

**SOLUCIONES EXACTAS DE LAS
ECUACIONES EINSTEIN -
YANG-MILLS ALGEBRAICAMENTE
ESPECIALES**

Memoria presentada por:

José Antonio Ruiz Martín

Director de la Tesis:

Prof. Francisco Javier China Trujillo



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5314280876

11-1992/39

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Físicas
Departamento de Física Teórica II

**SOLUCIONES EXACTAS DE LAS
ECUACIONES EINSTEIN -
YANG-MILLS ALGEBRAICAMENTE
ESPECIALES**

Agosto 1992



Memoria presentada por:

José Antonio Ruiz Martín

para optar al Título de Doctor en C.C. Físicas.

Director de la Tesis:

Prof. Francisco Javier China Trujillo

616141866
i25334803

Agradecimientos

Esta Tesis ha sido dirigida por F.J. Chinae, a él quiero agradecer el haberme propuesto el tema de trabajo de la misma, que para mi ha resultado tan enriquecedor, y el haberme guiado con tanta paciencia en su desarrollo, hasta llevar a buen fin este trabajo.

Igualmente importante ha sido la existencia de un ambiente motivador de trabajo e investigación dentro del grupo de Relatividad dirigido por F.J. Chinae. Dentro de él he recibido las siempre interesantes sugerencias de L.M. Gonzalez Romero y Leonardo Fernandez Jambrina en las periódicas reuniones de trabajo que hemos realizado.

Esta Tesis ha sido realizada dentro del Departamento de Física Teórica II, quiero agradecer a todos sus miembros el haberme acogido en su seno y el haberme atendido amablemente en todas aquellas consultas que he realizado. De gran interés fué el uso de los medios informáticos puestos a mi disposición, y en especial del programa Mathematica (versión 2.0) [43] y de la ampliación desarrollada por J.M. Aguirregabiria (Euskal Herriko Unibertsitatea, Bilbao, [44]), para el laborioso trabajo de comprobación de resultados.

No podría olvidar a todos los amigos que han tenido que soportarme durante estos años, en especial durante los momentos en que no le veíamos el final. Quiero agradecer, muy especialmente a mi familia el constante apoyo que han constituido para mi durante el tiempo que ha durado la preparación de esta Tesis.

Finalmente quisiera dedicar este trabajo a las personas que tuve la suerte de conocer en El Salvador, y en especial, a la gente sencilla de la comunidad de refugiados de ItaMaura y a los voluntarios que con ellos trabajan, de quienes tanto he aprendido.

Contenido

1	INTRODUCCION	5
2	CAMPOS YANG-MILLS. SIMETRIA ESFERICA	13
2.1	Simetrías espacio temporales en teorías gauge	17
2.1.1	Campos Yang-Mills con simetría esférica	20
2.1.2	Simetrías adicionales en campos Yang-Mills con simetría esférica. Generalización del teorema de Birkhoff.	24
2.1.3	Algo más sobre simetría $SO(4)$	31
3	CLASIFICACION ALGEBRAICA DE CARMELI	33
3.1	Particularización a la solución de Bartnik-McKinnon . . .	37
3.2	Particularización a simetría esférica	40
4	SOLUCIONES EXACTAS EN ESPACIO PLANO	45
4.1	Espacio Minkowski	46
4.1.1	$k=1$, Tipos algebraicos $III_p, IV_p, 0_p$	48
4.1.2	$k=-2$, Tipos algebraicos $I_0, II_0, D_0, III_0, IV_0, 0_0$. .	50
4.2	Espacio Euclideo	51
4.2.1	Merón	54
4.2.2	Merón-Merón, Merón-Antimerón y nuevas soluciones	55
4.3	Caso estático. Euclideo y Minkowski.	56
5	SOLUCIONES EXACTAS CON METRICA LORENTZIANA	59
5.1	Planteamiento del problema	61

5.2	Simplificación de las ecuaciones Yang-Mills y algebraicas	63
5.3	Soluciones estáticas	65
5.4	Condición de compatibilidad	67
5.5	Resolución de la ecuaciones	70
5.6	Ansatz de Bartnik-McKinnon	78
5.7	Propiedades de la solución	83
5.7.1	Regiones permitidas	83
5.7.2	Grupo de isometría	86
5.7.3	Tensor de Weyl. Tipo de Bel-Petrov	89
5.7.4	Métrica de forma conforme plana explícitamente	90
5.7.5	Clasificación según el tensor de Ricci	93
5.7.6	Comportamiento del campo Yang-Mills	94
5.7.7	Clasificación de Yang	95
5.7.8	Cargas eléctrica y magnética	96
5.7.9	Energía de la solución	97

6 SOLUCIONES EXACTAS CON METRICA EUCLIDIANA

99

6.1	Planteamiento del problema	102
6.2	Simplificación de las ecuaciones Yang-Mills y condición algebraica	104
6.3	Condición de compatibilidad	105
6.4	Resolución de las ecuaciones. Caso estático	108
6.5	Resolución de las ecuaciones. Caso no estático	109
6.6	¿ Es general la parametrización empleada ?	115
6.7	Ansatz de Bartnik-McKinnon	116
6.8	Propiedades de la solución	121
6.8.1	Grupo de isometría	125
6.8.2	Métrica de forma conforme plana explícitamente.	128
6.8.3	Acción y carga topológica	131
6.8.4	Carga eléctrica y magnética	134
6.8.5	Energía	135
6.9	$g_{rr} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\Psi))$	136

7 APENDICES

139

7.1	Ecuación $4A_a B_b (a + b)^2 = \text{sen}^2(2A + 2B)$	139
-----	---	-----

<i>Contenido</i>	3
8 CONCLUSIONES	145

Capítulo 1

INTRODUCCION

En 1.954 apareció el artículo de Yang y Mills, donde se generalizaba el concepto de simetría gauge local al caso de un grupo interno no abeliano ([1], [2]). Durante los primeros años no despertó demasiado interés, pero tras el descubrimiento del mecanismo de ruptura espontanea de simetría (1.964), la demostración de su caracter renormalizable (1.971), y, sobre todo, la aparición del celebrado modelo de Weinberg-Salam (1.967) y de la Q.C.D., las teorías gauge no abelianas han adquirido un caracter central en la Física moderna. Estos dos modelos (de Weinberg-Salam y la Q.C.D.) son las dos teorías Yang-Mills existentes en la actualidad y con importancia fenomenológica, ambas pueden formularse en términos de integrales de camino de Feynman, es decir integrales funcionales sobre todas las configuraciones clásicas con un factor de pesado dado por la exponencial de la acción. Es decir, si conocemos todas las configuraciones posibles clásicamente en principio deberíamos poder resolver todas las cuestiones que aparecen en el marco de la teoría cuántica. Si al menos conocemos algunas de las configuraciones clásicas esperamos poder conseguir alguna información sobre aspectos cuánticos asociados.

La primera solución no abeliana fué encontrada por Wu y

Yang [3]. Pero hay que esperar sobre todo a las décadas de los 70 y 80 para que aparezcan numerosos trabajos sobre este tema en las revistas especializadas. Puesto que toda solución encontrada con grupo gauge $SU(2)$ es también solución para cualquier otro grupo gauge semisimple, y por ser éste el más sencillo de tratar, los mayores esfuerzos se concentraron en el caso $SU(2)$, espacio plano (euclideo o minkowski) y vacío (en ausencia de corrientes de carga Yang-Mills). Una buena colección de resultados obtenidos, si bien ya un poco desfasada (fué publicada en 1.979) se puede encontrar en el artículo de Actor [3]. Entre todos ellos destacamos las soluciones tipo monopolo (no singular, con energía finita y acoplada a un triplete Higgs) debidas, por separado, a 't Hooft y Polyakov ([4], [5]) en espacio minkowski, y las soluciones tipo instantónico y merónico en espacio euclideo.

En espacio euclideo la solución exacta más famosa es el instantón. Se trata de una solución autodual (por tanto su tensor energía momento es idénticamente nulo) que posee como cualidades destacables un buen comportamiento (ausencia de singularidades) en todo R^4 , y carga topológica entera. El nombre instantón¹ proviene del hecho de que la solución está concentrada en una región de R^4 . Se han obtenido de distintas formas las soluciones n-instantón, pero por similitud con la notación en este trabajo, nos referiremos en especial a la construcción de Witten [7] (otras construcciones como las de Polyakov y la de Atiyah se pueden encontrar por ejemplo en la referencia [3]). Se ha asociado este tipo de soluciones a la existencia de efectos tunel entre estados de vacío topológicamente caracterizados en teorías estáticas Yang-Mills

¹según P. Ramond en [6] este nombre fué puesto por 't Hooft en virtud de que soluciones en tiempo imaginario se pueden interpretar en una teoría cuántica como procesos que ocurren instantáneamente en un tiempo real

acopladas a un campo Higgs en espacio minkowski.

Punto y aparte nos merecen las soluciones debidas a De Alfaro, Fubini y Furlan ([8], [3]) tipo merón, se caracterizan por tener la densidad de carga topológica concentrada en forma de $\frac{1}{2}\delta(x)$. La importancia que se les ha dado en la literatura no ha sido tan grande como en el caso de las instantónicas. sin embargo, para nosotros son especialmente destacables pues las soluciones merónicas (con simetría esférica) obtenidas hasta la fecha de forma explícita (a saber, merón, merón-merón y merón-antimerón) se pueden obtener en nuestro esquema de forma muy sencilla. En otras palabras, hemos comprobado que este tipo de soluciones pertenecen a un tipo algebraico muy especial en la clasificación de Carmeli, y, por tanto, en un cierto sentido (por pertenecer todas ellas al mismo tipo algebraico Carmeli), las soluciones que obtendremos serán su generalización Einstein - Yang-Mills. Este tipo de soluciones se interpretan como estados tunel entre vacíos minkowski con cargas topológicas 0 y $\pm\frac{1}{2}$ (vacíos Gribov). El conjunto de soluciones instantónicas y merónicas se han intentado usar para explicar el confinamiento de quarks en Q.C.D.

En estos últimos años han aparecido nuevos trabajos intentando obtener soluciones en sistemas Yang-Mills en variedades espacio temporales curvadas por la existencia de un término de energía gauge. En este enfoque se pueden mencionar las soluciones, numéricas, de Bartnik-McKinnon [28] (en adelante B.M.) y Bizon [29] en espacio minkowskiano, o las soluciones tipo agujero gusano ([38],[39],[40],[41]) en espacio euclidiano.

En ambos casos, en espacio plano como en Einstein - Yang-

Mills, el problema que se plantea es la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y no lineal. Por tanto es necesario un trabajo previo a fin de intentar simplificar al máximo las ecuaciones a resolver. Sin pérdida de generalidad se puede hacer uso de la libertad gauge de la teoría, pero esto no es suficiente. Como es habitual en casi todas las ramas de Física, cuando un problema es lo suficientemente complicado como para no ser capaces de resolverlo, lo que se impone es intentar resolver las ecuaciones en casos idealizados, suponiendo que los resultados reales, de alguna forma, serán parecidos a los obtenidos, o, al menos, esperando que de las conclusiones obtenidas de las idealizaciones se podrán obtener conclusiones aplicables en general. Por ello, la mayoría de las soluciones conocidas poseen algún tipo de simetría espacio-temporal. Como unos meros ejemplos, el monopolo de 't Hooft posee simetría esférica y es estático, el 1-instantón (según lo obtiene Witten) tiene simetría $SO(4)$, aunque para su obtención solo se hace uso de simetría esférica, y por último, B.M. suponen simetría esférica y estaticidad.

Sin embargo, si el grupo de simetría no es lo suficientemente grande las ecuaciones pueden ser aún terriblemente difíciles de resolver. Otra forma habitual de simplificar las ecuaciones de evolución es lo que denominamos "ligaduras algebraicas entre las componentes del campo gauge". La más famosa, sin duda, es la condición de autodualidad. Es fácil de comprobar que para cada campo autodual (que es una condición algebraica sobre las componentes del campo, y, por tanto, diferencial de primer orden sobre las componentes del potencial Yang-Mills) las ecuaciones de evolución se convierten en las identidades de Bianchi, que se cumplen idénticamente por la propia definición del campo, si bien

presenta el serio problema de no ser aplicable en el caso minkowskiano. Otro tipo de "Ansätze" algebraicos es, por ejemplo, el suponer directamente que algunas componentes del potencial son nulas (como es el caso de la solución de B.M.).

Evidentemente han existido otras formas, verdaderamente ingeniosas e interesantes (podemos citar algunas de ellas como por ejemplo el "Ansatz Φ^4 " [9], y su generalización en términos de funciones elípticas debida inicialmente a Cerveró y col. [10] (que interpola en función del parámetro elíptico entre la solución instantónica de BPST y la solución merón-merón en espacio euclideo y generaliza la solución de De Alfaro y col. en espacio minkowski) generalización desarrollada posteriormente por Actor [11], o la construcción de Atiyah y col. para la obtención de soluciones autoduales [3], etc.) para simplificar las ecuaciones de evolución. No pretendemos ser exhaustivos, sino tan solo intentar introducir cual ha sido nuestro proceso en la elaboración del presente trabajo y en la obtención de las soluciones que en él se presentan. En nuestro caso hemos resuelto el sistema de ecuaciones de evolución, en espacio plano y en interacción con la gravitación, con simetría esférica y con una ligadura algebraica que aparece de forma natural al particularizar la clasificación de Carmeli ([12], [13]) de los campos Yang-Mills a la simetría esférica.

El segundo capítulo lo dedicaré a introducir los conceptos básicos de la teoría Yang-Mills y a fijar la notación que usaré en el resto del trabajo. Resolveré la condición de simetría esférica para el campo gauge (siguiendo el trabajo de Forgács y Manton [19]), y como un resultado adicional obtendremos una condición necesaria para que un campo Yang-Mills con simetría esférica posea alguna simetría adi-

cional. Este resultado nos permitirá probar la no existencia de un análogo Yang-Mills del teorema de Birkhoff [23].

En el tercer capítulo introduciremos la clasificación algebraica de Carmeli y la particularizaremos al caso de simetría esférica. Este trabajo nos permitirá obtener una ligadura algebraica cuadrática sobre las componentes de los campos, de tal forma que la clasificación quedará caracterizada por el valor de una única función. Así, cuando esta función sea la constante -2 tendremos los tipos más degenerados en la clasificación, cuando valga $+1$ obtendremos los tipos intermedios, y en el resto de situaciones tendremos el tipo menos degenerado compatible con simetría $SO(3)$. A lo largo de todo el trabajo entendemos por tanto como soluciones algebraicamente especiales a las más degeneradas entre las posibles con simetría esférica, es decir aquellas para las que dicha función vale 1 ó -2 .

En el cuarto capítulo resolveremos nuestro problema para un campo Yang-Mills algebraicamente especial en espacio plano. Para ello resolveremos el sistema formado por las propias ecuaciones de evolución más la ligadura algebraica definida en el tercer capítulo. Este proceso lo haremos tanto en espacio minkowski como euclideo. Comprobaremos que las soluciones euclideas tipo merón, merón-merón, y merón-antimerón se obtienen dentro de este esquema así como que no es posible obtener soluciones estáticas. También comprobaremos (sin reobtenerla) que la solución 1-instantón pertenece a uno de los tipos algebraicamente especiales.

En el quinto capítulo resolveremos el sistema de ecuaciones que se obtiene en el caso Einstein - Yang-Mills y algebraicamente espe-

cial, en espacio tipo minkowskiano (métrica $-+++$). Como resultado final obtendremos una solución explícitamente dependiente del tiempo ([30], [31]). Calcularemos el grupo de isometría de la solución obtenida. Como un resultado adicional de esta parte del trabajo podremos caracterizar las soluciones estáticas (y entre ellas la solución de B.M. y la de Bizon) dentro de la clasificación de Carmeli, sin necesidad de conocerlas explícitamente.

En el sexto capítulo, repetiremos esencialmente los mismos pasos del caso minkowskiano, hasta obtener la solución general del sistema de ecuaciones en el caso euclidiano (métrica $++++$). Además se presenta una interpretación de las soluciones obtenidas en términos de wormholes. Este tipo de soluciones adquieren su mayor importancia en el marco de los esfuerzos por conseguir una teoría cuántica de la gravitación. Este tipo de teorías se formulan en el dominio euclideo, para dentro de él sumar sobre todos los espacio-tiempos topológicamente posibles clasicamente y no solamente sobre aquellos que se derivan continuamente del espacio-tiempo plano.

Para finalizar, en el apéndice presentamos el proceso detallado de resolución de una ecuación en derivadas parciales que, como se verá, aparece como punto clave de la obtención de soluciones, al menos en tres momentos distintos. En efecto, dicha ecuación aparece como la última a resolver para obtener el coeficiente de la métrica en los casos que nos planteamos, tanto con métrica lorentziana como euclidiana. También es la única ecuación a resolver para poder poner la métrica de forma conforme plana explícitamente. Finalmente vuelve a aparecer (en primer lugar si atendemos al orden de este trabajo), como última ligadura diferencial a resolver para obtener soluciones exactas

en espacios planos.

Capítulo 2

CAMPOS YANG-MILLS. SIMETRIA ESFERICA

En la década de los 50 aparece el artículo de Yang y Mills, que introduce el concepto de teoría gauge local no abeliana (ver por ejemplo [1], [2], [3]). Conceptualmente consiste en la generalización del carácter gauge del electromagnetismo al caso en que el grupo de invarianza, en un determinado "espacio interno", es no abeliano. Se supone que la teoría física que se está tratando es invariante bajo las transformaciones en este espacio interno, de "isospín". La condición de simetría de la teoría bajo dichas transformaciones se resuelve con la introducción en el Lagrangiano de un campo extra tal que sus propiedades de transformación bajo la acción del grupo compensen las variaciones debidas al resto de los campos de la teoría, y finalmente, el Lagrangiano nuevo sea invariante. Posteriormente, esta teoría ha sido objeto de un profundo trabajo de interpretación en términos geométricos a través del concepto de fibrados (vease por ejemplo la referencia [14]).

En lo que sigue vamos a introducir estos conceptos de forma más sistemática para el caso de grupo gauge $SU(2)$, de esta forma

vamos a fijar la notación que usaremos en adelante, así como las definiciones de los distintos conceptos que usaremos.

Tengamos un conjunto de campos que se transforman bajo la acción del grupo gauge como:

$$\Phi \rightarrow S\Phi$$

$$S \in SU(2)$$

donde Φ es un multiplete y S está en la representación correspondiente. Entonces, los términos de la forma $\Phi^\dagger\Phi$ son invariantes, pero no así los términos cinemáticos, que se transforman de la forma:

$$\Phi_{,\mu} \rightarrow S\Phi_{,\mu} + S_{,\mu}\Phi$$

(En adelante $\Phi_{,\mu} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}$). Para mantener la simetría del Lagrangiano es necesario introducir un campo adicional con unas leyes de transformación dadas por

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow S\mathbf{A}_\mu S^{-1} + S_{,\mu}S^{-1}$$

Es decir, este campo nuevo (en adelante nos referiremos a él como potencial Yang-Mills) está valuado en el álgebra de Lie del grupo gauge en la representación en que éste actúa sobre Φ . Por tanto, la forma de mantener la simetría es sustituir los términos cinemáticos del lagrangiano por la siguiente regla

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - \mathbf{A}_\mu$$

Por analogía con el electromagnetismo el término cinético que se introduce para el nuevo campo tiene la forma

$$\text{tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu})$$

Donde el campo Yang-Mills $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ es la generalización no abeliana del tensor de Faraday electromagnético. El término cinemático recién introducido es invariante Lorentz, y para que sea invariante gauge debe tener unas propiedades de transformación de la forma

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \rightarrow S\mathbf{F}_{\mu\nu}S^{-1}$$

El campo más sencillo que se puede contruir a partir del potencial, tal que se reduzca en el caso $U(1)$ al electromagnético, con unas leyes de transformación como las anteriores y antisimétrico es

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_{\mu,\nu} - \mathbf{A}_{\nu,\mu} - [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

En adelante nos referiremos a este campo como "campo Yang-Mills", distinguiendolo del "potencial Yang-Mills" previamente definido.

Una vez que tenemos definido el potencial Yang-Mills y el campo, es trivial comprobar que se cumplen las identidades de Bianchi

$$D_\mu \mathbf{F}_{\alpha\beta} + D_\alpha \mathbf{F}_{\beta\mu} + D_\beta \mathbf{F}_{\mu\alpha} = 0$$

donde hemos definido $D_\mu = \partial_\mu - [\mathbf{A}_\mu, \]$.

Partiendo del término Lagrangiano Yang-Mills definido anteriormente se pueden calcular las ecuaciones de evolución, que en el caso de vacío (esto es, en ausencia de corrientes de carga Yang-Mills) son:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_\mu (\sqrt{g} \mathbf{F}^{\mu\nu}) = 0$$

Las soluciones autoduales son aquellas que cumplen $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \pm \star \mathbf{F}_{\mu\nu}$, que desarrollando el dual queda

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathbf{F}^{\alpha\beta}$$

Se puede comprobar fácilmente que las ecuaciones de evolución se convierten en las identidades de Bianchi (y, por tanto, se cumplen automáticamente) en las soluciones autoduales. De aquí procede su interés inicial, pues se reduce el orden las ecuaciones a resolver de segundo orden (de las ecuaciones de evolución iniciales) a primer orden (de la condición de autodualidad) (vease por ejemplo [15], [5]). Sin embargo la situación no es tan sencilla en espacio minkowski, pues, como se puede ver fácilmente se llega expresiones sin solución:

$$\mathbf{F}_{tx} = \star \mathbf{F}_{tx} = \mathbf{F}_{yz} = \star \mathbf{F}_{yz} = -\mathbf{F}_{tx}$$

Sin embargo, en una teoría Yang-Mills acoplada a un campo Higgs es posible introducir una condición análoga (autodualidad de Bogomol'ny [3]) en tanto que su cumplimiento implica el cumplimiento de las ecuaciones de evolución y que es de primer orden en las derivadas. También en espacio minkowski su interés está reforzado pues se demuestra que este tipo de soluciones son mínimos de la energía. En este esquema aparecieron los monopolos $SU(2)$ magnéticos de 't Hooft y Polyakov como soluciones más representativas.

En espacio euclidiano no existe el problema anterior. Resolviendo las ecuaciones de autodualidad se obtienen, como caso más representativo, las soluciones instantónicas. Son aquellas que presen-

tan un buen comportamiento en todo R^4 , y tales que la integral de la densidad $\mathbf{F}_{\mu\nu}^* \mathbf{F}^{\mu\nu}$ en todo R^4 , conocida como carga topológica, está cuantificada. La primera solución de este tipo fué el 1-instantón, encontrado por Belavin y col. [17], apareciendo posteriormente la solución genérica n-instantón ([3], [7]).

Sin duda, las dos soluciones a que nos hemos referido hasta ahora (monopolo magnético minkowskiano e instantón euclidiano) han sido las más famosas. De todas formas, existe otro conjunto de soluciones que quisieramos destacar. La causa es que pertenecen, en un sentido que irá quedando claro a lo largo de los capítulos 3 y 4, al mismo tipo algebraico que aquellas soluciones que obtendremos en el caso Einstein - Yang-Mills. Se trata de la solución de De Alfaro y col. [8] y su generalización en termino de funciones elípticas en espacio minkowski [10], y de las soluciones euclideas tipo merón (caracterizadas por tener cargas topológicas semienteras concentradas en forma de $\delta(x)$) y sus generalizaciones elípticas debidas a Cerveró y col. (que "interpolan" entre la solución instantónica y la merónica en términos del parametro característico de una función elíptica de Jacobi) ([3], [8], [10]).

2.1 Simetrías espacio temporales en teorías gauge

Si admitimos que los distintos estados posibles en el espacio gauge (de isospín) son indistinguibles para un observador en el espacio físico, el

concepto de simetría espacio temporal tiene que sufrir una ampliación con respecto a aquel que ingenuamente se impondría. Si no se toma esta precaución llegaríamos a resultados tales, como la existencia de un análogo al teorema de Birkhoff para Yang-Mills (vease [22]) ("toda solución con simetría esférica es además estática"). La expresión de las condiciones de simetría en teorías gauge ha sido desarrollada en la literatura, especialmente en la década de los 80, con un enfoque infinitesimal (es decir, a través de la derivada de Lie); los primeros trabajos en este sentido son los desarrollados por Bergmann y Flaherty [18] y por Forgács y Manton ([19], [20]) para una teoría Yang-Mills. En una teoría de la gravitación en el formalismo de tétradas con $SL(2, \mathbb{C})$ como grupo gauge, el mismo concepto ha sido desarrollado por Chinea [21].

De forma local (esto es, infinitesimalmente) la derivada de Lie nos indica cuánto cambia un campo (en nuestro caso el potencial Yang-Mills \mathbf{A}_μ) al desplazarnos en la dirección que señala el generador del grupo de simetría espacio-temporal X . Por tanto la condición de simetría se impone habitualmente diciendo que la derivada de Lie con respecto a los generadores del grupo se anula. En el caso de una teoría gauge, podemos admitir que el nuevo campo, al desplazarnos en la dirección del generador, sea un transformando gauge del original, si además imponemos que estas transformaciones gauge se van haciendo de forma continua a medida que nos desplazamos, la condición de simetría se puede generalizar a:

$$L_X \mathbf{A}_\mu = \partial_\mu W - [\mathbf{A}_\mu, W] \quad (2.1)$$

donde L_X representa la derivada de Lie respecto al generador X y W es un campo valuado en el álgebra de Lie del grupo gauge. Esta

expresión es válida para una teoría Yang-Mills donde el potencial tiene unas determinadas reglas de transformación bajo la acción del grupo gauge, en una teoría gauge con otras reglas de transformación, como por ejemplo, la formulación en tétradas de la gravitación, donde las reglas de transformación para la tétrada son distintas, la condición de simetría es diferente. La ecuación (2.1) es invariante gauge, con solo imponer que el W sea un escalar y tenga una ley de transformación del siguiente tipo:

$$W' = SW S^{-1} + X^\rho (\partial_\rho S) S^{-1}$$

Se puede comprobar que si tenemos un sistema de generadores de simetría tal que entre ellos conmutan, entonces se puede encontrar un sistema de coordenadas tal que $X^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (con el 1 en la i -ésima posición). Entonces se puede demostrar [19] que se puede encontrar una transformación gauge tal que

$$L_{X^i} \mathbf{A}_\mu = 0$$

para todos los generadores simultáneamente y por tanto, $\mathbf{A}_{\mu,i} = 0$. En el caso en que dos generadores no conmuten entre si, no se puede llegar en general al resultado anterior, y deberá cumplirse la relación de consistencia

$$L_{X^m} W_n - L_{X^n} W_m - [W_m, W_n] - f_{mnp} W_p = 0 \quad (2.2)$$

donde f_{mnp} son las constantes de estructura del grupo de simetría espacio-temporal.

Sobre el campo Yang-Mills $\mathbf{F}_{\mu\nu}$, la condición de simetría se expresa:

$$L_X \mathbf{F}_{\mu\nu} = [W, \mathbf{F}_{\mu\nu}] \quad (2.3)$$

Puesto que las reglas de transformación gauge del campo Yang-Mills son similares a las de la tetrada gravitatoria (con $SL(2, C)$), la condición de simetría para esta última será semejante [21] ($L_X \Theta_\mu = [W, \Theta_\mu]$).

En el presente trabajo nos vamos a restringir exclusivamente a campos Yang-Mills con simetría esférica, por ello, (pese a que la solución general de esta condición de simetría aparece abundantemente en la literatura (por ejemplo en [3], [7], [19])) vamos a resolverla de forma explícita en lo que sigue:

2.1.1 Campos Yang-Mills con simetría esférica

Muchas de las soluciones exactas que se han obtenido poseen simetría esférica. Ya hemos mencionado en la introducción que el monopolo, las soluciones instantónicas, y algunas de las merónicas en espacio plano, y las soluciones de Bartnik-McKinnon, Bizon, y wormholes citados en las referencias, en Einstein - Yang-Mills, poseen ésta simetría.

