UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I

MODELOS DE SUBASTA EN UN DUOPOLIO ELÉCTRICO CON COSTES ESTOCÁSTICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Estrella Alonso Pérez

Bajo la dirección del doctor:
Juan A. Tejada Cazorla, Ángela Jiménez Casas y Begoña Vitoriano Villanueva

Madrid, 2007

ISBN 978-84-669-3130-4

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA I

MODELOS DE SUBASTA EN UN DUOPOLIO ELÉCTRICO CON COSTES ESTOCÁSTICOS

TESIS DOCTORAL

Estrella Alonso Pérez

2007

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA I

Facultad de Ciencias Matemáticas

MODELOS DE SUBASTA EN UN DUOPOLIO ELÉCTRICO CON COSTES ESTOCÁSTICOS

TESIS DOCTORAL

Presentada por

Estrella Alonso Pérez

Universidad Pontificia Comillas de Madrid

Dirigida por

Juan A. Tejada Cazorla

Universidad Complutense de Madrid

Ángela Jiménez Casas

Universidad Pontificia Comillas de Madrid

Begoña Vitoriano Villanueva

Universidad Complutense de Madrid

2007

A mi PADRE

Agradecimientos

La elaboración de esta tesis ha sido un trabajo realizado durante largos años, en las horas que le he podido robar al día y, en muchas ocasiones, a parte de la noche. Pero reconozco que me ha dado muchas más satisfacciones que amarguras. Sin duda ha sido así gracias al apoyo de todas las personas que he tenido alrededor en este periodo.

En primer lugar debo agradecer la guía y el apoyo de mis directores de tesis, los profesores Juan Antonio Tejada Cazorla, Ángela Jiménez Casas y Begoña Vitoriano Villanueva. Sin cualquiera de ellos la dirección de este trabajo hubiese quedado coja. Debo destacar la ayuda constante de Juan: él es el principal artífice de que este trabajo exista, ya que comenzó enseñándome cómo manejar *google* para buscar artículos, cómo hacer las presentaciones en congresos, cómo obtener los primeros resultados y la ardua tarea, reconozco que no siempre aceptada con agrado por mi parte, de generalizar y mejorar incansablemente dichos resultados. A pesar de su cargo de Decano siempre tuvo un ratito para mi.

Gracias también a todos mis compañeros del Dpto. de Matemática Aplicada y Computación de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad Pontificia Comillas de Madrid por su constantes ánimos y por creer en mí.

Finalmente, pero probablemente no en el orden adecuado, quiero agradecer a mi marido Julio el apoyo incondicional y la paciencia demostrada a lo largo de tantos días de llegar a las once de la noche. Gracias por los viajes. A mi madre M^{a}del Pilar y a mi hermana Irene que, aunque lejos, han vivido muy de cerca mis ánimos y desánimos. A Rosi, Paqui y Pedro, especialmente a este último que, ha sido y es, mi modelo profesional a imitar.

Madrid, Junio de 2007.

Abstract

The purpose of this thesis is to study the auction models used in commercial transactions of electrical units within a competitive market. In this work, we analyze the strategies that utilities suppliers must choose in order to maximize their profit and, at the same time, the auction model that the Market Operator (responsible for purchasing the electrical units necessary to satisfy the electrical demand) must choose to minimize the payment to the suppliers. In this way, we try and establish a ranking between the different auction models and also prove, under certain circumstances, the advantages of one model over the others.

In the last decades the use of auctions for commercial transactions has increased considerably. This has prompted an ample analysis of the mathematical models that support them [Maasland and Onderstal (2006); Milgrom (2004), Burguet (2000), Klemperer (1999)][1].

For instance, auctions are used at present as a sales system for Treasury bills [Sanjiv and Rangarajan (1997)], for last generation phone licences [McAfee and McMillan (1996)], for electricity units [Fehr and Harbord (1993)], for exploitation rights of mineral resources, fresh food, wine, flowers, works of art, etc. Its economic importance is obvious.

In some countries, such as United Kingdom, Australia, Spain, Chile, Argentina, Canada,etc., an auction procedure is followed to regulate the daily electricity market [Fehr and Harbord(1998)].

During the nineties, major changes were performed in the organization and operation of worldwide electricity markets. There are several underlying reasons for this revolution in the industry, among which it has been highlighted the search for efficiency and free competition in a sector which traditionally had been in the hands of the State. Each power company bids an amount of electricity units on a daily basis and for each hour of the day. In view of the supply, the central operator (the auctioneer) ranks the bids from the lowest to the highest, then distributes demand among the lowest bids until demand has been fully met. The price paid to each company which takes part in the despatch of demand made for that period in question, depends on the

[1] For an introduction to auction theory.

auction model adopted for the transaction. There are two main auctioning mechanisms: the uniform-price auction model and the discriminatory auction model.

In the uniform model, the unit price received by a company despatching in the market is the same for all companies: the highest accepted bid. In the discriminatory model, however, all companies despatching in the market collect a unit price equal to the bid placed by them [Fabra (2001); Fabra, Fehr and Harbord (2002); Fabra, Fehr and Harbord (2003)].

It has not been proven that one model is actually better than the other [Ausubel and Cramton (2002)]. In relevant published literature, we find works that argue in favor of the Uniform Model [Wolfram (1999)] while others postulate for the advantages of the Discriminatory Model instead [Federico and Rahman (2001)].

This work is directed towards clarifying the superiority of one model over the other under certain hypotheses, which vary in the different chapters. In addition, we will not be analyzing exclusively the two models already mentioned but instead, we will also examine a third classic auction model known as the Vickrey auction model [Vickrey (1961)]. That is to say, we will establish a ranking amongst the three classic auction models within the Electrical Market framework: Uniform, Discriminatory and Vickrey, within a parametric family of auction models. Therefore, we will not only accomplish a comparative analysis of the three classic auction models, but also, obtain a comprehensive analysis of all the auction models found between them and that could be used in the Electrical Market. We will demonstrate that, under specific circumstances, there are models belonging to certain family that are better than the three mentioned classic models. One of the main difficulties is that more than one object is being auctioned (the demand may be distributed among several companies) and comparison between multiple-unit auction models is a very complex task.

The two fundamental contributions of this work are firstly, it will analyze a large family of auction models and, secondly, it will model the Electrical Market as a game of incomplete information. It has been assumed that companies have some uncertainty about the costs function of the other competing companies

Índice

Agradecimientos ix

Índice xiii

Introducción xvii

1 Preliminares 1

1.1 Breve descripción de los principales modelos de subasta . . . 2

1.1.1 Subasta Inglesa . . . 2

1.1.2 Subasta Holandesa . . . 2

1.1.3 Subasta en sobre cerrado al Primer Precio . . . 3

1.1.4 Subasta en sobre cerrado al Segundo Precio . . . 3

1.2 Juegos bayesianos estáticos . . . 4

1.2.1 Representación en forma normal de un juego bayesiano estático . . . 4

1.2.2 Equilibrio bayesiano de Nash . . . 6

1.3 Modelos de Subasta . . . 7

1.3.1 Principio de Revelación . . . 9

1.4 Modelos de subastas de un único objeto y valoraciones privadas . . . 12

1.4.1 Equilibrios bayesianos de Nash en los principales modelos de subastas en sobre cerrado . . . 12

1.4.2 Teorema de equivalencia de ingresos . . . 13

1.5 Modelos de subastas con múltiples objetos idénticos y valoraciones privadas . . . 15

1.5.1 Cada comprador interesado en un único objeto . . . 15

1.5.2 Cada comprador interesado en más de un objeto. . . . 16

2 Duopolio Simétrico con Valoraciones Independientes 21

2.1 El Modelo . . . 22

2.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General 26
2.2.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 32
2.2.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 32
2.3 Ingresos esperados por las empresas y pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el Modelo de Subasta General 34
2.3.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 35
2.3.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 36
2.4 Teorema de Equivalencia de Ingresos en el Mercado Eléctrico en el Modelo Simétrico Inicial con n empresas. 38
2.5 Casos particulares: Modelos Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey. 45
2.5.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 45
2.5.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 48
2.5.3 Caso 3 $(2 \leq D)$ 50
2.6 Conclusiones 50

3 Duopolio Simétrico con Valoraciones Correladas **53**
3.1 El Modelo 53
3.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General. 57
3.2.1 Ingresos esperados por las empresas y pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el Modelo de Subasta General 63
3.2.2 Caso 1 $(D \leq 1)$ 64
3.2.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 65
3.2.4 Caso 3 $(2 \leq D)$ 66
3.3 Modelo Simétrico Correlado Uniforme 67
3.3.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 69
3.3.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 70
3.4 Comparación de los modelos 73
3.4.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 73
3.4.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 74
3.5 Casos particulares: modelos Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey. 77
3.5.1 Caso 1 $(D \leq 1)$ 77

3.5.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$ 80
3.5.3 Gráficas para cualquier tamaño de la demanda 89
3.6 Conclusiones 93

4 Duopolio Asimétrico en capacidades de producción **95**
4.1 El Modelo 95
4.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General. 101
4.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha \leq 1 + \beta)$. 107
4.3.1 Ingresos en el Caso 2 117
4.3.2 Comparación de los modelos en el Caso 2 122
4.4 Caso 3 $(1 + \beta < D = 1 + \beta + \alpha < 2 + \beta)$ 130
4.4.1 Ingresos en el Caso 3 149
4.4.2 Comparación de los modelos en el Caso 3. 167
4.5 Pago esperado por el Operador del Mercado bajo cualquier tamaño de la demanda 175
4.6 Conclusiones 177

5 Duopolio Asimétrico en unidades de producción **181**
5.1 El Modelo 181
5.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General. 188
5.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha \leq 2)$ 197
5.3.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 2 197
5.3.2 Ingresos en el Caso 2 207
5.4 Caso 3 $(2 < D = 2 + \alpha < 3)$ 209
5.4.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 3. 209
5.4.2 Ingresos en el Caso 3 232
5.5 Caso 4 $(3 \leq D = 3 + \alpha < 4)$ 233
5.5.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 4. 234
5.5.2 Ingresos en el Caso 4 249
5.6 Pago esperado por el Operador del Mercado bajo cualquier tamaño de la demanda 251
5.7 Equilibrios bayesianos de Nash de la forma $\left[b_1^*(\theta_1), 1, b_2^*(\theta_2)\right]$ 251
5.8 Conclusiones 255

6 Conclusiones finales **257**

6.1 Capítulo 1 259

6.2 Capítulo 2 259

6.3 Capítulo 3 260

6.4 Capítulo 4 262

6.5 Capítulo 5 263

6.6 Conclusiones finales 265

6.7 Implementación del modelo de Vickrey 267

6.8 Problemas abiertos 274

A Gráficas Capítulo 3 **277**

B Gráficas Capítulo 4 **285**

C Gráfica Capítulo 5 **297**

D Simulación del modelo de Vickrey **299**

Referencias **311**

Introducción

El propósito de esta tesis es el estudio de modelos de subasta utilizados en las transacciones comerciales de compraventa de unidades eléctricas en un mercado competitivo. En este trabajo se analizan las estrategias que deben seguir las empresas generadoras, para maximizar sus ingresos, y el modelo de subasta que debe elegir el Operador del Mercado (responsable de la compra de las unidades eléctricas necesarias para satisfacer la demanda eléctrica), para minimizar el pago que debe hacer a las empresas generadoras. De esta forma se intenta establecer una ordenación entre los distintos modelos de subasta y establecer, bajo determinadas circunstancias, las ventajas de un modelo frente a los restantes.

En las últimas décadas la aplicación de modelos de subasta a transacciones comerciales ha ido en rápido aumento y, con ello, la necesidad de un amplio análisis de estos modelos matemáticos [Maasland y Onderstal (2006); Milgrom (2004), Burguet (2000), Klemperer (1999)][2].

Las subastas se utilizan, en la actualidad, como método de venta de letras del tesoro [Sanjiv y Rangarajan (1997)], de licencias de móviles de última generación [McAfee y McMillan (1996)], de unidades de electricidad [Fehr y Harbord(1993)], del derecho de explotación de yacimientos de minerales, de alimentos frescos, de vino, de flores, de obras de arte.... La importancia económica es obvia.

El gran interés que se ha suscitado en torno a este tipo de negociación está inducido, fundamentalmente, por dos ideas: por un lado, la imposibilidad de la tasación directa y absoluta del bien y, por otro, maximizar el beneficio obligando a competir a aquellos posibles pujadores que más valoren la mercancía en cuestión.

Describir un modelo de subasta concreto es determinar las reglas o procedimientos que se aplicarán para la selección de ofertas y precio (o precios) en la transacción.

En este tipo de negociaciones ambas partes, subastador y pujadores, desean maximizar sus respectivos beneficios y esto implica que nos enfrentemos a intereses contrapuestos. Luego cuando

[2] Para una introducción a la teoría de subastas y sus aplicaciones.

se califique a un modelo de subasta de ventajoso frente a otro, habrá que especificar si lo es desde el punto de vista del subastador o si lo es desde el punto de vista de los pujadores.

Desde el punto de vista de un subastador, cuando éste elige un modelo de subasta debe predecir el comportamiento de los pujadores. Por otra parte un pujador debe predecir el comportamiento del resto de competidores. Para que un pujador pueda predecir el comportamiento del resto de pujadores, éste debe estimar el valor del bien a subastar que los otros le asignan. A este valor le llamaremos *valoración*.

La primera clasificación de modelos de subasta se basa en la dependencia entre las valoraciones de los pujadores. Tendremos que diferenciar dos categorías de modelos de subasta:

Modelos de valoraciones privadas. La valoración privada que cada pujador asigna al objeto a subastar no es de conocimiento público. Esta incertidumbre es relevante para la decisión de cada pujador. Una postura exitosa es el resultado de haber formado expectativas correctas sobre lo que otros esperan a tenor de la información que uno tiene.

Modelos de valoraciones comunes. En este caso la incertidumbre relevante recae sobre el valor del objeto a subastar, que es común a todos los pujadores. Por ejemplo, imaginemos la subasta de una licencia de explotación petrolífera: el valor real de esta licencia depende de la cantidad de petróleo que se consiga extraer. Valor que es desconocido y común a todos. Puesto que el objeto tiene valor incierto, las ofertas están basadas en estimaciones sobre este valor.

La aplicación de la teoría de subasta en la que se centra esta memoria es la subasta del Mercado Eléctrico, que será considerada, casi siempre, un modelo de valoraciones privadas[3]. En algún caso, las valoraciones se considerarán con una componente común[4]. En países como el Reino Unido, Australia, España, Chile, Argentina, Canadá, Noruega, Nueva Zelanda, Polonia, Suecia, Holanda, Finlandia, Estados Unidos, Colombia, Alemania y Bolivia se aplica una subasta para regular el Mercado Eléctrico diario [Fehr y Harbord(1998)].

Durante la década de los 90 se comenzaron a vivir importantes cambios en la organización y el funcionamiento de los mercados eléctricos mundiales. Las razones que motivaron esta revolución en el sector son varias: entre ellas pueden destacar la búsqueda de eficiencia y libre

[3] La valoración de cada empresa en este contexto estará directamente relacionada con el coste de producción eléctrica.

[4] La valoración de cada empresa en este contexto estará directamente relacionada con el coste de producción eléctrica y con el coste común de la materia prima necesaria para tal producción.

competencia en un sector que, tradicionalmente, estaba en manos estatales[5]. Estos cambios introducen la competencia en la producción eléctrica, quedando el transporte y la distribución como actividades reguladas. Mediante esta nueva organización las empresas generadoras llevan a subasta su producción. Cada empresa eléctrica oferta una cantidad de unidades de electricidad y un precio por unidad para cada día y para cada una (o media) de las 24 horas del día siguiente. A partir de las ofertas se construye una lista de méritos ordenando los precios ofertados de menor a mayor, hasta que ésta interseque la curva de demanda, encontrando el precio que iguala la oferta a la demanda, llamado *precio del mercado*. Hay un organismo oficial, que llamaremos *Operador del Mercado* (subastador), que selecciona las mejores ofertas (las más bajas) hasta cubrir la demanda de ese día y de esa hora (o media). El precio del mercado, en la mayoría de los mercados eléctricos, es el precio al que se realizan todas las transacciones. Este modelo de subasta se conoce con el nombre de *modelo de subasta Uniforme,* ya que se paga a todas las empresas el mismo precio por unidad de electricidad despachada. Sin embargo, se ha discutido mucho sobre las ventajas y desventajas de este modelo frente a uno alternativo llamado *modelo de subasta Discriminatorio* [Fabra (2001); Fabra, Fehr y Harbord (2002); Fabra, Fehr y Harbord (2003)]. En este último, el precio recibido por cada empresa por unidad eléctrica despachada coincide con su propia oferta.

En realidad no se ha demostrado que un modelo sea absolutamente mejor que el otro [Ausubel y Cramton (2002)]. En la literatura encontramos trabajos que argumentan a favor del modelo Uniforme [Wolfram (1999)] y otros a favor del modelo Discriminatorio [Federico y Rahman (2001)]. Una de las complicaciones fundamentales se encuentra en que se está subastando más de una unidad (se subasta el derecho a despachar la demanda eléctrica, que puede ser distribuida entre varias empresas) y el análisis de modelos de subasta de múltiples objetos es muy compleja.

Este trabajo está encaminado a esclarecer la superioridad de un modelo frente a otro bajo determinadas hipótesis, que varían en los distintos capítulos. Además, no sólo analizaremos los dos modelos mencionados; analizaremos un tercer modelo clásico de subasta llamado *modelo de subasta de Vickrey* [Vickrey (1961)]. Es decir, establecemos una ordenación entre los tres modelos clásicos de subasta en el marco del Mercado Eléctrico: Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey, dentro de una familia más amplia de modelos de subasta. Para ello, lo primero que se calcula (bajo las hipótesis correspondientes en cada capítulo) son las mejores ofertas que deben pujar

[5] Se fijaba una tarifa que garantizase la cobertura de costes y una rentabilidad razonable para sus inversiones.

las empresas para maximizar beneficios y así predecir como se desarrollará el juego.

Se definirá una amplia familia paramétrica de modelos de subasta, que se llamará

Modelo de Subasta General con la que, no sólo se conseguirá un análisis comparativo de los tres modelos clásicos de subasta, sino un amplio análisis de todos los modelos de subasta "razonables" que se podrían emplear en el Mercado Eléctrico. Se demostrará que, bajo determinadas circunstancias, hay modelos nuevos mejores que los tres modelos clásicos mencionados.

En la casi totalidad de los trabajos relacionados con la subasta de energía eléctrica, se modela la subasta empleada para las transacciones de compraventa como un juego no cooperativo de información completa (en el que los costes de producción de las empresas competidoras se consideran de conocimiento público).

Existen pocos trabajos en los que se suponga que existe incertidumbre, por parte de una empresa, sobre la función de costes de las empresas contrarias:

En [Ferrero, Rivera y Shahidehpour (1998)] se analiza un ejemplo numérico y discreto de un duopolio eléctrico bajo un modelo de subasta Uniforme. Se considera, además, que las valoraciones son privadas pero correladas (los costes de producción son información privada de cada empresa, pero ambos dependientes del precio del fuel).

En [Bosco and Parisio (2001)] se analiza un mercado eléctrico en el que participan N empresas, con dos unidades de producción cada una de ellas bajo un modelo de subasta Uniforme. Considera que las empresas son asimétricas en cuanto a capacidades de producción, pero se limita a la búsqueda de Equilibrios Bayesianos de Nash simétricos.

En [Schöne (2003)] se analiza un modelo en duopolio eléctrico, con idénticas capacidades bajo un modelo de subasta Uniforme.

Las dos aportaciones fundamentales de este trabajo son que se va a analizar una amplia familia de modelos de subasta y se va a modelar el Mercado Eléctrico como un juego Bayesiano, es decir un juego de información incompleta. Se ha supuesto que las empresas tienen cierta incertidumbre acerca de la función de costes de las empresas contrarias. Esta hipótesis de costes estocásticos está motivada por la existencia de contratos privados para la compra de materia prima, por la posibilidad de almacenamiento de ésta, por gestiones internas desconocidas por las otras empresas....Además de suponer que los costes son estocásticos, en este trabajo se han establecido hipótesis menos restrictivas que en los trabajos mencionados, como podrá observarse en la breve descripción de los capítulos que se da a continuación.

Este trabajo se divide en seis capítulos que pasamos a resumir:

En el Capítulo 1 se presenta una breve introducción a la Teoría de Subastas [Burguet (2000), Klemperer (1999)] y a Juegos Bayesianos. Se presenta, en la sección 1.3.3., el principal resultado de la Teoría de Subastas: *Teorema de Equivalencia de Ingresos* para subastas de un objeto [Myerson 1981]. Este teorema afirma que cualquier modelo de subasta que asigne el objeto de la misma forma y dé el mismo pago esperado a un pujador con valoración nula, da el mismo pago esperado a cada pujador y el mismo ingreso esperado al subastador. Este resultado se generaliza a subasta de múltiples objetos, siempre y cuando cada pujador esté interesado en un único objeto (*demanda unitaria*). No se cumple, en general, si los pujadores quieren obtener más de un objeto, como ocurre en el Mercado Eléctrico: en el Mercado Eléctrico una empresa i está dispuesta a despachar entre 0 y un máximo de k_i unidades en un periodo (donde k_i es la capacidad de producción de dicha empresa).

Se generaliza el *Teorema de Equivalencia de Ingresos* para subastas de un objeto [Myerson 1981] en la sección 1.4.2., a la subasta múltiple siguiente: la subasta de m objetos idénticos más uno heterogéneo. Lo llamamos *Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado*. Como caso particular de este tipo de subasta se encuentra la subasta eléctrica de D unidades entre n empresas con idéntica capacidad de producción k, donde la suma de las capacidades nk es mayor que D. En ese caso entran en el mercado, para despachar, las empresas con las $m+1$ menores ofertas (con $mk < D < (m+1)k$) donde las m primeras despachan k unidades y, la última en entrar, la demanda restante hasta satisfacer D.

En el Capítulo 2 partimos de un mercado en duopolio donde la capacidad de producción de ambas empresas la consideramos idéntica y, además, suponemos que se trata de un modelo de valoraciones privadas e independientes. Calculamos bajo toda una familia de modelos de subasta (que incluye en particular tres modelos conocidos: Uniforme, Discriminatoria y de Vickrey) los equilibrios Bayesianos de Nash e ingresos esperados por las empresas. Demostramos que se verifican las hipótesis del Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado y, como corolario, que cualquiera de los modelos de subasta de la familia considerada son equivalentes en cuanto a ingresos esperados por las empresas y pago que espera hacer el Operador del Mercado por la demanda eléctrica.

En el Capítulo 3 variamos las hipótesis del Capítulo 2 y consideramos un mercado en duopolio donde las empresas tiene capacidades de producción iguales pero las valoraciones privadas son correladas. Esta hipótesis es más apropiada en determinadas circunstancias en las que pudiese haber gran influencia de factores comunes en el coste de producción. Bajo esta nueva hipótesis no se obtiene un resultado de equivalencia de ingresos. Lo que se hace es un análisis comparativo para establecer la ventaja de un modelo frente a los restantes.

En el Capítulo 4 variamos las hipótesis del Capítulo 2 y consideramos un mercado en duopolio pero donde las empresas tiene capacidades de producción diferentes. En este caso el cálculo de los equilibrios Bayesianos de Nash se complica considerablemente, ya que esa asimetría en las capacidades de producción implica que sean diferentes los pagos de las empresas generadoras y que los Equilibrios Bayesianos de Nash sean asimétricos. No se obtiene un resultado de equivalencia de ingresos y lo que hacemos es un análisis comparativo para establecer la ventaja de un modelo frente a los restantes.

En el Capítulo 5, la variante respecto de las hipótesis del Capítulo 2 es que se consideran dos empresas pero una de ellas posee dos unidades de producción. Es decir, hay tres pujas correspondientes a tres generadores distintos, pero dos de ellas pertenecen a la misma empresa y, por tanto, cooperan entre ellas. Nuevamente la asimetría en este modelo en las unidades de producción obliga a la búsqueda de Equilibrios Bayesianos de Nash, en principio no simétricos. Se analiza nuevamente una familia de modelos de subasta (que incluye en particular tres modelos clásicos: Uniforme, Discriminatoria y de Vickrey).

En el Capítulo 6 se resumen los resultados obtenidos y la conclusiones alcanzadas en este trabajo. Se implementa el modelo de subasta de Vickrey en un caso muy general. Además se plantean algunas variantes y medidas que podrían mejorar los resultados obtenidos en un Mercado Eléctrico.

Con la idea de que cada capítulo de este trabajo sea autocontenido, en la Sección 1 de los capítulos 2, 3 ,4 y 5, en la que se establece las hipótesis del modelo de mercado que se van a suponer, se repiten algunas definiciones y la descripción de los modelos clásicos de subasta.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se dan algunas definiciones y resultados que forman parte de la base teórica que sustenta este trabajo.

En la sección 1.1. se hace una descripción de los principales modelos de subasta de un objeto [Burguet (2000)]. Una subasta en el contexto de este trabajo se va a modelizar como un juego bayesiano: cada jugador desconoce la valoración que el resto de jugadores atribuye al bien a subastar. Por ello, en la sección 1.2. se presenta una introducción a dichos juegos [Gibbons (1997)].

En la Sección 1.3. se modela una subasta como un caso particular de juego bayesiano. En las secciones 1.4. y 1.5. se resumen los resultados existentes en los principales modelos de valoraciones privadas de un objeto y varios objetos, respectivamente.

En particular, en 1.4.2. se recoge uno de los principales resultados de Teoría de Subastas: el *Teorema de Equivalencia de Ingresos* en modelos de subasta de un objeto [Myerson (1981)]. Este teorema no siempre puede generalizarse si alteramos las hipótesis de las que se parte.

En subastas de múltiples objetos no se verifica, en general, el Teorema de Equivalencia de Ingresos [Ausubel y Cramton (2002)]. No obstante, en 1.5.2. generalizaremos el Teorema de Equivalencia de Ingresos para subastas de un objeto [Myerson (1981)] a la subasta múltiple siguiente: la subasta de m objetos idénticos más uno heterogéneo. Lo denominaremos *Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado*. Como veremos en el Capítulo 2, lo utilizaremos para establecer ciertas condiciones bajo las que obtendremos un resultado de equivalencia de ingresos en el Mercado Eléctrico.

1.1 Breve descripción de los principales modelos de subasta

Las subastas son utilizadas para la compraventa de productos muy dispares. Estos mecanismos persiguen garantizar la competencia y que el producto a subastar, finalmente, sea adjudicado a aquel o aquellos que hagan las mejores ofertas. La teoría de subastas permite modelizar los diseños más adecuados para cada mercado particular.

Vamos a describir algunos de los modelos más conocidos de subasta de un objeto. En todos ellos se supondrá que todo comprador potencial posee una valoración del objeto a subastar, que sólo él conoce, antes de dar comienzo la subasta.

1.1.1 Subasta Inglesa

Se desarrolla de la siguiente forma:

- El vendedor comienza anunciando un precio de salida (precio mínimo aceptado o de reserva).
- Solicita de los compradores, sucesivamente, ofertas cada vez mayores hasta que ninguno de los presentes aumente la última oferta.
- El objeto es vendido al comprador que hizo la última oferta y que es, por tanto, la más alta. Paga por él exactamente el precio que ofertó.

Decimos que se trata de una *subasta abierta* ya que las ofertas se lanzan en presencia del resto de competidores. Cada participante obtiene información sobre la valoración que el resto de jugadores tiene del bien a medida que se desarrolla la subasta.

1.1.2 Subasta Holandesa

Se desarrolla de la siguiente forma:

- El vendedor comienza anunciando un precio de salida altísimo que va bajando progresivamente hasta que un comprador acepta la oferta.
- El ganador es el primero que acepta la oferta y paga por el objeto exactamente el precio que ofertó.

Observemos que en este caso, un jugador no obtiene información relevante sobre las valoraciones del resto de los participantes hasta que es demasiado tarde. Se trata también de una subasta abierta.

1.1.3 Subasta en sobre cerrado al Primer Precio

Se desarrolla de la siguiente forma:

- Los participantes hacen sus ofertas en sobres cerrados.
- Se descubren las ofertas y se determina el ganador que es el que hizo la máxima oferta. Éste paga por el objeto exactamente el precio que ofertó.

Cuando se subastan varios objetos idénticos, se clasifican las ofertas de mayor a menor y se distribuyen las unidades entre los que más ofrecen, hasta que se agotan. Cada ganador pagará, no una cantidad común, sino lo que cada uno ofreció. Por ello decimos que se trata de una subasta *discriminatoria*.

1.1.4 Subasta en sobre cerrado al Segundo Precio

Se desarrolla de la siguiente forma:

- Los participantes hacen sus ofertas en sobres cerrados.
- Se abren las ofertas y se determina el ganador que es el que hizo la máxima oferta pero no paga la oferta que él hizo, es decir, la más alta de todas, sino la segunda más alta (la más alta rechazada).

Por ejemplo, si participan tres compradores A, B y C, cuyas ofertas son respectivamente 30, 40 y 50, gana C pero paga 40.

Cuando se subastan varios objetos idénticos, se clasifican las ofertas de mayor a menor y se distribuyen las unidades entre los que más ofrecen hasta que se agotan, pero todos los ganadores pagan lo mismo (*subasta no discriminatoria o Uniforme*): la oferta rechazada más alta.

A lo largo de este trabajo los modelos de subasta que se analizan son modelos de subasta en sobre cerrado. Por ello centraremos nuestra atención en subastas de este tipo.

1.2 Juegos bayesianos estáticos

Como en los modelos de subasta que se van a considerar en este trabajo para un jugador existe incertidumbre sobre el resto de jugadores, se darán las principales definiciones relacionadas con los juegos de información incompleta.

Definición 1.2.1 *Un juego no cooperativo es de información incompleta si al menos un jugador tiene incertidumbre acerca de la función de ganancias de otro jugador.*

En el caso de una subasta de valoraciones privadas un jugador conoce la valoración que le asigna al bien a subastar, pero no está seguro de las valoraciones que resto de participantes asignan y, por tanto, tiene incertidumbre acerca de la función de ganancias del resto de jugadores.

1.2.1 Representación en forma normal de un juego bayesiano estático

Un juego bayesiano es una modelización de un juego de información incompleta. Los juegos bayesianos fueron introducidos por Harsanyi (1967-1968) y modelizan situaciones de incertidumbre sobre la función de pagos de los competidores. Un juego bayesiano estático con n jugadores está compuesto por los siguientes elementos:

- Los conjuntos de acciones factibles Ω_i para cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$.
- Los conjuntos de tipos Θ_i para cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$. Para recoger la incertidumbre que cada jugador tiene acerca de las funciones de ganancias del resto de jugadores, introducimos una variable aleatoria θ_i llamada *tipo* del jugador i. Para cada jugador i, $\theta_i \in \Theta_i$ es información que sólo i conoce y que el resto de jugadores no. De la misma manera, el jugador i desconoce el tipo de los restantes jugadores. Se denotará por Θ_{-i} el conjunto de todos los posibles valores θ_{-i} de los tipos restantes.
- La distribución a priori de probabilidad $\pi(\theta) = \pi(\theta_1, ..., \theta_n)$ de la variable aleatoria vectorial cuyas componentes son los tipos de los n jugadores y que es de conocimiento público[1].
- Las funciones de ganancia $B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i)$ de cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$ donde $b_i \in \Omega_i$. Cada valor del tipo θ_i determina una de las funciones de ganancias que el jugador i

[1] No sólo es conocida por el jugador i, sino que el resto de jugadores sabe que el jugador i la conoce, y a su vez, el jugador i, sabe que el resto de jugadores saben que él la conoce...

puede tener. Luego si el jugador i desconoce el tipo de otro jugador j, implica que i tiene incertidumbre sobre la función de ganancia del jugador j.

Una forma de modelizar la incertidumbre y posterior conjetura sobre los tipos contrarios en un juego bayesiano, propuesta por Harsanyi (1967-1968), es describir el juego de manera secuencial donde el azar revela en privado a cada jugador su tipo:

1. El azar determina un vector de tipos $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ según la distribución a priori de probabilidad $\pi(\theta)$.
2. El azar revela θ_i al jugador i, pero a ningún otro jugador.
3. Los jugadores eligen sus acciones simultáneamente $(b_1, ..., b_n)$.
4. Cada jugador i recibe su ganancia $B_i\,(b_1, ..., b_n; \theta_i)$.

Al añadir la figura del azar, se describe el juego de información incompleta como un juego en forma extensiva de información imperfecta (al menos un jugador no conoce la historia completa de juego).

En principio, al desconocer el jugador i los tipos del resto de jugadores deberá conjeturar acerca de éstos. Dichas conjeturas pueden ser no consistentes. Es por ello que en los juegos bayesianos se establece que estas conjeturas procedan del cálculo, mediante la regla de Bayes (de ahí el nombre de este tipo de juegos), de la distribución de probabilidad de los tipos del resto de jugadores, condicionada al conocimiento del propio tipo, partiendo de la distribución a priori de probabilidad $\pi(\theta)$. Es decir:

$$\pi_i\,(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{\pi(\theta)}{\pi\,(\theta_i)}$$

La representación en forma normal de un juego considera los espacios de acciones de todos los jugadores, las funciones de ganancias de todos los jugadores y, además, si se trata de un juego bayesiano estático, los espacios de tipos y la distribución a priori de probabilidad $\pi(\theta)$.

Definición 1.2.2 *La representación en forma normal de un juego bayesiano estático con n jugadores viene dada por:*

$$G = \{\Omega_1, ..., \Omega_n; \Theta_1, ..., \Theta_n; \pi; B_1, ..., B_n\}$$

donde para cada $i \in \{1,...,n\}$, Ω_i *es el espacio de acciones,* Θ_i *el conjunto de tipos,* π *la distribución a priori de probabilidad del vector de tipos de la que* i *obtiene las conjeturas sobre los tipos restantes mediante la regla de Bayes y* B_i *la función de ganancias. El tipo del jugador* i, θ_i, *es conocido sólo por el jugador* i *y determina la función de ganancias del jugador* i, $B_i(b_1,...,b_n;\theta_i)$.

1.2.2 Equilibrio bayesiano de Nash

Una estrategia no va a ser sencillamente la elección de una acción, sino la elección de una acción para cada posible situación (cada valor del tipo) en la que pudiera encontrarse el jugador i.

Definición 1.2.3 *En el juego bayesiano estático* $G = \{\Omega_1,...,\Omega_n;\Theta_1,...,\Theta_n;\pi;B_1,...,B_n\}$, *una estrategia del jugador* i *es una función* $b_i(\theta_i) : \Theta_i \to \Omega_i$ *que a cada valor del tipo* θ_i *le hace corresponder una acción. El espacio de estrategias del jugador* i *es el conjunto de todas las posibles funciones de* Θ_i *en* Ω_i.

El pedir que la estrategia del jugador i sea un plan completo de acciones factibles para cada valor del tipo que pueda tener el jugador i, no es innecesario: el jugador i analiza lo que va a hacer el resto de jugadores, y lo que hagan depende de lo que piensen que hará i para cada uno de sus tipos.

La definición de equilibrio en juegos bayesianos es similar que en otros tipos de juegos. La estrategia elegida por cada jugador debe ser la mejor respuesta a las estrategias elegidas por el resto de jugadores.

Definición 1.2.4 *En el juego bayesiano* $G = \{\Omega_1,...,\Omega_n;\Theta_1,...,\Theta_n;\pi;B_1,...,B_n\}$, *el vector de estrategias* $(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))$ *es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras si para todo* $i \in \{1,...,n\}$ *y para todo* $\theta_i \in \Theta_i$,

$$b_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{b_i \in \Omega_i} \int B_i\left(b_1^*(\theta_1),...,b_{i-1}^*(\theta_{i-1}),b_i,b_{i+1}^*(\theta_{i+1}),...,b_n^*(\theta_n);\theta_i\right) d\pi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$$

donde $\pi_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{\pi(\theta)}{\pi(\theta_i)}$.

Se dice que un jugador tiene una *estrategia dominante* si la elección de ésta es siempre la que le reporta pago máximo independientemente de las estrategias elegidas por el resto de competidores. En toda esta memoria se buscarán equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, por ello cuando nos refiramos a equilibrios bayesianos de Nash se referirá a equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras.

1.3 Modelos de Subasta

En este trabajo una subasta será un caso particular de juego bayesiano estático. Para dar su forma normal debemos identificar: el espacio de acciones de los jugadores, el espacio de tipos de los jugadores, las conjeturas que hace cada jugador sobre los tipos restantes a partir de la distribución a priori de probabilidad y las funciones de ganancias de los jugadores. Además supondremos que la funciones de ganancia de todos los jugadores vienen dadas por los beneficios monetarios. Es decir, se considerarán que los jugadores son neutrales al riesgo.

Definición 1.3.1 *Una subasta S de un objeto con valoraciones privadas es un juego bayesiano con n jugadores representado en forma normal como:*

$$S = \{\Omega_1, ..., \Omega_n; \Theta_1, ..., \Theta_n; \pi; B_1, ..., B_n\}$$

Una acción del jugador i es una puja, b_i. El espacio de acciones es el espacio de pujas factibles Ω_i. La valoración que el jugador i asigna al bien a subastar es el tipo del jugador i, θ_i. El espacio de tipos del jugador i, Θ_i es el espacio en el que se distribuye la variable aleatoria θ_i. La conjetura del jugador i sobre el resto de los tipos es $\pi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ y se obtiene mediante la regla de Bayes a partir de $\pi(\theta_1, ..., \theta_n)$ que es la distribución a priori de probabilidad del vector de valoraciones. La función de ganancia del jugador i (beneficios) será una función a trozos formada por la diferencia entre su valoración θ_i y lo que tiene que pagar, si gana, y cero en otro caso:

$$B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - \rho_i(b_1, ..., b_n) & \textit{si gana} \\ 0 & \textit{si pierde} \end{cases}$$

donde $\rho_i(b_1, ..., b_n)$ es el precio a pagar por i si las pujas de los jugadores son $(b_1, ..., b_n)$. Por último, una estrategia del jugador i será una función $b_i(\theta_i)$ definida de Θ_i en Ω_i, que determina la oferta que hará el jugador i si su tipo es θ_i.

Las funciones de ganancias de los jugadores quedarán completamente determinadas, para cada uno de ellos, al concretar las reglas que determinan la selección de ofertas (selección del ganador) y precio de venta. Por ello se define:

Definición 1.3.2 *Una regla de asignación para la subasta de un objeto S es un conjunto de funciones*

$$\{\rho_i^S(b_1, ..., b_n), \chi_i^S(b_1, ..., b_n)\}_{i=1}^n$$

donde: $\rho_i^S(b_1, ..., b_n)$ es el pago que el jugador i debe hacer y $\chi_i^S(b_1, ..., b_n)$ la probabilidad de que el jugador i gane el objeto, si $(b_1, ..., b_n)$ es el vector de pujas y cada jugador conoce su propia valoración.

Definición 1.3.3 *Un modelo de subasta de un objeto es una subasta (juego bayesiano estático) donde se ha fijado una regla de asignación.*

De tal manera que en un modelo de subasta S la función de ganancia de cada jugador queda determinada por la regla de asignación fijada:

$$B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i) = \left(\theta_i - \rho_i^S(b_1, ..., b_n)\right) \chi_i^S(b_1, ..., b_n)$$

Obsérvese que una vez conocidas las pujas la regla de asignación es determinista. Sin embargo, a priori el jugador i desconoce las valoraciones que el resto de jugadores asigna al bien a subastar y por tanto, las pujas que estos van a emplear.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.3.4 *Consideremos el siguiente modelo de subasta S: se va a subastar un objeto entre dos participantes, de tal forma que cada jugador asigna una valoración privada θ_i al objeto. Supongamos que las valoraciones de los dos jugadores θ_1 y θ_2 son v.a.i.i.d. en un intervalo $[a_1, a_2]$, con distribución a priori de probabilidad π. Los participantes entregan sus pujas simultáneamente. La puja más alta gana la subasta y el ganador paga el precio de su puja, mientras que el otro participante tiene ganancia cero. Supondremos que los participantes son neutrales al riesgo y que todo lo anterior es del dominio público. Veamos cual sería la representación normal de este juego bayesiano estático:*

$$S = \{\Omega_1, \Omega_2; \Theta_1, \Theta_2; \pi; B_1, B_2\}$$

La acción del jugador i es entregar una puja no negativa b_i, donde el espacio de acciones de cada jugador es $\Omega_i = [0, \infty)$. Su tipo es su valoración θ_i y el espacio de tipos $\Theta_i = [a_1, a_2]$. La *regla de asignación en este caso es*

$$\{\rho_i^S(b_1,b_2),\chi_i^S(b_1,b_2)\}_{i=1}^2$$

donde

$$\rho_i^S(b_1,b_2)=b_i$$

$$\chi_i^S(b_1,b_2)=Prob\,(b_i>b_j)$$

Luego la función de ganancias del jugador i es:

$$\begin{aligned} B_i(b_1,b_2;\theta_i) &= \left(\theta_i-\rho_i^S(b_1,b_2)\right)\chi_i^S(b_1,b_2) \\ &= \begin{cases} \theta_i - b_i & si \quad b_i > b_j \\ 0 & si \quad b_i < b_j \end{cases} \end{aligned}$$

Nos queda por determinar los espacios de estrategias. Para el jugador i una estrategia es una función $b_i(\theta_i)$ definida de su espacio de tipos a su espacio de acciones, que determina la puja que elegirá para cada uno de sus tipos. El beneficio esperado por el jugador $i\in\{1,2\}$ viene dado por

$$BM_i(b_i,b_j\left(\theta_j\right);\theta_i)=(\theta_i-b_i)Prob(b_i>b_j\left(\theta_j\right))$$

Obsérvese que un par de estrategias, $(b_1^*(\theta_1),b_2^*(\theta_2))$, será un equilibrio bayesiano de Nash si, para cada θ_i en $[a_1,a_2]$, $b_i^*(\theta_i)$ es una solución de:

$$\max_{b_i}(\theta_i-b_i)Prob(b_i>b_j^*\left(\theta_j\right))$$

Definición 1.3.5 *Diremos que un modelo de subasta es eficiente si los ganadores son los que mayor valoración asignan a la mercancía a subastar.*

1.3.1 Principio de Revelación

El Principio de Revelación aplicado a modelos de subasta [Myerson (1981)] es una herramienta útil para el diseño de éstas. Supongamos que las valoraciones de los jugadores $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ son v.a.i.i.d. en $[a_1,a_2]$, absolutamente continuas con función de densidad $f\left(\theta_i\right)$. El Principio de Revelación afirma que podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a aquellos modelos de subasta en los que la estrategia de cada jugador consistente en declarar su verdadero tipo es equilibrio.

Definición 1.3.6 *Un modelo de subasta se dice que es un mecanismo directo si la única acción de un jugador es hacer una declaración sobre su tipo.*

Definición 1.3.7 *Un mecanismo directo es de incentivos compatibles si para todos los jugadores declarar la verdad sobre su tipo es equilibrio bayesiano de Nash. Es decir, para cada jugador la función identidad es estrategia en equilibrio.*

Lema 1.3.8 ***Principio de Revelación.***

Sea S un modelo de subasta de un objeto con n pujadores y con un único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n))$. Sea

$$\{\rho_i^S(b_1, ..., b_n), \chi_i^S(b_1, ..., b_n)\}_{i=1}^n$$

la regla de asignación de S.

Sea $\widetilde{S}$ el mecanismo directo asociado a S cuya regla de asignación es

$$\{\rho_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \chi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n$$

donde $\rho_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n) = \rho_i^S(b_1^*(t_1), ..., b_n^*(t_n))$, $\chi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n) = \chi_i^S(b_1^*(t_1), ..., b_n^*(t_n))$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$ y $(t_1, ..., t_n)$ representa las declaraciones de los n jugadores sobre su tipo.

Entonces se verifica

i) $\widetilde{S}$ es un mecanismo directo de incentivos compatibles y, por tanto, tiene como equilibrio bayesiano de Nash a $(\theta_1, ..., \theta_n)$.

ii) Ambos modelos dan el mismo pago esperado a todos los pujadores y el mismo ingreso esperado al subastador.

Es decir, si evaluamos la regla de asignación de S en el equilibrio bayesiano de Nash, se obtiene:

$$\{\rho_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n)), \chi_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n))\}_{i=1}^n = \{\widetilde{\rho}_i(\theta_1, ..., \theta_n), \widetilde{\chi}_i(\theta_1, ..., \theta_n)\}_{i=1}^n$$

donde $\widetilde{\rho}_i(\theta_1, ..., \theta_n)$ es el precio que el jugador i debe pagar al subastador y $\widetilde{\chi}_i(\theta_1, ..., \theta_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane el objeto, si $(\theta_1, ..., \theta_n)$ es el vector de tipos. Automáticamente se tiene definido un nuevo modelo de subasta $\widetilde{S}$ asociado a S que es mecanismo directo y cuya regla de asignación es

$$\{\rho_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \chi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n = \{\widetilde{\rho}_i(t_1, ..., t_n), \widetilde{\chi}_i(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n$$

donde $(t_1, ..., t_n)$ representa las declaraciones de cada jugador sobre su tipo. Este nuevo modelo de subasta $\widetilde{S}$ es de incentivos compatibles y, por tanto, tiene como equilibrio bayesiano de Nash a $(\theta_1, ..., \theta_n)$. Además por construcción, al evaluar la regla de asignación del mecanismo asociado $\widetilde{S}$ en su equilibrio, observamos que tanto el pago de un jugador, como la probabilidad de que un jugador gane el objeto, coinciden en el modelo de subasta inicial y en el modelo de subasta asociado. Es decir, ambas reglas de asignación evaluadas en sus respectivos equilibrios bayesianos de Nash coinciden y, por tanto, dan el mismo pago esperado a todos los pujadores y el mismo ingreso esperado al subastador.

Por otro lado, dado un modelo de subasta cualquiera con un único equilibrio bayesiano de Nash, el argumento que maximiza las funciones beneficio esperado evaluadas en dicho equilibrio, aplicando el Principio de Revelación, puede identificarse con la acción decir la verdad, ya que:

Sea $\widetilde{S}$ el mecanismo directo con regla de asignación $\{\rho_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \chi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n$ asociado al modelo de subasta S. El beneficio esperado por el jugador i, si éste declara t_i sobre su tipo y el resto de jugadores confiesa el verdadero tipo, viene dado por:

$$
\begin{aligned}
BM_i^{\widetilde{S}}(t_i) &= \int_{\Theta_{-i}} B_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\
&= \int_{\Theta_{-i}} \left(\theta_i - \rho_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\right) \chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\
&= \theta_i \int_{\Theta_{-i}} \chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} - \int_{\Theta_{-i}} \rho_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) \chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\
&= \theta_i x_i^S(t_i) - P_i^S(t_i)
\end{aligned}
$$

donde $x_i^S(t_i) = E_{\Theta_{-i}}\left[\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\right]$ y $P_i^S(t_i) = E_{\Theta_{-i}}\left[\rho_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\right]$. Como $\widetilde{S}$ es un mecanismo directo de incentivos compatibles, entonces $\forall \theta_i \in [a_1, a_2]$ se verifica

$$
\theta_i = \arg \max_{t_i \in [a_1, a_2]} BM_i^{\widetilde{S}}(t_i) = \arg \max_{t_i \in [a_1, a_2]} \left(\theta_i x_i^S(t_i) - P_i^S(t_i)\right)
$$

Nota 1.3.9 *En todo este último desarrollo se ha supuesto que cada jugador paga solamente si gana el objeto a subastar. El Principio de Revelación se puede generalizar al caso en el que un jugador también pague si no gana el objeto.*

1.4 Modelos de subastas de un único objeto y valoraciones privadas

En esta sección se analizan los dos modelos principales de subasta en sobre cerrado descritos en la Sección 1.1. partiendo de un conjunto de hipótesis iniciales. Se verá que, bajo dichas hipótesis, los dos modelos de subastas mencionados son equivalentes, en cuanto a pago esperado por los jugadores e ingreso esperado por el subastador. Esas hipótesis iniciales son las siguientes:

Se va a considerar la subasta de un único objeto. En ella participarán n jugadores neutrales al riesgo donde θ_i será la valoración que el jugador i asigna al objeto a subastar, $i \in \{1, ..., n\}$.

El vector $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ es aleatorio, de tal manera que $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ son v.a.i.i.d. en $\Theta = [a_1, a_2]$ y sólo el jugador i-ésimo observa la realización de θ_i. Sea F función de distribución de θ_i, acotada en $\Re$, absolutamente continua y de conocimiento público. Sea f la función de densidad de θ_i. Una estrategia para el jugador i será una función de oferta $b_i(\theta_i)$ que se supondrá estrictamente creciente y diferenciable para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Bajo estas hipótesis nos encontramos en un modelo de subasta de un único objeto, valoraciones independientes e idénticamente distribuidas y jugadores neutrales al riesgo, que llamaremos **Modelo Simétrico básico de un objeto**.

1.4.1 Equilibrios bayesianos de Nash en los principales modelos de subastas en sobre cerrado

Se enunciarán los equilibrios bayesianos de Nash en cada uno de los dos modelos en sobre cerrado descritos en la Sección 1.1..

Subasta en sobre cerrado al Segundo Precio

El beneficio del jugador $i \in \{1, ..., n\}$ en este modelo de subasta es:

$$B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - b_{(2)} & \text{si} \quad b_i > b_j(\theta_j) \ \forall i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde $b_{(2)}$ representa la segunda mayor oferta.

Proposición 1.4.1 *En un modelo de subasta en sobre cerrado al Segundo Precio el vector de estrategias $(\theta_1, ..., \theta_n)$ es equilibrio bayesiano de Nash. Además $b^*(\theta_i) = \theta_i$ es estrategia dominante* *para cada jugador.*

Obsérvese que al ser $b^*(\theta_i) = \theta_i$ una función creciente, el ganador sigue siendo el que más valora el objeto y, por tanto, el modelo es eficiente.

Subasta en sobre cerrado al Primer Precio

El beneficio del jugador $i \in \{1, ..., n\}$ en este modelo de subasta es:

$$B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - b_i & \text{si} \quad b_i > b_j(\theta_j) \ \forall i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 1.4.2 *En el caso de modelo de subasta en sobre cerrado al Primer Precio la estrategia en equilibrio para el jugador $i \in \{1, ..., n\}$ es:*

$$b^*(\theta_i) = \theta_i - \int_{a_1}^{\theta_i} \left(\frac{F(x)}{F(\theta_i)}\right)^{n-1} dx$$

Además $b^*(\theta_i)$ tiende a θ_i cuando n tiende a infinito.

Obsérvese que al ser $b^*(\theta_i)$ una función creciente, el ganador sigue siendo el que más valora el objeto y, por tanto, el modelo es eficiente.

Nota 1.4.3 *Bajo las hipótesis del Modelo Simétrico básico de un objeto se demuestra que la subasta Inglesa y la subasta en sobre cerrado al Segundo Precio son equivalentes en cuanto a ingresos esperados. Lo mismo ocurre con la subasta Holandesa y la subasta en sobre cerrado al Primer Precio. Pero es que, en realidad, estos cuatro modelos, bajo dichas hipótesis, rentan lo mismo tanto a los pujadores como al subastador.*

1.4.2 Teorema de equivalencia de ingresos

La estrategia que puede emplear el subastador es elegir el modelo de subasta que va a regir la transacción. Luego buscar su estrategia óptima para él es buscar el modelo de subasta que maximice su beneficio.

Los siguientes resultados nos demuestran que bajo las hipótesis del modelo inicial, los cuatro modelos de subastas descritos dan el mismo ingreso esperado al subastador y los mismos pagos esperados a los pujadores. Esto implica que la elección de la subasta no es crucial porque cada modelo rinde, en promedio, el mismo beneficio.

Proposición 1.4.4 *En los modelos de subasta en sobre cerrado al Primer y Segundo Precio el ingreso esperado por el subastador y los pagos esperados por los pujadores coinciden (y por tanto en los cuatro modelos considerados en la primera sección).*

Esta coincidencia no es casual, bajo las hipótesis del Modelo Simétrico inicial de un objeto, cualquier modelo de subasta que asigne el objeto de la misma forma y dé el mismo pago esperado a un comprador con valoración mínima, da el mismo pago esperado a cada comprador y, por tanto, el mismo ingreso esperado al vendedor.

En general si la regla de asignación en un modelo de subasta S es:

$$\{\rho_i^S(b_1,...,b_n),\chi_i^S(b_1,...,b_n)\}_{i=1}^n$$

y existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))$, evaluando la regla de asignación en dicho equilibrio se obtiene

$$\{\rho_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n)),\chi_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))\}_{i=1}^n=\{\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\}_{i=1}^n$$

De tal forma que $\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es el precio que el jugador i debe pagar al subastador y $\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane el objeto, si $(\theta_1,...,\theta_n)$ es el vector de tipos. Luego

$$P_i^S(\theta_i)=E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)] \text{ y } x_i^S(\theta_i)=E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)]$$

son, respectivamente, el precio que jugador i espera pagar si gana y la probabilidad esperada de que el jugador i obtenga el objeto, si su tipo es θ_i. Se tiene el siguiente resultado conocido por el Teorema de Equivalencia de Ingresos [Myerson 1981]:

Teorema 1.4.5 *Bajo las hipótesis del Modelo Simétrico básico de un objeto, sean S_1 y S_2 dos modelos de subasta de un objeto que cumplen que $x_i^{S_1}(\theta_i)=x_i^{S_2}(\theta_i)$, $\forall\theta_i\in[a_1,a_2]$ y $P_i^{S_1}(a_1)=P_i^{S_2}(a_1)$. Entonces $P_i^{S_1}(\theta_i)=P_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall\theta_i\in[a_1,a_2]$. Además $P_i^{S_1}(\theta_i)=\int_{a_1}^{\theta_i}t\left(x_i^{S_1}(t)\right)'dt+P_i^{S_1}(a_1)$.*

Obsérvese que, en particular, implica la equivalencia de los cuatro modelos de subasta clásicos, ya que en todos ellos el objeto subastado se asigna de la misma forma (al jugador de mayor valoración $x_i(\theta_i)=F(\theta_i)^{n-1}$) y un jugador de valoración mínima[2] está seguro de pagar cero $(P_i(a_1)=0)$.

[2]En la literatura se suele tomar $a_1=0$ y por ello se habla de valoración nula. En este trabajo llamaremos valoración mínima a tener valoración a_1 que es la mínima valoración que un pujador puede asignar al bien a subastar.

1.5 Modelos de subastas con múltiples objetos idénticos y valoraciones privadas

En esta sección vamos a tratar el caso en el que se subastan varias unidades homogéneas de cierta mercancía. Es decir, se van a subastar D objetos idénticos entre n jugadores neutrales al riesgo. Se supondrá que todos los jugadores quieren comprar una misma cantidad máxima de unidades del bien. Se representará, al igual que antes, con θ_i al tipo del que dependerá la valoración que el jugador i asigna a cada objeto, $i \in \{1, ..., n\}$.

Se supondrá que el vector $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ es aleatorio, de tal manera que $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ son v.a.i.i.d. en $[a_1, a_2]$. Además, sólo el jugador i-ésimo observa la realización de θ_i. Sea F función de distribución de θ_i, acotada en $\Re$, absolutamente continua y de conocimiento público. Sea f la función de densidad de θ_i. Una estrategia para el jugador i será una función de oferta $b_i(\theta_i)$ que se supondrá estrictamente creciente y diferenciable para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Bajo estas hipótesis nos encontramos en un modelo de subasta de múltiples objetos idénticos, valoraciones independientes e idénticamente distribuidas y jugadores neutrales al riesgo, que llamaremos **Modelo Simétrico inicial de múltiples objetos idénticos**.

Veremos qué resultados pueden generalizarse de los vistos en secciones anteriores.

1.5.1 Cada comprador interesado en un único objeto

En este caso, el vendedor va a subastar D objetos idénticos entre n (con $n > D$) compradores potenciales interesados, cada uno de ellos, en un único objeto. Se le suele llamar modelo de *demanda unitaria*. Un ejemplo de modelo con demanda unitaria es la subasta de licencias de móviles, donde cada empresa está interesada en una única licencia.

Llamaremos *subasta en sobre cerrado de Precio Uniforme* a la generalización de la subasta en sobre cerrado al Segundo Precio. En este modelo, cada jugador hace una oferta y ganan las D-ésimas mayores ofertas, pagando todos por su objeto la oferta $(D + 1)$-ésima mayor.

Se demuestra que en este modelo la estrategia $b^*(\theta_i) = \theta_i$ es dominante para cada jugador $i \in \{1, ..., n\}$.

Llamaremos *subasta en sobre cerrado de Precio Discriminatorio* a la generalización de la subasta en sobre cerrado al Primer Precio. En este modelo, cada jugador hace una oferta y ganan las D-ésimas mayores ofertas, pagando ahora por su objeto justamente lo que ofertaron.

Se demuestra que el equilibrio bayesiano de Nash viene dado por las estrategias:

$$b^*(\theta_i) = \frac{\int_{a_1}^{\theta_i} x(n-1)\binom{n-2}{D-1} f(x)F(x)^{n-D-1}\left[1-F(x)\right]^{D-1} dx}{\int_{a_1}^{\theta_i} (n-1)\binom{n-2}{D-1} f(x)F(x)^{n-D-1}\left[1-F(x)\right]^{D-1} dx}$$

Por otra parte, se comprueba que un comprador con valoración θ_i que gana en esta subasta, tiene un pago esperado que coincide con el de la subasta de Precio Uniforme. Luego estos dos modelos son equivalentes para un comprador y, por tanto, para el vendedor. Es más, se demuestra [Burguet (2000)] que se verifica el Teorema de Equivalencia de Ingresos para el caso de subasta de D objetos idénticos donde cada comprador desea adquirir sólo uno.

1.5.2 Cada comprador interesado en más de un objeto.

El Teorema de Equivalencia de Ingresos no se verifica, en general, si la subasta es de múltiples objetos y los jugadores no tienen demanda unitaria [Maasland y Onderstal (2006); Ausubel y Cramton (2002)]. Nosotros lo hemos generalizado para un conjunto particular de modelos de subasta de múltiples objetos, con demanda no unitaria. Ese conjunto es el siguiente:

Definición 1.5.1 *Se denotará por $\mathcal{S}$ al conjunto de modelos de subasta verificando:*

-Hay D unidades idénticas de un bien a subastar entre $n > 1$ jugadores neutrales al riesgo dispuestos a comprar un máximo de k unidades del bien (con $D < kn$).

-$g(q_i, \theta_i)$ es la valoración que el jugador i asigna a q_i unidades del bien si su tipo[3] es θ_i.

-Siendo $D = km + \alpha$, con $m \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ y $\alpha \in [0, k)$, habrá m jugadores que ganarán k unidades y un jugador más que ganará el resto α unidades. El resto de jugadores, $n-(m+1)$, ni ganará ni pagará nada. La elección de los ganadores, así como el precio en las transacciones, lo determina la regla de asignación del modelo de subasta $S \in \mathcal{S}$ utilizado que, al ser de múltiples objetos, será de la forma:

$$\{\omega_i^S(b_1, ..., b_n), \rho_i^S(b_1, ..., b_n), \psi_i^S(b_1, ..., b_n), \chi_i^S(b_1, ..., b_n)\}_{i=1}^n$$

donde $\omega_i^S(b_1, ..., b_n)$ es el precio que paga el jugador i al subastador si gana α unidades; $\rho_i^S(b_1, ..., b_n)$ es el precio que paga el jugador i al subastador si gana k unidades; $\psi_i^S(b_1, ..., b_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane α unidades y, por último, $\chi_i^S(b_1, ..., b_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane k unidades, si las pujas son $b_1, ..., b_n$.

[3] Ahora el tipo recoge la información privada que sólo el jugador i posee acerca de cómo él valora las unidades del bien a subastar. La valoración dependerá también del número de unidades de mercancía.

-La función de beneficios del jugador i es:

$$\begin{aligned} B_i(b_1,...,b_n;\theta_i) &= \left(g(\alpha,\theta_i)-\omega_i^S(b_1,...,b_n)\right)\psi_i^S(b_1,...,b_n) \\ &\quad+\left(g(k,\theta_i)-\rho_i^S(b_1,...,b_n)\right)\chi_i^S(b_1,...,b_n) \end{aligned}$$

-Existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))$.

Si evaluamos la regla de asignación en el equilibrio se obtiene

$$\{\omega_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n)),\rho_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n)),\psi_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n)),\chi_i^S(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))\}_{i=1}^n=$$

$$\{\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\}_{i=1}^n$$

Donde $\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es el precio que el jugador i pagará al subastador si gana α unidades, $\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es el precio que el jugador i pagará al subastador si gana k unidades; $\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane α unidades y, finalmente, $\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es la probabilidad de que el jugador i gane k unidades, si los tipos son $\theta_1,...,\theta_n$.

Por otro lado denotaremos por

$$\begin{aligned} q_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}\left[\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n)\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\right] \\ p_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}\left[\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\right] \\ y_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)] \\ z_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)] \end{aligned}$$

al pago esperado por el jugador i si gana α unidades, al pago esperado por el jugador i si gana k unidades, la probabilidad esperada de que el jugador i gane α unidades y la probabilidad esperada de que el jugador i gane k unidades; si su tipo es θ_i, respectivamente. El pago total esperado por el jugador i, si su tipo es θ_i, viene dado por

$$P_i^S(\theta_i)=p_i^S(\theta_i)+q_i^S(\theta_i)$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.5.2 *Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado*

Bajo las hipótesis del Modelo Simétrico inicial de múltiples objetos idénticos, se consideran dos modelos de subasta S_1,$S_2\in\mathcal{S}$ *verificando que* $y_i^{S_1}(\theta_i)=y_i^{S_2}(\theta_i)$ *y* $z_i^{S_1}(\theta_i)=z_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall\theta_i\in[a_1,a_2]$ *y, además,* $P_i^{S_1}(a_1)=P_i^{S_2}(a_1)$. *Entonces* $P_i^{S_1}(\theta_i)=P_i^{S_2}(\theta_i)$, $\forall\theta_i\in[a_1,a_2]$.

Demostración. Dado un modelo de subasta $S \in \mathcal{S}$ con regla de asignación

$$\{\omega_i^S(b_1,...,b_n), \rho_i^S(b_1,...,b_n), \psi_i^S(b_1,...,b_n), \chi_i^S(b_1,...,b_n)\}_{i=1}^n$$

y único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1),...,b_n^*(\theta_n))$, si consideramos el mecanismo directo $\widetilde{S}$ asociado a S con regla de asignación

$$\begin{aligned} & \{\omega_i^{\widetilde{S}}(t_1,...,t_n), \rho_i^{\widetilde{S}}(t_1,...,t_n), \psi_i^{\widetilde{S}}(t_1,...,t_n), \chi_i^{\widetilde{S}}(t_1,...,t_n)\}_{i=1}^n \\ = \; & \{\widetilde{\omega}_i(t_1,...,t_n), \widetilde{\rho}_i(t_1,...,t_n), \widetilde{\psi}_i(t_1,...,t_n), \widetilde{\chi}_i(t_1,...,t_n)\}_{i=1}^n \end{aligned}$$

por el Principio de Revelación este modelo $\widetilde{S}$ es de incentivos compatibles.

Luego como el beneficio esperado por un jugador i, si su declaración es t_i y el resto de jugadores confiesan el verdadero tipo, bajo el modelo $\widetilde{S}$ viene dado por

$$\begin{aligned} BM_i^{\widetilde{S}}(t_i) &= \int_{\Theta_{-i}} g(\alpha, t_i)\psi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &+ \int_{\Theta_{-i}} g(k, t_i)\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &- \int_{\Theta_{-i}} \omega_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\psi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &- \int_{\Theta_{-i}} \rho_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &= g(\alpha, \theta_i) y_i^S(t_i) + g(k, \theta_i) z_i^S(t_i) - q_i^S(t_i) - p_i^S(t_i) \end{aligned}$$

Como los jugadores actúan de tal manera que maximicen su beneficio, usarán las estrategias que forman el equilibrio y, por el Principio de Revelación, obtenemos

$$\theta_i = \arg\max_{t_i}\{g(\alpha, \theta_i) y_i^S(t_i) + g(k, \theta_i) z_i^S(t_i) - q_i^S(t_i) - p_i^S(t_i)\}$$

quedando la ecuación

$$\left(p_i^S\right)'(\theta_i) + \left(q_i^S\right)'(\theta_i) = g(\alpha, \theta_i)\left(y_i^S(\theta_i)\right)' + g(k, \theta_i)\left(z_i^S(\theta_i)\right)'$$

integrando ambos lados se obtiene

$$p_i^S(\theta_i) + q_i^S(\theta_i) = \int_{a_1}^{\theta_i} g(k, t)\left(z_i^S(t)\right)' dt + \int_{a_1}^{\theta_i} g(\alpha, t)\left(y_i^S(t)\right)' dt + p_i^S(a_1) + q_i^S(a_1)$$

$$P_i^S(\theta_i) = \int_{a_1}^{\theta_i} g(k, t)\left(z_i^S(t)\right)' dt + \int_{a_1}^{\theta_i} g(\alpha, t)\left(y_i^S(t)\right)' dt + P_i^S(a_1)$$

Como $y_i^{S_1}(\theta_i) = y_i^{S_2}(\theta_i)$, $z_i^{S_1}(\theta_i) = z_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall \theta_i \in [a_1, a_2]$ y $P_i^{S_1}(a_1) = P_i^{S_2}(a_1)$ entonces $P_i^{S_1}(\theta_i) = P_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall \theta_i \in [a_1, a_2]$. $\blacksquare$

En otras palabras, si un jugador tiene, en dos modelos de subasta, la misma probabilidad de ganar k unidades del objeto a subastar dado su tipo, la misma probabilidad de ganar α unidades del objeto a subastar, dado su tipo, y el mismo pago esperado, si su tipo es a_1; entonces este jugador espera el mismo pago en ambos modelos de subasta, dado su tipo. Como el pago esperado por el subastador en un modelo de subasta S es $\sum_{i=1}^{n} \int_{a_1}^{a_2} P_i^S(\theta_i) f_i(\theta_i)\, d\theta_i$, también se verifica que el subastador espera el mismo ingreso en ambos modelos de subasta.

Podemos observar que normalizando y considerando la demanda máxima común $k = 1$, la subasta descrita se puede interpretar como la subasta de m objetos homogéneos, más uno heterogéneo de menor valor[4].

Por otro lado si $m = 0$ se trata de la subasta de un objeto[5]. Si $m = 0$ entonces $\chi_i^S(\theta_{-i}, t_i) = 0$ y sustituyendo en el teorema, la demostración se reduce a la del Teorema de Equivalencia de Ingresos de un objeto [Myerson (1981)].

Esta demostración es una demostración directa para el caso particular que nos interesa en este trabajo.

[4]El objeto heterogéneo de menor valor es el lote de α unidades, con $\alpha < 1$.

[5]En este caso el objeto indivisible a subastar es el lote de α unidades.

Capítulo 2

Duopolio Simétrico con Valoraciones Independientes

En el presente capítulo y en los restantes, nos centraremos en los modelos de subasta aplicables en el Mercado Eléctrico para la compraventa de electricidad necesaria para satisfacer una cantidad diaria demandada. En el caso del Mercado Eléctrico el papel de comprador y del vendedor se intercambia. El subastador ahora compra las unidades de electricidad necesarias para cubrir la demanda y los jugadores venden sus unidades de electricidad producidas.

El modelo de Mercado Eléctrico, en este capítulo, es un modelo de valoraciones privadas e independientes, de múltiples objetos donde los jugadores están interesados en despachar más de una unidad.

A lo largo de esta memoria suponemos que existe incertidumbre sobre la función de costes de las empresas contrarias, es decir, modelizamos la subasta del Mercado Eléctrico de un periodo como un juego de información incompleta. Esta hipótesis está motivada por la existencia de contratos privados para la compra de materia prima y por la posibilidad de almacenamiento de ésta; o, simplemente, que se puede conocer un intervalo al que pertenece el coste contrario, pero no son conocidos exactamente todos los aspectos que influyen en él [Bosco y Parisio (2001); Schöne (2003)][1].

En el presente capítulo partimos, además, de la hipótesis de que las empresas eléctricas tienen una única unidad de producción con la misma capacidad de producción.

[1] ejemplos de artículos con costes desconocidos.

2.1 El Modelo

En el presente capítulo se van a suponer las siguientes hipótesis:

Hay dos empresas, $i \in \{1, 2\}$, con sendas unidades de producción y neutrales al riesgo, interesadas en el despacho de unidades de electricidad en algún Mercado Eléctrico. Supondremos que ambas empresas tienen capacidades de producción idénticas $k = 1$, siendo k perfectamente divisible.

La función de coste de la empresa $i \in \{1, 2\}$ es $g(q_i, \theta_i)$ creciente y diferenciable en ambas variables, donde $q_i \in [0, 1]$ es la cantidad generada por i. Además se supondrá que $g(0, \theta_i) = 0$. Cada θ_i, que es información privada de la empresa i (su tipo), es una realización independiente de una variable aleatoria continua con función de distribución F acotada en $\Re$ y absolutamente continua, con función de densidad f en el intervalo $[a_1, a_2]$. Es decir, θ_1 y θ_2 son v.a.i.i.d. con función de distribución F y tal que el jugador i y sólo el jugador i, observa la realización de θ_i. Cada variable θ_i recoge la incertidumbre que el jugador contrario tiene acerca del coste de producción de la empresa i.

D representará la demanda de un periodo y se supondrá inelástica al precio, es decir independiente del precio fijado por medio del modelo de subasta utilizado.

Cada empresa $i \in \{1, 2\}$ independiente y simultáneamente realiza una oferta $b_i \in [0, b_{\max}]$, donde especifica el mínimo precio por unidad al que está dispuesta a vender la totalidad de su capacidad.

Una estrategia para la empresa $i \in \{1, 2\}$ es, entonces, una función oferta de la forma $b_i(\theta_i) : [a_1, a_2] \to [0, b_{\max}]$. El valor real positivo $b_{\max}$ es el precio máximo que el Operador del Mercado está dispuesto a pagar por cada unidad eléctrica necesaria para satisfacer la demanda eléctrica. Supondremos que $b_i(\theta_i) = b(\theta_i)$ es la función oferta utilizada en equilibrio por los dos jugadores, donde $b\left(\theta_i\right)$ es una función estrictamente creciente y diferenciable. Es lógico suponer, por la simetría del problema, que en equilibrio las dos empresas se comporten de la misma manera estratégica. Por ello nos centraremos en la búsqueda de equilibrios bayesianos de Nash simétricos.

A este modelo de mercado, verificando las hipótesis enunciadas, lo llamaremos

<u>**Modelo Simétrico Inicial**</u>.

Basándose en las ofertas realizadas por los jugadores, el Operador del Mercado distribuye el despacho de electricidad. Ordena las ofertas de menor a mayor, de tal forma que la empresa de menor oferta despacha primero. Si su capacidad no es suficiente para satisfacer la demanda, la empresa de mayor oferta despacha la demanda residual, siempre y cuando ésta sea inferior a su propia capacidad. Luego la cantidad asignada para el despacho a la empresa $i \in \{1, 2\}$ es:

$$Q_i(b_1, b_2) = \begin{cases} \min(1, D) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } D \leq 1 \\ \min(D - 1, 1) & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } D > 1 \end{cases}$$

Todos los aspectos de este juego bayesiano, además del modelo de subasta que se va a utilizar para las transacciones del Mercado Eléctrico, son de conocimiento público.

El precio fijado para la compra de unidades eléctricas dependerá del modelo de subasta que se está empleando para realizar las transacciones. Hay tres modelos de subasta clásicos aplicables al Mercado Eléctrico: **modelo de subasta Uniforme, modelo de subasta Discriminatoria y modelo de subasta de Vickrey**. Éstos han sido analizados ampliamente pero con costes conocidos, es decir, modelizando el Mercado Eléctrico como un juego de información completa. Describamos brevemente cómo se fija el precio de compra en cada uno de ellos:

En el modelo Uniforme, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a la mayor oferta aceptada. Todas las empresas que despachan en el mercado reciben el mismo precio por unidad.

En el modelo Discriminatorio, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a su propia oferta. Las empresas que despachan en el mercado reciben precios distintos por unidad eléctrica.

En el modelo de Vickrey, la regla mediante la cual el Operador del Mercado establece el precio es algo más complicada. A cada empresa le pagan, por cada unidad de electricidad despachada, el precio correspondiente a la unidad que desplaza, es decir, el precio de la unidad eléctrica necesaria para seguir cubriendo la demanda en el caso de que dicha empresa retirase su oferta del mercado. En el caso de que la empresa de mayor oferta sea necesaria para satisfacer parte de la demanda, a ésta se le pagaría el precio máximo $b_{\max}$ por unidad despachada. En particular, bajo el Modelo Simétrico Inicial si la empresa i es la empresa de menor oferta y, por tanto, la que entra primero en el mercado, le pagan la oferta contraria b_j si $D \leq 1$. Y si $D > 1$ esta empresa i, de menor oferta, recibe dos precios distintos por las unidades despachadas: la oferta contraria b_j por cada una de las $D-1$ primeras unidades y la oferta máxima permitida $b_{\max}$ por cada una de las $2-D$ unidades restantes. A la empresa de mayor oferta le pagan 0 si $D \leq 1$ y $b_{\max}$ por cada una de las unidades que despacha si $D > 1$.

No limitaremos nuestro análisis a los tres modelos clásicos ya que se analizará una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene a los tres modelos clásicos como casos particulares. Dicha familia tendrá asociada la siguiente función de beneficio de la empresa $i \in \{1, 2\}$:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad (2.1.1.)$$

con $j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ y siendo γ_1, β_1, φ, $\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ y donde ϕ_1 y ϕ_2 están determinados por la demanda. En esta función se está considerando que si la empresa i oferta la menor de las dos pujas, la cantidad que despacha la empresa i es $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, recibiendo posiblemente distintos precios por ese total de unidades eléctricas despachadas. Es decir, el Operador del Mercado paga a i, si ésta realiza la menor de las pujas, γ_1 unidades a b_i la unidad, β_1 unidades a b_j la unidad y φ unidades a $b_{\max}$ la unidad. Por otra parte, si la empresa i realiza la mayor de las pujas ésta despacha un total de $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ unidades y el Operador del Mercado paga a i, γ_2 unidades a b_i la unidad, y φ unidades a $b_{\max}$ la unidad. Además, si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$.

Esta familia de modelos de subasta verifica tres principios de una subasta eléctrica, que son:

- La puja que una empresa hace es el mínimo precio al que está dispuesto a vender toda su capacidad. Una vez realizadas las pujas, el Operador del Mercado no puede pagar a una empresa generadora un precio menor que su propia oferta.

- Debe entrar en el mercado en primer lugar la empresa de menor oferta y, si ésta no es capaz de satisfacer la totalidad de la demanda, debe entrar la otra empresa para despachar la demanda residual.

- El precio máximo permitido, $b_{\max}$, debe ser de tal manera que el Operador del Mercado asegure a las empresas, que entren en el mercado, al menos el coste de producción de cualquiera de sus unidades eléctricas.

La expresión 2.1.1. representa la función de beneficio de una familia de modelos de subasta. A esta familia se la denominará como **Modelo de Subasta General** y se denotará por $\mathcal{MSG}$. Con esta familia no sólo se conseguirá un análisis comparativo de los tres principales modelos de subasta bajo la hipótesis de costes desconocidos, sino un amplio análisis de todos los modelos de subasta que se encuentran de manera continua entre ellos y que se podrían emplear en el Mercado Eléctrico.

Más adelante se justificará porqué en la función de beneficio del Modelo de Subasta General el coeficiente que acompaña a $b_{\max}$, φ, es el mismo tanto si $b_i < b_j$ como si $b_i > b_j$, en lugar de considerar un modelo aún más general.

Evidentemente, la asignación de valores a los parámetros fija las funciones de beneficio (por tanto fija una regla de asignación) y el modelo de subasta empleado para la transacción queda completamente determinado. Además, el valor de los parámetros dependerá del tamaño de la demanda respecto del de las capacidades. Por ello se distinguirán los siguientes tres casos:

Caso 1 Las dos empresas tienen capacidad suficiente para satisfacer la demanda, es decir, $D \leq 1$. En este caso, la empresa que ofertó el menor precio despacha toda la demanda y la otra empresa no despacha ninguna unidad eléctrica, es decir, queda fuera del Mercado Eléctrico. Como $D \leq 1$, se verifica que $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = D$, $\gamma_2 = \varphi = 0$, y por tanto $\beta_1 = D - \gamma_1$. La familia de modelos $\mathcal{MSG}$ en este Caso 1 queda, por tanto, reducida a la siguiente familia uniparamétrica con beneficio

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (D - \gamma_1)\, b_j - g(D, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ 0 & si \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad \gamma_1 \in [0, D]$$

Caso 2 Se necesita la capacidad de ambas empresas para satisfacer la demanda, pero ésta es menor que la suma de las dos capacidades, es decir, $1 < D = 1 + \alpha < 2$, donde $\alpha \in (0, 1)$. En este caso, la empresa de menor oferta despacha toda su capacidad 1 y la otra empresa despacha la demanda residual $D - 1 = \alpha$. Como $D = 1 + \alpha$ se verifica $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = 1$, $\gamma_2 + \varphi = \alpha$ y, por tanto, $\varphi = \alpha - \gamma_2$ y $\beta_1 = 1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2$. La familia $\mathcal{MSG}$ en este Caso 2 queda reducido a la siguiente familia biparamétrica con beneficio

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2)\, b_j + (\alpha - \gamma_2)\, b_{\max} - g(1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + (\alpha - \gamma_2)\, b_{\max} - g(\alpha, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

donde $\gamma_1 \in [0, 1 - \alpha + \gamma_2]$ y $\gamma_2 \in [0, \alpha]$.

Caso 3 La demanda excede la suma de las dos capacidades, es decir $2 \leq D$. Ambas empresas despachan la totalidad de sus capacidades. En este caso no hay competencia y las empresas pujarán la máxima oferta permitida. Es un caso sin relevancia que utilizaremos solamente para comprobar la continuidad del ingreso esperado por las empresas y el pago que espera realizar el subastador, cuando la demanda D tienda a 2.

2.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General

Aunque analizaremos cada caso, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad, y tendremos en cuenta bajo qué modelo de subasta se están realizando las transacciones de compraventa de energía eléctrica, podemos dar un resultado general de existencia y unicidad de equilibrio bayesiano de Nash, teniendo en cuenta la forma general de la función beneficio.

Proposición 2.2.1 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Simétrico Inicial*** *y se utiliza un modelo de subasta $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$, es decir, la función de beneficio de la empresa $i \in \{1, 2\}$ es de la forma:*

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con $j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, γ_1,β_1,φ,$\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$, $\phi_1 + \phi_2 = D$ y $D < 2$, entonces

Región I) *Si $\gamma_2 \neq 0$, se verifica que existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$, cumpliendo la condición $b^*(a_2) = b_{\max}$ con $b_{\max} \geq \frac{g(\phi_1, a_2) - g(\phi_2, a_2)}{\phi_1 - \phi_2}$, que viene* *dado por la siguiente expresión:*

$$\begin{aligned}
b^*(\theta_i) \quad = \quad & \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} \\
& +\left(\gamma_1-(\gamma_1-\gamma_2)\,F(\theta_i)\right)^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}\left(b_{\max}\gamma_2^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}+\right. \\
& \frac{1}{\phi_1-\phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t)\right)\left(\gamma_1-(\gamma_1-\gamma_2)\,F(t)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}dt \\
& \left.-\frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}\gamma_2^{\frac{\gamma\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}\right)
\end{aligned}$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, *y*

$$\begin{aligned}
b^*(\theta_i) \quad = \quad & \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} \\
& +e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}\left(b_{\max}-\frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}\right) \\
& +\frac{e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{\phi_1-\phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t)\right)e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(t))}dt
\end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2$.

