UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Productos Estrella
y
Ecuación Cuántica Triangular
de
Yang-Baxter

Memoria presentada en el departamento de Física Teórica
para la obtención del grado de doctor

por

Luis VALERO BURGUETE

Director: José Carlos MORENO GONZALEZ

Año Académico 1994-95

A mis padres
y a Pilar

Agradecimientos

Esta memoria contiene el trabajo realizado a partir del proyecto de tesis que presenté en el departamento de Física Teórica de la Universidad Complutense para terminar mis estudios de tercer ciclo dentro del programa *Física Teórica y Física Matemática*. Quiero agradecer al departamento la aceptación de mi inscripción en dicho programa y en particular a los profesores Ramón Alvarez-Estrada, Antonio Fernández-Rañada y Miguel Angel Rodríguez su ayuda y apoyo desde el comienzo de estos estudios.

He podido contar con el interés permanente en este trabajo, de los profesores André Lichnerowicz, Moshe Flato y Daniel Sternheimer, creadores junto a los profesores Christian Fronsdal y Francois Bayen de la teoría de los *productos estrella*. Les agradezco profundamente sus oportunas sugerencias, comentarios y orientaciones. Ello ha influido en todo momento y de manera esencial en el desarrollo de esta tesis.

Quiero manifestar mi agradecimiento a los profesores Murray Gerstenhaber, creador de la teoría de *deformaciones de álgebras*, e Yvette Kosmann-Schwarzbach, cuyos artículos sobre importantes resultados de Drinfeld han sido de gran utilidad en la elaboración de este trabajo. Sus profundas y amables respuestas a cuantas preguntas les he formulado han sido motivo de reflexión y aprendizaje.

Agradezco a los profesores Christian Fronsdal, Alberto Galindo y Marc A. Rieffel el interés que han prestado a nuestros primeros artículos, básicos para esta memoria. Sus estudios sobre la formulación de la versión dual de grupo cuántico han sido de gran interés para mí.

Mi relación con el profesor Alain Guichardet durante la última etapa de redacción de esta tesis ha sido de gran importancia. Le agradezco profundamente los conocimientos que me ha transmitido a través de su libro sobre *grupos cuanticos* y de sus observaciones y comentarios a raíz de una lectura detallada de esta memoria.

Esta tesis ha sido dirigida por el profesor Carlos Moreno. Su capacidad investigadora, sus conocimientos de física matemática, así como su gran experiencia en la teoría de los productos estrella, fueron desde el principio una garantía de rico aprendizaje. Quiero agradecerle profundamente su certera orientación y su rigurosa exigencia, a las que debo mi incipiente formación investigadora, así como su confianza en mí y su permanente y acogedora disponibilidad, que han sido el mejor ambiente de trabajo que se puede esperar.

Por último, agradezco a la Subdirección General de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia la ayuda prestada, al permitirme disfrutar de una *Licencia por Estudios* durante los cursos 1990-91 y 1991-92. En particular, al interés del entonces Subdirector General de Formación del Profesorado D. Joaquín Prats Cuevas debo el segundo periodo de dicha licencia.

Indice

Introducción

El objetivo inicial de este trabajo fue la elaboración de demostraciones de los teoremas, enunciados por Drinfeld en su nota *On Constant Quasiclassical Solutions of the Yang-Baxter Quantum Equation* [1983b], que ponen en relación la teoría de la *Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter* (ECTYB) y la teoría de los *Productos Estrella Invariantes sobre un Grupo de Lie*. El trabajo realizado a partir de ellos se recoge en los Capítulos 3 y 4 de esta memoria.

La ECTYB tiene pleno sentido definida en el álgebra de las series formales $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]$ (siendo $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$) y todo producto estrella invariante sobre un grupo de Lie G está determinado por un elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Un primer resultado de Drinfeld [1983b], con demostración relativamente directa (Moreno, Valero [1990a]), afirma que todo producto estrella invariante sobre G determina una solución de la ECTYB en el álgebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.

Un recíproco parcial de este teorema dice que toda solución de la ECTYB, de la forma $R = 1 + \sum r_i \hbar^i \in End(\mathbb{R}^n)^{\otimes 2}[[\hbar]]$, determina un único (salvo equivalencia) producto estrella invariante sobre el grupo $Gl(n;\mathbb{R})$ y por tanto una solución de la ECTYB en el álgebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))[[\hbar]]$. Este teorema es un resultado profundo (calificativo de Takhtajan en su informe sobre la nota de Drinfeld en Math. Rev.) de Drinfeld [1983b], para cuya demostración nos ha sido necesario elaborar un teorema, que pone de manifiesto el contenido cohomológico de la ECTYB. Nos referiremos a este teorema como el de la *interpretación cohomológica de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter* (Moreno, Valero [1990a,b,c, 1992a]).

Este teorema de interpretación cohomológica de la ECTYB es la parte central del Capítulo 3. El contexto en el que se desarrolla su demostración es el de la *Cohomología de Hochschild Invariante* sobre el grupo G. La condición de asociatividad de un producto estrella invariante $F \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$, orden a orden, equivale a la existencia de una sucesión infinita de 3-cociclos exactos α_m, $m \in \mathbb{N}$ construidos a partir de los términos $F_1, \dots, F_{m-1}$ de F. A este respecto, son fundamentales dos resultados. Uno, de la teoría general de deformaciones de Gerstenhaber [1964b], que, en el caso que nos ocupa, afirma que el elemento α_{k+1}, asociado a un producto estrella invariante hasta el orden k, es un 3-cociclo de Hochschild. El otro es la versión invariante del isomorfismo entre el p-espacio de cohomología de Hochschild sobre una variedad diferenciable y el espacio de p-tensores antisimétricos sobre la variedad (Vey [1975]; Lazard [1955]; Cartier [1955/56]).

Expresado en términos cohomológicos, el teorema dice que, dado un producto estrella F (invariante sobre G) al orden k, el antisimetrizado del 3-cociclo α_{k+1} es $-(1/6)$ del término de orden $k+1$ de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter construida a partir de $S(x;y) = F^{-1}(y;x)\, F(x;y)$. Por tanto, la clase de cohomología, obstrucción a la prolongación al orden $k+1$ del producto estrella, es la correspondiente a dicho término de la ECTYB.

Takhtajan [1990], a partir del trabajo de Drinfeld, ha definido un producto estrella $*$, sobre un grupo de Lie G, de forma que el coproducto Δ, de la estructura de álgebra de Hopf usual de $\mathcal{C}^\infty(G)$, verifica $\Delta(f_1 * f_2) = \Delta f_1 * \Delta f_2$ (donde el producto estrella del segundo miembro está definido canónicamente sobre $(\mathcal{C}^\infty(G)\otimes\mathcal{C}^\infty(G))[[\hbar]]$ a partir del producto estrella $*$), es decir, satisface la condición de compatibilidad requerida para definir una estructura de *Grupo Cuántico* sobre $\mathcal{C}^\infty(G)[[\hbar]]$ según el programa de Drinfeld. Este producto estrella viene dado por la expresión $F^{-1}(x;y)^\rho F(x;y)^\lambda$, es decir, se obtiene por composición de un producto estrella invariante por la izquierda F y el producto estrella invariante por la derecha que resulta al considerar la serie inversa, es pues un producto estrella no invariante. En este mismo Capítulo 3 damos una demostración detallada de dicha compatibilidad, en una situación de hecho mas general que la considerada por Takhtajan (Moreno, Valero [1992a]).

Una vez comprendidos los resultados de Drinfeld en el contexto de la teoría de los productos estrella, el Capítulo 4 está dedicado a la construcción de todos los productos estrella invariantes sobre un grupo de Lie con estructura simpléctica invariante. El procedimiento se basa, por una parte, en la posibilidad de generalizar, a un grupo de Lie G con estructura simpléctica invariante β_1, la construcción que del producto estrella de Moyal sobre el grupo $\mathbb{R}^{2n}$ se puede realizar a partir de la ley de grupo formal de Campbell-Hausdorff del álgebra de Lie del grupo; todo 2-cociclo del álgebra de Lie de G, de la forma $\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\hbar + \cdots + \beta_k\,\hbar^{k-1} + \cdots$, determina un producto estrella invariante sobre la variedad simpléctica $(G;\beta_1)$. Por otra parte, el teorema de interpretación cohomológica de la ECTYB nos ha permitido analizar la equivalencia de los productos estrella invariantes que existen sobre el grupo G. Haciendo uso de él, demostramos que todo producto estrella invariante sobre G es equivalente a uno obtenido a partir de un 2-cociclo de Chevalley de la forma anterior.

Mas aún, los productos estrella determinados por los 2-cociclos $\beta_\hbar$ y $\beta'_\hbar = \beta_\hbar + \tilde{\delta}\,\alpha_\hbar$, donde $\alpha_\hbar = \alpha_2\,\hbar + \cdots + \alpha_k\,\hbar^{k-1}$ y $\tilde{\delta}$ es el operador de cohomología de Chevalley, son equivalentes. Esto permite parametrizar el conjunto de los productos estrella invariantes sobre $(G;\beta_1)$, por los elementos de un subespacio $V \subset \tilde{Z}^2(\mathfrak{g})$ de 2-cociclos tal que $\tilde{Z}^2(\mathfrak{g}) = V \oplus \tilde{B}^2(\mathfrak{g})$, donde $\tilde{B}^2(\mathfrak{g})$ es el espacio de los 2-cociclos exactos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. (Drinfeld [1983b]; Moreno, Valero [1992b, 1994]).

Si F_1 es antisimétrico, el tensor de Poisson que define, sobre el grupo de Lie, el producto estrella $F^{-1}(x;y)^\rho F(x;y)^\lambda$ viene dado por la diferencia $\Lambda = \frac{1}{2}(S_1(x;y)^\lambda - S_1(x;y)^\rho)$, siendo S_1 el término de orden $\hbar$ de la solución de la ECTYB que define F y que, en este caso particular, verifica $F_1 = \frac{1}{2}S_1$. Que S satisfaga la ECTYB implica que S_1 es solución de la *Ecuación Clásica de Yang-Baxter*, que es una condición suficiente para que $(G;\Lambda)$ sea un grupo de Lie-Poisson exacto.

La noción de *Grupo de Lie-Poisson* ha sido introducida por Drinfeld en su artículo *Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie Bialgebras and the Geometric Meaning of the Classical Yang-Baxter Equations* [1983a]. Se define como un grupo de Lie con una estructura de Poisson $\{\,;\,\}$ tal que la operación de grupo es un morfismo de Poisson, es decir, el coproducto Δ de $\mathcal{C}^\infty(G)$ es un morfismo del álgebra de Lie $(\mathcal{C}^\infty(G);\{\,;\,\})$ en el álgebra de Lie $(\mathcal{C}^\infty(G\times G);\{\,;\,\}_{G\times G})$. Esto equivale a introducir una estructura adicional, denominada *Biálgebra de Lie*, sobre el par $(\mathfrak{g};\mathfrak{g}^*)$ ($\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo), que consiste en la existencia de un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$ definido por la aplicación transpuesta de un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

En el caso de que este cociclo sea exacto, es decir, cuando sea el coborde de Chevalley de un 2-tensor $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, existe una estrecha relación entre r y las distintas versiones de la ecuación clásica de Yang-Baxter. En particular, si r satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter, los grupos de Lie-Poisson que se obtienen, denominados *Triangulares* constituyen el límite clásico de los grupos cuánticos triangulares obtenidos a partir de los productos estrella invariantes estudiados anteriormente.

A un estudio detallado de la relación anteriormente mencionada está dedicada una parte del Capítulo 2. Por la gran importancia de ellos, este capítulo contiene, demostrados en detalle, resultados obtenidos por Kosmann-Schwarzbach y Aminou (Aminou, Kosmann [1988]; Aminou [1988]; Kosmann [1987]; Kosmann, Magri [1988]).

El origen histórico de los conceptos de grupo de Lie-Poisson y de biálgebra de Lie ha sido el *Método de Scattering Inverso* y la noción de *Matriz-r Clásica*. En su artículo *What is a Classical r-Matrix?* [1983], Semenov-Tian-Shansky define la estructura de *Algebra de Lie Doble* sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que constituye el cuadro matemático en el que aquella noción se inscribe.

Esencialmente consiste en introducir otra estructura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ a partir de un endomorfismo $R \in End(\mathfrak{g})$. Si sobre $\mathfrak{g}$ existe una forma bilineal, $\tilde{\phi}$, simétrica, no-degenerada e invariante por la representación adjunta (que permita establecer un isomorfismo entre los espacios $End(\mathfrak{g})(\simeq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*)$ y $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, por medio del isomorfismo $\phi \in Hom(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}^*)$ asociado a $\tilde{\phi}$) y si R es antisimétrico con respecto a $\tilde{\phi}$, el 2-tensor r asociado a $\tilde{r} = (R + 1) \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ define una estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$. Recíprocamente, si r define una estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ y el homomorfismo $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$, asociado a su parte simétrica, es invertible, el endomorfismo $R = \tilde{r} \circ \tilde{s}^{-1} - 1 \in End(\mathfrak{g})$ define una estructura de álgebra de Lie doble sobre $\mathfrak{g}$.

Semenov ha puesto de manifiesto que, si el endomorfismo R es una solución de la *Ecuación Clásica Modificada de Yang-Baxter*, el álgebra de Lie doble que se obtiene es tal que es posible encontrar, por el *Método de Factorización*, soluciones de las ecuaciones del movimiento determinadas por hamiltonianos de Casimir con respecto a la estructura de Poisson canónica sobre el dual $\mathfrak{g}^*$ (Kirillov-Konstant-Souriau) asociada a la estructura de álgebra de Lie definida a partir de R. Estas ecuaciones del movimiento tienen la forma de Lax.

También, mediante el método de factorización se encuentran soluciones (en principio y como es usual locales) de las ecuaciones del movimiento sobre el grupo de Lie-Poisson definido por R, cuando R es antisimétrico con respecto a una forma bilineal simétrica, no-degenerada e invariante con respecto a la representación adjunta y cuando, como antes, R es solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter. En este caso, también las ecuaciones del movimiento tienen la forma de Lax.

El resto del Capítulo 2 contiene demostraciones detalladas de estos teoremas de Semenov sobre la existencia de soluciones por el método de factorización, tanto sobre el dual $\mathfrak{g}^*$ de un álgebra de Lie, como sobre un grupo de Lie G.

Hemos incluido un capítulo de *Preliminares* con objeto de que el trabajo resulte suficientemente autocontenido. En él se resumen nociones de *Cohomología de Grupos y de Algebras de Lie*, nociones de *Cohomología de Poisson*, así como de *Productos Estrella*, con la notación en que serán utilizadas a lo largo de todo el trabajo. Algunos cálculos se detallan por el interés que tienen en relación con resultados posteriores. En particular, desarrollamos una demostración de la invariancia por la izquierda del corchete de Schouten de campos de p-tensores invariantes. En el caso particular $p = 2$, realizamos un estudio del elemento de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que lo define, poniendo de manifiesto la relación de aquel con la ecuación clásica de Yang-Baxter. Así mismo demostramos la caracterización de Lichnerowicz del corchete de Schouten, resultado que, a nuestro conocimiento, no se encuentra publicado.

Todos los capítulos comienzan con una *Introducción* suficientemente extensa, en la que se pretende dar una visión de conjuto, no interrumpida por las demostraciones de las proposiciones que en él se exponen.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exponemos las nociones geométricas y algebraicas que sirven de contexto en el presente trabajo. Enunciamos sus propiedades fundamentales y desarrollamos con detalle algunos resultados bajo la forma y notación en que serán utilizados.

La primera sección contiene las definiciones fundamentales de la cohomología de álgebras y grupos de Lie (ver por ejemplo: Guichardet [1980]). La utilización que se va a hacer de ellas es múltiple. Por una parte, los conceptos de *biálgebra de Lie* y de *grupo de Lie-Poisson*, estudiados en el Capítulo 2, se pueden expresar en términos cohomológicos.

La estructura de grupo de Lie-Poisson sobre un grupo de Lie G, con tensor de Poisson $\Lambda \in \wedge^2(G)$, consiste en una compatibilidad del corchete de Poisson que define Λ con la ley de composición de grupo y es equivalente a que una determinada aplicación $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, definida a partir de Λ, tenga la condición de 1-cociclo de G con respecto a la representación adjunta de G sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Cuando sobre un grupo de Lie está definida una estructura de Lie-Poisson, sobre el dual de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definido un corchete de Lie que satisface cierta relación de compatibilidad con el corchete de $\mathfrak{g}$. Esta relación de compatibilidad es una expresión de la condición de 1-cociclo de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, de la aplicación tangente en la unidad del grupo al 1-cociclo que define la estructura de Lie-Poisson.

Recíprocamente, si el grupo de Lie G es conexo y simplemente conexo, la existencia de una estructura biálgebra de Lie, sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, implica la existencia de una estructura de Lie-Poisson sobre G. Este hecho se basa en la posibilidad de integrar todo 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a una representación $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$, en un 1-cociclo de G con respecto a la representación $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ tal que $T_e\phi = \Phi$. Haciendo uso de las representaciones afines de álgebras y grupos de Lie, damos una demostración de este resultado.

Por otra parte, en el Capítulo 4, dedicado a la costrucción de todos los productos estrella invariantes sobre un grupo de Lie con estructura simpléctica invariante, se hace uso de las extensiones centrales de álgebras de Lie (ver por ejemplo: Knapp [1988]). Esta construcción también está relacionada con la cohomología de álgebras de Lie. Cada extensión central del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está definida por un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre el espacio vectorial de los números reales $\mathbb{R}$: $x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \rho(x) = 0 \in End(\mathbb{R})$.

Finalmente, la estructura simpléctica invariante sobre un grupo de Lie G se expresa en términos de la cohomología de su álgebra de Lie con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$. Esta es isomorfa a la cohomología de de Rham restringida al subespacio de las formas invariantes. El caracter cerrado de la 2-forma simpléctica invariante Ω equivale a la condición de 2-cociclo de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$, del 2-tensor covariante no-degenerado $B = \Omega(e) \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$.

En la segunda sección exponemos la noción de corchete de Schouten que, sobre el espacio vectorial graduado $\wedge(M) = \oplus \wedge_r(M)$ de los campos de tensores contravariantes, antisimétricos, sobre una variedad diferenciable M, han introducido Schouten [1953] y Nijenhuis [1955].

Cuando se piensa en el corchete de Poisson $\{\,;\,\}$ como el objeto fundamental de una estructura simpléctica, las variedades de Poisson aparecen como una generalización natural de las variedades simplécticas. Esta estructura admite una descripción en términos del corchete de Schouten $[\,;\,]$.

En efecto, asociado al corchete de Poisson sobre una variedad simpléctica existe un 2-tensor contravariante antisimétrico no-degenerado Λ, de tal forma que $\{\,;\,\}$ satisface la identidad de Jacobi si y sólo si $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$. Si se prescinde de la no degeneración de Λ tenemos la definición de variedad de Poisson.

En el Capítulo 2, al estudiar los grupos de Lie-Poisson, consideraremos estructuras de Poisson sobre un grupo de Lie y al estudiar la matriz-r clásica consideraremos las estructuras de Poisson que, de manera natural, existen sobre el espacio vectorial dual de un álgebra de Lie doble.

La utilización del corchete de Schouten en la definición de variedad de Poisson resulta especialmente conveniente al estudiar estructuras de Poisson invariantes sobre un grupo de Lie. En este caso, el corchete de Schouten $[\Lambda\,;\Lambda]$ es invariante, por tanto, está definido por traslación a la izquierda de $[\Lambda\,;\Lambda](e)$, que es un tensor 3-contravariante, antisimetrico (sobre el álgebra de Lie del grupo). En estas condiciones, $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$ equivale a $[\Lambda\,;\Lambda](e) = 0$ que es la ecuación clásica de Yang-Baxter.

Por último, por medio del corchete de Schouten se define un operador de cohomología sobre el espacio vectorial graduado $\wedge(M) = \oplus \wedge_r(M)$ de los tensores contravariantes antisimétricos sobre la variedad de Poisson M. Cuando el tensor de Poisson es no-degenerado, es decir, cuando la variedad es una variedad simpléctica, los espacios de esta cohomología, $H^r_\Lambda(M)$, son isomorfos a los espacios de cohomología de de Rham, $H^r(M)$. El isomorfismo se define por medio de la extensión a un isomorfismo de fibrados tensoriales del isomorfismo $\mu^{-1} : T^*M \to TM$ determinado por Λ. De esta forma, a todo p-cociclo de esta cohomología se le asocia un p-cociclo de de Rham. Utilizaremos este resultado en el Capítulo 4 al estudiar todos los productos estrella que existen sobre un grupo de Lie con estructura simpléctica invariante.

Las dos últimas secciones están dedicadas a la teoría de los productos estrella y corchetes deformados sobre una variedad de Poisson. Primero introducimos las definiciones y propiedades fundamentales, así como las nociones de cohomología en que se inscriben. Después particularizamos la teoría para el caso en que la variedad diferenciable sea un grupo de Lie y la estructura de Poisson sea invariante por la izquierda (o por la derecha). En esta situación, se tiene una descripción algebraica en términos del álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie del grupo, de la cohomología de Hochschild invariante y, en consecuencia, de los productos estrella invariantes definidos sobre el grupo. Desarrollamos con detalle la notación polinómica de los elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, adecuada para esta formulación, que empleamos en los Capítulos 3 y 4.

Los productos estrella y los corchetes deformados son deformaciones formales del producto ordinario de funciones y del corchete de Poisson respectivamente. Fueron introducidos, en un programa común, por Vey [1975] y Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer [1978].

Su justificación se puede resumir en dos consideraciones. Por un lado, se tiene una descripción de la Mecánica Clásica en términos de las dos estructuras algebraicas que existen sobre el espacio de las funciones diferenciables definidas sobre el espacio de fases (ver por ejemplo: Abraham, Marsden [1978]; Liberman, Marle [1987]). Por otro, en el procedimiento de cuantificación de Weyl (Voros, A. [1978]; Grossmann, A., Loupias, G., Stein, E. M. [1969]), aparece de forma natural un producto estrella, el producto de Moyal, cuando se considera la función símbolo de Weyl correspondiente al producto de dos operadores sobre el espacio de Hilbert.

Un sistema dinámico clásico de n grados de libertad consiste en una variedad simpléctica $(M;\Omega)$ de dimensión $2n$ y una función h sobre M denominada *Hamiltoniano* del sistema. Al ser Ω no-degenerada, la igualdad $\mu(X) = -i_X\Omega$ (en componentes $(\mu(X))_\lambda = \Omega_{\lambda\mu}X^\mu$) define un isomorfismo $\mu : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}^*(M)$ entre el espacio vectorial de los campos vectoriales sobre la variedad y el espacio vectorial de las formas diferenciales de orden uno. Si $X_h = \mu^{-1}(dh) \in \mathcal{X}(M)$ es el *campo Hamiltoniano* definido por h, la evolución en el tiempo del sistema viene dada por las curvas integrales de X_h.

A partir del isomorfismo μ, se define sobre $C^\infty(M)$ un corchete por medio de la expresión:

$$\{f\,;g\} = \Omega(X_f;X_g) = (-i_{X_g}\Omega)(X_f) = \mu(X_g)(X_f) = d\,g\cdot X_f = \mathrm{L}_{X_f}g\,,$$

donde $f,g \in C^\infty(M)$ y $X_f = \mu^{-1}(df), X_g = \mu^{-1}(dg) \in \mathcal{X}(M)$. Este corchete, denominado *corchete de Poisson*, satisface la identidad de Jacobi. Por tanto, además de la estructura de álgebra asociativa dada por el producto ordinario de funciones, sobre $C^\infty(M)$ se tiene una estructura de álgebra de Lie.

En un sistema de coordenadas canónicas $(q^i;p_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$, donde la 2-forma Ω viene dada por $\Omega = \sum dp_i \wedge dq^i$, el campo Hamiltoniano definido por $h \in C^\infty(M)$ viene dado por:

$$X_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p_i};-\frac{\partial h}{\partial q^i}\right)$$

y el corchete de Poisson por:

$$\{f\,;g\} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \underline{\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}}\right).$$

Las derivaciones de la estructura de álgebra asociativa (definida por el producto de funciones) de $C^\infty(M)$ son los campos vectoriales sobre la variedad, y el hecho de que $\{f\,;g\} = L_{X_f}g$ equivale a la relación

$$\{f\,;gh\} = \{f\,;g\}h + g\{f\,;h\}\,, \tag{a}$$

con $f,g,h \in C^\infty(M)$. Esta igualdad vincula las dos estructuras algebraicas de $C^\infty(M)$.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es un observable clásico del sistema dinámico determinado por el Hamiltoniano h, se satisface:

$$\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = F_t^*(L_{X_h} f) = F_t^*(\{h\,; f\}) = \{h\,; f \circ F_t\}\,,$$

siendo $F_t : U \subset M \longrightarrow M$ el flujo local de X_h y $F_t^* : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ la aplicación definida por $F_t^*(f) = f \circ F_t$. Así pues, la evolución temporal $t \longrightarrow f(t)$ del observable $f(0) = f$ es una solución de la ecuación siguiente:

$$\frac{df(t)}{dt} = \{h\,; f(t)\}\,. \tag{b}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, la descripción de la Mecánica Clásica se puede realizar a partir de las dos leyes de composición definidas sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$, el producto ordinario de funciones y el corchete de Poisson, que están relacionadas por la condición (a).

Por otra parte, en la representación de Heisenberg del sistema cuántico correspondiente (ver por ejemplo: Messiah [1962]), a la ecuación (b) le corresponde formalmente la ecuación siguiente entre los correspondientes observables cuánticos:

$$i\hbar\frac{dF(t)}{dt} = [F(t)\,; H]\,, \tag{c}$$

donde $[\,;\,]$ indica aquí conmutador de operadores en el espacio de Hilbert.

Es bién sabido (Groenewold [1946]; Van Hove [1951]) que, para observables genéricos f sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$, el operador que corresponde a la función $\{f(t)\,; h\}$ no es $[F(t)\,; H]$. Consideremos el caso sencillo de la cuantificación de la variedad simpléctica canónica $(\mathbb{R}^{2n}; \Omega)$ por medio de la correspondencia de Weyl.

La correspondencia de H. Weyl entre funciones reales sobre el espacio de fases $(\mathbb{R}^{2n}; \Omega)$ y observables cuánticos (operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert) se obtiene mediante la expresión:

$$W(f) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} U(\xi)\,(\mathcal{F}f)\,(\xi)\,d\xi\,, \tag{d}$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier simpléctica:

$$(\mathcal{F}f)\,(\xi^{k+n}; \xi^k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\Omega(\xi;\eta)} f(\eta^k; \eta^{k+n})\,d\eta^1 \cdots d\eta^{2n}\,,$$

para $k = 1, \ldots, n$, y

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow L(\boldsymbol{H}) \\ \xi &\longrightarrow U(\xi) \end{aligned}$$

es una representación proyectiva unitaria irreducible de multiplicador $\exp(i(\hbar/2)\Omega(\xi;\eta)$ del grupo de Lie $\mathbb{R}^{2n}$ sobre el espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$, es decir satisface:

$$U(\xi) \cdot U(\eta) = e^{i\frac{\hbar}{2}\Omega(\xi;\eta)} U(\xi + \eta)\,.$$

Esta transformación puede considerarse como una modificación de las representaciones de las álgebras de funciones:

$$U(f) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} U(\xi) f(\xi)\,d\xi\,. \tag{e}$$

Las definiciones (d) y (e) inducen sobre el espacio de las funciones las siguientes leyes de composición:

$$U(f) \cdot U(g) = U(f \times g)$$
$$W(f) \cdot W(g) = W(f * g) .$$

Operando formalmente, se tiene:

$$(f \times g) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\frac{\hbar}{2}\Omega(\lambda;\xi)} f(\xi) \cdot g(\lambda - \xi)\, d\xi \tag{f}$$
$$(f * g) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}f \times \mathcal{F}g\right) . \tag{g}$$

Y desarrollando esta última expresión se obtiene:

$$(f * g)(\xi) = (\pi\hbar)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\hbar}(\Omega(\xi;\eta)+\Omega(\eta;\zeta)+\Omega(\zeta;\xi))} f(\eta) g(\zeta)\, d\eta\, d\zeta .$$

La ley de composición $\times$ es la convolución torcida ("twisted") (Segal [1963]), y la ley $*$ es el producto de Moyal.

Un cálculo clásico (Groenwold [1946]; Moyal [1949]; Grosmann, Loupias, Stein [1969]) asocia al producto $f * g$ el desarrollo asintótico siguiente:

$$(f * g) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{1}{k!} P^k(f;g) \tag{h}$$

donde

$$P^k(f;g) = \mu\Bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}\right)\bigg)^k (f \otimes g)\Bigg),$$

y $\mu : \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ está definida por $\mu(f \otimes g) = fg$.

El desarrollo (h) es una deformación formal de parámetro $(i\hbar)/2$ en el sentido de Gerstenhaber [1964b], dentro de la cohomología diferencial del álgebra ordinaria de funciones $\left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}); \cdot\right)$ sobre la variedad simpéctica $(\mathbb{R}^{2n}; \Omega)$.

La ecuación (c) es equivalente formalmente a la ecuación:

$$\frac{df(t)}{dt} = \{f(t)\,; h\}_\hbar = \frac{1}{i\hbar}\big(f(t) * h - h * f(t)\big) . \tag{i}$$

Así pues, en el caso general de una variedad simpléctica $(M;\Omega)$ arbitraria, el proceso de cuantificación consiste en sustituir la ecuación diferencial clásica (b) por la ecuación diferencial (i). La deformación $\{\,;\,\}_\hbar$ del álgebra de Lie de los observables clásicos no es equivalente a la deformación trivial $\{f(t); h\}$, ni siquiera al primer orden, pues el corchete de Poisson es un 2-cociclo no nulo de la cohomología de Chevalley de $\mathcal{C}^\infty(M)$. En consecuencia, en primer lugar, se trata de obtener las deformaciones formales no triviales del álgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Todas las construcciones de los capítulos 3 y 4 se realizan en el contexto de la teoría de los productos estrella. Para las técnicas algebraicas y analíticas utilizadas en el programa de *cuantificación estricta* ver Rieffel [1989, 1990, 1993].

1.1 Cohomología de Algebras y Grupos de Lie

En esta sección introducimos las nociones de cohomología de grupos y álgebras de Lie que van a ser utilizadas. En lo que concierne a este trabajo, el esquema general para definir una cohomología consiste en partir de una familia de espacios vectoriales (reales) C^k, $k \in \mathbb{N}$ y una familia de aplicaciones lineales $\partial^k : C^k \longrightarrow C^{k+1}$ tales que se satisface:

$$\partial^{k+1} \circ \partial^k = 0\,. \tag{a}$$

El sistema formado por los espacios vectoriales C^k y las aplicaciones lineales ∂^k se denomina complejo de espacios vectoriales reales, y se denota por:

$$C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots C^k \xrightarrow{\partial^k} C^{k+1} \xrightarrow{\partial^{k+1}} \cdots$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, los elementos de C^k y los del subespacio $Z^k = \ker \partial^k$ se denominan, respectivamente, k-cocadenas y k-cociclos del complejo. Con los convenios $C^{-1} = \{0\}$ y $\partial^{-1} = 0$, a los elementos del subespacio $B^k = \partial^{k-1}(C^{k-1})$ se les denomina k-cobordes (k-cociclos exactos).

Por la propiedad (a), B^k es subespacio de Z^k, y se tiene, entonces, el espacio cociente

$$H^k = Z^k/B^k\,,$$

denominado k-ésimo espacio de cohomología del complejo.

Denotando a los espacios vectoriales graduados que son suma directa de los espacios C^k y H^k, respectivamente por:

$$C = \oplus_{k=0}^{\infty} C^k\,; \quad H = \oplus_{k=0}^{\infty} H^k\,,$$

y al operador lineal cuya restricción a cada espacio vectorial C^k es ∂^k por

$$\partial : C \longrightarrow C\,,$$

al complejo considerado se le denota por $(C; \partial)$, al operador ∂ se le denomina operador de coborde y al espacio vectorial graduado H cohomología del complejo.

1.1.1 Cohomología de Chevalley-Eilenberg

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y V un espacio vectorial de dimensión finita. Se dice que V es un $\mathfrak{g}$-módulo, si existe un homomorfismo de álgebras de Lie: $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$, donde el conmutador en $End(V)$ es el que se deriva de su estructura de álgebra asociativa. Este homomorfismo recibe el nombre de representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el espacio vectorial V.

A cada representación $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ de $\mathfrak{g}$ sobre un espacio vectorial V, se le asocia una cohomología (ver Guichardet [1980]), denominada cohomología de Chevalley-Eilenberg, definida de la siguiente manera.

Definición 1.1 *Sea $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el espacio vectorial V, para cada $m > 0$, una cocadena de orden m (m-cocadena) es una aplicación m-lineal, antisimétrica:*

$$\omega : \mathfrak{g} \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{g} \longrightarrow V\,.$$

Las cocadenas de orden $m = 0$ son, por definición, los elementos de $\boldsymbol{V}$.

Sea $\widetilde{C}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ el espacio vectorial de las cocadenas de orden m, en particular $\widetilde{C}^0(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$. Para $m > 0$, se definen las aplicaciones lineales

$$\tilde{\delta}^m : \widetilde{C}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) \to \widetilde{C}^{m+1}(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$$

por la expresión:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^m\omega(x_1; \dots ; x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}\Phi(x_i) \cdot \omega(x_i; \dots ; \hat{x}_i; \dots ; x_{m+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([x_i; x_j]; x_1; \dots ; \hat{x}_i; \dots ; \hat{x}_j; \dots ; x_{m+1}),\end{aligned}$$

donde la notación $\hat{}$ significa que se prescinde de los argumentos que la llevan. Definimos, también, $\tilde{\delta}^0 : \widetilde{C}^0(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) \to \widetilde{C}^1(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\delta}^0 v(x) = \Phi(x) \cdot v\,.$$

Siendo $\widetilde{C}(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) = \oplus_m \widetilde{C}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$, el operador de cohomología es la aplicación

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} : \widetilde{C}(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) \to \widetilde{C}(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$$

cuya restricción a $\widetilde{C}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ coincide con $\tilde{\delta}^m$.

Se comprueba directamente que el operador $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ satisface la condición para ser un operador de cohomología: $\tilde{\boldsymbol{\delta}} \circ \tilde{\boldsymbol{\delta}} = 0$.

Definición 1.2 *Un p-cociclo de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación Φ es una p-cocadena ω tal que $\tilde{\boldsymbol{\delta}}\,\omega = 0$. Si $p \geq 1$, un p-coborde es una p-cocadena ω de la forma $\omega = \tilde{\boldsymbol{\delta}}\,v$, siendo v una $(p-1)$-cocadena.*

En particular, un 0-cociclo es un elemento $v \in \boldsymbol{V}$ tal que

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}\,v(x) = \Phi(x) \cdot v = 0\,; \qquad x \in \mathfrak{g}\,,$$

es decir, todo vector del núcleo de la representación Φ (invariantes por Φ).

Un 1-cociclo es una aplicación lineal $\omega : \mathfrak{g} \to \boldsymbol{V}$ tal que

$$\omega\left([x_1\,; x_2]\right) = \Phi(x_1) \cdot \omega(x_2) - \Phi(x_2) \cdot \omega(x_1)\,; \qquad x_1, x_2 \in \mathfrak{g}\,.$$

Y un 2-cociclo, una aplicación bilineal antisimétrica $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \boldsymbol{V}$ tal que:

$$\begin{aligned}\omega\left([x_1\,; x_2]\,; x_3\right) - \omega\left([x_1\,; x_3]\,; x_2\right) + \omega\left([x_2\,; x_3]\,; x_1\right) = \\ = \Phi(x_1) \cdot \omega(x_2; x_3) - \Phi(x_2) \cdot \omega(x_1; x_3) + \Phi(x_3) \cdot \omega(x_1; x_2)\,,\end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$.

Un 1-coborde (o 1-cociclo exacto) es una aplicación lineal $\omega : \mathfrak{g} \to \boldsymbol{V}$ definida por un elemento $v \in \boldsymbol{V}$ de la forma siguiente:

$$\omega(x) = \tilde{\boldsymbol{\delta}}\,v(x) \equiv \Phi(x) \cdot v\,; \qquad x \in \mathfrak{g}\,.$$

Un 2-coborde es una aplicación bilineal antisimétrica $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ definida, a partir de un elemento $\eta \in \widetilde{C}^1(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$, por la condición $\omega = \tilde{\delta}\,\eta$, es decir, tal que:

$$\omega(x_1; x_2) = \tilde{\delta}\,\eta(x_1; x_2) \equiv \Phi(x_1) \cdot \eta(x_2) - \Phi(x_2) \cdot \eta(x_1) - \eta\left([x_1\,; x_2]\right) ,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$.

Denotando al subespacio de los cociclos de orden m (para $m > 0$) por $\tilde{Z}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ y al de los cobordes por $\tilde{B}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$, la relación $\tilde{\delta} \circ \tilde{\delta} = 0$ implica que todo p-coborde ($p > 0$) es un p-cociclo. Es decir, $\tilde{B}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ es un subespacio vectorial de $\tilde{Z}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ y los espacios de cohomología de Chevalley-Eilenberg se definen así:

$$\tilde{H}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) = \tilde{Z}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) / \tilde{B}^m(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) .$$

Para $m = 0$ se establece que $\tilde{H}^0(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V}) = \tilde{Z}^0(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$, es decir, $\tilde{H}^0(\mathfrak{g}; \boldsymbol{V})$ es el subespacio de $\boldsymbol{V}$ constituido por los elementos invariantes de la representación.

Observación La cohomología de $\mathfrak{g}$ asociada a la representación trivial $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathbb{R})$ de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ ($\rho(x) = 0$), es la expresión algebraica de la cohomología de de Rham invariante sobre el grupo de Lie conexo y simplemente conexo $\boldsymbol{G}$ de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

En efecto, el complejo de de Rham de una variedad diferenciable $\boldsymbol{M}$ está constituido por el espacio vectorial graduado, $\Omega(\boldsymbol{M})$, de las formas diferenciales de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre la variedad $\boldsymbol{M}$ y el operador diferencial exterior, $\boldsymbol{d} : \Omega(\boldsymbol{M}) \longrightarrow \Omega(\boldsymbol{M})$, como operador de cohomología.

Si $\omega \in \Omega^k(\boldsymbol{M})$ es una forma diferencial sobre $\boldsymbol{M}$ y $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(\boldsymbol{M})$ son campos vectoriales sobre la variedad, se tiene (ver Abraham, Marsden, Ratiu [1983]):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}\,\omega(X_0, X_1, \ldots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathrm{L}_{X_i}\big(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)\big) + \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega\big(\mathrm{L}_{X_i}(X_j), \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k\big) , \end{aligned}$$

donde la notación ^ significa que se prescinde del elemento que la lleva.

En el caso de que la variedad diferenciable sea un grupo de Lie $\boldsymbol{G}$, se puede considerar el espacio vectorial graduado de las formas diferenciales invariantes por la izquierda, $\Omega_\lambda(\boldsymbol{G})$ (respectivamente el espacio vectorial graduado de las formas diferenciales invariantes por la derecha, $\Omega_\rho(\boldsymbol{G})$), y el complejo de de Rham invariante por la izquierda $(\Omega_\lambda(\boldsymbol{G}); \boldsymbol{d})$ (respectivamente el complejo de de Rham invariante por la derecha, $(\Omega_\rho(\boldsymbol{G}); \boldsymbol{d})$), ya que si $\omega \in \Omega_\lambda(\boldsymbol{G})$ también $\boldsymbol{d}\omega \in \Omega_\lambda(\boldsymbol{G})$.

Sean $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}_\lambda(\boldsymbol{G})$ campos vectoriales invariantes por la izquierda, y $\omega \in \Omega^k_\lambda(\boldsymbol{G})$ una k-forma diferencial invariante por la izquierda, entonces la función sobre $\boldsymbol{G}$, $\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)$, es constante y por tanto $\mathrm{L}_{X_i}\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k) = 0$. Así pues,

$$\boldsymbol{d}\,\omega(X_0, X_1, \ldots, X_k) = \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i\,; X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k\big) .$$

Consideremos al espacio vectorial $\mathcal{X}_\lambda(\boldsymbol{G})$, de los campos invariantes por la izquierda sobre $\boldsymbol{G}$, como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo $\boldsymbol{G}$ y a toda forma diferencial invariante como una aplicación multilineal antisimétrica sobre $\mathfrak{g}$ con valores reales. La expresión anterior de $\boldsymbol{d}\omega$ coincide con $\tilde{\delta}\,\omega$, siendo $\tilde{\delta}$ el operador de coborde en la cohomología de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$. Por lo que la cohomología de de Rham invariante sobre el grupo $\boldsymbol{G}$ es isomorfa a la cohomología de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$. ∎

Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, también $V \otimes V$ lo es. En efecto, se comprueba directamente que si Φ es una representación de $\mathfrak{g}$ sobre V, entonces, la aplicación

$$\widehat{\Phi} : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \Phi(x) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(x) \in End(V \otimes V)$$

es una representacion de $\mathfrak{g}$ sobre $V \otimes V$.

Esto permite definir la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación $\widehat{\Phi}$, sobre el producto tensorial $V \otimes V$. En particular, una aplicación $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow V \otimes V$ es un 1-cociclo con respecto a $\widehat{\Phi}$ si $\tilde{\delta}(\epsilon) = 0$, es decir, si:

$$\epsilon([x;y]) = \big(\Phi(x) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(x)\big) \cdot \epsilon(y) - \big(\Phi(y) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(y)\big) \cdot \epsilon(x)\,,$$

ya que:

$$\tilde{\delta}\,\epsilon(x;y) = \big(\Phi(x) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(x)\big) \cdot \epsilon(y) - \big(\Phi(y) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(y)\big) \cdot \epsilon(x) - \epsilon([x;y])\,.$$

Un 1-cociclo exacto de $\mathfrak{g}$, con respecto a $\widehat{\Phi}$, es una 1-cocadena dada por la expresión $\tilde{\delta}\,t$, donde $t \in V \otimes V$. Por tanto, queda definido por la expresión:

$$\tilde{\delta}\,t(x) = \big(\Phi(x) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(x)\big) \cdot t\,.$$

Al estudiar la estructura de biálgebra de Lie, consideraremos 1-cociclos $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Para éstos, la condición $\tilde{\delta}\,\epsilon = 0$ significa que se satisface la igualdad:

$$\epsilon\big([x;y]\big) = \big(\,\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x\,\big) \cdot \epsilon(y) - \big(\,\mathrm{ad}_y \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_y\,\big) \cdot \epsilon(x)\,, \qquad \text{(a)}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, siendo $\mathrm{ad} : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{ad}_x \in End(\mathfrak{g})$ la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}$. También consideraremos 1-cociclos exactos $\tilde{\delta}\,r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, definidos, a partir de $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, por:

$$\tilde{\delta}\,r(x) = \big(\,\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x\,\big) \cdot r\,; \qquad x \in \mathfrak{g}\,. \qquad \text{(b)}$$

Sea el isomorfismo $t \in V \otimes V \longrightarrow \tilde{t} \in Hom(V^*; V)$, definido por la igualdad:

$$\big\langle \eta\,; \tilde{t}(\xi) \big\rangle = \big\langle \eta \otimes \xi\,; t \big\rangle\,, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in V^*\,. \qquad \text{(c)}$$

En componentes, si $t = t^{ij} e_i \otimes e_j$, entonces

$$\tilde{t}(\xi) = t^{ij} \xi_j\,.$$

Mediante este isomorfismo, a partir de $\widehat{\Phi} : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V \otimes V)$, se define una representación $\widetilde{\Phi}$, de $\mathfrak{g}$ sobre $Hom(V^*; V)$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \otimes V \arrow[r, "\widehat{\Phi}(x)"] \arrow[d, "\sim"'] & V \otimes V \arrow[d, "\sim"] \\ Hom(V^*; V) \arrow[r, "\widetilde{\Phi}(x)"'] & Hom(V^*; V))\,. \end{tikzcd}$$

Si $x \in \mathfrak{g}$ y $\tilde{t} \in Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V})$, el siguiente cálculo pone de manifiesto que esta representación viene dada por la expresión:

$$\widetilde{\Phi}(x)\cdot\tilde{t} = \Phi(x)\circ\tilde{t} + \tilde{t}\circ\Phi(x)^{\mathrm{t}}\,, \tag{d}$$

donde $\Phi(x)^{\mathrm{t}} : \boldsymbol{V}^* \longrightarrow \boldsymbol{V}^*$ es la aplicación transpuesta del endomorfismo $\Phi(x) : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$.

En efecto, si $\xi,\eta \in \boldsymbol{V}^*$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\langle \eta\,;\big(\widetilde{\Phi}(x)\cdot\tilde{t}\big)(\xi)\rangle = \langle \eta\,;(\widetilde{\widehat{\Phi}(x)\cdot t})(\xi)\rangle = \langle \eta\otimes\xi\,;\widehat{\Phi}(x)\cdot t\rangle = \\
&= \langle \eta\otimes\xi\,;\big(\Phi(x)\otimes 1 + 1\otimes\Phi(x)\big)\cdot t\rangle = \big\langle\,\big(\Phi(x)^{\mathrm{t}}\otimes 1 + 1\otimes\Phi(x)^{\mathrm{t}}\big)\cdot(\eta\otimes\xi)\,;t\big\rangle = \\
&= \langle \Phi(x)^{\mathrm{t}}\cdot\eta\otimes\xi\,;t\rangle + \langle \eta\otimes\Phi(x)^{\mathrm{t}}\cdot\xi\,;t\rangle = \langle \Phi(x)^{\mathrm{t}}\cdot\eta\,;\tilde{t}(\xi)\rangle + \langle \eta\otimes\Phi(x)^{\mathrm{t}}\cdot\xi\,;t\rangle = \\
&= \langle \eta\,;\Phi(x)\cdot\big(\tilde{t}(\xi)\big) + \tilde{t}\,\big(\Phi(x)^{\mathrm{t}}\cdot\xi\big)\,\rangle = \langle \eta\,;\big(\Phi(x)\circ\tilde{t} + \tilde{t}\circ\Phi(x)^{\mathrm{t}}\big)\,(\xi)\rangle\,,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra (d).

Sea $C^m(\mathfrak{g};Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V}))$ el espacio vectorial de las aplicaciones m-lineales de $\mathfrak{g}\times\overset{m}{\cdots}\times\mathfrak{g}$ en $Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V})$. Denotemos también por $\tilde{}$ el isomorfismo:

$$\epsilon \in C^m(\mathfrak{g};\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}) \longrightarrow \tilde{\epsilon} \equiv \tilde{}\circ\epsilon \in C^m(\mathfrak{g};Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V}))\,,$$

que define (c). Un cálculo directo revela que, si $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}$ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación $\widehat{\Phi}$, la aplicación $\tilde{\epsilon} : \mathfrak{g} \longrightarrow Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V})$ satisface:

$$\tilde{\epsilon}\,\big([x\,;y]\big) = \Phi(x)\circ\tilde{\epsilon}(y) + \tilde{\epsilon}(y)\circ\Phi(x)^{\mathrm{t}} - \Phi(y)\circ\tilde{\epsilon}(x) - \tilde{\epsilon}(x)\circ\Phi(y)^{\mathrm{t}}\,,$$

para todo $x,y \in \mathfrak{g}$. Esta igualdad es la condición de 1-cociclo de $\tilde{\epsilon}$ en la cohomología definida por la representación $\widetilde{\Phi}$.

Si $\tilde{t} \in Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V})$ es una 1-cocadena de esta cohomología y denotamos también por $\tilde{\delta}$ al operador de coborde, el 1-cociclo exacto $\tilde{\delta}\,\tilde{t} \in C^1(\mathfrak{g};Hom(\boldsymbol{V}^*;\boldsymbol{V}))$ viene definido por la condición:

$$\tilde{\delta}\,\tilde{t}(x) = \Phi(x)\circ\tilde{t} + \tilde{t}\circ\Phi(x)^{\mathrm{t}}\,.$$

En el caso particular de la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$, la condición de 1-cociclo de $\tilde{\epsilon} \in Hom(\mathfrak{g};Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g}))$ se expresa así:

$$\tilde{\epsilon}\big([x\,;y]\big) = \mathrm{ad}_x\circ\tilde{\epsilon}(y) - \tilde{\epsilon}(y)\circ\mathrm{ad}_x^* - \mathrm{ad}_y\circ\tilde{\epsilon}(x) + \tilde{\epsilon}(x)\circ\mathrm{ad}_y^*\,, \tag{e}$$

para todo $x,y \in \mathfrak{g}$. Y el 1-cociclo exacto, definido por $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$, viene dado por la expresión:

$$\tilde{\delta}\,\tilde{r}(x) = \mathrm{ad}_x\circ\tilde{r} - \tilde{r}\circ\mathrm{ad}_x^* \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})\,, \tag{f}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Utilizaremos estas expresiones a lo largo del Capítulo 2.

1.1.2 Cohomología de Grupos de Lie

Sea G un grupo de Lie. Un espacio vectorial real de dimensión finita V se dice que es un G-módulo si existe un homomorfismo analítico de grupos (homomorfismo de grupos de Lie): $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$. Se dice también que ϕ es una representación del grupo de Lie G sobre el espacio vectorial V.

Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G y V es un G-módulo, entonces, como la aplicación tangente en el elemento neutro a un homomorfismo de grupos de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie, V es también es un $\mathfrak{g}$-módulo con respecto a la representación

$$\Phi \equiv T_e\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)\,,$$

obtenida como aplicación tangente en el elemento neutro a la representación del grupo $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$.

Para cada representación de un grupo de Lie G sobre un espacio vectorial V se define una cohomología de G asociada a dicha representación.

Definición 1.3 *Sea $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ una representación de G sobre V. Para cada $k > 0$ definimos el espacio de las k-cocadenas de G con valores en V, como el espacio $C^k(G;V)$ de las aplicaciones diferenciables de clase C^∞:*

$$c : G \times \overset{k}{\cdots} \times G \longrightarrow V\,.$$

Para $k = 0$, definimos el espacio de las 0-cocadenas de G con valores en V como el espacio vectorial $C^0(G;V) \equiv V$.

Para cada $k > 0$, se define la aplicación lineal: $\widetilde{\partial}^k : C^k(G;V) \longrightarrow C^{k+1}(G;V)$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}^k c(g_1,\dots,g_{k+1}) = \phi(g_1)\cdot c(g_2,\dots,g_{k+1}) &+ \\ &+ \sum_{i=1}^{k}(-1)^i c(g_1,\dots,g_{i-1},g_i g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{k+1}) + \\ &+ (-1)^{k+1} c(g_1,\dots,g_k)\,,\end{aligned}$$

donde $c \in C^k(G;V)$ y $g_1,\dots,g_{k+1} \in G$. Para $k = 0$. se define:

$$\left(\widetilde{\partial}^0 v\right)(g) = \phi(g)\cdot v\,.$$

Sea $C(G;V)$ el espacio vectorial graduado suma directa de los espacios $C^k(G;V)$ y $\widetilde{\partial} : C(G;V) \longrightarrow C(G;V)$ la aplicación lineal graduada (de grado 1) cuya restricción a $C^k(G;V)$ coincide con $\widetilde{\partial}^k$. Entonces, se satisface la condición $\widetilde{\partial}\circ\widetilde{\partial} = 0$, y por tanto $\widetilde{\partial}$ es un operador de cohomología sobre $C(G;V)$.

Definición 1.4 *Un p-cociclo del grupo de Lie G con respecto a la representación $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ es una p-cocadena c tal que $\widetilde{\partial}\, c = 0$. Se dice que es un p-coborde ($p > 0$) si $c = \widetilde{\partial}\, b$, donde $b \in C^{p-1}(G;V)$.*

En particular, un 0-cociclo es un vector $v \in V$ tal que

$$v = \phi(g)\cdot v\,, \quad \text{para todo } g \in G\,,$$

es decir, un vector invariante por la representación ϕ.

Los 1-cociclos son aplicaciones $\theta : G \longrightarrow V$ con las propiedades del siguiente lema.

Lema 1.1 *Sea $\phi : \boldsymbol{G} \longrightarrow Gl(\boldsymbol{V})$ una representación del grupo de Lie $\boldsymbol{G}$ y sea $\theta : \boldsymbol{G} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ un 1-cociclo de $\boldsymbol{G}$ con respecto a ϕ. Entonces:*

(i) *Para todo $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$ se tiene:*

$$\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1) + \phi(g_1) \cdot \theta(g_2) .$$

(ii) $\theta(e) = 0$.

(iii) *Para todo $g \in \boldsymbol{G}$ se tiene:*

$$\theta(g^{-1}) = -\phi(g^{-1}) \cdot \theta(g) .$$

Prueba

(i) Por definición del operador de cohomología se tiene:

$$(\widetilde{\boldsymbol{\partial}}\,\theta)(g_1; g_2) = \phi(g_1) \cdot \theta(g_2) - \theta(g_1 g_2) + \theta(g_1) .$$

Entonces la condición de 1-cociclo de θ, $\widetilde{\boldsymbol{\partial}}\,\theta = 0$, implica la igualdad del apartado (i).

(ii) Haciendo $g_1 = g_2 = e$ en la igualdad anterior se tiene $\theta(e) = 0$.

(iii) Haciendo $g_1 = g^{-1}$ y $g_2 = g$ en la fórmula de (i) se obtiene (iii). ∎

Denotando al subespacio de los cociclos de orden m (para $m > 0$) por $Z^m(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V})$ y al de los cobordes de orden m por $B^m(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V})$, los espacios de cohomología del grupo de Lie $\boldsymbol{G}$, con respecto a la representación considerada, se definen así:

$$H^p(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V}) = Z^p(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V}) / B^p(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V}) .$$

Para $m = 0$, se define

$$H^0(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V}) = Z^0(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{V}) ,$$

es decir el espacio de los vectores invariantes por la representación.

En el capítulo segundo utilizaremos el hecho de que por derivación en el elemento neutro de un 1-cociclo de grupo se obtiene un 1-cociclo del álgebra de Lie del grupo.

Proposición 1.1 *Si $\theta : \boldsymbol{G} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ es un 1-cociclo del grupo de Lie $\boldsymbol{G}$ con respecto a la representación $\phi : \boldsymbol{G} \longrightarrow Gl(\boldsymbol{V})$, entonces $\Theta \equiv T_e\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ es un 1-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación tangente $\Phi \equiv T_e\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\boldsymbol{V})$. Es decir,*

$$\Theta([x\,; y]) = \Phi(x) \cdot \Theta(y) - \Phi(y) \cdot \Theta(x) , \quad \textit{para todo } x, y \in \mathfrak{g} .$$

Prueba

(1) Si θ es un 1-cociclo de $\boldsymbol{G}$ con respecto a la representación ϕ, vamos a comprobar que se satisface la siguiente igualdad, para todo $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$,

$$\theta(g_1 g_2 g_1^{-1}) = \theta(g_1) + \phi(g_1) \cdot \theta(g_2) - \phi(g_1 g_2 g_1^{-1}) \cdot \theta(g_1) . \tag{a}$$

En efecto, por aplicación de la fórmula (i) del Lema 1.1, tenemos:

$$\begin{aligned}\theta(g_1g_2g_1^{-1}) &= \theta(g_1g_2) + \phi(g_1g_2)\cdot\theta(g_1^{-1}) = \\ &= \theta(g_1) + \phi(g_1)\cdot\theta(g_2) + \phi(g_1g_2)\cdot\theta(g_1^{-1}),\end{aligned}$$

ahora bién, por la igualdad (iii) del mismo lema,

$$\theta(g_1^{-1}) = -\phi(g_1^{-1})\cdot\theta(g_1),$$

con lo que

$$\begin{aligned}\theta(g_1g_2g_1^{-1}) &= \theta(g_1) + \phi(g_1)\cdot\theta(g_2) + \phi(g_1g_2)\cdot\big(-\phi(g_1^{-1})\cdot\theta(g_1)\big) = \\ &= \theta(g_1) + \phi(g_1)\cdot\theta(g_2) - \phi(g_1g_2g_1^{-1})\cdot\theta(g_1).\end{aligned}$$

(2) Haciendo $g_2 = \exp ty$ con $y \in \mathfrak{g}$ y derivando la igualdad (a) con respecto a t en $t = 0$, tenemos:

$$T_e\theta\left(\frac{d}{dt}g_1\exp(ty)g_1^{-1}\big|_{t=0}\right) = \phi(g_1)\cdot T_e\theta(y) - T_e\phi\left(\frac{d}{dt}g_1\exp(ty)g_1^{-1}\big|_{t=0}\right)\cdot\theta(g_1).$$

Por definición,

$$\frac{d}{dt}g_1\exp(ty)g_1^{-1}\big|_{t=0} = \mathrm{Ad}_{g_1}(y),$$

así pues,

$$T_e\theta\big(\mathrm{Ad}_{g_1}(y)\big) = -T_e\phi\big(\mathrm{Ad}_{g_1}(y)\big)\cdot\theta(g_1) + \phi(g_1)\cdot T_e\theta(y).$$

Haciendo ahora $g_1 = \exp sx$ con $x \in \mathfrak{g}$, y derivando esta última igualdad con respecto a s en $s = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}&T_e\theta\left(\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}_{\exp sx}(y)\big|_{s=0}\right) = \\ &\quad= -\left(\frac{d}{ds}T_e\phi\big(\mathrm{Ad}_{\exp sx}(y)\big)\cdot\theta(\exp sx)\big|_{s=0}\right) + \left(\frac{d}{ds}\phi(\exp sx)\big|_{s=0}\right)\cdot T_e\theta(y).\end{aligned}$$

Ahora bién,

$$\mathrm{Ad}_{\exp sx}(y) = \exp\big(\mathrm{ad}_{sx}(y)\big),$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ad}_{\exp sx}(y)\big|_{s=0} = [x\,;y],$$

y entonces:

$$T_e\theta([x\,;y]) = T_e\phi(x)\cdot T_e\theta(y) - \left(\frac{d}{ds}T_e\phi\big(\mathrm{Ad}_{\exp sx}\,y\big)\cdot\theta(\exp sx)\big|_{s=0}\right).$$

Finalmente,

$$\frac{d}{ds}T_e\phi\big(\mathrm{Ad}_{\exp sx}\,y\big)\cdot\theta(\exp sx)\Big|_{s=0} = T_e\phi(y)\cdot T_e\theta(x) + T_e\phi\big([x;y]\big)\cdot\theta(e),$$

y $\theta(e) = 0$ (Lema 1.1), con lo que se obtiene:

$$T_e\theta([x\,;y]) = T_e\phi(x)\cdot T_e\theta(y) - T_e\phi(y)\cdot T_e\theta(x),$$

que es la condición de 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representración $T_e\phi$. ∎

El producto tensorial $V \otimes V$ del G-módulo V (con respecto a la representación ϕ) también tiene estructura de G-módulo por medio de la representación producto tensorial:

$$\widehat{\phi} : g \in G \longrightarrow \phi(g) \otimes \phi(g) \in Gl(V \otimes V),$$

En particular, la aplicación

$$l : G \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g},$$

es un 1-cociclo de G con respecto a la representación adjunta de G sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ si se satisface:

$$l(gh) = l(g) + \mathrm{Ad}(g)^{\otimes 2} l(h), \quad \text{para todo } g, h \in G. \tag{b}$$

Volviendo a considerar el isomorfismo $V \otimes V \cong Hom(V^*; V)$ (expresión (c) de la Sección 1.1.1), a partir de la representación $\widehat{\phi}$, se define una representación de G sobre $Hom(V^*; V)$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V \arrow[r, "\widehat{\phi}(g)"] \arrow[d] & V \otimes V \arrow[d] \\
Hom(V^*; V) \arrow[r, "\widetilde{\phi}(g)"'] & Hom(V^*; V).
\end{tikzcd}$$

Establezcamos la siguiente notación $\phi_g \equiv \phi(g)$ y consideremos el homomorfismo $\tilde{t} \in Hom(V^*; V)$ asociado al 2-tensor $t \in V \otimes V$, entonces, la representación $\widetilde{\phi}$ se escribe así:

$$\widetilde{\phi}_g(\tilde{t}) = \phi_g \circ \tilde{t} \circ (\phi_g)^{\mathrm{t}},$$

para todo $g \in G$, donde $(\phi_g)^{\mathrm{t}} : V^* \longrightarrow V^*$ es la aplicación transpuesta del isomorfismo $\phi_g : V \longrightarrow V$. En efecto, se debe verificar $\widetilde{\phi}_g(\tilde{t}) = \widetilde{\widehat{\phi}_g(t)}$. Por tanto, para todo $\xi, \eta \in V^*$, tenemos:

$$\langle \eta ; (\widetilde{\phi}_g)(\tilde{t})(\xi) \rangle = \langle \eta ; \widetilde{\widehat{\phi}_g(t)}(\xi) \rangle = \langle \eta \otimes \xi ; \widehat{\phi}_g(t) \rangle .$$

Teniendo en cuenta la definición de $\widehat{\phi}$, se verifica:

$$\begin{aligned}
\left\langle \eta \otimes \xi ; \widehat{\phi}_g(t) \right\rangle &= \langle \eta \otimes \xi ; (\phi_g \otimes \phi_g)(t) \rangle = \langle (\phi_g)^{\mathrm{t}}(\eta) \otimes (\phi_g)^{\mathrm{t}}(\xi) ; t \rangle = \\
&= \langle (\phi_g)^{\mathrm{t}}(\eta) ; \tilde{t}\left((\phi_g)^{\mathrm{t}}(\xi)\right) \rangle = \langle \eta ; \phi_g \circ \tilde{t} \circ (\phi_g)^{\mathrm{t}}(\xi) \rangle ,
\end{aligned}$$

así pues: $\widetilde{\phi}_g(\tilde{t}) = \phi_g \circ \tilde{t} \circ (\phi_g)^{\mathrm{t}}$.

Si $l : G \longrightarrow V \otimes V$ es un 1-cociclo con respecto a la representación $\widehat{\phi}$, la aplicación $\tilde{l} : G \longrightarrow Hom(V^*; V)$, asociada a l mediante el isomorfismo (c) de 1.1.1, satisface la condición

$$\tilde{l}(gh) = \tilde{l}(g) + \phi_g \circ \tilde{l}(h) \circ (\phi_g)^{\mathrm{t}},$$

para todo $g, h \in G$. Esta es la condición de 1-cociclo en la cohomología definida por la representación $\widetilde{\phi}$.

Utilizaremos las expresiones de esta sección al estudiar los grupos de Lie-Poisson en el Capítulo 2.

1.1.3 Representaciones Afines de Algebras y Grupos de Lie

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Denotaremos por $\mathcal{A}(V)$ al grupo de Lie de las transformaciones afines, invertibles, del espacio vectorial V. Es decir, si $a \in \mathcal{A}(V)$ entonces $a = T_v \circ L$ donde $L \in Gl(V)$ y T_v es la traslación sobre V definida por el vector $v \in V$.

Definición 1.5 *Una representación afín del grupo de Lie G sobre el espacio vectorial V es un homomorfismo analítico de grupos de Lie:*

$$a : g \in G \longrightarrow a(g) = T_{\theta(g)} \circ L(g) \in \mathcal{A}(V),$$

donde $L(g) \in Gl(V)$ y $T_{\theta(g)}$ es la traslación sobre V definida por el vector $\theta(g) \in V$. Se satisface, por tanto, que $a(gh) = a(g) \circ a(h)$ para todo $g, h \in G$.