Los generadores infinitesimales del grupo $SO(3)$, se escriben, en coordenadas esféricas, como

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos\phi\partial_\theta - \cotg\theta\text{sen}\phi\partial_\phi \\ X_2 &= -\text{sen}\phi\partial_\theta - \cotg\theta\cos\phi\partial_\phi \\ X_3 &= \partial_\phi \end{aligned}$$

Como mencionamos en la sección anterior, siempre es posible hacer una transformación gauge, dependiente de ϕ , tal que W_3^i se anule. Entonces las ecuaciones de compatibilidad (2.2) que deben resolverse son para $(m, n) = (1, 3)$ y $(2, 3)$

$$-W_{1,\phi}^i + W_2^i = 0$$

$$-W_{2,\phi}^i - W_1^i = 0$$

que se resuelven con

$$W_1^i = P^i \cos \phi + Q^i \sin \phi$$

$$W_2^i = -P^i \sin \phi + Q^i \cos \phi$$

$$W_3^i = 0$$

y donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\theta)$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\theta)$. Las reglas de cambio de \mathbf{P} y \mathbf{Q} bajo una transformación gauge independiente de ϕ son:

$$\mathbf{Q}' = S\mathbf{Q}S^{-1}$$

$$\mathbf{P}' = S\mathbf{P}S^{-1} + S_{,\theta}S^{-1}$$

Siempre es posible encontrar un gauge tal que $\mathbf{P} = 0$. La última ecuación de compatibilidad ($(m, n) = (1, 2)$) se escribe entonces:

$$Q_{,\theta}^i + \cot \theta Q^i = 0$$

Que se resuelve con $Q^i = \frac{c^i}{\sin \theta}$ donde c^i son constantes que definen un vector en el álgebra. Podemos hacer una transformación gauge de forma que $c^1 = c^2 = 0$ (se trata de una rotación en el álgebra de Lie de forma que el generador 3 apunte en la dirección de \mathbf{c} , rotación que se

puede hacer, sin deshacer $W_3 = \mathbf{P} = 0$, pues es constante). Con lo que finalmente el sistema de ecuaciones queda resuelto con

$$Q^3 = \frac{\varphi_3}{\text{sen}\theta}$$

Una vez conocida la forma de los W_m^i , se puede resolver la ecuación general de simetría (2.1), cuyo resultado es:

$$W_1 = (0, 0, \frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}\theta}\varphi_3) \quad (2.4)$$

$$W_2 = (0, 0, \frac{\text{cos}\phi}{\text{sen}\theta}\varphi_3) \quad (2.5)$$

$$W_3 = (0, 0, 0) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{A}_t = (0, 0, A_t(t, r)) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}_r = (0, 0, A_r(t, r)) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A}_\theta = (-\varphi_1(t, r), -\varphi_2(t, r), 0) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}_\phi = (\varphi_2(t, r)\text{sen}\theta, -\varphi_1(t, r)\text{sen}\theta, -\varphi_3\text{cos}\theta) \quad (2.10)$$

(donde φ_3 es una constante) y con la ligadura adicional $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ si $\varphi_3 \neq 1$. Esta forma del potencial Yang-Mills mantiene aún una libertad gauge dada por un subgrupo $U(1)$ del grupo gauge $SU(2)$ original. La acción de este subgrupo sobre las funciones que acabamos de definir es:

$$A'_t = A_t - \partial_t f$$

$$A'_r = A_r - \partial_r f$$

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \cos(f) + \varphi_2 \text{sen}(f)$$

$$\varphi'_2 = -\varphi_1 \text{sen}(f) + \varphi_2 \cos(f)$$

y donde $f = f(t, r)$.

Con un potencial Yang-Mills como el de las ecuaciones (2.7/10), la forma del campo Yang - Mills es ($\varphi_3 = 1$):

$$\mathbf{F}_{tr} = (0, 0, A_{r,t} - A_{t,r}) = (0, 0, F_{tr}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{F}_{t\theta} = (-\varphi_{1,t} - A_t\varphi_2, -\varphi_{2,t} + A_t\varphi_1, 0) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_{r\theta} = (-\varphi_{1,r} - A_r\varphi_2, -\varphi_{2,r} + A_r\varphi_1, 0) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{F}_{t\phi} = (\varphi_{2,t} - A_t\varphi_1, -\varphi_{1,t} - A_t\varphi_2, 0)\text{sen}\theta \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F}_{r\phi} = (\varphi_{2,r} - A_r\varphi_1, -\varphi_{1,r} - A_r\varphi_2, 0)\text{sen}\theta \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}_{\theta\phi} = (0, 0, (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)\text{sen}\theta) = (0, 0, F_{\theta\phi}) \quad (2.16)$$

Es fácil de comprobar que las cantidades F_{tr} , $(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)$, $F_{t\theta}^i F_{t\theta}^i$, $F_{r\theta}^i F_{r\theta}^i$ son invariantes bajo la actuación del subgrupo gauge residual $U(1)$.

A lo largo del trabajo siempre nos hemos restringido a un gauge en el que $\varphi_2 = 0$ y en el que denotamos por tanto $\varphi = \varphi_1$. También hemos seleccionado la constante φ_3 con valor 1 (en caso contrario obtenemos un campo Yang-Mills abeliano, y reobtendríamos los resultados de un campo electromagnético con simetría esférica). Por tanto la forma del potencial y del campo Yang-Mills será en este trabajo:

$$\mathbf{A}_t = (0, 0, A_t) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A}_r = (0, 0, A_r) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{A}_\theta = (-\varphi, 0, 0) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}_\phi = (0, -\varphi\text{sen}\theta, -\cos\theta) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{F}_{tr} = (0, 0, F_{tr}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{F}_{t\theta} = (-\varphi_{,t}, A_t\varphi, 0) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F}_{r\theta} = (-\varphi_{,r}, A_r\varphi, 0) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}_{t\phi} = (-A_t\varphi, -\varphi_{,t}, 0)\text{sen}\theta \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F}_{r\phi} = (-A_r\varphi, -\varphi_{,r}, 0)\text{sen}\theta \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F}_{\theta\phi} = (0, 0, (1 - \varphi^2)\text{sen}\theta) \quad (2.26)$$

2.1.2 Simetrías adicionales en campos Yang-Mills con simetría esférica. Generalización del teorema de Birkhoff.

Los resultados más importantes de este apartado fueron presentados en los E.R.E.88 (Encuentros de Relativistas Españoles [23]). La idea básica que existe tras estos cálculos era el demostrar la existencia o no existencia de un análogo al teorema de Birkhoff para el caso de una teoría Yang-Mills en vacío. El teorema de Birkhoff puede leerse de varias formas. Quizás la formulación más sencilla sea diciendo que toda solución de vacío con simetría esférica además debe ser estática [25]. Desde esta lectura es trivial comprobar que dicho teorema no sería válido para el caso Yang-Mills; bastaría con recordar que existe la solución instantónica en espacio euclideo, que es intrínsecamente dependiente de las cuatro coordenadas en R^4 . (La integral de la densidad de carga topológica en toda la variedad euclidea es finita). Además existen soluciones en espacio minkowski con simetría esférica y explícitamente dependientes del tiempo, como puede ser la solución de De Alfaro y col. [3]. Por tanto, en lo que sigue releemos el teorema de Birkhoff de una forma que generaliza la anterior (y que se aproxima a otras formulaciones más generales como puede ser la que aparece en [24]), a

saber, toda solución de vacío con simetría esférica posee además alguna simetría adicional.

El problema que nos planteamos, por tanto, en primer lugar es encontrar el tipo de condiciones que debe cumplir un campo ($\mathbf{F}_{\mu\nu}$) Yang-Mills que posee simetría esférica, y que por lo tanto se puede encontrar un gauge en el que se escribe de la forma representada en las expresiones (2.11/16), para poseer algún tipo de simetría adicional.

Para ellos nos planteamos el sistema ecuaciones dado por

$$L_X F'_{\mu\nu} = [W, \mathbf{F}_{\mu\nu}]^i \quad (2.27)$$

donde X representa un generador de simetría genérico, y sobre el que, en principio, no imponemos ninguna limitación. Obsérvese, que en el caso de un grupo gauge $SU(2)$, se trata de un sistema de 18 ecuaciones con 21 incógnitas (las 18 componentes del campo gauge y las tres componentes del W). Sin embargo, al limitarnos a campos Yang-Mills con simetría esférica podemos hacer uso de los resultados obtenidos anteriormente y por tanto solo tendremos 9 incógnitas (6 componentes de los campos no nulas y las tres componentes gauge de W). Del sistema de ecuaciones que se obtiene se podrán obtener algunas condiciones de compatibilidad. Obsérvese que si X es combinación lineal de los generadores de simetría esférica, el sistema de ecuaciones se cumplirá automáticamente.

La compatibilidad de dicho sistema nos impone:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\theta(\partial_\theta X^\phi) + \partial_\theta X^\theta &= 0 \\ \partial_\theta X^\theta - \partial_\phi X^\phi - \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} X^\theta &= 0 \end{aligned}$$

más la exigencia de que se cumpla una de las dos siguientes condiciones

$$\frac{F_{tr}F_{\theta\phi}}{\text{sen}\theta} = [\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3 \quad (2.28)$$

$$W^2 = W^3 = 0 \quad (2.29)$$

Si no se cumple la ecuación (2.28) deberá cumplirse (2.29), usando ésta podremos obtener nuevas relaciones de compatibilidad, que nos fuerzan a que la matriz siguiente tenga rango 1 (o menor)

$$\begin{pmatrix} -\partial_t X^\phi & -\partial_r X^\phi & \partial_t X^\theta & \partial_r X^\theta \\ \partial_\theta X^r & -\partial_\theta X^t & \partial_\phi X^r & -\partial_\phi X^t \end{pmatrix}$$

y a que sea cierta una de las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{F_{tr}F_{\theta\phi}}{\text{sen}\theta} = k[\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3 \quad (2.30)$$

$$X^r = F(t, r)X^t \quad (2.31)$$

donde k es una constante. Si no se cumple (2.30) estamos obligados a que se cumpla (2.31) y a que se cumpla una de dos condiciones siguientes

$$[\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3 = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial_t X^\phi = \partial_r X^\phi = \partial_t X^\theta = \partial_r X^\theta =$$

$$\partial_\theta X^r = \partial_\theta X^t = \partial_\phi X^r = \partial_\phi X^t =$$

$$\partial_\theta X^\theta = 0 \quad (2.33)$$

Tenemos, por tanto, que si no se cumplen ninguna de las ecuaciones (2.28), (2.30) y (2.32) (todas ellas relaciones algebraicas donde únicamente aparecieron las componentes de los campos gauge), el supuesto generador de la simetría adicional debe tener la forma

$$X = X^t(t, r)\partial_t + X^r(t, r)\partial_r + X_{SO(3)}$$

Las condiciones finales de compatibilidad para un generador de este tipo serán una de las siguientes:

$$i. X^r = 0; \partial_t F_{\theta\phi} = \partial_t F_{tr} = 0 \quad (2.34)$$

$$ii. X^t = 0; \partial_r F_{\theta\phi} = \partial_r F_{tr} = 0 \quad (2.35)$$

$$iii. X^t \neq 0; X^r \neq 0; (\partial_t F_{\theta\phi})(\partial_r (\frac{F_{tr}}{[\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3})) = \\ (\partial_r F_{\theta\phi})(\partial_t (\frac{F_{tr}}{[\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3})) \quad (2.36)$$

$$iv. No tiene mas simetrias; X^t = X^r = 0 \quad (2.37)$$

Los resultados son válidos tanto en espacio minkowskiano como euclidiano, plano o curvo. Si observamos la estructura de condiciones que hemos obtenido observaremos que en cada uno de los pasos, se limita, mediante alguna condición diferencial, la forma de la posible simetría adicional. También observamos que, salvo para los casos de campos estáticos (*i*) u homogéneos (*ii*), se ha encontrado un conjunto de relaciones donde solo aparecen los campos Yang-Mills, que son condición necesaria para la existencia de una simetría adicional aparte de la puramente esférica. Por tratarse de una condición necesaria no sirve para probar la existencia de un análogo, en el sentido que expuse anteriormente, al teorema de Birkhoff, por tanto adelantamos que, en los próximos párrafos, vamos a mostrar un contraejemplo en espacio euclideo, que, pese a poseer simetría esférica, no cumple ninguna de las condiciones anteriores, y por tanto nos permite concluir que no existe un análogo al teorema de Birkhoff en teorías Yang-Mills en vacío.

Si nos restringimos al caso euclideo, y dentro de éste a las soluciones autoduales el análisis anterior se simplifica de manera con-

siderable. Es evidente que, en éstas soluciones, pasamos (con simetría $SO(3)$) de tener 6 componentes distintas en el campo a tan solo 3. Por supuesto el esquema anterior sigue siendo válido, pero esta simplificación adicional nos permite obtener una condición más fuerte sobre los generadores admisibles. En este caso:

$$r^2 \partial_r X^\theta + \partial_\theta X^r = 0 \quad (2.38)$$

$$r^2 \partial_t X^\theta + \partial_\theta X^t = 0 \quad (2.39)$$

$$\partial_\theta X^\theta - \partial_r X^r + \frac{X^r}{r} = 0 \quad (2.40)$$

$$\partial_t X^t - \partial_r X^r = 0 \quad (2.41)$$

$$\partial_t X^r + \partial_r X^t = 0 \quad (2.42)$$

$$s \epsilon n^2 \theta \partial_\theta X^\phi + \partial_\phi X^\theta = 0 \quad (2.43)$$

$$r^2 s \epsilon n^2 \theta \partial_r X^\phi + \partial_\phi X^r = 0 \quad (2.44)$$

$$r^2 s \epsilon n^2 \theta \partial_t X^\phi + \partial_\phi X^t = 0 \quad (2.45)$$

$$\partial_\theta X^\theta - \partial_\phi X^\phi - X^\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \quad (2.46)$$

Este resultado nos permite simplificar (2.36). En efecto, si no se cumplen ni (2.28), ni (2.30), ni (2.32), entonces el conjunto (2.38/46) de ecuaciones se puede integrar dando la solución:

$$X = \left(\frac{k_1}{2}(t^2 - r^2) + k_2 t + k_3 \right) \partial_t + (k_1 t + k_2) r \partial_r + X_{SO(3)}$$

y la condición (2.36) se puede escribir

$$\partial_t (X^t F_{tr}) + \partial_r (X^r F_{tr}) = 0 \quad (2.47)$$

que no se trata de una ecuación en la que solo aparecen componentes del campo (como era (2.36)) pero de la que conocemos explícitamente

la forma de X^t y X^r . Siguiendo las líneas y la notación del trabajo de Witten [7], la ecuación final de autodualidad que se debe resolver es

$$\nabla^2 \rho = e^{2\rho}$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla &= \partial_{tt} + \partial_{rr}, \\ A_t &= \partial_r \psi, \quad A_r = -\partial_t \psi, \\ \varphi_1 &= \chi_1 e^\psi, \quad \varphi_2 = \chi_2 e^\psi, \\ \psi &= \text{Ln}(r) - \frac{1}{2} \text{Ln}(\chi_1^2 + \chi_2^2) + \rho \end{aligned}$$

y $\chi_1 + i\chi_2$ es una función analítica de $t + ir$. La solución general de la ecuación de autodualidad es conocida (se trata de la ecuación de Liouville, su solución se puede encontrar por ejemplo en ([7], [35])).

$$\rho = -\text{Ln}\left(\frac{1}{2}(1 - gg^*)\right) + \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\left|\frac{dg}{dz}\right|^2\right)$$

Las distintas soluciones se van obteniendo según sea el valor de la función arbitraria $g = g(z)$. La solución tipo gauge puro se obtiene cuando $g(z) = \left(\frac{a_1 - z}{a_1 + z}\right)$, la solución tipo 1-instantón cuando $g(z)$ es igual el producto de dos expresiones como la anterior, la solución tipo 2-instantón cuando $g(z)$ es el producto de tres expresiones, etc.

En esta notación la condición necesaria de existencia de alguna simetría adicional se escribe diciendo que se debe cumplir al menos una de las dos siguientes expresiones (ecuaciones (2.28/30/32) y (2.47))

$$\begin{aligned} 4kr^2\left(-\frac{1}{r^2} + \nabla^2 \rho\right)^2 &= \nabla^2(r^2 \nabla^2 \rho) \quad (2.48) \\ \partial_t\left(\left(\frac{k_1}{2}(t^2 - r^2) + k_2 t + k_3\right)\left(-\frac{1}{r^2} + \nabla^2 \rho\right)\right) &+ \end{aligned}$$

$$\partial_r((k_1 t + k_2) r \partial_r) \left(-\frac{1}{r^2} + \nabla^2 \rho \right) = 0 \quad (2.49)$$

Es laborioso ver que la primera condición se cumple con $k = 1$ para la solución tipo 1-instantón, pero esto era de esperar pues el instantón de Witten tiene simetría $SO(4)$ y por lo tanto, debe cumplir al menos una de las condiciones necesarias (2.48/49). Lo mismo ocurre para la solución $g(z) = z$. Sin embargo la solución $g(z) = z^2$ no cumple (2.48/49) y por lo tanto, tenemos al menos una solución (si bien no perteneciente al grupo instantónico) que no cumple las condiciones necesarias para que una solución con simetría esférica posea alguna simetría adicional. Tenemos por tanto un contraejemplo, en espacio euclideo, que demuestra la no existencia de un análogo al teorema de Birkhoff en una teoría Yang-Mills en vacío.

Para poder llegar a este resultado ha sido importante el que en espacio euclideo exista una condición algebraica (de autodualidad) que permite simplificar las ecuaciones de forma que se pueden resolver completamente. En espacio minkowski no existe una condición de este estilo, y la mayoría de las soluciones que se conocen se han obtenido imponiendo explícitamente un grupo de simetría mayor que $SO(3)$. En cualquier caso se ha pasado el test de ecuaciones definido en (2.28/30/32/36) sobre las soluciones minkowskianas que aparecen en [3], encontrándose que todas ellas cumplían alguna de las condiciones de la batería y, por lo tanto, no hemos tenido éxito en la búsqueda de otro contraejemplo al teorema de Birkhoff, esta vez en espacio minkowski.

2.1.3 Algo más sobre simetría $SO(4)$

El proceso de la sección anterior se ha repetido limitando la forma del supuesto generador de simetría a $SO(4)$. En este caso el sistema de ecuaciones se puede simplificar de forma más notable y llegarse a unas condiciones necesarias más restrictivas:

$$\frac{F_{tr}F_{\theta\phi}}{\sin\theta} = [\mathbf{F}_{t\theta}, \mathbf{F}_{r\theta}]^3 \quad (2.50)$$

$$(r^2 F_{tr}^2 \pm \frac{F_{\theta\phi}^2}{r^2 \sin^2\theta}) = (F_{t\theta}^2 \pm F_{r\theta}^2) \quad (2.51)$$

(el signo superior corresponde al caso euclideo y simetría $SO(4)$ y el signo inferior al caso minkowski y simetría $SO(3,1)$) Una de las condiciones que aparece ya había sido obtenida anteriormente en general y la segunda es específica de esta simetría. De momento no vamos a referirnos a ellas, pero aparecerán más adelante en un contexto distinto.

Capítulo 3

CLASIFICACION ALGEBRAICA DE CARMELI

Durante los últimos años de la década de los 70 han aparecido distintas formas de clasificar el campo Yang-Mills. La descripción detallada de ellas se puede encontrar por ejemplo en ([12], [13]). La debida a Carmeli y col. está basada en el problema de autovalores y autovectores de un determinado espinor que se define a partir del campo Yang-Mills. Es quizás, la que más se asemeja a la clasificación de Bel-Petrov para el caso gravitatorio, y, como veremos, en el presente trabajo se sugiere, sin probarse, que puede existir una íntima relación entre ambas. Esta clasificación es invariante gauge.

En la segunda, debida a Wang y Yang, la clasificación se hace en función del rango de una determinada matriz invariante Lorentz, que se construye a partir de los campos gauge. La tercera, debida a Castillejo y col. clasifica los campos en función del subgrupo de $SL(2, C) * SU(2)$ que los deja invariantes.

En este trabajo hemos hecho uso del esquema de Carmeli, por ello, vamos a explicar someramente en qué consiste.

Se define el espinor correspondiente al campo Yang-Mills como

$$f_{AB'CD'}^i = \sigma_{AB'}^\mu \sigma_{CD'}^\nu F_{\mu\nu}^i \quad (3.1)$$

donde $\sigma_{AB'}^\mu$ son matrices hermiticas que satisfacen

$$\begin{aligned} \sigma_{AB'}^\mu \sigma^{\nu AB'} &= g^{\mu\nu} \\ \sigma_{AB'}^\mu \sigma_\nu^{AB'} &= \delta_\nu^\mu \end{aligned}$$

Este espinor puede ser factorizado como

$$f_{AB'CD'}^i = \chi_{AC}^i \epsilon_{B'D'} + \epsilon_{AC} \chi_{B'D'}^i$$

donde $\chi_{AB}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{C'D'} f_{AC'BD'}^i$ y donde ϵ se usa para subir y bajar indices espinoriales:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se define el espinor (invariante gauge)

$$\xi_{ABCD} = \chi_{AB}^i \chi_{CD}^i$$

que cumple $\xi_{ABCD} = \xi_{BACD} = \xi_{CDAB} = \xi_{ABDC}$. Se puede comprobar que la traza de este espinor en la suma de la densidad de acción más i veces la densidad de carga topológica.

$$\xi_{AB}{}^{AB} = \frac{1}{4} [F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + i F_{\mu\nu}^i * F^{i\mu\nu}] \quad (3.2)$$

que denotaremos como P en adelante. La ecuación de autovalores que planteamos para clasificar el campo Yang-Mills es

$$\xi^{AB}{}_{CD}\phi^{CD} = \lambda\phi^{AB} \quad (3.3)$$

Si los tres autovalores son distintos tenemos los tipos I_p y I_0 (en lo que sigue el subíndice p representa que el invariante gauge P definido en (3.2) es distinto de cero y el subíndice 0 que dicho invariante es nulo). Si tenemos únicamente dos autovalores uno de ellos es doble. Si el autovalor doble presenta dos autoespinores tenemos los tipos D_p y D_0 , en caso contrario serán II_p y II_0 . Si tenemos un único autovalor con tres autoespinores serán los tipos 0_p y 0_0 , con dos autoespinores IV_p y IV_0 y con un único autoespinor finalmente tendremos III_p y III_0 .

Esta clasificación la podemos presentar de una forma ligeramente distinta. Calculamos los siguientes invariantes gauge a partir del espinor ξ .

$$\begin{aligned} P &= \Sigma\lambda_i = \xi_{AB}{}^{AB} \\ S &= \Sigma\lambda_i^2 = \xi_{ABCD}\xi^{ABCD} \\ F &= \Sigma\lambda_i^3 = \xi_{AB}{}^{CD}\xi_{CD}{}^{EF}\xi_{EF}{}^{AB} \\ G &= S - \frac{1}{3}P^2 \\ H &= F - PG - \frac{1}{9}P^3 \end{aligned}$$

Entonces la clasificación de Carmeli queda caracterizada parcialmente (únicamente en cuanto al número de autovalores se refiere):

$$\text{tipo } I_p \rightarrow P \neq 0 \text{ y } G^3 \neq 6H^2$$

$$\text{tipo } II_p, D_p \rightarrow P \neq 0 \text{ y } G^3 = 6H^2$$

$$\text{tipo } III_p, IV_p, 0_p \rightarrow P \neq 0 \text{ y } G = H = 0$$

$$\text{tipo } I_0, II_0, D_0, III_0, IV_0, 0_0 \rightarrow P = 0$$

Lo interesante de esta forma de representar la clasificación de Carmeli, es que se pueden obtener esos invariantes gauge, sin necesidad de calcular el espinor ξ . Para ello basta que definamos la matriz

$$A_k^i = E_k^i + iB_k^i = F_{0k}^i + i\frac{1}{2}\sqrt{\eta}\epsilon_{0klm}F^{ilm} \quad (3.4)$$

donde i representa las distintas componentes gauge, y $0, k, l, m$ son índices en la tétrada elegida para representar la métrica, y η es el valor absoluto del determinante de la métrica en los índices de la tétrada. Definimos las siguientes matrices

$$\xi = AA^t \quad (3.5)$$

$$\pi = A^t A \quad (3.6)$$

Entonces los invariantes gauge definidos anteriormente se pueden calcular a partir de la matrices ξ y π

$$P = \text{traza}(\xi) = \text{traza}(\pi) \quad (3.7)$$

$$S = \text{traza}(\xi^2) = \text{traza}(\pi^2) \quad (3.8)$$

$$F = \text{traza}(\xi^3) = \text{traza}(\pi^3) \quad (3.9)$$

En el párrafo anterior hemos definido una matriz π . A partir de dicha matriz se construye la clasificación de Yang (a la que hacemos **referencia** al principio de este tema). En función de que su rango sea tres, dos, uno, o cero tendremos los cuatro tipos posibles de dicha clasificación.

3.1 Particularización a la solución de Bartnik-McKinnon

Denotamos como ansatz de B.M. (aunque no fué usado por primera vez por ellos, la primera referencia conocida por el autor aparece en la revisión de Actor [3]) al caso de simetría esférica definido en las expresiones (2.17-2.26) cuando $A_t = A_r = \varphi_2 = 0$. Además de estas restricciones las solución de B.M. es estática. En simetría esférica podemos parametrizar la métrica de forma diagonal [24]:

$$ds^2 = e^{-2\tau} dt^2 - e^{2\rho} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (3.10)$$

donde τ y ρ son funciones de r . Definimos las matrices σ de la siguiente forma:

$$\sigma^t = \frac{e^\tau}{\sqrt{2}} 1$$

$$\sigma^r = \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{2}} \sigma^1$$

$$\sigma^\theta = \frac{1}{r\sqrt{2}}\sigma^2$$

$$\sigma^\phi = \frac{1}{r\text{sen}\theta\sqrt{2}}\sigma^3$$

y donde σ^i son las matrices de Pauli. También nos hubiese servido cualquier otra elección que se hubiese obtenido de la anterior bajo la acción de un elemento de $SL(2, C)$.

Calculamos los espinores Yang-Mills

$$f_{0000}^i = f_{1111}^i = f_{0011}^i = f_{1100}^i = f_{1010}^i = f_{0101}^i = (0, 0, 0)$$

$$f_{0001}^i = -f_{0100}^i = f_{0010}^{i\text{cc}} = -f_{1000}^{i\text{cc}} = \left(-\frac{(1-\varphi^2)}{2r^2}, 0, \frac{i\varphi_r e^{-\rho}}{2r}\right)$$

$$f_{1110}^i = -f_{1011}^i = f_{1101}^{i\text{cc}} = -f_{0111}^{i\text{cc}} = \left(\frac{(1-\varphi^2)}{2r^2}, 0, \frac{i\varphi_r e^{-\rho}}{2r}\right)$$

$$f_{0110}^i = \left(0, -\frac{i\varphi e^{-\rho}}{r}, 0\right)$$

El espinor ξ

$$\xi_{0000} = \xi_{1111} = \frac{1}{4r^2} \left(\frac{(1-\varphi^2)^2}{r^2} - \varphi_r^2 e^{-2\rho} \right)$$

$$\xi_{0011} = \frac{1}{4r^2} \left(\frac{(1-\varphi^2)^2}{r^2} + \varphi_r^2 e^{-2\rho} \right)$$

$$\xi_{0101} = -\frac{\varphi_r^2 e^{-2\rho}}{4r^2}$$

$$\xi_{0001} = \xi_{0111} = 0$$

La traza de este espinor es la densidad de acción más i veces la densidad de carga topológica, que en este Ansatz

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-\varphi^2)^2}{r^4} + \frac{2\varphi_r^2 e^{-2\rho}}{r^2} \right) \quad (3.11)$$

La ecuación de autovalores se puede resolver dando la siguiente solución. Tiene un autovalor doble

$$\lambda = B = \frac{\varphi_{,r}^2 e^{-2\rho}}{4r^2}$$

y un autovalor simple

$$\lambda = A = \frac{(1 - \varphi^2)^2}{4r^4}$$

Si

$$A = B \tag{3.12}$$

tenemos un autovalor triple con tres autoespinores y por lo tanto se trata del tipo 0_p ó 0_0 en la clasificación de Carmeli (el segundo únicamente cuando $\varphi = 1$ donde se obtiene una solución gauge pura). Por el contrario, si A y B son distintos, entonces los dos autovalores son distintos, al autovalor doble le corresponden dos autoespinores y por tanto corresponde al tipo D_p .

Estos últimos resultados merecen una serie de comentarios. En primer lugar, hemos clasificado el conjunto de soluciones que se pueden obtener dentro de Ansatz de B.M. Como se puede observar, son solamente dos los tipos algebraicos que persisten al imponer simetría esférica y este Ansatz. Y uno de ellos queda definido por una condición algebraica (ecuación (3.12)) en los campos y, por tanto, diferencial de primer orden en las componentes del potencial Yang-Mills. En la siguiente sección veremos que estos resultados se pueden generalizar, en un cierto sentido, a simetría esférica sin restringirnos a ningún Ansatz particular.

3.2 Particularización a simetría esférica

El proceso que se ha llevado a cabo en el punto anterior se puede repetir para el caso general de un campo con simetría esférica. Conceptualmente no existen mayores diferencias. Sin embargo, para lo que estamos interesados nosotros no es necesaria tanta información. Como mencionamos en la introducción, estamos buscando alguna ligadura algebraica sobre las componentes de los campos, que nos permita simplificar las ecuaciones de evolución, y encontrar soluciones exactas. Para ello no es necesario conocer exactamente toda la clasificación algebraica, sino tan solo en lo que al número de autovalores distintos se refiere y las condiciones algebraicas que el campo Yang-Mills debe cumplir para pertenecer a cada uno de los tipos. Por tanto vamos a hacer uso de la clasificación de Carmeli en función de las ligaduras entre los invariantes gauge G, H, P .