Región II) *Si* $\gamma_2 = 0$ *y* $\gamma_1 = 0$, *se verifica que existe una única estrategia dominante para cada empresa* $i \in \{1,2\}$ *dada por*

$$b^*(\theta_i)=\frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}$$

Región III) *Si* $\gamma_2 = 0$ *y* $\gamma_1 \neq 0$, *se verifica que el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico* $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ *viene dado por*

$$b^*(\theta_i)=\frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}+\frac{(1-F(\theta_i))^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}}{\phi_1-\phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t)\right)\left(1-F\left(t\right)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}dt$$

Demostración. La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria para ella. El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i,b_i,b(\theta_j))=\begin{cases}\gamma_1 b_i+\beta_1 b\left(\theta_j\right)+\varphi b_{\max}-g(\phi_1,\theta_i) & \text{si} \quad b^{-1}(b_i)<\theta_j \\ \gamma_2 b_i+\varphi b_{\max}-g(\phi_2,\theta_i) & \text{si} \quad b^{-1}(b_i)>\theta_j\end{cases}$$

El beneficio esperado por la empresa i, dado que su tipo es θ_i, es

$$BM_i(\theta_i,b_i,b)=\int_{a_1}^{a_2}B_i(\theta_i,b_i,b(\theta_j))f(\theta_j|\theta_i)d\theta_j$$

Teniendo en cuenta que los tipos son variables aleatorias independientes:

$$
\begin{aligned}
BM_i(\theta_i, b_i, b) &= \int_{a_1}^{a_2} B_i(\theta_i, b_i, b(\theta_j)) f(\theta_j) d\theta_j \\
&= \int_{a_1}^{b^{-1}(b_i)} (\gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i)) f(\theta_j) d\theta_j \\
&\quad + \int_{b^{-1}(b_i)}^{a_2} (\gamma_1 b_i + \beta_1 b(\theta_j) + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i)) f(\theta_j) d\theta_j
\end{aligned}
$$

Entonces, b_i es la mejor respuesta de la empresa i si maximiza el beneficio esperado, dado que su tipo es θ_i. Derivando respecto de b_i se tiene, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b_i} BM_i(\theta_i, b_i, b) &= (\gamma_2 - \gamma_1) F(b^{-1}(b_i)) + \gamma_1 \\
&\quad + (-(\phi_1 - \phi_2) b_i + g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)) f(b^{-1}(b_i)) \frac{d}{db_i}(b^{-1}(b_i))
\end{aligned}
$$

Como $b^{-1}(b_i) = \theta_i \Leftrightarrow b_i = b(\theta_i)$, reemplazando e igualando a cero, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
& ((\gamma_2 - \gamma_1) F(\theta_i) + \gamma_1) b^{*\prime}(\theta_i) - (\phi_1 - \phi_2) f(\theta_i) b^*(\theta_i) \\
= & -(g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)) f(\theta_i)
\end{aligned}
$$

Luego, todo equilibrio bayesiano de Nash simétrico es solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior. La ecuación diferencial con la condición inicial $b^*(a_2) = b_{\max}$ forma un problema de valor inicial que verifica las hipótesis de una extensión del teorema de existencia y unicidad de Picard [Simmons, (1990), pag. 485-486] para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, siempre y cuando $(\gamma_2 - \gamma_1) F(\theta_i) + \gamma_1$ sea distinto de cero en a_2. Se obtienen así los diferentes casos que pasamos a describir:

Región I) Si $\gamma_2 \neq 0$ se verifica que $((\gamma_2 - \gamma_1) F(a_2) + \gamma_1) = \gamma_2 \neq 0$ y cumple la condición anterior. Por tanto, existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ que cumple $b^*(a_2) = b_{\max}$ que se obtiene integrando la ecuación diferencial anterior:

$$
\begin{aligned}
b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} \\
&\quad + (\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i))^{-\frac{\phi_1 - \phi_2}{\gamma_1 - \gamma_2}} \Bigg(b_{\max} \gamma_2^{\frac{\phi_1 - \phi_2}{\gamma_1 - \gamma_2}} + \\
&\quad \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} (g(\phi_1, t) - g(\phi_2, t)) (\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(t))^{\frac{\phi_1 - \phi_2}{\gamma_1 - \gamma_2}} dt \\
&\quad - \frac{g(\phi_1, a_2) - g(\phi_2, a_2)}{\phi_1 - \phi_2} \gamma_2^{\frac{\phi_1 - \phi_2}{\gamma_1 - \gamma_2}} \Bigg)
\end{aligned}
$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, y

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} \\ &+e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}\left(b_{\max}-\frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}\right) \\ &+\frac{e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{\phi_1-\phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t)\right)e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(t))}dt \end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2$.

Región II) Si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 = 0$, se verifica $((\gamma_2-\gamma_1)F(\theta_i)+\gamma_1) = 0$, $\forall\theta_i \in [a_1,a_2]$ y la ecuación diferencial se reduce a

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}$$

que es estrategia dominante para i ya que $\frac{\partial}{\partial b_i}BM_i(\theta_i,b_i,b)$ no depende de b (en la ecuación diferencial $\frac{\partial}{\partial b_i}BM_i(\theta_i,b_i,b)=0$, b representa la estrategia elegida por la empresa contraria).

Región III) Si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 \neq 0$, se verifica que

$$\gamma_1\left(1-F(\theta_i)\right)b^{*\prime}(\theta_i)-(\phi_1-\phi_2)\,f(\theta_i)b^*(\theta_i) = -\left(g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)\right)f(\theta_i)$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta_i = a_2$ queda que todo equilibrio bayesiano de Nash simétrico cumple

$$b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$$

La solución general de la ecuación diferencial es, integrando:

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}+ \\ &\left(1-F(\theta_i)\right)^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}\left(\frac{1}{\phi_1-\phi_2}\int\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)\right)\left(1-F\left(\theta_i\right)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}d\theta_i+C\right) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Lim_{\theta_i\to a_2^-}b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}+ \\ & Lim_{\theta_i\to a_2^-}\frac{\frac{1}{\phi_1-\phi_2}\int\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)\right)\left(1-F\left(\theta_i\right)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}d\theta_i+C}{\left(1-F(\theta_i)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}} \end{aligned}$$

para que este último límite sea finito, teniendo en cuenta que $\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1} > 0$, la constante debe verificar:

$$C = -\frac{1}{\phi_1 - \phi_2}\left[\int \frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1, t) - g(\phi_2, t)\right)\left(1 - F\left(t\right)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}} dt\right]_{t=a_2}$$

luego, sustituyendo el valor de la constante, la solución particular de la ecuación diferencial queda:

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} + \frac{(1 - F(\theta_i))^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}}}{\phi_1 - \phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1, t) - g(\phi_2, t)\right)\left(1 - F\left(t\right)\right)^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}} dt$$

■

Nota 2.2.2 *La hipótesis de que ambas empresas utilizan la misma función de estrategia para pujar, hizo que en la Proposición 2.2.1., la búsqueda de equilibrios se restringiese a equilibrios simétricos. Lo cierto es que inicialmente esta búsqueda se hizo en general y el equilibrio existente, formado por funciones estrictamente crecientes y diferenciables, resultó ser simétrico en todos los casos.*

Nota 2.2.3 *Obsérvese que el equilibrio calculado en la **Región II** es independiente de la distribución de los tipos.*

Nota 2.2.4 *En la **Región II** y en la **Región III** se verifica que $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$, sin necesidad, en ambos casos, de imponer ninguna condición. Se debe a que, si $\gamma_2 = 0$, la competencia es extrema y las empresas temen quedar fuera del mercado. Bajo esas circunstancias, las ofertas no se disparan y no es necesario, por tanto, que el Operador del Mercado fije una puja máxima $b_{\max}$. Sin embargo, en la **Región I** el Operador del Mercado debe imponer una oferta máxima. En efecto, si $\gamma_2 \neq 0$ las dos empresas entran con total seguridad en el mercado y si una empresa tiene un tipo alto, se ve tentada a pujar lo máximo posible al estar segura de entrar en el mercado despachando, al menos, la demanda residual. Por otro lado, si la demanda residual tiende a 1, las empresas se ven tentadas a pujar por la demanda residual el mayor precio permitido. De ahí la importancia de que en este tipo de mercados se fije una puja máxima. Es evidente que, cuanto mayor sea $b_{\max}$, mayor será la puja realizada por las empresas, en cualquiera de los modelos de la **Región I.** Esto hace que al Operador del Mercado le interese fijar $b_{\max}$ lo mínimo posible pero respetando el tercer principio de una subasta eléctrica descrito en la Sección 2.1., es decir, le interesa fijar $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$.*

Corolario 2.2.5 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Simétrico Inicial****,* $D < 2$ *y se utiliza un modelo de subasta* $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$ *donde* $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$*, entonces existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico* $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ *verificando* $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$*, y dado por la siguiente expresión*

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} +$$
$$\frac{(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i))^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} (g(\phi_1,t) - g(\phi_2,t)) (\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(t))^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}} dt$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} \\ &\quad + \frac{e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} (g(\phi_1,t) - g(\phi_2,t)) e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(t))} dt \end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 \neq 0$.

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Demostración. En efecto, si tomamos $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$ en las expresiones del equilibrio bayesiano de Nash obtenida en la Proposición 2.2.1. para la **Región I**, se obtienen las expresiones del enunciado que da el equilibrio bayesiano de Nash asociado a cualquiera de los modelos de subasta perteneciente a $\mathcal{MSG}$. ■

Nota 2.2.6 *Obsérvese que, para cualquiera de los modelos pertenecientes a* $\mathcal{MSG}$*, se verifica que*

$$b^*(\theta_i) \geq \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2}$$

Esa cantidad representa el coste unitario medio de producción de la empresa i *de las unidades eléctricas que entran en el mercado en primer lugar, y que quedarían fuera, si entrase en segundo lugar. En particular, si el coste es lineal* $g(q_i,\theta_i) = q_i\theta_i$*, la desigualdad anterior queda*

$$b^*(\theta_i) \geq \theta_i$$

Es decir, las empresas no pujan por debajo de su coste unitario de producción.

A continuación, se analizará cómo son las posibles estrategias del equilibrio, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad de producción de las empresas.

2.2.1 Caso 1 $(D \leq 1)$

En este caso, la cantidad de unidades eléctricas asignada a la empresa i, por el Operador del Mercado, está dada por

$$Q_i(b_i, b_j) = \begin{cases} D & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, 2\} \qquad i \neq j$$

con $D \leq 1$.

El beneficio de la empresa i viene dado por

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (D - \gamma_1)\, b_j - g(D, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ 0 & si \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad \gamma_1 \in [0, D]$$

Obsérvese que $\gamma_2 = 0$, luego, por la Proposición 2.2.1., sólo hay dos posibles equilibrios bayesianos de Nash dependiendo de si γ_1 es cero o no. Aplicando la Proposición 2.2.1.:

Región II) Si $\gamma_1 = 0$, se verifica que $\beta_1 = D$ y que existe una única estrategia dominante para cada empresa dada por

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(D, \theta_i)}{D}$$

En esta región, quedan determinados unívocamente todos los parámetros de la familia de modelos, es decir se trata de un único modelo de subasta.

Región III) Si $\gamma_1 \neq 0$, se verifica que $\gamma_1 \in (0, D]$ y además que el único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ viene dado por

$$b^*(\theta_i) = \frac{1}{D}\left(g(D, \theta_i) + (1 - F(\theta_i))^{-\frac{D}{\gamma_1}} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D, t)\, (1 - F(t))^{\frac{D}{\gamma_1}}\, dt \right)$$

En ambas regiones la competencia es extrema y, sin imponer ninguna condición, se verifica que la oferta máxima realizada en equilibrio es $b^*(a_2) = \frac{g(D, a_2)}{D}$.

2.2.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

En este caso, la cantidad de unidades eléctricas asignada a la empresa i, por el Operador del Mercado, está dada por

$$Q_i(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, 2\} \qquad i \neq j$$

con $\alpha \in (0,1)$.

El beneficio de la empresa i viene dado por

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (1-\alpha-\gamma_1+\gamma_2)\, b_j + (\alpha-\gamma_2)\, b_{\max} - g(1,\theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + (\alpha-\gamma_2)\, b_{\max} - g(\alpha,\theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

donde $\gamma_1 \in [0, 1-\alpha+\gamma_2]$ y $\gamma_2 \in [0,\alpha]$. En este caso, aplicando la Proposición 2.2.1., se obtiene que, dependiendo de la región considerada, los equilibrios son de la siguiente forma:

Región I) Si $\gamma_2 \neq 0$, se verifica que existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ verificando $b^*(a_2) = b_{\max}$, dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} \\ &\quad + (\gamma_1 - (\gamma_1-\gamma_2)\, F(\theta_i))^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} \left(b_{\max}\gamma_2^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} + \right. \\ &\quad \frac{1}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\,(g(1,t)-g(\alpha,t))\,(\gamma_1-(\gamma_1-\gamma_2)\,F(t))^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}}\, dt \\ &\quad \left. - \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}\gamma_2^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} \right) \end{aligned}$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, y

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} \\ &\quad + e^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}\left(b_{\max} - \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{e^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\,(g(1,t)-g(\alpha,t))\, e^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(t))} dt \end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2$.

Región II) Si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 = 0$, se verifica que $\beta_1 = 1-\alpha$ y existe una única estrategia dominante para cada empresa dada por

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}$$

En esta región quedan unívocamente determinados todos los parámetros, es decir se trata de un único modelo.

Región III) Si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 \neq 0$ se verifica que $\gamma_1 \in (0, 1-\alpha]$ y el único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ viene dado por

$$b^*(\theta_i) = \frac{1}{1-\alpha}\left(g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i) + (1-F(\theta_i))^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\,(g(1,t)-g(\alpha,t))\,(1-F(t))^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}}\, dt \right)$$

2.3 Ingresos esperados por las empresas y pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el Modelo de Subasta General

Si se está utilizando algún modelo $S \in \mathcal{MSG}$ y si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, el ingreso de la empresa i es

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \gamma_1 b^*(\theta_i) + \beta_1 b^*(\theta_j) + \varphi b_{\max} & si \quad \theta_i < \theta_j \\ \gamma_2 b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} & si \quad \theta_i < \theta_j \end{cases}$$

luego, el ingreso esperado por la empresa i bajo el modelo S es

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \int_{a_1}^{a_2} I_i(\theta_i, \theta_j) f(\theta_j) d\theta_j \\ &= \int_{a_1}^{\theta_i} (\gamma_2 b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max}) f(\theta_j) d\theta_j \\ &\quad + \int_{\theta_i}^{a_2} (\gamma_1 b^*(\theta_i) + \beta_1 b^*(\theta_j) + \varphi b_{\max}) f(\theta_j) d\theta_j \\ &= (\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i)) b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} + \beta_1 \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t) f(t) dt \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer} &= 2 \int_{a_1}^{a_2} P_i(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2 \int_{a_1}^{a_2} (\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i)) b^*(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i + 2\varphi b_{\max} \\ &\quad +2 \int_{a_1}^{a_2} \left(\beta_1 \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t) f(t) dt \right) f(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2\gamma_1 \int_{a_1}^{a_2} b^*(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i - 2(\gamma_1 - \gamma_2) \int_{a_1}^{a_2} b^*(\theta_i) F(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i \\ &\quad +2\varphi b_{\max} + 2\beta_1 \int_{a_1}^{a_2} b^*(\theta_i) F(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2\gamma_1 \int_{a_1}^{a_2} b^*(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i + 2\varphi b_{\max} + \\ &\quad (\beta_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)) \left(b_{\max} - \int_{a_1}^{a_2} (b^*(\theta_i))' F^2(\theta_i) d\theta_i \right) \\ &= 2\gamma_1 \int_{a_1}^{a_2} b^*(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i - (\beta_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)) \int_{a_1}^{a_2} (b^*(\theta_i))' F^2(\theta_i) d\theta_i \\ &\quad + (2\varphi + \beta_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)) b_{\max} \end{aligned}$$

Sustituyendo el equilibrio bayesiano de Nash correspondiente, calculado en la Proposición 2.2.1., obtenemos las expresiones del ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el Operador del Mercado en cada caso.

2.3.1 Caso 1 $(D \leq 1)$

En este caso, $\gamma_2 = \varphi = 0$ y $\beta_1 = D - \gamma_1$. Por tanto sólo hay que considerar la **Región II** y la **Región III** de la Proposición 2.2.1. en las que se verificaba $b_{\max} = \frac{g(D,a_2)}{D}$, luego

Región II) Las estrategias que formaban el equilibrio si $\gamma_1 = 0$ y $\beta_1 = D$ eran $b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D}$, $i \in \{1,2\}$. El ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio, queda

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= D\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{g(D,t)}{D} f(t)dt \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t)f(t)dt \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$\begin{aligned} P_{omer} &= \beta_1 \left(\frac{g(D,a_2)}{D} - \int_{a_1}^{a_2} (b^*(\theta_i))' \, F^2(\theta_i) d\theta_i \right) \\ &= g(D,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(D,\theta_i) F^2(\theta_i) d\theta_i \end{aligned}$$

Región III) Las estrategias que formaban el equilibrio bayesiano de Nash eran $b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D} + \frac{(1-F(\theta_i))^{-\frac{D}{\gamma_1}}}{D} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) \left(1 - F(t)\right)^{\frac{D}{\gamma_1}} dt$, $i \in \{1,2\}$, donde $\gamma_1 \in (0, D]$. El ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio, queda

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \gamma_1 \left(1 - F(\theta_i)\right) b^*(\theta_i) + (D - \gamma_1) \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(x) \, f(x) dx \\ &= \gamma_1 \frac{g(D,\theta_i)}{D} \left(1 - F(\theta_i)\right) + \frac{\gamma_1}{D} \left(1 - F(\theta_i)\right)^{1-\frac{D}{\gamma_1}} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) \left(1 - F(t)\right)^{\frac{D}{\gamma_1}} dt \\ &\quad + \frac{D-\gamma_1}{D} \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt \\ &\quad + \frac{D-\gamma_1}{D} \int_{\theta_i}^{a_2} \int_{x}^{a_2} \left(1 - F(x)\right)^{-\frac{D}{\gamma_1}} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) \left(1 - F(t)\right)^{\frac{D}{\gamma_1}} f(x) dt dx \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt \end{aligned}$$

Y, por tanto, como el ingreso esperado coincide con el calculado en la **Región II)** también coincidirá el pago que espera hacer el Operador del Mercado:

$$P_{omer} = g(D,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(D,\theta_i) F^2(\theta_i) d\theta_i$$

2.3.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

En este caso $\varphi = \alpha - \gamma_2$, $\beta_1 = 1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2$. Por la Proposición 2.2.1. se obtiene:

Región I) Las estrategias que formaban el equilibrio bayesiano de Nash si $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 \in [0,1]$, $\gamma_2 \in (0, \alpha]$, $1 - \gamma_1 \geq \alpha - \gamma_2$, verificando la condición $b^*(a_2) = b_{\max}$, eran

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} \\ &+ \left(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i)\right)^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} \left(b_{\max} \gamma_2^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} + \right. \\ &\frac{1}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) \left(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(t)\right)^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} dt \\ &\left. - \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha} \gamma_2^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1-\gamma_2}} \right) \end{aligned}$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, y

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} \\ &+ e^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))} \left(b_{\max} - \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha} \right) \\ &+ \frac{e^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) e^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}(1-F(t))} dt \end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2$.

El ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio, queda

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \left(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F(\theta_i)\right) b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} + \beta_1 \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t) f(t) dt \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} \left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) f(t) dt + \alpha b_{\max} \end{aligned}$$

en ambos casos. El pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$\begin{aligned} P_{omer} &= 2 \int_{a_1}^{a_2} P_i(\theta_i) f(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2\alpha b_{\max} + g(1,a_2) - g(\alpha,a_2) \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) F^2(t) dt \end{aligned}$$

Región II) Las estrategias que formaban el equilibrio bayesiano de Nash si $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 1 - \alpha$ eran $b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}$, $i \in \{1,2\}$. El ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio, queda

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \alpha b_{\max} + (1-\alpha)\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f(t)dt \\ &= \alpha b_{\max} + \int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t))\, f(t)dt \end{aligned}$$

Como el ingreso esperado por la empresa i coincide con el punto anterior, el pago esperado por el subastador también será el mismo:

$$\begin{aligned} P_{omer} &= 2\alpha b_{\max} + g(1,a_2) - g(\alpha,a_2) \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) F^2(t)dt \end{aligned}$$

Región III) Las estrategias que formaban el equilibrio bayesiano de Nash si $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 \in (0, 1-\alpha]$ eran

$$b^*(\theta_i) = \frac{1}{1-\alpha}\left(g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i) + (1-F(\theta_i))^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right)(1-F(t))^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}}\, dt\right)$$

$i \in \{1,2\}$. El ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio, queda

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \gamma_1 (1-F(\theta_i))\, b^*(\theta_i) + \alpha b_{\max} + \beta_1 \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f(t)dt \\ &= \gamma_1 \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}(1-F(\theta_i)) \\ &\quad + \frac{\gamma_1}{1-\alpha}(1-F(\theta_i))^{1-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right)(1-F(t))^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}}\, dt \\ &\quad + \alpha b_{\max} + \frac{\beta_1}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t))\, f(t)dt \\ &\quad + \frac{\beta_1}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2}\int_{t}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right)(1-F(t))^{-\frac{1-\alpha}{\gamma_1}} f(t)\,(1-F(x))^{\frac{1-\alpha}{\gamma_1}}\, dxdt \\ &= \alpha b_{\max} + \int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t))\, f(t)dt \end{aligned}$$

Como el ingreso esperado por la empresa i coincide con el obtenido en la **Región I** y en la **Región II**, el pago esperado por el subastador también será el mismo:

$$\begin{aligned} P_{omer} &= 2\alpha b_{\max} + g(1,a_2) - g(\alpha,a_2) \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) F^2(t)dt \end{aligned}$$

Nota 2.3.1 *En la* ***Región I*** *de la Proposición* 2.2.1. *se impuso la condición* $b^*(a_2) = b_{\max}$, *donde* $b_{\max}$ *es la puja máxima fijada por el subastador y, en las dos regiones restantes, se* *verificaba* $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$*. Luego, el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el Operador del Mercado coinciden en todos los modelos de subasta considerados si el Operador del Mercado fija* $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$ *en aquellos modelos de subasta pertenecientes a la* ***Región I****. Si el Operador del Mercado fijara* $b_{\max} > \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$*, el pago que esperaría hacer sería mayor. Luego, efectivamente, la mejor elección para el Operador del Mercado es* $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$ *tal y como se comentó en la Nota 2.2.4..*

2.4 Teorema de Equivalencia de Ingresos en el Mercado Eléctrico en el Modelo Simétrico Inicial con n empresas.

En esta sección se demostrará que la coincidencia que se presenta en la sección anterior (se verificó un resultado de equivalencia de ingresos en un duopolio bajo cualquiera de los modelos perteneciente a $\mathcal{MSG}$) se puede generalizar: bajo dos modelos de subasta con n empresas, verificándose las hipótesis del Modelo Simétrico Inicial, cada empresa obtiene el mismo ingreso esperado y, por tanto, el subastador espera pagar lo mismo por la demanda eléctrica, siempre y cuando, estos dos modelos de subasta verifiquen que dan el mismo ingreso esperado a las dos empresas, cuando su tipo es máximo.

Para ello se utilizará el Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado demostrado en el Capítulo 1 en la sección 1.5.2., adaptado al contexto del Mercado Eléctrico.

Ahora una empresa puede "ganar" el objeto heterogéneo (el despacho de la demanda residual α) o puede "ganar" uno de los objetos homogéneos (el despacho de toda su capacidad). El modelo de mercado que se va a considerar verificará todas las hipótesis del Modelo Simétrico inicial pero, con n empresas, en lugar de 2. Es decir:

Se va a subastar el derecho del despacho de D unidades eléctricas entre $n > 1$ empresas neutrales al riesgo dispuestas a despachar un máximo de $k = 1$ unidades eléctricas (con $D < n$).

La función de coste de la empresa $i \in \{1, ..., n\}$ es $g(q_i, \theta_i)$ creciente y diferenciable en ambas variables, donde $q_i \in [0, 1]$ es la cantidad generada por i. Cada θ_i, que es información privada de la empresa i (su tipo), es una realización independiente de una variable aleatoria continua con función de distribución F acotada en $\Re$ y absolutamente continua, con función de densidad f en el intervalo $[a_1, a_2]$. Es decir, $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ son v.a.i.i.d. con función de distribución F y tal que el jugador i y sólo el jugador i, observa la realización de θ_i. Cada variable θ_i recoge la incertidumbre que otro jugador tiene acerca del coste de producción de la empresa i.

Si la demanda es $D = m + \alpha$, con $m \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ y $\alpha \in [0, 1)$, habrá m empresas que podrán generar toda su capacidad (las m menores ofertas) y una empresa que generará la demanda residual de α unidades (la oferta siguiente). El resto de empresas, $n - (m + 1)$, ni ganará ni pagará nada. La elección de las empresas que entran al mercado siempre son aquellas con las ofertas más bajas.

El conjunto de modelos de subasta $\mathcal{MSG}$ que consideramos en el Modelo Simétrico inicial está incluido en un conjunto de modelos de subasta más amplio que describimos en la siguiente definición:

Definición 2.4.1 *Denominaremos conjunto de modelos de subasta eléctrica y se denotará por $\mathcal{SE}$ al conjunto de modelos de subasta verificando lo siguiente:*

i) Existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n))$ con b_i^* función estrictamente creciente y diferenciable $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

ii) La regla de asignación de un modelo de subasta eléctrica $S \in \mathcal{SE}$ es de la forma:

$$\{\omega_i^S(b_1, ..., b_n), \rho_i^S(b_1, ..., b_n), \psi_i^S(b_1, ..., b_n), \chi_i^S(b_1, ..., b_n)\}_{i=1}^n$$

donde $\omega_i^S(b_1, ..., b_n)$ es el ingreso que obtiene la empresa i si genera en el mercado la demanda residual; $\rho_i^S(b_1, ..., b_n)$ es el ingreso que obtiene la empresa i si genera en el mercado toda su capacidad; $\psi_i^S(b_1, ..., b_n) = Prob\left(b_i = b_{(m+1)}\right)$ es la probabilidad de que la empresa i despache la demanda residual y, por último, $\chi_i^S(b_1, ..., b_n) = Prob\left(b_i \leq b_{(m)}\right)$ es la probabilidad de que la empresa i despache toda su capacidad, si las pujas son $b_1, ..., b_n$.

Luego, la función de beneficio del jugador i en un modelo $S \in \mathcal{SE}$ es:

$$\begin{aligned} B_i(b_1, ..., b_n; \theta_i) &= \left(\omega_i^S(b_1, ..., b_n) - g(\alpha, \theta_i)\right) \psi_i^S(b_1, ..., b_n) \\ &\quad + \left(\rho_i^S(b_1, ..., b_n) - g(1, \theta_i)\right) \chi_i^S(b_1, ..., b_n) \end{aligned}$$

Obsérvese que lo que diferencia dos modelos pertenecientes a $\mathcal{SE}$ es, en realidad, $\omega_i^S(b_1, ..., b_n)$ y $\rho_i^S(b_1, ..., b_n)$, ya que las otras dos componentes de la regla de asignación coinciden en todo modelo $S \in \mathcal{SE}$. Si evaluamos la regla de asignación en el equilibrio se obtiene

$$\{\omega_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n)), \rho_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n)), \psi_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n)), \chi_i^S(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n))\}_{i=1}^n =$$

$$\{\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n),\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\}_{i=1}^n$$

Donde $\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es el ingreso que obtiene la empresa i si genera en el mercado la demanda residual, $\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es el ingreso que obtiene la empresa i si genera en el mercado toda su capacidad; $\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es la probabilidad de que la empresa i despache la demanda residual y, finalmente, $\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)$ es la probabilidad de que la empresa i despache toda su capacidad, si los tipos son $\theta_1,...,\theta_n$.

Por otro lado denotaremos por

$$\begin{aligned}
q_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}\left[\widetilde{\omega}_i(\theta_1,...,\theta_n)\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\right]\\
p_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}\left[\widetilde{\rho}_i(\theta_1,...,\theta_n)\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)\right]\\
y_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\psi}_i(\theta_1,...,\theta_n)]\\
z_i^S(\theta_i) &= E_{\Theta_{-i}}[\widetilde{\chi}_i(\theta_1,...,\theta_n)]
\end{aligned}$$

al ingreso esperado por la empresa i si genera en el mercado la demanda residual, al ingreso esperado por la empresa i si genera en el mercado toda su capacidad, la probabilidad esperada de que la empresa i genere la demanda residual α y la probabilidad esperada de que la empresa i genere toda su capacidad, si su tipo es θ_i, respectivamente. Obsérvese que el ingreso total esperado por la empresa i, $P_i^S(\theta_i)$, si genera en el mercado, es la suma:

$$P_i^S(\theta_i) = p_i^S(\theta_i) + q_i^S(\theta_i)$$

Reescribiremos, para adaptarlo a este contexto eléctrico[2], el Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado enunciado en el Teorema 1.5.2.:

Teorema 2.4.2 *Bajo las hipótesis del Modelo Simétrico inicial con n empresas, se consideran dos modelos de subasta* S_1, $S_2 \in \mathcal{SE}$. *Sean* $P_i^{S_1}(\theta_i)$ *y* $P_i^{S_2}(\theta_i)$ *el ingreso total esperado por la empresa* $i \in \{1,...,n\}$ *en los dos modelos de subasta* S_1 *y* S_2, *respectivamente. Entonces, si* $P_i^{S_1}(a_2) = P_i^{S_2}(a_2)$, *se verifica* $P_i^{S_1}(\theta_i) = P_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall\theta_i \in [a_1,a_2]$.

Demostración. Dado un modelo de subasta $S \in \mathcal{SE}$ con regla de asignación

$$\{\omega_i^S(b_1,...,b_n),\rho_i^S(b_1,...,b_n),\psi_i^S(b_1,...,b_n),\chi_i^S(b_1,...,b_n)\}_{i=1}^n$$

[2] Téngase en cuenta que siempre se verifica $y_i^{S_1}(\theta_i) = y_i^{S_2}(\theta_i)$, $z_i^{S_1}(\theta_i) = z_i^{S_2}(\theta_i)$, $\forall S_1,\ S_2 \in \mathcal{SE}$.

y único equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1), ..., b_n^*(\theta_n))$, si consideramos el mecanismo directo $\widetilde{S}$ asociado a S con regla de asignación

$$\begin{aligned} & \{\omega_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \rho_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \psi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n), \chi_i^{\widetilde{S}}(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n \\ = & \{\widetilde{\omega}_i(t_1, ..., t_n), \widetilde{\rho}_i(t_1, ..., t_n), \widetilde{\psi}_i(t_1, ..., t_n), \widetilde{\chi}_i(t_1, ..., t_n)\}_{i=1}^n \end{aligned}$$

por el Principio de Revelación este modelo $\widetilde{S}$ es de incentivos compatibles.

Luego, el beneficio esperado por un jugador i, si su declaración es t_i y el resto de jugadores confiesan el verdadero tipo, bajo el modelo $\widetilde{S}$ viene dado por

$$\begin{aligned} BM_i^{\widetilde{S}}(t_i) &= -\int_{\Theta_{-i}} g(\alpha, t_i)\psi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &\quad - \int_{\Theta_{-i}} g(1, t_i)\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &\quad + \int_{\Theta_{-i}} \omega_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\psi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &\quad + \int_{\Theta_{-i}} \rho_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i)\chi_i^{\widetilde{S}}(\theta_{-i}, t_i) f_{-i}(\theta_{-i})\, d\theta_{-i} \\ &= q_i^S(t_i) + p_i^S(t_i) - g(\alpha, \theta_i) y_i^S(t_i) - g(1, \theta_i) z_i^S(t_i) \end{aligned}$$

Como los jugadores actúan de tal manera que maximicen su beneficio, usarán las estrategias en equilibrio y, por el Principio de Revelación, obtenemos

$$\theta_i = \arg\max_{t_i}\{q_i^S(t_i) + p_i^S(t_i) - g(\alpha, \theta_i) y_i^S(t_i) - g(1, \theta_i) z_i^S(t_i)\}$$

quedando la ecuación

$$\left(q_i^S\right)'(\theta_i) + \left(p_i^S\right)'(\theta_i) = g(\alpha, \theta_i)\left(y_i^S(\theta_i)\right)' + g(1, \theta_i)\left(z_i^S(\theta_i)\right)'$$

integrando ambos lados de la igualdad se obtiene

$$q_i^S(\theta_i) + p_i^S(\theta_i) = -\int_{\theta_i}^{a_2} g(1, t)\left(z_i^S\right)'(t)dt - \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha, t)\left(y_i^S\right)'(t)dt + q_i^S(a_2) + p_i^S(a_2)$$

$$P_i^S(\theta_i) = -\int_{\theta_i}^{a_2} g(1, t)\left(z_i^S\right)'(t)dt - \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha, t)\left(y_i^S\right)'(t)dt + P_i^S(a_2)$$

Como $y_i^{S_1}(\theta_i) = y_i^{S_2}(\theta_i)$, $z_i^{S_1}(\theta_i) = z_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall\theta_i \in [a_1, a_2]$ y $\forall S_1,\ S_2 \in \mathcal{SE}$ y, por el enunciado, $P_i^{S_1}(a_2) = P_i^{S_2}(a_2)$ entonces $P_i^{S_1}(\theta_i) = P_i^{S_2}(\theta_i)$ $\forall\theta_i \in [a_1, a_2]$. $\blacksquare$

Hemos demostrado que si en dos modelos de subasta eléctrica una empresa de tipo máximo espera ingresar lo mismo en ambos modelos ($P_i^{S_1}(a_2) = P_i^{S_2}(a_2)$), tenemos definido unívocamente el ingreso esperado por cada empresa ($P_i^{S_1}(\theta_i) = P_i^{S_2}(\theta_i)$) y, por tanto, el precio que espera pagar el Operador del Mercado por la demanda eléctrica.

Podemos obtener, como corolario de este último teorema, la equivalencia de ingresos de cada una de las dos empresas bajo cualquiera de los modelos analizados pertenecientes al Modelo de Subasta General.

Corolario 2.4.3 *Supongamos que se verifican las hipótesis del Modelo Simétrico Inicial y sea $S \in \mathcal{MSG}$, entonces las dos empresas esperan el mismo ingreso y el Operador del Mercado espera pagar lo mismo por la demanda eléctrica D, independientemente de la elección de S. Además el ingreso esperado por las empresas es:*

i) Si $D = \alpha \leq 1$ entonces $P_i^S(\theta_i) = \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha, t) f(t) dt$

ii) Si $1 < D = 1 + \alpha < 2$ entonces $P_i^S(\theta_i) = \int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t)) f(t) dt + \alpha b_{\max}$

iii) Si $D \geq 2$ entonces $P_i^S(\theta_i) = b_{\max}$

donde $b_{\max} = \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$

Demostración. Obviamente $\mathcal{MSG} \subset \mathcal{SE}$ ya que

$$\mathcal{MSG} = \left\{ S \in \mathcal{SE} \text{ tales que } n = 2 \text{ y } \left\{ \begin{array}{c} \rho_i^S(b_1, b_2) = \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} \\ \omega_i^S(b_1, b_2) = \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} \end{array} \right. \right\}$$

Vamos a aplicar el teorema anterior con $n = 2$ en las tres situaciones del tamaño de la demanda, tanto para demostrar que $P_i^S(\theta_i)$ no depende del modelo S considerado, como para el cálculo del ingreso esperado por las empresas.

Caso 1 ($D = \alpha \leq 1$).

Este caso corresponde al valor $m = 0$ y, en él, la regla de asignación de un modelo cualquiera $S \in \mathcal{MSG}$ es:

$$\begin{aligned} \rho_i^S(b_1, b_2) &= \gamma_1 b_i + (\alpha - \gamma_1) b_j \\ \omega_i^S(b_1, b_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_i^S(b_1, b_2) &= Prob(b_i < b_j) \\ \chi_i^S(b_1, b_2) &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_i(\theta_1,\theta_2) &= Prob(\theta_i < \theta_j)\\ \widetilde{\chi}_i(\theta_1,\theta_2) &= 0\end{aligned}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned}y_i^S(\theta_i) &= 1 - F(\theta_i)\\ z_i^S(\theta_i) &= 0\end{aligned}$$

Si $\theta_i = a_2$, la empresa i queda fuera del mercado y en cualquiera de los modelos $S \in \mathcal{MSG}$ se verifica que $P_i^S(a_2) = 0$. Luego, por el teorema anterior se tiene que $P_i^S(\theta_i)$ $\forall \theta_i \in [a_1, a_2]$ es el mismo $\forall S \in \mathcal{MSG}$, es decir el mismo ingreso esperado bajo todos los modelos considerados.

El ingreso esperado por la empresa i bajo cualquier modelo $S \in \mathcal{MSG}$ es:

$$P_i^S(\theta_i) = -\int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha, t) \left(y_i^S\right)' (t) dt = \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha, t) f(t) dt$$

Caso 2 ($1 < D = 1 + \alpha < 2$).

Este caso corresponde al valor $m = 1$ y, en él, la regla de asignación en cada modelo $S \in \mathcal{MSG}$ es:

$$\begin{aligned}\rho_i^S(b_1,b_2) &= \gamma_1 b_i + (1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2) b_j + (\alpha - \gamma_2) b_{\max}\\ \omega_i^S(b_1,b_2) &= \gamma_2 b_i + (\alpha - \gamma_2) b_{\max}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i^S(b_1,b_2) &= Prob(b_i > b_j)\\ \chi_i^S(b_1,b_2) &= Prob(b_i < b_j)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_i(\theta_1,\theta_2) &= Prob(\theta_i > \theta_j)\\ \widetilde{\chi}_i(\theta_1,\theta_2) &= Prob(\theta_i < \theta_j)\end{aligned}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned}y_i^S(\theta_i) &= F(\theta_i)\\ z_i^S(\theta_i) &= 1 - F(\theta_i)\end{aligned}$$

Si $\theta_i = a_2$, la empresa i despacha la demanda residual y en cualquiera de los modelos $S \in \mathcal{MSG}$ se verifica que $P_i^S(a_2) = \alpha b_{\max}$. Luego, por el teorema anterior se tiene que $P_i^S(\theta_i)$ es siempre el mismo $\forall S \in \mathcal{MSG}$, es decir, el mismo ingreso esperado.

El ingreso esperado bajo cualquier modelo $S \in \mathcal{MSG}$ es:

$$\begin{aligned} P_i^S(\theta_i) &= -\int_{\theta_i}^{a_2} g(1,t)\,(1-F(t))'\,dt - \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha,t)\,F(t)'dt + \alpha b_{\max} \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t))\,f(t)dt + \alpha b_{\max} \end{aligned}$$

Caso 3 ($D \geq 2$).

Este caso corresponde a los valores $m \in \{2, 3, ...\}$ y, en él, no hay competencia verificándose

$$\begin{aligned} P_i^S(a_2) &= b_{\max} \\ y_i^S(\theta_i) &= 0 \\ z_i^S(\theta_i) &= 1 \end{aligned}$$

Luego, por el teorema anterior se tiene que $P_i^S(\theta_i)$ es siempre el mismo bajo todos los modelos $S \in \mathcal{MSG}$. El ingreso (no es esperado, las empresas están seguras de despachar toda su capacidad 1) bajo cualquier modelo $S \in \mathcal{MS}$ es: $P_i^S(\theta_i) = b_{\max}$. ■

En realidad no es sorprendente este resultado en el Caso 1 y en el Caso 3. El Caso 1 es un caso particular de subasta de un objeto, el lote completo α, en el que se verificaba el Teorema de Equivalencia de Ingresos [Myerson, R. 1981]. El Caso 3 es un caso con poca relevancia por ausencia de competencia. Es en realidad el Caso 2 el que establece una generalización novedosa del Teorema de Equivalencia de Ingresos [Myerson, R. 1981]. En él se ha demostrado que, bajo ciertas hipótesis, dos modelos que subastan múltiples objetos son equivalentes en cuanto a los ingresos esperados por los jugadores y pago esperado por el subastador.

Aunque el ingreso esperado se había calculado en la Sección 2.3., aquí se ha vuelto a realizar dicho cálculo, pero utilizando la expresión obtenida en el Teorema 2.4.2.

$$P_i^S(\theta_i) = -\int_{\theta_i}^{a_2} g(1,t)\left(z_i^S\right)'(t)dt - \int_{\theta_i}^{a_2} g(\alpha,t)\left(y_i^S\right)'(t)dt + P_i^S(a_2)$$

que no necesita el cálculo explícito del equilibrio bayesiano de Nash correspondiente.

2.5 Casos particulares: Modelos Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey.

En esta sección detallaremos cómo quedan los equilibrios bayesianos de Nash en tres modelos particulares de $\mathcal{MSG}$ que se corresponden con los tres modelos clásicos de subasta que se suelen analizar en el contexto de la subasta del Mercado Eléctrico (Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey). La descripción de estos tres modelos se hizo al principio del presente capítulo en la Sección 2.1..

2.5.1 Caso 1 $(D \leq 1)$

En este caso, los modelos Discriminatorio y Uniforme coinciden. El precio por unidad recibido por la empresa ganadora es igual a su propia oferta en los dos modelos; en el modelo Discriminatorio, siempre es así y en el modelo Uniforme también lo es porque la única oferta que entra en el mercado es la más alta aceptada (la empresa ganadora es la primera y la última en entrar al mercado).

En este Caso 1 se tiene que $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$.

Modelo de subasta Uniforme y Discriminatorio

El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_i - g(D, \theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, es la función beneficio del Modelo de Subasta General, dada por la expresión 2.1.1., particularizada para los valores de los parámetros $\gamma_1 = D$ y $\beta_1 = \varphi = \gamma_2 = 0$. Luego, por el resultado obtenido para la Región III de la Proposición 2.2.1., existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt}{D\,(1 - F(\theta_i))} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Ejemplo 2.5.1 *Si $g(q_i, \theta_i) = \theta_i q_i$ y las variables aleatorias θ_1 y θ_2 siguen una distribución Uniforme en el intervalo $[0, 1]$, el equilibrio en los modelos Uniforme y Discriminatorio está formado por las siguientes estrategias:*

$$b^*(\theta_i) = \frac{1 + \theta_i}{2} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Modelo de subasta Vickrey

El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_j - g(D, \theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, es la función beneficio del Modelo de Subasta General, dada por la expresión 2.1.1., particularizada para los valores de los parámetros $\beta_1 = D$ y $\gamma_1 = \varphi = \gamma_2 = 0$. Luego, por el resultado obtenido para la Región II de la Proposición 2.2.1., existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$, formado por las siguientes estrategias dominantes:

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(D, \theta_i)}{D} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Ejemplo 2.5.2 *Si $g(q_i, \theta_i) = \theta_i q_i$, el equilibrio en el modelo de Vickrey está formado por las siguientes estrategias:*

$$b^*(\theta_i) = \theta_i \qquad i \in \{1, 2\}$$

independientemente de la distribución de los tipos.

Nota 2.5.3 *Es de esperar que en el modelo de subasta de Vickrey, las empresas ajusten más sus ofertas a su verdadero coste ya que van a recibir, en el caso de ganar, la oferta del otro, que será mayor. Es decir, que las empresas se muestran menos agresivas ofertando bajo el modelo de Vickrey que bajo los modelos Uniforme y Discriminatorio. En efecto, como se verifica*

$$\begin{aligned} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial g(D,t)}{\partial t} (1 - F(t))\, dt &\geq 0 \Longleftrightarrow \\ g(D,t)F(t)|_{\theta_i}^{a_2} - \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial g(D,t)}{\partial t} F(t) dt &\geq g(D, \theta_i) (1 - F(\theta_i)) \Longleftrightarrow \\ \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt &\geq g(D, \theta_i) (1 - F(\theta_i)) \Longleftrightarrow \\ \frac{\int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt}{(1 - F(\theta_i))} &\geq g(D, \theta_i) \end{aligned}$$

se obtiene que

$$b^*_{Unif/Discr}(\theta_i) = \frac{\int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f(t) dt}{D\,(1 - F(\theta_i))} \geq \frac{g(D, \theta_i)}{D} = b^*_{Vick}(\theta_i)$$

Nota 2.5.4 *Se podría generalizar la familia paramétrica de modelos de subasta $\mathcal{MSG}$ considerando que la función de beneficio para la empresa $i \in \{1,2\}$ es de la forma*

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi_1 b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi_2 b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con γ_1, β_1, φ_1, φ_2, $\gamma_2 \in [0,\infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi_1 = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi_2 = \phi_2$ y donde ϕ_1 y ϕ_2 están determinados por la demanda. Sin embargo, cuando $\varphi_1 \neq \varphi_2$ las empresas pueden encontrar dificultades para elegir la estrategia que maximice sus beneficios y, por tanto, el Operador del Mercado es incapaz de predecir el comportamiento de las empresas. Al Operador del Mercado no le interesa un modelo de subasta bajo estas circunstancias, veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.5.5 *Sea $D \in (0,1)$ y $g(q_i, \theta_i) = q_i\theta_i$. Consideremos una generalización del modelo de subasta de Vickrey dada por la función de beneficio*

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j(D - \varphi_1) + \varphi_1 b_{\max} - D\theta_i & si \quad b_i < b_j \\ 0 & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con $\varphi_1 \in [0, D)$. Calculemos los equilibrios bayesianos de Nash.

La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria para ella. El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b(\theta_j)) = \begin{cases} b_j(D - \varphi_1) + \varphi_1 b_{\max} - D\theta_i & si \quad b^{-1}(b_i) < \theta_j \\ 0 & si \quad b^{-1}(b_i) > \theta_j \end{cases}$$

El beneficio esperado por la empresa i, dado que su tipo es θ_i, es

$$\begin{aligned} BM_i(\theta_i, b_i, b) &= \int_{a_1}^{a_2} B_i(\theta_i, b_i, b(\theta_j)) f(\theta_j)\, d\theta_j \\ &= \int_{b^{-1}(b_i)}^{a_2} ((D - \varphi_1) b(\theta_j) + \varphi_1 b_{\max} - D\theta_i) f(\theta_j)\, d\theta_j \end{aligned}$$

Entonces, b_i es la mejor respuesta de la empresa i si maximiza el beneficio esperado, dado que su tipo es θ_i. Derivando respecto de b_i se tiene, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} BM_i(\theta_i, b_i, b) = (-(D - \varphi_1) b_i + D\theta_i - \varphi_1 b_{\max}) f(b^{-1}(b_i)) \frac{d}{db_i}(b^{-1}(b_i))$$

Como $b^{-1}(b_i) = \theta_i \Leftrightarrow b_i = b(\theta_i)$, reemplazando e igualando a cero, obtenemos:

$$b_i^*(\theta_i) = \frac{D\theta_i - \varphi_1 b_{\max}}{D - \varphi_1}$$

Si el tipo del jugador i es cero, la puja en equilibrio queda $b_i^*(0) = \frac{-\varphi_1 b_{\max}}{D-\varphi_1}$ que sólo tiene sentido para $\varphi_1 = 0$. Es decir, existe equilibrio, y por tanto el Operador del Mercado puede predecir el comportamiento de las empresas, para todos los posibles valores del tipo de los jugadores, si $\varphi_1 = 0$.

2.5.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

En este caso, la cantidad asignada por el Operador del Mercado a cada empresa, para el despacho eléctrico, está dada por:

$$Q_i(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, 2\} \quad i \neq j$$

Ahora, el precio que el subastador paga a las empresas es diferente en los modelos Discriminatorio y Uniforme. Por ello, se analizarán los tres modelos por separado.

En este Caso 2 se tiene que $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$.

Modelo de subasta Uniforme

En el modelo Uniforme, el precio por unidad despachada recibido por una empresa es igual a la oferta más alta.

Si $b_i < b_j$, la empresa i despacha 1 unidad al precio unitario b_j, que es la mayor de las ofertas.

Si $b_i > b_j$, la empresa i despacha la demanda residual α al precio unitario b_i, que es la mayor de las ofertas.

La función de beneficio de la empresa i es, entonces:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j - g(1, \theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha b_i - g(\alpha, \theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, es la función beneficio del Modelo de Subasta General, dada por la expresión 2.1.1., particularizada para los valores de los parámetros $\beta_1 = 1$, $\gamma_2 = \alpha$ y $\gamma_1 = \varphi = 0$. Luego, por el resultado obtenido para la Región I de la Proposición 2.2.1., existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$, donde

$$b^*(\theta_i) = \\ \frac{g(1, \theta_i) - g(\alpha, \theta_i)}{1 - \alpha} + \frac{F(\theta_i)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1 - \alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(g(1, t) - g(\alpha, t) \right) F(t)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \, dt$$

Ejemplo 2.5.6 *Si* $g(q_i, \theta_i) = \theta_i q_i$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ *y las variables aleatorias* θ_1 *y* θ_2 *siguen una distribución Uniforme en el intervalo* $[0, 1]$, *el equilibrio bayesiano de Nash está formado por las siguientes estrategias:*

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \theta_i + \theta_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \int_{\theta_i}^{1} x^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} dx \\ &= \frac{\alpha\theta_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (1-\alpha)\theta_i}{2\alpha - 1} \qquad i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Modelo de subasta Discriminatorio

En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa es siempre su propia oferta. Es decir, la empresa i recibe b_i por unidad despachada.

Luego, la función de beneficio de la empresa i queda:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_i - g(1, \theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha b_i - g(\alpha, \theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, es la función beneficio del Modelo de Subasta General, dada por la expresión 2.1.1., particularizada para los valores de los parámetros $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \alpha$ y $\beta_1 = \varphi = 0$. Luego, por el resultado obtenido para la Región I de la Proposición 2.2.1., existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$, donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{g\left(1, \theta_i\right) - g\left(\alpha, \theta_i\right)}{1 - \alpha} + \frac{\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right)\left(1 - \left(1-\alpha\right)F(t)\right) dt}{\left(1-\alpha\right)\left(1 - \left(1-\alpha\right)F(\theta_i)\right)}$$

Ejemplo 2.5.7 *Si* $g(q_i, \theta_i) = \theta_i q_i$ *y las variables aleatorias* θ_1 *y* θ_2 *siguen una distribución Uniforme en el intervalo* $[0, 1]$, *el equilibrio bayesiano de Nash está formado por las siguientes estrategias:*

$$b^*(\theta_i) = \frac{1 + \alpha - (1-\alpha)\theta_i^2}{2(1 - (1-\alpha)\theta_i)} \qquad i \in \{1, 2\}$$

Modelo de subasta de Vickrey

En el modelo de Vickrey, el precio por unidad despachada recibido por una empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_i < b_j$, la empresa i despacha toda su capacidad 1 y le pagan el precio unitario b_j por $1 - \alpha$ y el precio unitario $b_{\max}$ por las α unidades restantes.

Si $b_i > b_j$, la empresa i despacha la demanda residual α que se le paga al precio unitario $b_{\max}$.

La función de beneficio de la empresa i es, entonces:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j(1-\alpha) + b_{\max}\alpha - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ b_{\max}\alpha - g(\alpha,\theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, es la función beneficio del Modelo de Subasta General, dada por la expresión 2.1.1., particularizada para los valores de los parámetros $\beta_1 = (1-\alpha)$, $\varphi = \alpha$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Luego, por el resultado obtenido para la Región II de la Proposición 2.2.1., existe un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$, formado por estrategias dominantes y dadas por

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}$$

Ejemplo 2.5.8 *Si $g(q_i,\theta_i) = \theta_i q_i$ el equilibrio está formado por las siguientes estrategias:*

$$b^*(\theta_i) = \theta_i \qquad i \in \{1,2\}$$

independientemente de la distribución de los tipos.

2.5.3 Caso 3 $(2 \leq D)$

En este caso, la asignación que hace el Operador del Mercado viene dada por la siguiente función:

$$Q_i(b_i, b_j) = 1 \qquad i,j \in \{1,2\} \quad i \neq j$$

Obsérvese que en realidad no hay competencia. Ambas empresas tienen garantizado el despacho de toda su capacidad, independientemente de lo que pujen. Luego, su beneficio esperado se maximiza ofertando la máxima cantidad permitida $b^*(\theta_i) = b_{\max}$, independientemente del tipo.

2.6 Conclusiones

En las secciones 2.1, 2.2. y 2.3. se ha analizado una familia paramétrica de modelos de subasta (que contiene, como casos particulares, a los tres modelos clásicos: modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey) bajo las hipótesis de mercado fijadas en la primera sección, entre las que se incluían las de idéntica capacidad de producción de las empresas y tipos independientes. Dicha familia de modelos de subasta $\mathcal{MSG}$ (Modelo de Subasta General) viene determinada por las funciones de beneficio de las dos empresas:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

$i \in \{1,2\}$, con γ_1,β_1, φ, $\gamma_2 \in [0,\infty)$, $\gamma_1+\beta_1+\varphi = \phi_1$, $\gamma_2+\varphi = \phi_2$ y $\phi_1+\phi_2 = D$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1+\alpha$, con $\alpha \in (0,1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$.

Si $D < 2$, se obtuvo tomando $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$, un único equilibrio bayesiano de Nash $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} + \frac{(\gamma_1 - (\gamma_1-\gamma_2)F(\theta_i))^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}}}{\phi_1-\phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t))(\gamma_1-(\gamma_1-\gamma_2)F(t))^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1-\gamma_2}} dt$$

si $\gamma_1 \neq \gamma_2$

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} \\ &\quad + \frac{e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(\theta_i))}}{\phi_1-\phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t))\, e^{-\frac{\phi_1-\phi_2}{\gamma_1}(1-F(t))} dt \end{aligned}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 \neq 0$.

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Al expresar el ingreso esperado por la empresa i, si ambas juegan el equilibrio, como una función a trozos en términos de la demanda, se obtuvo con $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$:

$$P_i(\theta_i, D) = \begin{cases} \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t)f(t)dt & \text{si} \quad D \le 1 \\ \int_{\theta_i}^{a_2} (g(1,t) - g(\alpha,t)) f(t)dt + \alpha b_{\max} & \text{si} \quad 1 < D = 1+\alpha < 2 \\ b_{\max} & \text{si} \quad 2 \le D \end{cases}$$

Obsérvese que es una función continua y, además, es creciente en D.

Al expresar el pago por el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan el equilibrio, como una función a trozos en términos de la demanda, se obtuvo con $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$:

$$P_{omer}(D) = \begin{cases} g(D,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t)\, F^2(t)dt & \text{si} \quad D \leq 1 \\ g(1,a_2) - g(\alpha,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(1,t) - g(\alpha,t)\right) F^2(t)dt + 2\alpha b_{\max} & \text{si} \quad 1 < D = 1+\alpha < 2 \\ 2b_{\max} & \text{si} \quad 2 \leq D \end{cases}$$

entonces se puede observar que es una función continua y, además, es creciente en D.

La observación mas importante es que, tanto el ingreso esperado por las empresas, como el pago que espera realizar el Operador del Mercado, son independientes de todos los parámetros de la familia de modelos considerada. Luego se verifica que hay equivalencia de ingresos en todos ellos, siempre que el Operador del Mercado fije, en el Caso 2, en todos los modelos de la Región I, $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$. Si el Operador del Mercado fijara $b_{\max} > \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$ el pago que esperaría realizar por la demanda eléctrica sería mayor que en el caso anterior, por tanto es razonable suponer que $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$.

En la Sección 2.4. se obtuvo un resultado en el que se demuestra que, la equivalencia de ingresos de dos empresas, independientemente del modelo de subasta perteneciente a $\mathcal{MSG}$ utilizado, se generaliza a un resultado de equivalencia de ingresos, bajo cualquier par de modelos de subasta, con n empresas y que verifique que el ingreso esperado por una empresa, si su tipo es a_2, coincida en ambos modelos.

En la Sección 2.5. se calcularon, como caso particular de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, los equilibrios bayesianos de Nash en los modelos de subasta clásicos: Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey.

Capítulo 3

Duopolio Simétrico con Valoraciones Correladas

En el capítulo anterior se analizó un modelo en un duopolio con tipos independientes. Como el valor que toma cada tipo determina la función de costes de la empresa, al suponer que los tipos son independientes estamos suponiendo que los costes de producción de cada unidad eléctrica son independientes. En algunas ocasiones, dependiendo de la central eléctrica que consideremos, es lógico pensar que el coste de producción, aun teniendo factores independientes propios de la gestión de cada empresa, dependa de factores relacionados, como podría ser el coste de la materia prima necesaria para el funcionamiento de la unidad de producción en cuestión [Ferrero, Rivera y Shahidehpour (1998)][1]. Por ello, en este capítulo, se analiza un modelo donde se considera como hipótesis la dependencia de los tipos.

3.1 El Modelo

En el presente capítulo se van a suponer las siguientes hipótesis:

Hay dos empresas, $i \in \{1, 2\}$, con sendas unidades de producción y neutrales al riesgo, interesadas en el despacho de unidades de electricidad en algún Mercado Eléctrico. Supondremos que ambas empresas tienen capacidades idénticas $k = 1$, siendo k perfectamente divisible.

[1] En ese artículo la variable aleatoria discreta f representa el precio de fuel. Se considera que el coste de producción depende de dicha variable.

La función de coste de la empresa $i \in \{1, 2\}$ es $g(q_i, \theta_i)$ creciente y diferenciable en ambas variables, donde $q_i \in [0, 1]$ es la cantidad generada por la empresa i. Además supondremos que $g(0, \theta_i) = 0$. Se supondrá que los tipos θ_1 y θ_2 dependen del precio de la materia prima. Para modelizar la incertidumbre que las empresas tienen sobre él, se considerará una variable aleatoria univariante absolutamente continua S, con función de densidad f_S, que representa dicho precio. Denotaremos como $f_{\Theta_i|S=s}$ a la función de densidad de las variables aleatorias $\Theta_i|S = s$, $i \in \{1, 2\}$, consideradas v.a.i.i.d. y absolutamente continuas, cuya realización sólo es conocida por la empresa i.

Denotaremos por $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)$ y $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)$, i, $j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$, a la función de densidad y de distribución, respectivamente, del tipo del jugador j, condicionada al conocimiento del tipo del jugador i. La conjetura del jugador i sobre el tipo del jugador j procederá del cálculo, mediante la regla de Bayes (tal y como se describió en el Capítulo 1), de la distribución de probabilidad del tipo del jugador j, condicionada al conocimiento del propio tipo, partiendo de la distribución a priori de probabilidad conjunta.

D representará la demanda de un periodo y se supondrá inelástica al precio, es decir independiente del precio fijado por medio del modelo de subasta utilizado.

Cada empresa $i \in \{1, 2\}$ independiente y simultáneamente realiza una oferta $b_i \in [0, b_{\max}]$, donde especifica el mínimo precio por unidad al que está dispuesta a vender la totalidad de su capacidad.

Una estrategia para la empresa $i \in \{1, 2\}$ es, entonces, una función oferta de la forma $b_i(\theta_i) : [a_1, a_2] \to [0, b_{\max}]$. El valor real positivo $b_{\max}$ es el precio máximo que el Operador del Mercado está dispuesto a pagar por cada unidad eléctrica necesaria para satisfacer la demanda eléctrica. Supondremos que $b_i(\theta_i) = b(\theta_i)$ es la función oferta utilizada en equilibrio por los dos jugadores, donde $b(\theta_i)$ es una función estrictamente creciente y diferenciable. Es lógico suponer, por la simetría del problema, que en equilibrio las dos empresas se comporten de la misma manera estratégica. Por ello nos centraremos en la búsqueda de equilibrios bayesianos de Nash simétricos.

A este modelo de mercado, verificando las hipótesis enunciadas, lo llamaremos

Modelo Simétrico Correlado.

Basándose en las ofertas realizadas por los jugadores, el Operador del Mercado distribuye el despacho de electricidad. Ordena las ofertas de menor a mayor, de tal forma que la empresa de menor oferta despacha primero. Si su capacidad no es suficiente para satisfacer la demanda, la empresa de mayor oferta despacha la demanda residual, siempre y cuando ésta sea inferior a su propia capacidad. Luego la cantidad asignada para el despacho a la empresa $i \in \{1, 2\}$ es:

$$Q_i(b_1, b_2) = \begin{cases} \min(1, D) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } D \leq 1 \\ \min(D-1, 1) & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } D > 1 \end{cases}$$

Todos los aspectos de este juego bayesiano, además del modelo de subasta que se va a utilizar para las transacciones del Mercado Eléctrico, son de conocimiento público.

El precio fijado para la compra de unidades eléctricas dependerá del modelo de subasta que se está empleando para realizar las transacciones. Hay tres modelos de subasta clásicos aplicables al Mercado Eléctrico: **modelo de subasta Uniforme, modelo de subasta Discriminatoria y modelo de subasta de Vickrey**. Éstos han sido analizados ampliamente pero con costes conocidos, es decir, modelizando el Mercado Eléctrico como un juego de información completa. Recordemos brevemente cómo se fija el precio de compra en cada uno de ellos:

En el modelo Uniforme, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a la mayor oferta aceptada. Todas las empresas que despachan en el mercado reciben el mismo precio por unidad.

En el modelo Discriminatorio, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a su propia oferta. Las empresas que despachan en el mercado reciben precios distintos por unidad eléctrica.

En el modelo de Vickrey, la regla mediante la cual el Operador del Mercado establece el precio es algo más complicada. A cada empresa le pagan, por cada unidad de electricidad despachada, el precio correspondiente a la unidad que desplaza, es decir, el precio de la unidad eléctrica necesaria para seguir cubriendo la demanda en el caso de que dicha empresa retirase su oferta del mercado. En el caso de que la empresa de mayor oferta sea necesaria para satisfacer parte de la demanda, a ésta se le pagaría el precio máximo $b_{\max}$ por unidad despachada. En particular, bajo el Modelo Simétrico Correlado si la empresa i es la empresa de menor oferta y, por tanto, la que entra primero en el mercado, le pagan la oferta contraria b_j si $D \leq 1$. Y si $D > 1$ esta empresa i, de menor oferta, recibe dos precios distintos por las unidades despachadas: la oferta contraria b_j por cada una de las $D-1$ primeras unidades y la oferta máxima permitida $b_{\max}$ por cada una de las $2-D$ unidades restantes. A la empresa de mayor oferta le pagan 0 si $D \leq 1$ y $b_{\max}$ por cada una de las unidades que despacha si $D > 1$.

No limitaremos nuestro análisis a los tres modelos clásicos ya que se analizará una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene a los tres modelos clásicos como casos particulares. Dicha familia, es la que se definió en la Sección 2.1. del Capítulo 2 como **Modelo de Subasta General** que se denotó por $\mathcal{MSG}$ y que tenía asociada la siguiente función de beneficio para la empresa $i \in \{1,2\}$:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases} \tag{3.1.1.}$$

con $j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ y siendo γ_1, β_1, φ, $\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ y donde ϕ_1 y ϕ_2 están determinadas por la demanda. En esta función se está considerando que si la empresa i oferta la menor de las dos pujas, la cantidad que despacha la empresa i es $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, recibiendo posiblemente distintos precios por ese total de unidades eléctricas despachadas. Es decir, el Operador del Mercado paga a i, si ésta realiza la menor de las pujas, γ_1 unidades a b_i la unidad, β_1 unidades a b_j la unidad y φ unidades a $b_{\max}$ la unidad. Por otra parte, si la empresa i realiza la mayor de las pujas ésta despacha un total de $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ unidades y el Operador del Mercado paga a i, γ_2 unidades a b_i la unidad, y φ unidades a $b_{\max}$ la unidad. Además si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1+\alpha$, con $\alpha \in (0,1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$.

En la Sección 2.1. del Capítulo 2 también se enunciaron tres principio básicos que debe verificar cualquier modelo de subasta eléctrica perteneciente a $\mathcal{MSG}$.

Con esta familia paramétrica de modelos de subasta no sólo se conseguirá un análisis comparativo de los tres principales modelos de subasta bajo la hipótesis de costes desconocidos, sino un amplio análisis de todos los modelos de subasta “razonables” que se podrían emplear en el Mercado Eléctrico.

Evidentemente, la asignación de valores a los parámetros fija las funciones de beneficio (por tanto fija una regla de asignación) y el modelo de subasta empleado para la transacción queda completamente determinado. Además, el valor de los parámetros dependerá del tamaño de la demanda respecto del de las capacidades. Por ello se distinguirán los siguientes tres casos:

Caso 1 Las dos empresas tienen capacidad suficiente para satisfacer la demanda, es decir, $D \leq 1$. En este caso la empresa que ofertó el menor precio despacha toda la demanda y la otra empresa no despacha ninguna unidad eléctrica, es decir, queda fuera del Mercado Eléctrico. Como $D \leq 1$, se verifica que $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = D$, $\gamma_2 = \varphi = 0$ y, por tanto, $\beta_1 = D - \gamma_1$. La familia de modelos $\mathcal{MSG}$ en este Caso 1 queda, por tanto, reducida a la siguiente familia uniparamétrica con beneficio

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (D - \gamma_1)\, b_j - g(D, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ 0 & si \quad b_i > b_j \end{cases} \qquad \gamma_1 \in [0, D]$$

Caso 2 Se necesita la capacidad de ambas empresas para satisfacer la demanda, pero ésta es menor que la suma de las dos capacidades, es decir, $1 < D = 1 + \alpha < 2$, $\alpha \in (0, 1)$. En este caso, la empresa de menor oferta despacha toda su capacidad 1 y la otra empresa despacha la demanda residual $D - 1 = \alpha$. Como $D = 1 + \alpha$ se verifica que $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = 1$, $\gamma_2 + \varphi = \alpha$ y, por tanto $\varphi = \alpha - \gamma_2$ y $\beta_1 = 1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2$. La familia $\mathcal{MSG}$ en este Caso 2 queda reducida, por tanto, a la siguiente familia biparamétrica con beneficio

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + (1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2)\, b_j + (\alpha - \gamma_2)\, b_{\max} - g(1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + (\alpha - \gamma_2)\, b_{\max} - g(\alpha, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

donde $\gamma_1 \in [0, 1 - \alpha + \gamma_2]$ y $\gamma_2 \in [0, \alpha]$.

Caso 3 La demanda excede la suma de las dos capacidades, es decir $2 \leq D$. Ambas empresas despachan la totalidad de sus capacidades. En este caso no hay competencia y las empresas pujarán la máxima oferta permitida. Es un caso sin relevancia que utilizaremos solamente para comprobar la continuidad del ingreso esperado por las empresas y el pago que espera realizar el subastador, cuando la demanda D tienda a 2.

3.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General.

Aunque analizaremos cada caso, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad, y tendremos en cuenta bajo qué modelo de subasta se están realizando las transacciones de compraventa de energía eléctrica, podemos dar un resultado general de existencia y unicidad de equilibrio bayesiano de Nash, teniendo en cuenta la forma general de la función beneficio.

Proposición 3.2.1 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Simétrico Correlado*** *y se utiliza un modelo de subasta* $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$*, es decir, la función de beneficio de la empresa* $i \in \{1,2\}$ *es de la forma:*

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con $j \in \{1,2\}$*,* $i \neq j$*,* γ_1*,*β_1*,*φ*,*$\gamma_2 \in [0,\infty)$*,* $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$*,* $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$*,* $\phi_1 + \phi_2 = D$ *y* $D < 2$*, entonces*

Región I) *Si* $\gamma_2 \neq 0$ *se verifica que existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico* $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ *cumpliendo la condición* $b^*(a_2) = b_{\max}$ *siendo* $b_{\max} \geq \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$ *que viene dado por las siguiente expresión:*

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) \quad = \quad & \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} + \left(b_{\max} - \frac{g(\phi_1,a_2) - g(\phi_2,a_2)}{\phi_1 - \phi_2}\right) e^{(\phi_1-\phi_2)\int_{\theta_i}^{a_2} \Psi(t)dt} \\ & + \frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1,t) - g(\phi_2,t)) e^{(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(t)dt} dt \end{aligned}$$

donde

$$\Psi(\theta_i) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{(\gamma_2 - \gamma_1) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \gamma_1}$$

Región II) *Si* $\gamma_2 = 0$ *y* $\gamma_1 = 0$*, se verifica que existe una única estrategia dominante para cada empresa* $i \in \{1,2\}$ *dada por*

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2}$$

Región III) *Si* $\gamma_2 = 0$ *y* $\gamma_1 \neq 0$*, se verifica que existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico* $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$*, dado por las siguiente expresión*

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) \quad = \quad & \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} \\ & + \frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int \Omega(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t) - g(\phi_2,t)\right) e^{(\phi_1-\phi_2)\int \Omega(t)dt} dt \end{aligned}$$

donde

$$\Omega(\theta_i) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1 \left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)}$$

Demostración. La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria para ella. El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b(\theta_j)) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b\left(\theta_j\right) + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & \text{si} \quad b^{-1}(b_i) < \theta_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & \text{si} \quad b^{-1}(b_i) > \theta_j \end{cases}$$

El beneficio esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, dado que su tipo es θ_i, es

$$\begin{aligned} BM_i(\theta_i, b_i, b) &= \int_{a_1}^{a_2} B_i(\theta_i, b_i, b(\theta_j)) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \\ &= \int_{a_1}^{b^{-1}(b_i)} \left(\gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \\ &\quad + \int_{b^{-1}(b_i)}^{a_2} \left(\gamma_1 b_i + \beta_1 b\left(\theta_j\right) + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \end{aligned}$$

Entonces, b_i es la mejor respuesta de la empresa i si maximiza el beneficio esperado, dado que su tipo es θ_i. Derivando respecto de b_i se tiene, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_i} BM_i(\theta_i, b_i, b) &= \left(-\left(\phi_1 - \phi_2\right) b_i + g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(b^{-1}(b_i)) \frac{d}{db_i}(b^{-1}(b_i)) \\ &\quad + \left(\gamma_2 - \gamma_1\right) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(b^{-1}(b_i)) + \gamma_1 \end{aligned}$$

Como $b^{-1}(b_i) = \theta_i \Leftrightarrow b_i = b(\theta_i)$, reemplazando e igualando a cero, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \gamma_1\right) b^{*\prime}(\theta_i) - \left(\phi_1 - \phi_2\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) b^*(\theta_i) \\ = \quad & -\left(g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) \end{aligned}$$

Luego, todo equilibrio bayesiano de Nash simétrico es solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior. La ecuación diferencial con la condición inicial $b^*(a_2) = b_{\max}$ forma un problema de valor inicial que cumple las hipótesis de una extensión del teorema de existencia y unicidad de Picard [Simmons, (1990), pag. 485-486] para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, siempre y cuando $\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \gamma_1$ sea distinto de cero en a_2. Se obtienen así los diferentes casos que pasamos a describir:

Región I) Si $\gamma_2 \neq 0$ se verifica que $\left(\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) F_{\Theta_j|\Theta_i=a_2}(a_2) + \gamma_1\right) = \gamma_2 \neq 0$ y se cumple la condición anterior. Por tanto, existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ que cumple $b^*(a_2) = b_{\max}$ que se obtiene integrando la ecuación diferencial anterior:

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} + \left(b_{\max} - \frac{g(\phi_1, a_2) - g(\phi_2, a_2)}{\phi_1 - \phi_2}\right) e^{(\phi_1 - \phi_2) \int_{\theta_i}^{a_2} \Psi(t) dt} \\ &\quad + \frac{e^{-(\phi_1 - \phi_2) \int \Psi(\theta_i) d\theta_i}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1, t) - g(\phi_2, t)) e^{(\phi_1 - \phi_2) \int \Psi(t) dt} dt \end{aligned}$$

donde

$$\Psi\left(\theta_i\right)=-\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)+\gamma_1}$$

Región II) Si $\gamma_2=0$ y $\gamma_1=0$, se verifica $\Big(\left(\gamma_2-\gamma_1\right)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)+\gamma_1\Big)=0\ \forall\theta_i\in[a_1,a_2]$ y la ecuación diferencial se reduce a

$$b^*(\theta_i)=\frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}$$

que es estrategia dominante para i ya que $\frac{\partial}{\partial b_i}BM_i(\theta_i,b_i,b)$ no depende de b (en la ecuación diferencial $\frac{\partial}{\partial b_i}BM_i(\theta_i,b_i,b)=0$, b representa la estrategia elegida por la otra empresa).

Región III) Si $\gamma_2=0$ y $\gamma_1\neq 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}&\gamma_1\Big(1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\Big)b^{*\prime}(\theta_i)-\left(\phi_1-\phi_2\right)f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)b^*(\theta_i)\\=\;&-\left(g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)\right)f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\end{aligned}$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta_i=a_2$ queda que todo equilibrio bayesiano de Nash cumple

$$b^*(a_2)=\frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$$

La solución general de la ecuación diferencial es, integrando:

$$\begin{aligned}b^*(\theta_i)\;=\;&\frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}\\&-\frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1-\phi_2}\int\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)\right)e^{(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(\theta_i)d\theta_i}d\theta_i\\&+Ce^{-(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(\theta_i)d\theta_i}\end{aligned}$$

donde

$$\Omega\left(\theta_i\right)=-\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1\Big(1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\Big)}$$

Imponiendo

$$b^*(a_2)=\frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$$

el valor de la constante queda

$$C = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2}\left[\int \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)\right) e^{(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(\theta_i)d\theta_i} d\theta_i\right]_{\theta_i=a_2}$$

Luego, sustituyendo el valor de la constante, la solución particular de la ecuación diferencial que queda es

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i) - g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} \\ &+ \frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1 - \phi_2}\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(g(\phi_1,t) - g(\phi_2,t)\right) e^{(\phi_1-\phi_2)\int\Omega(t)dt} dt \end{aligned}$$

donde

$$\Omega\left(\theta_i\right) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1\left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)}$$

■

Nota 3.2.2 *La hipótesis de que ambas empresas utilizan la misma función de estrategia para pujar, hizo que en la Proposición 3.2.1., la búsqueda de equilibrios se restringiese a equilibrios simétricos. Lo cierto es que inicialmente esta búsqueda se hizo en general y el equilibrio existente, formado por funciones estrictamente crecientes y diferenciables, resultó ser simétrico en todos los casos.*

Nota 3.2.3 *Hay que destacar que*

$$\frac{d}{d\theta}\left(F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta)\right) = f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta)$$

no implica que

$$\frac{d}{d\theta}\left(F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta)\right) = f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta)$$

En realidad se verifica

$$\frac{d}{d\theta}\left(F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta)\right) = f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) + \left[\frac{d}{d\theta}F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(t)\right]_{t=\theta}$$

Por ello no es posible simplificar los equilibrios bayesianos de Nash obtenidos, como se hizo en el modelo simétrico con valoraciones independientes del capítulo anterior.

Nota 3.2.4 *Obsérvese que el equilibrio calculado en la* ***Región II*** *es independiente de la distribución de los tipos.*

Nota 3.2.5 *En la* ***Región II*** *y en la* ***Región III*** *se verifica que* $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$*, sin necesidad, en ambos casos, de imponer ninguna condición. Se debe a que, si* $\gamma_2 = 0$*, la competencia es extrema y las empresas temen quedar fuera del mercado. Luego, las ofertas no se disparan y no es necesario, por tanto, que el Operador del Mercado fije una puja máxima* $b_{\max}$*. Sin embargo, en la* ***Región I*** *el Operador del Mercado debe imponer una oferta máxima. En efecto, si* $\gamma_2 \neq 0$ *las dos empresas entran con total seguridad en el mercado y si una empresa tiene un tipo alto, se ve tentada a pujar lo máximo posible al estar segura de entrar en el mercado despachando, al menos, la demanda residual. Por otro lado, si la demanda residual tiende a 1, las empresas se ven tentadas a pujar por la demanda residual el mayor precio permitido. De ahí la importancia de que en este tipo de mercados se fije una puja máxima. Es evidente que, cuanto mayor sea* $b_{\max}$*, mayor será la puja realizada por las empresas, en cualquiera de los modelos de la* ***Región I.*** *Esto hace que al Operador del Mercado le interese fijar* $b_{\max}$ *lo mínimo posible pero respetando el tercer principio de una subasta eléctrica descrito en la Sección 2.1., es decir, le interesa fijar* $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$.

Corolario 3.2.6 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Simétrico Correlado****,* $D < 2$ *y se utiliza un modelo de subasta* $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$ *donde* $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$*, entonces existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico* $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ *verificando* $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$*, y dado por la siguiente expresión*

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2} + \\ & \frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1-\phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1,t)-g(\phi_2,t))e^{(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(t)dt}dt \end{aligned}$$

donde

$$\Psi(\theta_i) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{(\gamma_2-\gamma_1)\,F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)+\gamma_1}$$

si $\gamma_1 \neq 0$ *o* $\gamma_2 \neq 0$ *y*

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1,\theta_i)-g(\phi_2,\theta_i)}{\phi_1-\phi_2}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Demostración. En efecto, si tomamos $b^*(a_2) = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$ en la expresión del equilibrio bayesiano de Nash obtenida en la Proposición 3.2.1. para la **Región I**, se obtienen las expresiones del enunciado que da el equilibrio bayesiano de Nash asociado a cualquiera de los modelos de subasta perteneciente a $\mathcal{MSG}$. ∎

Nota 3.2.7 *Obsérvese que, para cualquiera de los modelos pertenecientes a $\mathcal{MSG}$, se verifica que*

$$b^*(\theta_i) \geq \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2}$$

Esa cantidad representa el coste unitario medio de producción de la empresa i de las unidades eléctricas que entran en el mercado en primer lugar y que quedarían fuera, si entrase en segundo lugar. En particular, si el coste es lineal, $g(q_i, \theta_i) = q_i\theta_i$, la desigualdad anterior queda

$$b^*(\theta_i) \geq \theta_i$$

Es decir, las empresas no pujan por debajo de su coste unitario de producción.

3.2.1 Ingresos esperados por las empresas y pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el Modelo de Subasta General

Si se está utilizando algún modelo $S \in \mathcal{MSG}$ y si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, el ingreso de la empresa i es

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \gamma_1 b^*(\theta_i) + \beta_1 b^*(\theta_j) + \varphi b_{\max} & si \quad \theta_i < \theta_j \\ \gamma_2 b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} & si \quad \theta_i > \theta_j \end{cases}$$

luego, el ingreso esperado por la empresa i bajo el modelo S es

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \int_{a_1}^{a_2} I_i(\theta_i, \theta_j) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \\ &= \int_{a_1}^{\theta_i} \left(\gamma_2 b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max}\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \\ &\quad + \int_{\theta_i}^{a_2} \left(\gamma_1 b^*(\theta_i) + \beta_1 b^*(\theta_j) + \varphi b_{\max}\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \\ &= \Big(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\Big) b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} \\ &\quad + \beta_1 \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t) dt \qquad (3.2.1.1) \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$P_{omer} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2\int_{a_1}^{a_2} P_i(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i$$

Sustituyendo el equilibrio bayesiano de Nash correspondiente, calculado en la Proposición 3.2.1. obtenemos las expresiones del ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el Operador del Mercado en cada caso.

3.2.2 Caso 1 $(D \leq 1)$

En este caso $\phi_1 = D$, $\phi_2 = 0$, $\gamma_2 = \varphi = 0$ y $\beta_1 = D - \gamma_1$, luego sustituyendo en la expresión 3.2.1.1., se obtiene que el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$ es

$$P_i(\theta_i) = \gamma_1 \left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right) b^*(\theta_i) + (D - \gamma_1) \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t) dt$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$P_{omer} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2\int_{a_1}^{a_2} P_i(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i$$

En estas dos últimas expresiones, $b^*(\theta_i)$ es el equilibrio calculado para las distintas regiones de la Proposición 3.2.1. Por el valor de los parámetros en este Caso 1, sólo hay que considerar la **Región II** y la **Región III** de la Proposición 3.2.1., en las que se verificaba $b_{\max} = \frac{g(D,a_2)}{D}$, luego

Región II) En este Caso 1, las estrategias que forman el equilibrio, si $\gamma_1 = 0$ y $\beta_1 = D$, son $b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D}$, $i \in \{1,2\}$.