Proposición 1.2 *Sea $a : G \longrightarrow \mathcal{A}(V)$ una representación afín del grupo de Lie G sobre el espacio vectorial V. Existe una única representación lineal $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ de G en V y un único 1-cociclo, $\theta : G \longrightarrow V$, de G con respecto a ϕ, tal que*

$$a(g) \cdot v = \phi(g) \cdot v + \theta(g),$$

para todo $g \in G$ y todo $v \in V$. A la aplicación ϕ se le denomina parte lineal de la acción afín a, y a θ se le denomina 1-cociclo asociado a dicha acción.

Prueba Por definición, la aplicación a se escribe de manera única de la forma $a(g) \cdot v = \phi(g) \cdot v + \theta(g)$, siendo $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ una representación lineal del grupo G. Como $\theta(g) = a(g) \cdot 0$, θ es una aplicación analítica de G en V. Por ser a una representación de G sobre V se tiene:

$$a(g_1) \circ a(g_2) = a(g_1 g_2), \quad \text{para todo } g_1, g_2 \in G,$$

lo cual implica que

$$\theta(g_1 g_2) = \phi(g_1) \cdot \theta(g_2) + \theta(g_1),$$

que es la condición de 1-cociclo de G con respecto a la representación ϕ. ∎

Recíprocamente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3 *Sea $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ una representación lineal del grupo de Lie G en el espacio vectorial V, y sea $\theta : G \longrightarrow V$ un 1-cociclo de G con respecto a ϕ. Entonces, la aplicación $a : G \longrightarrow End(V)$ definida por:*

$$a(g) \cdot v = \phi(g) \cdot v + \theta(g),$$

para todo $g \in G$ y $v \in V$, es una representación afín de G sobre V, cuya parte lineal es ϕ y cuyo 1-cociclo asociado es θ.

Prueba Como θ es un 1-cociclo de G se tiene que $\theta(e) = 0$ (Lema 1.1 de 1.1.2). Por tanto, para todo $v \in V$,

$$a_e(v) = v.$$

Por otra parte, (Lema 1.1 de 1.1.2)

$$\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1) + \phi(g_1) \cdot \theta(g_2),$$

para todo $g_1, g_2 \in G$. En consecuencia, para todo $v \in V$, $g_1, g_2 \in G$, es fácil ver que:

$$a(g_1 g_2) \cdot v = \big(a(g_1) \circ a(g_2)\big) \cdot v = \phi(g_1 g_2) \cdot v + \theta(g_1 g_2),$$

lo que demuestra que a es una representación de G sobre V. Pero, por la forma que tiene, esta aplicación es una representación afín que tiene a ϕ como su parte lineal y a θ como 1-cociclo asociado. ∎

Las propiedades de las acciones afines y de los 1-cociclos del grupo de Lie G tienen equivalentes infinitesimales que se pueden expresar en términos de acciones afines y 1-cociclos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Sea V un espacio vectorial y $\mathfrak{a}(V)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones afines (invertibles y no invertibles) de V en sí mismo. Para definir representaciones afines de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es necesario dotar a $\mathfrak{a}(V)$ de una estructura de álgebra de Lie.

Sean f_1 y f_2 elementos de $\mathfrak{a}(V)$, entonces existen $v_1, v_2 \in V$ y L_1, L_2, endomorfismos de V, tales que:

$$f_1(v) = L_1(v) + v_1\,; \qquad f_2(v) = L_2(v) + v_2\,,$$

para todo $v \in V$.

Proposición 1.4 *Con la notación anterior, si definimos:*

$$[f_1\,; f_2](v) = (L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1)(v) + L_1(v_2) - L_2(v_1)\,,$$

el elemento $[f_1\,; f_2]$ es una aplicación afín de V en sí mismo, con parte lineal $L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ y traslación asociada definida por el vector $L_1(v_2) - L_2(v_1)$. La ley de composición $(f_1; f_2) \longrightarrow [f_1\,; f_2]$ define sobre $\mathfrak{a}(V)$ una estructura de álgebra de Lie.

Prueba En efecto, $(f_1; f_2) \longrightarrow [f_1\,; f_2]$ es una aplicación bilineal y antisimétrica, que satisface la identidad de Jacobi ya que:

$$\begin{aligned}\big[f_1\,; [f_2\,; f_3]\big](v) = \big(&L_1 \circ L_2 \circ L_3 - L_1 \circ L_3 \circ L_2 - L_2 \circ L_3 \circ L_1 + L_3 \circ L_2 \circ L_1\big)(v) + \\ &+ L_1 \circ L_2(v_3) - L_1 \circ L_3(v_2) - L_2 \circ L_3(v_1) + L_3 \circ L_2(v_1)\,,\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\big[f_1\,; [f_2\,; f_3]\big] + \big[f_2\,; [f_3\,; f_1]\big] + \big[f_3\,; [f_1\,; f_2]\big] = 0\,.$$

■

Como consecuencia, la aplicación que asocia a cada aplicación afín su parte lineal es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Definición 1.6 *Una representación afín de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V es un homomorfismo $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}(V)$ de $\mathfrak{g}$ en el álgebra de Lie de las aplicaciones afines de V en sí mismo.*

Proposición 1.5 *Sea A una representación afín del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V. Existe una única representación lineal $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ y un único 1-cociclo $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación lineal Φ, tal que, para todo $x \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$, se tiene:*

$$A(x) \cdot v = \Phi(x) \cdot v + \Theta(x)\,.$$

La representación lineal Φ se denomina parte lineal de la representación afín A, y el 1-cociclo Θ, 1-cociclo asociado a A.

La condición de 1-cociclo de Θ se escribe así:

$$\Theta([x_1\,; x_2]) = \Phi(x_1) \cdot \Theta(x_2) - \Phi(x_2) \cdot \Theta(x_1)\,,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$.

Prueba Cálculo directo semejante al de la Proposición 1.2. ∎

Proposición 1.6 *Sea $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ una representación lineal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V y sea $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación lineal Φ. Para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$, definimos:*

$$A(x) \cdot v = \Phi(x) \cdot v + \Theta(x)\,.$$

La aplicación $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}(V)$ así definida es una representación afín de $\mathfrak{g}$ en V, cuya parte lineal es Φ y cuyo 1-cociclo asociado es Θ.

Prueba Semejante a la de la Proposición 1.3. ∎

Proposición 1.7 *Sea a una representación afín de un grupo de Lie G sobre el espacio vectorial V. Sea ϕ su parte lineal y θ su 1-cociclo asociado. Para cada elemento x en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G y para cada elemento $v \in V$, definimos:*

$$A(x) \cdot v = \frac{d}{dt} a(\exp(tx)) \cdot v\big|_{t=0}\,.$$

La aplicación $A : G \longrightarrow \mathfrak{a}(V)$ así definida es una representación afiín de $\mathfrak{g}$ en V cuya parte lineal Φ y cuyo 1-cociclo asociado Θ están relacionados con ϕ y θ por las fórmulas:

$$\begin{aligned}\Phi(x) \cdot v &= \frac{d}{dt} \phi(\exp(tx)) \cdot v\big|_{t=0}\,,\\ \Theta(x) &= \frac{d}{dt} \theta(\exp(tx))\big|_{t=0} = T_e\theta(x)\,.\end{aligned}$$

La representación afín A de $\mathfrak{g}$, su parte lineal Φ, y el 1-cociclo Θ se dice que están asociados a la representación afín a de G, a su parte lineal ϕ, y a el 1-cociclo θ, respectivamente.

Prueba Para cada $x \in \mathfrak{g}$ y cada $v \in V$, se verifica:

$$\begin{aligned}A(x) \cdot v &= \frac{d}{dt} a\big(\exp(tx)\big) \cdot v\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \big(\phi(\exp(tx)) \cdot v + \theta(\exp(tx))\big)\big|_{t=0} = \\ &= \Phi(x) \cdot v + \Theta(x)\,,\end{aligned}$$

donde Φ y Θ están definidas por las fórmulas del enunciado. Como la aplicación tangente en el elemento neutro $e \in G$ a un homomorfismo de grupos es un homomorfismo de álgebras de Lie, Φ es una representación lineal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Como la aplicación tangente en $e \in G$ a un 1-cociclo de G con respecto a la representación ϕ es un 1-cociclo del álgebra de Lie de G con respecto a la representación $T_e\phi$ (Proposición 1.1 de 1.1.2), Θ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a Φ. Por tanto, A es una representación afín del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cuya parte lineal es Φ y cuyo 1-cociclo asociado es Θ. ∎

El álgebra de Lie de $\mathcal{A}(V)$ es precisamente $\mathfrak{a}(V)$, es decir, es el espacio de las transformaciones afines sobre V, dotado del corchete de Lie definido en la Proposición 1.4. (ver por ejemplo: Varandarajan [1974]). Como consecuencia de esta observación se tiene la siguiente proposición que utilizaremos, en el capítulo segundo, en el teorema de integración de biálgebras de Lie.

Proposición 1.8 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y G el grupo de Lie conexo y simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ un 1-cociclo de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$, entonces existe un único 1-cociclo $\theta : G \longrightarrow V$ del grupo de Lie G con respecto a la representación $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ que determina Φ, tal que $T_e\theta = \Theta$.*

Prueba Sea $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}(V)$ la representación afín de $\mathfrak{g}$ cuya parte lineal es Φ y cuyo 1-cociclo asociado es Θ. Por ser A un homomorfismo de álgebras de Lie, determina un único homomorfismo de grupos, $a : G \longrightarrow \mathcal{A}(V)$ cuya aplicación tangente en el elemento neutro es A, es decir, una representación afín del grupo de Lie G sobre el espacio vectorial V tal que $T_e a = A$. Sea $\theta : G \longrightarrow V$ el 1-cociclo asociado a a, la Proposición 1.6 implica que $T_e\theta = \Theta$. ■

1.2 Cohomología de Poisson

La cohomología de Poisson se define en el contexto de las variedades de Poisson. El concepto de variedad de Poisson se puede entender como una generalización del de variedad simpléctica, que es la estructura geométrica que subyace en la decripción de los sistemas hamiltonianos clásicos.

Una variedad simpléctica (ver por ejemplo: Abraham, Marsden [1983]; Liberman, Marle [1987]) es el par formado por una variedad diferenciable M y una 2-forma diferencial, cerrada, no-degenerada, Ω sobre la variedad. La variedad M es entonces de dimensión par $2n$.

La no-degeneración de Ω implica la existencia del isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}^*(M); \\ X &\longrightarrow \mu(X) = -i_X\Omega\,, \end{aligned} \tag{a}$$

donde $\mathcal{X}(M) \equiv \wedge^1(M)$ es el espacio vectorial de los campos vectoriales sobre la variedad, $\mathcal{X}^*(M) \equiv \wedge_1(M)$ el espacio de las formas diferenciales de orden uno y el operador $i_{(\cdot)}$ es el producto interior.

Este isomorfismo asocia a toda función $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sobre la variedad un campo vectorial

$$X_H = \mu^{-1}(dH)\,, \tag{b}$$

es decir,

$$-i_{X_H}\Omega = dH\,,$$

de tal forma que H es constante sobre cada curva integral de X_H.

En un sistema de coordenadas canónicas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, donde la forma Ω viene dada por la expresión $\Omega = \sum dp_i \wedge dq^i$, el *campo hamiltoniano* X_H se escribe así:

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}; -\frac{\partial H}{\partial q^i}\right).$$

Las curvas integrales del campo X_H, $c(t) \equiv (q(t), p(t))$, definidas por la condición:

$$\frac{dc(t)}{dt} = X_H(c(t))\,,$$

satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,; \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

De esta forma, se define un sistema Hamiltoniano como la terna $(M;\Omega;X_H)$, donde $(M;\Omega)$ es una variedad simpléctica y X_H el campo vectorial sobre la variedad definido en (b) a partir de una función $H\in\mathcal{C}^\infty(M)$. A la función H se la denomina *Hamiltoniano* del sistema.

La evolución en el tiempo de un observable $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ satisface la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\circ F_t)(m) &= d\,f\big(F_t(m)\big)\frac{dF_t(m)}{dt} = d\,f\big(F_t(m)\big)X_H\big(F_t(m)\big) = \\ &= d\,f\big(F_t(m)\big)\circ T_mF_t\cdot X_H(m) = d\,(f\circ F_t)(m)\cdot X_H(m) = \\ &= \Omega\big(X_H;X_{f\circ F_t}\big)(m)\,,\end{aligned}\tag{c}$$

donde F_t es el flujo local del campo X_H.

Definiendo la aplicación bilineal $\{\,;\,\}:\mathcal{C}^\infty(M)\times\mathcal{C}^\infty(M)$ por medio de la expresión:

$$\{f\,;g\}=\Omega(X_f;X_g)\,,$$

donde $X_f=\mu^{-1}(df)$ y $X_g=\mu^{-1}(dg)$, la ecuación (c) se escribe así:

$$\frac{d}{dt}(f\circ F_t)=\{H\,;f\circ F_t\}\,.$$

Este corchete $\{\,;\,\}$, denominado *corchete de Poisson*, es una derivación en cada argumento, es decir,

$$\{fg\,;h\}=f\{g\,;h\}+\{f\,;h\}g\,,\quad\text{para todo}\quad f,g,h\in\mathcal{C}^\infty(M)\,,\tag{d}$$

ya que, para todo $f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\{f\,;g\}=\Omega(X_f;X_g)=-\big(i_{X_g}\Omega\big)\cdot X_f=dg\cdot X_f=\mathrm{L}_{X_f}g\,.\tag{e}$$

Es antisimétrico ya que Ω lo es. Por último, como

$$\mathrm{L}_{X_f}\Omega(X_g;X_h)=\big\{f\,;\{g\,;h\}\big\}$$

y

$$\Omega\big([X_f\,;X_g];X_h\big)=\mathrm{L}_{[X_f\,;X_g]}h=\mathrm{L}_{X_f}\mathrm{L}_{X_g}h-\mathrm{L}_{X_g}\mathrm{L}_{X_f}h=\big\{f\,;\{g\,;h\}\big\}+\big\{g\,;\{h\,;f\}\big\}\,,$$

al ser cerrada la 2-forma Ω, se tiene:

$$\begin{aligned}0=d\,\Omega(X_f;X_g;X_h)&=\mathrm{L}_{X_f}\Omega(X_g;X_h)+\text{p.c.}-\Omega\big([X_f\,;X_g];X_h\big)+\text{p.c.}=\\&=\big\{\{f\,;g\}\,;h\big\}+\text{p.c.}\,,\end{aligned}$$

es decir $\{\,;\,\}$ satisface la identidad de Jacobi.

Sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ se tienen pues dos estructuras, la de álgebra asociativa dada por el producto ordinario de funciones y la de álgebra de Lie dada por el corchete de Poisson. Ambas están ligadas por la relación (d).

Si se adopta el punto de vista de considerar el corchete de Poisson como la estructura fundamental sobre la variedad, se tiene el concepto de *variedad de Poisson* como generalización del concepto de variedad simpléctica. En este caso, teniendo en cuenta (e), se define el campo hamiltoniano X_f correspondiente a $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, por la condición:

$$\mathrm{L}_{X_f}g=\{f\,;g\}\,,\quad\text{para todo } g\in\mathcal{C}^\infty(M)\,.$$

1.2.1 Variedades de Poisson

Una *variedad de Poisson* (ver por ejemplo: Liberman, Marle [1987]; Choquet-Bruhat, De Witt [1989]) es el par definido por una variedad M de clase $\mathcal{C}^\infty$ y un corchete de Poisson $\{\,;\}_M$, es decir, una estructura de álgebra de Lie sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(M)$, que satisface la regla de Leibnitz:

$$\{f_1\,;f_2f_3\}_M = f_2\{f_1\,;f_3\}_M + f_3\{f_1\,;f_2\}_M\,, \quad \text{para todo} \quad f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(M)\,.$$

Como consecuancia de la regla de Leibnitz, el valor de $\{f_1\,;f_2\}(x)$ depende sólo de los valores $df_1(x)$ y $df_2(x)$ (ver por ejemplo: Libermann, Marle [1987]; Choquet-Bruhat, De Witt [1989])). Además la aplicación $f \in \mathcal{C}^\infty(P) \longrightarrow df(x) \in T_x^*P$ es suprayectiva. Por tanto, sobre toda variedad de Poisson $(M;\{\,;\})$ existe un campo tensorial 2-contravariante, antisimétrico, Λ, definido por la condición: $\Lambda(df_1;df_2) = \{f_1\,;f_2\}$ para todo $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Este campo tensorial, que es único, se denomina *tensor de Poisson* de la variedad de Poisson $(M;\{\,;\})$.

En la Sección 1.2.2 estudiaremos la condición que debe satisfacer un campo tensorial 2-contravariante, antisimétrico sobre una variedad diferenciable M, para definir una estructura de Poisson sobre ella.

Sean $(M;\{\,;\}_M)$ y $(N;\{\,;\}_N)$ dos variedades de Poisson. Sobre el producto $M\times N$ se define un corchete de Poisson de la siguiente manera:

$$\{f_1\,;f_2\}_{M\times N}(m;n) = \{(f_1)_1^m\,;(f_2)_1^m\}_N(n) + \{(f_1)_2^n\,;(f_2)_2^n\}_M(m)\,,$$

donde $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M\times N)$ y $(m;n) \in M\times N$, siendo $(f_i)_1^m \in \mathcal{C}^\infty(N)$ y $(f_i)_2^n \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $i = 1, 2$, las aplicaciones parciales definidas por:

$$(f_i)_1^m(n) = f_i(m;n) \qquad \text{y} \qquad (f_i)_2^n(m) = f_i(m;n)\,.$$

Con este corchete, al par $(M\times N;\{\,;\}_{M\times N})$ se le denomina *producto de las variedades de Poisson* $(M;\{\,;\}_M)$ *y* $(N;\{\,;\}_N)$.

Un *morfismo de Poisson* entre las variedades $(M;\{\,;\}_M)$ y $(N;\{\,;\}_N)$ es una aplicación ϕ de clase $\mathcal{C}^\infty$ de la variedad M en la variedad N tal que

$$\{f_1\,;f_2\}_N\circ\phi = \{f_1\circ\phi\,;f_2\circ\phi\}_M\,, \quad \text{para todo} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(N)\,.$$

Un ejemplo importante (que describimos a continuación) de estructura de Poisson (en general no simpléctica) es la que se define de manera natural sobre el espacio vectorial dual, $\mathfrak{g}^*$, de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (ver por ejemplo: Fomenko, Trofimov [1988]; Choquet-Bruhat, De Witt [1989]; Perelomov [1990]).

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. A las formas lineales $d\varphi(\alpha), d\psi(\alpha) \in \mathfrak{g}^{**}$ se las puede considerar como elementos de $\mathfrak{g}$ por medio del isomorfismo $x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{g}^{**}$, donde $\tilde{x}(\alpha) = \langle\alpha\,;x\rangle$ para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Entonces, la aplicación $\{\,;\} : \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\times\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ definida así:

$$\{\varphi\,;\psi\}(\alpha) = \alpha\left([d\varphi(\alpha)\,;d\psi(\alpha)]\right)\,, \tag{a}$$

es un corchete de Poisson sobre la variedad $\mathfrak{g}^*$ denominado corchete de Kirillov-Konstant-Souriau.

Si C_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y α_i $(i = 1, \ldots, n)$ las componentes de $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ en la base dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$, el corchete definido en (a) se escribe así:

$$\{\varphi\,;\psi\}(\alpha) = C_{ij}^k \alpha_k \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_j}\,.$$

En particular, si las funciones son lineales, es decir, si son elementos $x, y \in \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$, el corchete (a) coincide con el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$:

$$\{x\,;y\}(\alpha) = \alpha\left([x\,;y]\right)\;; \quad x, y \in \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{**}\,, \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,.$$

Como hemos visto en la introducción de esta Sección 1.2, el campo Hamiltoniano $X_\varphi \in \mathcal{X}(M)$, correspondiente a una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sobre la variedad de Poisson $(M; \{\,;\})$, está definido por la igualdad: $\mathrm{L}_{X_\varphi} g = \{\varphi\,;\psi\}$ (siendo $\mathrm{L}_{(\cdot)}$ la derivación de Lie con respecto a campos vectoriales) para toda $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. En el caso de la variedad $\mathfrak{g}^*$ dotada del corchete de Poisson (a) se tiene:

$$X_\varphi(\alpha) = -\,\mathrm{ad}^*\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot\alpha\,,$$

ya que $\left(\mathrm{L}_{X_\varphi}\psi\right)(\alpha) = \alpha\left(\left[d\varphi(\alpha)\,;d\psi(\alpha)\right]\right)$. Por tanto, las ecuaciones de Hamilton relativas al Hamiltoniano $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ son:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot\alpha(t)\,, \quad \text{donde} \quad d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}\,. \tag{b}$$

Una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ se dice que es una *función de Casimir* si es invariante por la acción coadjunta del grupo. Es decir, si se satisface:

$$\varphi(\mathrm{Ad}^*(g)\cdot\alpha) = \varphi(\alpha)\,, \quad \text{para todo} \quad g \in G\,, \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,. \tag{c}$$

Lema 2.1 *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función de Casimir. Entonces,*

$$\mathrm{ad}^*\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot\alpha = 0\,, \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,,$$

y por tanto,

$$\{\varphi\,;\psi\} = 0\,, \quad \textit{para todo} \quad \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\,.$$

Prueba Con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ fijado, consideremos la composición:

$$\Phi : g \in G \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*} \mathrm{Ad}^*(g) \in Gl(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{T^\alpha} \mathrm{Ad}^*(g)\cdot\alpha \in \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\varphi} \varphi\left(\mathrm{Ad}^*(g)\cdot\alpha\right) \in \mathbb{R}\,,$$

Si φ es una función de Casimir, por definición es invariante por la acción coadjunta del grupo, es decir,

$$\varphi(\mathrm{Ad}^*(g)\cdot\alpha) = \varphi(\alpha)\,, \quad \text{para todo} \quad g \in G \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,,$$

entonces $\Phi = cte$ y $d\Phi(g) = 0$ en todo punto $g \in G$. Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 = d\Phi(e)(x) &= d\varphi(\alpha)\left(\mathrm{ad}^*(x)\cdot\alpha\right) \equiv \left(\mathrm{ad}^*(x)\cdot\alpha\right)\left(d\varphi(\alpha)\right) = \\ &= -\left(\alpha\circ\mathrm{ad}(x)\right)\left(d\varphi(\alpha)\right) = \alpha\circ\mathrm{ad}\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot x = -\left(\mathrm{ad}^*\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot\alpha\right)\cdot x\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Lo cual implica que $\mathrm{ad}^*\left(d\varphi(\alpha)\right)\cdot\alpha = 0$. ∎

En el caso de que G sea el grupo de Lie conexo y simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se tiene la proposición recíproca. Es decir, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es tal que $\mathrm{ad}^*(d\varphi(\alpha))\cdot\alpha = 0$, para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, entonces es una función de Casimir.

1.2.2 Noción de Corchete de Schouten

Sea $\boldsymbol{P}$ una variedad diferenciable, de clase $\mathcal{C}^\infty$, de dimensión n. Para cada $p = 1, 2, \ldots, n$, consideraremos el espacio vectorial, $\wedge^p(\boldsymbol{P})$, de los campos de tensores p-contravariantes, antisimétricos, de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\boldsymbol{P}$, que denominaremos p-tensores para abreviar.

El corchete de Schouten de un p-tensor y un q-tensor es un $(p+q-1)$-tensor que se define por su acción sobre las $(p+q-1)$-formas cerradas. La justificación de esta manera de proceder se pone de manifiesto en el siguiente cálculo.

Sea $\varepsilon^{\lambda_1 \cdots \lambda_k}_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ el símbolo de Kronecker, cuyo valor es $+1$ (respectivamente -1) si la sucesión λ es una permutación par (respectivamente impar) de la sucesión μ y 0 en cualquier otro caso. En una carta local $(U; x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sobre la variedad $\boldsymbol{P}$ definimos (ver por ejemplo: Lichnerowicz [1962])

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_q}_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} dx^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\lambda_q} ,$$

donde $(1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n)$ y se suma en todas las permutaciones $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ de $(i_1, \ldots i_q)$.

De esta forma, conviniendo en sumar desde 1 hasta n los subíndices y superíndices griegos repetidos, si $a_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ son las componentes de la q-forma $\alpha \in \wedge_q(\boldsymbol{P})$ en la base local $dx^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\lambda_q}$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q = 1, \ldots, n)$, es decir, si

$$\alpha = a_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} dx^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\lambda_q} ,$$

debido a la antisimetría de α, tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{q!} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_q} ,$$

donde

$$dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_q} = \varepsilon^{\lambda_1 \ldots \lambda_q}_{\mu_1 \ldots \mu_n} dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_n} ,$$

o bién,

$$\alpha = a_{i_1 \ldots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{1_q} ,$$

donde $(1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n)$.

Las componentes de la $(q+1)$-forma $d\alpha$, en la misma base local, vienen dadas por la expresión:

$$(d\alpha)_{\mu_1 \ldots \mu_{q+1}} = \frac{1}{q!} \varepsilon^{\nu \lambda_1 \ldots \lambda_q}_{\mu_1 \ldots \mu_{q+1}} \partial_\nu a_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} .$$

Finalmente, si $A \in \wedge^p(\boldsymbol{P})$ es un p-tensor $(p \leq q)$ sobre la variedad cuyas componentes en la base dual son $A^{\mu_1 \cdots \mu_p}$, es decir,

$$A = A^{\mu_1 \cdots \mu_p} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{m_p}} = \frac{1}{p!} A^{\mu_1 \cdots \mu_p} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{m_p}} ,$$

la contracción de A y α es, por definición, la $(q-p)$-forma de componentes:

$$(\boldsymbol{i}_A\alpha)_{\sigma_1\ldots\sigma_{q-p}} = \frac{1}{p!}A^{\mu_1\ldots\mu_p}a_{\mu_1\ldots\mu_p\sigma_1\ldots\sigma_{q-p}}\,.$$

Con estas notaciones, sean $A\in\wedge^p(\boldsymbol{P})$ un p-tensor, $B\in\wedge^q(\boldsymbol{P})$ un q-tensor y $\beta\in\wedge_{p+q-1}(\boldsymbol{P})$ una $(p+q-1)$-forma, tenemos entonces la siguiente expresión local:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_A\,\boldsymbol{d}(\boldsymbol{i}_B\beta) =& \frac{1}{(p-1)!q!}A^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}\left(\partial_\nu B^{\mu_1\ldots\mu_q}\right)\beta_{\mu_1\ldots\mu_q\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}} +\\ &+\frac{1}{(p-1)!q!}A^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}B^{\mu_1\ldots\mu_q}\left(\partial_\nu\beta_{\mu_1\ldots\mu_q\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}\right)\,.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la antisimetría del símbolo de Kronecker y que, para toda r-forma β y todo s-tensor A, se tiene:

$$\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_r} = \frac{1}{r!}\varepsilon^{\rho_1\ldots\rho_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}\beta_{\rho_1\ldots\rho_r} \quad \text{y} \quad A^{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \frac{1}{s!}\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_s}_{\rho_1\ldots\rho_s}A^{\rho_1\ldots\rho_s}\,,$$

la igualdad anterior se puede escribir así:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_A\,\boldsymbol{d}(\boldsymbol{i}_B\beta) =& (-1)^{(p-1)q}\frac{1}{(p+q-1)!}\frac{1}{(p-1)!q!}\cdot\\ &\cdot\varepsilon^{\delta_1\ldots\ldots\delta_{p+q-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}\mu_q\ldots\mu_q}A^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}\left(\partial_\nu B^{\mu_1\ldots\mu_q}\right)\beta_{\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}} +\\ &+(-1)^{(p-1)q}\frac{1}{(p+q-1)!}\frac{1}{(p-1)!q!}\frac{1}{(p+q)!}\varepsilon^{\delta_1\ldots\ldots\delta_{p+q-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}\mu_1\ldots\mu_q}\cdot\\ &\cdot\varepsilon^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}\mu_1\ldots\mu_q}_{\rho_1\ldots\ldots\rho_{p+q}}A^{\rho_1\ldots\rho_p}B^{\rho_{p+1}\ldots\rho_{p+q}}\left(\partial_\nu\beta_{\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}}\right)\,.\end{aligned}$$

Ahora bién,

$$\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_r}_{\mu_1\ldots\mu_r}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_r\sigma_1\ldots\sigma_s}_{\delta_1\ldots\ldots\delta_{r+s}} = r!\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_r\sigma_1\ldots\sigma_s}_{\delta_1\ldots\ldots\delta_{r+s}}\,,$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_A\,\boldsymbol{d}(\boldsymbol{i}_B\beta) =& (-1)^{(p-1)q}\frac{1}{(p+q-1)!}\frac{1}{(p-1)!q!}\cdot\\ &\cdot\varepsilon^{\delta_1\ldots\ldots\delta_{p+q-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}\mu_q\ldots\mu_q}A^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}\left(\partial_\nu B^{\mu_1\ldots\mu_q}\right)\beta_{\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}} +\\ &+(-1)^{(p-1)q}\frac{1}{(p-1)!q!}\frac{1}{(p+q)!}\cdot\\ &\cdot\varepsilon^{\nu\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}}_{\rho_1\ldots\rho_{p+q}}A^{\rho_1\ldots\rho_p}B^{\rho_{p+1}\ldots\rho_{p+q}}\left(\partial_\nu\beta_{\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}}\right)\,.\end{aligned} \tag{a}$$

El segundo término de la igualdad (a) es:

$$\begin{aligned}&(-1)^{(p-1)q}\frac{(p+q-1)!}{(p+q)!}\frac{1}{(p-1)!q!}A^{\rho_1\ldots\rho_p}B^{\rho_{p+1}\ldots\rho_{p+q}}(\boldsymbol{d}\beta)_{\rho_1\ldots\rho_{p+q}} =\\ &=(-1)^{(p-1)q}(-1)^{pq}\frac{1}{p+q}\frac{1}{(p-1)!}A^{\rho_1\ldots\rho_p}(\boldsymbol{i}_B\,\boldsymbol{d}\beta)_{\rho_1\ldots\rho_p} =\\ &=(-1)^{-q}\frac{p}{p+q}\boldsymbol{i}_A\left(\boldsymbol{i}_B\,\boldsymbol{d}\beta\right)\,,\end{aligned}$$

y definiendo el $(p+q-1)$-tensor H de componentes locales:

$$H^{\delta_1\ldots\delta_{p+q-1}} = \frac{1}{(p-1)!q!}\varepsilon^{\delta_1\ldots\ldots\delta_{p+q-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{p+1}\mu_1\ldots\mu_q}A^{\nu\sigma_1\ldots\sigma_{p-1}}\partial_\nu B^{\mu_1\ldots\mu_q}\,, \tag{b}$$

el primer término de (a) es:

$$(-1)^{(p-1)q}\frac{1}{(p+q-1)!}H^{\delta_1\dots\delta_{p+q-1}}\beta_{\delta_1\dots\delta_{p+q-1}} = (-1)^{(p-1)q}i_H\beta\,.$$

Así pues:

$$i_A\, d(i_B\beta) = (-1)^{(p-1)q}i_H\beta + (-1)^{-q}\frac{p}{p+q}i_A(i_B\, d\beta)\,. \tag{c}$$

Analogamente,

$$i_B\, d(i_A\beta) = i_{H'}\beta + (-1)^{p(q-1)}\frac{q}{p+q}i_A(i_B\, d\beta)\,, \tag{d}$$

siendo H' el $(p+q-1)$-tensor de componentes:

$$(H')^{\delta_1\dots\delta_{p+q-1}} = \frac{1}{p!(q-1)!}\varepsilon^{\delta_1\dots\dots\delta_{p+q-1}}_{\mu_1\dots\mu_p\sigma_1\dots\sigma_{q-1}}B^{\nu\sigma_1\dots\sigma_{q-1}}\partial_\nu A^{\mu_1\dots\mu_p}\,.$$

Reuniendo las igualdades (c) y (d), tenemos

$$(-1)^{pq+q}i_A\, d(i_B\beta) + (-1)^p i_B\, d(i_A\beta) = i_H\beta + i_{H''}\beta + (-1)^{pq}i_A(i_B\, d\beta)\,, \tag{e}$$

donde $H'' = (-1)^p H'$, es decir:

$$(H'')^{\delta_1\dots\delta_{p+q-1}} = \frac{(-1)^p}{p!(q-1)!}\varepsilon^{\delta_1\dots\dots\delta_{p+q-1}}_{\mu_1\dots\mu_p\sigma_1\dots\sigma_{q-1}}\partial_\nu A^{\mu_1\dots\mu_p}B^{\nu\sigma_1\dots\sigma_{q-1}}\,. \tag{f}$$

Denotando $[A\,;B] = H + H''$ queda justificada la siguiente definición.

Definición 2.1 *Sean $A \in \wedge^p(\boldsymbol{P})$ y $B \in \wedge^q(\boldsymbol{P})$. El corchete de Schouten de A y B, denotado por $[A\,;B]$, es el tensor $(p+q-1)$-contravariante antisimétrico definido por la relación:*

$$i_{[A\,;B]}\beta = (-1)^{pq+q}\, i_A\, d(i_B\beta) + (-1)^p\, i_B\, d(i_A\beta)\,,$$

donde β es cualquier $(p+q-1)$-forma cerrada.

Sobre el dominio de una carta local, el corchete de Schouten viene dado por

$$[A\,;B] = \frac{1}{(p+q-1)!}[A\,;B]^{k_2,\dots,k_{p+q}}\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\wedge\dots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{k_{p+q}}}\,,$$

donde, teniendo en cuenta las expresiones (b) y (f), las componentes $[A\,;B]^{k_2,\dots,k_{p+q}}$ son

$$\begin{aligned}[A\,;B]^{k_2\dots k_{p+q}} = & \frac{1}{(p-1)!q!}\varepsilon^{k_2\dots k_{p+q}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q}A^{t\, i_2\dots i_p}\partial_t B^{j_1\dots j_q} + \\ & + \frac{(-1)^p}{p!(q-1)!}\varepsilon^{k_2\dots k_{p+q}}_{i_1\dots i_p j_2\dots j_q}B^{t\, j_2\dots j_q}\partial_t A^{i_1\dots i_p}\,.\end{aligned} \tag{g}$$

Una comprobación directa proporciona el siguiente resultado.

Proposición 2.1 *Sean A y B campos de tensores contravariantes, antisimétricos, de orden p y q respectivamente, sobre una variedad diferenciable. El corchete de Schouten de A y B satisface las propiedades siguientes:*

(1) *Si $p = 1$, se tiene $[A\,;B] = \mathrm{L}_A B$.*

(2) $[A\,;B] = (-1)^{pq}[B\,;A]$.

(3) *Si C es un tensor t-contravariantre antisimétrico se tiene:*

$$(-1)^{pq}\left[[B\,;C]\,;A\right] + (-1)^{qt}\left[[C\,;A]\,;B\right] + (-1)^{tp}\left[[A\,;B]\,;C\right] = 0\,.$$

■

Proposición 2.2 *Sean A, B y C campos de tensores contravariantes, antisimétricos, de orden p, q y r respectivamente, sobre una variedad diferenciable $\boldsymbol{P}$. Se satisface la siguiente igualdad:*

$$[A\,;B\wedge C] = [A\,;B]\wedge C + (-1)^{pq+q}B\wedge[A\,;C]\,. \tag{h}$$

Prueba Haciendo uso de la expresión (g), tenemos:

$$\begin{aligned}\big([A\,;B]\wedge C\big)^{m_2\,,\dots M_{p+q+r-1}} &= \\ &= \frac{1}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q k_1\dots k_r}A^{l\,i_2\dots i_p}\partial_l B^{j_1\dots j_q}C^{k_1\dots k_r} + \\ &\quad + \frac{(-1)^p}{p!(q-1)!t!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_1\dots i_p j_2\dots j_q k_1\dots k_r}\partial_l A^{i_1\dots i_r}B^{l\,j_2\dots j_q}C^{k_1\dots k_r}\,.\end{aligned} \tag{i}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}\big(B\wedge[A\,;C]\big)^{m_2\dots m_{p+q+r}} &= \\ &= \frac{(-1)^{pq}(-1)^q}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q k_1\dots k_r}A^{l\,i_2\dots i_p}B^{j_1\dots j_q}\partial_l C^{k_1\dots k_r} + \\ &\quad + \frac{(-1)^p(-1)^{pq}}{p!q!(r-1)!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q k_2\dots k_r}\partial_l A^{i_1\dots i_p}B^{j_1\dots j_q}C^{l\,k_2\dots k_r}\,.\end{aligned} \tag{j}$$

Por lo tanto, reuniendo las igualdades (i) y (j) tenemos:

$$\begin{aligned}\big([A\,;B]\wedge C + (-1)^{pq+q}B\wedge[A\,;C]\big)^{m_2\dots m_{p+q+r}} &= \\ &= \frac{1}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q k_1\dots k_r}A^{l\,i_2\dots i_p}\partial_l B^{j_1\dots j_q}C^{k_1\dots k_r} + \\ &\quad + \frac{(-1)^p}{p!(q-1)!t!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_1\dots i_p j_2\dots j_q k_1\dots k_r}\partial_l A^{i_1\dots i_r}B^{l\,j_2\dots j_q}C^{k_1\dots k_r} + \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_2\dots i_p j_1\dots j_q k_1\dots k_r}A^{l\,i_2\dots i_p}B^{j_1\dots j_q}\partial_l C^{k_1\dots k_r} + \\ &\quad + \frac{(-1)^p(-1)^q}{p!q!(r-1)!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q k_2\dots k_r}\partial_l A^{i_1\dots i_p}B^{j_1\dots j_q}C^{l\,k_2\dots k_r}\,.\end{aligned} \tag{k}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}[A\,;B\wedge C]^{m_2\dots m_{p+q+r}} &= \\ &= \frac{(-1)^{(p-1)(q+r)}}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{j_1\dots j_q k_1\dots k_r i_2\dots i_p}A^{l\,i_2\dots i_p}\partial_l\big(B^{j_1\dots j_q}C^{k_1\dots k_r}\big) + \\ &\quad + \frac{(-1)^p}{p!(q+r-1)!}\varepsilon^{m_2\dots m_{p+q+r}}_{i_1\dots i_r a_2\dots a_{q+r}}\partial_l A^{i_1\dots i_p}\frac{1}{q!r!}\varepsilon^{l\,a_2\dots a_{q+r}}_{j_1\dots j_q k_1\dots k_r}B^{j_1\dots j_q}C^{k_1\dots k_r}\,.\end{aligned} \tag{l}$$

Ahora bién, se satisface;

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{l\,a_2\,\dots\,a_{q+r}}_{j_1\,\dots\,j_q\,k_1\,\dots\,k_r} B^{j_1\,\dots\,j_q} C^{k_1\,\dots\,k_r} = \\
&\qquad = q\varepsilon^{a_2\,\dots\,a_{q+r}}_{j_2\,\dots\,j_q\,k_1\,\dots\,k_r} B^{l\,j_2\,\dots\,j_q} C^{k_1\,\dots\,k_r} + (-1)^q t \varepsilon^{a_2\,\dots\,a_{q+r}}_{j_1\,\dots\,j_q\,k_2\,\dots\,k_r} B^{j_1\,\dots\,j_q} C^{l\,k_2\,\dots\,k_r}\,,
\end{aligned}$$

por tanto, sustituyendo en (l),

$$\begin{aligned}
&[A\,;B \wedge C]^{m_2\,\dots\,m_{p+q+r}} = \\
&\qquad = \frac{1}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\,\dots\,m_{p+q+r}}_{i_2\,\dots\,i_p\,j_1\,\dots\,j_q\,k_1\,\dots\,k_r} A^{l\,i_2\,\dots\,i_p}\partial_l B^{j_1\,\dots\,j_q} C^{k_1\,\dots\,k_r} + \\
&\qquad + \frac{(-1)^p}{p!(q-1)!r!}\varepsilon^{m_2\,\dots\,m_{p+q+r}}_{i_1\,\dots\,i_p\,j_2\,\dots\,j_q\,k_1\,\dots\,k_r} \partial_l A^{i_1\,\dots\,i_p} B^{l\,j_2\,\dots\,j_q} C^{k_1\,\dots\,k_r} + \\
&\qquad + \frac{1}{(p-1)!q!r!}\varepsilon^{m_2\,\dots\,m_{p+q+r}}_{i_2\,\dots\,i_p\,j_1\,\dots\,j_q\,k_1\,\dots\,k_r} A^{l\,i_2\,\dots\,i_p} B^{j_1\,\dots\,j_q}\partial_l C^{k_1\,\dots\,k_r} + \\
&\qquad + \frac{(-1)^p(-1)^q}{p!q!(r-1)!}\varepsilon^{m_2\,\dots\,m_{p+q+r}}_{i_1\,\dots\,i_p\,j_1\,\dots\,j_q\,k_2\,\dots\,k_r} \partial_l A^{i-1\,\dots\,i_p} B^{j_1\,\dots\,j_q} C^{l\,k_2\,\dots\,k_r}\,.
\end{aligned} \tag{m}$$

Los segundos miembros de (k) y (m) son iguales. ■

Como vimos en la Sección 1.2.1, toda estructura de Poisson, $\{\,;\,\}$, sobre una variedad $\boldsymbol{P}$, tiene asociado un 2-tensor, Λ, definido de la siguiente forma:

$$\{f\,;g\} = \Lambda(df;dg)\,, \qquad f,g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{P})\,.$$

Un cálculo en componentes revela que:

$$[\Lambda\,;\Lambda](df_1;df_2;df_3) = 2\{\{f_1\,;f_2\}\,;f_3\} + \text{p.c.}\,.$$

En consecuencia, se tiene la siguiente condición necesaria y suficiente para que un 2-tensor contravariante, antisimétrico sobre $\boldsymbol{P}$, defina una estructura de Poisson.

Teorema 2.1 *Sea $\boldsymbol{P}$ una variedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ y Λ un campo tensorial 2-contravariante, antisimétrico sobre $\boldsymbol{P}$. Sea $\{\,;\,\}$ el corchete sobre $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{P})$ definido por la expresión:*

$$\{f\,;g\} = \Lambda(df;dg)\,, \qquad f,g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{P})\,.$$

Entonces $\{\,;\,\}$ satisface la identidad de Jacobi si y sólo si $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$. ■

Este teorema permite dar una nueva definición de variedad de Poisson.

Definición 2.2 *Una variedad de Poisson es el par formado por una variedad diferenciable $\boldsymbol{P}$ y un campo tensorial 2-contravariante, antisimétrico, $\Lambda \in \wedge^2(\boldsymbol{P})$, tal que el corchete de Schouten $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$.*

La condición $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$ es, también, el fundamento para definir un operador de cohomología sobre el el espacio vectorial graduado, $\oplus \wedge^r(\boldsymbol{P})$, de los campos de tensores contravariantes antisimétricos definidos sobre la variedad de Poisson $(\boldsymbol{P};\Lambda)$.

Teorema 2.2 *Sea $(\boldsymbol{P};\Lambda)$ una variedad de Poisson, $\wedge^r(\boldsymbol{P})$ el espacio de los tensores r-contravariantes antisimétricos sobre la variedad $\boldsymbol{P}$ y $\wedge(\boldsymbol{P}) = \oplus_{r\geq 1}\wedge^r(\boldsymbol{P})$. Consideremos la familia de operadores:*

$$\begin{array}{c} \wedge^r(\boldsymbol{P}) \xrightarrow{\boldsymbol{\partial}_r} \wedge^{r+1}(\boldsymbol{P}) \\ A \longrightarrow -[\Lambda\,;A] \end{array}; \qquad r \geq 1\,.$$

Entonces, el operador $\boldsymbol{\partial} : \wedge(\boldsymbol{P}) \longrightarrow \wedge(\boldsymbol{P})$, tal que su restricción a $\wedge^r(\boldsymbol{P})$ coincide con $\boldsymbol{\partial}_r$, es un operador de cohomología, es decir, $\boldsymbol{\partial}\circ\boldsymbol{\partial} = 0$.

Prueba En efecto,

$$(\partial \circ \partial)A = -\left[\Lambda\,; -[\Lambda\,; A]\right] = \left[\Lambda\,; [\Lambda\,; A]\right] .$$

Ahora bien, por la propiedad (3) de la Proposición 2.1,

$$(-1)^{2\cdot 2}\left[[\Lambda\,; A]\,; \Lambda\right] + (-1)^{2r}\left[[A\,; \Lambda]\,; \Lambda\right] + (-1)^{2r}\left[[\Lambda\,; \Lambda]\,; A\right] = 0\,,$$

por tanto,

$$\left[[\Lambda\,; A]\,; \Lambda\right] + (-1)^{2r}\left[[A\,; \Lambda]\,; \Lambda\right] = 0\,,$$

ya que $[\Lambda\,; \Lambda] = 0$. Pero entonces, por la propiedad (2) de la misma proposición,

$$\left[[\Lambda\,; A]\,; \Lambda\right] + (-1)^{2r}(-1)^{2r}\left[[\Lambda\,; A]\,; \Lambda\right] = 0\,,$$

lo cual demuestra la proposición. ∎

Es claro entonces que $\mathrm{Im}\,\partial_r$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{Ker}\,\partial_{r+1}$, definiendose los *espacios de cohomología de Poisson*, sobre la variedad de Poisson $(\boldsymbol{P};\Lambda)$, de la forma siguiente:

$$H^r_\Lambda(\boldsymbol{P}) \equiv \mathrm{Ker}\,\partial_{r+1} \,/\, \mathrm{Im}\,\partial_r\ .$$

1.2.3 Cohomología de Poisson sobre una Variedad Simpléctica

Sea ahora $(\boldsymbol{P};\Lambda)$ una variedad simpléctica, es decir, el tensor de Poisson, Λ, es no-degenerado. Esta condición implica la existencia de un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mu^{-1} : \mathcal{X}^*(\boldsymbol{P}) \longrightarrow \mathcal{X}(\boldsymbol{P})\,,$$

definido de la siguiente forma: $\Lambda(\alpha;\beta) = i_{\mu^{-1}(\alpha)}\beta$, donde $\alpha,\beta \in \mathcal{X}^*\boldsymbol{P}$ (con la notación de (c) en 1.1.1, $\mu^{-1} = -\widetilde{\Lambda}$). En componentes, si

$$\Lambda(\alpha;\beta) = \Lambda^{ij}\alpha_i\beta_j\,,$$

tenemos:

$$\left(\mu^{-1}(\alpha)\right)^i = \Lambda^{ji}\alpha_j\,.$$

El isomorfismo μ^{-1} se puede extender de forma natural a los espacios vectoriales de los campos de tensores sobre la variedad. Para cada $r \geq 1$ definimos

$$\begin{aligned} \mu_r^{-1} : \wedge_r(\boldsymbol{P}) &\longrightarrow \wedge^r(\boldsymbol{P}) \\ \alpha &\longrightarrow \mu_r^{-1}(\alpha)\,, \end{aligned}$$

por la siguiente expresión local

$$\left(\mu_r^{-1}(\alpha)\right)^{i_1\dots i_r} = \Lambda^{j_1 i_1}\cdots\Lambda^{j_r i_r}\alpha_{j_1\dots j_r}\,,$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{r!}\alpha_{j_1\dots j_r}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\,.$$

El isomorfismo inverso

$$\begin{aligned} \mu_r : \wedge^r(\boldsymbol{P}) &\longrightarrow \wedge_r(\boldsymbol{P}) \\ t &\longrightarrow \mu_r(t)\,, \end{aligned}$$

viene dado por

$$\left(\mu_r(t)\right)_{j_1\dots j_r} = \Omega_{j_1\,i_1}\Omega_{j_2\,i_2}\cdots\Omega_{j_r\,i_r}t^{i_1\dots i_r}\,, \tag{a}$$

siendo las expresiones locales de t y $\mu_r(t)$:

$$t = \frac{1}{r!}t^{i_1\dots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\,; \qquad \mu_r(t) = \frac{1}{r!}\left(\mu_r(t)\right)_{j_1\dots j_r} dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r}\,.$$

En particular, la 2-forma cerrada, no-degenerada, que determina la estructura simpléctica está definida por

$$\Omega(X;Y) = \Lambda(\mu(X);\mu(Y))\,,$$

lo que implica en componentes:

$$\Omega_{a\,b}\Lambda^{b\,c} = -\delta_a^c \Longleftrightarrow \Omega_{b\,a}\Lambda^{b\,c} = \delta_a^c\,,$$

siendo

$$\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda^{a\,b}\frac{\partial}{\partial x^a}\wedge\frac{\partial}{\partial x^b} \quad \text{y} \quad \Omega = \frac{1}{2}\Omega_{a\,b}\,dx^a\wedge dx^b\,.$$

Por tanto, viene dada por $\Omega = \mu_2(\Lambda)$.

El teorema siguiente (Lichnewowicz [1983]) es el fundamento del isomorfismo entre los espacios de cohomología de Poisson y los espacios de cohomología de de Rham. Se puede comprobar mediante un cálculo en componentes largo pero sencillo.

Teorema 2.3 *Sea $(\boldsymbol{P};\Lambda)$ una variedad simpléctica. Consideremos la familia de isomorfismos:*

$$\mu_r : \wedge^r(\boldsymbol{P}) \longrightarrow \wedge_r(\boldsymbol{P})\,; \qquad (r \geq 1)\,,$$

definida en (a). *Entonces, el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r(\boldsymbol{P}) & \xrightarrow{-\boldsymbol{\partial}} & \wedge^{r+1}(\boldsymbol{P}) \\ {\scriptstyle\mu_r}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu_r} \\ \wedge_r(\boldsymbol{P}) & \xrightarrow[\boldsymbol{d}]{} & \wedge_{r+1}(\boldsymbol{P}) \end{array}$$

(donde $\boldsymbol{d}$ es la diferencial exterior) es conmutativo.

Proposición 2.3 *Sea $(\boldsymbol{P};\Lambda)$ una variedad simpléctica de tensor de Poisson Λ. El isomorfismo $\mu_r : \wedge^r(\boldsymbol{P}) \longrightarrow \wedge_r(\boldsymbol{P})$ induce un isomorfismo entre los espacios vectoriales* $\operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)$ *y* $\operatorname{Ker}\boldsymbol{d}_r$.

Prueba Sea $A \in \operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)$, es decir, $-\boldsymbol{\partial}_r A = 0$. Entonces, según el teorema anterior,

$$\boldsymbol{d}_r\left(\mu_r(A)\right) = \mu_{r+1}\left(-\boldsymbol{\partial}_r A\right) = 0\,,$$

así pues $\mu_r(A) \in \operatorname{Ker}\boldsymbol{d}_r$.

Reciprocamente, sea $\alpha \in \wedge_r(\boldsymbol{P})$ tal que $\boldsymbol{d}_r\,\alpha = 0$. Como μ_r es un isomorfismo entre $\wedge^r(\boldsymbol{P})$ y $\wedge_r(\boldsymbol{P})$, existe $A \in \wedge^r(\boldsymbol{P})$ tal que $\mu_r(A) = \alpha$, entonces

$$\boldsymbol{d}_r\,\mu_r(A) = \boldsymbol{d}_r\,\alpha = 0\,.$$

Dada la conmutatividad del diagrama del teorema anterior, la última igualdad implica que $\mu_{r+1}\left(-\boldsymbol{\partial}_r A\right) = 0$ y por tanto $-\boldsymbol{\partial}_r A = 0$. Luego $A \in \operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)$. ∎

Se tiene, entonces, la sucesión

$$\operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r) \xrightarrow{\mu_r} \operatorname{Ker} \boldsymbol{d}_r \xrightarrow{\pi_r} (\operatorname{Ker} \boldsymbol{d}_r)/(\operatorname{Im} \boldsymbol{d}_{r-1}) \equiv H^r(\boldsymbol{P}),$$

donde $H^r(\boldsymbol{P})$ es el r-espacio de cohomología de de Rham y, por ser μ_r un isomorfismo,

$$H^r(\boldsymbol{P}) \simeq \left(\operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)\right) / \left(\operatorname{Ker}(\pi_r \circ \mu_r)\right).$$

Proposición 2.4 *Con la notación anterior,*

$$\operatorname{Ker}(\pi_r \circ \mu_r) = \operatorname{Im}(-\boldsymbol{\partial}_{r-1}).$$

Prueba Sea $A \in \operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)$ tal que $(\pi_r \circ \mu_r)\, A = 0$. Entonces $\pi_r\left(\mu_r(A)\right) = 0$, es decir, $\mu_r(A) \in \operatorname{Im} \boldsymbol{d}_{r-1}$. Consideremos $\alpha \in \wedge_{r-1}(\boldsymbol{P})$ tal que $\mu_r(A) = \boldsymbol{d}_{r-1}(\alpha)$. Como μ_{r-1} es un isomorfismo, existe $B \in \wedge^{r-1}(\boldsymbol{P})$ tal que $\alpha = \mu_{r-1}(B)$. Entonces

$$\mu_r(A) = \boldsymbol{d}_{r-1}\left(\mu_{r-1}(B)\right) = \mu_r\left(-\boldsymbol{\partial}_{r-1} B\right),$$

por lo tanto

$$A = -\boldsymbol{\partial}_{r-1} B \in \operatorname{Im}(-\boldsymbol{\partial}_{r-1}).$$

Recíprocamente, sea $A \in \operatorname{Im}(-\boldsymbol{\partial}_{r-1})$, es decir, $A = -\boldsymbol{\partial}_{r-1} B$ con $B \in \wedge^{r-1}(\boldsymbol{P})$ entonces

$$\mu_r(A) = \left(\mu_r \circ (-\boldsymbol{\partial}_{r-1})\right) A = \left(\boldsymbol{d}_{r-1} \circ \mu_r\right) B \in \operatorname{Im} \boldsymbol{d}_{r-1},$$

por lo que

$$(\pi_r \circ \mu_r)\, A = 0, \text{ es decir,} \quad A \in \operatorname{Ker}(\pi_r \circ \mu_r).$$

∎

Teorema 2.4 *Se tiene*

$$H^r(\boldsymbol{P}) \simeq \operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)/\operatorname{Ker}(\pi_r \circ \mu_r) \equiv \operatorname{Ker}(-\boldsymbol{\partial}_r)/\operatorname{Im}(-\boldsymbol{\partial}_{r-1}) \equiv H^r_\Lambda(\boldsymbol{P}).$$

El isomorfismo viene dado por:

$$[A] \in H^r_\Lambda(\boldsymbol{P}) \xrightarrow{\bar{\mu}_r} [\mu_r A] \in H^r(\boldsymbol{P}).$$

∎

1.2.4 Cohomología de Poisson Invariante sobre un Grupo de Lie con Estructura de Poisson Invariante

Supongamos que la variedad considerada es un grupo de Lie $\boldsymbol{G}$. Sea $\lambda_g : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ la traslación a la izquierda definida por el elemento $g \in \boldsymbol{G}$ y $T\lambda_g : T\boldsymbol{G} \to T\boldsymbol{G}$ la aplicación tangente. Como λ_g es un difeomorfismo, se pueden definir los isomorfismos:

$$\begin{aligned}(\lambda_g)_* : \wedge^s(\boldsymbol{G}) &\to \wedge^s(\boldsymbol{G}) \\ M &\to (\lambda_g)_* M\end{aligned}\;; \qquad \begin{aligned}(\lambda_g)_* : \wedge_r(\boldsymbol{G}) &\to \wedge_r(\boldsymbol{G}) \\ \beta &\to (\lambda_g)_* \beta,\end{aligned}$$

por medio de las expresiones:

$$\left((\lambda_g)_* M\right)(h)(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = M(g^{-1}h)\left(\alpha_1(h) \circ T_{g^{-1}h}\lambda_g, \ldots, \alpha_s(h) \circ T_{g^{-1}h}\lambda_g\right),$$
$$\left((\lambda_g)_* \beta\right)(h)(X_1, \ldots, X_r) = \beta(g^{-1}h)\left(T_h\lambda_{g^{-1}}(X_1(h)), \ldots, T_h\lambda_{g^{-1}}(X_r(h))\right),$$

siendo $h \in G$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{X}^*(G)$ 1-formas sobre el grupo y $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(G)$ campos de vectores.

La Definición 2.1 de 1.2.2 nos dice que el corchete de Schouten $[(\lambda_g)_*M\,;(\lambda_g)_*N]$, de los campos de tensores $(\lambda_g)_*M \in \wedge^r(G)$ y $(\lambda_g)_*N \in \wedge^s(G)$, es el campo tensorial $r+s-1$-contravariante, antisimétrico, que satisface la igualdad:

$$\begin{aligned} i_{[(\lambda_g)_*M\,;(\lambda_g)_*N]}(\lambda_g)_*\beta = (-1)^{rs+s} i_{(\lambda_g)_*M}\, d\left(i_{(\lambda_g)_*N}(\lambda_g)_*\beta\right) + \\ + (-1)^r i_{(\lambda_g)_*N}\, d\left(i_{(\lambda_g)_*M}(\lambda_g)_*\beta\right), \end{aligned}$$

para toda forma cerrada $\beta \in \wedge_{r+s-1}(G)$.

Puesto que el operador diferencial exterior, d, conmuta con $(\lambda_g)_*$ y el operador producto interior, $i_{(\cdot)}$, verifica

$$i_{(\lambda_g)_*X}\big((\lambda_g)_*\beta\big) = (\lambda_g)_*\big(i_X\beta\big), \quad \text{para todo } \beta \in \mathcal{X}^*(G),$$

(ver por ejemplo: Abraham, Marsden, Ratiu [1983]), se tiene

$$\begin{aligned} i_{[(\lambda_g)_*M\,;(\lambda_g)_*N]}(\lambda_g)_*\beta &= (\lambda_g)_*\big((-1)^{rs+s} i_M\, d\left(i_N\beta\right) + (-1)^r i_N\, d\left(i_M\beta\right)\big) = \\ &= (\lambda_g)_*\big(i_{[M\,;N]}\beta\big) = \\ &= i_{(\lambda_g)_*[M\,;N]}(\lambda_g)_*\beta, \end{aligned}$$

para todo $g \in G$ y para toda forma cerrada $\beta \in \mathcal{X}^*(G)$.

Esto quiere decir que $[(\lambda_g)_*M\,;(\lambda_g)_*N] = (\lambda_g)_*[M\,;N]$ para todo $g \in G$. Por tanto hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 2.5 *El corchete de Schouten de campos de tensores invariantes es también invariante. Es decir, si $(\lambda_g)_*M = M$ y $(\lambda_g)_*N = N$, para todo $g \in G$, se tiene:*

$$(\lambda_g)_*[M\,;N] = [M\,;N]. \tag{a}$$

(Se tiene el resultado análogo para campos de tensores invariantes por la derecha). ∎

En consecuencia, si el tensor de Poisson es invariante, el operador de cohomología de Poisson se puede restringir al subespacio de los tensores contravariantes, antisimétricos, invariantes sobre el grupo:

$$\partial_r; \wedge_I^r(G) \longrightarrow \wedge_I^{r+1}(G),$$

y como $\wedge_I^r(G) \cong \wedge^r(\mathfrak{g})$, la cohomología de Poisson invariante se puede trasladar al contexto algebraico:

$$\partial_r : \wedge^r(\mathfrak{g}) \longrightarrow \wedge^{r+1}(\mathfrak{g}).$$

Teorema 2.5 *Si $H^r_\Lambda(\mathfrak{g})$ es el r-espacio de cohomología de Poisson invariante sobre la variedad simpléctica $(G;\Lambda)$ y $H^r(\mathfrak{g})$ es el espacio de cohomología de de Rham invariante sobre G, se tiene:*

$$H^r_\Lambda(\mathfrak{g}) \overset{\mu_r}{\cong} H^r(\mathfrak{g}).$$

∎

Observación Según se ha visto en la sección 1.1.1, $H^r(\mathfrak{g})$ es también el espacio de cohomología de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. ∎

Tenemos pues los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Lambda^{r-1}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{(-\partial)_{r-1}} & \Lambda^{r}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{(-\partial)_{r}} & \Lambda^{r+1}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \mu_{r-1}\downarrow & & \mu_{r}\downarrow & & \mu_{r+1}\downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Lambda_{r-1}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow[d_{r-1}]{} & \Lambda_{r}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow[d_{r}]{} & \Lambda_{r+1}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Si la estructura de Poisson sobre el grupo G es degenerada, Kirillov ha demostrado que, como variedad diferenciable, admite una foliación por variedades simplécticas (ver por ejemplo: Lichnerowicz [1983]; Liberman, Marle [1987]). El siguiente razonamiento demuestra que la hoja simpléctica conexa que contiene al elemento unidad del grupo es un subgrupo de Lie G.

En efecto, sea $(G;\Lambda)$ un grupo de Lie con estructura de Poisson invariante Λ de rango $2k \leq n = \dim \mathfrak{g}$. El núcleo de Λ (constituido por los elementos $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tales que $\Lambda(\alpha;\beta) = 0$, para todo $\beta \in \mathfrak{g}^*$) está engendrado por $h = n - 2k$ elementos de $\mathfrak{g}^*$: $(e^{2k+1}, \ldots, e^n)$. Consideremos los elementos de $\mathfrak{g}^*$ $(e^1, \ldots, e^{2k})$ tales que $(e^1, \ldots, e^n)$ sea una base de $\mathfrak{g}^*$. Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ la base dual de $\mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$. Si definimos

$$\Lambda_l = \frac{1}{2}\Lambda^{ab} e_a \wedge e_b\,, \qquad \Lambda^{ab} \in \mathbb{R}\,, \quad a,b = 1,\ldots,2k\,,$$

la matriz Λ_l^{ab} es invertible.

Sean $C^h_{a\,b}$ las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ en la base anterior, es decir, $[e_a\,;e_b] = C^h_{a\,b}e_h$. La condición $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$ se escribe así:

$$\Lambda^{RA}\Lambda^{KC}C^B_{R\,k} + \Lambda^{RA}\Lambda^{BK}C^C_{R\,K} + \Lambda^{RB}\Lambda^{CK}C^A_{R\,K} = 0\,,$$

donde $A, B, C, R, K \in 1, 2, \ldots, n$.

Teniendo en cuenta que $\Lambda^{RA} = 0$ si $R > 2k$ ó $A > 2k$ y escogiendo C con valores en $2k+1, \ldots, n$, se tiene

$$\Lambda^{da}\Lambda^{bl}C^C_{dl} = 0\,,$$

lo cual implica que

$$C^C_{dl} = 0\,, \qquad d, l = 1, \ldots, 2k \quad \text{y} \quad C = 2k+1, \ldots, n\,,$$

es decir,

$$[e_a\,;e_b] = C^l_{a\,b}e_l\,, \qquad a, b, l = 1, 2, \ldots, 2k\,.$$

Por tanto $(e_1, \ldots, e_{2k})$ engendran una subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_l$ de $\mathfrak{g}$.

Sea G_l el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_l$. La restricción de Λ a G_l es Λ_l, que define una estructura simpléctica invariante sobre G_l. Quedando así demostrado el teorema siguiente.

Teorema 2.6 *Sea $(G;\Lambda)$ un grupo de Lie con estructura de Poisson invariante por la izquierda. La hoja simpléctica G_l que contiene al elemento unidad $e \in G$ es un subgrupo de Lie conexo de G. Denominando Λ_l a la restricción de Λ a G_l, como la estructura de Poisson invariante es también regular, es decir de rango constante, toda hoja simpléctica es el trasladado por la izquierda, del grupo con estructura simpléctica $(G_l;\Lambda_l)$.* ∎

1.2.5 Corchete de Schouten y Ecuación Clásica de Yang-Baxter

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Sean $U(0)$ y $U(e)$ entornos de $\mathfrak{g}$ y G respectivamente, tales que la aplicación

$$\begin{aligned} \exp : U(0) &\longrightarrow U(e) \\ x &\longrightarrow \exp x = g \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Mediante la aplicación inversa $\log : U(e) \longrightarrow U(0)$ y la elección de una base de $\mathfrak{g}$, $\{e_i\}$, se definen las coordenadas naturales de primera especie (ver por ejemplo: Sagle, Walde [1973]):

$$\begin{aligned} \phi : U(e) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g &\longrightarrow \left(x^1(g), \ldots , x^n(g)\right), \end{aligned}$$

siendo $\log g = \sum_i x^i(g) e_i$.