Para la parametrización de la métrica expuesta en (3.10) (donde τ y ρ son funciones de t y r) podemos definir la siguiente tétrada diagonal: $\Theta^0 = e^{-\tau} dt$, $\Theta^1 = e^{\rho} dr$, $\Theta^2 = r d\theta$ y $\Theta^3 = r \sin\theta d\phi$. En los índices de la tétrada, la métrica tiene forma diagonal minkowski ($\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$). La métrica original se obtiene como $ds^2 = \Theta^a \Theta^b \eta_{ab}$. Los componentes del campo Yang-Mills en esta base son:

$$F_{mn}^i = \Theta_m^\mu \Theta_n^\nu F_{\mu\nu}^i$$

Para el caso de simetría esférica, y en el gauge $\varphi_2 = 0$, las componentes del campo en los índices de la tétrada son:

$$\begin{aligned}
F_{01}^i &= (0, 0, F_{tr})e^{\tau-\rho} \\
F_{02}^i &= (-\varphi_{,t}, A_t\varphi, 0)\frac{e^\tau}{r} \\
F_{03}^i &= (-A_t\varphi, -\varphi_{,t}, 0)\frac{e^\tau}{r} \\
F_{12}^i &= (-\varphi_{,r}, A_r\varphi, 0)\frac{e^{-\rho}}{r} \\
F_{13}^i &= (-A_r\varphi, -\varphi_{,r}, 0)\frac{e^{-\rho}}{r} \\
F_{23}^i &= (0, 0, (1 - \varphi^2))
\end{aligned}$$

Las únicas componentes no nulas de la matriz A definida en (3.4) son:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \\
a &= e^{\tau-\rho}F_{tr} + i\frac{(1 - \varphi^2)}{r^2} \\
c &= \frac{A_t\varphi e^\tau}{r} + i\frac{\varphi_{,r}e^{-\rho}}{r} \\
b &= -\frac{\varphi_{,t}e^\tau}{r} + i\frac{A_r\varphi e^{-\rho}}{r}
\end{aligned}$$

La matriz ξ definida en (3.5) es diagonal

$$\xi = \pi = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

En este punto es conveniente hacer algunos comentarios. El primero es que ambas matrices (ξ y π) son iguales y diagonales. El hecho de ser diagonales es debido a estar restringiendonos a campos con simetría esférica, en general no es así. Por ser diagonales los cálculos de las trazas que aparecen en la definición de P , G , y H son triviales, y por

tanto, la caracterización de la clasificación de Carmeli por el número de autovalores distintos es fácil de calcular. Dichos invariantes gauge son:

$$P = a^2 + 2(b^2 + c^2)$$

$$S = a^4 + 2(b^2 + c^2)^2$$

$$F = a^6 + 2(b^2 + c^2)^3$$

$$G = \frac{2}{3}[a^2 - (b^2 + c^2)]^2$$

$$H = \frac{2}{9}[a^2 - (b^2 + c^2)]^3$$

Es trivial de comprobar que siempre se cumple $G^3 = 6H^2$. La clasificación de Carmeli de los campos Yang-Mills con simetría esférica queda caracterizada como sigue:

$$\text{tipo } I_p \rightarrow \text{No es posible} \quad (3.13)$$

$$\text{tipo } II_p, D_p \rightarrow a^2 = f(t, r)(b^2 + c^2) \quad (3.14)$$

$$\text{tipo } III_p, IV_p, 0_p \rightarrow a^2 = (b^2 + c^2) \quad (3.15)$$

$$\text{tipo } I_0, II_0, D_0, III_0, IV_0, 0_0 \rightarrow a^2 = -2(b^2 + c^2) \quad (3.16)$$

En el resto del trabajo aparecerán con frecuencia expresiones como: "campos algebraicamente especiales" o "campos degenerados algebraicamente". Cuando usemos dichas expresiones nos estamos refiriendo a aquellos campos Yang-Mills tales que a^2 es igual que $b^2 + c^2$ salvo un factor multiplicativo $k = 1$ ó $k = -2$. En otras palabras, nos estaremos refiriendo a campos del tipo X_0 ó $III_p, IV_p, 0_p$ (En adelante cuando aparezca el símbolo X_0 nos estaremos refiriendo genericamente a todos los tipos algebraicos con subíndice 0). Y es precisamente ésta

la ligadura adicional:

$$a^2 = k(b^2 + c^2), \text{ con } k = 1 \text{ o } -2 \quad (3.17)$$

(algebraica en los campos y diferencial de primer orden en los potenciales) que impondremos al intentar resolver las ecuaciones de evolución, tanto en el caso plano como Einstein - Yang-Mills, y que nos permitirá resolver completamente el sistema resultante. En los capítulos 5 y 6 no limitaremos el valor de k a 1 y -2 (impondremos únicamente que sea constante), con lo que en principio, también estaremos obteniendo algunas soluciones no algebraicamente especiales. Todo lo desarrollado hasta ahora lo ha sido para un espacio minkowskiano, pero podemos generalizar los resultados a un espacio euclidiano modificando la métrica en las componentes de la tétrada de forma que sea $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$.

La ecuación (3.17) es una igualdad entre expresiones complejas, desarrollando en componentes sus partes real e imaginaria se obtiene:

$$\frac{F_{tr} F_{\theta\phi}}{s \sin\theta} = k[\mathbf{E}_{t\theta} \cdot \mathbf{E}_{r\theta}]^3 \quad (3.18)$$

$$(r^2 F_{tr}^2 \epsilon^{2r} \pm \frac{F_{\theta\phi}^2 \epsilon^{2\theta}}{r^2 s \sin^2\theta}) = k(F_{t\theta}^2 \epsilon^{2r+2\theta} \pm F_{r\theta}^2) \quad (3.19)$$

(el signo superior se corresponde al caso euclidiano, y el inferior al caso minkowskiano). En espacio plano, y para $k = 1$ es trivial de comprobar que se reobtienen las expresiones (2.50-2.51), que obtuvimos anteriormente como condición necesaria para que un campo Yang-Mills tenga simetría hiperesférica (en cuatro dimensiones). Es decir, en espacio plano toda solución con simetría "hiperesférica" (entendiendo como tal $SO(4)$ en el caso euclideo y $SO(3,1)$ en el minkowski) distinta de los

campos gauge puro, debe pertenecer a uno de los tipos algebraicos III_p , IV_p , o 0_p . Sin embargo ambas condiciones (necesaria de simetría y de degeneración algebraica) se desacoplan fuera de espacio plano. Este hecho impide que se puedan obtener en nuestro esquema soluciones tales como los wormholes que aparecen en [38] y [39]. (Para obtenerlos se usa explícitamente que poseen simetría hiperesférica).

Capítulo 4

SOLUCIONES EXACTAS EN ESPACIO PLANO

Antes de entrar en la búsqueda de soluciones en espacio curvo, hemos preferido plantearnos el mismo problema (búsqueda de soluciones con simetría esférica y algebraicamente especiales) en espacio plano. Con ello podremos comprobar si la ligadura algebraica que imponemos, es lo suficiente fuerte como para simplificar las ecuaciones a resolver hasta permitirnos encontrar sus soluciones. En efecto, como veremos a lo largo de este capítulo, algunas de las soluciones, en espacio plano, que aparecen en la literatura son algebraicamente especiales y deben de poder ser obtenidas en nuestro esquema.

Además algunas de las ecuaciones que tendremos que resolver en este capítulo volverán a aparecer a lo largo de los siguientes.

El realizar este estudio en un caso en el que ya conocemos algunas de sus soluciones, nos permitirá identificar técnicas y elecciones de variables, que más adelante nos serán de utilidad. En efecto, las coordenadas en que el problema es más sencillo aparecerán aquí y ya

no nos abandonarán en el resto del trabajo.

Todo ello viene acompañado por la obtención de una generalización de las soluciones ya conocidas en términos de una constante de integración. Para determinados valores de esta constante, se encuentran nuevas soluciones (al menos entre la bibliografía manejada por el autor). Por todo ello creemos que queda justificado el dedicar un capítulo a soluciones algebraicamente especiales en espacios planos.

4.1 Espacio Minkowski

En el segundo capítulo obtuvimos un conjunto de condiciones necesarias para que un campo Yang-Mills esférico posea alguna simetría adicional. Como vimos, algunas de estas ligaduras algebraicas (ec. 2.28) coincidían con parte (la parte imaginaria) de la expresión que nos caracterizaba parcialmente la clasificación de Carmeli (ec. 3.18). Más aún, comprobamos que la condición necesaria para poseer simetría hiperesférica coincidía exactamente con la condición para que el espinor Yang-Mills posea un único autovalor. Es decir, en principio, podemos suponer que aquellas soluciones tales que poseen un grupo de simetría mayor que $SO(3)$ son buenas candidatas a pertenecer a lo que hemos denominado tipos algebraicamente especiales. Esta suposición, se comprueba como cierta en las soluciones de Luscher [16], De Alfaro y col. [8], y Cerveró y col. [10] en el gauge en que las presenta Actor [3].

En un gauge en que $\varphi_2 = 0$, nuestro sistema de ecuaciones de evolución Yang-Mills en espacio plano se pueden escribir:

$$(r^2 F_{tr})_{,r} = -2A_t \varphi^2 \quad (4.1)$$

$$(r^2 F_{tr})_{,t} = -2A_r \varphi^2 \quad (4.2)$$

$$(\varphi_{,t})_{,t} - (\varphi_{,r})_{,r} - \varphi A_t^2 + \varphi A_r^2 = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.3)$$

$$-(\varphi A_t)_{,t} + (\varphi A_r)_{,r} - \varphi_{,t} A_t^2 + \varphi_{,r} A_r^2 = 0 \quad (4.4)$$

La ligadura algebraica (ecuación (3.17)) se escribe

$$F_{tr}(1 - \varphi^2) = k(A_t \varphi \varphi_{,r} - A_r \varphi \varphi_{,t}) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} (rF_{tr})^2 - \left(\frac{1 - \varphi^2}{r}\right)^2 = \\ k((\varphi_{,t}^2 + A_t^2 \varphi^2) - (\varphi_{,r}^2 - A_r^2 \varphi^2)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

(donde $k = 1$ ó -2) Del sistema de ecuaciones (4.1-4.6) se pueden integrar 4.1, 4.2 y 4.4 con:

$$A_t = \frac{\partial_r \phi}{\varphi^2}; \quad A_r = \frac{\partial_t \phi}{\varphi^2}; \quad \text{y } F_{tr} = \frac{1}{r^2}(-c - 2\phi)$$

donde c es una constante de integración. Las ecuaciones que quedan por resolver son:

$$\varphi_{,tt} - \varphi_{,rr} - \frac{\phi_{,r}^2}{\varphi^3} + \frac{\phi_{,t}^2}{\varphi^3} = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.7)$$

$$\phi_{,tt} - \phi_{,rr} + \frac{2\varphi_r \phi_{,r}}{\varphi} - \frac{2\varphi_t \phi_{,t}}{\varphi} = \frac{\varphi^2(-c - 2\phi)}{r^2} \quad (4.8)$$

$$-\varphi(c + 2\phi)(1 - \varphi^2) = kr^2(-\varphi_{,t} \phi_{,t} + \varphi_{,r} \phi_{,r}) \quad (4.9)$$

$$\varphi^2((c + 2\phi)^2 - (1 - \varphi^2)^2) = kr^2(\phi_{,r}^2 - \phi_{,t}^2 - \varphi^2 \varphi_{,r}^2 + \varphi^2 \varphi_{,t}^2) \quad (4.10)$$

En este capítulo solo vamos a interesarnos en lo que nosotros hemos llamado Ansatz de Bartnik-McKinnon, $A_t = A_r = 0$. Las ecuaciones a resolver son:

$$\varphi_{,tt} - \varphi_{,rr} = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.11)$$

$$(1 - \varphi^2)^2 = kr^2(\varphi_{,r}^2 - \varphi_{,t}^2) \quad (4.12)$$

Es conveniente definir el siguiente cambio de variables:

$$u = r + t \text{ y } v = r - t$$

con lo que el sistema (4.11/12) queda

$$-\varphi_{,uv} = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{(u + v)^2} \quad (4.13)$$

$$k\varphi_{,u}\varphi_{,v} = \frac{1}{(u + v)^2}(1 - \varphi^2)^2 \quad (4.14)$$

El cociente de estas dos expresiones se puede integrar completamente, distinguiéndose dos casos:

$$k = 1 \rightarrow \varphi = \text{sen}(U(u) + V(v)) \quad (4.15)$$

$$k = -2 \rightarrow \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 = U(u) + V(v) \quad (4.16)$$

Y aún nos queda por resolver (4.14). Analicemos estos casos por separado

4.1.1 $k=1$, Tipos algebraicos $III_p, IV_p, 0_p$

En términos de las funciones U y V (4.14) se escribe:

$$U_{,u}V_{,v}(u + v)^2 = \cos^2(U + V)$$

Esta ecuación se resuelve completamente en el apéndice 1. Presenta básicamente dos tipos de soluciones. El primero está dado por:

$$U = \frac{1}{2i} \ln|u| + cte_1$$

$$V = -\frac{1}{2i} \ln|v| - cte_2$$

Cuando $cte_1 + cte_2 = 0$ y $\text{signo}(u) = \text{signo}(v)$ (mirar apéndice) o en otras palabras $r > t$, entonces el campo φ no es real. Sin embargo, si $cte_1 + cte_2 = \frac{\pi}{2}$, y $t > r$, sí que tiene sentido la solución obtenida, y el campo φ es

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{u - v}{\sqrt{-uv}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

El segundo tipo de soluciones es:

$$U = \text{arctg}(\beta u + \kappa) + cte_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$V = \text{arctg}(\beta v - \kappa) - cte_1$$

Entonces el campo Yang-Mills es real y vale:

$$\varphi = \pm \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}} \quad (4.17)$$

donde $x = \beta u + \kappa$, e $y = \beta v - \kappa$ (β y κ son constantes de integración, obsérvese que esta última se puede absorber redefiniendo el origen de tiempos). La solución que se conoce, en este ansatz, en la bibliografía consultada (vease ref. [3]) es la De Alfaro, Fubini y Furlan. Se obtiene cuando la constante $\beta = 1$. Entonces la función φ tiene sentido en todo espacio minkowski. Si $\beta \neq 1$ y real, se obtiene básicamente la misma solución salvo un cambio de escala de las coordenadas empleadas. Sin

embargo, cuando es imaginaria, la solución tiene sentido tan solo en determinadas regiones, delimitadas por

$$\begin{aligned} \text{region "interior"} &, |\beta u + \kappa| < 1 \text{ y } |\beta v - \kappa| < 1 \\ \text{region "exterior"} &, |\beta u + \kappa| > 1 \text{ y } |\beta v - \kappa| > 1. \end{aligned}$$

Fuera de las cuales es imaginaria.

4.1.2 $k=-2$, Tipos algebraicos $I_0, II_0, D_0, III_0, IV_0, 0_0$

Dividiendo las ecuaciones (4.13) y (4.14) se llega a:

$$\begin{aligned} \varphi_{,u} &= \bar{U}(1 - \varphi^2)^{-1} \\ \varphi_{,v} &= \bar{V}(1 - \varphi^2)^{-1} \end{aligned}$$

Al integrar estas expresiones se obtiene la ligadura (4.16) (donde $U_{,u} = \bar{U}$ y $V_{,v} = \bar{V}$). A diferencia de $k = 1$, ahora no podemos despejar φ y los cálculos se complican. En cualquier caso, podemos entrar con los resultados anteriores en (4.14) obteniendo

$$-2\bar{U}\bar{V}(u+v)^2 = (1 - \varphi^2)^4 \quad (4.18)$$

Calculando la derivada logarítmica con respecto a u y v , y restando se llega a

$$\frac{\bar{U}_{,u}}{\bar{U}^2} + \frac{2}{\bar{U}(u+v)} = \frac{\bar{V}_{,v}}{\bar{V}^2} + \frac{2}{\bar{V}(u+v)}$$

que se integran completamente con:

$$\bar{U} = \frac{1}{k_1 u^2 + k_2 u + k_3}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{k_1 v^2 - k_2 v + k_3}$$

Entonces, podemos despejar φ de (4.18),

$$\varphi = \sqrt{1 - 4 \sqrt{-2(u+v)^2 \bar{U} \bar{V}}}$$

derivando respecto a u y despejando en $\varphi_{,u} = \bar{U}(1 - \varphi^2)^{-1}$ se llega a la expresión siguiente:

$$2\bar{V} - (u+v)\bar{U}\bar{V}(2k_1 u + k_2) = 4\sqrt{1 - 4 \sqrt{-2(u+v)^2 \bar{U} \bar{V}}}\sqrt{-2\bar{U}\bar{V}}$$

que en $u+v=0$, y consecuentemente $\bar{U} = \bar{V}$, no se puede cumplir para ningún k_i

$$2\bar{U} = 4\bar{U}\sqrt{-2}$$

Por tanto, concluimos que no existen soluciones (no triviales) Yang-Mills en espacio plano de tipos algebraicos X_0 y con simetría esférica.

4.2 Espacio Euclideo

Algunas de las soluciones Yang-Mills que más desarrollos han motivado con posterioridad a su aparición surgieron en el caso euclideo. Entre ellas destacan las soluciones "instantónicas" y las soluciones "merónicas".

Las primeras caracterizadas por ser regulares y tener el campo Yang-Mills concentrado en una determinada región de la variedad euclídea, de forma que la "carga topológica" (es decir la integral en todo R^4 de la densidad $\mathbf{F}_{\mu\nu} * \mathbf{F}^{\mu\nu}$) es finita y cuantizada. Tras la aparición de la solución 1-instantónica por Belavin y col. [17], han ido obteniéndose las soluciones generales n-instantónicas por diferentes autores. Las construcciones más famosas son las debidas a Witten [7], 't Hooft y Atiyah [3]. En todos los casos estas ecuaciones se obtienen al resolver la condición de autodualidad. Como dijimos en el capítulo 2., la solución 1-instantónica a la Witten posee simetría $SO(4)$, y como dijimos en el tercero, la condición necesaria de simetría coincide con la condición de degeneración algebraica con $k = 1$. Por tanto la solución 1-instantónica a la Witten pertenece al grupo de soluciones que nos hemos planteado encontrar.

Las otras soluciones a que nos hemos referido anteriormente son las "merónicas", en este caso caracterizadas por poseer concentraciones puntuales, (donde la solución es singular) de carga topológica semicuantizada. Se conocen explícitamente las soluciones tipo merón, merón-merón y merón-antimerón, así como resultados que demuestran la existencia de soluciones tipo n-merón [3]. Hemos comprobado que, cuando las concentraciones de carga topológica están situadas a lo largo del eje de tiempo euclídeo (y la solución tiene simetría esférica) las soluciones merónicas que se obtiene son también algebraicamente especiales (con $k=1$). Según se puede ver en el trabajo de Actor, es posible conseguir, mediante una transformación gauge singular (en la que se pierde el valor de la carga topológica) transformar estas soluciones de forma que pertenezcan al ansatz de B.M. En lo que sigue

vamos a obtener la solución general al problema de simetría esférica con degeneración algebraica y en este mismo ansatz, y por tanto obtendremos un conjunto de soluciones que incluyen a las soluciones tipo merón, merón-merón y merón-antimerón, en este Ansatz peculiar (a la "Actor").

En espacio euclideo el sistema de ecuaciones es:

$$(r^2 F_{tr})_{,r} = -2A_t \varphi^2 \quad (4.19)$$

$$(r^2 F_{tr})_{,t} = 2A_r \varphi^2 \quad (4.20)$$

$$-(\varphi_{,t})_{,t} - (\varphi_{,r})_{,r} + \varphi A_t^2 + \varphi A_r^2 = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.21)$$

$$(\varphi A_t)_{,t} + (\varphi A_r)_{,r} + \varphi_{,t} A_t^2 + \varphi_{,r} A_r^2 = 0 \quad (4.22)$$

La ligadura algebraica se escribe

$$F_{tr}(1 - \varphi^2) = k(A_t \varphi \varphi_{,r} - A_r \varphi \varphi_{,t}) \quad (4.23)$$

$$(r F_{tr})^2 + \left(\frac{1 - \varphi^2}{r}\right)^2 = k((\varphi_{,t}^2 + A_t^2 \varphi^2) + (\varphi_{,r}^2 + A_r^2 \varphi^2)) \quad (4.24)$$

Al igual que en el caso minkowski, el sistema de ecuaciones se puede resolver parcialmente con:

$$A_t = \frac{\phi_{,r}}{\varphi^2}; \quad A_r = \frac{-\phi_{,t}}{\varphi^2}; \quad F_{tr} = r^2(c - 2\phi)$$

con lo que el sistema final a resolver es

$$-\varphi_{,tt} - \varphi_{,rr} + \frac{\phi_{,r}^2}{\varphi^3} + \frac{\phi_{,t}^2}{\varphi^3} = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.25)$$

$$-\phi_{,tt} - \phi_{,rr} + \frac{2\varphi_r \phi_{,r}}{\varphi} + \frac{2\varphi_t \phi_{,t}}{\varphi} = \frac{\varphi^2(c - 2\phi)}{r^2} \quad (4.26)$$

$$\varphi(c - 2\phi)(1 - \varphi^2) = kr^2(\varphi_{,t} \phi_{,t} + \varphi_{,r} \phi_{,r}) \quad (4.27)$$

$$\varphi^2((c - 2\phi)^2 + (1 - \varphi^2)^2) = kr^2(\phi_{,r}^2 + \phi_{,t}^2 + \varphi^2 \varphi_{,r}^2 + \varphi^2 \varphi_{,t}^2) \quad (4.28)$$

Y en el ansatz de B.M.

$$-\varphi_{,tt} - \frac{\varphi(1-\varphi^2)}{r^2} = \varphi_{,rr} \quad (4.29)$$

$$(1-\varphi^2)^2 = kr^2(\varphi_{,r}^2 + \varphi_{,t}^2) \quad (4.30)$$

Ahora las variables convenientes son:

$$z = r + it \quad y \quad \bar{z} = r - it$$

en las que el sistema se escribe

$$-\varphi_{,z\bar{z}} = \frac{\varphi(1-\varphi^2)}{(z+\bar{z})^2} \quad (4.31)$$

$$k\varphi_{,z}\varphi_{,\bar{z}} = \frac{1}{(z+\bar{z})^2}(1-\varphi^2)^2 \quad (4.32)$$

El cociente de estas dos expresiones se puede integrar completamente, (en esta ocasión solo existe un caso, pues $k = -2$ no es posible)

$$k = 1 \rightarrow \varphi = \text{sen}(Z(z) + W(\bar{z})) \quad (4.33)$$

más la ligadura:

$$Z_{,z}W_{,\bar{z}}(z+\bar{z})^2 = \cos^2(Z+W) \quad (4.34)$$

Esta ecuación está resuelta en general en el apéndice 1. Podemos distinguir básicamente dos tipos de soluciones:

4.2.1 Merón

La primera de ellas, "generadora del merón" en la notación del apéndice, es:

$$U = \frac{1}{2i} \ln z + ct e_1$$

$$W = -\frac{1}{2i} \ln \bar{z} - ct e_1$$

que desarrollando la expresión (4.33) nos da para la función φ

$$\varphi = \pm \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}} \quad (4.35)$$

Que es exactamente la expresión que aparece en [3] para el merón en el ansatz de B.M.

4.2.2 Merón-Merón, Merón-Antimerón y nuevas soluciones

La otra solución general de la ecuación (4.34), "generadora del multi-merón" en el apéndice, es:

$$Z = \text{arctg}(\beta z + \kappa) + ct e_2 - \frac{\pi}{2}$$

$$W = \text{arctg}(\beta \bar{z} - \kappa) - ct e_2$$

Que desarrollando la expresión (4.33), nos da

$$\varphi = \pm \frac{1 - (\beta z + \kappa)(\beta \bar{z} - \kappa)}{\sqrt{(1 + (\beta z + \kappa)^2)(1 + (\beta \bar{z} - \kappa)^2)}} \quad (4.36)$$

Donde β y κ son constantes indeterminadas en principio. Si β es real y κ es imaginaria, entonces reobtenemos las soluciones merón-merón y merón-antimerón en el gauge de B.M. Concretando un poco más,

$$\beta = \frac{-2}{(a - b)}$$

$$\kappa = i \frac{2(a+b)}{(a-b)}$$

representa el merón-merón que aparece en la notación de Actor con singularidades en $r = 0$ y $t = a$ y $t = b$. Y

$$\beta = \frac{-1}{a}$$

$$\kappa = 0$$

Representa un merón-autimerón, con singularidades en $t = a$ y $t = -a$.

Sin embargo, cuando β es imaginario, y κ es tal que la expresión para φ es real (cuando κ es real, y por lo tanto, puede ser absorbido redefiniendo el origen de tiempos) se trata de una solución que no pertenece a ninguno de los tipos "merónicos".

Si $\beta = i$, y redefiniendo el origen de tiempos de forma que $\kappa = 0$, entonces la solución encontrada es

$$\varphi = \pm \frac{1 + z\bar{z}}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \bar{z}^2)}} \quad (4.37)$$

que presenta una singularidad en $t = 0$ y $r = 1$. No se ha encontrado, en la bibliografía consultada, referencias a esta solución.

4.3 Caso estático. Euclideo y Minkowski.

En el capítulo 2. vimos como el caso estático se distingue del resto de simetrías espacio-temporales. En efecto, repasando las considera-

ciones que hicimos al plantearnos la existencia de simetrías adicionales a la simetría esférica, vimos que si la solución es estática, no debe cumplir ninguna condición algebraica sobre las componentes del campo Yang-Mills. En este capítulo, donde hemos resuelto explícitamente las ecuaciones de evolución en un ansatz determinado y con una ligadura de degeneración algebraica adicional, vamos a ver que también el caso estático se diferencia del caso general, y que no es posible encontrar soluciones estáticas y que pertenezcan a uno de los tipos especiales (excepto las triviales).

Las ecuaciones a resolver son las mismas en espacios euclideo y minkowski:

$$-\varphi_{,rr} = \frac{\varphi(1 - \varphi^2)}{r^2} \quad (4.38)$$

$$(1 - \varphi^2)^2 = kr^2 \varphi_r^2 \quad (4.39)$$

Derivando en la segunda ecuación, y haciendo uso de la primera se llega a que $\varphi^2 = 1 - cr^2$, entrando con este resultado en la segunda se llega fácilmente a que $c = 0$, y por tanto, solo persiste la solución trivial $\varphi = 1$, que da soluciones gauge puras.

Capítulo 5

SOLUCIONES EXACTAS CON METRICA LORENTZIANA

En 1.988 apareció uno de los resultados más inf luyentes en cuanto a soluciones clásicas se refiere. Se trata del artículo de Bartnik y McKinnon [28] en el que se obtienen fuertes evidencias numéricas de la existencia de un conjunto de soluciones estáticas, con simetría esférica y sin singularidades, para un sistema de ecuaciones Einstein - Yang-Mills. Su importancia radica en primer lugar en que descarta la existencia de un teorema Yang-Mills análogo a otro que existe en otras situaciones "semejantes" [28]. En efecto, está demostrado que no existen soluciones con simetría esférica, estáticas y regulares tanto en el caso Yang-Mills en vacío, como el caso gravitatorio en ausencia de fuentes, como para Einstein-Maxwell, por lo que parecía natural pensar en la existencia de un teorema análogo para Einstein-Yang-Mills. En segundo lugar, la solución presenta un comportamiento (numérico), que de alguna forma hace pensar en una solución tipo partícula. Presenta, a grandes rasgos, tres regiones con comportamientos esencialmente distintos, y dos

regiones de empalme. La región interior está caracterizada por unos intensos campos Yang-Mills, la primera región de empalme caracterizada por rápidas fluctuaciones del campo y de los coeficientes de la métrica. Estas fluctuaciones decaen rápidamente en la región intermedia, donde el campo Yang-Mills tiene un comportamiento semejante al de un monopolo magnético, con una métrica muy semejante a la de Reissner-Nordstrom. En la segunda zona de empalme la carga magnética decae a cero hasta llegarse finalmente a la región exterior, donde el campo Yang-Mills ha desaparecido y la métrica se aproxima a la de Schwarzschild. A raíz de este trabajo han ido apareciendo otros tales como el de Bizon [29] donde, partiendo de las ecuaciones del trabajo anterior, se buscan soluciones tipo agujero negro, es decir, con un horizonte de sucesos. Straumann y Zhou [32] estudian la no estabilidad de la solución de B.M., limitándose de esta forma la posibilidad de ser interpretada como partícula. Ershov y Gal'tsov [33] demuestran la no existencia de soluciones con el buen comportamiento de la solución de B.M. y con cargas eléctrica y magnética simultáneamente. Finalmente Bizon y Popp [34], citan una referencia ([37], a la que el autor no ha tenido acceso) de la que mencionan una prueba rigurosa de existencia de la solución de B.M. de menor energía.