Región III) En este Caso 1, las estrategias que forman el equilibrio, si $\gamma_1 \neq 0$, son

$$b^*(\theta_i) = \frac{1}{D}\left(g(D,\theta_i) + e^{-D\int \Omega(\theta_i) d\theta_i} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{D\int \Omega(t) dt} dt\right)$$

donde

$$\Omega(\theta_i) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1 \left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)}$$

Nota 3.2.8 *Se comprueba fácilmente que si* $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = F_{\Theta_j}(\theta_j)$ *y* $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = f_{\Theta_j}(\theta_j)$ *(es decir, si los tipos son variables aleatorias independientes) entonces, el ingreso esperado por* *las empresas y el pago que espera realizar el subastador, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, coinciden quedando, respectivamente, las expresiones* $P_i(\theta_i) = \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,t) f_{\Theta_j}(t)dt$ *y* $P_{omer} = g(D, a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) F_{\Theta_j}^2(t)dt$, *obtenidas en el Caso* 1 *del Capítulo* 2. *Si embargo, si esa independencia no se da, en general el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera realizar el subastador no coinciden bajo todos los modelos. Es decir, en general, no se verificará un resultado de equivalencia de ingresos.*

3.2.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

En este caso $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = \alpha$, $\varphi = \alpha - \gamma_2$ y $\beta_1 = 1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2$, luego sustituyendo en la expresión 3.2.1.1., se obtiene que el ingreso esperado por la empresa i es

$$\begin{aligned} P_i(\theta_i) &= \Big(\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)\, F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\Big)\, b^*(\theta_i) + \varphi b_{\max} \\ &\quad + (1 - \alpha - \gamma_1 + \gamma_2) \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$P_{omer} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] = 2 \int_{a_1}^{a_2} P_i(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i$$

En estas dos últimas expresiones $b^*(\theta_i)$ es el dado por las distintas regiones de la Proposición 3.2.1.:

Región I) En este Caso 2, las estrategias que forman el equilibrio, si $\gamma_2 \neq 0$, son

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \left(b_{\max} - \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}\right) e^{(1-\alpha)\int_{\theta_i}^{a_2} \Psi(t)dt} \\ &\quad + \frac{e^{-(1-\alpha)\int \Psi(\theta_i)d\theta_i}}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(1,t) - g(\alpha,t)) e^{(1-\alpha)\int \Psi(t)dt} dt \end{aligned}$$

donde

$$\Psi(\theta_i) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{(\gamma_2 - \gamma_1)\, F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \gamma_1}$$

Región II) En este Caso 2, las estrategias que forman el equilibrio, si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 = 0$, son

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}$$

Región III) En este Caso 2, las estrategias que forman el equilibrio, si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 \neq 0$, son

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \frac{e^{-(1-\alpha)\int \Omega(\theta_i)d\theta_i}}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(1,t) - g(\alpha,t)) e^{(1-\alpha)\int \Omega(t)dt} dt$$

donde

$$\Omega\left(\theta_i\right)=-\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1\left(1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)}$$

Nota 3.2.9 *En general, el ingreso esperado por las empresas, si éstas juegan el equilibrio correspondiente, no coincide en todos los modelos de subasta. Se comprueba fácilmente que si $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)=F_{\Theta_j}(\theta_j)$ y $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)=f_{\Theta_j}(\theta_j)$ (es decir, si los tipos fuesen independientes) el ingreso esperado, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente en cada modelo, coincide bajo todos los modelos y queda la expresión $P_i(\theta_i)=\int_{\theta_i}^{a_2}\left(g\left(1,t\right)-g\left(\alpha,t\right)\right)f_{\Theta_j}(t)dt+\alpha b_{\max}$, obtenida en el Caso 2 del Capítulo* 2.

Lo mismo ocurre con el pago que espera hacer el Operador del Mercado: no coincide en general bajo todos los modelos de subasta analizados. Se comprueba fácilmente que si $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)=F_{\Theta_j}(\theta_j)$ y $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)=f_{\Theta_j}(\theta_j)$ (es decir, si los tipos son independientes) el pago que espera realizar el subastador, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente en cada modelo, coincide bajo todos los modelos y queda la expresión

$$P_{omer}=2\alpha b_{\max}+g\left(1,a_2\right)-g\left(\alpha,a_2\right)-\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(1,t\right)-g\left(\alpha,t\right)\right)F_{\Theta_j}^2(t)dt$$

obtenida en el Caso 2 del Capítulo 2.

Nota 3.2.10 *En la **Región I** de la Proposición* 3.2.1. *se impuso la condición $b^*(a_2)=b_{\max}$, donde $b_{\max}$ es la puja máxima fijada por el subastador y, en las dos regiones restantes, se verificaba $b_{\max}=\frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$. Si el Operador del Mercado fijara $b_{\max}>\frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$, el pago que esperaría hacer sería mayor. Luego, nuevamente, la mejor elección para el Operador del Mercado es $b_{\max}=\frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$ tal y como se comentó en la Nota 2.2.4..*

3.2.4 Caso 3 $(2\leq D)$

En este caso, la asignación para el despacho que hace el Operador del Mercado a la empresa $i\in\{1,2\}$ es:

$$Q_i(b_i,b_j)=1$$

Obsérvese que en realidad no hay competencia. Ambas empresas tienen garantizado el despacho de toda su capacidad, independientemente de lo que pujen. Luego su beneficio esperado se maximiza ofertando la máxima cantidad permitida $b^*(\theta_i)=b_{\max}$, independientemente del tipo.

En este caso, al no existir competencia, ingresa con seguridad en todos los modelos: $b_{\max}$.

3.3 Modelo Simétrico Correlado Uniforme

Se analizarán los resultados teóricos obtenidos en las secciones anteriores en un caso particular que pasamos a describir. En primer lugar se supondrá que la función de coste de producción es de la forma $g(q_i, \theta_i) = c\,(q_i)\,\theta_i$, donde $c\,(q_i)$ es una función creciente y diferenciable verificando $c\,(0) = 0$. Además, se considerará que la variable S sigue una distribución Uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y las variables $\Theta_1|S = s$, $\Theta_2|S = s$ siguen una distribución Uniforme en el intervalo $[s, s{+}1]$. Veamos cómo queda la conjetura sobre el tipo contrario.

En ese caso la función de densidad conjunta de θ_1, θ_2 viene dada por[2]:

$$f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \min(\theta_1,\theta_2) & si \quad \theta_1,\theta_2 \in [0,1] \\[2ex] 2-\max(\theta_1,\theta_2) & si \quad \theta_1,\theta_2 \in [1,2] \\[2ex] \min(\theta_1,\theta_2)-\max(\theta_1,\theta_2)+1 & si \quad \begin{array}{c} \min(\theta_1,\theta_2) \in [0,1], \\ \max(\theta_1,\theta_2) \in [1,2] \text{ y} \\ \max(\theta_1,\theta_2) \le 1+\min(\theta_1,\theta_2) \end{array} \\[2ex] 0 & \text{resto de los casos} \end{cases}$$

Además, como la densidad marginal de la variable aleatoria Θ_i es

$$f_{\Theta_i}(\theta_i) = \int_0^2 f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2)d\theta_j = \begin{cases} \theta_i & si \;\; \theta_i \;\in\; [0,1] \\ 2-\theta_i & si \;\; \theta_i \;\in\; [1,2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

[2]Los cálculos intermedios están incluidos en el Apéndice A

se obtiene la función de densidad condicionada:

$$f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = \frac{f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2)}{\int_0^2 f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_j}$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_j}{\theta_i} & si \quad \theta_j \in [0,\theta_i] \\ 1 & si \quad \theta_j \in [\theta_i,1] \\ \frac{\theta_i-\theta_j+1}{\theta_i} & si \quad \theta_j \in [1,\theta_i+1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

si $\theta_i \in [0,1]$ y

$$f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = \frac{f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2)}{\int_0^2 f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_j}$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_j-\theta_i+1}{2-\theta_i} & si \quad \theta_j \in [\theta_i-1,1] \\ 1 & si \quad \theta_j \in [1,\theta_i] \\ \frac{2-\theta_j}{2-\theta_i} & si \quad \theta_j \in [\theta_i,2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

si $\theta_i \in [1,2]$

Luego la función de distribución queda:

$$F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = \begin{cases} 0 & si \quad \theta_j \le 0 \\ \frac{\theta_j^2}{2\theta_i} & si \quad \theta_j \in [0,\theta_i] \\ \theta_j - \frac{\theta_i}{2} & si \quad \theta_j \in [\theta_i,1] \\ \frac{2\theta_j-1-(\theta_i-\theta_j)^2}{2\theta_i} & si \quad \theta_j \in [1,1+\theta_i] \\ 1 & si \quad \theta_j \ge 1+\theta_i \end{cases}$$

si $\theta_i \in [0,1]$ y

$$F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) = \begin{cases} 0 & si \quad \theta_j \le \theta_i-1 \\ \frac{(\theta_i-\theta_j-1)^2}{2(2-\theta_i)} & si \quad \theta_j \in [\theta_i-1,1] \\ \frac{2\theta_j-\theta_i}{2} & si \quad \theta_j \in [1,\theta_i] \\ \frac{(\theta_j-2)^2}{2(\theta_i-2)}+1 & si \quad \theta_j \in [\theta_i,2] \\ 1 & si \quad \theta_j \ge 2 \end{cases}$$

si $\theta_i \in [1,2]$

El cálculo de los ingresos esperados por las empresas y el pago que espera realizar el subastador se hará bajo este nuevo modelo que llamaremos

Modelo Simétrico Correlado Uniforme.

3.3.1 Caso 1 $(D \leq 1)$

Región II) Si $\gamma_1 = 0$ y $\beta_1 = D$, vimos que $b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D} = \frac{c(D)\theta_i}{D}$, luego el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1, 2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, queda

$$
\begin{aligned}
P_i^{II}(\theta_i) &= D \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{c(D)t}{D} f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt \\
&= \begin{cases} c(D)\left(\int_{\theta_i}^{1} tdt + \int_{1}^{\theta_i+1} t\frac{\theta_i - t + 1}{\theta_i}dt\right) & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ c(D)\int_{\theta_i}^{2} t\frac{2-t}{2-\theta_i}dt & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \\
&= \begin{cases} c(D)\frac{3+3\theta_i-2\theta_i^2}{6} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ c(D)\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}
\end{aligned}
$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{II} &= 2\int_0^2 P_i^{II}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i)d\theta_i \\
&= 2c(D)\left(\int_0^1 \frac{3+3\theta_i-2\theta_i^2}{6}\theta_i d\theta_i + \int_1^2 \frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3}(2-\theta_i)d\theta_i\right) \\
&= \frac{7}{6}c(D)
\end{aligned}
$$

Región III) La estrategia de la empresa $i \in \{1, 2\}$ que forma parte del equilibrio venía dada por

$$
b^*(\theta_i) = \frac{1}{D}\left(g(D,\theta_i) + e^{-D\int \Omega(\theta_i)d\theta_i} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{D\int \Omega(t)dt} dt\right)
$$

donde, bajo el Modelo Simétrico Correlado Uniforme

$$
\begin{aligned}
\Omega(\theta_i) &= -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1\left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)} \\
&= -\frac{2}{\gamma_1(2-\theta_i)}
\end{aligned}
$$

luego queda

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{c(D)}{D}\left(\theta_i + e^{\frac{2D}{\gamma_1}\int\frac{1}{2-\theta_i}d\theta_i}\int_{\theta_i}^{2} e^{-\frac{2D}{\gamma_1}\int\frac{1}{2-\theta_i}dt}dt\right) \\ &= \frac{2c(D)}{D}\frac{D\theta_i+\gamma_1}{2D+\gamma_1} \end{aligned}$$

Entonces el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, queda

$$\begin{aligned} P_i^{III}(\theta_i) &= \gamma_1\left(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right) b^*(\theta_i) + (D-\gamma_1)\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt \\ &= \gamma_1\frac{c(D)}{D}(2-\theta_i)\frac{D\theta_i+\gamma_1}{2D+\gamma_1} + \left(\frac{D-\gamma_1}{2D+\gamma_1}\right)\frac{2c(D)}{D}\int_{\theta_i}^{2}(Dt+\gamma_1)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt \\ &= \begin{cases} c(D)\frac{D\left(-2\theta_i^2+3\theta_i+3\right)+\gamma_1\left(3-\theta_i^2\right)}{3(2D+\gamma_1)} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ c(D)\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

y el pago que espera hacer el Operador del Mercado es

$$\begin{aligned} P_{omer}^{III} &= 2\int_0^2 P_i^{III}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i)d\theta_i \\ &= 2c(D)\left(\int_0^1 \frac{D\left(-2\theta_i^2+3\theta_i+3\right)+\gamma_1\left(3-\theta_i^2\right)}{3\left(2D+\gamma_1\right)}\theta_i d\theta_i + \int_1^2\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3}(2-\theta_i)d\theta_i\right) \\ &= c(D)\left(\frac{\gamma_1}{6\left(2D+\gamma_1\right)}+\frac{7}{6}\right) \end{aligned}$$

3.3.2 Caso 2 $(1 < D = 1+\alpha < 2)$

Región I) Si $\gamma_2 \neq 0$, vimos que la estrategia de la empresa $i \in \{1,2\}$ que forma parte del equilibrio, verificando la condición $b^*(a_2) = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$, era

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \\ & \frac{e^{-(1-\alpha)\int\Psi(\theta_i)d\theta_i}}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}(g(1,t)-g(\alpha,t))e^{(1-\alpha)\int\Psi(t)dt}dt \end{aligned}$$

donde bajo el Modelo Simétrico Correlado Uniforme

$$\begin{aligned} \Psi\left(\theta_i\right) &= -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)+\gamma_1} \\ &= -\frac{2}{\left(\gamma_2-\gamma_1\right)\theta_i+2\gamma_1} \end{aligned}$$

luego queda

$$b^*(\theta_i) = 2\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1-2(1-\alpha)}\left(\left(\frac{(\gamma_2-\gamma_1)\theta_i+2\gamma_1}{2\gamma_2}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\gamma_2-\gamma_1}}-\frac{\gamma_1+(1-\alpha)\theta_i}{\gamma_2}\right)$$

Entonces el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente queda

$$P_i^I(\theta_i) = \frac{2\gamma_1-(\gamma_1-\gamma_2)\theta_i}{2}b^*(\theta_i)+(\alpha-\gamma_2)\,2\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}+(1-\alpha+\gamma_2-\gamma_1)\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\,f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt$$

y el pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$\begin{aligned} P_{omer}^I &= 2\int_0^2 P_i^I(\theta_i)f_{\Theta_i}(\theta_i)d\theta_i \\ &= 2\left(\int_0^1 P_i^I(\theta_i)\theta_i d\theta_i+\int_1^2 P_i^I(\theta_i)(2-\theta_i)d\theta_i\right) \end{aligned}$$

Región II) La estrategia de la empresa $i \in \{1,2\}$ que forma parte del equilibrio, si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 = 0$, era

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} \\ &= \frac{(c(1)-c(\alpha))\,\theta_i}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Luego el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, queda

$$\begin{aligned} P_i^{II}(\theta_i) &= \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(2\alpha+(1-\alpha)\int_{\theta_i}^2 t f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt\right) \\ &= \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(2\alpha+(1-\alpha)\left(\int_{\theta_i}^1 t dt+\int_1^{\theta_i+1} t\frac{\theta_i-t+1}{\theta_i}dt\right)\right) & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(2\alpha+(1-\alpha)\int_{\theta_i}^2 t\frac{2-t}{2-\theta_i}dt\right) & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha\left(2\theta_i^2-3\theta_i+9\right)-2\theta_i^2+3\theta_i+3}{6}\right) & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)-\theta_i^2+\theta_i+2}{3}\right) & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

y el pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$\begin{aligned} P^{II}_{omer} &= 2\int_0^2 P_i^{II}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2c(D)\left(\int_0^1 P_i^{II}(\theta_i)\theta_i d\theta_i + \int_1^2 P_i^{II}(\theta_i)(2-\theta_i)d\theta_i\right) \\ &= \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{17\alpha+7}{6} \end{aligned}$$

Región III) La estrategia de la empresa $i \in \{1,2\}$ que forma parte del equilibrio si $\gamma_2 = 0$ y $\gamma_1 \neq 0$, era

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i)-g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \frac{e^{-(1-\alpha)\int \Omega(\theta_i)d\theta_i}}{1-\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(1,t)-g(\alpha,t))e^{(1-\alpha)\int \Omega(t)dt}dt \\ &= \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\left(\theta_i + e^{-(1-\alpha)\int \Omega(\theta_i)d\theta_i}\int_{\theta_i}^{a_2} e^{(1-\alpha)\int \Omega(t)dt}dt\right) \end{aligned}$$

donde bajo el Modelo Simétrico Correlado Uniforme

$$\begin{aligned} \Omega(\theta_i) &= -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\gamma_1\left(1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right)} \\ &= -\frac{2}{\gamma_1(2-\theta_i)} \end{aligned}$$

luego queda

$$b^*(\theta_i) = 2\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{\gamma_1+(1-\alpha)\theta_i}{\gamma_1+2(1-\alpha)}$$

Entonces el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, queda

$$\begin{aligned} P_i^{III}(\theta_i) &= \gamma_1\frac{2-\theta_i}{2}b^*(\theta_i) + 2\alpha\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} + (1-\alpha-\gamma_1)\int_{\theta_i}^2 b^*(t) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt \\ &= \begin{cases} \begin{array}{c} \frac{\gamma_1(2-\theta_i)b^*(\theta_i)}{2} + \frac{2\alpha(c(1)-c(\alpha))}{1-\alpha} \\ +(1-\alpha-\gamma_1)\left(\int_{\theta_i}^1 b^*(t)dt + \int_1^{\theta_i+1}\frac{b^*(t)(\theta_i-t+1)}{\theta_i}dt\right) \end{array} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \frac{\gamma_1(2-\theta_i)b^*(\theta_i)}{2} + \frac{2\alpha(c(1)-c(\alpha))}{1-\alpha} + (1-\alpha-\gamma_1)\int_{\theta_i}^2 b^*(t)\frac{2-t}{2-\theta_i}dt & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(c(1)-c(\alpha))\left(\alpha^2\left(2\theta_i^2-3\theta_i+9\right)-\alpha\left(\gamma_1\left(\theta_i^2+3\right)+2\left(2\theta_i^2-3\theta_i+3\right)\right)+\gamma_1\left(\theta_i^2-3\right)+2\theta_i^2-3\theta_i-3\right)}{3(1-\alpha)(2\alpha-\gamma_1-2)} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \frac{(c(1)-c(\alpha))\left(\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)-\theta_i^2+\theta_i+2\right)}{3(1-\alpha)} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

y el pago que espera hacer el Operador del Mercado queda

$$\begin{aligned} P^{III}_{omer} &= 2\int_0^2 P_i^{III}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\ &= \frac{(c(1)-c(\alpha))\left(17\alpha^2 - 2\alpha\left(4\gamma_1+5\right) - 4\gamma_1 - 7\right)}{3\left(1-\alpha\right)\left(2\alpha-\gamma_1-2\right)} \end{aligned}$$

3.4 Comparación de los modelos

Se ha analizado la familia paramétrica de modelos de subasta, $\mathcal{MSG}$, definida en la Sección 3.1., que contiene como casos particulares a los tres modelos clásicos (modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey) bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Simétrico Correlado Uniforme descrito en la Sección 3.3.. Se establecerá una ordenación entre dichos modelos de subasta, tanto desde el punto de vista de las empresas como desde el punto de vista del Operador del Mercado.

3.4.1 Caso 1 ($D \leq 1$)

El ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$ y el pago que espera hacer el Operador del Mercado, bajo las hipótesis del Modelo Simétrico Correlado Uniforme, si la demanda verifica $D \leq 1$, en la **Región II** y en la **Región III**, se calcularon en 3.3.1. y se resumen en

$$P_i^{II}(\theta_i) = \begin{cases} c(D)\frac{3+3\theta_i-2\theta_i^2}{6} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ c(D)\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

$$P^{II}_{omer} = \frac{7}{6}c(D)$$

$$P_i^{III}(\theta_i,\gamma_1) = \begin{cases} c(D)\frac{D\left(-2\theta_i^2+3\theta_i+3\right)+\gamma_1\left(3-\theta_i^2\right)}{3(2D+\gamma_1)} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ c(D)\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

$$P^{III}_{omer}(\gamma_1) = c(D)\left(\frac{\gamma_1}{6\left(2D+\gamma_1\right)} + \frac{7}{6}\right)$$

Como $P_i^{II}(\theta_i) = P_i^{III}(\theta_i, 0) \leq P_i^{III}(\theta_i,\gamma_1) \leq P_i^{III}(\theta_i, D)$, $\forall \gamma_1 \in [0, D]$, (desigualdades estrictas para $\theta_i \in [0,1)$ y $\gamma_1 \in (0, D)$) se deduce que las empresas esperan mayores o iguales ingresos bajo los modelos de subasta de la **Región III**, que bajo los modelos de subasta de la **Región**

II. El modelo bajo el que esperan mayores ingresos es el modelo de la **Región III** con $\gamma_1 = D$. Ese ingreso esperado máximo es $P_i^{III}(\theta_i, D) = c(D)\frac{2+\theta_i-\theta_i^2}{3}$, $\forall\theta_i \in [0,2]$.

Además puede observarse que $P_{omer}^{III}(\gamma_1) \geq P_{omer}^{III}(0) = P_{omer}^{II} = \frac{7}{6}c(D)$, $\forall\gamma_1 \in [0,D]$, (desigualdades estrictas para $\gamma_1 \in (0,D]$), luego el Operador del Mercado espera pagar menos bajo el único modelo de la **Región II** que bajo cualquiera de los modelos de la **Región III**.

En realidad lo que ocurre es que el ingreso esperado por las empresas, si ambas juegan en equilibrio, es monótono en todos los parámetros.

3.4.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

El ingreso esperado por la empresa i y el pago que espera hacer el Operador del Mercado, bajo las hipótesis del Modelo Simétrico Correlado Uniforme, si la demanda verifica $1 < D = 1+\alpha < 2$, en la **Región I**, **Región II** y **Región III** se calcularon en 3.3.2. y se resumen en

$$\begin{aligned}
P_i^I(\theta_i,\gamma_1,\gamma_2) &= \frac{2\gamma_1 - (\gamma_1-\gamma_2)\,\theta_i}{2} b^*(\theta_i) + (\alpha-\gamma_2)\,2\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \\
&\quad + (1-\alpha+\gamma_2-\gamma_1)\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(t)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t)dt
\end{aligned}$$

donde

$$b^*(\theta_i) = 2\frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1-2\,(1-\alpha)}\left(\left(\frac{(\gamma_2-\gamma_1)\,\theta_i+2\gamma_1}{2\gamma_2}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\gamma_2-\gamma_1}} - \frac{\gamma_1+(1-\alpha)\,\theta_i}{\gamma_2}\right)$$

Si $1-\gamma_1-\alpha+\gamma_2\neq 0$ el pago que espera hacer el Operador del Mercado es

$$
\begin{aligned}
P^I_{omer}(\gamma_1,\gamma_2) \quad = \quad & \frac{c(1)-c(\alpha)}{3\left(1-\alpha\right)\left(\alpha+\gamma_1-\gamma_2-1\right)\left(\left(\gamma_1-\gamma_2\right)^2-2\left(1-\alpha\right)^2\right)\left(2\alpha+3\gamma_1-3\gamma_2-2\right)} \\
& \left(3\cdot 2^{\frac{2\alpha-\gamma_1+\gamma_2-2}{\gamma_2-\gamma_1}}\gamma_2\left(\gamma_1+\gamma_2\right)^2\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\gamma_1-\gamma_2}}\cdot\right. \\
& \left(2\alpha^2+\alpha\left(5\gamma_1-5\gamma_2-4\right)+4\gamma_1^2-\gamma_1\left(6\gamma_2+5\right)+2\gamma_2^2+5\gamma_2+2\right) \\
& +68\alpha^5+4\alpha^4\left(43\gamma_1-49\gamma_2-61\right) \\
& +\alpha^3\left(91\gamma_1^2-2\gamma_1\left(127\gamma_2+224\right)+115\gamma_2^2+544\gamma_2+296\right) \\
& -\alpha^2\left(37\gamma_1^3+9\gamma_1^2\left(17-5\gamma_2\right)+3\gamma_1\left(41\gamma_2^2-174\gamma_2-104\right)\right) \\
& -\alpha^2\left(-67\gamma_2^3+225\gamma_2^2+456\gamma_2+104\right) \\
& -\alpha\left(24\gamma_1^4-2\gamma_1^3\left(39\gamma_2+7\right)+3\gamma_1^2\left(74\gamma_2^2-30\gamma_2-11\right)\right) \\
& -\alpha\left(-2\gamma_1\left(93\gamma_2^3+33\gamma_2^2-141\gamma_2+16\right)\right) \\
& -\alpha\left(18\gamma_2^4+74\gamma_2^3-105\gamma_2^2-64\gamma_2+44\right) \\
& -12\gamma_1^4-\gamma_1^3\left(36\gamma_2^2-66\gamma_2-23\right)+\gamma_1^2\left(36\gamma_2^3+6\gamma_2^2-135\gamma_2+29\right) \\
& +\gamma_1\left(12\gamma_2^4-42\gamma_2^3+57\gamma_2^2+14\gamma_2-68\right)-12\gamma_2^5-18\gamma_2^4+7\gamma_2^3 \\
& \left.+5\gamma_2^2+44\gamma_2+28-24\gamma_1^3\gamma_2\left(\gamma_1-\gamma_2\right)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\gamma_1-\gamma_2}}\right)
\end{aligned}
$$

Si $1-\gamma_1-\alpha+\gamma_2=0$ el pago que espera hacer el Operador del Mercado es

$$
\begin{aligned}
P^I_{omer}(\gamma_1,\gamma_2) \quad = \quad & \frac{c(1)-c(\alpha)}{18\left(1-\alpha\right)^5\left(\alpha-2\gamma_2-1\right)}\cdot \\
& \left(96\gamma_2^3\left(\alpha-2\gamma_2-1\right)\left(3\alpha^2-2\alpha\left(3\gamma_2+2\right)+2\gamma_2^2+4\gamma_2+1\right)Ln\left(-\alpha+2\gamma_2+1\right)\right. \\
& -96\gamma_2^3\left(\alpha-\gamma_2-1\right)\left(\alpha-2\gamma_2-1\right)\left(3\alpha-2\gamma_2-1\right)Ln\left(-\alpha+\gamma_2+1\right) \\
& +96\gamma_2^4\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\gamma_2-1\right)Ln\left(\gamma_2\right) \\
& -96\gamma_2^3\left(\alpha-2\gamma_2-1\right)\left(3\alpha^2-2\alpha\left(3\gamma_2+2\right)+2\gamma_2^2+4\gamma_2+1\right)Ln\left(2\right)+57\alpha^6 \\
& -\alpha^5\left(137\gamma_2+263\right)+\alpha^4\left(26\gamma_2^2+523\gamma_2+460\right) \\
& +2\alpha^3\left(92\gamma_2^3-48\gamma_2^2-361\gamma_2-175\right)-\alpha^2\left(336\gamma_2^4+408\gamma_2^3-132\gamma_2^2-398\gamma_2-65\right) \\
& +\alpha\left(192\gamma_2^5+480\gamma_2^4+264\gamma_2^3-80\gamma_2^2-37\gamma_2+53\right) \\
& \left.-192\gamma_2^5-144\gamma_2^4-40\gamma_2^3+18\gamma_2^2-25\gamma_2-22\right)
\end{aligned}
$$

$$P_i^{II}(\theta_i) = \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha\left(2\theta_i^2-3\theta_i+9\right)+3+3\theta_i-2\theta_i^2}{6} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)+2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

$$p_{omer}^{II} = \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{17\alpha+7}{6}$$

$$P_i^{III}(\theta_i,\gamma_1) = \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha^2\left(2\theta_i^2-3\theta_i+9\right)-\alpha\left(\gamma_1\left(\theta_i^2+3\right)+2\left(2\theta_i^2-3\theta_i+3\right)\right)+\gamma_1\left(\theta_i^2-3\right)+2\theta_i^2-3\theta_i-3}{3(2\alpha-\gamma_1-2)} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)+2+\theta_i-\theta_i^2}{3} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

$$P_{omer}^{III}(\gamma_1) = \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{17\alpha^2-2\alpha\left(4\gamma_1+5\right)-4\gamma_1-7}{3\left(2\alpha-\gamma_1-2\right)}$$

Como $P_i^{II}(\theta_i) = P_i^{III}(\theta_i,0) \leq P_i^{III}(\theta_i,\gamma_1) \leq P_i^{III}(\theta_i,1-\alpha)$, $\forall\gamma_1 \in [0,1-\alpha]$, (desigualdades estrictas para $\theta_i \in [0,1)$ y $\gamma_1 \in (0,1-\alpha)$) se deduce que las empresas esperan mayores o iguales ingresos bajo los modelos pertenecientes a la **Región III** que los pertenecientes a la **Región II**. El modelo que maximiza el ingreso esperado de todos los pertenecientes a la **Región III** es el que toma el valor $\gamma_1 = 1-\alpha$. Como además, $P_i^{I}(\theta_i,\gamma_1,\gamma_2) \leq P_i^{III}(\theta_i,1-\alpha)$, $\forall\gamma_1 \in [0,1-\alpha+\gamma_2]$ y $\forall\gamma_2 \in [0,\alpha]$ (desigualdades estrictas para $\theta_i \in [0,1)$) el modelo que maximiza el ingreso esperado por las empresas, de todos los contemplados en el Modelo de Subasta General, es, de los pertenecientes a la **Región III**, el que toma el valor $\gamma_1 = 1-\alpha$. Este ingreso esperado máximo es $P_i^{III}(\theta_i,1-\alpha) = \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)+2+\theta_i-\theta_i^2}{3}$, $\forall\theta_i \in [0,2]$.

Además, con ayuda del *software Mathematica 5*, se han obtenido las siguientes desigualdades:

$P_{omer}^{III}(\gamma_1) \geq P_{omer}^{III}(0) = P_{omer}^{II}$, $\forall\gamma_1 \in [0,1-\alpha]$, (desigualdades estrictas para $\gamma_1 \in (0,1-\alpha]$) luego el Operador del Mercado espera pagar menos bajo el modelo perteneciente a la **Región II** que bajo los modelos de la **Región III**.

$P_{omer}^{I}(\gamma_1,\gamma_2) \geq P_{omer}^{I}(0,\alpha)$, $\forall\gamma_1 \in [0,1-\alpha+\gamma_2]$ y $\forall\gamma_2 \in [0,\alpha]$, (desigualdades estrictas para $\gamma_1 \in (0,1-\alpha+\gamma_2]$ y $\gamma_2 \in [0,\alpha)$) luego de todos los modelos de subasta pertenecientes a la **Región I**, el más ventajoso para el Operador del Mercado es el de parámetros $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = \alpha$.

$P_{omer}^{II} \geq P_{omer}^{I}(0,\alpha)$, luego el modelo más ventajoso de los pertenecientes a la **Región I** da menores pagos esperados al Operador del Mercado que el modelo de la **Región II**.

Concluyendo, el modelo con el que el Operador del Mercado espera hacer menores pagos de todos los contemplados en el Modelo de Subasta General en el Caso 2, es el modelo de la

Región I con parámetros $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = \alpha$. Bajo este modelo el pago que espera realizar el subastador es

$$P^{I}_{omer}(0,\alpha) = \frac{(c(1)-c(\alpha))(1+\alpha)\left(24\alpha^3\left(1-2^{\frac{-2}{\alpha}}\right)+7\alpha^2+7\alpha-14\right)}{3(1-\alpha)(2+\alpha)(3\alpha-2)}$$

En realidad lo que ocurre es que el ingreso esperado por las empresas, si ambas juegan en equilibrio, es monótono en todos los parámetros.

3.5 Casos particulares: modelos Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey.

En esta sección nos centraremos en la discusión clásica. Se considerarán los equilibrios bayesianos de Nash, el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera realizar el subastador, bajo los casos particulares de los tres modelos clásicos de subasta que se suelen analizar en el contexto de la subasta del Mercado Eléctrico. Dichos cálculos se harán bajo las hipótesis del Modelo Simétrico Correlado y, en particular, bajo las hipótesis del Modelo Simétrico Correlado Uniforme. La descripción de estos tres modelos, es decir, cómo se fija bajo cada uno de ellos el precio o precios de la transacción comercial, se hizo al principio del presente capítulo en la sección 3.1.. Identificaremos los tres modelos clásicos dentro de la ordenación establecida.

3.5.1 Caso 1 $(D \leq 1)$

En este caso, la cantidad de unidades asignada a la empresa $i \in \{1,2\}$ por el Operador del Mercado para el despacho eléctrico es:

$$Q_i(b_i,b_j) = \begin{cases} D & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

En este caso, los modelos Discriminatorio y Uniforme coinciden. El precio por unidad recibido por la empresa ganadora es igual a su propia oferta en los dos modelos; en el modelo Discriminatorio, siempre es así y en el modelo Uniforme también lo es porque la única oferta que entra en el mercado es la más alta aceptada (la empresa ganadora es la primera y la última en entrar al mercado).

En este Caso 1 quedan determinados, por el valor de la demanda, $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$.

Modelos de subasta Uniforme y Discriminatorio

El beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_i - g(D,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, este modelo se identifica con un punto de la **Región III** dado por los valores $\gamma_1 = D$ y $\beta_1 = \varphi = \gamma_2 = 0$. Luego, por la **Región III** de la Proposición 3.2.1., el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está formado por las siguientes estrategias:

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D} + \frac{e^{\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)} d\theta_i}}{D} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{-\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)} dt} dt$$

Lo que espera ingresar la empresa $i \in \{1,2\}$, en ambos modelos, si ambas empresas juegan el equilibrio es

$$\begin{aligned} P_i^{Unif/Disc}(\theta_i) &= Db^*(\theta_i)(1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)) \\ &= \left(g(D,\theta_i) + e^{\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)} d\theta_i} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{-\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)} dt} dt \right) (1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)) \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Unif/Disc} &= 2 \int_{a_1}^{a_2} P_i^{Unif/Disc}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2 \int_{a_1}^{a_2} \left(g(D,\theta_i) + e^{\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)} d\theta_i} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{-\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)} dt} dt \right) (1 - F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \end{aligned}$$

Consideremos el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme definido al principio de la Sección 3.3.. En éste se verificaba que $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = 1$ y $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = \frac{\theta}{2}$ y, por tanto, el equilibrio bayesiano de Nash bajo el modelo Uniforme/Discriminatorio, en el Caso 1, queda formado por las siguientes estrategias:

$$b^*(\theta_i) = \frac{2c\,(D)}{D} \frac{(1+\theta_i)}{3}$$

Luego el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio bajo el modelo Discriminatorio/Uniforme, queda, en el Caso 1:

$$P_i^{Unif/Disc}(\theta_i) = P_i^{III}(\theta_i, D) = c(D) \frac{-\theta_i^2 + \theta_i + 2}{3}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado, en el Caso 1, por

$$P_{omer}^{Unif/Disc} = P_{omer}^{III}\,(D) = c\,(D)\,\frac{11}{9}$$

Modelo de subasta Vickrey

El beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_j - g(D,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, este modelo se identifica con un punto de la **Región II** dado por los valores $\beta_1 = D$ y $\gamma_1 = \varphi = \gamma_2 = 0$. Luego, por la **Región II** de la Proposición 3.2.1., el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está formado por las siguientes estrategias:

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D}$$

Lo que espera ingresar la empresa $i \in \{1,2\}$ bajo el modelo de Vickrey, si juegan el equilibrio, es

$$\begin{aligned} P_i^{Vick}(\theta_i) &= D\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(\theta_j) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)d\theta_j \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} g(D,\theta_i) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)d\theta_j \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Vick} &= 2\int_{a_1}^{a_2} P_i^{Vick}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i)d\theta_i \\ &= 2\int_{a_1}^{a_2}\int_{\theta_i}^{a_2} g(D,\theta_i) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)d\theta_j f_{\Theta_i}(\theta_i)d\theta_i \end{aligned}$$

Consideremos el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme definido al principio de la Sección 3.3.. Bajo el modelo de Vickrey, las estrategias del equilibrio bayesiano de Nash, en el Caso 1, son independientes de la distribución de los tipos

$$b^*(\theta_i) = \frac{c(D)\theta_i}{D} \qquad i \in \{1,2\}$$

Luego el ingreso esperado por la empresa i, si ambas empresas juegan el equilibrio bajo el modelo de Vickrey, queda en el Caso 1:

$$P_i^{Vick}(\theta_i) = P_i^{II}(\theta_i) = \begin{cases} c(D)\frac{-2\theta_i^2+3\theta_i+3}{6} & \text{si} \quad \theta_i \in [0,1] \\ c(D)\frac{-\theta_i^2+\theta_i+2}{3} & \text{si} \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado en el Caso 1 por

$$P_{omer}^{Vick} = P_{omer}^{II} = c(D)\frac{7}{6}$$

Comparación en el Caso 1

Obsérvese además que, en el Caso 1, el Modelo de Subasta General quedaba reducido a una familia uniparamétrica de modelos de subasta en el que el intervalo al que pertenece el parámetro γ_1 era $[0, D]$. Precisamente en los dos extremos de dicho intervalo aparecen los tres modelos clásicos Uniforme, Discriminatorio (que coinciden) y de Vickrey.

Es de esperar que en el modelo de subasta de Vickrey, las empresas ajusten más sus ofertas a su verdadero coste ya que van a recibir, en el caso de ganar, la oferta del otro, que será mayor. Es decir, que las empresas se muestran menos agresivas ofertando bajo el modelo de Vickrey que bajo los modelos Uniforme y Discriminatorio. En efecto:

$$b^*_{Unif/Discr}(\theta_i) = \frac{g(D,\theta_i)}{D} + \frac{e^{\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)} d\theta_i}}{D} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) e^{-\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)} dt} dt$$

$$\geq \frac{g(D,\theta_i)}{D} = b^*_{Vick}(\theta_i)$$

Ya vimos en la Sección 3.4.1. que $P_i^{II}(\theta_i) \leq P_i^{III}(\theta_i, D)$, en realidad $P_i^{Vick}(\theta_i) = P_i^{II}(\theta_i) \leq P_i^{III}(\theta_i, D) = P_i^{Unif/Disc}(\theta_i) = c(D)\frac{-\theta_i^2+\theta_i+2}{3}$. Luego para las empresas resulta más ventajoso el modelo Uniforme/Discriminatorio que el modelo de Vickrey, en el Caso 1. No sólo eso, además es el más ventajoso para las empresas entre todos los pertenecientes al Modelo de Subasta General, según se vio en la Sección 3.4.1..

Además, se vio que $P_{omer}^{III}(\gamma_1) \geq P_{omer}^{III}(0) = P_{omer}^{II} = \frac{7}{6}c(D)$, y eso implica en particular que $P_{omer}^{Unif/Disc} = P_{omer}^{III}(D) \geq P_{omer}^{II} = P_{omer}^{Vick} = \frac{7}{6}c(D)$. Luego el Operador del Mercado espera pagar menos bajo el modelo de Vickrey que bajo el modelo Uniforme/Discriminatorio. No sólo eso, en la Sección 3.4.1 se vio que el modelo de Vickrey es el más ventajoso para el Operador del Mercado entre todos los modelos de la familia del Modelo de Subasta General.

3.5.2 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha < 2)$

En este caso, la cantidad asignada por el Operador del Mercado a la empresa $i \in \{1, 2\}$ está dada por la siguiente función:

$$Q_i(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Ahora, el precio que el subastador paga a las empresas que generen en el mercado es diferente en los modelos Discriminatorio y Uniforme. Por ello, se analizarán los tres modelos clásicos por separado.

En este Caso 2 quedan determinados, por el valor de la demanda, $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$.

Modelo de subasta Uniforme

En el modelo Uniforme, el precio por unidad despachada recibido por una empresa es igual a la oferta más alta aceptada.

Si $b_i < b_j$, la empresa i recibe b_j por unidad despachada (la empresa j entra en el mercado despachando la demanda residual y la oferta de la empresa j es la mayor aceptada).

Si $b_i > b_j$, la empresa i recibe su propia oferta b_i por unidad despachada (la empresa i entra en el mercado despachando la demanda residual α y la oferta de la empresa i es la mayor aceptada).

La función de beneficio de la empresa i es, entonces:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha b_i - g(\alpha,\theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, si se tiene en cuenta la función beneficio general, dada por la expresión 3.1.1., los valores de los parámetros en este caso son $\beta_1 = 1$, $\gamma_2 = \alpha$ y $\gamma_1 = \varphi = 0$. Luego, por la **Región I** de la Proposición 3.2.1., el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está formado por las siguientes estrategias:

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) &= \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \left(b_{\max} - \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha} \right) e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}dt} \\ &+ \frac{e^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}d\theta_i}}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(1,t) - g(\alpha,t)) e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}dt} dt \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas juegan el equilibrio correspondiente, viene dado por la siguiente expresión

$$P_i^{Unif}(\theta_i) = \alpha b^*(\theta_i) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(\theta_j) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Unif} &= 2\int_{a_1}^{a_2} P_i^{Unif}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2\int_{a_1}^{a_2} \left(\alpha b^*(\theta_i) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{a_2} b^*(\theta_j) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) d\theta_j \right) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \end{aligned}$$

Consideremos el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme definido al principio de la Sección 3.3.. En éste se verificaba que $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = 1$ y $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = \frac{\theta}{2}$. Las estrategias que forman el equilibrio en el Caso 2, bajo el modelo Uniforme quedan

$$b^*(\theta_i) = \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}} - (1-\alpha)\,\theta_i}{\frac{3\alpha-2}{2}}$$

Luego el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$ bajo el modelo Uniforme, en el Caso 2, queda

$$P_i^{Unif}(\theta_i) = p_i^I(\theta_i, 0, \alpha) = \quad \tfrac{\alpha\theta_i}{2} b^*(\theta_i) + \textstyle\int_{\theta_i}^{a_2} b^*\,(t)\, f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(t) dt$$

$$= \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{12\alpha^3\left(\frac{\theta_i+1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - 12\alpha^3\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \theta_i(1-\alpha)(\alpha-2)\left(\theta_i^2(3\alpha-2)+3\theta_i+3\right) - 12\alpha^3 2^{\frac{-2}{\alpha}}}{3\theta_i(2-\alpha)(3\alpha-2)} & si \quad \theta_i \in [0,1] \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{24\alpha^3\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - \theta_i^4\left(3\alpha^3-11\alpha^2+12\alpha-4\right) + 6\theta_i^3\left(\alpha^3-4\alpha^2+5\alpha-2\right) - 4\theta_i\left(3\alpha^3-2\alpha^2+6\alpha-4\right)}{3\theta_i(2-\alpha)(3\alpha-2)(\theta_i-2)} & si \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el modelo Uniforme, en el Caso 2, viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Unif} &= P_{omer}^I(0,\alpha) = \\ &= \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{(\alpha+1)\left(24\left(1-2^{\frac{-2}{\alpha}}\right)\alpha^3 + 7\alpha^2 + 7\alpha - 14\right)}{3\,(\alpha+2)\,(3\alpha-2)} \end{aligned}$$

Modelo de subasta Discriminatorio

En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa es siempre su propia oferta. Es decir, la empresa i recibe b_i por unidad despachada.

Luego, la función de beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ queda:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_i - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha b_i - g(\alpha,\theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, si se tiene en cuenta la función beneficio general, dada por la expresión 3.1.1., los valores de los parámetros en este caso son $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \alpha$ y $\beta_1 = \varphi = 0$. Luego, por la **Región I** de la Proposición 3.2.1., el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está formado por las siguientes estrategias:

$$
\begin{aligned}
b^*(\theta_i) \;=\;& \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha} + \left(b_{\max} - \frac{g(1,a_2) - g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}\right) e^{-(1-\alpha)\int_{\theta_i}^{a_2} \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-(1-\alpha)F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}dt} \\
&+ \frac{e^{(1-\alpha)\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{1-(1-\alpha)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}d\theta_i}}{1-\alpha} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(1,t) - g(\alpha,t)) e^{-(1-\alpha)\int \frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}{1-(1-\alpha)F_{\Theta_j|\Theta_i=t}(t)}dt} dt
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas juegan el equilibrio correspondiente, viene dado por la siguiente expresión

$$
P_i^{Discr}(\theta_i) = \left(1 - (1-\alpha)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right) b^*(\theta_i)
$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{Discr} &= 2\int_{a_1}^{a_2} P_i^{Discr}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\
&= 2\int_{a_1}^{a_2} \left(1 - (1-\alpha)F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)\right) b^*(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i
\end{aligned}
$$

Consideremos el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme definido al principio de la Sección 3.3.. En éste que se verificaba que $f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = 1$ y $F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta}(\theta) = \frac{\theta}{2}$. Las estrategias que forman el equilibrio en el Caso 2, bajo el modelo Discriminatorio, quedan

$$
b^*(\theta_i) = \frac{c(1) - c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{2\alpha^2 + 2(1-\alpha)\left(1 - \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}(1-\alpha)^2\left(1 - \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^3\right)}{\left(1 - (1-\alpha)\frac{\theta_i}{2}\right)^2}
$$

Luego el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, bajo el modelo Discriminatorio en el Caso 2, queda

$$
\begin{aligned}
P_i^{Discr}(\theta_i) &= P_i^I(\theta_i, 1, \alpha) \\
&= \frac{c(1) - c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{2\alpha^2 + 2(1-\alpha)\left(1 - \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}(1-\alpha)^2\left(1 - \left(\frac{\theta_i}{2}\right)^3\right)}{\left(1 - (1-\alpha)\frac{\theta_i}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo el modelo Discriminatorio, en el Caso 2, viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Discr} &= P_{omer}^{I}(1,\alpha) \\ = \frac{c(1)-c(\alpha)}{9\,(1-\alpha)^4} & \left(48\alpha^3\,(1+\alpha)\log\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) - 48\alpha^4\log(\alpha) - 7\alpha^4 + 22\alpha^3 - 12\alpha^2 - 14\alpha + 11\right) \end{aligned}$$

Modelo de subasta Vickrey

En el modelo Vickrey, el precio por unidad despachada recibido por una empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_i < b_j$, la empresa i recibe b_j por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo $b_{\max}$ por cada una de las α unidades restantes (la empresa i entra en el mercado despachando toda su capacidad, pero parte de esta capacidad se la pagan a b_j y parte a precio máximo $b_{\max}$).

Si $b_i > b_j$, la empresa i recibe la oferta máxima $b_{\max}$ por cada una de las α unidades que despacha (la empresa i entra en el mercado despachando la demanda residual)

La función de beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ es, entonces:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j(1-\alpha) + b_{\max}\alpha - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ b_{\max}\alpha - g(\alpha,\theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Es decir, si se tiene en cuenta la función beneficio general, dada por la expresión 3.1.1., los valores de los parámetros en este caso son $\beta_1 = (1-\alpha)$, $\varphi = \alpha$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Luego, por la **Región II** de la Proposición 3.2.1., el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está formado por las siguientes estrategias:

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)}{1-\alpha}$$

El ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$, si ambas empresas juegan el equilibrio es

$$\begin{aligned} P_i^{Vick}(\theta_i, b^*(\theta_i)) &= (1-\alpha)\int_{\theta_i}^{a_2} b^*(\theta_j) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)d\theta_j + b_{\max}\alpha \\ &= \int_{\theta_i}^{a_2} \left(g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j)d\theta_j + b_{\max}\alpha \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Vick} &= 2\int_{a_1}^{a_2} P_i^{Vick}(\theta_i) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \\ &= 2\int_{a_1}^{a_2}\int_{\theta_i}^{a_2} \left(g(1,\theta_i) - g(\alpha,\theta_i)\right) f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_j) f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_j d\theta_i + 2b_{\max}\alpha \end{aligned}$$

Consideremos el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme definido al principio de la Sección 3.3.. Las estrategias que forman el equilibrio bajo el modelo de Vickrey, en el Caso 2, quedan

$$b^*(\theta_i) = \frac{c\,(1) - c\,(\alpha)}{1-\alpha}\theta_i \qquad i \in \{1,2\}$$

Luego el pago esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$ bajo el modelo de Vickrey, en el Caso 2, queda

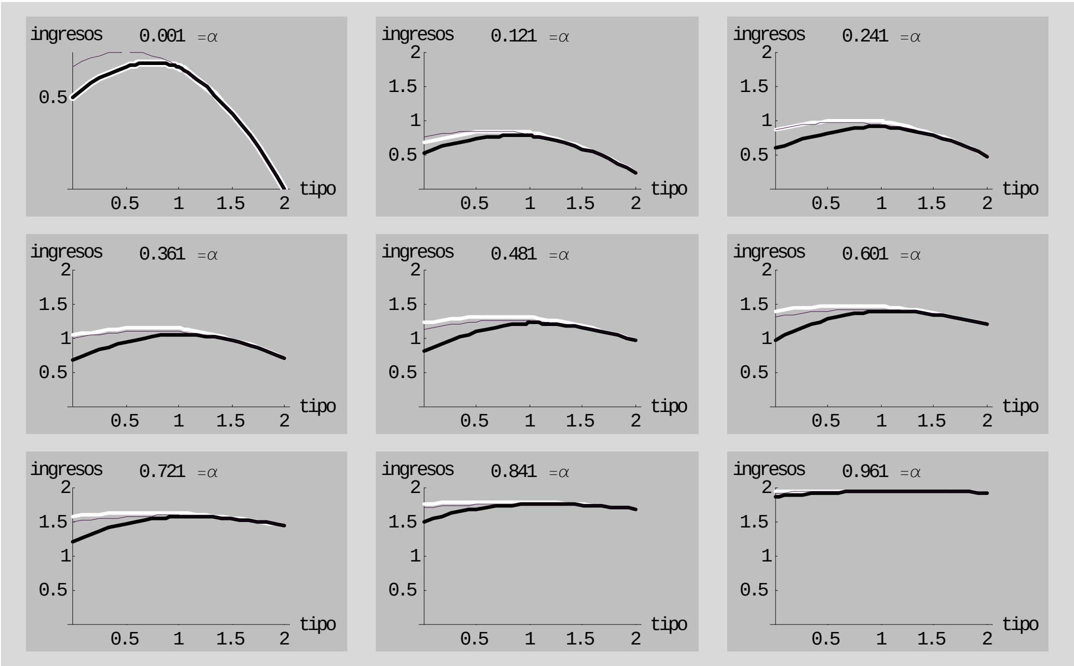
$$\begin{aligned} P_i^{Vick}(\theta_i) &= P_i^{II}(\theta_i) = \\ & \begin{cases} \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)\theta_i(3-2\theta_i)+3(3\alpha+1)}{6} & \text{si} \quad \theta_i \in [0,1] \\ \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha}\frac{(1-\alpha)\theta_i(1-\theta_i)+2(2\alpha+1)}{3} & \text{si} \quad \theta_i \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

El pago que espera hacer el Operador del Mercado, bajo el modelo de Vickrey, en el Caso 2 viene dado por

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Vick} &= P_{omer}^{II} = \\ &= \frac{c\,(1) - c\,(\alpha)}{1-\alpha}\frac{17\alpha+7}{6} \end{aligned}$$

Comparación en el Caso 2

Ante la no coincidencia de ingresos bajo los diversos modelos de subasta considerados, lo lógico es plantearse bajo qué modelo de subasta una empresa obtiene mayores ingresos esperados y el Operador del Mercado espera pagar menos. Analizaremos gráficamente, debido a la complicación de las expresiones obtenidas, el caso particular del Modelo Simétrico Correlado Uniforme. Se representa en las siguientes gráficas los ingresos esperados en el Caso 2, en los tres modelos de subasta clásicos, por la empresa i dando distintos valores a α.



Donde la gráfica negra gruesa representa el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1, 2\}$ bajo el modelo Uniforme, la gráfica negra fina bajo el modelo Discriminatorio y la gráfica blanca, bajo el modelo de Vickrey[3].

En general, para los distintos valores de α, el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1, 2\}$ es algo menor en el modelo Uniforme. El ingreso esperado bajo los modelos Discriminatorio y Vickrey son similares, aunque algo mayores bajo este último a medida que α aumenta. Además, a medida que α tiende a 1, los tres modelos tienden a dar el mismo ingreso esperado (tienden a 2 si $\alpha \to 1$).

Vimos en la Sección 3.4.2. que $P_i^{II}(\theta_i) \leq P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha)$ y $P_i^{I}(\theta_i, \gamma_1, \gamma_2) \leq P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha)$, lo que implica $P_i^{Vick}(\theta_i) = P_i^{II}(\theta_i) \leq P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha)$, $P_i^{Unif}(\theta_i) = P_i^{I}(\theta_i, 0, \alpha) \leq P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha)$ y $P_i^{Disc}(\theta_i) = P_i^{I}(\theta_i, 1, \alpha) \leq P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha)$. Es decir, existe un modelo incluido en el Modelo de Subasta General más ventajoso que cualquiera de los tres modelos clásicos. Se trata del modelo en la **Región III** con $\gamma_1 = 1 - \alpha$, que llamaremos **modelo DV**. Dicho modelo queda definido

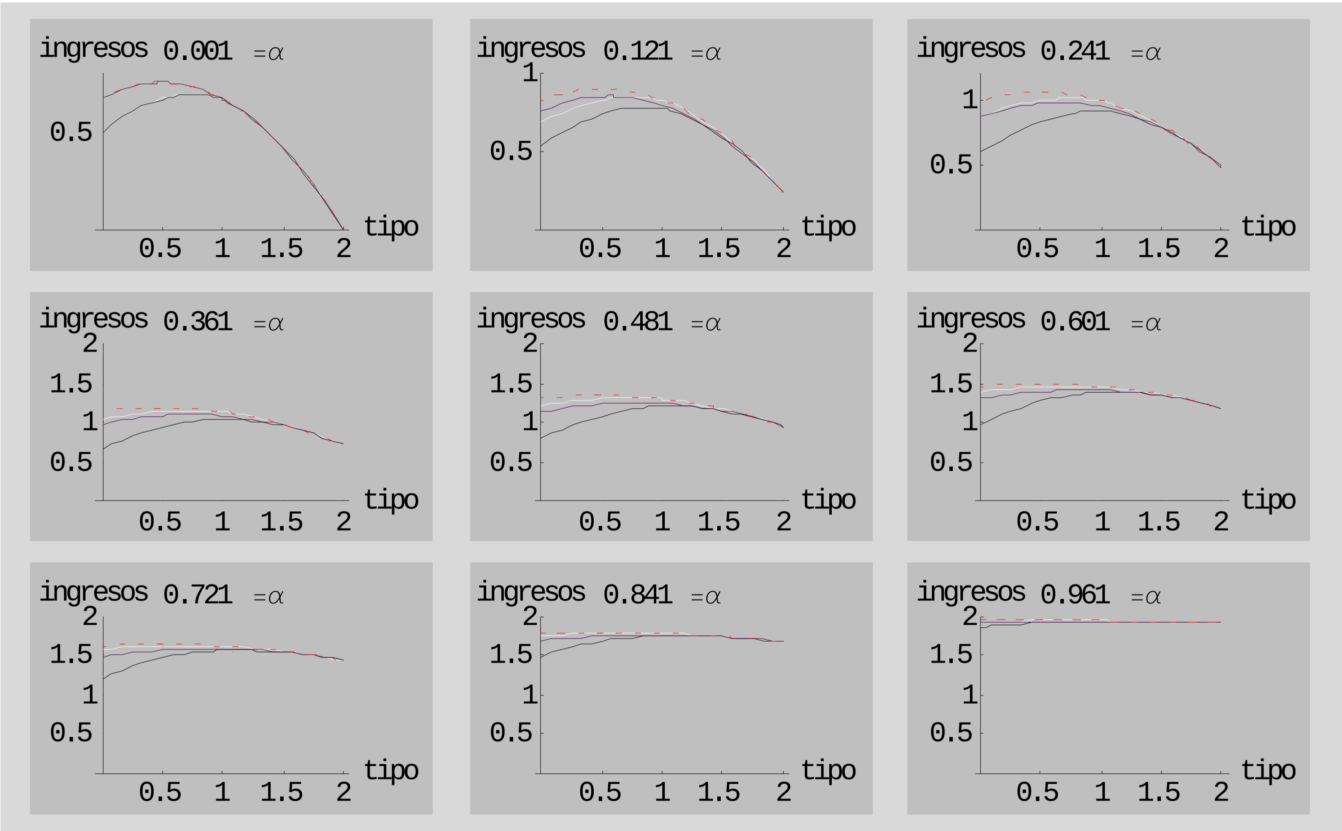
[3]Estas gráficas se han importado del *software Mathematica 5.0* y las sentencias necesarias se incluyen en el Apéndice A.

con la función beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ siguiente

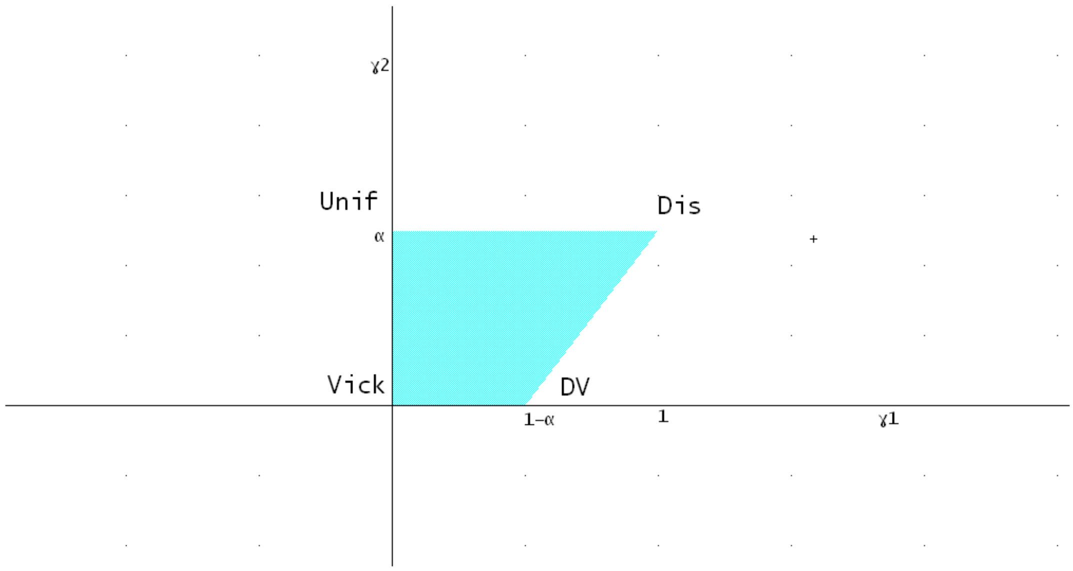
$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_i + \alpha b_{\max} - c(1)\theta_i & si \quad b_i < b_j \\ \alpha b_{\max} - c(\alpha)\theta_i & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Además ese ingreso máximo que esperan las empresas bajo el modelo DV es $P_i^{III}(\theta_i, 1-\alpha) = \frac{c(1)-c(\alpha)}{1-\alpha} \frac{\alpha\left(\theta_i^2-\theta_i+4\right)+2+\theta_i-\theta_i^2}{3}$, $\forall \theta_i \in [0,2]$.

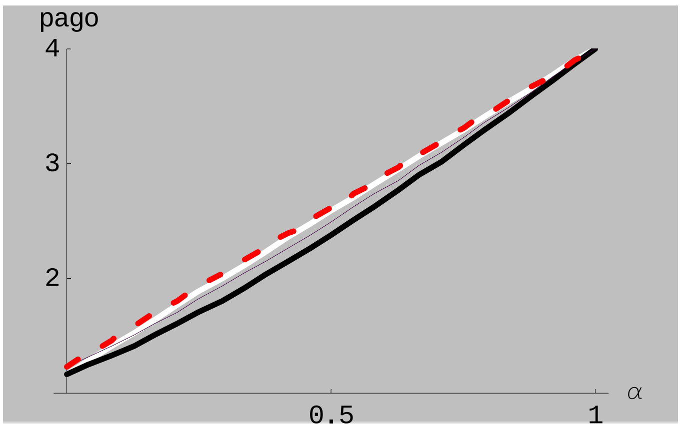
Representemos las cuatro gráficas de los ingresos esperados, añadiendo a las gráficas anteriores el ingreso esperado por la empresa $i \in \{1,2\}$ bajo el modelo DV.



Es curioso que aparezca un nuevo modelo que no corresponde a ninguno de los clásicos con el que, además, las empresas obtienen mayores ingresos esperados. Obsérvese además que en el Caso 2, el Modelo de Subasta General quedaba reducido a una familia biparamétrica de modelos de subasta en el que los intervalos a los que pertenecían los parámetros era $\gamma_1 \in [0, 1-\alpha+\gamma_2]$ y $\gamma_2 \in [0, \alpha]$. En el siguiente dibujo se muestra dicha región en la que se encuentran, en los vértices, precisamente los tres modelos clásicos y ese cuarto modelo llamado Modelo DV encontrado en este trabajo.



Representaremos en una única gráfica el pago que espera realizar el subastador en cada uno de los cuatro modelos, en el Caso 2, por la demanda eléctrica D. En el eje de abcisas se toma valores de $\alpha \in [0, 1]$.



Donde la gráfica negra gruesa representa el pago esperado por el Operador bajo el modelo Uniforme, la gráfica negra fina bajo el modelo Discriminatorio, en la gráfica blanca bajo el modelo de Vickrey y en la gráfica discontinua bajo el modelo DV[4].

El Operador del Mercado espera realizar menor pago con el modelo Uniforme que con los tres modelos restantes. Además, se vio en la Sección 3.4.2. que $P^{III}_{omer}(\gamma_1) \geq P^{II}_{omer}$, $P^{I}_{omer}(\gamma_1, \gamma_2) \geq P^{I}_{omer}(0, \alpha)$ y $P^{II}_{omer} \geq P^{I}_{omer}(0, \alpha)$, luego eso implica que $P^{III}_{omer}(\gamma_1) \geq P^{II}_{omer} = P^{Vickrey}_{omer} \geq$

[4]Estas gráficas se han importado del *software Mathematica 5.0* y las sentencias necesarias se incluyen en el Apéndice A.

$P^I_{omer}(1,\alpha) = P^{Disc}_{omer} \geq P^I_{omer}(0,\alpha) = P^{Unif}_{omer}$, y por tanto se puede afirmar que el modelo Uniforme es el más ventajoso para el Operador del Mercado entre todos los modelos incluidos en el Modelo de Subasta General. Ese pago mínimo que espera realizar el subastador es

$$P^{Unif}_{omer} = \frac{(c(1) - c(\alpha))\,(1+\alpha)\left(24\alpha^3\left(1 - 2^{\frac{-2}{\alpha}}\right) + 7\alpha^2 + 7\alpha - 14\right)}{3\,(1-\alpha)\,(2+\alpha)\,(3\alpha-2)}$$

3.5.3 Gráficas para cualquier tamaño de la demanda

Hay que destacar, en primer lugar, que los tres modelos clásicos Discriminatorio, Uniforme y de Vickrey, "cambian de nombre" cuando la demanda tiende a uno por la derecha y por la izquierda. Por ejemplo, si consideramos en el Caso 2 ($1 < D = 1+\alpha < 2$) el modelo Uniforme, recordemos que la función de beneficio venía dada por la siguiente expresión

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha b_i - g(\alpha,\theta_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Si α decrece a cero, la función beneficio resultante es

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_j - g(1,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

coincidiendo con el modelo de Vickrey del Caso 1 ($0 < D \leq 1$), cuya función de beneficio venía dada por la siguiente expresión

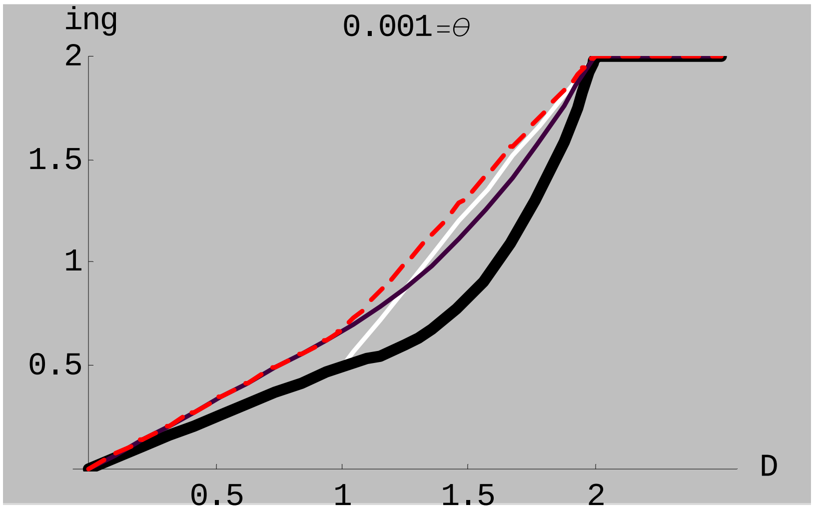
$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_j - g(D,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

cuando D crece a 1. No coincidiendo con el modelo Uniforme/Discriminatorio del Caso 1 ($0 < D \leq 1$) que era:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} Db_i - g(D,\theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \end{cases}$$

Al entrar en el mercado una sólo empresa, el beneficio depende siempre de la propia oferta.

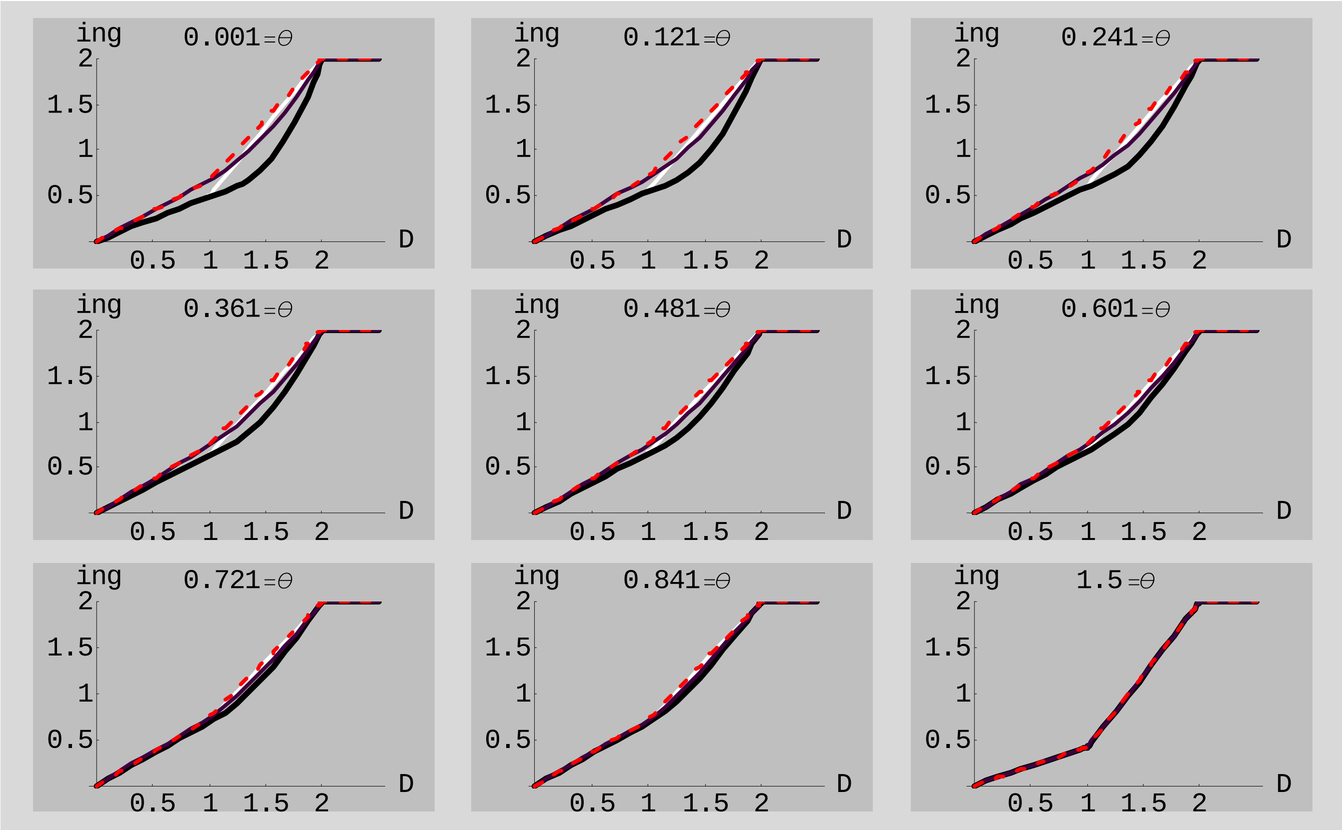
Luego existirá continuidad tanto en los ingresos esperados por las empresas, como en el pago que espera realizar el subastador, si tenemos en cuenta estos "cambios de nombre" cuando la demanda tiende a 1. Observemos, para que todo esto quede más claro, la siguiente gráfica en la que se ha representado el ingreso esperado por una de las empresas, para un valor del tipo fijo $\theta = 0.001$, y en el eje de abcisas la demanda perteneciente al intervalo $[0, 3]$, bajo cuatro modelos de subasta (Discriminatorio, de Vickrey, Uniforme y DV).



En el intervalo $[0, 1]$ (y, por tanto, en el Caso 1) la gráfica de trazo grueso representa el modelo de Vickrey y la gráfica de trazo fino, el modelo Uniforme/Discriminatorio. En el intervalo $[1, 2]$ (y, por tanto, en el Caso 2) la gráfica de trazo grueso, ahora, representa el modelo Uniforme, la gráfica representada en blanco, el modelo de Vickrey, la gráfica de trazo fino el modelo Discriminatorio y la gráfica en trazo discontinuo, el modelo DV.

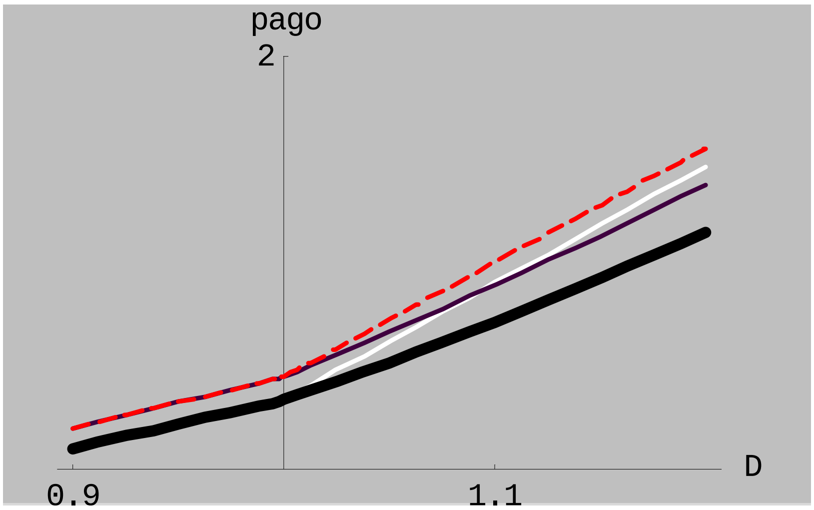
En realidad la clasificación de los modelos clásicos no es muy adecuada. Si nos fijamos, por ejemplo, en la gráfica de trazo grueso (Vickrey en el Caso1) y en las dos gráficas que parten de ella (Uniforme y Vickrey en el Caso 2) cuando $D = 1$, esos tres modelos tiene en común que el valor del parámetro $\gamma_1 = 0$. Si nos fijamos, por el contrario, en las otras tres gráficas, es decir, la gráfica que representa al modelo Uniforme/Discriminatorio del Caso 1, que se bifurca en Discriminatoria del Caso 2 y DV del Caso 2, estos tres modelos tienen en común que el valor del parámetro $\beta_1 = 0$. Es decir, en el primer grupo de modelos de subasta, el pago recibido depende de la oferta contraria y no de la propia oferta realizada, y en el segundo grupo de modelos de subasta el pago recibido depende de la propia oferta y no de la oferta contraria.

Las siguientes gráficas son similares a la anterior pero para distintos valores del tipo. En ellas se ha representado el ingreso esperado por una de las empresas para cualquier valor de la demanda perteneciente al intervalo $[0, 3]$, bajo los cuatro modelos antes mencionados.



En el intervalo $[0,1]$ (y, por tanto, en el Caso 1) la gráfica de trazo grueso representa el modelo de Vickrey y la gráfica de trazo fino, el modelo Uniforme/Discriminatorio. En el intervalo $[1,2]$ (y, por tanto, en el Caso 2) la gráfica de trazo grueso, ahora, representa el modelo Uniforme, la gráfica representada en blanco, el modelo de Vickrey, la gráfica de trazo fino el modelo Discriminatorio y la gráfica en trazo discontinuo, el modelo DV.

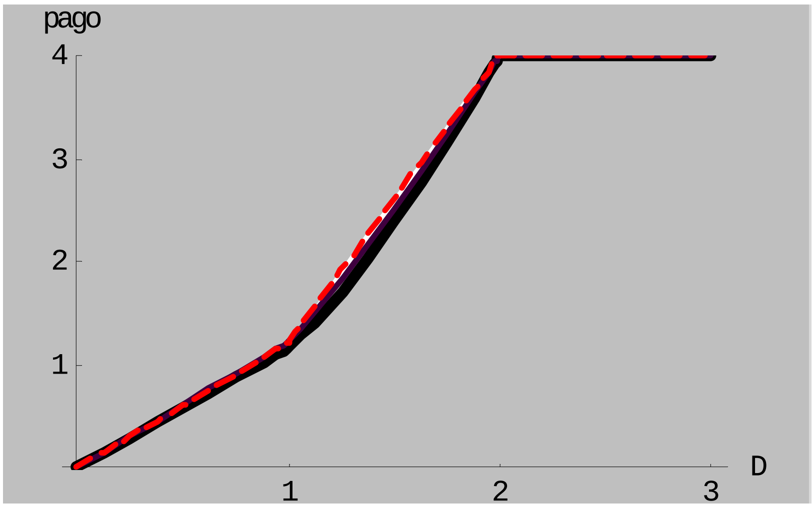
Se observa que, a medida que el tipo tiende a uno, el ingreso esperado por una empresa tiende a ser el mismo en todos los modelos considerados y, a partir de 1, como se había observado en los cálculos explícitos, hay equivalencia de ingresos. En la siguiente gráfica se ha representado el pago que el Operador del Mercado espera realizar bajo los cuatro modelos de subasta mencionados para valores de la demanda alrededor del uno.



En el intervalo $[0, 1]$ (y, por tanto, en el Caso 1) la gráfica de trazo grueso representa el modelo de Vickrey y la gráfica de trazo fino, el modelo Uniforme/Discriminatorio. En el intervalo $[1, 2]$ (y, por tanto, en el Caso 2) la gráfica de trazo grueso, ahora, representa el modelo Uniforme, la gráfica representada en blanco, el modelo de Vickrey, la gráfica de trazo fino el modelo Discriminatorio y la gráfica en trazo discontinuo, el modelo DV.

Desde el punto de vista del Operador del Mercado se concluye que el modelo que le reporta mayores ventajas es el modelo de Vickrey, en el Caso 1, y el modelo Uniforme, en el Caso 2. El menos ventajoso, con el que más espera pagar por la demanda eléctrica, es el modelo Uniforme/Discriminatorio, en el Caso 1, y el modelo DV, en el Caso 2.

La gráfica anterior es una ampliación de la siguiente gráfica en la que la demanda varía entre cero y tres.



3.6 Conclusiones

Se ha analizado una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres modelos clásicos (modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey) bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Simétrico Correlado Uniforme descrito en la Sección 3.1.. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente la siguiente función de beneficio de cada empresa i:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con γ_1,β_1, φ, $\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ y $\phi_1 + \phi_2 = D$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1+\alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$.

Si $D < 2$, se obtuvo tomando $b_{\max} = \frac{g(\phi_1,a_2)-g(\phi_2,a_2)}{\phi_1-\phi_2}$, un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico $(b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$ donde

$$\begin{aligned} b^*(\theta_i) \quad &= \quad \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2} + \\ &\quad \frac{e^{-(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(\theta_i)d\theta_i}}{\phi_1 - \phi_2} \int_{\theta_i}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t}(g(\phi_1, t) - g(\phi_2, t))e^{(\phi_1-\phi_2)\int \Psi(t)dt}dt \end{aligned}$$

donde

$$\Psi\left(\theta_i\right) = -\frac{f_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i)}{\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) F_{\Theta_j|\Theta_i=\theta_i}(\theta_i) + \gamma_1}$$

si $\gamma_1 \neq 0$ o $\gamma_2 \neq 0$ y

$$b^*(\theta_i) = \frac{g(\phi_1, \theta_i) - g(\phi_2, \theta_i)}{\phi_1 - \phi_2}$$

si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Se calcularon el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumen en la sección 3.4. y en dicha sección se estableció una ordenación entre los diferentes modelos de subasta. El ingreso esperado por las empresas, si ambas juegan en equilibrio, es monótono en todos los parámetros y en todos los casos, luego los ingresos esperados máximos y mínimos se sitúan en los vértices de las regiones a las que pertenecen los parámetros.

Como se demuestra en la Sección 3.5. los modelos clásicos aparecen en dicha ordenación, ya que se sitúan en los vértices de la región en la que se definen los parámetros de la familia de modelos incluidos en el Modelo de Subasta General. Pero en dichos vértices también aparece un nuevo modelo que hemos llamado modelo DV. Bajo dicho modelo, en el Caso 2, las empresas obtienen mayores ingresos esperados que bajo cualquier otro modelo de subasta. El modelo de subasta más ventajoso, desde el punto de vista de las empresas en el Caso 1 es el modelo Uniforme/Discriminatorio.

Desde el punto de vista del Operador del Mercado, el modelo de subasta más ventajoso es el modelo de Vickrey, en el Caso 1, y el modelo Uniforme, en el Caso 2.

Capítulo 4

Duopolio Asimétrico en capacidades de producción

En los capítulos anteriores se analizó un modelo en duopolio simétrico en el que las empresas generadoras en el mercado de compraventa de unidades eléctricas poseían la misma capacidad de producción. Eso llevó a que los equilibrios bayesianos de Nash buscados fuesen simétricos y permitió que se pudiese generalizar el Teorema de Equivalencia de Ingresos en el caso de valoraciones privadas e independientes del Capítulo 2.

En este capítulo se analizará un modelo de duopolio en el que, al igual que en el Capítulo 2, supondremos que los tipos son variables aleatorias independientes, pero en el que las empresas tienen distintas capacidades de producción. Esto, en general, complica bastante los cálculos, ya que el juego que se presenta da pagos asimétricos a las empresas.

Se considerará una familia paramétrica de modelos de subasta en la que trataremos de determinar que modelo da mayores ingresos esperados a las empresas y menor pago a realizar por el Operador del Mercado.

4.1 El Modelo

En el presente capítulo se van a suponer las siguientes hipótesis:

Hay dos empresas, $i \in \{1,2\}$, con sendas unidades de producción y neutrales al riesgo, interesadas en el despacho de unidades de electricidad en algún Mercado Eléctrico. La capacidad, perfectamente divisible, de la empresa $i \in \{1, 2\}$ se denotará por k_i. Dichas capacidades son tales que $k_1 < k_2$; se supondrá que $k_1 = 1$ y $k_2 = 1 + \beta$, con $\beta \in (0, 1)$.

El coste de producción la empresa $i \in \{1, 2\}$ es $g(q_i, \theta_i) = q_i\theta_i$, donde $q_i \in [0, k_i]$ es la cantidad de unidades eléctricas despachadas por la empresa i. Cada θ_i, que es información privada de la empresa i (su tipo), es una realización independiente de una variable aleatoria que sigue una distribución Uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Luego θ_1 y θ_2 son v.a.i.i.d. uniformemente en $[0, 1]$ tal que el jugador i, y sólo el jugador i, observa la realización de θ_i. Cada variable θ_i recoge la incertidumbre que el jugador contrario tiene acerca del coste de producción de la empresa i.

D representará la demanda de un periodo y se supondrá inelástica al precio, es decir independiente del precio fijado por medio del modelo de subasta utilizado

Cada empresa $i \in \{1, 2\}$ independiente y simultáneamente realiza una oferta $b_i \in [0, b_{\max}]$, donde especifica el mínimo precio por unidad al que está dispuesto a vender la totalidad de su capacidad. El valor real positivo $b_{\max}$ es el precio máximo que el Operador del Mercado está dispuesto a pagar por cada unidad eléctrica necesaria para satisfacer la demanda eléctrica. Se justificará más adelante como el Operador del Mercado fija este valor en función de sus intereses.

Una estrategia para la empresa $i \in \{1, 2\}$ es, entonces, una función oferta de la forma $b_i(\theta_i) : [0, 1] \to [0, b_{\max}]$. No tiene sentido suponer un comportamiento estratégico similar, como en el Capítulo 2 y Capítulo 3, y se buscarán equilibrios no necesariamente simétricos[1]. Se buscarán equilibrios bayesianos de Nash formados por funciones monótonas crecientes y continuas en $[0, 1]$; estrictamente crecientes en un subintervalo no vacío $I \subseteq [0, 1]$ y tal que verifiquen $b_i(\theta_i) \geq \theta_i$.

A este modelo de mercado, verificando las hipótesis enunciadas, lo llamaremos

Modelo Asimétrico Lineal Uniforme.

Basándose en las ofertas realizadas por los jugadores, el Operador del Mercado distribuye el despacho de electricidad. Ordena las ofertas de menor a mayor, de tal forma que la empresa de menor oferta despacha primero. Si su capacidad no es suficiente para satisfacer la demanda, la empresa de mayor oferta despacha la demanda residual, siempre y cuando ésta sea inferior a su

[1] Las empresas no son estratégicamente indistinguibles.

propia capacidad. Luego la cantidad asignada para el despacho a la empresa $i \in \{1, 2\}$ es:

$$Q_i(b_1, b_2) = \begin{cases} \min(k_i, D) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } k_j > D \\ \min(D - k_j, k_i) & \text{si} \quad b_i > b_j \text{ y } k_j \leq D \end{cases}$$

Todos los aspectos de este juego bayesiano, además del modelo de subasta que se va a utilizar para las transacciones del Mercado Eléctrico, son de conocimiento público

El precio de transacción final dependerá del modelo de subasta que se esté empleando. Como ya se ha comentado, hay tres modelos de subasta clásicos: **modelo de subasta Uniforme, modelo de subasta Discriminatorio y modelo de subasta Vickrey**. Recordemos cómo se establece el precio de compraventa en cada uno de ellos:

En el modelo Uniforme, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a la mayor oferta aceptada. Todas las empresas que despachan en el mercado reciben el mismo precio por unidad.

