la existencia de clases dimensionales, pues permite reconstruir la metrización derivada de magnitudes con la misma ecuación dimensional, pero un contenido derivativo aparentemente diferente.

Aplicando el análisis magnitudinal, conjuntamente con el dimensional, se pueden estructurar por grados de derivación (por orden decreciente de fundamentalidad) los conceptos métricos del sistema de magnitudes de cualquier teoría física. Esta estructuración no sólo contendrá las relaciones cuantitativas (numéricas) que guardan las magnitudes como variables físicas en ecuaciones matemáticas, sino también las relaciones cualitativas (de significado) que relacionan a las magnitudes en su condición de términos teóricos.

Esto convierte al análisis magnitudinal en una herramienta metodológica *extra-teórica*, puesto que puede componer, con las mismas reglas, las estructuras métricas de cualquier sistema de magnitudes, *independientemente* de la teoría física a la que pertenezca.

En el capítulo que viene a continuación, por medio de los análisis dimensional y magnitudinal vamos a componer las estructuras métricas de los sistemas de magnitudes mecánico-clásicas, electromagnéticas y mecánico-cuánticas, tomando muestras representativas de sus magnitudes.

Capítulo IV

Aplicación del análisis magnitudinal
a magnitudes mecánico-clásicas, electromagnéticas y cuánticas

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **Estructura métrica de la Mecánica Clásica (MC)**
   A partir de la estructuración, por medio de análisis magnitudinal, de las magnitudes mecánico-clásicas más relevantes obtenemos su *estructura métrica*, cuyas características se pueden estudiar.
   - **2.1. Aclaraciones previas**
   - **2.2. Estructura MC**
   - **2.3. Comentarios a la Estructura MC**
     Se obtiene que el significado físico de la fuerza gravitatoria no es interpretable desde la Estructura MC.
3. **Estructura métrica del Electromagnetismo (EM).**
   A partir de la estructuración, por medio de análisis magnitudinal, de las magnitudes electromagnéticas clásicas más relevantes obtenemos su *estructura métrica*, cuyas características se pueden estudiar.
   - **3.1. Aclaraciones previas.**
   - **3.2. Estructura EM.**
   - **3.3. Comentarios a la Estructura EM.**
     Se obtiene que el significado físico de la fuerza eléctrica no es interpretable desde la Estructura EM.
4. **Estructura métrica de la Mecánica Cuántica (MQ)**
   A partir de la estructuración, por medio de análisis magnitudinal, de las magnitudes mecánico-cuánticas más relevantes obtenemos su *estructura métrica*, cuyas características se pueden estudiar.
   - **4.1. Aclaraciones previas.**
   - **4.2. Estructura MQ.**
   - **4.3. Comentarios a la Estructura MQ.**
     Parte de la Estructura MQ no es interpretable, y el cuanto de acción resulta ser métricamente no fundamental.
5. **Conclusiones del capítulo.**
   Los resultados obtenidos para la Estructura MQ deben ser estudiados en profundidad y debe realizarse una reconstrucción de las metrizaciones de dicha estructura.

1. Introducción

En este capítulo, aplicando los análisis magnitudinal y dimensional, vamos a ordenar por grados de derivación las magnitudes de la mecánica clásica (Estructura MC), el electromagnetismo clásico (Estructura EM) y la mecánica cuántica (Estructura MQ), tomando una muestra representativa de sus conceptos métricos.

El objetivo es componer las estructuras métricas de estas disciplinas físicas, a partir del análisis de la metrización derivada y la presentación de las ecuaciones que representan metrizaciones derivadas por definición. Esta presentación es importante, pues, como habíamos establecido en el capítulo I (p.49), la *interpretación* de un concepto métrico depende del significado físico que se le pueda atribuir *en función de los conceptos métricos que intervienen en su metrización por definición*. En consecuencia, las estructuras métricas que se puedan componer en base a las metrizaciones derivadas por definición, de las magnitudes de MC, EM y MQ, representarán sus respectivas *estructuras métricas*, susceptibles de interpretación.

En cada estructura, las magnitudes se organizarán en grupos según grado de derivación M_n (n=1,2,…), y estos grupos compondrán una tabla, donde las columnas significarán, de izquierda a derecha:

> Columna 1: grado de derivación de la magnitud introducida, expresado por la correspondiente regla del análisis magnitudinal.
>
> Columna 2: denominación de la magnitud,
>
> Columna 3: ecuación de metrización de la magnitud,
>
> Columna 4: dimensiones de la magnitud.

Por último, indicar que, como veremos, no todos los elementos (metrizaciones) van a cumplir las normas de los análisis dimensional y magnitudinal. En algunas ocasiones, puede ocurrir que la metrización sea correcta dimensionalmente, pero incumpla la regla de metrización por definición ($M_n=\delta M_{n-1}$) del análisis magnitudinal. En este caso, el recuadro de la ecuación de metrización correspondiente a la magnitud aparecerá marcado en amarillo. Por ejemplo, una cantidad de movimiento cuyo grado de derivación es M_2 metrizada en función de una magnitud de acción (de grado M_5):

$M_6=\delta M_5$	*cantidad de movimiento fotón*	$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$	**MLT^{-1}**

Pero puede ocurrir un caso más, y es que una metrización quebrante las normas de ambos análisis, dimensional y magnitudinal, caso en el que se marcarán en amarillo y azul ambos recuadros correspondientes. Por ejemplo, que un radio, magnitud unidimensional y, por tanto, de grado de derivación cero, esté metrizado en quinto grado de derivación (M_5), en función de una energía (M_4):

$M_5=\delta M_4$	*radio clásico del electrón*	$r_0 = \frac{e^2}{E_0}$	**L**

Estos indicadores del quebrantamiento de normas de los análisis nos permitirán sacar conclusiones acerca de las estructuras métricas de la mecánica clásica, del electromagnetismo clásico y, en especial, de la mecánica cuántica.

2. Estructura métrica de la Mecánica Clásica (MC)

La primera aplicación del análisis magnitudinal va a recaer sobre una muestra representativa de magnitudes cinemáticas y dinámicas de la mecánica clásica. El estudio de la metrización derivada de esta mecánica es esencial dentro de la física, pues sus conceptos métricos son empleados en cualquier otra mecánica, como la relativista o la cuántica.

La *cinemática* es “la parte de la mecánica que estudia las características geométricas del movimiento de los cuerpos prescindiendo de sus masas y de las fuerzas que sobre ellos actúan” (Prójorov 1995, p.163). En concreto, estudia las características de tres tipos de objetos en movimiento: de un punto, de un sólido y de un medio en continua variación. Así puede determinar trayectorias, velocidades y aceleraciones de un punto en movimiento, o las velocidades y aceleraciones angulares de cuerpos en rotación o traslación, etc. Los términos teóricos métricos de la cinemática clásica son empleados, por ejemplo, también en el tratamiento de las partículas elementales, por ello, considero importante analizar su metrización.

La *dinámica* es “la parte de la mecánica que se dedica al estudio del movimiento de los cuerpos materiales en relación a las fuerzas aplicadas que lo provocan. En la base de la dinámica subyacen las *leyes de la mecánica de Newton*” (*Íbidem*, p.311). La dinámica examina dos tipos de problemas: en uno, se trata de determinar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, conociendo su movimiento (el ejemplo por antonomasia de resolución de este tipo problema es la ley de gravitación universal de Newton); en el otro, conociendo las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, se debe determinar la ley de su movimiento. Para resolver este segundo tipo de problema es necesario conocer las *condiciones iniciales* del cuerpo, a saber, la posición y la velocidad del cuerpo en el instante en que se inicia su movimiento bajo la acción de las fuerzas conocidas. Éstas son las condiciones que representan las variables canónicamente conjugadas *posición* x y *cantidad de movimiento* p ($p=mv$, donde m es la masa y v la velocidad del cuerpo). Estas variables, por ejemplo, no se pueden determinar simultáneamente con precisión a nivel cuántico. En este sentido, se puede decir que las relaciones de indeterminación de Heisenberg, son de “indeterminación” porque se fundamentan en la dinámica clásica y establecen que, para un objeto cuántico, *no se puede determinar con precisión sus condiciones iniciales* y, por consiguiente, *no se puede determinar la ley de su movimiento* en términos de dinámica de partículas.

Es evidente que las ecuaciones y los términos teóricos de la cinemática y dinámica clásicas son absolutamente centrales en física, tanto, que se aplican a cualquier campo nuevo de investigación, como lo fue el mundo subatómico. Vamos a ver cuál es la estructura de sus metrizaciones derivadas.

2.1. Aclaraciones previas

De acuerdo con la determinación de los grados de derivación de ciertas magnitudes, que hemos llevado a cabo en la sección *3.2. Reconstrucción de la metrización derivada* del capítulo anterior, se considerará:

$$[[\textit{energía cinética } E_c]] = M_4$$

$$[[\textit{energía potencial } E_p]] = M_4$$

$$[[\textit{energía cinética de rotación } E_k]] = M_4$$

Asimismo se incorporarán a la estructura las metrizaciones que en el citado apartado hemos determinado como "metrizaciones intermedias" (P_g, a_c, F_c).

2.1.1 Respecto de la fuerza gravitatoria

En el capítulo anterior hemos determinado que, de acuerdo con las reglas del análisis magnitudinal, la ecuación de la ley de gravitación universal constituye una metrización sin eliminabilidad de la magnitud *fuerza gravitatoria* F_g. Esto implica que existen metrizaciones intermedias obviadas dentro de la forma matemática de la ley y que, en consecuencia, el significado físico de la magnitud F_g no es interpretable a partir de la ecuación de la ley. Incluiremos $F_g = GmM/d^2$ dentro de la estructura MC, aunque la marcaremos en amarillo, por no ser interpretable.

2.1.2. Respecto de las fuerzas de rozamiento cinético y estático

La fuerza de rozamiento cinético F_k es una fuerza que aparece en sentido contrario al movimiento, por ejemplo, de un bloque que se desliza sobre una superficie (con rozamiento). Sobre este bloque actúan dos fuerzas más: el peso $P_g=mg$ (donde m es la masa del objeto y g es la aceleración de la gravedad) y la fuerza normal N que es igual al peso, sólo que en sentido contrario. La fuerza de rozamiento cinético F_k es proporcional a la fuerza normal N según la relación:

$$F_k = \mu_k N$$

donde μ_k es una constante de proporcionalidad adimensional que se denomina coeficiente de rozamiento cinético. Debido a las características de μ_k se ve que la relación entre las fuerzas F_k y N es de proporcionalidad y no de derivación, por lo que, de acuerdo con las reglas del análisis magnitudinal, la fuerza de rozamiento cinético F_k tendrá el mismo grado de derivación que la fuerza normal N, que es M_3.

También existe una fuerza de rozamiento estático F_e entre dos objetos (un bloque y una superficie) que no están en movimiento relativo. Cuando la aceleración es cero (el bloque es empujado pero no se mueve todavía) la fuerza aplicada F es igual y opuesta a la fuerza de rozamiento estático F_e. Cuando la fuerza de rozamiento estático es máxima (en el instante en el que el bloque está a punto de deslizar), fuerza F_e se hace proporcional a la fuerza normal N según la relación:

$$F_e = \mu_e N$$

donde μ_e es una constante de proporcionalidad adimensional que se denomina coeficiente de rozamiento estático. Por las mismas razones que en el caso de la fuerza de rozamiento cinético, la relación entre F_e y N es de proporcionalidad y no de derivación, por lo que $[[F_e]]= M_3$ también.

2.1.3. Respecto de las magnitudes geométricas

A las metrizaciones de magnitudes de *áreas, superficies* y *volúmenes* se aplicará la primera regla del análisis magnitudinal ($\mathrm{M}_0 = \delta\ \mathrm{M}_0$), lo que indica que estas metrizaciones se considerarán *no derivadas*, o por lo menos no en el sentido en que lo son los conceptos métricos de la física. Las ecuaciones que involucran magnitudes geométricas como las siguientes, tienen sus propias dependencias métricas:

Denominación	***Ecuación***	***Dimensión***
perímetro circunferencia	$P = 2\pi r$	L
área circulo	$A_c = \frac{1}{2} P \cdot r$	L^2
área lateral cilindro	$A_{cl} = P \cdot h$	L^2
área lateral cono	$A_{cn} = \frac{1}{2} P \cdot g$	L^2
área esfera	$T_{esf} = 4 \cdot A_c$	L^2
área total cilindro	$T_{cl} = 2A_c + A_{cl}$	L^2
área total cono	$T_{cn} = A_c + A_{cn}$	L^2
volumen cilindro	$V_{cl} = A_c \cdot h$	L^3
volumen cono	$V_{cn} = \frac{1}{3} A_c \cdot h$	L^3
volumen esfera	$V_{esf} = \frac{1}{3} T_{esf} \cdot r$	L^3

En la tabla *r* es radio, *h* altura, *g* generatriz.

Sin embargo, sólo establecen relaciones entre formas diferentes de denominar la misma magnitud fundamental: la longitud *l*. Por ello, estrictamente hablando, las metrizaciones de la tabla, no introducen ninguna magnitud física nueva; en todo caso introducen una magnitud geométrica nueva. En este trabajo, vamos a considerar estas metrizaciones como relaciones de proporcionalidad, que tienen la forma $\mathrm{M}_0 = \delta\ \mathrm{M}_0$.

De todas formas, no sería incompatible ni con el análisis dimensional, ni con el magnitudinal incorporar estas metrizaciones a la estructura de derivación de un sistema de magnitudes físicas. Pero ello sólo alargaría el proceso de derivación de las magnitudes que dependan de magnitudes geométricas. Por lo demás, no supondría ningún cambio sustancial.

2.2. Estructura MC

Regla	Denominación magnitud	Ecuación	Dim.
M_0=δM_0	*equivalencia de masas*	$m_i = m_g$	**M**
	frecuencia	$\nu = 1/T$	**T^{-1}**
	frecuencia angular	$\omega = 2\pi\nu$	**T^{-1}**
	superficie	$S = l^2$	**L^2**
	volumen	$V = l^3$	**L^3**
	ángulo plano	$\theta = l/R$	**LL^{-1}**
M_1=δM_0	*velocidad lineal*	$\upsilon = l/t$	**LT^{-1}**
	velocidad angular	$\omega = \theta/t$	**$LL^{-1}T^{-1}$**
	momento de inercia	$I = m \cdot r^2$	**ML^2**
	densidad	$\rho = m/V$	**ML^{-3}**
M_2=δM_1	*aceleración lineal*	$a = \upsilon/t$	**LT^{-2}**
	aceleración angular	$\alpha = \omega/t$	**$LL^{-1}T^{-2}$**
	aceleración centrífuga	$a_c = \omega^2 \cdot r$	**LT^{-2}**
	momento angular sólido rígido	$M = I \cdot \omega$	**ML^2T^{-1}**
	cantidad de movimiento	$p = m \cdot \upsilon$	**MLT^{-1}**
M_3=δM_2	*fuerza gravitatoria*	$F_g = G\, mM/d^2$	**MLT^{-2}**
	fuerza inercial	$F_i = m \cdot a$	**MLT^{-2}**
	fuerza centrífuga	$F_c = m \cdot a_c$	**MLT^{-2}**
	peso/fuerza normal	$P_g = N = m \cdot g$	**MLT^{-2}**
	fuerza rozamiento dinámico	$F_k = \mu_k \cdot N$	**MLT^{-2}**
	fuerza rozamiento estático	$F_e = \mu_e \cdot N$	**MLT^{-2}**
	momento angular partícula	$L = p \cdot r$	**ML^2T^{-1}**
	momento angular orbital	$L=m\omega r^2$	**$M\ LL^{-1}L^2$**
M_4=δM_3	*trabajo*	$W = F_i \cdot l$	**ML^2T^{-2}**
	energía potencial	$E_p = P_g \cdot h$	**ML^2T^{-2}**
	energía cinética	$E_c = 1/2\, F \cdot l$	**ML^2T^{-2}**
	energía cinética de rotación	$E_k = 1/2\, F_c \cdot r$	**ML^2T^{-2}**
	momento de una fuerza	$M = F_i \cdot d$	**ML^2T^{-2}**
	presión	$P = F/S$	**$ML^{-1}T^{-2}$**
M_5=δM_4	*potencia*	$P = W/t$	**ML^2T^{-3}**
	acción	$S=E \cdot t$	**ML^2T^{-1}**

2.3. Comentarios a la Estructura MC

La aplicación de los análisis dimensional y magnitudinal a las magnitudes mecánico-clásicas expuestas en la Estructura MC, pone de manifiesto las siguientes características estructurales de la derivación por definición de sus conceptos métricos:

1. La estructura métrica de las metrizaciones derivadas parte de las magnitudes base canónicas {MLT}, en calidad de conceptos indefinidos, unidimensionales y dimensionalmente fundamentales. Por lo tanto, se puede considerar la mecánica clásica una *teoría métricamente fundamental*.

2. *Ninguna metrización derivada quebranta las normas del análisis dimensional*, pues ninguna magnitud establecida como base aparece metrizada en forma derivada en el resto de la estructura (ningún recuadro con dimensiones está marcado en azul).

3. Una metrización derivada, la de la fuerza gravitatoria, es una metrización sin eliminabilidad, por lo tanto, *se han obviado metrizaciones intermedias* en una metrización derivada (recuadro con ecuación marcado en amarillo).

4. La derivación por definición es continua a lo largo de toda la estructura, interrelacionando todos los conceptos métricos, desde las magnitudes base, hasta las de mayor grado de derivación. Esto permite concluir que la estructura métrica MC es *interpretable*, pues el significado físico de cada uno de los conceptos métricos metrizados puede ser inferido de los conceptos introductorios.

En definitiva, la mecánica clásica como teoría física no sólo cuantifica, sino también conceptualiza de forma métricamente coherente las propiedades físicas de su ámbito fenoménico de aplicación, a excepción de la metrización de la fuerza gravitatoria, cuyo significado físico no se puede determinar dentro de la estructura métrica de la mecánica clásica.

3. Estructura métrica del Electromagnetismo (EM)

La metrización de los fenómenos electromagnéticos jugó un importante papel en el posterior desarrollo de la mecánica cuántica. Esta es la razón por la que incluyo, en este trabajo, un análisis dimensional y magnitudinal de las principales magnitudes eléctricas y electromagnéticas, pues algunas de ellas intervendrán en las metrizaciones de las magnitudes mecánico-cuánticas, que vamos a analizar en el siguiente apartado y en el capítulo V. En primer lugar haré una breve introducción, con el fin de presentar los propios conceptos electromagnéticos, y, a continuación, pasaremos a la composición de su estructura métrica con la ayuda del análisis magnitudinal.

Hacia principios del siglo XVIII se inició la investigación detallada de los fenómenos eléctricos: S.Gray, J.Desaguliers (entre 1729 y 1736) proponen la electrificación como un efecto que se presenta en la superficie de los cuerpos, en forma de *fluido* eléctrico; F. du Fay comprueba (entre 1733 y 1734) la existencia de dos tipos de electricidad (repulsiva y atractiva); y Benjamin Franklin denomina como estado *positivo* un exceso de fluido eléctrico, mientras su deficiencia la designa como estado *negativo*. A finales del siglo XVIII, en 1785, C.A. Coulomb (l736-1806) logra medir con bastante precisión las características de las fuerzas entre objetos eléctricamente cargados y formula la ley que lleva su nombre, según la cual la fuerza eléctrica F_c que se ejerce entre dos cargas q,q' es directamente proporcional al producto de las mismas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que las separa. Es la denominada *ley de Coulomb*:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{d^2}$$

El cociente $1/4\pi\varepsilon_0$ es una constante (K) y ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío, siendo ε_0=8,8541878176·10^{-12} *F/m*, donde *F* denota Faraday y *m* metro.

A principios del s.XIX comenzaron a desarrollarse también estudios de aplicación práctica de la electricidad. En 1800, A. Volta construyó el primer dispositivo electroquímico que sirvió como fuente de electricidad: la pila voltaica. Gracias a esta pila, unas décadas más tarde, M. Faraday descubrió las leyes de la electrólisis. H.C. Oersted descubrió en 1820 el efecto magnético de las corrientes eléctricas. A.M. Ampère consiguió en 1826 la expresión matemática de la acción de las fuerzas entre conductores eléctricos[33]. En 1845, G. Kirchhoff enunció las leyes que llevan su nombre, aplicables al cálculo de tensiones, intensidades y resistencias en la malla de un circuito eléctrico, entendidas como una extensión de la ley de la conservación de la energía. La *ley de corrientes de Kirchhoff* establece que la suma de todas las corrientes entrantes en un *nodo* o *nudo*[34] es cero en todo instante:

$$\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$$

donde N es el número de ramas que se une en el nodo e i_k es la corriente de la rama k-ésima. La *ley de tensiones de Kirchhoff* establece que la suma de todas las tensiones alrededor de un *bucle*[35] es igual a cero en todo instante:

$$\sum_{k=1}^{N} v_k = 0$$

donde v_k es la tensión en la rama k-ésima.

[33] Ampère expuso la deducción matemática de la ley de la fuerza electrodinámica e incluyó la descripción de cuatro experimentos.

[34] Un nodo es el punto de interconexión de dos o más ramas, que son cualquier elemento de dos terminales dentro de un circuito.

[35] Un bucle es cualquier trayectoria cerrada dentro de un circuito, tal que partiendo de un nodo se vuelva de nuevo al mismo nodo sin pasar dos veces por él.

La concepción sobre la *naturaleza* de la electricidad (y del magnetismo) la ofreció Faraday (1791-1867), quien para describir el fenómeno que él mismo descubrió y denominó *inducción de corriente eléctrica* (1831), introdujo los conceptos de *líneas de fuerza* y *campo electromagnético*. Estas líneas eran entidades reales que, detectadas o no, llenaban el espacio que circunda a las corrientes eléctricas. Esto supuso un cambio epistemológico: mientras para Ampère y Coulomb las fuerzas entre cargas y corrientes eran acciones a distancia (análogas a las de Newton para la gravitación), para Faraday cobraban un sentido físico, un sentido de *campo* físico de líneas de fuerza, el campo electromagnético.

La formulación matemática de las hipótesis de Faraday y, en general, la síntesis de todos los *fenómenos* electromagnéticos, la realiza J.C. Maxwell, en su célebre tratado *A treatise on electricity and magnetism*, de 1873. Las denominadas *ecuaciones de Maxwell* (estrictamente hablando sólo la cuarta ecuación se debe a Maxwell) son las ecuaciones que metrizan los fenómenos electromagnéticos y son las siguientes:

Primera ecuación de Maxwell:

Ley de Gauss para el campo eléctrico: $\boxed{\Phi_{\varepsilon} = \oint_{s} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}}$

La ley de Gauss se aplica al campo eléctrico estático (independiente del tiempo) y metriza el flujo Φ_{ε} de un campo eléctrico E a través de una superficie esférica S con centro en la carga q. El círculo sobre la integral indica, precisamente, que la superficie que atraviesa el flujo del campo eléctrico creado por la carga es cerrada, como una esfera o un elipsoide.

Obtención de la ley de Gauss (Alonso-Finn 1987, p.579): queremos calcular el flujo del campo eléctrico de una carga puntual q a través de una superficie esférica con centro en la carga. Si r es el radio de la esfera y el campo eléctrico E a la distancia r de una carga puntual es:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

entonces, para una esfera de área $S=4\pi r^2$, el flujo eléctrico en todos sus puntos será una integral de la siguiente forma:

$$\Phi_\varepsilon = \oint_s E \cdot dS = E \oint_s dS = ES = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Segunda ecuación de Maxwell:

Ley de Gauss para el campo magnético: $\boxed{\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$

Esta ley, análoga a la anterior, metriza el flujo Φ_B de un campo magnético B a través de una superficie esférica S con centro en la carga q. Esta ley expresa la inexistencia de cargas magnéticas (*monopolos* magnéticos). Puesto que el campo magnético B posee un polo norte y un polo sur, su flujo Φ_B a través de cualquier superficie S cerrada es *nulo*, por lo que las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutras.