Mentiríamos a la verdad si no reconociésemos que uno de los objetivos originales de este trabajo, fue intentar obtener de forma explícita esta solución (recordemos que solo es conocida por simulación numérica). Adelantando conclusiones, veremos que en nuestro esquema no es posible encontrar soluciones estáticas (como se podía intuir de los resultados del último punto del capítulo anterior) y, por tanto, no nos es posible encontrar las soluciones de B.M. y Bizon. Sin embargo,

hemos sido capaces, como consecuencia de la sencillez que presenta la clasificación de Carmeli en campos con simetría esférica, de, al menos, caracterizarlas algebraicamente.

5.1 Planteamiento del problema

Nuestro objetivo será, por tanto, resolver las ecuaciones de evolución acopladas Einstein - Yang-Mills, con simetría esférica, y ligadas algebraicamente por la relación (3.18/19).

Con una métrica digonal parametrizada por

$$ds^2 = -e^{-2\tau} dt^2 + e^{2\rho} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.1)$$

donde τ y ρ son funciones de las coordenadas (t, r) . Las ecuaciones de evolución Yang-Mills, en el caso de campos con simetría esférica y en el gauge en que $\varphi_2 = 0$ son:

$$(r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr})_{,r} = -2e^{\tau+\rho} A_t \varphi^2 \quad (5.2)$$

$$(r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr})_{,t} = -2e^{-\tau-\rho} A_r \varphi^2 \quad (5.3)$$

$$(e^{\tau+\rho} \varphi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho} \varphi_{,r})_{,r} - e^{\tau+\rho} \varphi A_t^2 + e^{-\tau-\rho} \varphi A_r^2 = e^{\rho-\tau} \frac{\varphi(1-\varphi^2)}{r^2} \quad (5.4)$$

$$-(e^{\tau+\rho} \varphi A_t)_{,t} + (e^{-\tau-\rho} \varphi A_r)_{,r} - e^{\tau+\rho} \varphi_{,t} A_t + e^{-\tau-\rho} \varphi_{,r} A_r = 0 \quad (5.5)$$

La ligadura algebraica se escribe

$$F_{tr}(1-\varphi^2) = k(A_t \varphi \varphi_{,r} - A_r \varphi \varphi_{,t}) \quad (5.6)$$

$$\frac{(re^\tau F_{tr})^2 - \left(\frac{e^\rho(1-\varphi^2)}{r}\right)^2}{k(e^{2\tau+2\rho}(\varphi_{,t}^2 + A_t^2\varphi^2) - (\varphi_{,r}^2 + A_r^2\varphi^2))} \quad (5.7)$$

Finalmente, las ecuaciones de Einstein en el caso en que el tensor energía-momento proviene de un campo Yang-Mills se pueden escribir¹

$$R_{\mu\nu} = 2K(F_{\mu\lambda}^i F_\nu^{i\lambda} - \frac{1}{4}(F_{\lambda\kappa}^i F^{i\lambda\kappa})g_{\mu\nu})$$

donde K es la constante acoplo entre los efectos gravitacionales y el campo Yang-Mills (las ecuaciones de B.M se plantean en un sistema de unidades en que $K = 1$). Con nuestra parametrización:

$$\rho_{,t} = K\frac{2}{r}(\varphi_{,t}\varphi_{,r} + A_t A_r \varphi^2) \quad (5.8)$$

$$-\frac{1}{r}\tau_{,r} - \frac{1}{r}\rho_{,r} + \frac{1-e^{2\rho}}{r^2} = K(-F_{tr}^2 e^{2\tau} - \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4}) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} + \frac{2}{r}\tau_{,r} + e^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) = \\ K(-F_{tr}^2 e^{2\tau} - \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4}) \\ - \frac{2}{r^2}e^{2\tau+2\rho}(\varphi_{,t}^2 + A_t^2\varphi^2) - \frac{2}{r^2}(\varphi_{,r}^2 + A_r^2\varphi^2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} + \frac{2}{r}\rho_{,r} + e^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) = \\ K(-F_{tr}^2 e^{2\tau} - \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4}) \\ + \frac{2}{r^2}e^{2\tau+2\rho}(\varphi_{,t}^2 + A_t^2\varphi^2) + \frac{2}{r^2}(\varphi_{,r}^2 + A_r^2\varphi^2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

¹Para los tensores de Riemann, el tensor de Ricci y la signatura de métrica hemos adoptado el convenio de signos de [26], con

$$G_{\mu\nu} = 8\pi K T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\lambda}^i F_\nu^{i\lambda} - \frac{1}{4}(F_{\lambda\kappa}^i F^{i\lambda\kappa})g_{\mu\nu})$$

En este punto podemos observar ya una de las características destacables de este sistema de ecuaciones y que fue una de las razones que nos motivó originalmente. La forma en la que aparecen las componentes del campo Yang-Mills en el término de la derecha de las ecuaciones de Einstein es cuadrática, que es el mismo orden en que aparecen en la ligadura de degeneración algebraica, más aún, si nos olvidamos por un momento de los signos que aparecen en ambas expresiones, resulta que son idénticas. Esta observación nos hace suponer que si imponemos la ligadura algebraica (de la misma forma que es habitual en la literatura imponer Ansatz sobre la forma de los campos) como una condición añadida a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales Einstein - Yang-Mills, podremos simplificar lo suficiente las ecuaciones como para resolverlas completamente. En lo que sigue en este capítulo, resolveremos efectivamente ese sistema, y, por tanto, obtendremos la solución general Einstein-Yang-Mills con simetría esférica y algebraicamente especial.

5.2 Simplificación de las ecuaciones Yang-Mills y algebraicas

En este apartado vamos a resolver hasta donde podamos las ecuaciones de evolución Yang-Mills, haciendo uso para ello de la simplificación que aparece al haber seleccionado un gauge concreto. A continuación, haciendo uso de la condición de degeneración algebraica, pondremos de forma especialmente compacta el conjunto de ecuaciones "puramente

Yang-Mills".

La ecuación (5.5) se resuelve con

$$A_t = \frac{\phi_{,r}}{e^{\tau+\rho}\varphi^2} ; A_r = \frac{\phi_{,t}e^{\tau+\rho}}{\varphi^2} \quad (5.12)$$

(No confundir la función ϕ con la coordenada angular de mismo nombre). Con lo que las ecuaciones (5.2) y (5.3) se resuelven trivialmente con

$$r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr} + 2\phi = -c = \text{constante} \quad (5.13)$$

Obsérvese, que se trata de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Su estructura es muy semejante a la ecuación (5.4), por lo que finalmente tenemos un sistema de dos ecuaciones bastante semejantes en su forma.

$$(e^{\tau+\rho}\varphi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho}\varphi_{,r})_{,r} - \frac{\phi_{,r}^2 e^{-\tau-\rho}}{\varphi^3} + \frac{\phi_{,t}^2 e^{\tau+\rho}}{\varphi^3} = \frac{e^{\rho-\tau}\varphi(1-\varphi^2)}{r^2} \quad (5.14)$$

$$(e^{\tau+\rho}\phi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho}\phi_{,r})_{,r} + \frac{2\varphi_{,r}\phi_{,r}e^{-\tau-\rho}}{\varphi} - \frac{2\varphi_{,t}\phi_{,t}e^{\tau+\rho}}{\varphi} = \frac{e^{\rho-\tau}\varphi^2(-c-2\phi)}{r^2} \quad (5.15)$$

Quedando la condición algebraica:

$$k\left(\varphi_{,r}\phi_{,r}\frac{e^{-\tau-\rho}}{\varphi} - \varphi_{,t}\phi_{,t}\frac{e^{\tau+\rho}}{\varphi}\right) = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2}(-c-2\phi)(1-\varphi^2) \quad (5.16)$$

$$k\left(\varphi_{,t}^2 e^{2\rho+2\tau} - \varphi_{,r}^2 + \frac{1}{\varphi^2}(\phi_{,r}^2 - \phi_{,t}^2 e^{2\rho+2\tau})\right) = \frac{e^{2\rho}}{r^2}(-c-2\phi)^2 - \frac{e^{2\rho}}{r^2}(1-\varphi^2)^2 \quad (5.17)$$

Definimos $X = (c + 2\phi)$, $Y = (1 - \varphi^2)$, y $Z = X - iY$. Haciendo un poco de álgebra con las ecuaciones Yang-Mills y algebraicas se obtienen las siguientes expresiones (evolución y algebraica) para la función Z .

$$-(e^{\tau+\rho} Z_{,t})_{,t} + (e^{-\tau-\rho} Z_{,r})_{,r} = \frac{2e^{\rho-\tau}}{k^2} (-iZ^2 + kZ - kYZ) \quad (5.18)$$

$$-e^{\tau+\rho} Z_{,t}^2 + e^{-\tau-\rho} Z_{,r}^2 = \frac{4e^{\rho-\tau}}{k^2} (1 - Y)Z^2 \quad (5.19)$$

5.3 Soluciones estáticas

Este caso se obtiene sin más que imponer que las funciones que aparecen en el sistema (5.2/11) no dependen de la coordenada temporal. De las ecuaciones de evolución Yang-Mills se llega a que o bien $A_r = 0$, o $\varphi = 0$. Analizamos por separado ambas situaciones.

(i) $A_r = 0$

Entonces el conjunto de ecuaciones Yang-Mills y de ligadura algebraica se pueden escribir

$$-(e^{-\tau-\rho} \varphi \varphi_{,r})_{,r} = e^{\rho-\tau} \frac{1}{r^2} (\varphi^2 (1 - \varphi^2) + \frac{-(1 - \varphi^2)^2 + (c + 2\phi)^2}{k}) \quad (5.20)$$

$$-(e^{-\tau-\rho} \phi_{,r})_{,r} = e^{\rho-\tau} \frac{1}{r^2} (-\varphi^2 + \frac{2}{k} (1 - \varphi^2)(c + 2\phi)) \quad (5.21)$$

$$e^{2\rho} \frac{(c + 2\phi)^2 - (1 - \varphi^2)^2}{r^2} = k(-\varphi_r^2 + \frac{\phi_{,r}^2}{\varphi^2}) \quad (5.22)$$

$$\frac{e^{2\rho} (c + 2\phi)(1 - \varphi^2)}{r^2} = k(-\varphi_r \frac{\phi_{,r}}{\varphi}) \quad (5.23)$$

Tratando el sistema de ecuaciones (5.22) y (5.23) como ecuaciones algebraicas, las únicas soluciones posibles son:

$$\begin{aligned} k > 0 &\rightarrow e^{2\rho}(1 - \varphi^2)^2 = kr^2\varphi_r^2 \\ &\rightarrow e^\rho(c + 2\phi) = -r\sqrt{k}\frac{\phi_{,r}}{\varphi} \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} k < 0 &\rightarrow e^{2\rho}(1 - \varphi^2)^2 = -kr^2\frac{\phi_{,r}^2}{\varphi^2} \\ &\rightarrow e^\rho(c + 2\phi) = r\sqrt{-k}\varphi_r \end{aligned}$$

Sustituyendo en ambos casos en las ecuaciones de evolución (5.20) y (5.21) se llega a que no existen soluciones distintas de las triviales (gauge puros).

(ii) $\varphi = 0$

Si exigimos degeneración algebraica no existen soluciones. Sin embargo, en este caso el sistema es lo suficientemente sencillo como para poderse resolver completamente sin condiciones adicionales. Las únicas componentes del campo Yang-Mills distintas de cero son $F_{tr} = (0, 0, q/r^2)$ y $F_{\hat{t}\hat{\phi}} = (0, 0, 1)\text{sen}\theta$. Por tanto reobtendremos los resultados de Reissner-Nordstrom con carga eléctrica q y carga magnética l .

$$g_{rr} = -\frac{1}{g_{tt}} = e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{1+q^2}{r^2}}$$

5.4 Condición de compatibilidad

Podemos plantearnos la condición de integrabilidad del sistema 5.18 y 5.19. En efecto, tenemos un sistema donde aparecen dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo y de primer orden respectivamente, y en principio es de esperar que se puedan obtener condiciones de integrabilidad de dicho sistema. Despejamos $Z_{,t}e^{\tau+\rho}$ de (5.19) y sustituimos en (5.18), y tras hacer un poco de álgebra se llega a

$$\Psi_{,r} + e^{\tau+\rho}\rho_{,t} = -\frac{\epsilon^{\rho+\tau}}{2(1-Y)}\left[Y_{,t} + \frac{Z_{,t}}{Z^2}(-iZ^2 - 2Z(1-Y) + kZ(1-Y))\right] \quad (5.24)$$

Repetimos los pasos anteriores con $Z_{,r}e^{-\tau-\rho}$

$$\Psi_{,t} + e^{-\tau-\rho}\left(\tau_{,r} + \frac{1}{r}\right) = -\frac{\epsilon^{-\rho-\tau}}{2(1-Y)}\left[Y_{,r} + \frac{Z_{,r}}{Z^2}(-iZ^2 - 2Z(1-Y) + kZ(1-Y))\right] \quad (5.25)$$

donde hemos definido U y Ψ tal que

$$Uch\Psi = e^{-\rho}Z_{,r}$$

y

$$Ush\Psi = e^{\tau}Z_{,t}$$

Antes de proseguir puede merecer la pena realizar un pequeño repaso visual de lo que nos dicen estas expresiones recién obtenidas. En efecto, en la primera de ellas aparece la expresión $e^{\tau+\rho}\rho_{,t}$ mientras que

en la segunda tenemos $e^{-\tau-\rho}(\tau_{,r} + \frac{1}{r})$. Si imponemos la condición de integrabilidad entre ambas expresiones para la función Ψ aparecerán términos de segundo grado en las derivadas de las funciones τ y ρ , y términos cuadráticos en las primeras derivadas, términos que son exactamente de la misma forma (incluso en los signos relativos) que aquellos que aparecen en las ecuaciones de Einstein (vease el sistema (5.8 y 5.11) y por tanto, habremos conseguido una expresión que (mediante un álgebra elemental entre las ecuaciones) nos permitira simplificar el problema inicial.

Por tanto, imponiendo la integrabilidad de Ψ , y haciendo uso de las ecuaciones (5.2-5.7) se llega a una expresión compleja, cuyas partes real e imaginaria se deben anular por separado, distinguiendose dos casos, o $X = 0$. o

$$k = 1 \quad (5.26)$$

$$(e^{\tau+\rho}\rho_{,t})_{,t} + (e^{-\tau-\rho}(\tau_{,r} + \frac{1}{r}))_{,r} = -\frac{e^{\rho-\tau}}{r^2} \quad (5.27)$$

La primera de estas dos ecuaciones nos dice que salvo (posiblemente) cuando $X = 0$ (Ansatz de B.M.) el único tipo algebraico degenerado que puede ser solución de nuestro sistema es aquel en que $k=1$. El caso $X = 0$ es un poco especial en su tratamiento, y como tal se trata al final de este capítulo, pero podemos adelantar que no se obtienen otros resultados distintos del caso general al hacer $X \rightarrow 0$.

La segunda ecuación, (5.27), tiene una forma muy semejante a los términos de la izquierda (tensor de Ricci) en las ecuaciones de Einstein. Si hacemos un poco de álgebra entre (5.27) y (5.8-11) llegamos a las siguientes conclusiones:

$$\tau_{,r} = -\rho_{,r} \rightarrow \tau = -\rho + \hat{\tau}(t) \quad (5.28)$$

Redefinimos la coordenada t de forma que $e^{\hat{\tau}} \partial_t = \partial_{t'}$. En adelante usaremos t para referirnos a la nueva coordenada temporal t' recién definida. También se obtiene:

$$-\rho_{,rr} + \rho_{,tt} = \frac{1}{r^2}(1 - \epsilon^{2\rho}) \quad (5.29)$$

$$\epsilon^{2\rho} = \left(1 - \frac{K}{r^2}(Z\bar{Z})\right)^{-1} \quad (5.30)$$

Obsérvese como la condición de compatibilidad obtenida anteriormente nos ha permitido simplificar de forma importante el problema. Queremos destacar también que la ecuación (5.29) se puede transformar fácilmente en la forma estandar de la ecuación de Liouville, de la que se conoce su solución general ([7], [35]). Sin embargo, antes de resolver completamente el problema planteado, es necesario hacer unas pocas manipulaciones más.

En primer lugar definimos un cambio de variable a coordenadas definidas a partir del cono de luz. $u = r + t$ y $v = r - t$. En segundo lugar, redefinimos los campos como sigue

$$X = e^R \cos I \quad y \quad Y = -e^R \sin I \quad (5.31)$$

Entonces el conjunto completo de ecuaciones a resolver (5.2/11) se escribe

ecuaciones de Einstein:

$$-4\rho_{,uv} = \frac{1}{r^2}(1 - \epsilon^{2\rho}) \quad (5.32)$$

$$\rho_{,u} = \frac{K}{2r(1-Y)} e^{2R} (R_{,u}^2 + I_{,u}^2) \quad (5.33)$$

$$\rho_{,v} = \frac{K}{2r(1-Y)} e^{2R} (R_{,v}^2 + I_{,v}^2) \quad (5.34)$$

$$e^{2\rho} = \left(1 - \frac{K}{r^2} e^{2R}\right)^{-1} \quad (5.35)$$

ecuaciones Yang-Mills:

$$R_{,uv} = -\frac{1}{2r^2} e^{2\rho} \quad (5.36)$$

$$I_{,uv} = -\frac{1}{2r^2} e^{2\rho} e^R \cos I \quad (5.37)$$

condición algebraica:

$$I_{,u} R_{,v} + I_{,v} R_{,u} = 0 \quad (5.38)$$

$$-\frac{1}{r^2} e^{2\rho} (1-Y) = (-R_{,u} R_{,v} + I_{,u} I_{,v}) \quad (5.39)$$

5.5 Resolución de la ecuaciones

Despejando $I_{,u}$ de la ecuación (5.38), y sustituyendo en (5.33), (5.34) y (5.39), y combinando estas tres, se llega a:

$$-\rho_{,u} R_{,v}^2 + \rho_{,v} R_{,u}^2 = 0$$

que haciendo uso de la ligadura (5.35) entre R y ρ , se transforma en:

$$4\rho_{,u}\rho_{,v} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\rho})^2 \quad o \quad (5.40)$$

$$\frac{1}{R_{,u}} + \frac{1}{R_{,v}} = (u + v) \quad (5.41)$$

Se puede comprobar, tras un cálculo sencillo pero pesado, que en el conjunto de ecuaciones (5.32)-(5.39) hay varias que son consecuencia del cumplimiento de las otras.

De las ecuaciones (5.33), (5.34) y (5.39), una de ellas es consecuencia de las otras dos.

A su vez (5.36) y (5.37) se cumplen automáticamente si se cumple el resto del sistema. Donde para llegar a este resultado hemos debido suponer que I no es una constante (vía ecuación (5.37) este caso se corresponde a $\cos I = 0$, es decir $X = 0$, o Ansatz de B.M. que hemos visto que es un caso singular en el tratamiento y que está tratado en otra sección de este capítulo).

El sistema final a resolver se ha reducido finalmente a cuatro ecuaciones diferenciales y una ligadura:

$$-4\rho_{,uv} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho}) \quad (5.42)$$

$$4\rho_{,u}\rho_{,v} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (5.43)$$

$$I_{,u}R_{,v} + I_{,v}R_{,u} = 0 \quad (5.44)$$

$$-\frac{1}{r^2}e^{2\rho}(1 - Y) = (-R_{,u}R_{,v} + I_{,u}I_{,v}) \quad (5.45)$$

$$e^{2\rho} = \left(1 - \frac{K}{r^2}e^{2R}\right)^{-1} \quad (5.46)$$

Sin embargo este sistema no es completo del todo. En efecto, como se puede observar en (5.33) Y (5.34), la función ρ es creciente en u y v . Sin embargo, al elegir nuestro sistema de ecuaciones completo, dentro del conjunto (5.33), (5.34) y (5.39) solo dos de ellas eran inde-

pendientes y para construir el sistema de ecuaciones final optamos por escoger (5.39) y el "producto" de (5.33) y (5.34), con lo que perdimos parte de la información inicial, (los signos de las derivadas de ρ), a cambio de disponer de un conjunto de ecuaciones más sencillo. Por tanto, para resolver correctamente el problema planteado, al final del proceso de resolución deberemos quedarnos tan solo con aquellas soluciones que tengan un ρ creciente en u y v .

En el sistema de ecuaciones anterior hay dos ecuaciones (5.42) y (5.43), donde la función ρ está desacoplada del resto. La primera se puede transformar fácilmente a la ecuación de Liouville, cuya solución general es conocida. Por tanto, la resolución de estas dos ecuaciones se puede plantear como la búsqueda de las soluciones de la ecuación de Liouville que cumplen (5.43). Sin embargo, por sencillez, hemos preferido seguir otro proceso. Resolvemos inicialmente la ecuación que se obtiene de dividir las dos expresiones anteriores

$$-\rho_{,uv}(1 - e^{2\rho}) = \rho_{,u}\rho_{,v}$$

Cuya solución general es

$$\rho = \ln(\operatorname{sen}(U + V)) \quad (5.47)$$

donde $U = U(u)$ y $V = V(v)$. La ecuación que queda por resolver es

$$4U_{,u}V_{,v}(u + v)^2 = \operatorname{sen}^2(2U + 2V) \quad (5.48)$$

Obsérvese que esta ecuación es la misma que apareció en capítulo 4. Su solución general se encuentra en el apéndice 1; existen básicamente dos soluciones, la primera (generadora del multimerón)

$$U = \delta + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(\beta u + \kappa))$$

$$V = -\delta + \frac{1}{2}(\operatorname{arccotg}(\beta v - \kappa))$$

por tanto, el coeficiente de la métrica es:

$$e^{2\rho} = g_{rr} = g_{tt} = \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon \frac{1 - (\beta u + \kappa)(\beta v - \kappa)}{\sqrt{(1 + (\beta u + \kappa)^2)} \sqrt{(1 + (\beta v - \kappa)^2)}} \right) \quad (5.49)$$

Donde ϵ es una constante que vale ± 1 , y que aparece por la multivaluación de la *arccotg* (dada una *arccotg* existen dos posibilidades para los valores del *seno* y del *coseno*).

La segunda solución es:

$$U = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\left| u + \frac{\beta}{\alpha} \right| \right) + \delta_1$$

$$V = \frac{1}{-\alpha} \ln \left(\left| v - \frac{\beta}{\alpha} \right| \right) + \delta_2$$

$$\alpha = 4i$$

Como se puede ver en el apéndice este caso tiene dos posibilidades, cuando $\delta_1 + \delta_2 = 0$ se obtiene como coeficiente de la métrica:

$$e^{2\rho} = -\frac{1}{4} \frac{(\sqrt{|(u + \frac{\beta}{\alpha})|} - \sqrt{|(v - \frac{\beta}{\alpha})|})^2}{\sqrt{|(u + \frac{\beta}{\alpha})|} \sqrt{|(v - \frac{\beta}{\alpha})|}}$$

Esta solución la descartamos, pues es negativa y su comportamiento asintótico degenera. Cuando $\delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{4}$ la solución que se obtiene no es real.

Luego tan solo tenemos una solución admisible dada por la expresión (5.49). Tenemos, por tanto, que sin haber resuelto completamente el problema de ecuaciones diferenciales que nos planteamos en un principio, ya hemos podido determinar por completo cual es la forma

de las componentes del tensor métrico. En lo que sigue haremos uso de este resultado para, entrando con él en las ecuaciones (5.44) y (5.45), resolver completamente el problema. La ecuación (5.44) entonces es (donde hemos definido $x = \beta u + \kappa$ e $y = \beta v - \kappa$):

$$I_x \sqrt{1+x^2} + \epsilon I_y \sqrt{1+y^2} = 0$$

que nos fija la dependencia funcional de la función I en x y y

$$I = I(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \epsilon \ln(y + \sqrt{1+y^2})) = I(\xi) \quad (5.50)$$

Si calculamos el valor de e^{2R} a partir de la ligadura (5.46) llegamos a:

$$e^{2R} = \frac{(x+y)^2 (-\epsilon(1-xy) + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)})}{-8\beta^2 K (\epsilon(1-xy) + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)})}$$

La última ecuación a resolver es (5.45). El caso más sencillo que podemos analizar es cuando $I \rightarrow \text{constante}$, existe una solución dada por

$$\epsilon \operatorname{sen} I = \sqrt{-K} \beta$$

y para que tenga solución real β debe ser imaginaria. Como vimos anteriormente en el caso en que I es constante no podemos decir que la ecuación (5.37) sea consecuencia del resto. Si la desarrollamos en este caso, la ecuación que hemos de imponer por tanto es:

$$\cos I = 0$$

Lo que nos fija definitivamente $\beta = \frac{\epsilon}{\sqrt{-K}}$ (imaginaria, por tanto). Este caso se reduce por tanto a $X \rightarrow 0$, que vimos anteriormente que era singular en nuestro tratamiento, sin embargo como veremos en el apartado

5.6, los resultados expuestos anteriormente como caso límite cuando $I \rightarrow$ constante son válidos y coinciden con los que obtendremos al desarrollar dicho caso singular completamente.

Cuando $I \neq$ constante la ecuación (5.45) en términos de x e y se escribe:

$$4 \frac{1}{(x+y)^2} e^{2\rho} (1 + e^R \text{sen} I) = (R_x R_y - I_x I_y) \quad (5.51)$$

Conocemos todas las funciones que aparecen salvo la dependencia explícita de I en función de ξ , es decir (5.51) se transforma en una ecuación cuadrática en la derivada de I con respecto a ξ :

$$\beta = \text{imaginario} \\ - \frac{1}{|\beta \sqrt{-K}|} \text{sen} I = \epsilon (1 + I'^2) \quad (5.52)$$

(con $I' = \partial_\xi I$). Entrando en (5.50) con un β imaginario la primera conclusión que podemos observar es que la variable ξ en general no tiene por que ser real. también es trivial comprobar que no en todas las regiones del espacio tiempo la métrica es real. sino tan solo en dos regiones, cada una de ellas con una elección de las constantes dadas por:

- a. si $|\beta u + \kappa| < 1$ y $|\beta v - \kappa| < 1$:

entonces $\epsilon = +1$ para que la métrica sea aproximadamente min-kowski lejos del borde.

- b. si $|\beta u + \kappa| > 1$ y $|\beta v - \kappa| > 1$:

para que se cumpla la condición de positividad de las derivadas de ρ con respecto a u y v entonces $\text{signo}(u) = -\text{signo}(v)$ ($t > r$),

y además $\epsilon = -1$ si imponemos que la métrica sea minkowski lejos del borde.

Al primer caso lo conoceremos como región interior, mientras que el segundo será la región exterior. Finalmente la ecuación (5.52) es una ecuación autónoma de primer grado. Presenta básicamente unas soluciones constantes dadas por $\text{sen}(I - 2n\pi) = \epsilon|(\beta\sqrt{-K})|$. Cuando $I \neq \text{constante}$ analizamos los casos a. y b. por separado.

En el caso a. (Región interior) la variable ξ es imaginaria, (los puntos $(r, t) = (0, -1/|\beta|)$, $(1/|\beta|, 0)$ y $(0, 1/|\beta|)$ que marcan los vértices de la región del espacio tiempo donde tiene sentido la solución, adquieren los valores $-i\pi$, 0 , y $i\pi$ en la variable ξ respectivamente) y la ecuación autónoma se puede, en algunos casos concretos, integrar explícitamente en términos de funciones conocidas. La ecuación a resolver es

$$I' = \sqrt{-1 - \alpha \text{sen}(I)}$$

con $\alpha = \frac{1}{|\beta\sqrt{-K}|}$. Si $1 \geq \alpha \geq 0$ podemos integrarla completamente dando

$$I = 2\text{arcsen}\left(\text{sn}\left(i\xi \frac{\sqrt{1+\alpha}}{2}, \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\right)\right) + \frac{\pi}{2}$$

donde sn representa a la función "seno" elíptica de Jacobi. En el caso borde en que $\alpha = 1$ la expresión es:

$$I = 4\text{arctag}(e^{i\xi/\sqrt{2}}) - \frac{\pi}{2}$$

Si $\alpha > 1$, no sabemos integrar la expresión, aunque sí que podemos decir que la solución general va estar limitada por las soluciones constantes

de (5.52), que son $I = \arcsen(\frac{-1}{\alpha}) + 2n\pi$ (así por ejemplo, si $\alpha = 2$ entonces $\frac{7\pi}{6} > I > -\frac{\pi}{6}$). Obsérvese que en el caso en que ($1 > \alpha$) no existen soluciones constantes.