En el modelo Discriminatorio, el precio que el Operador del Mercado paga a cada empresa por unidad eléctrica suministrada es igual a su propia oferta. Las empresas que despachan en el mercado reciben precios distintos por unidad eléctrica.

En el modelo de Vickrey, la regla mediante la cual el Operador del Mercado establece el precio es algo más complicada. A cada empresa le pagan, por cada unidad de electricidad despachada, el precio correspondiente a la unidad que desplaza, es decir, el precio de la unidad eléctrica necesaria para seguir cubriendo la demanda en el caso de que dicha empresa retirase su oferta del mercado. En el caso de que la empresa de mayor oferta sea necesaria para satisfacer parte de la demanda, a ésta se le pagaría el precio máximo $b_{\max}$ por unidad despachada. En particular, bajo el Modelo Asimétrico Lineal Uniforme si la empresa i es la empresa de menor oferta y, por tanto, la que entra primero en el mercado, le pagan la oferta contraria b_j si $D \leq k_j$. Y si $D > k_j$, esta empresa i, de menor oferta, recibe dos precios distintos por unidad: el precio máximo permitido $b_{\max}$ por $D - k_j$ unidades y la oferta contraria, b_j, por las unidades restantes. Si la empresa i es la empresa de mayor oferta, le pagan 0, si $D \leq k_j$, y el precio máximo $b_{\max}$ por unidad despachada, si $D > k_j$.

Al igual que se hizo en capítulos anteriores, se pueden considerar una familia de modelos de subasta llamado **Modelo de Subasta General** $\mathcal{MSG}$ que incluya los tres modelos clásicos. Dicha familia estará determinada por la siguiente función de beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1^i b_i + \beta_1^i b_j + \varphi^i b_{\max} - \phi_1^i \theta_i & si \quad b_1 < b_2 \\ \gamma_2^i b_i + \varphi^i b_{\max} - \phi_2^i \theta_i & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \qquad (4.1.1.)$$

con $j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ y siendo γ_1^i, β_1^i, φ^i, $\gamma_2^i \in [0,\infty)$, $\gamma_1^i + \beta_1^i + \varphi^i = \phi_1^i$, $\gamma_2^i + \varphi^i = \phi_2^i$, $i \in \{1,2\}$ y donde ϕ_1^i y ϕ_2^i están determinados por el valor de la demanda. En estas funciones se está considerando que, si la empresa i oferta la menor de las dos pujas, la cantidad que despacha la empresa i es $\gamma_1^i + \beta_1^i + \varphi^i = \phi_1^i$, recibiendo posiblemente distintos precios por ese total de unidades eléctricas despachadas. Es decir, el Operador del Mercado paga a i, si ésta realiza la menor de las pujas, γ_1^i unidades al precio unitario b_i, β_1^i unidades al precio unitario b_j y φ^i unidades al precio unitario $b_{\max}$. De la misma manera, si la empresa i realiza la mayor de las pujas, ésta despacha un total de $\gamma_2^i + \varphi^i = \phi_2^i$ unidades y el Operador del Mercado paga a i, γ_2^i unidades al precio unitario b_i y φ^i unidades al precio unitario $b_{\max}$. Además si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1^1 = \phi_1^2 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = 0$, $\phi_1^2 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0,1)$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = \alpha$, $\phi_1^2 = 1 + \beta$, $\phi_2^2 = \beta + \alpha$. Si la demanda verifica que es mayor o igual que $2 + \beta$, ambas empresas despachan el total de su capacidad y, entonces, $\phi_1^1 = \phi_2^1 = 1$, $\phi_1^2 = \phi_2^2 = 1 + \beta$. Por la asimetría que presentan las dos empresas, la expresión 4.1.1. contiene el doble de parámetros que en los modelos de subastas considerados en lo dos capítulos anteriores.

La complicación de los cálculos hace imposible estudiar, como en los dos capítulos anteriores, todos los modelos pertenecientes a $\mathcal{MSG}$. Lo que se hará en el presente capítulo, al menos, es establecer una ordenación entre los modelos que se sitúen en los vértices de las regiones, en cada caso. Vértices que, en particular, contienen a los tres modelos clásicos. En realidad, esta ordenación se extendería a toda la familia de modelos de subasta, si el pago que espera realizar el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan en equilibrio, fuese una función monótona en todos los parámetros. Esta propiedad se verificaba en los dos capítulos anteriores: en el Capítulo 2 se obtuvo equivalencia de ingresos (independiente de los parámetros) y, en el Capítulo 3, todas las expresiones obtenidas del pago que espera realizar el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, eran funciones monótonas. Es de esperar que en este capítulo ocurra igual, pero no se ha podido demostrar para todos los posibles valores de los parámetros. Como se verá, a veces sólo se obtiene una expresión implícita del equilibrio bayesiano de Nash correspondiente, asociado a los posibles valores de los parámetros. En aquellos casos en los que se puede obtener explícitamente el equilibrio bayesiano de Nash, se demostrará que el pago que espera realizar el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan el equilibrio, es una función monótona en cada uno de los parámetros de los que depende.

La ganancia de cada empresa y la cantidad de despacho asignada a cada empresa, van a depender del tamaño de la demanda respecto de las capacidades. Por ello se distinguirán los cuatro casos siguientes:

Caso 1 Las dos empresas tienen capacidad suficiente para satisfacer la demanda, es decir, $D \leq 1$. En este caso, la empresa que ofertó el menor precio despacha toda la demanda y la otra empresa no despacha ninguna unidad eléctrica.

El cálculo de equilibrios, ingresos y beneficios en el Caso 1 es independiente de las capacidades que, por tanto, pueden ser consideradas iguales. Luego, el Caso 1 es idéntico al analizado en el Capítulo 2.

Caso 2 La empresa de mayor capacidad puede satisfacer toda la demanda pero la empresa de menor capacidad no; es decir, $1 < D \leq 1 + \beta$. En este caso, si la empresa de menor oferta es también la de mayor capacidad, la empresa contraria no despacha nada. Por el contrario, si la empresa de menor oferta es la de menor capacidad, ésta despacha toda su capacidad y la empresa de mayor capacidad, despacha la demanda residual.

Obsérvese que, si $k_1 = k_2$, este Caso 2 no se da.

El Caso 2 presenta la siguiente particularidad: una de las empresas (la empresa de mayor capacidad) está segura de entrar siempre en el mercado, mientras que la otra (la empresa de menor capacidad) no.

Como $D = 1 + \alpha$, $\alpha \in (0, \beta]$, la expresión 4.1.1., para los dos jugadores, queda

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^1 b_1 + \left(1 - \gamma_1^1\right) b_2 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ 0 & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \qquad 4.1.2.a)$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(1 - \gamma_1^2 + \gamma_2^2\right) b_1 + \left(\alpha - \gamma_2^2\right) b_{\max} - (1+\alpha)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ \gamma_2^2 b_2 + \left(\alpha - \gamma_2^2\right) b_{\max} - \alpha\theta_2 & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \qquad 4.1.2.b)$$

donde $\left(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) \in [0,1] \times \left[0, 1 + \gamma_2^2\right] \times [0, \alpha]$. Obsérvese que, la región en la que se define esta familia paramétrica de modelos de subasta, tiene ocho vértices. Se compararán, al menos, los ocho modelos que determinan dichos vértices para establecer una ordenación entre ellos, desde el punto de vista de las empresas y desde el punto de vista del Operador del Mercado.

Caso 3 Se necesita la capacidad de ambas empresas para satisfacer la demanda, pero ésta es menor que la suma de ambas capacidades, es decir, $1 + \beta < D = 1 + \alpha + \beta < 2 + \beta$, $\alpha \in (0, 1)$.

En este caso, la empresa de menor oferta despacha toda su capacidad y la otra la demanda residual. Luego la expresión 4.1.1., para los dos jugadores, queda

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^1 b_1 + \left(1 - \alpha + \gamma_2^1 - \gamma_1^1\right) b_2 + \left(\alpha - \gamma_2^1\right) b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \gamma_2^1 b_1 + \left(\alpha - \gamma_2^1\right) b_{\max} - \alpha\theta_1 & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \qquad 4.1.3.a)$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(1 - \alpha + \gamma_2^2 - \gamma_1^2\right) b_1 + \left(\alpha + \beta - \gamma_2^2\right) b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ \gamma_2^2 b_2 + \left(\alpha + \beta - \gamma_2^2\right) b_{\max} - (\alpha+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \qquad 4.1.3.b)$$

donde $\left(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) \in [0, 1 - \alpha + \gamma_2^1] \times [0, \alpha] \times \left[0, 1 - \alpha + \gamma_2^2\right] \times [0, \alpha + \beta]$. Obsérvese que la región en la que se define esta familia paramétrica de modelos de subasta tiene dieciséis vértices. Se compararán, al menos, los dieciséis modelos determinados por dichos vértices, con el fin de establecer una ordenación entre ellos, desde el punto de vista de los ingresos esperados por las empresas y desde el punto de vista del pago esperado que realiza el Operador del Mercado.

Caso 4 La demanda excede la suma de las dos capacidades, es decir, $2+\beta \leq D$. En este caso el despacho de toda la capacidad está asegurada para ambas empresas, independientemente de sus ofertas. Es un caso en el que no existe competencia. Es un caso sin relevancia que analizaremos solamente para comprobar la continuidad del ingreso esperado por las empresas y el pago que espera realizar el subastador, cuando la demanda D tienda a $2 + \beta$.

4.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General.

Aunque analizaremos cada uno de los casos anteriores y tendremos en cuenta bajo qué modelo de subasta se están realizando las transacciones de compraventa de energía eléctrica, podemos dar un resultado general de existencia y unicidad de equilibrio bayesiano de Nash.

Proposición 4.2.1 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Asimétrico Lineal Uniforme*** *y se utiliza un modelo de subasta $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$, es decir, la función de beneficio de la empresa $i \in \{1,2\}$ es de la forma:*

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1^i b_i + \beta_1^i b_j + \varphi^i b_{\max} - \phi_1^i \theta_i & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2^i b_i + \varphi^i b_{\max} - \phi_2^i \theta_i & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con $j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, γ_1^i, β_1^i, φ^i, $\gamma_2^i \in [0,\infty)$, $\gamma_1^i + \beta_1^i + \varphi^i = \phi_1^i$, $\gamma_2^i + \varphi^i = \phi_2^i$, entonces

Región I) *Si $\gamma_1^i > 0$ ó $\gamma_2^i > 0$, $\forall\ i \in \{1,2\}$, se verifica que todo equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2))$, que está formado por funciones monótonas crecientes y continuas en $[0,1]$, y que en un intervalo $I \subseteq (0,1)$ son estrictamente crecientes y diferenciables, se obtienen como solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \left(\gamma_2^1 - \gamma_1^1\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \gamma_1^1 + \left(\phi_1^1 - \phi_2^1\right)\left(-t + (b_1^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)(b_1^*)^{-1}(t) + \gamma_1^2 + \left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)\left(-t + (b_2^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ verificando $(b_1^*)^{-1}(t) \in [0,1]$ y $(b_2^*)^{-1}(t) \in [0,1]$. Además $I = \left[(b_1^*)^{-1}(b_2^*(0)), (b_1^*)^{-1}(b_2^*(1))\right] \cap \left[(b_2^*)^{-1}(b_1^*(0)), (b_2^*)^{-1}(b_1^*(1))\right]$.

Región II) *Si $\gamma_1^i = 0$ y $\gamma_2^i = 0$, para algún $i \in \{1,2\}$, entonces todo equilibrio bayesiano de Nash $(b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2))$, que está formado por funciones monótonas crecientes y continuas en $[0,1]$, y que en un intervalo $I \subseteq (0,1)$ son estrictamente crecientes y diferenciables, cumple que existe una única estrategia dominante para la empresa i dada por*

$$b_i^*(\theta_i) = \theta_i$$

y la estrategia correspondiente a la otra empresa que forma parte del equilibrio es

$$b_j^*(\theta_j) = \begin{cases} \frac{\gamma_1^j + (\phi_1^j - \phi_2^j)\theta_j}{\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_1^j - \gamma_2^j} & si \quad \theta_j \leq 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \\ 1 & si \quad \theta_j > 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \end{cases}$$

Demostración. La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria para ella. El beneficio de la empresa i viene dado por:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j(\theta_j)) = \begin{cases} \gamma_1^i b_i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\right) b_j(\theta_j) + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_1^i \theta_i & si \quad b_j^{-1}(b_i) < \theta_j \\ \gamma_2^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_2^i \theta_i & si \quad b_j^{-1}(b_i) > \theta_j \end{cases}$$

El beneficio esperado por la empresa $i \in \{1, 2\}$, dado que su tipo es θ_i, es

$$BM_i(\theta_i, b_i, b_j\,(.)) = \int_0^1 B_i(\theta_i, b_i, b_j(\theta_j)) d\theta_j$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 \left(\gamma_1^i b_i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\right) b_j(\theta_j) + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_1^i \theta_i\right) d\theta_j & si \quad b_j^{-1}(b_i) < 0 \\ \int_0^{b_j^{-1}(b_i)} \left(\gamma_2^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_2^i \theta_i\right) d\theta_j + & \\ + \int_{b_j^{-1}(b_i)}^1 \left(\gamma_1^i b_i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\right) b_j(\theta_j) + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_1^i \theta_i\right) d\theta_j & si \quad 0 \leq b_j^{-1}(b_i) \leq 1 \\ \int_0^1 \left(\gamma_2^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_2^i \theta_i\right) d\theta_j & si \quad b_j^{-1}(b_i) > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \gamma_1^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_1^i \theta_i + \left(1 - \alpha + \gamma_2^i - \gamma_1^i\right) \int_0^1 b_j(\theta_j) d\theta_j & si \quad b_j^{-1}(b_i) < 0 \\ \left(\left(\gamma_2^i - \gamma_1^i\right) b_i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right) \theta_i\right) b_j^{-1}(b_i) + & \\ + \left(\phi_1^i - \phi_2^i + \gamma_2^i - \gamma_1^i\right) \int_{b_j^{-1}(b_i)}^1 b_j(\theta_j) d\theta_j + \gamma_1^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_1^i \theta_i & si \quad 0 \leq b_j^{-1}(b_i) \leq 1 \\ \gamma_2^i b_i + \left(\phi_2^i - \gamma_2^i\right) b_{\max} - \phi_2^i \theta_i & si \quad b_j^{-1}(b_i) > 1 \end{cases}$$

La puja b_i es la mejor respuesta de la empresa i si maximiza el beneficio esperado, dado que su tipo es θ_i. Derivando respecto de b_i se tiene, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} BM_i(\theta_i, b_i, b_j\,(.)) = \begin{cases} \gamma_1^i & si \quad b_j^{-1}(b_i) < 0 \\ \left(\gamma_2^i - \gamma_1^i\right) b_j^{-1}(b_i) + \gamma_1^i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right) \left(-b_i + \theta_i\right) \frac{d}{db_i}(b_j^{-1}(b_i)) & si \quad 0 \leq b_j^{-1}(b_i) \leq 1 \\ \gamma_2^i & si \quad b_j^{-1}(b_i) > 1 \end{cases}$$

Si $b_j^{-1}(b_i) < 0$, la oferta que maximiza el beneficio esperado por la empresa i es la mayor puja que verifique $b_j^{-1}(b_i) < 0$. Si $b_j^{-1}(b_i) > 1$, la oferta que maximiza el beneficio esperado por la empresa i es la mayor puja que verifique $b_j^{-1}(b_i) > 1$. Analicemos el caso $0 \le b_j^{-1}(b_i) \le 1$ que es lo que ocurría en todos los capítulos anteriores, debido a la simetría estratégica. Como $b_i^{-1}(b_i) = \theta_i \Leftrightarrow b_i(\theta_i) = b_i$, reemplazando e igualando a cero, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left(\gamma_2^i - \gamma_1^i\right)\left(b_j^*\right)^{-1}\left(b_i^*\left(\theta_i\right)\right) + \gamma_1^i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right)\left(-b_i^*\left(\theta_i\right) + \theta_i\right)\frac{d}{db_i}\left(b_j^*\right)^{-1}\left(b_i^*\left(\theta_i\right)\right) = 0 \qquad i = 1,2$$

$\forall \theta_i$ que verifique que $\left(b_j^*\right)^{-1}\left(b_i^*\left(\theta_i\right)\right) \in [0,1]$, $i = 1,2$. Es decir,

$$\forall \theta_i \in I = \left[\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*\left(0\right)\right), \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*\left(1\right)\right)\right] \cap \left[\left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*\left(0\right)\right), \left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*\left(1\right)\right)\right]$$

Se distinguirán los siguientes casos

Región I) Si se verifica que $\gamma_2^i > 0$ ó $\gamma_1^i > 0$, para cada $i \in \{1,2\}$, y se sustituye en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior $b_1^*(\theta_1)$ y $b_2^*(\theta_2)$, por t, queda

$$\begin{cases} \left(\gamma_2^1 - \gamma_1^1\right)\left(b_2^*\right)^{-1}(t) + \gamma_1^1 + \left(\phi_1^1 - \phi_2^1\right)\left(-t + \left(b_1^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}\left(b_2^*\right)^{-1}(t) = 0 \\ \left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)\left(b_1^*\right)^{-1}(t) + \gamma_1^2 + \left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)\left(-t + \left(b_2^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}\left(b_1^*\right)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones inversas de las estrategias que forman el equilibrio, $b_1^*(\theta_1)$ y $b_2^*(\theta_2)$. Por comodidad llamaremos $(b_2^*)^{-1}(t) = x(t)$ y $(b_1^*)^{-1}(t) = y(t)$. Luego el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal que queda es:

$$\begin{cases} \left(\gamma_2^1 - \gamma_1^1\right)x(t) + \gamma_1^1 + \left(\phi_1^1 - \phi_2^1\right)\left(y(t) - t\right)x'(t) = 0 \\ \left(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\right)y(t) + \gamma_1^2 + \left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)\left(x(t) - t\right)y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que verifique que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$.

Región II) Si $\gamma_1^i = 0$ y $\gamma_2^i = 0$, para algún $i \in \{1,2\}$, la ecuación diferencial $i-$ésima queda

$$\left(\phi_1^i - \phi_2^i\right)\left(-b_i^*\left(\theta_i\right) + \theta_i\right)\left(\left(b_j^*\right)^{-1}\right)'\left(b_i^*\left(\theta_i\right)\right) = 0$$

luego verificando las hipótesis de monotonía estricta sólo queda la solución

$$b_i^*(\theta_i) = \theta_i$$

independientemente de lo que puje la empresa contraria j. Luego, sustituyendo en la otra ecuación diferencial se obtiene

$$\left(\gamma_2^j - \gamma_1^j\right)b_j^*\left(\theta_j\right) + \gamma_1^j + \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\left(-b_j^*\left(\theta_j\right) + \theta_j\right) = 0$$

$$b_j^*(\theta_j) = \frac{\gamma_1^j + \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\theta_j}{\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_1^j - \gamma_2^j}$$

si $(b_i^*)^{-1}(b_j^*(\theta_j)) \in [0,1]$, es decir, si $\theta_j \leq 1 - \frac{\gamma_2^j}{\phi_1^j - \phi_2^j}$. En caso contrario, la empresa j puja lo máximo permitido $b_{\max}$. Luego

$$b_j^*(\theta_j) = \begin{cases} \frac{\gamma_1^j + (\phi_1^j - \phi_2^j)\theta_j}{\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_1^j - \gamma_2^j} & si \quad \theta_j \leq 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \\ b_{\max} & si \quad \theta_j > 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \end{cases}$$

Es evidente que el Operador del Mercado fijará $b_{\max} = 1$, en este caso para que el pago esperado que debe realizar sea menor. ■

A continuación, se demostrará que, el pago que espera realizar el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, bajo cualquier modelo de subasta perteneciente a la **Región II**, es una función monótona en todos los parámetros.

Proposición 4.2.2 *Supongamos que se verifican las hipótesis del* ***Modelo Asimétrico Lineal Uniforme*** *y que se utiliza un modelo de subasta $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$. Entonces, si $\gamma_1^i = 0$ y $\gamma_2^i = 0$, para algún $i \in \{1,2\}$, el pago que espera realizar el Operador del Mercado, si ambas empresas juegan en equilibrio, es una función creciente en cada uno de los parámetros de los que depende.*

Demostración. Se trata de los modelos de subasta pertenecientes a la **Región II** de la Proposición 4.2.1. en los que las funciones de ingreso de las dos empresas, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, quedan

$$I_i(\theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right) b_j^*(\theta_j) + \phi_2^i & si \quad b_i^*(\theta_i) < b_j^*(\theta_j) \\ \phi_2^i & si \quad b_i^*(\theta_i) > b_j^*(\theta_j) \end{cases}$$

$$I_j(\theta_j, \theta_i) = \begin{cases} \gamma_1^j b_j^*(\theta_j) + \left(\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_2^j - \gamma_1^j\right) b_i^*(\theta_i) + \left(\phi_2^j - \gamma_2^j\right) & si \quad b_j^*(\theta_j) < b_i^*(\theta_i) \\ \gamma_2^j b_j^*(\theta_j) + \left(\phi_2^j - \gamma_2^j\right) & si \quad b_j^*(\theta_j) > b_i^*(\theta_i) \end{cases}$$

Se vio, en la proposición anterior, que si $\gamma_1^i = 0$ y $\gamma_2^i = 0$, para algún $i \in \{1,2\}$, existe un único equilibrio bayesiano de Nash dado por

$$\left(b_i^*(\theta_i), b_j^*(\theta_j)\right) = \left(\theta_i, \begin{cases} \frac{\gamma_1^j + (\phi_1^j - \phi_2^j)\theta_j}{\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_1^j - \gamma_2^j} & si \quad \theta_j \leq 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \\ 1 & si \quad \theta_j > 1 - \frac{\gamma_2^j}{(\phi_1^j - \phi_2^j)} \end{cases}\right)$$

Luego el ingreso esperado por las empresas, si ambas juegan el equilibrio, queda:

$$P_i(\theta_i) = \begin{cases} \phi_2^i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right)\int_0^1 b_j^*(\theta_j)\, d\theta_j & si \quad \left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) < 0 \\ \phi_2^i + \left(\phi_1^i - \phi_2^i\right)\int_{\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i))}^1 b_j^*(\theta_j)\, d\theta_j & si \quad \left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \phi_1^i - \frac{\left(\phi_1^i-\phi_2^i-\gamma_2^j\right)^2}{2\left(\phi_1^i-\phi_2^i+\gamma_1^j-\gamma_2^j\right)} & si \quad \theta_i < \frac{\gamma_1^j}{\phi_1^i-\phi_2^i+\gamma_1^j-\gamma_2^j} \\ -\frac{\left(\phi_1^i-\phi_2^i+\gamma_1^j-\gamma_2^j\right)\theta_i^2-\gamma_1^j-\gamma_2^j-\phi_1^i+3\phi_2^i}{2} & si \quad \theta_i \geq \frac{\gamma_1^j}{\phi_1^i-\phi_2^i+\gamma_1^j-\gamma_2^j} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_j(\theta_j) &= \gamma_1^j b_j^*(\theta_j) + \phi_2^j - \gamma_2^j + \left(\gamma_2^j - \gamma_1^j\right) b_j^*(\theta_j)\left(b_i^*\right)^{-1}\left(b_j^*(\theta_j)\right) \\ &\quad + \left(\phi_1^j - \phi_2^j + \gamma_2^j - \gamma_1^j\right)\int_{\left(b_i^*\right)^{-1}\left(b_j^*(\theta_j)\right)}^1 b_i^*(\theta_i)\, d\theta_i \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\left(\gamma_2^j-\left(\phi_1^j-\phi_2^j\right)\right)^2-\theta_j^2\left(\phi_1^j-\phi_2^j\right)^2}{2\left(\phi_1^j-\phi_2^j-\gamma_2^j+\gamma_1^j\right)} + \phi_2^j & si \quad \theta_j \leq 1 - \frac{\gamma_2^j}{\left(\phi_1^j-\phi_2^j\right)} \\ \phi_2^j & si \quad \theta_j > 1 - \frac{\gamma_2^j}{\left(\phi_1^j-\phi_2^j\right)} \end{cases}$$

Si $\phi_1^j - \phi_2^j > \gamma_2^j$, el pago que espera realizar el Operador del Mercado por la demanda eléctrica viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right) &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i(\theta_i)] \\ &= \phi_1^j + \phi_2^i - \frac{\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j\right)^2\left(\gamma_1^j\left(\gamma_2^j + 2\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right) - \left(\gamma_2^j\right)^2 + \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)^2\right)}{3\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j + \gamma_1^j\right)^2} \end{aligned}$$

Si calculamos las derivadas parciales de la expresión anterior respecto a los dos parámetros de los que depende se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_1^j} P_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right) = \frac{\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j\right)^2\left(\gamma_1^j\left(\gamma_2^j + 2\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right) - \gamma_2^j\left(\gamma_2^j - \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right)\right)}{3\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j + \gamma_1^j\right)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_2^j} P_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right)$$

$$= \frac{3\left(\gamma_1^j\right)^2\left(\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)^2 - \left(\gamma_2^j\right)^2\right) + \gamma_1^j\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j\right)^2\left(5\gamma_1^j + \phi_1^j - \phi_2^j\right) + 2\gamma_2^j\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j\right)^3}{3\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\left(\phi_1^j - \phi_2^j - \gamma_2^j + \gamma_1^j\right)^3}$$

Ambas funciones son positivas para todos los valores de los parámetros verificando $\phi_1^j - \phi_2^j > \gamma_2^j$ y que pertenecen a una de las dos regiones siguientes: $RC2 = \{(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0,1] \times [0, 1+\gamma_2^2] \times [0,\alpha]\}$ ó $RC3 = \{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0, 1-\alpha+\gamma_2^1] \times [0,\alpha] \times [0, 1-\alpha+\gamma_2^2] \times [0, \alpha+\beta]\}$, correspondientes al Caso 2 y al Caso 3, respectivamente. Ya que, en primer lugar, de los factores que aparecen, tanto en el numerador como en el denominador de $\frac{\partial}{\partial \gamma_1^j} p_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right)$, el único factor que podría presentar un cambio de signo es $\gamma_1^j\left(\gamma_2^j + 2\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right) - \gamma_2^j\left(\gamma_2^j - \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right)$. Veamos que es siempre positivo

$$\begin{array}{rcl} \phi_1^j - \phi_2^j & > & \gamma_2^j \Longrightarrow \\ \gamma_2^j\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right) & > & \left(\gamma_2^j\right)^2 \Longrightarrow \\ \gamma_2^j\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right) + \gamma_1^j\gamma_2^j + 2\gamma_1^j\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right) & > & \left(\gamma_2^j\right)^2 \Longrightarrow \\ \gamma_1^j\left(\gamma_2^j + 2\left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right) - \gamma_2^j\left(\gamma_2^j - \left(\phi_1^j - \phi_2^j\right)\right) & > & 0 \end{array}$$

En segundo lugar, todos los factores y sumandos que aparecen en $\frac{\partial}{\partial \gamma_2^j} P_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right)$ también son positivos.

Si $\phi_1^j - \phi_2^j \leq \gamma_2^j$

$$P_i\left(\theta_i\right) = \phi_1^i$$

$$P_j\left(\theta_j\right) = \phi_2^j$$

Y, por tanto, $P_{omer}\left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right) = \sum_{i=1}^2 E_{\theta_i}[p_i(\theta_i)] = \phi_1^i + \phi_2^j$. ■

A pesar de no poder establecer una ordenación para todos los modelos de subasta pertenecientes a $\mathcal{MSG}$, sí vamos a poder establecerlo en el subconjunto formado por todos los modelos de subasta pertenecientes a la **Región II.**

Corolario 4.2.3 *Supongamos que se verifican las hipótesis del* ***Modelo Asimétrico Lineal Uniforme*** *y que se utiliza un modelo de subasta $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$. Entonces, si $\gamma_1^i = 0$ y $\gamma_2^i = 0$, para algún $i \in \{1,2\}$, el modelo de subasta bajo el que el Operador del Mercado espera pagar menos se encuentra en uno de los vértices de la región a la que pertenece los valores de los parámetros.*

Demostración. La región correspondiente al Caso 2 es $RC2 = \{(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0,1] \times [0, 1+\gamma_2^2] \times [0,\alpha]\}$. Como el pago que espera realizar el Operador del Mercado es una función creciente en cada uno de los parámetros, el modelo bajo el cual el Operador del Mercado espera pagar menos a las empresas generadoras es el correspondiente a los valores $\left(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) = (0,0,0)$.

La región correspondiente al Caso 3 es $RC3 = \{\left(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) \in [0, 1 - \alpha + \gamma_2^1] \times [0, \alpha] \times \left[0, 1 - \alpha + \gamma_2^2\right] \times [0, \alpha + \beta]\}$. Como el pago que espera realizar el Operador del Mercado es una función creciente, el modelo bajo el cual el Operador del Mercado espera pagar menos a las empresas generadoras es el correspondiente a los valores $\left(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) = (0,0,0,0)$. ■

A continuación, se analizará como son las estrategias en equilibrio, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad de producción de las empresas.

4.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha \leq 1 + \beta)$.

En este Caso 2, el tamaño de la demanda implica que $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = 0$, $\phi_1^2 = 1 + \alpha$ y $\phi_2^2 = \alpha$. El precio que el subastador paga a las empresas que generen en el mercado, es diferente según el modelo de subasta utilizado para llevar a cabo las transacciones de compraventa de la energía eléctrica. Por ello se analizarán, por separado, los modelos de subasta que quedan determinados por los vértices de la siguiente región: $RC2 = \{\left(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2\right) \in [0,1] \times \left[0, 1 + \gamma_2^2\right] \times [0, \alpha]\}$. Estos ocho modelos quedan unívocamente determinados por los valores de los parámetros y son los siguientes:

Modelo	γ_1^1	γ_1^2	γ_2^2
Vickrey	0	0	0
A	1	0	0
B	0	1	0
DV	1	1	0
C	0	0	α
E	1	0	α
Uniforme	0	$1+\alpha$	α
Discriminatoria	1	$1+\alpha$	α

Se analizará cada uno de ellos.

Modelo de subasta de Vickrey En el modelo de Vickrey, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa, se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo, por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe: la oferta contraria por 1 unidad y el precio máximo por las α unidades restantes. Es decir, en total recibe $b_1 + \alpha b_{\max}$ por las $1+\alpha$ unidades eléctricas que despacha.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 + \alpha b_{\max} - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.3.1 *Supongamos que $1 < D \leq 1+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\theta_1, \theta_2]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo de Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado y, además, está formado por estrategias dominantes para ambas empresas. ■

Nota 4.3.2 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la **Región II**, se obtuvo que $b_{\max} = 1$.*

Modelo de subasta A En el modelo A, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_1 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe: la oferta contraria por 1 unidad y el precio máximo por las α unidades restantes. Es decir, en total recibe $b_1 + \alpha b_{\max}$ por las $1 + \alpha$ unidades eléctricas que despacha.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 + \alpha b_{\max} - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.3.3 *Supongamos que* $1 < D \leq 1 + \beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta A, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \theta_2\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo A es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II,** como $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 2 dada por

$$b_2^*(\theta_2) = \theta_2$$

y la estrategia de la empresa 1 que forma parte del equilibrio es

$$b_1^*(\theta_1) = \frac{1+\theta_1}{2}$$

■

Nota 4.3.4 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$

Modelo de subasta B En el modelo B, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe: su propia oferta por 1 unidad y el precio máximo por las α unidades restantes. Es decir, en total recibe $b_2 + \alpha b_{\max}$ por las $1+\alpha$ unidades eléctricas que despacha.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 + \alpha b_{\max} - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.3.5 *Supongamos que $1 < D \leq 1 + \beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta B, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo B es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II,** como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1+\theta_2}{2}$$

■

Nota 4.3.6 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la **Región II**, se obtuvo que $b_{\max} = 1$*

Modelo de subasta DV En el modelo DV, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_1 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe: su propia oferta por 1 unidad y el precio máximo por las α unidades restantes. Es decir, en total recibe $b_2 + \alpha b_{\max}$ por las $1 + \alpha$ unidades eléctricas que despacha.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_1 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_2 + \alpha b_{\max} - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \\
&= \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) + \begin{cases} b_2 - \theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ 0 & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Obsérvese que, en realidad, compiten por la misma cantidad de despacho, al mismo precio y al mismo coste, ya que la empresa 2, independientemente de las ofertas que finalmente se realicen, tiene asegurado el despacho de α unidades eléctricas pagadas a precio máximo. En realidad ambas empresas compiten por una unidad eléctrica pagada, en caso de producirse el despacho, a su propia oferta. En equilibrio, las dos empresas pujarán de manera idéntica y, por tanto, todo equilibrio bayesiano de Nash puede suponerse simétrico.

Proposición 4.3.7 *Supongamos que $1 < D \leq 1 + \beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta DV, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$
[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]
$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo DV, es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_1^2 = 1$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, aplicando la proposición 4.2.1. **Región I**, se puede afirmar que las funciones inversas de las estrategias en equilibrio de ambas empresas verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{cases} 1 - (b_2^*)^{-1}(t) - \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right)\left((b_2^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \\ 1 - (b_1^*)^{-1}(t) - \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\left((b_1^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \end{cases}
$$

Como las ecuaciones diferenciales coinciden, si denotamos por $b^*(\theta) = b_1^*(\theta) = b_2^*(\theta)$ se tiene que $b^*(\theta)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal

$$(1-\theta)(b^*)'(\theta) - b^*(\theta) = -\theta$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta = 1$ queda que todo equilibrio bayesiano de Nash cumple

$$b^*(1) = 1$$

La solución general de la ecuación diferencial que queda es

$$b^*(\theta) = \frac{\theta^2}{2(\theta-1)} + \frac{C}{(\theta-1)}$$

Luego

$$b^*(1) = Lim_{\theta\to 1^-}\left(\frac{\theta^2+2C}{2(\theta-1)}\right)$$

Imponiendo que el límite anterior sea finito, la constante debe verificar:

$$C = -\frac{1}{2}$$

Luego la solución particular de la ecuación diferencial queda, sustituyendo el valor de la constante:

$$b^*(\theta) = \frac{\theta+1}{2}$$

y el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Nota 4.3.8 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* 1*. La ofertas no se disparan y, por tanto,* $b_{\max} = 1$*.*

Modelo de subasta C En el modelo C, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que se le paga su propia oferta por unidad.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe la oferta contraria b_1, por cada una de las $1+\alpha$ unidades eléctricas que despacha en ese caso.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\,(b_1 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.3.9 *Supongamos que* $1 < D \leq 1 + \beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta C, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\theta_2 & si \quad \theta_2 \leq 1-\alpha \\ 1 & si \quad \theta_2 > 1-\alpha \end{cases}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo C es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1}{1-\alpha}\theta_2$$

siempre que $\frac{1}{1-\alpha}\theta_2 \leq 1 \Longleftrightarrow \theta_2 \leq 1-\alpha$. Si $\theta_2 > 1-\alpha$ maximiza su beneficio esperado si oferta 1. ■

Nota 4.3.10 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$

Modelo de subasta E En el modelo E el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_1 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual, que el Operador del Mercado le paga su propia oferta por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica. La empresa 2 despacha toda la demanda y recibe la oferta contraria por cada unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_1 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} (1+\alpha)\,(b_1 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.3.11 *Supongamos que $1 < D \leq 1+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta E, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{2 + (2-\alpha)\,\theta_1}{2\,(2-\alpha)}, \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha} & si \quad \theta_2 < \frac{1}{2-\alpha} \\ \frac{(2-\alpha)\theta_2 - \alpha}{(1-\alpha)(2-\alpha)} & si \quad \frac{1}{2-\alpha} \leq \theta_2 \leq \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 4}{2(2-\alpha)} \\ \frac{4-\alpha}{2(2-\alpha)} & si \quad \theta_2 > \frac{\alpha^2-3\alpha+4}{2(2-\alpha)} \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo E es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que deben verificar las inversas de las estrategias que forman el equilibrio es

$$\begin{cases} 1 - x(t) - (t - y(t))\,\frac{d}{dt}x(t) = 0 \\ \alpha y(t) - (t - x(t))\,\frac{d}{dt}y(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = (1-\alpha)\,t + \frac{\alpha}{2-\alpha}$ y $y(t) = 2t - \frac{2}{2-\alpha}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{2+(2-\alpha)\theta_1}{2(2-\alpha)} \frac{(2-\alpha)\theta_2-\alpha}{(1-\alpha)(2-\alpha)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \frac{1}{2-\alpha} \leq \theta_2 \leq \frac{\alpha^2-3\alpha+4}{2(2-\alpha)}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \iff \forall \theta_1 \in [0,1]$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.3.12 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es $\frac{4-\alpha}{2(2-\alpha)}$. La ofertas no se disparan y, por tanto, $b_{\max} = \frac{4-\alpha}{2(2-\alpha)}$.*

Modelo de subasta Uniforme En el modelo Uniforme, el precio por unidad despachada recibido por una empresa es igual a la oferta más alta aceptada.

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual y la oferta de la empresa 2 es la mayor aceptada).

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 no despacha ninguna unidad eléctrica y la empresa 2 recibe su propia oferta b_2 por unidad despachada (la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda completa. La oferta de la empresa 2 es, nuevamente, la mayor aceptada).

Ambas empresas reciben el mismo pago por unidad de electricidad servida y es b_2.

Las funciones de beneficio de las dos empresas son, entonces:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} (1+\alpha)\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.3.13 *Supongamos que* $1 < D \leq 1 + \beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta Uniforme, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \begin{cases} \frac{1+\alpha+\theta_2}{2} & si \quad \theta_2 \leq 1 - \alpha \\ 1 & si \quad \theta_2 > 1 - \alpha \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo Uniforme es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1 + \alpha$ y $\gamma_2^2 = \alpha$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

independientemente de la estrategia elegida por la empresa de mayor capacidad y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1 + \alpha + \theta_2}{2}$$

siempre que $\frac{1+\alpha+\theta_2}{2} \leq 1 \iff \theta_2 \leq 1 - \alpha$. Si $\theta_2 > 1 - \alpha$ maximiza su beneficio esperado si oferta 1. ∎

Nota 4.3.14 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la **Región II**, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$

Modelo de subasta Discriminatorio En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa es siempre su propia oferta. Es decir, la empresa i, recibe b_i por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_1 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} (1+\alpha)\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.3.15 *Supongamos que* $1 < D \leq 1 + \beta$*. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta Discriminatorio, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{2\alpha+3}{6} & si \quad \theta_1 < \frac{\alpha}{3} \\ \frac{3+\alpha+3\theta_1}{6} & si \quad \theta_1 \geq \frac{\alpha}{3} \end{cases}, \begin{cases} \frac{3+2\alpha+3\theta_2}{6} & si \quad \theta_2 \leq 1 - \frac{\alpha}{3} \\ 1 + \frac{\alpha}{6} & si \quad \theta_2 > 1 - \frac{\alpha}{3} \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que el modelo Discriminatorio es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_1^2 = 1+\alpha$ y $\gamma_2^2 = \alpha$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que deben verificar las inversas de las estrategias que forman el equilibrio es

$$\begin{cases} 1 - x(t) - (t - y(t))\,\frac{d}{dt}x(t) = 0 \\ 1 + \alpha - y(t) - (t - x(t))\,\frac{d}{dt}y(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = \frac{6t-3-2\alpha}{3}$ y $y(t) = \frac{6t-3-\alpha}{3}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{3+\alpha+3\theta_1}{6}, \frac{3+2\alpha+3\theta_2}{6}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \theta_2 \leq 1 - \frac{\alpha}{3}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \iff \theta_1 > \frac{\alpha}{3}$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.3.16 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* $1 + \frac{\alpha}{6}$*. La ofertas no se disparan y, por tanto,* $b_{\max} = 1 + \frac{\alpha}{6}$*.*

4.3.1 Ingresos en el Caso 2

Calculemos, en cada modelo de subasta, el ingreso esperado por las empresas y lo que espera pagar el Operador del Mercado si las empresas juegan en equilibrio. El precio que el Operador del Mercado espera pagar por la demanda, bajo un formato de subasta f, si ambas empresas juegan en equilibrio, viene dado por:

$$P_{omer}^{f} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^f(\theta_i)]$$

donde $P_i^f(\theta_i)$ recordemos que denota el ingreso esperado por la empresa i, si su tipo es θ_i, bajo un modelo de subasta f.

Modelo de subasta Vickrey

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{Vick}(\theta_1) &= \int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} b_2^*(\theta_2) d\theta_2 \\ &= \frac{1-\theta_1^2}{2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{Vick}(\theta_2) &= \int_{\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} \left(b_1^*(\theta_1) + \alpha\right) d\theta_1 + \alpha \left((b_1^*)^{-1} \left(b_2^* \left(\theta_2\right)\right) \right) \\ &= \frac{1-\theta_2^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Vick} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Vick}(\theta_i)] \\ &= 1 + \alpha - \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} + \alpha \end{aligned}$$

Modelo de subasta A

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^A(\theta_1) &= b_1^*(\theta_1)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) \\ &= \frac{1-\theta_1^2}{4} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^A(\theta_2) &= \begin{cases} \int_0^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1+\alpha & si \quad \theta_2\in[0,\frac{1}{2}] \\ \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^1 (b_1^*(\theta_1)+\alpha)\,d\theta_1+\alpha\left((b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) & si \quad \theta_2\in(\frac{1}{2},1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4}+\alpha & si \quad \theta_2\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-\theta_2^2+\alpha & si \quad \theta_2\in(\frac{1}{2},1] \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^A &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^A(\theta_i)] \\ &= \frac{3}{4}+\alpha \end{aligned}$$

Modelo de subasta B

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^B(\theta_1) &= \begin{cases} \int_0^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 & si \quad \theta_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 & si \quad \theta_1\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4} & si \quad \theta_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ 1-\theta_1^2 & si \quad \theta_1\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^B(\theta_2) &= (b_2^*(\theta_2)+\alpha)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right)+\alpha\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ &= \frac{1-\theta_2^2}{4}+\alpha \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^B_{omer} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^B(\theta_i)] \\ &= \frac{3}{4} + \alpha \end{aligned}$$

Modelo de subasta DV

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{DV}(\theta_1) &= b_1^*(\theta_1)\left(1 - (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) \\ &= \frac{1-\theta_1^2}{2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{DV}(\theta_2) &= (b_2^*(\theta_2) + \alpha)\left(1 - (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + \alpha\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ &= \frac{1-\theta_2^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^{DV}_{omer} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{DV}(\theta_i)] \\ &= \frac{2}{3} + \alpha \end{aligned}$$

Modelo de subasta C

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{C}(\theta_1) &= \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} b_2^*(\theta_2)d\theta_2 \\ &= \frac{1+\alpha-(1-\alpha)\,\theta_1^2}{2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{C}(\theta_2) &= \begin{cases} \frac{(1-\alpha^2)-\theta_2^2}{2(1-\alpha)} & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \leq 1 \\ \alpha & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1-\alpha^2-\theta_2^2}{2(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 \leq 1-\alpha \\ \alpha & \text{si} \quad \theta_2 > 1-\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^C_{omer} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P^C_i(\theta_i)] \\ &= \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta E

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^E_1(\theta_1) &= \int_{\left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right)}^{1} b_1^*(\theta_1)d\theta_2 \\ &= \frac{(\alpha-1)\left((\alpha-2)^2\theta_1^2-4\right)}{4(2-\alpha)^2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^E_2(\theta_2) &= \begin{cases} \int_0^1 (1+\alpha)\, b_1^*(\theta_1)d\theta_1 & si \quad \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) < 0 \\ \int_{\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right)}^{1} (1+\alpha)\, b_1^*(\theta_1)d\theta_1 + \int_0^{\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right)} \alpha b_2^*(\theta_2)d\theta_1 & si \quad 0 \le \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) \le 1 \\ \int_0^1 \alpha b_2^*(\theta_2)d\theta_1 & si \quad \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\alpha+1)(\alpha-6)}{4(\alpha-2)} & si \quad \theta_2 < \frac{1}{2-\alpha} \\ \frac{4\theta_2^2(2-\alpha)^2+\alpha^4-8\alpha^3+11\alpha^2+8\alpha-16}{4(\alpha-1)(\alpha-2)^2} & si \quad \frac{1}{2-\alpha} \le \theta_2 \le \frac{\alpha^2-3\alpha+4}{2(2-\alpha)} \\ \frac{\alpha(4-\alpha)}{2(2-\alpha)} & si \quad \theta_2 > \frac{\alpha^2-3\alpha+4}{2(2-\alpha)} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P^E_{omer} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P^E_i(\theta_i)] \\ &= \frac{(1+\alpha)\left(\alpha^2+2\alpha-18\right)}{12(\alpha-2)} \end{aligned}$$

Modelo de subasta Uniforme

El ingreso esperado por el jugador 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{Unif}(\theta_1) &= \begin{cases} \int_0^1 b_2^*(\theta_2)\, d\theta_2 & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \\ \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^1 b_2^*(\theta_2)\, d\theta_2 & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_0^{1-\alpha} \frac{1+\alpha+\theta_2}{2} d\theta_2 + \int_{1-\alpha}^1 d\theta_2 & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1+\alpha}{2} \\ \int_{2\theta_1-(1+\alpha)}^{1-\alpha} \frac{1+\alpha+\theta_2}{2} d\theta_2 + \int_{1-\alpha}^1 d\theta_2 & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1+\alpha}{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(3-\alpha)(1+\alpha)}{4} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1+\alpha}{2} \\ 1+\alpha-\theta_1^2 & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1+\alpha}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por el jugador 2 si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_2^{Unif}(\theta_2) &= \begin{cases} b_2^*(\theta_2)\left(1+\alpha-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) < 1 \\ \alpha b_2^*(\theta_2) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(1+\alpha)^2-\theta_2^2}{4} & \text{si} \quad \theta_2 < 1-\alpha \\ \alpha & \text{si} \quad \theta_2 > 1-\alpha \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{Unif} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Unif}(\theta_i)] \\
&= \frac{(1+\alpha)^2(3-\alpha)}{4}
\end{aligned}
$$

Modelo de subasta Discriminatorio

El ingreso esperado por el jugador 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{Discrimi}(\theta_1) &= \begin{cases} b_1^*(\theta_1) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \\ b_1^*(\theta_1)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2\alpha+3}{6} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{\alpha}{3} \\ \frac{(3+\alpha)^2-9\theta_1^2}{18} & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{\alpha}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por el jugador 2 si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_2^{Discrimi}(\theta_2) &= \begin{cases} b_2^*(\theta_2)\left(1+\alpha-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \leq 1 \\ \alpha b_2^*(\theta_2) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(3+2\alpha)^2-9\theta_2^2}{18} & \text{si} \quad \theta_2 \leq 1-\frac{\alpha}{3} \\ \alpha\left(1+\frac{\alpha}{6}\right) & \text{si} \quad \theta_2 > 1-\frac{\alpha}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{Discrimi} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Discrimi}(\theta_i)] \\
&= \frac{\left(18+15\alpha-\alpha^2\right)(3+2\alpha)}{81}
\end{aligned}
$$

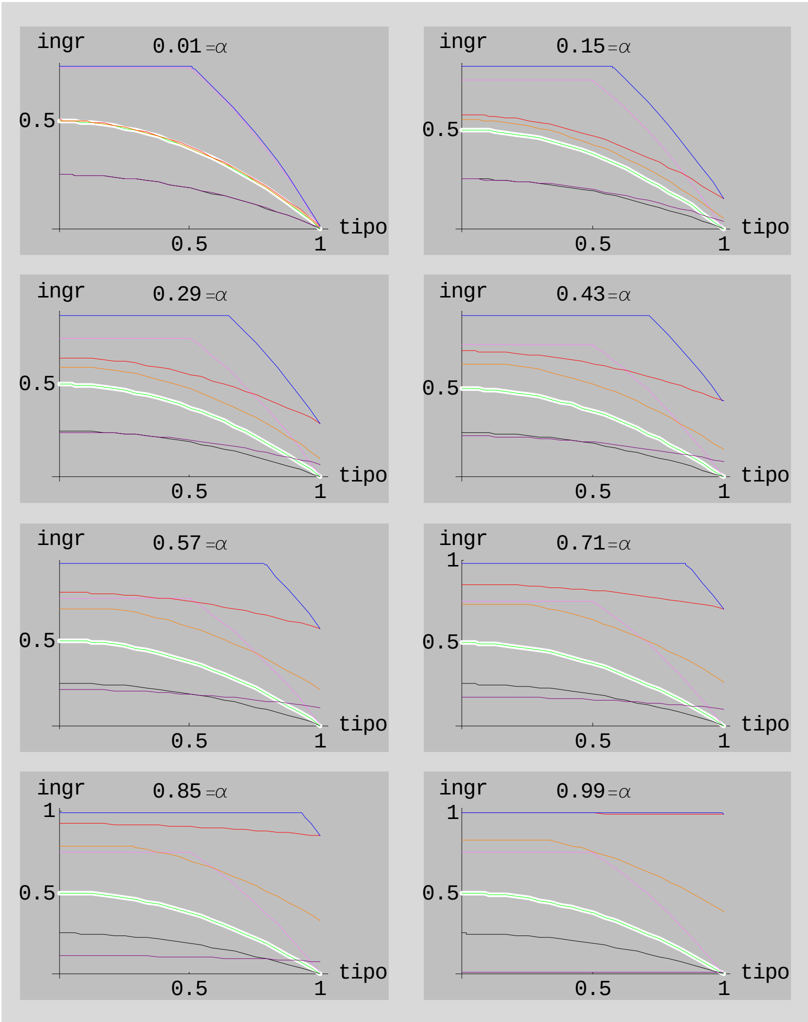
4.3.2 Comparación de los modelos en el Caso 2

Como bajo las hipótesis consideradas en el presente capítulo, definidas en la Sección 4.1., las dos empresas no esperan, en general, ingresar lo mismo bajo los distintos modelos de subasta, debemos estudiar bajo qué modelo cada empresa espera ingresar más y el subastador espera pagar menos por la demanda eléctrica.

Todas las gráficas de esta sección se han importado del *software Mathematica 5.0*. Las sentencias necesarias se incluyen en el Apéndice B.

Comparación desde el punto de vista de las empresas

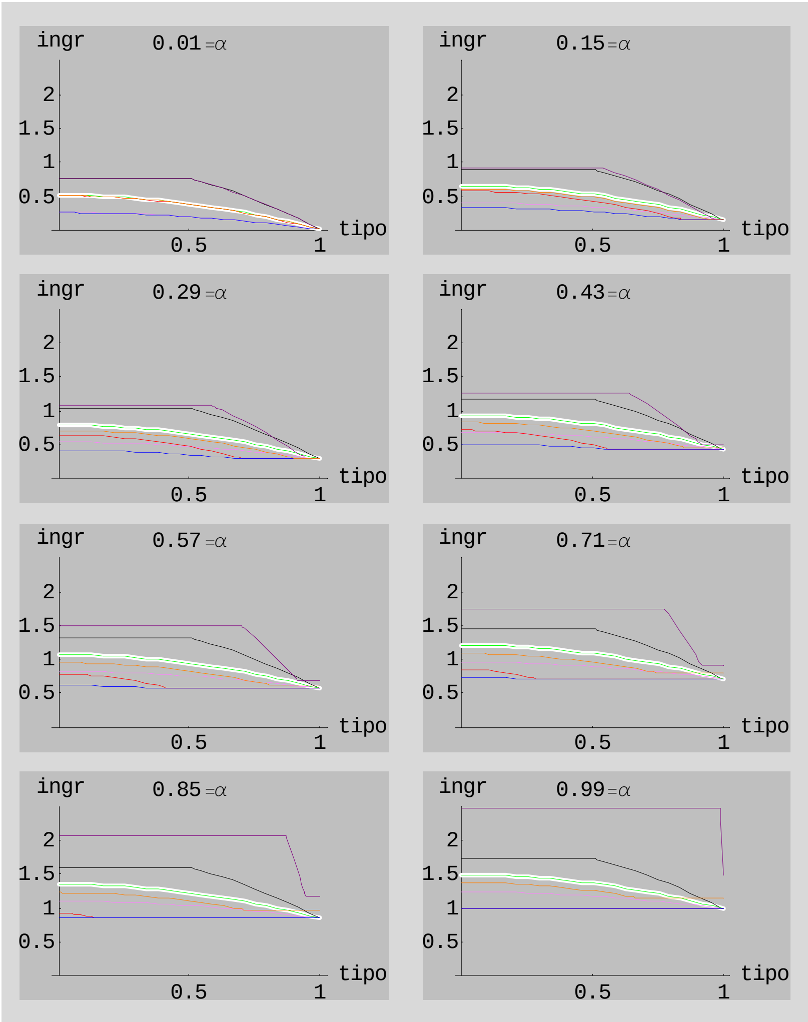
Si representamos a la vez el ingreso esperado por la empresa 1 en cada uno de los modelos de subasta dando algunos valores a α, obtenemos



Blanco->Vickrey Negro->A Rosa->B Verde->DV Rojo->C Morado->E Azul->Uniforme Naranja->Discriminatorio

Puede observarse que la subasta que resulta más ventajosa para la empresa 1 es el modelo Uniforme.

Si representamos a la vez el ingreso esperado por la empresa 2 en cada uno de los modelos de subasta, obtenemos

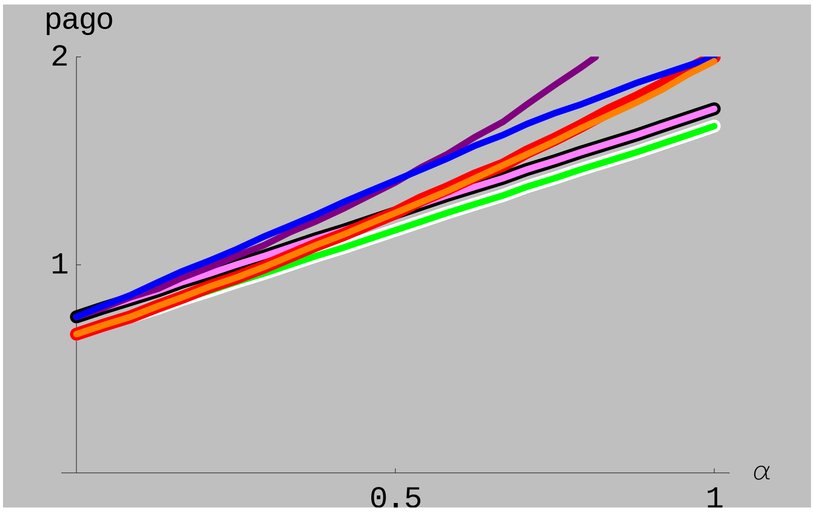


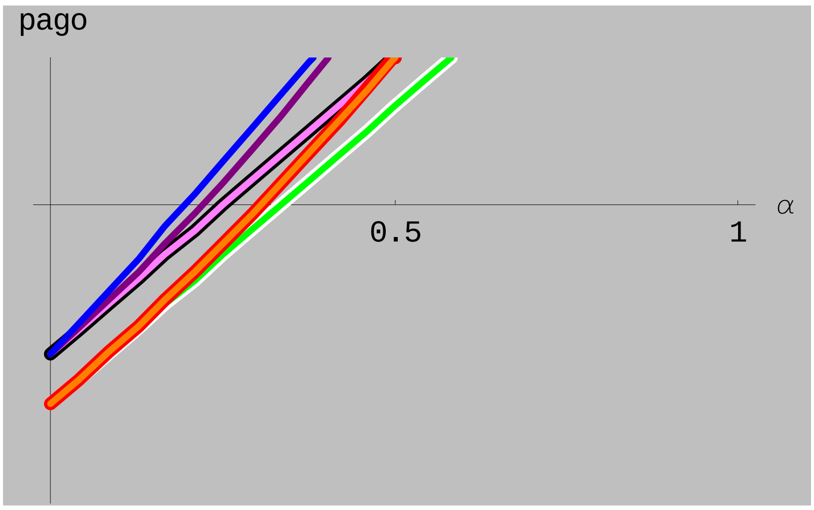
Blanco->Vickrey Negro->A Rosa->B Verde->DV Rojo->C Morado->E Azul->Uniforme Naranja->Discriminatorio

Puede observarse que la subasta que resulta más ventajosa para la empresa 2 es el modelo E.

Comparación desde el punto de vista del subastador.

Si representamos a la vez el pago que el subastador espera hacer a las empresas, bajo los distintos modelos de subasta considerados, nos queda:





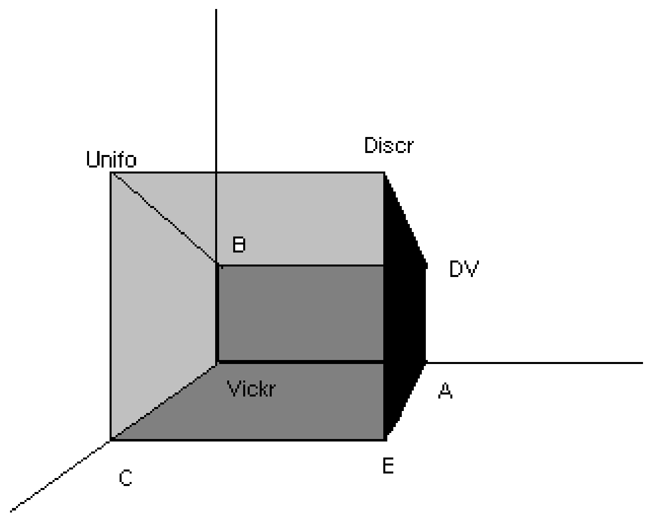
Blanco->Vickrey Negro->A Rosa->B Verde->DV Rojo->C Morado->E Azul->Uniforme Naranja->Discriminatorio

Calculemos la diferencia entre el pago que espera realizar el Operador del Mercado con cualquiera de los modelos restantes, y el pago que espera realizar bajo el modelo de Vickrey.

$$
\begin{aligned}
P^{A}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{1}{12} \\
P^{B}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{1}{12} \\
P^{DV}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= 0 \\
P^{C}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{\alpha^2}{3} \\
P^{E}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{2-9\alpha^2-\alpha^3}{12(2-\alpha)} \\
P^{Uniforme}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{1+3\alpha+3\alpha^2-3\alpha^3}{12} \\
P^{Discrim}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} &= \tfrac{(27-2\alpha)\alpha^2}{81}
\end{aligned}
$$

Los modelos C y Discriminatorio parecen representados por la misma gráfica en el dibujo. Sin embargo, la diferencia entre lo que el Operador del Mercado espera pagar bajo el modelo C, menos lo que espera pagar bajo el modelo Discriminatorio es igual a $\frac{2\alpha^3}{81}$. Los modelos A y B son equivalentes respecto del Operador del Mercado. El Operador del Mercado espera pagar menos a las empresas bajo los modelos de Vickrey y DV, que bajo cualquiera de los modelos de subasta restante. Además, como pudo observarse, que dichos modelos de subasta son equivalentes en cuanto a ingresos esperados por parte de las empresas, como en cuanto al pago que el Operador del Mercado espera realizar. Como además el modelo de Vickrey pertenece a la **Región II**, por la monotonía de las funciones de ingresos esperados por las empresas, se puede afirmar que no existe un modelo más ventajoso perteneciente a la **Región II.**

La región a la que pertenecen los parámetros de la familia de modelos, en el Caso 2, es $RC2 = \{(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0,1] \times [0, 1+\gamma_2^2] \times [0,\alpha]\}$. El siguiente dibujo representa dicha región en cuyos vértices se sitúan los modelos de subasta analizados.



Desde el punto de vista del Operador del mercado, los dos modelos equivalentes más ventajosos son los modelos de Vickrey y DV. Es lógico preguntarse cual es el pago que espera realizar el Operador bajo alguno de los modelos pertenecientes a la diagonal que une a los modelo de Vickrey y DV. Dichos modelos intermedios también se van a analizar.

Modelos entre los modelos DV y de Vickrey Los modelos pertenecientes a la diagonal que une los modelos DV y de Vickrey vienen determinados por las siguientes funciones de beneficio de las dos empresas:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} \varepsilon b_1 + (1-\varepsilon)\, b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} \varepsilon b_2 + (1-\varepsilon)\, b_1 + \alpha b_{\max} - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \\ &= \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) + \begin{cases} \varepsilon b_2 + (1-\varepsilon)\, b_1 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ 0 & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon \in [0,1]$. Obsérvese que, en realidad, compiten por la misma cantidad de despacho, al mismo precio y al mismo coste, ya que la empresa 2, independientemente de las ofertas que finalmente se realicen, tiene asegurado el despacho de α unidades eléctricas pagadas a precio máximo. En equilibrio, las dos empresas pujarán de manera idéntica y, por tanto, todo equilibrio bayesiano de Nash puede suponerse simétrico.

Proposición 4.3.17 *Supongamos que* $1 < D \leq 1+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y bajo cualquiera de los modelos perteneciente a la diagonal que une al modelo DV y al modelo de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{\theta_1+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\theta_2+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 4.1.2.a) y 4.1.2.b), se observa que los modelos mencionados, son casos particulares en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = \varepsilon$, $\gamma_1^2 = \varepsilon$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, aplicando la proposición 4.2.1. **Región I**, se puede afirmar que las funciones inversas de las estrategias en equilibrio de ambas empresas verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \varepsilon - \varepsilon\,(b_2^*)^{-1}(t) - \left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right)\left((b_2^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \\ \varepsilon - \varepsilon\,(b_1^*)^{-1}(t) - \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\left((b_1^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \end{cases}$$

Como las ecuaciones diferenciales coinciden, si denotamos por $b^*(\theta) = b_1^*(\theta) = b_2^*(\theta)$ se tiene que $b^*(\theta)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\varepsilon\,(1-\theta)\,(b^*)'(\theta) - b^*(\theta) = -\theta$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta = 1$ queda que todo equilibrio bayesiano de Nash cumple

$$b^*(1) = 1$$

Luego la solución particular de la ecuación diferencial queda:

$$b^*(\theta) = \frac{\theta+\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

y el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Nota 4.3.18 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* 1. *La ofertas no se disparan y, por tanto,* $b_{\max} = 1$.

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{\varepsilon}(\theta_1) &= \int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} \left(\varepsilon b_1^*(\theta_1) + (1-\varepsilon)\, b_2^*(\theta_2)\right) d\theta_2 \\ &= \frac{1-\theta_1^2}{2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{\varepsilon}(\theta_2) &= \alpha + \int_{\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} \left(\varepsilon b_2^*(\theta_2) + (1-\varepsilon)\, b_1^*(\theta_1)\right) d\theta_1 \\ &= \frac{1-\theta_2^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{\varepsilon}(\theta_i)] \\ &= 1 + \alpha - \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} + \alpha \end{aligned}$$

Nota 4.3.19 *Tanto el ingreso esperado por las empresas, como el pago que espera realizar el Operador del Mercado, son independientes del valor del parámetro ε y, por tanto, concluimos que todos los modelos de subasta pertenecientes a la diagonal que une los modelos DV y de Vickrey son equivalentes.*

Resumen

Observando la gráficas se llega a las siguientes conclusiones:

- La empresa 1 (la de menor capacidad) espera obtener mayores ingresos bajo el modelo de subasta Uniforme.
- La empresa 2 (la de mayor capacidad) espera obtener mayores ingresos bajo el modelo de subasta A.
- Por último, observamos que el subastador espera pagar menos bajo dos modelos equivalentes que son el modelo de Vickrey y el modelo DV. Además, todos los modelos pertenecientes a la diagonal que los une, también son equivalentes.

4.4 Caso 3 $(1+\beta < D = 1+\beta+\alpha < 2+\beta)$

En este Caso 3, el tamaño de la demanda implica que $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = \alpha$, $\phi_1^2 = 1+\beta$ y $\phi_2^2 = \alpha+\beta$. El precio que el subastador paga a las empresas que generen en el mercado es diferente según el modelo de subasta utilizado para llevar a cabo las transacciones de compraventa de la energía eléctrica. Por ello se analizarán, por separado, los modelos de subasta que quedan determinados por los 16 vértices de la siguiente región: $RC3 = \{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0, 1-\alpha+\gamma_2^1] \times [0, \alpha] \times [0, 1-\alpha+\gamma_2^2] \times [0, \alpha+\beta]\}$. Estos 16 modelos quedan determinados unívocamente por los valores fijos de los parámetros y son los siguientes:

Modelo	γ_1^1	γ_2^1	γ_1^2	γ_2^2
Vickrey	0	0	0	0
V2	0	α	0	0
A1	$1-\alpha$	0	0	0
A2	1	α	0	0
B1	0	0	$1-\alpha$	0
B2	0	α	$1-\alpha$	0
DV1	$1-\alpha$	0	$1-\alpha$	0
DV2	1	α	$1-\alpha$	0
C1	0	0	0	$\alpha+\beta$
Uniforme	0	α	0	$\alpha+\beta$
E1	$1-\alpha$	0	0	$\alpha+\beta$
E2	1	α	0	$\alpha+\beta$
UNI1	0	0	$1+\beta$	$\alpha+\beta$
UNI2	0	α	$1+\beta$	$\alpha+\beta$
DIS1	$1-\alpha$	0	$1+\beta$	$\alpha+\beta$
Discriminatoria	1	α	$1+\beta$	$\alpha+\beta$

Se analizará cada uno de ellos.

Modelo de subasta de Vickrey En el modelo de Vickrey, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa, se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe $\alpha b_{\max} + (1-\alpha)b_2$: el precio máximo permitido por cada una de las primeras α unidades y b_2 por cada una de las $1-\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades residuales, por las que recibe el precio máximo permitido por unidad. La empresa 2 despacha en total $1+\beta$ unidades por las que recibe $(1-\alpha)b_1 + (\alpha+\beta)b_{\max}$: el precio máximo permitido por cada una de las $\alpha+\beta$ primeras unidades y el precio b_1 por cada una de las $1-\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_1) & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)b_1 + (\alpha+\beta)\,b_{\max} - (1+\beta)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.1 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\theta_1, \theta_2]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.*a*) y 4.1.3.*b*), se observa que el modelo de Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado y, además, está formado por estrategias dominantes para ambas empresas.

■

Nota 4.4.2 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$.

Modelo de subasta V2 En el modelo V2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga a su propia oferta b_1. La empresa 2, en ese caso, recibe $(1-\alpha)\,b_1 + (\alpha+\beta)\,b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada una de las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_2 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_2, b_1) &= \begin{cases} (1-\alpha)\,b_1 + (\alpha+\beta)\,b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 4.4.3 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$*. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta V2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$
[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\theta_1 & si \quad \theta_1 \le \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \\ 1 & si \quad \theta_1 > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \end{cases}, \theta_2 \right]
$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo V2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, como $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 2 dada por

$$
b_2^*(\theta_2) = \theta_2
$$

y la estrategia en equilibrio para la empresa 1 es

$$
b_1^*(\theta_1) = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\theta_1
$$

si $\theta_1 \le \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$. En caso contrario la empresa 1 no se encontraría en competencia y pujaría la máxima oferta permitida. ∎

Nota 4.4.4 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la **Región II**, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$.

Modelo de subasta A1 En el modelo A1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max}$: el precio b_1 por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo permitido por cada una de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga al precio máximo permitido. La empresa 2 recibe $(1-\alpha)\, b_1 + (\alpha+\beta)\, b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\, (b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_1 + (\alpha+\beta)\, b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\, (b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.5 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta A1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \theta_2\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo A1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1-\alpha$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, como $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 2 dada por

$$b_2^*(\theta_2) = \theta_2$$

y la estrategia en equilibrio para la empresa 1 es

$$b_1^*(\theta_1) = \frac{1+\theta_1}{2}$$

∎

Nota 4.4.6 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$.

Modelo de subasta A2 En el modelo A2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_1 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha + \beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga a su propia oferta b_1. La empresa 2 recibe $(1-\alpha)\, b_1 + (\alpha+\beta)\, b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_1 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_2, b_1) &= \begin{cases} (1-\alpha)\, b_1 + (\alpha+\beta)\, b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.4.7 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta A2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{1+(1-\alpha)\theta_1}{2(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 \leq \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \\ 1 & si \quad \theta_1 > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \end{cases}, \theta_2 \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo A2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, como $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 2 dada por

$$b_2^*(\theta_2) = \theta_2$$

y la estrategia en equilibrio para la empresa 1 es

$$b_1^*(\theta_1) = \frac{1 + (1-\alpha)\,\theta_1}{2\,(1-\alpha)}$$

si $\theta_1 \leq \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$. En caso contrario la empresa 1 no se encontraría en competencia y pujaría la máxima oferta permitida. ■

Nota 4.4.8 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$.

Modelo de subasta B1 En el modelo B1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, b_2 + \alpha b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo permitido por cada una de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga al precio máximo permitido. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades y recibe $(1-\alpha)\, b_2 + (\alpha+\beta)\, b_{\max}$: la propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\, (b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_2, b_1) &= \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + (\alpha+\beta)\, b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\, (b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.4.9 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta B1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo B1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1-\alpha$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1+\theta_2}{2}$$

■

Nota 4.4.10 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la **Región II**, se obtuvo que $b_{\max} = 1$.*

Modelo de subasta B2 En el modelo B2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe el precio b_2 por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha + \beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga a precio b_1. La empresa 2 despacha $1 + \beta$ unidades y recibe $(1-\alpha)\, b_2 + (\alpha+\beta)\, b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} b_2 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_2, b_1) &= \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + (\alpha+\beta)\, b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 4.4.11 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta B2, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} & si \quad \theta_1 < \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} \\ \frac{(1-\alpha)((2-3\alpha)\theta_1 - \alpha)}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)} & si \quad \theta_1 \geq \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} \end{cases}, \frac{(2-3\alpha)\,\theta_2 + 2\,(1-\alpha)}{2\,(2-3\alpha)} \right]$$

si $\alpha < \frac{1}{2}$.

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.*a*) y 4.1.3.*b*), se observa que el modelo B2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 1-\alpha$ y $\gamma_2^2 = 0$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} \alpha x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\, x'(t) = 0 \\ -y(t) + 1 - (t - x(t))\, y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha-2} + 2t$ y $y(t) = \frac{\alpha}{2-3\alpha} + \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}t$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego

$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{(1-\alpha)((2-3\alpha)\theta_1-\alpha)}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)}, \frac{(2-3\alpha)\theta_2+(1-\alpha)^2}{2(2-3\alpha)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \forall \theta_2 \in [0,1]$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \iff \theta_1 > \frac{1-\alpha}{2-3\alpha}$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.12 *La máxima estrategia realizada en dicho equilibrio es* $b_1^*(1) = \frac{2(1-\alpha)}{2-3\alpha} = b_{\max}$.

Modelo de subasta DV1 En el modelo DV1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad, recibiendo por ello $(1-\alpha)\,b_1 + \alpha b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada una de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga al precio máximo. La empresa 2 despacha $1+\beta$ y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + (\alpha+\beta)\,b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada una de las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)\,b_1 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_2, b_1) &= \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2 + (\alpha+\beta)\,b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases} \\
&= \beta\,(b_{\max} - \theta_2) + \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Obsérvese que en realidad compiten por la misma cantidad de despacho, al mismo precio y al mismo coste. Ya que la empresa 2, independientemente de las ofertas que finalmente se realicen, tiene asegurado el despacho de β unidades eléctricas pagadas a precio máximo. En equilibrio, las dos empresas pujarán de manera idéntica y, por tanto, todo equilibrio bayesiano de Nash puede suponerse simétrico.

Proposición 4.4.13 *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo* *de subasta DV1, el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico está dado por:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo DV1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1-\alpha$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1-\alpha$ y $\gamma_2^2 = 0$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} -\left(b_2^*\right)^{-1}(t) + 1 + \left(-t + \left(b_1^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b_2^*\right)^{-1}(t) = 0 \\ -\left(b_1^*\right)^{-1}(t) + 1 + \left(-t + \left(b_2^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b_1^*\right)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Como ambas funciones son idénticas $b_1^*(\theta) = b_2^*(\theta) = b^*(\theta)$ implica que son solución de la siguiente ecuación diferencial lineal

$$(1-\theta)\left(b^*\right)'(\theta) - b^*(\theta) = -\theta$$

Evaluando en $\theta = 1$, queda $b^*(1) = 1$. La solución particular de la E.D.O. verificando dicha condición es $b^*(\theta) = \frac{1+\theta}{2}$. ■

Nota 4.4.14 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* $1 = b_{\max}$.

Modelo de subasta DV2 En el modelo DV2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 recibe su propia oferta por unidad despachada (que es toda su capacidad) y la empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$, que el Operador del Mercado le paga a precio máximo por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga a precio b_1. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + (\alpha+\beta)\,b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por las $\alpha+\beta$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2 + (\alpha+\beta)\,b_{\max} - (1+\beta)\theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.15 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta DV2, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{3\theta_1(1-\alpha)+3-\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 \leq \frac{3-4\alpha}{3(1-\alpha)} \\ \frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 > \frac{3-4\alpha}{3(1-\alpha)} \end{cases}, \begin{cases} \frac{3-\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 < \frac{\alpha}{3(1-\alpha)} \\ \frac{3-2\alpha+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 \geq \frac{\alpha}{3(1-\alpha)} \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo DV2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 1-\alpha$ y $\gamma_2^2 = 0$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} 1 - (1-\alpha)\,x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\,x'(t) = 0 \\ 1 - y(t) - (t - x(t))\,y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = 2t + \frac{2\alpha-3}{3(1-\alpha)}$ y $y(t) = 2t + \frac{-3+\alpha}{3(1-\alpha)}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{3\theta_1(1-\alpha)+3-\alpha}{6(1-\alpha)}, \frac{3-2\alpha+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \theta_2 > \frac{\alpha}{3(1-\alpha)}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \iff \theta_1 \leq \frac{3-4\alpha}{3(1-\alpha)}$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.16 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es $\frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} = b_{\max}$.*

Modelo de subasta C1 En el modelo C1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + \alpha b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada unidad de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha + \beta$ recibiendo su propia oferta por unidad.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga al precio máximo. La empresa 2 recibe la oferta contraria por cada una de las $1 + \beta$ unidades eléctricas que despacha.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\, (b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_1 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.17 *Supongamos que $1 + \beta < D < 2 + \beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta C1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \begin{cases} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha-\beta}\theta_2 & si \quad \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \\ 1 & si \quad \theta_2 > \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \end{cases}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo C1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha + \beta$. Luego, como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha-\beta}\theta_2$$

si $\theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}$. En caso contrario la empresa 2 no se encontraría en competencia y pujaría la máxima oferta permitida. ∎

Nota 4.4.18 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que* $b_{\max} = 1$.

Modelo de subasta Uniforme En el modelo Uniforme, el precio por unidad despachada recibido por una empresa es igual a la oferta más alta aceptada. En este Caso 3 las dos empresas entran en el mercado y el precio del mercado es la mayor de las dos pujas. La empresa de menor oferta siempre recibe la puja contraria por unidad, despachando toda su capacidad, y la empresa de menor oferta recibe su propia oferta por unidad, despachando la demanda residual.

Las funciones de beneficio de las dos empresas son, entonces:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_1 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ (\beta+\alpha)\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.19 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta Uniforme, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{(1-\alpha)\,\theta_1}{1-2\alpha}, \begin{cases} \frac{\theta_2(1-\alpha)}{1-2\alpha-\beta} & si \quad \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-2\alpha} \\ \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} & si \quad \theta_2 > \frac{1-2\alpha-\beta}{1-2\alpha} \end{cases}\right]$$

si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$.

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo Uniforme es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} \alpha x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\,x'(t) = 0 \\ (\alpha+\beta)\,y(t) - (1-\alpha)\,(t - x(t))\,y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = \frac{t(2\alpha+\beta-1)}{\alpha-1}$ y $y(t) = \frac{t(2\alpha-1)}{\alpha-1}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{\theta_1(1-\alpha)}{1-2\alpha-\beta}, \frac{\theta_1(1-\alpha)}{1-2\alpha}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-2\alpha}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1]\, \forall \theta_1 \in [0,1]$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ∎

Nota 4.4.20 *La máxima estrategia realizada en dicho equilibrio es $b_1^*(1) = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} = b_{\max}$.*

Modelo de subasta E1 En el modelo E1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada una de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$ y recibe su propia oferta por unidad.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas, que el Operador del Mercado paga al precio máximo por unidad. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades eléctricas y recibe la oferta contraria por cada unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_1 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.21 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta E1, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{(2-3\alpha-\beta)\,\theta_1 + 2\,(1-\alpha)}{2\,(2-3\alpha-\beta)}, \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta} & si \quad \theta_2 < \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta} \\ \frac{(1-\alpha)((2-3\alpha-\beta)\theta_2 - \alpha - \beta)}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_2 \geq \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta} \end{cases}\right]$$

si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$.

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo E1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1-\alpha$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} 1 - x(t) - (t - y(t))\, x'(t) = 0 \\ (\alpha+\beta)\, y(t) - (1-\alpha)\,(t - x(t))\, y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = -\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta-2} + t\frac{2\alpha+\beta-1}{\alpha-1}$ y $y(t) = \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha+\beta-2} + 2t$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{(2-3\alpha-\beta)\theta_1+2(1-\alpha)}{2(2-3\alpha-\beta)}, \frac{(1-\alpha)((2-3\alpha-\beta)\theta_2-\alpha-\beta)}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \Longleftrightarrow \theta_2 \geq \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \Longleftrightarrow \forall \theta_1 \in [0,1]$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.22 *La máxima estrategia realizada en dicho equilibrio es* $b_2^*(1) = \frac{2(1-\alpha)}{2-3\alpha-\beta} = b_{\max}$.

Modelo de subasta E2 En el modelo E2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe su propia oferta por unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$ y recibe su propia oferta por unidad.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas y recibe su propia oferta por unidad. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades eléctricas y recibe la oferta contraria por cada unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)(b_1 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.23 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta E2, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$b_1^*(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{2-3\alpha-\beta} & si \quad \theta_1 \leq \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha-\beta)(1-2\alpha-\beta)} \\ \frac{3\alpha^2-\alpha(6-\beta)+2(1-\beta)}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_1 > \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} \end{cases}$$

$$b_2^*(\theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{2-3\alpha-\beta} & si \quad \theta_2 < \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \\ \frac{\theta_2(1-\alpha)}{1-2\alpha-\beta} - \frac{\alpha+\beta}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \leq \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2-3\alpha} \\ \frac{4-3\alpha-\beta}{2(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_2 > \frac{1-2\alpha-\beta}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2-3\alpha} \end{cases}$$

si $\alpha < \frac{1-\beta}{3}$.

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.*a*) y 4.1.3.*b*), se observa que el modelo E2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 0$ y $\gamma_2^2 = \alpha + \beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} 1 - (1-\alpha)\, x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\, x'(t) = 0 \\ (\alpha+\beta)\, y(t) - (1-\alpha)\,(t - x(t))\, y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = \frac{\alpha+\beta}{(1-\alpha)(2-3\alpha-\beta)} + t\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}$ y $y(t) = 2t - \frac{2}{2-3\alpha-\beta}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{2-3\alpha-\beta}, \frac{\theta_2(1-\alpha)}{1-2\alpha-\beta} - \frac{\alpha+\beta}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \Longleftrightarrow \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \leq \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2-3\alpha}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \Longleftrightarrow \theta_1 \leq \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha-\beta)(1-2\alpha-\beta)}$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.24 *La máxima estrategia realizada en dicho equilibrio es* $b_1^*(1) = \frac{3\alpha^2-\alpha(6-\beta)+2(1-\beta)}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)} = b_{\max}$.