Tercera ecuación de Maxwell:

Ley de Faraday-Henry: $\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$

Esta ley se aplica al campo magnético variable (dependiente del tiempo): un campo de estas características exige la presencia de un campo eléctrico y viceversa, un campo eléctrico variable exige la presencia de un campo magnético. Estos fenómenos se denominan *de inducción electromagnética* y las leyes que los describen son, respectivamente, la ley de *Faraday-Henry* y la de *Ampère-Maxwell*. La ley de *Faraday-Henry* se enuncia de la siguiente forma (*Íbidem* p.647), y con ello se explican los términos de la tercera ecuación de Maxwell:

> Un campo magnético [B] dependiente del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico [E] tal que su circulación a lo largo de un camino [L] arbitrario cerrado es igual a menos la derivada con respecto

al tiempo [*-d/dt*] del flujo magnético [$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$] a través de una superficie [*S*] limitada por el camino.

Cuarta ecuación de Maxwell:

Ley de Ampère-Maxwell: $$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Análogamente a la ley de Faraday-Henry, la ley de Ampère-Maxwell expresa la relación que debe haber entre la derivada de un campo eléctrico respecto al tiempo y un campo magnético en el mismo lugar. La circulación Λ_B de un campo magnético *estático* viene dada por la ley de Ampère:

$$\Lambda_B = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S j \cdot dS \qquad (1)$$

Esta ley se entiende de la siguiente manera: el campo magnético *B* en un punto alrededor (camino circular *L*) de una corriente eléctrica rectilínea, de intensidad *I* (y perpendicular al campo magnético originado), está determinado por el perímetro ($2\pi r$) de la circulación magnética y la intensidad de corriente *I*:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

aquí μ_0 es una constante: la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} NA^{-2}$). La corriente eléctrica *I* a través de una superficie *S* puede expresarse también como el flujo de densidad de corriente *j*, esto es:

$$I = \int_S j \cdot dS \qquad (2)$$

Este flujo *j* depende del número *n* de partículas (con carga eléctrica *q* y velocidad *v*) que pasan a través de la superficie *S* por unidad de tiempo: $j = nqv$. Teniendo en cuenta esto, se puede expresar la ley de Ampère en la forma (1).

Ahora, si la superficie por la que pasa el flujo *j* es circular y consideramos la intensidad *I* como dependiente del tiempo $I = -dq/dt$ (puesto que la magnitud de intensidad de corriente se define como la carga por unidad de tiempo), entonces, podemos expresar (2) como:

$$-\frac{dq}{dt}=\oint_S j\cdot dS \qquad (3)$$

De acuerdo con la ley de Gauss para el campo eléctrico (segunda ecuación de Maxwell):

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \rightarrow \qquad q=\varepsilon_0\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

por lo que:

$$\frac{dq}{dt}=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad (4)$$

Si escribimos (3) como:

$$\oint_S j\cdot dS+\frac{dq}{dt}=0$$

y sustituimos en ella *dq/dt* por (4), obtenemos:

$$\oint_S j\cdot dS+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \qquad (5)$$

Esta ecuación expresa, a través de la ley de Gauss, el principio de conservación de la carga.

Ahora, para obtener la ley de Ampère-Maxwell, debemos retomar la ley de Ampère (1) y hacerla dependiente del tiempo. Para ello debemos incluir en (1) la ley de Gauss, esto es, sustituir (la intensidad de corriente *I*) $\int_S j\cdot dS$ por (5):

$$\Lambda_B=\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S j\cdot dS \qquad \rightarrow \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left(\oint_S j\cdot dS+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$$

Abriendo el paréntesis y teniendo en cuenta (2), obtenemos finalmente la ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Vistas las principales magnitudes y ecuaciones del electromagnetismo podemos pasar a la composición de su estructura de metrizaciones derivadas, aplicando las reglas del análisis magnitudinal.

3.1. Aclaraciones previas

3.1.1. Respecto de la magnitud de carga eléctrica

Quiero señalar que me aparto de la sugerencia de la *Onceava Conferencia General sobre Pesos y Medidas* (París 1960), en la cual se estableció el *amperio* como unidad de corriente eléctrica y, con ello, como unidad y magnitud fundamental para los fenómenos de electromagnetismo. La razón de elegir el amperio en lugar del culombio (unidad de carga eléctrica) fue puramente instrumental: una corriente parece ser más fácil de establecer como patrón, que una carga. Sin embargo, el concepto métrico de carga eléctrica no sólo es más fundamental que el de intensidad de corriente eléctrica, sino que *es* una magnitud fundamental. Mantienen el mismo punto de vista Alonso y Finn (1986. pp.19):

> Nuestra decisión de utilizar el Coulomb está basada en nuestro deseo de expresar el carácter más fundamental de la carga eléctrica, sin separarnos esencialmente de las recomendaciones de la Onceava Conferencia.

Por lo tanto, partiendo de la base magnitudinal y dimensional compuesta por *masa* M, *longitud* L, *tiempo* T y *carga eléctrica* Q componemos la estructura métrica de las magnitudes electromagnéticas, la Estructura EM.

3.1.2. Permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío

Según Prójorov (1995, p.206), la permeabilidad magnética del vacío μ_0 (o constante magnética) es un factor de proporcionalidad que aparece en una serie de ecuaciones electromagnéticas al expresarlas en sistema SI de unidades. En particular, μ_0 es el factor de proporcionalidad entre la inducción B del campo magnético y su intensidad H según $\mu_0 = B / H$. La permitividad eléctrica del vacío ε_0 es otro factor de proporcionalidad que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio y "depende sólo de la elección del sistema de unidades" (*Ídem*). En el sistema gaussiano (*cgs*) $\varepsilon_0 = 1$, mientras que en el SI $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$.

La característica principal del sistema gaussiano es que emplea tres magnitudes base – masa, longitud y tiempo – para derivar cualquier otra magnitud, incluida la carga. Nosotros vamos a expresar las magnitudes electromagnéticas en función de cuatro magnitudes base: masa, longitud, tiempo y carga, por lo tanto, debemos incluir μ_0 y ε_0 en la Estructura EM.

Consideraremos la permeabilidad magnética del vacío μ_0 como un factor de proporcionalidad (a modo de las constantes de rozamiento cinético μ_k y estático μ_e, p.107). Sin embargo, aunque la permitividad eléctrica del vacío ε_0 sea también un factor de proporcionalidad dimensional, al depender de la magnitud de la velocidad de la luz en el vacío *c*, según $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, la introduciremos en la estructura en el grado de derivación siguiente al de la velocidad de la luz, esto es, en el grado M_2.

3.1.3. Respecto de la ley de Coulomb

Con respecto a la magnitud de fuerza eléctrica metrizada en la ley de Coulomb surge la misma dificultad que con la fuerza gravitatoria de la ley de gravitación universal, comentada en el apartado "Metrización sin eliminabilidad" (p.52). A partir de la segunda ley de Newton ($F_i = m_i a$) se determina que el grado de derivación de cualquier magnitud de fuerza es $[[F]] = M_3$. La metrización de la fuerza gravitatoria F_g incumple la segunda regla del análisis magnitudinal ($M_n = \delta M_{n-1}$), pues parece que falta una metrización intermedia, dependiente de alguna magnitud contenida en la constante gravitacional *G*. La ley de Coulomb se enfrenta al mismo problema, pues, en el sistema gaussiano, de acuerdo con el análisis magnitudinal:

$$F_c = \frac{qq'}{d^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{M}_3(F_c) = \delta\mathrm{M}_1(q, q', m)$$

Sin embargo, en el sistema SI (aunque tomemos como magnitud base la carga eléctrica y no la intensidad de corriente) la constante $K = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ permite situar F_c en el grado de derivación M_3, pues la permitividad eléctrica del vacío es $[[\varepsilon_0]]=\mathrm{M}_2$, con la ecuación:

$$F_c = K\frac{qq'}{d^2}$$

Aunque incluiremos la ecuación anterior en la Estructura EM, la marcaremos en amarillo, pues, en el sistema gaussiano incumple las reglas del análisis magnitudinal.

3.1.4. Aclaración sobre algunos símbolos

Lectura de algunos símbolos no citados hasta ahora y que aparecen en las ecuaciones de la Estructura EM:

N	*número entero*
N_A	*número de Avogadro*
n	*número de moléculas por unidad de volumen*
L	*longitud de un circuito cerrado*
l	*longitud*
m	*masa de una partícula*
L_p	*momento angular orbital de una partícula*
K	*constante* $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

3.2. Estructura EM

Regla	Denominación magnitud	Ecuación	Dim.
$M_0=\delta M_0$	*carga total*	$Q = N \cdot e$	**Q**
	carga de 1mol de iones (cte. de Faraday)	$F = N_A \cdot e$	**Q**
$M_1=\delta M_0$	*intensidad de corriente eléctrica*	$I = q/t$	$\mathbf{T^{-1}Q}$
	momento dipolar eléctrico	$p = q \cdot r$	**LQ**
	densidad de carga lineal	$\lambda = q/L$	$\mathbf{L^{-1}Q}$
	densidad de carga superficial	$\sigma = q/S$	$\mathbf{L^{-2}Q}$
	densidad de carga volumétrica	$\rho = q/V$	$\mathbf{L^{-3}Q}$
$M_2=\delta M_1$	*densidad de corriente eléctrica*	$j = I/S$	$\mathbf{T^{-1}Q}$
	circulación magnética	$\Lambda_B = \mu I$	$\mathbf{MLT^{-1}Q^{-1}}$
	polarización dieléctrica	$P = n \cdot p$	**LQ**
	momento dipolar magnético	$m_B = I \cdot S$	$\mathbf{L^2T^{-1}Q}$
	permitividad eléctrica del vacío	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$\mathbf{M^{-1}L^{-3}T^2Q^2}$
$M_3=\delta M_2$	*fuerza eléctrica*	$F_c = K\, qq'/d^2$	$\mathbf{MLT^{-2}}$
	potencial eléctrico	$V = K\, q/d$	$\mathbf{ML^2T^{-2}Q^{-1}}$
	inducción magnética creada por un hilo indefinido	$B = \Lambda_B/2\pi r$	$\mathbf{MT^{-1}Q^{-1}}$
	inducción magnética creada por una espira	$B = \Lambda_B/2r$	$\mathbf{MT^{-1}Q^{-1}}$
	inducción magnética creada por un solenoide	$B = \Lambda_B N/l$	$\mathbf{MT^{-1}Q^{-1}}$
$M_4=\delta M_3$	*intensidad del campo eléctrico*	$E = F_c/q$	$\mathbf{MLT^{-2}Q^{-1}}$
	energía potencial eléctrica	$E_p = q'V$	$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	momento angular magnético	$M = q/2m\, L_p$	**LQ**
	fuerza magnética sobre partícula	$F_B = qv \cdot B$	$\mathbf{MLT^{-2}}$
	fuerza magn. sobre corriente eléctrica	$F_B = j \cdot B$	$\mathbf{MLT^{-2}}$
	energía potencial de corriente eléctrica en campo magnético	$E_p = -m_B \cdot B$	$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	segunda ecuación de Maxwell	$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\mathbf{ML^2T^{-2}Q^{-1}}$
	cuarta ecuación de Maxwell	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \, d/dt \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$	$\mathbf{ML^2T^{-1}Q^{-1}}$
$M_5=\delta M_4$	*primera ecuación de Maxwell*	$\Phi_\varepsilon = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0$	$\mathbf{ML^2T^{-2}Q^{-1}}$
	tercera ecuación de Maxwell	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d/dt \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\mathbf{ML^2T^{-1}Q^{-1}}$

3.3. Comentarios a la Estructura EM

La aplicación de los análisis dimensional y magnitudinal a una muestra representativa de magnitudes del electromagnetismo, pone de manifiesto las siguientes características estructurales de la derivación por definición de sus conceptos métricos:

1. La estructura métrica de las metrizaciones derivadas parte de las magnitudes base canónicas {MLTQ}, las cuales son conceptos indefinidos, unidimensionales y dimensionalmente fundamentales. Por lo tanto, se puede considerar la electrodinámica clásica una *teoría métricamente fundamental*.

2. *Ninguna metrización derivada quebranta las normas de los análisis dimensional y magnitudinal*, pues ninguna magnitud establecida como base aparece metrizada en forma derivada en el resto de la estructura (ningún recuadro con dimensiones está marcado en azul).

3. Una metrización derivada, la de la fuerza eléctrica, puede ser una metrización sin eliminabilidad (al menos en el sistema *cgs*), en la que *se han obviado metrizaciones intermedias* (recuadro con ecuación marcado en amarillo).

4. La derivación por definición es continua a lo largo de toda la estructura, interrelacionando todos los conceptos métricos, desde las magnitudes base hasta las de mayor grado de derivación. Esto permite concluir que la estructura métrica EM es *interpretable*, pues el significado físico de cada uno de los conceptos métricos metrizados puede ser inferido de los conceptos introductorios.

En definitiva, el electromagnetismo (clásico, en este caso) como teoría física no sólo cuantifica, sino también conceptualiza de forma métricamente coherente las propiedades físicas de su ámbito fenoménico concreto de aplicación, a excepción de la metrización de la magnitud de fuerza eléctrica (ley de Coulomb), cuyo significado físico no es interpretable a partir de su metrización en todos los sistemas de unidades (en el sistema gaussiano no es interpretable).

4. Estructura métrica de la Mecánica Cuántica (MQ).

La era cuántica de la física comenzó en 1900, con la introducción por parte de Planck del postulado de la cuantización (carácter discreto) de la radiación electromagnética (energía). A partir de ese momento clave se desencadenó una redefinición o una revisión del significado de los principales conceptos métricos de la mecánica (newtoniana hasta ese momento). Veamos brevemente cómo tuvo lugar ese proceso de reconstrucción conceptual de la mecánica.

Precisamente en 1899, un año antes de que Planck diese la solución definitiva al problema del espectro de radiación del cuerpo negro, P.N. Lébedev, comprobaba experimentalmente por primera vez el fenómeno de la presión o acción ponderomotriz de la luz, predicho por Maxwell en 1873. El experimento consistía en hacer incidir una onda electromagnética sobre la superficie de un cuerpo para comprobar si ejercía presión sobre él. Observar este efecto pondría de manifiesto que el flujo de radiación no sólo posee energía sino también cantidad de movimiento, una característica propia de la masa en movimiento e impropia de una onda. En el experimento de Lébedev[36], un juego de espejos hacía incidir luz sobre unas aletas ligeras de diferentes metales, suspendidas de un hilo y, efectivamente, la luz incidente hacía girar las aletas retorciendo el hilo. Aunque este experimento confirmaba la teoría electromagnética de Maxwell, por ser una de las predicciones de su teoría, cuando se estableció la mecánica cuántica ésta resultó ofrecer las mismas ecuaciones para la descripción de este fenómeno. Quizás el carácter "corpuscular" de la radiación, como portadora

[36] Este efecto está descrito con detalle en Prójorov (1996, t.3, pp. 992-994).

de una cantidad de movimiento, ya estaba contenido en la teoría electromagnética de Maxwell.

La idea de la radiación como colección de porciones discretas fue inaugurada en 1900 por Max Planck con la formulación de una nueva ley[37] para la explicación de lo que él mismo llamó el "espectro normal" (*Normalspektrum*), nombre que adoptó para la distribución de la densidad de la energía de radiación del cuerpo negro[38] de Kirchhoff. Planck, subsanando las deficiencias de la ley de Wien, había hallado una ley correcta de distribución de la radiación de ese cuerpo, pero, en un principio, no alcanzaba a ver su explicación teórica, su "significado físico real" (citado por Rivadulla 2003, p.171). La dificultad para esa explicación teórica radicaba en una nueva constante física que Planck había introducido en su ley de radiación como una suposición "puramente formal" y que implicaba la idea de que la energía de radiación se emitía de forma *discreta*, no continua, en porciones múltiplo de una cantidad constante *h*. Esta suposición meramente formal supuso el tránsito de la física clásica a la cuántica y recibió el nombre de *constante de Planck* o *cuanto de acción h* (también expresado como $\hbar=h/2\pi$). De este modo, el carácter continuista clásico de la luz (establecido por analogía directa con las ondas materiales) quedaba cuantizado y establecida su "corpuscularidad".

En 1905, Albert Einstein amplió[39] la hipótesis de Planck: la emisión, absorción y propagación de la radiación tiene lugar de forma cuantizada, como un conjunto de partículas con energía $E = h\nu$, que posteriormente recibieron el nombre de *fotones* (C.N. Lewis, 1929). En base a estas consideraciones Einstein ofrece la primera interpretación de las leyes que

[37] Sobre la evolución histórica de la hipótesis cuántica y la ley de radiación de Planck ver Rivadulla (2003, pp.166-172). Un tratamiento físico-matemático en profundidad se encuentra Eisberg-Resnick (1986, pp. 19-41).

[38] Rivadulla (2002, pp.43-55).

[39] "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", en *Annalen der Physik* 17, 1905, pp. 132-148.

rigen el *efecto fotoeléctrico*[40], que es el fenómeno de la emisión de electrones (*fotoelectrones*) de átomos y moléculas por incidencia sobre ellos de radiación electromagnética de cierta frecuencia. La cuantización de la propagación y absorción de la luz permitió a Einstein explicar las regularidades (contradictorias con la teoría clásica de la luz) que los experimentos establecían para el efecto fotoeléctrico, a saber: a) que para cada sustancia hay una frecuencia mínima o umbral de radiación (independientemente de su intensidad), por debajo del cual no se emiten fotoelectrones, y b) que el número de fotoelectrones por unidad de tiempo es proporcional a la intensidad de la radiación incidente. Einstein concluyó que la energía $E = hv$ de un fotón incidente se convierte en trabajo W de la salida del fotoelectrón y en su energía cinética (de movimiento), según la relación $E = hv = W + 1/2(m_e v^2)$.

La naturaleza corpuscular de la luz pareció hacerse más evidente todavía de la mano de Arthur H. Compton, quien en 1922 probó experimentalmente que la dispersión de la luz por electrones libres se puede interpretar como una colisión elástica entre dos *partículas* (de altas energías). Esto demostraba definitivamente que los fotones de Einstein eran verdaderas "partículas" de luz, que colisionaban cumpliendo las leyes de conservación de la energía y la cantidad de movimiento de la cinemática clásica. En este proceso de colisión entre el fotón y el electrón, denominado *efecto Compton*[41], el fotón, aparte de la energía $E = hv$, posee una cantidad de movimiento $p = h/\lambda$, y su longitud de onda λ experimenta una variación $\Delta\lambda$ que depende de una constante denominada *longitud de onda de Compton* λ_0 *para el electrón*. Energía y cantidad de movimiento del fotón quedan determinadas por la relación $E = cp$ (pues, si $p = h/\lambda$, entonces $E = hv = p\lambda v = pc$), de manera que se demuestra experimentalmente que,

[40] Sobre el efecto fotoeléctrico y la solución cuántica de Einstein para sus leyes, Eisberg-Resnick (1986, pp. 47-55).

[41] En profundidad, Eisberg y Resnick (1986, pp. 55-60).

junto con las propiedades ondulatorias (detectables en fenómenos de difracción, interferencia, etc.) la radiación posee propiedades corpusculares.

Demostrada la dualidad de la naturaleza de la radiación, De Broglie propuso en 1924 la hipótesis simétrica: la dualidad de la naturaleza de la materia a escala subatómica. Su propuesta consistía en que cada partícula material, con una cantidad de movimiento *p*, posee una onda asociada a ella (del mismo modo que el fotón), mediante la relación $\lambda = h / p$, donde λ es la denominada longitud de onda de De Broglie[42] (perteneciente a cierta característica ondulatoria, por determinar, de la partícula). Se desprendía de la hipótesis de De Broglie que no sólo los fotones, sino también los electrones deberán manifestar sus propiedades ondulatorias en fenómenos característicos del movimiento ondulatorio. En 1926, Elsasser consideró posible comprobar la naturaleza ondulatoria de la materia del mismo modo que inicialmente se había probado la naturaleza ondulatoria de los rayos X – por medio de la difracción. Y, en efecto, un año después los físicos K. Davisson y L. Germer obtuvieron su confirmación experimental[43].

La corroboración de la universalidad del dualismo onda-corpúsculo hizo necesario buscar una ecuación que pudiese abarcar las características ondulatorias y corpusculares del movimiento de las partículas. E.Schrödinger propuso en 1926 una ecuación que incorporaba lo corpuscular a lo ondulatorio y que abarcaba las ecuaciones de Newton para el movimiento de las partículas clásicas, y las ecuaciones de D'Alembert de las ondas clásicas. Así surgió la mecánica ondulatoria o *mecánica cuántica*.

Veamos ahora qué estructura métrica (de derivación de magnitudes) corresponde a estos nuevos conceptos mecánico-cuánticos.

---

[42] La obtención de la longitud de onda de de Broglie está desarrollada en Rivadulla (2003, pp.182-184).

[43] Independientemente, en 1927 también, realizó la misma comprobación J.P. Thomson, aunque en su experimento seguía un método análogo al de Debye-Hull-Sharres, quienes habían hecho difractar los rayos X por polvo, no por un monocristal.

4.1. Aclaraciones previas

4.1.1. El grado de derivación del cuanto de acción

Nos encontramos ante una cuestión delicada: determinar el grado de derivación del cuanto de acción $\hbar$. Sabemos que la constante h ó $\hbar$ ($h/2\pi$) es una magnitud de acción S, porque *dimensionalmente* $\hbar$ se corresponde con las dimensiones de S, a saber, $ML^{-2}T^{-1}$. Sin embargo, aquí resurge el problema que se trató en el apartado de las *clases dimensionales* (pp.64-67), pues no sólo la acción posee esas dimensiones, sino también el momento angular (ambos: orbital e intrínseco). La constante de Planck, pues, admite varias metrizaciones igualmente válidas:

- Una es la de la acción, que es el producto de energía por tiempo: $[\hbar=E\cdot t]=ML^{-2}T^{-1}$. Es la que expresa la relación de indeterminación $\Delta E\Delta t \geq \hbar/2$ y la que está contenida en la cuantización de la energía tal y como la propuso Planck: $E=hv$, pues $v=1/T$, donde T es el período y, por tanto, es un tiempo.

- Otra metrización de $\hbar$ es la del momento angular orbital L_0 (del electrón), que es el producto de la cantidad de movimiento por radio: $[L_0= m_0 \upsilon r= \hbar]=ML^{-2}T^{-1}$, donde m_0 es la masa del electrón y υ su velocidad y componen la cantidad de movimiento del electrón. Esta metrización es la que está contenida en la relación de indeterminación $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$.

- Y otra metrización de $\hbar$ es por medio del momento angular intrínseco o espín S, que es lo mismo que el momento angular orbital L_0, sólo que el giro lo hace el electrón sobre sí mismo y no alrededor del núcleo. Corresponde a la ecuación: $[L_S= ½\,\hbar\,]=ML^{-2}T^{-1}$.

La cuestión es, pues: ¿por medio de cuál de estas tres formas metrizamos la constante de Planck?

Supongamos que metrizamos $\hbar$ como *acción*. La acción es una "magnitud física con dimensión de producto de energía por tiempo y es una de las principales características del movimiento de un sistema" (Prójorov 1995, p.11). Dependiendo de las propiedades del sistema mecánico estudiado y el método que se aplique para estudiar su movimiento, se pueden emplear distintas expresiones de esta magnitud. Si se utiliza la *función de Lagrange* $L=T-P$ (donde T y P son respectivamente las energías cinética y potencial del sistema), entonces la acción se expresará de la siguiente forma:

$$S=\int_{t_0}^{t} L\cdot dt$$

denominándose *acción de Hamilton*[44] S para el intervalo de tiempo $t\text{-}t_0$.