En el caso b. (región exterior) no hemos sido capaces de integrar la ecuación autónoma correspondiente en términos de funciones conocidas. Pese a ello podemos asegurar la existencia de soluciones, pues la expresión en este caso es:

$$I' = \sqrt{-1 + \alpha \operatorname{scn}(I)}$$

donde $\alpha = \frac{1}{|\beta\sqrt{-K}|} > 0$, y la variable ξ , con respecto a la que derivamos, es real (las rectas $t = r + 1/b$ y $t = -r - 1/b$ que definen los conos de luz que limitan la región posible de esta solución dan para la variable ξ el valor

$$\xi = \ln[1 + 2r|\beta| + \sqrt{4|\beta^2|r^2 + 4|\beta|r}]$$

Si $\alpha < 1$ no existen soluciones reales de nuestra ecuación autónoma. Sin embargo, si $\alpha > 1$ entonces tenemos dos soluciones constantes, entre las que están limitadas las soluciones no constantes (que, por los razonamientos expresados anteriormente, son las que nos interesan en este caso general). Así por ejemplo, si $\alpha = 2$ entonces se cumplirá que $\frac{5\pi}{6} > I > \frac{\pi}{6}$. Tenemos, por tanto, asegurada la existencia de soluciones de nuestro sistema de ecuaciones, si bien, en este caso, no hemos sido capaces de ponerlas en términos de funciones conocidas.

5.6 Ansatz de Bartnik-McKinnon

Cuando la función $X = 0$, estamos en un caso singular en el cual el proceso anterior no es válido. El objetivo de este apartado es resolver este caso por separado, aunque finalmente observaremos, que su solución coincide con la que se obtendría como caso límite del caso general cuando $\text{sen}(I) = \pm 1$. La condición $X = 0$, se traduce (deshaciendo los cambios de notación definidos en el apartado 5.2) en que las funciones A_t y A_r son nulas, (y por tanto tenemos una única función, φ , que nos define completamente el potencial Yang-Mills). Esta condición se ha impuesto de forma habitual en la literatura para obtener soluciones exactas en el caso Einstein-Yang-Mills como un Ansatz sobre las componentes del potencial (se trata del Ansatz de partida de B.M para obtener su solución). En nuestro caso el enfoque es distinto, pues no ha sido impuesto como una condición arbitraria a fin de simplificar las ecuaciones, sino que aparece como un caso singular en un proceso de resolución más general. Los resultados de este apartado aparecen en ([30], [31]).

El potencial Yang-Mills en componentes es:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= (0, 0, 0); & \mathbf{A}_r &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{A}_\theta &= (-\varphi, 0, 0); & \mathbf{A}_\phi &= (0, -\varphi \sin \theta, -\cos \theta) \end{aligned}$$

Las componentes del campo Yang-Mills son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{tr} &= (0, 0, 0); & \mathbf{F}_{t\theta} &= (-\varphi_{,t}, 0, 0); & \mathbf{F}_{t\phi} &= (0, -\varphi_{,t} \text{sen} \theta, 0) \\ \mathbf{F}_{\theta\phi} &= (0, 0, (1 - \varphi^2) \text{sen} \theta); & \mathbf{F}_{r\theta} &= (-\varphi_{,r}, 0, 0); & \mathbf{F}_{r\phi} &= (0, -\varphi_{,r} \text{sen} \theta, 0) \end{aligned}$$

El sistema completo de ecuaciones Einstein - Yang-Mills se escribe tras un álgebra trivial como:

$$(e^{\tau+\rho}\varphi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho}\varphi_{,r})_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2}\varphi(1-\varphi^2) \quad (5.53)$$

$$\rho_{,t} = K\frac{2}{r}\varphi_{,t}\varphi_{,r} \quad (5.54)$$

$$\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} + \frac{2}{r}\tau_{,r} + \frac{2}{r}\rho_{,r} + \epsilon^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (5.55)$$

$$\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} + \epsilon^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) - \frac{e^{2\rho}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = -K\frac{2}{r^4}e^{2\rho}(1-\varphi^2)^2 \quad (5.56)$$

$$\tau_{,r} - \rho_{,r} = -K\frac{2}{r}(e^{2\tau+2\rho}\varphi_{,t}^2 + \varphi_{,r}^2) \quad (5.57)$$

Finalmente, la condición de degeneración algebraica es muy sencilla de escribir:

$$\frac{e^{2\rho}}{r^2}(1-\varphi^2)^2 = k(\varphi_r^2 - e^{2\tau+2\rho}\varphi_t^2) \quad (5.58)$$

Distinguimos dos casos

(i) *Caso estático*

La condición de estaticidad implica que todas las funciones definidas anteriormente dependen tan solo de la coordenada r . Salvo la ecuación (5.58), y con una constante de acoplo $K = 1$, este es el caso que se plantean para resolver tanto B.M [28] como Bizon [29] al obtener sus soluciones.

Es trivial observar que $k < 0$ no es posible. En el caso $k = +1$

es preciso un análisis un poco más elaborado. La ecuación (5.58) se puede escribir

$$\epsilon \frac{e^\rho}{r} (1 - \varphi^2) = \sqrt{k} \varphi_r$$

donde ϵ representa únicamente ± 1 . Despejando esta última expresión en (5.53) se llega a:

$$\tau_{,r} = -\frac{1}{r} (1 + \epsilon e^\rho \varphi)$$

Haciendo un poco de algebra entre las expresiones del sistema se llega a

$$\rho_{,r} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon e^\rho \varphi)$$

y por tanto $\tau = -\rho$ (redefiniendo la coordenada t), y $e^{2\rho} = 1$

No es posible obtener soluciones estáticas (y por tanto las soluciones de B.M. y Bizon) en nuestro esquema. Pese a ello podemos, al menos, caracterizar este tipo de soluciones dentro de la clasificación de Carmeli. En efecto, en el capítulo 3. vimos que son solo posibles los tipos D_p y 0_p y 0_0 (este último se corresponde a las soluciones gauge puro) para campos Yang-Mills con simetría esférica, estáticos y en el Ansatz de B.M. Puesto que la condición algebraica no se puede cumplir para las soluciones estáticas, es evidente que todas ellas deben ser tipo D_p .

(ii) *Caso no estático*

De la compatibilidad de la ecuación (5.58) con el resto se

obtienen (procediendo de forma análoga al caso general) dos ecuaciones

$$\Psi_{,r} = e^{\tau+\rho}(\rho_{,t} - (\frac{k}{2} - 1)\frac{U_{,t}}{U}) \quad (5.59)$$

$$\Psi_{,t} = e^{-\tau-\rho}(-\tau_{,r} - \frac{1}{r} - (\frac{k}{2} - 1)(\frac{U_{,r}}{U} + \frac{1}{r})) \quad (5.60)$$

donde hemos definido $\varphi_{,t}e^{\tau} = U \operatorname{sh}(\Psi)$ y $\varphi_{,r}e^{-\rho} = U \operatorname{ch}(\Psi)$. La condición de integrabilidad para Ψ nos da:

$$\begin{aligned} \tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{1}{r}\tau_{,r} - \frac{1}{r}\rho_{,r} + e^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) - \frac{1}{r^2} = \\ (k-2)\frac{e^{2\rho}}{r^2}(\frac{1}{k} + [\frac{1}{k} - 1]\varphi^2) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Comparando esta ecuación con (5.55-57) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_{,r} + \frac{1}{6r}e^{2\rho} + \frac{(k-2)}{6r}e^{2\rho}(\frac{1}{k} + (\frac{1}{k} - 1)\varphi^2) \\ = \frac{K}{r}[e^{2\tau+2\rho}\varphi_{,t}^2 + \varphi_{,r}^2] \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$e^{2\rho} = \frac{3}{2 - \frac{3K}{r^2}(1 - \varphi^2)^2 - (k-2)(\frac{1}{k} + (\frac{1}{k} - 1)\varphi^2)} \quad (5.63)$$

La compatibilidad de estas dos expresiones con el sistema de ecuaciones completo nos lleva a

$$\frac{2K}{r^2}(1 - \varphi^2)^2(1 - \frac{1}{k}) + \frac{1}{3}(-1 - (k-2)(\frac{1}{k} + \varphi^2(\frac{1}{k} - 1))) = 0 \quad (5.64)$$

Que es una identidad si $k = 1$, y en caso contrario $\varphi = \varphi(r)$, pero entonces estamos en el caso estático que no tiene solución. Luego por tanto

$$k = 1 \quad (5.65)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r^2}(1 - \varphi^2)^2} \quad (5.66)$$

y en consecuencia se ve fácilmente que:

$$\tau_{,r} = -\rho_{,r} \quad (5.67)$$

Es decir, reobtenemos exactamente los mismos resultados que se obtuvieron en el caso general. Procediendo de forma semejante a como se hizo entonces (parametrizando $Y = \lambda e^R$, donde $\lambda = \pm 1$), se llega al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} R_{,uv} &= -\frac{1}{2r^2}e^{2\rho} \\ \rho_{,u} &= \frac{2K}{r}\varphi_{,u}^2 \\ \rho_{,v} &= \frac{2K}{r}\varphi_{,v}^2 \\ \rho_{,uv} &= -\frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho}) \\ e^{2\rho} &= \frac{1}{1 - r^{-2}Ke^{2R}} \\ R_{,u}R_{,v} &= \frac{1}{r^2}e^{2\rho}(1 - \lambda e^R) \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones es equivalente a resolver el sistema:

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - r^{-2}Ke^{2R}} \quad (5.68)$$

$$\rho_{,uv} = -\frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho}) \quad (5.69)$$

$$\rho_{,u}\rho_{,v} = \frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (5.70)$$

$$R_{,u}R_{,v} = \frac{1}{r^2}e^{2\rho}(1 - \lambda e^R) \quad (5.71)$$

más las ligaduras $\rho_{,u} > 0$, $\rho_{,v} > 0$. Las ecuaciones (5.69-70) se resuelven con:

$$e^{2\rho} = \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon \frac{[1 - (\beta u + \kappa)(\beta v - \kappa)]}{\sqrt{[1 + (\beta u + \kappa)^2]}\sqrt{[1 + (\beta v - \kappa)^2]}} \right) \quad (5.72)$$

Finalmente solo queda por imponer (5.71) que se resuelve con β imaginaria y

$$\lambda = +1, \epsilon = +1, \text{ y } \beta = i \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (5.73)$$

si $|\beta u + \kappa| < 1$ y $|\beta v - \kappa| < 1$ y

$$\lambda = -1, \epsilon = -1, \text{ y } \beta = i \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (5.74)$$

si $|\beta u + \kappa| > 1$ y $|\beta v - \kappa| > 1$. La ligadura del signo de las derivadas de ρ tan solo nos restringe este segundo caso. Solo será posible cuando $\text{signo}(u) = -\text{signo}(v)$. Concluyendo, el caso singular que planteamos en la sección 5.4 se puede tratar exactamente como el caso límite de la solución general obtenida allí, sin más que hacer $I = \frac{\pi}{2}$.

5.7 Propiedades de la solución

5.7.1 Regiones permitidas

De la definición de u y v observamos que se puede absorber la constante κ redefiniendo el origen de tiempos (en adelante prescindiremos de ella). Por tanto, la expresión más sencilla de la métrica es (eligiendo $\beta = i$):

$$e^{2\rho} = g_{rr} = g_{tt} = \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon \frac{1 + uv}{\sqrt{(1-u^2)}\sqrt{(1-v^2)}} \right)$$

Que solo tiene sentido (es real) en las regiones delimitadas por

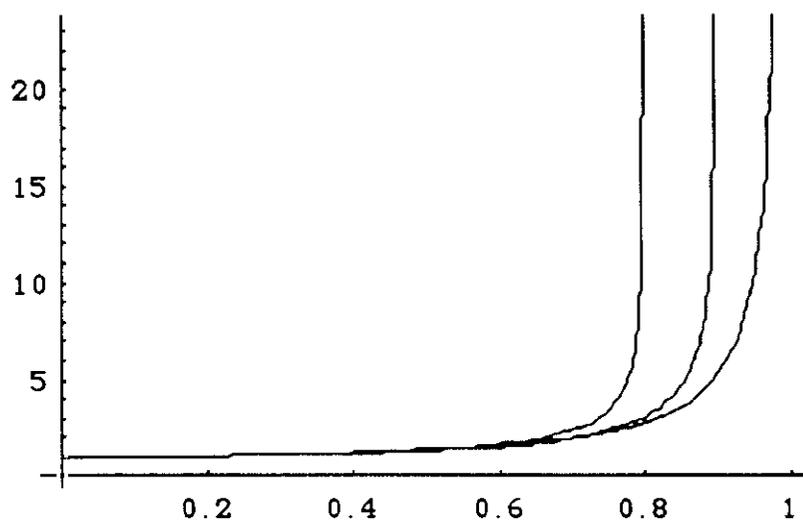
$$|u| < 1, |v| < 1 \text{ (en adelante "región interior")} \text{ y}$$

$|u| > 1$, $|v| > 1$ y $\text{signo}(u) = -\text{signo}(v)$ (en adelante "región exterior").

En el origen espacial ($r = 0$) la métrica es minkowski. El comportamiento asintótico para tiempos muy grandes (tanto en el pasado como en el futuro) dentro de la región permitida es también plano, con una singularidad (el coeficiente de la métrica se vuelve infinito) que se contrae hacia el origen radial desde el pasado, a lo largo del cono de luz $r = -t + 1$, lo toca en $t = -1$ y se aleja del origen situada en el cono de luz definido por $r = t - 1$, partiendo de $t = 1$. Entre los tiempos $t = \pm 1$, hemos tenido la solución "interior".

Si hacemos $t = 0$ y $\theta = \pi/2$, y la superficie bidimensional que queda la sumerjimos en un espacio euclideo de tres dimensiones, la forma de la superficie que queda (ver proximo capítulo ó [26] para los detalles técnicos) es exactamente la de una esfera.

En función de r la forma del coeficiente g_{rr} de la métrica para distintos instantes de tiempo es en el interior (figura 1.)



y en el exterior

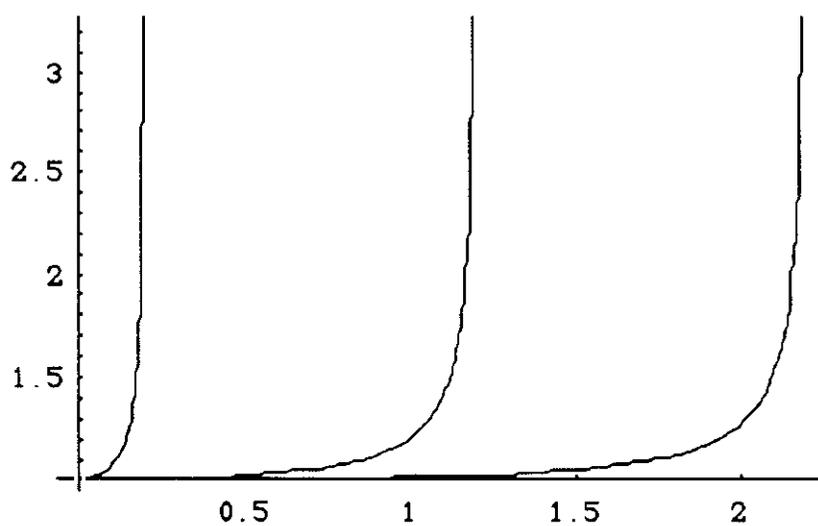


figura 2.

En todo lo anterior solo se han analizado los casos en que $\epsilon = +1$ para la "región interior" y $\epsilon = -1$ para la "región exterior",

la razón es son los únicos casos posibles en que la métrica tiende a minkowski al alejarse del borde.

5.7.2 Grupo de isometría

La condición de isometría $L_X g_{\mu\nu} = 0$ se escribe en componentes:

$$X_{,t}^t + X^t \rho_{,t} + X^r \rho_{,r} = 0 \quad (5.75)$$

$$X_{,t}^r + X^r \rho_{,t} + X^r \rho_{,r} = 0 \quad (5.76)$$

$$X_{,t}^r - X_{,r}^t = 0 \quad (5.77)$$

$$X_{,t}^\theta r^2 - X_{,\theta}^t e^{2\rho} = 0 \quad (5.78)$$

$$X_{,r}^\theta r^2 + X_{,\theta}^r e^{2\rho} = 0 \quad (5.79)$$

$$X_{,t}^\phi r^2 - X_{,\phi}^t e^{2\rho} \text{sen}^2(\theta) = 0 \quad (5.80)$$

$$X_{,r}^\phi r^2 + X_{,\phi}^r e^{2\rho} \text{sen}^2(\theta) = 0 \quad (5.81)$$

$$X_{,\theta}^\theta + \frac{X^r}{r} = 0 \quad (5.82)$$

$$X_{,\theta}^\phi \text{sen}^2(\theta) + X_{,\phi}^\theta = 0 \quad (5.83)$$

$$X_{,\phi}^\phi + \frac{X^r}{r} + X_{,\theta}^\theta \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = 0 \quad (5.84)$$

Las ecuaciones (5.80-84) se resuelven con la dependencia en las coordenadas angulares dada por:

$$X^\theta = SO(3) + f_1 \text{sen}(\theta) + f_2 \cos(\theta) \cos(\phi) - f_3 \cos(\theta) \text{sen}(\phi)$$

$$X^\phi = SO(3) + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} [-f_1 \text{sen}(\phi) - f_2 \cos(\phi)]$$

$$X^r = -f_1 r \cos(\theta) + f_2 r \text{sen}(\theta) \cos(\phi) - f_3 r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)$$

$$X^t = -g_1 r \cos(\theta) + g_2 r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) - g_3 r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)$$

Donde f_i y g_i son funciones de t y r . Las ecuaciones por satisfacer quedan como condiciones diferenciales sobre estas funciones:

$$f_{i,r} r + f_i \epsilon^{2\rho} = 0 \quad (5.85)$$

$$f_{i,t} r - g_i \epsilon^{2\rho} = 0 \quad (5.86)$$

$$(f_i r)_t - (g_i r)_r = 0 \quad (5.87)$$

$$(f_i r)_t - (g_i r)_t = 0 \quad (5.88)$$

$$(g_i r)_t + g_i r \rho_t + f_i r \rho_r = 0 \quad (5.89)$$

que se resuelven con

$$f_i r = k_i (\sqrt{1 + (\beta u + \kappa)^2} + \sqrt{1 + (\beta v - \kappa)^2}) \quad (5.90)$$

$$g_i r = k_i (\sqrt{1 + (\beta u + \kappa)^2} - \sqrt{1 + (\beta v - \kappa)^2}) \quad (5.91)$$

En la región interior las k_i son reales y en la exterior son imaginarias. Por tanto los generadores del grupo de isometría son:

$$X^4, X^5, \text{ y } X^6 \text{ son los de simetría esférica} \quad (5.92)$$

$$X^1 = 2k_1 F r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \partial_t + 2k_1 G r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \partial_r + 2k_1 G \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - 2k_1 \frac{G \operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\phi \quad (5.93)$$

$$X^2 = -2k_2 F r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \partial_t - 2k_2 G r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \partial_r - 2k_2 G \cos \theta \operatorname{sen} \phi \partial_\theta - 2k_2 \frac{G \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\phi \quad (5.94)$$

$$X^3 = -2k_3 F r \cos \theta \partial_t - 2k_3 G r \cos \theta \partial_r + 2k_3 G \operatorname{sen} \theta \partial_\theta \quad (5.95)$$

y donde las funciones F y G son:

$$F = \frac{1}{r} (\sqrt{1 + (\beta u + \kappa)^2} + \sqrt{1 + (\beta v - \kappa)^2}) \quad (5.96)$$

$$G = \frac{1}{r} (\sqrt{1 + (\beta u + \kappa)^2} - \sqrt{1 + (\beta v - \kappa)^2}) \quad (5.97)$$

Si calculamos $X_\mu^i X^{i\mu}$ conoceremos el genero del tipo de variedad de las órbitas de los generadores de simetría. Esta expresión vale (con $\beta = i$ y $\kappa = 0$):

$$X_\mu^i X^{i\mu} = k_i^2 [(\sqrt{1-u^2} + \sqrt{1-v^2})^2 + x^{i2}]$$

en la región interior, y

$$X_\mu^i X^{i\mu} = |k_i^2| [(\sqrt{u^2-1} + \sqrt{v^2-1})^2 - x^{i2}]$$

en la región exterior. El símbolo x^i representa a las coordenadas cartesianas. En ambos casos, esas expresiones son siempre mayores que cero, por tanto las superficies que se generan por la actuación del grupo de isometría son siempre espaciales. Por tanto, nuestra solución no es estacionaria.

El álgebra que definen estos generadores tiene las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [X^4, X^5] &= X^6 & [X^4, X^6] &= -X^4 & [X^5, X^6] &= X^4 \\ [X^4, X^3] &= X^1 & [X^4, X^1] &= -X^3 & [X^4, X^2] &= 0 \\ [X^5, X^3] &= X^2 & [X^5, X^1] &= 0 & [X^5, X^2] &= -X^3 \\ [X^6, X^3] &= 0 & [X^6, X^1] &= X^2 & [X^6, X^2] &= -X^1 \\ [X^3, X^1] &= \epsilon 4X^4 & [X^3, X^2] &= \epsilon 4X^5 & [X^1, X^2] &= \epsilon 4X^6 \end{aligned}$$

donde $\epsilon = 1$ en la región interior, $\epsilon = -1$, en la región exterior.

Comparando con las reglas de conmutación de $SO(4)$ y $SO(3,1)$ (que se pueden encontrar por ejemplo en [42]), encontramos que el álgebra de isometría es $SO(4)$ en la región interior, y $SO(3,1)$ en la región exterior.

5.7.3 Tensor de Weyl. Tipo de Bel-Petrov

Las componentes distintas de cero del tensor de Weyl de una métrica con simetría esférica parametrizada según (5.1) son:

$$C_{trtr} = \frac{1}{3}e^{-2\tau}(\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{\tau_{,r}}{r} - \frac{\rho_{,r}}{r} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{3}e^{2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t})$$

$$C_{t\theta t\theta} = C_{t\phi t\phi} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} = -\frac{1}{6}r^2e^{-2\tau-2\rho}(\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{\tau_{,r}}{r} - \frac{\rho_{,r}}{r} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2}) - r^2\frac{1}{6}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t})$$

$$C_{r\theta r\theta} = C_{r\phi r\phi} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{6}r^2(\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{\tau_{,r}}{r} - \frac{\rho_{,r}}{r} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2}) + r^2\frac{1}{6}e^{2\rho+2\tau}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t})$$

$$C_{\theta\phi\theta\phi} = -\frac{r^4\text{sen}^2\theta}{3}e^{-2\rho}(\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{\tau_{,r}}{r} - \frac{\rho_{,r}}{r} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2}) + \frac{r^4\text{sen}^2\theta}{3}e^{2\tau}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t})$$

Como en nuestra solución

$$\tau = -\rho$$

$$\begin{aligned} C_{trtr} &= \frac{1}{3}e^{2\rho}\left(-\rho_{,rr} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \rho_{,tt}\right) \\ C_{t\theta t\theta} &= C_{t\phi t\phi} \frac{1}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{6}r^2\left(-\rho_{,rr} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \rho_{,tt}\right) \\ C_{r\theta r\theta} &= C_{r\phi r\phi} \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{6}r^2\left(-\rho_{,rr} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \rho_{,tt}\right) \\ C_{\theta\phi\theta\phi} &= -\frac{r^4 \sin^2\theta}{3} e^{-2\rho}\left(-\rho_{,rr} + \frac{e^{2\rho}}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \rho_{,tt} \end{aligned}$$

Pero esas expresiones se anulan en virtud de una de las ecuaciones que han aparecido en el proceso de resolución (la ecuación de Liouville). Por tanto, nuestra solución tiene un tensor de Weyl idénticamente nulo, y por tanto, es tipo 0 en la clasificación de Bel-Petrov. Es decir, existe una sistema de coordenadas en que la métrica es conforme plana.

5.7.4 Métrica de forma conforme plana explícitamente

En las coordenadas u y v la métrica tiene la forma

$$ds^2 = e^{2\rho} dudv + \frac{(u+v)^2}{4} d\Omega^2 \quad (5.98)$$

con

$$e^{2\rho} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\right) \quad (5.99)$$

donde hemos definido $x = |\beta|u = Bu$ y $y = |\beta|v = Bv$. Distinguiamos las dos regiones definidas anteriormente.

(i) Region interior:

Si hacemos el cambio de variable:

$$x = \tanh\xi \text{ y } y = \tanh\eta$$

entonces la métrica queda

$$ds^2 = \frac{\cosh^2((\xi + \eta)/2)}{B^2 \cosh^2\xi \cosh^2\eta} [d\xi d\eta + \frac{\sinh^2(\xi + \eta)}{4 \cosh^2(\xi + \eta)/2} d\Omega^2] \quad (5.100)$$

Estamos buscando un cambio de variable, tal que tenga forma conforme explícitamente, es decir, que sea de la forma:

$$ds^2 = H(dadb + \frac{1}{4}(a + b)^2 d\Omega^2)$$

Siendo $d\Omega^2$ la métrica correspondiente a una esfera. La ecuación que se deberá cumplir es por tanto:

$$\xi_{,a}\eta_{,b}(a + b)^2 = 4\sinh\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) \quad (5.101)$$

donde $\xi = \xi(a)$ y $\eta = \eta(b)$. Que se puede convertir mediante un cálculo sencillo, en la ecuación que se resuelve en el apéndice 1. Nuevamente tenemos dos casos. Si hacemos uso de la solución generadora de merones (en las dos posibilidades que aparecen en el apéndice) llegamos a un factor conforme:

$$H = \frac{\Im(\overline{a - b})^2}{c^2(a^2 + 1)^2(b^2 + 1)^2}$$

Asintóticamente esta expresión degenera. Haciendo uso de la función generadora de multimerones llegamos a:

$$H = \frac{4c^2(1 + c^2ab)^2}{(1 + c^2a^2)(1 + c^2b^2)}$$

donde c es una constante real arbitraria (para que las nuevas coordenadas a y b sean reales). Este factor conforme también degenera asintóticamente.

(ii) Región exterior:

Ahora:

$$x = \operatorname{cota} \operatorname{th} \xi \text{ y } y = \operatorname{cot} \operatorname{an} h(\eta)$$

entonces la métrica queda

$$ds^2 = \frac{\xi_a \eta_b \operatorname{cosh}^2((\xi + \eta)/2)}{B^2 \operatorname{senh}^2 \xi \operatorname{senh}^2 \eta} [d\xi d\eta + \frac{\operatorname{senh}^2(\xi + \eta)}{4 \operatorname{cosh}^2(\xi + \eta) f^2} d\Omega^2] \quad (5.102)$$

Y la ecuación que debera satisfacerse es exactamente la misma que en el caso interior. Los generadores de merones dan:

$$H = \frac{4(a-b)^2}{c^2(a^2-1)^2(b^2-1)^2}$$

que degenera. Sin embargo, haciendo uso del generador de multi-merones

$$\xi = 2i \operatorname{ar} \operatorname{cot} g(ca) + 4i\delta$$

y

$$\eta = 2i \operatorname{ar} \operatorname{cot} g(cb) - 4i\delta$$

donde c será imaginaria y $\delta = 0 + n\pi/4$ (se comprueba fácilmente que no se añade nada nuevo poniendo $n \neq 0$) para que las nuevas coordenadas a y b sean reales. Entonces el factor conforme es:

$$H = \frac{-(1 + c^2 ab)^2}{c^2 a^2 b^2}$$

que es asintóticamente minkowski, con dos singularidades que se mueven a lo largo de los conos de luz $a = 0$ y $b = 0$. Si recordamos, en el exterior solo tenía sentido la región $\text{signo}(u) = -\text{signo}(v)$, que en este caso se transforma en $\text{signo}(\xi) = -\text{signo}(\eta)$, ó $\text{signo}(a) = -\text{signo}(b)$, por tanto este cambio de coordenadas es válido tan solo en la región del espacio-tiempo $t > r$ (donde t y r son las nuevas coordenadas temporal y radial respectivamente).

5.7.5 Clasificación según el tensor de Ricci

Calculamos

$$R_{01} = 2\frac{\rho_{,t}}{r}e^{\tau-\rho} \quad (5.103)$$

$$R_{11} = -e^{-2\rho}(-\tau_{,rr} + \tau_{,r}\tau_{,r} + \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{2\rho_{,r}}{r}) + e^{2\tau}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}\rho_{,t} + \rho_{,t}\tau_{,t}) \quad (5.104)$$

$$R_{00} = e^{-2\rho}(-\tau_{,rr} + \tau_{,r}\tau_{,r} + \tau_{,r}\rho_{,r} - \frac{2\tau_{,r}}{r}) - e^{2\tau}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}\rho_{,t} + \rho_{,t}\tau_{,t}) \quad (5.105)$$

$$R_{22} = R_{33} = \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\rho}}{r^2} + \frac{\rho_{,r}}{r}e^{2\rho} + \frac{\tau_{,r}}{r}e^{-2\rho} \quad (5.106)$$

donde los índices son en la tétrada diagonal trivial. La ecuación de autovalores es:

$$(R_{22} - \lambda)^2[-(R_{00} + \lambda)(R_{11} - \lambda) + R_{01}^2] = 0 \quad (5.107)$$

Nuestra solución presenta un autovalor triple $\lambda_1 = R_{22} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\rho})$ y uno simple $\lambda_2 = -3R_{22}$. El autovalor triple define un autoespacio de dimensión tres de la forma

$$(w^0, -w^0 \left(\frac{\rho_{,u} + \rho_{,v} + (e^{2\rho} - 1)/r}{\rho_{,u} - \rho_{,v}} \right), w^2, w^3)$$

que es de género espacio, por tanto nuestra solución pertenece al tipo $[(1 \ 1 \ 1) \ , \ 1]$ en la notación de Segré [24].