Modelo de subasta UNI1 En el modelo UNI1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, b_2 + \alpha b_{\max}$: la oferta contraria por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada unidad de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha + \beta$ y recibe su propia oferta por unidad eléctrica.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas y recibe el precio máximo por unidad. La empresa 2 despacha $1 + \beta$ y recibe su propia oferta por unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.25 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y en el modelo de subasta UNI1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\theta_1, \begin{cases} \frac{1+\beta+(1-\alpha)\theta_2}{2(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \\ 1 & si \quad \theta_2 > \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \end{cases}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo UNI1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1+\beta$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Luego, como $\gamma_1^1 = 0$ y $\gamma_2^1 = 0$, por la Proposición 4.2.1. **Región II**, se verifica que existe una única estrategia dominante para la empresa 1 dada por

$$b_1^*(\theta_1) = \theta_1$$

y la estrategia de la empresa 2 que forma parte del equilibrio es

$$b_2^*(\theta_2) = \frac{1+\beta+(1-\alpha)\,\theta_2}{2\,(1-\alpha)}$$

si $\theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}$. En caso contrario la empresa 2 no se encontraría en competencia y pujaría la máxima oferta permitida. ■

Nota 4.4.26 *Recuérdese que, como este modelo pertenece a la* ***Región II****, se obtuvo que $b_{\max} = 1$.*

Modelo de subasta UNI2 En el modelo UNI2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria por unidad despachada. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$ y recibe su propia oferta por unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas y recibe su propia oferta por unidad despachada. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades eléctricas y recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_2 - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.27 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta UNI2, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$b_1^*(\theta_1) = \begin{cases} \frac{1+\beta}{2-3\alpha} & si \quad \theta_1 < \frac{1+\beta}{2-3\alpha} \\ \frac{(1-\alpha)(2-3\alpha)\theta_1 - \alpha(1+\beta)}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)} & si \quad \theta_1 \geq \frac{1+\beta}{2-3\alpha} \end{cases}$$

$$b_2^*(\theta_2) = \begin{cases} \frac{\theta_2(2-3\alpha)+2(1+\beta)}{2(2-3\alpha)} & si \quad \theta_2 \leq \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha)(1-2\alpha)} \\ \frac{3\alpha^2-\alpha(6+\beta)+2}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)} & si \quad \theta_2 > \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha)(1-2\alpha)} \end{cases}$$

si $\alpha < \frac{1-\beta}{3}$.

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo UNI2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 0$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 1+\beta$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} \alpha x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\,x'(t) = 0 \\ 1+\beta - (1-\alpha)\,y(t) - (1-\alpha)\,(t - x(t))\,y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = \frac{2(\beta+1)}{3\alpha-2} + 2t$ y $y(t) = \frac{\alpha(\beta+1)}{(\alpha-1)(3\alpha-2)} + \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}t$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{(1-\alpha)(2-3\alpha)\theta_1-\alpha(1+\beta)}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)}, \frac{\theta_2(2-3\alpha)+2(1+\beta)}{2(2-3\alpha)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Se cumple que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \theta_2 \leq \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha)(1-2\alpha)}$ y que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \iff \theta_1 \geq \frac{1+\beta}{2-3\alpha}$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. $\blacksquare$

Nota 4.4.28 *La máxima estrategia realizada en dicho equilibrio es $b_2^*(1) = \frac{3\alpha^2-\alpha(6+\beta)+2}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)} = b_{\max}$.*

Modelo de subasta DIS1 En el modelo DIS1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si $b_1 < b_2$, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max}$: su propia oferta por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo por cada una de las α unidades restantes. La empresa 2 entra en el mercado despachando la demanda residual $\alpha+\beta$ y recibe su propia oferta por cada unidad despachada.

Si $b_1 > b_2$, la empresa 1 despacha α unidades eléctricas y recibe el precio máximo por cada unidad despachada. La empresa 2 despacha $1+\beta$ unidades eléctricas y recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, b_1 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\, (b_{\max} - \theta_1) & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} (1+\beta)\, (b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\, (b_2 - \theta_2) & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.29 *Supongamos que $1+\beta < D < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta DIS1, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{3+2\beta-\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 < \frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{3\theta_1(1-\alpha)+3-2\alpha+\beta}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 \geq \frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}, \begin{cases} \frac{3+2\beta-\alpha+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 \leq \frac{3-4\alpha-\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{6+\beta-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 > \frac{3-4\alpha-\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo DIS*1* es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1-\alpha$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = 1+\beta$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} 1 - x(t) - (t - y(t))\, x'(t) = 0 \\ 1 + \beta - (1-\alpha)\, y(t) - (1-\alpha)\, (t - x(t))\, y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = 2t + \frac{\alpha-2\beta-3}{3(1-\alpha)}$ y $y(t) = 2t + \frac{2\alpha-\beta-3}{3(1-\alpha)}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores. Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{3\theta_1(1-\alpha)+3-2\alpha+\beta}{6(1-\alpha)}, \frac{3+2\beta-\alpha+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)}]$ $\forall \theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1} (b_i^*\, (\theta_i)) \in [0,1]$.

Si $\beta < 3 - 4\alpha$, se cumple que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \Leftrightarrow \theta_1 \geq \frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)}$ y que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \Longleftrightarrow \theta_2 \leq \frac{3-4\alpha-\beta}{3(1-\alpha)}$. Sin embargo, si $\beta \geq 3-4\alpha$, se cumple que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \forall \theta_1 \in [0,1]$ y que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \forall \theta_1 \in [0,1]$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.30 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* $\frac{6+\beta-5\alpha}{6(1-\alpha)} = b_{\max}$.

Modelo de subasta Discriminatorio En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa es siempre su propia oferta. Es decir, la empresa i, recibe b_i por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_1 - \theta_1) & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_1, b_2) = \begin{cases} (1+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_2 - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

Proposición 4.4.31 *Supongamos que* $1+\beta < D < 2+\beta$. *Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Uniforme Lineal y en el modelo de subasta Discriminatorio, se verifica que el siguiente par de estrategias es un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\begin{cases} \frac{3+2\beta}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 < \frac{\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{3\theta_1(1-\alpha)+3+\beta}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 \geq \frac{\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}, \begin{cases} \frac{3+2\beta+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 \leq \frac{3(1-\alpha)-\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{6+\beta-3\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 > \frac{3(1-\alpha)-\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases} \right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que el modelo Discriminatorio es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = 1$, $\gamma_2^1 = \alpha$, $\gamma_1^2 = 1+\beta$ y $\gamma_2^2 = \alpha+\beta$. Aplicando la Proposición 4.2.1. **Región I**, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica las inversas de las estrategias en equilibrio queda

$$\begin{cases} 1 - (1-\alpha)\,x(t) - (1-\alpha)\,(t - y(t))\,x'(t) = 0 \\ 1 + \beta - (1-\alpha)\,y(t) - (1-\alpha)\,(t - x(t))\,y'(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t$ que cumpla que $y(t) \in [0,1]$ y $x(t) \in [0,1]$. Sustituyendo las funciones $x(t) = 2t - \frac{2\beta+3}{3(1-\alpha)}$ y $y(t) = 2t - \frac{\beta+3}{3(1-\alpha)}$ se comprueba que verifican las dos ecuaciones diferenciales anteriores.

Luego $[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = [\frac{3\theta_1(1-\alpha)+3+\beta}{6(1-\alpha)}, \frac{3+2\beta+3\theta_2(1-\alpha)}{6(1-\alpha)}]$ $\forall\theta_i$ que verifique $\left(b_j^*\right)^{-1}(b_i^*(\theta_i)) \in [0,1]$. Si $\beta < 3-3\alpha$, se cumple que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \in [0,1] \Leftrightarrow \theta_1 \geq \frac{\beta}{3(1-\alpha)}$ y que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \in [0,1] \iff \theta_2 \leq \frac{3-3\alpha-\beta}{3(1-\alpha)}$. Sin embargo, si $\beta \geq 3-3\alpha$, se cumple que $(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \forall\theta_1 \in [0,1]$ y que $(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \forall\theta_1 \in [0,1]$. Por tanto, el equilibrio formado por estrategias crecientes y continuas sería el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.32 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* $\frac{6+\beta-3\alpha}{6(1-\alpha)} = b_{\max}$.

4.4.1 Ingresos en el Caso 3

Calculemos el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el subastador, en cada modelo de subasta, si las dos empresas juegan en equilibrio. El precio que el Operador del Mercado espera pagar por la demanda, bajo un formato de subasta f, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente viene dado por:

$$P_{omer}^f = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^f(\theta_i)]$$

donde $P_i^f(\theta_i)$ recordemos que denota el pago esperado por la empresa i si su tipo es θ_i bajo un modelo de subasta f.

Modelo de subasta Vickrey

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{Vick}(\theta_1) &= \alpha\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)))\right) + (1-\alpha)\int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} b_2^*(\theta_2)d\theta_2 \\ &\quad +\alpha(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))) \\ &= \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2}\left(1-\theta_1^2\right) \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{Vick}(\theta_2) &= (\beta+\alpha)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + (1-\alpha)\int_{\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} b_1^*(\theta_1)d\theta_1 \\ &\quad +(\beta+\alpha)(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ &= (\beta+\alpha) + \frac{(1-\alpha)}{2}\left(1-\theta_2^2\right) \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Vick} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Vick}(\theta_i)] \\ &= \beta + 2\alpha + \frac{2(1-\alpha)}{3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta V2

Si $\alpha < \frac{1}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{V2}(\theta_1) &= \begin{cases} \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} b_2^*(\theta_2)\, d\theta_2 + \alpha b_1^*(\theta_1)\, (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 1 \\ \alpha & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\theta_1}^{1} \theta_2 d\theta_2 + \alpha \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\theta_1\right)^2 & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\theta_1^2(1-\alpha)^2+2\alpha-1}{2(2\alpha-1)} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{V2}(\theta_2) &= \alpha + \beta + (1-\alpha) \int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} b_1^*(\theta_1)\, d\theta_1 \\ &= \alpha + \beta + (1-\alpha) \int_{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\theta_2}^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\theta_1 d\theta_1 \\ &\quad + (1-\alpha) \int_{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}^{1} d\theta_1 \\ &= \frac{\theta_2^2\,(2\alpha-1) + 2\alpha + 2\beta + 1}{2} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{V2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{V2}(\theta_i)] \\ &= \frac{3\beta + 2 + \alpha\,(2-3\beta) - 3\alpha^2}{3\,(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la empresa 1 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 2 sigue pujando su propio tipo, ya que ésta era estrategia dominante. Luego en ese caso

$$P_1^{V2}(\theta_1) = \alpha$$

$$P_2^{V2}(\theta_2) = 1+\beta$$

$$P_{omer}^{V2} = 1+\alpha+\beta$$

Modelo de subasta A1

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{A1}(\theta_1) &= ((1-\alpha)b_1^*(\theta_1)+\alpha)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) \\ &\quad +\alpha\,(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \\ &= \frac{1-\alpha}{4}\left(1-\theta_1^2\right)+\alpha \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{A1}(\theta_2) &= \begin{cases} \int_0^1 ((1-\alpha)\,b_1^*(\theta_1)+\alpha+\beta)\,d\theta_1 & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) < 0 \\ (1-\alpha)\int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1+\alpha+\beta & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha+4\beta+3}{4} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1}{2} \\ 1+\beta-(1-\alpha)\,\theta_2^2 & \text{si} \quad \theta_2 > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{A1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{A1}(\theta_i)] \\ &= \frac{5\alpha+4\beta+3}{4} \end{aligned}$$

Modelo de subasta A2

Si $\alpha < \frac{1}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{A2}(\theta_1) &= \begin{cases} b_1^*(\theta_1)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right)+\alpha b_1^*(\theta_1)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))<1 \\ \alpha & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))>1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1-(1-\alpha)^2\theta_1^2}{4(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_1<\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \\ \alpha & \text{si} \quad \theta_1>\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_2^{A2}(\theta_2) &= \begin{cases} \int_0^1(1-\alpha)\,b_1^*(\theta_1)d\theta_1+\alpha+\beta & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))<0 \\ (1-\alpha)\int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1+\alpha+\beta & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))>0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1-\alpha)\left(\int_0^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}\frac{1+(1-\alpha)\theta_1}{2(1-\alpha)}d\theta_1+\int_{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}^1 d\theta_1\right)+\alpha+\beta & \text{si} \quad \theta_2<\frac{1}{2(1-\alpha)} \\ (1-\alpha)\left(\int_{\frac{2(1-\alpha)\theta_2-1}{1-\alpha}}^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}\frac{1+(1-\alpha)\theta_1}{2(1-\alpha)}d\theta_1+\int_{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}^1 d\theta_1\right)+\alpha+\beta & \text{si} \quad \theta_2>\frac{1}{2(1-\alpha)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1+\alpha+\beta-\frac{1}{4(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2<\frac{1}{2(1-\alpha)} \\ 1+\alpha+\beta-(1-\alpha)\,\theta_2^2 & \text{si} \quad \theta_2>\frac{1}{2(1-\alpha)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{A2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{A2}(\theta_i)] \\
&= \alpha+\beta+\frac{3-4\alpha}{4\,(1-\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la empresa 1 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 2 sigue pujando su propio tipo, ya que ésta era estrategia dominante. Luego en ese caso

$$P_1^{A2}(\theta_1) = \alpha$$

$$P_2^{A2}(\theta_2) = 1+\beta$$

$$P_{omer}^{A2} = 1+\alpha+\beta$$

Modelo de subasta B1

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_1^{B1}(\theta_1) = \begin{cases} (1-\alpha)\int_0^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \\ \\ (1-\alpha)\int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-\alpha)\int_0^1 \frac{1+\theta_2}{2}d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1}{2} \\ \\ (1-\alpha)\int_{2\theta_1-1}^1 \frac{1+\theta_2}{2}d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha+3}{4} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1}{2} \\ 1-(1-\alpha)\theta_1^2 & \text{si} \quad \theta_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{B1}(\theta_2) &= (1-\alpha)\, b_2^*(\theta_2)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + \alpha + \beta \\ &= \frac{1-\alpha}{4}\left(1-\theta_2^2\right) + \alpha + \beta \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{B1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{B1}(\theta_i)] \\ &= \frac{5\alpha+4\beta+3}{4} \end{aligned}$$

Modelo de subasta B2

Si $\alpha < \frac{1}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_1^{B2}(\theta_1) = \begin{cases} \int_0^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \\ \\ \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha b_1^*(\theta_1)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{6-7\alpha}{4(2-3\alpha)} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} \\ \\ \frac{-4\theta_1^2\left((1-\alpha)^2(2-3\alpha)^2\right)+4\alpha^4-58\alpha^3+109\alpha^2-72\alpha+16}{4(1-2\alpha)(2-3\alpha)^2} & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{1-\alpha}{2-3\alpha} \end{cases}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{B2}(\theta_2) &= (1-\alpha)\, b_2^*(\theta_2)\left(1 - (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + (\alpha+\beta)\frac{2-2\alpha}{2-3\alpha} \\ &= \frac{-\theta_2^2(1-2\alpha)(2-3\alpha)^2 + 4\left(4\alpha^3 + \alpha^2(6\beta-5) - 10\alpha\beta + 4\beta + 1\right)}{4(2-3\alpha)^2} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{B2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{B2}(\theta_i)] \\ &= \frac{119\alpha^4 + 3\alpha^3(36\beta-59) - 4\alpha^2(63\beta+1)}{6(3\alpha-2)^3} + \\ &\quad \frac{4\alpha(48\beta+25) - 12(4\beta+3)}{6(3\alpha-2)^3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta DV1

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{DV1}(\theta_1) &= (1-\alpha)\, b_1^*(\theta_1)\left(1 - (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) + \alpha \\ &= (1-\alpha)\frac{1-\theta_1^2}{2} + \alpha \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{DV1}(\theta_2) &= (1-\alpha)\, b_2^*(\theta_2) \left(1 - (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + \alpha + \beta \\ &= (1-\alpha)\, \frac{1-\theta_2^2}{2} + \alpha + \beta \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{DV1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{DV1}(\theta_i)] \\ &= \frac{4}{3}\alpha + \beta + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta DV2

Si $\alpha < \frac{3}{4}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{DV2}(\theta_1) &= \begin{cases} b_1^*(\theta_1)\left(1 + (\alpha - 1)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) & si \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \leq 1 \\ \alpha b_1^*(\theta_1) & si \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\alpha-3)^2 - 9\theta_1^2(1-\alpha)^2}{18(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 \leq \frac{3-4\alpha}{3(1-\alpha)} \\ \alpha \frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_1 > \frac{3-4\alpha}{3(1-\alpha)} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{DV2}(\theta_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)b_2^*(\theta_2) + (\alpha+\beta)\,\frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) < 0 \\ (1-\alpha)\, b_2^*(\theta_2)\left(1 - (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + (\alpha+\beta)\,\frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3-\alpha}{6} + (\alpha+\beta)\,\frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 < \frac{\alpha}{3(1-\alpha)} \\ \frac{(2\alpha-3)^2 - 9\theta_2^2(1-\alpha)^2}{18(1-\alpha)} + (\alpha+\beta)\,\frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)} & si \quad \theta_2 \geq \frac{\alpha}{3(1-\alpha)} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{DV2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{DV2}(\theta_i)] \\ &= \frac{131\alpha^3 + 27\alpha^2(5\beta - 9) - 297\alpha\beta + 54(3\beta+2)}{162(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{3}{4}$, la empresa 1 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 2 puja, en ese caso, $\frac{3-\alpha}{6(1-\alpha)}$. Luego en ese caso

$$P_1^{DV2}(\theta_1) = \alpha \frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)}$$

$$P_2^{DV2}(\theta_2) = \frac{3-\alpha}{6} + (\alpha+\beta)\, \frac{6-5\alpha}{6(1-\alpha)}$$

$$P_{omer}^{DV2} = \frac{9\alpha^2+\alpha(5\beta-8)-3(2\beta+1)}{6(\alpha-1)}$$

Modelo de subasta C1

Si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$ el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{C1}(\theta_1) &= (1-\alpha)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right)}^{1} b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha \\ & \frac{(2\alpha+\beta-1)\,\theta_1^2 + 2\alpha+\beta+1}{2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_2^{C1}(\theta_2) = \begin{cases} (1+\beta)\int_{\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right)}^{1} b_1^*(\theta_1)d\theta_1 + (\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) & \text{si} \quad \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) < 1 \\ \alpha+\beta & \text{si} \quad \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1+\beta)\int_{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha-\beta}\theta_2}^{1} \theta_1 d\theta_1 + (\alpha+\beta)\left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha-\beta}\theta_2\right)^2 & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \\ \alpha+\beta & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_2^2(1-\alpha)^2+(1+\beta)(2\alpha+\beta-1)}{2(2\alpha+\beta-1)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \\ \alpha+\beta & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \end{cases}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{C1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{C1}(\theta_i)] \\ &= \frac{\beta^2 + 3\beta + 2 - 3\alpha^2 + \alpha\,(2-\beta)}{3\,(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{1-\beta}{2}$, la empresa 2 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 1 sigue pujando su propio tipo, ya que ésta era estrategia dominante. Luego en ese caso

$$P_1^{C1}(\theta_1) = 1$$

$$P_2^{C1}(\theta_2) = \alpha + \beta$$

$$P_{omer}^{C1} = 1 + \alpha + \beta$$

Modelo de subasta Uniforme

Si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{Uniforme}(\theta_1) &= \int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha b_1^*(\theta_1)\left(b_2^*\right)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \\ &= \frac{(1-\alpha)\left(1-2\alpha+\beta-\theta_1^2\left(4\alpha^2+2\alpha\,(\beta-2)-\beta+1\right)\right)}{2\,(1-2\alpha)^2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_2^{Uniforme}(\theta_2) = \begin{cases} (1+\beta)\int_{\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} b_1^*(\theta_1)d\theta_1 \\ \quad + (\alpha+\beta)\,b_2^*(\theta_2)\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) & \text{si} \quad \left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) < 1 \\ (\alpha+\beta)\,b_2^*(\theta_2) & \text{si} \quad \left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1-\alpha)\left(\theta_2^2\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)+(1+\beta)(2\alpha+\beta-1)\right)}{2(1-2\alpha)(2\alpha+\beta-1)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1-2\alpha-\beta}{1-2\alpha} \\ \frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha)}{1-2\alpha} & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-2\alpha} \end{cases}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{Uniforme} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Uniforme}(\theta_i)] \\
&= \frac{(\alpha-1)(4\alpha^2+\alpha(3\beta+2)-\beta^2-3\beta-2)}{3(2\alpha-1)^2}
\end{aligned}
$$

Modelo de subasta E1

Si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{E1}(\theta_1) &= \alpha b_{\max} + (1-\alpha)\, b_1^*(\theta_1)\, (b_2^*)^{-1}\, (b_1^*(\theta_1)) \\
&= \frac{\theta_1^2 \left(18\alpha^3 + 3\alpha^2\,(7\beta-11) + 2\alpha\,(\beta-2)\,(4\beta-5) + (\beta-1)\,(\beta-2)^2\right)}{4\,(2-3\alpha-\beta)} \\
&\quad + \frac{4\left(4\alpha^3 + \alpha^2\,(\beta-5) - \beta + 1\right)}{4\,(2-3\alpha-\beta)}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
P_2^{E1}(\theta_2) = \begin{cases} (1+\beta)\int_0^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}\,(b_2^*(\theta_2)) < 0 \\[2ex] (1+\beta)\int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 + (\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}\,(b_2^*(\theta_2)) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}\,(b_2^*(\theta_2)) \geq 0 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \frac{(1+\beta)(6-7\alpha-\beta)}{4(2-3\alpha-\beta)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta} \\[2ex] \frac{4\theta_2^2\left(9\alpha^4+6\alpha^3(\beta-5)+\alpha^2\left(\beta^2-16\beta+37\right)+2\alpha(2-\beta)(\beta-5)+(\beta-2)^2\right)}{4(2\alpha+\beta-1)(2-3\alpha-\beta)^2} + & \\ \frac{-4\alpha^4+2\alpha^3(21\beta+29)+\alpha^2\left(41\beta^2-44\beta-109\right)+2\alpha\left(6\beta^3-23\beta^2-\beta+36\right)+\beta^4-8\beta^3+11\beta^2+8\beta-16}{4(2\alpha+\beta-1)(2-3\alpha-\beta)^2} & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{1-\alpha}{2-3\alpha-\beta} \end{cases}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{E1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{E1}(\theta_i)] \\ &= \frac{119\alpha^4 + \alpha^3(191\beta - 177) + \alpha^2\left(107\beta^2 - 287\beta - 4\right)}{6(2-3\alpha-\beta)^3} + \\ &\quad \frac{\alpha\left(25\beta^3 - 127\beta^2 + 100\beta + 100\right) + 2\beta^4 - 17\beta^3 + 32\beta^2 + 4\beta - 36}{6(2-3\alpha-\beta)^3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta E2

Si $\alpha < \frac{\beta(1-\beta)}{1+3\beta}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{E2}(\theta_1) &= b_1^*(\theta_1)\left(1 - (1-\alpha)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) \\ &= \frac{(1-2\alpha-\beta)\left(4 - (2-3\alpha-\beta)^2\theta_1^2\right)}{4(2-3\alpha-\beta)^2} \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_2^{E2}(\theta_2) = \begin{cases} (1+\beta)\int_0^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 & si \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) < 0 \\ (1+\beta)\int_{(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 \\ +(\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) & si \quad 0 \leq (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \leq 1 \\ (\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2) & si \quad (b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(1+\beta)(6-3\alpha-\beta)}{4(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_2 < \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \\ \frac{4\theta_2^2\left((1-\alpha)^2(2-3\alpha-\beta)^2\right)+18\alpha^3(1+\beta)}{4(2\alpha+\beta-1)(2-3\alpha-\beta)^2} + \\ \frac{\alpha^2\left(21\beta^2-36\beta-61\right)+2\alpha\left(4\beta^3-19\beta^2+\beta+28\right)}{4(2\alpha+\beta-1)(2-3\alpha-\beta)^2} + & si \quad \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \leq \theta_2 \leq \frac{1-2\alpha-\beta}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2-3\alpha} \\ \frac{\beta^4-8\beta^3+11\beta^2+8\beta-16}{4(2\alpha+\beta-1)(2-3\alpha-\beta)^2} \\ (\alpha+\beta)\frac{4-3\alpha-\beta}{2(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_2 > \frac{1-2\alpha-\beta}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2-3\alpha} \end{cases}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{E2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{E2}(\theta_i)] \\ &= \frac{12\alpha^3 - \alpha^2(23-13\beta) - \alpha(32\beta+8) - \beta^3 - 3\beta^2 + 16\beta + 18}{12(1-\alpha)(2-3\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

Si $\frac{\beta(1-\beta)}{1+3\beta} \leq \alpha < \frac{1-\beta}{3}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{E2}(\theta_1) &= \begin{cases} b_1^*(\theta_1)\left(1-(1-\alpha)\left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right)\right) & si \quad \left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right) \leq 1 \\ \\ \alpha b_1^*(\theta_1) & si \quad \left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right) > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(1-2\alpha-\beta)\left(4-(2-3\alpha-\beta)^2\theta_1^2\right)}{4(2-3\alpha-\beta)^2} & si \quad \theta_1 \leq \frac{2(1-3\alpha-\beta)(1-\alpha)}{(2-3\alpha-\beta)(1-2\alpha-\beta)} \\ \\ \frac{\alpha\left(3\alpha^2+\alpha(\beta-6)+2(1-\beta)\right)}{(1-2\alpha-\beta)(2-3\alpha-\beta)} & si \quad \theta_1 > \frac{2(1-3\alpha-\beta)(1-\alpha)}{(2-3\alpha-\beta)(1-2\alpha-\beta)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_2^{E2}(\theta_2) &= \begin{cases} (1+\beta)\int_0^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 & si \quad \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) < 0 \\ (1+\beta)\int_{\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right)}^1 b_1^*(\theta_1)d\theta_1 & \\ +(\alpha+\beta)\,b_2^*(\theta_2)\left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) & si \quad 0 \leq \left(b_1^*\right)^{-1}\left(b_2^*(\theta_2)\right) \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(\beta+1)(9\alpha^4+3\alpha^3(5\beta-11)+\alpha^2(7\beta^2-44\beta+38)}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} \\ +\frac{+\alpha(\beta-1)(\beta^2-16\beta+18)-(\beta-1)^2(2\beta-3)}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} & si \quad \theta_2 < \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \\ \\ \frac{\theta^2(18\alpha^5+3\alpha^4(7\beta-23)+4\alpha^3(2\beta^2-17\beta+26)+\alpha^2(\beta^3-21\beta^2+81\beta-77))}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} \\ +\frac{\theta^2\left(2\alpha(2-\beta)(\beta^2-7\beta+7)+(\beta-2)(\beta^2-3\beta+2)\right)}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} \\ +\frac{9\alpha^4(\beta+1)+\alpha^3(15\beta^2-18\beta-35)+\alpha^2(7\beta^3-37\beta^2-7\beta+43)}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} & si \quad \frac{1}{2-3\alpha-\beta} \leq \theta_2 \\ +\frac{\alpha(\beta^4-16\beta^3+17\beta^2+18\beta-22)-2\beta^4+5\beta^3-\beta^2-6\beta+4)}{(2\alpha+\beta-1)^2(3\alpha+\beta-2)^2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned}
P_{omer}^{E2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{E2}(\theta_i)] \\
&= \frac{108\alpha^6 + 27\alpha^5(11\beta - 13) + 9\alpha^4(34\beta^2 - 103\beta + 31)}{3(2\alpha + \beta - 1)^2(3\alpha + \beta - 2)^3} \\
&\quad + \frac{\alpha^3(148\beta^3 - 897\beta^2 + 795\beta + 104)}{3(2\alpha + \beta - 1)^2(3\alpha + \beta - 2)^3} \\
&\quad + \frac{\alpha^2(34\beta^4 - 395\beta^3 + 705\beta^2 - 106\beta - 244)}{3(2\alpha + \beta - 1)^2(3\alpha + \beta - 2)^3} \\
&\quad + \frac{\alpha(\beta - 1)(3\beta^4 - 77\beta^3 + 164\beta^2 + 8\beta - 116)}{3(2\alpha + \beta - 1)^2(3\alpha + \beta - 2)^3} \\
&\quad - \frac{2(\beta - 1)^2(3\beta^3 - 8\beta^2 - \beta + 9)}{3(2\alpha + \beta - 1)^2(3\alpha + \beta - 2)^3}
\end{aligned}$$

Modelo de subasta UNI1

Si $\alpha < \frac{1-\beta}{2}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_1^{UNI1}(\theta_1) = \begin{cases} (1-\alpha)\int_0^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad \left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right) < 0 \\ (1-\alpha)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right)}^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha & \text{si} \quad \left(b_2^*\right)^{-1}\left(b_1^*(\theta_1)\right) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1-\alpha)\left(\int_0^{\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}} \frac{1+\beta+(1-\alpha)\theta_2}{2(1-\alpha)}d\theta_2 + \int_{\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}}^1 d\theta_2\right) + \alpha & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1+\beta}{2(1-\alpha)} \\ (1-\alpha)\left(\int_{\frac{2(1-\alpha)\theta_1-(1+\beta)}{1-\alpha}}^{\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}} \frac{1+\beta+(1-\alpha)\theta_2}{2(1-\alpha)}d\theta_2 + \int_{\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha}}^1 d\theta_2\right) + \alpha & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{1+\beta}{2(1-\alpha)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{(1+\beta)^2}{4(1-\alpha)} + \alpha + \beta & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{1+\beta}{2(1-\alpha)} \\ 1 - (1-\alpha)\theta_1^2 + \alpha + \beta & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{1+\beta}{2(1-\alpha)} \end{cases}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{UNI1}(\theta_2) &= (1+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right)+(\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\ &= \begin{cases} \frac{(1+\beta)^2-\theta_2^2(1-\alpha)^2}{4(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \\ \alpha+\beta & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{UNI1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{UNI1}(\theta_i)] \\ &= \alpha + \frac{(1+\beta)^2(3-4\alpha-\beta)}{4(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{1-\beta}{2}$, la empresa 2 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 1 sigue pujando su propio tipo, ya que ésta era estrategia dominante. Luego en ese caso

$$P_1^{UNI1}(\theta_1) = 1$$

$$P_2^{UNI1}(\theta_2) = \alpha + \beta$$

$$P_{omer}^{UNI1} = 1 + \alpha + \beta$$

Modelo de subasta UNI2

Si $\alpha < \frac{1-\beta}{3}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_1^{UNI2}(\theta_1) = \begin{cases} \int_0^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) < 0 \\ \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^1 b_2^*(\theta_2)d\theta_2 + \alpha b_1^*(\theta_1)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{9\alpha^4-3\alpha^3(4\beta+11)-\alpha^2(\beta^2-21\beta-38)}{(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^2} \\ +\frac{2\alpha(\beta^2-6\beta-9)-\beta^2+2\beta+3}{(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^2} & si \quad \theta_1 < \frac{1+\beta}{2-3\alpha} \\ \\ \frac{\theta^2(18\alpha\hat{}5-69\alpha^4+104\alpha^3-77\alpha^2+28\alpha-4)}{(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^2} \\ +\frac{9\alpha^4-\alpha^3(2\beta^2+16\beta+35)+\alpha^2(4\beta^2+31\beta+43)}{(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^2} & si \quad \theta_1 \geq \frac{1+\beta}{2-3\alpha} \\ +\frac{-2\alpha(\beta^2+10\beta+11)+4(\beta+1)}{(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^2} \end{cases}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_2^{UNI2}(\theta_2) = (1+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\Big(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\Big) + (\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))$$

$$= \begin{cases} \frac{(1-2\alpha)\left(4(1+\beta)^2-\theta_2^2(2-3\alpha)^2\right)}{4(2-3\alpha)^2} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha)(1-\alpha)} \\ (\alpha+\beta)\frac{3\alpha^2-\alpha(6+\beta)+2}{(1-2\alpha)(2-3\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{2(1-\alpha)(1-3\alpha-\beta)}{(2-3\alpha)(1-\alpha)} \end{cases}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{UNI2} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{UNI2}(\theta_i)] \\ &= \frac{108\alpha^6-351\alpha^5-9\alpha^4(12\beta^2+30\beta-31)}{3(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^3} \\ &\quad -\frac{\alpha^3(8\beta^3-255\beta^2-633\beta-104)}{3(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^3} \\ &\quad +\frac{2\alpha^2(11\beta^3-108\beta^2-279\beta-122)}{3(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^3} \\ &\quad +\frac{-4\alpha(5\beta^3-18\beta^2-54\beta-29)+6(\beta^3-\beta^2-5\beta-3)}{3(2\alpha-1)^2(3\alpha-2)^3} \end{aligned}$$

Modelo de subasta DIS1

Si $\alpha < \frac{3-\beta}{4}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_1^{DIS1}(\theta_1) &= \alpha\frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)} + (1-\alpha)\, b_1^*(\theta_1)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4\alpha^2+\alpha(\beta-2)-2\beta-3}{6(\alpha-1)} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{9\theta_1^2(1-\alpha)^2+11\alpha^2+\alpha(\beta-6)-(\beta+3)^2}{18(\alpha-1)} & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{\alpha+\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_2^{DIS1}(\theta_2) &= (1+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right) + (\alpha+\beta)\, b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\
&= \begin{cases} \frac{(\alpha-2\beta-3)^2-9\theta_2^2(1-\alpha)^2}{18(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{3-4\alpha-\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{(\alpha+\beta)(5\alpha-\beta-6)}{6(\alpha-1)} & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{3-4\alpha-\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$
\begin{aligned}
P_{omer}^{DIS1} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{DIS1}(\theta_i)] \\
&= \frac{131\alpha^3+3\alpha^2(5\beta-81)-3\alpha\beta(22\beta+63)-2(2\beta^3-27\beta^2-81\beta-54)}{162(\alpha-1)^2}
\end{aligned}
$$

Si $\alpha \geq \frac{3-\beta}{4}$, la empresa 2 espera mayores ingresos si oferta lo máximo permitido. La empresa 1 puja $\frac{3+2\beta-\alpha}{6(1-\alpha)}$. Luego en ese caso

$$P_1^{DIS1}(\theta_1) = \frac{2\beta+3-\alpha(\beta-2)-4\alpha^2}{6(1-\alpha)}$$

$$P_2^{DIS1}(\theta_2) = (\alpha+\beta)\,\frac{6-5\alpha+\beta}{6(1-\alpha)}$$

$$P_{omer}^{DIS1} = \frac{9\alpha^2+\alpha(5\beta-8)-\beta^2-8\beta-3}{6(\alpha-1)}$$

Modelo de subasta Discriminatorio

Si $\alpha < \frac{3-\beta}{3}$, el ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_1^{Discrim}(\theta_1) = \begin{cases} b_1^*(\theta_1) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) \leq 0 \\ b_1^*(\theta_1)\left(1-(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))\right) & \\ +\alpha b_1^*(\theta_1)(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) & \text{si} \quad (b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1)) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3+2\beta}{6(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_1 < \frac{\beta}{3(1-\alpha)} \\ \frac{(3+\beta)^2-9\theta_1^2(1-\alpha)^2}{18(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_1 \geq \frac{\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$P_2^{Discrim}(\theta_2) = \begin{cases} (1+\beta)\,b_2^*(\theta_2)\left(1-(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2))\right)+ & \\ +(\alpha+\beta)\,b_2^*(\theta_2)\,(b_1^*)^{-1}(b_2^*(\theta_2)) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}\,b_2^*(\theta_2) \leq 0 \\ (\alpha+\beta)\,b_2^*(\theta_2) & \text{si} \quad (b_1^*)^{-1}\,b_2^*(\theta_2) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(3+2\beta)^2-9\theta_2^2(1-\alpha)^2}{18(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 < \frac{3(1-\alpha)-\beta}{3(1-\alpha)} \\ (\alpha+\beta)\,\frac{\beta-3\alpha+6}{6(1-\alpha)} & \text{si} \quad \theta_2 \geq \frac{3(1-\alpha)-\beta}{3(1-\alpha)} \end{cases}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{Discrim} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{Discrim}(\theta_i)] \\ &= \frac{27\alpha^3 - 81\alpha^2 - 27\alpha\beta(\beta+3) - 2\beta^3 + 27\left(\beta^2+3\beta+2\right)}{81(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

Si $\alpha \geq \frac{3-\beta}{3}$, la empresa 2 espera mayores ingresos si puja $\frac{\beta-3\alpha+6}{6(1-\alpha)}$. La empresa 1 espera mayores ingresos si puja $\frac{3+2\beta}{6(1-\alpha)}$. Luego en ese caso

$$P_1^{Discrim}(\theta_1) = \alpha\frac{3+2\beta}{6(1-\alpha)}$$

$$P_2^{Discrim}(\theta_2) = (1+\beta)\,\frac{\beta-3\alpha+6}{6(1-\alpha)}$$

$$P_{omer}^{Discrim} = \frac{\alpha\beta-(\beta+1)(\beta+6)}{6(\alpha-1)}$$

4.4.2 Comparación de los modelos en el Caso 3.

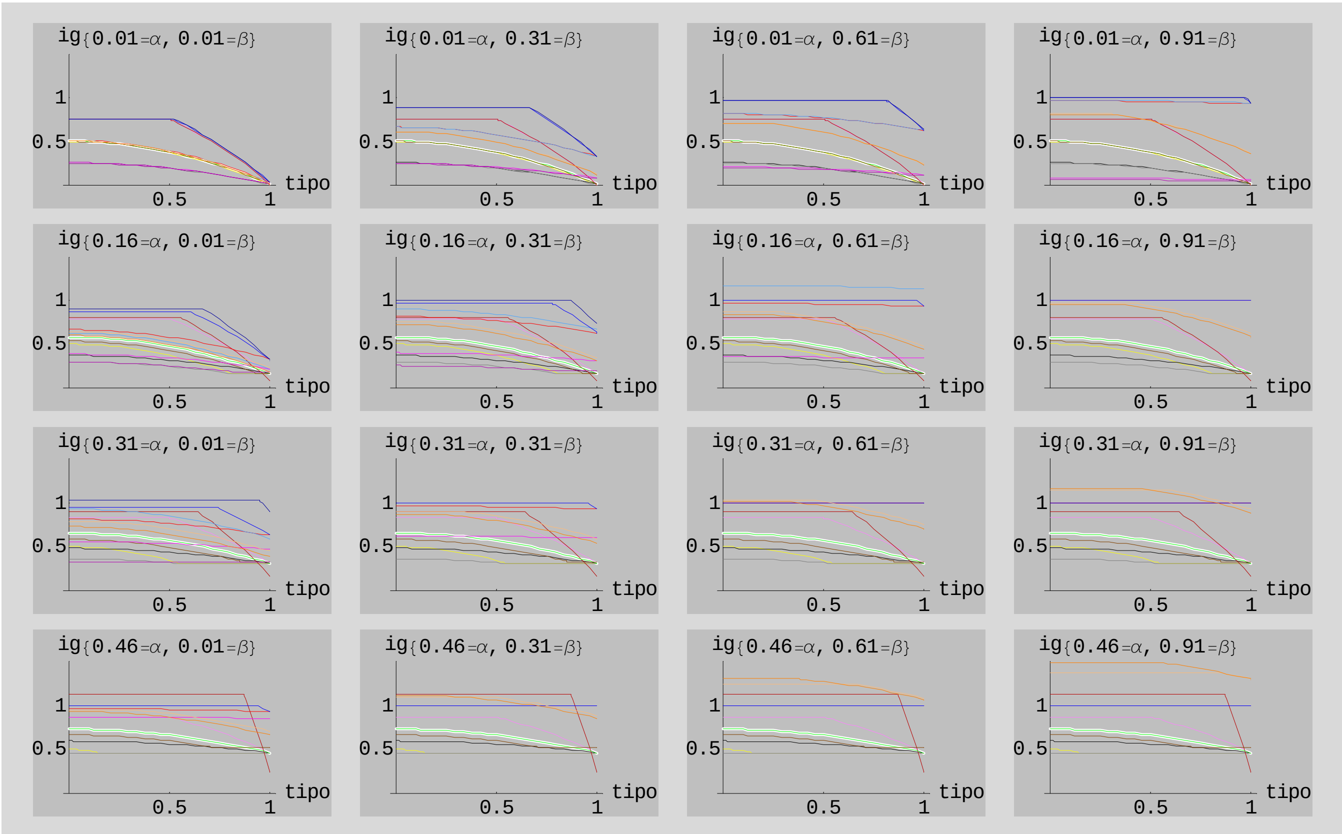
Como en el presente modelo, definido al principio de este capítulo, en general las dos empresas no esperan ingresar lo mismo bajo los distintos modelos de subasta, el siguiente paso natural es estudiar bajo qué modelo, cada empresa espera ingresar más y el subastador espera pagar menos por la demanda eléctrica.

Este estudio comparativo constará de dos partes. Se analizará qué modelo da mayores ingresos esperados a las empresas, y qué modelo hace que el subastador espere pagar menos. Es decir, el estudio comparativo desde el punto de vista de las empresas y el estudio comparativo desde el punto de vista del subastador, en el Caso 3.

Todas las gráficas de esta sección se han importado del *software Mathematica 5.0.* Las sentencias necesarias se incluyen en el Apéndice B.

Comparación desde el punto de vista de las empresas

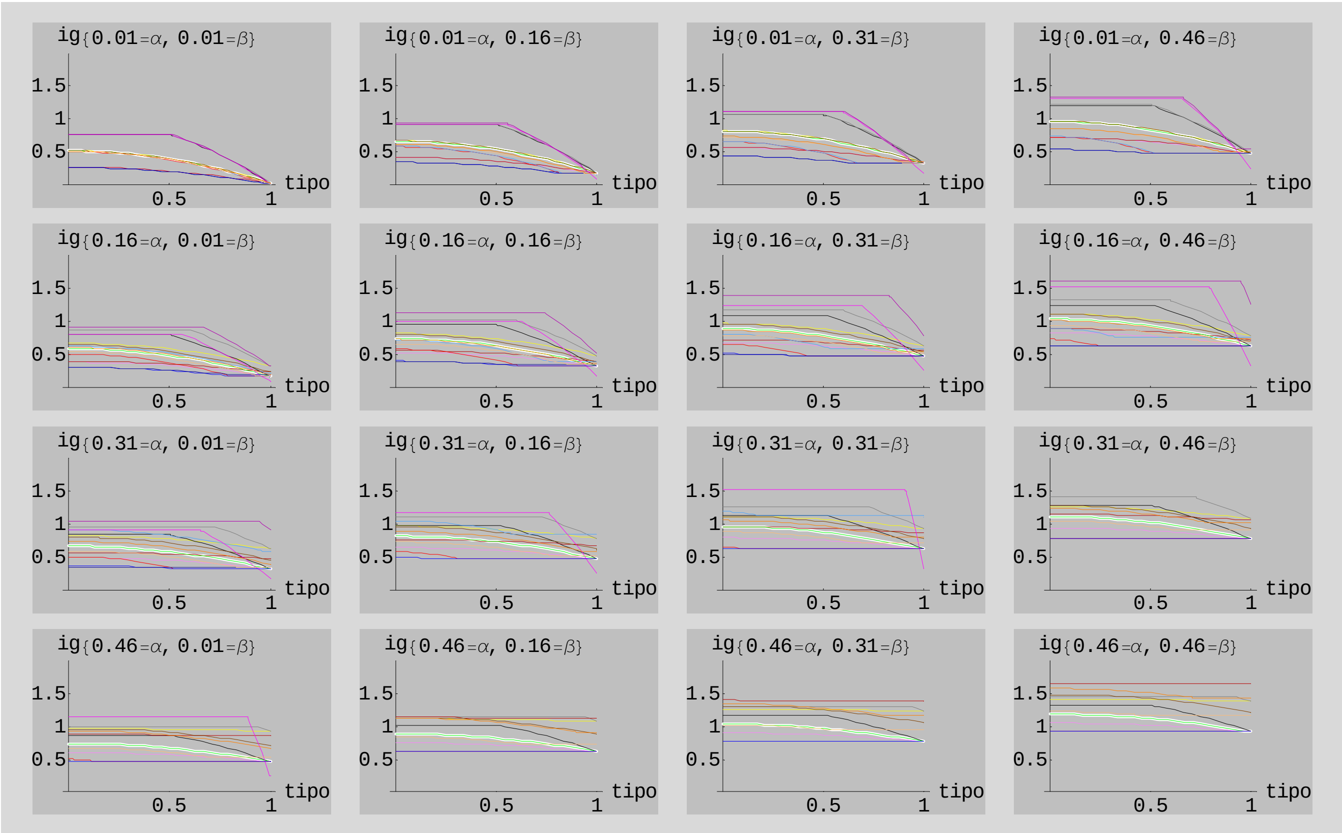
Si representamos a la vez el ingreso esperado por la empresa 1 en cada uno de los distintos modelos considerados, obtenemos



Blanco->Vickrey	Amarillo->V2	Negro->A1	Gris->A2
Rosa->B1	Burdeos->B2	Verde->DV1	Marrón->DV2
Rojo->C1	Celeste->Uniforme	Malva->E1	Lila->E2
Azul->Uni1	Azul marino->Uni2	Salmón->Dis1	Naranja->Discriminatorio

Luego la empresa 1 espera mayores ingresos bajo el modelo Uni2 siempre que $\alpha < \frac{1-\beta}{3}$. En caso contrario, el modelo bajo el que espera mayores ingresos depende de los valores de α, β y el tipo. No existe en ese caso un modelo claramente mejor que los restantes.

Si representamos a la vez el ingreso esperado por la empresa 2 en cada uno de los distintos modelos considerados modelos de subasta, obtenemos

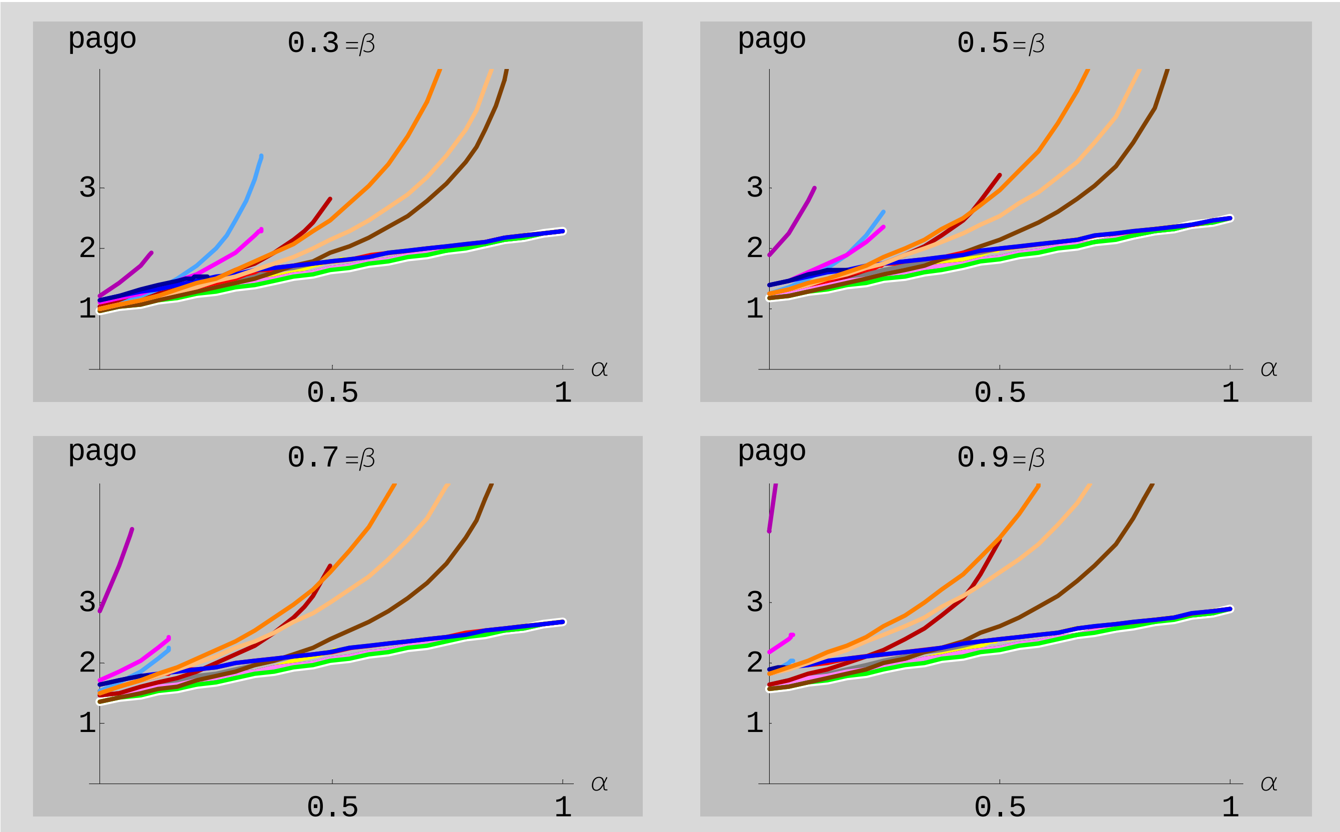


Blanco->Vickrey	Amarillo->V2	Negro->A1	Gris->A2
Rosa->B1	Burdeos->B2	Verde->DV1	Marrón->DV2
Rojo->C1	Celeste->Uniforme	Malva->E1	Lila->E2
Azul->Uni1	Azul marino->Uni2	Salmón->Dis1	Naranja->Discriminatorio

Luego la empresa 2 espera mayores ingresos bajo el modelo E2 si $\alpha < \frac{1-\beta}{3}$. En caso contrario, el modelo bajo el que espera mayores ingresos depende de los valores de α, β y el tipo. No existe en ese caso un modelo claramente mejor que los restantes.

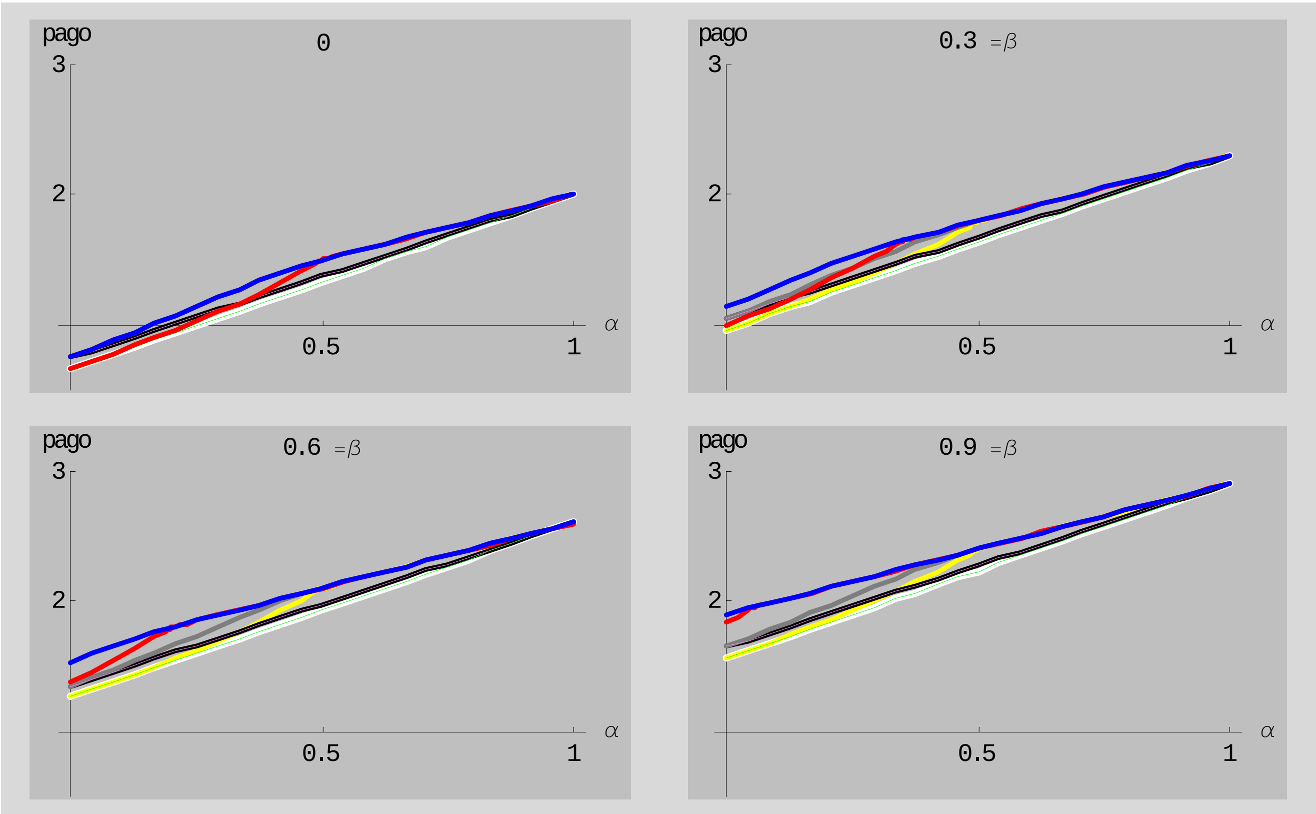
Comparación desde el punto de vista del subastador.

Si representamos a la vez el pago que el subastador espera hacer a las empresas bajo los modelos de subasta considerados, nos queda:



Blanco->Vickrey	Amarillo->V2	Negro->A1	Gris->A2
Rosa->B1	Burdeos->B2	Verde->DV1	Marrón->DV2
Rojo->C1	Celeste->Uniforme	Malva->E1	Lila->E2
Azul->Uni1	Azul marino->Uni2	Salmón->Dis1	Naranja->Discriminatorio

Ya se observó que, de todos los modelos analizados en el Caso 3, para algunos de ellos no se ha podido resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que debe verificar las funciones inversas de las estrategias en equilibrio. Dicho sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias era no lineal y, además, la falta de condiciones iniciales hace imposible la aplicación de un método numérico. Se consiguió calcular de manera exacta equilibrios lineales pero no para todos los posibles valores de α. Esos modelos de subasta son: Modelo E2, Modelo E1, Modelo Uniforme, Modelo Uni2, Modelo DV2, Modelo Discriminatorio, Modelo Dis1 y Modelo B2. Se observa en el dibujo anterior que, además, bajo dichos modelos el pago que el Operador del Mercado espera realizar crece asintóticamente cuando α crece. Incluso para valores pequeños de α, existen modelos de subasta más ventajosos para el Operador del Mercado. El Operador del mercado descartará dichos modelos de subasta ya que no conoce el comportamiento estratégico de las empresas para valores grandes de α, y por esperar pagos mayores que con otros modelos de subasta. Si representamos el resto de modelos de subasta se obtiene



Blanco->Vickrey Amarillo->V2 Negro->A1 Gris->A2

Rosa->B1 Verde->DV1 Rojo->C1 Azul->Uni1

En la gráfica los dos modelos más ventajosos para el Operador del Mercado son el modelo de Vickrey y el modelo DV1. Calculemos la diferencia entre el pago que espera realizar el Operador del Mercado con cualquiera de los modelos restantes, y el pago que espera realizar bajo el modelo de Vickrey.

$$P^{DV1}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = 0$$

$$P^{A1}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \frac{1-\alpha}{12}$$

$$P^{V2}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{3-3\alpha} & si \quad \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1-\alpha}{3} & si \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P^{C1}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \begin{cases} \frac{(\alpha+\beta)^2}{3(1-\alpha)} & si \quad \alpha < \frac{1-\beta}{2} \\ \frac{1-\alpha}{3} & si \quad \alpha \geq \frac{1-\beta}{2} \end{cases}$$

$$P^{A2}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \begin{cases} \frac{1-4\alpha^3}{12(1-\alpha)^2} & si \quad \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{1-\alpha}{3} & si \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

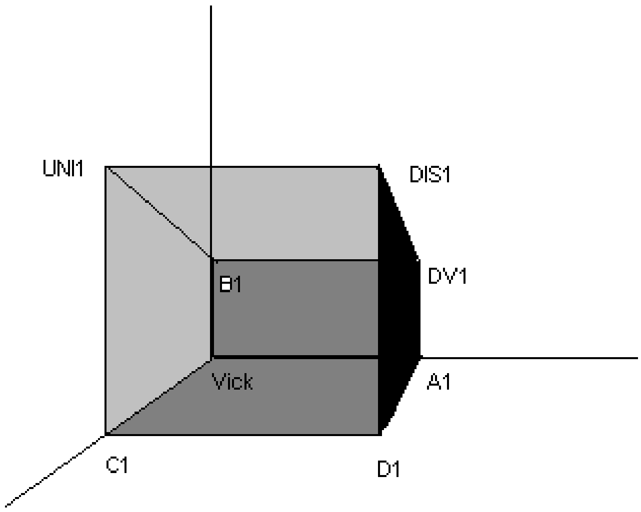
$$P^{B1}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \frac{1-\alpha}{12}$$

$$P^{Uni1}_{omer} - P^{Vickrey}_{omer} = \begin{cases} \frac{1+3\beta+3\beta^2-3\beta^3-12\beta^2\alpha-12\beta\alpha^2-4\alpha^3}{12(1-\alpha)^2} & si \quad \alpha < \frac{1-\beta}{2} \\ \frac{1-\alpha}{3} & si \quad \alpha \geq \frac{1-\beta}{2} \end{cases}$$

Efectivamente, bajo los modelos DV1 y de Vickrey, el Operador del Mercado espera realizar el mismo pago. Además este pago es menor que bajo cualquiera de los modelos restantes.

Luego el Operador del Mercado espera pagar menos a las empresas por la demanda eléctrica indistintamente (ya que son equivalentes) bajo los modelos de Vickrey y DV1. Como además el modelo de Vickrey pertenece a la **Región II**, por la monotonía de las funciones de ingresos esperados por las empresas, se puede afirmar que no existe un modelo más ventajoso perteneciente a la **Región II.**

La región a la que pertenecen los parámetros de la familia de modelos, en el Caso 3, es $RC3 = \{(\gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0, 1-\alpha+\gamma_2^1] \times [0, \alpha] \times [0, 1-\alpha+\gamma_2^2] \times [0, \alpha+\beta]\}$. Desde el punto de vista del Operador del mercado, los dos modelos equivalentes más ventajosos son los modelos de Vickrey y DV1. Es lógico preguntarse cual es el pago que espera realizar el Operador con alguno de los modelos pertenecientes a la diagonal que une a los modelo de Vickrey y DV1. Dichos modelos verifican, en particular, que $\gamma_2^1 = 0$. El siguiente dibujo representa la subregión de $RC3$ dada por $\gamma_2^1 = 0$.



Al igual que se hizo en el Caso 2, se analizarán los modelos de subasta pertenecientes a la diagonal que une los modelos DV y de Vickrey.

Modelos entre los modelos DV1 y de Vickrey Los modelos pertenecientes a la diagonal que une los modelos DV1 y de Vickrey vienen determinados por las siguientes funciones de beneficio de las dos empresas:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_1, b_2) &= \begin{cases} \varepsilon b_1 + (1-\alpha-\varepsilon)\, b_2 + \alpha b_{\max} - \theta_1 & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_1) & \text{si} \quad b_1 > b_2 \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_1, b_2) &= \begin{cases} \varepsilon b_2 + (1-\alpha-\varepsilon)\, b_1 + (\alpha+\beta)\, b_{\max} - (1+\beta)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ (\alpha+\beta)\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases} \\
&= \beta\,(b_{\max} - \theta_2) + \begin{cases} \varepsilon b_2 + (1-\alpha-\varepsilon)\, b_1 + \alpha b_{\max} - \theta_2 & \text{si} \quad b_2 < b_1 \\ \alpha\,(b_{\max} - \theta_2) & \text{si} \quad b_2 > b_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon \in [0, 1-\alpha]$. Obsérvese que, en realidad, compiten por la misma cantidad de despacho, al mismo precio y al mismo coste, ya que la empresa 2, independientemente de las ofertas que finalmente se realicen, tiene asegurado el despacho de β unidades eléctricas pagadas a precio máximo. En equilibrio, las dos empresas pujarán de manera idéntica y, por tanto, todo equilibrio bayesiano de Nash puede suponerse simétrico.

Proposición 4.4.33 *Supongamos que $1+\beta < D = 1+\beta+\alpha < 2+\beta$. Bajo las hipótesis del Modelo Asimétrico Lineal Uniforme y bajo cualquiera de los modelos perteneciente a la diagonal* *que une los modelos DV1 y de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$[b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)] = \left[\frac{\varepsilon + (1-\alpha)\,\theta_1}{1-\alpha+\varepsilon}, \frac{\varepsilon + (1-\alpha)\,\theta_2}{1-\alpha+\varepsilon}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 4.1.3.a) y 4.1.3.b), se observa que los modelos mencionados, son casos particulares en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^1 = \varepsilon$, $\gamma_2^1 = 0$, $\gamma_1^2 = \varepsilon$ y $\gamma_2^2 = 0$. Luego, aplicando la proposición 4.2.1. **Región I**, se puede afirmar que las funciones inversas de las estrategias en equilibrio de ambas empresas verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \varepsilon - \varepsilon\,(b_2^*)^{-1}(t) - (1-\alpha)\left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right)\left((b_2^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \\ \varepsilon - \varepsilon\,(b_1^*)^{-1}(t) - (1-\alpha)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\left((b_1^*)^{-1}\right)'(t) = 0 \end{cases}$$

Como las ecuaciones diferenciales coinciden, si denotamos por $b^*(\theta) = b_1^*(\theta) = b_2^*(\theta)$ se tiene que $b^*(\theta)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\varepsilon\,(1-\theta)\,(b^*)'(\theta) - (1-\alpha)\,b^*(\theta) = -(1-\alpha)\,\theta$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta = 1$ queda que todo equilibrio bayesiano de Nash cumple

$$b^*(1) = 1$$

Luego la solución particular de la ecuación diferencial queda:

$$b^*(\theta) = \frac{\varepsilon + (1-\alpha)\,\theta}{1-\alpha+\varepsilon}$$

y el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Nota 4.4.34 *La máxima puja realizada en equilibrio por ambas empresas es* 1. *La ofertas no se disparan y, por tanto,* $b_{\max} = 1$.

El ingreso esperado por la empresa 1, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_1^{\varepsilon}(\theta_1) &= \alpha + \int_{(b_2^*)^{-1}(b_1^*(\theta_1))}^{1} \left(\varepsilon b_1^*(\theta_1) + (1-\alpha-\varepsilon)\,b_2^*(\theta_2)\right) d\theta_2 \\ &= \alpha + \frac{(1-\alpha)}{2}\left(1-\theta_1^2\right) \end{aligned}$$

El ingreso esperado por la empresa 2, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_2^{\varepsilon}(\theta_2) &= \alpha+\beta+\int_{\left(b_1^*\right)^{-1}(b_2^*(\theta_2))}^{1} \left(\varepsilon b_2^*\left(\theta_2\right)+\left(1-\alpha-\varepsilon\right) b_1^*(\theta_1)\right) d\theta_1 \\ &= (\beta+\alpha)+\frac{(1-\alpha)}{2}\left(1-\theta_2^2\right) \end{aligned}$$

El ingreso que espera realizar el subastador, si las empresas juegan el equilibrio correspondiente, es:

$$\begin{aligned} P_{omer}^{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^{\varepsilon}(\theta_i)] \\ &= \beta+2\alpha+\frac{2(1-\alpha)}{3} \end{aligned}$$

Nota 4.4.35 *Tanto el ingresos esperado por las empresas, como el pago que espera realizar el Operador del Mercado, son independientes del valor del parámetro ε y, por tanto, concluimos que todos los modelos de subasta pertenecientes a la diagonal que une los modelos DV1 y de Vickrey son equivalentes.*

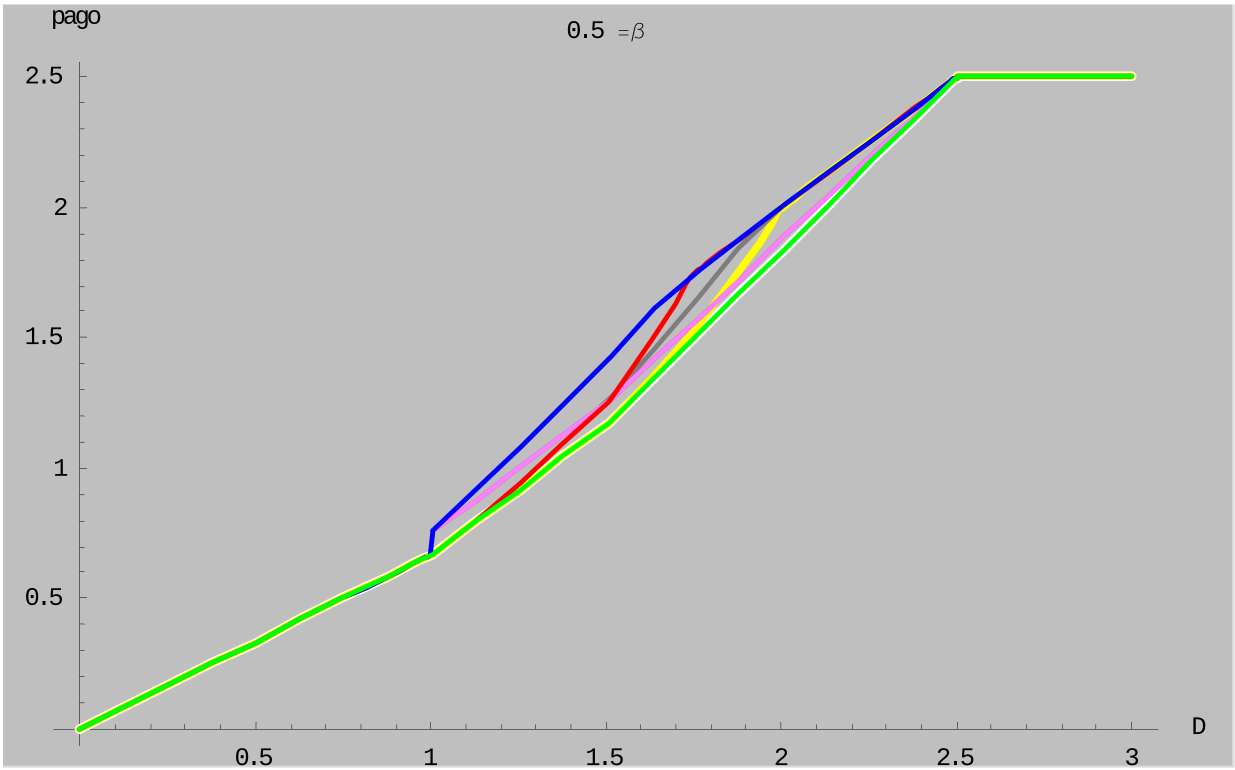
Resumen

Observando la gráficas se llega a las siguientes conclusiones:

- La empresa 1 espera mayores ingresos bajo el modelo Uni2 siempre que $3\alpha+\beta<1$.
- La empresa 2 espera mayores ingresos bajo el modelo E2 siempre que $3\alpha+\beta<1$.
- El Operador del Mercado espera pagar menos a las empresas por la demanda eléctrica bajo los modelos de Vickrey y DV1. Además, todos los modelos pertenecientes a la diagonal que los une, también son equivalentes.

4.5 Pago esperado por el Operador del Mercado bajo cualquier tamaño de la demanda

Podemos unificar, en una gráfica, el pago que el Operador del Mercado espera hacer a las empresas eléctricas bajo alguno de los modelos de subasta vistos y bajo cualquier valor de la demanda. Es decir, representar en una única gráfica el pago que el Operador de Mercado espera hacer en todos los casos (Caso 1, Caso 2 y Caso 3) analizados en el presente capítulo. De esta manera obtenemos, por ejemplo dando a β el valor 0.5, la siguiente gráfica:



El Caso 1 queda representado sobre el intervalo [0,1]. Vimos que coincidía con el primer caso simétrico del Capítulo 2 en el que se obtenía equivalencia de ingresos bajo todos los modelos.

El Caso 2 está representado sobre el intervalo [1,1.5]. Sobre dicho intervalo la gráfica verde representa los modelos Vickrey y DV, que quedaban equivalentes (tanto en ingresos esperados por las empresas, como en el pago que espera hacer el subastador). La gráfica roja representa el modelo C, la gráfica rosa representa los modelos A y B (coincidentes en cuanto al pago que espera hacer el subastador, pero no equivalentes para las empresas) y, por último, en azul el modelo Uniforme. Debemos destacar la discontinuidad de salto que se produce en 1 por parte de los modelos Uniforme y A-B. Se debe a que justamente cuando la demanda alcanza el valor 1, bajo los modelos citados, las empresas pasan de pujar equilibrio simétrico a pujar equilibrio asimétrico. Esto hace que el pago que espera hacer el subastador se vea bruscamente aumentado. Sin embargo, bajo esa misma circunstancia (es decir en D=1), no se observa esa discontinuidad en las gráficas del pago que espera hacer el subastador bajo el resto de los modelos representados.

Es decir, no se observa discontinuidad en las gráficas de los modelos C y Vickrey-DV. Bajo estos tres últimos modelos vimos que, a pesar de encontrarnos bajo las hipótesis de un modelo asimétrico, las estrategias en equilibrio quedan simétricas y el pago del subastador no se ve bruscamente afectado.

El Caso 3 está representado sobre el intervalo [1.5,2.5]. Los colores de las gráficas representan los distintos modelos de subasta que rige la siguiente tabla:

Amarillo →	V2	Gris →	A2
Azul →	Uni1	Rosa →	B1/A1 (coincid)
Verde →	DV1/Vickrey (equiv)	Rojo →	C1

Lo primero a destacar es la continuidad en 1.5, punto que separa los Casos 2 y 3 analizados. No hay discontinuidad ya que las estrategias en equilibrios que se "transformaron" en asimétricas al pasar por 1, siguen siendo asimétricas al pasar por 1.5. Y las estrategias simétricas adoptadas por las empresas en el resto de los modelos continúan siendo simétricas en el Caso 3.

El Caso 4, en el que ya no hay competencia para ninguna de las dos empresas, es el representado sobre el resto de la recta real.

Como conclusión final del presente capítulo, observar como bajo todos los posibles valores de la demanda siempre queda como modelo ventajoso, desde el punto de vista del Operador del Mercado, el modelo llamado primero DV (en el Caso 2) y luego DV1 (en el caso 3). Este modelo además no pertenece al grupo de los modelos clásicos de subasta del Mercado Eléctrico (Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey), luego se trata de un modelo nuevo.

4.6 Conclusiones

Se ha analizado una familia paramétrica de modelos de subasta $\mathcal{MSG}$, que contiene como casos particulares a los tres principales (modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey) bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Asimétrico Lineal Uniforme descrito en la Sección 4.1.. Dicha familia de modelos de subasta tiene asociada unívocamente las siguientes funciones de beneficio para cada empresa i:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^1 b_1 + \beta_1^1 b_2 + \varphi^1 - \phi_1^1 \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \gamma_2^1 b_1 + \varphi^1 - \phi_2^1 \theta_1 & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_1^2 b_1 + \varphi^2 - \phi_1^2 \theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ \gamma_2^2 b_2 + \varphi^2 - \phi_2^2 \theta_2 & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

con γ_1^i,β_1^i,φ^i, $\gamma_2^i \in [0, \infty)$, $\gamma_1^i + \beta_1^i + \varphi^i = \phi_1^i$, $\gamma_2^i + \varphi^i = \phi_2^i$ y $\phi_1^1 + \phi_2^2 = \phi_2^1 + \phi_1^2 = D$, con $i \in \{1, 2\}$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1^1 = \phi_1^2 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = 0$, $\phi_1^2 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 1+\beta+\alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = \alpha$, $\phi_1^2 = 1+\beta$, $\phi_2^2 = \beta+\alpha$. Si la demanda verifica que es mayor o igual que $2 + \beta$, en ese caso las empresas despachan el total de su capacidad de producción, y entonces $\phi_1^1 = \phi_2^1 = 1$, $\phi_1^2 = \phi_2^2 = 1 + \beta$.

Una vez calculados los equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General, se calculó el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumen en las secciones 4.2., 4.3 y 4.4.. Al final de las dos últimas secciones mencionadas se estableció una ordenación entre los diferentes modelos de subasta que se sitúan en los vértices de las regiones a las que pertenecen los parámetros que aparecen en $\mathcal{MSG}$.

Para la mayor de las empresas se llega a la conclusión que el modelo más ventajoso es, si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta Uniforme. Si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ y $3\alpha + \beta < 1$, el modelo de subasta Uni2.

Para la menor de las empresas se llega a la conclusión que el modelo que más le favorece es, si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta E. Si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ y $3\alpha + \beta < 1$, el modelo de subasta E2.

Desde el punto de vista del Operador del Mercado, los modelos que son más ventajosos (ambos equivalentes) son, si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta de Vickrey y el modelo de subasta DV. Si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ el modelo de subasta de Vickrey y el modelo de subasta DV1. Algunos autores destacan que el modelo de subasta de Vickrey tiene la desventaja de que tiene como estrategia dominante el pujar el propio tipo y, por tanto, el revelar el coste de producción [Rothkopf, Teisberg and Kahn (1990)]. Las empresas se muestran reticentes a confesar su propio tipo. En ese sentido, aun obteniéndose el mismo ingreso esperado por parte de las empresas generadoras, y el mismo pago que espera hacer el subastador que bajo el modelo de Vickrey, las estrategias en equilibrio en los modelos DV y DV1 no son pujar el verdadero tipo.

Capítulo 5

Duopolio Asimétrico en unidades de producción

En el capítulo anterior se analizó un modelo asimétrico en el que las dos empresas eléctricas consideradas tenían sendas unidades de producción con capacidades distintas.

En este capítulo se analizará el caso en el que ambas empresas tiene la misma capacidad de producción total, pero una de ellas posee dos unidades de producción. Es decir, una de las empresas realizará dos pujas, en principio distintas, correspondientes a cada una de las unidades de producción eléctrica que posee. La otra empresa posee sólo una unidad de producción y, por tanto, realizará una única puja. En principio se podría pensar que la empresa 1 se va a ver favorecida por la oportunidad de ofertar dos precios distintos por la capacidad de energía que generan sus dos unidades de producción. Analizaremos las estrategias en equilibrio en diferentes modelos de subasta. Se comparará el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el subastador, bajo los diferentes modelos de subasta.

5.1 El Modelo

En el presente capítulo se van a suponer las siguientes hipótesis:

Hay dos empresas neutrales al riesgo, tal que una de ellas (la empresa 2) tiene una única unidad de producción, mientras que la otra empresa (la empresa 1) posee dos unidades de producción (denotadas por los subíndices $\widetilde{1}, \widehat{1}$). Ambas empresas están interesadas en vender unidades de electricidad en un periodo concreto de un Mercado Eléctrico. La capacidad, completamente divisible, de cada unidad de producción la vamos a denotar por $k_{\widetilde{1}}$, $k_{\widehat{1}}$ y k_2, donde las dos primeras son las correspondientes a las dos unidades de producción de la empresa 1 y, la última, la capacidad correspondiente a la única unidad de producción que posee la empresa 2. Dichas capacidades son tales que $2k_{\widetilde{1}} = 2k_{\widehat{1}} = k_2$ y supondremos, normalizando, $k_{\widetilde{1}} = k_{\widehat{1}} = 1$.

El coste de cada unidad de producción es $g(q_i, \theta_i) = q_i\theta_i$, $i \in \left\{\widetilde{1}, \widehat{1}, 2\right\}$, donde q_i es la cantidad de unidades eléctricas despachadas por la unidad de producción i (la producción sobre la capacidad es imposible). Supondremos que $\theta_{\widetilde{1}} = \theta_{\widehat{1}} = \theta_1$ tal que θ_i es información privada e independiente de la empresa i y es una realización de una variable aleatoria continua que supondremos distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, θ_1 y θ_2 son v.a.i.i.d. uniformemente en $[0, 1]$ y tal que la empresa i, y sólo la empresa i, observa la realización de θ_i.

D representará la demanda de un periodo y se supondrá inelástica al precio.

Cada empresa independiente y simultáneamente realiza una oferta: $(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ es la oferta compuesta por dos elementos, uno por cada unidad de producción, hecha por la empresa 1, y $b_2 \in [0, 1]$ es la oferta realizada por la empresa 2. En ellas se especifica el mínimo precio por unidad al que cada unidad de producción está dispuesta a vender su producción. Se ha considerado que el precio máximo que el Operador del Mercado acepta como oferta es el coste máximo de una unidad eléctrica[1]. Es decir, $b_{\max} = 1$.

Una estrategia para una unidad de producción es, entonces, una función $b_i(\theta_i) : [0, 1] \to [0, 1]$, $i \in \left\{\widetilde{1}, \widehat{1}, 2\right\}$. Además, supondremos que $b_i(\theta_i)$ son funciones estrictamente crecientes y diferenciables verificando la condición $b_i(1) = 1$, $i \in \left\{\widetilde{1}, \widehat{1}, 2\right\}$. No tiene sentido suponer un comportamiento estratégico idéntico de las dos empresas, como en el Capítulo 2, y se buscarán equilibrios, en principio, no necesariamente simétricos.

A este modelo de mercado, verificando las hipótesis enunciadas, lo llamaremos

Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción.

Basándose en estas ofertas, el Operador del Mercado distribuye el despacho de electricidad. Ordena las tres ofertas de menor a mayor, de tal forma que la unidad de producción que hizo la menor de las ofertas despacha primero. Si su capacidad no es suficiente para satisfacer la demanda, la unidad de producción correspondiente a la segunda oferta más baja despacha a

[1]En todos los capítulos anteriores, la puja máxima que le interesaba al Operador del Mercado era $b_{\max} = \frac{g(\phi_1, a_2) - g(\phi_2, a_2)}{\phi_1 - \phi_2}$. Bajo las presentes hipótesis $b_{\max} = 1$.

continuación. Si aun así no queda satisfecha la demanda, la unidad de producción que pujó la mayor oferta despacha la demanda residual, siempre y cuando ésta sea inferior a su propia capacidad. Luego la cantidad asignada para el despacho a cada empresa es:

$$Q_1(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \min(2, D) & \text{si} \quad M < b_2 \\[2em] \min(1, D) & \text{si} \quad m < b_2 < M \text{ y } D < 3 \\[2em] 1 + \min(1, D-3) & \text{si} \quad m < b_2 < M \text{ y } 3 < D \\[2em] 0 & \text{si} \quad b_2 < m \text{ y } D < 2 \\[2em] \min(2, D-2) & \text{si} \quad b_2 < m \text{ y } 2 < D \end{cases}$$

$$Q_2(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \min(2, D) & \text{si} \quad b_2 < m \\[2em] 0 & \text{si} \quad m < b_2 < M \text{ y } D < 1 \\[2em] \min(2, D-1) & \text{si} \quad m < b_2 < M \text{ y } 1 < D \\[2em] 0 & \text{si} \quad M < b_2 \text{ y } D < 2 \\[2em] \min(2, D-2) & \text{si} \quad M < b_2 \text{ y } 2 < D \end{cases}$$

Donde $m = \min(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$ y $M = max(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$.

Todos los aspectos de este juego bayesiano, además del modelo de subasta a utilizar para las transacciones del Mercado Eléctrico, son de conocimiento público

El precio de transacción final dependerá del modelo de subasta que se esté empleando. Como ya se ha comentado, hay tres modelos de subasta clásicos: **modelo de subasta Uniforme, modelo de subasta Discriminatorio y modelo de subasta de Vickrey**. Recordemos cómo se establece el precio de compraventa en cada uno de ellos*:*

En el modelo Uniforme, el precio que el Operador del Mercado paga a cada unidad de producción, por unidad eléctrica suministrada, es igual a la mayor oferta aceptada. Todas las unidades de producción que despachan en el mercado reciben el mismo precio por unidad.

En el modelo Discriminatorio, el precio que el Operador del Mercado paga a cada unidad de producción por unidad eléctrica suministrada es igual a su propia oferta. Las unidades de producción que despachan en el mercado reciben precios distintos por unidad eléctrica.

En el modelo de Vickrey, la regla mediante la cual el Operador del Mercado establece el precio es algo más complicada. A cada unidad de producción le pagan, por cada unidad eléctrica despachada, el precio correspondiente a la unidad eléctrica que desplaza si no ofertase la empresa a la que esta unidad de producción pertenece.

Al igual que se hizo en capítulos anteriores se pueden considerar modelos de subasta más generales en los que la función de beneficio de las empresas 1 y 2 están expresadas, respectivamente, de la siguiente forma:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_1^{\widehat{1}} M + \beta_1^1 b_2 + \varphi - \phi_1 \theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \beta_2^1 b_2 + \varphi - \phi_2^1 \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \varphi - \phi_3 \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \qquad 5.1.1.a)$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_1^{\widetilde{2}} m + \beta_1^{\widehat{2}} M + \varphi - \phi_1 \theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \gamma_2^2 b_2 + \beta_1^{\widehat{2}} M + \varphi - \phi_2^2 \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \varphi - \phi_3 \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases} \qquad 5.1.1.b)$$

Siendo $m = \min(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$ y $M = max(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$ y con $\gamma_1^{\widetilde{1}}, \gamma_1^{\widehat{1}}, \gamma_2^{\widehat{1}}, \gamma_3^{\widetilde{1}}, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^{\widetilde{2}}, \beta_1^{\widehat{2}}, \varphi \in [0, \infty)$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_1^{\widehat{1}} + \beta_1^1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} + \beta_2^1 + \varphi = \phi_2^1$, $\gamma_3^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} + \varphi = \phi_3$, $\gamma_1^2 + \beta_1^{\widetilde{2}} + \beta_1^{\widehat{2}} + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2^2 + \beta_1^{\widehat{2}} + \varphi = \phi_2^2$, $\gamma_3^2 + \varphi = \phi_3$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_1^{\widehat{1}} = \gamma_1^2$, $\beta_1^{\widetilde{2}} + \beta_1^{\widetilde{2}} = \beta_1^1$, $\gamma_3^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_3^2$ y donde ϕ_1, ϕ_2^1, ϕ_2^2 y ϕ_3 están determinadas por el valor de la demanda. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = \phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = \alpha$, $\phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 2 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = 1 + \alpha$, $\phi_3 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 3 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 1 + \alpha$. Si la demanda verifica $D \geq 4$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 2$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 2$.