Asociados a dicha carta natural, existen los campos vectoriales

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : g \in U(e) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_g \in TU(e)\,,$$

cuya acción sobre las funciones es:

$$\left(\mathrm{L}_{\partial/\partial x^i} f\right)(g) = \frac{\partial\left(f\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x^i}\left(\phi(g)\right) = \frac{\partial\left(f\circ\exp\right)}{\partial x^i}(x) = d(f\circ\exp)(x)\cdot e_i\,, \qquad \text{(a)}$$

siendo $f \in \mathcal{C}^\infty(U(e))$.

La base elegida determina también campos invariantes por la izquierda $e_i^\lambda \in \mathcal{X}_\lambda(G)$, definidos así:

$$e_i^\lambda(g) = T_e L_g \cdot e_i\,.$$

Su acción sobre las funciones es:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{L}_{e_i^\lambda} f\right)(g) &= df(g)\cdot e_i^\lambda(g) = \left(df(g)\circ T_e L_g\right)\cdot e_i = \\ &= d\left(f\circ L_g\right)(e)\left(\frac{d}{dt}\exp te_i\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt} f(g\cdot \exp te_i)\Big|_{t=0}\,, \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

ya que $t \longrightarrow \exp te_j$ es la curva integral de e_j^λ con valor inicial e_j en $e \in G$ y, por tanto,

$$\frac{d}{dt}\exp(te_j)\Big|_{t=0} = e_j^\lambda\left(\exp 0\right) = e_j^\lambda(e) = e_j\,.$$

Proposición 2.6 *Sea $e_j^\lambda \in \mathcal{X}_\lambda(G)$ el campo vectorial invariante por la izquierda definido por $e_j \in \mathfrak{g}$ (expresión (b)). Sea $\partial/\partial x_j$ el campo correspondiente a e_j en la carta natural (expresión (a)). Entonces,*

$$e_j^\lambda(\exp x) = B(x)_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}(\exp x)\,,$$

donde

$$B(x) = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}\, x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}(\mathrm{ad}\, x)^{2n}\,; \qquad B(x)\cdot e_j = B(x)_j^k e_k\,, \qquad \text{(c)}$$

y b_{2n} los números de Bernoulli.

Prueba Haciendo uso de la ley formal de grupo $\gamma(x;y)$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, podemos escribir:

$$(e_j^\lambda f)(\exp x) = \frac{d}{dt} f(\exp x \cdot \exp te_j)_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(\gamma(x;te_j)\right)_{t=0}\,.$$

Sea $B(x)(te_j)$ la parte lineal en te_j de la expresión $\gamma(x;te_j)$, es decir,

$$\gamma(x;te_j) = x + B(x)(te_j) + \mathcal{O}(t^2;x;e_j)\,.$$

Se tiene que (ver por ejemplo: Bourbaki [1972]; Postnikov [1982])

$$B(x) = \frac{\operatorname{ad} x}{1-\exp(-\operatorname{ad} x)} = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{ad} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} b_{2n} (\operatorname{ad} x)^{2n}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(e_j^\lambda f)(\exp x) &= \frac{d}{dt} f\left(\exp(\gamma(x;te_j))\right)_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(f\circ\exp)\left(x + t\,B(x)\cdot e_j + \mathcal{O}(t^2;x;e_j)\right)_{t=0} = d(f\circ\exp)(x)\cdot(B(x)\cdot e_j)\,.\end{aligned}$$

Escribiendo $B(x)\cdot e_j = B(x)_j^k\, e_k$,

$$\begin{aligned}(e_j^\lambda f)(\exp x) &= d(f\circ\exp)(x)\cdot\left(B(x)_j^k\, e_k\right) = \\ &= B(x)_j^k\, d(f\circ\exp)(x)\cdot e_k = B(x)_j^k \cancel{\frac{\partial(f\circ\exp)(x)}{\partial x^k}} = B(x)_j^k\, \frac{\partial f}{\partial x^k}(\exp x)\,,\end{aligned}$$

por lo que

$$e_j^\lambda(\exp x) = B(x)_j^k\, \frac{\partial}{\partial x^k}(\exp x)\,.$$

■

Proposición 2.7 *Sea $\overline{M}$ un campo tensorial 2-contravariante, antisimétrico, invariante sobre G, definido por el 2-tensor antisimétrico*

$$M = \frac{1}{2} M^{ab} e_a \wedge e_b \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\,.$$

Sean $\overline{M}^{ij}$ sus componentes en la carta natural correspondiente a la base (e_i) de $\mathfrak{g}$, es decir,

$$\overline{M}(\exp x) = \frac{1}{2}\overline{M}^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\,,$$

donde $\partial/\partial x_i$ está definido en (a)*. Entonces, la relación de $\overline{M}^{ij}$ con las componentes invariantes M^{ab} viene dada por la igualdad:*

$$\overline{M}^{ij}(x) = M^{ab} B(x)_a^i\, B(x)_b^j\,, \tag{d}$$

donde $B(x)$ viene dado por la expresión (c)*.*

Prueba Consecuencia directa de la proposición anterior. ■

La Proposición 2.7 se puede generalizar para el caso de campos de tensores p-contravariantes, antisimétricos, invariantes sobre el grupo. Utilizando la relación entre las componentes invariantes y las componentes en una carta natural, de campos de tensores invariantes, se puede dar otra demostración de la invariancia del corchete de Schouten (ver Sección 1.2.4). Esta demostración es interesante porque permite encontrar el elemento de $\mathfrak{g} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{g}$ que lo define por traslación a la izquierda.

Desarrollaremos el caso particular del corchete de Schouten de campos de tensores invariantes de orden 2, comprobando que la anulación del 3-tensor sobre $\mathfrak{g}$, que lo define por traslación a la izquierda, es la ecuación clásica de Yang-Baxter. También describiremos el corchete de Schouten de vectores y tensores de orden 2, que permite dar una caracterzación de los 2-cociclos exactos invariantes en la cohomología de Schouten. Ambas expresiones se utilizarán en el Capítulo 4.

Sea G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ el álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. Sean $\overline{M}$ y $\overline{N}$ los campos 2-contravariantes, antisimétricos, invariantes sobre G definidos por traslación a la izquierda de $M = M^{ab}e_a \otimes e_b$ y $N = N^{cd}e_c \otimes e_d$ respectivamente.

Consideremos los elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$:

$$M^{\mathbf{12}} = M \otimes I\,, \quad M^{\mathbf{13}} = P^{\mathbf{23}} M^{\mathbf{12}} P^{\mathbf{23}}\,, \quad M^{\mathbf{23}} = I \otimes M\,, \tag{e}$$

donde $P^{\mathbf{ij}}$ es la permutación de indices $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, y definamos, considerando el producto en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, los elementos

$$[M^{\mathbf{ij}}\,; N^{\mathbf{mn}}] = M^{\mathbf{ij}} N^{\mathbf{mn}} - N^{\mathbf{mn}} M^{\mathbf{ij}}\,, \tag{f}$$

con $1 \leq \mathbf{i} < \mathbf{j} \leq 3$, $1 \leq \mathbf{m} < \mathbf{n} \leq 3$, así como:

$$\begin{aligned}[M\,;N] = -\big(&[M^{\mathbf{12}};N^{\mathbf{13}}] + [N^{\mathbf{12}};M^{\mathbf{13}}] + [M^{\mathbf{12}};N^{\mathbf{23}}] + \\ &+ [N^{\mathbf{12}};M^{\mathbf{23}}] + [M^{\mathbf{13}};N^{\mathbf{23}}] + [N^{\mathbf{13}};M^{\mathbf{23}}]\big)\,.\end{aligned} \tag{g}$$

Lema 2.2 *El elemento* $[M\,;N] \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ *definido en* (g) *pertenece a* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Prueba Sean $M = M^{ab}e_a \otimes e_b \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y $N = N^{cd}e_c \otimes e_d \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ antisimétricos. El siguiente cálculo revela que

$$[M^{\mathbf{12}};N^{\mathbf{13}}] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}\,.$$

En efecto, teniendo en cuenta (f),

$$\begin{aligned}[M^{\mathbf{12}};N^{\mathbf{13}}] &= M^{\mathbf{12}}N^{\mathbf{13}} - N^{\mathbf{13}}M^{\mathbf{12}} = \\ &= \big(M^{ab}e_a \otimes e_b \otimes 1\big)\big(N^{cd}e_c \otimes 1 \otimes e_d\big) - \big(N^{cd}e_c \otimes 1 \otimes e_d\big)\big(M^{ab}e_a \otimes e_b \otimes 1\big) = \\ &= M^{ab}N^{cd}(e_a \otimes e_b \otimes 1)(e_c \otimes 1 \otimes e_d) - M^{ab}N^{cd}(e_c \otimes 1 \otimes e_d)(e_a \otimes e_b \otimes 1) = \\ &= M^{ab}N^{cd}\big(e_a e_c \otimes e_b \otimes e_d - e_c e_a \otimes e_b \otimes e_d\big) = \\ &= M^{ab}N^{cd}\big((e_a e_c - e_c e_a) \otimes e_b \otimes e_d\big) = M^{ab}N^{cd}C^r_{a\,c}e_r \otimes e_b \otimes e_d\,,\end{aligned}$$

siendo $C^r_{a\,c}$ las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

De manera similar, se comprueba que $[N^{\mathbf{12}};M^{\mathbf{13}}]$, $[M^{\mathbf{12}};N^{\mathbf{23}}]$, $[N^{\mathbf{12}};M^{\mathbf{23}}]$, $[M^{\mathbf{13}};N^{\mathbf{23}}]$ y $[N^{\mathbf{13}};M^{\mathbf{23}}]$ pertenecen a $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. ∎

El elemento $[M\,;N] \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$ define por traslación a la izquierda un campo tensorial 3-contravariante sobre el grupo G. La siguiente proposición nos dice que este campo es el corchete de Schouten de los campos invariantes que definen M y N.

Proposición 2.8 *Con las notaciones* (e) *y* (f) *precedentes, el corchete de Schouten de los campos* $\overline{M}$ *y* $\overline{N}$ *viene dado por la expresión:*

$$[\overline{M}\,;\overline{N}\,](x) = \frac{1}{3!}[M\,;N]^{ijk}\, e_i^\lambda \wedge e_j^\lambda \wedge e_k^\lambda\,.$$

Prueba En efecto, sea

$$[\overline{M}\,;\overline{N}\,](x) = \frac{1}{3!}\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{ijk}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}$$

la expresión local del corchete de Schouten de $\overline{M}$ y $\overline{N}$ en coordenadas naturales. Las componentes $\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{ijk}(x)$ vienen dadas por la expresión (g) de la Sección 1.2.2:

$$\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{ijk}(x) = \frac{1}{2}\big(\varepsilon^{ijk}_{lmn}\overline{M}^{rl}(x)\,\partial_r\overline{N}^{mn}(x) + \varepsilon^{ijk}_{qln}\,\partial_r\overline{M}^{ql}(x)\,\overline{N}^{rn}(x)\big)\,,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{abc}(x) = {}&\left(\overline{M}^{ia}\,\partial_i\overline{N}^{bc} + \overline{N}^{ia}\,\partial_i\overline{M}^{bc}\right)(x) + \\ &+ \left(\overline{M}^{ib}\,\partial_i\overline{N}^{ca} + \overline{N}^{ib}\,\partial_i\overline{M}^{ca}\right)(x) + \\ &+ \left(\overline{M}^{ic}\,\partial_i\overline{N}^{ab} + \overline{N}^{ic}\,\partial_i\overline{M}^{ab}\right)(x)\,.\end{aligned} \tag{h}$$

Si $C^r_{k\,l}$ son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en la base utilizada, haciendo uso de la Proposición 2.6, por una parte tenemos que:

$$[e_k^\lambda\,;e_l^\lambda](x) = C^r_{k\,l}e_r^\lambda(x) = C^r_{k\,l}B(x)^b_r\partial_b\,,$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned}[e_k^\lambda\,;e_l^\lambda](x) &= \left(B(x)^a_k\partial_a\right)\left(B(x)^b_l\partial_b\right) - \left(B(x)^b_l\partial_b\right)\left(B(x)^a_k\partial_a\right) = \\ &= B(x)^a_k\,\partial_a B(x)^b_l\,\partial_b + B(x)^a_k B(x)^b_l\,\partial^2_{a\,b} - \\ &\qquad - B(x)^b_l\,\partial_b B(x)^a_k\,\partial_a - B(x)^b_l B(x)^a_k\,\partial^2_{a\,b} = \\ &= \left(B(x)^a_k\,\partial_a B(x)^b_l - B(x)^a_l\,\partial_a B(x)^b_k\right)\partial_b\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene la igualdad:

$$B(x)^a_k\,\partial_a B(x)^b_l - B(x)^a_l\,\partial_a B(x)^b_k = C^r_{k\,l}B(x)^b_r\,. \tag{i}$$

Al desarrollar las derivadas en la igualdad (h) utilizando la relación (d) de la Proposición 2.7 se llega a:

$$\begin{aligned}\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{abc}(x) = {}&M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\mu B(x)^a_\nu\left(\partial_i B(x)^b_\alpha\,B(x)^c_\beta + B(x)^b_\alpha\,\partial_i B(x)^c_\beta\right) + \\ &+ M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\alpha B(x)^a_\beta\left(\partial_i B(x)^b_\mu\,B(x)^c_\nu + B(x)^b_\mu\,\partial_i B(x)^c_\nu\right) + \\ &+ M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\mu B(x)^b_\nu\left(\partial_i B(x)^c_\alpha\,B(x)^a_\beta + B(x)^c_\alpha\,\partial_i B(x)^a_\beta\right) + \\ &+ M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\alpha B(x)^b_\beta\left(\partial_i B(x)^c_\mu\,B(x)^a_\nu + B(x)^c_\mu\,\partial_i B(x)^a_\nu\right) + \\ &+ M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\mu B(x)^c_\nu\left(\partial_i B(x)^a_\alpha\,B(x)^b_\beta + B(x)^a_\alpha\,\partial_i B(x)^b_\beta\right) + \\ &+ M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^i_\alpha B(x)^c_\beta\left(\partial_i B(x)^a_\mu\,B(x)^b_\nu + B(x)^a_\mu\,\partial_i B(x)^b_\nu\right)\,.\end{aligned}$$

Ahora bién, teniendo en cuenta (i), los términos primero y último se pueden agrupar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}\left(B(x)^i_\mu B(x)^a_\nu\,\partial_i B(x)^b_\alpha\,B(x)^c_\beta + B(x)^i_\alpha B(x)^c_\beta B(x)^a_\mu\,\partial_i B(x)^b_\nu\right) = \\ &= M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}B(x)^a_\nu B(x)^c_\beta\left(B(x)^i_\mu\,\partial_i B(x)^b_\alpha - B(x)^i_\alpha\,\partial_i B(x)^b_\mu\right) = \\ &= M^{\mu\nu}N^{\alpha\beta}C^r_{\mu\,\alpha}B(x)^a_\nu B(x)^c_\beta B(x)^b_r\,, \end{aligned}$$

y de manera similar se pueden agrupar el resto de los términos. Se llega así a la siguiente expresión de las componentes locales del corchete de Schouten de $\overline{M}$ y $\overline{N}$:

$$\begin{aligned} \left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{a\,b\,c}(x) =&\big(M^{\mu\,i}N^{\nu\,k}C^j_{\mu\,\nu} + M^{\mu\,k}N^{\nu\,i}C^j_{\nu\,\mu} + \\ &+ M^{\mu\,j}N^{\nu\,i}C^k_{\mu\,\nu} + M^{\mu\,i}N^{\nu\,j}C^k_{\nu\,\mu} + \\ &+ M^{\mu\,k}N^{\nu\,j}C^i_{\mu\,\nu} + M^{\mu\,j}N^{\nu\,k}C^i_{\nu\,\mu}\big)B(x)^a_i B(x)^b_j B(x)^c_k\,. \end{aligned} \tag{j}$$

Consideremos, ahora, los elementos $M^{1\,2}$, $M^{1\,3}$ y $M^{2\,3}$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ definidos en (c). En la demostración del Lema 2.2 vimos que:

$$\left[M^{1\,2}\,;N^{1\,3}\right]^{r\,b\,d} = M^{a\,b}N^{c\,d}C^r_{a\,c}\,.$$

Calculando expresiones similares para $\left[M^{1\,2}\,;N^{2\,3}\right]$ etc., las componentes del elemento $[M\,;N] \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ definido en (g) se escriben así:

$$\begin{aligned} [M\,;N]^{r\,b\,d} =&M^{a\,b}N^{c\,d}C^r_{a\,c} + M^{r\,a}N^{c\,d}C^b_{a\,c} + M^{r\,a}N^{b\,c}C^d_{a\,c} + \\ &+ M^{a\,d}N^{c\,b}C^r_{c\,a} + M^{a\,d}N^{r\,c}C^b_{c\,a} + M^{b\,a}N^{r\,c}C^d_{c\,a}\,. \end{aligned} \tag{k}$$

Finalmente, la comparación de las expresiones (j) y (k) implica que

$$\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right]^{a\,b\,c}(x) = [M\,;N]^{i\,j\,k}B(x)^a_i B(x)^b_j B(x)^c_k\,,$$

por lo que

$$\left[\overline{M}\,;\overline{N}\,\right](x) = \frac{1}{3!}[M\,;N]^{i\,j\,k}B(x)^a_i B(x)^b_j B(x)^c_k\,\frac{\partial}{\partial x^a}\wedge\frac{\partial}{\partial x^b}\wedge\frac{\partial}{\partial x^c}\,,$$

lo que demuestra, en particular, la invariancia de $\left[\overline{M};\overline{N}\right]$, ya que, teniendo en cuenta la Proposición 2.6,

$$\left[\overline{M}\,;\overline{N}\right](x) = \frac{1}{3!}[M;N]^{i\,j\,k}\,e^\lambda_i\wedge e^\lambda_j\wedge e^\lambda_k\,.$$

■

Como consecuencia directa de la proposición anterior se tiene la siguiente interpretación de la ecuación clásica de Yang-Baxter.

Teorema 2.7 *Con las notaciones precedentes, si $\overline{M},\overline{N} \in \wedge^2(G)$ son invariantes, se tiene:*

$$\left[\overline{M}\,;\overline{N}\right] = 0 \Longleftrightarrow \left[M\,;N\right] = 0\,.$$

En particular,

$$\left[\overline{M}\,;\overline{M}\right] = 0 \Longleftrightarrow \left[M^{1\,2}\,;M^{1\,3}\right] + \left[M^{1\,2}\,;M^{2\,3}\right] + \left[M^{1\,3}\,;M^{2\,3}\right] = 0\,,$$

que es la ecuación clásica de Yang-Baxter. ■

Corolario *Sea G un grupo de Lie y $\Lambda \in \wedge^2(G)$ el 2-tensor invariante por la izquierda definido por $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. Entonces, $(G;\Lambda)$ es una variedad de Poisson si y sólo si r satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter.* ∎

Si r es no-degenerado, la forma simpléctica Ω asociada a Λ es también invariante y está definida por el elemento $\beta \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ tal que $(\beta_{\mu\nu}) = -(r^{\mu\nu})^{-1}$ (ver Sección 1.2.3). La condición de cerrada de Ω equivale a la condición de 2-cociclo de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$, de β (ver Observación de la Sección 1.1.1). Es decir, se satisface:

$$\beta([x\,;y];z) + \beta([y\,;z];x) + \beta([z\,;x];y) = 0\,,$$

para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Por tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario (Drinfeld V. G. [1983a]) *Sea $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ no-degenerado y sea $\beta \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ tal que $(\beta_{\mu\nu}) = (r^{\mu\nu})^{-1}$. Entonces, r satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter si y sólo si β es un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$.* ∎

En este punto, es importante el resultado siguiente (ver Chu [1975]). La demostración que exponemos nos ha sido sugerida por A. Guichardet.

Teorema 2.8 *Sea G un grupo de Lie conexo que admite una estructura simpléctica invariante. Entonces G no es semisimple.*

Prueba

(1) Sea $\beta \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ el 2-cociclo de Chevalley que define por traslación la estructura simpléctica invariante. Sea

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ x &\longrightarrow \tilde{\beta}(x)\,, \end{aligned}$$

el isomorfismo definido por $\tilde{\beta}(x) \cdot y = \beta(x;y)$. Supongamos que $\mathfrak{g}$ fuese semisimple. Entonces $H^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = 0$ (ver Postnikov [1982]) y por tanto existe $\varphi \neq 0 \in \mathfrak{g}^*$ tal que para todo $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\beta(x;y) = \tilde{\delta}\,\varphi(x;y) = -\varphi([x\,;y]) = (\mathrm{ad}_x^*\,\varphi) \cdot y\,.$$

Es decir,

$$\tilde{\beta}(x) = \mathrm{ad}_x^*\,\varphi\,, \tag{1}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

(2) Sea $\tilde{k} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo ($\mathfrak{g}$ es semisimple) definido, a partir de la forma de Killing k de $\mathfrak{g}$, por la expresión:

$$\tilde{k}(z_1) \cdot z_2 = k(z_1; z_2)\,,$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathfrak{g}$.

Entonces, para todo $z \in \mathfrak{g}$ se verifica:

$$\begin{aligned} \langle\, \mathrm{ad}^*_{\tilde{k}^{-1}\varphi}\,\varphi\,; z \rangle &= -\langle \varphi\,; \mathrm{ad}_{\tilde{k}^{-1}\varphi}\, z \rangle = -k\left(\tilde{k}^{-1}(\varphi); \mathrm{ad}_{\tilde{k}^{-1}\varphi}\, z\right) = \\ &= k\big(\mathrm{ad}_{\tilde{k}^{-1}\varphi}\, \tilde{k}^{-1}(\varphi); z\big) \equiv k\big([\tilde{k}^{-1}(\varphi)\,; \tilde{k}^{-1}(\varphi)]; z\big) = 0\,, \end{aligned}$$

donde, en la tercera igualdad, hemos utilizado la propiedad de invariancia por la representación adjunta de k. Por tanto,

$$\mathrm{ad}^*_{\tilde{k}^{-1}(\varphi)}\,\varphi = 0\,.$$

(3) En la expresión (l) pongamos $x = \tilde{k}^{-1}(\varphi)$. Claramente $x \neq 0$, pues $\varphi \neq 0$ y $\tilde{k}$ es un isomorfismo. De (l) obtenemos pues:

$$\tilde{\beta}(\tilde{k}^{-1}(\varphi)) = \mathrm{ad}^*_{\tilde{k}^{-1}(\varphi)}\,\varphi = 0\,.$$

Siendo $\tilde{\beta} \circ \tilde{k}^{-1}$ un isomorfismo, obtenemos $\varphi = 0$ y por tanto una contradicción. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no puede ser semisimple. ■

Sea ahora $\overline{X} \in \mathcal{X}_I(\boldsymbol{G})$ un campo de vectores invariante definido por $X = X^d e_d$ y $\overline{M}$, como antes, un campo 2-contravariante, antisimétrico, invariante sobre $\boldsymbol{G}$. Consideremos los elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$:

$$X^1 = X \otimes 1\,; \qquad X^2 = 1 \otimes X\,; \qquad M^{12} = M\,; \qquad M^{21} = MP^{12}\,, \tag{m}$$

y definamos

$$\begin{aligned} \left[X^1\,;M^{12}\right] &= X^1 M^{12} - M^{12} X^1\,; \\ \left[M^{12}\,;X^2\right] &= M^{12} X^2 - X^2 M^{12}\,, \end{aligned} \tag{n}$$

así como:

$$[X\,;M] = \left[X^1\,;M^{12}\right] - \left[M^{12}\,;X^2\right]. \tag{o}$$

Entonces se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.9 *Con las notaciones precedentes, el corchete de Schouten de $\overline{M}$ y $\overline{X}$ viene dado por:*

$$\left[\overline{M}\,;\overline{X}\,\right](x) = \frac{1}{2!}\,[X\,;M]^{ij}\, e_i^\lambda \wedge e_j^\lambda\,.$$

Prueba Por definición (expresión (g) de 1.2.2),

$$\left[\overline{M}\,;\overline{X}\,\right]^{mn}(x) = \overline{X}^t(x)\,\partial_t \overline{M}^{mn}(x) + \overline{M}^{tm}(x)\,\partial_t \overline{X}^n(x) - \overline{M}^{tn}(x)\,\partial_t \overline{X}^m(x)\,.$$

Por las Proposiciones 2.6 y 2.7 se tiene:

$$\overline{X}^n(x) = X^d B(x)^n_d\,, \qquad \overline{M}^{tm}(x) = M^{ab} B(x)^t_a B(x)^m_b\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en las componentes del corchete de Schouten de $\overline{X}$ y $\overline{M}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\overline{M}\,;\overline{X}\,\right]^{mn}(x) &= X^d B(x)^t_d\,\partial_t\big(M^{ab} B(x)^m_a B(x)^n_b\big) + \\ &\quad + M^{ab} B(x)^t_a B(x)^m_b X^d \left(\partial_t B(x)^n_d\right) - M^{ab} B(x)^t_a B(x)^n_b X^d \left(\partial_t B(x)^m_d\right). \end{aligned}$$

Aplicando la igualdad (i), después de desarrollar la derivada del producto, obtenenemos:

$$\begin{aligned} \left[\overline{M}\,;\overline{X}\,\right]^{mn}(x) &= X^d M^{aj} B(x)^n_j C^i_{da} B(x)^m_i + X^d M^{aj} B(x)^m_j C^i_{da} B(x)^n_i = \\ &= \left(X^d M^{aj} C^i_{da} + X^d M^{ia} C^j_{da}\right) B(x)^m_i B(x)^n_j\,, \end{aligned} \tag{p}$$

Por otra parte, a partir de las definiciones (n) se tiene:

$$\begin{aligned}
[X^1; M^{12}] &= (X^d e_d \otimes 1)(M^{ab} e_a \otimes e_b) - (M^{ab} e_a \otimes e_b)(X^d e_d \otimes 1) = \\
&= X^d M^{ab} C^r_{da}(e_r \otimes e_b)\,, \\
[M^{12}; X^2] &= X^d M^{ra} C^b_{ad}(e_r \otimes e_b)\,,
\end{aligned}$$

y por tanto (o) se expresa así:

$$[X; M] \equiv [X^1; M^{12}] - [M^{12}; X^2] = (X^d M^{aj} C^i_{da} + X^d M^{ia} C^j_{da})\, e_i \otimes e_j\,. \qquad \text{(q)}$$

Comparando (p) y (q) deducimos que

$$[\overline{M}; \overline{X}]^{mn}(x) = [X; M]^{ij} B(x)^m_i B(x)^n_j\,,$$

lo cual implica que

$$[\overline{M}; \overline{X}](x) = \frac{1}{2!}[X; M]^{ij}\, e^\lambda_i \wedge e^\lambda_j\,,$$

quedando demostrada la invariancia de $[\overline{M}; \overline{X}]$. ■

Corolario *Si $\overline{X} \in \mathcal{X}(G)$ y $\overline{M} \in \wedge^2(G)$ son invariantes,*

$$[\overline{M}; \overline{X}] = 0 \Longleftrightarrow [M; X] = 0\,.$$

■

En la siguiente proposición damos una caracterización de los 2-cociclos de Poisson que será utilizada en el Capítulo 4.

Proposición 2.10 *Sea $(G; \Lambda)$ un grupo de Lie dotado de una estructura de Poisson invariante. Sea $A \in \wedge^2(\mathfrak{g})$. Para que A sea un cociclo de Poisson es necesario y suficiente que*

$$[\Lambda; A] = 0\,.$$

Para que $A = (-\,\partial)X$ es necesario y suficiente que

$$A = [\Lambda; X] \equiv [X^1; \Lambda^{12}] - [\Lambda^{12}; X^2]\,,$$

con $X \in \wedge^1(\mathfrak{g})$.

Prueba Consecuencia directa de las definiciones y de la Proposición 2.9. ■

1.3 Productos Estrella

Los productos estrella sobre una variedad de Poisson $(M; \{\,;\,\})$ son casos particulares de deformaciones formales de la estructura de álgebra asociativa de $(\mathcal{C}^\infty(M); \cdot)$.

La cohomología diferencial, nula sobre las constantes de Hochschild es el contexto natural para su estudio. La equivalencia y la existencia de productos estrella encuentran sus obstrucciones respectivamente en el segundo y tercer espacios de esta cohomología.

De todo producto estrella se obtiene por antisimetrización un corchete deformado, que es una deformación de la estructura de álgebra de Lie, definida por el corchete de Poisson $\{\,;\,\}$, sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$. La cohomología de Chevalley-Eilenberg de $(\mathcal{C}^\infty(M); \{\,;\,\})$ juega en el estudio de los corchetes deformados el mismo papel que la de Hochschild en el estudio de las deformaciones asociativas.

1.3.1 Cohomología Diferencial de Hochschild

El espacio de las funciones de clase C^∞ sobre una variedad diferenciable M tiene una estructura natural de álgebra asociativa dada por el producto ordinario de funciones. La cohomología de Hochschild es la cohomología relacionada con dicha estructura. Se define como sigue.

Definición 3.1 *Denotemos por N el álgebra asociativa $C^\infty(M)$. Una p-cocadena ($p \geq 1$) es una aplicación p-lineal*

$$\begin{aligned} C : N \times \overset{p}{\cdots} \times N &\rightarrow N\,, \\ (f_1; \dots ; f_p) &\rightarrow C(f_1; \dots ; f_p)\,. \end{aligned}$$

Las 0-cocadenas se identifican con los elementos de N.

Sea $\mathrm{C}^p \equiv \mathrm{C}^p(N)$ el espacio vectorial de las cocadenas de orden p. Para cada $p \geq 0$, se define la aplicación:

$$\delta^p : C \in \mathrm{C}^p \rightarrow \delta^p C \in \mathrm{C}^{p+1}$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\delta^p C)(f_0; f_1; \dots ; f_p) = f_0 \cdot C(f_1; \dots ; f_p) &+ \\ + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i C(f_0; f_1; \dots ; f_{i-1} \cdot f_i; f_{i+1}; \dots ; f_p) &+ \\ + (-1)^{p+1} C(f_0; \dots ; f_{p-1}) \cdot f_p &. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{C} = \oplus \mathrm{C}^p$ y $\delta : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$ es la aplicación cuya restricción a C^p es δ^p, se comprueba directamente que $\delta \circ \delta = 0$. Por tanto, δ es un operador de cohomología denominado operador de cohomología, o de coborde, de Hochschild.

Definición 3.2 *Un p-cociclo es una p-cocadena que pertenece a* $\mathrm{Ker}\ \delta^p$. *Y se dice que es exacto o p-coborde si pertenece a* $\mathrm{Im}\ \delta^{p-1}$. *El p-ésimo espacio de cohomología, denotado por $\mathrm{H}^p(N)$, es el espacio cociente de los p-cociclos por los p-cobordes.*

Definición 3.3 *Una p-cocadena se dice que es local si $C(f_1; \dots ; f_p)|_U = 0$ cuando alguna de las funciones se anule sobre el abierto U de M. Se dice que es diferenciable si es local y existe un entero d tal que la restricción a todo dominio de carta venga dada por un operador p-diferencial de orden máximo d en cada argumento. Se dice que es nula sobre las constantes si $C(f_1; \dots ; f_p) = 0$ cuando alguna de las funciones f_i sea constante sobre la variedad.*

De la definición del operador de cohomología se deduce que si $C \in \mathrm{C}^p$ es una cocadena local, respectivamente diferenciable, respectivamente nula sobre las constantes, entonces $\delta C \in \mathrm{C}^{p+1}$ es local, respectivamente diferenciable, respectivamente nula sobre las constantes. Esta observación permite definir los espacios de cohomología de Hochschild local, local y nula sobre las constantes, diferencial y diferencial y nula sobre las constantes.

En lo sucesivo consideraremos sólo la cohomología diferencial y nula sobre las constantes de Hochschild. Esta cohomología viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Vey J. [1975]) *El p-ésimo espacio de la cohomología diferencial de Hochschild,* $\mathrm{H}^p(N)$, *es isomorfo al espacio de los p-tensores contravariantes, antisimétricos* $\wedge^p(M)$ *sobre* M. *Este isomorfismo viene dado por la descomposición única:*

$$C(f_1;\dots;f_p) = (\delta\, E)(f_1;\dots;f_p) + \Lambda(d\,f_1;\dots;d\,f_p)\,,$$

donde C *es un p-cociclo,* E *es una* $(p-1)$*-cocadena y* Λ *un p-tensor contravariante antisimétrico. Mas aún, si* C *es nula sobre las constantes,* E *se puede escoger nula sobre las constantes.*

La siguiente proposición permite caracterizar al p-tensor Λ como la parte antisimétrica del p-cociclo C.

Proposición 3.1 *Todo coborde es la suma de cocadenas simétricas en dos variables.*

Prueba En efecto, las cocadenas

$$F_i(f_0;f_1;\dots;f_p) = C(f_0;f_1;\dots;f_{i-1}\cdot f_i;f_{i+1};\dots;f_p)$$

son simétricas en las variables $i-1$ e i, y la suma

$$f_0\cdot C(f_1;\dots;f_p) + (-1)^{p+1}C(f_0;\dots;f_{p-1})\cdot f_p\,,$$

se puede escribir así:

$$\begin{aligned}
&f_0\cdot C(f_1;\dots;f_p) + (-1)^{p+1}C(f_0;\dots;f_{p-1})\cdot f_p = \\
&\quad = f_0\cdot C(f_1;f_2;f_3;\dots;f_p) + f_1\cdot C(f_0;f_2;f_3;\dots;f_p) - f_1\cdot C(f_0;f_2;f_3;\dots;f_p) - \\
&\qquad - f_2\cdot C(f_0;f_1;f_3;\dots;f_p) + f_2\cdot C(f_0;f_1;f_3;\dots;f_p) + \dots + \\
&\qquad + (-1)^{p+1}f_{p-1}\cdot C(f_0;\dots;f_{p-2};f_p) + (-1)^{p+1}C(f_0;\dots;f_{p-2};f_{p-1})f_p\,,
\end{aligned}$$

ahora bien, la suma de los dos primeros términos es una cocadena simétrica en las variables 0 y 1, la suma de los dos siguientes es simétrica en las variables 1 y 2, etc. ■

Del Teorema 3.1 y de la Proposición 3.1 se obtiene inmediatamente el resultado siguiente.

Corolario *La descomposición de todo p-cociclo* C *determinada por el Teorema de Vey se puede escribir así:*

$$C = A\,C + \delta\,E\,,$$

siendo A *el operador de antisimetrización completa:*

$$(AC)(f_1;\dots;f_p) = \frac{1}{p!}(-1)^\sigma\sum_\sigma C(f_{\sigma_1};\dots;f_{\sigma_p})\,,$$

donde la suma está extendida a todas las permutaciones de $1,\dots,p$. *En particular, la parte antisimétrica de un p-cociclo diferenciable de Hochschild es un p-tensor contravariante antisimétrico. De otra forma, todo p-tensor contravariante, antisimétrico es un p-cociclo que nunca es exacto a menos que sea nulo.*

1.3.2 Productos Estrella sobre una Variedad Diferenciable

Definición 3.4 *Sea $N[[\hbar]]$ el álgebra de las series formales de potencias en $\hbar$ con coeficientes en N. Una deformación formal del álgebra asociativa $(N;\cdot)$, o un producto deformado, es una aplicación bilineal de $N \times N$ en $N[[\hbar]]$ definida por la serie formal:*

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C_r(f;g)\, \hbar^r\,, \tag{a}$$

donde las C_r $(r \geq 1)$ son 2-cocadenas de Hochschild y tal que su extensión natural a una aplicación bilineal de $N[[\hbar]] \times N[[\hbar]]$ en $N[[\hbar]]$ satisface la propiedad asociativa. Es decir,

$$(f *_\hbar g) *_\hbar h - f *_\hbar (g *_\hbar h) = 0\,,$$

para todo $f, g, h \in N$.

Definición 3.5 *Si la suma infinita se interrumpe en el término de orden q y la relación de asociatividad se verifica hasta este orden incluido, se dice que se tiene un producto deformado al orden q.*

Al desarrollar la expresión $(f *_\hbar g) *_\hbar h$ se tiene:

$$\begin{aligned}(f *_\hbar g) *_\hbar h =&(f \cdot g) \cdot h + \sum_{r=1}^{\infty} (C_r(f;g) \cdot h)\, \hbar^r + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} (C_r(f \cdot g;h))\, \hbar^r + \sum_{r=2}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{s+t=r\\ s,t\geq 1}} C_s\big(C_t(f;g)\,;\,h\big)\Big)\, \hbar^r\,,\end{aligned}$$

de la misma forma,

$$\begin{aligned}f *_\hbar (g *_\hbar h) =& f \cdot (g \cdot h) + \sum_{r=1}^{\infty} (f \cdot C_r(g;h))\, \hbar^r + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} (C_r(f;g \cdot h))\, \hbar^r + \sum_{r=2}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{s+t=r\\ s,t\geq 1}} C_s\big(f\,;\,C_t(g;h)\big)\Big)\, \hbar^r\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la propiedad asociativa al orden 1 de la ley de composición (a) se escribe así:

$$\delta\, C_1 = 0\,,$$

es decir, C_1 es un 2-cociclo de Hochschild. Al orden q, se comprueba directamente, que la propiedad asociativa se escribe así:

$$\delta\, C_q = E_q\,,$$

donde E_q es la 3-cocadena definida por:

$$E_r(f;g;h) = \sum_{\substack{k+l=r\\ k,l\geq 1}} \left[C_k\big(C_l(f;g);h\big) - C_k\big(f;C_l(g;h)\big)\right]\,. \tag{b}$$

Así pues, la ley de composición (a) satisface la propiedad asociativa al orden q si y sólo si E_q es un 3-cociclo exacto de Hochschild.

Ahora bien, dado un producto deformado al orden q, automaticamente E_{q+1} es un 3-cociclo de Hochschild (Gerstenhaber [1964b]), en consecuencia, teniendo en cuenta el Corolario de la Proposición 3.1, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2 *Sea*

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{q} C_r(f;g)\,\hbar^r\,,$$

un producto deformado al orden q y sea E_{q+1} el 3-cociclo de Hochschild definido por (b) *(con $r = q+1$). La condición necesaria y suficiente para que exista una 2-cocadena C_{q+1} tal que*

$$f *'_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{q+1} C_r(f;g)\,\hbar^r\,,$$

sea un producto deformado al orden $q+1$ es que la parte antisimétrica de E_{q+1} sea nula. Así pues, el espacio de las obstrucciones a la prolongación de productos deformados al orden q es el tercer espacio de cohomología de Hochschild. ∎

Si las C_r $(1 \leq r \leq q)$ son, respectivamente, cocadenas locales, diferenciales o nulas sobre las constantes, se deduce inmediatamente que la 3-cocadena E_{q+1}, definida por (b), es igualmente local, diferenciable o nula sobre las constantes.

Definición 3.6 *Un producto deformado se dice local, diferenciable, unitario si está definido por una serie formal* (a) *donde las C_r $(r \geq 1)$ son 2-cocadenas locales, diferenciables o nulas sobre las constantes respectivamente. En este último caso se tiene*

$$f *_\hbar 1 = f = 1 *_\hbar f\,.$$

La siguiente proposición permite particularizar la teoría de los productos deformados en el caso en que el término de orden 1 venga dado por el corchete de Poisson.

Proposición 3.3 *Sea $(M;\{\,;\})$ una variedad de Poisson, y N el álgebra asociativa $C^\infty(M)$. El corchete de Poisson:*

$$\{\,;\}: N \times N \to N\,,$$

es un 2-cociclo de Hochschild diferencial, no exacto y nulo sobre las constantes.

Prueba Para comprobar que $\{\,;\}$ es un 2-cociclo de Hochschild, basta considerar que por definición:

$$(\delta\{\,;\})(f,g,h) = f \cdot \{g\,;h\} - \{f \cdot g\,;h\} + \{f\,;g \cdot h\} - \{f\,;g\} \cdot h\,, \quad f,g,h \in N\,,$$

y hacer uso de la propiedad (ver Sección 1.2.1):

$$\{f \cdot g\,;h\} = f \cdot \{g\,;h\} + \{f\,;h\} \cdot g\,,$$

($\{\,;\}$ es una derivación en cada argumento). Obtenemos entonces $\delta\{\,;\} = 0$.

Por ser $\{\,;\}$ antisimétrico y no nulo, no puede ser exacto (Proposición 3.1). ∎

Definición 3.7 *Sea $(M;\Lambda)$ una variedad de Poisson, $N \equiv C^\infty(M)$ y sea $N[[\hbar]]$ el álgebra de las series formales en $\hbar$ con coeficientes en N. Un Producto Estrella* (Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer [1978]) *sobre M es un producto deformado definido por la serie formal*

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(f;g)\,\hbar^i\,,$$

donde las C_i son 2-cocadenas diferenciales de Hochschild (operadores bidiferenciales sobre N), sin término constante en cada argumento (nulos sobre las constantes), tal que

$$\frac{f *_\hbar g - g *_\hbar f}{\hbar} = \{f\,;g\} + \mathcal{O}(f;g;\hbar)\,. \tag{c}$$

La condición de ausencia de término constante significa que: $C_i(1;g) = C_i(f;1) = 0$, y por tanto,

$$f *_\hbar 1 = f\,, \quad 1 *_\hbar g = g\,. \tag{d}$$

Se tiene un producto estrella al orden q si estas propiedades se satisfacen hasta este orden incluido.

Definición 3.8 *Una aplicación bilineal de $N \times N$ sobre $N[[\hbar]]$ definida por la serie formal*

$$\{f\,;g\}_\hbar = \{f\,;g\} + \sum_{r=1}^{\infty} C_r(f;g)\,\hbar^r\,, \tag{e}$$

donde las C_r $(r \geq 1)$ son aplicaciones bilineal antisimétricas de $N \times N$ sobre N, es una deformación formal del álgebra de Lie $(N;\{\,;\,\})$, o un corchete deformado, si su extensión natural a una aplicación bilineal de $N[[\hbar]] \times N[[\hbar]]$ sobre $N[[\hbar]]$ satisface la relación de Jacobi:

$$\{\{f\,;g\}_\hbar\,;h\}_\hbar + \{\{g\,;h\}_\hbar\,;f\}_\hbar + \{\{h\,;f\}_\hbar\,;g\}_\hbar = 0\,, \tag{f}$$

para todo $f,g,h \in N$. La serie (e) *define un corchete deformado al orden q si la relación de Jacobi se satisface hasta este orden incluido.*

De manera análoga al caso de los productos deformados, la condición (f), orden a orden, se escribe así:

$$E'_r(f;g;h) = (\tilde\delta\, C_r)(f;g;h)\,, \tag{g}$$

donde $\tilde\delta$ es el operador de coborde en la cohomología de Chevalley (Definición 1.1 de 1.1.1) y

$$E'_r(f;g;h) = \sum_{\substack{k+l=r\\ k,l\geq 1}} C_r(C_s(f;g);h) + (\text{perm. circulares de } f,g,h)\,. \tag{h}$$

Si la relación (g) se satisface hasta el orden q, E'_{q+1} es automáticamente un 3-cociclo de Chevalley (Gerstenhaber [1964b]), por tanto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.4 *Sea*

$$\{f\,;g\}_\hbar = \{f\,;g\} + \sum_{r=1}^{q} C_r(f;g)\,\hbar^r\,,$$

un corchete deformado al orden q. La condición necesaria y suficiente para que exista una 2-cocadena de Chevalley C_{q+1} tal que

$$\{f\,;g\}'_\hbar = \{f\,;g\} + \sum_{r=1}^{q+1} C_r(f;g)\,\hbar^r\,,$$

sea un corchete deformado al orden $q+1$ es que el 3-cociclo E'_{q+1} definido en (h) *sea exacto. Por tanto, si el tercer espacio de cohomología de Chevalley es nulo, todo corchete deformado al orden q se puede prolongar al orden $q+1$.* ∎

Si las C_r $(1 \leq r \leq q)$ son locales, diferenciables, nulas sobre las constantes, la 3-cocadena E'_{q+1}, definida en (h), es igualmente local diferenciable o nula sobre las constantes respectivamente.

Definición 3.9 *Un corchete deformado se dice local, diferenciable, nulo sobre las constantes si las 2-cocadenas C_r son locales, diferenciables, nulas sobre las constantes respectivamente.*

Se puede establecer una relación entre los productos estrella y los corchetes deformados por antisimetrización. Definiendo

$$\{f\,;g\}_\hbar \equiv \frac{1}{\hbar}(f *_\hbar g - g *_\hbar f) = \{f\,;g\} + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(f;g)\,\hbar^j\,,$$

se tiene que $K_j(f;g) = C_{j+1}(f;g) - C_{j+1}(g;f)$ son dos-cocadenas diferenciables, nulas sobre las constantes de Chevalley, tales que se satisface la identidad de Jacobi. Por lo que $\{\,;\}_\hbar$ es una deformación del álgebra de Lie $(N;\{\,;\})$. Lichnerowicz [1982] ha probado que, dado un corchete deformado diferenciable y nulo sobre las constantes, a lo sumo existe un producto estrella que lo genera.

Los resultados mas importantes en relación con la existencia de productos estrella son los siguientes:

Teorema 3.2 (Vey J. [1975]) *Sea M una variedad simpléctica. Si el tercer espacio de cohomología de de Rham es nulo, existe una deformación diferencial del álgebra de Lie $(C^\infty(M), \{\,;\})$.* ■

Teorema 3.3 (Neroslavsky O. M., Vlassov A. T. [1981]) *Sobre toda variedad simpléctica en la que el tercer espacio de cohomología de de Rham es trivial existe un producto estrella.* ■

Teorema 3.4 (Lecompte P., de Wilde M. [1983]) *Sobre toda variedad simpléctica existe un producto estrella.* ■

1.3.3 Equivalencia de Productos Estrella

Proposición 3.5 *Sea $f *_\hbar g$ un producto deformado y sea una serie formal*

$$T_\hbar = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} T_i\,\hbar^i \tag{a}$$

donde las T_i $(i \geq 1)$ son aplicaciones lineales de N en N. La aplicación $f *'_\hbar g$ de $N \times N$ en $N[[\hbar]]$, definida por la identidad:

$$T_\hbar(f *'_\hbar g) = T_\hbar(f) *_\hbar T_\hbar(g)\,,$$

es un producto deformado.

Prueba Siendo $T_\hbar$ una serie formalmente invertible, se tiene:

$$f *'_\hbar g = T_\hbar^{-1}\left(T_\hbar(f) *_\hbar T_\hbar(g)\right) .$$

Desarrollando esta identidad en serie de potencias de $\hbar$ se obtiene una expresión del tipo:

$$f *'_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C'_r(f;g) ,$$

donde las C'_r son aplicaciones bilineales de $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ en $\boldsymbol{N}$.

Por otra parte, $*'_\hbar$ satisface la propiedad asociativa ya que:

$$\begin{aligned}(f *'_\hbar g) *'_\hbar h - f *'_\hbar (g *'_\hbar h) &= T_\hbar^{-1}\left(T_\hbar(f *'_\hbar g) *_\hbar T_\hbar h - T_\hbar f *_\hbar T_\hbar(g *'_\hbar h)\right) = \\ &= T_\hbar^{-1}\left((T_\hbar f *_\hbar T_\hbar g) *_\hbar T_\hbar h - T_\hbar f *_\hbar (T_\hbar g *_\hbar T_\hbar h)\right) = \\ &= T_\hbar^{-1}(0) = 0 .\end{aligned}$$

■

Definición 3.10 *Dos productos deformados $f *_\hbar g$ y $f *'_\hbar g$ se dice que son equivalentes si existe una serie formal* (a) *tal que se satisface la identidad:*

$$T_\hbar(f *'_\hbar g) = T_\hbar(f) *_\hbar T_\hbar(g) .$$

En particular, una deformación se denomina *trivial* si es equivalente a la deformación identidad ($C_r = 0$ para ($r \geq 1$)).

El resultado de la proposición anterior se puede particularizar para productos deformados locales, diferenciables o nulos sobre las constantes, considerando aplicaciones T_i ($i \geq 1$) que sean respectivamente locales, diferenciables o nulos sobre las constantes. De esta forma se puede hablar de equivalencias de productos deformados locales, diferenciables y nulos sobre las constantes respectivamente.

Lichnerowicz [1980] ha demostrado que si la 2-cocadena de Hochschild $C = \delta T$ es d-diferenciable y nula sobre las constantes entonces el endomorfismo T de $\boldsymbol{N}$ es $(d+1)$-diferenciable y nulo sobre las constantes.

Basandonos en este resultado, demostramos a continuación que el caracter diferenciable y nulo sobre las constantes de la 1-cocadena $T_\hbar$ viene obligado por el caracter diferenciable y nulo sobre las constantes de los productos deformados $*_\hbar$ y $*'_\hbar$.

En efecto, sea el producto deformado diferenciable y nulo sobre las constantes:

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C_r(f;g)\, \hbar^r ,$$

y la serie formal

$$T_\hbar = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} T_s\, \hbar^s$$

donde las $T_\hbar$ ($s \geq 1$) son endomorfismos de $\boldsymbol{N}$ (por extensión lineal $T_\hbar$ opera en $\boldsymbol{N}[[\hbar]]$).

Consideremos la aplicación bilineal $*'_\hbar$ de $N \times N$ en $N[[\hbar]]$ definida por

$$f *'_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C'_r(f;g)\,\hbar^r .$$

Si las C'_r son dos-cocadenas de Hochschild diferenciables y nulas sobre las constantes, tales que se verifica la igualdad:

$$T_\hbar(f *'_\hbar g) = T_\hbar f *_\hbar T_\hbar g \,,$$

entonces, mediente un cálculo directo se obtiene:

$$C'_t - C_t + G_t = \delta T_t\,; \qquad t = 1, 2, \dots \,, \tag{b}$$

donde $G_1 = 0$ y

$$\begin{aligned} G_t(f;g) = & \sum_{r+s=t} T_s\big(C'_r(f;g)\big) - \sum_{s+s'=t} T_s(f)\,T_{s'}(g) - \\ & - \sum_{r+s=t} \big(C_r(T_s(f);g) - C_r(f;T_s(g))\big) - \\ & - \sum_{r+s+s'=t} C_r\big(T_s(f);T_{s'}(g)\big)\,, \end{aligned} \tag{c}$$

con $r, s, s' \geq 1$. Los operadores T_s ($s \geq 1$) son entonces necesariamente diferenciales y nulos sobre las constantes.

Definición 3.11 *Dos productos deformados*

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C_r(f;g)\,\hbar^r\,, \qquad f *'_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C'_r(f;g)\,\hbar^r\,,$$

se dice que son equivalentes hasta el orden q si existe un elemento $T_\hbar = Id + \sum_{r=1}^{q} T_r\,\hbar$ tal que las relaciones (b) *se satisfacen para $t = 1, \dots, q$.*

Gerstenhaber [1964b] ha demostrado que si dos deformaciones son equivalentes hasta el orden q, la expresión:

$$C'_{q+1} - C_{q+1} + G_{q+1}\,,$$

es un 2-cociclo de Hochschild. Se tiene pues la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Sean*

$$f *_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C_r(f;g)\,\hbar^r \quad y \quad f *'_\hbar g = f \cdot g + \sum_{r=1}^{\infty} C'_r(f;g)\,\hbar^r$$

dos productos deformados equivalentes hasta el orden q. Sea

$$T_\hbar = Id + \sum_{r=1}^{q} T_r\,\hbar^r\,,$$

el elemento que establece la equivalencia. La condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación lineal de N en N, T_{q+1}, tal que $*_\hbar$ y $*'_\hbar$ sean equivalentes hasta el orden $q+1$ por medio de:

$$T'_\hbar = Id + \sum_{r=1}^{q+1} T_r\,\hbar^r\,,$$

es que

$$C'_{q+1} - C_{q+1} + G_{q+1}\,,$$

sea un 2-cociclo exacto, estando definido G_{q+1} por la expresión (c). ■

Lichnerowicz [1982] ha demostrado que si la variedad es simpléctica y su segundo espacio de cohomología de de Rham es nulo el segundo espacio de cohomología de Hochschild es de dimensión uno y entonces todos los productos estrella definidos sobre la variedad son equivalentes.

Para los corchetes deformados también se puede definir la noción de equivalencia. Este concepto se puede particularizar para los casos local, diferenciable y nulo sobre las constantes ya que también en la cohomología de Chevalley se tiene que si C es una cocadena local, diferenciable o nula sobre las constantes, $\tilde{\delta}\, C$ es respectivamente local, diferenciable o nula sobre las constantes.

Analogamente a la Proposición 3.5, se tiene el siguiete resultado para corchetes deformados.

Proposición 3.7 *Sea $\{f\,;g\}_\hbar$ un corchete deformado (respectivamente local, diferenciable, nulo sobre las constantes) y sea $T_\hbar$ una serie formal*

$$T_\hbar = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} T_i\, \hbar^i ,$$

donde las T_i $(i \geq 1)$ son aplicaciones lineales de $\boldsymbol{N}$ en $\boldsymbol{N}$ (respectivamente locales, diferenciables, nulas sobre las constantes). Entonces, la aplicación $\{f;g\}'_\hbar$ de $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ en $\boldsymbol{N}[[\hbar]]$ definida por la identidad:

$$T_\hbar\{f;g\}'_\hbar = \{T_\hbar(f);T_\hbar(g)\}_\hbar$$

es un corchete deformado (respectivamente local, diferenciable, nulo sobre las constantes) sobre el álgebra de Lie $(\boldsymbol{N};\{\,;\})$. ■

Definición 3.12 *Dos corchetes deformados (respectivamente locales, diferenciables, nulos sobre las constantes) $\{f\,;g\}_\hbar$ y $\{f\,;g\}'_\hbar$ se dice que son equivalentes (con equivalencia local, diferenciable, nula sobre las constantes respectivamente) si existe una serie formal*

$$T_\hbar = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} T_i\, \hbar^i ,$$

donde las T_i $(i \geq 1)$ son aplicaciones de $\boldsymbol{N}$ en $\boldsymbol{N}$ lineales (respectivamente locales, diferenciables, nulas sobre las constantes) tales que se satisface la igualdad:

$$T_\hbar\{f\,;g\}'_\hbar = \{T_\hbar(f)\,;T_\hbar(g)\}_\hbar\,, \tag{d}$$

para todo $f, g \in \boldsymbol{N}$.

Cuando la igualdad (d) *se verifica hasta el orden q incluido, se se dice que los corchetes deformados son equivalentes al orden q.*

1.4 Productos Estrella Invariantes sobre un Grupo de Lie

1.4.1 Operadores Diferenciales Invariantes sobre un Grupo de Lie

Sea T_eG el espacio vectorial tangente a G en el elemento unidad $e \in G$. Si $x \in T_eG$ sean x^λ y x^ρ los campos vectoriales sobre G generados, apartir de x, por traslación a la izquierda y a la derecha respectivamente, es decir,

$$x^\lambda(g) = T_e\lambda_g \cdot x\,, \quad x^\rho(g) = T_e\rho_g \cdot x\,, \quad \text{para todo } g \in G\,.$$

Si $y \in T_eG$ entonces existe un elemento $[x\,;y] \in T_eG$ tal que (ver por ejemplo: Helgason [1978]; Varadarajan [1974]):

$$\begin{aligned} [x^\lambda\,;y^\lambda](g) &= T_e\lambda_g \cdot [x\,;y] \\ [x^\rho\,;y^\rho](g) &= -T_e\rho_g \cdot [x\,;y]\,. \end{aligned}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es el espacio vectorial T_eG dotada del corchete $[\,;]$.

El álgebra $\mathcal{D}^\lambda(G)$, de los operadores diferenciales invariantes por la izquierda sobre G, es el álgebra asociativa generada por los campos vectoriales x^λ. De la misma forma, el álgebra de los operadores diferenciales invariantes por la derecha sobre G, $\mathcal{D}^\rho(G)$, es el álgebra asociativa generada por los campos invariantes por la derecha (ver por ejemplo: Helgason [1978]; Varadarajan [1974]).

Sea

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{g} \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes \mathfrak{g}\,,$$

el álgebra tensorial sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$, y $\mathcal{J}$ el ideal bilátero generado por las relaciones

$$x \otimes y - y \otimes x - [x;y]\,.$$

El álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ es, por definición, el álgebra asociativa

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}\,.$$

La aplicación $x \longrightarrow x^\lambda$ se extiende a un isomorfismo de álgebras de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ en $\mathcal{D}^l(G)$ (ver por ejemplo: Varadarajan [1974]). De la misma forma, si $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^o$ es el álgebra opuesta a $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, la aplicación $x \longrightarrow x^\rho$ se extiende a un isomorfismo de álgebras de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^o$ a $\mathcal{D}^\rho(G)$. Así, si $x \cdot y \cdots z$ es un producto en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, se tiene

$$\begin{aligned} (x \cdot y \cdots z)^\lambda &= x^\lambda \cdot y^\lambda \cdots z^\lambda\,, \\ (x \cdot y \cdots z)^\rho &= z^\rho \cdots y^\rho \cdot x^\rho\,. \end{aligned}$$

La aplicación

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}\,, \quad x \longrightarrow (x;x)\,,$$

es lineal y se extiende de forma única a un homomorfismo de álgebras

$$\Delta : \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\,,$$

denominado coproducto de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$.

Observación Sean φ, ψ dos elementos de $\mathcal{C}^\infty(G)$, y $x \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\begin{aligned} x^\lambda(\varphi\psi) &= \mu\big((\Delta(x))^\lambda(\varphi \otimes \psi)\big)\,, \\ x^\rho(\varphi\psi) &= \mu\big((\Delta(x))^\rho(\varphi \otimes \psi)\big)\,, \end{aligned} \tag{a}$$

siendo $\mu : \mathcal{C}^\infty(G) \otimes \mathcal{C}^\infty(G) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G)$ la aplicación definida por

$$\mu(\varphi \otimes \psi) = \varphi\psi\,. \tag{b}$$

■

Es conveniente introducir la siguiente notación polinómica para los elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^p$. Si $\{e_i\,;\, i = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, escribiremos

$$x_i = e_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \qquad (\, i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

cualquiera que sea el número de unos. Así,

$$x_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \cdots\,.$$

También escribiremos

$$y_i = 1 \otimes e_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots\,, \quad y_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \cdots\,,$$

y

$$\begin{aligned} z_i &= 1 \otimes 1 \otimes e_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots\,, \\ t_i &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes e_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots\,, \text{etc}\,. \end{aligned}$$

Los elementos x conmutan con los elementos y, pero si $i \neq j$, x_i y x_j en general no conmutan. Lo mismo ocurre para $y, z, \ldots$ etc.

Un elemento $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ se escribe como un polinomio en las variables x, y:

$$\begin{aligned} B &= \sum a_{(\mu)\,(\nu)}\, e_1^{\mu_1} \cdots e_n^{\mu_n} \otimes e_1^{\nu_1} \cdots e_n^{\nu_n} = \\ &= \sum a_{(\mu)\,(\nu)}\, x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n} \cdot y_1^{\nu_1} \cdots y_n^{\nu_n}\,. \end{aligned}$$

La acción del coproducto, en notación polinómica, es:

$$\Delta(x_i) = (e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i) \otimes 1 \otimes \cdots = x_i + y_i\,,$$

y por tanto

$$\Delta(x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}) = (x_1 + y_1)^{\mu_1} \cdots (x_n + y_n)^{\mu_n}\,.$$

Así pues, si $A(x) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, escribiremos $\Delta(A(x)) = A(x + y)$.

Haciendo uso de esta notación y teniendo en cuenta (a), se tiene:

$$(A(x))^\lambda(\varphi\psi) = \mu\big(A(x + y)^\lambda(\varphi \otimes \psi)\big)\,, \tag{c}$$

para todo $A(x) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ y todo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(G)$, donde μ viene está definida en (b).

1.4.2 Cohomología Diferencial Invariante de Hochschild

Sea ahora la variedad M, de la Sección 1.3.1, un grupo de Lie G. La cohomología diferencial invariante por la izquierda (respectivamente por la derecha) de Hochschild se define como en 1.3.1 con la condición adicional de que los operadores multidiferenciales C sobre G sean invariantes por la izquierda (respectivamente por la derecha).

Teniendo en cuenta que el álgebra de los operadores diferenciales invariantes sobre el grupo es isomorfa al álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie del grupo, se puede dar una descripción en el elemento neutro de la cohomología diferencial invariante de Hochschild, por medio de los elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$.

Definamos, por tanto, la siguiente cohomología, que por traslaciones a la izquierda (respectivamente a la derecha) es isomorfa a la cohomología diferencial invariante por la izquierda (respectivamente por la derecha) de Hochschild sobre G.

(i) Las p-cocadenas son los elementos de

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \overset{(p)}{\cdots} \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) .$$

(ii) El operador de cohomología

$$\delta : \mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes p} \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes (p+1)} ,$$

está definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = {} & 1 \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_p + \\ & + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \, u_1 \otimes \cdots \otimes \Delta(u_i) \otimes \cdots \otimes u_p + \\ & + (-1)^{p+1} \, u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes 1 , \end{aligned}$$

teniendose, por tanto $\delta \circ \delta = 0$.

En notación polinómica (Sección 1.4.1), las 1-cocadenas se representan como polinomios $E(x)$; las 2-cocadenas como polinomios $F(x; y)$, donde las variables x's permutan con las variable y's, no permutando ni éstas ni aquellas entre sí. El operador de cohomología aplicado a una 1-cocadena se escribe así:

$$(\delta E)(x; y) = E(y) - E(x + y) + E(x) \tag{a}$$

y aplicado a una 2-cocadena:

$$(\delta F)(x; y; z) = F(y; z) - F(x + y; z) + F(x; y + z) - F(x; y) . \tag{b}$$

La condición de 1-cociclo de Hochschild (en la cohomología invariante) es pues:

$$E(x + y) = E(x) + E(y) \tag{c}$$

y la de 2-cociclo:

$$F(x + y; z) + F(x; y) = F(x; y + z) + F(y; z) . \tag{d}$$

El siguiente teorema es una particularización del Teorema de Vey en el caso de la cohomología invariante.

Teorema 4.1 (Lazard M. [1955], Cartier P. [1955/56]) *El p-espacio de cohomología diferencial invariante de Hochschild sobre G es isomorfo al espacio de los p-tensores antisimétricos invariantes sobre G. Este isomorfismo viene dado por la descomposición*

$$\alpha = A\alpha + \delta E ,$$

donde α es un p-cociclo invariante y E es una (p-1)-cocadena invariante. ∎

1.4.3 Productos Estrella Invariantes sobre un Grupo de Lie

Definición 4.1 *Un producto estrella invariante por la izquierda (por la derecha) sobre G es una aplicación bilineal sobre $\mathcal{C}^\infty(G)[[\hbar]]$ con valores en este espacio, definida de la siguiente manera:*

(1) *Si $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(G)$*

$$\varphi * \psi = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\varphi; \psi)\, \hbar^i ; \quad C_0 = I ,$$

$*$ está definido linealmente sobre $\mathcal{C}^\infty(G)[[\hbar]]$.

(2) *C_i es un operador bidiferencial invariante sobre G tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G)$,*

$$C_i(\varphi; 1) = C_i(1; \varphi) = 0 .$$

(3)

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi)$$

(prescindimos de la condición (c) *de la Definición 3.7 de la Sección 1.3.2).*

Como hemos visto, si C_i es invariante por la izquierda, existe un único $F_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tal que

$$C_i(\varphi; \psi) = \mu\big((F_i(x; y))^\lambda\, (\varphi \otimes \psi)\big) ,$$

siendo $\mu : \mathcal{C}^\infty(G) \otimes \mathcal{C}^\infty(G) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G)$ la aplicación definida en (b) de 1.4.1. De forma análoga si C_i es invariante por la derecha.