5.7.6 Comportamiento del campo Yang-Mills

En el proceso anterior hemos resuelto el sistema de ecuaciones, pero en ningún momento nos hemos preocupado de que los campos Yang-Mills tuvieran sentido. Por ejemplo, en el caso límite tratado en la sección 5.6 (Ansatz de B.M.) parametrizamos $Y = \lambda e^R$, pero a su vez $Y = (1 - \varphi^2)$, con lo que es posible que en determinadas circunstancias no existan φ reales. Sin embargo este no es el caso. En la región interior (repassando (5.73))

$$\varphi^2 = 1 - e^R$$

pero es sencillo de ver que en la región interior $e^R < 1$, y por lo tanto la expresión anterior tiene sentido. Desarrollando completamente se llega a (con $K = 1$):

$$\varphi^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)} - uv + 1)$$

Por otro lado, en la región exterior

$$\varphi^2 = 1 + e^R$$

y

$$\varphi^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{(u^2 - 1)(v^2 - 1)} + 3 + uv)$$

que no presenta ningún problema.

En general la forma de los campos y potenciales Yang-Mills no se puede expresar explícitamente pues para ello deberíamos haber integrado la ecuación autónoma de I . Sin embargo, siempre es posible despejar el factor e^R dando:

$$e^R = \frac{|\beta|(u+v)^2}{2(\sqrt{(1-|\beta|^2u^2)(1-|\beta|^2v^2)} + (1+|\beta|^2uv))}$$

en el interior, y

$$e^R = \frac{|\beta|(u+v)^2}{2(\sqrt{(|\beta|^2u^2-1)(|\beta|^2v^2-1)} - (1+|\beta|^2uv))}$$

en el exterior.

5.7.7 Clasificación de Yang

Como vimos en el capítulo 3., la clasificación de Yang está basada en el rango de la matriz π definida en (3.6). Sobre las soluciones encontradas dicha matriz es diagonal, y por lo tanto su rango es tres (salvo en los casos triviales gauge puros), y estamos en el caso no degenerado de esta clasificación.

5.7.8 Cargas eléctrica y magnética

Existe una generalización del concepto de carga magnética y eléctrica para el caso de un campo Yang-Mills. En simetría esférica la expresión es sencilla de calcular (vease [34]):

$$\text{Carga eléctrica} = Q = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{tr}$$

$$\text{Carga magnética} = P = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 - \varphi^2)$$

Límites que no están bien definidos en nuestra solución, pues ésta solo tiene sentido dentro de unas regiones finitas (para un tiempo t) de la variedad lorentziana. Por ejemplo, para la solución en el Ansatz de B.M. la carga eléctrica es nula y la carga magnética vale $P = r_{max} = 1 \pm t$ en la región exterior, y $P = r_{max} = t \pm 1$ en la región interior. En general (fuera del Ansatz), se debe cumplir que $P^2 + Q^2 = r_{max}^2$. Para el Ansatz de B.M. los valores de $(1 - \varphi^2)^2$ en función de r para varios instantes de tiempo tiene la forma

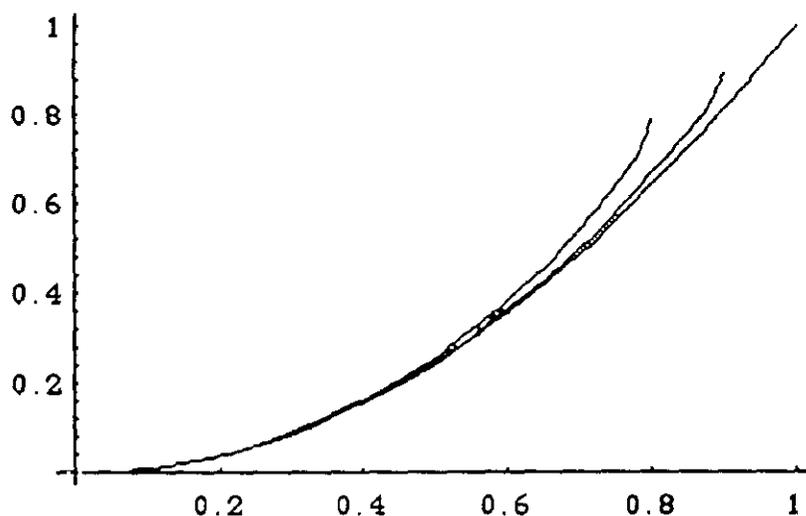


figura 3.

en el interior y

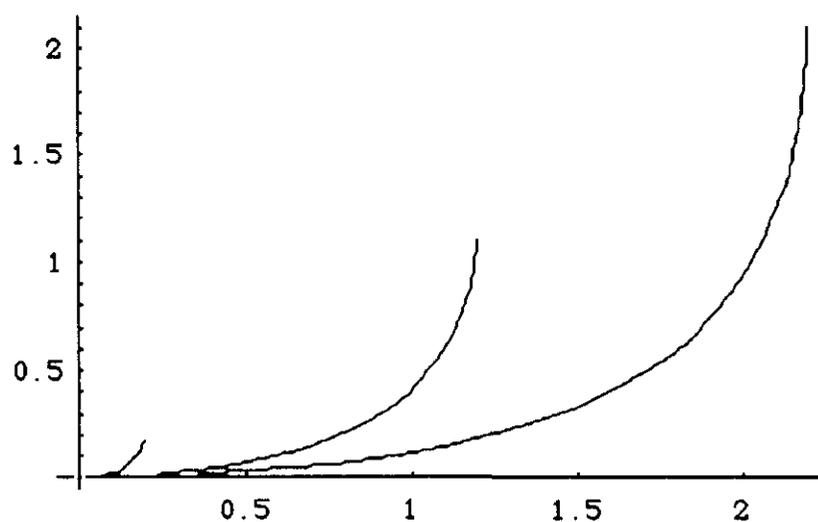


figura 4.

en la región exterior

5.7.9 Energía de la solución

Según se puede encontrar en [27], la condición débil de energía se expresa como que cualquier observador medirá una cantidad positiva al calcular la componente 00 del tensor energía-momento. Es decir, que para cualquier vector temporal ($w^\mu w_\mu < 0$), se cumple

$$T_{\mu\nu} w^\mu w^\nu > 0$$

En nuestro caso el escalar R es nulo, por tanto, podemos calcular la componente $\mu\nu$ del tensor energía momento, sabiendo que $R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, lo que nos lleva a:

$$T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu =$$

$$\frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho})(w^{r^2} - w^{t^2}) + (1 - e^{-2\rho})(w^{\theta^2} + w^{\phi^2} \text{sen}^2(\theta)) + \frac{2}{r}\rho_{,u}w^{u^2} + \frac{2}{r}\rho_{,v}w^{v^2}$$

que es siempre positiva, como se comprueba con solo recordar que $\rho_{,u} > 0$, $\rho_{,v} > 0$, $e^{2\rho} > 1$ y que $|w^r| < |w^t|$ (para que el vector sea temporal)

Por otro lado la condición fuerte de energía se puede enunciar (vease [27]) como que el vector $w_\nu T^{\mu\nu}$ no es espacial, para todo vector w temporal. En nuestra solución el género de dicho vector se puede calcular sencillamente dando:

$$e^{-4\rho}\left(\frac{1}{r^4}(1 - e^{2\rho})^2 w^\mu w_\mu + \frac{4}{r^4}(1 - e^{2\rho})^2 (-w^{t^2} + w^{r^2}) +$$

$$\frac{e^{2\rho}}{r^2}(1 - e^{2\rho})(\rho_{,u}w^{u^2} + \frac{2}{r}\rho_{,v}w^{v^2})\right) < 0$$

y por tanto se cumple también la condición fuerte de energía

Capítulo 6

SOLUCIONES EXACTAS CON METRICA EUCLIDIANA

El proceso de resolución del sistema de ecuaciones Einstein-Yang-Mills en el caso euclidiano es conceptualmente muy semejante al que hemos llevado a cabo en espacio lorentziano, por tanto, nos remitiremos con cierta frecuencia a cálculos del capítulo anterior.

Quizás las soluciones que más fama han adquirido han sido aquellas que se han podido interpretar como "agujeros gusano" ("wormhole"). Entendemos como una solución de este tipo aquella tal que la variedad que representa la métrica presenta dos regiones asintóticamente planas, con una región que las conecta. Como se describe por ejemplo en [36] ó [41] es condición necesaria para la existencia de una solución de esta clase el que el tensor de Ricci asociado tenga autovalores negativos. Ejemplo de solución de este tipo es el wormhole de Tolman que, aunque se obtuvo originalmente en otro esquema (es la versión euclidea del universo dominado por radiación ($P = \frac{1}{3}\rho$) de Tol-

man), se puede obtener también de un sistema Einstein - Yang-Mills [38]. La métrica tiene simetría $SO(4)$ y es de la forma:

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} dR^2 + R^2(d\Psi^2 + \text{sen}^2\Psi d\Omega^2)$$

(con $d\Omega^2$ métrica de la 2-esfera) para unos valores de $\Psi = \theta = \frac{\pi}{2}$ entonces la métrica de la superficie bidimensional que queda es:

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} dR^2 + R^2 d\phi^2$$

Si suponemos que esta superficie está sumergida en un espacio euclideo plano tridimensional donde la coordenada de la nueva dimensión, z , se mueve sobre la superficie "dibujandola", entonces podemos representar la forma de la superficie, que, de alguna forma, nos indica el caracter de nuestra variedad original. En nuestro caso la ecuación a resolver es:

$$1 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 - R_0^2}$$

que se resuelve con

$$z = \pm \ln(R + \sqrt{R^2 - R_0^2})$$

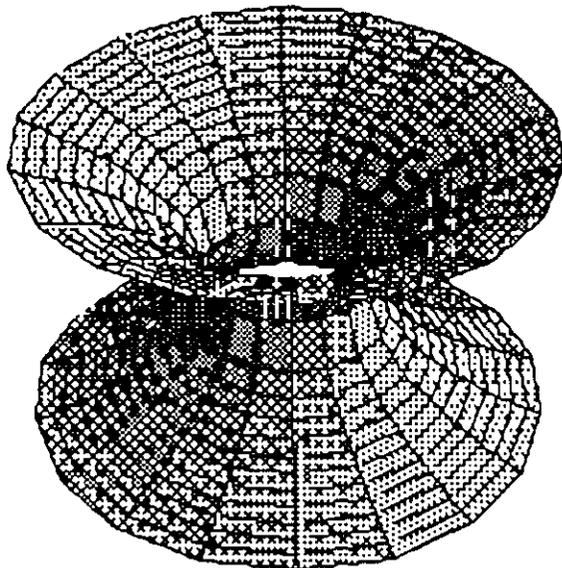


figura 5.

Como se presenta en la figura 5. Para R grandes, tenemos dos variedades euclideas separadas que se unen a través de un puente cuyo radio mínimo es R_0 .

Nuestro objetivo original al plantearnos el presente cálculo no era intentar obtener soluciones de este tipo, en primer lugar debido a que todas las conocidas (por el autor) poseen simetría $SO(4)$, y como vimos en el capítulo 3, la condición necesaria para poseer dicha simetría se desacopla de la condición de degeneración algebraica en espacios no planos. Tan solo pretendíamos aplicar los métodos desarrollados en

el capítulo anterior para obtener soluciones exactas al problema Einstein - Yang-Mills euclídiano. Sin embargo, una vez obtenidas las soluciones que se presentan a continuación pudimos comprobar que se trataban efectivamente de "wormholes", aunque ligeramente distintos de los que habitualmente aparecen en la literatura. Como veremos, nuestra solución cumple el criterio de autovalores del Ricci negativos (aunque, como dijimos, no se trata de una condición suficiente), y en un instante de tiempo ($t = 0$) une suavemente dos variedades asintóticamente euclídeas. La unión se produce a través de un puente que tiene la particularidad de que en la parte exterior (para valores de la coordenada radial) es exactamente el de Tolman, pero, sin embargo, la parte interior no está vacía, sino que dibuja una esfera. Fuera de $t = 0$ ambas regiones (exterior e interior) están unidas no suavemente a través de los bordes de un "plátano", que al cabo de un tiempo finito desaparece.

6.1 Planteamiento del problema

Con una métrica digonal parametrizada por

$$ds^2 = +e^{-2\tau} dt^2 + e^{2\rho} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (6.1)$$

donde τ y ρ son funciones de las coordenadas (t, r) . Las ecuaciones de evolución Yang-Mills en el caso de campos con simetría esférica y en el gauge en que $\varphi_2 = 0$, son:

$$(r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr})_{,r} = -2e^{\tau+\rho} A_t \varphi^2 \quad (6.2)$$

$$(r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr}),_t = 2e^{-\tau-\rho} A_r \varphi^2 \quad (6.3)$$

$$-(e^{\tau+\rho} \varphi_{,t}),_t - (e^{-\tau-\rho} \varphi_{,r}),_r + e^{\tau+\rho} \varphi A_t^2 + \frac{e^{-\tau-\rho} \varphi A_r^2}{r^2} = e^{\rho-\tau} \varphi \frac{(1-\varphi^2)}{r^2} \quad (6.4)$$

$$(e^{\tau+\rho} \varphi A_t),_t + (e^{-\tau-\rho} \varphi A_r),_r + e^{\tau+\rho} \varphi_{,t} A_t + e^{-\tau-\rho} \varphi_{,r} A_r = 0 \quad (6.5)$$

La ligadura algebraica es

$$F_{tr}(1-\varphi^2) = k(A_t \varphi \varphi_{,r} - A_r \varphi \varphi_{,t}) \quad (6.6)$$

$$\frac{(r e^{\tau} F_{tr})^2 + \left(\frac{e^{\rho}(1-\varphi^2)}{r}\right)^2}{k(e^{2\tau+2\rho}(\varphi_{,t}^2 + A_t^2 \varphi^2) + (\varphi_{,r}^2 + A_r^2 \varphi^2))} \quad (6.7)$$

Finalmente, las ecuaciones de Einstein con nuestra parametrización se expresan:

$$\rho_{,t} = K \frac{2}{r} (\varphi_{,t} \varphi_{,r} + A_t A_r \varphi^2) \quad (6.8)$$

$$-\frac{1}{r} \tau_{,r} - \frac{1}{r} \rho_{,r} + \frac{1-e^{2\rho}}{r^2} = -K \left(-F_{tr}^2 e^{2\tau} + \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4} \right) \quad (6.9)$$

$$-\tau_{,rr} + \tau_{,r}^2 + \tau_{,r} \rho_{,r} - \frac{2}{r} \tau_{,r} + e^{2\tau+2\rho} (\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t} \tau_{,t}) = -K \left(F_{tr}^2 e^{2\tau} - \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4} + \frac{2}{r^2} e^{2\tau+2\rho} (\varphi_{,t}^2 + A_t^2 \varphi^2) - \frac{2}{r^2} (\varphi_{,r}^2 + A_r^2 \varphi^2) \right) \quad (6.10)$$

$$-\tau_{,rr} + \tau_{,r}^2 + \tau_{,r} \rho_{,r} - \frac{2}{r} \rho_{,r} + e^{2\tau+2\rho} (\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t} \tau_{,t}) = -K \left(F_{tr}^2 e^{2\tau} - \frac{(1-\varphi^2)^2 e^{2\rho}}{r^4} - \frac{2}{r^2} e^{2\tau+2\rho} (\varphi_{,t}^2 + A_t^2 \varphi^2) + \frac{2}{r^2} (\varphi_{,r}^2 + A_r^2 \varphi^2) \right) \quad (6.11)$$

6.2 Simplificación de las ecuaciones Yang-Mills y condición algebraica

La ecuación (6.5) se resuelve con

$$A_t = \frac{\phi_{,r}}{e^{\tau+\rho}\varphi^2} ; A_r = -\frac{\phi_{,t}e^{\tau+\rho}}{\varphi^2} \quad (6.12)$$

Con lo que las ecuaciones (6.2) y (6.3) se resuelven trivialmente con

$$r^2 e^{\tau-\rho} F_{tr} + 2\phi = c = \text{constante} \quad (6.13)$$

Esta última ecuación y (6.4) constituyen las ecuaciones de evolución Yang-Mills a resolver.

$$-(e^{\tau+\rho}\varphi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho}\varphi_{,r})_{,r} + \frac{\phi_{,r}^2 e^{-\tau-\rho}}{\varphi^3} + \frac{\phi_{,t}^2 e^{\tau+\rho}}{\varphi^3} = \frac{e^{\rho-\tau}\varphi(1-\varphi^2)}{r^2} \quad (6.14)$$

$$-(e^{\tau+\rho}\phi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho}\phi_{,r})_{,r} + \frac{2\varphi_{,r}\phi_{,r}e^{\tau+\rho}}{\varphi} + \frac{2\varphi_{,t}\phi_{,t}e^{-\tau-\rho}}{\varphi} = \frac{e^{\rho-\tau}\varphi^2(c-2\phi)}{r^2} \quad (6.15)$$

Definimos $X = (c - 2\phi)$, $Y = (1 - \varphi^2)$, y $A = X + Y$, $B = X - Y$. Haciendo un poco de álgebra con las ecuaciones Yang-Mills y algebraicas se obtienen las siguientes expresiones (evolución y algebraica), para las funciones A y B .

$$(e^{\tau+\rho}A_{,t})_{,t} + (e^{-\tau-\rho}A_{,r})_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2}(2A(1-Y) - \frac{2}{k}A^2) \quad (6.16)$$

$$e^{\tau+\rho}A_{,t}^2 + e^{-\tau-\rho}A_{,r}^2 = \frac{4e^{\rho-\tau}}{kr^2}(1-Y)A^2 \quad (6.17)$$

$$(e^{\tau+\rho} B_{,t})_{,t} + (e^{-\tau-\rho} B_{,r})_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2} (2B(1-Y) + \frac{2}{k} B^2) \quad (6.18)$$

$$e^{\tau+\rho} B_{,t}^2 + e^{-\tau-\rho} B_{,r}^2 = \frac{4e^{\rho-\tau}}{kr^2} (1-Y) B^2 \quad (6.19)$$

Obsérvese que hasta ahora la proceso en la resolución del problema está siendo completamente paralela a la realizada en el caso lorentziano.

6.3 Condición de compatibilidad

Despejando $A_{,t} e^{\tau+\rho}$ en (6.17) y sustituyendolo en (6.16), y procediendo de forma análoga con $A_{,r} e^{-\tau-\rho}$ se llega a (definiendo $e^{-\rho} A_{,r} = F \cos \Psi$ y $e^{\tau} A_{,t} = F \sin \Psi$):

$$\begin{aligned} -\Psi_{,r} + e^{\tau+\rho} \rho_{,t} = \\ \frac{e^{\tau+\rho}}{2(1-Y)} (Y_{,t} + \frac{A_{,t}}{A} (-2(1-Y) + k(1-Y) - A)) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{,t} - e^{-\tau-\rho} (\tau_{,r} + \frac{1}{r}) = \\ \frac{e^{-\tau-\rho}}{2(1-Y)} (Y_{,r} + \frac{A_{,r}}{A} (-2(1-Y) + k(1-Y) - A)) \end{aligned} \quad (6.21)$$

e imponiendo la integrabilidad de Ψ

$$\begin{aligned} (e^{\tau+\rho} \rho_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho} (\tau_{,r} + \frac{1}{r}))_{,r} = \\ \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2} (Y + (1-Y)(-2+k) - \frac{2}{k} (-2+k)(1-Y) - 2A(1 - \frac{1}{k})) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Procediendo de forma análoga con las ecuaciones (6.18)-(6.19) (En el caso lorentziano no fue necesario puesto que se trataba de dos ecuaciones y sus complejas conjugadas) se llega a (definiendo $e^{-\rho} B_{,r} =$

$G\cos\Lambda$ y $e^\tau B_{,t} = G\sin\Lambda$):

$$-\Lambda_{,r} + e^{\tau+\rho}\rho_{,t} = \frac{e^{\tau+\rho}}{2(1-Y)}\left(Y_{,t} + \frac{B_{,t}}{B}(-2(1-Y) + k(1-Y) + B)\right) \quad (6.23)$$

$$\Lambda_{,t} - e^{-\tau-\rho}\left(\tau_{,r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{e^{-\tau-\rho}}{2(1-Y)}\left(Y_{,r} + \frac{B_{,r}}{B}(-2(1-Y) + k(1-Y) + B)\right) \quad (6.24)$$

y nuevamente, exigiendo la integrabilidad de Λ se llega

$$\left(e^{\tau+\rho}\rho_{,t}\right)_{,t} - \left(e^{-\tau-\rho}\left(\tau_{,r} + \frac{1}{r}\right)\right)_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2}\left(Y + (1-Y)(-2+k) - \frac{2}{k}(-2+k)(1-Y) + 2B\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \quad (6.25)$$

restando (6.25) - (6.22)

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)(A + B) = 0 \quad (6.26)$$

que tiene dos soluciones, la primera $A + B = 0 \rightarrow X = 0$, se trata del Ansatz de B.M. y lo resolveremos como un caso singular al final de este capítulo. La segunda, $k = 1$, es una condición sobre los tipos algebraicos posibles, y se puede expresar como que son imposibles (salvo en el Ansatz de B.M., de momento) los tipos X_0 en la clasificación algebraica.

En el caso general nos queda una única condición de integrabilidad dada por

$$\left(e^{\tau+\rho}\rho_{,t}\right)_{,t} - \left(e^{-\tau-\rho}\left(\tau_{,r} + \frac{1}{r}\right)\right)_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2} \quad (6.27)$$

Comparandola con el sistema de ecuaciones de Einstein (6.8-11) se llega fácilmente a

$$\tau_{,r} = -\rho_{,r} \quad (6.28)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r^2}(-X^2 + Y^2)} \quad (6.29)$$

Hasta ahora el proceso de resolución ha sido paralelo a aquel que llevamos a cabo en espacio lorentziano (capítulo 5.), pero llegado este punto es cuando aparecen algunas de las diferencias más importantes. En el caso lorentziano el paso siguiente consistió en parametrizar las funciones Yang-Mills X e Y de tal forma que la ligadura análoga a (6.29) fuese únicamente entre la componente de la métrica y una única función (e^{2R} entonces). Por ello parametrizamos las funciones X e Y en coordenadas circulares como si de unas coordenadas cartesianas se tratase. Ahora no podemos usar la generalización directa, pues estaríamos perdiendo generalidad. En efecto, con una parametrización de la forma $X = e^R \cosh(I)$ e $Y = e^R \sinh(I)$ estaríamos restringiéndonos únicamente a funciones tal que $X > Y$, necesitaremos por tanto una parametrización más general, aunque los cálculos se complicarán ligeramente.

Por otra parte, la forma de la expresión (6.29) permite un poco más de juego que la análoga en el caso lorentziano. En efecto, en (5.30), el coeficiente de la métrica estaba obligado a ser > 1 , y puesto que ρ, r debía ser > 0 , estábamos "obligados" a obtener una métrica con malos comportamientos cuando r se alejase del origen. Sin embargo ahora, en principio, no existe limitación al valor de $e^{2\rho}$, con lo cual, es de esperar, que puedan existir soluciones de comportamiento más suave.

Existe un caso singular en la expresión (6.29), dado por $X = Y$, en que obtenemos la métrica euclídea. Es fácil de comprobar que dicha condición se corresponde con la condición de autodualidad sobre campos algebraicamente especiales, y que, por tanto, el tensor energía-

momento Yang-Mills es idénticamente nulo, y las ecuaciones gravitatorias se corresponden a las de vacío. El problema a resolver en este caso es el de encontrar solución a las ecuaciones de autodualidad Yang-Mills en un espacio curvo de métrica Schwarzschild. Esta cuestión no ha sido tratada en este trabajo.

6.4 Resolución de las ecuaciones. Caso estático

El caso estático se obtiene con solo imponer que ninguna de las funciones con que parametrizamos tanto la métrica como el potencial Yang-Mills depende de la coordenada t . Definiendo

$$A = \frac{1}{r^2} e^\rho (c - 2\phi)$$

$$B = \frac{1}{r^2} e^\rho (1 - \varphi^2)$$

$$C = \frac{1}{r\varphi} \phi_{,r}$$

$$D = \frac{1}{r} \varphi_{,r}$$

las condiciones algebraicas se pueden escribir

$$(A \pm B)^2 = k(C \pm D)^2$$

que se resuelve con una de las dos posibilidades siguientes:

$$A = \pm\sqrt{k}C \text{ y } B = \pm\sqrt{k}D \quad o$$

$$A = \pm\sqrt{k}D \text{ y } B = \pm\sqrt{k}C$$

Introduciendo las primeras igualdades en las dos ecuaciones Yang-Mills se obtienen dos ecuaciones en derivadas de las τ y ρ incompatibles salvo en soluciones triviales. Procediendo de forma similar para el segundo caso se llega a

$$(c - 2\phi) = \pm(1 - \varphi^2)$$

que es el caso autodual con degeneración algebraica. Por tanto, las ecuaciones de Einstein se desacoplan del campo Yang-Mills.

6.5 Resolución de las ecuaciones. Caso no estático

Hacemos un cambio de variable dado por

$$z = r + it$$

$$\bar{z} = r - it$$

y parametrizamos las funciones Yang-Mills por

$$X = \epsilon e^R \frac{1}{\sqrt{-1 + I^2}} \quad (6.30)$$

$$Y = \epsilon e^R \frac{I}{\sqrt{-1 + I^2}} \quad (6.31)$$

donde se admite que $\epsilon = \pm 1$ ($e^{I^2} > 1$) ó $\epsilon = \pm i$ ($e^{I^2} < 1$). El sistema completo de ecuaciones a resolver es entonces (donde hemos redefinido t de forma que la ecuación (6.28) se integre con $\tau = -\rho$):

$$4\rho_{,z\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(e^{2\rho} - 1) \quad (6.32)$$

$$\tau = -\rho \quad (6.33)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r^2}\epsilon^2 e^{2R}} \quad (6.34)$$

$$2\rho_{,z} = \frac{-K}{r(1-Y)}\epsilon^2 e^{2R}[-R_{,z}^2 + I_{,z}^2 \frac{1}{(-1+I^2)^2}] \quad (6.35)$$

$$2\rho_{,\bar{z}} = \frac{-K}{r(1-Y)}\epsilon^2 e^{2R}[-R_{,\bar{z}}^2 + I_{,\bar{z}}^2 \frac{1}{(-1+I^2)^2}] \quad (6.36)$$

$$R_{,z}I_{,\bar{z}} + R_{,\bar{z}}I_{,z} = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\epsilon^{2\rho}}{r^2} = \frac{1}{(1-Y)}[R_{,z}R_{,\bar{z}} + I_{,z}I_{,\bar{z}} \frac{1}{(-1+I^2)^2}] \quad (6.38)$$

$$R_{,z\bar{z}} = \frac{-1}{2r^2}e^{2\rho} \quad (6.39)$$

$$-I_{,z\bar{z}} + 2\frac{I_{,z}I_{,\bar{z}}I}{(I^2-1)} = -\frac{1}{2r^2}e^{2\rho}e^R\epsilon\sqrt{I^2-1} \quad (6.40)$$

Despejando $I_{,\bar{z}}$ en (6.37) y sustituyendolo en (6.35), (6.36), y (6.38). Dividiendo el resultado de (6.35) entre (6.36), y haciendo uso de (6.34) se llega a

$$4\rho_{,z}\rho_{,\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (6.41)$$

y el mismo resultado se obtiene dividiendo (6.36) entre (6.38). Luego del sistema de ecuaciones (6.35), (6.36) y (6.38) solo es necesaria una de ellas (en nuestro caso hemos elegido (6.35)) y (6.41).