Se ha considerado la familia paramétrica más amplia posible tal que si la empresa 1 decide pujar la misma oferta con sus dos unidades de producción, resulte la familia general de modelos de subasta considerados en el Capítulo 2. Ya que en ese caso, en el que las empresas son indistinguibles, deben quedar idénticas funciones de beneficio para las dos empresas.

Todos los aspectos de este juego bayesiano son de conocimiento público. La ganancia de cada empresa y la cantidad asignada para el despacho a cada empresa va a depender del tamaño de la demanda respecto de las capacidades. Por ello se distinguirán los siguientes cinco casos:

Caso 1 Las tres unidades de producción tienen capacidad suficiente para satisfacer la demanda, es decir, $D \leq 1$. En este caso la unidad de producción que ofertó el menor precio despacha toda la demanda y las otras dos unidades de producción no despachan ninguna unidad eléctrica.

El cálculo de equilibrios, ingresos y beneficios en Caso 1 es independiente de las capacidades y del número de unidades de producción. Luego es exacto al Caso 1 analizado en el Capítulo 2, donde se vio que no es más que un caso particular de subasta de un objeto con jugadores con valoraciones privadas e independientes.

Caso 2 La empresa 2 puede satisfacer toda la demanda con su única unidad de producción, sin embargo la empresa 1, que puede también satisfacer toda la demanda, necesita sus dos unidades de producción para ello, es decir $1 < D = 1 + \alpha \leq 2$, con $\alpha \in (0, 1)$. En este caso, si la empresa de menor oferta es la empresa 2, la empresa 1 no despacha nada. Si la empresa 2 coloca su oferta entre las dos ofertas de la empresa 1, entran en el mercado: una de las unidades de producción de la empresa 1, despachando toda su capacidad, y la empresa 2 despachando la demanda residual α. Por último, si la oferta de la empresa 2 es la mayor de las tres, ésta no despacha nada.

Si $D = 1 + \alpha$ las expresiones 5.1.1.a) y 5.1.1.b) quedan de la siguiente forma

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) M + (1+\alpha-\gamma_1^2) b_2 - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\tilde{1}} m + \left(1 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

5.1.2.a)

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(1+\alpha - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right) m + \beta_1^{\hat{2}} M - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \left(\alpha - \beta_1^{\hat{2}}\right) b_2 + \beta_1^{\hat{2}} M - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

5.1.2.b)

tal que $\left(\gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^{\hat{2}}\right) \in [0,1] \times \left[\gamma_1^{\tilde{1}}, 1+\alpha\right] \times \left[0, \min\{\alpha, 1+\alpha-\gamma_1^2\}\right]$. Siendo $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ y $M = max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$. Se compararán los seis modelos que determinan los vértices de la región en la que se definen los parámetros, para establecer una ordenación entre ellos, desde el punto de vista de las empresas y desde el punto de vista del Operador del Mercado.

Caso 3 Son necesarias las dos empresas para satisfacer la demanda, aunque quizá no las dos unidades de la empresa 1, es decir, $2 < D = 2 + \alpha < 3$, con $\alpha \in (0,1)$. En este caso, si la empresa 2 tiene la mayor de las ofertas, entran en el mercado las tres unidades de producción: las dos unidades de la empresa 1, despachando la totalidad de sus capacidades y la empresa 2 con la demanda residual α. Pero en caso contrario, si la empresa 2 no tiene la mayor de las ofertas, la unidad de producción de la empresa 1 con mayor oferta queda fuera del mercado.

Si $D = 2 + \alpha$ las expresiones 5.1.1.a) y 5.1.1.b) quedan de la siguiente forma

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\;$$

$$\begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) M + \left(2 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\tilde{1}} m + \gamma_2^{\hat{1}} M + \left(1 - \alpha + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{1}} - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{1}}\right) m + \gamma_2^{\hat{1}} M + \alpha - \gamma_3^2 - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \qquad 5.1.3.a)$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\;$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(2 - \alpha + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right) m + \beta_1^{\hat{2}} M + \alpha - \gamma_3^2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \left(1 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}}\right) b_2 + \beta_1^{\hat{2}} M + \alpha - \gamma_3^2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \alpha - \gamma_3^2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases} \qquad 5.1.3.b)$$

tal que $\left(\gamma_3^2,\gamma_2^{\hat{1}},\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right) \in [0,\alpha]\times\left[0,\gamma_3^2\right]\times\left[0,1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right]\times\left[\gamma_1^{\tilde{1}},2-\alpha+\gamma_3^2\right]$ $\times\left[0,\min\{2-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2,1+\gamma_3^2\}\right]$. Siendo $m=\min(b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}})$ y $M=max(b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}})$. Se compararán los dieciocho modelos que determinan los vértices de la región en la que se definen los parámetros, para establecer una ordenación entre ellos, desde el punto de vista de las empresas y desde el punto de vista del Operador del Mercado.

Caso 4 Son necesarias las dos empresas para satisfacer la demanda y la totalidad de las unidades de producción, es decir, $3\le D=3+\alpha<4$, con $\alpha\in(0,1)$. En este caso la empresa 1 siempre despacha la totalidad de su capacidad con la unidad de producción de menor oferta y con la otra unidad de producción al menos la demanda residual α. La empresa 2 despacha la totalidad de su capacidad, si no tiene la mayor de las ofertas y, en caso contrario, despacha $1+\alpha$.

Si $D=3+\alpha$ las expresiones 5.1.1.a) y 5.1.1.b) quedan de la siguiente forma

$$B_1(\theta_1,b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}},b_2) \;=$$
$$\begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}}m+\left(\gamma_1^2-\gamma_1^{\tilde{1}}\right)M+\left(1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2\right)b_2+1+\alpha-\gamma_3^2-2\theta_1 & \text{si} \quad M<b_2 \\ \gamma_1^{\tilde{1}}m+\gamma_2^{\hat{1}}M+\left(\gamma_3^2-\gamma_1^{\tilde{1}}-\gamma_2^{\hat{1}}\right)b_2+1+\alpha-\gamma_3^2-(1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ \left(\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right)m+\gamma_2^{\hat{1}}M+1+\alpha-\gamma_3^2-(1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2<m \end{cases} \qquad 5.1.4.a)$$

$$B_2(\theta_2,b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}},b_2) \;=$$
$$\begin{cases} \gamma_1^2b_2+\left(1-\alpha+\gamma_3^2-\beta_1^{\hat{2}}-\gamma_1^2\right)m+\beta_1^{\hat{2}}M+1+\alpha-\gamma_3^2-2\theta_2 & \text{si} \quad b_2<m \\ \left(1-\alpha+\gamma_3^2-\beta_1^{\hat{2}}\right)b_2+\beta_1^{\hat{2}}M+1+\alpha-\gamma_3^2-2\theta_2 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ \gamma_3^2b_2+1+\alpha-\gamma_3^2-(1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M<b_2 \end{cases} \qquad 5.1.4.b)$$

tal que $\left(\gamma_3^2,\gamma_2^{\hat{1}},\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right)\in[0,1+\alpha]\times\left[0,\gamma_3^2\right]\times\left[0,\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right]\times\left[\gamma_1^{\tilde{1}},1-\alpha+\gamma_3^2\right]\times\left[0,1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2\right]$. Siendo $m=\min(b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}})$ y $M=max(b_{\tilde{1}},b_{\hat{1}})$. Se compararán los doce modelos que determinan los vértices de la región en la que se definen los parámetros, para establecer una ordenación entre ellos, desde el punto de vista de las empresas y desde el punto de vista del Operador del Mercado.

Caso 5 La demanda excede la suma de las tres unidades de producción, es decir $4\le D$. En este caso el despacho de toda la capacidad está asegurada para todas las unidades de producción, independientemente de sus ofertas. Es un caso en el que no existe competencia y, por tanto, todas las unidades de producción pujarán lo máximo permitido.

5.2 Equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General.

Aunque analizaremos cada caso, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad, y tendremos en cuenta bajo qué modelo de subasta se están realizando las transacciones de compraventa de energía eléctrica, podemos dar un resultado general de búsqueda de equilibrio bayesiano de Nash, teniendo en cuenta una forma general de la función beneficio que englobe cualquiera de las diferentes circunstancias consideradas.

Proposición 5.2.1 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción*** *y se utiliza un modelo de subasta $\mathcal{S} \in \mathcal{MSG}$, es decir las funciones de beneficio de las empresas son de la forma:*

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) M + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 & si \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1 \theta_1 & si \quad m < b_2 < M \\ \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right) m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_1 & si \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right) m + \beta_1^{\widehat{2}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2 & si \quad b_2 < m \\ \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \beta_1^{\widehat{2}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2 \theta_2 & si \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_2 & si \quad M < b_2 \end{cases}$$

siendo $\left(\gamma_3^2, \gamma_2^{\widehat{1}}, \gamma_1^{\widetilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^{\widehat{2}}\right) \in [0, \phi_3] \times \left[0, \gamma_3^2\right] \times \left[0, \phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right] \times \left[\gamma_1^{\widetilde{1}}, \phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2\right]$ $\times \left[0, \min\{\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2, \phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2\right]$, *entonces*

Región I) *Si* $\phi_3 = \phi_2^1$, $\phi_1 = \phi_2^2$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 0$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_3^2$, $\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2 = 0$ *se puede afirmar que existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash, verificando las hipótesis establecidas en* ***Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción,*** *todos ellos de la forma*

$$\left(b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = \left(b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right)$$

en los que la función $b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1)$ puede ser cualquier función estrictamente creciente y diferenciable que verifique $b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1) \leq b^*(\theta_1)\ \forall\theta_1 \in [0,1]$.

Región II) *Si no se verifica el punto anterior y se verifica alguna de las siguientes*

•$\gamma_2^{\widehat{1}} \neq 0$ *ó* $\gamma_3^2 \neq 0$

•$\gamma_2^{\widehat{1}} = 0$ *y* $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2$

•$\gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_3^2 = 0$ *y* $\gamma_1^2 = (1+k)\,\gamma_1^{\widetilde{1}}$, $(1+k)\,\phi_2^1 = \phi_1 + k\phi_3$, *para algún* $k \in \Re$

se puede afirmar que existe un único equilibrio bayesiano de Nash, verificando las hipótesis establecidas en ***Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción*** *en el que todas las unidades de producción utilizan la misma función de oferta, es decir un equilibrio de la forma*

$$\left(b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*_{\widehat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right) = (b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$$

La expresión de la función de oferta $b^*(\theta_i)$ que aparece en los equilibrios, tanto en la ***Región I*** *como en la* ***Región II****, se obtiene diferenciando los cuatro subcasos siguientes:*

a) Si $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = 0$, el equilibrio está formado por las estrategias dominantes

$$b^*(\theta_i) = \theta_i$$

b) Si $\gamma_3^2 = 0$ y $\gamma_1^2 \neq 0$, el equilibrio está formado por las estrategias

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_1 - \phi_3)\,\theta_i + \gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \phi_1 - \phi_3}$$

c) Si $\gamma_1^2 \neq \gamma_3^2 \neq 0$, el equilibrio está formado por las estrategias

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_3 - \phi_1)\,\theta_i - \gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2\right)^{\frac{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}} \left(\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\theta_i\right)^{\frac{\phi_1 - \phi_3}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}}}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}$$

d) Si $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 \neq 0$, el equilibrio está formado por las estrategias

$$b^*(\theta_i) = \theta_i + \frac{\gamma_1^2\left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(\phi_1 - \phi_3)}{\gamma_1^2}}\right)}{\phi_1 - \phi_3}$$

Región III) *Si los parámetros no verifican ninguna de los puntos anteriores, sólo se puede afirmar que: si existe algún equilibrio bayesiano de Nash, verificando las hipótesis establecidas en el* ***Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción****, entonces es* *tal que las inversas de las estrategias que forman el equilibrio, verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\gamma_1^{\widetilde{1}} \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_3 - \phi_2^1) \left(t - \left(b_{\widetilde{1}}^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\
\left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) \left(1 - (b_2^*)^{-1}(t)\right) + (\phi_2^1 - \phi_1) \left(t - \left(b_{\widehat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\
\gamma_1^2 \left(1 - (b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(t)\right) + \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) \left((b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(t) - (b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(t)\right) \\
+ (\phi_2^2 - \phi_1) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_2^2) \left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} (b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(t) = 0
\end{array}
\right.
$$

Demostración. La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria. Si consideramos que la empresa 1 puja con la unidad $\widetilde{1}$ la menor de sus ofertas, el beneficio de las dos empresas es:

$$
B_1(\theta_1, m, M, b_2(\theta_2)) =
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
\gamma_1^{\widetilde{1}} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) M + (\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2) b_2(\theta_2) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 & \text{si} & b_2^{-1}(M) < \theta_2 \\
\gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) b_2(\theta_2) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1 \theta_1 & \text{si} & b_2^{-1}(m) < \theta_2 < b_2^{-1}(M) \\
\left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right) m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_1 & \text{si} & \theta_2 < b_2^{-1}(m)
\end{array}
\right.
$$

$$
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}(\theta_1), b_{\widehat{1}}(\theta_1), b_2) =
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
\gamma_1^2 b_2 + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right) b_{\widetilde{1}}(\theta_1) + \beta_1^{\widehat{2}} b_{\widehat{1}}(\theta_1) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2 & \text{si} & \left(b_{\widetilde{1}}\right)^{-1}(b_2) < \theta_1 \\
\left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \beta_1^{\widehat{2}} b_{\widehat{1}}(\theta_1) + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2 \theta_2 & \text{si} & b_{\widehat{1}}^{-1}(b_2) < \theta_1 < b_{\widetilde{1}}^{-1}(b_2) \\
\gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_2 & \text{si} & \theta_1 < b_{\widehat{1}}^{-1}(b_2)
\end{array}
\right.
$$

Los jugadores son neutrales al riesgo. Luego la mejor oferta de la empresa i es aquella que maximiza el beneficio esperado por ella, dado θ_i, sobre todos los posibles valores del tipo restante, θ_j. Luego se quiere maximizar el beneficio medio de la empresa 1, dado θ_1, que es:

$$
BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(.)) = \int_{a_1}^{a_2} B_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\theta_2)) f(\theta_2|\theta_1) d\theta_2
$$

Como los tipos son independientes y siguen una distribución Uniforme en el intervalo $[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
BM_1(\theta_1, b_{\tilde 1}, b_{\hat 1}, b_2^*(.)) &= \int_0^1 B_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\theta_2))d\theta_2 \\
&= \left(\gamma_1^{\tilde 1} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde 1}\right) M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1\theta_1\right)\left(1 - \left(b_2^*\right)^{-1}(M)\right) \\
&\quad + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(M)}^1 b_2\left(\theta_2\right) d\theta_2 \\
&\quad + \left(\gamma_1^{\tilde 1} m + \gamma_2^{\hat 1} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1\theta_1\right)\left(\left(b_2^*\right)^{-1}(M) - \left(b_2^*\right)^{-1}(m)\right) \\
&\quad + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat 1} - \gamma_1^{\tilde 1}\right)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(m)}^{\left(b_2^*\right)^{-1}(M)} b_2\left(\theta_2\right) d\theta_2 \\
&\quad + \left(\left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat 1}\right) m + \gamma_2^{\hat 1} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3\theta_1\right)\left(b_2^*\right)^{-1}(m) \\
&= \gamma_1^{\tilde 1} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde 1}\right) M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1\theta_1 \\
&\quad + \left(b_2^*\right)^{-1}(M)\left(\left(\gamma_2^{\hat 1} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\tilde 1}\right) M + \left(\phi_1 - \phi_2^1\right)\theta_1\right) \\
&\quad + \left(b_2^*\right)^{-1}(m)\left(\left(-\gamma_1^{\tilde 1} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat 1}\right) m + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)\theta_1\right) \\
&\quad + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(M)}^1 b_2\left(\theta_2\right) d\theta_2 \\
&\quad + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat 1} - \gamma_1^{\tilde 1}\right)\int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(m)}^{\left(b_2^*\right)^{-1}(M)} b_2\left(\theta_2\right) d\theta_2
\end{aligned}
$$

[2]Donde $m = \min(b_{\tilde 1}, b_{\hat 1}) \neq M = max(b_{\tilde 1}, b_{\hat 1})$. Calculemos la oferta $\left(b_{\tilde 1}, b_{\hat 1}\right)$ que maximiza el beneficio medio. Supondremos, en primer lugar, que la empresa 1 realiza dos pujas distintas con sus dos unidades de producción. Derivando respecto de $b_{\tilde 1}$ y $b_{\hat 1}$ (una de ellas coincide con m y la otra con M) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial m} BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(.)) \\
&= \gamma_1^{\tilde 1} + \left(-\gamma_1^{\tilde 1} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat 1}\right)\left(b_2^*\right)^{-1}(m) + \left(\phi_3 - \phi_2^1\right)(m - \theta_1)\frac{d}{dm}\left(b_2^*\right)^{-1}(m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial M} BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(.)) \\
&= \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde 1}\right) + \left(\gamma_2^{\hat 1} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\tilde 1}\right)\left(b_2^*\right)^{-1}(M) + \left(\phi_2^1 - \phi_1\right)(M - \theta_1)\frac{d}{dM}\left(b_2^*\right)^{-1}(M)
\end{aligned}
$$

Si con la unidad de producción $\tilde 1$ realiza la menor de las ofertas se verifica $b_{\tilde 1}(\theta_1) = m$ y $b_{\hat 1}(\theta_1) = M \Leftrightarrow \theta_1 = b_{\tilde 1}^{-1}(m) = b_{\hat 1}^{-1}(M)$. Sustituyendo e igualando a cero quedan las siguientes

[2] si $0 \leq \left(b_2^*\right)^{-1}(m)$

ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(-\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(m) + \left(\phi_3 - \phi_2^1\right)\left(m - \left(b_{\widetilde{1}}^*\right)^{-1}(m)\right)\frac{d}{dm}(b_2^*)^{-1}(m) = 0 \\ \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) + \left(\gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\widetilde{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(M) + \left(\phi_2^1 - \phi_1\right)\left(M - \left(b_{\widehat{1}}^*\right)^{-1}(M)\right)\frac{d}{dM}(b_2^*)^{-1}(M) = 0 \end{cases}$$

evaluando ambas en t quedan

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(-\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_2^1\right)\left(t - \left(b_{\widetilde{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) + \left(\gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\widetilde{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_2^1 - \phi_1\right)\left(t - \left(b_{\widehat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Son las dos primeras ecuaciones diferenciales que formarán parte de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas soluciones serán las funciones inversas de las tres estrategias que forman el equilibrio.

Si la empresa 1 realiza la misma puja $b_1(\theta_1)$ con sus dos unidades de producción, en lugar de obtener estas dos ecuaciones diferenciales se hubiese obtenido solamente una. Esta es

$$\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)(b_2^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1)\left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0$$

En cualquier caso, debemos obtener una ecuación diferencial mas, que se calculará analizando el comportamiento estratégico de la empresa 2. El beneficio medio de la empresa 2 es

$$BM_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}^*(.), b_{\widehat{1}}^*(.), b_2) = \int_{a_1}^{a_2} B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2) f(\theta_1|\theta_2) d\theta_1$$

Como los tipos son independientes y siguen una distribución Uniforme en el intervalo $[0,1]$:

$$\begin{aligned} BM_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}^*(.), b_{\widehat{1}}^*(.), b_2) &= \int_0^1 B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2) d\theta_2 \\ &= \left(\gamma_1^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1\theta_2\right)\left(1 - (b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(b_2)\right) \\ &\quad + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right)\int_{(b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(b_2)}^1 b_{\widetilde{1}}(\theta_1)\, d\theta_1 + \beta_1^{\widehat{2}} \int_{(b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(b_2)}^1 b_{\widehat{1}}(\theta_1)\, d\theta_1 \\ &\quad + \left(\left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2\theta_2\right)\left((b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(b_2) - (b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(b_2)\right) \\ &\quad + \left(\gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3\theta_2\right)(b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(b_2) \\ &= \gamma_1^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1\theta_2 \\ &\quad + (b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(b_2)\left(\left(\phi_1 - \phi_2^2\right)\theta_2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right) b_2\right) \\ &\quad + (b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(b_2)\left(-\left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3\right)\theta_2\right) \\ &\quad + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right)\int_{(b_{\widetilde{1}}^*)^{-1}(b_2)}^1 b_{\widetilde{1}}(\theta_1)\, d\theta_1 + \beta_1^{\widehat{2}} \int_{(b_{\widehat{1}}^*)^{-1}(b_2)}^1 b_{\widehat{1}}(\theta_1)\, d\theta_1 \end{aligned}$$

[3]Calculemos la oferta b_2 que maximiza el beneficio medio. Derivando respecto de b_2 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial b_2} BM_2(\theta_2, b^*_{\tilde{1}}(.), b^*_{\hat{1}}(.), b_2) \\
= \;& \gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right)(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(b_2) - \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{2}}\right)(b^*_{\hat{1}})^{-1}(b_2) \\
& + \left(\phi_2^2 - \phi_1\right)(b_2 - \theta_2)\left((b^*_{\tilde{1}})^{-1}(b_2)\right)' + \left(\phi_3 - \phi_2^2\right)(b_2 - \theta_2)\left((b^*_{\hat{1}})^{-1}(b_2)\right)'
\end{aligned}$$

Como $b_2^{-1}(b_2) = \theta_2 \Longleftrightarrow b_2(\theta_2) = b_2$, sustituyendo e igualando a cero queda la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right)(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(b_2^*(\theta_2)) - \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{2}}\right)(b^*_{\hat{1}})^{-1}(b_2^*(\theta_2)) \\
& + \left(\phi_2^2 - \phi_1\right)(b_2^*(\theta_2) - \theta_2)\left((b^*_{\tilde{1}})^{-1}\right)'(b_2^*(\theta_2)) + \left(\phi_3 - \phi_2^2\right)(b_2^*(\theta_2) - \theta_2)\left((b^*_{\hat{1}})^{-1}\right)'(b_2^*(\theta_2))
\end{aligned}$$

Evaluando en t

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right)(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{2}}\right)(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) \\
& + \left(\phi_2^2 - \phi_1\right)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_2^2\right)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t)
\end{aligned}$$

Se han calculado, por tanto, las tres ecuaciones diferenciales que deben verificar las funciones inversas de las estrategias que forman cualquier equilibrio bayesiano de Nash (en el caso en el que la empresa 1 realice pujas distintas con sus dos unidades de producción) y es

$$(S1)\left\{\begin{array}{c}
\gamma_1^{\tilde{1}} + \left(-\gamma_1^{\tilde{1}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\hat{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_2^1\right)\left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\
\left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) + \left(\gamma_2^{\hat{1}} - \gamma_1^2 + \gamma_1^{\tilde{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_2^1 - \phi_1\right)\left(t - \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\
\gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2\right)(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - \left(\phi_2^2 - \phi_3 - \beta_1^{\hat{2}}\right)(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) \\
+ \left(\phi_2^2 - \phi_1\right)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_2^2\right)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) = 0
\end{array}\right.$$

Si la empresa 1 realiza la misma puja con sus dos unidades de producción el sistema que queda es

$$(S2)\left\{\begin{array}{c}
\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)(b_2^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1)\left(t - (b_1^*)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\
\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)(b_1^*)^{-1}(t) + (\phi_3 - \phi_1)\left(t - (b_2^*)^{-1}(t)\right)\tfrac{d}{dt}(b_1^*)^{-1}(t) = 0
\end{array}\right.$$

Comencemos a diferenciar los casos enunciados:

[3]si $0 \leq (b^*_{\hat{1}})^{-1}(b_2)$

Región I Si $\phi_3 = \phi_2^1$, $\phi_1 = \phi_2^2$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = 0$, $\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_3^2$, $\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\hat{2}} - \gamma_1^2 = 0$ el sistema $(S1)$ se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = 0 \\ \gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) \left(b_2^*\right)^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_1\right) \left(t - \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} \left(b_2^*\right)^{-1}(t) = 0 \\ \gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t) + \left(\phi_3 - \phi_1\right) \left(t - \left(b_2^*\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt} \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t) = 0 \end{array} \right.$$

y junto con las condiciones iniciales $b_2^*(1) = b_{\hat{1}}^*(1) = 1$, se llega a la conclusión de que, en equilibrio, la empresa 1 hace la misma puja con su unidad de producción de mayor oferta que la empresa 2. Si sustituimos los valores indicados de los parámetros se observa que ambas unidades de producción (la unidad de producción de mayor oferta de la empresa 1 y la unidad de producción de la empresa 2) compiten por la misma cantidad de unidades eléctricas y pagadas, en caso de producirse el despacho, al mismo precio. Bajo dichas circunstancias es de esperar que ambas unidades de producción tengan el mismo comportamiento estratégico y, por tanto, que el equilibrio bayesiano de Nash que se obtenga sea simétrico.

Resumiendo, se puede afirmar que existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, todos ellos de la forma

$$\left(b_{\tilde{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = \left(b_{\tilde{1}}^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right)$$

en los que la función $b_{\tilde{1}}^*(\theta_1)$ es tal que $b_{\tilde{1}}^*(\theta_1) \leq b^*(\theta_1)$ $\forall \theta_1 \in [0,1]$.

Región II Si se verifica alguna de las siguientes situaciones

•$\gamma_2^{\hat{1}} \neq 0$ ó $\gamma_3^2 \neq 0$

•$\gamma_2^{\hat{1}} = 0$ y $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2$

•$\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_3^2 = 0$ y $\gamma_1^2 = (1+k)\,\gamma_1^{\tilde{1}}$, $(1+k)\,\phi_2^1 = \phi_1 + k\phi_3$, para algún $k \in \Re$

se puede concluir que, en equilibrio, la empresa 1 hace la misma puja con sus dos unidades de producción, ya que:

Primero, si evaluamos el Sistema $(S1)$ en $t = 1$ e imponemos las condiciones $b_{\tilde{1}}^*(1) = b_{\hat{1}}^*(1) = b_2^*(1) = 1$ se debe verificar que $\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_3^2 = 0$. Si una de dichas igualdades no se verifica significará que no existe equilibrio en el que la empresa 1 puje de manera distinta con sus dos unidades de producción.

Segundo, si se verifica $\gamma_2^{\hat{1}} = 0$ y $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2$, por la segunda ecuación del Sistema $(S1)$, se deduce que la estrategia en equilibrio seguida por la unidad de producción de la empresa 1, con mayor oferta, es ofertar el propio tipo. Luego la única posibilidad es que la empresa 1 decida pujar su propio tipo con sus dos unidades de producción.

Por último, si se verifica $\gamma_1^2 = (1+k)\,\gamma_1^{\widetilde{1}}$, $k\gamma_3^2 = (1+k)\,\gamma_2^{\widehat{1}}$, $(1+k)\,\phi_2^1 = \phi_1 + k\phi_3$, para algún $k \in \Re$, observando las dos primeras ecuaciones diferenciales del Sistema $(S1)$, y junto con las condiciones iniciales $b_{\widetilde{1}}^*(1) = b_{\widehat{1}}^*(1) = 1$, se llega a la conclusión de que, en equilibrio, la empresa 1 hace la misma puja con sus dos unidades de producción.

Luego, en los tres puntos, el sistema de ecuaciones diferenciales que debe verificar las inversas de las estrategias en equilibrio es el Sistema $(S2)$ que junto con las condiciones $b_1^*(1) = b_2^*(1) = 1$, se reduce a un caso particular visto en el Capítulo 2. Por tanto existe un único equilibrio bayesiano de Nash simétrico

$$\left(b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right) = (b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2))$$

Tanto en la **Región I**, como en la **Región II**, la función de oferta $b^*(\theta_i)$ que aparece en todos los equilibrios es una solución particular de la ecuación diferencial

$$\left(\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\theta_i\right)(b^*)'(\theta_i) - (\phi_1 - \phi_3)\,b^*(\theta_i) = -(\phi_1 - \phi_3)\,\theta_i$$

verificando $b^*(1) = 1$. Hay que diferenciar cuatro subcasos:

a) Si $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = 0$, el equilibrio está formado por las estrategias dominantes

$$b^*(\theta_i) = \theta_i$$

b) Si $\gamma_3^2 = 0$ y $\gamma_1^2 \neq 0$, la ecuación diferencial queda

$$\gamma_1^2(1 - \theta_i)(b^*)'(\theta_i) - (\phi_1 - \phi_3)\,b^*(\theta_i) = -(\phi_1 - \phi_3)\,\theta_i$$

Si evaluamos la expresión anterior en $\theta_i = 1$, queda que todo equilibrio bayesiano de Nash debe verificar, sin imponerlo,

$$b^*(1) = 1$$

La solución general de la ecuación diferencial que queda es

$$b^*(\theta_i) = \frac{\gamma_1^2 + (\phi_1 - \phi_3)\,\theta_i}{\gamma_1^2 + \phi_1 - \phi_3} + C\,(1 - \theta_i)^{\frac{-(\phi_1 - \phi_3)}{\gamma_1^2}}$$

Imponiendo la condición

$$1 = b^*(1) = 1 + Lim_{\theta_i \to 1^-}\left(C\left(1-\theta_i\right)^{\frac{-(\phi_1-\phi_3)}{\gamma_1^2}} \right)$$

Imponiendo que el límite anterior sea finito, teniendo en cuenta que $\phi_1 - \phi_3 > 0$, la constante debe verificar:

$$C = 0$$

Luego la solución particular de la ecuación diferencial queda, sustituyendo el valor de la constante es

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_1 - \phi_3)\,\theta_i + \gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \phi_1 - \phi_3}$$

c) Si $\gamma_1^2 \neq \gamma_3^2 \neq 0$ la ecuación diferencial queda

$$\left(\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\theta_i\right)(b^*)'\left(\theta_i\right) - (\phi_1 - \phi_3)\, b^*(\theta_i) = -\left(\phi_1 - \phi_3\right)\theta_i$$

que junto con la condición $b^*(1) = 1$, y al verificarse que $\gamma_1^{\tilde{1}} + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) 1 = \gamma_3^2 \neq 0$, se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de Picard. La solución particular de la ecuación diferencial lineal anterior es

$$b^*(\theta_i) = \frac{(\phi_3 - \phi_1)\,\theta_i - \gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2\right)^{\frac{\gamma_3^2-\gamma_1^2+\phi_3-\phi_1}{\gamma_3^2-\gamma_1^2}} \left(\gamma_1^2 + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^2\right)\theta_i\right)^{\frac{\phi_1-\phi_3}{\gamma_3^2-\gamma_1^2}}}{\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \phi_3 - \phi_1}$$

d) Si $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 \neq 0$ la ecuación diferencial queda

$$\gamma_1^2\,(b^*)'\left(\theta_i\right) - (\phi_1 - \phi_3)\, b^*(\theta_i) = -\left(\phi_1 - \phi_3\right)\theta_i$$

que junto la condición $b^*(1) = 1$, y al verificarse que $\gamma_1^{\tilde{1}} + \left(\gamma_3^2 - \gamma_1^{\tilde{1}}\right) 1 = \gamma_3^2 \neq 0$, se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de Picard. La solución particular de la ecuación diferencial lineal anterior es

$$b^*(\theta_i) = \theta_i + \frac{\gamma_1^2\left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(\phi_1-\phi_3)}{\gamma_1^2}}\right)}{\phi_1 - \phi_3}$$

Región III Resto de los casos. Sólo se puede afirmar que cualquier equilibrio bayesiano de Nash $\left(b_{\tilde{1}}^*\left(\theta_1\right), b_{\tilde{1}}^*\left(\theta_1\right), b_2^*\left(\theta_2\right)\right)$ es tal que las inversas de sus estrategias en equilibrio verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\left\{\begin{array}{c}
\gamma_1^{\tilde{1}}\left(1-(b_2^*)^{-1}(t)\right)+\left(\phi_3-\phi_2^1\right)\left(t-\left(b_{\tilde{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t)=0\\
\left(\gamma_1^2-\gamma_1^{\tilde{1}}\right)\left(1-(b_2^*)^{-1}(t)\right)+\left(\phi_2^1-\phi_1\right)\left(t-\left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t)=0\\
\gamma_1^2\left(1-(b_{\tilde{1}}^*)^{-1}(t)\right)+\left(\phi_2^2-\phi_3-\beta_1^{\hat{2}}\right)\left((b_{\tilde{1}}^*)^{-1}(t)-(b_{\hat{1}}^*)^{-1}(t)\right)\\
+\left(\phi_2^2-\phi_1\right)\left(t-(b_2^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_{\tilde{1}}^*)^{-1}(t)+\left(\phi_3-\phi_2^2\right)\left(t-(b_2^*)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}(b_{\hat{1}}^*)^{-1}(t)=0
\end{array}\right.$$

■

Obsérvese que $\left(\gamma_3^2,\gamma_2^{\hat{1}},\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right)\in[0,0]\times[0,0]\times[0,1]\times\left[\gamma_1^{\tilde{1}},1+\alpha\right]\times\left[0,\min\{\alpha,1+\alpha-\gamma_1^2\}\right]$, $\phi_1=1+\alpha$, $\phi_2^1=1$, $\phi_3=0$, $\phi_2^2=\alpha$, en el Caso 2; $\left(\gamma_3^2,\gamma_2^{\hat{1}},\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right)\in[0,\alpha]\times\left[0,\gamma_3^2\right]\times\left[0,1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right]\times\left[\gamma_1^{\tilde{1}},2-\alpha+\gamma_3^2\right]\times\left[0,\min\{2-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2,1+\gamma_3^2\}\right]$, $\phi_1=2$, $\phi_2^1=1$, $\phi_3=\alpha$, $\phi_2^2=1+\alpha$, en el Caso 3 ;y que $\left(\gamma_3^2,\gamma_2^{\hat{1}},\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right)\in[0,1+\alpha]\times\left[0,\gamma_3^2\right]\times\left[0,\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right]\times\left[\gamma_1^{\tilde{1}},1-\alpha+\gamma_3^2\right]\times\left[0,1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2\right]$, $\phi_1=2$, $\phi_2^1=1+\alpha$, $\phi_3=1+\alpha$, $\phi_2^2=2$, en el Caso 4.

A continuación se calcularán los equilibrios bayesianos de Nash, dependiendo del tamaño de la demanda frente al de la capacidad de producción de las empresas.

5.3 Caso 2 $(1 < D = 1 + \alpha \leq 2)$

En este caso la demanda es de la forma $D = 1+\alpha$ (con $0 < \alpha \leq 1$). Las funciones que determinan la distribución del despacho de unidades eléctricas para cada una de las empresas quedan:

$$Q_1(b_1,b_2) = \left\{\begin{array}{ccc} 1+\alpha & \text{si} & M < b_2 \\ 1 & \text{si} & m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} & b_2 < m \end{array}\right.$$

$$Q_2(b_1,b_2) = \left\{\begin{array}{ccc} 1+\alpha & \text{si} & b_2 < m \\ \alpha & \text{si} & m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} & M < b_2 \end{array}\right.$$

5.3.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 2

El precio que el subastador paga a las unidades de producción que generen en el mercado es diferente según el modelo de subasta utilizado para llevar a cabo las transacciones de compraventa de la energía eléctrica. Por ello se analizarán por separado los modelos de subasta que quedan determinados por los vértices de la siguiente región: $RC2 = \{\left(\gamma_1^{\tilde{1}},\gamma_1^2,\beta_1^{\hat{2}}\right) \in [0,1] \times$

$\left[\widetilde{\gamma_1^1}, 1+\alpha\right] \times \left[0, \min\{\alpha, 1+\alpha-\gamma_1^2\}\right]\}$. Estos ocho modelos quedan unívocamente determinados por los valores de los parámetros siguientes:

Modelo	$\widetilde{\gamma_1^1}$	γ_1^2	$\widehat{\beta_1^2}$
A	0	0	0
Vickrey	0	0	α
Uniforme	0	$1+\alpha$	0
B	1	1	0
C	1	1	α
Discriminatoria	1	$1+\alpha$	0

Se analizará cada uno de ellos.

Modelo de subasta A En el modelo A, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1+\alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe la oferta contraria por unidad despachada. La empresa 2 queda fuera del mercado bajo ese supuesto.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe, por unidad, eléctrica la oferta contraria. En ese caso, la empresa 2 despacha α unidades y recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado mientras que la empresa 2, que entra en el mercado despachando toda la demanda $1+\alpha$, recibe el precio unitario m.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)b_2 - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\,m - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.1 *Supongamos que $D = 1 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta A, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = [\theta_1, \theta_1, \theta_2]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.a) y 5.1.2.b), se observa que el modelo A es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = \gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** a, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado y está formado por estrategias dominantes para ambas empresas. ■

Modelo de subasta Vickrey En el modelo de Vickrey, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1 + \alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe la oferta contraria por unidad. La empresa 2 queda fuera del mercado.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe, por unidad, la oferta contraria. En ese caso, la empresa 2 despacha α unidades y recibe el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda la demanda $1 + \alpha$ y recibe $m + \alpha M$: el precio unitario m, por la primera unidad, y el precio unitario M, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} (1+\alpha)b_2 - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} m + \alpha M - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha M - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.2 *Supongamos que $D = 1+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[\theta_1, \theta_1, \theta_2\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.a) y 5.1.2.b), se observa que el modelo de Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = \gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** a, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado y está formado por estrategias dominantes para ambas empresas. ■

Modelo de subasta Uniforme En el modelo Uniforme, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1+\alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe el precio unitario M. La empresa 2 queda fuera del mercado.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe, por unidad, la oferta contraria. En ese caso, la empresa 2, que despacha α unidades, recibe por ello su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda la demanda $1+\alpha$, recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\, M - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.3 *Supongamos que $D = 1 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Uniforme, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.*a*) y 5.1.2.*b*), se observa que el modelo Uniforme es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^2 = 1 + \alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región III**, se puede afirmar cualquier equilibrio bayesiano de Nash es tal que las inversas de sus estrategias en equilibrio verifican el siguiente sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} -\left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (1+\alpha) - (1+\alpha)\left(b^*_2\right)^{-1}(t) - \alpha\left(t - \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (1+\alpha) - (b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - \alpha(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) - \left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - \alpha\left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Si $0 \leq (b^*_{\hat{1}})^{-1}(t)$. Luego $\left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t) = t \Leftrightarrow b^*_{\tilde{1}}(\theta_1) = \theta_1$ es decir, en equilibrio la empresa 1 puja, con la menor de sus ofertas, su propio tipo. Luego, sustituyendo, las otras dos ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} (1+\alpha) - (1+\alpha)\left(b^*_2\right)^{-1}(t) - \alpha\left(t - \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (1+\alpha) - t - \alpha(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) - \left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) - \alpha\left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Llamando $y(t) = \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)$ y $x(t) = \left(b^*_2\right)^{-1}(t)$ se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$(S)\begin{cases} \alpha\,(t - y(t))\, x'(t) + (1+\alpha)\, x(t) - (1+\alpha) = 0 \\ \alpha\,(t - x(t))\, y'(t) + \alpha y(t) + 2t - x(t) - (1+\alpha) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema S

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\alpha\left(t-x(t)\right)y\left(t\right)\right)-\alpha\left(1-x'(t)\right)y\left(t\right)+\alpha y\left(t\right)+2t-x(t)-(1+\alpha) &= 0\Leftrightarrow\\
\frac{d}{dt}\left(\alpha\left(t-x(t)\right)y\left(t\right)\right)+\alpha x'(t)y\left(t\right)+2t-x(t)-(1+\alpha) &= 0\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\alpha\left(t-x(t)\right)y\left(t\right)\right) &= -\alpha x'(t)y\left(t\right)-2t+x(t)+(1+\alpha)\Leftrightarrow\\
\alpha\left(t-x(t)\right)y\left(t\right) &= -\alpha\int x'(t)y\left(t\right)dt-t^2+\int x(t)dt+(1+\alpha)\,t+C
\end{aligned}$$

Sustituimos en esta última expresión $y(t)=t-\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{1-x(t)}{x'(t)}$ obtenido de la primera ecuación del sistema S, quedando

$$\begin{aligned}
\alpha\left(t-x(t)\right)\left(t-\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{1-x(t)}{x'(t)}\right) &= -\alpha\int\left(tx'(t)-\frac{1+\alpha}{\alpha}\left(1-x(t)\right)\right)dt-t^2\\
+\int x(t)dt+(1+\alpha)\,t+C &\Leftrightarrow\\
\alpha\left(t-x(t)\right)\left(t-\frac{1+\alpha}{\alpha}\frac{1-x(t)}{x'(t)}\right) &= -\alpha tx(t)+2\left(1+\alpha\right)t-t^2+C\Leftrightarrow\\
\left(t-x(t)\right)\frac{1-x(t)}{x'(t)} &= t^2-2t+q
\end{aligned}$$

Donde C y q son constantes. Imponiendo la condición $b_2^*(1)=1\Leftrightarrow x(1)=1$ queda

$$q=1$$

Sustituyendo el valor de la constante

$$\begin{aligned}
\frac{1-x(t)}{x'(t)} &= \frac{(t-1)^2}{(t-x(t))}\Leftrightarrow\\
x'(t) &= \frac{(t-x(t))\,(1-x(t))}{(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Se trata de una ecuación de Riccati[4] con solución particular 1, que se transforma en una ecuación lineal mediante el cambio de la variable dependiente, $x(t)=1+\frac{1}{u(t)}$, quedando la ecuación diferencial lineal siguiente:

$$u'(t)+\frac{1}{(1-t)}u(t)=-\frac{1}{(1-t)^2}$$

Su solución general viene dada por la siguiente expresión

$$u(t)=\frac{2k(1-t)^2-1}{2(1-t)}$$

[4] Sólo resoluble si se conoce una solución particular de la misma.

donde k es una constante. Luego obtenemos, para el sistema de ecuaciones diferenciales, la siguiente familia de soluciones verificando la condición $x(1) = 1$

$$x(t) = 1 + \frac{2\,(1-t)}{2k\,(1-t)^2 - 1}$$

$$y(t) = t + \frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{(1-t)\left(2k(t-1)^2 - 1\right)}{(2k(1-t)^2+1)}$$

Además como $b_2^*\,(\theta_2) \geq \theta_2\ \forall\theta_2 \in [0,1] \Rightarrow b_2^*\,(0) > 0 \Leftrightarrow x(0) < 0 \Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k-1} < 0 \Leftrightarrow k \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Sin más condiciones obtenemos infinitos equilibrios de la forma

$$\left(b_{\check{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*\,(\theta_2)\right) = \left(\theta_1, b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*\,(\theta_2)\right)$$

donde

$$\begin{aligned} (b_2^*)^{-1}\,(t) &= 1 + \frac{2\,(1-t)}{2k\,(1-t)^2 - 1} \\ \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t) &= t + \frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{(1-t)\left(2k(t-1)^2 - 1\right)}{(2k(1-t)^2+1)} \end{aligned}$$

Si se verifica que $0 > (b_{\check{1}}^*)^{-1}(t)$ el sistema de ecuaciones diferenciales para las inversas de las estrategias en equilibrio es

$$\begin{cases} -\left(t - \left(b_{\check{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}\,(b_2^*)^{-1}\,(t) = 0 \\ (1+\alpha) - (1+\alpha)\,(b_2^*)^{-1}\,(t) - \alpha\left(t - \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}\,(b_2^*)^{-1}\,(t) = 0 \\ 1 + \alpha - (b_{\check{1}}^*)^{-1}(t) - \left(t - (b_2^*)^{-1}\,(t)\right)\frac{d}{dt}(b_{\hat{1}}^*)^{-1}\,(t) = 0 \end{cases}$$

Luego $\left(b_{\check{1}}^*\right)^{-1}(t) = t \Leftrightarrow b_{\check{1}}^*\,(\theta_1) = \theta_1$ es decir, en equilibrio la empresa 1 puja, con la menor de sus ofertas, su propio tipo. Luego, sustituyendo, las otras dos ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} (1+\alpha) - (1+\alpha)\,(b_2^*)^{-1}\,(t) - \alpha\left(t - \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right)\frac{d}{dt}\,(b_2^*)^{-1}\,(t) = 0 \\ 1 + \alpha - 2t + (b_2^*)^{-1}\,(t) = 0 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} (1+\alpha) - (1+\alpha)\,(2t - 1 - \alpha) - 2\alpha\left(t - \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}(t)\right) = 0 \\ (b_2^*)^{-1}\,(t) = 2t - 1 - \alpha \end{cases}$$

Por ejemplo, para la empresa 2 queda que la inversa de una estrategia en equilibrio debe verificar

$$\left(b_2^*\right)^{-1}(t) = \begin{cases} 2t - 1 - \alpha & \text{si} \quad t < b_{\hat{1}}^*(0) \\ 1 + \frac{2(1-t)}{2k(1-t)^2 - 1} & \text{si} \quad t \geq b_{\hat{1}}^*(0) \end{cases}$$

donde

$$b_{\hat{1}}^*(0) = \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{2(1+\alpha)}$$

como tiene que ser una función continua se debe verificar

$$2b_{\hat{1}}^*(0) - 1 - \alpha = 1 + \frac{2\left(1 - b_{\hat{1}}^*(0)\right)}{2k\left(1 - b_{\hat{1}}^*(0)\right)^2 - 1}$$

$\Leftrightarrow$

$$k = \frac{2(2\alpha+1)^3}{\alpha^2(\alpha+2)(\alpha-1)^2} \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Luego no existe ningún equilibrio bayesiano de Nash bajo las hipótesis del modelo definido al principio del presente capítulo en el que la empresa 1 puje ofertas diferentes con sus dos unidades de producción.

Si la empresa 1 realiza la misma puja con sus dos unidades de producción queda un caso particular del Capítulo 2 en el que la función de beneficio está dada por

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} (1+\alpha)(b_i - \theta_i) & \text{si} \quad b_i < b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_j < b_i \end{cases}$$

Se trata del modelo Uniforme\Discriminatorio del Caso 1 del Capítulo 2 con $D = 1 + \alpha$. Por la Proposición 2.5.1. el equilibrio bayesiano de Nash Simétrico es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta B En el modelo B, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1 + \alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe $m + \alpha b_2$: el precio unitario m, por la primera unidad, y la oferta contraria, por las α unidades restantes. La empresa 2 queda fuera del mercado.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe el precio unitario m. En ese caso, la empresa 2, que despacha α unidades, recibe por ello su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda la demanda $1 + \alpha$ y recibe $b_2 + \alpha m$: su propia oferta, por la primera unidad, y el precio unitario m, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} m + \alpha b_2 - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} b_2 + \alpha m - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha b_2 - \alpha \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.4 *Supongamos que $D = 1+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\hat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[\frac{1+(1+\alpha)\,\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\,\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\,\theta_2}{2+\alpha}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.a) y 5.1.2.b), se observa que el modelo B es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^{\tilde{1}} = 1$,$\gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^2 = 1$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta C En el modelo C, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1+\alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe $m + \alpha b_2$: el precio unitario m, por la primera unidad, y la oferta contraria, por las α unidades restantes. La empresa 2 queda fuera del mercado.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe el precio unitario m. En ese caso, la empresa 2, que despacha α unidades, recibe el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda la demanda $1+\alpha$ y recibe $b_2+\alpha M$: su propia oferta, por la primera unidad, y el precio unitario M, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} m+\alpha b_2-(1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M<b_2 \\ m-\theta_1 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ 0 & \text{si} \quad b_2<m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} b_2+\alpha M-(1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2<m \\ \alpha M-\alpha\theta_2 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ 0 & \text{si} \quad M<b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.5 *Supongamos que $D=1+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta C, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\hat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[\frac{1+(1+\alpha)\,\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\,\theta_1}{2+\alpha}, \frac{1+(1+\alpha)\,\theta_2}{2+\alpha}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.a) y 5.1.2.b), se observa que el modelo C es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_1^{\tilde{1}}=1$,$\gamma_3^2=\gamma_2^{\hat{1}}=0$, $\gamma_1^2=1$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta Discriminatoria En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha $1+\alpha$ unidades (toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades de la unidad de producción de mayor oferta) y recibe la oferta correspondiente a la unidad de producción que despacha. La empresa 2 queda fuera del mercado.

Si $m<b_2<M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe, por unidad, m. En ese caso, la empresa 2, que despacha α unidades, recibe por ello su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 queda fuera del mercado mientras que la empresa 2, que entra en el mercado despachando toda la demanda $1 + \alpha$, recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} m + \alpha M - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\,b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 0 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.3.6 *Supongamos que $D = 1 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Discriminatorio, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 2, por las expresiones 5.1.2.a) y 5.1.2.b), se observa que el modelo Discriminatorio es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma^{\tilde{1}}_1 = 1, \gamma^2_3 = \gamma^{\hat{1}}_2 = 0$, $\gamma^2_1 = 1 + \alpha$. Luego tomando $k = \alpha$ y por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

5.3.2 Ingresos en el Caso 2

Calculemos el ingreso esperado por las empresas y lo que espera pagar el Operador del Mercado en cada modelo de subasta si las dos empresas juegan en equilibrio. El precio que el Operador del Mercado espera pagar por la demanda, bajo un formato de subasta f si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente, viene dado por:

$$P^f_{omer} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P^f_i(\theta_i)]$$

donde $P^f_i(\theta_i)$ recordemos que denota el pago esperado por la empresa i si su tipo es θ_i bajo un modelo de subasta f.

La primera observación que debemos hacer es que aquellos modelos de subasta en los que la estrategia en equilibrio de todas las unidades de producción es la misma se encuentran en un caso particular del modelo analizado en el Capítulo 2. Más concretamente son un caso particular del Caso 1 del Capítulo 2 con $D = 1+\alpha$ y $\gamma_1 = \gamma_1^2$. Luego por la Sección 2.3.1. se puede afirmar que el ingreso que espera cada una de las empresas es el mismo en todos los modelos mencionados y es

$$P_i(\theta_i) = \frac{(1+\alpha)\left(1-\theta_i^2\right)}{2}$$

El pago que espera hacer el subastador también coincide en todos los modelos de subasta mencionados y es

$$P_{omer}^f = \frac{2(1+\alpha)}{3}$$

5.4 Caso 3 $(2 < D = 2 + \alpha < 3)$

En este caso la cantidad de unidades eléctricas que generará cada empresa en el mercado viene dada por:

$$Q_1(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad M < b_2 \\ 1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$Q_2(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 1+\alpha & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

siendo $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ y $M = max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$.

5.4.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 3.

El precio que el subastador paga a las unidades de producción que generen en el mercado es diferente según el modelo de subasta utilizado para llevar a cabo las transacciones de compraventa de la energía eléctrica. Por ello se analizarán, por separado, los modelos de subasta que quedan determinados por los vértices de la siguiente región: $RC3 = \{\left(\gamma_3^2, \gamma_2^{\hat{1}}, \gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_{\hat{1}}^{\hat{2}}\right) \in [0,\alpha] \times \left[0, \gamma_3^2\right] \times \left[0, 1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_2^{\hat{1}}\right] \times \left[\gamma_1^{\tilde{1}}, 2-\alpha+\gamma_3^2\right] \times \left[0, \min\{2-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2, 1+\gamma_3^2\}\right]\}$. Estos dieciocho modelos quedan unívocamente determinados por los valores los parámetros y son los siguientes:

Modelo	γ_3^2	$\gamma_2^{\widehat{1}}$	$\gamma_1^{\widetilde{1}}$	γ_1^2	$\beta_1^{\widehat{2}}$
$A1$	0	0	0	0	0
Uniforme	α	0	0	0	0
$A2$	α	α	0	0	0
$B1$	0	0	$1-\alpha$	$1-\alpha$	0
$B2$	α	0	1	1	0
$B3$	α	α	$1-\alpha$	$1-\alpha$	0
$C1$	0	0	$1-\alpha$	$1-\alpha$	1
$C2$	α	0	1	1	1
$C3$	α	α	$1-\alpha$	$1-\alpha$	$1+\alpha$
$D1$	0	0	$1-\alpha$	$2-\alpha$	0
Discriminatoria	α	0	1	2	0
$D2$	α	α	$1-\alpha$	2	0
Vickrey	0	0	0	0	1
$V1$	α	0	0	0	$1+\alpha$
$V2$	α	α	0	0	$1+\alpha$
$U1$	0	0	0	$2-\alpha$	0
$U2$	α	0	0	2	0
$U3$	α	α	0	2	0

Se analizará cada uno de ellos.

Modelo de subasta A1 En el modelo A1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(2-\alpha)b_2+\alpha$: la oferta contraria, por cada una de las $2-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades, el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\,b_2+\alpha$: la oferta contraria, por cada una de las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1 + \alpha$ unidades y recibe $b_2 + \alpha$: su propia oferta por la primera unidad y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando el total de su capacidad y recibe $(2 - \alpha)\, m + \alpha$: el precio unitario m, por las $2 - \alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (2-\alpha)b_2 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, b_2 + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (2-\alpha)\, m + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ b_2 + \alpha - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.1 *Supongamos que $D = 2 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta A1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = [\theta_1, \theta_1, \theta_2]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo A1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** a, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado y está formado por estrategias dominantes para ambas empresas. ■

Modelo de subasta Uniforme En el modelo Uniforme, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia puja.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta. Recibe la oferta contraria por cada unidad despachada. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por cada unidad despachada.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando el total de su capacidad, recibe el precio unitario m.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.2 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Uniforme, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\begin{aligned} & \left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] \\ = & \left[\frac{(2-\alpha)\,\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1-\alpha)}\right] \end{aligned}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.*a*) y 5.1.3.*b*), se observa que el modelo Uniforme es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta A2 En el modelo A2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 recibe, por unidad, despachada (que es toda su capacidad de producción) la oferta contraria. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades, su propia puja.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $\alpha M + (1-\alpha)\, b_2$: el precio unitario M, por las α primeras unidades, y la oferta contraria, por las $1-\alpha$ unidades restantes. En ese caso la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por cada unidad despachada.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando el total de su capacidad, recibe el precio unitario m.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \alpha M + (1-\alpha)\, b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha M - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} 2m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.3 *Supongamos que $D = 2 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta A2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\begin{aligned} & \left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] \\ = & \left[\frac{(2-\alpha)\,\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2(1-\alpha)}\right] \end{aligned}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.*a*) y 5.1.3.*b*), se observa que el modelo A2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

Modelo de subasta B1 En el modelo B1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\, m + b_2 + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, la oferta contraria por cada una de las 1 unidades siguientes y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y el precio máximo por unidad despachada.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\,m + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $b_2 + \alpha$: su propia oferta por la primera unidad y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + m + \alpha$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, el precio unitario m por la siguiente unidad y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\,m + b_2 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\,m + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2 + m + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ b_2 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.4 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{(2-\alpha)\,\theta_1 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_1 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_2 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de B1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma^2_3 = \gamma^{\hat{1}}_2 = 0$, $\gamma^{\tilde{1}}_1 = 1-\alpha$, $\gamma^2_1 = 1-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

Modelo de subasta B2 En el modelo B2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad de producción y recibe $b_2 + m$: el precio unitario m, por la primera unidad, y la oferta contraria por la unidad restante. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe el precio unitario m. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1 + \alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por unidad despachada.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $b_2 + m$: su propia oferta, por la primera unidad, y el precio unitario m, por la unidad restante.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} m + b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} b_2 + m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.5 *Supongamos que $D = 2 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[b^*\left(\theta_1\right), b^*\left(\theta_1\right), b^*\left(\theta_2\right)\right]$$

con

$$b^*\left(\theta_i\right) = \frac{(2-\alpha)\,\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}} \left(1 - (1-\alpha)\,\theta_i\right)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}}{3 - 2\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de B2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 1$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado. ■

Modelo de subasta B3 En el modelo B3, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)m + (1+\alpha)b_2$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y la oferta contraria por las $1+\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\, m + \alpha M$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe $(1-\alpha)\, b_2 + (1+\alpha)\, m$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario m, por las $1+\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)m + (1+\alpha)b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, m + \alpha M - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha M - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + (1+\alpha)\, m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.4.6 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B3, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

con

$$b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\,\theta_i + 1 - \alpha - \alpha^{\frac{3\alpha-3}{2\alpha-1}}\left(1 - \alpha - (1 - 21 - \alpha)\,\theta_i\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}}}{3 - 3\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de B3 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 1-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

Modelo de subasta C1 En el modelo C1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\,m + b_2 + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, la oferta contraria por la unidad siguiente y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada unidad el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\,m + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $M + \alpha$: el precio unitario M, por la primera unidad, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + M + \alpha$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, el precio unitario M, por la unidad siguiente, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (1-\alpha)\, m + b_2 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, m + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (1-\alpha)\, b_2 + M + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ M + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.7 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta C1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[\frac{(2-\alpha)\,\theta_1 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_1 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}, \frac{(2-\alpha)\,\theta_2 + 1 - \alpha}{3-2\alpha}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de C1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 1-\alpha$, $\gamma_1^2 = 1-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta C2 En el modelo C2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad de producción y recibe $b_2 + m$: el precio unitario m, por la primera unidad, y la oferta contraria por la unidad restante. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe el precio unitario m. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $\alpha b_2 + M$: su propia oferta por cada una de las α primeras unidades y el precio unitario M, por la unidad restante.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe, por ello, el precio unitario M. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $b_2 + M$: su propia oferta por la primera unidad y el precio unitario M, por la unidad restante.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} m + b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} b_2 + M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \alpha b_2 + M - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.8 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta C2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b_{\tilde{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

con

$$b^*(\theta_i) = \frac{(2-\alpha)\,\theta_i + 1 - \alpha^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}}\left(1-(1-\alpha)\,\theta_i\right)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}}{3-2\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de C2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 1$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta C3 En el modelo C3, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)m + (1+\alpha)b_2$: el precio unitario m, por cada una de las $1+\alpha$ primeras unidades, y la oferta contraria, por las $1+\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades, su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\,m + \alpha M$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\,b_2+(1+\alpha)\,M$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las $1+\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (1-\alpha)m+(1+\alpha)b_2-2\theta_1 & \text{si} \quad M<b_2 \\ (1-\alpha)\,m+\alpha M-\theta_1 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ \alpha M-\alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2<m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2+(1+\alpha)\,M-2\theta_2 & \text{si} \quad b_2<m \\ (1+\alpha)\,M-(1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m<b_2<M \\ \alpha b_2-\alpha\theta_2 & \text{si} \quad M<b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.9 *Supongamos que $D=2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta C3, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1)\,,b^*_{\hat{1}}(\theta_1)\,,b^*_2(\theta_2)\right]=\left[b^*(\theta_1)\,,b^*(\theta_1)\,,b^*(\theta_2)\right]$$

con

$$b^*(\theta_i)=\frac{(2-\alpha)\,\theta_i+1-\alpha-\alpha^{\frac{3\alpha-3}{2\alpha-1}}\,(1-\alpha-(1-21-\alpha)\,\theta_i)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}}}{3-3\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de C3 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2=\alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}}=\alpha$, $\gamma_1^{\tilde{1}}=\gamma_1^2=1-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta D1 En el modelo D1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)m+M+\alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, el precio unitario M, por la unidad siguiente, y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\, m + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $b_2 + \alpha$: su propia oferta por la primera unidad y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(2-\alpha)\, b_2 + \alpha$: su propia oferta, por las $2-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (1-\alpha)m + M + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, m + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \;=\; \begin{cases} (2-\alpha)\, b_2 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ b_2 + \alpha - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.10 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta D1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de D1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = 1-\alpha$, $\gamma_1^2 = 2-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** b, con $k = \frac{1}{1-\alpha}$, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

Modelos de subasta Discriminatorio En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe sus propias ofertas, por unidad despachada. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe, por cada una de esas α unidades, su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe el precio unitario m por unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por cada unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual recibiendo m por cada unidad. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} m + M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.11 *Supongamos que $D = 2 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Discriminatorio, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_1^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_1^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_2^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_2)}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo Discriminatorio es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = 1$, $\gamma_1^2 = 2$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta D2 En el modelo D2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)m + (1+\alpha)M$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las $1+\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)m + \alpha M$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe por ello su propia oferta por cada unidad

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual recibiendo por cada unidad el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por unidad

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)m + (1+\alpha)M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)m + \alpha M - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha M - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)b_2 - (1+\alpha)\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.12 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta D2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b_{\widehat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right] = \left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de D2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 1-\alpha$, $\gamma_1^2 = 2$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta de Vickrey En el modelo de Vickrey, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(2-\alpha)b_2+\alpha$: la oferta contraria por cada una de las $2-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\, b_2 + \alpha$: la oferta contraria, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $M+\alpha$: el precio unitario M, por la primera unidad, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\, m + M + \alpha$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, el precio unitario M, la siguiente unidad, y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (2-\alpha)b_2 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, b_2 + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, m + M + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ M + \alpha - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.13 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta de Vickrey, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[\theta_1, \theta_1, \theta_2\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de

Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** a, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado y además está formado por estrategias dominantes para ambas empresas. ■

Modelo de subasta V1 En el modelo V1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe la oferta contraria por cada unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1 + \alpha$ unidades, recibe por ello el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1 - \alpha)\, m + (1 + \alpha)\, M$: el precio unitario m, por las $1 - \alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las $1 + \alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1 - \alpha)\, m + (1 + \alpha)\, M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1 + \alpha)\, M - (1 + \alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.14 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta V1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\begin{aligned} &\left[b_{\tilde{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right] \\ = &\left[\frac{(2 - \alpha)\, \theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1 - \alpha)}, \frac{(2 - \alpha)\, \theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1 - \alpha)}, \frac{(2 - \alpha)\, \theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\,(1 - \alpha)}\right] \end{aligned}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de V1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ∎

Modelo de subasta V2 En el modelo V2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe, por unidad, su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $\alpha M + (1-\alpha)\, b_2$: el precio unitario M, por las α primeras unidades, y la oferta contraria por las $1-\alpha$ unidades restantes. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual recibiendo por M por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\, m + (1+\alpha)\, M$: el precio unitario m, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las $1+\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \alpha M + (1-\alpha)\, b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha M - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}
$$

$$
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, m + (1+\alpha)\, M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, M - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
$$

Proposición 5.4.15 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta V2, el único equilibrio bayesiano* *de Nash es:*

$$
\begin{aligned}
&\left[b_{\widetilde{1}}^{*}\left(\theta_1\right), b_{\widehat{1}}^{*}\left(\theta_1\right), b_{2}^{*}\left(\theta_2\right)\right] \\
= \; &\left[\frac{\left(2-\alpha\right)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\left(1-\alpha\right)}, \frac{\left(2-\alpha\right)\theta_1 - \alpha\theta_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\left(1-\alpha\right)}, \frac{\left(2-\alpha\right)\theta_2 - \alpha\theta_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{2\left(1-\alpha\right)}\right]
\end{aligned}
$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.*a*) y 5.1.3.*b*), se observa que el modelo de V2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado. ■

Modelo de subasta U1 En el modelo U1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(2-\alpha)M+\alpha$: el precio unitario M, por las $2-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $(1-\alpha)\,b_2 + \alpha$: la oferta contraria, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2 despacha $1+\alpha$ unidades y recibe $b_2 + \alpha$: su propia oferta por la primera unidad y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(2-\alpha)\,b_2 + \alpha$: su propia oferta por cada una de las $2-\alpha$ primeras unidades y el precio máximo, por las α unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (2-\alpha)M + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1-\alpha)\, b_2 + \alpha - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (2-\alpha)\, b_2 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ b_2 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.16 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta U1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de A1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma^2_3 = \gamma^{\hat{1}}_2 = \gamma^{\tilde{1}}_1 = 0$, $\gamma^2_{\tilde{1}} = 2-\alpha$, $\beta^{\hat{2}}_{\tilde{1}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región III**, podemos afirmar que todo equilibrio bayesiano de Nash debe ser solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (2-\alpha)\left(1 - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (2-\alpha)\left(1 - (b^*_{\hat{1}})^{-1}(t)\right) + \left((b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - (b^*_{\hat{1}})^{-1}(t)\right) \\ -(1-\alpha)\left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t) - \left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

si $0 \leq (b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t)$. Se observa que queda como estrategia dominante, para la unidad de la empresa 1 de menor oferta, $b^*_{\tilde{1}}(\theta_1) = \theta_1$. Sustituyendo en las otras dos ecuaciones del sistema se obtiene

$$\begin{cases} (2-\alpha)\left(1 - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ (2-\alpha) - (1-\alpha)\,t - (b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) - (1-\alpha)\left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_2\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}(b^*_{\hat{1}})^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

llamando $y(t) = \left(b^*_{\hat{1}}\right)^{-1}(t)$ y $x(t) = \left(b^*_2\right)^{-1}(t)$ queda:

$$S = \begin{cases} (2-\alpha)\,(1 - x(t)) - (t - y(t))\,\frac{d}{dt}\left(b^*_2\right)^{-1}(t) = 0 \\ 2 - \alpha - 2\,(1-\alpha)\,t - y(t) + (1-\alpha)\,x(t) - (t - x(t))\,\frac{d}{dt}y(t) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema S

$$\frac{d}{dt}\left(\left(t - x(t)\right) y\left(t\right)\right) = 2 - \alpha - 2\left(1-\alpha\right) t + \left(1-\alpha\right) x(t) - y\left(t\right) x'\left(t\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(t - x(t)\right) y\left(t\right) = \left(2-\alpha\right) t - \left(1-\alpha\right) t^2 + \left(1-\alpha\right) \int x(t) dt - \int x'(t) y\left(t\right) dt + C$$

Sustituimos en esta última expresión $y(t) = t - (2-\alpha) \frac{1-x(t)}{x'(t)}$ obtenido de la primera ecuación del sistema S, quedando

$$\left(t - x(t)\right) \frac{1-x(t)}{x'(t)} = t^2 - 2t + q$$

Donde q es constante. Imponiendo la condición $b_2^*\left(1\right) = 1 \Leftrightarrow x(1) = 1$ queda

$$q = 1$$

Sustituyendo el valor de la constante

$$x'(t) = \frac{\left(t - x(t)\right)\left(1 - x(t)\right)}{\left(t-1\right)^2}$$

Se trata de una ecuación de Riccati resuelta en la Proposición 5.5.8.. Allí se obtuvo

$$x(t) = 1 + \frac{2\left(1-t\right)}{2k\left(1-t\right)^2 - 1}$$

con k constante. Luego

$$y(t) = t - \left(2-\alpha\right) \frac{1-x(t)}{x'(t)}$$

$$y(t) = 2 - \alpha - \left(1-\alpha\right) t - 2\left(2-\alpha\right) \frac{1-t}{2k(1-t)^2 + 1}$$

Además como $b_2^*\left(\theta_2\right) \geq \theta_2 \ \forall \theta_2 \in [0,1] \Rightarrow b_2^*\left(0\right) > 0 \Leftrightarrow x(0) < 0 \Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k-1} < 0 \Leftrightarrow k \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Sin más condiciones iniciales obtenemos infinitos equilibrios de la forma

$$\left(b_{\bar{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*\left(\theta_2\right)\right) = \left(\theta_1, b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*\left(\theta_2\right)\right)$$

donde

$$\begin{aligned} \left(b_2^*\right)^{-1}\left(t\right) &= 1 + \frac{2\left(1-t\right)}{2k\left(1-t\right)^2 - 1} \\ \left(b_{\hat{1}}^*\right)^{-1}\left(t\right) &= 2 - \alpha - \left(1-\alpha\right) t - 2\left(2-\alpha\right) \frac{1-t}{2k(1-t)^2 + 1} \end{aligned}$$

Si se verifica que $0 > (b^*_{\tilde{1}})^{-1}(t)$ el sistema de ecuaciones diferenciales para las inversas de las estrategias en equilibrio es

$$\begin{cases} \left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = 0 \\ (2-\alpha)\left(1 - \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = 0 \\ 2 - \alpha - (1-\alpha)\left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t) - (1-\alpha)\left(t - \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Luego $\left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t) = t \Leftrightarrow b^*_{\tilde{1}}(\theta_1) = \theta_1$ es decir, en equilibrio la empresa 1 oferta con la menor de sus pujas es su propio tipo. Luego, sustituyendo, las otras dos ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} (2-\alpha)\left(1 - \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = 0 \\ 2 - \alpha - (1-\alpha)t - (1-\alpha)\left(t - \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t)\right) = 0 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} (2-\alpha)\left(1 - \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t)\right) - \left(t - \left(b^*_{\tilde{1}}\right)^{-1}(t)\right) \frac{d}{dt}\left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = 0 \\ \left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = \frac{-(2-\alpha)+2(1-\alpha)t}{1-\alpha} \end{cases}$$

Resumiendo, por ejemplo para la empresa 2 queda que la inversa de una estrategia en equilibrio debe verificar

$$\left(b^*_{\tilde{2}}\right)^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{-(2-\alpha)+2(1-\alpha)t}{1-\alpha} & \text{si} \quad t < b^*_{\tilde{1}}(0) \\ 1 + \frac{2(1-t)}{2k(1-t)^2 - 1} & \text{si} \quad t \geq b^*_{\tilde{1}}(0) \end{cases}$$

obsérvese que si $b^*_{\tilde{2}}(\theta_2) < b^*_{\tilde{1}}(0) = \frac{(\alpha-2)(2\alpha-3)}{2(\alpha-1)(\alpha-3)}$, $b^*_{\tilde{2}}(\theta_2) = \frac{(1-\alpha)\theta_2+(2-\alpha)}{2(1-\alpha)}$ lo cual es imposible ya que $\frac{(1-\alpha)\theta_2+(2-\alpha)}{2(1-\alpha)} > 1$.

Luego no existe ningún equilibrio bayesiano de Nash bajo las hipótesis del modelo definido al principio del presente capítulo en el que la empresa 1 puje ofertas diferentes con sus dos unidades de producción.

Si la empresa 1 realiza la misma puja con sus dos unidades de producción queda un caso particular del Capítulo 2 en el que la función de beneficio está dada por

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} (2-\alpha)\,b_i + \alpha - 2\theta_i & \text{si} \quad b_i < b_j \\ \alpha\,(1-\theta_i) & \text{si} \quad b_j < b_i \end{cases}$$

Si se calcula el equilibrio bayesiano de Nash de la misma manera que se hizo en la Proposición 2.2.1. se obtiene el equilibrio dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta U2 En el modelo U2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe el precio unitario M. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe, por unidad, su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe la oferta contraria por cada unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha $1 + \alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por cada unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual recibiendo el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha m - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha) b_2 - (1+\alpha)\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.17 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta U2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_1^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\theta_2^2}{2(2-(2-\alpha)\theta_2)}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de U2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = 0$, $\gamma_1^2 = 2$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta U3 En el modelo U3, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe el precio unitario M. La empresa 2 entra despachando la demanda residual y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y recibe $\alpha M + (1-\alpha)\, b_2$: el precio unitario M, por las α primeras unidades, y la oferta contraria, por las $1-\alpha$ unidades restantes. En ese caso la empresa 2, que despacha $1+\alpha$ unidades, recibe por ello su propia oferta por cada unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por unidad despachada.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} 2M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \alpha M + (1-\alpha)\, b_2 - \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha M - \alpha\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \alpha b_2 - \alpha\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.4.18 *Supongamos que $D = 2+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta U3, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*_{\widehat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[\frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_1^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_1^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_1)}, \frac{2+\alpha-(2-\alpha)\,\theta_2^2}{2\,(2-(2-\alpha)\,\theta_2)}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 3, por las expresiones 5.1.3.a) y 5.1.3.b), se observa que el modelo de U3 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 2$, $\gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

5.4.2 Ingresos en el Caso 3

Calculemos el ingreso esperado por las empresas y lo que espera pagar el Operador del Mercado, en cada modelo de subasta, si ambas empresas juegan en equilibrio. El precio que el Operador del Mercado espera pagar por la demanda eléctrica, bajo un formato de subasta f, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente viene dado por:

$$P_{omer}^{f} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^f(\theta_i)]$$

donde $P_i^f(\theta_i)$ recordemos que denota el pago esperado por la empresa i si su tipo es θ_i bajo un modelo de subasta f.

La primera observación que debemos hacer es que aquellos modelos de subasta en los que la estrategia de todas las unidades de producción es la misma cuando juegan en equilibrio se encuentran en un caso particular del modelo analizado en el Capítulo 2. Más concretamente, todos los modelos analizados en la Sección 5.5.1. son un caso particular del Caso 2 del Capítulo 2 con $D = 2 + \alpha$. Luego por la Sección 2.3.2. se puede afirmar que el ingreso que espera cada una de las empresas es el mismo en todos los modelos mencionados y es

$$P_i(\theta_i) = \frac{2-\alpha}{2}\left(1-\theta_i^2\right) + \alpha$$

El pago que espera hacer el subastador también coincide en todos los modelos de subasta mencionados y es

$$P_{omer}^{f} = \frac{4(1+\alpha)}{3}$$

5.5 Caso 4 $(3 \leq D = 3 + \alpha < 4)$

En este caso la cantidad de unidades eléctricas que generará cada empresa en el mercado viene dada por:

$$Q_1(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad M < b_2 \\ 1+\alpha & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 1+\alpha & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$Q_2(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 1+\alpha & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

siendo $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ y $M = max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$. Debe observarse que en el Caso 4 $\phi_3 = \phi_2^1$, $\phi_1 = \phi_2^2$. De tal manera que se pueden dar, en determinados modelos de subasta, los equilibrios bayesianos de Nash de la Región I que enuncia la Proposición 5.2.1..

5.5.1 Equilibrios bayesianos de Nash en el Caso 4.

El precio que el subastador paga a las unidades de producción que generen en el mercado es diferente según el modelo de subasta utilizado para llevar a cabo las transacciones de compraventa de la energía eléctrica. Por ello se analizarán, por separado, los modelos de subasta que quedan determinados por los vértices de la siguiente región: $RC4 = \{\left(\gamma_3^2, \gamma_2^{\widehat{1}}, \gamma_1^{\widetilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^{\widehat{2}}\right) \in [0, 1+\alpha] \times [0, \gamma_3^2] \times \left[0, \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right] \times \left[\gamma_1^{\widetilde{1}}, 1-\alpha+\gamma_3^2\right] \times [0, 1-\alpha+\gamma_3^2-\gamma_1^2]\}$. Estos 12 modelos quedan unívocamente determinados por los valores fijos de los parámetros. Además, se ha añadido el modelo Discriminatorio que perteneciendo a la familia de modelos anterior no es ninguno de los vértices de la región a la que pertenece los parámetros. Luego los trece modelos que se van a analizar vienen dados por la siguiente tabla:

Modelo	γ_3^2	$\gamma_2^{\widehat{1}}$	$\gamma_1^{\widetilde{1}}$	γ_1^2	$\beta_1^{\widehat{2}}$
$A1B1$	0	0	0	0	0
Vickrey	0	0	0	0	$1-\alpha$
$U1D1$	0	0	0	$1-\alpha$	0
UN	$1+\alpha$	0	0	0	0
$V1$	$1+\alpha$	0	0	0	2
$U2$	$1+\alpha$	0	0	2	0
$B2$	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0
$C2$	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	$1+\alpha$	$1-\alpha$
DI	$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	2	0
$B3A2$	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	0	0
Uniforme	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	0	2
$D2U3$	$1+\alpha$	$1+\alpha$	0	2	0
Discriminatoria	$1+\alpha$	α	1	2	0

Modelo de subasta A1B1 En el modelo A1B1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)b_2 + 1 + \alpha$: la oferta contraria, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1 + \alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe por cada una de esas $1 + \alpha$ unidades, el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción; recibiendo el precio máximo por unidad despachada. En ese caso, la empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1 - \alpha)\, b_2 + 1 + \alpha$: su propia oferta, por las $1 - \alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por cada unidad de las $1 + \alpha$ restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1 - \alpha)\, m + 1 + \alpha$: el precio unitario m, por las $1 - \alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1 + \alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)b_2 + 1 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)\,m + 1 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ (1-\alpha)\,b_2 + 1 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.5.1 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta A1B1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = [\theta_1, \theta_1, \theta_2]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo A1B1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** a, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado. ■

Modelo de subasta de Vickrey En el modelo de Vickrey, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)b_2 + 1 + \alpha$: la oferta contraria, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1+\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe por cada una de esas $1+\alpha$ unidades, el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo el precio máximo por unidad despachada. En ese caso, la empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha)\, M + 1 + \alpha$: el precio unitario M, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1+\alpha$ unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción y recibe $(1-\alpha)\, M + 1 + \alpha$: el precio unitario M, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1+\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)b_2 + 1 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1-\alpha)\,M + 1 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.5.2 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta de Vickrey, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, todos ellos de la forma:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), \theta_1, \theta_2\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo de Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 =$

$\beta_{\widehat{1}}^{2} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región I** a, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash y son los dados en el enunciado. ■

Modelo de subasta U1D1 En el modelo U1D1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha) M + 1 + \alpha$: el precio unitario M, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo, por las $1+\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe por cada una de esas $1+\alpha$ unidades, el precio máximo.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción; recibiendo el precio máximo por unidad despachada. En ese caso, la empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha) b_2 + 1 + \alpha$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo por cada unidad de las $1+\alpha$ restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) recibe por ello el precio máximo por cada unidad. La empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1-\alpha) b_2 + 1 + \alpha$: su propia oferta, por las $1-\alpha$ primeras unidades, y el precio máximo por cada unidad de las $1+\alpha$ restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\check{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)M + 1 + \alpha - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\check{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\,b_2 + 1 + \alpha - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ 1 + \alpha - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.5.3 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta U1D1, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, todos ellos de la forma:*

$$\left[b_{\check{1}}^{*}(\theta_1), b_{\hat{1}}^{*}(\theta_1), b_2^{*}(\theta_2)\right] = \left[b_{\check{1}}^{*}(\theta_1), \frac{1+\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo de

Vickrey es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_1^{\widetilde{1}} = 0$, $\gamma_{\widetilde{1}}^2 = 1 - \alpha$, $\beta_1^{\widehat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región I** b, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash y son los dados en el enunciado. ■

Modelo de subasta UN En el modelo UN, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria por cada unidad. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1 + \alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción; recibiendo la oferta contraria por unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad despachada.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1 + \alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe el precio unitario m.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\, m - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.5.4 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta UN, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b_{\widetilde{1}}^* (\theta_1), b_{\widehat{1}}^* (\theta_1), b_2^* (\theta_2)\right] = \left[b^* (\theta_1), b^* (\theta_1), b^* (\theta_2)\right]$$

donde

$$b^* (\theta_i) = \frac{-(1-\alpha)\, \theta_i + (1+\alpha)\, \theta_i^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo UN es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = \beta_1^{\widehat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta V1 En el modelo V1, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria por cada unidad. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1 + \alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibe la oferta contraria por unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe el precio unitario M por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1 + \alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe el precio unitario M.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\, m - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2M - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.5.5 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta V1, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b_{\tilde{1}}^*(\theta_1), b_{\hat{1}}^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{-(1-\alpha)\,\theta_i + (1+\alpha)\,\theta_i^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo V1 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 0, \beta_1^{\widehat{2}} = 2$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta U2 En el modelo U2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe el precio unitario M. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1+\alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo la oferta contraria por unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por cada unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\,b_2 - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\,m - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\,b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.5.6 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta U2, el único equilibrio bayesiano* *de Nash es:*

$$\left[b_{\hat{1}}^{*}(\theta_1), b_{\tilde{1}}^{*}(\theta_1), b_2^{*}(\theta_2)\right] = \left[b^{*}(\theta_1), b^{*}(\theta_1), b^{*}(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^{*}(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\left(3+\alpha-(1-\alpha)\theta_i^2\right)}{2(1-\alpha)(2-(1-\alpha)\theta_i)}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo U2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_1^{\tilde{1}} = 0$, $\gamma_1^2 = 2$, $\beta_1^{\hat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado. ■

Modelo de subasta B2 En el modelo B2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1+\alpha)m + (1-\alpha)b_2$: el precio unitario m por cada una de las $1+\alpha$ primeras unidades y la oferta contraria por las $1-\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1+\alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo el precio unitario m por unidad. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe $(1+\alpha)b_2 + (1-\alpha)m$: su propia oferta, por las $1+\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario m, por las $1-\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\,m + (1-\alpha)\,b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\,m - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\,m - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\,b_2 + (1-\alpha)\,m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha)\,b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.5.7 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}\left(\theta_1\right), b^*_{\widehat{1}}\left(\theta_1\right), b^*_2\left(\theta_2\right)\right] = \left[b^*\left(\theta_1\right), b^*\left(\theta_1\right), b^*\left(\theta_2\right)\right]$$

donde

$$b^*\left(\theta_i\right) = \theta_i + \frac{(1+\alpha)\left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(1-\alpha)}{1+\alpha}}\right)}{1-\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo B2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 1+\alpha$, $\beta_1^{\widehat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** d, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta C2 En el modelo C2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1+\alpha)\,m + (1-\alpha)\,b_2$: el precio unitario m por cada una de las $1+\alpha$ primeras unidades y la oferta contraria por las $1-\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1+\alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción y recibe el precio unitario m por unidad. En ese caso, la empresa 2 despacha toda su capacidad y recibe $(1+\alpha)\,b_2 + (1-\alpha)\,M$:

su propia oferta, por las $1+\alpha$ primeras unidades, y el precio unitario M, por las $1-\alpha$ unidades restantes.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe $(1+\alpha)\, b_2 + (1-\alpha)\, M$: su propia oferta, por las $1+\alpha$ primeras unidades, y M por las $1-\alpha$ unidades restantes.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\, m + (1-\alpha)\, b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\, m - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) = \begin{cases} (1+\alpha)\, b_2 + (1-\alpha)\, M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

Proposición 5.5.8 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta C2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \theta_i + \frac{(1+\alpha)\left(1 - e^{\frac{-(1-\theta_i)(1-\alpha)}{1+\alpha}}\right)}{1-\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo C2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = 1+\alpha$, $\beta_1^{\hat{2}} = 1-\alpha$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** d, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta DI En el modelo DI, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $(1+\alpha)\, m + (1-\alpha)\, M$: el precio unitario m por cada una de las $1+\alpha$ primeras unidades y el precio unitario M por las $1-\alpha$ unidades restantes. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1+\alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción ; recibiendo el precio unitario m. En ese caso, la empresa 2 despacha toda su capacidad, y recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario m. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} (1+\alpha)\, m + (1-\alpha)\, M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\, m - (1+\alpha)\, \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ (1+\alpha)\, b_2 - (1+\alpha)\, \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 5.5.9 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta DI, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\left(3+\alpha-(1-\alpha)\,\theta_i^2\right)}{2\,(1-\alpha)\,(2-(1-\alpha)\,\theta_i)}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.*a*) y 5.1.4.*b*), se observa que el modelo DI es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1+\alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = 0$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = 1+\alpha$, $\gamma_{\hat{1}}^2 = 2$, $\beta_{\hat{1}}^{\hat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

Modelo de subasta B3A2 En el modelo B3A2, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria por cada unidad. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe su propia oferta por cada una de esas $1 + \alpha$ unidades.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo el precio unitario M. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1 + \alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe el precio unitario m.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha) M - (1+\alpha)\theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha) M - (1+\alpha)\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2m - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ (1+\alpha) b_2 - (1+\alpha)\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.5.10 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta B3A2, el único equilibrio bayesiano de Nash es:*

$$
\left[b^*_{\tilde{1}}(\theta_1), b^*_{\hat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]
$$

donde

$$
b^*(\theta_i) = \frac{-(1-\alpha)\theta_i + (1+\alpha)\theta_i^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}
$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo B3A2 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1 + \alpha$, $\gamma_2^{\hat{1}} = 1 + \alpha$, $\gamma_1^{\tilde{1}} = \gamma_1^2 = \beta_1^{\hat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado por el enunciado. ■

Modelo de subasta Uniforme En el modelo Uniforme, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe la oferta contraria por cada unidad. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda $1+\alpha$ y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo el precio unitario M. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe el precio unitario M.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe el precio unitario M.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha) M - (1+\alpha)\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2M - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ (1+\alpha) b_2 - (1+\alpha)\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 5.5.11 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Uniforme, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, todos ellos de la forma:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*_{\widehat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{-(1-\alpha)\theta_i + (1+\alpha)\theta_i^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{2\alpha}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo Uniforme es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = 1+\alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = \gamma_1^2 = 0$, $\beta_1^{\widehat{2}} = 2$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región I** c, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash y son los dados en el enunciado. ■

Modelo de subasta D2U3 En el modelo D2U3, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe el precio unitario M. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda $1 + \alpha$ y recibe por cada una de esas α unidades su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo el precio unitario M. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1 + \alpha$ unidades) y recibe por ello el precio unitario M. La empresa 2, que entra en el mercado despachando toda su capacidad de producción, recibe su propia oferta por cada unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$
\begin{aligned}
B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2M - 2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ (1+\alpha)\,M - (1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases} \\
B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2 - 2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ (1+\alpha)\,b_2 - (1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposición 5.5.12 *Supongamos que $D = 3 + \alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta D2U3, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras, todos ellos de la forma:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*_{\widehat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\left(3 + \alpha - (1-\alpha)\,\theta_i^2\right)}{2\,(1-\alpha)\,(2 - (1-\alpha)\,\theta_i)}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo D2U3 es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} = 1+\alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 0$, $\gamma_1^2 = 2$, $\beta_1^{\widehat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región I** c, existen infinitos equilibrios bayesianos de Nash y son los dados en el enunciado. ∎

Modelo de subasta Discriminatorio En el modelo Discriminatorio, el precio por unidad de electricidad despachada que el Operador del Mercado paga a cada empresa se establece de la siguiente manera:

Si las dos ofertas de la empresa 1 son menores que b_2, la empresa 1 despacha toda su capacidad y recibe $m+M$: el precio unitario m, por la primera unidad, y el precio unitario M, por la unidad restante. La empresa 2 entra despachando el resto de la demanda y recibe, por cada una de esas $1+\alpha$ unidades, su propia oferta.