Otra expresión para la magnitud de acción se denomina *acción de Lagrange*[45] W para el intervalo de tiempo $t\text{-}t_0$ y se define como:

$$W=\int_{t_0}^{t} 2T\cdot dt$$

(donde T, recordamos, es la energía cinética). En esta acción no interviene la energía potencial, pues se supone que los efectos gravitacionales sobre el sistema son despreciables. En un sistema donde se produce la conservación de la energía mecánica, las acciones de Hamilton y de Lagrange están relacionadas de la siguiente manera:

$$S=W-E(t-t_0)$$

donde $E=T+P$ es la energía mecánica total del sistema.

En definitiva, todas las expresiones para la magnitud de acción tienen las dimensiones de una energía por un tiempo, el tiempo en el que el sistema se mueve de una posición a otra, empleando para ello una energía. Por lo tanto, generalizando, la acción es $S=E\cdot t$, donde E es la energía utilizada en el

---

[44] Esta magnitud así definida aparece en la expresión del principio de mínima acción de Hamilton-Ostrogradski (Prójorov 1995, p.11, y Fernández Rañada 1994, pp. 81-83 y 97).

[45] Esta magnitud así definida aparece en la expresión del principio de mínima acción de Maupertius-Langrange (*Ídem*, ver nota anterior).

movimiento y t el tiempo empleado en realizarlo. Si el cuanto de acción representa la cantidad mínima de acción intercambiable entre sistemas en la naturaleza a *nivel subatómico*, donde los efectos gravitacionales, por ahora, no se toman en consideración, podemos suponer que en el cuanto de acción de Planck no interviene la energía potencial y su grado de derivación será el mismo que el de W de Lagrange, a saber, grado cinco:

Si $[[E_c]]=M_4$, entonces $[[W]]=M_5$, luego $[[\hbar]]=M_5$.

El mismo grado M_5 tendrá la relación de indeterminación respecto del tiempo y la energía: $\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2$.

Ahora supongamos que metrizamos $\hbar$ como *momento angular orbital*. El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento de un sistema y, si es además “orbital”, quiere decir que ese sistema describe una trayectoria alrededor de un punto (en el caso del electrón es la trayectoria alrededor del núcleo). Entonces,

$$L_0 = m_0 \upsilon r = \hbar$$

Si $m_0 \upsilon$ es una cantidad de movimiento p, entonces: $L_0=pr$. Los grados de derivación de p y r son, respectivamente, $[[p]]=M_2$ y $[[r]]=M_0$, luego el grado de derivación del momento angular orbital L_0 es un grado mayor que el más alto: $[[L_0]]=M_3$. Por consiguiente, el grado de derivación de la constante de Planck es el mismo: $[[\hbar]]=M_3$.

El mismo grado M_3 tendrá la relación de indeterminación respecto de la posición y la cantidad de movimiento: $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar / 2$.

Por último, si metrizamos $\hbar$ como *momento angular intrínseco o espín*, obtendremos el mismo grado que la magnitud anterior (momento angular orbital), pues métricamente son iguales. Luego, $[[\hbar]]=M_3$, el mismo grado que tendrá el espín del electrón: $L_S= \frac{1}{2} \hbar$.

Pues bien, tenemos un desacuerdo entre el grado de derivación de la constante de Planck, pues si se considera como acción le corresponde dos grados de derivación más que si se considera como momento angular. De acuerdo con la interpretación que Planck dio a su constante, la consideraremos como magnitud de acción y se le otorgará el grado cinco de derivación M_5.

4.1.2. Aclaración sobre la ecuación de Einstein E=mc²

Para determinar el grado de derivación de esta expresión de la energía nos encontramos con el mismo problema que hemos expuesto para la determinación de grado de derivación de la energía cinética. En el caso de la ecuación $E=mc^2$ tampoco podemos obviar las metrizaciones intermedias, por lo que consideraremos E como magnitud de grado de derivación cuatro: $[[E]]=M_4$. Hacemos esta aclaración porque en mecánica cuántica la energía de reposo de las partículas materiales (como el electrón) se calcula por medio de la ecuación de Einstein.

4.1.3. Aclaración sobre algunos símbolos

α	*constante de estructura fina (coeficiente de proporcionalidad)*
$\bar{\lambda}_0$	*longitud de onda de Compton reducida para el electrón* $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0 / 2\pi$
A	*número másico (nº protones + nº neutrones)*
Z	*número atómico (nº total de protones)*

Procedamos con la estructuración de las principales magnitudes mecánico-cuánticas.

4.2. Estructura MQ

Regla	Denominación magnitud	Ecuación	Dim.
$M_0=\delta M_0$	*relación radio clásico del electrón y su long. de onda de Compton*	$r_0=\alpha\bar{\lambda}_0$	**L**
	relación radio clásico del electrón-radio 1ª órbita de Bohr	$r_0=\alpha^2 a_0$	**L**
	radio nuclear	$R=r_0\cdot A^{1/3}$	**L**
	radio orbitales	$r_n=\frac{a_0}{Z}n^2$	**L**
$M_1=\delta M_0$			
$M_2=\delta M_1$			
$M_3=\delta M_2$	*indeterminación de la posición - cantidad de movimiento*	$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$	ML^2T^{-1}
	momento angular orbital del electrón	$L_0= m_0 \upsilon r$	ML^2T^{-1}
	momento angular intrínseco (espín)	$L_S= ½\, \hbar$	ML^2T^{-1}
$M_4=\delta M_3$	*energía de reposo del electrón*	$E_0=mc^2$	ML^2T^{-2}
	energía efecto fotoeléctrico	$E_f=W+ ½\, m_0\upsilon^2$	ML^2T^{-2}
$M_5=\delta M_4$	*cuanto de acción*	$h=\frac{E}{\nu}$	ML^2T^{-1}
	indeterminación del tiempo (energía)	$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$	ML^2T^{-1}
	radio clásico del electrón	$r_0=\frac{e^2}{E_0}$	**L**
$M_6=\delta M_5$	*cantidad de movimiento fotón*	$p_\gamma=\frac{h}{\lambda}$	MLT^{-1}
	longitud de onda de De Broglie	$\lambda_b=\frac{h}{m_0\upsilon}$	**L**
	longitud de onda de Compton para el electrón	$\lambda_0=\frac{h}{m_0 c}$	**L**
	esfera de carga del electrón	$E=\gamma\frac{e^2}{r_0}$	ML^2T^{-2}
	radio de Bohr (1ª órbita)	$a_0=\frac{\hbar^2}{m_0 e^2}$	**L**
	momento magnético de espín (magnetón de Bohr)	$\mu_B=\frac{\hbar e}{2m_0 c}$	ML^4T^{-2}
	energía de Rydberg	$E_R=\frac{e^4 m_0}{8\pi\varepsilon_0\hbar^2}$	ML^2T^{-2}

4.3. Comentarios a la Estructura MQ

La aplicación de los análisis dimensional y magnitudinal a una muestra representativa de magnitudes mecánico-cuánticas pone de manifiesto las siguientes características estructurales de la derivación por definición de sus conceptos métricos:

1. La estructura métrica de las metrizaciones derivadas parte de las magnitudes base canónicas {MLT}, las cuales son conceptos indefinidos, unidimensionales y dimensionalmente fundamentales. Por lo tanto, se puede considerar la mecánica cuántica una *teoría métricamente fundamental*, *desde el punto de vista de las magnitudes fundamentales clásicas*.

2. *Cuatro metrizaciones derivadas quebrantan la segunda regla del análisis magnitudinal y las reglas dimensionales*, pues magnitudes establecidas como base aparecen metrizadas en forma derivada en el resto de la estructura (recuadros marcados en amarillo y azul). Son las siguientes:

$M_5=\delta M_4$	*radio clásico del electrón*	$r_0=\frac{e^2}{E_0}$	**L**
$M_6=\delta M_5$	*longitud de onda de De Broglie*	$\lambda_b=\frac{h}{m_0 v}$	**L**
	longitud de onda de Compton para el electrón	$\lambda_0=\frac{h}{m_0 c}$	**L**
	radio de Bohr (1ª órbita)	$a_0=\frac{\hbar^2}{m_0 e^2}$	**L**

3. Cuatro metrizaciones derivadas son metrizaciones sin eliminabilidad, puesto que, *se han obviado metrizaciones intermedias* en ellas (recuadros con ecuación marcados en amarillo). Son las siguientes:

M_6=δM_5	*cantidad de movimiento fotón*	$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$	**MLT^{-1}**
	esfera de carga del electrón	$E = \gamma \frac{e^2}{r_0}$	**ML^2T^{-2}**
	momento magnético de espín (magnetón de Bohr)	$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_0 c}$	**ML^4T^{-2}**
	energía de Rydberg	$E_R = \frac{e^4 m_0}{8\pi\varepsilon_0 \hbar^2}$	**ML^2T^{-2}**

En concreto:

p_γ está metrizada como M_2 (p_γ)=δ M_5 (h);

E está metrizada como M_4 (E)=δ M_0 (e,r_0);

μ_B está metrizada como M_4 (μ_B)=δ M_5 ($\hbar$);

E_R está metrizada como M_4 (E_0)=δ M_5 ($\hbar$);

Y, por último:

4. La derivación por definición se interrumpe en dos filas de la estructura (correspondientes a M_2 y M_3), por lo que queda interrumpida la interrelación de los conceptos métricos desde las magnitudes base hasta las de tercer grado de derivación. Este hecho lleva a la conclusión de que la estructura métrica MQ *no es interpretable*, pues el significado físico de cada uno de los conceptos métricos metrizados no puede ser inferido de los conceptos introductorios.

En definitiva, la mecánica cuántica como teoría física no conceptualiza de forma métricamente coherente las propiedades físicas de su ámbito fenoménico concreto de aplicación.

Por último, la Estructura MQ muestra que la metrización de la constante $\hbar$ de Planck ocupa el quinto nivel de derivación. Luego *la no fundamentalidad métrica de la constante de Planck indica que su significado físico debe depender del significado de otra(s) magnitud(es).* En consecuencia se debe poder metrizar $\hbar$ en función de una magnitud más fundamental a la que el cuanto de acción le deba métricamente su carácter derivado. Esto se comprobará en el capítulo V, donde se mostrará que la metrización de $\hbar$ y su significado físico dependen de otras constantes, entre ellas la constante de estructura fina α.

5. Conclusiones del capítulo

El análisis de la metrización derivada por definición de tres conjuntos de magnitudes (mecánico-clásicas, electromagnéticas clásicas y mecánico-cuánticas) ha evidenciado que, independientemente de la teoría particular a la que pertenecen (en calidad de términos teóricos métricos), dichos conjuntos pueden ser estructurados haciendo uso de dos reglas generales que manejan las interdependencias métricas entre magnitudes.

Las interdependencias métricas son cuantitativas y conceptuales, lo que permite estudiar cada estructura como una estructura métrica, construida en función de las dependencias de los significados físicos entre las magnitudes.

En el caso de la mecánica clásica y el electromagnetismo, únicamente el significado físico de las magnitudes de fuerza (gravitatoria y eléctrica) no puede ser interpretado en función de los conceptos previamente establecidos dentro de cada estructura. En otras palabras, el significado físico de los conceptos métricos correspondientes a las fuerzas gravitatoria y eléctrica no puede ser determinado dentro de las estructuras métricas vigentes de la mecánica y electrodinámica clásicas.

En el caso de la mecánica cuántica nos enfrentamos a una estructura métrica confusa, inconexa: muchas metrizaciones derivadas incumplen las reglas de los análisis magnitudinal y dimensional; algunas magnitudes base son derivadas de otras magnitudes, con lo que quebrantan las normas de los análisis dimensional y magnitudinal, (al ser unidimensionales y derivadas); además, los significados físicos de muchos conceptos métricos no pueden ser determinados en función de conceptos previamente establecidos, pues dos niveles derivativos están vacíos, imposibilitando la conexión de significado entre los niveles precedentes y los subsiguientes. Esta estructura, así construida, no es interpretable (en el sentido indicado en p.49). La conclusión es que todas las metrizaciones derivadas que quebrantan las normas de los análisis dimensional y magnitudinal deber ser *reconstruidas*, hasta determinar su forma métricamente correcta: la forma que cumpla las reglas de los dos análisis. A esto estará dedicada la segunda parte de este trabajo.

Por último, mencionar que, según las reglas del análisis magnitudinal, la constante de Planck no es métricamente fundamental. En consecuencia, cabe la posibilidad de que no lo sea ni cuantitativa ni conceptualmente. Con esta cuestión comienza la segunda parte de este trabajo y el capítulo V.

SEGUNDA PARTE

La no fundamentalidad de la constante de Planck. Reconstrucción de la estructura métrica de la Mecánica Cuántica.

Capítulo V

Sobre la no fundamentalidad de la constante de Planck. La sospecha de Dirac

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **El número mágico *α*.**
   ¿Qué es *α*, qué representa, en qué procesos mecánico-cuánticos interviene?
   - **2.1. Interacción espín-órbita.**
   - **2.2. Correcciones en electrodinámica cuántica.**
3. **La sospecha de Dirac: la no fundamentalidad métrica de *ħ*.**
   Dirac argumenta la no fundamentalidad de la constante *ħ* de Planck a partir de la existencia de una ecuación, en la que *ħ* se relaciona con la carga eléctrica del electrón *e* y la velocidad de la luz *c*, a través de un factor adimensional: la constante de estructura fina *α*.
   - **3.1. α: un coeficiente adimensional de proporcionalidad.**
4. **La metrización por definición de *ħ*: la equivalencia entre las ecuaciones $\hbar = e^2/\alpha c$ y $\hbar = E/2\pi v$**
   El estudio, a través del análisis magnitudinal, de la metrización de *ħ* por medio de *α* ($\hbar = e^2/\alpha c$) conduce a la equivalencia entre dicha metrización y la cuantización de la energía establecida por Planck ($\hbar = E/2\pi v$).
5. **Conclusiones del capítulo.**
   Primero, la constante de Planck no es una constante métricamente (cuantitativa y conceptualmente) fundamental, y segundo, la constante de estructura fina está contenida en la cuantización de la energía.

1. Introducción

La no fundamentalidad métrica de la constante $\hbar$ de Planck es evidente dentro del sistema de magnitudes mecánicas con base MLT (masa, longitud, tiempo); como su nombre indica, el cuanto de acción $\hbar$ es un valor constante de la magnitud de acción, que es una derivada métrica de la magnitud de energía. En este sentido, la no fundamentalidad de $\hbar$, obtenida dentro de la Estructura MQ del capítulo anterior, no resulta sorprendente. Sin embargo, subyace a esta cuestión una más importante: si el cuanto de acción no es métricamente fundamental, ¿de qué otra(s) magnitud(es) o constante(s) se deriva? O dicho de otra forma: si $\hbar$ no es métricamente fundamental, no lo es ni cuantitativa ni conceptualmente, con lo cual, alguna(s) otra(s) magnitud(es) o constante(es) sí lo es (son) y $\hbar$ se deriva de ella(s). La reconstrucción, por medio del análisis magnitudinal, de la metrización derivada del cuanto de acción podría ofrecer una respuesta a esta cuestión.

Una sospecha de P.A.M. Dirac nos da una pista sobre cuáles pueden ser las dependencias métricas involucradas en la metrización de la constante de Planck. Dirac sugiere que la ecuación que relaciona $\hbar$ con la carga eléctrica e del electrón, la velocidad de la luz c y la constante de estructura fina α apunta a la posible no fundamentalidad de $\hbar$, por el carácter adimensional de α. En este capítulo, veremos qué es la constante de estructura fina y de qué manera está relacionada con el cuanto de acción. Analizaremos el argumento de Dirac desde el análisis magnitudinal, para intentar determinar de qué otra(s) magnitud(es) o constante(s) se deriva $\hbar$ métricamente, esto es, cuantitativa y conceptualmente[46].

[46] Argumento expuesto y defendido por mí en el *12th Internacional Congress Of Logic, Methodology And Philosophy Of Science* (Oviedo, 8-13 agosto de 2003), en la comunicación titulada “The redefinition of Planck’s constant”.

2. El número mágico *α*

Habitualmente, en el proceso de postulación de las ecuaciones que reflejan resultados experimentales, cuando se presenta de forma repetitiva una *relación* entre magnitudes conocidas, dicha relación apunta a la existencia de un *coeficiente de proporcionalidad* o una *constante*. En física del micromundo el descubrimiento del denominado *desdoblamiento multiplete* de los átomos o, más concretamente, "la separación de los *niveles de energía* y de las rayas espectrales de átomos, moléculas y cristales producida por el efecto de la *interacción espín-órbita*" (Prójorov 1995, p.451), puso de manifiesto la *estructura fina* de los átomos y supuso la introducción de una nueva constante: la constante de estructura fina α. El carácter especial de este coeficiente de proporcionalidad lo describe Dirac (1997, p.8):

> "La naturaleza presenta algunas constantes fundamentales: la carga del electrón (representada por e), la constante de Planck dividida por 2π (a la que se designa $\hbar$) y la velocidad de la luz (c). Gracias a ellas puede construirse un número que no tiene dimensión, $\hbar c / e^2$, cuyo valor, según indican los experimentos, es 137 o algo muy parecido. Desconocemos la razón de que el valor sea éste y no otro cualquiera. Se han propuesto varias ideas al respecto, pero no hay una teoría aceptada. Sin embargo podemos estar seguros de que los físicos terminarán por resolver el problema y explicarán el por qué del número. Habrá una física futura que funcione cuando $\hbar c / e^2$ valga 137 y no lo hará con ningún otro valor."

Esta constante α aparece repetidamente en muchos ámbitos de la microfísica, por lo que puede ser perfectamente considerada, no sólo como una constante específica, sino como un *factor cuántico universal de proporcionalidad*. Aparte de caracterizar el desdoblamiento fino de los niveles de energía del átomo, en cuyo caso interviene como α^2, esta constante limita el número de fotones que pueden originarse en una transformación de un par electrón-positrón en un par de fotones. Y, además, dentro de la teoría del campo electromagnético, los fenómenos de electrodinámica cuántica también son matematizados con éxito empleando el coeficiente α elevado a diferentes potencias. Feynman (1996, p.129) describe el empleo de α en los cálculos de electrodinámica cuántica (EDQ), y manifiesta su asombro ante la imposibilidad de llegar a descubrir de dónde procede realmente este *número mágico*:

> "Existe un problema [...] asociado a la constante de acoplamiento experimental, *e* –la amplitud de que un electrón real emita o absorba un fotón real-. Es un número sencillo cuyo valor, próximo a -0,08542455, ha sido determinado experimentalmente. (Mis amigos físicos no reconocerán este número porque prefieren recordar la inversa de su cuadrado; aproximadamente 137,03597...)".
>
> "A Vds. les gustaría saber inmediatamente de dónde sale este número de acoplamiento: ¿está relacionado con π, o quizá con la base de los logaritmos neperianos? Nadie lo sabe. Es uno de los condenados misterios *más grandes* de la física: un *número mágico* que aparece sin que el hombre entienda cómo. Podrían decir que "la mano de Dios" escribió ese número, y que "nosotros no sabemos cómo cogió el lápiz". Sabemos al son de qué música bailar para medir experimentalmente con gran precisión este número, pero no sabemos el son para obtener este número en un computador -¡sin introducirlo en secreto!-".

Lo que Feynman quiere transmitir de esta forma tan efusiva es que, en realidad, el significado de la constante de estructura fina no se conoce. No podemos obtener matemáticamente su valor, sin haberla introducido previamente en algún paso. De ahí que se pueda hablar de ella como *el número mágico cuántico*.

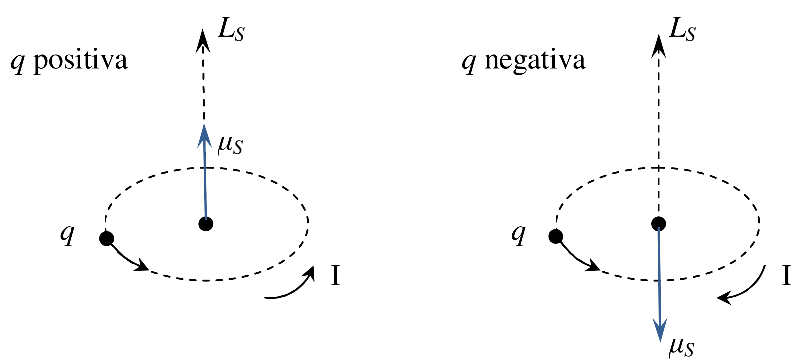
Vamos a ver cómo interviene α en la interacción espín-órbita del electrón y en los cálculos de las interacciones entre electrones y fotones en EDC.

2.1. Interacción espín-órbita y la constante de estructura fina

La interacción espín-órbita es un efecto cuántico relativista, que se da, por ejemplo, en el movimiento del electrón alrededor del núcleo atómico. El electrón posee un momento angular intrínseco o espín L_S: un momento mecánico intrínseco, que es el resultado de que una carga eléctrica gire sobre sí misma, igual que la tierra gira alrededor de su eje. En unidades de la constante de Planck:

$$L_S = \frac{1}{2}\hbar = \frac{h}{4\pi} \quad ó \quad L_S = m_S\,\hbar$$

donde m_S se denomina momento magnético intrínseco del electrón. Alonso-Finn (1987, p.535) añaden que, siendo el electrón una carga eléctrica que gira sobre sí misma, asociado al espín debe haber un momento magnético, ya que, cada elemento de volumen de la carga q que gira se comporta de la manera siguiente:



La relación entre el momento angular intrínseco o espín L_S y el momento magnético μ_S debido al espín es:

$$\mu_S = \frac{e}{m_0 c} L_S$$

El electrón se mueve, además, en cierta "órbita" no clásica ($2\pi r$), en torno a un núcleo con carga eléctrica y crea, en consecuencia, un campo coulombiano. Este campo naturalmente ejerce un efecto sobre el momento magnético μ_S del electrón que orbita alrededor del núcleo. Consideremos L_0 como el momento angular orbital del electrón según $L_0 = m_0 \upsilon r$ (donde m_0 es la masa del electrón, υ su velocidad y r el radio de giro) e I la intensidad de corriente eléctrica, que se puede expresar en relación con la velocidad del electrón y el perímetro que recorre:

$$si \qquad I = e\frac{1}{t} \qquad \rightarrow \qquad I = e\frac{\upsilon}{2\pi r} \tag{6}$$

El momento magnético μ_N del electrón debido al giro alrededor del núcleo se puede expresar como el momento magnético de una espira que envuelve el área $S=\pi r^2$:

$$\mu_N = \frac{\pi r^2}{c} I, \quad \text{y por la ecuación (6)} \quad \mu_N = \frac{er\upsilon}{2c} \tag{7}$$

Multiplicando en (7) el numerador y el denominador por la masa del electrón m_0 obtenemos la relación del momento magnético μ_N con el momento angular orbital L_0 del electrón:

$$\mu_N = \frac{er\upsilon}{2c} \cdot \frac{m_0}{m_0} \qquad \rightarrow \qquad \mu_N = \frac{e}{2cm_0} L_0 = \mu_B$$

Esta magnitud se denomina *magnetón de Bohr* μ_B. La relación entre el magnetón de Bohr μ_B y el momento magnético debido al espín μ_S es:

$$\mu_S = 2\mu_B \cdot m_S$$

Siendo $m_S = 1/2$, en definitiva resulta:

$$\mu_S = \mu_B$$

El momento μ_S puede orientarse espacialmente (dentro del campo coulombiano y magnético del núcleo) sólo de dos maneras: en dirección al campo y en contra del campo, orientaciones que corresponden a los valores $\pm 1/2$ (en unidades $\hbar$). Estas orientaciones constituyen el desdoblamiento de los niveles de energía en el átomo, en dos subniveles próximos, esto es, "la estructura doblete de los niveles" (Prójorov 1996, p.650). En particular, los niveles de energía de un átomo hidrogenoide, en el que el electrón se mueve en el campo coulombiano del núcleo con carga Ze (donde Z es el número de protones, carga del núcleo, y e es la carga del electrón) se determinan por la ecuación[47]:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{8}$$

donde n es el número cuántico principal[48]. Que α^2 determina los niveles de energía del átomo E_n es fácil de ver si consideramos la ecuación de la constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c$ y la ecuación de la energía de reposo del electrón $E_0 = m_0 c^2$. Despejando m_0 de esta última y sustituyendo en (8) obtenemos:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 E_0}{2\hbar^2 c^2}\frac{1}{n^2}$$

Ahora, utilizando la ecuación de α obtenemos:

$$E_n = -\frac{Z^2}{2}\alpha^2 E_0 \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

De esta forma queda clara la forma en que α^2 caracteriza la estructura fina de la energía de los átomos. Como se puede observar, α^2 hace de un coeficiente de proporcionalidad entre la energía E_n del átomo y la energía E_0 del electrón orbitando alrededor del núcleo, de modo que $E_n \sim \alpha^2 E_0$.