Desarrollando los miembros de (3), tenemos:

$$(\varphi * \psi) * \chi = \sum_{j=1}^{\infty} C_j(\varphi * \psi; \chi)\, \hbar^j = \sum_{m=0}^{\infty} \Big[\sum_{i+j=m} C_j(C_i(\varphi; \psi); \chi) \Big]\, \hbar^m ,$$

$$\varphi * (\psi * \chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big[\sum_{i+j=m} C_j(\varphi; C_i(\psi; \chi)) \Big]\, \hbar^m .$$

Entonces, si (3) se satisface, se tienen las siguientes relaciones para todo $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\sum_{i+j=m} C_j(C_i(\varphi; \psi); \chi) = \sum_{i+j=m} C_j(\varphi; C_i(\psi; \chi)) . \tag{a}$$

Ahora bién,

$$C_i(\varphi; \psi) = \mu\big((F_i(x; y))^\lambda (\varphi \otimes \psi)\big) ,$$

por lo tanto, teniendo en cuenta (c) de 1.4.1, las relaciones (a) se ecriben, en notación polinómica, de la siguiente forma:

$$\sum_{i+j=m} (F_j(x+y;z)\,F_i(x;y))^\lambda\,(\varphi\otimes\psi\otimes\chi) =$$
$$= \sum_{i+j=m} (F_j(x;y+z)\,F_i(x;y))^\lambda\,(\varphi\otimes\psi\otimes\chi)\,,$$

para todo $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$, y la propiedad asociativa se expresa así:

$$\sum_{i+j=m} F_j(x+y;z)\,F_i(x;y) = \sum_{i+j=m} F_j(x;y+z)\,F_i(y;z)\,; \quad m=1,2,3,\dots \tag{b}$$

Haciendo uso del operador de cohomología de Hochschild, las relaciones (b) son:

$$\begin{aligned} &\delta F_1(x;y;z) = 0\,, \\ &\delta F_l(x;y;z) = \alpha_l(x;y;z)\,, \qquad l=2,3,\dots\,, \end{aligned} \tag{c}$$

donde

$$\alpha_l(x;y;z) = \sum_{\substack{i+j=l\\ i,j\geq 1}} \left[F_i(x+y;z)\,F_j(x;y) - F_i(x;y+z)\,F_j(y;z)\right]. \tag{d}$$

Hemos probado pues la siguiente proposición.

Proposición 4.1 *Existe una aplicación biyectiva entre los productos estrella invariantes por la izquierda sobre $\boldsymbol{G}$ y los elementos*

$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$$

que satisfacen las relaciones (b). *Por simplicidad, escribiremos* (b) *de la siguiente manera:*

$$F(x+y;z)\,F(x;y) = F(x;y+z)\,F(y;z)\,. \tag{e}$$

■

Brevemente, se puede afirmar que $F(x;y)$ es un producto estrella invariante por la izquierda sobre $\boldsymbol{G}$.

Si en la Definición 4.1 el producto estrella es invariante por la derecha, cada C_i determina un único elemento $H_i(x;y) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tal que

$$C_i(\varphi;\psi) = \mu\big((H_i(x;y))^r\,(\varphi\otimes\psi)\big)\,.$$

Entonces, de forma similar, se prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.2 *Existe una aplicación biyectiva entre los productos estrella invariantes por la derecha y los elementos*

$$H(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(x;y)\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \quad .$$

que satisfacen las relaciones

$$H(x;y)\,H(x+y;z) = H(y;z)\,H(x;y+z)\,.$$

■

1.4.4 Equivalencia de Productos Estrella Invariantes

Definición 4.2 *Sean*

$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i\,, \qquad F'(x;y) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} F'_j(x;y)\,\hbar^j\,,$$

dos elementos cualesquiera de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Se dice que son equivalentes si existe algún elemento

$$E = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,,$$

tal que

$$E(x+y)\,F'(x;y) = F(x;y)\,E(x)\,E(y)\,. \tag{a}$$

Desarrollando la condición (a) orden a orden, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 4.3 *Los elementos $F(x;y)$ y $F'(x;y)$ son equivalentes si y sólo si*

$$F'_k(x;y) - F_k(x;y) + G_k(x;y) = \big(\delta\,E_k\big)(x;y)\,; \qquad k = 1,2,3,\dots\,, \tag{b}$$

donde

$$G_1(x;y) = 0\,, \tag{c}$$

y para $k = 2,\dots$

$$\begin{aligned} G_k(x;y) &\equiv G_k(E_1,\dots,E_{k-1};F'_1,\dots,F'_{k-1};F_1,\dots,F_{k-1})(x;y) \equiv \\ &\equiv \sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 1}} [E_i(x+y)\,F'_j(x;y) - F_i(x;y)\,E_j(y) - F_i(x;y)\,E_j(x)] - \\ &- \sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 1}} E_i(x)\,E_j(y) - \sum_{\substack{i+j+l=k\\ i,j,k\geq 1}} F_i(x;y)\,E_j(x)\,E_l(y)\,. \end{aligned} \tag{d}$$

Hay que hacer notar que $G_k(x;y)$ está definido por medio de E_j, F_j, F'_j con $1 \leq j \leq k-1$. ∎

Definición 4.3 *Sean F, F' dos elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]$. Supongamos que existen $E_1,\dots,E_m \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que se satisfacen (b) y (c) para $k = 1,2,\dots,m$. Diremos, entonces, que F y F' son equivalentes hasta el orden m.*

Proposición 4.4 *Supongamos, ahora, que $F(x;y)$ es un producto estrella invariante. Sea*

$$E = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i\,\hbar^i\,,$$

un elemento arbitrario de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Definamos $F'(x;y)$ por la relación:

$$F'(x;y) = E^{-1}(x+y)\,F(x;y)\,E(x)\,E(y)\,.$$

Entonces $F'(x;y)$ es un producto estrella invariante.

Prueba Se tiene

$$F'(x+y;z) = E^{-1}(x+y+z)\,F(x+y;z)\,E(x+y)\,E(z)\,,$$

y

$$F'(x+y;z)\,F'(x;y) = E^{-1}(x+y+z)\,F(x+y;z)\,F(x;y)\,E(x)\,E(y)\,E(z)\,.$$

De la misma forma, se tiene

$$F'(x;y+z)\,F'(y;z) = E^{-1}(x+y+z)\,F(x;y+z)\,F(y;z)\,E(x)\,E(y)\,E(z)\,,$$

pero $F(x;y)$ satisface (e) de 1.4.3, por lo que $F'(x;y)$ también. ∎

Esta proposición proporciona significado a la noción de equivalencia de productos estrella invariantes.

Definición 4.4

(1) *Dos productos estrella invariantes F y F' son equivalentes si lo son en el sentido de la Definición 3.10 de 1.3.3.*

(2) *Son equivalentes hasta el orden m, si F y F' son elementos equivalentes hasta el orden m en el sentido de la Definición 3.11 de 1.3.3.*

Sean F y F' dos productos estrella. Supongamos que son equivalentes hasta el orden k, esto es, para $i = 1,\dots,k$ tenemos:

$$F_i' - F_i + G_i(E_1,\dots,E_{i-1};F_1',\dots,F_{i-1}';F_1,\dots,F_{i-1}) = \delta\,E_i\,.$$

donde $E_1,\dots,E_k \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ y los elementos $G_1,\dots,G_k$ vienen dados por la expresión (c).

Sabemos (Gerstenhaber [1964b]) que la dos-cocadena

$$F_{k+1}' - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1,\dots,E_k;F_1',\dots,F_k';F_1,\dots,F_k)$$

es un 2-cociclo.

Por los Teoremas 3.1 de 1.3.1 y 4.1 de 1.4.2, existe $h_{k+1} \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ y $E_{k+1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tal que

$$F_{k+1}' - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1,\dots,E_k;F_1',\dots,F_k';F_1,\dots,F_k) = h_{k+1} + \delta\,E_{k+1}\,. \qquad \text{(e)}$$

Se tiene, por tanto, el siguiente resultado.

Proposición 4.5 *Dos productos estrella F y F' que son equivalentes hasta el orden k, son equivalentes hasta el orden $k+1$ si y sólo si $h_{k+1} = 0$ en la expresión* (e). ∎

Estas nociones y resultados serán frecuentemente utilizadas en los Capítulos 3 y 4.

Capítulo 2

Ecuación Clásica de Yang-Baxter

El objeto de este capítulo es demostrar los principales teoremas enunciados por V. G. Drinfeld [1983a] y M. A. Semenov-Tian-Shansky [1983], que hacen referencia a los conceptos de *grupo de Lie-Poisson, biálgebra de Lie* y *álgebra de Lie doble*, estableciendo la relación entre ellos y con las distintas versiones de la *ecuación clásica de Yang-Baxter*.

Para la elaboración de las Seciones 2.2, 2.3 y 2.4, además de en las referencias anteriores, nos hemos basado esencialmente en los trabajos de Y. Kosmann-Schwarzbach [1987], R. Aminou e Y. Kosmann-Schwarzbach [1988], R. Aminou [1988], Y. Kosmann-Schwarzbach y F. Magri [1988], [1990]. Con la intención de que el capítulo resulte autocontenido, hemos incluido demostraciones detalladas de resultados obtenidos por los autores precedentes, adoptando, en alguna ocasión, un punto de vista mas general.

En relación con el trabajo de Semenov, en las Secciones 2.1 y 2.5 desarrollamos las demostraciones de los teoremas de obtención de soluciones por el método de factorización, de sistemas hamiltonianos definidos por soluciones de la ecuación modificada de Yang-Baxter. Demostraciones de las que sólo conocemos algunas indicaciones (Semenov [1991]) para casos particulares.

Los trabajos de Sklyanin [1982], dentro del método de scattering inverso desarrollado por Faddeev y su grupo, son el origen de estas nociones. Las dos primeras fueron introducidas por Drinfeld [1983a] como una interpretación geométrica de la ecuación clásica de Yang-Baxter. La tercera por Semenov-Tian-Sansky [1983] como una versión algebraica de la *matriz-r clásica*.

La definición de *matriz-r clásica* propuesta por Semenov se situa en el contexto de los sistemas hamiltonianos con espacios de fase que son orbitas de la representación coadjunta de un grupo de Lie. Consiste en un endomorfismo $R \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que la aplicación bilineal antisimétrica

$$[x\,;y]_R = \frac{1}{2}\left([Rx\,;y] + [x\,;Ry]\right)$$

es un nuevo corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$. Al par $(\mathfrak{g};R)$, cuando R satisface la condición anterior, se le denomina *álgebra de Lie doble*.

Todo corchete de Lie sobre un espacio vectorial V determina sobre el espacio vectorial dual un corchete de Poisson (ver Sección 1.2.1, expresiones (a), (b) y (c)). Por tanto si R es una matriz-r clásica sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sobre $\mathfrak{g}^*$, se tienen dos corchetes de Poisson, el corchete de Poisson natural (de Kirillov-Kostant-Souriau) definido a partir del corchete de Lie $[\,;]$ y el corchete de Poisson $\{\,;\}_R$ asociado a $[\,;]_R$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es una función de Casimir de $\mathfrak{g}^*$ con respecto al corchete de Poisson natural, las ecuaciones del movimiento de hamiltoniano φ con respecto al corchete $\{\,;\}_R$ son: (Teorema 1.1 de la Sección 2.1.1):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{ad}^*(M(\alpha))\cdot\alpha\,; \qquad M(\alpha) = \frac{1}{2}R\,(d\varphi(\alpha))\,, \qquad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,.$$

De tal forma que, la existencia de una forma bilineal no-degenerada invariante sobre $\mathfrak{g}$, permite trasladar a $\mathfrak{g}$ la estructura de Poisson $\{\,;\}_R$ y las ecuaciones anteriores adquieren la forma de Lax (Proposición 1.8 de 2.1.3):

$$\frac{d\alpha}{dt} = [\alpha\,; M(\alpha)]\,.$$

Una condición suficiente, introducida por Semenov [1983], para que la aplicación bilineal antisimétrica $[\,;]_R$ satisfaga la identidad de Jacobi es que R satisfaga la *Ecuación Modificada de Yang-Baxter* (Proposición 1.4 de 2.1.3):

$$B_R(x;y) \equiv [R(x)\,;R(y)] - 2R([x\,;y]_R) = -[x\,;y]\,.$$

Esta define, por tanto, un conjunto de matrices-r clásicas cuya importancia estriba en que es posible encontrar soluciones de las ecuaciones del movimiento por el método de factorización (Teorema 1.4 de 2.1.3). Si R es solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter, existen subgrupos de Lie de G cerrados, $G_\pm$, tales que todo elemento de un entorno de la unidad de G admite una factorización única $g = g_+g_-^{-1}$ con $g_\pm \in G_\pm$. Entonces, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es una función de Casimir con respecto al corchete de Poisson natural, $x_0 = d\varphi(\alpha_0) \in \mathfrak{g}$ y c_+, c_- son curvas definidas en el entorno de la unidad donde se satisface la factorización $\exp(tx_0) = c_+(t)^{-1}c_-(t)$, $c_\pm \in G_\pm$, la solución con valor inicial α_0, de las ecuaciones del movimiento con hamiltoniano $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, con respecto al corchete de Poisson $\{\,;\}_R$, es (Teorema 1.4 de 2.1.3):

$$\alpha(t) = \operatorname{Ad}^*(c_+(t))\cdot\alpha_0 = \operatorname{Ad}^*(c_-(t))\cdot\alpha_0\,.$$

La noción de *grupo de Lie-Poisson* consiste en dotar a un grupo de Lie G con una estructura de Poisson (es decir, un corchete de Lie $\{\,;\}_G$ sobre $\mathcal{C}^\infty(G)$ tal que $\{f_1\,;f_2f_3\}_G = f_2\{f_1\,;f_3\}_G + f_3\{f_1\,;f_2\}_G$ para todo $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(G)$) de forma que la operación de grupo sea un morfismo de Poisson de la variedad de Poisson producto $G \times G$ en la variedad de Poisson G (ver Sección 1.2 1)

Toda estructura de Poisson sobre una variedad M puede describirse por medio de un campo tensorial 2-contravariante antisimétrico Λ sobre M denominado *2-tensor de Poisson*, con la propiedad, que lo caracteriza como tal, de que el corchete de Schouten (ver Seccion 1.2.2) $[\Lambda\,;\Lambda]$ es cero. Estudiada en términos de Λ, la condición de grupo de Lie-Poisson se expresa así (Teorema 2.1 de la Sección 2.2.1),

$$\Lambda(gh) = (T_g\rho_h)^{\otimes 2}\Lambda(g) + (T_h\lambda_g)^{\otimes 2}\Lambda(h)\,, \quad \text{para todo} \quad g, h \in G\,.$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de propiedad de Drinfeld del 2-tensor Λ.

Si Λ es un 2-tensor de Poisson sobre un grupo de Lie G, que satisface la propiedad de Drinfeld, la aplicación $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definida por:

$$l(g) = (T_g\rho_{g^{-1}})^{\otimes 2}\Lambda(g)\,,$$

(donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G) es un 1-cociclo del grupo con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Recíprocamente, si l es un 1-cociclo de G con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, el 2-tensor Λ definido por

$$\Lambda(g) = (T_e \rho_g)^{\otimes 2} l(g) ,$$

satisface la Propiedad de Drinfeld (Teorema 2.1 de 2.2.1).

La aplicación tangente en el elemento neutro a un 1-cociclo de grupo, con respecto a una representación ϕ, es un 1-cociclo del álgebra de Lie del grupo, con respecto a la representación $T_e\phi$. Entonces, si $(G; \Lambda)$ es un grupo de Lie-Poisson, sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, existe, determinado por Λ, un 1-cociclo $\epsilon \equiv T_e l : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ (Proposición 2.2 de 2.2.1). Este 1-cociclo ϵ determina una estructura adicional sobre $\mathfrak{g}$, también introducida por Drinfeld [1983a] (estudiada por Kosmann [1987]; Kosmann y Magri [1988]; Aminou y Kosmann [1988]) denominada estructura de *biálgebra de Lie*.

Una *biálgebra de Lie* es un par $(\mathfrak{g}; \epsilon)$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es un 1-cociclo con respecto a la representación adjunta, tal que la aplicación transpuesta, $\epsilon^t : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, es la aplicación lineal asociada a un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$. Entonces, si $(G; \Lambda)$ es un grupo de Lie-Poisson y l el 1-cociclo de grupo asociado al 2-tensor de Poisson Λ, la aplicación $\epsilon^t \equiv (T_e l)^t$ define un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$, dado por la expresión:

$$[\xi\,; \eta]_{\mathfrak{g}^*} = \epsilon^t(\xi \otimes \eta) = d\left(\{f\,; g\}_G\right)(e) ,$$

donde $\xi = df(e)$ y $\eta = dg(e)$ (Teorema 2.2 de la Sección 2.2.1). Por tanto, $(\mathfrak{g}; T_e l)$ es una biálgebra de Lie.

Recíprocamente, si $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es un 1-cociclo con respecto al representación adjunta de $\mathfrak{g}$ y G es el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe un 1-cociclo $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, con respecto a la representación adjunta de G, tal que $T_e l = \epsilon$. El 2-tensor Λ determinado por l satisface la propiedad de Drinfeld por ser l un 1-cociclo (Teorema 2.1 de 2.2.1) y es un 2-tensor de Poisson (es decir, el corchete de Schouten $[\Lambda\,; \Lambda] = 0$) si ϵ^t satisface la identidad de Jacobi (Teorema. 2.5 de la Sección 2.2.3). Por tanto, toda estructura de biálgebra de Lie sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ define, sobre el grupo simplemente conexo asociado, una estructura de grupo de Lie-Poisson, tal que la estructura de biálgebra de Lie que determina sobre $\mathfrak{g}$ coincide con la dada. El teorema se debe a Drinfeld [1983a] y ha sido demostrado por Lu y Weinstein [1990]. Guichardet [1995] ha dado otra demostración de este teorema probando que existe una biyección entre las estructuras de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ y las estructuras de biálgebra copoissoniana sobre el álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

Definiendo los *morfismos de grupo de Lie-Poisson* como aplicaciones $\varphi : (\mathfrak{g}_1; \Lambda_1) \longrightarrow (\mathfrak{g}_2; \Lambda_2)$ que son morfismos de grupo y morfismos de Poisson, y definiendo los *morfismos de biálgebra de Lie* como aplicaciones lineales $u : (\mathfrak{g}_1; \epsilon_1) \longrightarrow (\mathfrak{g}_2; \epsilon_2)$ tales que $u : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ y $u^t : \mathfrak{g}^*{}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}^*{}_1$ son morfismos de álgebra de Lie, se tiene que la aplicación tangente en el elemento unidad a un morfismo de grupos de Lie-Poisson es un morfismo de biálgebras de Lie (Proposición 2.6 de la Sección 2.2.2). De esta forma, queda descrita la equivalencia entre las categorías de los grupos de Lie-Poisson y las biálgebras de Lie.

La condición de 1-cociclo con respecto a la representación adjunta, de una aplicación $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ también se puede expresar como la existencia de una relación de compatibilidad (Proposición 2.5 de 2.2.2) entre el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ y la aplicación bilineal antisimétrica que define ϵ^t sobre $\mathfrak{g}^*$. En el caso en que $(\mathfrak{g};\epsilon)$ sea una biálgebra de Lie, esta condición de compatibilidad entre los corchetes de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ es equivalente a la existencia de una estructura de álgebra de Lie sobre el espacio vectorial $\mathfrak{k} \equiv \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$, que induce las de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ y deja invariante la forma bilineal, simétrica no degenerda sobre $\mathfrak{k}$, definida por $\langle (x;\psi);(y;\eta)\rangle_{\mathfrak{k}} = \langle x;\eta\rangle + \langle y;\psi\rangle$ (Proposición 2.7, Teorema 2.3 de 2.2.2). Este resultado de Drinfeld [1983a] pone de manifiesto una correspondencia biunivoca entre las nociones de biálgebra de Lie y *Triplete de Manin*.

Se denominan *biálgebras de Lie exactas* a aquellas definidas por un coborde $\epsilon = \tilde{\delta}\, r$, $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, en la cohomología de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En el estudio de las condiciones sobre un 2-tensor r, para que $(\mathfrak{g};\tilde{\delta}\, r)$ sea una biálgebra de Lie, desempeña un papel importante el 3-tensor (que denominaremos *corchete de Schouten invariante*)

$$[r\,;r] = [\Lambda_r^\lambda\,;\Lambda_r^\lambda](e) \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\,,$$

donde Λ_r^λ es el campo tensorial definido por traslación a la izquierda de r. Este 3-tensor existe y sólo depende de r, ya que, el corchete de Schouten de campos tensoriales invariantes por la izquierda (o por la derecha) sobre G es invariante por la izquierda (o por la derecha) (Proposición 3.2 de 2.3.1).

Sea $r = s + a$ la descomposición del 2-tensor $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ en sus partes simétrica y antisimétrica. La condición necesaria y suficiente para que $\tilde{\delta}\, r$ defina una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$ es que s y $[a\,;a]$ sean ad-invariantes (Teorema 3.1 de 2.3.2).

Se entiende por solución de la *ecuación clásica generalizada de Yang-Baxter*, todo tensor antisimétrico $r \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}_x[r\,;r] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Teniendo en cuenta la condición necesaria y suficiente del párrafo anterior, las soluciones de la ecuación generalizada de Yang-Baxter determinan un tipo de biálgebras de Lie exactas que se conocen con el nombre de *biálgebras de Lie cuasitriangulares*.

Las soluciones de la *ecuación clásica de Yang-Baxter* son los 2-tensores antisimétricos, $r \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, tales que $[r\,;r] = 0$. Por tanto, también definen un tipo de biálgebras de Lie exactas, contenido en el anterior, denominado *biálgebras de Lie triangulares*.

Las nociones de *álgebra de Lie doble* y de *biálgebra de Lie exacta* se pueden relacionar. Para ello es necesario que sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ exista una forma bilineal no-degenerada, $\tilde{\phi}$, que permita establecer un isomorfismo, ϕ, entre los espacios vectoriales $End(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$.

Si la forma $\tilde{\phi}$ es simétrica e invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ y el endomorfismo R es antisimétrico con respecto a $\tilde{\phi}$, el 2-tensor r correspondiente al homorfismo $(R+1)\circ\phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ define una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$ (Corolario de la Proposición 4.1 de la sección 2.4.1).

Recíprocamente, sea $(\mathfrak{g};[\,;];\tilde{\delta}\, r)$ una biálgebra de Lie exacta y $r = s + a$ la descomposición de r en su parte simétrica s y su parte antisimétrica a. Si s es invertible el endomorfismo $R = a\circ s^{-1}$ define una estructura de álgebra de Lie doble sobre $\mathfrak{g}$, donde s y a están considerados como homomorfismos de $\mathfrak{g}^*$ en $\mathfrak{g}$. (Corolario de la Proposición 4.1 en 2.4.1).

Supongamos ahora que, además de una forma bilineal simétrica, no-degenerada e invariante por la representación adjunta, se tiene sobre $\mathfrak{g}$ un endomorfismo R que es solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter. En este caso, el 2-tensor $r = (R+1)\circ\phi^{-1}$ satisface la igualdad

$$[r\,;r](\alpha;\beta) = -r\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) ,$$

siendo $[\alpha\,;\beta]^{\phi} = -2\phi[\phi^{-1}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)]$, es decir, el corchete de Lie que, sobre $\mathfrak{g}^*$, define $[\,;]$ por medio del isomorfismo ϕ asociado a la forma bilineal (Proposición 4.2 de 2.4.1).

Teniendo en cuenta este resultado, si sobre $\mathfrak{g}$ existe una forma bilineal no-degenerada, simétrica e invariante por la representación adjunta, las biálgebras de Lie exactas determinadas por álgebras de Lie dobles definidas por soluciones antisimétricas R de la ecuación modificada de Yang-Baxter, se pueden caracterizar de la siguiente forma. Son aquellas biálgebras de Lie $(\mathfrak{g};[\,;];\tilde{\delta}\,r)$ tales que la parte simétrica, s, de r es invertible e invariante por la representación adjunta y r satisface:

$$[r\,;r](\alpha;\beta) = -r\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) ,$$

(Proposición 4.3 de 2.4.1). A este tipo de biálgebras de Lie exactas las denominaremos biálgebras de Lie-Semenov y a las álgebras de Lie dobles asociadas a ellas, álgebras de Lie-Semenov (Kosmann [1987]; Aminou [1988]).

Una característica de las biálgebras de Lie-Semenov consiste en que, si $(\mathfrak{g};[\,;];\epsilon)$ es una biálgebra de Lie, al producto $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ se le puede dotar de una estructura de biálgebra de Lie-Semenov (Proposición 4.5 de 2.4.2). El corchete de Lie de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ es el mismo que hace de él un triplete de Manin:

$$[(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} = \left([x\,;y] + \mathrm{ad}^*_{\xi}\,y - \mathrm{ad}^*_{\eta}\,x; [\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{ad}^*_{y}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{y}\,\xi\right) .$$

Y el 2-tensor que define la estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ es:

$$m : (\xi;x) \in (\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)^* \longrightarrow (x;0) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^* .$$

Con esta estructura, la inyección canónica de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ es un morfismo de biálgebras de Lie y la de $\mathfrak{g}^*$ un antimorfismo (Proposición 4.7 de 2.4.2).

La estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$ definida (si existe una forma bilineal, simétrica, invariante y no-degenerada, ϕ) por un endomorfismo antisimétrico R, implica la existencia de un corchete de Lie-Poisson (determinado, por tanto, por R y ϕ) sobre el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$. Si, además, R es una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter, las soluciones de las ecuaciones del movimiento, con hamiltoniano función central de G, se pueden encontrar por el método de factorización (Teorema 5.2 de 2.5), de forma análoga a lo establecido para la estructura de Poisson asociada a R sobre $\mathfrak{g}^*$.

En efecto, lo mismo que en aquel caso, existen los subgrupos de Lie $G_\pm$ y $K_\pm$ correspondientes a las subálgebras $\mathfrak{g}_\pm = \mathrm{Im}(R\pm 1)$ y $\mathfrak{k}_\pm = \mathrm{Ker}(R\mp 1)$ de forma que todo elemento de G, en un entorno de la unidad, se puede factorizar de manera única $g = g_+\,g_-^{-1}$ donde $g_\pm \in G_\pm$. La solución con valor inicial c_0, de las ecuaciones del movimiento con hamiltoniano la función central h, es

$$c(t) = b_+ c_0 b_+^{-1}\,, \quad \text{o bién} \quad c(t) = b_- c_0 b_-^{-1}\,,$$

donde $b_+(t)$ y $b_-(t)$ satisfacen el problema de factorización

$$\exp\left(2t\varphi^{-1}\left((T_e\rho_{c_0})^*\,dh(c_0)\right)\right) = b_+(t)\,b_-(t)^{-1} .$$

En el caso de un grupo de matrices las ecuaciones hamiltonianas adquieren la forma de Lax (Corolario del Teorema 5.2. de 2.5).

2.1 Matriz-r Clásica y Ecuación Clásica Modificada de Yang-Baxter

Recordemos la notación utilizada. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, a los elementos de G se los denotará por $g, h, \ldots$, y a los de $\mathfrak{g}$ por $x, y \ldots$. Las aplicaciones $\lambda_g : G \longrightarrow G$ y $\rho_g : G \longrightarrow G$ son las traslaciones a la izquierda y a la derecha definidas por el elemento $g \in G$, es decir, los difeomorfismos siguientes:

$$\lambda_g : h \in G \longrightarrow gh \in G \quad \text{y} \quad \rho_g : h \in G \longrightarrow hg \in G .$$

Las aplicaciones $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow Gl(\mathfrak{g})$, definida por la relación:

$$\mathrm{Ad}(g) \equiv \mathrm{Ad}_g = \left(T\lambda_g(g^{-1})\right) \circ \left(T\rho_{g^{-1}}(e)\right) \; ; \qquad g \in G ,$$

y $\mathrm{Ad}^* : G \longrightarrow Gl(\mathfrak{g}^*)$, definda por:

$$\mathrm{Ad}^*(g) \equiv \mathrm{Ad}^*_g = \left(\mathrm{Ad}(g^{-1})\right)^t \; ; \qquad g \in G ,$$

son las acciones adjunta y coadjunta respectivamente del grupo de Lie G. Por último, las aplicaciones $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, definida por:

$$\mathrm{ad}(x) \cdot y \equiv \mathrm{ad}_x \, y = [x\,;y] , \qquad x, y \in \mathfrak{g} ,$$

y $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$, definida por:

$$\mathrm{ad}^*(x) \equiv \mathrm{ad}^*_x = -\left(\mathrm{ad}_x\right)^t \; ; \qquad x \in \mathfrak{g} ,$$

son las representaciones adjunta y coadjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

2.1.1 Algebras de Lie Dobles

Definición 1.1 (Semenov M. A. [1983]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $R \in End(\mathfrak{g})$ un endomorfismo. Consideremos la aplicación bilineal, antisimétrica:*

$$[x\,;y]_R = \frac{1}{2}\left([R\,x\,;y] + [x\,;R\,y]\right) \; ; \qquad x, y \in \mathfrak{g} . \tag{a}$$

Se dice que el par $(\mathfrak{g}; R)$ es un álgebra de Lie doble si $[\,;\,]_R$ es un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$, es decir, si satisface la identidad de Jacobi. En estas condiciones se dice que $R \in End(\mathfrak{g})$ es una matriz-r clásica.

Proposición 1.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $R \in End(\mathfrak{g})$ y*

$$B_R(x; y) = [R\,x\,;R\,y] - 2R\left([x\,;y]_R\right) . \tag{b}$$

Para que $[\,;\,]_R$ satisfaga la identidad de Jacobi, es decir, para que R sea una matriz-r clásica, es necesario y suficiente que se satisfaga la siguiente condición trilineal:

$$[B_R(x; y)\,; z] + [B_R(y; z)\,; x] + [B_R(z; x)\,; y] = 0 .$$

Prueba Hay que demostrar que la igualdad anterior es equivalente a la identidad de Jacobi relativa a $[\,;\,]_R$.

Por definición de $[\,;\,]_R$, se tiene:

$$[[x\,;y]_R\,;z]_R + \text{p.c.} = \frac{1}{2}\left[R\left([x\,;y]_R\right)\,;z\right] + \frac{1}{4}\left[[R\,x\,;y]\,;R\,z\right] + \frac{1}{4}\left[[x\,;R\,y]\,;R\,z\right] + \text{p.c.}\,,$$

donde la notación +p.c. significa suma en las permutaciones circulares de x, y, z. Utilizando la identidad de Jacobi del corchete $[\,;\,]$ en la igualdad anterior, se deduce:

$$[[x\,;y]_R\,;z]_R + \text{p.c.} = \frac{1}{2}\left[R\left([x\,;y]_R\right)\,;z\right] - \frac{1}{4}\left[[R\,x\,;R\,y]\,;z\right] + \text{p.c.}\,,$$

es decir:

$$[[x\,;y]_R\,;z]_R + \text{p.c.} = -\frac{1}{4}\left[B_R(x;y)\,;z\right] + \text{p.c.}\,,$$

que es lo que se quiere demostrar. ■

Sobre el espacio vectorial dual $\mathfrak{g}^*$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se tiene, además de la estructura de Poisson natural asociada al corchete de Lie $[\,;\,]$ (expresión (a) de la sección 1.2.1), una nueva estructura de Poisson asociada al corchete $[\,;\,]_R$. Esta estructura de Poisson viene dada por la expresión:

$$\{\varphi\,;\psi\}_R(\alpha) = \alpha\left([d\varphi(\alpha)\,;d\psi(\alpha)]_R\right)\,; \qquad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)\,; \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,, \tag{c}$$

donde, al tener en cuenta el isomorfismo canónico entre $(\mathfrak{g}^*)^*$ y $\mathfrak{g}$, se considera que $d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g}$ para toda función $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

La siguiente proposición nos dice que toda función de Casimir sobre $\mathfrak{g}^*$ con respecto al corchete de Poisson natural (expresión (a) de la sección 1.2.1) es una integral del movimiento de todo sistema dinámico con respecto al corchete de Poisson (c) definido por R y con hamiltoniano que es función de Casimir con respecto al corchete de Poisson natural.

Proposición 1.2 (Semenov M. A. [1983]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$ el anillo de las funciones de Casimir relativas al corchete de Poisson natural sobre $\mathfrak{g}^*$ y $R \in End(\mathfrak{g})$. Si $(\mathfrak{g}; R)$ es un álgebra de Lie doble entonces las funciones de $\mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$ están en involución con respecto a ambos corchetes de Poisson.*

Prueba

(1) Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$, entonces, por definición, para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, se tiene:

$$\{\varphi\,;\psi\}(\alpha) = 0\,.$$

(2) En las mismas condiciones:

$$\begin{aligned}\{\varphi\,;\psi\}_R(\alpha) &= \langle \alpha\,;[d\varphi(\alpha)\,;d\psi(\alpha)]_R\rangle = \left\langle \alpha\,;\frac{1}{2}\left([R\,d\varphi(\alpha)\,;d\psi(\alpha)] + [d\varphi(\alpha)\,;R\,d\psi(\alpha)]\right)\right\rangle = \\ &= \left\langle \mathrm{ad}^*(d\psi(\alpha))\cdot\alpha\,;R\,d\varphi(\alpha)\right\rangle - \left\langle \mathrm{ad}^*(d\varphi(\alpha))\cdot\alpha\,;R\,d\psi(\alpha)\right\rangle = 0\,,\end{aligned}$$

ya que, por ser φ una función de Casimir, $\mathrm{ad}^*(d\varphi(\alpha))\cdot\alpha = 0$ (expresión (c) de la sección 1.2.1) y lo mismo para la función ψ. ■

Teorema 1.1 (Semenov M. A. [1983]) *Sea* $(\mathfrak{g}; R)$ *un álgebra de Lie doble,* $\mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$ *el anillo de las funciones de Casimir relativas al corchete de Poisson natural sobre* $\mathfrak{g}^*$. *Las ecuaciones del movimiento correspondientes al hamiltoniano* $\varphi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$ *con respecto al corchete de Poisson* (c) *definido por* $[\,;\,]_R$ *son:*

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{ad}^*(M(\alpha)) \cdot \alpha \qquad \textit{siendo} \qquad M(\alpha) = \frac{1}{2} R\,(d\varphi(\alpha))\,. \tag{d}$$

Prueba Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, las ecuaciones del movimiento con respecto al corchete de Poisson (c) son (expresión (b) de la sección 1.2.1):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{ad}^*_R\,(d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha\,, \tag{e}$$

donde ad^*_R es la representación coadjunta con respecto al corchete de Lie definido por R. Si R^t es la aplicación transpuesta del endomorfismo R, de la definición (a) de $[\,;\,]_R$ se sigue que:

$$\operatorname{ad}^*_R\,(x) \cdot \alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ad}^*(Rx) \cdot \alpha + R^t(\operatorname{ad}^*(x) \cdot \alpha)\right)\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathfrak{g}\,.$$

Por tanto, en el caso de que $x = d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g}$, tenemos:

$$\operatorname{ad}^*_R\,(d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ad}^*(R\,d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha + R^t(\operatorname{ad}^*(d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha\right)\,.$$

Ahora bien, si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$, el último término es nulo y la expresión (e) se escribe finalmente así:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\operatorname{ad}^*(R\,d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha\,.$$

∎

Las ecuaciones del movimiento se pueden escribir de otras dos formas equivalentes.

Proposición 1.3 *Las ecuaciones del movimiento relativas al hamiltoniano* $\varphi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}^*)$, *con respecto al corchete de Poisson* (c) *definido por* $[\,;\,]_R$, *se pueden escribir de las dos formas siguientes:*

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{ad}^*(M_+(\alpha)) \cdot \alpha\,, \quad \textit{con} \quad M_+(\alpha) = \frac{1}{2}(R+1)d\varphi(\alpha)\,, \tag{f}$$

o bién:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\operatorname{ad}^*(M_-(\alpha)) \cdot \alpha\,, \quad \textit{con} \quad M_-(\alpha) = \frac{1}{2}(R-1)d\varphi(\alpha)\,. \tag{f'}$$

Prueba El siguiente cálculo revela que el segundo miembro de (d) es igual a los segundos miembros de (f) y (f'):

$$\begin{aligned} -\operatorname{ad}^*\left(\frac{1}{2}(R\pm 1)d\varphi(\alpha)\right) \cdot \alpha &= -\operatorname{ad}^*\left(\frac{1}{2}R\,d\varphi(\alpha)\right) \cdot \alpha \mp \operatorname{ad}^*\left(\frac{1}{2}d\varphi(\alpha)\right) \cdot \alpha = \\ &= -\operatorname{ad}^*\left(\frac{1}{2}R\,d\varphi(\alpha)\right) \cdot \alpha \mp \frac{1}{2}\operatorname{ad}^*(d\varphi(\alpha)) \cdot \alpha = -\operatorname{ad}^*\left(\frac{1}{2}R\,d\varphi(\alpha)\right) \cdot \alpha = \\ &= -\operatorname{ad}^* M(\alpha) \cdot \alpha\,, \end{aligned}$$

la penúltima igualdad debida al Lema 2.1 de la Sección 1.2.1. ∎

2.1.2 Endomorfismos $R = P_+ - P_-$

Si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G se descompone, como espacio vectorial, en suma de dos subálgebras de Lie $\mathfrak{g}_+$ y $\mathfrak{g}_-$ y $P_\pm$ son los operadores de proyección sobre $\mathfrak{g}_\pm$ paralelos a $\mathfrak{g}_\mp$ ($P_+ + P_- = I$), el endomorfismo

$$R = P_+ - P_-$$

es una matriz-r clásica, como se comprueba directamente a partir de la Proposición 1.1 de 2.1.1.

Con la notación $x_\pm = P_\pm x$, se tiene que $[x\,;y]_R = [x_+\,;y_+] - [x_-\,;y_-]$, por tanto se puede escribir $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}'_-$, siendo $\mathfrak{g}'_-$ la subálgebra $\mathfrak{g}_-$ con la operación opuesta, y donde la suma directa ahora se entiende en tanto que subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}_R$. Consecuentemente, si G_R es el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}_R$ y $G_\pm$ son los subgrupos conexos de G correspondientes a $\mathfrak{g}_\pm$, se tiene que G_R y $G_+ \times G'_-$ son localmente isomorfos en $e \in G$, donde G'_- es el grupo G_- con la operación opuesta.

Entonces, en un entorno de $e \in G_R$, se tiene:

$$\exp_R(x) = \exp_R(x_+ + x_-) = \left(\exp_+(x_+)\,;\exp_-(x_-)\right) .$$

Además, la aplicación $\mu : G_+ \times G'_- \longrightarrow G$ definida así: $\mu(g_+, g_-) = g_+ g_-$, es un difeomorfismo local en el punto $e \in G$, ya que $d\mu(e)$ es la identidad $\mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g}$. Esto permite afirmar que, en un entorno del elemento unidad del grupo G, todo elemento $g \in G$ admite una factorización única $g_+ g_-$ con $g_\pm \in G_\pm$.

Teorema 1.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}_+$ y $\mathfrak{g}_-$ subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ tales que, como espacio vectorial, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ y $P_\pm$ los operadores de proyección sobre $\mathfrak{g}_\pm$ paralelos al subespacio complementario. Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $G_\pm$ los subgrupos conexos correspondientes a $\mathfrak{g}_\pm$ respectivamente. Sea el endomorfismo $R = P_+ - P_-$. Si $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función de Casimir con respecto al corchete de Poisson natural sobre $\mathfrak{g}^*$, las ecuaciones del movimiento (expresión* (d) *de 2.1.1) relativas al hamiltoniano φ, con respecto al corchete de Poisson $\{\,;\}_R$, tienen por solución local con condición inicial $\alpha_0 \in \mathfrak{g}^*$ a la curva:*

$$\alpha(t) = \mathrm{Ad}^*\left(c_+(t)\right) \cdot \alpha_0 = \mathrm{Ad}^*\left(c_-(t)\right) \cdot \alpha_0 \,, \qquad \alpha_0 \in \mathfrak{g}^* \,,$$

siendo $c_\pm(t) \in G_\pm$ las soluciones de la familia de problemas de factorización local:

$$\exp(tx_0) = c_+(t)^{-1} c_-(t)\,; \qquad x_0 = d\varphi(\alpha_0) \in \mathfrak{g} \,.$$

La igualdad de las curvas $\alpha_+(t) = \mathrm{Ad}^*\left(c_+(t)\right) \cdot \alpha_0$ y $\alpha_-(t) = \mathrm{Ad}^*\left(c_-(t)\right) \cdot \alpha_0$ es consecuencia de la condición de función de Casimir de φ, con respecto al corchete de Poisson canónico de $\mathfrak{g}^*$.

En efecto, la factorización:

$$c_-(t) = c_+(t) \cdot \exp tx_0 = c_+(t) \exp t\, d\varphi(\alpha_0) \,,$$

implica:

$$\mathrm{Ad}^*(c_-(t)) \cdot \alpha_0 = \left(\mathrm{Ad}^*(c_+(t)) \circ \mathrm{Ad}^*(\exp t\, d\varphi(\alpha_0))\right) \cdot \alpha_0 \,.$$

Ahora bién:

$$\mathrm{Ad}^*(\exp t\, d\varphi(\alpha_0)) \cdot \alpha_0 = \alpha_0 \circ \exp\big(\mathrm{ad}(-t\, d\varphi(\alpha_0))\big) = \alpha_0\,,$$

ya que la última exponencial está definida sobre un grupo de matrices y la función φ satisface la igualdad (Lema 2.1 de la Sección 1.2.1):

$$0 = \mathrm{ad}^*(d\varphi(\alpha_0)) \cdot \alpha_0 = -\alpha_0 \circ \mathrm{ad}(d\varphi(\alpha_0))\,,$$

por ser una función de Casimir.

En la demostración del teorema se hace uso de los siguientes resultados.

Lema 1.1 *Sea $c : \mathbb{R} \longrightarrow G$ una curva C^∞ y $b : \mathbb{R} \longrightarrow G$ la curva sobre G definida por $b(t) = \big(c(t)\big)^{-1}$ entonces:*

$$\frac{db}{dt} = -T_e\rho_{c(t)^{-1}} \circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}} \frac{dc}{dt}\,.$$

Prueba En efecto, consideremos la composición:

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow \big(b(t)\,; c(t)\big) \in G \times G \xrightarrow{\pi} b(t) \cdot c(t) = e \in G\,. \tag{a}$$

Recordando que la aplicación tangente a π en un punto $(g; h) \in G \times G$ viene dada por (ver por ejemplo: Dieudonné [1970]):

$$T_{(g;h)}\pi(x_g; x_h) = T_h\lambda_g(x_h) + T_g\rho_h(x_g)\,,$$

al derivar con respecto a t la composición (a) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow T_{b(t)}G \times T_{c(t)}G \longrightarrow T_eG \equiv \mathfrak{g} \\ t &\longrightarrow \left(\frac{db}{dt}; \frac{dc}{dt}\right) \longrightarrow T_{b(t)}\rho_{c(t)}\frac{db}{dt} + T_{c(t)}\lambda_{b(t)}\frac{dc}{dt} = 0\,, \end{aligned}$$

por tanto:

$$T_{b(t)}\rho_{c(t)}\frac{db}{dt} = -T_{c(t)}\lambda_{b(t)}\frac{dc}{dt}\,,$$

es decir:

$$\frac{db}{dt} = -T_e\rho_{c(t)^{-1}} \circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\,.$$

■

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $L \in Gl(V)$. Todo elemento $A \in T_LGl(V)$ es de la forma

$$A = \frac{d}{dt}\varphi(t)\big|_{t=0}\,,$$

donde $\varphi(t) \in Gl(V)$ es un grupo local con la condición $\varphi(0) = L$. Se puede tomar $\varphi(t) = L \cdot \exp tX$ donde $X \in End(V)$, de forma que:

$$A = \frac{d}{dt}L \cdot \exp tX\big|_{t=0} = L \cdot X \in T_LGl(V)\,, \tag{b}$$

y por tanto, $T_LGl(V) = End(V)$.

Sea $y \in V$ un elemento cualquiera, la aplicación tangente en $L \in Gl(V)$ a

$$L \in Gl(V) \xrightarrow{T^y} L(y) \in V\,,$$

es:

$$A \in T_L Gl(V) \xrightarrow{T_L T^y} A(y) \in V\,, \tag{c}$$

ya que, teniendo en cuenta (b),

$$T_L T^y(A) = T_L T^y \left(\frac{d}{dt} L \cdot \exp tX \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} \left(L \cdot \exp tX(y) \right) \Big|_{t=0} = L \cdot X(y)\,.$$

Lema 1.2 *Sea G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La aplicación tangente en $g \in G$ a la acción adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$ viene dada por la expresión:*

$$\left(T_g \operatorname{Ad}\right)(x_g) = \operatorname{ad}\left(T_g \rho_{g^{-1}} \cdot x_g\right) \circ \operatorname{Ad}(g)\,, \quad \text{donde} \quad x_g \in T_g G\,,$$

habiendose identificado el espacio tangente $T_{\operatorname{Ad}(g)} Gl(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Prueba Sea $y \in \mathfrak{g}$, consideremos la composición:

$$h \in G \xrightarrow{\rho_g} hg \in G \xrightarrow{\operatorname{Ad}} \operatorname{Ad}(hg) \in Gl(\mathfrak{g}) \xrightarrow{T^y} \operatorname{Ad}(hg) \cdot y \in \mathfrak{g}\,,$$

derivando en $e \in G$ y teniendo en cuenta (c) tenemos:

$$x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \left(T_g \operatorname{Ad}\right) \left(T_e \rho_g \cdot x\right) \cdot y \in T_{\operatorname{Ad}(g) \cdot y} \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}\,,$$

Ahora bien, $\operatorname{Ad}(hg) \cdot y = \operatorname{Ad}(h)\left(\operatorname{Ad}(g) \cdot y\right)$, de forma que la aplicación considerada se puede escribir también:

$$h \in G \xrightarrow{\operatorname{Ad}} \operatorname{Ad}(h) \in Gl(\mathfrak{g}) \xrightarrow{T^{\operatorname{Ad}(g) \cdot y}} \operatorname{Ad}(h)\left(\operatorname{Ad}(g) \cdot y\right) \in \mathfrak{g}\,.$$

Al igualar las dos derivadas se obtiene:

$$T_g \operatorname{Ad}\left(T_e \rho_g x\right) \cdot y = \operatorname{ad}(x) \left(\operatorname{Ad}(g) \cdot y\right)\,.$$

Como cualquier vector tangente a G en $g \in G$ se puede escribir así: $x_g = T_e \rho_g \cdot x$, se tiene que $x = T_g \rho_{g^{-1}} \cdot x_g$, con lo que se obtiene el resultado. ∎

Lema 1.3 *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función Ad^*-invariante, entonces, si $\alpha \in \mathfrak{g}$,*

$$d\varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right) = \operatorname{Ad}(g) \cdot d\varphi(\alpha)\,.$$

Prueba Por ser φ una función Ad^*-invariante se tiene:

$$\varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right) = \varphi(\alpha)\,, \quad \text{para todo} \quad g \in G\,, \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,.$$

Consideremos la composición:

$$\psi : \alpha \in \mathfrak{g}^* \longrightarrow \operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha \in \mathfrak{g}^* \longrightarrow \varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right) \in \mathbb{R}\,,$$

con $g \in G$ fijo. Entonces, puesto que $d\left(\operatorname{Ad}^*(g)\right)(\alpha) = \operatorname{Ad}^*(g)$ para todo $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ (ya que $\operatorname{Ad}^*(g)$ es lineal), tenemos:

$$d\psi(\alpha) = d\varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right) \circ \operatorname{Ad}^*(g)\,.$$

Pero $d\psi(\alpha) = d\varphi(\alpha)$, así pues:

$$d\varphi(\alpha) = d\varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right) \circ \operatorname{Ad}^*(g)\,. \tag{d}$$

Por otro lado, realizando, como siempre, la identificación $\mathfrak{g}^{**} \equiv \mathfrak{g}$, se tiene:

$$\operatorname{Ad}(g)\left(d\varphi(\alpha)\right) = d\varphi(\alpha) \circ \operatorname{Ad}^*(g^{-1})\,, \tag{e}$$

donde se considera que $d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g}$ en el primer miembro y que $d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g}^{**}$ en el segundo. Entonces, sustituyendo la expresión (d) de $d\varphi(\alpha)$ en el segundo miembro de (e),

$$\operatorname{Ad}(g)\left(d\varphi(\alpha)\right) = d\varphi\left(\operatorname{Ad}^*(g) \cdot \alpha\right)\,,$$

quedando demostrada la igualdad. ∎

Prueba del Teorema 1.2

(1) Con $x_0 \in \mathfrak{g}$ fijado, sea la curva

$$x : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\big(c(t)\big)\cdot x_0 \in \mathfrak{g}\,,$$

donde $t \rightarrow c(t)$ es una curva $\mathcal{C}^\infty$ en G. Entonces, teniendo en cuenta la expresión de la aplicación tangente a la acción adjunta, obtenida en el Lema 1.2, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\big(T_{c(t)}\,\mathrm{Ad}\,\big)\left(\frac{dc}{dt}\right)\right)\cdot x_0 = \mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\cdot\frac{dc}{dt}\right)\cdot\big(\,\mathrm{Ad}\,\big(c(t)\big)\cdot x_0\big) = \\ &= \mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\cdot\frac{dc}{dt}\right)\cdot x(t)\,.\end{aligned}$$

(2) Sea la aplicación:

$$\mu : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Ad}^*\,\big(c(t)\big)\cdot \mu_0 \in \mathfrak{g}^*\,, \qquad \mu_0 \in \mathfrak{g}^*\,,$$

vamos a demostrar que se tiene la siguiente expresión de $\frac{d\mu}{dt}$:

$$\frac{d\mu}{dt} = \mathrm{ad}^*\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\cdot\mu(t)\,. \tag{f}$$

En efecto, por definición de acción coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}$, la aplicación μ se puede escribir así: $\mu(t) = \mu_0\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)$. Derivando con respecto a t, teniendo en cuenta el Lema 1.1 y el apartado (1) de esta demostración, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= \mu_0\circ\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big) = \mu_0\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)^{-1}}\rho_{c(t)}\frac{dc^{-1}}{dt}\right)\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big) = \\ &= -\mu_0\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)^{-1}}\rho_{c(t)}\circ T_e\rho_{c(t)^{-1}}\circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big) = \\ &= -\mu_0\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)\;.\end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\mathrm{Ad}(g)$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$, es decir,

$$\mathrm{Ad}(g)\circ\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}\,\big(\,\mathrm{Ad}(g)\cdot x\big)\circ\mathrm{Ad}(g)\,; \quad \text{para todo} \quad g\in G \quad x\in\mathfrak{g}\,,$$

se puede escribir:

$$\mathrm{ad}(x)\cdot\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(g)\cdot\big(\,\mathrm{Ad}(g^{-1})\cdot x\big)\;,$$

por lo que

$$\begin{aligned}&-\mu_0\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big) = \\ &\qquad = -\mu_0\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)\circ\mathrm{ad}\left(\,\mathrm{Ad}_{c(t)}\circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\,,\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= -\mu_0\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)\circ\mathrm{ad}\left(\,\mathrm{Ad}_{c(t)}\circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right) = \\ &= -\mu_0\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\circ T_e\lambda_{c(t)}\circ T_{c(t)}\lambda_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right) = \\ &= -\mu_0\circ\mathrm{Ad}\,\big(c(t)^{-1}\big)\circ\mathrm{ad}\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right) = \mathrm{ad}^*\left(T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}}\frac{dc}{dt}\right)\mu(t)\,,\end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la igualdad (f).

(3) Volviendo a las notaciones del enunciado, hay que comprobar que la derivada con respecto a t, obtenida en (f), de la curva:

$$\alpha(t) = \alpha_{\pm}(t) = \mathrm{Ad}^*\left(c_{\pm}(t)\right) \cdot \alpha_0\,, \tag{g}$$

coincide con:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*\left(M_+(\alpha(t))\right) \cdot \alpha(t)\,, \quad \text{o con} \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*\left(M_-(\alpha(t))\right) \cdot \alpha(t)\,,$$

donde $M_{\pm}(t) = \pm P_{\pm} d\varphi\left(\alpha(t)\right)$ (Proposición 1.3).

Teniendo en cuenta (f), es suficiente probar la relación:

$$-P_+ d\varphi\left(\alpha_{\pm}(t)\right) = T_{c_{\pm}(t)}\rho_{c_{\pm}(t)^{-1}} \frac{dc_{\pm}}{dt}\,, \tag{h}$$

o lo que es lo mismo,

$$P_- d\varphi\left(\alpha_{\pm}(t)\right) = T_{c_{\pm}(t)}\rho_{c_{\pm}(t)^{-1}} \frac{dc_{\pm}}{dt}\,. \tag{i}$$

Como φ es Ad^*-invariante (Sección 1.2.1), haciendo uso del Lema 1.3, tenemos:

$$\mathrm{Ad}\left(c_{\pm}(t)\right) \cdot d\varphi(\alpha_0) = d\varphi\left(\,\mathrm{Ad}^*\left(c_{\pm}(t)\right) \cdot \alpha_0\right)\,,$$

y entonces las igualdades (h) y (i) se pueden escribir así:

$$-P_+\left(\,\mathrm{Ad}\left(c_{\pm}(t)\right) \cdot d\varphi(\alpha_0)\right) = T_{c_{\pm}(t)}\rho_{c_{\pm}(t)^{-1}} \frac{dc_{\pm}}{dt}\,, \tag{j}$$

$$P_-\left(\,\mathrm{Ad}\left(c_{\pm}(t)\right) \cdot d\varphi(\alpha_0)\right) = T_{c_{\pm}(t)}\rho_{c_{\pm}(t)^{-1}} \frac{dc_{\pm}}{dt}\,. \tag{k}$$

Esto es lo que hay que probar.

En efecto, consideremos la composición:

$$\Psi : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \left(c_-(t); \exp(-tx_0)\right) \in G \times G \longrightarrow c_-(t) \cdot \exp(-tx_0) \equiv c_+(t) \in G\,.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}\exp(tx_0) = T_e\lambda_{\exp tx_0} \cdot x_0$ (ya que $t \longrightarrow \exp tx_0$ es la curva integral en el elemento identidad, del campo invariante por la izquierda definido por $x_0 \in \mathfrak{g}$), la derivada con respecto a t de Ψ es

$$\frac{dc_+}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} = T_{c_-(t)}\rho_{\exp(-tx_0)} \frac{dc_-}{dt} - T_{\exp(-tx_0)}\lambda_{c_-(t)} \circ T_e\lambda_{\exp(-tx_0)} \cdot x_0\,,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
&T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}} \frac{dc_+}{dt} = \\
&\quad = T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}} \circ T_{c_-(t)}\rho_{\exp(-tx_0)} \frac{dc_-}{dt} - T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}} \circ T_e\lambda_{c_+(t)} \cdot x_0 = \\
&\quad = T_{c_-(t)}\left(\rho_{c_+(t)^{-1}} \circ \rho_{\exp(-tx_0)}\right) \frac{dc_-}{dt} - \mathrm{Ad}\left(c_+(t)\right) \cdot x_0 = \\
&\quad = T_{c_-(t)}\rho_{\exp(-tx_0)\cdot c_+(t)^{-1}} \frac{dc_-}{dt} - \mathrm{Ad}\left(c_+(t)\right) \cdot x_0 = \\
&\quad = T_{c_-(t)}\rho_{\left(c_+(t)\cdot \exp tx_0\right)^{-1}} \frac{dc_-}{dt} - \mathrm{Ad}\left(c_+(t)\right) \cdot x_0 = \\
&\quad = T_{c_-(t)}\rho_{c_-(t)^{-1}} \frac{dc_-}{dt} - \mathrm{Ad}\left(c_+(t)\right) \cdot x_0\,,
\end{aligned}$$

obteniendose finalmente la igualdad:

$$\operatorname{Ad}\left(c_+(t)\right)\cdot x_0 = -T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}}\frac{dc_+}{dt} + T_{c_-(t)}\rho_{c_-(t)^{-1}}\frac{dc_-}{dt}\,. \tag{l}$$

Ahora bien, como $c_\pm : \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{G}_\pm$ se tiene que $c_\pm(t)^{-1} \in \boldsymbol{G}_\pm$ y por tanto $\rho_{c_\pm(t)^{-1}} : \boldsymbol{G}_\pm \longrightarrow \boldsymbol{G}_\pm$. Así pues $T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} : T_{c_\pm(t)}\boldsymbol{G}_\pm \longrightarrow T_e\boldsymbol{G}_\pm \equiv \mathfrak{g}_\pm$, esto implica que

$$T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}}\frac{dc_\pm}{dt} \in \mathfrak{g}_\pm\,,$$

por lo tanto, de la relación (l) obtenemos:

$$P_\pm\left(\operatorname{Ad}\left(c_+(t)\right)\cdot x_0\right) = \mp T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}}\frac{dc_\pm}{dt}\,. \tag{m}$$

Si se considera la composición:

$$\Phi : t \longrightarrow (c_+(t);\exp(tx_0)) \longrightarrow c_+(t)\cdot\exp(tx_0) \equiv c_-(t)\,,$$

al calcular la derivada con respecto a t de forma análoga a la precedente, se llega a la igualdad:

$$\operatorname{Ad}\left(c_-(t)\right)\cdot x_0 = -T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}}\frac{dc_+}{dt} + T_{c_-(t)}\rho_{c_-(t)^{-1}}\frac{dc_-}{dt}\,,$$

de donde obtenemos:

$$P_\pm\left(\operatorname{Ad}\left(c_-(t)\right)\cdot x_0\right) = \mp T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}}\frac{dc_\pm}{dt}\,. \tag{n}$$

Las relaciones (m) y (n) son las relaciones buscadas (j) y (k). ■

2.1.3 Ecuación Modificada de Yang-Baxter y Ecuaciones de Lax sobre $\mathfrak{g}^*$

Los endomorfismos $R = P_+ - P_- \in End(\mathfrak{g})$ son casos particulares de soluciones de la ecuación modificada de Yang-Baxter (Semenov [1985]), que es una condición suficiente de matriz-r clásica. Su importancia consiste en que a partir de una solución $R \in End(\mathfrak{g})$ se puede generalizar el método de factorización única de los elementos del grupo, en un entorno del elemento unidad, y de forma análoga a lo establecido en el Teorema 1.2, obtener soluciones de las ecuaciones del movimiento de sistemas dinámicos definidos por hamiltonianos que son funciones de Casimir con respecto al corchete de Poisson natural sobre $\mathfrak{g}^*$.

Proposición 1.4 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie y $R \in End(\mathfrak{g})$. Una condición suficiente para que R sea una matriz-r clásica es que sea solución de la ecuación:*

$$B_R(x;y) \equiv \left[Rx\,;Ry\right] - 2R\left([x\,;y]_R\right) = -[x\,;y]\,, \tag{a}$$

denominada ecuación modificada de Yang-Baxter.

Prueba Un cálculo directo revela que si R satisface (a) entonces satisface la condición necesaria y suficiente de matriz-r clásica de la Proposición 1.1. ■

Las tres proposiciones siguientes describen propiedades que se tendrán en cuenta para formular el teorema de factorización.

Proposición 1.5 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $R \in End(\mathfrak{g})$ una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter y*

$$R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm 1) \in End(\mathfrak{g}) .$$

Entonces $R_\pm : \mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g}$ son homomorfismos de álgebras de Lie.

Prueba Que R sea solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter implica que:

$$R\left([x\,;y]_R\right) = \frac{1}{2}\left([Rx\,;Ry] + [x\,;y]\right) ,$$

por tanto, teniendo en cuenta la expresión de $[\,;]_R$ (Definición 1.1 de 2.1.1), se tiene:

$$R_\pm\left([x\,;y]_R\right) = \frac{1}{2}(R \pm 1)\left([x\,;y]_R\right) = \frac{1}{4}\left([Rx\,;Ry] + [x\,;y] \pm [Rx\,;y] \pm [x\,;Ry]\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left([Rx\,;Ry \pm y] \pm [x\,;Ry \pm y]\right) = \frac{1}{4}\left([Rx \pm x\,;Ry \pm y]\right) = [R_\pm(x)\,;R_\pm(y)] ,$$

que es la condición de homomorfismos de álgebras de Lie. ■

Proposición 1.6 *En las condiciones de la proposición anterior, sean $\mathfrak{g}_\pm = \operatorname{Im} R_\pm$ y $\mathfrak{k}_\pm = \operatorname{Ker} R_\mp$. Entonces:*

(1) *$\mathfrak{g}_\pm \subset \mathfrak{g}$ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$.*

(2) *$\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ son ideales de $\mathfrak{g}_\pm$ respectivamente.*

Prueba

(1) La imagen por un homomorfismo de álgebras de Lie es una subálgebra del conjunto final.

(2) Sea $x' \in \mathfrak{k}_+$. Por definición, $R_- x' = 0$ o lo que es lo mismo $Rx' = x'$. Se tiene, por tanto,

$$R_+ x' = \frac{1}{2}(R+1)x' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x' = x' ,$$

por lo que $x' \in \operatorname{Im} R_+ \equiv \mathfrak{g}_+$, es decir, $\mathfrak{k}_+ \subset \mathfrak{g}_+$.

Sean, ahora, $x_+ \in \mathfrak{g}_+$ y $x' \in \mathfrak{k}_+$, entonces,

$$R_-\left([x_+\,;x']\right) = R_-\left([R_+ x\,;R_+ x']\right) = (R_- \circ R_+)\left([x\,;x']_R\right) .$$

Como $R_- \circ R_+ = R_+ \circ R_-$, sustituyendo en la igualdad anterior tenemos:

$$R_-\left([x_+\,;x']\right) = (R_+ \circ R_-)\left([x\,;x']_R\right) = R_+\left([R_- x\,;R_- x']\right) .$$

Pero $x' \in \mathfrak{k}_+$, es decir, $R_- x' = 0$, así pues:

$$R_-\left([x_+\,;x']\right) = R_+ 0 = 0 .$$

Esto significa que $[x_+\,;x'] \in \mathfrak{k}_+$, por lo que $\mathfrak{k}_+$ es un ideal de $\mathfrak{g}_+$.

Análogamente se tiene que $\mathfrak{k}_-$ es un ideal de $\mathfrak{g}_-$. ■

Como consecuencia de esta proposición, los espacios vectoriales cociente $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+$ y $\mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-$ tienen estructura de álgebra de Lie.

Proposición 1.7 *La aplicación:*

$$\theta_R : \overline{R_+ x} \in \mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+ \longrightarrow \overline{R_- x} \in \mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Prueba

(1) Está bien definida, pues si x_+ y x'_+ pertenecen a la misma clase de equivalencia $\overline{x_+}$, entonces $x'_+ - x_+ \in \mathfrak{k}_+$ y, por lo tanto, $R_-(x'_+ - x_+) = 0$, lo cual equivale a $R_+(x'_- - x_-) = 0$, es decir, $x'_- - x_- \in \mathfrak{k}_-$ y $x'_- \in \overline{x_-}$.