Si $m < b_2 < M$, la empresa 1 despacha toda la capacidad de la unidad de producción de menor oferta y α unidades con la otra unidad de producción, recibiendo $m+\alpha M$: el precio unitario m, por la primera unidad, y el precio unitario M, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad.

Si la oferta de la empresa 2 es la menor de las pujas, la empresa 1 entra despachando la demanda residual ($1+\alpha$ unidades) y recibe $m+\alpha M$: el precio unitario m, por la primera unidad, y el precio unitario M, por las α unidades restantes. En ese caso, la empresa 2, que despacha toda su capacidad, recibe su propia oferta por unidad.

Luego las funciones de beneficio de las dos empresas quedan:

$$\begin{aligned} B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} m+M-2\theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ m+\alpha M-(1+\alpha)\,\theta_1 & \text{si} \quad b_2 < M \end{cases} \\ B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) &= \begin{cases} 2b_2-2\theta_2 & \text{si} \quad b_2 < M \\ (1+\alpha)\,b_2-(1+\alpha)\,\theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 5.5.13 *Supongamos que $D = 3+\alpha$. Bajo las hipótesis del Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción y en el modelo de subasta Discriminatorio, existe un único equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras:*

$$\left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*_{\widehat{1}}(\theta_1), b^*_2(\theta_2)\right] = \left[b^*_{\widetilde{1}}(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$$

donde

$$b^*(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\left(3+\alpha-(1-\alpha)\,\theta_i^2\right)}{2\,(1-\alpha)\,(2-(1-\alpha)\,\theta_i)}$$

Demostración. Si tenemos en cuenta el Modelo de Subasta General cuyas funciones beneficio están dadas, en el Caso 4, por las expresiones 5.1.4.a) y 5.1.4.b), se observa que el modelo

Discriminatorio es un caso particular en el que los valores de los parámetros son $\gamma_3^2 = 1 + \alpha$, $\gamma_2^{\widehat{1}} = \alpha$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} = 1$, $\gamma_1^2 = 2$, $\beta_1^{\widehat{2}} = 0$. Luego por la Proposición 5.2.1. **Región II** c, el único equilibrio bayesiano de Nash es el dado en el enunciado. ■

5.5.2 Ingresos en el Caso 4

Calculemos el ingreso esperado por las empresas y lo que espera pagar el Operador del Mercado, en cada modelo de subasta, si las dos empresas juegan en equilibrio. El precio que el Operador del Mercado espera pagar por la demanda, bajo un formato de subasta f, si ambas empresas juegan el equilibrio correspondiente viene dado por:

$$P_{omer}^{f} = \sum_{i=1}^{2} E_{\theta_i}[P_i^f(\theta_i)]$$

donde $P_i^f(\theta_i)$ recordemos que denota el pago esperado por la empresa i si su tipo es θ_i bajo un modelo de subasta f.

En el Caso 4 podemos distinguir dos tipos de modelos. En primer lugar, aquellos modelos en los que existe un único equilibrio bayesiano de Nash en el que todas las unidades de producción pujan con la misma función de oferta $[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$ (equilibrio simétrico). Nuevamente, por simetría, se trata de un caso particular del Caso 2 del Capítulo 2.

En segundo lugar, se encuentran los modelos de subasta que poseen infinitos equilibrios bayesianos de Nash de la forma $\left[b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)\right]$. En todos esos modelos de subasta el beneficio y el ingreso esperado por las empresas, y por tanto el pago que el Operador del Mercado espera hacer, quedan independientes de la menor oferta de la empresa 1. Esto implica que bajo cualquiera de estos modelos, el ingreso esperado por las empresas y el pago que el Operador del Mercado espera hacer son independientes del equilibrio elegido. En particular coincide con el ingreso esperado por las empresas y el pago que el Operador del Mercado espera hacer, si la elección es el equilibrio simétrico $[b^*(\theta_1), b^*(\theta_1), b^*(\theta_2)]$. Es decir, el ingreso esperado por las empresas y el pago que el Operador del Mercado espera hacer, también coinciden con los calculados en el Caso 2 del Capítulo 2.

Luego por la Sección 2.3.2. se puede afirmar que el ingreso que espera cada una de las empresas es el mismo en todos los modelos mencionados y es

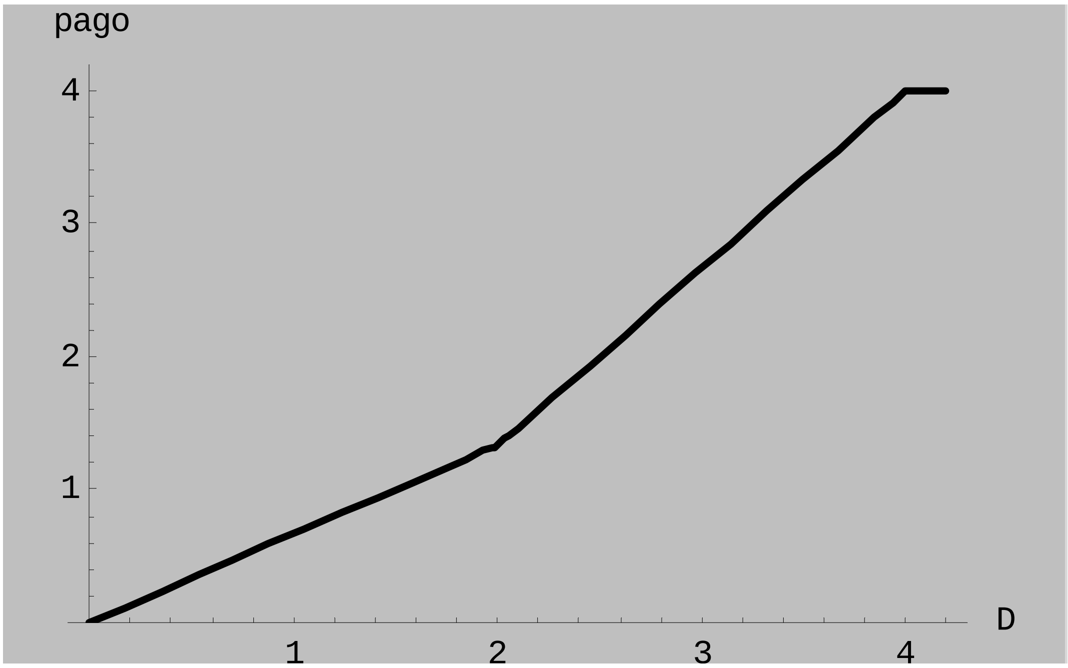
$$P_i(\theta_i) = \frac{(1-\alpha)\left(1-\theta_i^2\right)}{2} + 1 + \alpha$$

El pago que espera hacer el subastador también coincide en todos los modelos de subasta mencionados y es

$$P_{omer}^{f} = \frac{4\,(2+\alpha)}{3}$$

5.6 Pago esperado por el Operador del Mercado bajo cualquier tamaño de la demanda

La gráfica incluidas en esta sección está realizada con el *software Mathematica 5.0* y las sentencias utilizadas se incluyen en el Apéndice C.



5.7 Equilibrios bayesianos de Nash de la forma $\left[b_{\tilde{1}}^{*}(\theta_1), 1, b_2^{*}(\theta_2)\right]$

A lo largo de esta memoria se han hallado los posibles equilibrios bayesianos de Nash formados por estrategias que fuesen funciones estrictamente crecientes y diferenciables. Hipótesis razonables: estrategias que reaccionasen de manera suave al aumento del coste de producción.

Quizá en el contexto del presente capítulo, en el que una de las empresas hace dos pujas distintas, podríamos preguntarnos si la empresa 1 no va a obtener mayores beneficios con otro tipo de estrategias. Ahora tiene la posibilidad de jugar estratégicamente con una de las pujas (que sigue siendo una función estrictamente creciente y diferenciable) con la que entrar en el Mercado Eléctrico y fijar la otra al valor constante máximo, con el propósito de fijar el precio del mercado. Es decir, nos planteamos la siguiente cuestión: ¿existen equilibrios bayesianos de Nash de la forma $\left[b_{\tilde{1}}^{*}(\theta_1), 1, b_2^{*}(\theta_2)\right]$ que proporcionen mayores ingresos esperados a la empresa 1?. Obsérvese que, de existir este tipo de equilibrios, se jugarían si la empresa 1 tiene incentivos para abandonar los equilibrios ya analizados a lo largo del presente capítulo. El siguiente resultado responde a la cuestión.

Proposición 5.7.1 *Si se verifican las hipótesis del* ***Modelo Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción*** *(salvo que la función de estrategias de la unidad de producción de la empresa 1 de mayor oferta sea estrictamente creciente y diferenciable) y siendo las funciones de beneficio del modelo de subasta que se está utilizando las siguientes*

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \left(\gamma_1^2 - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) M + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_1 & si \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^1 \theta_1 & si \quad m < b_2 < M \\ \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right) m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_1 & si \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right) m + \beta_1^{\widehat{2}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_1 \theta_2 & si \quad b_2 < m \\ \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \beta_1^{\widehat{2}} M + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_2^2 \theta_2 & si \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 - \phi_3 \theta_2 & si \quad M < b_2 \end{cases}$$

Con $\left(\gamma_3^2, \gamma_2^{\widehat{1}}, \gamma_1^{\widetilde{1}}, \gamma_1^2, \beta_1^{\widehat{2}}\right) \in [0, \phi_3] \times \left[0, \gamma_3^2\right] \times \left[0, \phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right] \times \left[\gamma_1^{\widetilde{1}}, \phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2\right]$
$\times \left[0, \min\{\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_1^2, \phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2\right]$.

Entonces si $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}}$ *y* $\beta_1^{\widehat{2}} = \phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_2^{\widehat{1}}$ *existe equilibrio bayesiano de Nash, en estrategias puras, de la forma* $\left[b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), 1, b_2^*(\theta_2)\right]$. *Pero en tal caso, si se juega, la empresa 1 espera menores ingresos que con los equilibrios bayesianos de Nash obtenidos en la proposición* 5.2.1..

Demostración. *La empresa i conoce su propio tipo θ_i, pero θ_j es una variable aleatoria. Si consideramos que la empresa* 1 *puja con la unidad* $\widetilde{1}$ *la menor de sus ofertas y fija la mayor de sus pujas en el precio máximo permitido 1, el beneficio de las dos empresas es:*

$$B_1(\theta_1, m, 1, b_2(\theta_2)) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) b_2(\theta_2) + \phi_3 - \gamma_3^2 + \gamma_2^{\widehat{1}} - \phi_2^1 \theta_1 & si \quad b_2^{-1}(m) < \theta_2 \\ \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right) m + \phi_3 - \gamma_3^2 + \gamma_2^{\widehat{1}} - \phi_3 \theta_1 & si \quad \theta_2 < b_2^{-1}(m) \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}(\theta_1), 1, b_2) \quad =$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \left(\phi_1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right) b_{\widetilde{1}}(\theta_1) + \phi_3 - \gamma_3^2 + \beta_1^{\widehat{2}} - \phi_1 \theta_2 & si \quad \left(b_{\widetilde{1}}\right)^{-1}(b_2) < \theta_1 \\ \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}}\right) b_2 + \phi_3 - \gamma_3^2 + \beta_1^{\widehat{2}} - \phi_2^2 \theta_2 & si \quad \theta_1 < \left(b_{\widetilde{1}}\right)^{-1}(b_2) \end{cases}$$

Se denotará a $b_{\widetilde{1}}(\theta_1)$ *simplemente como* $b_1(\theta_1)$. *Como los jugadores son neutrales al riesgo, la mejor respuesta (oferta) de un jugador (empresa) es aquella que maximiza el beneficio esperado dado* θ_i*, sobre todos los posibles valores del tipo restante* θ_j. *Luego se quiere maximizar el beneficio medio de la empresa* 1 *dado* θ_1*, que es:*

$$BM_1(\theta_1, m, M, b_2^*(.)) = \int_{a_1}^{a_2} B_1(\theta_1, m, M, b_2^*(\theta_2)) f(\theta_2|\theta_1) d\theta_2$$

Como los tipos son independientes y siguen una distribución Uniforme en el intervalo $[0,1]$*:*

$$\begin{aligned} BM_1(\theta_1, b_1, 1, b_2^*(.)) &= \int_0^1 B_1(\theta_1, b_1, 1, b_2^*(\theta_2)) d\theta_2 \\ &= \gamma_1^{\widetilde{1}} b_1 + \phi_3 - \gamma_3^2 + \gamma_2^{\widehat{1}} - \phi_2^1\theta_1 + (b_2^*)^{-1}(b_1)\left(\left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) b_1 + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)\theta_1\right) \\ &\quad + \left(\phi_2^1 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right) \int_{\left(b_2^*\right)^{-1}(b_1)}^1 b_2(\theta_2)\, d\theta_2 \end{aligned}$$

Derivando respecto de b_1 *se obtiene*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial b_1} BM_1(\theta_1, b_1, 1, b_2^*(.)) \\ =\ &\gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(b_1) + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)(\theta_1 - b_1)\frac{d}{db_1}(b_2^*)^{-1}(b_1) \end{aligned}$$

Sustituyendo e igualando a cero queda la siguiente ecuación diferencial

$$\gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}} - \gamma_1^{\widetilde{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(b_1) + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)(\theta_1 - b_1)\frac{d}{db_1}(b_2^*) = 0$$

evaluando en t *queda*

$$\gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(-\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)\left((b_1^*)^{-1}(t) - t\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0$$

El beneficio medio de la empresa 2 es

$$BM_2(\theta_2, b_1^*(.), 1, b_2) = \int_{a_1}^{a_2} B_2(\theta_2, b_1^*(\theta_1), 1, b_2) f(\theta_1|\theta_2) d\theta_1$$

De la misma forma y derivando $BM_2(\theta_2, b_1^*(.), 1, b_2)$ *respecto de* b_2 *obtenemos*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial b_2} BM_2(\theta_2, b_1^*(.), 1, b_2) \\ =\ &\gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right)(b_1^*)^{-1}(b_2) + \left(\phi_1 - \phi_2^2\right)(\theta_2 - b_2)\frac{d}{db_2}(b_1^*)^{-1}(b_2) \end{aligned}$$

Como $b_2^{-1}(b_2) = \theta_2 \Longleftrightarrow b_2(\theta_2) = b_2$*, sustituyendo, igualando a cero y evaluando en* t *queda la siguiente ecuación diferencial:*

$$\gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right)(b_1^*)^{-1}(t) + \left(\phi_1 - \phi_2^2\right)\left((b_2^*)^{-1}(t) - t\right)\frac{d}{dt}(b_1^*)^{-1}(t) = 0$$

Luego las dos ecuaciones diferenciales calculadas forman el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} + \left(-\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_3^2 - \gamma_2^{\widehat{1}}\right)(b_2^*)^{-1}(t) + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)\left((b_1^*)^{-1}(t) - t\right)\frac{d}{dt}(b_2^*)^{-1}(t) = 0 \\ \gamma_1^2 + \left(\phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_3^2 - \beta_1^{\widehat{2}} - \gamma_1^2\right)(b_1^*)^{-1}(t) + \left(\phi_1 - \phi_2^2\right)\left((b_2^*)^{-1}(t) - t\right)\frac{d}{dt}(b_1^*)^{-1}(t) = 0 \end{cases}$$

Si imponemos las condiciones $b_1^*(1) = b_2^*(1) = 1$, *se obtiene*

$$\begin{cases} \gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}} \\ \beta_1^{\widehat{2}} = \phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_2^{\widehat{1}} \end{cases}$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior y denotando $(b_2^*)^{-1}(t) = x(t)$ *y* $(b_1^*)^{-1}(t) = y(t)$ *se obtiene*

$$\begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}}(1 - x(t)) + \left(\phi_2^1 - \phi_3\right)(y(t) - t)\,x'(t) = 0 \\ \gamma_1^2(1 - y(t)) + \left(\phi_1 - \phi_2^2\right)(x(t) - t)\,y'(t) = 0 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones inversas de las estrategias en equilibrio en aquellos modelos en los que se verifica $\gamma_3^2 = \gamma_2^{\widehat{1}}$ *y* $\beta_1^{\widehat{2}} = \phi_2^2 - \phi_3 + \gamma_2^{\widehat{1}}$. *Se comprueba que los únicos modelos que verifican dichas igualdades, de todos los modelos analizados en el presente capítulo, son los de la siguiente tabla:*

	Modelo	*Equilibrio*	*Ingreso esperado por la empresa 1*
Caso2:	*Vickrey*	$[\theta_1, 1, \theta_2]$	$\frac{1-\theta_1^2}{2}$
	C	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, 1, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$	$\frac{1-\theta_1^2}{2}$
Caso 3:	*C1*	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, 1, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$	$\frac{1+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2}{2}$
	C3	$\left[\frac{1+\theta_1}{2}, 1, \frac{1+\theta_2}{2}\right]$	$\frac{1+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2}{2}$
	Vickrey	$[\theta_1, 1, \theta_2]$	$\frac{1+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2}{2}$
	V2	$[\theta_1, 1, \theta_2]$	$\frac{1+\alpha-(1-\alpha)\theta_1^2}{2}$
Caso 4:	*Vickrey*	$[\theta_1, 1, \theta_2]$	$1+\alpha$
	Uniforme	$[\theta_1, 1, \theta_2]$	$1+\alpha$

En dicha tabla también se ha incluido, en cada modelo, el ingreso que espera obtener la empresa 1 si se utiliza el equilibrio bayesiano de Nash correspondiente. Si observamos dicha tabla, y *comparando con los ingresos esperados por la empresa 1 obtenidos a lo largo del presente capítulo, se observa que la empresa 1 espera mayores ingresos con los equilibrios anteriormente calculados en cada caso y modelo.* ■

5.8 Conclusiones

Se ha analizado una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres clásicos (modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey) bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Asimétrico Lineal Uniforme descrito en la Sección 5.1.. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente las siguientes funciones de beneficio para cada empresa i:

$$B_1(\theta_1, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \gamma_1^{\tilde{1}} m + \gamma_1^{\hat{1}} M + \beta_1^1 b_2 + \varphi - \phi_1 \theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\tilde{1}} m + \gamma_2^{\hat{1}} M + \beta_2^1 b_2 + \varphi - \phi_2^1 \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^{\tilde{1}} m + \gamma_2^{\hat{1}} M + \varphi - \phi_3 \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}}, b_2) \quad = \quad \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_1^{\tilde{2}} m + \beta_1^{\hat{2}} M + \varphi - \phi_1 \theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \gamma_2^2 b_2 + \beta_1^{\hat{2}} M + \varphi - \phi_2^2 \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \varphi - \phi_3 \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

con $\gamma_1^{\tilde{1}}, \gamma_1^{\hat{1}}, \gamma_2^{\hat{1}}, \gamma_3^{\tilde{1}}, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^{\tilde{2}}, \beta_1^{\hat{2}}, \varphi \in [0, \infty)$, $\gamma_1^{\tilde{1}} + \gamma_1^{\hat{1}} + \beta_1^1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_1^{\tilde{1}} + \gamma_2^{\hat{1}} + \beta_2^1 + \varphi = \phi_2^1$, $\gamma_3^{\tilde{1}} + \gamma_2^{\hat{1}} + \varphi = \phi_3$, $\gamma_1^2 + \beta_1^{\tilde{2}} + \beta_1^{\hat{2}} + \varphi = \phi_1, \gamma_2^2 + \beta_1^{\hat{2}} + \varphi = \phi_2^2, \gamma_3^2 + \varphi = \phi_3, \gamma_1^{\tilde{1}} + \gamma_1^{\hat{1}} = \gamma_1^2, \beta_1^{\tilde{2}} + \beta_1^{\tilde{2}} = \beta_1^1, \gamma_3^{\tilde{1}} + \gamma_2^{\hat{1}} = \gamma_3^2$ y $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2^1 + \phi_2^2 = D$. Siendo $m = \min(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$ y $M = max(b_{\tilde{1}}, b_{\hat{1}})$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = \phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = \alpha$, $\phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 2 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = 1 + \alpha$, $\phi_3 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 3 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 1 + \alpha$. Si la demanda verifica $D \geq 4$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 2$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 2$.

Una vez calculados los equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General, se calcularon el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumen en las secciones 5.2., 5.3, 5.4. y 5.5.. En todos los casos de tamaño de la demanda se llegó a la conclusión, de que si las empresas juegan en equilibrio el ingreso esperados por ellas es equivalente bajo cualquiera de los modelos de subasta considerados. Por esta razón, el pago que espera realizar el Operador del Mercado por la compra de unidades eléctricas también es equivalente.

Esta equivalencia de ingresos obtenida en un modelo, a priori asimétrico, se debe a que los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras obtenidos son siempre de las dos formas siguientes:

En primer lugar: la empresa 1 puja en equilibrio de igual forma con sus dos unidades de producción, y por tanto, el modelo es un caso particular del modelo simétrico considerado en el Capítulo 2. En dicho capítulo se verificaba un resultado de equivalencia de ingresos.

En segundo lugar: la empresa 1 puja en equilibrio con su unidad de producción de mayor oferta de la misma manera que la empresa 2, y utiliza cualquier oferta como la menor de sus pujas. Este tipo de equilibrios surgen en modelos de subasta cuyas funciones de beneficio no dependen de la menor de las pujas de la empresa 1. Luego en realidad también puede verse como un caso particular del modelo simétrico considerado en el Capítulo 2.

Aunque a lo largo de esta memoria siempre se consideró que las funciones de oferta utilizadas, en equilibrio, por las empresas eran funciones estrictamente monótonas y diferenciables, en la Sección 5.7., se buscaron equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras de la forma $\left[b_{\tilde{1}}^{*}\left(\theta_1\right), 1, b_2^{*}\left(\theta_2\right)\right]$. Es decir, estrategias tales que la empresa 1 pueda entrar en el mercado con la menor de las pujas, pero fijar precio con el precio máximo permitido. Se demostró que en los modelos donde esto podría darse, la empresa 1 obtiene menores ingresos esperados que con los equilibrios anteriormente calculados.

Capítulo 6

Conclusiones finales

En este capítulo resumimos los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, así como las conclusiones que se derivan de dichos resultados. Se implementa el modelo de subasta de Vickrey para un modelo general: un número arbitrario de empresas con capacidades de producción distintas. Además, se hacen algunas propuestas para trabajos futuros.

En la década de los 90 empezaron a liberalizar los mercados eléctricos de multitud de países. En dichos mercados ya privatizados aparece lo que se conoce como mercado "spot" diario, donde se casan las ofertas de las empresas generadoras con la demanda eléctrica de cada franja horaria, con entrega al día siguiente. Estas transacciones de compraventa se realizan mediante un modelo de subasta. En realidad se introduce competencia en la generación de la electricidad, mientras que el transporte y la distribución permanecen con tarifas reguladas. El consumidor final compra energía a un precio fijado por el Estado.

Las ofertas, realizadas en sobre cerrado por las empresas generadoras, son entregadas a un organismo central (en este trabajo lo hemos llamado Operador del Mercado) que será el encargado de gestionar la compraventa de unidades eléctricas. Éste ordena las ofertas, correspondientes a una franja horaria, de menor a mayor y distribuye la demanda entre las empresas de menor oferta. El resto de las empresas generadoras quedan fuera del Mercado Eléctrico. En la mayoría de Mercados Eléctricos, el precio que se paga por unidad eléctrica despachada, a las empresas generadoras en el mercado, es la oferta de la última empresa que entró en el mercado. Se trata del modelo de subasta Uniforme.

Existe hasta la fecha un debate abierto acerca del modelo de subasta idóneo para la subasta de unidades de energía eléctrica. Dicho debate normalmente involucra a dos modelos de subasta clásicos: modelo de subasta Uniforme, utilizado en la mayoría de los Mercados Eléctricos internacionales, y el modelo de subasta Discriminatorio. En este trabajo, además, se añadió otro modelo de subasta clásico en otros mercados, que es el modelo de subasta de Vickrey.

Hay que destacar que la principal aportación de este trabajo es el **análisis completo de una familia de modelos de subasta en sobre cerrado que se pueden utilizar en un Mercado Eléctrico**. Para ello se ha definido en cada capítulo una familia paramétrica de modelos de subasta tal que, para ciertos valores de los parámetros, se reduzca a cualquiera de los tres modelos clásicos mencionados: Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey. Para valores diferentes de los parámetros se obtuvieron nuevos modelos de subasta, que bajo ciertas circunstancias, son más ventajosos.

Otra novedad presente en este trabajo, respecto de los existentes hasta la fecha, es que se **modeliza la subasta del mercado eléctrico como un juego no cooperativo bayesiano**. Establecida dicha hipótesis, en el Capítulo 2 se analizó un modelo sencillo de competencia eléctrica en duopolio. A continuación, en los sucesivos capítulos, se analizaron variantes de dicho modelo, alterando las hipótesis del modelo inicial.

El análisis realizado en cada capítulo consistió en calcular la mejor oferta (equilibrio bayesiano de Nash) de las empresas competidoras en el Mercado Eléctrico[1], calcular el ingreso esperado por las empresas, y calcular el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todo ello bajo una familia paramétrica de modelos de subasta que incluye, entre otros, los tres modelos de subasta clásicos. Por último, en aquellos casos en los que no se verificó equivalencia de ingresos, se estableció una ordenación entre los modelos de subasta, tanto desde el punto de vista de las empresas, como desde el punto de vista del Operador del Mercado. Los Mercados Eléctricos internacionales tienen diferentes características, dependiendo de ellas se establecen diferentes hipótesis para modelizarlo. Repasemos los resultados más destacados que se han obtenido en cada capítulo.

[1] Mediante la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

6.1 Capítulo 1

En el Capítulo 1 se hizo una pequeña introducción de la teoría que enmarca este trabajo, la Teoría de Subastas. En él se enunció uno de los principales resultados, el Teorema de Equivalencia de Ingresos [Myerson, 1981] aplicable a modelos de subasta de un objeto. En general no se verifica en modelos de subasta de múltiples objetos. Se generalizó el *Teorema de Equivalencia de Ingresos* para subastas de un objeto [Myerson, 1981] a la subasta de múltiples objetos siguiente: la subasta de m objetos idénticos más uno heterogéneo. Enunciado bajo el nombre de **Teorema de Equivalencia de Ingresos Generalizado**, corresponde al Teorema 1.4.1.

6.2 Capítulo 2

En este capítulo se analizó un modelo en duopolio, donde cada empresa posee una única unidad de producción con idénticas capacidades de producción. Además, se supuso que las empresas tenían valoraciones privadas e independientes.

En las secciones 2.1, 2.2. y 2.3. se analizó una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres modelos de subasta clásicos: modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey; bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Simétrico Inicial definido en la primera sección. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente la siguiente función de beneficio de cada empresa $i \in \{1, 2\}$:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con γ_1, β_1, φ, $\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ y $\phi_1 + \phi_2 = D$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$. Al expresar el ingreso esperado por la empresa i, si ambas juegan el equilibrio bayesiano de Nash calculado, como una función a trozos en términos de la demanda, se obtuvo, para todos los modelos de la familia anterior

$$P_i(\theta_i, D) = \begin{cases} \int_{\theta_i}^{a_2} g(D, t) f(t) dt & \text{si} \quad D \leq 1 \\ \int_{\theta_i}^{a_2} \left(g\left(1, t\right) - g\left(\alpha, t\right)\right) f(t) dt + \alpha b_{\max} & \text{si} \quad 1 < D = 1 + \alpha < 2 \\ b_{\max} & \text{si} \quad 2 \leq D \end{cases}$$

donde $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$. Obsérvese que es una función continua y, además, es creciente en D.

Al expresar el pago que espera hacer el Operador del Mercado, cuando ambas empresas juegan en equilibrio bayesiano de Nash calculado, como una función a trozos en términos de la demanda, se obtuvo, para todos los modelos de la familia anterior

$$P_{omer}(D) = \begin{cases} g(D,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} g(D,t) F^2(t)dt & \text{si} \quad D \leq 1 \\ g(1,a_2) - g(\alpha,a_2) - \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} g(1,t) - \frac{\partial}{\partial t} g(\alpha,t)\right) F^2(t)dt + 2\alpha b_{\max} & \text{si} \quad 1 < D = 1+\alpha < 2 \\ 2b_{\max} & \text{si} \quad 2 \leq D \end{cases}$$

donde $b_{\max} = \frac{g(1,a_2)-g(\alpha,a_2)}{1-\alpha}$. Obsérvese que es una función continua y, además, es creciente en D.

La observación mas importante es que tanto el ingreso esperado por las empresas como el pago que espera realizar el Operador del Mercado son independientes de todos los parámetros de la familia de modelos considerada. Luego se verifica que hay equivalencia de ingresos en todos ellos. Es decir, tanto **el ingreso esperado por las empresas como el pago que espera hacer el Operador del Mercado son idénticos bajo cualquiera de los modelos de subasta pertenecientes a la familia paramétrica de modelos de subasta considerada**.

En la Sección 2.4. se obtuvo un resultado en el que se demuestra que la equivalencia obtenida para dos empresas bajo el Modelo General de Subasta, se puede generalizar y que se verifica una equivalencia de ingresos bajo dos modelos de subasta cualesquiera con ciertas características y n empresas. La familia paramétrica de modelos de subasta considerada se encuentra en las hipótesis de dicho resultado.

En la Sección 2.5. se calcularon, como caso particular de las secciones anteriores, los equilibrios bayesianos de Nash en los modelos de subasta clásicos: Uniforme, Discriminatorio y de Vickrey.

6.3 Capítulo 3

En este capítulo se analizó un modelo en duopolio, donde cada empresa posee una única unidad de producción con idénticas capacidades de producción. A diferencia con el Capítulo 2, se supuso que las empresas tenían valoraciones privadas y correladas.

Se analizó una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres modelos clásicos: modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey, bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Simétrico Correlado Uniforme descrito en la Sección 3.1.. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente la siguiente función de beneficio de cada empresa $i \in \{1, 2\}$:

$$B_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} \gamma_1 b_i + \beta_1 b_j + \varphi b_{\max} - g(\phi_1, \theta_i) & si \quad b_i < b_j \\ \gamma_2 b_i + \varphi b_{\max} - g(\phi_2, \theta_i) & si \quad b_i > b_j \end{cases}$$

con γ_1,β_1, φ, $\gamma_2 \in [0, \infty)$, $\gamma_1 + \beta_1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_2 + \varphi = \phi_2$ y $\phi_1 + \phi_2 = D$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$ y $\phi_2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1+\alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = \alpha$. Si la demanda es mayor o igual que 2, entonces $\phi_1 = 1$ y $\phi_2 = 1$. Además, se llegó a la conclusión, que el precio máximo que le interesa al Operador del Mercado es $b_{\max} = \frac{g(\phi_1, a_2) - g(\phi_2, a_2)}{\phi_1 - \phi_2}$.

Una vez calculados los equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General, se calculó el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumen en la sección 3.4. y en dicha sección se estableció, al no verificarse un resultado de equivalencia de ingresos bajo todos los modelos, una ordenación entre los diferentes modelos de subasta.

Como se demuestra en la Sección 3.5. los modelos clásicos aparecen en dicha ordenación, ya que se sitúan en los vértices de la región en la que se definen los parámetros de la familia de modelos incluidos en el Modelo de Subasta General. Pero, además, aparece un nuevo modelo que hemos llamado modelo DV. Bajo dicho modelo, en el Caso 2 ($1 < D = 1 + \alpha < 2$), las empresas obtienen mayores ingresos esperados que bajo cualquier otro modelo de subasta. El modelo de subasta más ventajoso, desde el punto de vista de las empresas en el Caso 1 ($D \leq 1$) es el modelo Uniforme/Discriminatorio (ambos modelos coinciden).

Desde el punto de vista del Operador del Mercado el modelo de subasta más ventajoso es el modelo de Vickrey, en el Caso 1 ($D \leq 1$) **y el modelo Uniforme, en el Caso 2** ($1 < D = 1 + \alpha < 2$).

6.4 Capítulo 4

En este capítulo se analizó un modelo en duopolio, donde cada empresa posee una única unidad de producción con distintas capacidades de producción. Además, se supuso que las empresas tenían valoraciones privadas e independientes. Las empresas ya no son indistinguibles, y esta asimetría en el tamaño de las empresas obligó a la búsqueda de Equilibrios bayesianos de Nash formados por distintas estrategias.

Se analizó una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres modelos de subasta clásicos: modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey, bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Asimétrico Lineal Uniforme descrito en la Sección 4.1.. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente las siguientes funciones de beneficio para las dos empresas:

$$B_1(\theta_1, b_1, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^1 b_1 + \beta_1^1 b_2 + \varphi^1 b_{\max} - \phi_1^1 \theta_1 & si \quad b_1 < b_2 \\ \gamma_2^1 b_1 + \varphi^1 b_{\max} - \phi_2^1 \theta_1 & si \quad b_1 > b_2 \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_2, b_1) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_1^2 b_1 + \varphi^2 b_{\max} - \phi_1^2 \theta_2 & si \quad b_2 < b_1 \\ \gamma_2^2 b_2 + \varphi^2 b_{\max} - \phi_2^2 \theta_2 & si \quad b_2 > b_1 \end{cases}$$

con $\gamma_1^i, \beta_1^i, \varphi^i, \gamma_2^i \in [0, \infty)$, $\gamma_1^i + \beta_1^i + \varphi^i = \phi_1^i$, $\gamma_2^i + \varphi^i = \phi_2^i$ y $\phi_1^1 + \phi_2^2 = \phi_2^1 + \phi_1^2 = D$, con $i \in \{1, 2\}$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1^1 = \phi_1^2 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = 0$, $\phi_1^2 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\phi_1^1 = 1$, $\phi_2^1 = \alpha$, $\phi_1^2 = 1 + \beta$, $\phi_2^2 = \beta + \alpha$. Si la demanda verifica que es mayor o igual que $2 + \beta$, en ese caso despachan el total de su capacidad, entonces $\phi_1^1 = \phi_2^1 = 1$, $\phi_1^2 = \phi_2^2 = 1 + \beta$.

Una vez calculados los equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General, se calculó el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumieron en las secciones 4.2., 4.3. y 4.4.. Al final de las dos últimas secciones mencionadas se estableció una ordenación entre los diferentes modelos de subasta.

Para la mayor de las empresas, la de mayor capacidad de producción, se llegó a la conclusión que el modelo más ventajoso es, si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta Uniforme. Si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ y $3\alpha + \beta < 1$, el modelo de subasta Uni2.

Para la menor de las empresas, la de menor capacidad de producción, se llegó a la conclusión que el modelo que más le favorece es, si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta E. Si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ y $3\alpha + \beta < 1$, el modelo de subasta E2.

Desde el punto de vista del Operador del Mercado, los modelos que le son más ventajosos, con pagos equivalentes, son: si $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, \beta]$, el modelo de subasta de Vickrey y el modelo de subasta DV. Y si $D = 1 + \beta + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$ el modelo de subasta de Vickrey y el modelo de subasta DV1.

6.5 Capítulo 5

En este capítulo se analizó un modelo en duopolio, donde una de las empresas poseía dos unidades de producción y la otra empresa sólo una. Se supuso que la capacidad total de ambas empresas era idéntica. Además, se supuso que las empresas tenían valoraciones privadas e independientes. Al poseer una de las empresas 2 unidades de producción, ésta presenta dos ofertas al Mercado Eléctrico. Es lógico que a priori se crea que la empresa con esta posibilidad verá maximizado sus ingresos realizando dos ofertas distintas, correspondientes a sus dos unidades de producción. Quizá una oferta ajustada al coste para asegurar la entrada en el mercado y otra mayor, para marcar precio.

Se ha analizado una familia paramétrica de modelos de subasta, que contiene como casos particulares a los tres modelos de subasta clásicos: modelo Uniforme, modelo Discriminatorio y modelo de Vickrey, bajo las hipótesis fijadas en el Modelo Asimétrico Lineal Uniforme descrito en la Sección 5.1.. Dicha familia de modelos de subasta (Modelo de Subasta General) tiene asociada unívocamente las siguientes funciones de beneficio para las dos empresas:

$$B_1(\theta_1, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_1^{\widehat{1}} M + \beta_1^1 b_2 + \varphi - \phi_1 \theta_1 & \text{si} \quad M < b_2 \\ \gamma_1^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \beta_2^1 b_2 + \varphi - \phi_2^1 \theta_1 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^{\widetilde{1}} m + \gamma_2^{\widehat{1}} M + \varphi - \phi_3 \theta_1 & \text{si} \quad b_2 < m \end{cases}$$

$$B_2(\theta_2, b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}}, b_2) = \begin{cases} \gamma_1^2 b_2 + \beta_1^{\widetilde{2}} m + \beta_1^{\widehat{2}} M + \varphi - \phi_1 \theta_2 & \text{si} \quad b_2 < m \\ \gamma_2^2 b_2 + \beta_1^{\widehat{2}} M + \varphi - \phi_2^2 \theta_2 & \text{si} \quad m < b_2 < M \\ \gamma_3^2 b_2 + \varphi - \phi_3 \theta_2 & \text{si} \quad M < b_2 \end{cases}$$

con $\gamma_1^{\widetilde{1}}, \gamma_1^{\widehat{1}}, \gamma_2^{\widehat{1}}, \gamma_3^{\widetilde{1}}, \gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^{\widetilde{2}}, \beta_1^{\widehat{2}}, \varphi \in [0, \infty)$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_1^{\widehat{1}} + \beta_1^1 + \varphi = \phi_1$, $\gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} + \beta_2^1 + \varphi = \phi_2^1$, $\gamma_3^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} + \varphi = \phi_3$, $\gamma_1^2 + \beta_1^{\widetilde{2}} + \beta_1^{\widehat{2}} + \varphi = \phi_1, \gamma_2^2 + \beta_1^{\widehat{2}} + \varphi = \phi_2^2, \gamma_3^2 + \varphi = \phi_3, \gamma_1^{\widetilde{1}} + \gamma_1^{\widehat{1}} = \gamma_1^2, \beta_1^{\widetilde{2}} + \beta_1^{\widetilde{2}} = \beta_1^1, \gamma_3^{\widetilde{1}} + \gamma_2^{\widehat{1}} = \gamma_3^2$ y $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2^1 + \phi_2^2 = D$. Siendo $m = \min(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$ y $M = max(b_{\widetilde{1}}, b_{\widehat{1}})$. Si la demanda D es menor o igual que 1, entonces $\phi_1 = D$, $\phi_2^1 = \phi_2^2 = \phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 1 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = \alpha$, $\phi_3 = 0$. Si la demanda verifica $D = 2 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1$, $\phi_2^2 = 1 + \alpha$, $\phi_3 = \alpha$. Si la demanda verifica $D = 3 + \alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 1 + \alpha$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 1 + \alpha$. Si la demanda verifica $D \geq 4$, entonces $\phi_1 = 2$, $\phi_2^1 = 2$, $\phi_2^2 = 2$, $\phi_3 = 2$.

Una vez calculados los equilibrios bayesianos de Nash bajo el Modelo de Subasta General, se calculó el ingreso esperado por cada empresa y el pago que espera hacer el Operador del Mercado. Todos estos cálculos se resumen en las secciones 5.2., 5.3., 5.4. y 5.5.. En todos los casos de tamaño de la demanda, se llegó a la conclusión de que si las empresas juegan en equilibrio, **el ingreso esperado por ellas es equivalente bajo cualquiera de los modelos de subasta considerados. Por esta razón, el pago que espera realizar el Operador del Mercado por la compra de unidades eléctricas también es equivalente.**

Esta equivalencia de ingresos obtenida en un modelo, a priori asimétrico, se debe a que los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras obtenidos son siempre de una de las dos formas siguientes:

En primer lugar: la empresa 1 puja, en equilibrio, de igual forma con sus dos unidades de producción, y por tanto, el modelo es un caso particular del modelo simétrico considerado en el Capítulo 2. En dicho capítulo se verificó un resultado de equivalencia de ingresos.

En segundo lugar: la empresa 1 puja, en equilibrio, con su unidad de producción de mayor oferta de la misma manera que la empresa 2, y utiliza cualquier oferta como la menor de sus pujas. Este tipo de equilibrios surgen en modelos de subasta cuyas funciones de beneficio no dependen de la menor de las pujas de la empresa 1. Luego en realidad también puede verse como un caso particular del modelo simétrico considerado en el Capítulo 2.

Aunque a lo largo de esta memoria siempre se consideró que las funciones de oferta utilizadas en equilibrio por las empresas eran funciones estrictamente monótonas y diferenciables, en la Sección 5.7., se buscaron equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras de la forma $\left[b_{\widetilde{1}}^*(\theta_1), 1, b_2^*(\theta_2)\right]$. Es decir, estrategias tales que la empresa 1 pueda entrar en el mercado con la menor de las pujas, pero fijar precio con la máxima oferta permitida. Se demostró que en los modelos donde esto podría darse, la empresa 1 obtiene menores ingresos esperados que con los equilibrios anteriormente calculados.

6.6 Conclusiones finales

La ventaja de la privatización del mercado es que permita la compra de unidades eléctricas a menor precio que el establecido por una tarifa regulada. En principio, al concebir el Mercado Eléctrico como un mercado competitivo, las empresas deberían tener fuertes incentivos para minimizar sus costes de producción y realizar ofertas próximas a ellos, con la intención de no quedar fuera del mercado.

Para que esto sea así realmente, es fundamental que el número de empresas generadoras sea suficientemente grande, respecto del tamaño de la demanda, para así asegurar la competencia en el mercado spot. En todos los capítulos se ha observado que si el tamaño de la demanda es demasiado grande, respecto de la capacidad total de producción de las empresas generadoras, una o las dos empresas maximizan sus ingresos esperados ofertando la máxima puja permitida. Es decir, deja de existir competencia y el precio del mercado es alto. Si, por ejemplo, el modelo de subasta que se está empleando es el más utilizado en mercados eléctricos internacionales, el modelo de subasta Uniforme, una empresa puede marcar precio, segura de entrar en el mercado, por el gran tamaño de la demanda, y el precio del mercado es el precio máximo. Esta situación se podría solventar de varias formas. Entre ellas evidentemente se encuentra incentivar la entrada en el mercado de nuevas empresas generadoras. También, en previsión, es fundamental imponer cuotas máximas de generación de las grandes empresas.

Otra medida podría ser conseguir que la demanda reaccionase al precio del mercado. El consumidor final compra la energía a un precio fijado con tarifas reguladas. Este precio no reacciona inmediatamente al precio del mercado, de ahí que consideremos la demanda inelástica al precio. Las grandes empresas, seguras de entrar en el mercado, suben sus precios. No lo harían si supiesen que la demanda no es fija y al reducirse pueden quedar fuera del mercado.

Luego lo primero que hay que asegurar en un Mercado Eléctrico es que haya competencia. Es decir, que la suma de las capacidades de producción de todas las empresas que entran en el mercado es suficientemente grande respecto del tamaño de la demanda eléctrica.

Una vez que esté asegurada la competencia en el Mercado Eléctrico, la elección del modelo de subasta adecuado para minimizar el pago que espera hacer el Operador del Mercado y, por tanto, para minimizar el precio que paga el consumidor final debe establecerse siguiendo los resultados obtenidos en los distintos capítulos de este trabajo. Depende de las hipótesis establecidas en cada capítulo y que mejor modelen el Mercado Eléctrico del que se trate. Resumimos en la siguiente tabla los modelos más ventajosos obtenidos en los capítulos 2, 3, 4 y 5:

Modelo de mercado		
Simétrico Básico	Modelos de Ingresos Equivalentes	
Simétrico Correlado	($D \leq 1$) Modelo de Vickrey	($1<D=1+\alpha<2$) Modelo Uniforme
Asimétrico Lineal Uniforme	($D=1+\alpha$, con $\alpha \in (0,\beta]$) Modelo de Vickrey y Modelo DV	($D=1+\alpha+\beta$, con $\alpha \in (0,1)$) Modelo de Vickrey y Modelo DV1
Lineal Uniforme Asimétrico en unidades de producción	Modelos de Ingresos Equivalentes	

Si tuviésemos que elegir un único modelo, el que mejor se adapte a la mayoría de las circunstancias de un Mercado Eléctrico, este sería el modelo de subasta de Vickrey. Este modelo de subasta clásico en otros contextos, no se utiliza en ningún Mercado Eléctrico. La determinación del precio de compraventa en los modelos Uniforme y Discriminatoria es mucho más sencilla: la mayor oferta aceptada o la propia oferta respectivamente. Sin embargo en el modelo de Vickrey el Operador del Mercado paga cada unidad eléctrica que entra en el mercado el precio de la unidad eléctrica que desplazó fuera del mercado. A pesar de que este cálculo es algo más complicado, este modelo matemático se implementa sin dificultad incluso en casos mucho más generales que los vistos a lo largo de este trabajo. Por ello en la siguiente sección se simulará el modelo de Vickrey en un Mercado Eléctrico en el que compite un número arbitrario de empresas con distintas capacidades de producción.

6.7 Implementación del modelo de Vickrey

Puede observarse que, en líneas generales, el modelo más ventajoso desde el punto de vista del subastador es el modelo de Vickrey. Bajo dicho modelo el subastador espera menores o iguales pagos que bajo los modelos restantes salvo en un caso (Caso 2 del Capítulo 3), en el que además la diferencia es pequeña.

Supongamos que se quiere subastar el derecho al despacho de D unidades eléctricas entre n empresas neutrales al riesgo y con una única unidad de producción con capacidades distintas k_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Supongamos que existe competencia, es decir, $\sum_{i=1}^{n} k_i > D$. Supongamos que el coste de producción es $g(q_i, \theta_i) = q_i \theta_i$ con $q_i \in [0, k_i]$ número de unidades eléctricas y θ_i el tipo privado de cada jugador. Se considerará que $\{\theta_i\}_{i=1}^{n}$ son v.a.i.i.d. con una distribución Uniforme en $[0, 1]$. Luego una vez que el Operador del Mercado recibe las n pujas de las empresas, las ordena de menor a mayor, distribuye el despacho eléctrico entre aquellas empresas de menor puja, sin exceder cada capacidad de producción y hasta que la demanda queda completamente satisfecha. De tal manera que la última empresa en entrar lo hace con el despacho de la demanda residual α. Supongamos que el número de empresas que entra en el mercado es $m \leq n$, y que reordenamos los subíndices de esas empresas por orden de entrada en el mercado $j \in \{1, ..., m\}$, entonces se verifica que $\sum_{j=1}^{m-1} k_j < D \leq \sum_{j=1}^{m} k_j$. Luego la lista de méritos ordenada en la que se indica puja realizada b_i y número de unidades eléctricas a despachar k_i será de la forma:

$$\{\{b_1, k_1\}, ..., \{b_{m-1}, k_{m-1}\}, \{b_m, \alpha = D - \sum_{j=1}^{m-1} k_j\}\}$$

Siguiendo el mismo orden, la lista las unidades eléctricas, junto con su oferta, que quedan fuera del mercado sería de la forma:

$$\{\{b_m, k_m - \alpha = \sum_{j=1}^{m} k_j - D\}, \{b_{m+1}, k_{m+1}\}, ..., \{b_n, k_n\}\}$$

Obsérvese que la capacidad de la empresa que ocupa el lugar $m - \acute{e}simo$ queda dividida en α unidades eléctricas que entran en el mercado y $k_m - \alpha$ que quedan fuera del mercado. El total de unidades eléctricas que quedan fuera del mercado es $\sum_{i=1}^{n} k_i - D$. Una vez que se determina la lista de méritos, el Operador del Mercado debe calcular el pago que debe hacer a cada empresa. Supongamos que el modelo de subasta que se va a emplear es el modelo de Vickrey, en dicho modelo, recuérdese que cada unidad eléctrica es pagada al precio de la unidad eléctrica que desplaza fuera del mercado.

Veamos en primer lugar el ingreso de las empresas que entran en el mercado despachando toda su capacidad. Sea la empresa de subíndice en la lista de méritos $j \in \{1, ..., m-1\}$, hay que diferenciar las siguientes situaciones:

Situación I) La cantidad generada por la empresa j es menor o igual que la porción de capacidad que quedó fuera del mercado de la empresa m, es decir $k_j \leq k_m - \alpha$. En ese caso, si la empresa j retirase su oferta entraría la empresa m despachando las k_j unidades que j dejaría de despachar. Luego en esta situación sólo se ven desplazadas k_j unidades eléctricas de la empresa m. Luego el ingreso de la empresa j es:

$$\rho_j(b_1, b_2, ..., b_n) = k_j b_m \quad \forall j \in \{1, ..., m-1\}$$

Situación II) La cantidad generada por la empresa j excede la porción de capacidad que quedó fuera del mercado de la empresa m, pero es menor que la totalidad de la capacidad que quedó fuera del mercado, es decir $k_m - \alpha < k_j \leq \sum_{i=1}^{n} k_i - D$. En ese caso existe un número entero positivo r verificando $\sum_{i=m+1}^{r-1} k_i < k_j - (k_m - \alpha) \leq \sum_{i=m+1}^{r} k_i$. Indicándonos que si la empresa j retirase su puja, entrarían en el mercado las siguientes unidades para compensar tal pérdida: $(k_m - \alpha)$ unidades de la empresa m, k_{m+1} unidades de la empresa $m+1$, k_{m+2} unidades de la empresa $m+2$ así sucesivamente hasta llegar a k_{r-1} unidades de la empresa $r-1$ y, por último, se completaría con $k_j - (k_m - \alpha) - \sum_{i=m+1}^{r-1} k_i$ unidades de la empresa r. Luego la empresa j desplaza desde la empresa m hasta la empresa r, luego el ingreso de la empresa j es:

$$\begin{aligned} \rho_j(b_1, b_2, ..., b_n) &= (k_m - \alpha) b_m + \sum_{i=m+1}^{r-1} k_i b_i + \left(k_j - (k_m - \alpha) - \sum_{i=m+1}^{r-1} k_i \right) b_r \\ \forall j &\in \{1, ..., m-1\} \end{aligned}$$

Situación III) La cantidad generada por la empresa j es mayor que el total de la capacidad que ha quedado fuera del mercado, es decir si $k_j > \sum_{i=1}^{n} k_i - D$. En ese caso, la empresa j, ha desplazado a todas las empresas que han quedado fuera del mercado, es decir, ha desplazado $k_m - \alpha$ unidades de la empresa m, k_{m+1} unidades de la empresa $m+1$, k_{m+2} unidades de la empresa $m+2$ así sucesivamente hasta llegar a las b_n unidades de la empresa n. Y además, si la empresa j retirase su oferta no habría empresas suficientes para satisfacer la demanda ya que faltarían $k_j - (\sum_{i=1}^{n} k_i - D)$ unidades por cubrir. Éstas últimas unidades, que no han sido desplazadas de ninguna empresa, el Operador del Mercado las paga a $b_{\max} = 1$. Luego el ingreso de la empresa j es:

$$\begin{aligned} \rho_j(b_1, b_2, ..., b_n) &= \begin{cases} (k_m - \alpha)\, b_m + \sum_{i=m+1}^{n} k_i b_i + \left(k_j - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i - D\right)\right) b_{\max} & si \quad m \neq n \\ (k_m - \alpha)\, b_m + \left(k_j - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i - D\right)\right) b_{\max} & si \quad m = n \end{cases} \\ \forall j &\in \{1, ..., m-1\} \end{aligned}$$

Veamos ahora como queda el ingreso de la empresa m que entra en último lugar y que no despacha toda su capacidad sino una cantidad residual $\alpha = D - \sum_{j=1}^{m-1} k_j$. Tenemos que diferenciar las dos situaciones siguientes:

Situación I) La cantidad residual α generada por la empresa m la podría satisfacer la siguiente empresa en la lista de méritos, es decir $\alpha \leq k_{m+1}$. En ese caso la empresa m desplaza a una única empresa y el ingreso es:

$$\rho_m(b_1, b_2, ..., b_n) = \alpha b_{m+1}$$

Situación II) La cantidad residual α generada por la empresa m no la podría satisfacer, por completo, la siguiente empresa en la lista de méritos pero si entre todas las restantes, es decir $k_{m+1} < \alpha \leq \sum_{i=m+1}^{n} k_i$. En ese caso la empresa m desplaza a varias empresas. Si la empresa m retirase su puja, para satisfacer la demanda residual α serían necesarias q empresas, donde $q \in N$ tal que verifica $\sum_{i=m+1}^{m+q-1} k_i < \alpha \leq \sum_{i=m+1}^{m+q} k_i$. Luego el ingreso de la empresa m es:

$$\rho_m(b_1, b_2, ..., b_n) = \sum_{i=m+1}^{m+q} k_i b_i + \left(\alpha - \sum_{i=m+1}^{m+q} k_i\right) b_q$$

Situación III) La cantidad residual α generada por la empresa m no la podría satisfacer, por completo, todas las empresas que han quedado fuera del mercado, es decir $\sum_{i=m+1}^{n} k_i < \alpha$. En ese caso la empresa m desplaza a las empresas $\{m+1, m+2, ..., n\}$ que han quedado fuera del mercado. Y además, si la empresa m retirase su oferta no habría empresas suficientes para satisfacer la demanda ya que faltarían $\alpha - \sum_{i=m+1}^{n} k_i$ unidades por cubrir. Éstas últimas unidades, que no han sido desplazadas de ninguna empresa, el Operador del Mercado las paga a $b_{\max} = 1$. Luego el ingreso de la empresa m es:

$$\rho_m(b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{cases} \sum_{i=m+1}^{n} k_i b_i + \left(\alpha - \sum_{i=m+1}^{n} k_i\right) b_{\max} & si \quad m \neq n \\ \alpha b_{\max} & si \quad m = n \end{cases}$$

Una vez conocidas las pujas, el Operador del Mercado pagará por la demanda eléctrica

$$\sum_{j=1}^{m} \rho_j(b_1, b_2, ..., b_n)$$

Ejemplo 6.7.1 *Veamos un ejemplo numérico concreto: hay 5 empresas neutrales al riesgo y con distintas capacidades interesadas en el despacho de energía eléctrica en cierto mercado. La demanda para un periodo es de* $D = 2.35$*. Supongamos que las empresas han entregado ya sus ofertas y, una vez ordenadas según sus pujas de menor a mayor, ha quedado la siguiente lista de méritos:*

empresa	1	2	3	4	5
b_i	0.073138	0.301355	0.642939	0.77871	0.967574
k_i	0.4	1.2	0.5	0.8	0.3

La demanda queda satisfecha con las 4 primeras empresas, la última de ella despachando sólo la demanda residual $\alpha = 2.35 - (0.4 + 1.2 + 0.5) = 0.25$, *luego* 0.55 *unidades de la empresa 4 quedan fuera del mercado. Las 3 primeras empresas despachan sus capacidades completas. Veamos como quedan los ingresos de cada una de las empresas:*

La empresa 1 recibe $\rho_1(b_1, b_2, ..., b_5) = k_1 b_4 = 0.311484$ *ya que si ésta se retira, entran* 0.4 *de las* 0.55 *unidades de la empresa 4 que quedaron fuera.*

La empresa 2 recibe $\rho_2(b_1, b_2, ..., b_5) = 0.55 b_4 + 0.3 b_5 + (k_2 - (0.55 + 0.3))\, b_{\max} = 1.0685627$ *ya que si ésta se retira, entran las* 0.55 *unidades de la empresa 4 que quedaron fuera,* 0.25 *unidades de la empresa 5 y faltan* 0.35 *para completar las* k_2 *unidades retiradas, que se pagan a precio máximo.*

La empresa 3 recibe $\rho_1(b_1, b_2, ..., b_5) = k_3 b_4 = 0.389355$ *ya que si ésta se retira, entran* 0.5 *de las* 0.55 *unidades de la empresa 4 que quedaron fuera.*

La empresa 4 recibe $\rho_1(b_1, b_2, ..., b_5) = \alpha b_5 = 0.2418935$ *ya que si ésta se retira, entran* 0.25 *unidades de la empresa 5.*

El Operador del Mercado paga en total: 2.0112952

Se ha implementado el modelo de Vickrey con el *software Mathematica* y se adjunta en el Apéndice D. El programa pide como entrada la lista de capacidades y la demanda de energía eléctrica a subastar. En dicho desarrollo se ha supuesto que las empresas ofertan sus tipos (que generamos aleatoriamente), es decir suponemos que pujar el verdadero tipo es equilibrio bayesiano de Nash. Una vez introducidas las distintas capacidades de las empresas y la demanda eléctrica, el programa responde con una tabla determinada por la subasta. Por ejemplo, con los mismo datos anteriores se obtiene:

Se reciben las siguientes ofertas

0.64293851389888146256	0.5	1
0.07313751542481429449 9	0.4	2
0.77871428704417808525	0.8	3
0.30135530524982853399	1.2	4
0.96757414769903207169	0.3	5
pujas	despacho	nº de entrada

La subasta determina

0.073137515424814294499	0.4	2	0.311486	0.282231
0.30135530524982853399	1.2	4	1.06857	0.706939
0.64293851389888146256	0.5	1	0.389357	0.0678879
0.77871428704417808525	0.25	3	0.241894	0.047215
pujas	despacho	nº de entrada	ingresos	beneficios

2.0113	pago del operador
2.35	demanda

En dicha tabla se indica: las ofertas que han entrado en el mercado ordenadas de menor a mayor, el despacho eléctrico correspondiente, el número que poseían las empresas antes de entrar en el mercado, ingresos y beneficios de las empresas. A parte se indica el pago total del Operador del Mercado y la demanda satisfecha.

No está demostrado para un caso tan general como el del programa de implementación del modelo de Vickrey que pujar el verdadero tipo sea equilibrio bayesiano de Nash. Por ello a continuación hemos fijado las pujas de todas las empresas menos una a su verdadero tipo, mientras que la puja restante recorre el intervalo $[0, 1]$. Para cada uno de esos valores calculamos, mediante un programa incluido en el Anexo D, el ingreso esperado por esa empresa que no puja el tipo. La salida del programa resume las pujas recibidas, las capacidades de producción ofertadas en cada caso, el tipo de cada empresa y la numeración antes de ordenar. Además devuelve una tabla con datos de la empresa que no puja su tipo, en la que se indica, por filas, para cada valor de la puja realizada por dicha empresa: el tipo, beneficio, número de entrada en el mercado. Por ejemplo

Se reciben las siguientes ofertas

pujas	despacho	tipo	nº de entrada
0.029789144076489445869	2.3	0.029789144076489445869	1
0.83932022780430622978	1	0.83932022780430622978	2
0.29897305948805280120	1	0.29897305948805280120	3
0.40822744775459583349	1	0.40822744775459583349	4
0.61374547077173015170	1	0.61374547077173015170	5
0.22743064748105709592	1	0.22743064748105709592	6

puja	tipo	beneficio	ordendeentrada
0	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.05	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.1	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.15	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.2	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.25	0.029789144076489445869	1.01167	2
0.3	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.35	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.4	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.45	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.5	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.55	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.6	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.65	0.029789144076489445869	0	5
0.7	0.029789144076489445869	0	5
0.75	0.029789144076489445869	0	5
0.8	0.029789144076489445869	0	5
0.85	0.029789144076489445869	0	6
0.9	0.029789144076489445869	0	6
0.95	0.029789144076489445869	0	6
1.	0.029789144076489445869	0	6

En el ejemplo podemos observar que dependiendo de la puja de la empresa se obtienen diferentes beneficios. Además cuanto mayor es la puja más alto es el número de entrada en el mercado y más posibilidades hay de quedar fuera del mercado. El beneficio máximo es alcanzado por varias pujas distintas pero en todos los ejemplos que podamos realizar, siempre incluye el tipo. Obsérvese este otro ejemplo

Se reciben las siguientes ofertas

pujas	despacho	tipo	nº de entrada
0.75739735693635319632	1	0.75739735693635319632	1
0.12570262702823096796	1	0.12570262702823096796	2
0.42250250727348654965	1	0.42250250727348654965	3
0.61589767903837151202	1	0.61589767903837151202	4
0.50400645496199384975	1	0.50400645496199384975	5
0.74528574614889098288	1	0.74528574614889098288	6

puja	tipo	beneficio	ordendeentrada
0	0.75739735693635319632	−0.310444	1
0.05	0.75739735693635319632	−0.310444	1
0.1	0.75739735693635319632	−0.310444	1
0.15	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.2	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.25	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.3	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.35	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.4	0.75739735693635319632	−0.310444	2
0.45	0.75739735693635319632	−0.0760173	3
0.5	0.75739735693635319632	−0.0760173	3
0.55	0.75739735693635319632	0	4
0.6	0.75739735693635319632	0	4
0.65	0.75739735693635319632	0	5
0.7	0.75739735693635319632	0	5
0.75	0.75739735693635319632	0	6
0.8	0.75739735693635319632	0	6
0.85	0.75739735693635319632	0	6
0.9	0.75739735693635319632	0	6
0.95	0.75739735693635319632	0	6
1.	0.75739735693635319632	0	6

Cuando el tipo es alto en comparación con la demanda, ofertar por debajo del tipo tiene el riesgo de reportar beneficios negativos, en ese caso el beneficio máximo es cero. Entre todas las pujas que rinden beneficio máximo vuelve a estar el tipo. Lo que se ha hecho a continuación es cuantificar la diferencia de la media aritmética de todas las pujas que dan beneficio máximo y el tipo, en cada ejemplo. Luego se ha iterado ese proceso y se ha concluido que el valor obtenido en cada paso tiende a cero. Es decir, se ha creado un bucle que itera la subasta n veces (donde la empresa 1 puja diferentes valores $k \in [0, 1]$ y los tipos son escogidos en cada iteración aleatoriamente) y en el que se calcula un valor llamado num que es la diferencia entre: la media de las pujas que dan en cada paso beneficio máximo a la empresa 1 y el verdadero tipo de la empresa 1, en ese paso. Con todos esos valores (esas diferencias obtenidas en cada iteración) se calcula una media aritmética denominada $\frac{acumulador}{n}$ que verifica que tiende a cero cuando n tiende a infinito y, por tanto, **confesar el verdadero tipo es experimentalmente equilibrio bayesiano de Nash para un número arbitrario de empresas con diferentes capacidades de producción**. Por ejemplo

```
In[6]:= acumulador = 0;

In[7]:= num = 0;

In[8]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {1000}]

In[9]:= acumulador/1000

Out[9]= -0.00969671
```

6.8 Problemas abiertos

A lo largo de esta tesis se ha trabajado con hipótesis que han permitido el desarrollo teórico pero que en algunos casos habría que generalizar para tratar modelos más reales. Por ejemplo en nuestro trabajo se ha considerado que las ofertas realizadas por las empresas eran un precio por unidad al que estaban dispuestas a vender toda su capacidad de producción. Sería más razonable estudiar modelos donde las ofertas fuesen funciones a trozos, es decir, diferentes precios según el tramo de unidades eléctricas a vender. Además nosotros hemos considerado que el número de empresas que compiten en el mercado es dos. Sería interesante, al igual que se hizo en la sección anterior, comprobar como se generalizan los resultados obtenidos si compiten en el mercado un mayor número de empresas. Evidentemente muchas de estas generalizaciones se tendrían que simular ya que los resultados teóricos son muy complicados de obtener en estas generalizaciones.

En todos los capítulos de esta tesis se ha analizado la subasta que se realiza a diario en el Mercado Eléctrico para cada uno de los periodos del día siguiente (una hora o media dependiendo del mercado), sin tener en consideración el resto de periodos o franjas horarias. Es claro que, en realidad, las ofertas realizadas por las empresas deben relacionar los distintos periodos para abaratar costes de encendido y apagado, por ejemplo. Creemos que se podrían utilizar subastas combinatorias que modelasen ofertas para un día completo.

Una vez se hubiese modelado la subasta para un día se podría aplicar algún modelo dinámico para analizar el comportamiento a largo plazo.

Con la privatización de los Mercados Eléctricos, en realidad se introduce competencia en la generación de la electricidad, mientras que el transporte y la distribución permanecen con tarifas reguladas. El consumidor final compra energía a un precio fijado por el Estado. Sería interesante analizar qué ventajas podría tener el subastar otros aspectos del Mercado Eléctrico, es decir, introducir competencia en otros aspectos del Mercado Eléctrico. Por ejemplo, sería interesante analizar como se comportaría el mercado si los consumidores finales decidiesen qué cantidad de energía eléctrica consumen en función del precio. Es decir, que la demanda fuese dependiente del precio y que, por tanto, la demanda reaccionase inmediatamente al precio del mercado (demanda elástica).

Los modelos matemáticos empleados no modelan situaciones más complejas en las que resultaría imposible el cálculo de equilibrios bayesianos de Nash de manera exacta. En el modelo de Vickrey hemos implementado un procedimiento que da como resultado experimental, en situaciones muy generales, que pujar la verdad es equilibrio bayesiano de Nash. Sería interesante implementar procedimientos que buscasen equilibrios bayesianos de Nash en un modelo de subasta arbitrario bajo hipótesis más generales que las consideradas en los modelos teóricos de este trabajo. Una vez calculados dichos equilibrios, se pasaría a la comparación de los diferentes modelos de subasta que se quisieran analizar.

Apéndice A

Gráficas Capítulo 3

En este anexo incluimos las sentencias definidas en el programa *Mathematica 5.0* utilizadas para el cálculo y representación de gráficas del Capítulo 3. En él se incluyeron sendas gráficas representado el ingreso esperado por las empresas y el pago esperado por el Operador del Mercado, respectivamente, bajo los modelos de subasta analizados en dicho capítulo. Al final del anexo se incluyen unas gráficas en las que se ha representado, para cualquier tamaño de la demanda, el ingreso esperado por las empresas y el pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo cualquiera de los modelos analizados a lo largo del Capítulo 3. Éstas resumen todas las conclusiones obtenidas en dicho capítulo.

Nota sección 3.3.

$$
\begin{aligned}
f_{(\Theta_1,\Theta_2)}(\theta_1,\theta_2) &= \int_{\Omega_S} f_{(\Theta_1,\Theta_2)|S=s}\left(\theta_1,\theta_2\right) f_S\left(s\right) ds \\
&= \int_{\Omega_S} f_{\Theta_1|S=s}\left(\theta_1\right) f_{\Theta_2|S=s}\left(\theta_2\right) f_S\left(s\right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[s,s+1]}(\theta_1)\chi_{[s,s+1]}(\theta_2)\chi_{[0,1]}(s) ds \\
&= \int_{0}^{1} \chi_{[s,s+1]}(\theta_1)\chi_{[s,s+1]}(\theta_2) ds
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
\displaystyle\int_0^{\min(\theta_1,\theta_2)} ds \quad si & \theta_1, \theta_2 \in [0,1] \\[2ex]
\displaystyle\int_{\max(\theta_1,\theta_2)-1}^{1} ds \quad si & \theta_1, \theta_2 \in [1,2] \\[2ex]
\displaystyle\int_{\max(\theta_1,\theta_2)-1}^{\min(\theta_1,\theta_2)} ds \quad si & \begin{array}{c} \min(\theta_1,\theta_2) \in [0,1] \\ \max(\theta_1,\theta_2) \in [1,2] \\ \max(\theta_1,\theta_2) \leq \min(\theta_1,\theta_2) + 1 \end{array} \\[2ex]
0 & \text{resto de los casos}
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\min(\theta_1,\theta_2) & si & \theta_1, \theta_2 \in [0,1] \\[2ex]
2 - \max(\theta_1,\theta_2) & si & \theta_1, \theta_2 \in [1,2] \\[2ex]
\min(\theta_1,\theta_2) - \max(\theta_1,\theta_2) + 1 & si & \begin{array}{c} \min(\theta_1,\theta_2) \in [0,1] \\ \max(\theta_1,\theta_2) \in [1,2] \\ \max(\theta_1,\theta_2) \leq 1 + \min(\theta_1,\theta_2) \end{array} \\[2ex]
0 & & \text{resto de los casos}
\end{cases}
$$

INGRESOS ESPERADOS POR LAS DOS EMPRESAS Y PAGO ESPERADO POR EL SUBASTADOR EN LOS TRES MODELOS EN DUOPOLIO CORRELADO CASO 2

Vamos a comparar los tres modelos de subasta en el Caso 2 bajo las hipótesis particulares del jemplo 3.2.1. al que se hace referencia en todo el Capítulo 3. En el ejemplo 3.2.1. se calculó las funciones de densidad y de distribución, definámoslas en Mathematica:

$$\text{f1}[\text{x\_}, \text{y\_}] := \text{If}\left[0 \le y \le x, \frac{y}{x}, \text{If}\left[x \le y \le 1, 1, \text{If}\left[1 \le y \le x+1, \frac{x-y+1}{x}, 0\right]\right]\right]$$

$$\text{f2}[\text{x\_}, \text{y\_}] := \text{If}\left[x-1 \le y \le 1, \frac{y-x+1}{2-x}, \text{If}\left[1 \le y \le x, 1, \text{If}\left[x \le y \le 2, \frac{2-y}{2-x}, 0\right]\right]\right]$$

$$\text{f}[\text{x\_}, \text{y\_}] := \text{If}[0 \le x \le 1, \text{f1}[x, y], \text{If}[1 \le x \le 2, \text{f2}[x, y], 0]]$$

Se necesitará también la densidad marginal

$$\text{fmar}[\text{x\_}] := x /; 0 \le x \le 1$$

$$\text{fmar}[\text{x\_}] := 2 - x /; 1 \le x \le 2$$

$$\text{fmar}[\text{x\_}] := 0 /; x < 0$$

$$\text{fmar}[\text{x\_}] := 0 /; x > 2$$

CASO 2

Modelo Vickrey

Sea

$$\text{Ivick}[\theta\_, \alpha\_] := 2\alpha + (1-\alpha)\int_{\theta}^{2} y\, \text{f}[\theta, y]\, dy$$

el ingreso esperado, bajo el modelo de Vickrey, si ambas empresas juegan el equilibrio.

$$\text{opervick}[\alpha\_] := 2\,\text{N}\left[\int_0^2 \text{Ivick}[\theta, \alpha]\, \text{fmar}[\theta]\, d\theta\right]$$

el pago esperado por el operador del mercado si ambas empresas juegan el equilibrio.

Modelo Uniforme

Sea

$$\text{b}[\text{x\_}, \alpha\_] := \frac{2\alpha\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}} - 2(1-\alpha)\, x}{3\alpha - 2}$$

$$\text{Iunifor}[\theta\_, \alpha\_] := \frac{\alpha\, \text{b}[\theta, \alpha]\, \theta}{2} + \int_{\theta}^{2} \text{b}[y, \alpha]\, \text{f}[\theta, y]\, dy$$

el ingreso esperado, bajo el modelo de Vickrey, si ambas empresas juegan el equilibrio.

$$\text{operunifor}[\alpha\_] := 2\,\text{N}\left[\int_0^2 \text{Iunifor}[\theta, \alpha]\, \text{fmar}[\theta]\, d\theta\right]$$

el pago esperado por el Operador del Mercado si ambas empresas juegan el equilibrio.

Modelo Discriminatorio

Sea

$$\text{Idiscrim}[\theta\_, \alpha\_] := \frac{2\alpha^2 + 2(1-\alpha)\left(1 - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}(1-\alpha)^2\left(1 - \left(\frac{\theta}{2}\right)^3\right)}{\left(1 - (1-\alpha)\frac{\theta}{2}\right)}$$

el ingreso esperado, bajo el modelo de Vickrey, si ambas empresas juegan el equilibrio.

```
operdiscrim[α_] := 2 N[∫_0^2 Idiscrim[θ, α] fmar[θ] dθ]
```

el pago esperado por el Operador del Mercado si ambas empresas juegan el equilibrio.

Modelo DV

Sea

$$\text{IDV}[\theta\_,\ \alpha\_] := \frac{\alpha\,(\theta^2 - \theta + 4) + 2 + \theta - \theta^2}{3}$$

el ingreso esperado, bajo el modelo de Vickrey, si ambas empresas juegan el equilibrio.

$$\text{opeDV}[\alpha\_] := \frac{25\alpha + 11}{9}$$

el pago esperado por el Operador del Mercado si ambas empresas juegan el equilibrio.