[47] "Deducción de la fórmula de la energía en el marco de la física atómica cuántica de átomos hidrogenoides" en Rivadulla (2004, cap.II, apéndice).

[48] El electrón en su giro alrededor del núcleo puede tener un momento cinético según la relación $mvr=n\hbar$, donde n es el número cuántico principal y representa la cuantificación de Planck aplicada al momento cinético.

2.1. Correcciones en electrodinámica cuántica[49]

La constante de estructura fina α interviene también en los cálculos que se realizan en EDC por medio del método de las perturbaciones. Veamos en qué consiste.

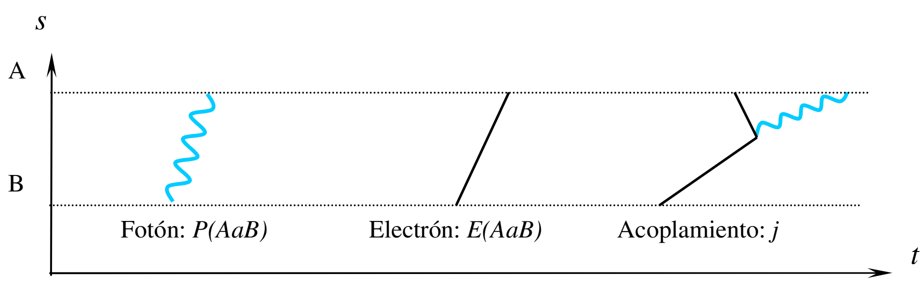
En lo que se refiere al nivel atómico y subatómico, la base teórica actual de la descripción de la naturaleza de las partículas, sus interacciones e intertransformaciones la ofrece la *teoría cuántica de campos* (TCC). Según esta teoría, la forma fundamental y universal de la materia es el *campo cuántico*, que constituye el origen de todos los fenómenos concretos posibles de la materia y la energía. La característica quizá más importante de toda TCC es que explica lo que conocemos como "fuerzas" como interacciones resultado de un intercambio de cuantos de campo: unas partículas llamadas *bosones*. Cada tipo de interacción posee su bosón característico: por ejemplo, la interacción electromagnética se transmite por medio de *fotones* que son intercambiados entre los electrones o los protones; en la interacción fuerte, los quarks (que forman los protones y neutrones) intercambian *gluones* explicándose así la estabilidad de los nucleones; la interacción débil es la responsable de que los protones se conviertan en neutrones y viceversa, por medio del intercambio de los bosones *W*.

Como teorías matematizadas, las TCC emplean un método de cálculo para las diversas interacciones: el *método de las perturbaciones* o *aproximaciones sucesivas*. Consiste en representar el suceso físico de la interacción mediante un modelo ideal (abstracto) y posteriormente ir considerando las perturbaciones que ha podido sufrir el sistema físico estudiado, e introducirlas en los cálculos como *correcciones* al modelo.

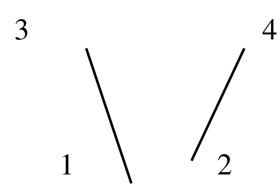
---

[49] Tema que traté en el *II Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y la Tecnología* (noviembre 2005, Tenerife) en mi intervención titulada "Sr. Feynman, ¿por qué hay que renormalizar?".

Para manejar estas correcciones con mayor facilidad, Feynman propuso, en 1949, un método diagramático para representar las posibles perturbaciones que debían ser añadidas a los modelos ideales de las interacciones entre fotones y electrones: los *diagramas de Feynman*[50]. Feynman resumió en tres las posibles acciones (sucesos) que podían tener lugar entre las partículas de materia y radiación: 1) un fotón va de A a B (la amplitud de probabilidad de este suceso sería *P(AaB)*); 2) un electrón va de A a B (amplitud de probabilidad de este suceso *E(AaB)*); y 3) un electrón emite o absorbe un fotón ("acoplamiento" caracterizado por la constante *j* que depende de la carga eléctrica del electrón). Así se representan diagramáticamente:



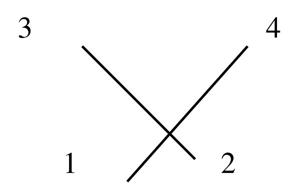
Si quisiéramos calcular el movimiento de dos electrones, idealmente lo representaríamos así:



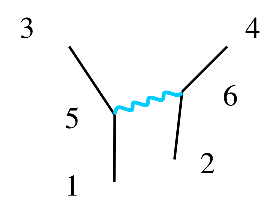
Camino ideal:
Un electrón va del punto 1 al punto 3,
el otro electrón va de 2 a 4.

[50] Exposición y explicación de los diagramas en Feynman (1985).

Sin embargo, los electrones son partículas cargadas que pueden sufrir perturbaciones originadas por campos electrostáticos exteriores o por la interacción entre ellos mismos al pasar a una distancia cercana. Estas perturbaciones pueden variar el movimiento de los electrones de muchas maneras, por ejemplo:



Camino alternativo:
Un electrón va del punto 1 al punto 4, el otro electrón va de 2 a 3.

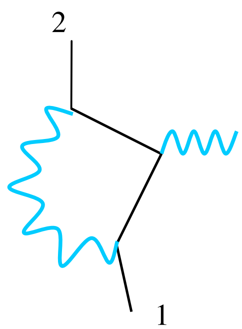


Camino alternativo:
Un electrón va de 1 a 5, donde emite un fotón y continúa hasta 3; el otro electrón va de 2 a 6, absorbe el fotón emitido por el primer electrón y continúa hasta 4.

Por lo tanto, se deben tener en cuenta todas estas perturbaciones posibles e introducirlas (en los cálculos) como correcciones al modelo ideal, con el fin de aproximarnos al máximo al suceso real. La inclusión de todas las correcciones posibles al modelo ideal del suceso físico en cuestión, matemáticamente corresponde a la suma de las amplitudes de probabilidad de cada corrección. Esta suma tiene la forma de una integral, cuya resolución, en el caso de la EDQ, en vez de converger en un determinado valor para la carga (y masa) del electrón – diverge: esto es, da para ellas valores infinitos.

Las divergencias para valores como la carga eléctrica, masa, momento magnético, etc., del electrón, corroborados y establecidos como finitos, plantearon la necesidad de redefinirlos *directamente* dentro de las integrales, con el fin de los resultados fueran finitos. Este proceso de redefinición se denomina *renormalización* (R. Feynman, J. Schwinger y S.I. Tomonaga fueron galardonados por él con el premio Nóbel, en 1965) y comenzó con una idea de G.Breit, quien propuso[51] que el momento magnético μ del electrón podía no ser exactamente igual al magnetón de Bohr μ_B, sino ser mayor que él en una cantidad del orden de $\alpha\mu_B$, donde α es la constante de estructura fina. En base a ello, un año más tarde, Schwinger presentó[52] la primera corrección cuántica de una teoría de campos (en este caso, de la EDC). Como lo cuenta Feynman (1986, pp.116-117):

Corrección



> Al cabo de varios años se descubrió que este valor [μ/μ_B] no era exactamente 1, sino ligeramente superior –algo como 1,00116-. Esta corrección fue calculada por primera vez, en 1948, por Schwinger como $j \times j$ y se debía a un camino alternativo por el que el electrón podía ir de un sitio a otro: en lugar de ir directamente de un punto a otro, el electrón viajaba durante un tiempo y de repente emitía un fotón; luego, (¡horror!) absorbía su propio fotón. [Situación representada a la izquierda]

Desarrollado el conjunto final de las correcciones, esto es, incorporadas todas las correcciones posibles a la medición del momento magnético del electrón, respecto del magnetón de Bohr, se obtiene la forma matemática:

$$\mu = \mu_B(1+a) \qquad \text{donde} \qquad a = a_1\frac{\alpha}{\pi} + a_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + a_3\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \ldots$$

En esta expresión se ve que las correcciones al momento magnético μ del electrón vienen dadas en potencias de la constante de estructura fina α. Cada corrección añadida depende de un término $(\alpha/\pi)^n$, donde interviene α elevada a la *n-sima* potencia.

[51] Breit, G.: “Does the Electron Have an Intrinsic Magnetic Moment?” *Phys. Rev.* 72(10), 984. November 1947.
[52] Schwinger, Julian: “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron”. *Phys. Rev.* 73(4), 416-417. February 1948.

Se ve que, tanto en la interacción espín-órbita, como en los acoplamientos electrón-fotón, la constante de estructura fina α está íntimamente relacionada con el cuanto de acción $\hbar$; en el caso de la interacción espín-órbita hemos visto que la energía del átomo se puede expresar de forma equivalente a través de $\hbar$ y de α:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \quad \text{equivale a} \quad E_n = -\frac{Z^2}{2}\alpha^2 E_0 \frac{1}{n^2}$$

En el caso de las correcciones de EDQ, ocurre lo mismo, pues:

$$\mu = \mu_B(1+a) \quad \text{se puede expresar como} \quad \mu = \frac{\hbar e}{2m_0 c}(1+a)$$

ya que $\mu_B = \hbar e/(2m_0 c)$ y sabemos que a depende de α.

La expresión que pone en relación $\hbar$ con α es la siguiente: $\alpha = e^2/\hbar c$. Y esta es la relación es la que hizo sospechar a Dirac de la posible no fundamentalidad de la constante de Planck. Pasemos a analizar su argumento.

3. La sospecha de Dirac: la no fundamentalidad métrica de $\hbar$

El argumento de Dirac (1997, p.7) es el siguiente:

> "Es evidente que [la] física futura no podrá mantener las tres constantes $\hbar$, e y c^2. Es casi seguro que c será de las que permanezca. La velocidad de la luz, c, tiene tal importancia en la concepción tetradimensional y desempeña un papel tan destacado en la teoría de la relatividad especial, donde coordina las unidades de espacio y de tiempo, que tiene que ser fundamental. Resulta pues que una de las dos cantidades restantes, $\hbar$ y e, será fundamental y otra la derivada. Si la fundamental fuese $\hbar$, habría que explicar e en términos de la raíz cuadrada de $\hbar$. Pero resulta muy poco probable que ninguna teoría fundamental proporcione e en términos de una raíz cuadrada, puesto que las ecuaciones básicas no contienen raíces cuadradas. Lo más verosímil es que e sea la cantidad fundamental y que se explique $\hbar$ en términos de e, con lo que no aparecerían raíces cuadradas en las ecuaciones básicas."

Y para finalizar Dirac (*Ídem*) expone con claridad su preferencia personal:

> "Me parece que no se arriesga uno mucho si conjetura que e y c serán las cantidades fundamentales y $\hbar$ la derivada en la estructura de la física de un futuro indeterminado."

En este punto hay que recalcar un aspecto muy importante respecto del significado de la expresión "no fundamentalidad de $\hbar$". En lo que toca a nuestra deducción, la no fundamentalidad de $\hbar$ por medio del análisis magnitudinal significa que la constante de Planck no es fundamental métricamente, esto es, como *cuanto de la magnitud de acción* (una magnitud evidentemente derivada), $\hbar$ simplemente *no es fundamental* dentro de un sistema de magnitudes de base MLT. Ahora bien, no es incompatible con ello una *fundamentalidad física* de $\hbar$, es decir, que el cuanto de acción afecte (*cuantice*) las propiedades de las partículas de forma fundamental – inevitable, necesaria. Por ejemplo, De Broglie (1952, p.139) explica de la siguiente forma ese carácter "fundamental" o "esencial" del cuanto de acción $\hbar$:

> Para dar cuenta de los fenómenos donde se manifiesta la acción de la luz o de las entidades elementales de la materia, es necesario invocar tanto la imagen de corpúsculos localizados en un espacio, como la imagen de ondas periódicas que ocupan toda una extensa región del espacio y se propagan en determinada dirección. Además, si se quiere establecer una correspondencia entre esas dos imágenes, vincular, por ejemplo, la energía y la cantidad de movimiento de una partícula a la frecuencia y longitud de onda que le es asociada, se llega a fórmulas donde figura de modo *esencial* [la cursiva es mía, C.S.] la constante h de Planck: esto demuestra que la dualidad de las ondas y los corpúsculos, la necesidad de emplear dos imágenes, en apariencia contradictorias, para describir los mismos fenómenos, está íntimamente unida a la existencia del quantum de acción.

No sabemos en cuál de estos sentidos utiliza Dirac el término de "no fundamentalidad", sin embargo, al referirse a "ecuaciones básicas" y al contraponer "fundamentalidad" a "derivación", creo lícito suponer que está hablando de una no fundamentalidad métrica.

Desarrollemos ahora el argumento de Dirac, que se basa en el carácter adimensional de la constante de estructura fina α.

3.1. α: un coeficiente adimensional de proporcionalidad

Definitivamente α se puede considerar como un importante *factor de proporcionalidad característico del micromundo*. Según las mediciones "más exactas" (Prójorov 1996, p.204), el valor de la constante es α^{-1}=137,03598(29)[53] y en la ecuación que la caracteriza intervienen tres constantes consideradas universales $\alpha = e^2 / \hbar c$ [54].

Una de las razones por las que α debería ser considerada como un factor de proporcionalidad (y no como una constante más) reside en su carácter adimensional: α no posee unidades ni dimensiones, es nada más que un *número*. La especificidad de la relación entre constantes $e^2 / \hbar c$ que da lugar a α radica en su *adimensionalidad*. *Alfa* es un coeficiente que carece de dimensiones porque en la ecuación se produce una anulación de unidades de medida y, con ello, de las dimensiones. Ello es fácil de ver aplicando el análisis dimensional:

$$\frac{[e^2]}{[\hbar]\cdot[c]} = \frac{\mathrm{ML^3T^{-2}}}{\mathrm{ML^2T^{-1}\cdot LT^{-1}}} = \frac{\mathrm{ML^3T^{-2}}}{\mathrm{ML^3T^{-2}}} = 1$$

La necesidad de la existencia del coeficiente adimensional α se desprende del teorema π de Buckinham (p.61-62): al representar $[e^2]$ con la ecuación dimensional $\mathrm{ML^3T^{-2}}$ estamos expresando la carga a través de la fuerza de Coulomb ($e^2 = F_c \cdot d^2$), con lo que, métricamente, estamos empleando dos magnitudes en lugar de una. Entonces tenemos en total cuatro magnitudes (F_c, d, $\hbar$, c) y tres dimensiones (MLT). Por consiguiente, existe un coeficiente adimensional que relaciona dichas magnitudes.

Existe una conexión entre la *adimensionalidad* de un coeficiente y las magnitudes físicas que lo originan. Las dimensiones de una magnitud

---

[53] Esta siendo considerado ahora que el valor numérico de la constante de estructura fina puede variar, como consecuencia del vacío cuántico. Ver Fernández-Rañada (2003).

[54] Sobre el valor de la constante de estructura fina y su posible variación ver Fernández Rañada 2002 y 2003, respectivamente.

derivada quedan determinadas *exactamente* por las magnitudes que intervienen en la ecuación que la introduce o define. Por lo tanto, el resultado numérico de una relación formal entre una magnitud derivada y el conjunto de las magnitudes que la definen es siempre adimensional, lo que nos induce considerar que la relación $\alpha = e^2 / \hbar c$ puede contener una definición. Se puede llegar a la misma conclusión tomando el factor 1/2 de la ecuación de la energía cinética $E_c = 1/2(mv^2)$ y convertirlo en el resultado numérico de la relación formal entre todas las magnitudes que intervienen en la ecuación: $\beta = E_c / mv^2 = 1/2$. Por otra parte, también hay que tener en cuenta que, en las ecuaciones en que no aparece ningún factor de proporcionalidad, no es porque no exista, sino porque es igual a uno. Así, por ejemplo, en la ecuación de la energía del fotón $E_\gamma = hv$ el factor de proporcionalidad es 1, pues $E_\gamma / hv = 1$.

¿Cuál puede ser la metrización derivada por definición contenida en $\alpha = e^2 / \hbar c$?

4. La metrización por definición de *ħ*: demostración de la equivalencia entre las ecuaciones *ħ=e²/αc* y *ħ=E/2πv*.

Para buscar las metrizaciones intermedias obviadas en la ecuación $\alpha = e^2 / \hbar c$, recordemos los conjuntos en los que se pueden dividir las ecuaciones que pertenecen a una teoría física (apartado "Delimitación de la aplicabilidad del análisis dimensional" p.68). Tenemos:

$$\textit{conjunto}\ U_T = \textit{conjunto de ecuaciones}$$

$$\textit{subconjunto}\ D_T = \textit{conjunto de ecuaciones de definición}$$

$$\textit{subconjunto}\ \overline{D}_T = \textit{conjunto de ecuaciones complementarias}$$

Cumpliéndose para todo elemento *t* (concepto métrico o magnitud) de la teoría *T*:

$$\forall t \in T \ / \ (t \in D_T) \wedge (D_T \subset U_T) \Rightarrow (t \in U_T)$$

$$\forall t \in T \ / \ (t \in \overline{D}_T) \wedge (\overline{D}_T \subset U_T) \Rightarrow (t \in U_T)$$

Consideremos el conjunto universal U_α de ecuaciones posibles para la relación entre las constantes α, e, $\hbar$, c:

$$U_\alpha = \left\{ \left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \right), \left(\hbar = \frac{e^2}{\alpha c} \right), \left(c = \frac{e^2}{\alpha \hbar} \right), \left(e = \sqrt{\alpha \hbar c} \right) \right\}$$

Debemos definir ahora el subconjunto de ecuaciones de definición D_α y el subconjunto de ecuaciones complementarias de cálculo $\overline{D}_\alpha$. Para ello debemos recurrir a las reglas del análisis magnitudinal. Procedamos.

Según las reglas de metrización derivada por definición,

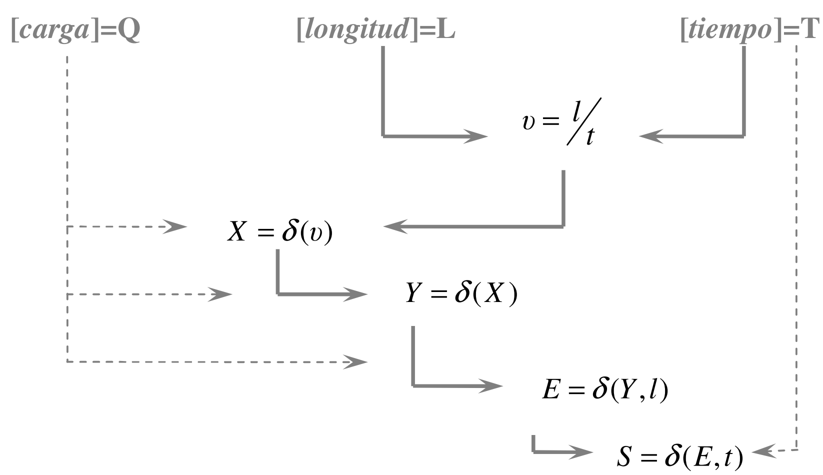
> *La carga eléctrica unidad e es una magnitud fundamental de grado de derivación cero:* $[[e]]=\mathrm{M}_0$.
>
> *La velocidad de la luz c es una magnitud derivada de grado de derivación uno*: $[[c]]=\mathrm{M}_1$.
>
> *La constante ħ de Planck es una magnitud derivada de grado de derivación cinco*: $[[\hbar]]=\mathrm{M}_5$.

Por lo tanto, siendo la constante de Planck la magnitud con mayor grado de derivación, la ecuación de definición contenida en la relación $\alpha = e^2 / \hbar c$ sólo puede tener la forma:

$$\hbar = \frac{e^2}{\alpha c} \tag{10}$$

Sin embargo, vemos que no se cumple exactamente la segunda regla del análisis magnitudinal, a saber, $\mathrm{M}_n = \delta \ \mathrm{M}_{n-1}$, pues $\hbar$ es de grado *cinco* y la magnitud introductoria (lado derecho de la ecuación) con mayor grado de derivación es la velocidad de la luz, con grado *uno*. Según las reglas del análisis magnitudinal, para que esta ecuación sea de definición, en el lado derecho de la ecuación debe haber una magnitud derivada de grado *cuatro*. Por consiguiente, (10) se puede considerar como una metrización sin eliminabilidad, pues faltan *tres* pasos de metrizaciones intermedias, en los que de las magnitudes e^2 y c^{-1} se obtengan tres magnitudes derivadas.

Reconstruyamos primero la metrización de $\hbar$ para un caso general, esto es: la metrización de una magnitud de acción S en función de dos cargas eléctricas q iguales y una velocidad υ. Después lo particularizaremos para $\hbar$, e y c. La acción, hemos dicho, que se da en función de la energía E y el tiempo t. Nosotros disponemos de una carga q al cuadrado y la velocidad υ (sin contar con α, que es adimensional). Podemos plantear el siguiente esquema de derivación, para hacernos una idea de qué metrizaciones intermedias estamos buscando:



Según este esquema buscamos: una magnitud X que dependa de la velocidad; una magnitud Y que dependa de X; una magnitud de energía E, que debe depender de Y y, probablemente, de una longitud (suele aparecer un radio o una distancia en las metrizaciones energías relacionadas con cargas eléctricas; ver la Estructura EM, p.121); y, por último, una magnitud de acción S, que dependa de la energía E y del tiempo t. En alguna de las metrizaciones intermedias debe intervenir la carga eléctrica (intervenciones marcadas en el esquema con línea discontinua).

Procedamos a determinar las posibles metrizaciones intermedias para el caso concreto de las magnitudes *ħ, e* y *c*.

La energía que está relacionada con el cuadrado de la carga eléctrica *e* del electrón es, como vimos en la Estructura MQ (p.131), la energía de la esfera de carga eléctrica del electrón:

$$E = \gamma \frac{e^2}{r_0} \tag{11}$$

(donde γ es un coeficiente relativista ~1 que no vamos a incluir de aquí en adelante, pues no es relevante), que caracteriza la distribución de la carga por el radio, que en este caso es r_0, esto es, el denominado radio clásico del electrón. Con esto ya tenemos la metrización de grado M_4, correspondiente a $E = \delta(Y, l)$ en la estructura. ¿Qué magnitud es *Y*?

La energía *E* de la esfera de carga eléctrica del electrón tiene las características de una energía potencial eléctrica[55], de un sistema de dos partículas, que en el sistema de unidades *cgs*[56] se expresa como:

$$U = \frac{q_1 q_2}{r}$$

Las dos cargas q_1q_2 son cargas unidad *e*, y *r* es r_0 en la ecuación (11). Sabemos que *U* es una magnitud derivada del potencial eléctrico *V* de una carga:

55 La energía potencial eléctrica es el trabajo realizado para traer una carga q_2 desde el infinito hasta el campo eléctrico de otra carga q_1, quedando ambas a la distancia r_{21}, que es radio de la esfera del campo eléctrico de q_1.