(2) Al ser R_+ un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene:

$$[\overline{x_+}\,;\overline{y_+}] = [x_+\,;y_+] + \mathfrak{k}_+ = R_+\left([x\,;y]_R\right) + \mathfrak{k}_+\,,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\theta_R\,[\overline{x_+}\,;\overline{y_+}] &= R_-[x\,;y]_R + \mathfrak{k}_- = \\ &= [x_-\,;y_-] + \mathfrak{k}_- = [\overline{x_-}\,;\overline{y_-}] = [\theta_R\overline{x_+}\,;\theta_R\overline{y_+}]\,.\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrado que θ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

(3) Es claramente un homomorfismo suprayectivo.

La condición de inyectivo es también directa:

$$\overline{R_- x} = \overline{R_- x'} \Longleftrightarrow 0 = R_+\big(R_-(x - x')\big) = R_-\big(R_+(x - x')\big) \Longleftrightarrow \overline{R_+ x} = \overline{R_+ x'}\,.$$

■

Teorema 1.3 (Semenov M. A. [1983]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $R \in End(\mathfrak{g})$ un endomorfismo que satisface la ecuación modificada de Yang-Baxter. Sean $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm 1)$ y $\mathfrak{g}_\pm = \operatorname{Im} R_\pm$ y consideremos la aplicación:*

$$i_R \equiv \big(R_+; R_-\big) : \mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}\,,$$

entonces:

(1)

$$\operatorname{Im} i_R = \{(x; y) \in \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_- \,/\, \theta_R\overline{x} = \overline{y}\}\,.$$

(2) *La aplicación $i_R : \mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_-$ es un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie. Por tanto, un isomorfismo entre $\mathfrak{g}_R$ y una subálgebra de $\mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_-$.*

(3) *Todo elemento $x \in \mathfrak{g}$ admite una descomposición única $x = x_+ - x_-$ con $(x_+; x_-) \in \operatorname{Im} i_R$.*

Prueba

(1) La inclusión:

$$\operatorname{Im} i_R \subset \{(x; y) \in \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_- \,/\, \theta_R\overline{x} = \overline{y}\}$$

es directa. En efecto, si $(x; y) \in \operatorname{Im} i_R$ se tiene que $x = R_+ z$ y $y = R_- z$ con $z \in \mathfrak{g}$, por lo que $(x; y) \in \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_-$ y $\theta_R\overline{x} = \overline{y}$.

Para demostrar que

$$\{(x;y)\in \mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_- \,/\, \theta_R\overline{x}=\overline{y}\}\subset \operatorname{Im} i_R\,,$$

hay que comprobar que si $(x;y)\in\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-$ tal que $\theta_R\overline{x}=\overline{y}$, existe $v\in\mathfrak{g}$ de forma que $x=R_+(v)$ e $y=R_-(v)$.

Por hipotesis, $x=R_+z$ e $y=R_-z'$, donde $z,z'\in\mathfrak{g}$ y $R_-z\in\overline{R_-z'}$. Entonces, $R_-z-R_-z'\in\mathfrak{k}_-$, es decir, $R_+\left(R_-z-R_-z'\right)=0$. De aquí se deduce:

$$(R+1)(R\,z-z-R\,z'+z')=R\,R\,z-R\,R\,z'-z+z'=0\,.$$

Ahora bien, si existe $v\in\mathfrak{g}$ tal que $x=R_+v$ e $y=R_-v$ debe verificarse:

$$x=R_+z=R_+v\equiv v_+\,;\qquad y=R_-z'=R_-v\equiv v_-\,,$$

es decir,

$$R\,z+z=R\,v+v\,;\qquad R\,z'-z'=R\,v-v\,,$$

por lo tanto v y Rv vendrían dados por:

$$v=\frac{1}{2}(R\,z+z-R\,z'+z')\,;\qquad R\,v=\frac{1}{2}\left(R\,z+z+R\,z'-z'\right)\,,$$

y debería tenerse:

$$R(R\,z+z-R\,z'+z')=R\,z+z+R\,z'-z'\,,$$

es decir:

$$R\,R\,z-R\,R\,z'-z+z'=0\,,$$

que es la condición, obtenida anteriormente, para que $R_-z\in\overline{R_-z'}$.

(2) Hay que demostrar que

$$i_R\left([x\,;y]_R\right)=\left[i_Rx\,;i_Ry\right]\,,\quad \text{para todo}\quad x,y\in\mathfrak{g}_R\,,$$

es decir,

$$\left(R_+\left([x\,;y]_R\right);R_-\left([x\,;y]_R\right)\right)=\left[\left(R_+x;R_-x\right);\left(R_+y;R_-y\right)\right]\,.$$

Ahora bien, $R_\pm:\mathfrak{g}_R\longrightarrow\mathfrak{g}$ son homomorfismos de álgebras de Lie (Proposición 1.5), por tanto

$$\left(R_+\left([x\,;y]_R\right);R_-\left([x\,;y]_R\right)\right)=\left(\left[R_+x\,;R_+y\right];\left[R_-x\,;R_-y\right]\right)\,,$$

que es, por definición, el corchete de $\left(R_+x;R_-x\right)$ y $\left(R_+y;R_-y\right)$ en $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

El homomorfismo es inyectivo, pues si $i_Rx=i_Ry$ tenemos que $\left(R_+x;R_-x\right)=\left(R_+y;R_-y\right)$ lo cual implica que $x=y$.

(3) La descomposición de $x\in\mathfrak{g}$ existe ya que:

$$x_+-x_-\equiv R_+x-R_-x=\frac{1}{2}(R+1)x-\frac{1}{2}(R-1)x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x=x\,,$$

es decir, $R_+-R_-=1$. Es única, pues, si $x=x_+-x_-=u-v$ con $(u;v)\in\operatorname{Im}i_R$, por definición de $\operatorname{Im}i_R$, existiría un $x'\in\mathfrak{g}$ tal que $u=x'_+$ y $v=x'_-$ con lo que:

$$x=x_+-x_-=x'_+-x'_-=x'\,,$$

de tal forma que $x_+=x'_+$ y $x_-=x'_-$. ∎

Sean G y G_R los grupos simplemente conexos de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_R$. A los homomorfismos de álgebras de Lie $R_\pm : \mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g}$ les corresponden homomorfismos de grupos de Lie: $\widehat{R}_\pm : G_R \longrightarrow G$ y las imagenes $G_\pm \equiv \operatorname{Im}\widehat{R}_\pm$ son los subgrupos de Lie conexos de G de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\pm$.

Teniendo en cuenta el Teorema 1.3, la aplicación:

$$G_R \xrightarrow{(\widehat{R}_+;\widehat{R}_-)} G_+ \times G_-$$

es un homomorfismo local en un entorno de $e \in G_R$, inyectivo, de grupos de Lie.

Sea $\pi : G \times G \longrightarrow G$ la aplicación definida por $(g;h) \longrightarrow gh^{-1}$. La composición

$$\pi \circ \left(\widehat{R}_+;\widehat{R}_-\right) : G_R \longrightarrow G\,,$$

es un difeomorfismo local en $e \in G_R$, ya que $T_e\left(\pi \circ (\widehat{R}_+;\widehat{R}_-)\right) : \mathfrak{g}_R \longrightarrow \mathfrak{g}$, es el isomorfismo de espacios vectoriales: $x \in \mathfrak{g}_R \longrightarrow x_+ - x_- \in \mathfrak{g}$, donde $(x_+;x_-) \in \operatorname{Im} i_R$. Por lo tanto, un elemento $g \in G$ arbitrario, suficientemente próximo al elemento unidad $e \in G$, admite una factorzación única:

$$g = g_+ g_-^{-1}\,; \qquad (g_+;g_-) \in \operatorname{Im}\left(\widehat{R}_+;\widehat{R}_-\right)\,.$$

De acuerdo con estos resultados, se puede enunciar el siguiente teorema, generalización del Teorema 1.2 de la Sección 2.1.2.

Teorema 1.4 (Semenov M. A. [1983]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $R \in End(\mathfrak{g})$ un endomorfismo que satisface la ecuación modificada de Yang-Baxter* (a). *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función de Casimir, con respecto al corchete de Poisson natural. La solución que pasa por $\alpha_0 \in \mathfrak{g}^*$, de las ecuaciones del movimiento (expresión* (d) *de 2.1.1) con hamiltoniano φ, relativas al corchete de Poisson definido por R, es:*

$$\alpha(t) = \mathrm{Ad}^*\,(c_+(t)) \cdot \alpha_0 = \mathrm{Ad}^*\,(c_-(t)) \cdot \alpha_0\,,$$

donde c_+ y c_- son las soluciones del problema de factorización:

$$\exp(tx_0) = c_+^{-1}(t) \cdot c_-(t)\,; \quad c_\pm \in G_\pm\,; \quad x_0 = d\varphi(\alpha_0) \in \mathfrak{g}\,.$$

Esta factorización existe para t en un entorno de 0.

Recordemos que la igualdad $\mathrm{Ad}^*\,(c_+(t)) \cdot \alpha_0 = \mathrm{Ad}^*\,(c_-(t)) \cdot \alpha_0$ es consecuencia de la condición de función de Casimir de φ (ver Teorema 1.2 de 2.1.2).

Prueba La demostración es análoga a la del Teorema 1.2 de 2.1.2. La Proposición 1.3 de 2.1.1 nos dice que las ecuaciones del movimiento (d):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*(M(\alpha)) \cdot \alpha\,, \qquad M(\alpha) = \frac{1}{2} R\,(d\varphi(\alpha))\,,$$

se pueden escribir de la forma (f):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*\,(M_\pm(t)) \cdot \alpha(t)\,, \quad \text{donde} \quad M_\pm(t) = \frac{1}{2}(R \pm 1) \cdot d\varphi\,(\alpha(t))\,. \qquad \text{(b)}$$

En el apartado (2) de la prueba del Teorema 1.2 de 2.1.2 tenemos la derivada con respecto t de la curva $\alpha(t)$ del enunciado:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{ad}^* \left(T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \frac{dc_\pm}{dt} \right) \cdot \alpha(t) . \tag{c}$$

Hay que comprobar que (b) y (c) coienciden.

Por ser φ Ad^*-invariante, es suficiente probar que (ver Lema 1.3):

$$\frac{1}{2}(R+1)\ \mathrm{Ad}\,(c_\pm(t)) \cdot d\varphi(\alpha_0) = -T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \frac{dc_\pm}{dt} .$$

En la demostración del Teorema 1.2 de 2.1.2, a partir de la factorización $\exp(tx_0) = c_+(t)^{-1} \cdot c_-(t)$, se obtuvo la igualdad (expresión (l) de 2.1.2):

$$\mathrm{Ad}\,(c_+(t)) \cdot x_0 = T_{c_-(t)}\rho_{c_-(t)^{-1}} \frac{dc_-}{dt} - T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}} \frac{dc_+}{dt} . \tag{d}$$

Análogamente, para $\mathrm{Ad}^*\,(c_-(t)) \cdot x_0$. Ahora bien, sea $c(t)$ el elemento de $\boldsymbol{G}$ tal que $\widehat{R}_\pm c(t) = c_\pm(t)$, entonces:

$$\left(T_{c_+(t)}\rho_{c_+(t)^{-1}} \frac{dc_+}{dt} ; T_{c_-(t)}\rho_{c_-(t)^{-1}} \frac{dc_-}{dt} \right) \in \mathrm{Im}\, i_R ,$$

ya que, por ser $\widehat{R}_\pm$ homomorfismos de grupos, $\rho_{\widehat{R}_\pm h} \circ \widehat{R}_\pm = \widehat{R}_\pm \circ \rho_h$, con lo que:

$$\begin{aligned} T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \frac{dc_\pm}{dt} &= T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \circ T_{c(t)}\widehat{R}_\pm \left(\frac{dc}{dt} \right) = \\ &= T_{c(t)} \left(\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \circ \widehat{R}_\pm \right) \frac{dc}{dt} = T_{c(t)} \left(\rho_{\widehat{R}_\pm(c(t)^{-1})} \circ \widehat{R}_\pm \right) \frac{dc}{dt} = \\ &= T_{c(t)} \left(\widehat{R}_\pm \circ \rho_{c(t)^{-1}} \right) \frac{dc}{dt} = T_e\widehat{R}_\pm \circ T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}} \frac{dc}{dt} = \\ &= R_\pm \circ T_{c(t)}\rho_{c(t)^{-1}} \frac{dc}{dt} . \end{aligned}$$

Pero la descomposición (d) es única, así pues:

$$R_\pm \left(\mathrm{Ad}(c_\pm(t)) \cdot x_0 \right) = -T_{c_\pm(t)}\rho_{c_\pm(t)^{-1}} \frac{dc_\pm}{dt} ,$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

Si, sobre $\mathfrak{g}$, existe una forma bilineal, invariante, no degenerada (que define un isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$), las ecuaciones del movimiento tienen la forma de Lax.

Proposición 1.8 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\phi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, invariante, no degenerada sobre $\mathfrak{g}$. Si R es una matriz-r clásica sobre $\mathfrak{g}$, entonces las ecuaciones del movimiento sobre $\mathfrak{g}^*$, con respecto al corchete de Poisson definido por R, relativas a un hamiltoniano de Casimir $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ (con respecto al corchete de Poisson natural), se escriben sobre $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma:*

$$\frac{dx}{dt} = [x\,; M(\alpha)] ; \qquad M(\alpha) = \frac{1}{2} R\, d\varphi(\alpha) \in \mathfrak{g} ,$$

donde $\alpha = \phi^{-1}(x) \in \mathfrak{g}^*$ y $x \in \mathfrak{g}$.

Prueba En efecto, las ecuaciones del movimiento son (expresión (d) de 2.1.1):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\mathrm{ad}^*_R\left(d\varphi(\alpha)\right)(\alpha) = -\,\mathrm{ad}^*\left(M(\alpha)\right)\cdot\alpha\,.$$

Ahora bien, si $\phi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ es el isomorfismo asociado a la forma bilineal invariante, se tiene:

$$\mathrm{ad}_x \circ \phi = \phi \circ \mathrm{ad}^*_x\,, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}\,,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi\left(-\,\mathrm{ad}^*\left(M(\alpha)\right)\cdot\alpha\right) &= -\left(\phi\circ\mathrm{ad}^*\left(M(\alpha)\right)\right)(\alpha) = \\ &= -\left(\mathrm{ad}\left(M(\alpha)\circ\phi\right)\right)(\alpha) = -\,\mathrm{ad}\left(M(\alpha)\right)\cdot\phi(\alpha)\,,\end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{d\phi(\alpha)}{dt} = -\,\mathrm{ad}\left(M(\alpha)\right)\cdot\phi(\alpha) = \left[\phi(\alpha)\,;M(\alpha)\right].$$

■

2.2 Grupos de Lie-Poisson y Biálgebras de Lie

2.2.1 Grupos de Lie-Poisson

Definición 2.1 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Un grupo de Lie-Poisson es un grupo de Lie G dotado de una estructura de Poisson tal que la operación de grupo: $\pi : (g,h) \in G\times G \longrightarrow \pi(g,h) = gh \in G$, es un morfismo de Poisson de la variedad de Poisson producto $(G \times G; \{\,;\}_{G\times G})$ en la variedad de Poisson $(G; \{\,;\}_G)$. Es decir, si $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(G)$, se tiene:*

$$\{\varphi_1\,;\varphi_2\}_G \circ \pi = \{\varphi_1\circ\pi\,;\varphi_2\circ\pi\}_{G\times G}\,.$$

Teniendo en cuenta la expresión del corchete de Poisson de la variedad producto (Sección 1.2.1), la condición que debe satisfacer $\{\,;\}_G$ para que $(G;\Lambda)$ sea un grupo de Lie-Poisson se puede escribir así:

$$\begin{aligned}\{\varphi_1\,;\varphi_2\}_G\,(g\,h) &= \{(\varphi_1\circ\pi)^g_1\,;(\varphi_2\circ\pi)^g_1\}_G\,(h) + \left\{(\varphi_1\circ\pi)^h_2\,;(\varphi_2\circ\pi)^h_2\right\}_G(g) \equiv \\ &\equiv \{\varphi_1\circ\lambda_g\,;\varphi_2\circ\lambda_g\}_G\,(h) + \{\varphi_1\circ\rho_h\,;\varphi_2\circ\rho_h\}_G\,(g)\,,\end{aligned}$$

donde $(\varphi_i\circ\pi)^g_1$ es la función sobre G definida por $(\varphi_i\circ\pi)^g_1(h) = (\varphi_i\circ\pi)(g;h)$ y $(\varphi_i\circ\pi)^h_2$ la función sobre G definida por $(\varphi_i\circ\pi)^h_2(g) = (\varphi_i\circ\pi)(g;h)$ (ver Sección 1.2.1).

Definición 2.2 *Sean $(G_1; \{\,;\}_{G_1})$ y $(G_2; \{\,;\}_{G_2})$ dos grupos de Lie-Poisson y $\Phi : G_1 \longrightarrow G_2$ una aplicación C^∞. Se dice que Φ es un morfismo de grupos de Lie-Poisson de $(G_1; \{\,;\}_{G_1})$ en $(G_2; \{\,;\}_{G_2})$ si $\Phi : G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos y si $\Phi : (G_1; \{\,;\}_{G_1}) \longrightarrow (G_2; \{\,;\}_{G_2})$ es un morfismo de Poisson.*

Proposición 2.1 *Sean $(G; \{\,;\}_G)$ y $(H; \{\,;\}_H)$ dos grupos de Lie-Poisson. El producto $(G\times H; \{\,;\}_{G\times H})$ es un grupo de Lie-Poisson.*

Prueba Hay que probar que, si $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}\times \boldsymbol{H})$ y Π es la multiplicación en $\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}$:

$$\Pi\left((g_1;h_1)\,;(g_2;h_2)\right) = (g_1g_2;h_1h_2)\,,$$

para todo $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$ y para todo $h_1, h_2 \in \boldsymbol{H}$ se tiene:

$$\{F_1\,;F_2\}_{G\times H}(g_1g_2;h_1h_2) = \{F_1\circ\Pi\,;F_2\circ\Pi\}_{(G\times H)\times(G\times H)}\left((g_1;h_1);(g_2;h_2)\right)\,.$$

Con los mismos criterios de notación, es decir, $(F_i)_1^g(h) = F_i(g;h)$ y $(F_i)_2^h(g) = F(g;h)$, el corchete de Poisson de la variedad producto $(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})$ (ver Sección 1.2.1) se escribe así:

$$\begin{aligned}&\{F_1\,;F_2\}_{G\times H}(g_1g_2;h_1h_2) =\\ &\qquad= \{(F_1)_1^{g_1g_2}\,;(F_2)_1^{g_1g_2}\}_H(h_1h_2) + \{(F_1)_2^{h_1h_2}\,;(F_2)_2^{h_1h_2}\}_G(g_1g_2)\,,\end{aligned}$$

y como $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H}$ son grupos de Lie-Poisson, para todo $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$, $h_1, h_2 \in \boldsymbol{H}$,

$$\begin{aligned}&\{F_1\,;F_2\}_{G\times H}(g_1g_2;h_1h_2) =\\ &\quad= \{(F_1)_1^{g_1g_2}\circ\lambda_{h_1}\,;(F_2)_1^{g_1g_2}\circ\lambda_{h_1}\}_H(h_2) + \{(F_1)_1^{g_1g_2}\circ\rho_{h_2}\,;(F_2)_1^{g_1g_2}\circ\rho_{h_2}\}_H(h_1) +\\ &\quad+ \{(F_1)_2^{h_1h_2}\circ\lambda_{g_1}\,;(F_2)_2^{h_1h_2}\circ\lambda_{g_1}\}_G(g_2) + \{(F_1)_2^{h_1h_2}\circ\rho_{g_2}\,;(F_2)_2^{h_1h_2}\circ\rho_{g_2}\}_G(g_1)\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición del corchete de Poisson de la variedad $(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})\times(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H})$ obtenemos:

$$\begin{aligned}&\{F_1\circ\Pi\,;F_2\circ\Pi\}_{(G\times H)\times(G\times H)}\left((g_1;h_1);(g_2;h_2)\right) =\\ &\quad= \left\{(F_1\circ\Pi)_1^{(g_1;h_1)}\,;(F_2\circ\Pi)_1^{(g_1;h_1)}\right\}_{G\times H}(g_2;h_2) +\\ &\qquad\qquad+ \left\{(F_1\circ\Pi)_2^{(g_2;h_2)}\,;(F_2\circ\Pi)_2^{(g_2;h_2)}\right\}_{G\times H}(g_1;h_1)\,.\end{aligned}$$

Con $i,j = 1,2$

$$(F_i\circ\Pi)_1^{(g_j;h_j)} = F_i\circ(\lambda_{g_j}\times\lambda_{h_j}) \quad\text{y}\quad (F_i\circ\Pi)_2^{(g_j;h_j)} = F_1\circ(\rho_{g_j}\times\rho_{h_j})\,,$$

por tanto,

$$\begin{aligned}&\{F_1\circ\Pi\,;F_2\circ\Pi\}_{(G\times H)\times(G\times H)}\left((g_1;h_1);(g_2;h_2)\right) =\\ &\quad= \{F_1\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\,;F_2\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\}_{G\times H}(g_2;h_2) +\\ &\qquad\qquad+ \{F_1\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\,;F_2\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\}_{G\times H}(g_1;h_1)\,.\end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión se tiene:

$$\begin{aligned}&\{F_1\circ\Pi\,;F_2\circ\Pi\}_{(G\times H)\times(G\times H)}\left((g_1;h_1);(g_2;h_2)\right) =\\ &\quad= \left\{\left(F_1\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_1^{g_2}\,;\left(F_2\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_1^{g_2}\right\}_H(h_2) +\\ &\qquad+ \left\{\left(F_1\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_2^{h_2}\,;\left(F_2\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_2^{h_2}\right\}_G(g_2) +\\ &\qquad+ \left\{\left(F_1\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_1^{g_1}\,;\left(F_2\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_1^{g_1}\right\}_H(h_1) +\\ &\qquad+ \left\{\left(F_1\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_2^{h_1}\,;\left(F_2\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_2^{h_1}\right\}_G(g_1)\,.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\left(F_i\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_1^{g_2} &= (F_i)_1^{g_1g_2}\circ\lambda_{h_1}\,; &\quad \left(F_i\circ(\lambda_{g_1}\times\lambda_{h_1})\right)_2^{h_2} &= (F_i)_2^{h_1h_2}\circ\lambda_{g_1}\\ \left(F_i\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_1^{g_1} &= (F_i)_1^{g_1g_2}\circ\rho_{h_2}\,; &\quad \left(F_i\circ(\rho_{g_2}\times\rho_{h_2})\right)_2^{h_1} &= (F_i)_2^{h_1h_2}\circ\rho_{g_2}\,,\end{aligned}$$

por lo tanto, queda demostrada la proposición. ∎

Teorema 2.1 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Sea $(\boldsymbol{G};\Lambda)$ una variedad de Poisson, donde $\boldsymbol{G}$ es un grupo de Lie. Sea $l:\boldsymbol{G}\longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ la aplicación definida por:*

$$l(g)=(T_g\rho_{g^{-1}})^{\otimes 2}\Lambda(g)\,, \tag{a}$$

y $m:\boldsymbol{G}\longrightarrow \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ la aplicación definida por:

$$m(g)=(T_g\lambda_{g^{-1}})^{\otimes 2}\Lambda(g)\,.$$

Entonces $(\boldsymbol{G};\Lambda)$ es un grupo de Lie-Poisson si y sólo si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones:

(1) *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\Lambda(gh)=(T_h\lambda_g)^{\otimes 2}\left(\Lambda(h)\right)+(T_g\rho_h)^{\otimes 2}\left(\Lambda(g)\right)\,,\quad \text{para todo } g,h\in\boldsymbol{G}\,, \tag{b}$$

denominada propiedad de Drinfeld del 2-tensor Λ.

(2) *La aplicación l es un 1-cociclo de $\boldsymbol{G}$ con valores en $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ con respecto a la acción adjunta de $\boldsymbol{G}$, es decir, se satisface (ver Sección 1.1.2, pag 13):*

$$l(gh)=l(g)+\mathrm{Ad}(g)^{\otimes 2}l(h)\,,\quad \text{para todo } g,h\in\boldsymbol{G}\,. \tag{c}$$

(3) *La aplicación m satisface:*

$$m(gh)=m(h)+\mathrm{Ad}(h^{-1})^{\otimes 2}m(g)\,,\quad \text{para todo } g,h\in\boldsymbol{G}\,.$$

Prueba

(1) Por definición de grupo de Lie-Poisson, para todo par de elementos $g,h\in\boldsymbol{G}$ y todo par de funciones $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$, se tiene

$$\{\varphi_1\,;\varphi_2\}_G(gh)=\{\varphi_1\circ\lambda_g\,;\varphi_2\circ\lambda_g\}_G(h)+\{\varphi_1\circ\rho_h\,;\varphi_2\circ\rho_h\}_G(g)\,.$$

Si Λ es el 2-tensor de Poisson de $\boldsymbol{G}$, la fórmula anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}&\Lambda_{gh}\left(d\varphi_1(gh);d\varphi_2(gh)\right)=\\&\qquad=\Lambda_h\left(d(\varphi_1\circ\lambda_g)(h);d(\varphi_2\circ\lambda_g)(h)\right)+\Lambda_g\left((d(\varphi_1\circ\rho_h)(g);d(\varphi_2\circ\rho_h)(g)\right)\,.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}&\Lambda_h\left(d(\varphi_1\circ\lambda_g)(h)\,;d(\varphi_2\circ\lambda_g)(h)\right)=\\&=\Lambda_h\left(d\varphi_1(gh)\circ T_h\lambda_g;d\varphi_2(gh)\circ T_h\lambda_g\right)=\left((T_h\lambda_g\otimes T_h\lambda_g)(\Lambda_h)\right)\left(d\varphi_1(gh);d\varphi_2(gh)\right)\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}&\Lambda_g(d(\varphi_1\circ\rho_h)(g);d(\varphi_2\circ\rho_h)(g))=\\&=\Lambda_g\left(d\varphi_1(gh)\circ T_g\rho_h;d\varphi_2(gh)\circ T_g\rho_h\right)=\left((T_g\rho_h\otimes T_g\rho_h)(\Lambda_g)\right)\left(d\varphi_1(gh);d\varphi_2(gh)\right)\,,\end{aligned}$$

de donde se obtiene la expresión (b). Y recíprocamente.

(2) Por definición de la aplicación l, se tiene:

$$l(gh)=(T_{gh}\rho_{(gh)^{-1}}\otimes T_{gh}\rho_{(gh)^{-1}})(\Lambda_{gh})\,.$$

Como Λ satisface la propiedad de Drinfeld (igualdad (b)) la expresión anterior se puede escribir así:

$$l(gh) = \left(T_{gh}\rho_{(gh)^{-1}} \otimes T_{gh}\rho_{(gh)^{-1}}\right) \left((T_h\lambda_g \otimes T_h\lambda_g)(\Lambda_h) + \left(T_g\rho_h \otimes T_g\rho_h\right)(\Lambda_g)\right).$$

Teniendo en cuenta que $\rho_{gh} = \rho_h \circ \rho_g$ y que las traslaciones a la derecha conmutan con las traslaciones a la izquierda,

$$l(gh) = \left(T_e\left(\rho_{g^{-1}} \circ \lambda_g\right) \otimes T_e\left(\rho_{g^{-1}} \circ \lambda_g\right)\right)\left(T_h\rho_{h^{-1}} \otimes T_h\rho_{h^{-1}}\right)(\Lambda_h) + \\ + \left(T_g\rho_{g^{-1}} \otimes T_g\rho_{g^{-1}}\right)(\Lambda_g),$$

es decir,

$$l(gh) = \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes 2} l(h) + l(g),$$

que es la condición de 1-cociclo de G con respecto a la acción adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. La recíproca es inmediata.

(3) Similar al caso anterior. ∎

Corolario *Como consecuencia de la igualdad* (c) *se tiene que* $\Lambda(e) = 0$. *Por tanto, si* $(G; \Lambda)$ *es un grupo de Lie-Poisson, el 1-cociclo* l *definido en* (a) *satisface la condición:* $l(e) = 0$.

Observación El hecho de que la igualdad (c) sea la expresión en términos del 1-cociclo l de la igualdad (b), es independiente de la condición de tensor de Poisson de Λ, es decir, no depende de la condición $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$. Utilizaremos este hecho mas adelante. ∎

Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $(x_i^\rho;\ i = 1, \ldots, n)$ la base de $\wedge^1(G)$ constituida por los campos invariantes por la derecha definidos por $(e_1, \ldots, e_n)$. Si $\varphi, \psi \in C^\infty(G)$ y

$$\{\varphi\,;\psi\} = \Lambda^{ij} \mathrm{L}_{x_i^\rho}\phi \cdot \mathrm{L}_{x_j^\rho}\psi\,; \qquad \Lambda^{ij} \in C^\infty(G),$$

es la expresión del corchete de Poisson en términos de los vectores x_i^ρ, entonces, obviamente, el 1-cociclo l se escribe así:

$$l(g) = \Lambda^{ij}(g) e_i \otimes e_j, \tag{d}$$

con respecto a la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Derivando el 1-cociclo l se obtiene la versión infinitesimal de la propiedad de Drinfeld.

Proposición 2.2 *Sea* $(G; \Lambda)$ *un grupo de Lie-Poisson y* $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *el 1-cociclo de* G *con respecto a la acción adjunta sobre* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *definido por la expresión* (a). *Entonces, la aplicación tangente en* $e \in G$ *a* l:

$$\epsilon \equiv T_e l : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g},$$

es un 1-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *con respecto a la acción adjunta de* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, *es decir, se satisface (ver expresión* (a) *de la Sección 1.1.1):*

$$\epsilon\left([x\,;y]\right) = \left(\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x\right)\epsilon(y) - \left(\mathrm{ad}_y \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_y\right)\epsilon(x), \tag{e}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Prueba Como la representación adjunta del álgebra de Lie se obtiene por derivación en el elemento neutro de la representación adjunta del grupo (ver Sagle, Walde [1973], pag. 162), la proposición es consecuencia de la Proposición 1.1 de la Sección 1.1.2. ■

Observación Considerando el isomorfismo $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ (expresión (c) de la Sección 1.1.1) la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ se escribe así (ver expresión (d) de la Sección 1.1.1):

$$(x; \tilde{r}) \in \mathfrak{g} \times Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{ad}_x \circ \tilde{r} - \tilde{r} \circ \mathrm{ad}_x^* \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g}),$$

donde $x \longrightarrow \mathrm{ad}_x^*$ es la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}^*$, definida así $\mathrm{ad}_x^* \alpha = -\alpha \circ \mathrm{ad}_x$.

El mismo isomorfismo permite definir , a partir de $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, la aplicación $\widetilde{\epsilon} : \mathfrak{g} \longrightarrow Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ de la siguiente forma:

$$\langle \xi ; \widetilde{\epsilon}(x)(\eta) \rangle = \langle \xi \otimes \eta ; \epsilon(x) \rangle , \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^* .$$

La condición de 1-cociclo de ϵ se escribe, en términos de $\widetilde{\epsilon}$, así (expresión (e) de la Sección 1.1.1):

$$\widetilde{\epsilon}([x ; y]) = \mathrm{ad}_x \circ \widetilde{\epsilon}(y) - \widetilde{\epsilon}(y) \circ \mathrm{ad}_x^* - \mathrm{ad}_y \circ \widetilde{\epsilon}(x) + \widetilde{\epsilon}(x) \circ \mathrm{ad}_y^* .$$

■

El hecho importante, enunciado por Drinfeld [1983a], es que este 1-cociclo ϵ define, por medio de la aplicación transpuesta, una estructura de álgebra de Lie sobre el espacio vectorial dual $\mathfrak{g}^*$. Para demostrarlo haremos uso de la siguiente proposición (Kosmann [1987], Aminou [1988]), que esablece que $d(\{\varphi ; \psi\}_G)(e)$ depende sólo de los valores $d\varphi(e)$ y $d\psi(e)$.

Proposición 2.3 *Sea $(G; \Lambda)$ es un grupo de Lie-Poisson y $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es el 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta definido en la Proposición 2.2. Si $\varphi, \psi \in C^\infty(G)$, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\langle d(\{\varphi ; \psi\}_G)(e) ; x \rangle = \langle d\varphi(e) \otimes d\psi(e) ; \epsilon(x) \rangle , \tag{f}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Prueba Por el Teorema 2.1 de la Sección 1.2.2, podemos expresar el corchete de Poisson en términos del 2-tensor de Poisson Λ. Entonces, teniendo en cuenta la definición (a) del 1-cociclo l, se verifica:

$$\begin{aligned} d\left(\{\varphi ; \psi\}\right)(e)(x) &= \frac{d}{dt} \left(\{\varphi ; \psi\}(\exp tx)\right)\big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\Lambda(\exp tx) \left(d\varphi(\exp tx); d\psi(\exp tx)\right)\right)\big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left((T_e \rho_{\exp tx})^{\otimes 2}\, l(\exp tx) \left(d\varphi(\exp tx) \otimes d\psi(\exp tx)\right) \right)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(l(\exp tx) \left(d\varphi(\exp tx) \circ T_e \rho_{\exp tx} \otimes d\psi(\exp tx) \circ T_e \rho_{\exp tx}\right)\right)\big|_{t=0} . \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dt}\, l(\exp tx)|_{t=0} = T_e l(x)$ y $l(e) = 0$ (ver la observación que sigue al Teorema 2.1), el resultado de la derivación es:

$$d\left(\{\varphi ; \psi\}\right)(e)(x) = T_e l(x) \left(d\varphi(e) \otimes d\psi(e)\right) .$$

■

Observación La demostración anterior es independiente de la condición $[\Lambda ; \Lambda] = 0$. Por tanto, para que se satisfaga la igualdad (f) no es necesario que G sea un grupo de Lie-Poisson.

En efecto, sea Λ un tensor 2-contravariante antisimétrico sobre G, definamos la aplicación bilineal sobre $C^\infty(G)$:

$$\{\varphi ; \psi\}(g) = \Lambda(g)(d\varphi(g); d\psi(g)), \quad \text{para todo } g \in G, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(G),$$

la aplicación $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ como en (a) y $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ como la aplicación tangente a l en $e \in G$. Para que la igualdad (f) se satisfaga basta la condición $l(e) = 0$. ■

Teorema 2.2 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Sea $(G; \Lambda)$ un grupo de Lie-Poisson y $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta definido en la Proposición 2.2. Entonces la aplicación transpuesta $\epsilon^t : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, define un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$ de la manera siguiente:*

$$[\xi_1 ; \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \epsilon^t(\xi_1 \otimes \xi_2), \quad \text{para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*.$$

Prueba En efecto, el corchete así definido es una aplicación bilineal $[\,;]_{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Según la Proposición 2.3, si $\xi_i = d\varphi_i(e) \in \mathfrak{g}^*$ se tiene:

$$\langle \epsilon^t(\xi_1 \otimes \xi_2) ; x\rangle = \langle \xi_1 \otimes \xi_2 ; \epsilon(x)\rangle = \langle d\varphi_1(e) \otimes d\varphi_2(e) ; \epsilon(x)\rangle = \langle d\left(\{\varphi_1 ; \varphi_2\}_G\right)(e) ; x\rangle,$$

es decir,

$$[\xi_1 ; \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = d\left(\{\varphi_1 ; \varphi_2\}_G\right)(e). \tag{g}$$

Entonces $[\,;]_{\mathfrak{g}^*}$ satisface la identidad de Jacobi ya que:

$$[\xi_1 ; [\xi_2 ; \xi_3]_{\mathfrak{g}^*}]_{\mathfrak{g}^*} = [d\varphi_1(e) ; d(\{\varphi_2 ; \varphi_3\}_G(e)]_{\mathfrak{g}^*} = d\left(\{\varphi_1 ; \{\varphi_2 ; \varphi_3\}_G\}_G\right)(e).$$

■

Proposición 2.4 *Sea G un grupo de Lie Poisson de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $(e_i ; i = 1, \dots, n)$ una base de $\mathfrak{g}$ y $(x_i^\rho ; i = 1, \dots, n)$ la base de $\wedge^1(G)$ constituida por los campos invariantes por la derecha tales que $x_i^\rho(e) = e_i$. Sean $\varphi, \psi \in C^\infty(G)$, si*

$$\{\varphi ; \psi\} = \Lambda^{ij} \mathrm{L}_{x_i^\rho}\varphi \cdot \mathrm{L}_{x_j^\rho}\psi; \qquad \Lambda^{ij} \in C^\infty(G),$$

es la expresión del corchete de Poisson en la base (x_i^ρ), las constantes de estructura, respecto de la base dual $(e^i ; i = 1, \dots, n)$, del corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$ definido en el Teorema 2.2 son:

$$f_i^{jk} = d\Lambda^{jk}(e) \cdot e_i.$$

Prueba En efecto, por definición

$$f_i^{jk} = \langle [e^j ; e^k]_{\mathfrak{g}^*} ; e_i\rangle = \langle e^j \otimes e^k ; T_e l(e_i)\rangle,$$

que es la imagen de $e_i \in \mathfrak{g}$ por diferencial en $e \in G$ de la aplicación: $g \in G \longrightarrow \langle e^j \otimes e^k ; l(g)\rangle \in \mathbb{R}$. Ahora bién, teniendo en cuenta la igualdad (d), tenemos

$$\langle e^j \otimes e^k ; l(g)\rangle = \Lambda^{jk}(g),$$

y por tanto, la derivada en $e \in G$ de la aplicación $g \in G \longrightarrow \langle e^j \otimes e^k ; l(g)\rangle = \Lambda^{jk}(g) \in \mathbb{R}$ es: $x \in \mathfrak{g} \longrightarrow d\Lambda^{jk}(e) \cdot x \in \mathbb{R}$, con lo que queda demostrada la proposición. ■

2.2.2 Biálgebras de Lie y Tripletes de Manin

El Torema 2.2 sugiere la siguiente definición.

Definición 2.3 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Una estructura de biálgebra de Lie sobre un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ consiste en la terna $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \epsilon)$, donde $[\,;\,]$ es un corchete de de Lie sobre el espacio $\mathfrak{g}$ y $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la acción adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, tal que la aplicación transpuesta $\epsilon^t : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ define una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$.*

Si $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \epsilon)$ es una biálgebra de Lie, la condición de 1-cociclo de la aplicación $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ puede expresarse como una relación de *compatibilidad* (Drinfeld [1983a]) entre los corchetes de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$, de la forma siguiente.

Proposición 2.5 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual sobre el que está definida una estructura de álgebra de Lie $[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}$. Sea $\phi : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación lineal definida por $\phi(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = [\alpha_1 ; \alpha_2]_{\mathfrak{g}^*}$ y $\beta : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la aplicación lineal definida por $\beta(x_1 \otimes x_2) = [x_1 ; x_2]$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *La aplicación $\epsilon \equiv \phi^t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la acción adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, es decir,*

$$\epsilon([x ; y]) = (\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x)\, \epsilon(y) - (\mathrm{ad}_y \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_y)\, \epsilon(x)\,.$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

(ii) *La acción de $[\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*}$ sobre $[x ; y]$ se escribe de las tres formas siguientes:*

$$\langle [\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; [x ; y] \rangle =$$
$$= -\left\langle [\mathrm{ad}_x^* \xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; y \right\rangle - \left\langle [\xi ; \mathrm{ad}_x^* \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; y \right\rangle + \left\langle [\mathrm{ad}_y^* \xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; x \right\rangle + \left\langle [\xi ; \mathrm{ad}_y^* \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; x \right\rangle\,,$$

o bién:

$$\left\langle [\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; [x ; y] \right\rangle = \left\langle \xi ; [\mathrm{ad}_\eta^* x ; y] \right\rangle + \left\langle \xi ; [x ; \mathrm{ad}_\eta^* y] \right\rangle - \left\langle \eta ; [\mathrm{ad}_\xi^* x ; y] \right\rangle - \left\langle \eta ; [x ; \mathrm{ad}_\xi^* y] \right\rangle\,,$$

o bién:

$$\left\langle [\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; [x ; y] \right\rangle = \left\langle \mathrm{ad}_x^* \eta ; \mathrm{ad}_\xi^* y \right\rangle + \left\langle \mathrm{ad}_y^* \xi ; \mathrm{ad}_\eta^* x \right\rangle - \left\langle \mathrm{ad}_x^* \xi ; \mathrm{ad}_\eta^* y \right\rangle - \left\langle \mathrm{ad}_y^* \eta ; \mathrm{ad}_\xi^* x \right\rangle\,,$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$.

(iii) *La aplicación β^t es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}^*$ con respecto a la acción adjunta sobre $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$, es decir,*

$$\beta^t([\xi ; \eta]) = \left(\mathrm{ad}_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_\xi\right) \beta^t(\eta) - \left(\mathrm{ad}_\eta \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_\eta\right) \beta^t(\xi)\,.$$

Prueba Por definición de la aplicación ϕ y de ϵ, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$,

$$\left\langle [\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; [x ; y] \right\rangle = \left\langle \phi(\xi \otimes \eta) ; [x ; y] \right\rangle = \left\langle \xi \otimes \eta ; \epsilon[x ; y] \right\rangle\,.$$

Haciendo uso de la condición de 1-cociclo de ϵ (expresión (e) de la Sección 2.2.1) tenemos:

$$\begin{aligned}\left\langle [\xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; [x ; y] \right\rangle &= \left\langle \xi \otimes \eta ; (\mathrm{ad}_x \otimes 1)\epsilon(y) \right\rangle + \left\langle \xi \otimes \eta ; (1 \otimes \mathrm{ad}_x)\epsilon(y) \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle \xi \otimes \eta ; (\mathrm{ad}_y \otimes 1)\epsilon(x) \right\rangle - \left\langle \xi \otimes \eta ; (1 \otimes \mathrm{ad}_y)\epsilon(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle (\mathrm{ad}_x)^t(\xi) \otimes \eta ; \epsilon(y) \right\rangle + \left\langle \xi \otimes (\mathrm{ad}_x)^t(\eta) ; \epsilon(y) \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle (\mathrm{ad}_y)^t(\xi) \otimes \eta ; \epsilon(x) \right\rangle - \left\langle \xi \otimes (\mathrm{ad}_y)^t(\eta) ; \epsilon(x) \right\rangle = \\ &= -\left\langle [\mathrm{ad}_x^* \xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; y \right\rangle - \left\langle [\xi ; \mathrm{ad}_x^* \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; y \right\rangle + \left\langle [\mathrm{ad}_y^* \xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; x \right\rangle + \left\langle [\xi ; \mathrm{ad}_y^* \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; x \right\rangle\,,\end{aligned}$$

pues $\mathrm{ad}_x^* = -(\mathrm{ad}_x)^t$. Por tanto (i) implica (ii) y recíprocamente.

La segunda igualdad de (ii) es consecuencia inmediata del cálculo siguiente:

$$-\left\langle [\mathrm{ad}_x^* \xi ; \eta]_{\mathfrak{g}^*} ; y \right\rangle = \left\langle \mathrm{ad}_\eta(\mathrm{ad}_x^* \xi) ; y \right\rangle = \left\langle \mathrm{ad}_x^* \xi ; (\mathrm{ad}_\eta)^t y \right\rangle = -\left\langle \mathrm{ad}_x^* \xi ; \mathrm{ad}_\eta^* y \right\rangle\,.$$

La equivalencia entre el resto de las afirmaciones se obtiene de manera similar. ∎

Si $c^i_{j\,k}$ son las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ con respecto a una base (e_i) y $f^{j\,k}_i$ las constantes de estructura de $\mathfrak{g}^*$ con respecto a la base dual (e^i), la relación de compatibilidad, definida en (ii) de la Proposición 2.5, entre los corchetes de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ se expresa de la siguiente forma:

$$c^k_{r\,s} f^{j\,k}_i = c^i_{\alpha\,r} f^{j\,\alpha}_s - c^j_{\alpha\,r} f^{i\,\alpha}_s - c^i_{\alpha\,s} f^{j\,\alpha}_r - c^j_{\alpha\,s} f^{i\,\alpha}_r .$$

De las relaciones de compatibilidad de la Proposición 2.5 se deduce que si $\gamma : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ es la transpuesta de la aplicación lineal que define el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$, entonces $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \epsilon)$ es una biálgebra de Lie si y solamente si $(\mathfrak{g}^*; [\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}; \gamma)$ es una biálgebra de Lie. A $(\mathfrak{g}^*; [\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}; \gamma)$ se la denomina *biálgebra de Lie dual de* $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \epsilon)$.

Definición 2.4 *Sean $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; \epsilon_1)$ y $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; \epsilon_2)$ dos biálgebras de Lie y $u : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ una aplicación lineal. Se dice que u es un morfismo de biálgebras de Lie de $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; \epsilon_1)$ en $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; \epsilon_2)$ si u es un morfismo de álgebras de Lie de $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1)$ en $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2)$ y u^t es un morfismo de álgebras de Lie de $({\mathfrak{g}^*}_2; [\,;\,]_{{\mathfrak{g}^*}_2})$ en $({\mathfrak{g}^*}_1; [\,;\,]_{{\mathfrak{g}^*}_1})$.*

Proposición 2.6 *Sean $(G_1; \Lambda_1)$ y $(G_2; \Lambda_2)$ dos grupos de Lie-Poisson y Ψ un morfismo de grupos de Lie-Poisson. Sean $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; \epsilon_1)$ y $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; \epsilon_2)$ las biálgebras de Lie asociadas. Sea $e_1 \in G_1$ el elemento unidad. Entonces la aplicación lineal tangente a Ψ en e_1 es un morfismo de biálgebras de Lie de $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; \epsilon_1)$ en $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; \epsilon_2)$.*

Prueba Sea $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morfismo de grupos de Lie-Poisson y $e_2 \in G_2$ el elemento unidad. Que la aplicación $F \equiv T_{e_1} f : T_{e_1} G_1 \longrightarrow T_{e_2} G_2$ es un morfismo de álgebras de Lie es consecuencia de ser $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morfismo de grupos de Lie (ver Sagle, Walde [1973]).

Sólo queda por probar que $F^t : \mathfrak{g}_2^* \longrightarrow \mathfrak{g}_1^*$ es un morfismo de álgebras de Lie. Sean $\alpha, \beta \in {\mathfrak{g}^*}_2$ tales que $\alpha = d\varphi(e_2)$ y $\beta = d\psi(e_2)$, donde $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(G_2)$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.3 de la Sección 2.2.1, se tiene:

$$F^t[\alpha\,;\beta] = [\alpha\,;\beta]_{\mathfrak{g}_2^*} \circ T_{e_1} f = d\left(\{\varphi\,;\psi\}_{G_2}\right) \circ T_{e_1} f = d\left(\{\varphi\,;\psi\}_{G_2} \circ f\right) ,$$

donde $[\alpha\,;\beta]_{\mathfrak{g}_2^*}$ se refiere al corchete en $\mathfrak{g}_2^*$ definido por ϵ_2^t.

Ahora bien, $f : G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de Poisson, por tanto,

$$\{\varphi\,;\psi\}_{G_2} \circ f = \{\varphi \circ f\,;\psi \circ f\}_{G_1} .$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} F^t[\alpha\,;\beta]_{\mathfrak{g}_2^*} &= d\left(\{\varphi \circ f\,;\psi \circ f\}_{G_1}\right)(e_1) = [d(\varphi \circ f)(e_1)\,; d(\psi \circ f)(e_1)]_{\mathfrak{g}_1^*} = \\ &= [d\varphi(e_2) \circ T_{e_1} f\,; d\psi(e_2) \circ T_{e_1} f]_{\mathfrak{g}_1^*} = \left[F^t(\alpha)\,; F^t(\beta)\right]_{\mathfrak{g}_1^*} . \end{aligned}$$

∎

Drinfeld [1983a] ha puesto de manifiesto que los conceptos de *biálgebra de Lie* y de *triplete de Manin* están en estrecha relación.

Definición 2.5 *Un triplete de Manin es un sistema $(\mathfrak{p}; \mathfrak{p}_1; \mathfrak{p}_2; \langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}})$ donde $\mathfrak{p}$ es un álgebra de Lie sobre la que está definida una forma bilineal, simétrica, no degenerada $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$, invariante con respecto a la acción adjunta, y $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ son subálgebras de Lie isótropas con respecto a $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$, tales que el espacio vectorial $\mathfrak{p}$ es la suma directa de los espacios vectoriales $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$.*

Si sobre $\mathfrak{g}^*$ se tiene definido un corchete de Lie, sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ se define un corchete, $[\,;\,]_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}$, que induciendo ambas estructuras de álgebra de Lie, la de $\mathfrak{g}$ y la de $\mathfrak{g}^*$, deja invariante la forma bilineal simétrica, no-degenerada $\langle (x;\xi)\,;(y;\eta)\rangle_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} = \langle \xi\,;y\rangle + \langle \eta\,;x\rangle$. La siguiente proposición (Kosmann, Magri [1988]; Aminou [1988]) proporciona la forma explícita de este corchete. Comprobaremos, después, que $[\,;\,]_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}$ satisface la identidad de Jacobi si y sólo si los corchetes $[\,;\,]$ y $[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}$ son compatibles en el sentido de la Proposición 2.5. Es decir, $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g};\mathfrak{g}^*;\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*})$ es un triplete de Manin si y sólo si $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ es una biálgebra de Lie.

Proposición 2.7 *Sean $(\mathfrak{g};[\,;\,])$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual dotado de un corchete de Lie $[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$. La aplicación bilineal, antisimétrica: $[\,;\,]_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p}\times\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ definida por:*

$$[(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{p}} = \left([x\,;y] + \mathrm{ad}^*_\xi\, y - \mathrm{ad}^*_\eta\, x; [\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{ad}^*_x\, \eta - \mathrm{ad}^*_y\, \xi\right)\,, \tag{a}$$

es la única que, induciendo las estructuras de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$, deja invariante la forma bilineal $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ dada por la fórmula:

$$\langle (x;\xi)\,;(y;\eta)\rangle_{\mathfrak{p}} = \langle \xi\,;y\rangle + \langle \eta\,;x\rangle\,, \tag{b}$$

es decir, es la única que satisface:

$$\begin{gathered}\left[(x;0)\,;(y;0)\right]_{\mathfrak{p}} = \left([x\,;y];0\right)\\ \left[(0;\xi)\,;(0;\eta)\right]_{\mathfrak{p}} = \left(0;[\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*}\right)\\ \Big\langle\, [(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{p}}\,;(z;\mu)\Big\rangle_{\mathfrak{p}} + \Big\langle (y;\eta)\,;[(x;\xi)\,;(z;\mu)]_{\mathfrak{p}}\Big\rangle_{\mathfrak{p}} = 0\,.\end{gathered} \tag{c}$$

Además, $\mathfrak{g}\times\{0\} = \mathfrak{P}_1$ y $\{0\}\times\mathfrak{g}^* = \mathfrak{p}_2$ son espacios vectoriales isótropos con respecto a la forma $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$.

Prueba La forma definida en (b) satisface la igualdad (c). En efecto, por una parte se tiene:

$$\begin{aligned}&\Big\langle\, [(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{p}}\,;(z;\mu)\Big\rangle_{\mathfrak{p}} =\\ &\quad= \left\langle \left([x\,;y] + \mathrm{ad}^*_\xi\, y - \mathrm{ad}^*_\eta\, x\,;[\xi\,;\eta] + \mathrm{ad}^*_x\,\eta - \mathrm{ad}^*_y\,\xi\right)\,;(z;\mu)\right\rangle_{\mathfrak{p}} =\\ &\quad= \langle \mu\,;[x;y] + \mathrm{ad}^*_\xi\, y - \mathrm{ad}^*_\eta\, x\rangle + \langle [\xi\,;\eta] + \mathrm{ad}^*_x\,\eta - \mathrm{ad}^*_y\,\xi\,;z\rangle =\\ &\quad= \langle \mu\,;[x;y]\rangle + \langle \mu\,;\mathrm{ad}^*_\xi\, y\rangle - \langle \mu\,;\mathrm{ad}^*_\eta\, x\rangle + \langle [\xi\,;\eta]\,;z\rangle + \langle\, \mathrm{ad}^*_x\,\eta\,;z\rangle - \langle\, \mathrm{ad}^*_y\,\xi\,;z\rangle =\\ &\quad= -\langle\, \mathrm{ad}^*_x\,\mu\,;y\rangle - \langle \xi\,;\mathrm{ad}^*_\mu\, y\rangle + \langle \eta\,;\mathrm{ad}^*_\mu\, x\rangle - \langle \eta\,;\mathrm{ad}^*_\xi\, z\rangle - \langle\, \mathrm{ad}^*_z\,\eta\,;x\rangle + \langle\, \mathrm{ad}^*_z\,\xi\,;y\rangle\,.\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}&\Big\langle (y;\eta)\,;[(x;\xi)\,;(z;\mu)]_{\mathfrak{p}}\Big\rangle_{\mathfrak{p}} =\\ &\quad= \left\langle (y;\eta)\,;\left([x;z] + \mathrm{ad}^*_\xi\, z - \mathrm{ad}^*_\mu\, x\,;[\xi\,;\mu] + \mathrm{ad}^*_x\,\mu - \mathrm{ad}^*_z\,\xi\right)\right\rangle_{\mathfrak{p}} =\\ &\quad= \langle \eta\,;[x\,;z] + \mathrm{ad}^*_\xi\, z - \mathrm{ad}^*_\mu\, x\rangle + \langle [\xi\,;\mu] + \mathrm{ad}^*_x\,\mu - \mathrm{ad}^*_z\,\xi\,;y\rangle =\\ &\quad= \langle\, \mathrm{ad}^*_z\,\eta\,;x\rangle + \langle \eta\,;\mathrm{ad}^*_\xi\, z\rangle - \langle \eta\,;\mathrm{ad}^*_\mu\, x\rangle + \langle \xi\,;\mathrm{ad}^*_\mu\, y\rangle + \langle \mathrm{ad}^*_x\,\mu\,;y\rangle - \langle \mathrm{ad}^*_z\,\xi\,;y\rangle\,,\end{aligned}$$

y sumando las dos expresiones se obtiene (c).

Comprobemos la unicidad. Por bilinealidad del corchete $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ tenemos:

$$[(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{p}} = [(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}} + [(x;0)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}} + [(0;\xi)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}} + [(0;\xi)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}}\,.$$

Por lo tanto, si la aplicación bilineal $[\,;]_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ induce las estructuras de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$, se debe tener:

$$\begin{aligned}
[(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}} &= \big([x\,;y];0\big)\\
[(0;\xi)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}} &= \big(0;[\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*}\big)\\
[(x;0)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}} &= \big(A(\eta;x);B(x;\eta)\big)\\
[(0;\xi)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}} &= \big(C(\xi;y);D(y;\xi);\big)\ ,
\end{aligned}$$

siendo $A : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, $C : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ y $D : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ aplicaciones bilineales. Ahora bién, la antisimetría de $[\,;]_{\mathfrak{p}}$ implica que $A(\eta;x) = -C(\eta;x)$ y $B(x;\eta) = -D(x;\eta)$, así pues, la forma del corchete $[\,;]_{\mathfrak{p}}$ debe ser:

$$[(x;\xi)\,;(y;\eta)]_{\mathfrak{p}} = \big([x\,;y] + A(\eta;x) - A(\xi;y);[\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*} + B(x;\eta) - B(y;\xi)\big)\ .$$

Si, ahora, hacemos uso de la condición de invariancia (c):

$$\Big\langle [(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}}\,;(0;\xi)\Big\rangle_{\mathfrak{p}} + \Big\langle (y;0)\,;[(x;0)\,;(0;\xi)]_{\mathfrak{p}}\Big\rangle_{\mathfrak{p}} = 0\,,$$

tenemos que:

$$\big\langle([x\,;y];0)\,;(0;\xi)\big\rangle_{\mathfrak{p}} + \big\langle(y;0)\,;\big(A(\xi;x);B(x;\xi)\big)\big\rangle_{\mathfrak{p}} = 0\,,$$

es decir,

$$\langle \xi\,;[x\,;y]\rangle + \langle B(x;\xi)\,;y\rangle = 0\,,$$

por tanto,

$$B(x;\xi) = \mathrm{ad}_x^*\,\xi\,.$$

Por otra parte, también:

$$\Big\langle [(0;\xi)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}}\,;(x;0)\Big\rangle_{\mathfrak{p}} + \Big\langle (0;\eta)\,;[(0;\xi)\,;(x;0)]_{\mathfrak{p}}\Big\rangle_{\mathfrak{p}} = 0\,,$$

por lo que:

$$A(\xi;x) = -\,\mathrm{ad}_\xi^*\,x\,,$$

quedando demostrada la proposición. ■

Teorema 2.3 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Sea $(\mathfrak{g};[\,;])$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{g}^*$ el espacio vectorial dual sobre el que está definido un corchete de Lie $[\,;]_{\mathfrak{g}^*}$. Sea $\phi : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación lineal definida por $\phi(\xi \otimes \eta) = [\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*}$ y $\epsilon \equiv \phi^t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ la aplicación transpuesta. Entonces, sobre el espacio vectorial $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$, existe un corchete de Lie que induce las estructuras de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ y deja invariante la forma bilineal simétrica dada por la expresión* (b) *si y sólo si $(\mathfrak{g};[\,;];\epsilon)$ es una biálgebra de Lie. Además este corchete es único y viene dado por la expresión* (a).

En otras palabras, el corchete $[\,;]_{\mathfrak{p}}$ dado por (a) *satisface la identidad de Jacobi si y sólo si $[\,;]$ y $[\,;]_{\mathfrak{g}^*}$ satisfacen la propiedad de compatibilidad de Drinfeld (Proposición 2.5), es decir, si y sólo si $(\mathfrak{g};[\,;];\epsilon)$ es una biálgebra de Lie.*

Prueba Debido a la Proposición 2.7, el corchete sobre $\mathfrak{p}$ tiene que venir dado por la expresión (a).

Como consecuencia de la bilinealidad de $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ y de las identidades de Jacobi de los corchetes $[\,;\,]$ y $[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}$, para demostrar que $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ satisface la identidad de Jacobi, basta con comprobar las dos igualdades:

$$[(0;\xi)\,;[(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(x;0)\,;[(y;0)\,;(0;\xi)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(y;0)\,;[(0;\xi)\,;(x;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} = (0;0)\,,$$

$$[(x;0)\,;[(0;\xi)\,;(0;\eta)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(0;\xi)\,;[(0;\eta)\,;(x;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(0;\eta)\,;[(x;0)\,;(0;\xi)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} = (0;0)\,.$$

Ahora bien, según la definición del corchete de Lie sobre $\mathfrak{p}$, se tiene

$$\begin{aligned}
[(0;\xi)\,;[(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} &= \left(\mathrm{ad}^*_\xi[x\,;y];\, -\mathrm{ad}^*_{[x\,;y]}\,\xi\right)\,,\\
[(x;0)\,;[(y;0)\,;(0;\xi)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} &= \left([x\,;-\mathrm{ad}^*_\xi\, y] - \mathrm{ad}^*_{(\mathrm{ad}^*_y\,\xi)}\, x;\, \mathrm{ad}^*_x\,\mathrm{ad}^*_y\,\xi\right)\,,\\
[(y;0)\,;[(0;\xi)\,;(x;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} &= \left([y\,;\mathrm{ad}^*_\xi\, x] + \mathrm{ad}^*_{(\mathrm{ad}^*_x\,\xi)}\, y;\, -\mathrm{ad}^*_y\,\mathrm{ad}^*_x\,\xi\right)\,,
\end{aligned}$$

así pues,

$$\begin{aligned}
&[(0;\xi)\,;[(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(x;0)\,;[(y;0)\,;(0;\xi)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + [(y;0)\,;[(0;\xi)\,;(x;0)]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} =\\
&= \Big(\mathrm{ad}^*_\xi[x\,;y] + [x\,;-\mathrm{ad}^*_\xi\, y] - \mathrm{ad}^*_{\mathrm{ad}^*_y\,\xi}\, x + [y\,;\mathrm{ad}^*_\xi\, x] + \mathrm{ad}^*_{(\mathrm{ad}^*_x\,\xi)}\, y\;\;;\\
&\qquad\qquad -\mathrm{ad}^*_{[x\,;y]}\,\xi + \mathrm{ad}^*_x\,\mathrm{ad}^*_y\,\xi - \mathrm{ad}^*_y\,\mathrm{ad}^*_x\,\xi\Big)\,.
\end{aligned}$$

La segunda componente de este par es nula por ser $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ un morfismo de álgebras de Lie y la primera lo es si y solamente si se satisface la condición de compatibilidad (Proposición 2.5) de los corchetes $[\,;\,]$ y $[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*}$, es decir, si y sólo si ϵ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$.

La demostración de la segunda igualdad es similar. ∎

Así pues, según el Teorema 2.3, toda biálgebra de Lie $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ determina un triplete de Manin $\left(\mathfrak{p}\equiv\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g};\mathfrak{g}^*;\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}\right)$ donde $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ viene dado por la igualdad (b) y el corchete sobre $\mathfrak{p}$ por la expresión (a).

Para comprobar la afirmación recíproca hay que tener en cuenta que, si se tiene un triplete de Manin $(\mathfrak{p};\mathfrak{p}_1;\mathfrak{p}_2;\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}})$, la aplicación

$$(0;\xi_2)\in\mathfrak{p}_2\longrightarrow\hat{\xi}_2\in\mathfrak{p}_1^*\,,$$

definida por:

$$\langle\hat{\xi}_2\,;x_1\rangle = \langle(0;\xi_2)\,;(x_1;0)\rangle_{\mathfrak{p}}\,,$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{p}_2$ en $\mathfrak{p}_1^*$ y, por tanto, la forma bilineal $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ se puede escribir así:

$$\langle(x;\xi)\,;(y;\eta)\rangle_{\mathfrak{p}} = \langle(x;0)\,;(0;\eta)\rangle_{\mathfrak{p}} + \langle(0;\xi)\,;(y;0)\rangle_{\mathfrak{p}} = \langle\hat{\eta}\,;x\rangle + \langle\hat{\xi}\,;y\rangle\,.$$

Como la Proposición 2.7 nos dice que el corchete $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ tiene la forma dada por (a), se tiene que los corchetes de $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_1^*$ satisfacen la relación de compatibilidad de Drinfeld y, en conclusión, que $(\mathfrak{p}_1;[\,;\,]_{\mathfrak{p}_1};\epsilon)$ es una biálgebra de Lie, siendo ϵ la aplicación transpuesta de aquella que define el corchete $[\,;\,]_{\mathfrak{p}_2}$.

Observación La reformulación del concepto de *grupo de Lie-Poisson* (y su versión infinitesimal: el de *biálgebra de Lie*) en el contexto dual, es decir, el del álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la expresión en este contexto algebraico de sus propiedades, así como otra demostración del siguiente teorema de integración de biálgebras de Lie, se encuentra en A. Guichardet [1995]. ∎

2.2.3 Teorema de Integración de Biálgebras de Lie

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, toda estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ se integra en una estructura de Lie-Poisson sobre G. Este teorema ha sido enunciado sin demostración por Drinfeld [1983a]. La demostración, que desarrollamos con detalle, se debe a Lu y Weinstein [1990]. Se basa en el resultado, interesante en sí mismo, de que un campo tensorial antisimétrico con la propiedad de Drinfeld es nulo si y solamente si su derivada intrínseca (Definición 2.7) es nula.

Definición 2.6 *Un campo tensorial p-contravariante antisimétrico sobre G (p-tensor), $P \in \wedge^p(G)$, se dice que satisface la propiedad de Drinfeld si:*

$$P(gh) = (T_h\lambda_g)^{\otimes p} P(h) + (T_g\rho_h)^{\otimes p} P(g)\,, \quad \text{para todo } g, h \in G\,. \tag{a}$$

Como generalización inmediata del Teorema 2.1 de 2.2.1, una condición necesaria y suficiente para que $P \in \wedge^p(G)$ satisfaga la propiedad de Drinfeld es que la aplicación

$$l : g \in G \longrightarrow \left(T_g\rho_{g^{-1}}\right)^{\otimes p} P(g) \in \mathfrak{g} \otimes \overset{p}{\cdots} \otimes \mathfrak{g}\,, \tag{b}$$

sea un 1-cociclo del grupo G con respecto a la representación adjunta de G sobre $\mathfrak{g}\otimes \overset{p}{\cdots} \otimes\mathfrak{g}$.