Se puede comprobar que las ecuaciones (6.39) y (6.40) son una identidad sobre soluciones del resto del sistema, siempre y cuando $I \neq \text{constante}$, en cuyo caso es necesario imponer (6.40). Por tanto el

sistema completo a resolver es equivalente a:

$$4\rho_{,z\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(e^{2\rho} - 1) \quad (6.42)$$

$$4\rho_{,z\rho,\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (6.43)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r^2}\epsilon^2 e^{2R}} \quad (6.44)$$

$$2\rho_{,z} = \frac{K}{r(1-Y)}\epsilon^2 e^{2R}[-R_{,z}^2 + I_{,z}^2 \frac{1}{(-1+I^2)^2}] \quad (6.45)$$

$$R_{,z}I_{,\bar{z}} + R_{,\bar{z}}I_{,z} = 0 \quad (6.46)$$

(6.42) y (6.43) son formalmente las mismas ecuaciones que encontramos en el caso lorentziano. Su solución general se puede obtener por tanto de la misma forma (vease apéndice 1.) obteniéndose (partiendo del "generador de multimerones")

$$e^{2\rho} = g_{rr} = g_{tt} = \frac{1}{2} \left(1 + \eta \frac{1 - (\beta z + \kappa)(\beta \bar{z} - \kappa)}{\sqrt{(1 + (\beta z + \kappa)^2)(1 + (\beta \bar{z} - \kappa)^2)}} \right) \quad (6.47)$$

Al igual que nos ocurría en el caso lorentziano, la solución anterior admite una constante arbitraria, (κ), que se puede absorber redefiniendo el origen de la coordenada "t" (tiempo euclideo). Al igual que en el caso lorentziano también existe una segunda solución (a partir del "generador del meron"). La tratamos en la sección 6.9 de este capítulo.

Sin mayor complicación se llega a que (6.46) se resuelve en general con

$$I = I(\operatorname{arcsch}(\beta z) - \eta \operatorname{arcsch}(\beta \bar{z})) \quad (6.48)$$

Definimos $\xi = \operatorname{arcsch}(\beta z) + \operatorname{arcsch}(\beta \bar{z})$ y $\omega = \operatorname{arcsch}(\beta z) - \operatorname{arcsch}(\beta \bar{z})$. Entonces podemos distinguir dos casos, si $\eta = +1$ entonces $I = I(\omega)$ y por el contrario si $\eta = -1$ entonces $I = I(\xi)$. Resolvemos la última ecuación (6.45) distinguiendo estas dos posibilidades.

i) $\eta = +1$

Entonces e^{2R} y (6.45) se escriben:

$$e^{2R} = \frac{(z + \bar{z})^2 \operatorname{senh}^2(\xi/2)}{-4K\epsilon^2 \operatorname{cosh}^2(\omega/2)}$$

$$\operatorname{senh}^2(\xi/2) + \epsilon \frac{I}{\sqrt{-1 + I^2}} \left| \left(\frac{\operatorname{senh}^2(\xi/2)}{\beta \sqrt{-K\epsilon^2}} \right) \right| = \operatorname{senh}^2(\xi/2) I_{,\omega}^2 \frac{1}{(-1 + I^2)^2}$$

Si queremos que la métrica tenga un comportamiento asintótico euclideo estamos obligados a que β sea una constante imaginaria, por tanto ξ será una variable imaginaria y ω real, y por tanto, para que $e^{2R} > 0$ entonces ϵ deberá ser real. Recordando la parametrización empleada, para que los campos X e Y sean reales, entonces $(-1 + I^2) > 0$. Por tanto, la expresión final a resolver será:

$$1 - \epsilon \frac{I}{\sqrt{-1 + I^2}} \left| \left(\frac{-1}{\beta \sqrt{-K\epsilon^2}} \right) \right| = I_{,\omega}^2 \frac{1}{(-1 + I^2)^2} \quad (6.49)$$

Donde la variable respecto a la que derivó es real.

ii) $\eta = -1$

Entonces (6.45) se escribe:

$$e^{2R} = \frac{(z + \bar{z})^2 \operatorname{cosh}^2(\omega/2)}{-4K\epsilon^2 \operatorname{senh}^2(\xi/2)}$$

$$\operatorname{cosh}^2(\omega/2) - \epsilon \frac{I}{\sqrt{-1 + I^2}} \left| \left(\frac{\operatorname{cosh}^2(\omega/2)}{\beta \sqrt{-K\epsilon^2}} \right) \right| = \operatorname{cosh}^2(\omega/2) I_{,\xi}^2 \frac{1}{(-1 + I^2)^2}$$

Siguiendo un razonamiento semejante se llega a que β debe ser real, ϵ debe ser imaginario y $(-1 + I^2) < 0$.

$$1 - \epsilon \frac{I}{\sqrt{-1 + I^2}} \left| \left(\frac{-1}{\beta \sqrt{-K\epsilon^2}} \right) \right| = I_{,\xi}^2 \frac{1}{(-1 + I^2)^2} \quad (6.50)$$

Y donde la variable con respecto a la que derivamos es real.

Hemos conseguido finalmente reducir el problema a la integración de una expresión más o menos compleja. En lo que sigue a continuación, vamos a demostrar la existencia de soluciones de esa ecuación diferencial, y describiremos cualitativamente su comportamiento en el marco de la teoría de ecuaciones autónomas. Finalmente obtendremos, para algunos valores concretos de las constantes que han aparecido, la solución explícita en términos de funciones conocidas. Distinguiremos los casos $\eta \pm 1$.

a. $\eta = 1$

La ecuación autónoma (6.49) presenta tres soluciones constantes dadas por:

$$I = \pm 1$$

$$I = \text{signo}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

donde $\alpha = \epsilon \left| \frac{1}{\beta \sqrt{-K\epsilon^2}} \right|$. Vimos anteriormente que en este caso se debe cumplir que $|I| > 1$, con lo que la región comprendida entre las dos primeras soluciones constantes no es accesible. Por otro lado, para que se cumpla que $I_{\omega}^2 > 0$ debemos descartar la región comprendida entre la tercera solución constante y la primera. Sin embargo, podemos asegurar que existen soluciones de la ecuación autónoma planteada en los siguientes casos:

- $1 > \alpha > 0$. Existen soluciones para $I > \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ y para $I < -1$.
- $-1 < \alpha < 0$. Existen soluciones para $I < -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ y para $I > 1$.

- $\alpha \geq 1$. Existen soluciones únicamente para $I < -1$.
- $\alpha \leq -1$. Existen soluciones únicamente para $I > 1$.

Estas soluciones divergen rápidamente en uno de los sentidos, mientras que en el otro el problema de valores iniciales no admite solución única. En efecto, es sencillo de comprobar que

$$I = \frac{\operatorname{tag}^4\left(\frac{\omega}{\sqrt{8}}\right) + 1}{\operatorname{tag}^4\left(\frac{\omega}{\sqrt{8}}\right) - 1}$$

es solución para $\alpha = 1$, y que por lo tanto, el valor inicial $I(0) = -1$ admite la solución anterior y también la solución constante $I(\omega) = -1$. El comportamiento en la divergencia se puede estudiar cualitativamente. Para grandes I la ecuación autónoma se transforma en

$$I_{,\omega} = \pm I^2 \sqrt{1 - \alpha}$$

cuya solución es

$$I = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}(\omega - \omega_0)}$$

que presenta una asíntota vertical en ω_0 . Obsérvese que la solución explícita anterior presenta efectivamente una asíntota vertical en $\omega = \frac{\sqrt{8}\pi}{4}$.

b. $\eta = -1$

La ecuación autónoma (6.52) presenta tres soluciones constantes dadas por (recordemos que ahora la constante ϵ es imaginaria)

$$I = \pm 1$$

$$I = \text{signo}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

donde $\alpha = -i\epsilon \left| \frac{1}{\beta\sqrt{-K\epsilon^2}} \right|$. Ahora se debe cumplir que $|I| < 1$, con lo que la región exterior a las dos primeras soluciones constantes no es accesible, los casos posibles son:

- $\alpha \geq 0$. Existen soluciones con $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > I > -1$
- $\alpha \leq 0$. Existen soluciones con $1 > I > \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

Estas soluciones son monótonas, presentando dos asíntotas horizontales en las dos soluciones constantes que marcan sus límites.

6.6 ¿ Es general la parametrización empleada ?

En el apartado anterior hemos mencionado que la parametrización definida es completamente general. En efecto, hemos tenido la precaución de admitir que la constante ϵ pueda ser tanto real como imaginaria. Con ello estamos admitiendo la posibilidad general de que X puede sea mayor o menor que Y (el caso en que $X = Y$ es equivalente a la condición de autodualidad). Sin embargo, podríamos plantearnos que existe, en principio, un caso que no estamos considerando, aquel en que $X > Y$ en determinadas regiones de la variedad euclídea, y $X < Y$ en el resto. Es decir, aquel en el que ϵ no es una constante, pues sería real en algunas zonas e imaginario en el resto. Sin embargo, es fácil de demostrar que se trata de una situación imposible.

Hemos visto que el sistema de ecuaciones que debe satisfacer la métrica es:

$$4\rho_{,z\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(e^{2\rho} - 1) \quad (6.51)$$

$$4\rho_{,z\rho,\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (6.52)$$

donde (6.51) es consecuencia de la compatibilidad de la condición de integrabilidad (6.27) con las ecuaciones Einstein-Yang-Mills. En nuestro desarrollo obtuvimos (6.52) tras haber impuesto la parametrización, pero es sencillo de comprobar que es un resultado independiente de la parametrización empleada.

Por tanto la forma de la métrica (6.47) es independiente de la parametrización empleada. El único punto donde esta métrica es exactamente Euclídea es en $r = 0$. Es decir, que el coeficiente de la métrica es siempre mayor que uno o menor que uno (según sea β imaginario o real), y por lo tanto, observando (6.29), siempre se cumplirá que $X < Y$ o que $X > Y$ y podemos concluir que la parametrización empleada en el desarrollo es general.

6.7 Ansatz de Bartnik-McKinnon

Al igual que ocurría en el caso lorentziano, el caso en que $X = 0$ es singular, y por tanto no se puede considerar resuelto dentro del proceso general del apartado anterior. En este punto vamos a resolverlo por separado. Adelantando resultados, veremos, que no se obtienen

soluciones distintas de aquellas que obtendríamos como caso límite del caso general cuando $I \rightarrow \text{constante}$. Recordando la definición de X y deshaciendo los cambios de notación definidos en (6.12), observamos que este Ansatz se corresponde con A_t y A_r nulos, obsérvese que F_{tr} es invariante gauge bajo la acción del subgrupo $U(1)$ de invarianza gauge residual y que, por tanto, es imposible llegar a esta condición únicamente por transformaciones gauge.

En este caso, el potencial Yang-Mills en componentes es:

$$\mathbf{A}_t = (0, 0, 0); \quad \mathbf{A}_r = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{A}_\theta = (-\varphi, 0, 0); \quad \mathbf{A}_\phi = (0, -\varphi \sin \theta, -\cos \theta)$$

Las componentes del campo Yang-Mills son:

$$\mathbf{F}_{tr} = (0, 0, 0); \quad \mathbf{F}_{t\theta} = (-\varphi_{,t}, 0, 0); \quad \mathbf{F}_{t\phi} = (0, -\varphi_{,t} \sin \theta, 0)$$

$$\mathbf{F}_{\theta\phi} = (0, 0, (1 - \varphi^2) \sin \theta); \quad \mathbf{F}_{r\theta} = (-\varphi_{,r}, 0, 0); \quad \mathbf{F}_{r\phi} = (0, -\varphi_{,r} \sin \theta, 0)$$

El sistema completo de ecuaciones Einstein-Yang-Mills se escribe como:

$$-(e^{\tau+\rho} \varphi_{,t})_{,t} - (e^{-\tau-\rho} \varphi_{,r})_{,r} = \frac{e^{\rho-\tau}}{r^2} \varphi (1 - \varphi^2) \quad (6.53)$$

$$\rho_{,t} = K \frac{2}{r} \varphi_{,t} \varphi_{,r} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r} \rho_{,r} + \frac{2}{r} \tau_{,r} - e^{2\tau+2\rho} (\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t} \tau_{,t}) = \\ K \left(-\frac{e^{2\rho}}{r^4} (1 - \varphi^2)^2 + 2 \frac{e^{2\tau+2\rho}}{r^2} \varphi_{,t}^2 - \frac{2}{r^2} \varphi_{,r}^2 \right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\tau_{,rr} - \tau_{,r}^2 - \tau_{,r} \rho_{,r} + \frac{2}{r} \rho_{,r} - e^{2\tau+2\rho} (\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t} \tau_{,t}) =$$

$$K\left(-\frac{e^{2\rho}}{r^4}(1-\varphi^2)^2 - 2\frac{e^{2\tau+2\rho}}{r^2}\varphi_{,t}^2 + \frac{2}{r^2}\varphi_{,r}^2\right) \quad (6.56)$$

$$-\tau_{,r} - \rho_{,r} + \frac{1}{r} - \frac{e^{2\rho}}{r} = -K\frac{e^{2\rho}}{r^3}(1-\varphi^2)^2 \quad (6.57)$$

Finalmente, la condición de degeneración algebraica es:

$$\frac{e^{2\rho}}{r^2}(1-\varphi^2)^2 = k(\varphi_r^2 + e^{2\tau+2\rho}\varphi_t^2) \quad (6.58)$$

Obsérvese que ahora es imposible $k < 0$. Distinguiamos dos casos

(i) *Caso estático*

Las ecuaciones son triviales de escribir con solo hacer $k = 1$ y eliminar la dependencia en t . Sin ningún problema se llega a

$$\tau_{,r} = \left(-1 - \epsilon e^\rho \varphi \frac{1}{r}\right)$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Haciendo un poco de álgebra entre las ecuaciones se llega a que

$$\rho_{,r} = \left(1 + \epsilon e^\rho \varphi \frac{1}{r}\right)$$

es decir, $\tau_r = -\rho_r$. Usando este nuevo resultado en el sistema anterior de ecuaciones obtenemos la ligadura para el coeficiente de la métrica:

$$-\epsilon^{4\rho} + 2e^{2\rho} - 1 = 0$$

que solo se resuelve con métrica Euclidea, y campo Yang-Mills gauge puro. (Obsérvese que en este Ansatz no existen soluciones autoduales).

(ii) *Caso no estático*

De la compatibilidad de (6.58) con (6.53) se obtienen (procediendo de forma análoga al caso general) dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\Psi_{,r} &= e^{\tau+\rho}(\rho_{,t} - (\frac{k}{2} - 1)\frac{U_{,t}}{U}) \\ \Psi_{,t} &= e^{-\tau-\rho}(-\tau_{,r} - \frac{1}{r} - (\frac{k}{2} - 1)(\frac{U_{,r}}{U} + \frac{1}{r}))\end{aligned}$$

donde hemos definido $\varphi_{,t}e^{\tau} = U \operatorname{sen}(\Psi)$ y $\varphi_{,r}e^{-\rho} = U \operatorname{cos}(\Psi)$. La condición de integrabilidad para Ψ nos da:

$$\begin{aligned}-\tau_{,rr} + \tau_{,r}^2 + \tau_{,r}\rho_{,r} + \frac{1}{r}\tau_{,r} + \frac{1}{r}\rho_{,r} + e^{2\tau+2\rho}(\rho_{,tt} + \rho_{,t}^2 + \rho_{,t}\tau_{,t}) \\ + \frac{1}{r^2} = (2-k)\frac{e^{2\rho}}{r^2}\frac{1}{k}[1 + \varphi^2(1-k)]\end{aligned}\quad (6.59)$$

De la compatibilidad de esta ecuación con (6.55)-(6.56) se llega a:

$$e^{2\rho} = \frac{3}{2 + (1 - \varphi^2)(-1 + \frac{2}{k}) + \varphi^2(-4 + k + \frac{4}{k}) - \frac{3K}{r^2}(1 - \varphi^2)^2}\quad (6.60)$$

Recordando que el caso $k = -2$ no es posible en este Ansatz, luego $k = 1$, y haciendo un poco de álgebra entre las ecuaciones se puede llegar a:

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r^2}(1 - \varphi^2)^2}\quad (6.61)$$

$$k = 1\quad (6.62)$$

$$\tau_{,r} = -\rho_{,r}\quad (6.63)$$

Es decir, reobtenemos exactamente los mismos resultados que se obtuvieron en general. Procediendo de forma semejante, definiendo $z = r + it$ y $\bar{z} = r - it$ (parametrizando $Y = \lambda e^R$, donde $\lambda = \pm 1$), se llega al siguiente conjunto de ecuaciones

$$R_{,z\bar{z}} = -\frac{1}{2r^2}e^{2\rho}\quad (6.64)$$

$$2\rho_{,z} = \frac{K}{r(1-\lambda e^R)} e^{2R} R_{,z}^2 = 2\frac{K}{r} \varphi_{,z}^2 \quad (6.65)$$

$$2\rho_{,\bar{z}} = \frac{K}{r(1-\lambda e^R)} e^{2R} R_{,\bar{z}}^2 = 2\frac{K}{r} \varphi_{,\bar{z}}^2 \quad (6.66)$$

$$\rho_{,z\bar{z}} = -\frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho}) \quad (6.67)$$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{Ke^{2R}}{r^2}} \quad (6.68)$$

$$R_{,z}R_{,\bar{z}} = \frac{1}{r^2} e^{2\rho}(1 - \lambda e^R) \quad (6.69)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede ver que es equivalente a resolver el sistema:

$$e^{2\rho} = \frac{1}{1 - \frac{Ke^{2R}}{r^2}} \quad (6.70)$$

$$\rho_{,z\bar{z}} = -\frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho}) \quad (6.71)$$

$$\rho_{,z}\rho_{,\bar{z}} = \frac{1}{4r^2}(1 - e^{2\rho})^2 \quad (6.72)$$

$$R_{,z}R_{,\bar{z}} = \frac{1}{r^2} e^{2\rho}(1 - \lambda e^R) \quad (6.73)$$

Las ecuaciones (6.72-73) se resuelven con:

$$e^{2\rho} = g_{tt} = g_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 + \eta \frac{1 - (\beta z + \kappa)(\beta \bar{z} - \kappa)}{\sqrt{[1 + (\beta z + \kappa)^2]} \sqrt{[1 + (\beta \bar{z} - \kappa)^2]}} \right) \quad (6.74)$$

Finalmente solo queda por imponer (6.73) que se resuelve con β imaginaria y

$$\lambda = 1 \text{ y } \beta = \pm \frac{i}{\sqrt{K}} \text{ y } \eta = 1 \quad (6.75)$$

Existe otra solución con $\eta = -1$ y $\lambda = -1$ pero presenta un mal comportamiento asintótico. Concluimos finalmente que el caso "singular" que apareció en el proceso de resolución de las ecuaciones generales se puede resolver completamente, y que el resultado obtenido

coincide exactamente con aquel que se obtiene del caso general cuando cuando $I \rightarrow \pm\infty$.

6.8 Propiedades de la solución

La solución obtenida depende de dos constantes β y κ , la segunda de ellas necesariamente imaginaria si β es real, o real si β es imaginaria para que el coeficiente de la métrica sea real. De la definición de z y \bar{z} se puede observar que κ se puede absorber mediante una redefinición del origen de "tiempo". Por otra parte la constante β nos define el punto en que la métrica es singular, pero las características esenciales no cambian. Por tanto en todo lo que sigue nos restringiremos por sencillez al caso en que $|\beta| = 1$.

Del análisis de la solución hecho entre (6.48 - 6.50) podemos distinguir dos casos distintos, cuando la constante β es imaginaria, y cuando es real. El primero es el único que permanece en el Ansatz de Bartnik-McKinnon.

(i) β imaginaria

A diferencia de lo que ocurría en el caso lorentziano, ahora la métrica definida tiene sentido en todo el espacio-tiempo, salvo en el punto $r = 1$ y $t = 0$, en que diverge. El comportamiento asintótico es euclideo.

$$e^{2\rho} \rightarrow \frac{1}{(r^2 + t^2)^2} (r^2)$$

En $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $t = \text{constante}$ la métrica de la superficie bidimensional que queda es:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + r^2 + t^2}{\sqrt{1 + (r^2 + t^2)^2 - 2r^2 + 2t^2}} \right) dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Que consideramos inmersa dentro de una variedad plana tridimensional, y donde nuestra superficie queda definida por $z = z(r)$. Entonces podemos identificar:

$$ds^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right) dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + r^2 + t^2}{\sqrt{1 + (r^2 + t^2)^2 - 2r^2 + 2t^2}} \right)$$

Cuando $t \gg 0$ tenemos dos variedades euclideas separadas, que se van deformando y acercando a medida que t disminuye. Cuando $t = 0$ la ecuación anterior se puede integrar explícitamente

$$1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + r^2}{|\sqrt{1 + (r^2)^2 - 2r^2}|} \right)$$

distinguiéndose dos regiones. Cuando $r < 1$ la solución es

$$z = \pm \sqrt{1 - r^2}$$

que define una esfera de radio unidad en torno al punto $(0, 0, 0)$ del espacio euclideo tridimensional; y cuando $r > 1$

$$z = \pm \ln(r + \sqrt{r^2 - 1})$$

que es exactamente igual que la que aparece en el wormhole de Tolman. Las superficies recién definidas aparecen en la siguiente figura

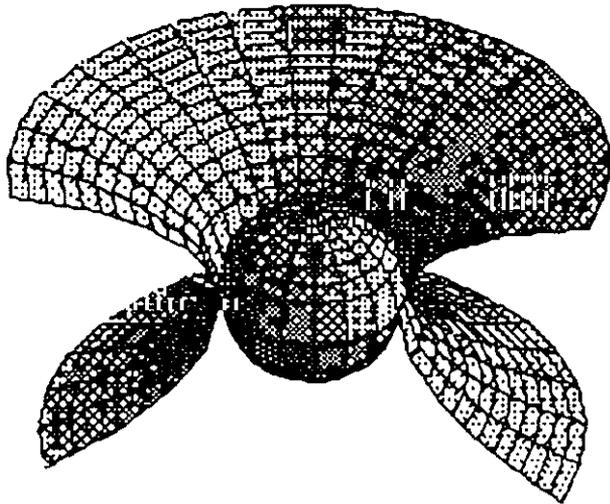


figura 6.

Concluyendo, partiendo de dos superficies asintóticamente planas y separadas, al evolucionar t se han ido deformando hasta que en un $t = \textit{finito}$ se cortan si bien de forma no suave. Por fin en $t = 0$ empalman suavemente (exactamente igual que Tolman para $r > 1$, y mediante una esfera para $r < 1$). Esta conexión suave entre superficies solo dura un instante, pues a continuación se vuelven a separar tendiendo de nuevo a dos superficies euclideas y separadas. La conexión

se realiza a través de la circunferencia de radio unidad en el espacio euclideo tridimensional de inmersión (en el el espacio original es evidentemente a través de la superficie de la esfera de radio unidad). En la siguiente representación aparece una única de las dos superficies en $t = 0$:

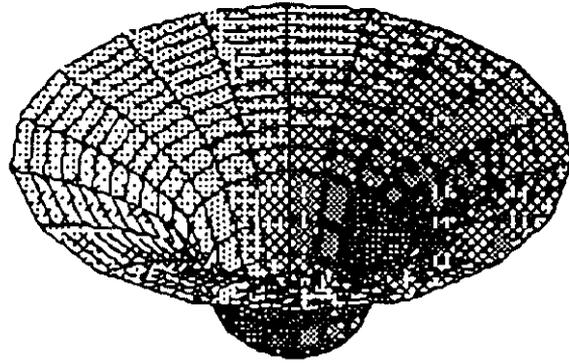


figura 7.

Al igual que nos ocurrió con métrica lorentziana, para poder expresar explícitamente la forma de los campos Yang-Mills deberíamos ser capaces de integrar la ecuación diferencial para I (6.49 y 6.50). Sin embargo, en el Ansatz de B.M. el problema está completamente integrado y la expresión final es:

$$\varphi^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{(1 - |\beta|^2 z^2)(1 - |\beta|^2 \bar{z}^2)} - |\beta|^2 z \bar{z} + 1)$$

que siempre es mayor que cero.

(ii) β real

La solución, en este caso, tiene sentido en todo el espacio-tiempo, salvo en $r = 0$ y $t = 0$ en que degenera ($g_{rr} = g_{tt} = 0$). Asintóticamente tiene un comportamiento euclideo. No podemos "dibujarla" siguiendo el procedimiento anterior, pues los coeficientes de la métrica están acotados superiormente a uno, y por tanto no tiene sentido el proceso anterior. Este caso no es realizable en el Ansatz de B.M. pues $g_{rr} < 1$, lo que implica que $X^2 > Y^2$.

6.8.1 Grupo de isometría

La condición de isometría $L_X g_{\mu\nu} = 0$ se escribe en componentes:

$$X_{,t}^t + X^t \rho_{,t} + X^r \rho_{,r} = 0 \quad (6.76)$$

$$X_{,r}^r + X^t \rho_{,t} + X^r \rho_{,r} = 0 \quad (6.77)$$

$$X_{,t}^r + X_{,r}^t = 0 \quad (6.78)$$

$$X_{,t}^\theta r^2 + X_{,\theta}^t e^{2\rho} = 0 \quad (6.79)$$

$$X_{,r}^\theta r^2 + X_{,\theta}^r e^{2\rho} = 0 \quad (6.80)$$

$$X_{,t}^\phi r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + X_{,\phi}^t e^{2\rho} = 0 \quad (6.81)$$

$$X_{,r}^\phi r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + X_{,\phi}^r e^{2\rho} = 0 \quad (6.82)$$

$$X_{,\theta}^\theta + \frac{X^r}{r} = 0 \quad (6.83)$$

$$X_{,\theta}^{\phi} \text{sen}^2(\theta) + X_{,\phi}^{\theta} = 0 \quad (6.84)$$

$$X_{,\phi}^{\phi} + \frac{X^r}{r} + X^{\theta} \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = 0 \quad (6.85)$$

Las ecuaciones (6.82-86) se resuelven con la dependencia en las coordenadas angulares dada por (igual que en el caso lorentziano):

$$X^{\theta} = SO(3) + f_1 \text{sen}(\theta) + f_2 \cos(\theta) \cos(\phi) - f_3 \cos(\theta) \text{sen}(\phi) \quad (6.86)$$

$$X^{\phi} = SO(3) + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} [-f_1 \text{sen}(\phi) - f_2 \cos(\phi)] \quad (6.87)$$

$$X^r = -f_1 r \cos(\theta) + f_2 r \text{sen}(\theta) \cos(\phi) - f_3 r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \quad (6.88)$$

$$X^t = -g_1 r \cos(\theta) + g_2 r \text{sen}(\theta) \cos(\phi) - g_3 r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \quad (6.89)$$

Donde f_i y g_i son funciones de t y r . Las ecuaciones que quedan por satisfacer quedan como condiciones diferenciales sobre estas funciones:

$$f_{i,r} r + f_i e^{2\rho} = 0 \quad (6.90)$$

$$f_{i,t} r + g_i e^{2\rho} = 0 \quad (6.91)$$

$$(f_i r)_{,t} - (g_i r)_{,r} = 0 \quad (6.92)$$

$$(f_i r)_{,t} + (g_i r)_{,t} = 0 \quad (6.93)$$

$$(g_i r)_{,t} + g_i r \rho_{,t} + f_i r \rho_{,r} = 0 \quad (6.94)$$

hasta ahora el proceso ha sido paralelo al seguido en el caso de métrica lorentziana, sin embargo ahora vuelven a aparecer diferencias, como consecuencia de que ahora la constante de integración β puede ser real e imaginaria. El conjunto anterior de ecuaciones se resuelve en general con:

$$f_i r = Z(z) + W(\bar{z})$$

$$g_i r = -iZ(z) + iW(\bar{z}) + 2ic$$

donde c es una constante, y $Z = c + \sqrt{1 + (\beta z)^2}$, $W = -c + \epsilon \sqrt{1 + (\beta \bar{z})^2}$ y ϵ es una constante que vale mas o menos uno. En el caso en que β sea real, entonces $\epsilon = -1$, mientras que si β es imaginaria entonces $\epsilon = 1$. Por tanto, los generadores del grupo de isometría son:

$$X^4, X^5, \text{ y } X^6 \text{ son los de simetría esférica} \quad (6.95)$$

$$X^1 = 2k_1 G r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \partial_t + 2k_1 F r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \partial_r + 2k_1 F \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - 2k_1 \frac{F \operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\phi \quad (6.96)$$

$$X^2 = -2k_2 G r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \partial_t - 2k_2 F r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \partial_r - 2k_2 F \cos \theta \operatorname{sen} \phi \partial_\theta - 2k_2 \frac{F \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta} \partial_\phi \quad (6.97)$$

$$X^3 = -2k_3 G r \cos \theta \partial_t - 2k_3 F r \cos \theta \partial_r + 2k_3 F \operatorname{sen} \theta \partial_\theta \quad (6.98)$$

donde

Si β es imaginaria, k_i es real:

$$F = \frac{1}{r} (\sqrt{1 + (\beta z)^2} + \sqrt{1 + (\beta \bar{z})^2}) \quad (6.99)$$

$$G = i \frac{1}{r} (-\sqrt{1 + (\beta z)^2} + \sqrt{1 + (\beta \bar{z})^2}) \quad (6.100)$$

y con β es real y k_i es imaginaria:

$$F = \frac{1}{r} (\sqrt{1 + (\beta z)^2} - \sqrt{1 + (\beta \bar{z})^2}) \quad (6.101)$$

$$G = i \frac{1}{r} (-\sqrt{1 + (\beta z)^2} - \sqrt{1 + (\beta \bar{z})^2}) \quad (6.102)$$

El álgebra que definen estos generadores tiene las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned}
[X^4, X^5] &= X^6 & [X^4, X^6] &= -X^4 & [X^5, X^6] &= X^4 \\
[X^4, X^3] &= X^1 & [X^4, X^1] &= -X^3 & [X^4, X^2] &= 0 \\
[X^5, X^3] &= X^2 & [X^5, X^1] &= 0 & [X^5, X^2] &= -X^3 \\
[X^6, X^3] &= 0 & [X^6, X^1] &= X^2 & [X^6, X^2] &= -X^1 \\
[X^3, X^1] &= X^4 & [X^3, X^2] &= X^5 & [X^1, X^2] &= X^6
\end{aligned}$$

que se corresponde con el álgebra de $SO(4)$ (véase p.e. [42]), tanto en el caso β real como cuando β es imaginaria.