56 En el sistema de unidades SI, la energía potencial eléctrica se expresaría como $U=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$, donde ε_0 es la constante denominada permitividad eléctrica del vacío y su valor se obtiene a partir de $\varepsilon_0=1/c2\mu_0$ (siendo μ_0 la permeabilidad magnética del vacío). Para evitar complicaciones y confusiones, preferimos emplear en esta deducción el sistema *cgs*.

$$V = \frac{q_1}{r} \qquad \text{por lo que} \qquad U = q_2 V$$

El potencial eléctrico V va ser, por lo tanto, nuestra magnitud Y buscada, de grado de derivación tres, pues cumple la condición $U = \delta(Y, l)$. Aplicado al caso del electrón, V será el potencial eléctrico V_0 de esta partícula a la distancia de su radio clásico r_0:

$$V_0 = \frac{e}{r_0}$$

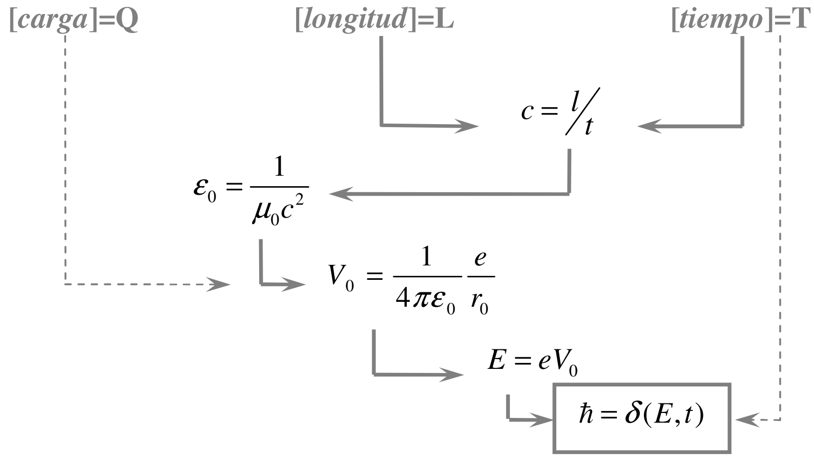
Ésta es la magnitud X que buscábamos, correspondiente a la metrización intermedia de grado tres. Entonces, la ecuación (11) pasa a tener la siguiente forma, que cumple la segunda regla del análisis magnitudinal:

$$E = eV_0 \tag{12}$$

Nos falta la metrización de segundo grado de derivación M_2, que relacione una velocidad con la magnitud del potencial eléctrico V_0 del electrón. Esa metrización puede ser la correspondiente a la constante ε_0 según la ecuación:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y c la velocidad de la luz. En el sistema SI, esta constante aparece en todas las metrizaciones de la fuerza, potencial y energía eléctricas. De esta forma, la estructura se completa y queda como sigue:



Nos falta la última metrización y la más importante: la metrización por definición del cuanto de acción $\hbar$ según $\hbar = \delta(E,t)$ y su relación con la constante de estructura fina α. Debemos tener en cuenta que la metrización derivada por definición que vamos a buscar ahora depende de la carga eléctrica e del electrón (pues partimos de $\hbar = e^2/\alpha c$), por lo tanto, el significado físico de dicha metrización deberá entenderse *aplicado específicamente al electrón*. No se tratará pues, de una definición *general* del cuanto de acción.

Nuestro objetivo ahora es pasar de la ecuación $\hbar = e^2/\alpha c$ a una ecuación con la forma $\hbar = \delta(E,t)$, teniendo en cuenta todas las metrizaciones intermedias representadas en la estructura de metrización derivada por definición que acabamos de elaborar para $\hbar$. Comencemos por la velocidad de la luz c. Para las ondas electromagnéticas se cumple que:

$$c = \lambda \nu \tag{13}$$

donde λ es la longitud de la onda electromagnética y ν es su frecuencia. Vemos que en $\hbar = e^2/\alpha c$ interviene además la carga eléctrica e de electrón. Se sabe que el radio clásico r_0 del electrón está relacionado con la constante de estructura fina α por medio de la siguiente relación (Prójorov 1998, t.2, p.372; Alvargonzález Cruz 1999, p.50):

$$r_0 = \alpha \frac{\lambda_0}{2\pi}$$

donde λ_0 es la longitud de onda de Compton para el electrón[57]. Si tomamos λ_0 y la introducimos en la ecuación (13) obtenemos:

$$c = \frac{2\pi}{\alpha} r_0 \nu_0 \qquad (14)$$

donde ν_0 es la frecuencia correspondiente para el caso $c= \lambda_0 \nu_0$.

Sustituimos ahora (14) en la ecuación de la constante de estructura fina:

$$\hbar = \frac{e^2}{\alpha c} \longrightarrow \hbar = \frac{e^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2\pi r_0 \nu_0} \longrightarrow \hbar = \frac{e^2}{2\pi r_0 \nu_0}$$

Con esto hemos logrado la mitad de nuestro propósito, a saber, relacionar la metrización de $\hbar$ con α. Reconocemos, por otra parte, que la relación e^2 / r_0 corresponde a la energía potencial eléctrica E de la ecuación (11), por lo tanto:

$$\hbar = \frac{e^2}{2\pi r_0 \nu_0} = \frac{E}{2\pi \nu_0}$$

Por último, simplificamos el factor 2π de la parte derecha de la ecuación con el 2π que contiene la constante de Planck reducida ($\hbar = h/2\pi$) y logramos la segunda mitad de nuestro propósito, esto es, conseguir, a partir de $\alpha = e^2 / \hbar c$, una *metrización derivada por definición* de la constante h de Planck *aplicada al electrón*, coherente con los análisis magnitudinal y dimensional:

---

[57] En los fenómenos cuánticos de dispersión de la radiación electromagnética por electrones (libres o débilmente ligados) se detecta una variación $\Delta\lambda$ de la longitud de onda λ del fotón incidente respecto de la longitud de onda λ' del fotón dispersado. El valor numérico de esta variación, que tiene dimensión de longitud y se denomina longitud de onda de Compton para el electrón, se determina según: $\Delta\lambda = \lambda_0 = h/m_0 c$ (donde h es la constante de Planck, m_0 es la masa del electrón y c es la velocidad de la luz en el vacío).

$$h = \frac{E}{\nu_0} \qquad (15)$$

Vemos que esta es la metrización de la cuantización de la energía propuesta por Planck. La ecuación (15) es análoga a:

$$\hbar = \frac{E}{2\pi\nu_0} = \frac{E}{\omega_0}$$

(donde ω_0 es la frecuencia angular derivada de la frecuencia lineal ν_0) y es análoga a:

$$\hbar = \frac{m_0 c^2}{\omega_0} \qquad (16)$$

pues, según Prójorov (1998, t.2, p.372)[58] "El radio clásico del electrón tiene el significado del radio de una esfera cargada con carga e (distribuida esféricamente de forma simétrica), siendo la energía del campo electrostático de dicha esfera $E = \gamma e^2 / r_0$ […] igual a la energía de reposo del electrón m_0c^2".

Como se puede comprobar la adimensionalidad de α en la relación $\alpha = e^2 / \hbar c$ indica que ésta contiene una metrización de $\hbar$ (aplicada al electrón) en función de la energía del campo electrostático de la esfera de carga eléctrica del electrón (o bien para su energía de reposo) y la frecuencia correspondiente a la longitud de onda de Compton para el electrón. Dicho de otra forma, *la cuantización de la energía del electrón*, tanto como partícula con energía de reposo, como esfera de carga eléctrica, *está determinada por la constante de estructura fina α.*

[58] La traducción es mía, C.S.

5. Conclusiones del capítulo

Son dos las conclusiones que extraemos del examen de la relación entre el cuanto de acción y la constante de estructura fina que hemos realizado en este capítulo por medio del análisis magnitudinal:

1. La constante de Planck o cuanto de acción no es una constante métricamente fundamental pues, como revela la ecuación de la constante de estructura fina $\alpha = e^2 / \hbar c$, $\hbar$ depende de la energía del campo electrostático del electrón.
2. La constante de estructura fina α, como factor de proporcionalidad, está contenida en la cuantización de la energía, postulada por Planck.
3. En base a haber considerado la velocidad de la luz en función de la longitud de onda de Compton del electrón, según $c = \lambda_0 \nu_0$, hemos logrado la equivalencia entre $\hbar = e^2 / \alpha c$ y $\hbar = E / 2\pi\nu$.

Partiendo de estas consideraciones vamos a *re-construir* la estructura métrica de la metrización derivada de las magnitudes mecánico-cuánticas, con el fin de ofrecer como resultado una estructura compuesta por metrizaciones derivadas por definición, esto es, una estructura *interpretable*.

Capítulo VI

Reconstrucción de la estructura métrica de la Mecánica Cuántica

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **Reconstrucción de las metrizaciones de magnitudes mecánico-cuánticas.** Procedemos a reconstruir, por medio del análisis magnitudinal y el factor α aquellas metrizaciones de la Estructura MQ que quebrantaban las normas de los análisis dimensional y magnitudinal.
3. **Reconstrucción de las relaciones de indeterminación de Heisenberg.** Al estar contenido el factor α dentro de la cuantización de la energía (ecuación de Planck), constatamos la presencia de dicho factor dentro de las relaciones de indeterminación de Heisenberg.
   - **3.1. La presencia de α en la relación de indeterminación posición-cantidad de movimiento.**
   - **3.2. La presencia de α en la relación de indeterminación energía-tiempo.**
   - **3.3. Nuevas formas de las relaciones de indeterminación.**
4. **Reconstrucción de la estructura métrica de la Mecánica Cuántica.** Reconstruidas las metrizaciones de la Estructura MQ, y expresadas las relaciones de indeterminación de Heisenberg en función de α, procedemos a reconstruir la estructura métrica (cuantitativa y conceptual) de la mecánica cuántica.
   - **4.1. La Estructura MQα.**
   - **4.2. Comentarios a la Estructura MQα.**
5. **Conclusiones del capítulo.** La Estructura MQα obtenida es interpretable: se puede seguir la generación del significado físico de todos los términos teóricos métricos. La conclusión más relevante es que el cuanto de acción $\hbar$, referido a la energía del electrón, depende métricamente de la longitud de onda de Compton para el electrón, que se podría interpretar como una *precuantización* de $\hbar$.

1. Introducción

En este capítulo, aplicando los análisis magnitudinal y dimensional, de nuevo (como ya hicimos en la Estructura MQ del capítulo IV) vamos a ordenar por grados de derivación las magnitudes de la mecánica cuántica. Sin embargo, en esta ocasión, previamente vamos a reconstruir métricamente (en el sentido explicado en el apartado "Reconstrucción de la metrización derivada" del capítulo III) todas aquellas metrizaciones que en la Estructura MQ quebrantaban las normas de los análisis dimensional y magnitudinal.

El objetivo es componer una estructura métrica *interpretable* (en el sentido indicado en el capítulo I, p.49) de las magnitudes mecánico-cuánticas, esto es: el objetivo es establecer las metrizaciones derivadas por definición de cada concepto métrico estudiado, con el fin de poder determinar su significado físico en función de los conceptos métricos intervinientes en su definición.

En el capítulo anterior hemos determinado que la constante $\hbar$ de Planck, en su condición de elemento cuantizador de la energía contiene métricamente el factor α (la constante de estructura fina). Al ser $\hbar$ el eje central de la mayor parte de las metrizaciones de magnitudes mecánico-cuánticas, éstas pueden ser reconstruidas en función de dicho factor. Esto es lo que se va a llevar a cabo en el siguiente apartado.

Las nuevas metrizaciones obtenidas por medio de la aplicación del análisis magnitudinal y el factor α se representarán en una nueva estructura métrica de las magnitudes mecánico-cuánticas, que denominaré Estructura MQα. Al igual que en el capítulo IV, en esta estructura las magnitudes se organizarán en grupos según grado de derivación M_n (n=1,2,…), y estos grupos compondrán una tabla, donde las columnas significarán, de izquierda a derecha:

Columna 1: grado de derivación de la magnitud introducida, expresado por la correspondiente regla del análisis magnitudinal.

Columna 2: denominación de la magnitud,

Columna 3: ecuación de metrización de la magnitud,

Columna 4: dimensiones de la magnitud.

La nueva Estructura MQα pretende subsanar las deficiencias de la Estructura MQ y lograr una interconexión métrica entre las metrizaciones de las magnitudes mecánico-cuánticas derivadas, de modo que sus significados físicos puedan ser interpretables dentro de la estructura.

2. Reconstrucción de las metrizaciones de magnitudes mecánico-cuánticas.

Ya que el factor α parece hilar matemáticamente muchas propiedades de las partículas, vamos a introducirlo en todas las metrizaciones derivadas de las magnitudes y constantes que componen la actual Estructura MQ. Para ello, tomaremos la ecuación de α e iremos sustituyéndola en todas las ecuaciones de magnitudes cuánticas que lo permitan; en otras palabras, iremos re-estructurando la metrización derivada de las magnitudes cuánticas en función de α.

En primer lugar, recordamos la ecuación conocida de α:

2.1. Factor de proporcionalidad *α*

(I)
$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

2.2. Energía potencial eléctrica entre dos cargas unidad *e*

(I*a*)
$$E = eV_0 \qquad \text{donde} \quad V_0 = \frac{e}{r_0}$$

Recordamos la ecuación de definición de $\hbar$ (ecuación 16, p.160), que hemos hallado aplicando el análisis magnitudinal:

2.3. El cuanto de acción

(I*b*) $$\hbar = \frac{E}{\omega_0}$$

donde E puede ser tanto $E = eV_0$, como $E_0 = m_0 c^2$, donde E_0 designa la energía de reposo del electrón.

Ahora procedemos a redefinir las ecuaciones de la Estructura MQ (p.131) en función de (I), (I*a*) y (I*b*).

2.4. Energía de un fotón

A partir de α (ecuación I) y de la relación $c=\lambda v$, encontramos que la energía de un fotón $E_\gamma = hv$ se puede expresar como:

(II) $$E_\gamma = \frac{e^2}{\alpha \lambdabar}$$

donde $\lambdabar$ es lambda-barra, esto es, una longitud de onda reducida: $\lambdabar = \lambda / 2\pi$. La energía de un fotón, así expresada, también la contempla Alvargonzález Cruz (1999, p.21) como forma alternativa para la ecuación $E_\gamma = hv$.

2.5. Energía de reposo del electrón

Desde los fenómenos de transformación de pares, como par electrón-positrón en par-fotón ($e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$) sabemos que el cumplimiento del principio de conservación de la energía exige en estos procesos que la energía de cada uno de los fotones originados sea $hv=m_0c^2$. En efecto, el par e^-e^+ no tiene energía cinética inicial, puesto que se encuentra en reposo. Electrón y positrón poseen sus respectivas energías de reposo, que son iguales para los dos: $E_{0e^-} = E_{0e^+} = m_0 c^2$. Su transformación en dos fotones, según el principio de conservación de la energía, implica que la energía de masa en reposo de e^-e^+ tiene que transformarse en energía de radiación de $\gamma\gamma$. Por la ecuación de Planck, $E_\gamma=hv$, tenemos que:

$$E_{0e^-} + E_{0e^+} = E_\gamma + E_\gamma \longrightarrow m_0c^2 + m_0c^2 = h\nu + h\nu$$

De aquí se puede deducir (Eisberg y Resnik 1986, p.67) que la energía de cada fotón obtenido corresponde a la energía de reposo del electrón (o positrón), tal que, $m_0c^2=h\nu=0{,}51$ MeV, lo que corresponde a una longitud de onda λ=0,024 Å para cada fotón originado.

Podemos expresar esta conservación de la energía por medio de la ecuación (II):

$$E_0 = m_0c^2 = \frac{e^2}{\alpha \bar{\lambda}}$$

Si despejamos $\bar{\lambda}$ y calculamos su valor, el resultado equivale exactamente a la longitud de onda de Compton $\bar{\lambda}_0$ reducida para el electrón. Por lo tanto, la energía de reposo del electrón puede expresarse como:

(III) $$E_0 = \frac{e^2}{\alpha \bar{\lambda}_0}$$

Esta ecuación metriza la energía en la forma de metrización sin eliminabilidad, sin embargo nos permite determinar que, en última instancia la energía de reposo del electrón depende de su longitud de onda de Compton $\bar{\lambda}_0$, así como de α.

2.6. Velocidad del electrón en la 1ª órbita de Bohr

Podemos hallar la velocidad v_0 del electrón en la 1ª órbita de Bohr, a partir su momento angular (o de cantidad de movimiento) orbital L_0. Esta magnitud se determina a partir del radio r de la órbita que describe el objeto, su masa m y su velocidad v, según $L=mvr$. Calculémoslo para un electrón en la 1ª órbita de Bohr. En primer lugar, el radio de la 1ª órbita es el radio de Bohr a_0, la masa del objeto es la masa m_0 del electrón y su velocidad es v_0. En segundo lugar, según el segundo postulado de Bohr de la física cuántica antigua, sólo son posibles aquellas órbitas en las que el electrón tiene un momento angular que es múltiplo entero de $\hbar$, luego: $L_0=n\hbar$, y para la primera órbita $n=1$. Entonces, para la 1ª órbita de Bohr el momento angular orbital L_0 del electrón es:

(IV) $$L_0= m_0 v_0 a_0 =\hbar$$

El radio a_0 de la 1ª órbita de Bohr es: $a_0 = \hbar^2 / m_0 e^2$, que también se puede escribir como:

$$a_0 = \frac{\hbar \cdot \hbar}{m_0 e^2}$$

Si despejamos una de las $\hbar$ obtenemos:

(V) $$\hbar = \frac{a_0 m_0 e^2}{\hbar}$$

Igualando las ecuaciones (IV) y (V), resulta

$$m_0 v_0 a_0 = \frac{a_0 m_0 e^2}{\hbar}$$

y despejando v_0 se obtiene:

(VI) $$v_0 = \frac{e^2}{\hbar}$$

Efectivamente, la relación $e^2/\hbar$ tiene dimensiones de velocidad $[LT^{-1}]$, con lo cual v_0 es la velocidad del electrón en la 1ª órbita de Bohr. Simplificando (VI) por medio de la ecuación (I), se obtiene:

(VII) $$v_0 = \alpha c$$

que denota que v_0 depende de α. La velocidad del electrón en la 1ª órbita de Bohr es una 137-ava parte de la velocidad de la luz en el vacío.

2.7. Radio clásico del electrón

La ecuación que fija el valor numérico del radio clásico del electrón es: $r_0 = e^2 / E_0$. Sustituyendo E_0 por su equivalente energía de fotón (según ecuación III) obtenemos:

(VIII) $$r_0 = \alpha ƛ_0$$

Esta relación de proporcionalidad, como ya hemos comentado anteriormente, la deduce también Alvargonzález Cruz (1999, p.50) pero en la forma: $\lambda_0 = l_e 2\pi / \alpha$, desde la suposición de que r_0 es la unidad de longitud l_e, para un sistema natural de medida.

2.8. Radio de Bohr

La ecuación que fija el valor numérico del radio de Bohr es $a_0 = \hbar^2 / \left(m_0 e^2\right)$. Despejamos de (I) la carga eléctrica *al cuadrado*: $e^2 = \alpha\hbar c$. La sustituimos en la ecuación de a_0 y obtenemos:

$$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha c m_0}$$

Como $\hbar / \left(m_0 c\right) = ƛ_0$, entonces se obtiene la siguiente relación de proporcionalidad:

(IX) $$a_0 = \frac{ƛ_0}{\alpha}$$

que expresa que el radio a_0 de la primera órbita de Bohr es ~137 veces la longitud de onda de Compton reducida para el electrón.

2.9. Magnetón de Bohr

Habíamos obtenido en la Estructura MQ que el magnetón de Bohr $\mu_B = e\hbar / \left(2m_0 c\right)$ está metrizado como $M_4(\mu_B) = \delta M_5(\hbar)$, por lo que incumple la segunda regla del análisis magnitudinal.

Si tomamos de nuevo en consideración que $\hbar/(m_0 c) = \lambda\!\!\!^{-}_0$, entonces obtenemos:

(X) $$\mu_B = \frac{1}{2} e \lambda\!\!\!^{-}_0$$

El momento magnético orbital y de espín del electrón depende pues, en última instancia de su longitud de onda de Compton $\lambda\!\!\!^{-}_0$ reducida. Esta metrización, aunque interesante por su simplicidad, tampoco es coherente con el análisis magnitudinal, pues tiene la forma $M_4 = \delta M_0(e, \lambda\!\!\!^{-}_0)$, lo que evidencia que faltan tres grados de metrizaciones intermedias, que hay que incorporar a la ecuación (X). Procedamos a solventar estas deficiencias.

En la descripción de la interacción espín-órbita (p.143-146) establecíamos las relaciones entre la intensidad de corriente I originada por el electrón en movimiento alrededor del núcleo, el momento angular orbital L_0 del electrón y su momento magnético orbital μ_B (magnetón de Bohr), según:

$$\mu_B = \frac{\pi r^2}{c} I \qquad \text{y} \qquad \mu_B = \frac{e}{2cm_0} L_0$$

Teniendo en cuenta que $[[I]]=M_1$; y que L_0 (M_3) se puede expresar como $L_0 = p_0 \cdot r$, donde $[[p_0 = m_0 v]] = M_2$; tenemos ya todas las metrizaciones intermedias necesarias y podemos establecer la ecuación de definición para el magnetón de Bohr:

$$\mu_B = \frac{e}{2cm_0} L_0$$

2.10. Cantidad de movimiento del fotón

En la Estructura MQ, la cantidad de movimiento del fotón viene dada por la ecuación $p_\gamma = h/\lambda$, que tiene la forma de metrización $M_2(p_\gamma) = \delta M_5(\hbar)$. Para adecuar esta metrización a la forma que debe tener según el análisis magnitudinal, debemos seguir los siguientes pasos. Teniendo en cuenta que $h = E_\gamma / v$ tenemos:

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_\gamma}{v\lambda}$$

Tomando $v\lambda = c$ y suponiendo que E_γ pueda ser expresada a través de la ecuación de Einstein $E_\gamma = m_\gamma c$, donde m_γ sería la masa del fotón, en reposo igual a cero, podríamos escribir:

$$p_\gamma = \frac{m_\gamma c^2}{c} \quad \rightarrow \quad p_\gamma = m_\gamma c$$

Entonces $M_2(p_\gamma)=\delta M_1(c)$.

2.11. Longitud de onda de De Broglie

La ecuación que determina el valor numérico de la longitud de onda de De Broglie λ_b es $\lambda_b = h/(m_0 v)$. Supongamos que estamos tratando con la λ_b correspondiente al electrón que se encuentra en la 1ª órbita de Bohr. La velocidad que caracterizará a esa longitud de onda será la de la velocidad v_0 del electrón en dicha órbita. Luego podemos escribir: $\lambda_b = h/(m_0 v_0)$. Empleando la ecuación (VII) tenemos:

$$\lambda_b = \frac{h}{\alpha m_0 c}$$

Como $h/(m_0 c) = \lambda_0$, obtenemos:

(XI) $$\lambda_b = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

Dividiendo ambos lados por 2π y simplificando según la ecuación (IX), se obtiene:

(XII) $$\bar{\lambda}_b = a_0 \quad \text{ó} \quad \lambda_b = 2\pi a_0$$

Esta ecuación expresa un hecho fundamental: que el perímetro ($2\pi a_0$) de la primera orbita de Bohr es igual a una longitud de onda de De Broglie. Aunque ya sabíamos que en cada órbita electrónica λ_b cabe un número entero de veces y, en concreto, en la primera cabe una vez.