Teorema 2.4 (Lu J. H., Weinstein A. [1990]) *Sea G un grupo de Lie conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Un p-tensor $P \in \wedge^p(G)$ satisface la propiedad de Drinfeld si y sólo si:*

(i) *P se anula en $e \in G$.*

(ii) *$\mathrm{L}_X P$ es invariante por la izquierda para todo campo vectorial invariante por la izquierda $X \in \mathcal{X}_\lambda(G)$.*

El mismo enunciado se puede establecer con la invariancia por la derecha.

Prueba Recordemos (ver por ejemplo: Abraham, Marsden, Ratiu [1983]) que si $F_t : U \subset M \longrightarrow M$ es el flujo local, sobre el abierto U de la variedad M, de un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ y $P \in \mathcal{T}^p(M)$ es un campo tensorial p-contravariante sobre la variedad M, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(TF_{-t}\right)^{\otimes p} \circ P \circ F_t\right)(m) = \left(\left(TF_{-t}\right)^{\otimes p} \circ (\mathrm{L}_X P) \circ F_t\right)(m)\,. \tag{c}$$

En particular,

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_X P)(m) &= \frac{d}{dt}\left(\left(TF_{-t}\right)^{\otimes p} \circ P \circ F_t\right)(m)\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\left(T_{F_t(m)}F_{-t}\right)^{\otimes p}\left(P(F_t(m))\right)\Big|_{t=0}\,.\end{aligned} \tag{d}$$

(1) Necesidad.

Sea $P \in \wedge^p(\boldsymbol{G})$ con la propiedad de Drinfeld (a), entonces $P(e) = 0$.

Sea $x^\lambda \in \mathcal{X}_\lambda(\boldsymbol{G})$ el campo de vectores, invariante por la izquierda, definido por $x \in \mathfrak{g}$. El flujo de x^λ es el grupo de difeomorfismos $\rho_{\exp tx} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ con $t \in \mathbb{R}$, por tanto, teniendo en cuenta (d),

$$\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(g) = \frac{d}{dt}\left(T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p}\left(P(g\,\exp tx)\right)\Big|_{t=0}.$$

Ahora bién, por la propiedad (a) (que P satisface por hipótesis) se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(g) = \frac{d}{dt}\Bigg(&\left(\left(T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} \circ \left(T_{\exp tx}\lambda_g\right)^{\otimes p}\right)P(\exp tx) + \\ &+ \left(\left(T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} \circ \left(T_g\rho_{\exp tx}\right)^{\otimes p}\right)P(g)\Bigg)\Bigg|_{t=o}.\end{aligned}$$

El segundo término es independiente de t y su derivada es pues nula:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} \circ \left(T_g\rho_{\exp tx}\right)^{\otimes p}\right)P(\exp tx)\Big|_{t=o} = \frac{d}{dt}\,P(g)|_{t=0} = 0\,.$$

Teniendo en cuenta la conmutación de los difeomorfismos ρ_h y λ_g, el primer término se escribe así:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\left(T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} \circ \left(T_{\exp tx}\lambda_g\right)^{\otimes p}\right)P(\exp tx)\Big|_{t=0} = \\ &\quad = \frac{d}{dt}\left(\left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p} \circ \left(T_{\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p}\right)P(\exp tx)\Big|_{t=0} = \\ &\quad = \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p}\left(\frac{d}{dt}\left(T_{\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p}P(\exp tx)\Big|_{t=0}\right) = \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda}P\right)(e)\,,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha tenido en cuenta (d).

Entonces,

$$\left(\mathrm{L}_{x^\lambda}P\right)(g) = \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda}P\right)(e)\,,$$

que demuestra la invariancia por la izquierda del campo $\mathrm{L}_{x^\lambda}P$.

(2) Suficiencia.

Sea ahora $P \in \wedge^p(\boldsymbol{G})$ tal que $\mathrm{L}_{x^\lambda}P$ es invariante por la izquierda para todo $x \in \mathfrak{g}$, y tal que $P(e) = 0$.

Para demostrar que P satisface la propiedad de Drinfeld es suficiente demostrar que (ver Definición 2.6):

$$l(g\,\exp tx) = l(g) + \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p} l(\exp tx)\,, \qquad \forall g \in \boldsymbol{G}\,, \quad \forall x \in \mathfrak{g}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \tag{e}$$

es decir, que l es un 1-cociclo de $\boldsymbol{G}$ con valores en $\otimes^p\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de $\boldsymbol{G}$.

Calculemos la derivada con respecto t del primer miembro de (e). Teniendo en cuenta la definición (b) de l y la igualdad (c), se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} l(g \exp tx) &= \frac{d}{dt}\left(T_{g \exp tx}\rho_{(g \exp tx)^{-1}}\right)^{\otimes p} P(g \exp tx) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(T_g\rho_{g^{-1}} \circ T_{g \exp tx}\rho_{(\exp tx)^{-1}}\right)^{\otimes p} P\left(\rho_{\exp tx}(g)\right) = \\
&= T_g\rho_{g^{-1}}\left(\frac{d}{dt}\left(T_{g \exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} P\left(\rho_{\exp tx}(g)\right)\right) = \\
&= \left(T_g\rho_{g^{-1}}\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(g).
\end{aligned}$$

Ahora bién, $\mathrm{L}_{x^\lambda} P$ es invariante por la izquierda, es decir,

$$\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(g) = \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(e),$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} l(g \exp tx) = \left(\left(T_g\rho_{g^{-1}}\right)^{\otimes p} \circ \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes p}\right)\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(e) = \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(e).$$

Por otro lado, la derivada del segundo miembro de (e) es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(l(g) + \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p} l(\exp tx)\right) &= \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p}\left(\frac{d}{dt}\left(T_{\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\right)^{\otimes p} P(\exp tx)\right) = \\
&= \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda} P\right)(e),
\end{aligned}$$

Así pues, ambas derivadas coinciden:

$$\frac{d}{dt} l\left(g \exp(tx)\right) = \frac{d}{dt}\left(l(g) + \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p} l(\exp tx)\right). \tag{f}$$

Ahora bién, como $P(e) = 0$, tenemos que $l(e) = 0$ (ver Definición 2.6) y las funciones:

$$\begin{gathered}
t \longrightarrow l\left(g \exp tx\right) \\
t \longrightarrow l(g) + \left(\mathrm{Ad}_g\right)^{\otimes p} l(\exp tx),
\end{gathered}$$

coinciden en $t = 0$. Por tanto, teniendo en cuenta (f), son iguales. Quedando demostrado el teorema. ∎

El corchete de Schouten de campos de tensores que satisfacen la propiedad de Drinfeld satisface la propiedad de Drinfeld. Para demostrarlo utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 2.1 Sea G un grupo de Lie conexo. Un campo de tensores p-contravariante *antsimétrico $P \in \wedge^p(G)$ es invariante por la derecha si y sólo si $\mathrm{L}_X P = 0$, para todo campo vectorial $X \in \mathcal{X}_\lambda(G)$ invariante por la izquierda.*

En particular, un campo de vectores $Y \in \mathcal{X}(G)$ sobre G es invariante por la derecha si y sólo si conmuta con los campos invariantes por la izquierda.

La misma proposición se puede establecer intercambiando invariancia por la derecha e invariancia por la izquierda.

Prueba Demostraremos el caso vectorial. El caso general es análogo.

Teniendo en cuenta (d), si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ son campos de vectores sobre una variedad M y F_t es el fujo de X, se tiene:

$$[X\,;Y] \equiv \mathrm{L}_X Y = \frac{d}{dt}\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)\big|_{t=0} . \tag{g}$$

Sea $X \in \mathcal{X}_\lambda(G)$ un campo de vectores sobre G invariante por la izquierda e $Y \in \mathcal{X}_\rho(G)$ un campo de vectores sobre G invariante por la derecha. El flujo del campo X es $F_t = \rho_{\exp tx}$, donde $x = X(e)$. Entonces,

$$\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)(g) = \left(T\rho_{\exp(-tx)} \circ Y \circ \rho_{\exp tx}\right)(g) = T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\left(Y(g\,\exp tx)\right) .$$

Ahora bién, como Y es invariante por la derecha, se satisface:

$$Y(g\,\exp tx) = T_e\rho_{g\,\exp tx} \cdot Y(e)\,,$$

y, sustituyendo en la igualdad anterior,

$$\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)(g) = T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\left(T_e\rho_{g\,\exp tx}\right) \cdot Y(e) = T_e\rho_g \cdot Y(e) = Y(g)\,.$$

La no dependencia de t de $\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)(g)$ implica, según (g), que $[X\,;Y] = 0$.

Recíprocamente, sea Y un campo vectorial sobre G tal que $\mathrm{L}_X Y = 0$, para todo campo X invariante por la izquierda. Esto implica que $\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)(g)$ no depende de t para todo $g \in G$. Ahora bién, $\left(TF_0 \circ Y \circ F_0\right)(g) = Y(g)$, por tanto, $\left(TF_{-t} \circ Y \circ F_t\right)(g) = Y(g)$, es decir,

$$T_{g\,\exp tx}\rho_{\exp(-tx)}\left(Y(g\,\exp tx)\right) = Y(g)\,,$$

donde $x = X(e)$. De la última igualdad se deduce que

$$Y(\exp tx) = T_e\rho_{\exp tx} \cdot Y(e)\,, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}\,,$$

que demuestra la invariancia por la derecha del campo Y. ∎

Lema 2.2 *Sea G un grupo de Lie conexo, $P \in \wedge^p(G)$ un campo tensorial invariante por la izquierda y $Q \in \wedge^q(G)$ un campo tensorial invariante por la derecha. Entonces el corchete de Schouten $[P\,;Q] = 0$.*

Prueba

Si A y B son tensores contravariantes antisimétricos de orden p y q respectivamente, sabemos (expresión (h) de 1.2.2) que se satisface la siguiente igualdad:

$$[A\,;B \wedge C] = [A\,;B] \wedge C + (-1)^{pq+q} B \wedge [A\,;C]\,. \tag{h}$$

Por otra parte, si $(x_1, \ldots, x_n)$ es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el conjunto $(x_1^\lambda, \ldots, x_n^\lambda)$, de los campos vectoriales invariantes por la izquierda definidos por x_i $(i = 1, \ldots, n)$, es una base de $\wedge^1(G)$ y, por tanto,

$$x_{i_1}^\lambda \wedge \cdots \wedge x_{i_p}^\lambda\,; \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n\,,$$

es una base de $\wedge^p(G)$.

Este último hecho, el Lema 2.1 y la igualdad (h) demuestran el enunciado. ∎

Proposición 2.8 (Lu J. H., Weinstein A. [1990]) *Sea G un grupo de Lie conexo. Sean $P \in \wedge^p(G)$ y $Q \in \wedge^q(G)$ campos de tensores antisimétricos que satisfacen la propiedad* (a) *de Drinfeld. Entonces el corchete de Schouten $[P\,;Q]$ es un $(p+q-1)$-tensor que satisface la propiedad de Drinfeld.*

Prueba Por el Teorema 2.4, basta con demostrar que $[P\,;Q](e)=0$ y que $\mathrm{L}_X\,[P\,;Q]$ es invariante por la izquierda para todo campo vectorial X invariante por la izquierda.

Según la Definición 2.1 de la Sección 1.2.2, $[P\,;Q]$ viene dado por la relación:

$$i_{[P\,;Q]}\beta = (-1)^{pq+q} i_P\, d(i_Q\beta) + (-1)^p i_Q\, d(i_P\beta)\,,$$

donde β es una $(p+q-1)$-forma cerrada cualquiera sobre G. Entonces, al ser $P(e) = Q(e) = 0$, se tiene

$$[P\,;Q](e) = 0\,.$$

Por otra parte, sean $X, Y \in \wedge^1(G)$ campos vectoriales sobre el grupo. La identidad de Jacobi relativa al corchete de Schouten (Proposición 2.1 de la Sección 1.2.2) implica que:

$$\mathrm{L}_X\,[P\,;Q] = [\mathrm{L}_X P\,;Q] + [P\,;\mathrm{L}_X Q]\;,$$

y

$$\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X\,[P\,;Q] = [\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X P\,;Q] + [\mathrm{L}_X P\,;\mathrm{L}_Y Q] + [\mathrm{L}_Y P\,;\mathrm{L}_X Q] + [P\,;\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X Q]\,.$$

Si X es invariante por la izquierda e Y es invariante por la derecha, según el Teorema 2.4, se verifica que $\mathrm{L}_Y P$ y $\mathrm{L}_Y Q$ son campos invariantes por la derecha y que $\mathrm{L}_X P$ y $\mathrm{L}_X Q$ son campos invariantes por la izquierda. Entonces, teniendo en cuenta el Lema 2.1, se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X P = 0\,, \qquad \mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X Q = 0\,,$$

y teniendo en cuenta el Lema 2.2,

$$[\mathrm{L}_X P\,;\mathrm{L}_Y Q] = 0\,, \qquad [\mathrm{L}_Y P\,;\mathrm{L}_X Q] = 0\,.$$

Por tanto,

$$\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_X\,[P\,;Q] = 0\,,$$

para todo campo vectorial invariante por la derecha $Y \in \mathcal{X}_\rho(G)$, lo que demuestra, según el Lema 2.1, que $\mathrm{L}_X[P\,;Q]$ es invariante por la izquierda. ∎

Definición 2.7 *Sea $Q \in \wedge^q(G)$ tal que $Q(e)=0$. Se denomina derivada intrínseca de Q en $e \in G$ a la aplicación lineal $Q^{\mathrm{L}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \wedge^q\mathfrak{g}$ definida por:*

$$Q^{\mathrm{L}}(x) = \left(\mathrm{L}_X Q\right)(e)\,,$$

donde $X \in \mathcal{X}(G)$ es un campo vectorial cualquiera tal que $X(e) = x$.

La definición es coherente. Es decir, si $Q(e)=0$, $\left(\mathrm{L}_X Q\right)(e)$ depende sólo del valor de X en $e \in G$.

En efecto, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \wedge_1(G)$ 1-formas sobre el grupo, entonces (ver por ejemplo: Abraham, Marsden, Ratiu [1983])

$$\left(\mathrm{L}_X Q\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \mathrm{L}_X\left(Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\right) - \sum_{i=1}^{q} Q\left(\alpha_1, \ldots, \mathrm{L}_X\alpha_i, \ldots, \alpha_q\right)\,. \qquad \text{(i)}$$

Como por hipótesis $Q(e)=0$, tenemos:

$$\left(\mathrm{L}_X Q\right)(e)\left(\alpha_1(e), \ldots, \alpha_q(e)\right) = \left(\mathrm{L}_X\left(Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\right)\right)(e) = d\left(Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\right)(e)\cdot X(e)\,,$$

observandose que $\left(\mathrm{L}_X Q\right)(e)$ no depende mas que del valor que tiene el campo X en $e \in G$.

Proposición 2.9 (Lu J. H., Weinstein A. [1990]) *Sea G un grupo de Lie conexo y $Q \in \wedge^p(G)$ con la propiedad de Drinfeld. Entonces $Q = 0$ si y sólo si $Q^{\mathrm{L}} = 0$.*

Prueba Por hipótesis se tiene que $Q(e) = 0$ y $\mathrm{L}_{x^\lambda} Q$ es invariante por la izquierda para todo campo vectorial invariante por la izquierda $x^\lambda \in \mathcal{X}_\lambda(G)$.

Si $Q = 0$, entonces $Q^{\mathrm{L}} = 0$ trivialmente.

Recíprocamente, si $Q^{\mathrm{L}} = 0$, por definición, $(\mathrm{L}_X Q)(e) = 0$ para todo campo vectorial $X \in \mathcal{X}(G)$. En particular, para todo campo x^λ invariante por la izquierda, $(\mathrm{L}_{x^\lambda} Q)(e) = 0$. Pero como Q satisface la propiedad de Drinfeld, el Teorema 2.4 implica que $\mathrm{L}_{x^\lambda} Q$ es invariante por la izquierda, luego $\mathrm{L}_{x^\lambda} Q = 0$. Es decir, Q es invariante por la derecha. Ahora bién, $Q(e) = 0$, entonces Q es nulo. ∎

Teorema 2.5 (Drinfeld V. G. [1983]) *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo, $(\mathfrak{g}; [\,;\,])$ el álgebra de Lie de G. Toda estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ define una estructura de Lie-Poisson sobre G, tal que la estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ determinada por el Teorema 2.2 de la Sección 2.2.1 coincide con la dada.*

Prueba Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie del grupo G. Dado un 1-cociclo $\epsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$, existe $l : G \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{g}$, 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de G, tal que $T_e l = \epsilon$ (Proposición 1.8 de la Sección 1.1.3). Por tanto, si $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \epsilon)$ es la estructura de biálgebra de Lie dada, se puede definir sobre G el tensor 2-contravariante antisimétrico:

$$\Lambda(g) = (T_e \rho_g)^{\otimes 2}\, l(g)\,.$$

(1) Teniendo en cuenta la Observación que sigue al Teorema 2.1 de la Sección 2.2.1, el 2-tensor Λ, así definido, satisface la propiedad de Drinfeld, por ser $l : G \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{g}$ un 1-cociclo de G con respecto a la representación adjunta.

(2) Comprobemos que Λ es un 2-tensor de Poisson, es decir, que $[\Lambda\,;\Lambda] = 0$.

Como el 2-tensor Λ satisface la propiedad de Drinfeld, también la satisface el corchete de Schouten $[\Lambda\,;\Lambda]$ (Proposición 2.8). Entonces, teniendo en cuenta la Proposición 2.9, para demostrar que $[\Lambda\,;\Lambda]$ se anula es suficiente verificar que $[\Lambda\,;\Lambda]^{\mathrm{L}} = 0$.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(G)$ son funciones cualesquiera y $x \in \mathfrak{g}$ se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}[] &[\Lambda\,;\Lambda]^{\mathrm{L}}(x)\left(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)\right) = \\ &\qquad = 2\left\langle \epsilon^t\left(d\varphi_3(e) \otimes \epsilon^t(d\varphi_1(e) \otimes d\varphi_2(e))\right)\,;\, x\right\rangle + \text{p.c.}\,. \end{aligned} \tag{j}$$

En efecto, por definición:

$$[\Lambda\,;\Lambda]^{\mathrm{L}}(x)\left(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)\right) = \left(\mathrm{L}_{x^\lambda}[\Lambda\,;\Lambda]\right)(e)\left(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)\right)\,,$$

siendo $x^\lambda \in \mathcal{X}_\lambda(G)$ el campo invariante por la izquierda tal que $x^\lambda(e) = x \in \mathfrak{g}$. Entonces, como $[\Lambda\,;\Lambda](e) = 0$, teniendo en cuenta (i), se tiene

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{L}_{x^\lambda}[\Lambda\,;\Lambda]\right)(e)\left(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)\right) = \\ &\qquad = \mathrm{L}_{x^\lambda}\left(\,[\Lambda\,;\Lambda]\left(d\varphi_1; d\varphi_2; d\varphi_3\right)\right)(e) = \\ &\qquad = \frac{d}{dt}\left([\Lambda\,;\Lambda]\left(d\varphi_1; d\varphi_2; d\varphi_3\right)\right)(\exp tx)\Big|_{t=0}\,. \end{aligned} \tag{k}$$

Definamos la aplicación bilineal sobre $\mathcal{C}^\infty(G)$:

$$\{\varphi_1\,;\varphi_2\} = \Lambda(d\varphi_1; d\varphi_2)\,; \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(G)\,.$$

Por el Teorema 2.1 de la Sección 1.2.2, se sabe que

$$[\Lambda\,;\Lambda]\,(d\varphi_1; d\varphi_2; d\varphi_3) = 2\,\{\{\varphi_1\,;\varphi_2\}\,;\varphi_3\} + \text{p.c.}\,,$$

y sustituyendo en (k),

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_{x^\lambda}\,[\Lambda\,;\Lambda]\,)\,(e)\,(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)) &= \\ &= 2\frac{d}{dt}\,\{\{\varphi_1\,;\varphi_2\}\,;\varphi_3\}\,(\exp tx)|_{t=0} + \text{p.c.} = \\ &= 2d\,\{\{\varphi_1\,;\varphi_2\}\,;\varphi_3\}\,(e)(x) + \text{p.c.}\,.\end{aligned} \tag{l}$$

Ahora bién, teniendo en cuenta la observación que sigue a la Proposición 2.3, se tiene:

$$d\{\varphi_1\,;\varphi_2\}(e) = \epsilon^{\mathrm{t}}\,(d\varphi_1(e) \otimes d\varphi_2(e))\;,$$

de forma que, sustituyendo en (l),

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}_{x^\lambda}\,[\Lambda\,;\Lambda]\,)\,(e)\,(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)) &= \\ &= 2\,\langle \epsilon^{\mathrm{t}}\,(d\,(\{\varphi_1\,;\varphi_2\}\,)\,(e) \otimes d\varphi_3(e)\,; x\rangle + \text{p.c.} = \\ &= 2\,\langle \epsilon^{\mathrm{t}}\,(\epsilon^{\,\mathrm{t}}(d\varphi_1(e) \otimes d\varphi_2(e)) \otimes d\varphi_3(e))\;; x\rangle + \text{p.c.}\,,\end{aligned}$$

obteniendose la igualdad (j):

$$[\Lambda\,;\Lambda]^{\mathrm{L}}\,(x)\,(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)) = 2\,\langle \epsilon^{\mathrm{t}}\,(\epsilon^{\mathrm{t}}(d\varphi_1(e) \otimes d\varphi_2(e)) \otimes d\varphi_3(e))\;; x\rangle + \text{p.c.}\,.$$

Al ser $(\mathfrak{g}; [\,;]; \epsilon)$ una biálgebra de Lie, ϵ^{t} define una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$, entonces de la igualdad (j) obtenemos que: $[\Lambda\,;\Lambda]^{\mathrm{L}}\,(d\varphi_1(e); d\varphi_2(e); d\varphi_3(e)) = 0$.

(3) Finalmente, por construcción, la estructura de biálgebra de Lie que determina coincide con la de partida. ■

2.3 Biálgebras de Lie Exactas y Ecuación Clásica de Yang-Baxter

2.3.1 Corchete de Schouten de Campos de 2-Tensores Invariantes

Hemos visto (Sección 1.2.4, expresión (a)) que, si $M \in \wedge^p(G)$ y $N \in \wedge^q(G)$ son campos tensoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G, el corchete de Schouten $[M\,;N] \in \wedge^{p+q-1}(G)$ es un campo tensorial sobre G también invariante.

En el caso de 2-tensores invariantes, hemos desarrollado (Proposición 2.5 de la Sección 1.2.5) otra demostración de la invariancia del corchete de Schouten, utilizando la relación entre las componentes invariantes y las componetes en una carta natural. Esta forma de proceder ha puesto de manifiesto el elemento de $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ que lo define por traslación a la izquierda.

Recordemos el resultado. Sean $\Lambda, \Lambda' \in \wedge^2(G)$ campos 2-contravariantes antisimétricos, invariantes sobre el grupo G y $r, r' \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ los elementos que los definen por traslación a la izquierda, es decir,

$$\Lambda(g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 2} r\,, \quad \Lambda'(g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 2} r'\,.$$

Si $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ es el álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ y P^{23} es la permutación de los factores 2 y 3 en el producto tensorial $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, definamos los elementos:

$$r_{12} = r \otimes I\,, \quad r_{13} = P^{23} r_{12} P^{23}\,, \quad r_{23} = I \otimes r \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}\,,$$

y

$$[r_{ij}\,; r'_{mn}] = r_{ij}\, r'_{mn} - r'_{mn}\, r_{ij}\,,$$

considerando el producto en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$.

Entonces, el corchete de Schouten $[\Lambda\,; \Lambda']$ está definido por traslación a la izquierda del elemento de $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}[r\,; r'] = -\,\big(\, &[r_{12}\,; r'_{13}] + [r_{12}\,; r'_{23}] + [r_{13}\,; r'_{23}] + \\ &+ [r'_{12}\,; r_{13}] + [r'_{12}\,; r_{23}] + [r'_{13}\,; r_{23}]\,\big)\,,\end{aligned} \tag{a}$$

es decir,

$$[\Lambda\,; \Lambda'](g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 3} [r\,; r']\,.$$

La siguiente proposición pone en relación la Definición 2.1 del corchete de Schouten dada en la de la Sección 1.2.2 con la fórmula que introducen Gel'fand y Dorfman [1981] para el caso de tensores 2-contravariantes.

A partir de esta última se obtiene otra expresión, útil en lo que sigue, del elemento $[r\,; r'] \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ definido en (a).

Proposición 3.1 *Sea M una variedad diferenciable y $\Lambda, \Lambda' \in \wedge^2(M)$ campos tensoriales 2-contravariantes antisimétricos sobre M. El corchete de Schouten de Λ y Λ' viene dado por la siguiente expresión:*

$$[\Lambda\,; \Lambda'](\alpha^1; \alpha^2; \alpha^3) = \langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\alpha^2\,; \#'\alpha^3 \rangle + \langle \mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\alpha^2\,; \#\alpha^3 \rangle + \text{p.c.}\,,$$

donde $\#, \#' : \wedge_1(M) \longrightarrow \wedge^1(M)$ son los homomorfismos definidos por: $\langle \beta\,; \#\alpha \rangle = \Lambda(\beta; \alpha)$ para todo par de 1-formas $\alpha, \beta \in \wedge_1(M)$.

Teniendo en cuenta la igualdad (ver por ejemplo: Abraham, Marsden, Ratiu [1983]):

$$(\mathrm{L}_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_k) = \mathrm{L}_{x_0}\left(\omega(X_1, \dots, X_k)\right) - \sum_{l=1}^{k} \omega\left(X_1, \dots, \mathrm{L}_{X_0}X_l, \dots, X_k\right)\,,$$

donde $\omega \in \wedge_k(M)$ es una k-forma cualquiera sobre la variedad diferenciable M y $X_0, X_1, \dots, X_k \in \wedge^1(M)$ son campos vectoriales cualesquiera sobre M, la expresión de $[\Lambda\,; \Lambda']$ dada en la Proposición 3.1 se escribe también así:

$$\begin{aligned}[\Lambda\,; \Lambda'](\alpha^1; \alpha^2; \alpha^3) = \big(&\mathrm{L}_{\#\alpha^1} \langle \alpha^2\,; \#'\alpha^3 \rangle + \mathrm{L}_{\#'\alpha^1} \langle \alpha^2\,; \#\alpha^3 \rangle \big) - \\ &- \big(\langle \alpha^2\,; \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^3 \rangle + \langle \alpha^2\,; \mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\alpha^3 \rangle \big) + \text{p.c.}\,.\end{aligned} \tag{b}$$

En particular:

$$[\Lambda\,; \Lambda](\alpha^1; \alpha^2; \alpha^3) = 2\,\langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\alpha^2\,; \#\alpha^3 \rangle + \text{p.c.}\,, \tag{c}$$

o bien

$$[\Lambda\,; \Lambda](\alpha^1; \alpha^2; \alpha^3) = 2\,\big(\mathrm{L}_{\#\alpha^1} \langle \alpha^2\,; \#\alpha^3 \rangle - \langle \alpha^2\,; \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#\alpha^3 \rangle\big) + \text{p.c.}\,.$$

Prueba En el caso de 2-tensores, la expresión en componentes del corchete de Schouten (Sección 1.2.2, expresión (g)) es:

$$[\Lambda\,;\Lambda']^{ijk} = \frac{1}{2!}\left(\epsilon^{ijk}_{nrs}\Lambda^{tn}\partial_t(\Lambda')^{rs} + \epsilon^{ijk}_{mns}\partial_t\Lambda^{mn}(\Lambda')^{ts}\right) .$$

Entonces, como $(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\alpha^3)_{ijk} = \epsilon^{abc}_{ijk}\alpha^1_a\alpha^2_b\alpha^3_c$, tenemos:

$$\begin{aligned} i_{[\Lambda\,;\Lambda']}(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\alpha^3) &= \frac{1}{3!}[\Lambda\,;\Lambda']^{ijk}(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\alpha^3)_{ijk} = \\ &= \frac{1}{3!}\frac{1}{2!}\left(\epsilon^{ijk}_{nrs}\Lambda^{tn}\partial_t(\Lambda')^{rs} + \epsilon^{ijk}_{mns}\partial_t\Lambda^{mn}(\Lambda')^{ts}\right)\epsilon^{abc}_{ijk}\alpha^1_a\alpha^2_b\alpha^3_c . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\epsilon^{ijk}_{mns}\epsilon^{abc}_{ijk} = 3!\epsilon^{abc}_{mns} ,$$

al desarrollar las sumas de la expresión anterior se llega a:

$$i_{[\Lambda\,;\Lambda']}(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\alpha^3) = \left(\Lambda^{tn}(\partial_t(\Lambda')^{rs})\alpha^1_n\alpha^2_r\alpha^3_s + (\partial_t\Lambda^{mn}(\Lambda')^{ts}\alpha^1_m\alpha^2_n\alpha^3_s\right) + \text{p.c.} . \tag{d}$$

Por otra parte,

$$\left\langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^2\,;\#'\alpha^3\right\rangle = \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\left(\alpha^2(\#'\alpha^3)\right) - \left\langle\alpha^2\,;\mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^3\right\rangle ,$$

y en componentes,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^2\,;\#'\alpha^3\right\rangle &= \left(\partial_t\Lambda^{ik}\right)(\Lambda')^{tl}\alpha^1_k\alpha^2_i\alpha^3_l + \\ &+ \Lambda^{tl}(\Lambda')^{ik}\alpha^1_l\left(\partial_t\alpha^2_i\right)\alpha^3_k + \Lambda^{ik}(\Lambda')^{tl}\left(\partial_t\alpha^1_k\right)\alpha^2_i\alpha^3_l . \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\alpha^2\,;\#'\alpha^3\right\rangle + \left\langle \mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\alpha^2\,;\#\alpha^3\right\rangle + \text{p.c.} = \\ &\quad = \Lambda^{tl}\left(\partial_t(\Lambda')^{ik}\right)\alpha^1_k\alpha^2_i\alpha^3_l + \left(\partial_t\Lambda^{ik}\right)(\Lambda')^{tl}\alpha^1_k\alpha^2_i\alpha^3_l + \\ &\quad + \Lambda^{tl}(\Lambda')^{ik}\alpha^1_l\left(\partial_t\alpha^2_i\right)\alpha^3_k + \Lambda^{ik}(\Lambda')^{tl}\alpha^1_l\left(\partial_t\alpha^2_i\right)\alpha^3_k + \\ &\quad + \Lambda^{ik}(\Lambda')^{tl}\left(\partial_t\alpha^1_k\right)\alpha^2_i\alpha^3_l + \Lambda^{tl}(\Lambda')^{ik}\left(\partial_t\alpha^1_k\right)\alpha^2_i\alpha^3_l + \text{p.c.} . \end{aligned}$$

Debido a la antisimetría de los tensores Λ y Λ', todos los términos en los que aparecen derivadas de las componentes de las 1-formas se cancelan entre sí, así pues,

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{L}_{\#\alpha^1}\alpha^2\,;\#'\alpha^3\right\rangle + \left\langle \mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\alpha^2\,;\#\alpha^3\right\rangle + \text{p.c.} = \\ &\quad = \Lambda^{tl}\left(\partial_t(\Lambda')^{ik}\right)\alpha^1_k\alpha^2_i\alpha^3_l + \left(\partial_t\Lambda^{ik}\right)(\Lambda')^{tl}\alpha^1_k\alpha^2_i\alpha^3_l + \text{p.c.} . \end{aligned} \tag{e}$$

Al ser iguales las expresiones (d) y (e), queda demostrada la proposición. ■

Sean, ahora, Λ y Λ' campos de tensores sobre G, 2-contravariantes, antisimétricos e invariantes por traslación a la izquierda. Sean $r \equiv \Lambda(e) \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ y $r' \equiv \Lambda'(e) \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ los tensores que los definen, es decir,

$$\Lambda(g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 2}r , \quad \Lambda'(g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 2}r' .$$

Consideremos los homomorfismos $\tilde{r},\tilde{r}' \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ asociados a los tensores r, r' mediante el isomorfismo $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \cong Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ definido en (c) de la Sección 1.1.1. Es claro que $\tilde{r}$ y $\tilde{r}'$ son las restricciones al elemento unidad de los homomorfismos $\#, \#'$, es decir, $\tilde{r} \equiv \#_e : (T_eG)^* \longrightarrow T_eG$ y $\tilde{r}' \equiv \#'_e : (T_eG)^* \longrightarrow T_eG$. Con estas notaciones tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *El elemento* $[r\,;r'] \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ *que define por traslación a la izquierda al corchete de Schouten* $[\Lambda\,;\Lambda']$ *viene dado por la expresión:*

$$[r\,;r'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3) = \langle \alpha^3\,;[\tilde{r}(\alpha^1)\,;\tilde{r}'(\alpha^2)] + [\tilde{r}'(\alpha^1)\,;\tilde{r}(\alpha^2)]\rangle + \text{p.c.}\,,$$

donde $\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3 \in \mathfrak{g}^*$.

Prueba Sean Λ y Λ' los 2-tensores sobre G invariantes por traslación a la izquierda, definidos por r y r' respectivamente.

Para calcular $[\Lambda\,;\Lambda'](e)$ basta calcular la expresión $[\Lambda\,;\Lambda'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3)$ en un punto cualquiera de G, siendo α^1, α^2 y α^3 formas diferenciales sobre G invariantes por traslación a la izquierda, ya que en estas condiciones

$$\left([\Lambda\,;\Lambda'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3)\right)(g) = \left([\Lambda\,;\Lambda'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3)\right)(e)\,,$$

para todo $g \in G$.

La expresión (b) del corchete de Schouten es:

$$\begin{aligned}[\Lambda\,;\Lambda'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3) = &-\left(\langle\alpha^2\,;\mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^3\rangle + \langle\alpha^2\,;\mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\#\alpha^3\rangle + \text{p.c.}\right) + \\ &+\left(\mathrm{L}_{\#\alpha^1}\langle\alpha^2\,;\#'\alpha^3\rangle + \mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\langle\alpha^2\,;\#\alpha^3\rangle + \text{p.c.}\right)\,, \qquad \text{(f)}\end{aligned}$$

Como la invariancia de las formas α^i $(i=1,2,3)$, implica, obviamente, la de los campos $\#\alpha^i$ y $\#'\alpha^i$ $(i=1,2,3)$, se tiene:

$$[\#\alpha^i\,;\#'\alpha^j](e) = [(\#\alpha^i)(e)\,;(\#'\alpha^j)(e)] = [\tilde{r}(\alpha^i(e))\,;\tilde{r}'(\alpha^j(e))]\,.$$

Entonces, el valor en $e \in G$ de la primera suma circular, en la expresión (f), se escribe así:

$$\begin{aligned}&\left(\langle\alpha^2\,;\mathrm{L}_{\#\alpha^1}\#'\alpha^3\rangle + \langle\alpha^2\,;\mathrm{L}_{\#'\alpha^1}\#\alpha^3\rangle\right)(e) + \text{p.c.} = \\ &\quad= \langle\alpha^2(e)\,;[\tilde{r}(\alpha^1(e))\,;\tilde{r}'(\alpha^3(e))]\rangle + \langle\alpha^2(e)\,;[\tilde{r}'(\alpha^1(e))\,;\tilde{r}(\alpha^3(e))]\rangle + \text{p.c.}.\end{aligned}$$

La invariancia de campos y formas implica, también, que las funciones sobre G $\langle\alpha^i\,;\#\alpha^j\rangle$ y $\langle\alpha^i\,;\#'\alpha^j\rangle$ son constantes. La derivadas de Lie que aparecen en la segunda suma circular de la expresión (f) son, pues, nulas y ésta también lo es.

Por tanto,

$$\begin{aligned}&[\Lambda\,;\Lambda'](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3)(e) = \\ &\quad= -\left(\langle\alpha^2(e)\,;[\tilde{r}(\alpha^1(e))\,;\tilde{r}'(\alpha^3(e))]\rangle + \langle\alpha^2(e)\,;[\tilde{r}'(\alpha^1(e))\,;\tilde{r}(\alpha^3)(e))]\rangle\right) + \text{p.c.}\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta la antisimetría de $[\Lambda\,;\Lambda']$, queda demostrada la proposición. ■

En particular, si $r = r'$,

$$[r\,;r](\alpha^1;\alpha^2;\alpha^3) = 2\,\langle\alpha^3\,;[\tilde{r}(\alpha^1)\,;\tilde{r}(\alpha^2)]\rangle + \text{p.c.}\,, \qquad \text{(g)}$$

y la ecuación clásica de Yang-Baxter $[r\,;r] = 0$ (ver Teorema 2.7 de la Sección 1.2.5) se puede expresar así:

$$\langle\alpha^3\,;[\tilde{r}(\alpha^1)\,;\tilde{r}(\alpha^2)]\rangle + \text{p.c.} = 0\,,$$

para todo $\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3 \in \wedge_1(\mathfrak{g})$.

2.3.2 Biálgebras de Lie Exactas y Grupos de Lie-Poisson Exactos

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Las 0-cocadenas en la cohomología de $\mathfrak{g}$ relativa a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ son los elementos $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ (ver Sección 1.1.1).

Por aplicación del operador de cohomología se obtienen 1-cociclos exactos (expresión (b) de 1.1.1):

$$\tilde{\delta}\, r : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow (\tilde{\delta}\, r)(x) = \left(\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x\right)(r) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}\,. \tag{a}$$

Definición 3.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y $\epsilon = \tilde{\delta}\, r$ el 1-cociclo exacto de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ obtenido a partir de r. Si la aplicación transpuesta $\epsilon^{t} : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ define una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$, se dice que $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\, r)$ es una biálgebra de Lie exacta.*

En las tres proposiciones siguientes estudiaremos las condiciones sobre $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ para que $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\, r)$ sea una biálgebra de Lie exacta.

Para ello, volveremos a hacer uso del isomorfismo $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ definido por:

$$\langle \xi\,; \tilde{r}(\eta) \rangle = \langle \xi \otimes \eta\,; r \rangle\,, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*\,. \tag{b}$$

El 1-cociclo $\tilde{\delta}\, r$ se escribe en términos de $\tilde{r}$ de la siguiente forma (ver Sección 1.1.1, expresión (f)):

$$\tilde{\delta}\, \tilde{r} : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow (\tilde{\delta}\, \tilde{r})(x) = \mathrm{ad}_x \circ \tilde{r} - \tilde{r} \circ \mathrm{ad}^*_x \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})\,. \tag{c}$$

Como la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es $\widehat{\mathrm{ad}_x} \equiv \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x$, la igualdad (a) implica que $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es invariante por la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ si y sólo si $\tilde{\delta}\, r(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Teniendo en cuenta (c), la invariancia de $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ por la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ se escribe así:

$$\mathrm{ad}_x \circ \tilde{r} - \tilde{r} \circ \mathrm{ad}^*_x = 0\,, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}\,. \tag{d}$$

Proposición 3.3 *Sea $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ el homomorfismo asociado. La aplicación bilineal $[\,;\,]^{r}_{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por el 1-cociclo $(\tilde{\delta}\, r)^{t} : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es:*

$$[\xi\,; \eta]^{r}_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\, \xi + \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}^{t}(\xi)}\, \eta\,, \quad \textit{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*\,. \tag{e}$$

Prueba En efecto, por construcción, el corchete sobre $\mathfrak{g}^*$ definido por $(\tilde{\delta}\, r)^{t}$ viene dado por la expresión:

$$[\xi\,; \eta]^{r}_{\mathfrak{g}^*} = (\tilde{\delta}\, r)^{t}(\xi \otimes \eta)\,.$$

Por tanto,

$$\langle (\tilde{\delta}\, r)^{t}(\xi \otimes \eta)\,; x \rangle = \langle \xi \otimes \eta\,; \tilde{\delta}\, r(x) \rangle = \langle \xi\,; \tilde{\delta}\, \tilde{r}(x)(\eta) \rangle\,.$$

Ahora bién, sustituyendo la expresión (c) de $\tilde{\delta}\, \tilde{r}(x)$ en la igualdad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle (\tilde{\delta}\, r)^{t}(\xi \otimes \eta)\,; x \rangle &= \langle \xi\,; \mathrm{ad}_x\left(\tilde{r}(\eta)\right) \rangle - \langle \xi\,; \tilde{r}\left(\mathrm{ad}^*_x(\eta)\right) \rangle = \\
&= -\langle \xi\,; \mathrm{ad}_{\tilde{r}(\eta)}\, x \rangle - \langle \tilde{r}^{t}(\xi)\,; \mathrm{ad}^*_x(\eta) \rangle = \langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\, \xi\,; x \rangle + \langle \mathrm{ad}_x(\tilde{r}^{t}(\xi))\,; \eta \rangle = \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\, \xi\,; x \rangle - \langle \mathrm{ad}_{\tilde{r}^{t}(\xi)}\, x\,; \eta \rangle = \langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\, \xi\,; x \rangle + \langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}^{t}(\xi)}\, \eta\,; x \rangle\,,
\end{aligned}$$

es decir,

$$(\tilde{\delta}\, r)^{t}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\, \xi + \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}^{t}(\xi)}\, \eta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

que es la expresión del enunciado. ∎

Proposición 3.4 *Sea $r = s + a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ la descomposición de r en su parte simétrica s y su parte antisimétrica a. Para que la aplicación bilineal sobre $\mathfrak{g}^*$ definida en* (e) *sea antisimétrica, es necesario y suficiente que s sea invariante por la representación adjunta, es decir, que:*

$$\mathrm{ad}_x \circ \tilde{s} = \tilde{s} \circ \mathrm{ad}_x^* , \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g} ,$$

o bién, equivalentemente,

$$\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)} \eta + \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)} \xi = 0 , \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^* ,$$

donde $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ es el homomorfismo asociado a $s \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ por el isomorfimo definido en (b).

En este caso se tiene $\tilde{\delta}\, r = \tilde{\delta}\, a$ y (e) *viene dado por la expresión:*

$$[\xi\,;\eta]^r_{\mathfrak{g}^*} = [\xi\,;\eta]^a_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)} \xi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)} \eta , \tag{f}$$

siendo $\tilde{a} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ el homomorfismo asociado al 2-tensor $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$.

Prueba Debido a la antisimetría de $a \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, tenemos $\tilde{a}^t = -\tilde{a}$ y la simetría de $s \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ quiere decir que $\tilde{s} = \tilde{s}^t$.

Haciendo uso de estas propiedades, la aplicación bilineal sobre $\mathfrak{g}^*$, definida en (e), se escribe así:

$$[\xi\,;\eta]^r_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)} \xi + \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}^t(\xi)} \eta = -\,\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)} \eta + \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)} \xi + \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)} \xi + \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)} \eta .$$

Por tanto, $[\,;]^r_{\mathfrak{g}^*}$ es antisimétrica si y sólo si:

$$\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)} \eta + \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)} \xi = 0 .$$

Ahora bién, haciendo uso otra vez de la simetriía de s, de la igualdad anterior deducimos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)} \eta + \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)} \xi\,; x \right\rangle = \left\langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)} \eta\,; x \right\rangle + \left\langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)} \xi\,; x \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathrm{ad}^*_x \eta\,; \tilde{s}(\xi) \right\rangle - \left\langle \mathrm{ad}^*_x \xi\,; \tilde{s}(\eta) \right\rangle = \left\langle \eta\,; \mathrm{ad}_x \circ \tilde{s}(\xi) \right\rangle - \left\langle \eta\,; \tilde{s} \circ \mathrm{ad}^*_x(\xi) \right\rangle . \end{aligned}$$

Como esta igualdad es válida para todo $\eta \in \mathfrak{g}^*$ obtenemos finalmente que

$$\mathrm{ad}_x \circ \tilde{s} = \tilde{s} \circ \mathrm{ad}^*_x ,$$

que es la condición (c) de invariancia por la representación adjunta del 2-tensor s, expresada en términos del homomorfismo asociado $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$. ■

Lema 3.1 *Sea $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ antisimétrico y $\tilde{a} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ el homomorfismo asociado por* (b). *Sea $[a\,;a] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el 3-tensor definido en (g) de 2.3.1:*

$$[a\,;a](\xi^1;\xi^2;\xi^3) = 2\left\langle \xi^3\,; [\tilde{a}(\xi^1)\,; \tilde{a}(\xi^2)] \right\rangle + \text{p.c.} ; \qquad \xi^1, \xi^2, \xi^3 \in \mathfrak{g}^* ,$$

y $[\,;]^a_{\mathfrak{g}^*}$ la aplicación bilineal sobre $\mathfrak{g}^*$ definida en (f):

$$[\xi_1\,;\xi_2]^a_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi_2)} \xi_1 - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi_1)} \xi_2 ; \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^* .$$

Entonces, para todo $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}^*$ y para todo $x \in \mathfrak{g}$, se tiene:

$$\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{ad}_x}[a\,;a](\xi^1;\xi^2;\xi^3) = \left\langle \left[\xi^3\,; [\xi^1\,;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}\right]^a_{\mathfrak{g}^*}\,; x \right\rangle + \text{p.c.} ,$$

siendo $\widehat{\mathrm{ad}_x} \equiv \mathrm{ad}_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ad}_x$ la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$.

Prueba A partir de la expresión de $[\,;]^a_{\mathfrak{g}^*}$, para todo $\xi^1,\xi^2,\xi^3\in\mathfrak{g}^*$ se tiene:

$$\begin{aligned}[\xi^3;[\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}]^a_{\mathfrak{g}^*} &= \mathrm{ad}^*_{\tilde a([\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*})}\xi^3-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^3)}[\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}=\\ &=\mathrm{ad}^*_{\tilde a([\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*})}\xi^3-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^3)}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^2)}\xi^1-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(x^1)}\xi^2\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x\in\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\langle[\xi^3;[\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}]^a_{\mathfrak{g}^*};x\rangle &= -\langle\xi^3;\mathrm{ad}_{\tilde a([\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*})}x\rangle+\langle\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^2)}\xi^1-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^1)}\xi^2;\mathrm{ad}_{\tilde a(\xi^3)}x\rangle=\\ &=\langle\xi^3;[\tilde a([\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*});x]\rangle-\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle+\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle=\\ &=\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^3;\tilde a(\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^1)}\xi^2-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^2)}\xi^1)\rangle-\\ &\quad-\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle+\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle,\end{aligned}$$

y la suma circular sobre los indices $1,2,3$ es:

$$\begin{aligned}\langle[\xi^3;[\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}]^a_{\mathfrak{g}^*};x\rangle+\text{p.c.} &= \left(\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^3;\tilde a(\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^1)}\xi^2-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^2)}\xi^1)\rangle+\text{p.c.}\right)-\\ &\quad-\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle+\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle-\\ &\quad-\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^3);[\tilde a(\xi^1);x]]\rangle+\langle\xi^3;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^1);x]]\rangle-\\ &\quad-\langle\xi^3;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^2);x]]\rangle+\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^3);[\tilde a(\xi^2);x]]\rangle.\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Jacobi del corchete de $\mathfrak{g}$, los seis últimos términos se pueden escribir así:

$$\begin{aligned}\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^3);[\tilde a(\xi^2);x]]\rangle-\langle\xi^1;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle&=\langle\xi^1;[x;[\tilde a(\xi^2);\tilde a(\xi^3)]]\rangle,\\ \langle\xi^2;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^3);x]]\rangle-\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^3);[\tilde a(\xi^1);x]]\rangle&=\langle\xi^2;[x;[\tilde a(\xi^3);\tilde a(\xi^1)]]\rangle,\\ \langle\xi^3;[\tilde a(\xi^2);[\tilde a(\xi^1);x]]\rangle-\langle\xi^3;[\tilde a(\xi^1);[\tilde a(\xi^2);x]]\rangle&=\langle\xi^3;[x;[\tilde a(\xi^1);\tilde a(\xi^2)]]\rangle.\end{aligned}$$

Así pues, sustituyendo en la expresión anterior se llega a la igualdad:

$$\begin{aligned}\langle[\xi^3;[\xi^1;\xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}]^a_{\mathfrak{g}^*};x\rangle+\text{p.c.}=&\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^3;\tilde a(\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^1)}\xi^2-\mathrm{ad}^*_{\tilde a(\xi^2)}\xi^1)\rangle+\\ &+\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^3;[\tilde a(\xi^2);\tilde a(\xi^1)]\rangle+\text{p.c.}.\end{aligned}\tag{g}$$

Por otra parte, por definición de acción adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, se satisface:

$$\widehat{\mathrm{ad}_x}[a;a](\xi^1;\xi^2;\xi^3)=-[a;a](\mathrm{ad}^*_x\xi^1;\xi^2;\xi^3)-[a;a](\xi^1;\mathrm{ad}^*_x\xi^2;\xi^3)-[a;a](\xi^1;\xi^2;\mathrm{ad}^*_x\xi^3).$$

Teniendo en cuenta la antisimetría de $[a;a]$, la expresión anterior se escribe así:

$$\widehat{\mathrm{ad}_x}[a;a](\xi^1;\xi^2;\xi^3)=-[a;a](\mathrm{ad}^*_x\xi^1;\xi^2;\xi^3)+\text{p.c.},$$

y haciendo uso de la expresión (g) de la Sección 2.3.1, tenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ad}_x}[a;a](\xi^1;\xi^2;\xi^3)&=-2\big(\langle\xi^3;[\tilde a(\mathrm{ad}^*_x\xi^1);\tilde a(\xi^2)]\rangle+\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^1;[\tilde a(\xi^2);\tilde a(\xi^3)]\rangle+\\ &\quad+\langle\xi^2;[\tilde a(\xi^3);\tilde a(\mathrm{ad}^*_x\xi^1)]\rangle\big)+\text{p.c.}=\\ &=-2\left(\langle\mathrm{ad}^*_x\xi^3;[\tilde a(\xi^1);\tilde a(\xi^2)]\rangle+\text{p.c.}\right)-2\left(\langle\xi^3;[\tilde a(\mathrm{ad}^*_x\xi^1);\tilde a(\xi^2)]\rangle+\text{p.c.}\right)-\\ &\quad-2\left(\langle\xi^3;[\tilde a(\xi^1);\tilde a(\mathrm{ad}^*_x\xi^2)]\rangle+\text{p.c.}\right).\end{aligned}$$

Como $\tilde{a} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ es antisimétrico, es decir, $\langle \tilde{a}(\xi) ; \eta \rangle = -\langle \xi ; \tilde{a}(\eta) \rangle$, la segunda suma circular se puede escribir así:

$$\begin{aligned} -\left\langle \xi^3 ; \left[\tilde{a}(\mathrm{ad}_x^* \xi^1) ; \tilde{a}(\xi^2)\right] \right\rangle + \text{p.c.} &= \left\langle \xi^3 ; \mathrm{ad}_{\tilde{a}(\xi^2)}(\tilde{a}(\mathrm{ad}_x^* \xi^1)) \right\rangle + \text{p.c.} = \\ &= -\left\langle \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi^2)} \xi_3 ; \tilde{a}(\mathrm{ad}_x^* \xi^1) \right\rangle + \text{p.c.} = \left\langle \tilde{a}(\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi^2)} \xi^3) ; \mathrm{ad}_x^* \xi^1 \right\rangle + \text{p.c.}, \end{aligned}$$

de la misma forma, la tercera suma circular es:

$$-\left\langle \xi^3 ; \left[\tilde{a}(\xi^1) ; \tilde{a}(\mathrm{ad}_x^* \xi^2)\right] \right\rangle + \text{p.c.} = -\left\langle \tilde{a}(\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi^1)} \xi^3) ; \mathrm{ad}_x^* \xi^2 \right\rangle + \text{p.c.},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{ad}_x}[a ; a](\xi^1 ; \xi^2 ; \xi^3) = -2 \left(\left\langle \mathrm{ad}_x^* \xi^3 ; \left[\tilde{a}(\xi^1) ; \tilde{a}(\xi^2)\right] \right\rangle + \text{p.c.} \right) + \\ + 2\left\langle \tilde{a}(\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi^2)} \xi^3) ; \mathrm{ad}_x^* \xi^1 \right\rangle + \text{p.c.} - 2\left\langle \tilde{a}(\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi^1)} \xi^3) ; \mathrm{ad}_x^* \xi^2 \right\rangle + \text{p.c.}. \end{aligned} \tag{h}$$

Por lo tanto, comparando las expresiones (g) y (h), se tiene el resultado. ∎

Como consecuencia directa del lema anterior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.5 *Sea $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ antisimétrico y $\tilde{a} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ el homomorfismo asociado por* (b). *Para que el corchete* (f)*:*

$$[\xi ; \eta]^a_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)} \xi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)} \eta,$$

satisfaga la identidad de Jacobi, es necesario y suficiente que el 3-tensor $[a ; a] \in \wedge^3(\mathfrak{g})$ (expresión (g)*, Sección 2.3.1) definido por:*

$$[a ; a](\xi^1 ; \xi^2 ; \xi^3) = 2 \left\langle \xi^3 ; [\tilde{a}(\xi^1) ; \tilde{a}(\xi^2)] \right\rangle + \text{p.c.}, \quad \textit{para todo } \xi^1, \xi^2, \xi^3 \in \mathfrak{g}^*,$$

sea invariante por la representación adjunta, es decir,

$$\widehat{\mathrm{ad}_x}[a ; a] \equiv (\mathrm{ad}_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ad}_x)[a ; a] = 0,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Prueba A partir del Lema 3.1, se observa que $\left(\left\langle \left[\xi^3 ; [\xi^1 ; \xi^2]^a_{\mathfrak{g}^*}\right]^a_{\mathfrak{g}^*} ; x \right\rangle + \text{p.c.} \right) = 0$ si y sólo si $\widehat{\mathrm{ad}_x}[a ; a](\xi^1 ; \xi^2 ; \xi^3) = 0$. ∎

Las Proposiciones 3.4 y 3.5 implican el siguiente enunciado.

Teorema 3.1 (Drinfeld V. G. [1983a]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $r = s + a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ la descomposición de r en su parte simétrica s y su parte antisimétrica a. La condición necesaria y suficiente para que r defina una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$ es que el 2-tensor s y el 3-tensor $[a ; a]$ sean invariantes por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$, es decir:*

$$\widehat{\mathrm{ad}_x} s \equiv (\mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x) s = 0$$

y

$$\widehat{\mathrm{ad}_x}[a ; a] \equiv (\mathrm{ad}_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ad}_x)[a ; a] = 0,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Definición 3.2

(a) *Un elemento $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ antisimétrico tal que para todo $x \in \mathfrak{g}$ $\mathrm{ad}_x[r\,;r] = 0$, se dice que es una solución de la ecuación generalizada de Yang-Baxter.*

Las biálgebras de Lie exactas definidas por una solución de la ecuación generalizada de Yang-Baxter se conocen con el nombre de biálgebras de Lie cuasitriangulares (Drinfeld [1990]).

(b) *Un elemento $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ antisimétrico se dice que es una solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter si $[r\,;r] = 0$.*

Las biálgebras de Lie exactas obtenidas por una solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter se denominan biálgebras de Lie triangulares (Drinfeld [1986]).

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sabemos (Proposición 1.8 de la Sección 1.1.3) que todo 1-cociclo $\Theta : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$, es la aplicación tangente en $e \in G$ de un único 1-cociclo $\theta : G \longrightarrow V$ de G, con respecto a la representación $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ definida por la condición $T_e\phi = \Phi$.

El siguiente Lema proporciona la forma explícita de θ cuando Θ es exacto, en el caso de las representaciones adjuntas de G y de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Por tanto, se puede dar la forma explícita de la estructura de Lie-Poisson sobre G determinada por el Teorema 2.5 de 2.2.3, a partir de una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$.

Lema 3.2 *Sea G un grupo de Lie conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y $\epsilon \equiv \tilde{\delta} r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ un 1-cociclo exacto de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. El 1-cociclo $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ de G con respecto a la representación adjunta sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tal que $T_e l = \epsilon$ viene dado por la expresión:*

$$l(g) = (\mathrm{Ad}_g)^{\otimes 2} r - r\,, \qquad g \in G\,. \tag{h}$$

Prueba Sea $\epsilon \equiv \tilde{\delta} r$ un 1-cociclo exacto de $\mathfrak{g}$. La aplicación $l : G \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definida por (h) es un 1-cociclo, ya que satisface (expresión (b) de la Sección 1.1.2):

$$\begin{aligned} l(gh) &= (\mathrm{Ad}_{gh})^{\otimes 2}\, r - r = (\mathrm{Ad}_g \cdot Ad_h)^{\otimes 2}\, r - r = \\ &= (\mathrm{Ad}_g)^{\otimes 2}\, r - r + (\mathrm{Ad}_g \cdot \mathrm{Ad}_h)^{\otimes 2}\, r - (\mathrm{Ad}_g)^{\otimes 2}\, r = l(g) + (\mathrm{Ad}_g)^{\otimes 2}\,(l(h))\,. \end{aligned}$$

Además se tiene que: $(T_e l)(x) = \mathrm{ad}_x r = \tilde{\delta} r(x) \equiv \epsilon(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. ■

Proposición 3.6 *Sea $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta} r)$ una biálgebra de Lie exacta (por tanto, el 2-tensor r satisface las condiciones del Teorema 3.1) y G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La estructura de Lie-Poisson definida sobre G por $\tilde{\delta} r$ (Teorema 2.5 de la Sección 2.2.3) viene dada por:*

$$\Lambda_r = \Lambda_r^\lambda - \Lambda_r^\rho\,, \tag{i}$$

donde Λ_r^λ es el 2-tensor invariante por traslación a la izquierda definido por r:

$$\Lambda_r^\lambda(g) = (T_e\lambda_g)^{\otimes 2}\,(r)$$

y Λ_r^ρ es el 2-tensor invariante por traslación a la derecha definido por r:

$$\Lambda_r^\rho(g) = (T_e\rho_g)^{\otimes 2}\,(r)\,.$$

Prueba Sea $l : G \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ el 1-cociclo definido en (h). Por ser $(\mathfrak{g};[\,;\,];\tilde{\delta}\,r)$ una biálgebra de Lie exacta y verificarse que $T_e l = \tilde{\delta}\,r$, l define una estructura de Lie-Poisson sobre G (Teorema 2.5 de 2.2.3). Además, el 2-tensor Λ que define la estructura de Lie-Poisson viene dado por (Teorema 2.1 de 2.2.1):

$$\begin{aligned}\Lambda(g) &= \left(T_e\rho_g\right)^{\otimes 2} l(g) = \left(T_e\rho_g\right)^{\otimes 2}(\mathrm{Ad}_g\, r - r) = \\ &= \left(T_e\rho_g \circ T_e(\rho_{g^{-1}} \circ \lambda_g)\right)^{\otimes 2} r - \left(T_e\rho_g\right)^{\otimes 2} r = \left(T_e\lambda_g\right)^{\otimes 2} r - \left(T_e\rho_g\right)^{\otimes 2} r = \\ &= \Lambda_r^{\lambda}(g) - \Lambda_r^{\rho}(g)\,.\end{aligned}$$

■

Corolario *Sea (e_μ) una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $r = r^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ un 2-tensor tal que $(\mathfrak{g};[\,;\,];\tilde{\delta}\,r)$ es una biálgebra de Lie exacta. El corchete de Lie-Poisson sobre el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ viene dado por la expresión:*

$$\{\varphi\,;\psi\} = \sum r^{\mu\nu}\left(\mathrm{L}_{x_\mu^\lambda}\varphi\,\mathrm{L}_{x_\nu^\lambda}\psi - \mathrm{L}_{x_\mu^\rho}\varphi\,\mathrm{L}_{x_\nu^\rho}\psi\right)\,, \tag{j}$$

siendo x_μ^λ y x_μ^ρ los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha respectivamente, definidos por e_μ.

Definición 3.3 *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $(\mathfrak{g};[\,;\,];\tilde{\delta}\,r)$ es una biálgebra de Lie exacta tal que el 2-tensor $r \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ es una solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter, se dice que G es un grupo de Lie-Poisson triangular.*

A partir de soluciones de la ecuación generalizada de Yang-Baxter (en particular, de ecuación clásica de Yang-Baxter) se pueden definir, sobre el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, además de las estructuras de Lie-Poisson dadas por la Proposición 3.6, otras estructuras de Poisson (no de Lie-Poisson).

Proposición 3.7 *Sean r, r' dos elementos antisimétricos de $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ y Λ_r^λ, $\Lambda_{r'}^\rho$ los 2-tensores sobre G, definidos por traslación a la izquierda de r y por traslación a la derecha de r' respectivamente. Entonces, $\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ es un 2-tensor de Poisson si y solamente si r y r' son soluciones de la ecuación generalizada de Yang-Baxter tales que $[r\,;r] = [r'\,;r']$.*

Prueba Hay que demostrar que el corchete de Schouten $[\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho]$ se anula para todo $g \in G$ si y sólo si se satisface que $[r\,;r] = [r'\,;r']$.

La invariancia de Λ_r^λ y de $\Lambda_{r'}^\rho$ implica (Sección 1.2.4, expresión (a)) la de los corchetes de Schouten $[\Lambda_r^\lambda\,;\Lambda_r^\lambda]$ y $[\Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_{r'}^\rho]$, es decir,

$$\begin{aligned}[\Lambda_r^\lambda\,;\Lambda_r^\lambda](g) &= T_e\lambda_g[r\,;r]\,,\\ [\Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_{r'}^\rho](g) &= -\,T_e\rho_g[r'\,;r']\,.\end{aligned} \tag{k}$$

El Lema 2.2 de la Sección 2.2.3 implica que $[\Lambda_r^\lambda\,;\Lambda_{r'}^\rho] = 0$. Entonces, teniendo en cuenta (k),

$$[\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho](g) = T_e\rho_g\left(\mathrm{Ad}_g[r\,;r] - [r'\,;r']\right)\,.$$

Por tanto, $[\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho]$ es igulal a cero si y sólo si

$$\mathrm{Ad}_g\left([r\,;r]\right) - [r'\,;r'] = 0\,,\quad \text{para todo } g \in G\,. \tag{l}$$

Supongamos que $[\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho] = 0$, entonces, para todo $g \in G$, $\mathrm{Ad}_g\left([r\,;r]\right) - [r'\,;r'] = 0$. Haciendo $g = e$ se obtiene la condición particular $[r\,;r] = [r'\,;r']$.

Recíprocamente, si $[r\,;r] = [r'\,;r']$, como r es solución de la ecuación generalizada de Yang-Baxter, se tiene:

$$\mathrm{Ad}_g\left([r\,;r]\right) = [r\,;r] = [r'\,;r']\,,\quad \text{para todo } g \in G\,.$$

Lo que implica que $[\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho\,;\Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho] = 0$. ■

En particular, las expresiones (k) nos dicen que, si $r, r' \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ son soluciones de la ecuación clásica de Yang-Baxter, los 2-tensores $\Lambda_r^\lambda, \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda + \Lambda_{r'}^\rho, \Lambda_r^\lambda - \Lambda_{r'}^\rho$ son 2-tensores de Poisson.

2.4 Ecuación Modificada de Yang-Baxter y Biálgebras de Lie Exactas

Dada una forma bilineal no-degenerada, $\tilde{\phi}$, sobre un espacio vectorial V, la aplicación $\phi : V \longrightarrow V^*$, definida por:

$$\langle \phi(x)\,;y \rangle = \tilde{\phi}(x;y)\,, \quad \text{para todo } x, y \in V\,,$$

es un isomorfismo entre V y su dual V^*.