6.8.2 Métrica de forma conforme plana explícitamente.

Repitiendo los pasos del capítulo anterior se llega a que el tensor de Weyl es idénticamente nulo sobre las soluciones. Por tanto, pertenecen al tipo 0 de la clasificación de Bel-Petrov, y existen unas coordenadas en las que la métrica será conforme plana.

Si usamos z y \bar{z} la métrica tiene la forma

$$ds^2 = e^{2\theta} dzd\bar{z} + \frac{(z + \bar{z})^2}{4} d\Omega^2$$

Resolvemos β real e imaginario por separado.

- $\beta = i$

$$e^{2\rho} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + z\bar{z}}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\bar{z}^2}} \right)$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$z = \tanh \xi$$

entonces la métrica queda

$$ds^2 = \frac{\cosh^2((\xi + \bar{\xi})/2)}{\cosh^2 \xi \cosh^2 \bar{\xi}} [d\xi d\bar{\xi} + \frac{\sinh^2(\xi + \bar{\xi})}{4\cosh^2(\xi + \bar{\xi})/2} d\Omega^2] \quad (6.103)$$

Estamos buscando un cambio de variable, tal que la métrica tenga forma conforme plana explícitamente

$$ds^2 = H(dad\bar{a} + \frac{1}{4}(a + \bar{a})^2 d\Omega^2)$$

La ecuación que deberá cumplir este cambio de variable será por tanto:

$$\xi_{,a} \bar{\xi}_{,\bar{a}} (a + \bar{a})^2 = 4 \sinh^2 \left(\frac{\xi + \bar{\xi}}{2} \right) \quad (6.104)$$

donde $\xi = \xi(a)$ y $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{a})$. Con la obligación adicional de que $\bar{\xi}$ sea la compleja conjugada de ξ se trata nuevamente de la ecuación que se resuelve en el apéndice 1. Sin embargo, en este caso, hemos preferido (pues así fué el proceso durante la realización de este trabajo) resolver nuevamente la ecuación. Definimos

$$\xi = 2 \operatorname{arctanh} A$$

Con lo que la ecuación a resolver se transforma en:

$$A_{,a} \bar{A}_{,\bar{a}} (a + \bar{a})^2 = (A + \bar{A})^2 \quad (6.105)$$

que tiene una solución trivial $A = ka + k'$, pero que nos da una métrica conforme plana que degenera asintóticamente ($g_{a\bar{a}} \rightarrow 0$). El resto de las soluciones son de la forma:

$$A = \frac{m}{(n-a)} + p \quad (6.106)$$

$$\bar{A} = -\frac{m}{(n+\bar{a})} - p \quad (6.107)$$

con m , n , y p constantes. Obsérvese que no hemos obtenido nuevas soluciones de la ecuación aparte de las que se obtienen en el apéndice, cuando $p = 1$ reobtenemos la solución "generadora del merón", mientras que en el resto de los casos (incluido $A = ka + k'$) reobtenemos la solución "generadora de multimerón".

Si elegimos $p = 0$, $n = i$ y $m = 1/2$ la métrica conforme plana queda

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{1}{4(i-a)(i+\bar{a})})^2}{(1 + \frac{1}{4(i-a)^2})^2 (1 + \frac{1}{4(i+\bar{a})^2})^2} (dad\bar{a} + \frac{(a+\bar{a})^2}{4} d\Omega^2) \quad (6.108)$$

Que tiende a euclideo asintóticamente.

- $\beta = 1$

El proceso es similar

$$e^{2\rho} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - z\bar{z}}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+\bar{z}^2}} \right)$$

Hacemos

$$z = \text{tag}\xi$$

$$ds^2 = \frac{\text{sen}^2((\xi + \bar{\xi})/2)}{\cos^2 \xi \cos^2 \bar{\xi}} [d\xi d\bar{\xi} + \frac{\text{sen}^2(\xi + \bar{\xi})}{4\text{sen}^2(\xi + \bar{\xi})/2} d\Omega^2] \quad (6.109)$$

La ecuación que se deberá resolver ahora es

$$\xi_{,a} \bar{\xi}_{,\bar{a}} (a + \bar{a})^2 = \frac{4\cos^2(\frac{\xi + \bar{\xi}}{2})}{2} \quad (6.110)$$

donde $\xi = \xi(a)$ y $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{a})$. Definimos

$$\xi = 2\text{arctag} A + \frac{\pi}{2}$$

y la ecuación anterior queda

$$A_{,a} \bar{A}_{,\bar{a}} (a + \bar{a})^2 = (A + \bar{A})^2 \quad (6.111)$$

que la hemos resuelto en el caso anterior

$$A = \frac{m}{(n-a)} + p \quad (6.112)$$

$$\bar{A} = -\frac{m}{(n+\bar{a})} - p \quad (6.113)$$

con m , n , y p constantes. Si elegimos $p = 0$, $n = i$ y $m = 1/2$ el factor conforme es

$$H = \left(1 + \frac{1}{4(i-a)(i+\bar{a})}\right)^2 \quad (6.114)$$

Y obtenemos un espacio euclideo asintóticamente.

6.8.3 Acción y carga topológica

La acción del campo Yang-Mills es

$$S = \int \sqrt{g} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} d^4x$$

que sobre soluciones algebraicamente especiales se puede escribir como

$$S = \int \frac{12\pi}{r^2} e^{2\rho} (X^2 + Y^2) d^4x$$

o:

$$S = \int \frac{12\pi}{-K} dt dr (1 - e^{2\rho}) \frac{I^2 + 1}{I^2 - 1}$$

En el caso singular definido por el Ansatz de B.M.

$$S = \int \frac{12\pi}{-K} dt dr (1 - e^{2\rho})$$

Como se comprueba trivialmente, la acción está limitada inferiormente por la solución obtenida en el Ansatz. Si parametrizamos $t = T \operatorname{sen} \Psi$ y $r = T \operatorname{cos} \Psi$ el comportamiento asintótico quedará determinado por el comportamiento cuando $T \gg 1$, en cuyo caso la acción

$$S = \int \frac{6\pi}{-K} T dT d\Psi \frac{1}{T^2} (\operatorname{sen}^2 \Psi - \operatorname{cos}^2 \Psi - 1) + 0\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

integrando en la variable angular Ψ

$$S = \int \frac{6\pi^2}{K} \frac{1}{T} dT$$

que diverge.

La densidad de carga topológica es ([3], [?]):

$$Q_T = \frac{1}{32\pi^2} \int \sqrt{g} F_{\mu\nu}^i \star F^{i\mu\nu} d^4x$$

en el Ansatz de B.M. es trivial comprobar que la carga topológica es cero. Sin embargo, en general no tiene por que ser así, haciendo uso

de la condición de degeneración algebraica se llega sin problemas a la expresión:

$$Q_T = \frac{3}{2\pi} \int dt dr F_{tr} (1 - \varphi^2) = \frac{3}{2\pi} \int dt dr \frac{e^{2\rho}}{r^2} (XY)$$

o lo que es equivalente:

$$Q_T = \frac{3}{2\pi} \int dt dr (\epsilon^{2\rho} - 1) \frac{\epsilon^2 I}{I^2 - 1}$$

No hemos sido capaces de evaluar esta expresión, la razón más importante es que desconocemos la expresión de la función I exactamente. Pero al menos hemos intentado adivinar si esta expresión converge en alguna situación. Al estudiar el comportamiento asintótico de la expresión anterior hay que considerar dos casos por separado, cuando β es imaginario (y $\epsilon^2 = 1$) y cuando β es real (y $\epsilon^2 = -1$). En el caso en que β es real no hemos podido llegar a ninguna conclusión pues, como se vió en 6.5, una de las asíntotas de la solución es $|I| = 1$ y en principio $\frac{I}{I^2 - 1}$ no está acotado.

Sin embargo cuando β es imaginaria vimos que existen soluciones donde la I está acotada inferiormente por una constante estrictamente mayor que uno ($I > \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$), por tanto, en esas soluciones, el término $\frac{I}{I^2 - 1}$ en la expresión de la carga topológica está acotado superiormente aunque desconocemos su comportamiento asintótico. Analicemos en lo que sigue el resto de la expresión. Es sencillo de ver que la expresión $(e^{2\rho} - 1)$ siempre es positiva pues $e^{2\rho} > 1$ cuando β es imaginaria. Su comportamiento asintótico es para $(r^2 + t^2) = T^2 \rightarrow \infty$ (con $r = T \cos(\Psi)$ y $t = \text{sen}(\Psi)$):

$$(e^{2\rho} - 1) \rightarrow \frac{\cos^2(\Psi)}{|\beta^2|T^2}$$

cuya integral $\int T dt d\Psi (e^{2\rho} - 1)$ diverge por lo que no podemos concluir nada sobre el valor de la carga topológica a falta de conocer el comportamiento de I en este caso.

6.8.4 Carga eléctrica y magnética

Si hacemos uso de la definición de cargas eléctricas y magnéticas que aparecen en [34]

$$Q = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{tr}$$

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 - \varphi^2)$$

en el caso euclidiano, estas cantidades están bien definidas (aunque se ha perdido el sentido físico que poseen en el caso lorentziano). En el Ansatz de B.M. se obtiene que $Q = 0$ y $P = 1$. En la siguiente gráfica está representado el valor de $(1 - \varphi^2)^2$ en función de r para varios instantes de tiempo (para $t = 0$, es exactamente 1 para $r > 1$)

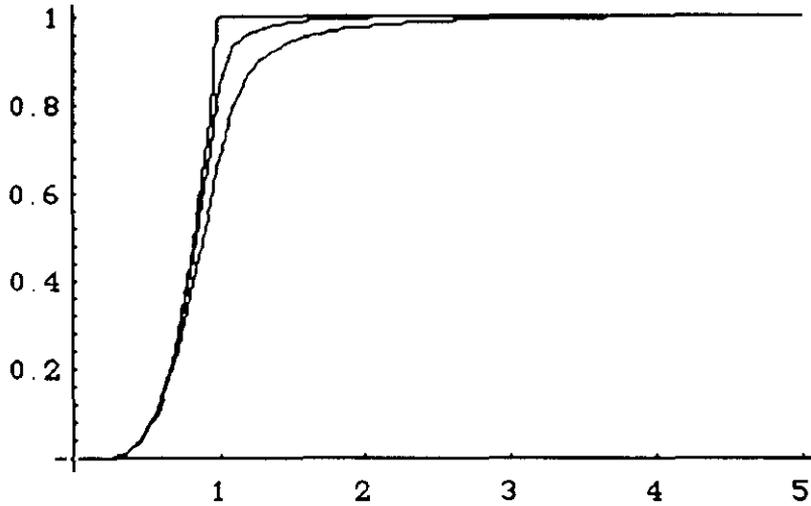


figura 8.

En el caso general se cumple que $-P^2 + Q^2 = 1$.

6.8.5 Energía

Al igual que ocurría en el caso lorentziano

$$T_{00} = R_{00} = \frac{1}{r^2}(\epsilon^{2\rho} - 1) + \frac{2}{r}\rho_{,r}$$

Sin embargo, ahora no podemos asegurar a priori el carácter positivo de dicha expresión. De hecho, en función de los valores de t y r , se puede conseguir cualquier signo para cualquier valor de β .

$$6.9 \quad g_{rr} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\Psi))$$

Existe una segunda solución singular del sistema de ecuaciones 6.42 y 6.43, (cuando se hace uso del "generador del merón" según la notación definida en el apéndice) dada por

$$g_{rr} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}}\right)$$

Esta solución no tiene un comportamiento asintóticamente euclideo, pero presenta unas cualidades curiosas. Si definimos coordenadas angulares para t y r dadas por $t = R\cos\Psi$ y $r = R\sin\Psi$ entonces

$$e^{2\rho} = g_{rr} = g_{tt} = \frac{1}{2}(1 + \cos\Psi)$$

es decir, los coeficientes de la métrica son independientes de la distancia al origen, dependiendo únicamente del ángulo relativo entre las coordenadas r y t . Los coeficientes de la métrica son menores que uno con lo que es trivial de ver que es incompatible con el Ansatz de B.M. (recordando la expresión (6.29) y que por tanto $X > Y$), por ello es más apropiado parametrizar los campos con $X = \epsilon e^R \cosh(I)$ e $Y = \epsilon e^R \sinh(I)$ (donde I y R son funciones reales). Las únicas ecuaciones que quedan por resolver son las análogas en esta parametrización a (6.45 y 6.46) (siempre que $I \neq \text{constante}$). Estas ecuaciones se resuelven con:

$$I = I(\sqrt{z} + i\sqrt{\bar{z}}) = I(\Xi)$$

y finalmente, la última ecuación es

$$I_{\Xi}^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{2K}} \sinh(I)$$

$$6.9. \quad g_{rr} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\Psi))$$

137

Es fácil de comprobar que la ecuación anterior se convierte (cambiando de variable $\Xi \rightarrow \Omega = \Xi^4$) en:

$$I_{,\Omega}^2 \Omega \Xi^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{2K}} \sinh(I)$$

donde Ω es ahora una variable real, y Ξ^2 es imaginaria, con lo que no existen soluciones reales de la ecuación anterior. Y por lo tanto la métrica presentada en esta sección no es solución del sistema planteado.

Capítulo 7

APENDICES

7.1 Ecuación $4A_a B_b (a+b)^2 = \text{sen}^2(2A+2B)$

Esta ecuación se merece por si sola un capítulo en este trabajo. En efecto, además de aparecer en los dos casos tratados en espacio curvo, la misma ecuación aparece en los dos casos tratados en espacio plano. Si en los casos curvos aparece como la condición de compatibilidad de un par de ecuaciones diferenciales, donde una de ellas es básicamente una de las ecuaciones de Einstein (la que nos dice que la curvatura $R = R^\mu_\mu = 0$) con solo imponer que $\tau = -\rho$, y la otra es básicamente una ecuación de Einstein que se obtiene cuando el campo Yang-Mills es algebraicamente Carmeli especial. En el caso plano la condición de compatibilidad entre degeneración algebraica Carmeli y la ecuación de evolución Yang-Mills es ¡la misma!. Y las curiosidades continúan cuando intentamos poner nuestra métricas, tipo 0 Petrov, de forma conforme plana explícitamente, pues la ecuación que debe cumplir el cambio de coordenadas es otra vez la misma. Este punto de coincidencia entre la teoría Yang-Mills en vacío, la einsteiniana de la gravitación en interacción con Yang-Mills, y la presentación de la forma conforme

plana explícitamente (en todos los casos para un tipo 0 en la respectiva clasificación algebraica) nos sugiere algunas ideas acerca de una íntima relación entre las clasificaciones de Petrov del campo gravitatorio y de Carmeli del campo Yang-Mills. Sin embargo, este es un punto que no hemos abordado en este trabajo, y por tanto, solo queremos hacer notar esta, al menos, curiosa coincidencia. Concluyendo, en lo que sigue resolveremos esta ecuación de compatibilidad en general, que nos será necesaria para calcular tanto los coeficientes de la métrica en un problema Einstein-Yang-Mills como el valor del campo Yang-Mills en una teoría en espacio plano.

Si hacemos el cambio de variable

$$a \rightarrow A(a)$$

$$b \rightarrow B(b)$$

entonces la expresión a resolver es:

$$a_{,A}b_{,B} = 4(u+v)^2 \operatorname{sen}^{-2}(2A+2B) = (u+v)^2 F$$

si tomamos derivadas logarítmicas respecto a A y B

$$\frac{a_{,AA}}{a_{,A}} - \frac{2a_{,A}}{(a+b)} = \frac{F'}{F} \quad (7.1)$$

$$\frac{b_{,BB}}{b_{,B}} - \frac{2b_{,B}}{(a+b)} = \frac{F'}{F} \quad (7.2)$$

y restandolas se obtiene una expresión

$$\frac{a_{,AA}}{a_{,A}} - \frac{2a_{,A}}{(a+b)} = \frac{b_{,BB}}{b_{,B}} - \frac{2b_{,B}}{(a+b)} \quad (7.3)$$

que, multiplicando por $(a+b)$ y volviendo a derivar respecto a a y b , nos da:

$$\frac{a_{,AAA}}{a_{,A}^2} - \frac{a_{,AA}^2}{(a_{,A}^3)} = \frac{b_{,BBB}}{b_{,B}^2} - \frac{b_{,BB}^2}{b_{,B}^3} = k_0 \quad (7.4)$$

Que se pueden integrar completamente dando:

$$a_{,A} = \frac{1}{2}k_0 a^2 + k_1 a + k_2$$

$$b_{,B} = \frac{1}{2}k_0 b^2 + k'_1 b + k'_2$$

entrando con estas expresiones en (7.4) encontramos la ligadura $k_1 = -k'_1$ y $k_2 = k'_2$. Finalmente dichas expresiones pueden ser integradas completamente, encontrándose las siguientes soluciones

Cuando $k_0 \neq 0$ y $k_1^2 - 2k_0 k_2 \neq 0$ (los segundos términos no son un cuadrado perfecto):

$$A = \delta + \alpha(\text{arctog}(\beta a + \kappa))$$

$$B = \delta' + \alpha(\text{arctog}(\beta b - \kappa))$$

Donde α , β y κ son constantes construidas a partir de las k_i , y δ y δ' son las constantes que aparecen en la última integración. Entrando con esta solución en la ecuación original que debíamos resolver, encontramos una ligadura algebraica sobre las distintas constantes definidas.

$$4(a+b)^2 \alpha^2 \beta^2 = (1 + (\beta a + \kappa)^2)(1 + (\beta b - \kappa)^2)$$

$$\text{sen}^2(2\alpha(\text{arctog}(\beta a + \kappa) + \text{arctog}(\beta b - \kappa)) + \delta + \delta') \quad (7.5)$$

que tiene una solución trivial (para todo a y b), $\alpha = 0$, (que nos daría soluciones triviales) . y

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \quad y \quad \delta = -\delta' \quad (7.6)$$

Se puede comprobar que no existen más combinaciones de las constantes que nos resuelvan la ecuación anterior. En efecto, haciendo $a = b = 0$, se llega a que $\delta = -\delta' + n\pi$. El factor $n\pi$ no añade nada al desarrollar la solución, por lo tanto podemos hacer $n = 0$ sin perder generalidad. Por otro lado, en $b = 0$, la expresión se convierte en

$$\frac{4\alpha^2(\beta a + \kappa)^2}{(1 + (\beta a + \kappa)^2)} = \text{sen}^2[2\alpha(\text{arctg}(\beta a + \kappa))] \quad (7.7)$$

que solo tiene solución (para todo a , si $\alpha = \frac{1}{2}$). Por razones que se han visto a lo largo del capítulo 4. denominaremos a esta solución "generadora de multimerones".

Nos quedan por analizar dos casos. Cuando $k_0 = 0$ la solución general del sistema es

$$A = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\left|a + \frac{\beta}{\alpha}\right|\right) + \delta$$

$$B = \frac{1}{-\alpha} \ln\left(\left|b - \frac{\beta}{\alpha}\right|\right) + \delta'$$

donde α , y β son otras constantes (función de las k_i). A esta solución la denominaré como "generadora del merón". Si las variables a y b son complejas (con la definición de la rama principal para el logaritmo de un número complejo ($\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$) entonces se debe cumplir

$$\alpha = 4i$$

y

$$\delta + \delta' = \frac{\pi}{4}$$

y si a y b son reales entonces

$$\alpha = 4i$$

y

$$\delta = -\delta'$$

cuando $\operatorname{signo}(a + \frac{\beta}{\alpha}) = -\operatorname{signo}(b - \frac{\beta}{\alpha})$ y

$$\delta + \delta' = \frac{\pi}{4}$$

cuando $\operatorname{signo}(a + \frac{\beta}{\alpha}) = \operatorname{signo}(b - \frac{\beta}{\alpha})$

El caso que queda pendiente (cuando el denominador de (7.6) es un cuadrado perfecto), se ve fácilmente que es incompatible con la ecuación original.

Obsérvese que a lo largo del trabajo, la variable a tiene la forma $a = r + t$ en espacios lorentzianos y $a = r + it$ en espacios euclidianos, y por su parte la variable $b = r - t$ y $b = r - it$ respectivamente.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

Realicemos un esfuerzo por sintetizar en unas pocas líneas los resultados obtenidos en el desarrollo de esta tesis. De una manera sencilla estos se podrían resumir en los siguientes puntos:

- Se presenta una condición necesaria para que un campo Yang-Mills con simetría esférica posea alguna simetría adicional. Se comprueba que existe una solución (obtenida por Witten, si bien no pertenece al tipo instantónico) que no cumple la condición anterior, y, por lo tanto, se demuestra que no existe un análogo Yang-Mills del teorema de Birkhoff.
- Se caracteriza la clasificación de Carmeli en dos situaciones:
 - Completamente (en cuanto al número de autovalores y autoespinores) para campos con simetría esférica, estáticos, y en el Ansatz de Bartnik-McKinnon.
 - Parcialmente (solo en cuanto al número de autovalores se refiere) para campos con simetría esférica.

en términos de una única función que hemos denotado k .

- Se plantea en general el problema de encontrar soluciones algebraicamente especiales en espacio plano, y se resuelve únicamente en el Ansatz de B.M. Se reobtienen las soluciones de De Alfaro y col. en espacio minkowski, y tipo merón es espacio euclideo (tal y como las presenta Actor), y se obtienen nuevas soluciones que generalizan las anteriores al elegir una constante de integración como imaginaria.
- Se plantea y se resuelve en general el problema de encontrar soluciones algebraicamente especiales (y con simetría esférica) Einstein - Yang-Mills en un espacio con métrica lorentziana. Algunas de las propiedades son calculadas (grupo de isometría, tipo de Bel-Petrov, forma conforme plana explícita, condiciones de energía, etc.). Como un resultado colateral se comprueba que no existen soluciones con simetría esférica y estáticas; por lo que podemos concluir que las soluciones de Bartnik-McKinnon y de Bizon pertenecen al tipo D_p en la clasificación de Carmeli.
- Se plantea y se resuelve en general la búsqueda de soluciones exactas algebraicamente especiales (con simetría esférica) Einstein - Yang-Mills con métrica euclidiana. Se calculan algunas de sus propiedades más importantes (grupo de isometría, carga topológica, etc.) y se presenta una interpretación de las soluciones obtenidas en términos de wormholes.

Durante el desarrollo algunos puntos han ido quedando abiertos, y es posible que en un futuro cercano sean retomados dentro del grupo de Relatividad que dirige F.J. Chinea, entre ellos destacaríamos la caracterización Carmeli completa de campos con simetría esférica, la resolución del problema en general en espacio plano, así como investi-

gar la relación que pueda existir entre la clasificación de Carmeli y la de Bel-Petrov en campos Einstein - Yang-Mills.

Bibliografía

- [1] C.N. Yang y R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, (1.954) 191.
- [2] E.S. Abers y W. Lee, "Gauge theories"; Phys. Rep. **9**, n^o1 (1.973) 141.
- [3] A. Actor, Rev. Mod. Phys., **51**, n^o3 (1.979), 461.
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79** (1.974) 276.
- [5] L.L. Chau, "A framework for generating multi-monopole solutions"; Lectures in 18th Winter School of Theo. Phys. (1.981) Karpacz, Poland.
- [6] P. Ramond. "Field theory. A modern primer". The Benjamin/Cummings Publishing Company. 1.981.
- [7] E. Witten, Phys. Rev. Lett. **38**, n^o3 (1.977) 121.
- [8] V. De Alfaro, S. Fubini y G. Furlan, Phys. Lett. **B65**, (1.976).163.
- [9] E. Corrigan , D.B. Fairlie, Phys. Lett **67B** (1.977) 69.

- [10] J. Cerveró, L. Jacobs y R. Nohl, *Phys. Lett* **B69**, *n*^o3 (1.977) 351.
- [11] A. Actor, *Ann. of Phys.* **121**, (1.979) 181.
- [12] M. Carmeli: "Classical fields: General Relativity and gauge theories". John Wiley and Sons., (1.982).
- [13] M. Carmeli, Kh. Huleihil y E. Leibowitz: "Gauge fields. Classification and equations of motion", World Scientific, Singapur (1.989).
- [14] M. Daniel y C.M. Viallet, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1.980) 175.
- [15] C.N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **38**, *n*^o24 (1.977) 1377.
- [16] M. Luscher, *Phys. Lett.* **B70**, *n*^o3 (1.977) 321.
- [17] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz y Y.S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59B**, (1975), 85.
- [18] P.G. Bergmann y F.J. Flaherty, *J. Math. Phys.* **19**, (1.978), 212.
- [19] P. Forgàcs y N.S. Manton, *Commun. Math. Phys.* **72**, (1.980) 15.
- [20] N.S. Manton, *Nuc. Phys.* **B158**, (1.979), 141.
- [21] F.J. Chinea, *Class. Quantum Grav.* **5** (1.988), 135.

- [22] R.C. Pappas; Am. J. Phys. **53** (1.985) 912.
- [23] J.A. Ruiz y F.J. Chinae; "Simetrías adicionales sobre campos Yang-Mills con simetría esférica", E.R.E. 1.988.
- [24] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt y M. McCallun; "Exact solutions of Einstein's field equations". Cambridge University Press (1.980).
- [25] S. Weinberg; "Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity", J. Wiley and Sons. (1.972).
- [26] Ch.W. Misner, K.S. Thorne, y J.A. Wheeler; "Gravitation", Freeman (1.970).
- [27] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis; "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press (1973).
- [28] R. Bartnik y J. McKinnon, Phys. Rev. Lett. **61**, n^o2 (1.988) 141.
- [29] P. Bizon, Phys. Rev. Lett. **64**, n^o24, (1.990), 2844.
- [30] J.A. Ruiz y F.J. Chinae; "Solución no estática de las ecuaciones Einstein-Yang-Mills", E.R.E. 1.991.
- [31] F.J. Chinae y J.A. Ruiz Martín, "Non static, algebraically special solutions of the Einstein - Yang-Mills equations", Universidad Complutense preprint 16-92.

- [32] N. Straumann and Z. Zhou, Phys. Lett. **B237** (1.990) 353.
- [33] A.A. Ershov y D.V. Gal'tsov, Phys. Lett. **A150** (1.990) 159.
- [34] P. Bizon y O.T. Popp, Class. Quantum Grav. **9** (1.992) 193.
- [35] F.J. Chinae, Phys. Lett. **A72** (1.979), 281.
- [36] S. B. Giddings y A. Strominger, Nucl. Phys. **B306**, (1.988) 890.
- [37] J.A. Smoller, A.G. Wasserman, S-T Yau, J.B. McLeod. University of Michigan preprint. 1.991.
- [38] A. Hosoya y W. Ogura, Phys. Lett. **B225**, (1.989) 117.
- [39] Y. Verbin y A. Davidson, Phys. Lett. **B229**, (1.989) 364.
- [40] S. Rey, Nucl. Phys. **B336**, (1.990) 146.
- [41] S. You-Gen y T. Zhen-Qiang, Phys. Lett. **B247** n.1 (1.990) 13.
- [42] H. Bacry, "Lecons sur la Theorie des Groupes et tes Symetries des Particules Elementaires". Gordon and Breach (1.966) Paris.
- [43] S. Wolfram. "Mathematica. A system for doing mathematics by computer". Addison-Wesley 1.991.
- [44] J. M. Aguirregabiria. The Math. Journal. Vol 1 (1.990). 51.

Reunido el Tribunal que suscribe
en el día de la fecha acordó cali-
ficar la tesis Doctoral
con la censura de -
APTO COM LAUDE POR UNANIMIDAD

Madrid, 6 de NOVIEMBRE 1942

Alonso

Milerni

Rodriguez Fdez. A. Estrada

[Signature]

[Signature]