2.12. Energía de Rydberg

Recordamos la ecuación de la energía de Rydberg, que quebranta la segunda regla del análisis magnitudinal por tener la forma $M_4(E_R)=\delta M_5(\hbar)$:

$$E_R = \frac{e^4 m_0}{8\pi\varepsilon_0 \hbar^2}$$

En esta ecuación $1/(4\pi\varepsilon_0)$ es la constante K de la ley de Coulomb, que sólo aparece en el sistema SI. La dejamos dentro de la metrización como K:

(XIII)
$$E_R = K\frac{e^4 m_0}{2\hbar^2}$$

Por la ecuación (VI) sabemos que la velocidad del electrón en la primera órbita de Bohr es:

$$\upsilon_0 = \frac{e^2}{\hbar}$$

Sustituyendo esta velocidad en (XIII) obtenemos:

$$E_R = K\frac{1}{2}m_0\upsilon_0^2\,,$$

lo que nos permite verificar que la Energía de Rydberg tiene la forma de una energía cinética.

3. Reconstrucción de las relaciones de indeterminación de Heisenberg

Las relaciones de indeterminación de Heisenberg constituyen uno de los pilares de la mecánica cuántica. Determinan métricamente *hasta qué punto podemos hablar de una dualidad de aspectos ondulatorio y corpuscular de una partícula material o de un fotón*:

> Si se quiere establecer una correspondencia entre esas dos imágenes [ondulatoria y corpuscular], vincular, por ejemplo, la energía y la cantidad de movimiento [características corpusculares] de una partícula a la frecuencia y longitud de onda [características ondulatorias] que le es asociada, se llega a fórmulas [las relaciones de indeterminación] donde figura de modo esencial la constante *h* de Planck". (De Broglie 1951, p.139)

Ambas ecuaciones, indeterminación de la posición-cantidad de movimiento: $(\hbar/2) \leq \Delta x \Delta p_x$, e indeterminación de la energía-tiempo: $(\hbar/2) \leq \Delta E \Delta t$, cumplen las normas de los análisis dimensional y magnitudinal. Sin embargo, como hemos visto en el capítulo anterior, la cuantización de $\hbar$ implica el factor de proporcionalidad α (la constante de estructura fina). ¿Se puede constatar esa implicación dentro de las relaciones de indeterminación de Heisenberg? Veámoslo para el caso del electrón.

3.1. La presencia de α en la relación de indeterminación posición-cantidad de movimiento

Comencemos la búsqueda del factor α en la ecuación de indeterminación de la posición-cantidad de movimiento $(\hbar/2) \leq \Delta x \Delta p_x$ (para el electrón).

Por el postulado de De Broglie ($\lambda_b = h/p$), esta ecuación se puede expresar de la forma:

$$\frac{\hbar}{2} \leq \Delta x \Delta \frac{h}{\lambda_b}$$

Pero como $\hbar = h/2\pi$, simplificando resulta: $\frac{1}{4\pi} \leq \Delta x \Delta \frac{1}{\lambda_b}$

Por la ecuación (XI) obtenemos finalmente el resultado buscado:

$$\frac{1}{2\alpha} \leq \Delta x \Delta \frac{1}{ƛ_0}$$

Esta ecuación pone de manifiesto que la indeterminación de la posición del electrón depende, efectivamente de la constante de estructura fina, pero además, depende de *su longitud de onda de Compton reducida*.

A una expresión análoga, aunque ligeramente diferente, llega Alvargonzález Cruz (1999, p.49) pero conservando λ_b de la forma: $1 \leq \Delta l \Delta \left(1/\lambda_b\right)$.

3.2. La presencia de *α* en la relación de indeterminación tiempo-energía

Comenzamos la búsqueda del factor α en la ecuación de la indeterminación de la energía-tiempo $\left(\hbar/2\right) \leq \Delta E \Delta t$ (para el electrón).

Por la ecuación (III) escribimos: $\frac{\hbar}{2} \leq \Delta \frac{e^2}{\alpha ƛ_0} \Delta t$

Por la ecuación (I) obtenemos: $\frac{e^2}{2\alpha c} \leq \Delta \frac{e^2}{\alpha ƛ_0} \Delta t$

Simplificando obtenemos finalmente la relación buscada:

$$\frac{1}{2c} \leq \Delta t \Delta \frac{1}{ƛ_0}$$

La indeterminación del tiempo para el caso del electrón depende, según este resultado, de la velocidad de la luz en el vacío y, además, de *su longitud de onda de Compton reducida*.

3.3. Nuevas formas de las relaciones de indeterminación

Los resultados de las secciones precedentes nos muestran dos nuevas formas de las relaciones de indeterminación, caracterizadas por la longitud de onda de Compton reducida para el electrón:

$$\frac{1}{2\alpha} \leq \Delta x \Delta \frac{1}{ƛ_0} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2c} \leq \Delta t \Delta \frac{1}{ƛ_0}$$

Antes de pasar a interpretar los resultados obtenidos en esta búsqueda deductiva de proporcionalidad entre las principales magnitudes cuánticas referentes al electrón, vamos a estructurarlas en una nueva Estructura MQα, siguiendo las reglas del análisis magnitudinal.

4. Reconstrucción de la estructura métrica de la Mecánica Cuántica

4.1. La Estructura MQα

Regla	*Denominación magnitud*	*Ecuación*	*Dim.*
$M_0=\delta M_0$	*Radio clásico del electrón*	$r_0 = \alpha ƛ_0$	**L**
	Longitud de onda de Compton	$ƛ_0 = \frac{r_0}{\alpha}$	**L**
	Radio de Bohr (1ª órbita)	$a_0 = \frac{ƛ_0}{\alpha}$	**L**
	Longitud de onda de de Broglie	$\lambda_b = 2\pi a_0$	**L**
	radio nuclear	$R = r_0 \cdot A^{1/3}$	**L**
	radio orbitales	$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2$	**L**
	Indeterminación de la posición	$\frac{1}{2\alpha} \leq \Delta x \Delta \frac{1}{ƛ_0}$	**L^0**
$M_1=\delta M_0$	*Velocidad del electrón 1ª órbita de Bohr*	$\upsilon_0 = \alpha c$	**LT^{-1}**
	Indeterminación del tiempo	$\frac{1}{2c} \leq \Delta t \Delta \frac{1}{ƛ_0}$	**$L^{-1}T$**
$M_2=\delta M_1$	*cantidad de movimiento del electrón en 1ª órbita de Bohr*	$p_1 = m_0 \upsilon_0 = \alpha m_0 c$	**MLT^{-1}**
	cantidad de movimiento del fotón	$p_\gamma = m\lambda\nu = mc$	**MLT^{-1}**
$M_3=\delta M_2$	*Momento angular intrínseco o espín*	$L_S = \frac{1}{2}\hbar$	**ML^2T^{-1}**
	Momento angular orbital (1ª órbita de Bohr)	$L_0 = p_0 a_0 = \hbar$	**ML^2T^{-1}**
	potencial eléctrico del electrón	$V_0 = K\frac{e}{r_0}$	**ML^2T^{-2}**
$M_4=\delta M_3$	*Momento angular magnético o de espín*	$\mu_B = \frac{e}{2cm_0} L_0$	**ML^4T^{-2}**
	Energía potencial eléctrica	$E = \frac{e^2}{r_0} = eV_0$	**ML^2T^{-2}**
	Energía de Rydberg	$E_R = K\frac{1}{2} m_0 \upsilon_0^2$	**ML^2T^{-2}**
	energía efecto fotoeléctrico	$E_f = W + \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2$	**ML^2T^{-2}**
$M_5=\delta M_4$	*Cuanto de acción*	$h = \frac{e^2}{r_0 \nu_0} = \frac{E}{\nu_0} \Leftrightarrow \hbar = \frac{E}{\omega_0}$	**ML^2T^{-1}**

4.2. Comentarios a la Estructura MQα

La reconstrucción de la Estructura MQ por medio del análisis magnitudinal y tomando en consideración el coeficiente de proporcionalidad α ha proporcionado una nueva Estructura MQα con las siguientes características estructurales para la derivación por definición de sus conceptos métricos:

1. Las metrizaciones derivadas parten de las magnitudes base canónicas {MLT}, las cuales son conceptos indefinidos, unidimensionales y dimensionalmente fundamentales. Por lo tanto, se puede considerar la mecánica clásica una *teoría métricamente fundamental*.

2. *Ninguna metrización derivada quebranta las normas de los análisis dimensional y magnitudinal*, pues ninguna magnitud base aparece metrizada en forma derivada en el resto de la estructura (ningún recuadro con dimensiones está marcado en azul).

3. Ninguna metrización derivada es una metrización sin eliminabilidad. Por lo tanto, *no se han obviado metrizaciones intermedias* en ninguna metrización derivada (ningún recuadro con ecuación está marcado en amarillo).

4. La derivación por definición es continua a lo largo de toda la estructura, interrelacionando todos los conceptos métricos, desde las magnitudes base, hasta las de mayor grado de derivación. Esto permite concluir que la estructura métrica MQα ahora sí es *interpretable*, pues el significado físico de cada una de las magnitudes derivadas puede ser generado a partir de los conceptos métricos involucrados en su metrización.

En definitiva, la nueva estructura métrica de la mecánica cuántica no sólo cuantifica, sino también conceptualiza de forma métricamente coherente las propiedades físicas de su ámbito fenoménico concreto de aplicación.

4.2.1. Respecto de la precuantización *de ħ*

El cuanto de acción $\hbar$, aún siendo una característica muy importante a nivel cuántico, no es una magnitud métricamente fundamental y, por consiguiente, su significado físico es función de magnitudes y relaciones de magnitudes situados en niveles de derivación anteriores. Esto es, *la existencia de un cuanto de acción en el micromundo debe tener una explicación o justificación en términos de propiedades físicas más fundamentales* (lo que ya se deducía de la Estructura MQ). O, dicho de otra forma: a la cuantización de las magnitudes de acción debe subyacer una *precuantización* debida a otros conceptos métricos más fundamentales.

Como ponen de manifiesto tanto la metrización por definición de $\hbar$, que se dedujo en el capítulo V, como las alternativas a las relaciones de indeterminación que hemos deducido en éste capítulo (p.174-175), *en el caso de la cuantización de la energía del electrón* el concepto métrico del que depende $\hbar$ es, en última instancia, su longitud de onda de Compton (λ_0). De hecho, la equivalencia entre las ecuaciones $\hbar = e^2/\alpha c$ y $\hbar = E/2\pi\nu$ pone de manifiesto que la longitud de onda implicada en el cuanto de acción $\hbar$ es exactamente λ_0:

$$\hbar = \frac{e^2}{\alpha c} = \frac{e^2}{\alpha\lambda_0\nu_0} \xrightarrow{\alpha\lambda_0 = 2\pi r_0} \hbar = \frac{e^2}{2\pi r_0\nu_0} \xrightarrow{E = e^2/r_0} \hbar = \frac{E}{2\pi\nu_0}$$

Así pues, se puede concluir que *la energía del electrón*, además de estar *cuantizada* (como cualquier otra energía) por la constante $\hbar$ de Planck, se encuentra *precuantizada* por su longitud de onda de Compton (λ_0), de la que deriva la cuantización de $\hbar$.

Análogamente, se puede llegar a la misma conclusión de precuantización para el caso de cualquier partícula con masa en reposo distinta de cero:

Deducción:

La energía en reposo de toda partícula con masa $m_{partícula} \neq 0$ cumple la ecuación:

$$E_{partícula} = m_{partícula} \cdot c^2$$

Esta energía está cuantizada por la constante *h* de Planck según la ecuación:

$$h = \frac{E_{partícula}}{v}$$

Tomando la ecuación general de la longitud de onda de Compton λ_C para una partícula con masa $m_{partícula}$ en reposo distinta de cero:

$$\lambda_{C_{partícula}} = \frac{h}{c \cdot m_{partícula}}$$

la ecuación que tiene que satisfacer dicha partícula para que su energía $E_{partícula}$ esté cuantizada por *h* es:

$$h = \lambda_{C_{partícula}} \cdot m_{partícula} \cdot c$$

ó (considerando $E_{partícula} = m_{partícula} \cdot c^2$ y $m_{partícula} \cdot c = E_{partícula} / c$):

$$h = \frac{\lambda_{C_{partícula}} \cdot E_{partícula}}{c}$$

Teniendo en cuenta que *c* puede considerarse como $c = \lambda_{C_{partícula}} \cdot v$, la ecuación anterior se convierte en la ecuación de Planck:

$$h = \frac{E_{partícula}}{v}$$

Por lo tanto, la energía $E_{partícula}$ de una partícula con masa en reposo distinta de cero, estaría *cuantizada* por *h* (según la ecuación de Planck $E = hv$) y *precuantizada* por su longitud de onda de Compton característica ($\lambda_{C_{partícula}}$).

Este hecho quedaría además reflejado en las relaciones de indeterminación correspondientes a la partícula con masa en cuestión, en la forma siguiente:

indeterminación de la posición: $$\frac{1}{2\alpha} \leq \Delta x \Delta \frac{1}{\lambdabar_{C_{partícula}}}$$

indeterminación del tiempo: $$\frac{1}{2c} \leq \Delta t \Delta \frac{1}{\lambdabar_{C_{partícula}}}$$

donde $\lambdabar_C$ sería la longitud reducida de Compton según $\lambdabar_C = \lambda_C / 2\pi$.

A continuación me gustaría comentar las implicaciones que parecen derivarse de algunas ecuaciones de la Estructura MQα.

4.2.2. Respecto de las proporcionalidades entre radios

A la escala de la 1ª órbita de Bohr hay tres radios que conciernen al electrón: el radio de la 1ª órbita de Bohr a_0, el radio que se puede formar en base a la longitud de onda de Compton $\lambdabar_0$ para el electrón, y el radio clásico del electrón r_0. De acuerdo con la nueva metrización de los tres radios, en la Estructura MQα todos guardan una proporcionalidad en función de *α*. Así:

1. El radio de la primera órbita de Bohr a_0 es ~137 veces el radio $\lambdabar_0$, pues la proporcionalidad entre ambos es:

$$\frac{\lambdabar_0}{a_0} = \alpha \qquad \text{(i)}$$

2. El radio que se puede formar en base a la longitud de onda de Compton $\lambdabar_0$ para el electrón es ~137 veces el radio clásico r_0 del electrón, pues la proporcionalidad entre ambos también es:

$$\frac{r_0}{\lambdabar_0} = \alpha \qquad \text{(ii)}$$

Luego a nivel de la primera órbita dentro de un átomo tenemos tres longitudes fundamentales, que son tres radios ($r_0, \lambdabar_0, a_0$), cuya relación de proporcionalidad es la misma: α. Esto se puede interpretar como una *pauta* de proporcionalidad seguida por la naturaleza a nivel subatómico.

Esta pauta se extiende a la velocidad v_0 del electrón, pues en la 1ª órbita de Bohr v_0 es ~137 veces menor que la velocidad de la luz c, ya que la proporcionalidad entre ambas también es α:

$$\frac{v_0}{c} = \alpha$$

Son pues unos datos muy interesantes, que muestran una misma *pauta* de proporcionalidad entre determinadas propiedades de electrones y fotones. Recalcamos que estos datos se obtienen gracias a que las ecuaciones de la Estructura MQα son susceptibles de interpretación, por estar metrizadas de forma adecuada, con el resultado de que los significados físicos de las magnitudes metrizadas pueden inferirse de las magnitudes introductoras.

3. De las proporcionalidades (i) y (ii) se deduce que la relación entre el perímetro de la 1ª órbita de Bohr ($2\pi a_0$) y el perímetro de la esfera de carga eléctrica del electrón ($2\pi r_0$) es α^2:

$$\frac{2\pi r_0}{2\pi a_0} = \alpha^2 \qquad \text{(iii)}$$

Como vamos a ver a continuación, la relación entre estos dos perímetros ($2\pi r_0$, $2\pi a_0$) y sus correspondientes radios (r_0, a_0) es, precisamente, la que caracteriza la estructura fina de la energía de los átomos.

4.2.3. Respecto de la estructura fina de los átomos

Recordemos la estructura fina de los átomos, debida a la interacción espín-órbita del electrón. Los niveles de energía de un átomo hidrogenoide se determinan por la ecuación (9):

$$E_n = -\frac{Z^2}{2}\alpha^2 E_0 \frac{1}{n^2}$$

donde E_n es la energía del átomo y E_0 es la energía de reposo del electrón (Z es el número de protones y n el número cuántico principal). Decíamos que, esta ecuación deja claro que α^2 caracteriza la estructura fina de la energía de los átomos, pues hace de coeficiente de proporcionalidad entre la energía del átomo y la energía del electrón orbitando alrededor del núcleo, de modo que $E_n \sim \alpha^2 E_0$. Según la ecuación (iii) se puede interpretar que la proporcionalidad $E_n \sim \alpha^2 E_0$ es debida a *la proporcionalidad entre el radio clásico del electrón r_0 y el radio de la primera órbita de Bohr a_0*. Si tomamos la ecuación (9) y tenemos en cuenta de nuevo que:

> "El radio clásico del electrón tiene el significado del radio de una esfera cargada con carga e (distribuida esféricamente de forma simétrica), siendo la energía del campo electrostático de dicha esfera $E = \gamma e^2 / r_0$ (γ es un coeficiente ~1, que caracteriza la distribución de la carga por el radio) igual a la energía de reposo del electrón m_0c^2". (Prójorov 1998, t.2, p. 372)

Entonces,

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}\alpha^2 E_0 = -\frac{Z^2}{2n^2}\alpha^2\left(\gamma\frac{e^2}{r_0}\right)$$

Con lo cual, se puede decir ahora que

$$E_n \sim \gamma e^2 \frac{\alpha^2}{r_0} \qquad \text{(iv)}$$

Si, por otro lado, tomamos la ecuación (8):

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2},$$

vemos que, reordenando las magnitudes resulta:

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}\frac{e^2 m_0}{\hbar^2}e^2$$

donde, teniendo en cuenta que $a_0 = \hbar^2 / (m_0 e^2)$, obtenemos finalmente:

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}\frac{1}{a_0}e^2$$

Consecuentemente, se puede decir que

$$E_n \sim e^2 \frac{1}{a_0} \qquad \text{(v)}$$

Si comparamos las expresiones (iv) y (v) se hace evidente que la interacción espín-órbita de la que depende la energía del átomo hidrogenoide *depende de la relación entre el radio a_0 de la 1ª órbita de Bohr y el radio clásico r_0 del electrón*, a través de α^2, pues en las expresiones (iv) y (v) resulta que $\alpha^2/r_0 = 1/a_0$, lo cual es lo mismo que expresaba la ecuación (iii), a saber: $2\pi r_0/(2\pi a_0) = \alpha^2$ ó $r_0 = \alpha^2 a_0$.

En definitiva, *α no es una constante más, sino un factor fundamental de proporcionalidad que rige el funcionamiento del mundo subatómico*.

4.2.4. Respecto de energía de un fotón

Según la ecuación (II), la energía de reposo del electrón equivale a:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{e^2}{\alpha \lambdabar_0}$$

Sabemos del fenómeno de transformación fotón - par (electrón-positrón) que un fotón con energía mínima $E_\gamma = h\nu = 2m_0 c^2$ puede originar un par. La energía de reposo del electrón originado puede expresarse como: $E_0 = h\nu = hc/\lambda_0$, lo que implica que la masa m_0 de las partículas originadas está también determinada por λ_0:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} \qquad \rightarrow \qquad m_0 = \frac{h}{\lambda_0 c}$$

La relación que hemos obtenido con la nueva metrización de E_γ (ec. II) confirma que el fotón que origina el par está determinado por λ_0, pues:

$$E_\gamma = 2m_0 c^2 = 2\frac{e^2}{\alpha \lambdabar_0}$$

Y, de forma equivalente, cada partícula originada sigue determinada por λ_0 pues su energía de reposo es:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{e^2}{\alpha \lambdabar_0}$$

Esto parece estar relacionado con la característica de *precuantización* que habíamos otorgado a λ_0, pues, tanto el fotón que origina el par, como la partícula (electrón) y antipartícula (positrón) originadas, están determinadas por la longitud de onda de Compton para el electrón (λ_0).

5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos realizado la reconstrucción, por medio del factor α, de la metrización derivada de las magnitudes mecánico-cuánticas que quebrantaban las normas de los análisis dimensional y magnitudinal en la Estructura MQ (capítulo IV).

Esta reconstrucción ha permitido reestablecer las conexiones métrico-operacionales entre las magnitudes mecánico-cuánticas, posibilitando la interpretación de su significado físico a partir de su ecuación de metrización. Consecuentemente, la nueva Estructura MQα sí es *interpretable* (en el sentido indicado en el capítulo I, p.49).

Asimismo por medio del análisis magnitudinal hemos determinado que, para el caso del electrón, la constante de la que depende (y se deriva métricamente) la cuantización de la energía (expresada por el cuanto de acción $\hbar$) es la longitud de onda de Compton para el electrón λ_0.

Esta dependencia métrica de $\hbar$ en función de λ_0 permite expresar las relaciones de indeterminación de Heisenberg en función de la longitud de onda de Compton para el electrón (λ_0), con lo que la indeterminación debida a $\hbar$ puede ser reducida a una indeterminación debida a λ_0, que se convertiría en un factor de *precuantización* de la energía de la partícula.

Este último resultado plantea la posibilidad de considerar la longitud de onda de Compton para el electrón como una unidad de longitud *fundamental*, esto es una longitud determinante para los fenómenos y objetos a escala cuántica. Precisamente, en la tercera y última parte de este trabajo, tomando λ_0 como longitud fundamental, voy a elaborar un sistema *natural* y *fundamental* de unidades de medida y estudiaré sus implicaciones físico-filosóficas.

TERCERA PARTE

Sistema natural fundamental de unidades SF.

La unicidad del cuanto de acción.

Capítulo VII

Sistema natural fundamental de unidades SF.
La unicidad del cuanto de acción

Esquema del capítulo

1. **Introducción.**
2. **Aspecto heurístico de los sistemas naturales de unidades.**
   El patrón que se toma como unidad en un sistema natural de unidades, no es arbitrario: corresponde a alguna propiedad de la naturaleza. De ahí, que una unidad hallada en función de las naturales pueda ser heurísticamente relevante.
3. **Sistema natural de unidades de medida métricamente fundamentales (SF).**
   En base a las constantes que por medio del análisis magnitudinal se han determinado como métricamente fundamentales, se propone un nuevo sistema natural de unidades basado en la longitud de onda de Compton λ_0 para el electrón.
   - **3.1. Unidades base de medida.**
   - **3.2. Unidades derivadas de medida.**
4. **La unicidad del cuanto de acción y su determinación en el sistema SF.**
   El cuanto de acción $\hbar$ es la unidad mínima indivisible de energía. ¿Cómo se relaciona esto con la dependencia de la cuantización de $\hbar$ respecto de la precuantización representada por λ_0? El cuanto de acción $\hbar$ expresado en el sistema SF arroja el valor numérico unidad, lo que puede tener implicaciones filosóficas a la hora de interpretar la unicidad de $\hbar$.
5. **Tabla comparativa: magnitudes expresadas en los sistemas *cgs* y SF.**
   La notable simplificación de las ecuaciones mecánico-cuánticas, expresadas en el sistema SF se puede apreciar en una tabla comparativa entre los sistemas *cgs* y SF.
6. **Conclusiones del capítulo.**
   Tomando la longitud de onda de Compton λ_C de una partícula material, como unidad de longitud en un sistema natural fundamental SF (como el propuesto para el electrón), siempre se obtendrá h=1, con lo que se concluye la unicidad del cuanto de acción para toda partícula material.