Mediante este isomorfismo toda estructura de álgebra de Lie sobre un espacio vectorial V se puede trasladar al dual V^*. En efecto, si $[\,;]$ es un corchete de Lie sobre V, la aplicación $[\,;]^\phi : V^* \times V^* \longrightarrow V^*$ definida por:

$$[\xi\,;\eta]^\phi = -2\phi\left[\phi^{-1}(\xi)\,;\phi^{-1}(\eta)\right]\,, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in V^*\,,$$

(donde el 2 y el signo - se introducen por conveniencia) es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi.

Recordemos el isomorfismo $t \longrightarrow \tilde{t}$ entre $V \otimes V$ y $Hom(V^*; V)$, definido por (igualdad (c), Sección 1.1.1):

$$\langle \alpha \otimes \beta\,;t \rangle = \langle \alpha\,;\tilde{t}(\beta) \rangle\,, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in V^*\,.$$

La existencia del isomorfismo $\phi : V \longrightarrow V^*$ permite definir de manera obvia un isomorfismo entre $V \otimes V$ y $Hom(V;V) \equiv End(V)$: $t \longrightarrow T = \tilde{t} \circ \phi$.

Como hemos visto (Secciones 2.2.2 y 2.3.2), la estructura de biálgebra de Lie exacta consiste en dotar, al espacio vectorial dual de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con un corchete de Lie, $[\,;]^r_{\mathfrak{g}^*}$, definido a partir un 2-tensor $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, que satisface ciertas condiciones de compatibilidad con el corchete de $\mathfrak{g}$. Por otra parte, la estructura de álgebra de Lie doble consiste en un segundo corchete de Lie sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $[\,;]_R$, definido a partir de un endomorfismo $R \in End(\mathfrak{g})$ (ver Sección 2.1.1).

La existencia de un isomorfismo ϕ entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ permite transportar a $\mathfrak{g}^*$ el corchete $[\,;]_R$ y estudiar bajo que condiciones este corchete transportado corresponde a una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$, definiendo a partir del endomorfismo R un 2-tensor r sobre $\mathfrak{g}$. En la sección 2.4.1 analizamos este problema. En la 2.4.2 y la 2.4.3, estudiamos el caso particular en que $R \in End(\mathfrak{g})$ es, además, solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter.

2.4.1 Biálgebras de Lie Exactas y Algebras de Lie Dobles

Sea $(\mathfrak{g}; [\,;]; \tilde{\delta}\, r)$ una biálgebra de Lie exacta y $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ la parte antisimétrica del 2-tensor $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. En la Proposición 3.5 de la Sección 2.3.2 se prueba que el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$ definido por la aplicación $(\tilde{\delta}\, r)^t$, dual del 1-cociclo $\tilde{\delta}\, r$, viene dado por la expresión:

$$[\xi\,;\eta]^r_{\mathfrak{g}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\,\xi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)}\,\eta\,; \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*\,. \tag{a}$$

Sea $(\mathfrak{g}; R)$ un álgebra de Lie doble (Definición 1.1 de la Sección 2.1.1). Por definición, el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ determinado por el endomorfismo R de $\mathfrak{g}$, viene dado por la expresión (fórmula (a) de la Seccion 2.1.1):

$$[x\,;y]_R = \frac{1}{2}\left([R(x)\,;y] + [x\,;R(y)]\right)\ ; \quad x,y \in \mathfrak{g}\,. \tag{b}$$

Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo definido por una forma bilineal, no-degenerada sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En la siguiente proposición, veremos que para que el corchete (a), que depende sólo de la parte antisimétrica a de r, sea el transportado a $\mathfrak{g}^*$, mediante ϕ, del corchete (b), es necesario que R y r estén relacionados por la igualdad:

$$R = \tilde{a} \circ \phi$$

donde $\tilde{a}$ es el homomorfismo de $\mathfrak{g}^*$ en $\mathfrak{g}$ asociado al 2-tensor a. Las condiciones adicionales quedan reflejadas en el enunciado.

Proposición 4.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, $\widetilde{\phi}$, no-degenerada sobre $\mathfrak{g}$, simétrica e invariante por la representación adjunta.*

(1) *El corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$ definido por la expresión:*

$$[\xi\,;\eta]^\phi = -2\phi\left([\phi^{-1}(\xi); \phi^{-1}(\eta)]\right)\ ; \qquad \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

se escribe así:

$$[\xi\,;\eta]^\phi = -2\,\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\eta)}\,\xi = \mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)}\,\eta\,, \tag{c}$$

para todo $\xi,\eta \in \mathfrak{g}^*$.

(2) *Sea $R \in End(\mathfrak{g})$ antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, es decir,*

$$\widetilde{\phi}(Rx; y) = -\widetilde{\phi}(x; Ry)\,,$$

y, por tanto,

$$\phi \circ R = -\phi \circ R^t\,,$$

siendo $R^t : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el homomorfisomo transpuesto de R. Sea $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ definido por la igualdad $\tilde{r} = (1 + R) \circ \phi^{-1}$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el 2-tensor asociado. Entonces, el homomorfismo $\tilde{a} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ correspondiente a la parte antisimétrica de r es $\tilde{a} = R \circ \phi^{-1}$.

(3) *Sea $R \in End(\mathfrak{g})$ antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, tal que $[\,;]_R$ (expresión (b)) es un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$. Sea $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ el homomorfismo definido por la igualdad $\tilde{r} = (1 + R) \circ \phi^{-1}$. Entonces el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}^*$:*

$$[\xi\,;\eta]^\phi_R = -2\phi\left([\phi^{-1}(\xi); \phi^{-1}(\eta)]_R\right)\ ; \qquad \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

coincide con el corchete (a) definido por r, es decir, se verifica:

$$[\xi\,;\eta]^\phi_R = [\xi\,;\eta]^a_{\mathfrak{g}^*} \equiv \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\,\xi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)}\,\eta\,, \quad \text{para todo } \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

donde $\tilde{a} = R \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$.

Por lo tanto, en estas condiciones, $\widetilde{\phi}$ simétrica e invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ y R antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, toda estructura de álgebra de Lie doble $(\mathfrak{g}; R)$ determina sobre $\mathfrak{g}$ una estructura de biálgebra de Lie exacta $\left(\mathfrak{g}; [\,;]; \tilde{\delta}\left((1 + R) \circ \phi^{-1}\right)\right)$.

Prueba

(1) La invariancia de $\widetilde{\phi}$ por la representación adjunta significa que

$$\widetilde{\phi}(\mathrm{ad}_x\, y; z) + \phi(y; \mathrm{ad}_x\, z) = 0\,, \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathfrak{g}\,,$$

lo cual implica que:

$$\mathrm{ad}_x^* \circ \phi = \phi \circ \mathrm{ad}_x\,,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Teniendo en cuenta esta última expresión, el siguiente cálculo prueba la primera igualdad en (c),

$$\begin{aligned}[\xi\,;\eta]^\phi &= -2\phi\left([\phi^{-1}(\xi)\,;\phi^{-1}(\eta)]\right) = -2\left(\phi \circ \mathrm{ad}_{\phi^{-1}(\xi)}\right)\left(\phi^{-1}(\eta)\right) = \\ &= -2\left(\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)} \circ \phi\right)\left(\phi^{-1}(\eta)\right) = -2\,\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)}\,\eta\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, la simetría de $\widetilde{\phi}$ implica que:

$$\langle \phi^{-1}(\eta)\,;\xi\rangle = \langle \phi^{-1}(\xi)\,;\eta\rangle\,,$$

es decir, $\phi = \phi^{\mathrm{t}}$. De esta condición y de la invariancia por la representación adjunta de $\widetilde{\phi}$, se deduce la siguiente igualdad:

$$-\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)}\,\eta = \mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\eta)}\,\xi\,, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*\,. \tag{d}$$

En efecto, para todo $x \in \mathfrak{g}$ y todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ se tiene:

$$\begin{aligned}\left\langle x\,; -\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\xi)}\,\eta\right\rangle &= \left\langle \mathrm{ad}_{\phi^{-1}(\xi)}\,x\,;\eta\right\rangle = -\left\langle \mathrm{ad}_x(\phi^{-1}(\xi))\,;\eta\right\rangle = \\ &= \left\langle \phi^{-1}(\xi)\,;\mathrm{ad}^*_x(\eta)\right\rangle = \left\langle \phi^{-1}\left(\mathrm{ad}^*_x(\eta)\right);\xi\right\rangle = \left\langle \left(\mathrm{ad}_x \circ \phi^{-1}\right)(\eta)\,;\xi\right\rangle = \\ &= -\left\langle \mathrm{ad}_{\phi^{-1}(\eta)}\,x\,;\xi\right\rangle = \left\langle x\,;\mathrm{ad}^*_{\phi^{-1}(\eta)}\,\xi\right\rangle.\end{aligned}$$

La segunda igualdad en (c) es consecuencia de (d).

(2) Consideremos el 2-tensor $a \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ correspondiente al homomorfismo $\tilde{a} = R\circ\phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$. Entonces, tenemos:

$$\langle \eta \otimes \xi\,; a\rangle = \left\langle \eta\,;\tilde{a}(\xi)\right\rangle = \left\langle \eta\,;(R\circ\phi^{-1})(\xi)\right\rangle\,.$$

Pero por ser R antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, se verifica que $R\circ\phi^{-1} = -\phi^{-1}\circ R^{\mathrm{t}}$ y por ser $\widetilde{\phi}$ simétrica $\phi = \phi^{\mathrm{t}}$, por tanto,

$$\langle \eta \otimes \xi\,; a\rangle = \left\langle \eta\,; -(\phi^{-1}\circ R^{\mathrm{t}})(\xi)\right\rangle = \left\langle \eta\,; -(R\circ\phi^{-1})^{\mathrm{t}}(\xi)\right\rangle = -\left\langle \tilde{a}(\eta)\,;\xi\right\rangle = -\langle \xi\otimes\eta\,;a\rangle\,,$$

que es la condición de antisimetría del 2-tensor $a \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ correspondiente al homomorfismo $\tilde{a} = R\circ\phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$.

(3) Teniendo en cuenta la definición del corchete $[\,;]_R$ (espresión (b), el corchete transportado a $\mathfrak{g}^*$ es:

$$\begin{aligned}[\xi\,;\eta]^\phi_R &= -2\frac{1}{2}\phi\left(\left[R\left(\phi^{-1}(\xi)\right)\,;\phi^{-1}(\eta)\right] + \left[\phi^{-1}(\xi)\,;R\left(\phi^{-1}(\eta)\right)\right]\right) = \\ &= -\phi\left(\left[(\tilde{a}(\xi)\,;\phi^{-1}(\eta)\right] + \left[\phi^{-1}(\xi)\,;\tilde{a}(\eta)\right]\right) = \\ &= -\phi\left(\mathrm{ad}_{\tilde{a}(\xi)}\,\phi^{-1}(\eta) - \mathrm{ad}_{\tilde{a}(\eta)}\,\phi^{-1}(\xi)\right)\,.\end{aligned}$$

Como se satisface $\phi\circ\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}^*_x \circ\phi$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ ($\widetilde{\phi}$ es invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$), la última igualdad se puede escribir así:

$$[\xi\,;\eta]^\phi_R = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\,\xi - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)}\,\eta\,,$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

El apartado (3) de la última proposición y la Proposición 3.4 en 2.3.2 nos dicen que $[\,;\,]^{\phi}_{R}$ es el corchete sobre $\mathfrak{g}^*$ definido por la aplicación dual del 1-cociclo exacto $\tilde{\delta}\,r$, definido por el 2-tensor r asociado al homomorfismo $\tilde{r} = (1+R)\circ\phi$. La Proposición 2.5 de 2.2.2 afirma que ésto es equivalente a la compatibilidad de los dos corchetes.

Se tiene, pues, el siguiente resultado.

Corolario (Semenov M. A. [1983])

(1) *Sea $(\mathfrak{g}; R)$, un álgebra de Lie doble (Definición 1.1 de la Sección 2.1.1), es decir, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $R \in End(\mathfrak{g})$ un endomorfismo tal que la igualdad* (b) *define un corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$. Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es el isomorfismo asociado a una forma bilineal, $\widetilde{\phi}$, no-degenerada y simétrica sobre $\mathfrak{g}$. Sea $\tilde{r} = (R+1)\circ\phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$, y $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ el 2-tensor asociado. Si $\widetilde{\phi}$ es invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ y R antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\,r)$ es una biálgebra de Lie exacta.*

(2) *Recíprocamente, sea $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\,r)$ una biálgebra de Lie exacta tal que el homomorfismo $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ asociado a la parte simétrica s de r es invertible y sea $R = \tilde{a}\circ\tilde{s}^{-1} = \tilde{r}\circ\tilde{s}^{-1} - 1 \in End(\mathfrak{g})$ donde $\tilde{a}$ es el homomorfismo asociado a la parte antisimétrica a de r. Entonces, $(\mathfrak{g}; R)$ es un álgebra de Lie doble.*

Prueba

(1) La primera parte es consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.

(2) Sea, ahora, $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\,r)$ una biálgebra de Lie exacta tal que la parte simétrica, s, de r es tal que el homomorfismo asociado $\tilde{s}$ es invertible. Al ser $\tilde{s}$ invertible, podemos transportar a $\mathfrak{g}$ el corchete de Lie $[\,;\,]^{r}_{\mathfrak{g}^*}$ por medio de $\tilde{s}$, es decir, definir:

$$\begin{aligned}[x\,;y]^s &= -\frac{1}{2}s\big(\big[(\tilde{s})^{-1}(x)\,;(\tilde{s})^{-1}(y)\big]^{r}_{\mathfrak{g}^*}\big) = \\ &= -\frac{1}{2}\tilde{s}\big(\operatorname{ad}^*_{\tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1}(y)}(\tilde{s})^{-1}(x) - \operatorname{ad}^*_{\tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1}(x)}(\tilde{s})^{-1}(y)\big)\,.\end{aligned}$$

Por definición $R = \tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1}$ por tanto, este corchete se puede escribir así:

$$[x\,;y]^s = -\frac{1}{2}\tilde{s}\big(\operatorname{ad}^*_{R(y)}(\tilde{s})^{-1}(x) - \operatorname{ad}^*_{R(x)}(\tilde{s})^{-1}(y)\big)\,. \qquad \text{(e)}$$

Ahora bién, por definir una estructura de biálgebra de Lie exacta, la parte simétrica s es invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ (Teorema 3.1 de 2.3.2), es decir, $(\tilde{s})^{-1}\circ\operatorname{ad}_x = \operatorname{ad}^*_x\circ(\tilde{s})^{-1}$, por tanto, el corchete (e) es:

$$\begin{aligned}[x\,;y]^s &= -\frac{1}{2}\tilde{s}\big((\tilde{s})^{-1}\circ\operatorname{ad}_{R(y)}x - (\tilde{s})^{-1}\circ\operatorname{ad}_{R(x)}y\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big([R(x)\,;y] + [x\,;R(y)]\big) = [x\,;y]_R\,.\end{aligned}$$

Que es la forma (b) que debe tener un segundo corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ para definir una estructura de álgebra de Lie doble. ∎

Observación Como consecuencia de la proposición anterior, la aplicación

$$(\mathfrak{g};[\,;\,]_R) \xrightarrow{-\frac{1}{2}(\bar{s})^{-1}} (\mathfrak{g}^*;[\,;\,]^r_{\mathfrak{g}^*})$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie, ya que:

$$[x\,;y]_R = -(1/2)\bar{s}\big(\big[(\bar{s})^{-1}(x)\,;(\bar{s})^{-1}(y)\big]^r_{\mathfrak{g}^*}\big)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\bar{s})^{-1}\big([x\,;y]_R\big) &= -\frac{1}{2}(\bar{s})^{-1}\Big(-\frac{1}{2}\bar{s}\big[(\bar{s})^{-1}(x)\,;(\bar{s})^{-1}(y)\big]^r_{\mathfrak{g}^*}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\big[(\bar{s})^{-1}(x)\,;(\bar{s})^{-1}(y)\big]^r_{\mathfrak{g}^*} = \\
&= \big[(1/2)(\bar{s})^{-1}(x)\,;(1/2)(\bar{s})^{-1}(y)\big]^r_{\mathfrak{g}^*}\,.
\end{aligned}$$

■

2.4.2 Algebras y Biálgebras de Lie-Semenov

Los siguientes resultados son necesarios para establecer la relación entre un tipo de soluciones de la ecuación modificada de Yang-Baxter (definida en la Proposición 1.4 de la Sección 2.1.3) y un tipos de biálgebras de Lie exactas.

Lema 4.1 *Sea $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ un 2-tensor antisimétrico y $\bar{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ el homomorfismo correspondiente. Asociando a todo 3-tensor $t \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ una aplicación bilineal $\widetilde{t} : \mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$, mediante la siguiente igualdad:*

$$\big\langle \xi\,;\widetilde{t}(\eta;\gamma)\big\rangle = t(\xi;\eta;\gamma)\,, \quad \text{para todo } \xi,\eta,\gamma\in\mathfrak{g}^*\,,$$

el corchete de Schouten invariante, $[r\,;r] \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ (expresión (e) de la Sección 2.3.1), viene dado por:

$$\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta) = -2\left(r\big(\,\mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\xi)}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\eta)}\,\xi\big) - [\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\right)\,.$$

El miembro de la derecha tiene sentido aunque r no sea antisimétrico.

Prueba La expresión (e) en 2.3.1, es

$$[r\,;r](\xi;\eta;\gamma) = 2\,\langle\gamma\,;[\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\rangle + \text{p.c.}\,.$$

Por tanto, como aplicación bilineal de $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ en $\mathfrak{g}$, para todo $\xi,\eta,\gamma\in\mathfrak{g}^*$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\Big\langle\gamma\,;\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta)\Big\rangle &= 2\,\langle\eta\,;[\bar{r}(\gamma)\,;\bar{r}(\xi)]\rangle + \text{p.c.} = \\
&= 2\,\langle\eta\,;[\bar{r}(\gamma)\,;\bar{r}(\xi)]\rangle + 2\,\langle\gamma\,;[\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\rangle + 2\,\langle\xi\,;[\bar{r}(\eta)\,;\bar{r}(\gamma)]\rangle = \\
&= -2\,\langle\eta\,;\mathrm{ad}_{\bar{r}(\xi)}\,\bar{r}(\gamma)\rangle + 2\,\langle\xi\,;\mathrm{ad}_{\bar{r}(\eta)}\,\bar{r}(\gamma)\rangle + 2\,\langle\gamma\,;[\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\rangle = \\
&= -2\big\langle\,\mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\eta)}\,\xi\,;\bar{r}(\gamma)\big\rangle + 2\big\langle\,\mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\xi)}\,\eta\,;\bar{r}(\gamma)\big\rangle + 2\,\langle\gamma\,;[\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ahora bién, r es antisimétrico, entonces

$$\Big\langle\gamma\,;\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta)\Big\rangle = \langle\gamma\,;-2\bar{r}\big(\,\mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\xi)}\,\eta\big) + 2r\big(\,\mathrm{ad}^*_{\bar{r}(\eta)}\,\xi\big) + 2[\bar{r}(\xi)\,;\bar{r}(\eta)]\rangle\,,$$

lo que demuestra el lema. ■

En lo sucesivo prescindiremos del factor 2 y del signo $-$, de forma que utilizaremos como definición de $\widetilde{[r\,;r]}$ la siguiente, aunque r no sea antisimétrico.

Definición 4.1 *Sea $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ un 2-tensor (no necesariamente antisimétrico) y $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ el homomorfismo asociado. Definiremos el corchete de Schouten invariante $\widetilde{[r\,;r]} \in Hom(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ de la siguiente forma:*

$$\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta) = \tilde{r}\big(\mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\xi)}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\,\xi\big) - [\tilde{r}(\xi)\,;\tilde{r}(\eta)]\,, \tag{a}$$

para todo $\xi,\eta \in \mathfrak{g}^*$.

Lema 4.2 *Sea $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ ad-invariante (no necesariamente antisimétrico), es decir, se satisface:*

$$\mathrm{ad}_x \circ \tilde{r} - \tilde{r} \circ \mathrm{ad}^*_x = 0\,.$$

Entonces:

(1) $\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) = [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)]$.

(2) $\widetilde{[r\,;r]}$ *es ad-invariante, por tanto, tenemos:*

$$\mathrm{ad}_x \circ \widetilde{[r\,;r]} = \widetilde{[r\,;r]} \circ (\mathrm{ad}^*_x \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}^*_x)\,,$$

o bien, al considerar el 3-tensor sobre $\mathfrak{g}$, $[r\,;r]$, asociado a $\widetilde{[r\,;r]}$,

$$(\mathrm{ad}_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ad}_x)[r\,;r] = 0\,.$$

Prueba

(1) Teniendo en cuenta que $\mathrm{ad}_x \circ\tilde{r} - \tilde{r}\circ \mathrm{ad}^*_x = 0$, la definición (a) de $\widetilde{[r\,;r]}$ implica que:

$$\begin{aligned}\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) &= \tilde{r}\big(\mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\alpha)}\,\beta - \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\beta)}\,\alpha\big) - [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)] = \\ &= (\mathrm{ad}_{\tilde{r}(\alpha)} \circ \tilde{r})(\beta) - (\mathrm{ad}_{\tilde{r}(\beta)} \circ \tilde{r})(\alpha) - [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)] = \\ &= [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)] - [\tilde{r}(\beta)\,;\tilde{r}(\alpha)] - [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)] = [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)]\,.\end{aligned}$$

(2) La representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ viene dada por la expresión:

$$t \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \longrightarrow (\mathrm{ad}_x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ad}_x)t \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\,.$$

De forma análoga a la expresión (d) de 1.1.1, al considerar el isomorfismo $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \cong Hom(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ definido por

$$\big\langle \alpha\otimes\beta\otimes\gamma\,;t\big\rangle = \big\langle \alpha\,;\tilde{t}(\beta;\gamma)\big\rangle\,,$$

la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ se escribe así:

$$\mathrm{ad}_x(\tilde{t}) = \mathrm{ad}_x \circ \tilde{t} - \tilde{t}\circ(\mathrm{ad}^*_x \otimes 1) - \tilde{t}\circ(1\otimes \mathrm{ad}^*_x)\,.$$

Entonces, teniendo en cuenta el resultado de la parte (1), para todo $\alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*$, tenemos:

$$\mathrm{ad}_x(\widetilde{[r\,;r]})(\alpha;\beta) = \mathrm{ad}_x\left([\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)]\right) - [\tilde{r}(\mathrm{ad}^*_x\,\alpha)\,;\tilde{r}(\beta)] - [\tilde{r}(\alpha)\,;\tilde{r}(\mathrm{ad}^*_x\,\beta)]\,.$$

Como por hipótesis $\tilde{r}\circ \mathrm{ad}^*_x = \mathrm{ad}_x \circ \tilde{r}$ y ad_x es una derivación de $\mathfrak{g}$, se tiene finalmente:

$$\mathrm{ad}_x(\widetilde{[r\,;r]})(\alpha;\beta) = 0\,, \quad \text{para todo } \alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

que demuestra el apartado (2). ∎

Lema 4.3 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, no degenerada sobre $\mathfrak{g}$, invariante por la representación adjunta, y sea $R \in End(\mathfrak{g})$. Consideremos el homomorfismo $\tilde{a} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ (no necesariamente antisimétrico), definido por la igualdad:*

$$\tilde{a} = R \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g}),$$

y la expresión (b) *en 2.1.1:*

$$B_R(x;y) \equiv [R(x)\,;R(y)] - 2R\left([x\,;y]_R\right) . \tag{b}$$

Entonces, la aplicación bilineal $\widetilde{[a\,;a]} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida en (a) *satisface:*

$$\widetilde{[a\,;a]} = -B_R \circ \left(\phi^{-1} \times \phi^{-1}\right) . \tag{c}$$

Prueba Por definición de $B_R(x;y)$, teniendo en cuenta (b) de 2.4.1, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left(B_R \circ \left(\phi^{-1} \times \phi^{-1}\right)\right)(\alpha;\beta) = \\
&\quad = \left[R \circ \phi^{-1}(\alpha)\,; R \circ \phi^{-1}(\beta)\right] - \\
&\qquad - R\left(\left[R \circ \phi^{-1}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right] + \left[\phi^{-1}(\alpha)\,; R \circ \phi^{-1}(\beta)\right]\right) = \\
&\quad = [\tilde{a}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)] - R\left(\left[\tilde{a}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right] + \left[\phi^{-1}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)\right]\right) = \\
&\quad = [\tilde{a}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)] - \tilde{a} \circ \phi\left(\left[a(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right] + \left[\phi^{-1}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)\right]\right) = \\
&\quad = [\tilde{a}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)] - \tilde{a}\left(\phi \circ \mathrm{ad}_{\tilde{a}(\alpha)}\, \phi^{-1}(\beta) - \phi \circ \mathrm{ad}_{\tilde{a}(\beta)}\, \phi^{-1}(\alpha)\right) ,
\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$.

Ahora bien, ϕ es ad-invariante, es decir, $\phi \circ \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}^*_x \circ \phi$, por lo tanto:

$$-\left(B_R \circ \left(\phi^{-1} \times \phi^{-1}\right)\right)(\alpha;\beta) = \tilde{a}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\alpha)}\, \beta - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\beta)}\, \alpha\right) - [\tilde{a}(\alpha)\,;\tilde{a}(\beta)] .$$

■

Observación A partir de la igualdad (c), si a es antisimétrico, la ecuación clásica de Yang-Baxter (ver Teorema 2.7 de 1.2.5):

$$\widetilde{[a\,;a]}(\xi;\eta) = 0\,, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

se puede escribir así:

$$B_R(x;y) = 0\,, \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{g}\,,$$

donde $R = \tilde{a} \circ \phi$ y ϕ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, no-degenerada sobre $\mathfrak{g}$, invariante por la representación adjunta. ■

Proposición 4.2 *Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\tilde{\phi}$, simétrica, no degenerada, e invariante por la representación adjunta. Sea $R \in End(\mathfrak{g})$ antisimétrico con respecto a $\tilde{\phi}$ y sea $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el 2-tensor asociado al homomorfismo $\tilde{r} = (R + 1) \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$. Entonces, la ecuación modificada de Yang-Baxter (ecuación* (a) *de la Sección 2.1.3):*

$$B_R(x;y) = -[x\,;y]\,,$$

donde $B_R(x;y)$ viene dado por (b)*, se expresa, en términos de $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, de la forma:*

$$\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) = \tilde{r}\left(2\phi\left[\phi^{-1}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right]\right) \equiv -\tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) , \tag{d}$$

donde $[\alpha\,;\beta]^{\phi}$ viene dada por la expresión (c) *de 2.4.1.*

Prueba

(1) Se satisface la igualdad:

$$B_{(R+1)}(x;y) = -2(R+1)[x\,;y]\,.$$

En efecto, teniendo en cuenta la definición (b) de $B_R(x;y)$ y la expresión (b) de 2.4.1 del corchete $[\,;]_R$, de la condición $B_R(x;y) = -[x\,;y]$ se deduce:

$$\begin{aligned}0 &= [R(x)\,;R(y)] - 2R\left([x\,;y]_R\right) + [x\,;y] = \\ &= [R(x)\,;R(y)] - R([R(x)\,;y] + [x\,;R(y)]) + [x\,;y]\,.\end{aligned}$$

Sumando y restando $[x\,;R(y)]$, así como $[R(x)\,;y]$ en el último miembro de la igualdad anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}0 &= [(R+1)(x)\,;R(y)] - [x\,;R(y)] - R[R(x)\,;y] - R[x\,;R(y)] + [x\,;y] = \\ &= [(R+1)(x)\,;R(y)] - (R+1)[x\,;R(y)] - (R+1)[R(x)\,;y] + [(R+1)(x)\,;y] = \\ &= [(R+1)(x)\,;(R+1)(y)] - (R+1)\left([x\,;R(y)] + [R(x)\,;y]\right) = \\ &= [(R+1)(x)\,;(R+1)(y)] - (R+1)\left([(R+1)(x)\,;y] + [x\,;(R+1)(y)] - 2[x\,;y]\right) = \\ &= B_{R+1}(x;y) + 2(R+1)([x\,;y])\,,\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

(2) La igualdad (c) se aplica a todo 2-tensor $a \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ (no necesariamente antisimétrico) y a todo endomorfismo $R \in End(\mathfrak{g})$. En particular, considerando el 2-tensor r y el endomorfismo $R+1$, tenemos:

$$\widetilde{[r\,;r]} = -B_{(R+1)}(\phi^{-1}\times\phi^{-1})\,.$$

Si ahora se tiene en cuenta el resultado (d), la igualdad anterior se escribe así:

$$\begin{aligned}\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) &= -B_{(R+1)}\left(\phi^{-1}\times\phi^{-1}\right)(\alpha;\beta) = 2(R+1)\left[\phi^{-1}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right] = \\ &= 2(\tilde{r}\circ\phi)\left[\phi^{-1}(\alpha)\,;\phi^{-1}(\beta)\right] = -\tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right)\,.\end{aligned}$$

■

Proposición 4.3 *Sea $r \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, tal que el homomorfismo $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$, asociado a su parte simétrica s, es invertible y ad-invariante. Denotemos por $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo inverso $(\tilde{s})^{-1}$. Entonces, si el homomorfismo $\tilde{r}$, asociado a r, satisface la igualdad* (d), *$(\mathfrak{g};[\,;];\tilde{\delta}\,r)$ es una biálgebra de Lie exacta.*

Prueba Al ser $\tilde{s}$ es invertible e invariante por la representación adjunta, se tiene la siguiente igualdad:

$$\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta) + \tilde{r}\left([\xi\,;\eta]^{\phi}\right) = \widetilde{[a\,;a]}(\xi;\eta) - \widetilde{[s\,;s]}(\xi;\eta)\,,\quad \text{para todo } \alpha,\beta\in\mathfrak{g}^*\,. \tag{e}$$

En efecto, teniendo en cuenta la definición (a) de $[r\,;r]$ y la expresión de $[\xi\,;\eta]^{\phi}$ dada en (c) de 2.4.1, tenemos:

$$\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta) + \tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) = \tilde{r}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\xi)}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{\tilde{r}(\eta)}\,\xi\right) - [\tilde{r}(\xi)\,;\tilde{r}(\eta)] + 2\tilde{r}\circ\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)}\,\eta\,.$$

Separando las contribuciones de las partes simétrica y antisimétrica de r, la igualdad anterior se escribe así:

$$\begin{aligned}\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) + \tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) = \\ &= \tilde{a}\big(\operatorname{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)}\eta - \operatorname{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\xi\big) - [\tilde{a}(\xi)\,;\tilde{a}(\eta)] - [\tilde{s}(\xi)\,;\tilde{s}(\eta)] + \\ &+ \tilde{r}\big(\operatorname{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)}\eta - \operatorname{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)}\xi - 2\operatorname{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)}\eta\big) + \big(\tilde{s}\circ\operatorname{ad}^*_{\tilde{a}(\xi)}\eta - [\tilde{a}(\xi)\,;\tilde{s}(\eta)]\big) - \\ &- \big(\tilde{s}\circ\operatorname{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\xi - [\tilde{a}(\eta)\,;\tilde{s}(\xi)]\big)\,.\end{aligned}$$

Como $\tilde{s}\circ\operatorname{ad}^*_{\tilde{a}(\eta)}\xi = \operatorname{ad}_{\tilde{s}(\eta)}\circ\tilde{s}$, las expresiones que figuran en dos últimos paréntesis son nulas. También lo es la antepenúltima como consecuencia de la simetría y la ad-invariancia de s, ya que entonces $\operatorname{ad}^*_{\tilde{s}(\xi)}\eta + \operatorname{ad}^*_{\tilde{s}(\eta)}\xi = 0$ (igualdad (d) de 2.4.1). Por tanto:

$$\widetilde{[r\,;r]}(\xi;\eta) + \tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right) = \widetilde{[a\,;a]}(\xi;\eta) - \widetilde{[s\,;s]}(\xi;\eta)\,.$$

Entonces, la hipótesis de la proposición se puede enunciar así: $\widetilde{[a\,;a]} = \widetilde{[s\,;s]}$. bigskip

Pero $\widetilde{[s\,;s]}$ es invariante por la representación adjunta (Lema 4.2), por tanto, $\widetilde{[a\,;a]}$ también lo es. Esto, según el Teorema 3.1 de la Sección 2.3.2, es condición suficiente de biálgebra de Lie. ∎

Proposición 4.4 *Sea $r = s + a \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ la descomposición de un 2-tensor r, en su parte simétrica s y su parte antisimétrica a. Sean $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{a} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$, los homomorfismos asociados a $r, s, a \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ por el isomorfismo* (c) *de 1.1.1. Supongamos que $\tilde{s}$ es invertible y* ad*-invariante y que $\tilde{r}$ satisface la igualdad* (d). *Entonces el endomorfismo*

$$R = \tilde{r}\circ(\tilde{s})^{-1} - 1 = \tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1} \in End(\mathfrak{g})\,,$$

es una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter y es antisimétrico con respecto a la forma bilineal, $\widetilde{\phi}$, simétrica, no-degenerada e invariante por la representación adjunta, asociada al isomorfismo $(\tilde{s})^{-1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. En consecuencia, $(\mathfrak{g}; R)$ es un álgebra de Lie doble.

Prueba En efecto, por definición de R y puesto que el 2-tensor s es simétrico, tenemos:

$$\begin{aligned}\big\langle(-\tilde{s}\circ R^{t})(\alpha)\,;\beta\big\rangle &= \big\langle\big(-\tilde{s}\circ(\tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1})^{t}\big)(\alpha)\,;\beta\big\rangle = \big\langle\tilde{s}(\beta)\,;-\big(\tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1}\big)^{t}(\alpha)\big\rangle = \\ &= \big\langle\big(\tilde{a}\circ(\tilde{s})^{-1}\circ\tilde{s}\big)(\beta)\,;-\alpha\big\rangle = -\big\langle\tilde{a}(\beta)\,;\alpha\big\rangle = \\ &= \big\langle\tilde{a}(\alpha)\,;\beta\big\rangle\,.\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$. Es decir, $-\tilde{s}\circ R^{t} = \tilde{a}$. Por otra parte,

$$R\circ\tilde{s} = (\tilde{r}\circ(\tilde{s})^{-1} - 1)\circ\tilde{s} = \tilde{r} - \tilde{s} = \tilde{a}\,.$$

Así pues, $-\tilde{s}\circ R^{t} = R\circ\tilde{s}$ que es la condición de antisimetría de R con respecto a la forma bilineal $\widetilde{\phi}$ asociada al isomorfismo $(\tilde{s})^{-1}$.

Por ser $\tilde{r} = (R+1)\circ\tilde{s}$ y R antisimétrico con respecto a $\widetilde{\phi}$, la Proposición 4.2 nos dice que R satisface la ecuación modificada de Yang-Baxter y ésto es condición suficiente para que $(\mathfrak{g}; R)$ sea un álgebra de Lie doble (Proposición 1.4 de la Sección 2.1.3). ∎

Las Proposiciones 4.2, 4.3 y 4.4 justifican las siguientes definiciones, que definen un tipo de álgebras de Lie dobles que están en correspondencia biunívoca con un tipo de biálgebras de Lie.

Definición 4.2

(1) *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie y* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ *el isomorfismo asociado a una forma bilineal simétrica, no degenerada sobre* $\mathfrak{g}$*, invariante por la acción adjunta de* $\mathfrak{g}$*. Sea* $R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter. Se dice que el álgebra de Lie doble* $(\mathfrak{g}; R; \phi)$ *es un álgebra de Lie-Semenov si* R *es antisimétrico con respecto a* ϕ.

(2) *Sea* $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *tal que el homomorfismo* $\tilde{s}$*, asociado a su parte simétrica* s*, es invertible y* ad*-invariante y tal que* $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ *satisface la condición* (d)*:*

$$\widetilde{[r\,;r]}(\alpha;\beta) = -\tilde{r}\left([\alpha\,;\beta]^{\phi}\right)\,, \quad \text{para todo } \alpha,\beta \in \mathfrak{g}^*\,,$$

donde $\phi = \tilde{s}^{-1}$*. Entonces, se dice que la biálgebra de Lie* $(\mathfrak{g}; [\,;\,]; \tilde{\delta}\, r)$ *es una biálgebra de Lie-Semenov.*

A las álgebras de Lie-Semenov, Semenov [1994] las denomina álgebras de Lie-Baxter.

Definición 4.3 *Sean* $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; R_1; \Phi_1)$ *y* $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; R_2; \Phi_2)$ *dos álgebras de Lie-Semenov y* $\psi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ *una aplicación lineal. Se dice que* ψ *es un morfismo de álgebras de Lie-Semenov si:*

(1) $\psi : (\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1) \longrightarrow (\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2)$ *es un morfismo de álgebras de Lie.*

(2) $\Phi_1^{-1} \circ \psi^{t} \circ \Phi_2 : \left(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_{R_2}\right) \longrightarrow \left(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_{R_1}\right)$ *es un morfismo de álgebras de Lie.*

Teorema 4.1 *Las categorías de las biálgebras de Lie-Semenov y de las álgebras de Lie-Semenov son equivalentes en la correspondencia que asocia a todo endomorfismo antisimétrico* $R \in End(\mathfrak{g})$*, con respecto a una forma bilineal, simétrica, no-degenerada, el 2-tensor* $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *correspondiente a* $\tilde{r} = (R+1) \circ \phi$.

Prueba Con las notaciones obvias, sean $(\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_1; \tilde{\delta}\, r_1)$, $(\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_2; \tilde{\delta}\, r_2)$ dos biálgebras de Lie-Semenov y $(\mathfrak{g}_1; R_1; (\tilde{s}_1)^{-1})$, $(\mathfrak{g}_2; R_2; (\tilde{s}_2)^{-1})$ las álgebras de Lie-Semenov asociadas por aplicación de las Proposiciones 4.3 y 4.4. Sea $\psi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ un homomorfisomo de álgebras de Lie.

Sólo queda por demostrar que:

$$\psi^{t} : \left(\mathfrak{g}_2^*; [\,;\,]^{r_2}_{\mathfrak{g}_2^*}\right) \longrightarrow \left(\mathfrak{g}_1^*; [\,;\,]^{r_1}_{\mathfrak{g}_1^*}\right)$$

es un morfismo de álgebras de Lie si y sólo si lo es:

$$\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1} : (\mathfrak{g}_2; [\,;\,]_{R_2}) \longrightarrow (\mathfrak{g}_1; [\,;\,]_{R_1})\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}\psi^{t}[\xi_2\,;\eta_2]^{r_2}_{\mathfrak{g}_2^*} &= \psi^{t}\left[(\tilde{s}_2)^{-1}(x_2)\,;(\tilde{s}_2)^{-1}(y_2)\right]^{r_2}_{\mathfrak{g}_2^*} = \\ &= -2\psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}[x_2\,;y_2]_{R_2} = -2(\tilde{s}_1)^{-1} \circ \left(\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}\right)[x_2\,;y_2]_{R_2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left[\psi^{t}\xi_2\,;\psi^{t}\eta_2\right]^{r_1}_{\mathfrak{g}_1^*} &= \left[\psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(x_2)\,;\psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(\eta_2)\right]^{r_1}_{\mathfrak{g}_1^*} = \\ &= \left[(\tilde{s}_1)^{-1} \circ \left(\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}\right)(x_2)\,;(\tilde{s}_1)^{-1} \circ \left(\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}\right)(y_2)\right]^{r_1}_{\mathfrak{g}_1^*} = \\ &= -2(\tilde{s}_1)^{-1}\left[\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(x_2)\,;\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(y_2)\right]_{R_1}\,,\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\psi^{t}[\xi_2\,;\eta_2]^{r_2}_{\mathfrak{g}_2^*} - \left[\psi^{t}(\xi_2)\,;\psi^{t}(\eta_2)\right]^{r_1}_{\mathfrak{g}_1^*} &= -2(\tilde{s}_1)^{-1}\Big(\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}[x_2\,;y_2]_{R_2} - \\ &\quad - \left[\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(x_2)\,;\tilde{s}_1 \circ \psi^{t} \circ (\tilde{s}_2)^{-1}(y_2)\right]_{R_1}\Big)\,,\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema. ∎

2.4.3 Biálgebras de Lie Dobles

Sea $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ una biálgebra de Lie. Se ha visto (Teorema 2.3 de la Sección 2.2.2) que sobre el producto cartesiano $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ existe una única estructura de álgebra de Lie, definida por el corchete:

$$[(x;\xi);(y;\eta)]_{\mathfrak{p}} = \left([x\,;y] + \mathrm{ad}^*_{\xi}\,y - \mathrm{ad}^*_{\eta}\,x\,;[\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{ad}^*_{x}\,\eta - \mathrm{ad}^*_{y}\,\xi\right), \tag{a}$$

que induce las estructuras de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ y tal que deja invariante la forma bilineal simétrica $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ definida por:

$$\langle(x;\xi);(y;\eta)\rangle_{\mathfrak{p}} = \langle\xi\,;y\rangle + \langle\eta\,;x\rangle\,, \tag{b}$$

es decir la acción dual de $\mathfrak{p}^*$ sobre $\mathfrak{p}$.

Sea Φ el isomorfismo asociado a $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ y $s \in \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}$ el 2-tensor asociado a $\Phi^{-1} : \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathfrak{p}$. Vamos a comprobar que s es la parte simétrica de un 2-tensor $m \in \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}$ que define sobre $\mathfrak{p}$ una estructura de biálgebra de Lie-Semenov.

Proposición 4.5 *Sea $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ una biálgebra de Lie y $(\mathfrak{p};[\,;\,]_{\mathfrak{p}})$ el álgebra de Lie del Teorema 2.3 de la Sección 2.2.2, es decir, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ y $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ es el corchete definido en* (a). *Consideremos el homomorfismo $\tilde{m} \in Hom(\mathfrak{p}^*;\mathfrak{p})$, dado por la expresión:*

$$\tilde{m} : (\xi;x) \in \mathfrak{p}^* \longrightarrow (x;0) \in \mathfrak{p}\,. \tag{c}$$

Si $m \in \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}$ es el 2-tensor asociado por el isomorfismo definido en (c) *de 1.1.1, $(\mathfrak{p};[\,;\,]_{\mathfrak{p}};\tilde{\delta}\,m)$ es una biálgebra de Lie-Semenov, es decir, la parte simétrica de m es invertible y ad-invariante y m satisface la igualdad* (d) *de la Sección 2.4.2.*

Prueba

(1) Consideremos los homomorfismos $\tilde{s}, \tilde{a} : \mathfrak{p}^* \longrightarrow \mathfrak{p}$, definidos por las expresiones:

$$\tilde{s}(\xi;x) = (1/2)(x;\xi)\,; \qquad \tilde{a}(\xi;x) = (1/2)(x;-\xi)\,. \tag{d}$$

Es inmediato comprobar que $\tilde{m} = \tilde{s} + \tilde{a}$. Además, para todo $(\xi;x),(\eta;y) \in \mathfrak{p}^*$,

$$\langle(\xi;x)\,;\tilde{s}(\eta;y)\rangle = \langle(\xi;x)\,;(1/2)(y;\eta)\rangle = (1/2)\left(\langle\xi\,;y\rangle + \langle\eta\,;x\rangle\right) = \langle\tilde{s}(\xi;x)\,;(\eta;y)\rangle\,.$$

Esta igualdad quiere decir que el 2-tensor $s \in \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}$ correspondiente a $\tilde{s}$ es simétrico.

De manera análoga, tenemos:

$$\langle(\xi;x)\,;\tilde{a}(\eta;y)\rangle = (1/2)\left(\langle\xi\,;y\rangle - \langle\eta\,;x\rangle\right) = -\langle(\eta;y)\,;\tilde{a}(\xi;x)\rangle\,,$$

que expresa la antisimetría del 2-tensor $a \in \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{p}$ asociado al homomorfismo $\tilde{a}$.

Como consecuencia de (d), $\tilde{s} \in Hom(\mathfrak{p}^*;\mathfrak{p})$ es invertible.

(2) El isomorfismo $\Phi : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}^*$ asociado a la forma bilineal $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ definida en (b) viene dado por la expresión:

$$\Phi(x;\xi) = (\xi;x) = \frac{1}{2}(\tilde{s})^{-1}(x;\xi)\,.$$

Al ser $\langle\,;\,\rangle_{\mathfrak{p}}$ invariante por la representación adjunta asociada a $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ (Teorema 2.3 de la Sección 2.2.2), se tiene que s es también invariante por esta representación de $\mathfrak{p}$.

(3) Como $\tilde{s}$ es invertible e invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{p}$, tenemos sobre $\mathfrak{p}^*$ un corchete de Lie, que viene dado por la expresión (c) de la Sección 2.4.1:

$$\big[(\xi;x)\,;(\eta;y)\big]^s = -2\,\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi;x)}(\eta;y)\,, \tag{e}$$

(4) La representación coadjunta de $\mathfrak{p}$ se escribe de la siguiente forma:

$$\mathrm{ad}^*_{(x;\xi)}(\eta;y) = \big(\,\mathrm{ad}^*_y\,\xi - \mathrm{ad}^*_x\,\eta - [\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*}\,;\mathrm{ad}^*_\eta\,x - \mathrm{ad}^*_\xi\,y - [x\,;y]\big)\;. \tag{f}$$

En efecto,

$$\big\langle\,\mathrm{ad}^*_{(x;\xi)}(\eta;y)\,;(z;\mu)\big\rangle = -\big\langle(\eta;y)\,;\mathrm{ad}_{(x;\xi)}(z;\mu)\big\rangle = \big\langle(\eta;y)\,;[(x;\xi)\,;(z;\mu)]_{\mathfrak{p}}\big\rangle\,.$$

Si tenemos en cuenta la forma del corchete $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ (expresión (a)), la igualdad anterior se escribe así:

$$\big\langle\,\mathrm{ad}^*_{(x;\xi)}(\eta;y)\,;(z;\mu)\big\rangle = \big\langle(\eta;y)\,;\big([x\,;z] + \mathrm{ad}^*_\xi\,z - \mathrm{ad}^*_\mu\,x;[\xi\,;\mu]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{ad}^*_x\,\mu - \mathrm{ad}^*_z\,\xi\big)\big\rangle\,,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&\big\langle\,\mathrm{ad}^*_{(x;\xi)}(\eta;y)\,;(z;\mu)\big\rangle = \\
&\quad = \big\langle\eta\,;[x\,;z] + \mathrm{ad}^*_\xi\,z - \mathrm{ad}^*_\mu\,x\big\rangle + \big\langle[\xi\,;\mu]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{ad}^*_x\,\mu - \mathrm{ad}^*_z\,\xi\,;y\big\rangle = \\
&\quad = \big\langle -\mathrm{ad}^*_x\,\eta - \mathrm{ad}_\xi\,\eta\,;z\big\rangle + \big\langle\mathrm{ad}_\mu\,\eta\,;x\big\rangle + \big\langle\mu\,;-\mathrm{ad}^*_\xi\,y - \mathrm{ad}_x\,y\big\rangle + \big\langle\xi\,;\mathrm{ad}_z\,x\big\rangle = \\
&\quad = \big\langle -\mathrm{ad}^*_x\,\eta - \mathrm{ad}_\xi\,\eta\,;z\big\rangle + \big\langle\mu\,;\mathrm{ad}^*_\eta\,x\big\rangle + \big\langle\mu\,;-\mathrm{ad}^*_\xi\,y - \mathrm{ad}_x\,y\big\rangle + \big\langle\,\mathrm{ad}^*_y\,\xi\,;z\big\rangle\,,
\end{aligned}$$

que demuestra la expresión (f).

(5) Sea $\widetilde{[m\,;m]} \in \mathit{Hom}(\mathfrak{p}\times\mathfrak{p};\mathfrak{p})$ dado por la Definición 4.1 de 2.4.2, se satisface la expresión (d) de 2.4.2:

$$\widetilde{[m\,;m]}\,((\xi;x);(\eta;y)) = -\tilde{m}\,([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^s)\;. \tag{g}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{[m\,;m]}\,((\xi;x);(\eta;y)) + \tilde{m}\,([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^s) = \\
&\quad = \tilde{m}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\xi;x)}(\eta;y) - \mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\eta;y)}(\xi;x)\right) - [\tilde{m}(\xi;x)\,;\tilde{m}(\eta;y)]_{\mathfrak{p}} + \tilde{m}\,([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^s)\;.
\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (e) en la igualdad anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{[m\,;m]}\,((\xi;x);(\eta;y)) + \tilde{m}\,([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^s) = \\
&= \tilde{m}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\xi;x)}(\eta;y) - \mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\eta;y)}(\xi;x)\right) - [\tilde{m}(\xi;x)\,;\tilde{m}(\eta;y)]_{\mathfrak{p}} - 2\tilde{m}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi;x)}(\eta;y)\right)\;.
\end{aligned} \tag{h}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (f),

$$\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\eta;y)}(\xi;x) = \mathrm{ad}^*_{(y;0)}(\xi;x) = \big(\mathrm{ad}^*_y\,\xi;[y\,;x] - \mathrm{ad}^*_\xi\,y\big)\;,$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\xi;x)}(\eta;y) - 2\,\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi;x)}(\eta;y) &= -\,\mathrm{ad}^*_{(\tilde{m})^t(\xi;x)}(\eta;y) = -\,\mathrm{ad}^*_{(0;\xi)}(\eta;y) = \\ &= -\left([\xi\,;\eta] - \mathrm{ad}^*_y\,\xi; \mathrm{ad}^*_\xi\, y\right) ,\end{aligned}$$

ya que $\dot{s} + \tilde{a} - 2\tilde{s} = -(\tilde{s} - \tilde{a}) = -(\tilde{m})^t$. Por tanto,

$$\tilde{m}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\eta;y)}(\xi;x)\right) = \left([y\,;x] - \mathrm{ad}^*_\xi\, y; 0\right), \tag{i}$$

$$\tilde{m}\left(\mathrm{ad}^*_{\tilde{m}(\xi;x)}(\eta;y) - 2\,\mathrm{ad}^*_{\tilde{s}(\xi;x)}(\eta;y)\right) = \left(\mathrm{ad}^*_\xi\, y; 0\right), \tag{k}$$

Por otra parte, volviendo a tener en cuenta (a),

$$[\tilde{m}(\xi;x)\,;\tilde{m}(\eta;y)]_{\mathfrak{p}} = [(x;0)\,;(y;0)]_{\mathfrak{p}} = ([x\,;y];0) , \tag{l}$$

Sustituyendo (i), (k) y (l) en (h), se llega finalmente a:

$$\widetilde{[m\,;m]}\,((\xi;x);(\eta;y)) + \tilde{m}\,([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^s) = 0 ,$$

que es la condición (g). ■

Definición 4.4 *Sea $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ una biálgebra de Lie. A la biálgebra de Lie-Semenov $(\mathfrak{p};[\,;\,]_{\mathfrak{p}};\bar{\delta}\,m)$, donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$ y $[\,;\,]_{\mathfrak{p}}$ viene dado por la expresión* (a) *y m por* (c)*, se la denomina biálgebra de Lie doble de $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$.*

Proposición 4.6 *Sea $(\mathfrak{g};[\,;\,];\epsilon)$ una biálgebra de Lie, $(\mathfrak{p};[\,;\,]_{\mathfrak{p}};\bar{\delta}\,m)$ la biálgebra de Lie doble de aquella. Entonces, el corchete $[\,;\,]^m_{\mathfrak{p}^*}$ sobre el álgebra dual $\mathfrak{p}^*$, definido por la aplicación transpuesta del 1-cociclo $\bar{\delta}\,m$ viene dado por:*

$$[(\xi;x)\,;(\eta;y)]^m_{\mathfrak{p}^*} = \left([\xi\,;\eta]_{\mathfrak{g}^*};[y\,;x]\right) . \tag{m}$$

Es decir, $(\mathfrak{p}^*;[\,;\,]^m_{\mathfrak{p}^*})$ es el producto directo del álgebra de Lie $(\mathfrak{g}^*;[\,;\,]_{\mathfrak{g}^*})$ y el álgebra opuesta a $\mathfrak{g}$.

Prueba Por definición,

$$[(\xi;x)\,;(\eta;y)]^m_{\mathfrak{p}^*} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\eta;y)}(\xi;x) - \mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi;x)}(\eta;y) ,$$

ahora bien,

$$\begin{aligned}-\,\mathrm{ad}^*_{\tilde{a}(\xi;x)}(\eta;y) &= (1/2)\left(\mathrm{ad}^*_{(0;\xi)}(\eta;y) - \mathrm{ad}^*_{(x;0)}(\eta;y)\right) = \\ &= (1/2)\left([\xi\,;\eta] - \mathrm{ad}^*_y\,\xi - \mathrm{ad}^*_x\,\eta\,;\ [y;x] + \mathrm{ad}^*_\eta\, x + \mathrm{ad}^*_\xi\, y\right) .\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrada la proposición. ■

Proposición 4.7 *Sea $(\mathfrak{g};[\,;\,]\epsilon)$ una biálgebra de Lie, $\left(\mathfrak{p};[\,;\,]_{\mathfrak{p}};\bar{\delta}\,m\right)$ su doble. La inyección de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{p}$ es un morfismo de biálgebras de Lie y la inyección de $\mathfrak{g}^*$ en $\mathfrak{p}$ es un antimorfismo.*

Prueba Sean

$$i : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow (x;0) \in \mathfrak{p} \quad \text{y} \quad i^t : (\xi;x) \in \mathfrak{p}^* \longrightarrow \xi \in \mathfrak{g}^* .$$

De la definición de $[\,;]_{\mathfrak{p}}$ se deduce:

$$i\left([x\,;y]\right) = [i(x)\,;i(y)]_{\mathfrak{p}}$$

y

$$i^t\left([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^m_{\mathfrak{p}^*}\right) = \left[i^t(\xi;x)\,;i^t(\eta;y)\right] .$$

Por otra parte, si

$$j : \xi \in \mathfrak{g}^* \longrightarrow (0;\xi) \in \mathfrak{p} \quad \text{y} \quad j^t : (\xi;x) \in \mathfrak{p}^* \longrightarrow x \in \mathfrak{g} ,$$

se tiene

$$j\left([\xi\,;\eta]\right) = [j(\xi)\,;j(\eta)]_{\mathfrak{p}}$$

y

$$j^t\left([(\xi;x)\,;(\eta;y)]^m_{\mathfrak{p}^*}\right) = -\left[j^t(\xi;x)\,;j^t(\eta;y)\right] .$$

■

Como biálgebra de Lie-Semenov, $(\mathfrak{p};[\,;]_{\mathfrak{p}};\tilde{\delta}m)$ tiene asociada un álgebra de Lie-Semenov $(\mathfrak{p};R)$, donde $R \in End(\mathfrak{p})$ está definido por la igualdad $R = \tilde{a} \circ (\tilde{s})^{-1}$. Por lo tanto,

$$R(x;\xi) = 2\tilde{a}(\xi;x) = (x - \xi) ,$$

es decir,

$$R(x;\xi) = \left(P_{\mathfrak{g}} - P_{\mathfrak{g}^*}\right)(x;\xi) = (x;0) - (0;\xi) .$$

El álgebra de Lie-Semenov asociada a $(\mathfrak{p};[\,;]_{\mathfrak{p}};\tilde{\delta}m)$ es pues de la clase estudiada en la Sección 2.1.2.

El corchete que R determina sobre $\mathfrak{p}$, (expresión (b) de la Sección 2.4.1), es

$$\left[(x;\xi)\,;(y;\eta)\right]_R = \left([x\,;y];[\eta\,;\xi]\right) ,$$

siendo de comprobación directa que se satisface:

$$\left[(x;\xi)\,;(y;\eta)\right]^s_{\mathfrak{p}^*} = -2(\tilde{s})^{-1}\left([s(\xi;x)\,;\,\tilde{s}(\eta;y)]_R\right) .$$

2.5 Corchete de Sklyanin y Ecuaciones de Lax sobre G

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Si $(\mathfrak{g};[\,;];\tilde{\delta}r)$ es una biálgebra de Lie exacta, se ha visto en la Subsección 2.3.2 que sobre G existe una estructura de grupo de Lie-Poisson cuyo corchete viene dado por la expresión (j) de 2.3.2.

Supongamos que sobre $\mathfrak{g}$ está definida una forma bilineal, simétrica, no-degenerada, invariante por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ y que $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es el isomorfismo asociado. Entonces (Corolario de la Proposición 4.1 de 2.4.1), si $(\mathfrak{g};R)$ es un álgebra de Lie doble y el endomorfismo $R \in End(\mathfrak{g})$ es antisimétrico con respecto a ϕ, el 2-tensor r correspondiente (por el isomorfismo (c) de 1.1.1) al homomorfismo $\tilde{r} = (R+1)\circ\phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ define una estructura de biálgebra de Lie exacta sobre $\mathfrak{g}$. Así pues, sobre el grupo G, se tiene una estructura de Lie Poisson determinada por el endomorfismo R.

En esta sección vamos a demostrar que, de forma análoga a lo establecido en el Teorema 1.4 de la Sección 2.1.3, si el endomorfismo R es además solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter, las soluciones de las ecuaciones del movimiento relativas al corchete de Lie-Poisson que determina R sobre G, definidas por hamiltonianos que son funciones centrales, se pueden encontrar por el método de factorización.

Definición 5.1 *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $r = s + a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ un 2-tensor contravariante (s su parte simétrica y a su parte antisimétrica) tal que s y el 3-tensor $[a\,;a]$ (expresión* (a) *de 2.3.1) son invariantes por la representación adjunta. Sean (e_μ) una base de $\mathfrak{g}$, $r^{\mu\nu}$ las componentes de r en dicha base, x^λ_μ y x^ρ_μ los campos vectoriales definidos por traslación a la izquierda y a la derecha respectivamente de (e_μ). Se denomina corchete de Sklyanin a la aplicación bilineal dada por la expresión:*

$$\{\varphi\,;\psi\} = \sum r^{\mu\nu}\left(\mathrm{L}_{x^\lambda_\mu}\varphi\,\mathrm{L}_{x^\lambda_\nu}\psi - \mathrm{L}_{x^\rho_\mu}\varphi\,\mathrm{L}_{x^\rho_\nu}\psi\right)\,, \tag{a}$$

que, según el Corolario de la Proposición 3.6 en 2.3.2, define una estructura de Lie-Poisson sobre G.

La estructura de biálgebra de Lie exacta sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está unívocamente determinada por la parte antisimétrica a del 2-tensor r, una vez que se tiene la invariançia por la representacion adjunta de la parte simétrica s (ver expresión (f) de 2.3.2). Por lo tanto, la correspondiente estructura de Lie-Poisson sobre el grupo, no depende tampoco de s. En el Lema 3.2 de la Sección 2.3.2, donde se da la forma explícita del 1-cociclo $l : G \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ que define el corchete de Lie-Poisson (a), se observa esta dependencia única de a. En consecuencia, podemos suponer que r es antisimétrico de partida:

Proposición 5.1 *Sea $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ un 2-tensor tal que el corchete de Schouten $[r\,;r]$ es invariante por la representación adjunta. Si denotamos por $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ al homomorfismo asociado, el corchete de Sklyanin se expresa así:*

$$\begin{aligned}\{\varphi\,;\psi\}(g) = \big\langle (T_e\lambda_g)^t\cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\big((T_e\lambda_g)^t\cdot d\psi(g)\big)\big\rangle &-\\ -\big\langle (T_e\rho_g)^t\cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\big((T_e\rho_g)^t\cdot d\psi(g)\big)\big\rangle&\,,\end{aligned} \tag{b}$$

para todo $g \in G$ y para todo $\varphi, \psi \in C^\infty(G)$.

Teniendo en cuenta la antisimetría de r, es decir, $\langle\alpha\,;\tilde{r}(\beta)\rangle = -\langle\beta\,;\tilde{r}(\alpha)\rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$, la expresión (b) *se escribe también así:*

$$\begin{aligned}\{\varphi\,;\psi\}(g) = \big\langle (T_e\rho_g)^t\cdot d\psi(g)\,;\tilde{r}\,\big((T_e\rho_g)^t\cdot d\varphi(g)\big)\,\big\rangle &-\\ -\big\langle (T_e\lambda_g)^t\cdot d\psi(g)\,;\tilde{r}\,\big((T_e\lambda_g)^t\cdot d\varphi(g)\big)\,\big\rangle&\,,\end{aligned}$$

para todo $g \in G$ y para todo $\varphi, \psi \in C^\infty(G)$.

Prueba Si (e_μ) es una base de $\mathfrak{g}$, se tiene:

$$\begin{aligned}r^{\mu\nu}\mathrm{L}_{x^\lambda_\mu}\varphi(g)\,\mathrm{L}_{x^\lambda_\nu}\psi(g) &= r^{\mu\nu}\left((T_e\lambda_g)^t\cdot d\varphi(g)\right)(e_\mu)\left((T_e\lambda_g)^t\cdot d\psi(g)\right)(e_\nu) =\\ &= r^{\mu\nu}\left((T_e\lambda_g)^t\cdot d\varphi(g)\right)_\mu\left((T_e\lambda_g)^t\cdot d\psi(g)\right)_\nu =\\ &= \big\langle (T_e\lambda_g)^t\cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\,\big((T_e\lambda_g)^t\cdot d\psi(g)\big)\,\big\rangle\,,\end{aligned}$$

de la misma forma:

$$r^{\mu\nu}\mathrm{L}_{x^\rho_\mu}\varphi(g)\,\mathrm{L}_{x^\rho_\nu}\psi(g) = \big\langle (T_e\rho_g)^t\cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\,\big((T_e\rho_g)^t\cdot d\psi(g)\big)\,\big\rangle\,.$$

■

Corolario *Sea $G \subset Gl(n;\mathbb{R})$ el subgrupo de Lie de $Gl(n;\mathbb{R})$, conexo, con álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset End(\mathbb{R}^n)$. Si $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ es el homomorfismo asociado a un 2-tensor antisimétrico $r \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, tal que se satisfacen las condiciones del Proposición 5.1. El corchete de Sklyanin definido por r viene dado por la expresión:*

$$\{\varphi;\psi\}(A) = \langle A\, d\psi(A)\,;\tilde{r}\,(A\, d\varphi(A))\,\rangle - \langle d\psi(A)\, A\,;\tilde{r}\,(d\varphi(A)\, A)\,\rangle\,, \tag{c}$$

para toda matriz $A \in G$ y todo par de funciones $\varphi,\psi \in C^\infty(G)$.

Prueba Interpretamos los elementos de $\left(T_L Gl(n;\mathbb{R})\right)^*$ como matrices $\left(\alpha^i_{\ j}\right)$ con el mismo criterio de indices que las matrices de $End(\mathbb{R}^n)$ y la acción dual así:

$$\langle \alpha\,;A\rangle = \alpha^i_{\ j}\, a^j_{\ i}\,; \quad A \equiv \left(a^i_{\ j}\right) \in \mathfrak{g}\,; \quad \alpha \in \mathfrak{g}^*\,.$$

Sea $A \in Gl(n;\mathbb{R})$, las traslaciones por la izquierda y por la derecha definidas por A son los difeomorfismos:

$$\begin{array}{c} Gl(n;\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda_A} Gl(n;\mathbb{R}) \\ B \longrightarrow A\cdot B \end{array}\;; \qquad \begin{array}{c} Gl(n;\mathbb{R}) \xrightarrow{\rho_A} Gl(n;\mathbb{R}) \\ B \longrightarrow B\cdot A \end{array}\,.$$

Las aplicaciones tangentes en el elemento unidad $I \in Gl(n;\mathbb{R})$ a λ_A y ρ_A vienen dadas por:

$$\begin{array}{c} T_I Gl(n;\mathbb{R}) \xrightarrow{T_I\lambda_A} T_A Gl(n;\mathbb{R}) \\ X \longrightarrow A\cdot X \end{array}\;; \qquad \begin{array}{c} T_I Gl(n;\mathbb{R}) \xrightarrow{T_I\rho_A} T_A Gl(n;\mathbb{R}) \\ X \longrightarrow X\cdot A \end{array}\,,$$

ya que:

$$T_I\lambda_A(X) = \frac{d}{dt} A\cdot \exp tX\Big|_{t=0} = A\cdot X\,,$$

y de forma análoga para $T_I\rho_A$.