Comparación desde el punto de vista de las empresas

```
comparacion[α_] := Plot[{Ivick[θ, α], Iunifor[θ, α], Idiscrim[θ, α], IDV[θ, α]}, {θ, 0, 2},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.025, 0.05}], Thickness[0.02]}}, PlotRange→ {0, 2}, PlotLabel→ α "=α", AxesLabel→ {tipo, ingresos},
  Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1, 1.5, 2}}]
```

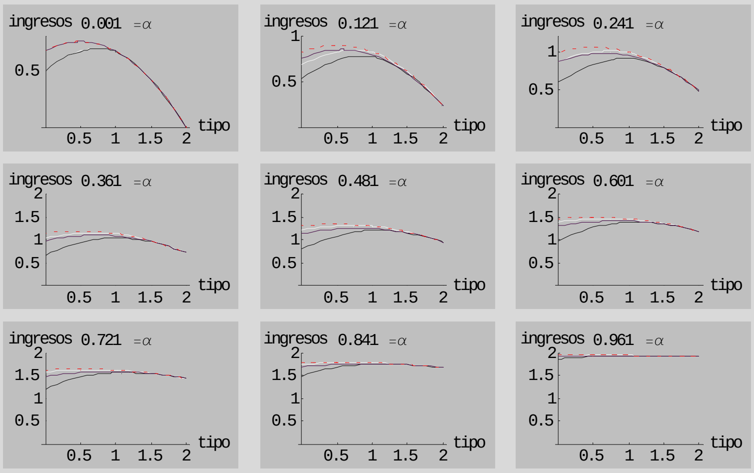
```
w = Table[comparacion[α], {α, 0.001, 1, 0.12}]
```

```
v1 = Plot[{Ivick[θ, 0.001], Iunifor[θ, 0.001], Idiscrim[θ, 0.001], IDV[θ, 0.001]}, {θ, 0, 2},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.025, 0.05}], Thickness[0.02]}}, PlotRange→ {0, 0.8}, PlotLabel→ 0.001 "=α", AxesLabel→ {tipo, ingresos},
  Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1, 1.5, 2}}]
```

```
v2 = Plot[{Ivick[θ, 0.121], Iunifor[θ, 0.121], Idiscrim[θ, 0.121], IDV[θ, 0.121]}, {θ, 0, 2},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.025, 0.05}], Thickness[0.02]}}, PlotRange→ {0, 1}, PlotLabel→ 0.121 "=α", AxesLabel→ {tipo, ingresos},
  Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1, 1.5, 2}}]
```

```
v3 = Plot[{Ivick[θ, 0.241], Iunifor[θ, 0.241], Idiscrim[θ, 0.241], IDV[θ, 0.241]}, {θ, 0, 2},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.025, 0.05}], Thickness[0.02]}}, PlotRange→ {0, 1.2}, PlotLabel→ 0.241 "=α", AxesLabel→ {tipo, ingresos},
  Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1, 1.5, 2}}]
```

```
Show[GraphicsArray[{{v1, v2, v3}, {w[[4]], w[[5]], w[[6]]}, {w[[7]], w[[8]], w[[9]]}}]]
```

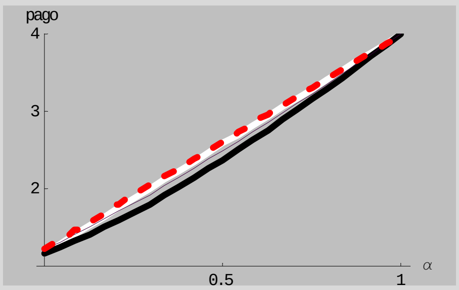


- GraphicsArray -

Blanco------------->Vickrey
Negra fina --------> Discriminatoria
Negra gruesa ----->Uniforme
Discontinua------->DV

Comparación desde el punto de vista del operador del mercado

```
comparacion = Plot[{opervick[α], operunifor[α], operdiscrim[α], opeDV[α]}, {α, 0, 1},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, Thickness[0.02], RGBColor[0.250004, 0, 0.250004] ,
    {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.025, 0.05}], Thickness[0.02]}}, PlotRange→ {1, 4}, AxesLabel→ {α, pago}, Background→ GrayLevel[0.75],
  Ticks→ {{0, 0.5, 1}, {1, 2, 3, 4}}]
```



- Graphics -

Blanco------------->Vickrey
Negra fina --------> Discriminatoria
Negra gruesa ----->Uniforme
Discontinua------->DV

INGRESOS ESPERADOS POR LAS DOS EMPRESAS EN LOS TRES CASOS

CASO 1

$$\text{Ivick1}[\theta\_,\ d\_] := \text{If}\left[0 \le \theta \le 1,\ d\,\frac{3+3\theta-2\theta^2}{6},\ \text{If}\left[1 \le \theta \le 2,\ d\,\frac{2+\theta-\theta^2}{3}\right]\right]$$

$$\text{openvick1}[d\_] := d\,\frac{7}{6}$$

$$\text{Iunifdiscrim1}[\theta\_,\ d\_] := d\,\frac{2+\theta-\theta^2}{3}$$

$$\text{opeunifdiscrim1}[d\_] := d\,\frac{11}{9}$$

CASO 2

$$\text{Ivick2}[\theta\_,\ \alpha\_] := \text{If}\left[0 \le \theta \le 1,\ \frac{(1-\alpha)\,\theta\,(3-2\theta)+3\,(3\alpha+1)}{6},\ \text{If}\left[1 \le \theta \le 2,\ \frac{(1-\alpha)\,\theta\,(1-\theta)+2\,(2\alpha+1)}{3}\right]\right]$$

$$\text{openvick2}[\alpha\_] := \frac{17\alpha+7}{6}$$

$$\text{Iunifor2}[\theta\_,\ \alpha\_] := \text{If}\left[0 \le \theta \le 1,\ \frac{12\alpha^3\left(\frac{\theta+1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - 12\alpha^3\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \theta\,(1-\alpha)\,(\alpha-2)\,\left(\theta^2\,(3\alpha-2)+3\theta+3\right) - 12\alpha^3\,2^{\frac{-2}{\alpha}}}{3\theta\,(2-\alpha)\,(3\alpha-2)},\right.$$
$$\left.\text{If}\left[1 \le \theta \le 2,\ \frac{24\alpha^3\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} - \theta\left(\theta^3\left(3\alpha^3-11\alpha^2+12\alpha-4\right) - 6\theta^2\left(\alpha^3-4\alpha^2+5\alpha-2\right) + 4\left(3\alpha^3-2\alpha^2+6\alpha-4\right)\right)}{3\theta\,(2-\alpha)\,(3\alpha-2)\,(\theta-2)}\right]\right]$$

$$\text{opeunif2}[\alpha\_] := \frac{(\alpha+1)\left(24\left(1-2^{\frac{-2}{\alpha}}\right)\alpha^3+7\alpha^2+7\alpha-14\right)}{3\,(\alpha+2)\,(3\alpha-2)}$$

$$\text{Idiscrim2}[\theta\_,\ \alpha\_] := \frac{2\alpha^2+2\,(1-\alpha)\left(1-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}\,(1-\alpha)^2\left(1-\left(\frac{\theta}{2}\right)^3\right)}{\left(1-(1-\alpha)\,\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{opedis2}[\alpha\_] := \frac{48\alpha^3\,(1+\alpha)\,\text{Log}\left[\frac{1+\alpha}{2}\right] - 48\alpha^4\,\text{Log}[\alpha] - 7\alpha^4+22\alpha^3-12\alpha^2-14\alpha+11}{9\,(1-\alpha)^3}$$

$$\text{IDV}[\theta\_,\ \alpha\_] := \frac{\alpha\left(\theta^2-\theta+4\right)+2+\theta-\theta^2}{3}$$

$$\text{opeDV2}[\alpha\_] := \frac{25\alpha+11}{9}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{25\alpha+11}{9} - \frac{17\alpha+7}{6}\right]$$

$$\frac{1-\alpha}{18}$$

```
Vickreytodosloscasos[d_, θ_] := If[0 ≤ d ≤ 1, Ivick1[θ, d], If[1 ≤ d ≤ 2, Ivick2[θ, d - 1], If[d ≥ 2, 2]]]
```

```
Discriminatoriatodosloscasos[d_, θ_] := If[0 ≤ d ≤ 1, Iunifdiscrim1[θ, d], If[1 ≤ d ≤ 2, Idiscrim2[θ, d - 1], If[d ≥ 2, 2]]]
```

```
Uniformetodosloscasos[d_, θ_] := If[0 ≤ d ≤ 1, Ivick1[θ, d], If[1 ≤ d ≤ 2, Iunifor2[θ, d - 1], If[d ≥ 2, 2]]]
```

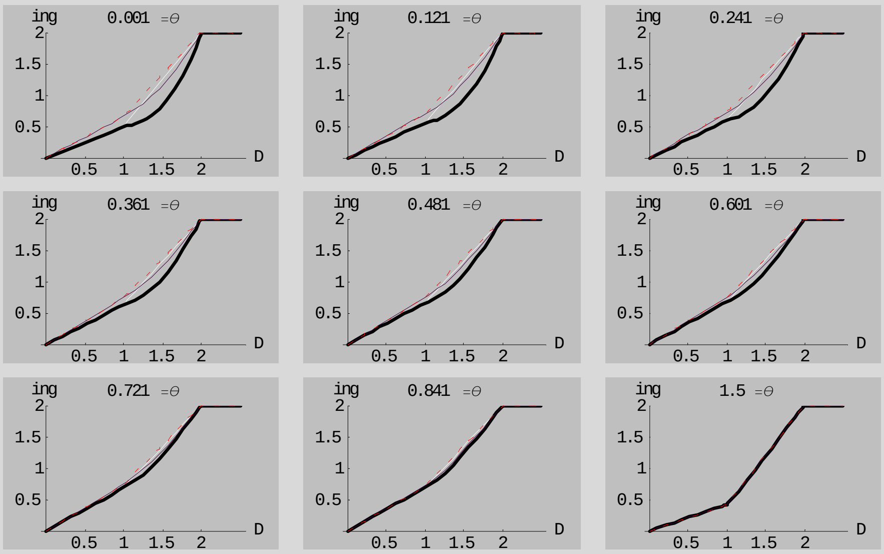
```
DVtodosloscasos[d_, θ_] := If[0 ≤ d ≤ 1, Iunifdiscrim1[θ, d], If[1 ≤ d ≤ 2, IDV[θ, d - 1], If[d ≥ 2, 2]]]
```

```
comparacion[θ_] := Plot[Evaluate[{Vickreytodosloscasos[d, θ], Uniformetodosloscasos[d, θ], Discriminatoriatodosloscasos[d, θ], DVtodosloscasos[d, θ]}],
  {d, 0, 2.5}, PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.015]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.015]},
   {Thickness[0.015], Dashing[{0.025, 0.05}], RGBColor[1, 0, 0]}}, PlotRange→ {0, 2}, PlotLabel→ θ "=θ", AxesLabel→ {D, ing},
  Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {0.5, 1, 1.5, 2}}]
```

```
u = Table[comparacion[θ], {θ, 0.001, 1, 0.12}]
```

```
ñ = comparacion[1.5]
```

```
Show[GraphicsArray[{{u[[1]], u[[2]], u[[3]]}, {u[[4]], u[[5]], u[[6]]}, {u[[7]], u[[8]], ñ}}]]
```



- GraphicsArray -

```
openvick1   opeunifdiscrim1   openvick2   opeunif2[α_]   opedis2[α_]   opeDV2[α_]
```

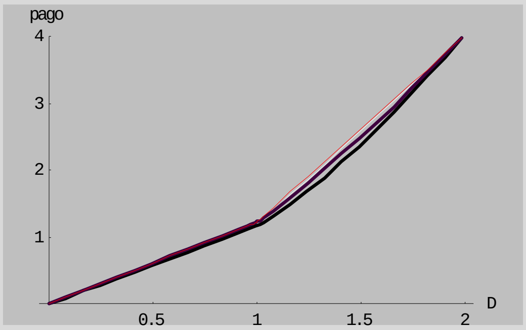
```
opVickreytodosloscasos[d_] := If[0 ≤ d ≤ 1, openvick1 [d], If[1 ≤ d ≤ 2, openvick2 [d - 1], If[d ≥ 2, 4]]]
```

```
opDiscriminatoriatodosloscasos[d_] := If[0 ≤ d ≤ 1, opeunifdiscrim1[d], If[1 ≤ d ≤ 2, opedis2[d - 1], If[d ≥ 2, 4]]]
```

```
opUniformetodosloscasos[d_] := If[0 ≤ d ≤ 1, openvick1 [d], If[1 ≤ d ≤ 2, opeunif2[d - 1], If[d ≥ 2, 4]]]
```

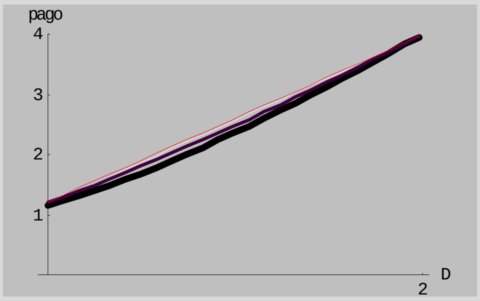
```
opDVtodosloscasos[d_] := If[0 ≤ d ≤ 1, opeunifdiscrim1[d], If[1 ≤ d ≤ 2, opeDV2[d - 1], If[d ≥ 2, 4]]]
```

```
Plot[Evaluate[{opVickreytodosloscasos[d], opUniformetodosloscasos[d], opDiscriminatoriatodosloscasos[d], opDVtodosloscasos[d]}], {d, 0, 1.99},
 PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.0051]}, Thickness[0.01], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]}, RGBColor[1, 0, 0]},
 PlotRange→ {0, 4}, AxesLabel→ {D, pago}, Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {1, 2, 3, 4}}]
```



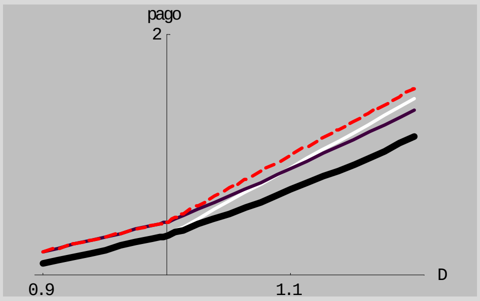
- Graphics -

```
Plot[Evaluate[{opVickreytodosloscasos[d], opUniformetodosloscasos[d], opDiscriminatoriatodosloscasos[d], opDVtodosloscasos[d]}], {d, 1, 1.99},
 PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.0051]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]}, RGBColor[1, 0, 0]},
 PlotRange→ {0, 4}, AxesLabel→ {D, pago}, Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{1, 2}, {1, 2, 3, 4}}]
```



- Graphics -

```
Plot[Evaluate[{opVickreytodosloscasos[d], opUniformetodosloscasos[d], opDiscriminatoriatodosloscasos[d], opDVtodosloscasos[d]}], {d, 0.9, 1.2},
 PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.01]}, Thickness[0.02], {RGBColor[0.250004, 0, 0.250004], Thickness[0.01]},
   {Thickness[0.01], Dashing[{0.025, 0.016}], RGBColor[1, 0, 0]}}, PlotRange→ {1, 2}, AxesLabel→ {D, pago}, Background→ GrayLevel[0.75],
 Ticks→ {{0.8, 0.9, 1, 1.1}, {1, 2, 3}}]
```



- Graphics -

Apéndice B

Gráficas Capítulo 4

En este anexo incluimos las sentencias definidas en el programa *Mathematica 5.0* utilizadas para el cálculo y representación de gráficas del Capítulo 4. En él se incluyeron gráficas representando los ingresos esperados por las empresas y el pago que el Operador del Mercado espera hacer bajo distintos modelos de subasta. Además aparecen gráficas comparativas bajo todos los modelos de subasta, para cada una de las empresas y para el Operador del mercado. La última página del presente anexo incluye una gráfica en la que se ha representado, para cualquier tamaño de la demanda, el pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo cualquiera de los modelos analizados a lo largo del Capítulo 4 y que resume todas las conclusiones, desde el punto de vista del Operador del Mercado, obtenidas en dicho capítulo.

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS EN EL CASO 2

Modelo de Vickrey

In[1]:= IMvick1[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{2}$

In[2]:= IMvick2[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{2}+\alpha$

In[3]:= Pagoperadorvickreyc2[α_] := $\frac{2}{3}+\alpha$

Modelo A

In[4]:= IMA1[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{4}$

In[5]:= IMA2[θ_, α_] := If[$\theta<\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}+\alpha$, $1-\theta^2+\alpha$]

In[6]:= PagoperadorA[α_] := $\frac{3}{4}+\alpha$

Modelo B

In[7]:= IMB1[θ_, α_] := If[$\theta<\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1-\theta^2$]

In[8]:= IMB2[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{4}+\alpha$

In[9]:= PagoperadorB[α_] := $\frac{3}{4}+\alpha$

Modelo DV

In[10]:= IMDV1[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{2}$

In[11]:= IMDV2[θ_, α_] := $\frac{1-\theta^2}{2}+\alpha$

In[12]:= PagoperadorDV[α_] := $\frac{2}{3}+\alpha$

Modelo C

In[13]:= IMC1[θ_, α_] := $\frac{1+\alpha-(1-\alpha)\,\theta^2}{2}$

In[14]:= IMC2[θ_, α_] := If[$\theta\leq 1-\alpha$, $\frac{1-\alpha^2-\theta^2}{2\,(1-\alpha)}$, α]

In[15]:= PagoperadorC[α_] := $\frac{(1+\alpha)\,(2+\alpha)}{3}$

Modelo Uniforme

In[16]:= IMunifor1[θ_, α_] := If[$\theta<\frac{1+\alpha}{2}$, $\frac{(3-\alpha)\,(1+\alpha)}{4}$, $1+\alpha-\theta^2$]

In[17]:= IMunifor2[θ_, α_] := If[$\theta<1-\alpha$, $\frac{(1+\alpha)^2-\theta^2}{4}$, α]

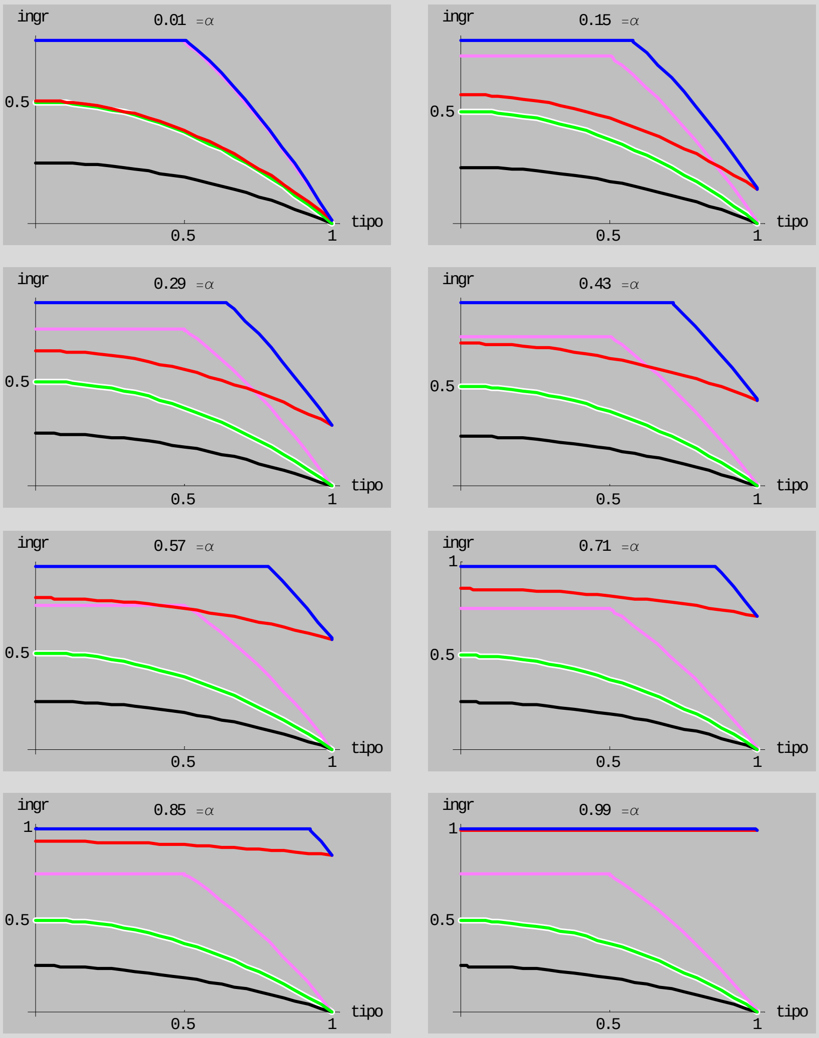
In[18]:= Pagoperadoruniforme[α_] := $\frac{(1+\alpha)^2\,(3-\alpha)}{4}$

■ **Comparación para la empresa 1**

In[19]:=
```
comparacion1[α_] := Plot[{IMvick1[θ, α], IMA1[θ, α], IMB1[θ, α], IMDV1[θ, α], IMC1[θ, α], IMunifor1[θ, α]}, {θ, 0, 1},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.01]},
   {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotLabel→ α "=α",
  AxesLabel→ {tipo, ingr}, Ticks→ {{0, 0.5, 1}, {0.5, 1}}, Background→ GrayLevel[0.75]]
```

In[20]:=
```
w = Table[comparacion1[α], {α, 0.01, 1, 0.14}]
```

In[21]:=
```
Show[GraphicsArray[{{w[[1]], w[[2]]}, {w[[3]], w[[4]]}, {w[[5]], w[[6]]}, {w[[7]], w[[8]]}}]]
```



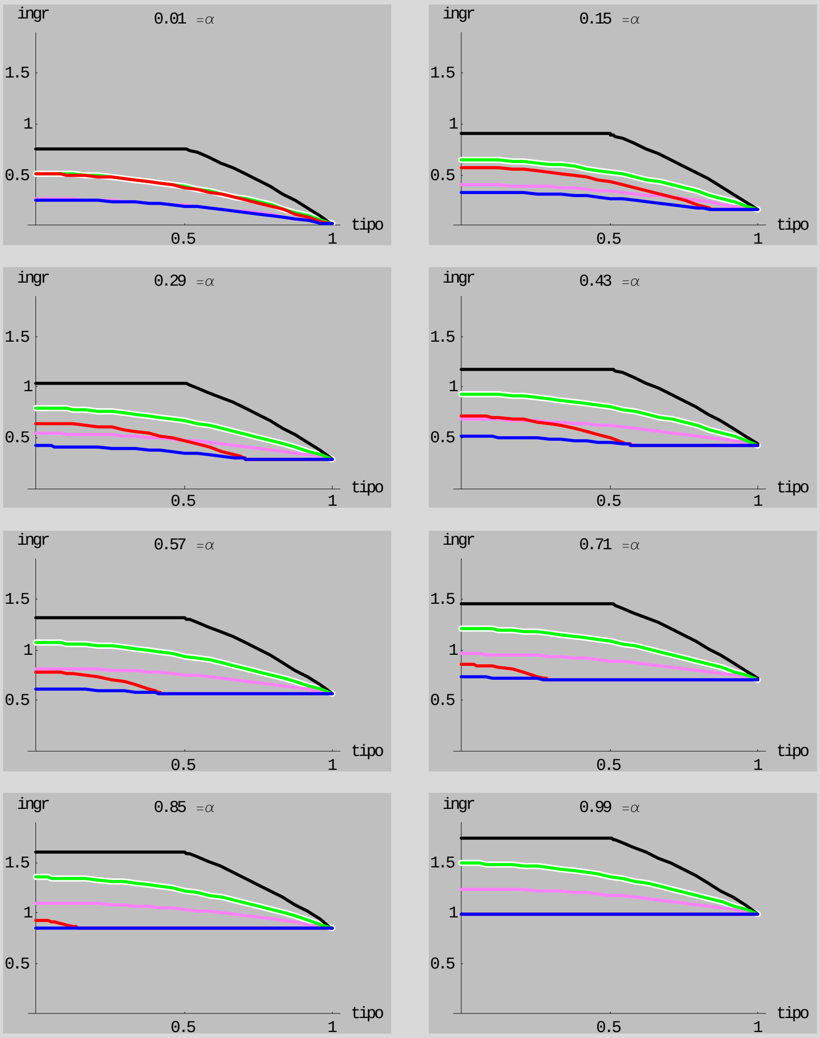
Out[21]= - GraphicsArray -

■ **Comparación para la empresa 2**

In[22]:=
```
comparacion2[α_] := Plot[{IMvick2[θ, α], IMA2[θ, α], IMB2[θ, α], IMDV2[θ, α], IMC2[θ, α], IMunifor2[θ, α]}, {θ, 0, 1},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.01]},
   {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotLabel→ α "=α",
  AxesLabel→ {tipo, ingr}, Ticks→ {{0, 0.5, 1}, {0.5, 1, 1.5}}, PlotRange→ {0, 1.9}, Background→ GrayLevel[0.75]]
```

In[23]:=
```
w = Table[comparacion2[α], {α, 0.01, 1, 0.14}]
```

In[24]:=
```
Show[GraphicsArray[{{w[[1]], w[[2]]}, {w[[3]], w[[4]]}, {w[[5]], w[[6]]}, {w[[7]], w[[8]]}}]]
```

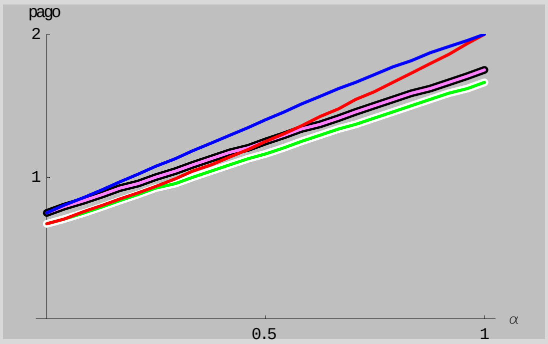


Out[24]= - GraphicsArray -

■ **Comparación para el Operador del Mercado**

In[25]:=

```
u = Plot[{Pagoperadorvickreyc2[α], PagoperadorA[α], PagoperadorB[α], PagoperadorDV[α], PagoperadorC[α], Pagoperadoruniforme[α]}, {α, 0, 1},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.02]}, {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.01]},
   {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotRange→ {0, 2},
  AxesLabel→ {α, pago}, Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {1, 2}}]
```



Out[25]= - Graphics -

En todas las gráficas de esta sección:

Blanco--->Modelo de Vickrey
Negro--->Modelo A
Rosa--->Modelo B
Verde--->Modelo DV
Rojo--->Modelo C
Azul--->Modelo Uniforme

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS EN EL CASO 3

Modelo de Vickrey

```
IMvick1[θ_, α_, β_] := α + (1 - α)/2 (1 - θ^2)
```

```
IMvick2[θ_, α_, β_] := β + α + (1 - α) (1 - θ^2)/2
```

```
Pagoperadorvickreyc3[α_, β_] := β + 2 α + 2 (1 - α)/3
```

Modelo V2 $(\alpha \leq \frac{1}{2})$

```
IMV21[θ_, α_, β_] := If[α < 1/2, If[θ < (1 - 2α)/(1 - α), (θ^2 (1 - α)^2 + 2α - 1)/(2 (2α - 1)), α], α]
```

```
IMV22[θ_, α_, β_] := If[α < 1/2, (θ^2 (2α - 1) + 2α + 2β + 1)/2, 1 + β]
```

```
PagoperadorV2[α_, β_] := If[α < 1/2, (3β + 2 + α (2 - 3β) - 3α^2)/(3 (1 - α)), 1 + α + β]
```

Modelo A1

```
IMA11[θ_, α_, β_] := (1 - α)/4 (1 - θ^2) + α
```

```
IMA12[θ_, α_, β_] := If[θ < 1/2, (α + 4β + 3)/4, 1 + β - (1 - α) θ^2]
```

```
PagoperadorA1[α_, β_] := (5α + 4β + 3)/4
```

Modelo A2 $(\alpha \leq \frac{1}{2})$

```
IMA21[θ_, α_, β_] := If[α < 1/2, If[θ < (1 - 2α)/(1 - α), (1 - θ^2 (1 - α)^2)/(4 (1 - α)), α], α]
```

```
IMA22[θ_, α_, β_] := If[α < 1/2, If[θ < 1/(2 (1 - α)), 1 + α + β - 1/(4 (1 - α)), 1 + α + β - (1 - α) θ^2], 1 + β]
```

```
PagoperadorA2[α_, β_] := If[α < 1/2, α + β + (3 - 4α)/(4 (1 - α)^2), 1 + α + β]
```

Modelo B1

```
IMB11[θ_, α_, β_] := If[θ < 1/2, (α + 3)/4, 1 - (1 - α) θ^2]
```

```
IMB12[θ_, α_, β_] := (1 - α) (1 - θ^2)/4 + α + β
```

```
PagoperadorB1[α_, β_] := (5α + 4β + 3)/4
```

Modelo DV1

```
IMDV11[θ_, α_, β_] := α + (1 - α)/2 (1 - θ^2)
```

```
IMDV12[θ_, α_, β_] := β + α + (1 - α) (1 - θ^2)/2
```

```
PagoperadorDV1[α_, β_] := 4/3 α + β + 2/3
```

Modelo C1 $(2\alpha+\beta<1)$

$$\text{IMC11}[\theta\_,\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \frac{(2\alpha+\beta-1)\,\theta^2+2\alpha+\beta+1}{2},\ 1\right]$$

$$\text{IMC12}[\theta\_,\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \text{If}\left[\theta\le\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha},\ \frac{(1-\alpha)^2\,\theta^2+(1+\beta)\,(2\alpha+\beta-1)}{2\,(2\alpha+\beta-1)},\ \alpha+\beta\right],\ \alpha+\beta\right]$$

$$\text{PagoperadorC1}[\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \frac{\beta^2+3\beta+2-3\alpha^2+\alpha\,(2-\beta)}{3\,(1-\alpha)},\ 1+\alpha+\beta\right]$$

Modelo Uni1 $(2\alpha+\beta<1)$

$$\text{IMuni11}[\theta\_,\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \text{If}\left[\theta\le\frac{1+\beta}{2\,(1-\alpha)},\ 1-\frac{(1+\beta)^2}{4\,(1-\alpha)}+\alpha+\beta,\ 1-(1-\alpha)\,\theta^2+\alpha+\beta\right],\ 1\right]$$

$$\text{IMuni12}[\theta\_,\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \text{If}\left[\theta\le\frac{1-2\alpha-\beta}{1-\alpha},\ \frac{(1+\beta)^2-\theta^2\,(1-\alpha)^2}{4\,(1-\alpha)},\ \alpha+\beta\right],\ \alpha+\beta\right]$$

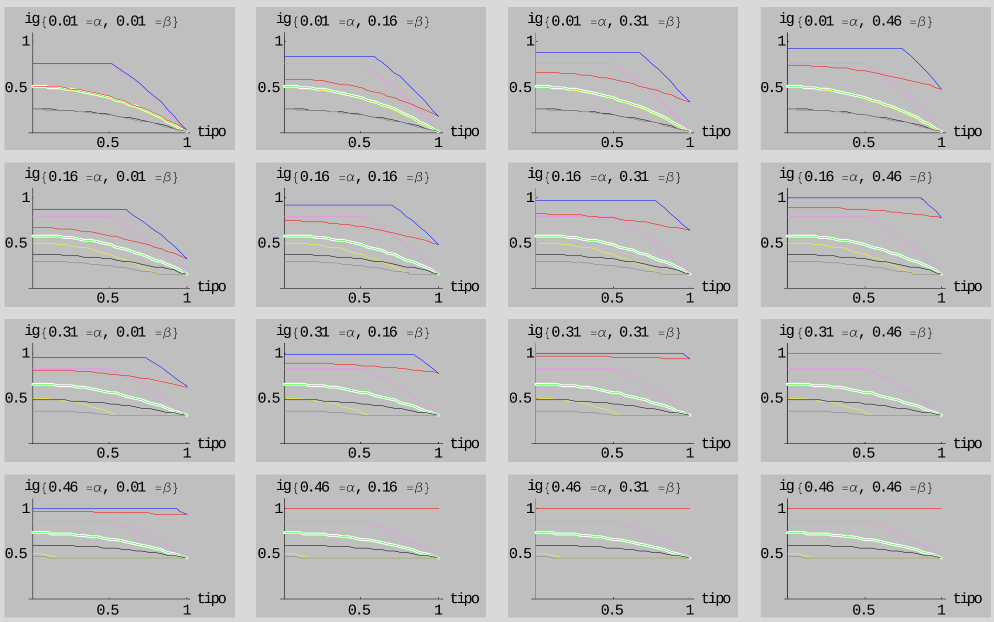
$$\text{Pagoperadoruni1}[\alpha\_,\beta\_] := \text{If}\left[2\alpha+\beta<1,\ \alpha+\frac{(1+\beta)^2\,(3-4\alpha-\beta)}{4\,(1-\alpha)^2},\ 1+\alpha+\beta\right]$$

■ **Comparación para la empresa 1**

```
comparacion1[α_, β_] := Plot[{IMvick1[θ, α, β], IMV21[θ, α, β], IMA11[θ, α, β], IMA21[θ, α, β], IMB11[θ, α, β], IMDV11[θ, α, β], IMC11[θ, α, β], IMuni11[θ, α, β]},
  {θ, 0, 1}, PlotStyle→{{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.01]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.01]},
    {GrayLevel[0.5], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotLabel→{α"=α", β"=β"}, AxesLabel→{tipo, ig},
  Ticks→{{0, 0.5, 1}, {0.5, 1}}, Background→GrayLevel[0.75], PlotRange→{0, 1.1}]
```

```
w = Table[comparacion1[α, β], {α, 0.01, 0.5, 0.15}, {β, 0.01, 0.5, 0.15}]
```

```
Show[GraphicsArray[Table[{w[[i, 1]], w[[i, 2]], w[[i, 3]], w[[i, 4]]}, {i, 4}]]]
```



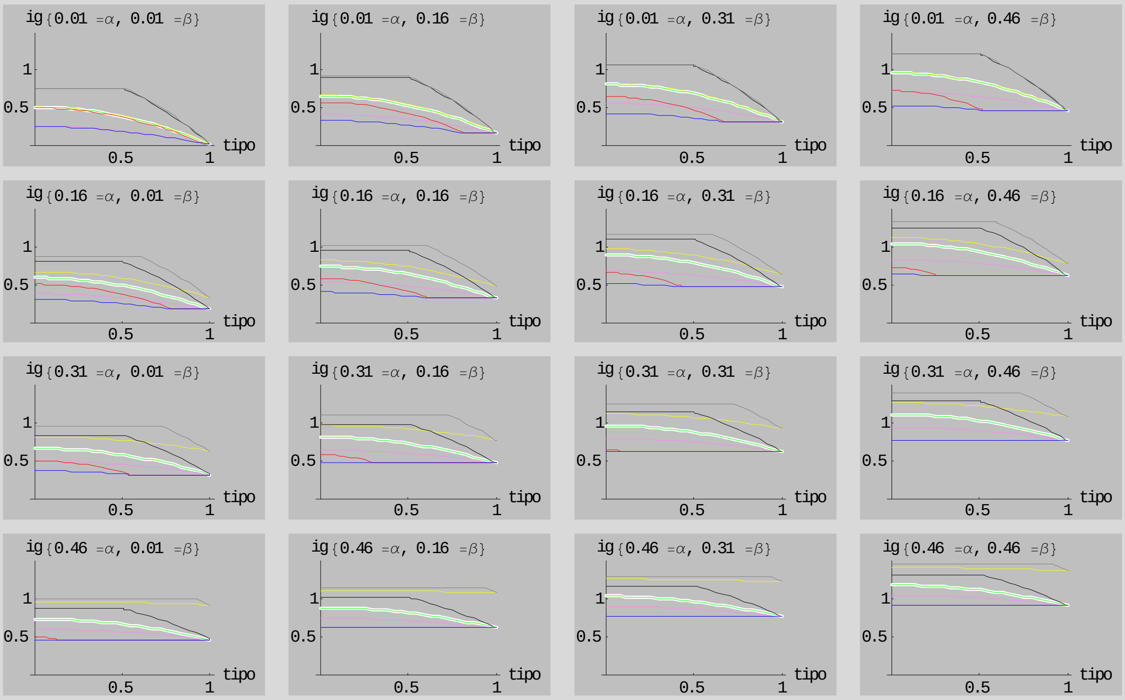
- GraphicsArray -

■ **Comparación para la empresa 2**

```
comparacion2[α_, β_] := Plot[{IMvick2[θ, α, β], IMV22[θ, α, β], IMA12[θ, α, β], IMA22[θ, α, β], IMB12[θ, α, β], IMDV12[θ, α, β], IMC12[θ, α, β], IMuni12[θ, α, β]},
  {θ, 0, 1}, PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.02]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.01]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.01]},
    {GrayLevel[0.5], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotLabel→ {α "=α", β "=β"}, AxesLabel→ {tipo, ig}, Ticks→ {{0, 0.5, 1}, {0.5, 1}},
  Background→ GrayLevel[0.75], PlotRange→ {0, 1.5}]
```

```
w = Table[comparacion2[α, β], {α, 0.01, 0.5, 0.15}, {β, 0.01, 0.5, 0.15}]
```

```
Show[GraphicsArray[Table[{w[[i, 1]], w[[i, 2]], w[[i, 3]], w[[i, 4]]}, {i, 4}]]]
```



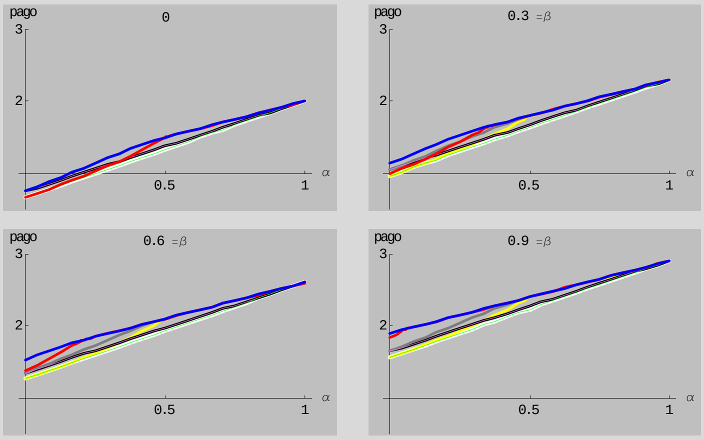
- GraphicsArray -

■ **Comparación para el Operador del Mercado**

```
dib[β_] := Plot[{Pagoperadorvickreyc3[α, β], PagoperadorV2[α, β], PagoperadorA1[α, β], PagoperadorA2[α, β], PagoperadorB1[α, β], PagoperadorDV1[α, β],
   PagoperadorC1[α, β], Pagoperadoruni1[α, β]}, {α, 0, 1},
  PlotStyle→ {{GrayLevel[1], Thickness[0.015]}, {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.01]}, {GrayLevel[0], Thickness[0.01]}, {GrayLevel[0.5], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.0065]}, {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0075]}, {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
    {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01]}}, PlotRange→ {1/2, 3}, AxesLabel→ {α, pago}, Background→ GrayLevel[0.75], Ticks→ {{0, 0.5, 1, 1.5, 2}, {1, 2, 3}},
  PlotLabel→ β "=β"]
```

```
w = Table[dib[β], {β, 0, 1, 0.3}]
```

```
Show[GraphicsArray[{{w[[1]], w[[2]]}, {w[[3]], w[[4]]}}]]
```



- GraphicsArray -

En todas las gráficas de esta sección:

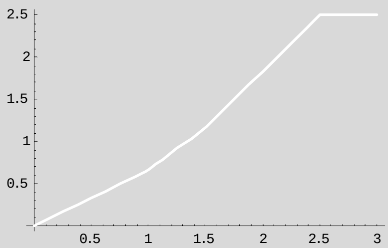
Blanco--->Modelo de Vickrey
Amarillo--->Modelo V2
Negro--->Modelo A1
Gris--->Modelo A2
Rosa--->Modelo B1
Verde--->Modelo DV1
Rojo--->Modelo C1
Azul--->Modelo Uni1

Comparación para el subastador de todos los valores de la demanda

```
vickreytodos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, Pagoperadorvickreyc2[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, Pagoperadorvickreyc3[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibvic[β_] := Plot[vickreytodos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {GrayLevel[1], Thickness[0.01]}]
```

```
dibvic[0.5]
```

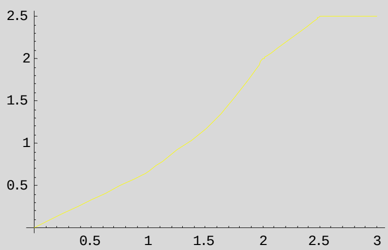


- Graphics -

```
V2todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, Pagoperadorvickreyc2[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorV2[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibV2[β_] := Plot[V2todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 1, 0], Thickness[0.0065]}]
```

```
dibV2[0.5]
```

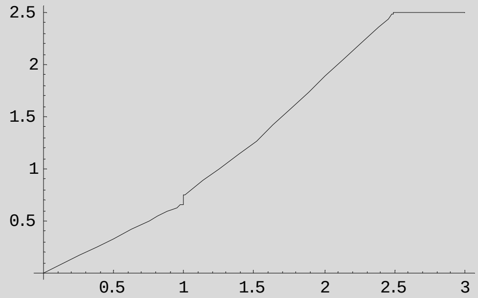


- Graphics -

```
A1todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, PagoperadorA[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorA1[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibA1[β_] := Plot[A1todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {GrayLevel[0], Thickness[0.005]}]
```

```
dibA1[0.5]
```

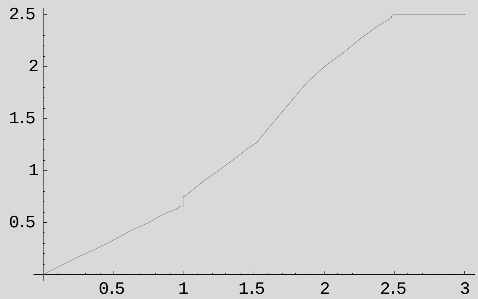


- Graphics -

```
A2todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, PagoperadorA[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorA2[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibA2[β_] := Plot[A2todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {GrayLevel[0.5], Thickness[0.005]}]
```

```
dibA2[0.5]
```

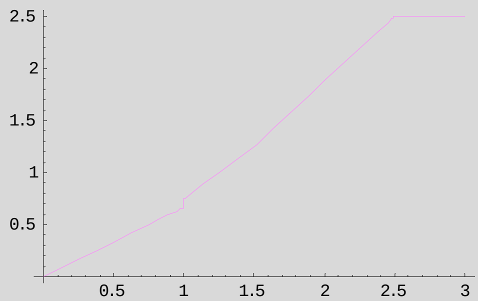


- Graphics -

```
B1todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, PagoperadorB[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorB1[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibB1[β_] := Plot[B1todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0.501961, 1], Thickness[0.0055]}]
```

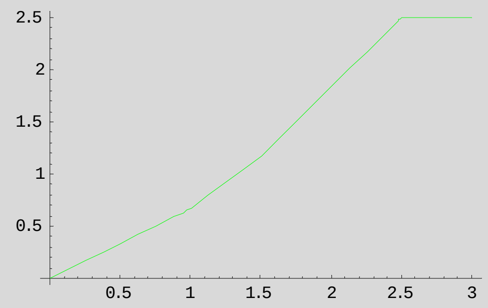
```
dibB1[0.5]
```



```
DV1todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, PagoperadorDV[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorDV1[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibDV1[β_] := Plot[DV1todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.0055]}]
```

```
dibDV1[0.5]
```

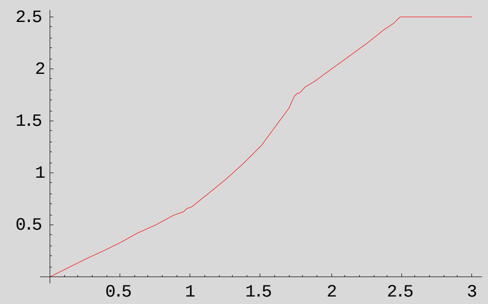


- Graphics -

```
C1todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, PagoperadorC[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, PagoperadorC1[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibC1[β_] := Plot[C1todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]}]
```

```
dibC1[0.5]
```

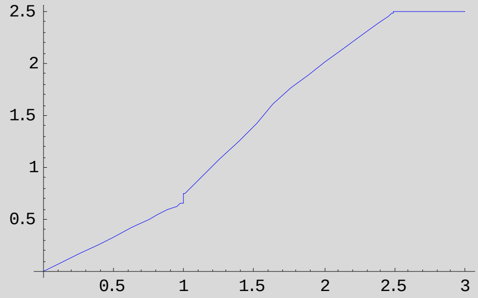


- Graphics -

```
uni1todos[β_, D_] := Which[0 < D < 1, 2/3 D, 1 < D < 1 + β, Pagoperadoruniforme[D - 1], 1 + β < D < 2 + β, Pagoperadoruni1[D - 1 - β, β], D > 2 + β, 2 + β]
```

```
dibuni1[β_] := Plot[uni1todos[β, D], {D, 0, 2.5 + β}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.005]}]
```

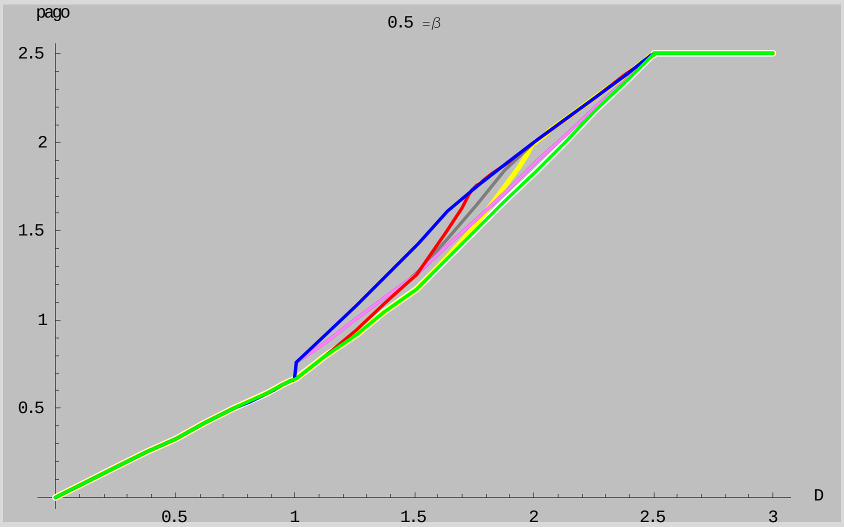
```
dibuni1[0.5]
```



- Graphics -

```
toditos[β_] := Show[{dibvic[β], dibV2[β], dibA1[β], dibA2[β], dibB1[β], dibC1[β], dibuni1[β], dibDV1[β]}, AxesLabel→ {D, pago}, PlotLabel→ β "=β",
  Background→ GrayLevel[0.75]]
```

```
toditos[0.5]
```



- Graphics -

En todas las gráficas de esta sección:

Blanco--->Modelo de Vickrey
Amarillo--->Modelo V2
Negro--->Modelo A1
Gris--->Modelo A2
Rosa--->Modelo B1
Verde--->Modelo DV1
Rojo--->Modelo C1
Azul--->Modelo Uni1

Apéndice C

Gráfica Capítulo 5

En este anexo incluimos las sentencias definidas en el programa *Mathematica 5.0,* utilizadas para el cálculo y representación del Capítulo 5 en el Caso 2 y Caso 3, correspondientes a los siguientes tamaños de la demanda: $D = 1 + \alpha$ y $D = 2 + \alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$. El presente anexo incluye una gráfica en la que se ha representado, para cualquier tamaño de la demanda, el pago que espera hacer el Operador del Mercado bajo cualquiera de los modelos analizados a lo largo del Capítulo 5 y que resume todas las conclusiones, desde el punto de vista del Operador del Mercado, obtenidas en dicho capítulo.

Pago que espera hacer el subastador para cualquier valor de la demanda

In[1]:=
```
operadorcaso1[D_] := 2 D/3
```

In[2]:=
```
operadorcaso2[D_] := 2 D/3
```

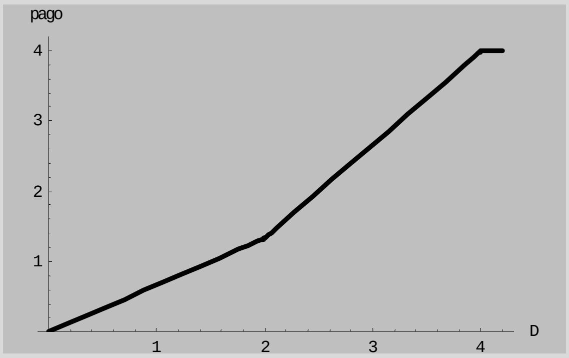
In[3]:=
```
operadorcaso3[D_] := 4 (D - 1)/3
```

In[4]:=
```
operadorcaso4[D_] := 4 (D - 1)/3
```

Operador del Mercado

In[5]:=
```
OMequivalencia[D_] := Which[0 < D ≤ 1, operadorcaso1[D], 1 < D ≤ 2, operadorcaso2[D], 2 < D < 3, operadorcaso3[D], 3 ≤ D ≤ 4, operadorcaso4[D], D > 4, 4]
```

In[7]:=
```
Plot[OMequivalencia[D], {D, 0, 4.2}, PlotStyle → Thickness[0.01], PlotRange → {0, 4.2}, AxesLabel → {D, pago}, Background → GrayLevel[0.75]]
```



Out[7]= - Graphics -

Apéndice D

Simulación del modelo de Vickrey

Este anexo incluye la implementación del modelo de Vickrey para un número arbitrario de empresas, con distintas capacidades de producción. Da como resultado el beneficio de las empresas que entran en el mercado y el pago que realiza el Operador del Mercado por la demanda eléctrica. En dicho programa se ha supuesto que todas las empresas pujan sus verdaderos tipos. Es decir se ha supuesto que pujar el verdadero tipo es equilibrio bayesiano de Nash. A lo largo de este trabajo se ha demostrado que es cierto para dos empresas con idénticas capacidades de producción, dos empresas con capacidades distintas de producción, dos empresas una de ellas con dos unidades de producción....pero no está demostrado para un caso tan general como el del programa de implementación del modelo de Vickrey del presente anexo. Por ello se ha creado un bucle que itere la subasta n veces (donde la empresa 1 puja diferentes valores $k \in [0, 1]$) y en el que se compute la diferencia entre: la media de las pujas que dan en cada paso beneficio máximo a la empresa 1 y el verdadero tipo de la empresa 1, en ese paso. Con todos esos valores (esas diferencias obtenidas en cada iteración) se calcula una media aritmética que verifica que tiende a cero cuando n tiende a infinito y, por tanto, confesar el verdadero tipo es efectivamente equilibrio bayesiano de Nash en el caso general de un número cualquiera de empresas, con capacidades de producción distintas.

Implementación del modelo de Vickrey

El siguiente programa implementa la subasta de Vickrey para un número cualquiera de empresas con distintas capacidades de producción.

In[1]:=

```
f[x_] := Random[Real, 1, 20]
```

In[5]:=

```
Vickrey :=
 (listadecapacidades = Input["introduzca entre llaves y separadas por comas las capacidades de las empresas que desean entrar en el Mercado Eléctrico"];
  demanda = Input["introduzca el valor de la demanda que se desea satisfacer"]; n = Length[listadecapacidades]; totalcapacidad = Sum[listadecapacidades[[i]], {i, 1, n}];
  tope = 1; listaofertas = Table[{f[i], listadecapacidades[[i]], i}, {i, 1, n}]; listademeritos = Sort[listaofertas]; oferta[i_] := listademeritos[[i, 1]];
  capacidad[i_] := listademeritos[[i, 2]]; tipo[i_] := oferta[i]; capacidadacumulada[k_] := Sum[capacidad[i], {i, 1, k}];
  test1[k_] := If[capacidadacumulada[k] ≥ demanda, k, test1[k + 1]]; m = test1[1]; capacidadresidualacumulada[k_] := If[m == n, 0, Sum[capacidad[i], {i, 1 + m, k}]];
  α = demanda - Sum[capacidad[i], {i, 1, m - 1}]; test2[k_] := If[capacidadresidualacumulada[k] == 0, 0, If[capacidadresidualacumulada[k] ≥ α, k, test2[k + 1]]];
  q = test2[m + 1];
  test3[j_, r_] :=
   If[capacidad[m] > α, If[capacidad[j] ≤ capacidad[m] - α, m, If[capacidad[j] > capacidad[m] - α + Sum[capacidad[i], {i, m + 1, n}], n,
      If[capacidad[j] ≤ capacidad[m] - α + Sum[capacidad[i], {i, m + 1, r}], r, test3[j, r + 1]]]],
    If[capacidad[j] > Sum[capacidad[i], {i, m + 1, n}], n, If[capacidad[j] ≤ Sum[capacidad[i], {i, m + 1, r}], r, test3[j, r + 1]]]]; desplaza[j_] := test3[j, m + 1];
  pagoaempresam := If[m == n, α tope, If[α ≤ Sum[capacidad[i], {i, m + 1, n}], If[q > m + 1, Sum[(capacidad[i] oferta[i]), {i, m + 1, q - 1}] + (α - Sum[capacidad[i], {i, m + 1, q - 1}]) oferta[q], α oferta[m + 1]],
     Sum[(capacidad[i] oferta[i]), {i, m + 1, n}] + (α - Sum[capacidad[i], {i, m + 1, n}]) tope]];
  pagototalempresa[j_] := If[j == m, pagoaempresam, If[n == m, (capacidad[m] - α) oferta[m] + (capacidad[j] - capacidad[m] + α) tope,
     If[capacidad[j] > Sum[capacidad[i], {i, 1, n}] - demanda, (capacidad[m] - α) oferta[m] + Sum[(capacidad[i] oferta[i]), {i, m + 1, n}] +
       (capacidad[j] - capacidad[m] + α - Sum[capacidad[i], {i, m + 1, n}]) tope,
      If[desplaza[j] > m + 1, (capacidad[m] - α) oferta[m] + Sum[(capacidad[i] oferta[i]), {i, 1 + m, desplaza[j] - 1}] +
        (capacidad[j] - capacidad[m] + α - Sum[capacidad[i], {i, 1 + m, desplaza[j] - 1}]) oferta[desplaza[j]],
       (capacidad[m] - α) oferta[m] + (capacidad[j] - capacidad[m] + α) oferta[m + 1]]]]]; despacho[j_] := If[j < m, capacidad[j], α];
  beneficioempresa[j_] := If[j ≤ m, pagototalempresa[j] - tipo[j] despacho[j], 0]; pagosubastador = Sum[pagototalempresa[j], {j, 1, m}];
  subastador = {{pagosubastador "pago del operador"}, {"demanda" demanda}};
  entran := Append[Table[listademeritos[[i]], {i, 1, m - 1}], {listademeritos[[m, 1]], α, listademeritos[[m, 3]]}];
  empresas = Append[Transpose[Append[Append[Transpose[entran], Table[pagototalempresa[j], {j, 1, m}]], Table[beneficioempresa[j], {j, 1, m}]]],
    {"pujas", "despacho", "nº de entrada", "ingresos", "beneficios"}];
  Print["Se reciben las siguientes ofertas", Append[listaofertas, {"pujas", "despacho", "nº de entrada"}]]; Print["La subasta determina", empresas];
  Print[subastador])
```

In[4]:=
```
Vickrey
```

Se reciben las siguientes ofertas

0.64293851389888146256	0.5	1
0.07313751542481429449	0.4	2
0.77871428704417808525	0.8	3
0.30135530524982853399	1.2	4
0.96757414769903207169	0.3	5
pujas	despacho	nº de entrada

La subasta determina

0.07313751542481429449	0.4	2	0.311486	0.282231
0.30135530524982853399	1.2	4	1.06857	0.706939
0.64293851389888146256	0.5	1	0.389357	0.0678879
0.77871428704417808525	0.25	3	0.241894	0.047215
pujas	despacho	nº de entrada	ingresos	beneficios

2.0113	pago del operador
2.35	demanda

In[6]:=
```
Vickrey
```

Se reciben las siguientes ofertas

0.72900858826038948926	1	1
0.95581720304239020108	1	2
0.99224860333763995030	1	3
0.52731786628892334052	1	4
pujas	despacho	nº de entrada

La subasta determina

0.52731786628892334052	1	4	0.996124	0.468806
0.72900858826038948926	1	1	0.996124	0.267116
0.95581720304239020108	1	2	0.996124	0.0403071
0.99224860333763995030	0.5	3	0.5	0.0038757
pujas	despacho	nº de entrada	ingresos	beneficios

3.48837	pago del operador
3.5	demanda

In[4]:=
```
Vickrey
```

Se reciben las siguientes ofertas

0.88877955816670661335	1	1
0.16942882505152312729	1	2
0.42317764678235948004	1	3
0.90471987929688377061	1	4
0.15456494041235205428	1	5
0.72387489826802481224	1	6
0.82130430681163724481	1	7
pujas	despacho	nº de entrada

La subasta determina

0.15456494041235205428	1	5	0.72387489826802481224	0.56930995785567275796
0.16942882505152312729	1	2	0.72387489826802481224	0.55444607321650168495
0.42317764678235948004	1	3	0.72387489826802481224	0.30069725148566653322
pujas	despacho	nº de entrada	ingresos	beneficios

2.1716246948040744367	pago del operador
3	demanda

Vamos a demostrar experimentalmente que pujar el verdadero tipo es equilibrio bayesiano de Nash. Para ello centraremos nuestra atención en una empresa cualquiera, en este caso la empresa 1. Las empresas restantes pujarán sus verdadreros tipos mientras que la empresa 1 pujará un valor $k \in [0,1]$. Se calculará el beneficio obtenido por la empresa 1 si ésta puja k.

In[1]:=
```
θ[x_] := Random[Real, 1, 20]
```

In[27]:=

```
comparandopujas :=
 (listadecapacidades = Input["introduzca entre llaves y separadas por comas las capacidades de las empresas que desean entrar en el Mercado Eléctrico"];
  demanda = Input["introduzca el valor de la demanda que se desea satisfacer"]; n = Length[listadecapacidades]; totalcapacidad = Sum[listadecapacidades[[i]], {i, 1, n}];
  tope = 1; todoslostipos = Table[θ[i], {i, 1, n}]; todoslostiposmenoselprimero = Table[todoslostipos[[i]], {i, 2, n}];
  ofertasordenadas[k_] := Sort[Append[todoslostiposmenoselprimero, k]];
  listaofertas[k_] := Insert[Table[{todoslostipos[[i]], listadecapacidades[[i]], todoslostipos[[i]], i}, {i, 2, n}],
    {k, listadecapacidades[[1]], todoslostipos[[1]], 1}, 1]; empresa1ordenada[k_] := Flatten[Position[ofertasordenadas[k], k]][[1]];
  listademeritos[k_] := Sort[listaofertas[k]]; oferta[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 1]]; capacidad[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 2]];
  tipo[i_] := listademeritos[k][[i, 3]]; capacidadacumulada[p_, k_] := Sum[capacidad[i, k], {i, 1, p}]; test1[p_, k_] := If[capacidadacumulada[p, k] ≥ demanda, p, test1[p + 1, k]];
  m[k_] := test1[1, k]; capacidadresidualacumulada[p_, k_] := If[m[k] == n, 0, Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], p}]]; entran[k_] := Table[listademeritos[k][[i]], {i, 1, m[k]}];
  α[k_] := demanda - Sum[capacidad[i, k], {i, 1, m[k] - 1}]; entran[k][[m[k], 2]] = α[k];
  test2[p_, k_] := If[capacidadresidualacumulada[p, k] == 0, 0, If[capacidadresidualacumulada[p, k] ≥ α[k], p, test2[p + 1, k]]]; q[k_] := test2[m[k] + 1, k];
  test3[j_, p_, k_] :=
   If[capacidad[m[k], k] > α[k], If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k], m[k],
     If[capacidad[j, k] > capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n,
      If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]],
    If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n, If[capacidad[j, k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]];
  desplaza[j_, k_] := test3[j, m[k] + 1, k];
  pagoaempresam[k_] :=
   If[m[k] == n, α[k] tope, If[α[k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}],
     If[q[k] > m[k] + 1, Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, q[k] - 1}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, q[k] - 1}]) oferta[q[k], k], α[k] oferta[m[k] + 1, k]],
     Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope]];
  pagototalempresa[j_, k_] :=
   If[j == m[k], pagoaempresam[k], If[n == m[k], (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) tope,
     If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, 1, n}] - demanda, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] +
       (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope,
      If[desplaza[j, k] > m[k] + 1, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}] +
        (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}]) oferta[desplaza[j, k], k],
       (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) oferta[m[k] + 1, k]]]]];
  despacho[j_, k_] := If[j < m[k], capacidad[j, k], α[k]]; beneficioempresa[j_, k_] := If[j ≤ m[k], pagototalempresa[j, k] - tipo[j] despacho[j, k], 0];
  benempresa1[k_] := beneficioempresa[empresa1ordenada[k], k];
  empresa1 = Append[Table[{k, todoslostipos[[1]], benempresa1[k], empresa1ordenada[k]}, {k, 0, 1, 0.05}], {"puja", "tipo", "beneficio", "ordendeentrada"}];
  Print["Se reciben las siguientes ofertas", Append[listaofertas[todoslostipos[[1]]], {"pujas", "despacho", "tipo", "nº de entrada"}]]; Print[empresa1])
```

In[29]:= **comparandopujas**

Se reciben las siguientes ofertas

0.36278489795521446759	1	0.36278489795521446759	1
0.80512327853891500411	1	0.80512327853891500411	2
0.98424937136564833334	1	0.98424937136564833334	3
0.77545795829528874107	1	0.77545795829528874107	4
0.075644825544484959785	1	0.075644825544484959785	5
0.78279052093898288585	1	0.78279052093898288585	6
0.095594888673878411243	1	0.095594888673878411243	7
0.56413558068307605497	1	0.56413558068307605497	8
pujas	despacho	tipo	nº de entrada

0	0.36278489795521446759	0.307012	1
0.05	0.36278489795521446759	0.307012	1
0.1	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.15	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.2	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.25	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.3	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.35	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.4	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.45	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.5	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.55	0.36278489795521446759	0.307012	3
0.6	0.36278489795521446759	0.206337	4
0.65	0.36278489795521446759	0.206337	4
0.7	0.36278489795521446759	0.206337	4
0.75	0.36278489795521446759	0.206337	4
0.8	0.36278489795521446759	0	6
0.85	0.36278489795521446759	0	7
0.9	0.36278489795521446759	0	7
0.95	0.36278489795521446759	0	7
1.	0.36278489795521446759	0	8
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada

In[28]:= **comparandopujas**

Se reciben las siguientes ofertas

0.19217734800012949523	1	0.19217734800012949523	1
0.61683423309619716981	1	0.61683423309619716981	2
0.96207296234125401809	1	0.96207296234125401809	3
pujas	despacho	tipo	nº de entrada

0	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.05	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.1	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.15	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.2	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.25	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.3	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.35	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.4	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.45	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.5	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.55	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.6	0.19217734800012949523	0.788859	1
0.65	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.7	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.75	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.8	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.85	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.9	0.19217734800012949523	0.788859	2
0.95	0.19217734800012949523	0.788859	2
1.	0.19217734800012949523	0.403911	3
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada

In[30]:= **comparandopujas**

Se reciben las siguientes ofertas

0.35946831532096442073	0.67	0.35946831532096442073	1
0.05166098903924111727	0.28	0.05166098903924111727	2
0.79541366080148913050	1	0.79541366080148913050	3
0.36499116235835316051	0.95	0.36499116235835316051	4
0.95715123368248211456	0.45	0.95715123368248211456	5
pujas	despacho	tipo	nº de entrada

0	0.35946831532096442073	0.00370031	1
0.05	0.35946831532096442073	0.00370031	1
0.1	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.15	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.2	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.25	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.3	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.35	0.35946831532096442073	0.00370031	2
0.4	0.35946831532096442073	0	3
0.45	0.35946831532096442073	0	3
0.5	0.35946831532096442073	0	3
0.55	0.35946831532096442073	0	3
0.6	0.35946831532096442073	0	3
0.65	0.35946831532096442073	0	3
0.7	0.35946831532096442073	0	3
0.75	0.35946831532096442073	0	3
0.8	0.35946831532096442073	0	4
0.85	0.35946831532096442073	0	4
0.9	0.35946831532096442073	0	4
0.95	0.35946831532096442073	0	4
1.	0.35946831532096442073	0	5
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada

In[31]:= **comparandopujas**

Se reciben las siguientes ofertas

0.27447772693552917249	1	0.27447772693552917249	1
0.90929508418785595488	1	0.90929508418785595488	2
0.48726242646725121569	1	0.48726242646725121569	3
0.51357572947279544044	1	0.51357572947279544044	4
0.44729975553523142057	2	0.44729975553523142057	5
0.41842573249650012381	3	0.41842573249650012381	6
0.35269259178604991604	1	0.35269259178604991604	7
pujas	despacho	tipo	nº de entrada

0	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.05	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.1	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.15	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.2	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.25	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.3	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.35	0.27447772693552917249	0.128067	1
0.4	0.27447772693552917249	0.128067	2
0.45	0.27447772693552917249	0	4
0.5	0.27447772693552917249	0	5
0.55	0.27447772693552917249	0	6
0.6	0.27447772693552917249	0	6
0.65	0.27447772693552917249	0	6
0.7	0.27447772693552917249	0	6
0.75	0.27447772693552917249	0	6
0.8	0.27447772693552917249	0	6
0.85	0.27447772693552917249	0	6
0.9	0.27447772693552917249	0	6
0.95	0.27447772693552917249	0	7
1.	0.27447772693552917249	0	7
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada

```
In[32]:= comparandopujas
```

Se reciben las siguientes ofertas

0.029789144076489445869	2.3	0.029789144076489445869	1
0.83932022780430622978	1	0.83932022780430622978	2
0.29897305948805280120	1	0.29897305948805280120	3
0.40822744775459583349	1	0.40822744775459583349	4
0.61374547077173015170	1	0.61374547077173015170	5
0.22743064748105709592	1	0.22743064748105709592	6
pujas	despacho	tipo	nº de entrada

0	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.05	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.1	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.15	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.2	0.029789144076489445869	1.01167	1
0.25	0.029789144076489445869	1.01167	2
0.3	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.35	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.4	0.029789144076489445869	0.903999	3
0.45	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.5	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.55	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.6	0.029789144076489445869	0.525561	4
0.65	0.029789144076489445869	0	5
0.7	0.029789144076489445869	0	5
0.75	0.029789144076489445869	0	5
0.8	0.029789144076489445869	0	5
0.85	0.029789144076489445869	0	6
0.9	0.029789144076489445869	0	6
0.95	0.029789144076489445869	0	6
1.	0.029789144076489445869	0	6
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada

```
In[1]:= θ[x_] := Random[Real, 1, 20]

In[2]:= listadecapacidades = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1};

In[3]:= demanda = 5.5;
```

In[4]:=

```
equilibriosejemploconcreto := (n = Length[listadecapacidades]; totalcapacidad = Sum[listadecapacidades[[i]], {i, 1, n}]; tope = 1; todoslostipos = Table[θ[i], {i, 1, n}];
  todoslostiposmenoselprimero = Table[todoslostipos[[i]], {i, 2, n}]; ofertasordenadas[k_] := Sort[Append[todoslostiposmenoselprimero, k]];
  listaofertas[k_] := Insert[Table[{todoslostipos[[i]], listadecapacidades[[i]], todoslostipos[[i]], i}, {i, 2, n}],
    {k, listadecapacidades[[1]], todoslostipos[[1]], 1}, 1]; empresa1ordenada[k_] := Flatten[Position[ofertasordenadas[k], k]][[1]];
  listademeritos[k_] := Sort[listaofertas[k]]; oferta[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 1]]; capacidad[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 2]];
  tipo[i_] := listademeritos[k][[i, 3]]; capacidadacumulada[p_, k_] := Sum[capacidad[i, k], {i, 1, p}]; test1[p_, k_] := If[capacidadacumulada[p, k] ≥ demanda, p, test1[p + 1, k]];
  m[k_] := test1[1, k]; capacidadresidualacumulada[p_, k_] := If[m[k] == n, 0, Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], p}]];
  α[k_] := demanda - Sum[capacidad[i, k], {i, 1, m[k] - 1}];
  test2[p_, k_] := If[capacidadresidualacumulada[p, k] == 0, 0, If[capacidadresidualacumulada[p, k] ≥ α[k], p, test2[p + 1, k]]]; q[k_] := test2[m[k] + 1, k];
  test3[j_, p_, k_] :=
   If[capacidad[m[k], k] > α[k], If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k], m[k],
     If[capacidad[j, k] > capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n,
      If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]],
    If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n, If[capacidad[j, k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]];
  desplaza[j_, k_] := test3[j, m[k] + 1, k]; desplaza[j_, k_] := test3[j, m[k] + 1, k];
  pagoaempresam[k_] :=
   If[m[k] == n, α[k] tope, If[α[k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}],
     If[q[k] > m[k] + 1, Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, q[k] - 1}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, q[k] - 1}]) oferta[q[k], k], α[k] oferta[m[k] + 1, k]],
     Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope]];
  pagototalempresa[j_, k_] :=
   If[j == m[k], pagoaempresam[k], If[n == m[k], (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) tope,
     If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, 1, n}] - demanda, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] +
       (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope,
      If[desplaza[j, k] > m[k] + 1, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}] +
        (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}]) oferta[desplaza[j, k], k],
       (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) oferta[m[k] + 1, k]]]]];
  despacho[j_, k_] := If[j < m[k], capacidad[j, k], α[k]]; beneficioempresa[j_, k_] := pagototalempresa[j, k] - tipo[j] despacho[j, k];
  benempresa1[k_] := If[empresa1ordenada[k] > m[k], 0, beneficioempresa[empresa1ordenada[k], k]];
  empresa1 = Append[Table[{k, todoslostipos[[1]], benempresa1[k], empresa1ordenada[k], k - todoslostipos[[1]]}, {k, 0, 1, 0.05}],
    {"puja", "tipo", "beneficio", "ordendeentrada", "puja-tipo"}]; Print[empresa1])
```

In[5]:=
```
equilibriosejemploconcreto
```

0	0.53397598815608606756	0.319675	1	−0.53397598815608606756
0.05	0.53397598815608606756	0.319675	1	−0.483976
0.1	0.53397598815608606756	0.319675	1	−0.433976
0.15	0.53397598815608606756	0.319675	2	−0.383976
0.2	0.53397598815608606756	0.319675	3	−0.333976
0.25	0.53397598815608606756	0.319675	3	−0.283976
0.3	0.53397598815608606756	0.319675	4	−0.233976
0.35	0.53397598815608606756	0.319675	4	−0.183976
0.4	0.53397598815608606756	0.319675	4	−0.133976
0.45	0.53397598815608606756	0.319675	4	−0.083976
0.5	0.53397598815608606756	0.319675	4	−0.033976
0.55	0.53397598815608606756	0.319675	4	0.016024
0.6	0.53397598815608606756	0.319675	5	0.066024
0.65	0.53397598815608606756	0.319675	5	0.116024
0.7	0.53397598815608606756	0.319675	5	0.166024
0.75	0.53397598815608606756	0.319675	5	0.216024
0.8	0.53397598815608606756	0.319675	5	0.266024
0.85	0.53397598815608606756	0.163157	6	0.316024
0.9	0.53397598815608606756	0	8	0.366024
0.95	0.53397598815608606756	0	8	0.416024
1.	0.53397598815608606756	0	8	0.466024
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada	puja−tipo

In[247]:=
```
equilibriosejemploconcreto
```

0	0.95366412082743734560	−0.291068	1	−0.95366412082743734560
0.05	0.95366412082743734560	−0.291068	2	−0.903664
0.1	0.95366412082743734560	−0.291068	2	−0.853664
0.15	0.95366412082743734560	−0.291068	2	−0.803664
0.2	0.95366412082743734560	−0.291068	2	−0.753664
0.25	0.95366412082743734560	−0.291068	2	−0.703664
0.3	0.95366412082743734560	−0.291068	3	−0.653664
0.35	0.95366412082743734560	−0.291068	3	−0.603664
0.4	0.95366412082743734560	−0.291068	3	−0.553664
0.45	0.95366412082743734560	−0.291068	4	−0.503664
0.5	0.95366412082743734560	−0.291068	4	−0.453664
0.55	0.95366412082743734560	−0.291068	4	−0.403664
0.6	0.95366412082743734560	−0.0995184	6	−0.353664
0.65	0.95366412082743734560	−0.0995184	6	−0.303664
0.7	0.95366412082743734560	−0.0995184	6	−0.253664
0.75	0.95366412082743734560	−0.0995184	6	−0.203664
0.8	0.95366412082743734560	0	7	−0.153664
0.85	0.95366412082743734560	0	7	−0.103664
0.9	0.95366412082743734560	0	8	−0.0536641
0.95	0.95366412082743734560	0	8	−0.00366412
1.	0.95366412082743734560	0	8	0.0463359
puja	tipo	beneficio	ordendeentrada	puja−tipo

Obsérvese que algunas pujas dan un beneficio máximo. Estas pujas se distribuyen alrededor del verdadero tipo. El siguiente programa selecciona en cada iteración todas esas pujas que dan beneficio máximo y calcula la media de dichas pujas. Si iteramos n veces con $n \to \infty$ ese valor medio tiende al verdadero tipo, o lo que es lo mismo la diferencia tiende a cero. Es decir, pujar el verdadero tipo es equilibrio bayesiano de Nash.

In[1]:=
```
θ[x_] := Random[Real, 1, 20]
```

In[2]:=
```
listadecapacidades = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1};
```

In[3]:=
```
demanda = 5.5;
```

In[4]:=
```
acumulador = 0;
```

In[5]:=

```
diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio := (n = Length[listadecapacidades]; totalcapacidad = Sum[listadecapacidades[[i]], {i, 1, n}]; tope = 1;
  todoslostipos = Table[θ[i], {i, 1, n}]; todoslostiposmenoselprimero = Table[todoslostipos[[i]], {i, 2, n}];
  ofertasordenadas[k_] := Sort[Append[todoslostiposmenoselprimero, k]];
  listaofertas[k_] := Insert[Table[{todoslostipos[[i]], listadecapacidades[[i]], todoslostipos[[i]], i}, {i, 2, n}],
    {k, listadecapacidades[[1]], todoslostipos[[1]], 1}, 1]; empresa1ordenada[k_] := Flatten[Position[ofertasordenadas[k], k]][[1]];
  listademeritos[k_] := Sort[listaofertas[k]]; oferta[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 1]]; capacidad[i_, k_] := listademeritos[k][[i, 2]];
  tipo[i_] := listademeritos[k][[i, 3]]; capacidadacumulada[p_, k_] := Sum[capacidad[i, k], {i, 1, p}]; test1[p_, k_] := If[capacidadacumulada[p, k] ≥ demanda, p, test1[p + 1, k]];
  m[k_] := test1[1, k]; capacidadresidualacumulada[p_, k_] := If[m[k] == n, 0, Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], p}]];
  α[k_] := demanda - Sum[capacidad[i, k], {i, 1, m[k] - 1}];
  test2[p_, k_] := If[capacidadresidualacumulada[p, k] == 0, 0, If[capacidadresidualacumulada[p, k] ≥ α[k], p, test2[p + 1, k]]]; q[k_] := test2[m[k] + 1, k];
  test3[j_, p_, k_] :=
   If[capacidad[m[k], k] > α[k], If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k], m[k],
     If[capacidad[j, k] > capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n,
      If[capacidad[j, k] ≤ capacidad[m[k], k] - α[k] + Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]],
    If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}], n, If[capacidad[j, k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, p}], p, test3[j, p + 1, k]]]];
  desplaza[j_, k_] := test3[j, m[k] + 1, k]; desplaza[j_, k_] := test3[j, m[k] + 1, k];
  pagoaempresam[k_] :=
   If[m[k] == n, α[k] tope, If[α[k] ≤ Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}],
     If[q[k] > m[k] + 1, Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, q[k] - 1}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, q[k] - 1}]) oferta[q[k], k], α[k] oferta[m[k] + 1, k]],
     Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] + (α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope]];
  pagototalempresa[j_, k_] :=
   If[j == m[k], pagoaempresam[k], If[n == m[k], (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) tope,
     If[capacidad[j, k] > Sum[capacidad[i, k], {i, 1, n}] - demanda, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, m[k] + 1, n}] +
       (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, m[k] + 1, n}]) tope,
      If[desplaza[j, k] > m[k] + 1, (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + Sum[(capacidad[i, k] oferta[i, k]), {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}] +
        (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k] - Sum[capacidad[i, k], {i, 1 + m[k], desplaza[j, k] - 1}]) oferta[desplaza[j, k], k],
       (capacidad[m[k], k] - α[k]) oferta[m[k], k] + (capacidad[j, k] - capacidad[m[k], k] + α[k]) oferta[m[k] + 1, k]]]]];
  despacho[j_, k_] := If[j < m[k], capacidad[j, k], α[k]]; beneficioempresa[j_, k_] := pagototalempresa[j, k] - tipo[j] despacho[j, k];
  benempresa1[k_] := If[empresa1ordenada[k] > m[k], 0, beneficioempresa[empresa1ordenada[k], k]];
  empresa1 = Table[{k, todoslostipos[[1]], benempresa1[k], empresa1ordenada[k], k - todoslostipos[[1]]}, {k, 0, 1, 0.05}];
  num = (Sum[Select[empresa1, #[[3]] == Max[Transpose[Most[empresa1]][[3]]] &][[i, 1]], {i, 1, Length[Select[empresa1, #[[3]] == Max[Transpose[Most[empresa1]][[3]]] &]]}]) /
    Length[Select[empresa1, #[[3]] == Max[Transpose[Most[empresa1]][[3]]] &]] - Select[empresa1, #[[3]] == Max[Transpose[Most[empresa1]][[3]]] &][[1, 2]];
  acumulador = acumulador + num)
```

Si se realiza la subasta n de veces podemos calcular la diferencia entre las pujas de la empresa 1 que le dan beneficio máximo y su verdadero tipo en cada caso y calcular la media de dichas diferencias.

```
In[6]:= acumulador = 0;
In[7]:= num = 0;
In[8]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {1000}]
In[9]:= acumulador/1000
Out[9]= -0.00969671
```

```
In[10]:= acumulador = 0;
In[11]:= num = 0;
In[6]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {4000}]
In[12]:= acumulador/4000
Out[12]= 0
```

Ahora con capacidades distintas

Capacida de la empresa 1 intermedia

```
In[6]:= θ[x_] := Random[Real, 1, 20]
In[7]:= listadecapacidades = {1, 0.98, 1.3, 1, 1.67, 0.15, 1.67, 0.45};
In[8]:= demanda = 5.5;
In[9]:= acumulador = 0;
In[10]:= num = 0;
In[18]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {4000}]
In[19]:= acumulador/4000
Out[19]= 0.024496
```

```
In[28]:= acumulador = 0;
In[29]:= num = 0;
In[9]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {8000}]
In[10]:= acumulador/8000
Out[10]= 0.00187598
```

Capacida de la empresa 1grande

```
In[11]:= θ[x_] := Random[Real, 1, 20]
In[12]:= listadecapacidades = {2, 0.98, 1.3, 1, 1.67, 0.15, 1.67, 0.45};
In[13]:= demanda = 5.5;
In[7]:= acumulador = 0;
In[8]:= num = 0;
In[14]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {4000}]
In[15]:= acumulador/4000
Out[15]= -0.00274975
```

Capacida de la empresa 1pequeña

```
In[8]:= θ[x_] := Random[Real, 1, 20]
In[9]:= listadecapacidades = {0.4, 0.98, 1.3, 1, 2.67, 0.5, 1.67, 0.45};
In[10]:= demanda = 5.5;
In[11]:= acumulador = 0;
In[12]:= num = 0;
In[11]:= Do[diferenciaentredecirverdadymaximizarbeneficio, {5000}]
In[12]:= acumulador/5000
Out[12]= 0.0617351
```

Referencias

- Ausubel, L. and P. Cramton (2002). Demand Reduction and Ineficiency in Multi-Unit Auctions. Tecnical Report 96-07. Department of Economics, University of Maryland.

- Bosco, B. and L. Parisio (2001). Market Power and The Power Market: Multiunit Bidding and (In)efficiency of the Italian Electricity Market. Quaderni ref. n^{o}6/Ottobre 2001. Ricerche e Consulenze per l'Economia e la Finanza.

- Burguet, R. (2000). Auction Theory: A Guided Tour. *Investigaciones Económicas, 24,* pp. *3-50.*

- Fabra, N. (2001). Market Power in Electricity Markets. Thesis Department of Economics, European University Institute.

- Fabra, N.; N. Fehr and D. Harbord (2002). Designing Electricity Auctions: Uniform, Discriminatory and Vickrey. *Rand Journal of Economics.* Vol 37 (1) pp. 23-46.

- Fabra, N.; N. Fehr and D. Harbord (2003). Designing Electricity Auctions. Working Paper. Universidad Carlos III de Madrid, Madrid.

- Federico, G. and D. Rahman (2001). Bidding in an Electrity Pay-As-Bid Auction*. Journal of Regulatory Economics 24-2, pp. 175-211.*

- Fehr, N.H. and D. Harbord (1993). Spot Market Competition in the UK Electricity Industry. *The Economic Journal*, 103, pp. 531-546.

- Fehr, N.H. and D. Harbord (1998). Competition in Electricity Spot Markets: Economic Theory and International Experience. University of Oslo Memorandum in Economics; n^{o}5.

- Ferrero, R.W., J.F. Rivera and S.M. Shahidehpour (1998). Application of Games with Incomplete Information for Pricing Electricity in Deregulated Power Pools. *IEEE Transactions on Power Systems,* Vol 13, No 1, February 1998.

- Gibbons, R. (1992). A primer in Game Theory. FT Prentice Hall.

- Harsanyi (1967-1968). Games with Incomplete Information played by Bayesian Players (Parts I-III). *Management Science* 14: 159-182; 320-334; 486- 502.

- Klemperer, P.(1999). Auction Theory: A Guide to the Literature. *Journal of Economic Surveys, 13.*

- Maasland, E. and S. Onderstal (2006). Going, going, gone! a swift tour of Auction Theory and its applications. *De Economist* 154, NO. 2, 197-249.

- McAfee, R. Preston, and John McMillan (1996). Analyzing the Airwaves Auction. *Journal of Economic Perspectives*, 10(1): 159-176.

- Milgrom, P. (2004). Putting Auction Theory to Work. *Cambridge University Press.*

- Myerson, R. (1981). Optimal Auction Design. *Mathematics of Operations Research,* 6, pp. 58-73.

- Newbery, D. (1999). Privatization, Restructuring and Regulation of Network Utilities. *MIT Press, London.*

- Rothkopf, M. H., T. J. Teisberg and E. P. Kahn (1990). Why Are Vickrey Auctions Rare?. *The Journal of Political Economy,* Vol. 98, No 1(Feb. 1990), 94-109.

- Sanjiv, R. and K. Rangarajan (1997). Auction Theory: A Summary with Applications to Treasury-Bill Auctions. *Financial Markets, Institutions, and Investments* 5(5), 1996, pp. 1-36.

- Schöne, S. (2003). Capacity Constraint and Stochastic Costs: A Multi-Unit Auction in the Electricity Spot Market. Discussion Papers in Business, n^{o}30. Humboldt-Universität zu Berlin.

- Simmons, F. (1990). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. *Mc Graw Hill.*

- Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders. *Journal of Finance,* 16, pp. 8-37.

- Wolfram, C. (1999). Electricity Markets: Should the Rest of the World Adopt the UK Reforms*?. Regulation*, 22, pp. 48-53.