1. Introducción

En el capítulo anterior, por medio del análisis magnitudinal se ha constatado que, para el caso del electrón, la longitud de onda de Compton (λ_0) es la constante de la que se deriva métricamente la cuantización de la energía representada por el cuanto de acción unidad $\hbar$. Asimismo, en función de esta dependencia métrica de $\hbar$ y λ_0 se han expresado las relaciones de indeterminación de Heisenberg en función de $\bar{\lambda}_0$ reduciendo, de este modo, la indeterminación debida a $\hbar$ a una indeterminación debida a $\bar{\lambda}_0$. ¿Cómo interpretar físicamente esta dependencia métrico-operacional entre $\hbar$ y λ_0?

Una herramienta metodológica que permite evidenciar las relaciones entre constantes fundamentales son los sistemas naturales (fundamentales o universales) de unidades de medida. En estos sistemas son tomadas como unidades de medida ciertas constantes universales (p.e. la velocidad de la luz c) a las que se les asigna el valor unidad (p.e. $c=1m/s$) para determinar en función de ellas las demás magnitudes y/o constantes (p.e. la longitud, el tiempo, etc.). Es ejemplo más destacado de este tipo de sistema lo componen las denominadas *unidades de Planck* (*longitud* l_p, *tiempo* t_p, *masa* m_p) determinadas a partir de la constante $\hbar$ de Planck, la velocidad de la luz c y la constante gravitacional G (entre otras). Las unidades Maxwell, las unidades de Stoney, o las unidades atómicas de Hartree, son otro ejemplo de sistemas naturales de unidades. El empleo de este tipo de unidades de medida simplifica notablemente (en comparación con otros sistemas, como el internacional SI o el cegesimal *cgs*) las ecuaciones de manejo de ciertos fenómenos. Pero además, los sistemas naturales de unidades a veces juegan un papel heurístico dentro de las teorías. Como vamos a ver, brevemente, éste es el caso de las unidades de Planck.

Si consideramos la longitud de onda de Compton para el electrón (λ_0) como una *unidad de longitud fundamental*, esto es, una longitud determinante para los fenómenos y objetos a escala cuántica, podemos elaborar, en base a ella, un sistema natural de unidades y ver cuál es exactamente *la relación que guarda $\hbar$ con* λ_0. Este sistema, que denominaré Sistema Fundamental (SF), desde un punto de vista metodológico, cumplirá las normas de los análisis dimensional y magnitudinal (en el mismo sentido que las estructuras MC, EM y MQα) y, desde un punto de vista filosófico, intentará ofrecer un argumento más para la defensa de la no fundamentalidad del cuanto acción $\hbar$ y además una interpretación para su unicidad.

2. Valor heurístico de los sistemas naturales de unidades[59].

Maxwell, en el *Adress to the Mathematical and Physical Section of the British Association for Advancement of Science* (Liverpool 1870) señaló que "Si queremos obtener patrones estándar de longitud, tiempo y masa, que sean absolutamente permanentes, debemos buscarlos no en las dimensiones, el movimiento o la masa de nuestro planeta, sino en la longitud de onda, el período de la vibración y la masa absoluta de las imperecederas, inalterables y perfectamente semejantes moléculas". Con estas palabras, Maxwell sugería adoptar en física un sistema natural de unidades de medida. Tres años después, en el primer capítulo de su *Treatise on Electricity and Magnetism*, proponía dos sistemas "universales". Sus dos sistemas fueron seguidos de otros, todos expuestos en la tabla a continuación:

[59] Tema tratado por mí en el *V Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España* (Granada, 29 noviembre- 1 diciembre 2006), en la comunicación "Unidades naturales de medida: de la longitud de Planck a los efectos gravitacionales cuánticos".

	unidad de velocidad	unidad de acción	unidad de carga	unidad de masa	coeficientes en leyes	unidad de longitud
J.C.Maxwell (1870)	c			m_x		λ_{Na}
J.C.Maxwell (1873)	c				$G=1$	λ_{Na}
G.J.Stoney (1874)	c		e		$G=1$ $k_m=1$	l_s
M.Planck (1899)	c	$\hbar$			$G=1$	l_p
Sistema Electrónico	c		e	m_0	$K=1$	r_0
D.Hartree (1927)		$\hbar$	e	m_0	$K=1$	a_0
A.Ruark (1931)	c			m_0	$K=1$	a_0
A.Ruark (1931)	c	$\hbar$		m_0	$K=1$	$\bar{\lambda}_0$
U.Stille (1949)	c	$\hbar$	e	m_p		$\bar{\lambda}_{Cp}$
A.Cook (1972)	c	h	e	m_0		$\bar{\lambda}_0$

En la tabla: c es velocidad de la luz en el vacío, $\hbar$ la constante de Planck,
e la carga eléctrica del electrón, m_x la masa de una molécula x,
G la constante gravitacional, K la constante eléctrica, k_m la constante magnética,
m_0 y m_p las masas del electrón y del protón, λ_{Na} longitud de onda espectral del sodio,
l_s y l_p longitud de Stoney y de Planck respectivamente,
r_0 el radio clásico del electrón, a_0 el radio de la primera órbita de Bohr,
$\bar{\lambda}_0$ y $\bar{\lambda}_{Cp}$ longitud de onda de Compton para el electrón y el protón respectivamente.

A parte de la función metodológica de tratamiento simplificado de datos, se puede atribuir a los sistemas naturales de unidades una función heurística. Tomemos como ejemplo *las unidades de Planck*. Max Planck propuso (1899, *S.-B. Preuss. Akad.Wiss.*, S.479-480) un sistema natural de unidades basado en un total de cinco constantes universales, a saber:

la velocidad de la luz en el vacío	c	LT^{-1}
constante de gravitación	G	$M^{-1}L^{-3}T^{2}$
cuanto de acción (constante de Planck reducida $\hbar=h/2\pi$)	$\hbar$	$ML^{2}T^{-1}$
constante de la ley de Coulomb (ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío)	$K=1/4\pi\varepsilon_0$	$Q^{-1}ML^{-3}T^{2}$
constante de Boltzmann (R es la constante de los gases y N_A el número de Avogadro)	$k=R/N_A$	$ML^{2}T^{-2}K^{-1}$

Por medio del análisis dimensional, se derivan de estas cinco constantes cinco magnitudes consideradas fundamentales en la naturaleza:

Tiempo de Planck	$t_p = \sqrt{\hbar G / c^5}$
Longitud de Planck	$l_p = c \cdot t_p = \sqrt{\hbar G / c^3}$
Masa de Planck	$m_p = \sqrt{\hbar c / G}$
Carga de Planck	$q_p = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$
Temperatura de Planck	$T_p = m_p c^2 / k = \sqrt{\hbar c^5 / G k^2}$

Es razonable suponer que los cinco valores constantes de estas magnitudes, al ser obtenidos a partir de constantes universales, pueden representar o referirse a propiedades físicas significativas de la naturaleza: propiedades que permanecen constantes dentro de la estructura física de determinados fenómenos. ¿Cuáles pueden ser esas propiedades significativas?

Por ejemplo, de estas cinco unidades naturales de Planck, la unidad de longitud l_p se ha convertido en fundamento de una característica física hipotética del espacio-tiempo: su posible discontinuidad o cuantificación a escala subatómica. Las *divergencias* en electrodinámica cuántica, como comentamos en el capítulo V, arrojan valores infinitos para magnitudes con valor experimentalmente comprobado como finito, como por ejemplo la masa y la carga del electrón. Las sospechas sobre el por qué de tales resultados recaen, precisamente, sobre la concepción de la naturaleza del espacio-tiempo a escala subatómica, que subyace al método de las perturbaciones; en éste se considera posibles los puntos espaciales superpuestos (con distancia cero), esto es: se emplea la noción de un espacio-tiempo continuo. La solución a los problemas que se derivan de la aplicación del método de las perturbaciones podría estar en la *cuantificación* del espacio-tiempo a escala subatómica. Y aquí es donde entran en juego y se entrelazan la longitud de Planck y el campo gravitatorio.

Las dimensiones de la constante gravitacional G ponen de manifiesto que esta constante puede componerse a partir de una magnitud con dimensiones de velocidad υ, otra con dimensiones de acción S y una longitud l:

$$[G]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^{2} \longrightarrow [G]=\left[\frac{l^2\upsilon^3}{S}\right]=\frac{(\mathrm{L}^2)(\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-3})}{(\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1})}=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^{2}$$

Numéricamente se comprueba que, efectivamente, el valor de G se puede obtener a partir de la velocidad de la luz c, la constante $\hbar$ de Planck y el valor de cierta longitud elevado al cuadrado. Si se despeja esa longitud se obtiene un valor, que es el que recibe el nombre de *longitud de Planck*: $l_p=\sqrt{\hbar G/c^3}$. Se desprende pues del análisis dimensional que, cuando el radio de la curvatura de espacio-tiempo toma el valor de l_p, los efectos cuánticos en la gravitación podrían resultar determinantes y producirse una variación de las propiedades geométricas del espacio-tiempo (fluctuaciones métricas).

En este sentido, la unidad natural de longitud l_p parece representar el punto necesario de unión entre la teoría cuántica y la teoría de la relatividad general, teorías por ahora irreconciliables; la teoría de la relatividad general no es una teoría “cuántica”, esto es, no contempla la *cuantización* de ningún parámetro. No obstante, por la simplicidad que se persigue en física a través de la creciente unificación de las teorías, se considera que el campo gravitatorio deberá supeditarse finalmente a las leyes cuánticas, de la misma manera que lo hizo el campo electromagnético. El estado actual de la teoría de la relatividad general es análogo al de la teoría electromagnética de Maxwell antes de la cuantización de la energía introducida por Planck. Introducir la cuantización en la teoría de la relatividad general consistiría en aplicar la teoría cuántica a la gravedad, esto es, cuantizar el campo gravitatorio, lo que implicaría reducir las ondas gravitacionales a un flujo de cuantos de campo (bosones de intercambio), los buscados gravitones (con masa de reposo =0 y espín $=2\hbar$).

El caso de la longitud de Planck constituye un ejemplo de la función heurística que puede desempeñar un sistema de unidades naturales de medida, siempre que esté basado en constantes universales.

3. Sistema natural de unidades de medida métricamente fundamentales (SF).

El sistema SF va a tomar, como patrones base de medida, constantes que, de acuerdo con el análisis magnitudinal, han sido determinadas como métricamente fundamentales, en concreto: la *unidad* de longitud será la longitud de onda de Compton para el electrón λ_0, la *unidad* de tiempo será el tiempo t_0 según $t_0 = \lambda_0/c$, y la *unidad* de masa será la mínima masa estable en reposo conocida, la masa m_0 del electrón. Asimismo, para representar la carga eléctrica, establecemos como unidad natural de medida la carga eléctrica e de electrón. La base dimensional para el sistema SF será {MLTQ}. En resumen, el sistema SF:

- Parte de la base magnitudinal de magnitudes canónicas {MLTQ}. Todo sistema generado en base a ellas cumple las normas de los análisis dimensional y magnitudinal.
- Cumple un *criterio de fundamentalidad métrica*, según el cual son métricamente fundamentales aquellas magnitudes físicas que:

  1) son conceptos métricos *indefinidos* y, por lo tanto, no existe ninguna metrización por definición en la que estos conceptos sean definidos en función de otros conceptos;

  2) son *unidimensionales* y además *dimensionalmente fundamentales*, esto es, que correspondan a un concepto métrico indefinido.

Para simplificar, y como se hace en estos casos, no voy a dar nombre a las unidades de medida correspondientes a cada magnitud expresada en el sistema SF, y sólo indicaré sus dimensiones entre paréntesis cuadrados. Las ecuaciones de las magnitudes a traducir al SF serán tomadas del capítulo VI y se indicará entre paréntesis su número romano correspondiente.

3.1. Unidades base de medida.

Unidad de longitud: λ_0=2,4263·10^{-10}*cm*= 1 [L]

Unidad de tiempo: $t_0= \lambda_0/c$= 8,093·10^{-21}*s*= 1 [T]

Unidad de masa: m_0=9,109·10^{-28}*g*= 1 [M]

Para las metrizaciones donde intervenga la carga eléctrica se considerará:

Unidad de carga: e=4,803 × 10^{-10} *Fr* [60]= 1 [Q]

3.2. Unidades derivadas de medida.

A partir de las unidades establecidas como base vamos a expresar las relaciones magnitudinales de una muestra de magnitudes derivadas.

3.2.1. Unidad de velocidad. Velocidad de la luz:

$$c=\frac{\lambda_0}{t_0}=\frac{1[\mathrm{L}]}{1[\mathrm{T}]}=1\ [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad \Rightarrow \qquad c=1\ [\mathrm{LT}^{-1}]$$

En el SF, la velocidad de la luz tiene el valor unidad.

3.2.2. Radio clásico del electrón (ecuación VIII):

$$r_0=\alpha\frac{\lambda_0}{2\pi}=\alpha\frac{1[\mathrm{L}]}{2\pi}=\frac{\alpha}{2\pi}[\mathrm{L}] \qquad \Rightarrow \qquad r_0=\frac{\alpha}{2\pi}\ [\mathrm{L}]$$

En el SF, el radio clásico del electrón tiene el valor numérico $\alpha/2\pi$, donde 2π representa un factor de forma que relaciona un radio con la circunferencia que se puede trazar con él, y α es la relación que guarda r_0 con λ_0, según $r_0=\alpha\bar{\lambda}_0$.

---

[60] El valor de la carga eléctrica del electrón esta expresado en la unidad de electricidad del sistema *cgs*, que es el *Franklin (Fr)*.

3.2.3. Radio de Bohr (ecuación IX):

$$a_0 = \frac{\lambdabar_0}{\alpha} = \frac{\lambda_0}{\alpha 2\pi} = \frac{1[\mathrm{L}]}{\alpha 2\pi} = \frac{1}{\alpha 2\pi}[\mathrm{L}] \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = \frac{1}{\alpha 2\pi}\ [\mathrm{L}]$$

En el SF, el radio de Bohr tiene el valor numérico de $1/\alpha 2\pi$, donde 2π representa un factor de forma que relaciona un radio con la circunferencia que se puede trazar con él, y α es la relación inversamente proporcional que guarda a_0 con λ_0, según $a_0 = \lambdabar_0/\alpha$.

3.2.4. Velocidad del electrón en la primera órbita (ecuación VII):

$$v_0 = \alpha c = \alpha \cdot 1[\mathrm{LT}^{-1}] = \alpha \cdot [\mathrm{LT}^{-1}] \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \alpha\ [\mathrm{LT}^{-1}]$$

Según el SF, la velocidad del electrón en la 1ª órbita de Bohr tiene el valor numérico de α, con lo que es, aproximadamente, 137 veces menor que la velocidad de la luz.

3.2.5. Energía del electrón:

$$E_0 = m_0 c^2 = 1[\mathrm{M}] \cdot 1^2\ [\mathrm{LT}^{-1}]^2 = 1[\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}] \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = 1[\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}]$$

La energía del electrón y la del fotón que lo origina (en un fenómeno de transformación de pares) es la *unidad de energía* en el sistema de unidades fundamentales.

3.2.6. Magnetón de Bohr (ecuación X):

De acuerdo con la ecuación (X):

$$\mu_B = \frac{1}{2} e \lambdabar_0 = \frac{1}{4\pi} e \lambda_0$$

Expresando e y λ_0 en unidades del sistema SF obtenemos:

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi} 1 \cdot [\mathrm{Q}] \cdot 1[\mathrm{L}] \qquad \Rightarrow \qquad \mu_B = \frac{1}{4\pi}\ [\mathrm{LQ}]$$

Según el SF, el magnetón de Bohr tiene el valor numérico de ½ de $1/2\pi$, donde 2π representa un factor de forma que relaciona un radio con la circunferencia que se puede trazar con él.

3.2.7. Cantidad de movimiento del electrón en la 1ª órbita de Bohr

La cantidad de movimiento del electrón con masa m_0, en la primera órbita de Bohr es:

$$p_1 = m_0 v_0 = \alpha m_0 c$$

Expresado en unidades fundamentales:

$$p_1 = \alpha m_0 c = \alpha \cdot 1[\mathrm{M}] \cdot 1[\mathrm{LT}^{-1}] \quad \Rightarrow \quad p_1 = \alpha[\mathrm{MLT}^{-1}]$$

3.2.8. Longitud de onda de De Broglie

Según la ecuación (XI):

$$\lambda_b = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

Expresado en unidades fundamentales:

$$\lambda_b = \frac{\lambda_0}{\alpha} = \frac{1[\mathrm{L}]}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \lambda_b = \frac{1}{\alpha}[\mathrm{L}]$$

3.2.9. Energía de Rydberg

Según la ecuación obtenida en la p.173:

$$E_R = K \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

Según el SF, la velocidad del electrón en la 1ª órbita de Bohr es $v_0 = \alpha$ $[\mathrm{LT}^{-1}]$, por lo que E_R expresado en unidades fundamentales es (la constante K desaparece porque no estamos ya en el sistema SI):

$$E_R = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} 1[\mathrm{M}] \cdot \alpha^2 [\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}] \quad \Rightarrow \quad E_R = \frac{\alpha^2}{2}[\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}]$$

Queda, pues, determinar el valor numérico del elemento central de las metrizaciones mecánico-cuánticas: el concepto métrico de cuanto de acción.

4. La unicidad del cuanto de acción y su determinación en el sistema SF

Recordemos brevemente algunos comentarios sobre la indivisibilidad del cuanto de acción. De Broglie (1951, p.135) comenta:

> "La acción se comporta como si estuviera formada por partes indivisibles, verdaderos átomos, cuya magnitud, siempre la misma, está expresada por la constante *h* de Planck."

Bohr (1988, p.152):

> "El postulado de la indivisibilidad del cuanto de acción es un elemento por completo extraño a las ideas clásicas, un elemento que exige, en el caso de las medidas, que la interacción entre el objeto y el instrumento de medida sea finita."

> "La esencia de la teoría cuántica está recogida en el postulado cuántico que atribuye una discontinuidad, o mejor, una indivisibilidad básica a todo proceso atómico, extraña por completo a las teorías clásicas y simbolizada por el cuanto de acción de Planck." (*Íbidem*, p.99)

De estos comentarios recojo dos ideas fundamentales respecto del cuanto de acción. *Primera* (expresada por De Broglie): todo proceso atómico y subatómico se caracteriza por una invisibilidad básica. Y *segunda* (expresada por Bohr): esta indivisibilidad exige que la interacción entre objeto y aparato de medida sea finito.

En efecto, para el momento angular orbital del electrón: $L= m_0 \upsilon_0 a_0=\hbar$

Hemos hallado que $a_0 = \dfrac{1}{\alpha 2\pi}$ [L] y $\upsilon_0=\alpha$ [LT^{-1}].

Entonces: $L = m_0 \upsilon_0 a_0 = 1\left[\mathrm{M}\right]\cdot\alpha\left[\mathrm{LT^{-1}}\right]\cdot\dfrac{1}{\alpha 2\pi}\left[\mathrm{L}\right] = \dfrac{1}{2\pi}\left[\mathrm{ML^2T^{-1}}\right]$

Por consiguiente: $L = \hbar = \dfrac{1}{2\pi}\left[\mathrm{ML^2T^{-1}}\right] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hbar = \dfrac{1}{2\pi}}$ [ML^2T^{-1}]

De donde: $\boldsymbol{h=1}$ [ML^2T^{-1}]

En unidades fundamentales el valor numérico de la constante h de Planck es la unidad, *confirmando su carácter de átomo indivisible de acción*.

Deducido de otra forma, para $\hbar$ en la cuantización de la energía: tomamos la expresión $\hbar = e^2 / \alpha c$, expresamos la velocidad de la luz a través de la longitud de onda de Compton según $c = \lambda_0 v_0$, y expresamos el cuadrado de la carga e como $e^2 = E_0 \cdot r_0$, donde E_0 es la energía de reposo del electrón (E_0=1[ML^{2}T^{-2}]). Entonces, sustituyendo por las unidades fundamentales se ve inmediatamente que $\hbar$ *es función de* λ_0:

$$\hbar = \frac{E_0 r_0}{\alpha \lambda_0 v_0} = \frac{1[\mathrm{ML^2T^{-2}}] \cdot \alpha / 2\pi [\mathrm{L}]}{\alpha \cdot 1[\mathrm{L}] \cdot 1[\mathrm{T^{-1}}]} = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{ML^2T^{-1}}] \qquad (17)$$

En el SF, el cuanto de acción $\hbar$ tiene el valor de la unidad dividida entre el factor de forma 2π, pues, en la forma de hache-barra $\hbar$, la constante de Planck está asociada a un radio.

Puede interpretarse, pues, que la longitud de onda de Compton λ_0 para el electrón determina el valor y el significado del cuanto de acción, por lo menos referido a la energía del electrón. Además, el valor unidad que el cuanto de acción adquiere en el SF parece corresponder plenamente con su indivisibilidad como unidad de acción (idea expresada más arriba por De Broglie).

La indivisibilidad de $\hbar$ (en lo respecta a la energía del electrón), más que ver con la interacción entre el objeto y el aparato de medida (idea expresada más arriba por Bohr), podría estar relacionada con la indivisibilidad del cuanto de energía de determinada longitud de onda de Compton, en el caso del electrón: λ_0. En la ecuación $\hbar = e^2 / \alpha c$, la constante de Planck depende de λ_0 (como se demuestra en 17), que sería la longitud que *precuantiza* la energía del electrón. Y esta energía, así cuantizada, en el tiempo t_0 ($\upsilon_0 = 1/t_0$) originaría el cuanto de acción, expresado por h y $\hbar$. En efecto, como planteaba el análisis magnitudinal, puede que haya una cuantización previa (*precuantización*) y más fundamental que $\hbar$, que daría razón de su existencia. Es la cuantización de λ_0.

Estas conclusiones afectan solamente al electrón, y su aplicación al resto de partículas materiales – partículas con masa distinta de cero (como p.e. el protón o el neutrón), a las que corresponda una longitud de onda de Compton – originaría múltiples sistemas de unidades naturales fundamentales. Como hemos concluido en la p.180, la energía $E_{partícula}$ de una partícula con masa en reposo distinta de cero, estaría *cuantizada* por h (según la ecuación de Planck $E = h\nu$) y *precuantizada* por su longitud de onda de Compton característica ($\lambda_{C_{partícula}}$). Tomando $\lambda_{C_{partícula}}$ como unidad de longitud en un sistema natural fundamental SF (como el propuesto para el electrón) se obtendrá siempre h=1, lo que permite concluir la *unicidad del cuanto de acción* para la partícula material en cuestión. En definitiva, todos y cada uno de los sistemas SF elaborados en base a $\lambda_{C_{partícula}}$ deben llevarnos a concluir la *unicidad del cuanto de acción* $\hbar$, puesto que las ecuaciones que deben satisfacer son las mismas. Esto constituye un resultado teórico altamente interesante.

5. Tabla comparativa: magnitudes expresadas en los sistemas *cgs* y SF

Para finalizar quiero presentar una tabla comparativa con las metrizaciones de la muestra representativa de magnitudes mecánico-cuánticas antes y después de aplicarles el sistema SF. En esta tabla se puede observar claramente la simplicidad que aporta el sistema SF a las ecuaciones y valores numéricos de magnitudes.

Magnitud	*Unidades cgs*	*Unidades SF*	*Dimensiones*
Radio clásico del electrón	$r_0 = \frac{e^2}{E_0}$	$\boldsymbol{r_0 = \frac{\alpha}{2\pi}}$	**[L]**
Radio de Bohr (1ª órbita)	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2}$	$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\alpha 2\pi}}$	**[L]**
Longitud de onda de De Broglie	$\lambda_b = \frac{h}{m_0 v}$	$\boldsymbol{\lambda_b = \frac{1}{\alpha}}$	**[L]**
Velocidad electrón en la primera órbita	$v_0 = \frac{\hbar}{a_0 m_0}$	$\boldsymbol{v_0 = \alpha}$	**[LT^{-1}]**
Energía de reposo del electrón	$E_e = mc^2$	$\boldsymbol{E_0 = 1}$	**[ML^2T^{-2}]**
Energía de Rydberg	$E_R = K\frac{1}{2}m_0 v_0^2$	$\boldsymbol{E_R = \frac{\alpha^2}{2}}$	**[ML^2T^{-2}]**
Momento magnético de espín (magnetón de Bohr)	$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_0 c}$	$\boldsymbol{\mu_B = \frac{1}{4\pi}}$	**[LQ]**
Cuanto de acción	$h = \frac{E}{v}$	$\boldsymbol{h = 1}$	**[ML^2T^{-1}]**

Las magnitudes expuestas en la tabla sólo son una muestra que considero representativa del sistema de magnitudes mecánico-cuánticas. No obstante, se puede aplicar el sistema SF a cualquier otra magnitud del ámbito subatómico que requiere la presencia del cuanto de acción.

6. Conclusiones del capítulo

A partir de las ecuaciones obtenidas tras la aplicación del sistema natural de unidades fundamentales SF a algunas metrizaciones de magnitudes mecánico-cuánticas, la interpretación física que podemos dar a la dependencia entre el cuanto de acción $\hbar$ y la longitud de onda λ_0, así como a la reducción de la indeterminación debida a $\hbar$, a la indeterminación debida a λ_0, es la siguiente:

El resultado h=1 [ML^2T^{-1}] obtenido en el sistema SF implica que, considerando fundamental la longitud λ_0, la energía del electrón queda cuantizada por el cuanto de acción unidad.

Heurísticamente, este resultado se puede interpretar como que la razón física en función de la cual el cuanto de acción cuantiza la energía del electrón reside en su longitud de onda de Compton λ_0. Lo mismo se podría concluir para cualquier partícula con longitud de onda de Compton λ_C propia, si esta λ_C fuera tomada como unidad de longitud para el manejo de las propiedades de la partícula en cuestión.

Aparte de esta interpretación de la unicidad del cuanto de acción, el sistema SF proporciona otros resultados interesantes como el valor unitario de la energía de reposo del electrón y la notable simplificación de las ecuaciones en la *Tabla comparativa entre los sistemas cgs y SF*, presentada más arriba.

Al menos dentro de los límites del manejo de las propiedades e interacciones del electrón, el sistema SF parece ser de mayor simplicidad y utilidad que otros sistemas naturales y no naturales de medida.

Conclusiones de la tesis doctoral

En este trabajo doctoral he pretendido hacer un estudio particular de la metrización derivada; en concreto, un estudio de la generación del significado (entendido como contenido métrico-operacional) de magnitudes físicas, durante el proceso de la metrización derivada. El objetivo más inmediato de dicho estudio ha sido poner de manifiesto que la metrización derivada sigue unas normas generales, extra-teóricas (independientes de las teorías físicas particulares), que pueden ser reunidas en un análisis específico: el análisis magnitudinal. El siguiente objetivo ha sido aplicar este análisis a la metrización derivada de las principales magnitudes mecánico-cuánticas y estudiar de esta forma la generación de su significado.

Las conclusiones obtenidas en este trabajo se pueden sintetizar en dos aportaciones, en forma de herramientas metodológicas, y dos resultados concretos, producto de la aplicación de dichas herramientas al ámbito particular de los conceptos métricos de la mecánica cuántica. Para mayor claridad, a continuación expongo dichas conclusiones de forma esquemática.

Aportaciones – dos herramientas metodológicas formuladas para su aplicación al ámbito particular de la física:

> 1. *El análisis magnitudinal*: método complementario al análisis dimensional, elaborado para el fin específico del análisis de la generación del significado (contenido métrico-operacional) de las magnitudes, en el proceso de la metrización derivada.
>
> 2. *El sistema natural fundamental de unidades de medida (SF)*: todo sistema natural construido tomando: la longitud de onda de Compton λ_C de una partícula material como unidad fundamental de longitud, el tiempo $t=\lambda_C/c$ (c es la velocidad de la luz), como unidad

fundamental de tiempo y la masa *m* de la partícula material como unidad fundamental de masa.

<u>*Resultados*</u> – se presentan dos resultados concretos, como producto de la aplicación, primero, del análisis magnitudinal a las magnitudes fundamentales de la mecánica cuántica y, segundo, del sistema SF a las propiedades del electrón:

1. Reconstrucción de la estructura métrica de la mecánica cuántica: la reconstrucción de las conexiones métrico-operacionales entre las principales magnitudes derivadas de la mecánica cuántica permiten interpretar sus significados físicos, en particular, el de su núcleo teórico: el cuanto de acción.

2. Interpretación de la unicidad del cuanto de acción: en el sistema natural fundamental de unidades (SF) construido en base a la longitud de onda de Compton del electrón (λ_0), el cuanto de acción toma el valor unidad. Ello permite hacer una interpretación métrico-operacional de la unicidad del cuanto de acción.

Paso a comentar de forma más detallada las aportaciones y resultados que acabo de describir de forma esquemática.

<u>***Respecto de las aportaciones***</u>**:**

Tanto el análisis magnitudinal, como el sistema natural de unidades fundamentales SF, constituyen *métodos de tratamiento* de datos. Es por ello, por lo que me he referido a ellos como *aportaciones metodológicas.*

- *Análisis Magnitudinal.*

El análisis magnitudinal que he propuesto como complementario al análisis dimensional, es un método de *regulación del contenido métrico-operacional* de la metrización derivada de las magnitudes físicas, por medio de reglas extra-teóricas. En primer lugar, posibilita la *reconstrucción* del proceso de generación del significado de un concepto métrico derivado. En segundo lugar, permite detectar y subsanar metrizaciones incompletas (sin eliminabilidad), que no son interpretables (no se puede inferir el significado físico de la magnitud metrizada a partir de las introductoras). Y, en tercer lugar, permite sistematizar en una estructura de derivación métrica cualquier sistema o conjunto específico de magnitudes de una teoría. Ninguno de estos tres resultados puede ser logrado mediante el empleo exclusivo del análisis dimensional, que en este trabajo se combina con y se presenta como complementario al magnitudinal.

La composición de las *estructuras métricas* de la mecánica clásica, el electromagnetismo clásico y la mecánica cuántica, y la posterior reconstrucción de esta última, pone de manifiesto la utilidad práctica que puede tener el análisis magnitudinal en la metodología de la física. En este sentido, entre los resultados conseguidos con la aplicación del análisis magnitudinal son destacables los siguientes:

> *1-* La posibilidad de *reconstruir* el proceso de generación del significado de una magnitud derivada y, con ello, de reconstruir la estructura métrica completa de cualquier sistema de magnitudes;
>
> *2-* La deducción del carácter *métricamente no fundamental* del cuanto de acción $\hbar$ y posterior reconstrucción de su metrización *por definición*;
>
> *3-* La argumentación sobre la longitud de onda de Compton λ_C como factor de *precuantización* del cuanto de acción $\hbar$ (respecto de la energía de cualquier partícula material y, en concreto, del electrón);

4- La *reformulación* de las relaciones de indeterminación de Heisenberg en función de la longitud de onda de Compton $\bar{\lambda}_C$ reducida.

- *Sistema Natural Fundamental SF.*

Por su parte, el sistema natural fundamental SF constituye un método de *manejo simplificado de cantidades y proporcionalidades* propias del mundo subatómico, complicadas de manejar desde sistemas de unidades como el internacional (SI) o el cegesimal (*cgs*). Este sistema me parece el más adecuado para manejar los cálculos de estados, procesos e interacciones asociados a partículas materiales como el electrón.

La particularidad de un sistema natural fundamental SF consiste en que se formula en base a tres magnitudes métricamente fundamentales y que a su vez constituyen constantes físicas fundamentales: la longitud de onda de Compton λ_C de una partícula material, como unidad fundamental de longitud, el tiempo $t=\lambda_C/c$ (c es la velocidad de la luz), como unidad fundamental de tiempo y la masa m de la partícula material como unidad fundamental de masa. Este carácter natural y, a la vez, métrica y físicamente fundamental de las unidades de un sistema SF es lo que le otorga un *valor heurístico* dentro de la física del micromundo y, en particular, de la mecánica cuántica.

La utilidad práctica de un sistema SF se manifiesta fundamentalmente en:

1- La notable *simplificación* de las ecuaciones mecánico-cuánticas expresadas en el sistema SF.

2- La *interpretación* de la unicidad del cuanto de acción $\hbar$ en base a la longitud de onda de Compton λ_C propia de una partícula material, tomada como unidad de longitud. Comentaré las particularidades de esta interpretación en la sección "*Respecto de los resultados*".

Respecto de los resultados:

Los resultados que considero más destacables son dos: uno de carácter más general, a saber, la *reconstrucción* de las metrizaciones de las principales magnitudes mecánico-cuánticas del electrón, y otro de carácter particular, a saber, la *interpretación*, desde el sistema SF, de la *unicidad* del cuanto de acción.

- *Reconstrucción de la estructura métrica de la mecánica cuántica.*

La reestructuración, resultado a su vez de una re-metrización (reconstrucción del contenido métrico-operacional) en cadena de magnitudes cuánticas interdependientes, aporta algo muy interesante a la mecánica cuántica: conceptos y relaciones de conceptos métricos de carácter más fundamental; con ello se abren las puertas a una *teoría mecánico-cuántica con una estructura métrica entretejida de forma correcta y, consecuentemente, una estructura métrica interpretable*. Si, además, esas nuevas ecuaciones son expresadas en el sistema natural de unidades fundamentales (SF), entonces las relaciones de proporcionalidad entre radios, longitudes de onda, energías, etc. se muestran en extremo sencillas, con factores de proporcionalidad del orden de 2π y de α, poniendo de manifiesto una simplicidad de funcionamiento de la naturaleza a escala subatómica.

Es asimismo destacable que la nueva estructura métrica de las principales magnitudes mecánico-cuánticas permite suponer y argumentar la no fundamentalidad métrica del cuanto de acción, y sospechar de la longitud de onda de Compton como el factor de *precuantización*, que justificaría dicha no fundamentalidad.

- *Interpretación de la unicidad del cuanto de acción*

El segundo resultado que considero particularmente destacable de la simplificación que aporta el sistema de unidades fundamentales es el sorprendente, pero esperado, valor numérico unidad para el cuanto de acción *h*. Sorprendente, porque se obtiene el valor unidad para *h sin haberlo establecido previamente* como unidad de acción en el SF. Esperado, porque *h debía corroborarse como una unidad de acción* en algún sistema natural de unidades, puesto que así esta considerado actualmente en física. Considero pues, que este resultado ofrece una *interpretación* del carácter unitario e indivisible del cuanto de acción aplicado, al menos, a la energía del electrón, a saber: el resultado h=1 obtenido en el sistema SF implica que, considerando fundamental la longitud λ_0, la cuantización de la energía del electrón arroja el valor unidad para el cuanto de acción unidad *h*. Este resultado se hace extensible, como se ha mostrado en el trabajo, a la cuantización de la energía de cualquier partícula con masa en reposo distinta de cero y con una longitud de onda de Compton característica.

Se puede ver que las aportaciones y los resultados están interrelacionados y se confirman métricamente (cuantitativa y conceptualmente) de forma mutua. En definitiva, espero que alguna de estas aportaciones y resultados pueda suponer una contribución real a la metodología de la física y la filosofía de la ciencia.

Bibliografía

AFSHAR, S.S. (2003): *Sharp complementary wave and particle behaviours in the same welcher weg experiment*, IRIMS - Quantum Physics, abstract www.irims.org/quant-ph/030503

ALONSO, M.– FINN, E. (1987a): *Física. Volumen I: Mecánica*, Addison-Wesley Iberoamericana, U.S.A.

(1987b): *Física. Volumen II: Campos y ondas*, Addison-Wesley Iberoamericana, U.S.A.

ALVARGONZÁLEZ CRUZ, R. (1999): *Ensayo sobre las magnitudes físicas.* Fundación Alvargonzález, Gijón.

ASIMOV, I. (1966): *El electrón es zurdo.* Alianza Ed. Madrid.

BERGIA, S. (1992): "Desarrollo conceptual de la teoría cuántica", en *El siglo de la Física*, Tusquets Ed. Barcelona, pp.87-126.

BOHM, D. (1998): *La totalidad y el orden implicado*, Ed. Kairós, Barcelona.

BOHR, N. (1970): *Nuevos ensayos sobre física atómica y conocimiento humano*, Ed. Aguilar, Madrid.

(1935): "Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" *Physical Review 48*, 15th October.

BORN, M. (1936): *Atomic Physics*, G.E. Stechert & Co., New York.

BUNGE, M. (1978): *Filosofía de la física*, Ariel, Barcelona.

BUNGE, M. (1983): *Controversias en física*, Tecnos, Madrid.

CATALÁ, J. (1988): *Física*, Fundación García Muñoz, Sección SABER, Valencia.

CATALÁN CHILLERÓN, J. (1983): *Teoría de las magnitudes físicas.* Ministerio de la Presidencia, Instit

CRAMER, J. (1986): *The transactional interpretation of quantum mechanics*, Reviews of Modern Physics 58, 647-688, July. Las citas son de la versión electrónica en: http://www.npl.washington.edu/TI/TI_toc.html

DE BROGLIE, V.L. (1951): *Física y microfísica*, Espasa Calpe, Madrid.

DIEZ, J.A.-MOULINES, U. (1997): *Fundamentos de filosofía de la ciencia*, Ed. Ariel, Barcelona.

DIEZ, J.A. (2002): "A Program for the Individuation of Scientific Concepts" *Synthese*.

(2000): "Structuralist Analysis of Fundamental Measurement Theories" en W. Balzer y C. U. Moulines (eds.), *Structuralist Knowledge Representations. Paradigmatic Examples*, Poznan Studies 75, Rodopi, Amsterdam, pp. 19-49

(1998): *Hacia una Teoría General de la Representación Científica*, Theoria 13/1, pp. 113-139

(1997): "A Hundred Years of Numbers. An Historical Introduction to Measurement Theory. Part I: The Formation Period", *Studies in History and Philosophy of Science* 21, 1, pp. 167-181

(1997): "A Hundred Years of Numbers. An Historical Introduction to Measurement Theory. Part II: Suppes and the Mature Theory", *Studies in History and Philosophy of Science* 22, 2, pp. 237-265

(1992): *Metrización y teoreticidad. Una reconstrucción estructuralista de la Teoría de la Metrización Fundamental.* Tesis Doctoral, Univ. Barcelona.

DIRAC, P.M.A. (1997): "La concepción física de la Naturaleza" en *Misterios de la física cuántica* de Temas 10 de Investigación y Ciencia, 4º trimestre, pp.4-12.

(1931): "Quantised singularities in the electromagnetic field" *Proceedings of the Royal Society. A 133, 60.*

(2003): *Scientific pappers collection*, *Vol. II*, *Quantum Theorie (scientific articles)*. Ed. Sukhanov, M. FIZMALIT (En ruso).

EINSTEIN, A. (2005): *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Alianza Ed., Madrid. Título original: *Ubre die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie* (1916).

EINSTEIN, A.- PODOLSKY, B.- ROSEN, N. (1935): "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *The Physical Review 47*, May 15.

EISBERG, R. – RESNICK, R. (1986): *Física Cuántica*, Ed. Limusa, México.

FENÁNDEZ-RAÑADA, A. (2004) *Ciencia, incertidumbre y conciencia. Heisenberg.* Ed. Nivola, Madrid.

(2003): "On the cosmological variation of the fine-structure constant", *Europhysics Letters* 61, 174-180. Disponible en:

http://www.ucm.es/info/electron/publicaciones/ranada/RanadaEPLJan03.pdf

(2002): "The fine structure constant at infinite energy equal to 1/4 pi? *Annales de la Fondation Louis De Broglie* 27, 505. Disponible en: xxx.lanl.gov/list/hep-th/9904158

(2000): "De las matemáticas, la física y los físicos", *Revista Española de Física*, 14 (5), 47-48. Disponible en:

http://www.ucm.es/info/electron/publicaciones/ranada/REFFisiMate.pdf

(1994): *Dinámica Clásica*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

FEYNMAN, R.P. (1985): *QED. The strange theory of light and matter.* Princeton University Press, New Yersey. En español: (1988) *Electrodinámica cuántica*. Alianza Univ. Madrid.

(2000): *El carácter de la ley física.* Tusquets editores, Metatemas 65, Barcelona.

(1948): "Pocono Conference", *Physics Today*, June 1948. Disponible en:

http://www.physicstoday.org/vol-1/iss-2/vol1no2p8_10.pdf

GAMOW, G. (1948): "The Reality of Neutrinos", *Physics Today*, July 1948.

Disponible en:

http://www.physicstoday.org/vol-1/iss-3/vol1no3p4_7_30.pdf

(1949): "Any Physics Tomorrow?", *Physics Today*, January 1949.

Disponible en:

http://www.physicstoday.org/vol-2/iss-1/vol2no1p16_21.pdf

GELL-MANN, M. (1995): *El quark y el jaguar*, Metatemas, Tusquets Ed. Barcelona.

GIERE, R. (1988): *Explaning science. A cognitiv approach*, U. Chicago Press, Chicago. Versión en castellano: *La explicación en la ciencia: un acercamiento cognoscitivo*, Lomas Atlas Mejico (1992).

GONZÁLEZ DE POSADA, F. (1994): *Breviario de Teoría Dimensional*, Ed. Departamento de Publicaciones E.T.S. de Arquitectura. U.P.M.

GRAWFORD, F.S. (1974): *Waves. Berkeley Physics Course*. Vol.3. McGraw-Hill Book Company, Berkeley's Univ, California.

GREENE, B. (2005): *El universo elegante*, Crítica/Planeta, Barcelona.

HACKING, I.(1996): *Representar e intervenir*, Paidós, Méjico.

HEISENBEG, W. (1972): *Diálogos sobre física atómica*, BAC, Madrid.

(1930): "The Physical Principles of the Quantum Theory", *Z.f. Phys. 33*, (925), Univ. of Chicago Press, Chicago.

HEMPEL, C. (1966) *Philosophy of natural science*, Prentice may, New Jersey, USA. Versión en castellano: *Filosofía de la ciencia natural*, Alianza Ed. Madrid (2003)

(1952): *Fundamental of concept formation in empirical sciencies*. Univ. Chicago Press, Chicago. Versión en castellano: *Fundamentos de la formación de conceptos en ciencia empírica*, Alianza Ed. Madrid (1988).

HORGAN, J. (1997): "Filosofía cuántica", en *Misterios de la física cuántica*, de Temas 10, Investigación y Ciencia, 4º trimestre, pp. 36-45.

KRAGH, H. (2002): "Paul Dirac: seeking beauty." en *Physics World*, Agosto.

Traducido al castellano en: KRAGH, H. Y CORBY HOVIS, R. (2003) "Dirac y la belleza de la física" en *Fenómenos Cuánticos*, Temas 31 de Investigación y Ciencia, 1er trimestre, pp. 14-19.

JAMMER, M. (1966): *The conceptual development of quantum mechanics,* McGraw-Hill.

KORFF, S.A.; Contributors: Richard P. Feynman and Howard A. Robinson. (1948) "Detecting Atomic Particles", *Physics Today*, June 1948.

Disponible en: http://www.physicstoday.org/vol-1/iss-2/vol1no2p12_13_25_27.pdf

MARKOV, M.A. (1975): On possible conceptual difficulties of quantum field theories involving gravitation, (Dubna, JINR), JINR-E2-8838, Apr. 15pp. Versión electrónica en: http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?indexer=1&rawcmd=find+r+JINR-E2-8838

MATAIX, C.-RIVADULLA, A. (ed.), (2002): *Física cuántica y realidad*, Philosophica Complutenisa 18, Ed. Complutense, Madrid.

MENCHACA ROCHA, A. (1998): *El discreto encanto de las partículas elementales*, Fondo de Cultura Económica, S. A. (Méjico).

MOSTERÍN, J.-TORRETI, R. (2002): *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Alianza Ed., Madrid

MOSTERÍN, J. (2000): Conceptos y teorías en la ciencia, Alianza Ed. Madrid.

(1993) "Los conceptos científicos" en *La ciencia: estructura y desarrollo*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Vol. 4, Ed. Trotta, Madrid.

MOULINES, U. (ed.) (1993): *La ciencia: estructura y desarrollo*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Vol. 4, Ed. Trotta, Madrid.

(1973): *La estructura del mundo sensible*.

PLANCK, M. (1998): *Eight Lectures on Theoretical Physics*, Dover, Nueva York. Versión reimpresa de 1915, editada por The Columbia University Press, Nueva York.

PROJOROV, A.M. (1995-1996): *Diccionario Enciclopédico de Física*, Ed. MIR, Rubiños-1860, S.A. Moscú-Madrid

PROJOROV, A.M. (coord.) (1998): *Enciclopedia de Física.* 5 tomos. Ed. Gran Enciclopedia Rusa, Moscú. En ruso.

REICHENBACH, H. (1944): *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*, Univ. of California Press, Berkeley, CA.

RIVADULLA, A. (2004): *Éxito, razón y cambio en física*, Ed. Trotta, Madrid.

(2003a): *Revoluciones en Física*, Ed. Trotta, Madrid.

(2003b): "Inconmensurabilidad y relatividad. Una revisión de la tesis de Thomas Kuhn", en la *Revista de Filosofía* Vol.28, nº2, Madrid, pp. 237-259.

(1986): *Filosofía actual de la Ciencia*, Ed. Tecnos, Madrid

RIVADULLA, A. (ed.) (2002): *Hipótesis y verdad en ciencia*, Philosophica Complutenisa 19, Ed. Complutense, Madrid.

R. SAN JUAN, (1944): *Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos*, C. Bermejo, Impresor. Madrid.

SALAM, HEISENBERG, DIRAC (1990): *La unificación de las fuerzas fundamentales,* Gedisa, Barcelona.

SÁNCHEZ DEL RÍO, C. (1985): *Los principios de la física en su evolución histórica.* Ed. Univ. Computense, Madrid.

SÁNCHEZ OVCHAROV, C. (2003): "Karl Popper: fundamento de una crítica al dualismo ondulatorio corpuscular" en *Hipótesis y verdad en Ciencia. Ensayos sobre la filosofía de Karl Popper*. Andrés (e.d.), Editorial Complutense, Madrid.

(2002): "Algunos razonamientos sobre el aparato formal de la mecánica clásica, relativista y cuántica" en la *Revista de Filosofía* Vol.27, nº2, Madrid, pp. 419-430.

SÁNCHEZ RON, J.M. (2001): *Historia de la física cuántica. I. Período fundacional (1860-1926)*, Drakontos. Ed. Crítica, Barcelona.

SEDOV, L. (1982): *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Moskow.

SHIMONY, A. (1997): “Realidad del mundo cuántico”, en *Misterios de la física cuántica*, de Temas 10, Investigación y Ciencia, 4º trimestre, pp. 28-35.

STEGMÜLLER, W. (1981): *Una concepción estructuralista de las teorías*. Alianza Ed., Madrid.

(1979): *Teoría y experiencia*. Ariel, Barcelona.

STERN, A.W. (1949): “A trend in contemporary physics”, *Physics Today*, May 1949.

Disponible en: http://www.physicstoday.org/vol-2/iss-5/vol2no5p21_26.pdf

STEWART, B. (1874): *Lessons in elementary physics*, MacMillan and Co, London.

SUPPE, F. (1979): *La estructura de las teorías científicas*, Editora Nacional, Madrid.

TAYLOR, J. (2002): *It must be beautiful: great equations of modern science*, Graham Farmelo (Ed.), Granta Books.

WEINBERG, S. (2004): *El sueño de una teoría final. La búsqueda de las leyes fundamentales de la naturaleza.* Crítica. Barcelona.

Diccionarios

Vocabulario científico y técnico. (1996) Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Espasa. Madrid.

Diccionario esencial de las ciencias. (2001) Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Espasa. Madrid.