Las duales de estas aplicaciones tangentes son:

$$\left(T_I\lambda_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot\alpha = \alpha\cdot A \quad \text{y} \quad \left(T_I\rho_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot\alpha = A\cdot\alpha\,,$$

ya que:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(T_I\lambda_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot\alpha\,;X\right\rangle &= \left\langle \alpha\,;T_I\lambda_A\cdot X\right\rangle = \left\langle \alpha\,;A\cdot X\right\rangle = \alpha^i_{\ j}(A\cdot X)^j_{\ i} = \\ &= \alpha^i_{\ j}A^j_{\ k}X^k_{\ i} = (\alpha\cdot A)^i_{\ k}X^k_{\ i} = \left\langle \alpha\cdot A\,;X\right\rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle \left(T_I\rho_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot\alpha\,;X\right\rangle &= \left\langle \alpha\,;T_I\rho_A\cdot X\right\rangle = \left\langle \alpha\,;X\cdot A\right\rangle = \alpha^i_{\ j}(X\cdot A)^j_{\ i} = \\ &= \alpha^i_{\ j}X^j_{\ k}A^k_{\ i} = (A\cdot\alpha)^k_{\ j}X^j_{\ k} = \left\langle A\cdot\alpha\,;X\right\rangle\,, \end{aligned}$$

para todo $X \in End(\mathbb{R}^n)$.

Teniendo en cuenta ahora la Proposición 5.1,

$$\begin{aligned} \{\varphi;\psi\}(A) &= \left\langle \left(T_I\rho_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot d\psi(A)\,;\tilde{r}\left(\left(T_I\rho_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot d\varphi(A)\right)\right\rangle - \\ &\qquad - \left\langle \left(T_I\lambda_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot d\psi(A)\,;\tilde{r}\left(\left(T_e\lambda_A\right)^{\mathrm{t}}\cdot d\varphi(A)\right)\right\rangle = \\ &= \langle A\, d\psi(A)\,;\tilde{r}\,(A\, d\varphi(A))\,\rangle - \langle d\psi(A)\, A\,;\tilde{r}\,(d\varphi(A)\, A)\,\rangle\,, \end{aligned}$$

que es la expresión (c). ∎

Teorema 5.1 *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ un 2-tensor antisimétrico, tal que el corchete de Schouten $[r\,;r]$ es invariante por la representación adjunta, y $\tilde{r} \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ el homomorfismo asociado por el isomorfismo* (c) *de 1.1.1. Entonces:*

(1) *Las funciones centrales de G, es decir, aquellas funciones $\varphi \in C^\infty(G)$ tales que $\varphi_g \circ \lambda_g = \varphi \circ \rho_g$ para todo $g \in G$, están en involución con respecto al corchete de Sklyanin que define r.*

(2) *Sea $\varphi \in C^\infty(G)$ una función central de G. Las ecuaciones del movimiento relativas al corchete de Sklyanin, con hamiltoniano φ, son:*

$$\frac{dc}{dt} = \left(T_e\lambda_{c(t)} - T_e\rho_{c(t)}\right) \cdot M(c(t)), \qquad M(c(t)) = \tilde{r}\left((T_e\rho_{c(t)})^{\mathrm{t}} d\varphi(c(t))\right), \tag{d}$$

donde $c : t \in I \longrightarrow c(t) \in G$ es una curva integral del campo hamiltoniano X_φ definido por la condición: $\mathrm{L}_{X_\varphi}\psi = \{\varphi\,;\psi\}$.

(3) *Si $G \subset Gl(n;\mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de $Gl(n;\mathbb{R})$, las ecuaciones del movimiento adquieren la forma de Lax:*

$$\frac{dA}{dt} = [A\,;M], \qquad M = \tilde{r}(A\,d\varphi(A)). \tag{e}$$

La demostración se basa en la siguiente propiedad de las funciones centrales sobre un grupo.

Lema 5.1 *Sea G un grupo de Lie y $\varphi \in C^\infty(G)$ una función central, es decir, tal que:*

$$\varphi \circ \lambda_g = \varphi \circ \rho_g, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Entonces:

(1) $$(T_e\lambda_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g) = (T_e\rho_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g), \quad \text{para todo } g \in G.$$

(2) $$d\varphi(g_0) = (T_{g_0}I_h)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g), \quad \text{para todo } h \in G,$$

siendo $g = I_h(g_0)$ y donde $I_h : g \in G \longrightarrow hgh^{-1} \in G$.

Prueba Las igualdades se obtienen al derivar los dos miembros de la definición de función central. ■

Prueba del Teorema 5.1

(1) El corchete de Sklyanin que define r viene dado por la expresión (b):

$$\begin{aligned}\{\varphi\,;\psi\}(g) = &\left\langle (T_e\lambda_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\left((T_e\lambda_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\psi(g)\right) \right\rangle - \\ &- \left\langle (T_e\rho_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g)\,;\tilde{r}\left((T_e\rho_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\psi(g)\right) \right\rangle,\end{aligned}$$

pero como φ, ψ son funciones centrales, el Lema 5.1 implica

$$\{\varphi\,;\psi\} = 0.$$

(2) Al ser $\varphi \in C^\infty(G)$ una función central, el Lema 5.1 implica que el corchete de Sklyanin de φ y ψ, dado por la igualdad (b), es igual a:

$$\{\varphi\,;\psi\}(g) = \left\langle d\psi(g)\,;(T_e\rho_g - T_e\lambda_g) \cdot \tilde{r}\left((T_e\rho_g)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(g)\right) \right\rangle,$$

por lo tanto las ecuaciones del movimiento con hamiltoniano φ, relativas a este corchete, son:

$$\frac{dc}{dt} = (T_e\lambda_c - T_e\rho_c) \cdot \tilde{r}\big((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(c)\big) .$$

(3) En el caso de que $G \subset Gl(n;\mathbb{R})$, si I es la unidad del grupo,

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= (T_I\lambda_A - T_I\rho_A) \cdot \tilde{r}\big((T_I\rho_A)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(A)\big) = \\ &= A\tilde{r}\big((T_I\rho_A)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(A)\big) - \tilde{r}\big((T_I\rho_A)^{\mathrm{t}} \cdot d\varphi(A)\big)A = \\ &= A\tilde{r}\big(A\, d\varphi(A)\big) - \tilde{r}\big(A\, d\varphi(A)\big)A = [A\,;M] .\end{aligned}$$

■

Para enunciar el teorema de obtención de soluciones por el método de factorización, recordemos algunos resultados de la Sección 2.1.3.

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Consideremos un endomorfismo $R \in End(\mathfrak{g})$ solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter y definamos los endomorfismos de $\mathfrak{g}$:

$$R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm 1) .$$

Según la Proposición 1.5 de 2.1.3, denotando por $\mathfrak{g}_R$ al espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie $[\,;\,]_R$, tenemos que

$$R_\pm : \mathfrak{g}_R \to \mathfrak{g}$$

son homomorfismos de álgebras de Lie. Por lo tanto, $\mathfrak{g}_\pm \equiv \operatorname{Im} R_\pm$ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$.

La aplicación

$$(R_+; R_-) : \mathfrak{g}_R \to \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie inyectivo, de forma que todo elemento $x \in \mathfrak{g}$ admite una descomposición única $x = x_+ - x_-$ con $(x_+; x_-) \in \operatorname{Im}(R_+; R_-)$ (Teorema 1.3 de 2.1.3).

Sea G_R el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}_R$ y $\widehat{R}_\pm : G_R \to G$ los homomorfismos de grupos correspondientes a $R_\pm$. Los subgrupos de Lie conexos, $G_\pm \supseteq \operatorname{Im} \widehat{R}_\pm$, correspondientes a las subálgebras de Lie $\mathfrak{g}_\pm$ de $\mathfrak{g}$, son subgrupos de Lie cerrados de G y la aplicación

$$(\widehat{R}_+; \widehat{R}_-) : G_R \to G_+ \times G_- ,$$

es un homomorfismo localmente inyectivo en un entorno de $e \in G_R$, de grupos de Lie.

Por otra parte, la aplicación tangente en $(e;e)$ a:

$$\pi : (g;h) \in G \times G \to gh^{-1} \in G$$

viene dada por la expresión $T_{(e;e)}\pi(x;y) = x - y$. Entonces, $T_e\big(\pi \circ (\widehat{R}_+; \widehat{R}_-)\big)$ es el isomorfismo de espacios vectoriales $x \in \mathfrak{g}_R \to x_+ - x_- \in \mathfrak{g}$, donde $(x_+; x_-) \in \operatorname{Im}(R_+; R_-)$, lo cual implica que la composición:

$$\pi \circ (\widehat{R}_+; \widehat{R}_-) : g \in G_R \to g_+ g_-^{-1} \in G$$

es un difeomorfismo local en un entorno de la unidad de G.

En consecuencia, todo elemento $g \in G$, suficientemente próximo a la unidad $e \in G$, admite una factorización única:

$$g = g_+ g_-^{-1}\,; \qquad (g_+; g_-) \in \mathrm{Im}(\widehat{R}_+; \widehat{R}_-)\,.$$

Teorema 5.2 *Con las notaciones anteriores, sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, simétrica, no degenerada sobre $\mathfrak{g}$, invariante por la representación adjunta. Sea $R \in End(\mathfrak{g})$ un endomorfismo antisimétrico (con respecto a ϕ), solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter y $\tilde{r} = R \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$. Si $\varphi \in C^\infty(G)$ es una función central de G, la solución de las ecuaciones del movimiento* (d) *de hamiltoniano φ, con valor inicial $c_0 \in G$, es:*

$$c(t) = b_+^{-1}(t)\, c_0\, b_+(t) = b_-^{-1}(t)\, c_0\, b_-(t)\,, \tag{f}$$

donde $b_\pm(t) \in G_\pm$ están definidos para t suficientemente pequeño y satisfacen el problema de factorización local:

$$\exp\left(2t\phi^{-1}\left((T_e\rho_{c_0})^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c_0)\right)\right) = b_+(t)\, b_-^{-1}(t)\,, \qquad (b_+; b_-) \in \mathrm{Im}(\widehat{R}_+; \widehat{R}_-)\,, \tag{g}$$

para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño.

Análogamente a lo que sucede en el Teorema 1.2 de 2.1.2, la igualdad de las soluciones (f) es consecuencia de la condición de función central de φ.

Para demostrar el teorema haremos uso de la siguiente expresión de las ecuaciones del movimiento.

Lema 5.2 *Sea $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el isomorfismo asociado a una forma bilineal, simétrica, no-degenerada, invariante por la representación adjunta. Sea $R \in End(\mathfrak{g})$ una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter, antisimétrica con respecto a ϕ y $R_\pm = (1/2)(R \pm 1)$. Sea $\varphi \in C^\infty(G)$ una función central sobre el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\tilde{r}_\pm = R_\pm \circ \phi^{-1} \in Hom(\mathfrak{g}^*; \mathfrak{g})$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es el 2-tensor correspondiente, las ecuaciones del movimiento* (d)*, de hamiltoniano φ, relativas al corchete de Sklyanin definido por r, se pueden escribir así:*

$$\frac{dc}{dt} = 2\left(T_e\lambda_{c(t)} - T_e\rho_{c(t)}\right)\left(\tilde{r}_\pm\left((T_e\rho_{c(t)})^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c(t))\right)\right)\,. \tag{h}$$

Prueba Como $2\tilde{r}_\pm = \tilde{r} \pm \phi^{-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} &2\left(T_e\lambda_c - T_e\rho_c\right)\left(\tilde{r}_\pm\left((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\right)\right) = \\ &\quad = \left(T_e\lambda_c - T_e\rho_c\right)\left(\tilde{r}\left((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\right)\right) \pm \left(T_e\lambda_c - T_e\rho_c\right)\left(\phi^{-1}\left((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\right)\right)\,. \end{aligned}$$

El lema se demuestra comprobando que el segundo término del segundo miembro de la expresión anterior es nulo. En efecto, al ser φ una función central, por el Lema 5.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\left(T_e\lambda_c - T_e\rho_c\right)\left(\phi^{-1}\left((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\right)\right) = \\ &\qquad = T_e\lambda_c \circ \phi^{-1} \circ (T_e\lambda_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c) - T_e\rho_c \circ \phi^{-1} \circ (T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\,. \end{aligned} \tag{i}$$

Ahora bién, la invariancia por la representación adjunta de la forma bilineal $\widetilde{\phi}$ asociada a ϕ, es decir, la condición: $\widetilde{\phi}(\mathrm{Ad}_g\, x; \mathrm{Ad}_g\, y) = \widetilde{\phi}(x; y)$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y para todo $g \in \boldsymbol{G}$, implica que:

$$T_e\rho_g \circ \phi^{-1} \circ (T_e\rho_g)^{\mathrm{t}} = T_e\lambda_g \circ \phi^{-1} \circ (T_e\lambda_g)^{\mathrm{t}} .$$

Entonces, sustituyendo en (i),

$$\begin{aligned}(T_e\lambda_c - T_e\rho_c)\,&\left(\phi^{-1}\left((T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c)\right)\right) = \\ &= T_e\rho_c \circ \phi^{-1} \circ (T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c) - T_e\rho_c \circ \phi^{-1} \circ (T_e\rho_c)^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c) = 0 .\end{aligned}$$

■

Prueba del Teorema 5.2

(1) La derivada con respecto a t de la solución (f) propuesta por el teorema es:

$$\frac{dc}{dt} = \left(T_e\lambda_{c(t)} - T_e\rho_{c(t)}\right)\left(T_{b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}}\frac{db_\pm}{dt}\right) . \tag{j}$$

En efecto, como la derivada de la operación del grupo: $\pi : (g\,; h) \in \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \longrightarrow gh \in \boldsymbol{G}$ viene dada por la expresión: $T_{(g\,;h)}\pi(x_g\,; x_h) = T_h\lambda_g(x_h) + T_g\rho_h(x_g)$ donde $x_g \in T_g\boldsymbol{G}$ y $x_h \in T_h\boldsymbol{G}$ (ver Dieudonné [1970]), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= T_{b_+(t)^{-1}c_0}\rho_{b_+(t)}\left(\frac{d}{dt}\left((b_+(t))^{-1}c_0\right)\right) + T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}c_0}\frac{db_+}{dt} = \\ &= T_{b_+(t)^{-1}c_0}\rho_{b_+(t)} \circ T_{b_+(t)^{-1}}\rho_{c_0}\frac{db_+^{-1}}{dt} + T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}c_0}\frac{db_+}{dt} .\end{aligned}$$

Ahora bién, el Lema 1.1 de la Sección 2.1.2 afirma que:

$$\frac{db_+^{-1}}{dt} = T_{b_+(t)}\rho_{b_+(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt} ,$$

por lo tanto, teniendo en cuenta que las traslaciones por la izquierda y por la derecha conmutan,

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= -T_{b_+^{-1}c_0}\rho_{b_+} \circ T_{b_+^{-1}}\rho_{c_0} \circ T_e\lambda_{b_+^{-1}} \circ T_{b_+}\rho_{b_+^{-1}}\frac{db_+}{dt} + T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}c_0}\frac{db_+}{dt} = \\ &= -T_{b_+^{-1}c_0}\rho_{b_+} \circ T_{b_+^{-1}}\rho_{c_0} \circ T_e\rho_{b_+^{-1}} \circ T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}}\frac{db_+}{dt} + T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}c_0}\frac{db_+}{dt} = \\ &= -T_e\rho_c \circ T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}}\frac{db_+}{dt} + T_e\lambda_c \circ T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}}\frac{db_+}{dt} = \\ &= (T_e\lambda_c - T_e\rho_c) \circ T_{b_+}\lambda_{b_+^{-1}}\frac{db_+}{dt} .\end{aligned}$$

que es la igualdad (j).

(2) Hay que probar que (h) y (j) coinciden, es decir, que se satisface la igualdad:

$$2\tilde{r}_\pm\left((T_e\rho_{c_\mp(t)})^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c_\mp(t))\right) = T_{b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}}\frac{db_\pm}{dt} . \tag{k}$$

(3) Si $(b_+, b_-) \in \mathrm{Im}(\widehat{R}_+; \widehat{R}_-)$ estan definidos por la factorización (g):

$$\exp\left(2t\phi^{-1}\left((T_e\rho_{c_0})^{\mathrm{t}}\, d\varphi(c_0)\right)\right) = b_+(t)\, b_-^{-1}(t) , \tag{l}$$

se tiene la siguiente igualdad:

$$2\phi^{-1}\big((T_e\rho_{c(t)})^{t}(d\varphi(c(t)))\big) = T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt} - T_{b_-(t)}\lambda_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_-}{dt}\,. \tag{m}$$

En efecto, la derivada con respecto a t de la igualdad (l) es:

$$\begin{aligned} T_e\lambda_{\exp\left(2t\phi^{-1}((T_e\rho_{c_0})^{t}\,d\varphi(c_0))\right)}&\left(2\phi^{-1}(T_e\rho_{c_0})^{t}\,d\varphi(c_0)\right) = \\ &= T_{b_+(t)}\rho_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt} - T_{b_+(t)}\rho_{b_-(t)^{-1}}\circ T_e\lambda_{b_+(t)}\circ T_{b_-(t)}\lambda_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_-}{dt}\,, \end{aligned}$$

y componiendo por la izquierda con: $\left(T_{b_+(t)}\rho_{b_-(t)^{-1}}\right)^{-1}$ y $\left(T_e\lambda_{b_+(t)}\right)^{-1}$ se llega a la igualdad:

$$2\,\mathrm{Ad}\left(b_-(t)^{-1}\right)\circ\phi^{-1}\circ(T_e\rho_{c_0})^{t}\,d\varphi(c_0) = T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt} - T_{b_-(t)}\lambda_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_-}{dt}\,. \tag{n}$$

Como φ es una función central, se tiene (Lema 5.1):

$$d\varphi(c_0) = d\varphi(c(t))\circ T_{c_0b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}}\circ T_{c_0}\rho_{b_\pm(t)}\,,$$

por lo que el primer miembro de (n) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Ad}(b_-(t)^{-1})\circ\phi^{-1}\circ(T_e\rho_{c_0})^{t}\,d\varphi(c_0) &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*(b_-(t)^{-1})\big(d\varphi(c_0)\circ T_e\rho_{c_0}\big) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*(b_-(t)^{-1})\left(d\varphi(c(t))\circ T_{c_0b_-}\lambda_{b_-^{-1}}\circ T_{c_0}\rho_{b_-}\circ T_e\rho_{c_0}\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-(t)^{-1}\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_{c_0b_-}\lambda_{b_-^{-1}}\circ T_e\rho_{c_0b_-}\right)\,. \end{aligned} \tag{o}$$

Si ahora hacemos uso de la igualdad $c_0\,b_-(t) = b_-(t)\,c(t)$ (que es consecuencia de (f)), la expresión (o) se puede desarrollar así:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Ad}(b_-(t)^{-1})\circ\phi^{-1}\circ(T_e\rho_{c_0})^{t}d\varphi(c_0) &= \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-(t)^{-1}\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_{c_0b_-}\lambda_{b_-^{-1}}\circ T_e\rho_{b_-c}\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-^{-1}\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_{c_0b_-}\lambda_{b_-^{-1}}T_{b_-}\rho_c\circ T_e\rho_{b_-}\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-^{-1}\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_e\rho_c\circ T_{b_-}\lambda_{b_-^{-1}}\circ T_e\rho_{b_-}\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-(t)^{-1}\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_e\rho_c\circ\mathrm{Ad}\left(b_-(t)^{-1}\right)\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-(t)^{-1}\right)\circ\mathrm{Ad}^*\left(b_-(t)\right)\left(d\varphi(c(t))\circ T_e\rho_c\right) = \\ &= 2\phi^{-1}\left(d\varphi(c(t))\circ T_e\rho_c\right)\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en el primer miembro de (n), obtenemos:

$$2\phi^{-1}\big(d\varphi(c(t))\circ T_e\rho_{c(t)}\big) = T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt} - T_{b_-(t)}\lambda_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_-}{dt}\,,$$

que es la igualdad (m) que se quería demostrar.

(4) Se tiene

$$\left(T_{b_+(t)}\lambda_{b_+(t)^{-1}}\frac{db_+}{dt};T_{b_-(t)}\lambda_{b_-(t)^{-1}}\frac{db_-}{dt}\right)\in\mathrm{Im}(R_+;R_-)\,. \tag{p}$$

En efecto, la condición de homomorfismo de grupos de $\widehat{R}_\pm$ se puede expresar así: $\lambda_{\widehat{R}_\pm(g)} \circ \widehat{R}_\pm = \widehat{R}_\pm \circ \lambda_g$ para todo $g \in \boldsymbol{G}$. Entonces, teniendo en cuenta que $\widehat{R}_\pm b(t) = b_\pm(t)$, los términos del segundo miembro de (m) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}}\left(\frac{db_\pm}{dt}\right) &= T_{b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}} \circ T_{b(t)}\widehat{R}_\pm\left(\frac{db}{dt}\right) = \\ &= T_{b(t)}\left(\lambda_{b_\pm(t)^{-1}} \circ \widehat{R}_\pm\right)\left(\frac{db}{dt}\right) = T_{b(t)}\left(\lambda_{\widehat{R}_\pm(b(t)^{-1})} \circ \widehat{R}_\pm\right)\left(\frac{db}{dt}\right) = \\ &= T_{b(t)}\left(\widehat{R}_\pm \circ \lambda_{b(t)^{-1}}\right)\left(\frac{db}{dt}\right) = T_e\widehat{R}_\pm\left(T_{b(t)}\lambda_{b(t)^{-1}}\frac{db}{dt}\right). \end{aligned} \tag{q}$$

Ahora bién, por definición $R_\pm = T_e\widehat{R}_\pm$, entonces la igualdad (q) implica que (p).

(5) Como R es una solución de la ecuación modificada de Yang-Baxter, del Teorema 1.3 de 2.1.3 y de (p) se deduce que la descomposición (m) es única, es decir,

$$R_\pm\left(2\phi^{-1}\left(d\varphi(c(t)) \circ T_e\rho_{c(t)}\right)\right) = T_{b_\pm(t)}\lambda_{b_\pm(t)^{-1}}\frac{db_\pm}{dt},$$

que demuestra (k), ya que $2\tilde{r}_\pm = 2R_\pm \circ \phi^{-1}$. ∎

Corolario *Sea $\boldsymbol{G} \subset Gl(n;\mathbb{R})$ un subgrupo de Lie de $Gl(n;\mathbb{R})$. En las hipótesis del Teorema 5.2, las ecuaciones del movimiento* (e) *definidas por $R \in End(\mathfrak{g})$, con hamiltoniano $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$, tienen por solución con valor inicial $A_0 \in \boldsymbol{G}$ a:*

$$A(t) = B_\pm(t)^{-1} A_0\, B_\pm(t),$$

donde $B_\pm$ satisfacen el problema de factorización:

$$\exp\left(2tA_0 d\varphi(A_0)\right) = B_+(t)\, B_-(t)^{-1}, \quad (B_+;B_-) \in \operatorname{Im}(\widehat{R}_+;\widehat{R}_-).$$

Prueba Demostración del teorema anterior en el caso de un grupo de matrices.

(1) Sean $\tilde{r}_\pm = R_\pm \circ \phi^{-1}$, donde $R_\pm = (1/2)(R \pm 1)$, y $M_\pm = \tilde{r}_\pm(A\, d\varphi(A))$. Las ecuaciones del movimiento se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dA}{dt} = 2\left[A\,;M_\pm\right].$$

(2) La derivada de la curva sobre el grupo $A(t) = B_\pm(t)^{-1} A_0\, B_\pm(t)$ es:

$$\frac{dA}{dt} = \left[A(t)\,;B_\pm(t)^{-1}\frac{dB_\pm}{dt}\right].$$

(3) Se parte de la factorización:

$$\exp\left(2tA_0\, d\varphi(A_0)\right) = B_+(t)\, B_-(t)^{-1}.$$

Al derivar con respecto a t se obtiene la expresión:

$$2\phi^{-1}\left(A(t)\, d\varphi(A)\right) = B_+(t)^{-1}\frac{dB_+}{dt} - B_-(t)^{-1}\frac{dB_-}{dt}.$$

(4) Se tiene:

$$\left(B_+(t)^{-1}\frac{dB_+}{dt}\,;\, B_-(t)^{-1}\frac{dB_-}{dt}\right) \in \operatorname{Im}(R_+;R_-).$$

Como R satisface la ecuación modificada de Yang-Baxter, y la descomposición de (3) es única, lo cual implica que

$$2M_\pm \equiv 2\tilde{r}_\pm\left(A\, d\varphi(A)\right) = B_\pm(t)^{-1}\frac{dB_\pm}{dt}.$$

∎

Capítulo 3

Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter

Sin tener en cuenta consideraciones topológicas, se puede afirmar que todo grupo de Lie G determina y está derterminado por por el álgebra de Hopf conmutativa y no-coconmutativa $(\mathcal{C}^\infty(G); \cdot; \Delta)$, donde $\Delta : \mathcal{C}^\infty(G) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G)\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(G)$ es el coproducto definido así:

$$\Delta\phi(g; h) = \phi(g \cdot h)\,.$$

Por otra parte, la condición de grupo de Lie-Poisson (Definición 2.1 de 2.2.1) puede expresarse en términos de Δ. Si Λ es el 2-tensor que define el corchete de Poisson, $\{\,;\,\}$, sobre un grupo de Lie G, $(G; \Lambda)$ es un grupo de Lie-Poisson si y sólo si el coproducto es un morfismo de Poisson:

$$\Delta\{\varphi; \psi\} = \{\Delta\varphi; \Delta\psi\}\,; \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(G)\,. \tag{a}$$

Situando implícitamente estas consideraciones en el contexto de la teoría de los productos estrella, Drinfeld [1986] propone la noción de cuantificación de un grupo de Lie-Poisson $(G; \Lambda)$. Esta consiste en dotar a $\mathcal{C}^\infty(G)[[\hbar]]$ con una estructura de álgebra de Hopf no-conmutativa, no-coconmutativa, donde el coproducto Δ sea el mismo que el de $\mathcal{C}^\infty(G)$ y el producto $*$ sea un producto estrella. Es decir, un grupo cuántico se puede definir como este álgebra de Hopf.

El problema es entonces construir, sobre un grupo de Lie-Poisson $(G; \Lambda)$, productos estrella que satisfagan la condición de compatibilidad:

$$\Delta(\phi * \psi) = \Delta\phi * \Delta\psi\,, \tag{b}$$

estando el producto estrella del miembro de la derecha definido de forma canónica sobre $\mathcal{C}^\infty(G)\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(G) \equiv \mathcal{C}^\infty(G \times G)$.

En este capítulo se estudia el caso de los grupos de Lie-Poisson triangulares (Definición 3.3 de 2.3.2), es decir, aquellos en los que el 2-tensor de Poisson es $\Lambda = \Lambda^\lambda - \Lambda^\rho$, siendo Λ^λ y Λ^ρ los tensores 2-contravariantes obtenidos a partir de $r \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ por traslación a la izquierda y a la derecha respectivamente y r una solución de la ecuación clásica de Yang-Baxter (Definición 3.2 de 2.3.2).

A partir de un producto estrella invariante y sobre la base del trabajo de Drinfeld [1990], Takhtajan [1990] define un producto estrella (Teorema 1.2) que satisface la relación de compatibilidad (b).

El procedimiento es el siguiente. Como se ha visto (Proposición 4.1 de 1.4.3), todo producto estrella invariante por la izquierda, $*^\lambda$, sobre G está definido por un elemento $F \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. En notación polinómica (ver Secciones 1.4.1 y 1.4.3)

$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i\,,$$

de forma que, si $(F_i(x;y))^\lambda$ es el operador bidiferencial invariante por la izquierda determinado por $F_i(x;y) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, las 2-cocadenas C_i de $*^\lambda$ vienen dadas por:

$$C_i(\varphi;\psi) = \mu\big((F_i(x;y))^\lambda(\varphi \otimes \psi)\big)\,,$$

donde $\mu : \mathcal{C}^\infty(G) \otimes \mathcal{C}^\infty(G) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G)[[\hbar]]$ está definida por la expresión:

$$\mu\Big(\sum_i (\varphi \otimes \psi_i)\,\hbar^i\Big) = \sum_i \varphi_i \psi_i\,\hbar^i\,.$$

En términos de $F(x;y)$ y en dicha notación polinómica, la propiedad asociativa se expresa así (Proposición 4.1 de 1.4.3):

$$F(x+y;z)\,F(x;y) = F(x;y+z)\,F(y;z)\,. \tag{c}$$

Análogamente, un producto estrella invariante por la derecha, $*^\rho$, está definido a partir de un único elemento $H(x;y) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ de manera que las 2-cocadenas D_i de $*^\rho$ vienen dadas por:

$$D_i(\varphi;\psi) = \mu\big((H_i(x;y))^\rho(\varphi \otimes \psi)\big)\,,$$

expresándose la propiedad asociativa así:

$$H(x;y)\,H(x+y;z) = H(y;z)\,H(x;y+z)\,. \tag{d}$$

En particular, si $F(x;y)$ satisface (c), $F^{-1}(x;y)$ satisface (d). Y

$$\varphi \mathbin{\overset{\circ}{*}} \psi = \mu\big((F^{-1}(x;y))^\rho (F(x;y))^\lambda(\varphi \otimes \psi)\big)\,,$$

es un producto estrella (no-invariante) que satisface la condición de compatibilidad (b) (Teorema 1.2 de la Secciíon 3.1).

La relación entre los productos estrella y la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter, ECTYB, está descrita en dos teoremas enunciados por Drinfeld [1983b], cuya demostración desarrollamos en las Secciones 3.2.2, 3.4.1 y 3.4.3.

El primero, Teorema 2.1, establece que a partir de un producto estrella invariante por la izquierda $F(x;y)$ se obtienen soluciones de la ECTYB sobre $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. El elemento

$$S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y)\,, \tag{e}$$

satisface

$$\begin{gathered} S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) = S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y) \\ S(x;y)\,S(y;x) = 1\,. \end{gathered}$$

El segundo consiste en un recíproco parcial que estudiaremos en dos partes.

En primer lugar (Teorema 4.1), veremos que dada una solución $R \in End(\mathbb{R}\otimes\mathbb{R})[[\hbar]]$ de la ECTYB:

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$$
$$R^{12}R^{21} = 1\,,$$

existe un producto estrella invariante por la izquierda $F(x;y)$ sobre el grupo de Lie $Gl(n;\mathbb{R})$ tal que, si $S(x;y)$ es como en (e), se tiene:

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,S = R\,, \tag{f}$$

donde

$$\boldsymbol{P} : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathbb{R}^n)\,,$$

es la representación natural del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$.

Después (Teorema 4.3), demostraremos que cualquier otro producto estrella invariante por la izquierda $F'(x;y)$, que satisfaga (f), es equivalente (Definición 4.2 de 1.4.4) a $F(x;y)$. Es decir, existe un elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$:

$$E(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i(x)\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,,$$

tal que

$$F'(x;y) = E^{-1}(x+y)\,F(x;y)\,E(x)\,E(y)\,.$$

Mas aún, $E(x)$ se puede escoger con la condición $\boldsymbol{P}E = 1$.

Para probar estos teoremas, nos ha sido necesario demostrar el Teorema 3.2 que proporciona una interpretación cohomológica de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter.

Si $\boldsymbol{\delta}$ es el operador de cohomología del complejo de Hochschild invariante sobre $\boldsymbol{G}$ (Sección 1.4.2), la relación (c) es equivalente al conjunto de relaciones (expresiones (c) y (d) de 1.4.3):

$$\boldsymbol{\delta}\,F_l(x;y;z) = \alpha_l(x;y;z)\;; \qquad l = 1,2,3,\cdots\,, \tag{g}$$

donde

$$\alpha_l(x;y;z) = \sum_{\substack{i+j=l\\ i,j\geq 1}} \left[F_i(x+y;z)\,F_j(x;y) - F_i(x;y+z)\,F_j(y;z)\right].$$

Supongamos que estas relaciones se satisfacen para $l = 1,2,\ldots,k-1$. Entonces la teoría de Gerstenhaber [1964a] (ver también Lichnerowicz [1982]) establece que $\alpha_k(x;y;z)$ es un 3-cociclo de Hochschild. Pero a partir del Teorema 4.1, se tiene:

$$\alpha_k(x;y;z) = \boldsymbol{A}\alpha_k(x;y;z) + \boldsymbol{\delta}\,E_k(x;y;z)\,, \tag{h}$$

donde $\boldsymbol{A}\alpha_k(x;y;z)$ es el antisimetrizado de $\alpha_k(x;y;z)$ (que es un 3-tensor invariante sobre $\boldsymbol{G}$), y donde $E_k(x;y)$ es una 2-cocadena. Por tanto (g) se satisface con $l = k$ si y sólo si $\alpha_k(x;y;z)$ es exacto, es decir, su parte antisimétrica es nula.

Con estas consideraciones, en la Sección 3.3 se prueba que, si

$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,,$$

es un producto estrella hasta el orden $k-1$, es decir, si se satisface (g) para $l = 1, 2, \ldots, k-1$, y si $S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y)$, entonces, en la descomposición (h), se tiene:

$$A\alpha_k(x;y;z) = -\frac{1}{6}\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_k\,, \qquad \text{(i)}$$

donde el miembro de la derecha significa el coeficiente de $\hbar^k$ en la serie formal definida por la expresión entre corchetes.

Definamos la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter al orden k de la siguiente forma:

$$\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_k = 0\,.$$

La igualdad (i) implica el siguiente resultado:

> *Un producto estrella al orden $k-1$ se puede extender al orden k si y sólo si el elemento $S(x;y)$ correspondiente satisface la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter al orden k.*

3.1 Grupos Cuánticos Triangulares

Sea A un elememto de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ y $A^\lambda \in \mathcal{D}^\lambda(G)$, $A^\rho \in \mathcal{D}^\rho(G)$, los operadores diferenciales invariantes por la izquierda y por la derecha, respectivamente, definidos por A. La propiedad de invariancia se escribe así (ver por ejemplo Helgason [1978]):

$$(A^\lambda\varphi)\circ\lambda_g = A^\lambda(\varphi\circ\lambda_g)\,, \qquad (A^\rho\varphi)\circ\rho_g = A^\rho(\varphi\circ\rho_g)\,,$$

para todo $g \in G$ y para toda $\varphi \in C^\infty(G)$.

Lema 1.1 *Sean x_i^λ y x_i^ρ los campos invariantes por la izquierda y por la derecha definidos por $x_i \in \mathfrak{g}$. Entonces, para toda función $\varphi \in C^\infty(G)$, se tiene la siguiente igualdad:*

$$\big((x_1\cdots x_n)^\lambda(\varphi\circ\rho_{g_2})\big)(g_1) = \big((x_1\cdots x_n)^\rho(\varphi\circ\lambda_{g_1})\big)(g_2)\,,$$

donde $g_1, g_2 \in G$ son elementos cualesquiera.

Prueba

$$\begin{aligned}
&\big((x_1\cdots x_n)^\lambda(\varphi\circ\rho_{g_2})\big)(g_1) = \big((x_1^\lambda\cdots x_n^\lambda)(\varphi\circ\rho_{g_2})\big)(g_1) = \\
&= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_n}\varphi(g_1\cdot\exp t_1x_1\cdots\exp t_nx_n\cdot g_2)|_{t_1=\cdots=t_n=0} \\
&= \big((x_n^\rho\cdots x_1^\rho)(\varphi\circ\lambda_{g_1})\big)(g_2) = \big((x_1\cdots x_n)^\rho(\varphi\circ\lambda_{g_1})\big)(g_2)\,.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.2 *Sean A^λ y A^ρ operadores diferenciales sobre G, invariantes por la izquierda y por la derecha respectivamente, definidos por $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$. Sea $\varphi \in C^\infty(G)$. Entonces se tiene la siguiente igualdad:*

$$\big(A^\lambda(\varphi\circ\rho_{g_2})\big)(g_1) = \big(A^\rho(\varphi\circ\lambda_{g_1})\big)(g_2)\,,$$

para todo $g_1, g_2 \in G$.

Prueba Consecuancia inmediata del Lema 1.1. ■

Lema 1.3 *Sea*

$$A(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)\,\hbar^i\,,$$

un elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ *y*

$$A^{-1}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{A}_i(x)\,\hbar^i\,,$$

la serie inversa. Sean A_i^λ *y* $\widehat{A}_i^\rho$ *los operadores diferenciales invariantes por la izquierda y por la derecha respectivamente, definidos por* A_i *y por* $\widehat{A}_i$ *respectivamente. Escribiremos:*

$$A^\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i^\lambda\,\hbar^i\,; \qquad (A^{-1})^\rho = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{A}_i^\rho\,\hbar^i\,.$$

Con estas notaciones, definamos:

$$\psi_{g_2} : g \in \boldsymbol{G} \to \Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\varphi \circ \lambda_g)\Big)\,(g_2) \in \mathbb{R}[[\hbar]]\,,$$

donde $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{G})$ *y* $g_2 \in \boldsymbol{G}$ *es un elemento fijado. Entonces se tiene la siguiente igualdad:*

$$\Big(((A^{-1}) \circ A^\lambda)(\varphi)\Big)\,(g_1 g_2) = \Big((A^{-1})^\rho(A^\lambda(\varphi) \circ \rho_{g_2})\Big)\,(g_1)\,,$$

para todo $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$.

Prueba En efecto, teniendo en cuenta la invariancia por la derecha del operador diferencial $(A^{-1})^\rho$, tenemos que:

$$\Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\varphi)\Big)\,(g_1 g_2) = \Big((A^{-1})^\rho(A^\lambda(\varphi) \circ \rho_{g_2})\Big)\,(g_1)\,.$$

introduciendo la identidad $I = (A^{-1})^\lambda \circ A^\lambda$,

$$\Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\varphi)\Big)\,(g_1 g_2) = \Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda \circ (A^{-1})^\lambda)\,(A^\lambda(\varphi) \circ \rho_{g_2})\Big)\,(g_1)\,.$$

Pero, según el Lema 1.2, tenemos:

$$\Big((A^{-1})^\lambda(A^\lambda(\varphi) \circ \rho_{g_2})\Big)\,(g_1) = \Big((A^{-1})^\rho(A^\lambda(\varphi) \circ \lambda_{g_1})\Big)\,(g_2)\,,$$

por lo tanto, sustituyendo en la expresión anterior, tenemos:

$$\Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\varphi)\Big)\,(g_1 g_2) = \Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\psi_{g_2})\Big)\,(g_1)\,,$$

donde ψ_{g_2} está definida por:

$$\psi_{g_2}(g) = \Big((A^{-1})^\rho(A^\lambda(\varphi) \circ \lambda_g)\Big)\,(g_2) = \Big(((A^{-1})^\rho \circ A^\lambda)(\varphi \circ \lambda_g)\Big)\,(g_2)\,,$$

que es lo que se quería demostrar. ∎

De manera análoga se tiene el siguiente resultado para operadores bidiferenciales.

Lema 1.4 *Sea*

$$B(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(x;y)\,\hbar^i$$

un elemento de $\big(\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\big)[[\hbar]]$ *y*

$$(B^{-1})(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{B}_i(x;y)\,\hbar^i$$

la serie inversa. Sean B_i^λ *y* B_i^ρ *los operadores bidiferenciales invariantes por la izquierda y por la derecha respectivamente, definidos por* B_i *y* $\widehat{B}_i$*. Escribiremos:*

$$B^\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i^\lambda\,\hbar^i\,; \qquad (B^{-1})^\rho = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{B}_i^\rho\,\hbar^i\,.$$

Sea $\mu : \big(\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})\big)[[\hbar]] \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})[[\hbar]]$ *la aplicación definida por:*

$$\mu\Big(\sum_i (\varphi_{1\,i} \otimes \varphi_{2\,i})\,\hbar^i\Big) = \sum_i \varphi_{1\,i}\varphi_{2\,i}\,\hbar^i\,. \tag{a}$$

Si $g_2 \in \boldsymbol{G}$ *es un elemento fijado y* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$*, definamos la aplicación* $\Phi_{g_2} : \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G} \to \mathbb{R}[[\hbar]]$ *por medio de la expresión:*

$$\Phi_{g_2}(g';g'') = \Big(\big(\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big)\big((\varphi_1 \circ \lambda_{g'}) \otimes (\varphi_2 \circ \lambda_{g''})\big)\Big)(g_2) \tag{b}$$

para todo par de elementos $g', g'' \in \boldsymbol{G}$*. Entonces, para todo* $g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}$*, se satisface:*

$$\Big(\big(\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Big)(g_1 g_2) = \Big(\big(\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big)(\Phi_{g_2})\Big)(g_1)\,, \tag{c}$$

donde Φ_{g_2} *está considerada como elemento de* $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G})[[\hbar]]$ *y donde el operador* $\big((B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big)$ *actua sobre* $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G})[[\hbar]] \simeq \big(\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})\big)[[\hbar]]$ *linelamente.* ∎

Este resultado se expresa inmediatamente en términos del coproducto

$$\Delta : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})\hat{\otimes}\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})\,,$$

de la estructura de álgebra de Hopf usual de $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$ definida por (ver por ejemplo Abe [1977]):

$$\Delta\varphi(g_1;g_2) = \varphi(g_1 g_2)\,; \qquad g_1, g_2 \in \boldsymbol{G}\,.$$

Teorema 1.1 *Con las notaciones anteriores, se tiene:*

$$\begin{aligned} &\Delta \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda = \\ &\quad = (\mu \otimes \mu) \circ \Big(\big((B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big) \otimes \big((B^{-1})^\rho \circ B^\lambda\big)\Big) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta \otimes \Delta)\,, \end{aligned} \tag{d}$$

siendo μ *la aplicación definida en* (a) *y* $\tau : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})$ *la permutación de factores:* $\tau(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = \varphi_1 \otimes \varphi_2$.

Prueba Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Por definición de coproducto, la acción del primer miembro de (c) sobre $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ es:

$$\Delta\left(\mu\left(((B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\right)\right)(g_1; g_2) = \mu\left(((B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\right)(g_1 g_2) \,. \quad \text{(e)}$$

Teniendo en cuenta (c),

$$\left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\right)(g_1 g_2) = \left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\Phi_{g_2})\right)(g_1)\,, \quad \text{(f)}$$

donde Φ_{g_2} está definida en (b).

Introduzcamos la siguiente notación para expresar la acción del coproducto:

$$\Delta\varphi_1 = \sum \varphi_1^{(1)} \otimes \varphi_1^{(2)}\,; \qquad \Delta\varphi_2 = \sum \varphi_2^{(1)} \otimes \varphi_2^{(2)}\,,$$

donde $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_2^{(2)} \in \mathcal{C}^\infty(G)$. Entonces, como

$$\Delta\varphi(g_1; g_2) \equiv \varphi(g_1 g_2) = \sum_{(\varphi)} \varphi^{(1)}(g_1)\varphi^{(2)}(g_2)\,,$$

se tiene:

$$\varphi \circ \lambda_g = \sum_{(\varphi)} \varphi^{(1)}(g)\varphi^{(2)}\,,$$

y, por lo tanto, la expresión (b) se escribe así:

$$\Phi_{g_2}(g'; g'') = \sum_{(\varphi_1)(\varphi_2)} \left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1^{(1)}(g')\varphi_1^{(2)} \otimes \varphi_2^{(1)}(g'')\varphi_2^{(2)})\right)(g_2)\,. \quad \text{(g)}$$

Sustituyendo (g) en (f), el primer miembro de (d) actuando sobre $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ se escribe así:

$$\begin{aligned}
&\left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\right)(g_1 g_2) = \\
&= \sum_{(\varphi_1)(\varphi_2)} \left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1^{(1)} \otimes \varphi_2^{(1)})\right)(g_1) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \left((\mu \circ (B^{-1})^\rho \circ B^\lambda)(\varphi_1^{(2)} \otimes \varphi_2^{(2)})\right)(g_2)\,,
\end{aligned}$$

que es la acción del segundo miembro de (d) sobre $\varphi_1 \otimes \varphi_2$. ∎

Recordemos (ver Sección 1.4.1) que existe una correspondencia biyectiva entre los productos estrella invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G y los elementos

$$F(x; y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x; y)\, \hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$$

($\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G) que satisface la relación:

$$F(x + y; z)\, F(x; y) = F(x; y + z)\, F(y; z)\,. \quad \text{(h)}$$

Análogamente, (ver Sección 1.4.1) existe una correspondencia biyectiva entre los productos estrella sobre G invariantes por la derecha y los elementos:

$$H(x; y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(x; y)\, \hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$$

que satisfacen la relación:

$$H(x; y)\, H(x + y; z) = H(y; z)\, H(x; y + z)\,. \quad \text{(i)}$$

Proposición 1.1 *Sea $F(x; y)$ un producto estrella sobre G invariante por la izquierda. Sea $H(x; y) = F^{-1}(x; y)$. Entonces $H(x; y)$ es un producto estrella sobre G invariante por la derecha.*

Prueba Al tomar los inversos en la relación (h), teniendo en cuenta que $F^{-1}(x+y;z) = (F(x+y;z))^{-1}$, se tiene (i). ■

Definamos (ver también Takhtajan [1990]):

$$\varphi \overset{\circ}{*} \psi = \mu \left(\left(F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \right) (\varphi \otimes \psi) \right) . \tag{j}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
(\varphi \overset{\circ}{*} \psi) \overset{\circ}{*} \chi &= \mu \left[\left(F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \right) \left(\mu \left[F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \, (\varphi \otimes \psi) \right] \otimes \chi \right) \right] = \\
&= \mu(\mu \otimes 1) \left[\left(F^{-1}(x+y;z)^{\rho} \, F(x+y;z)^{\lambda} \, F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \right) (\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \right] = \\
&= \mu(\mu \otimes 1) \left[\left(F^{-1}(x+y;z)^{\rho} \, F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x+y;z)^{\lambda} \, F(x;y)^{\lambda} \right) (\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \right] = \\
&= \mu(\mu \otimes 1) \left[\left(F^{-1}(x;y) \, F^{-1}(x+y;z) \right)^{\rho} \left(F(x+y;z) \, F(x;y) \right)^{\lambda} (\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \right] = \\
&= \mu(1 \otimes \mu) \left[\left(F^{-1}(y;z) \, F^{-1}(x;y+z) \right)^{\rho} \left(F(x;y+z) \, F(y;z) \right)^{\lambda} (\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \right] = \\
&= \mu(1 \otimes \mu) \left[\left(F^{-1}(x;y+z)^{\rho} \, F(x;y+z)^{\lambda} \, F^{-1}(y;z)^{\rho} \, F(y;z)^{\lambda} \right) (\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \right] = \\
&= \mu \left[\left(F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \right) \left(\varphi \otimes \mu \left[F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F^{-1}(x;y)^{\lambda} \, (\psi \otimes \chi) \right] \right) \right] = \\
&= \varphi \overset{\circ}{*} (\psi \overset{\circ}{*} \chi) .
\end{aligned}$$

Definiendo, a partir del producto estrella $\overset{\circ}{*}$ sobre $\boldsymbol{G}$, el producto estrella sobre $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \overset{\circ}{*} (\psi_1 \otimes \psi_2) = (\varphi_1 \overset{\circ}{*} \psi_1) \otimes (\varphi_2 \overset{\circ}{*} \psi_2) ,$$

el miembro de la derecha de la igualdad (d) es: $\Delta\varphi_1 \overset{\circ}{*} \Delta\varphi_2$. Por lo tanto, en este caso el Teorema 1.1 se lee:

$$\Delta(\varphi_1 \overset{\circ}{*} \varphi_2) = \Delta\varphi_1 \overset{\circ}{*} \Delta\varphi_2 .$$

Hemos probado pués el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Con las notaciones anteriores, sea $F(x;y)$ un producto estrella sobre $\boldsymbol{G}$ invariante por la izquierda. Entonces $F^{-1}(x;y)$ es un producto estrella sobre $\boldsymbol{G}$ invariante por la derecha y*

$$\varphi \overset{\circ}{*} \psi = \mu \left(\left(F^{-1}(x;y)^{\rho} \, F(x;y)^{\lambda} \right) (\varphi \otimes \psi) \right) ; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G}) ,$$

es un producto estrella sobre $\boldsymbol{G}$. El coproducto

$$\Delta : \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G}) \hat{\otimes} \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G}) \equiv \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}) ,$$

es un morfismo del álgebra, en general, no-conmutativa $(\mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G})[[\hbar]]; \overset{\circ}{*})$ en el álgebra no-conmutativa $(\mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G}) \hat{\otimes} \mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G})[[\hbar]]; \overset{\circ}{*})$. ■

A la terna $(\mathcal{C}^{\infty}(\boldsymbol{G})[[\hbar]]; \overset{\circ}{*}; \Delta)$ se la denomina *grupo cuántico triangular*.

Si la descomposición del 2-cociclo F_1, dada por el Teorema 4.1 de 1.4.2, es:

$$F_1(x;y) = \frac{1}{2} S_1(x;y) - (\delta \, E_1)(x;y) ,$$

el término de orden 1 del producto estrella $\overset{\circ}{*}$ es:

$$F_1(x;y)^\lambda - F_1(x;y)^\rho = \frac{1}{2}\big(S_1(x;y)^\lambda - S_1(x;y)^\rho\big) - \big(\delta\, E_1(x;y)^\lambda - \delta\, E_1(x;y)^\rho\big)\,.$$

El 2-tensor

$$\Lambda_{S_1} = S_1^\lambda - S_1^\rho$$

es un tensor de Lie-Poisson triangular (Definición 3.3 de 2.3.2) sobre el grupo G, ya que S_1 satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter (ver Sección 3.2.1).

3.2 Soluciones en Serie Formal de la Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter

A partir de productos estrella invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G se obtienen soluciones, en serie formal del parámetro de deformación, de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter sobre el álgebra envolvente $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie del grupo G.

3.2.1 Soluciones en Serie Formal y Ecuación Clásica de Yang-Baxter

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y R un elemento de $End(V)$. Definimos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}
&R^{12} \in End(V\otimes V\otimes V)\,; && R^{12} = R\otimes I\\
&R^{13} \in End(V\otimes V\otimes V)\,; && R^{23} = I\otimes R\\
&R^{13} \in End(V\otimes V\otimes V)\,; && R^{13} = P^{23}R^{12}P^{23}\,.
\end{aligned}$$

Donde P^{ij} es la permutación de los factores i, j en el producto tensorial $V\otimes V\otimes V$.

La ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter sin parámetro espectral es por definición el siguiente sistema:

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}\,, \tag{a}$$
$$R^{12}R^{21} = I\,; \qquad R^{21} = P^{12}R^{12}P^{12}\,. \tag{b}$$

Al estudiar soluciones de (a) y (b) en el espacio de las series formales en potencias de $\hbar$, con coeficientes en $End(V\otimes V)$, se observa que el término de orden uno satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter (ver Teorema 2.7 de 1.2.5)

Proposición 2.1 *Si*

$$R = I + \sum_{i=1}^{\infty} r_i\,\hbar^i\,; \qquad r_i \in End(V\otimes V)\,,$$

satisface (a) *y* (b), *entonces* r_1 *satisface:*

$$[r_1^{12}; r_1^{13}] + [r_1^{12}; r_1^{23}] + [r_1^{13}; r_1^{23}] = 0\,,$$
$$r_1^{12} + r_1^{21} = 0\,,$$

donde los corchetes se calculan en el álgebra de Lie $End(V\otimes V) \cong End(V)\otimes End(V)$.

Prueba Los términos en $\hbar^2$ y $\hbar^1$ de (a) y (b) son respectivamente:

$$r_1^{12}r_1^{13} + r_1^{12}r_1^{23} + r_1^{13}r_1^{23} = r_1^{23}r_1^{13} + r_1^{23}r_1^{12} + r_1^{13}r_1^{12},$$
$$r_1^{12} + r_1^{21} = 0.$$

∎

Este par de ecuaciones tienen pleno sentido sobre cualquier álgebra de Lie y no sólo para $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. Si $S_1 \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, considerando los productos en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, se puede escribir:

$$S_1^{12}S_1^{13} + S_1^{12}S_1^{23} + S_1^{13}S_1^{23} = S_1^{23}S_1^{13} + S_1^{23}S_1^{12} + S_1^{13}S_1^{12},$$
$$S_1^{12} + S_1^{21} = 0,$$

y se pueden buscar elementos

$$S \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \quad S = I + \sum_{i=1}^{\infty} S_i \hbar^i,$$

que satisfagan, en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, la condición:

$$S^{12}S^{13}S^{23} = S^{23}S^{13}S^{12} \tag{c}$$
$$S^{12}S^{21} = I. \tag{d}$$

Las ecuaciones (a) y (b) se obtienen a partir de (c) y (d) considerando una representación $\pi : \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \longrightarrow End(V)$ y definiendo $R = (\pi \otimes \pi)S$.

3.2.2 Soluciones de la Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter

En la notación polinómica desarrollada en las Secciones 1.4.1 y 1.4..3, sea $F(x;y)$ un producto estrella invariante sobre un grupo de Lie G. Drinfeld [1983b] considera la serie formal:

$$S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y), \tag{a}$$

y enuncia el siguiente teorema que se prueba a continuación.

Teorema 2.1 *El elemento $S(x;y)$, definido en* (a), *es solución de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter (expresiones* (c) *y* (d) *de 3.2.1).*

La demostración está basada en el lema siguiente.

Lema 2.1 *Sea F un elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$. Si F satisface la propiedad asociativa (Proposición 4.1 de la Secci'on 1.4.3):*

$$F(x+y;z)\,F(x;y) = F(x;y+z)\,F(y;z), \tag{b}$$

entonces también son ciertas las igualdades que se obtienen por permutación circular de las variables x, y, z.

Prueba Sea $\Delta : \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ el coproducto de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ y $\boldsymbol{a} : \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ la aplicación definida por $\boldsymbol{a}(x \otimes y) = y \otimes x$, entonces, por definición,

$$\begin{aligned}
F(x+y;z) &= \big((\Delta \otimes 1)\, F\big)(x;y;z) \\
F(z+y;x) &= \big((1 \otimes \Delta)\boldsymbol{a}(F)\big)(x;y;z) \\
F(z;y+x) &= \big((\Delta \otimes 1)\boldsymbol{a}(F)\big)(x;y;z) \\
F(x+z;y) &= \big((1 \otimes \boldsymbol{a})(\Delta \otimes 1)\, F\big)(x;y;z) \\
F(x;y+z) &= \big((1 \otimes \Delta)\, F\big)(x;y;z)\,.
\end{aligned}$$

El enunciado se basa en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \boldsymbol{a})(\Delta \otimes 1)\, F &= (1 \otimes \Delta)\, \boldsymbol{a}(F) \\
(1 \otimes \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \Delta)\, F &= (\Delta \otimes 1)\, \boldsymbol{a}(F) \\
(\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \otimes 1)(F \otimes 1) &= 1 \otimes \boldsymbol{a}(F) \\
(1 \otimes \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \boldsymbol{a})(1 \otimes F) &= \boldsymbol{a}(F) \otimes 1\,,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{a} \otimes 1)(1 \otimes \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \otimes 1) \\
(\boldsymbol{a} \otimes 1)(\Delta \otimes 1) &= \Delta \otimes 1\,.
\end{aligned}$$

■

Prueba del Teorema 2.1 Por hipotesis:

$$F(x+y;z)\, F(x;y) = F(x;y+z)\, F(y;z)\,.$$

Teniendo en cuenta que $F(x;y) = F(y;x)\, S(x;y)$, se tiene:

$$F(x+y;z)\, F(y;x)\, S(x;y) = F(x;y+z)\, F(z;y)\, S(y;z)\,.$$

Permutando x e y en $F(x+y;z)$, el Lema 2.1 implica:

$$F(y;x+z)\, F(x;z)\, S(x;y) = F(x+z;y)\, F(x;z)\, S(y;z)\,.$$

Ahora bien, $F(x;z) = F(z;x)\, S(x;z)$ por lo que:

$$F(y;x+z)\, F(z;x)\, S(x;z)\, S(x;y) = F(x+z;y)\, F(z;x)\, S(x;z)\, S(y;z)\,,$$

y aplicando nuevamente el Lema 2.1,

$$F(y+z;x)\, F(y;z)\, S(x;z)\, S(x;y) = F(z;x+y)\, F(x;y)\, S(x;z)\, S(y;z)\,.$$

Finalmente:

$$F(z+y;x)\, F(z;y)\, S(y;z)\, S(x;z)\, S(x;y) = F(z;y+x)\, F(y;x)\, S(x;y)\, S(x;z)\, S(y;z)\,.$$

Volviendo a utilizar el Lema 2.1 se tiene el resultado (c).

La relación (d) es evidente. ■

3.3 Teorema de Interpretación Cohomológica de la Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter

Sea $F(x;y)$ el elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ que define un producto estrella invariante sobre G (Definición 4.1 de 1.4.3). La propiedad asociativa es equivalente al conjunto de relaciones (ver Sección 1.4.3) siguientes:

$$F_1(x+y;z)+F_1(x,y)-F_1(x;y+z)-F_1(y,z)=0$$

y, para $(m=2,3,\dots)$,

$$F_m(x+y;z)+F_m(x;y)-F_m(x;y+z)-F_m(y;z)=-\alpha_m(x;y;z)\,,$$

donde

$$\alpha_m(x;y;z)=\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geq 1}}\left(F_i(x+y;z)\,F_j(x;y)-F_i(x;y+z)\,F_j(y;z)\right). \tag{a}$$

En términos del complejo de Hochschild $(\mathcal{T}\mathfrak{A}(\mathfrak{g});\delta)$, estas relaciones se escriben así:

$$\begin{aligned}&\delta\,F_1(x;y;z)=0\,,\\ &\delta\,F_m(x;y;z)=\alpha_m(x;y;z)\qquad (m=1,2,3,\dots)\,,\end{aligned}$$

(expresiones (c) y (d) de la Sección 1.4.3).

Definición 3.1 *Sea*

$$F(x;y)=1+\sum_{i=1}^{m-1}F_i(x;y)\hbar^i\,, \tag{b}$$

donde $F_i(x;y)\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ *son elementos cualesquiera. Se dice que* $F(x;y)$ *define un producto estrella invariante hasta el orden* $(m-1)$ *si:*

$$\begin{aligned}&\delta\,F_1(x;y;z)=0\,,\\ &\delta\,F_i(x;y;z)=\alpha_i(x;y;z)\,;\qquad (i=2,\dots,m-1)\,,\end{aligned} \tag{c}$$

donde α_i *está definido en* (a).

Teorema 3.1 (Gerstenhaber [1964b]) *Si* (b) *define un producto estrella hasta el orden* $(m-1)$, *el elemento* $\alpha_m(x;y;z)$, *dado por la expresión* (a), *es un 3-cociclo. Este producto estrella se puede extender hasta el orden* m *si y sólo si este cociclo es exacto.* ∎

Si ahora nos referimos a la descomposición de todo 3-cociclo invariante α en suma de un 3-tensor invariante antisimétrico y un coborde invariante (Teorema 4.1 de 1.4.2):

$$\alpha_m(x;y;z)=A\alpha_m(x;y;z)+(\delta\,F_m)(x;y;z)\,,\qquad F\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}\,, \tag{d}$$

tenemos el siguiente resultado.

Corolario *Si* (b) *define un producto estrella hasta el orden* $(m-1)$, *este producto estrella se puede extender hasta el orden* m *si y sólo si* $A\alpha_m(x;y;z)=0$. ∎

Estudiaremos ahora la relación entre la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter y la cohomología de Hochschid invariante y demostraremos que la anulación de $A\alpha_m(x;y;z)$ equivale a la verificación de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter al orden m.

Sea
$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i$$
un elemento arbitrario de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Consideremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X(x;y;z) &= S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\,, \\ Y(x;y;z) &= F(x+y;z)\,F(x;y) - F(x;y+z)\,F(y;z)\,. \end{aligned} \tag{e}$$

$$F(x+y;z)\,F(x;y) = Y(x;y;z) + F(x;y+z)\,F(y;z) \tag{f}$$
$$F(x;y+z)\,F(y;z) = F(x+y;z)\,F(x;y) - Y(x;y;z)\,. \tag{g}$$

De (e) obtenemos:

$$Y(x;y;z) = F(x+y;z)\,F(y;x)\,S(x;y) - F(x;y+z)\,F(z;y)\,S(y;z) \tag{h}$$

y de (f) y (g):

$$F(x+y;z)\,F(y;x) = Y(y;x;z) + F(y;x+z)\,F(x;z) \tag{f'}$$
$$F(x;y+z)\,F(z;y) = F(x+z;y)\,F(x;z) - Y(x;z;y)\,. \tag{g'}$$

Teniendo en cuenta (f') y (g'), (h) se convierte en:

$$\begin{aligned} Y(x;y;z) = {} & Y(y;x;z)\,S(x;y) + Y(x;z;y)\,S(y;z) + \\ & + F(y;x+z)\,F(x;z)\,S(x;y) - F(x+z;y)\,F(x;z)\,S(y;z)\,. \end{aligned} \tag{i}$$

Si ahora definimos

$$M(x;y;z) = Y(y;x;z)\,S(x;y) + Y(x;z;y)\,S(y;z)\,, \tag{j}$$

y tenemos en cuenta la definición de $S(x;z)$, la igualdad (i) se escribe así:

$$\begin{aligned} Y(x;y;z) = {} & M(x;y;z) + F(y;x+z)\,F(z;x)\,S(x;z)\,S(x;y) - \\ & - F(x+z;y)\,F(z;x)\,S(x;z)\,S(y;z)\,, \end{aligned} \tag{k}$$

Pero de (f) y (g):

$$F(z+x;y)\,F(z;x) = Y(z;x;y) + F(z;x+y)\,F(x;y)\,, \tag{f''}$$
$$F(y;z+x)\,F(z;x) = F(y+z;x)\,F(y;z) - Y(y;z;x)\,, \tag{g''}$$

y de (j)
$$Y(x;y;z) = M(x;y;z) - N(x;y;z) + P(x;y;z) - Q(x;y;z)\,, \tag{l}$$

donde

$$N(x;y;z) = Y(y;z;x)\,S(x;z)\,S(x;y) + Y(z;x;y)\,S(x;z)\,S(y;z)\,, \tag{m}$$
$$P(x;y;z) = F(y+z;x)\,F(z;y)\,S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\,, \tag{n}$$
$$Q(x;y;z) = F(z;x+y)\,F(y;x)\,S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z)\,. \tag{o}$$

Considerando separadamente los términos de las series de potencias formales de la igualdad (l), se observa que:

(1) No existe término en $\hbar^0$.

(2) El término en $\hbar^1$ es:

$$\begin{aligned} Y_1(x;y;z) &= M_1(x;y;z) - N_1(x;y;z) + \\ &\quad + F_1(y+z;x) + F_1(z;y) + S_1(y;z) + S_1(x;z) + S_1(x;y) - \\ &\quad - F_1(z;x+y) - F_1(y;x) - S_1(x;y) - S_1(x;z) - S_1(y;z)\,. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} Y_1(x;y;z) &= M_1(x;y;z) - N_1(x;y;z) + \\ &\quad + F_1(y+z;x) - F_1(z;x+y) + F_1(z;y) - F_1(y;x)\,. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} M_1(x;y;z) &= Y_1(y;x;z) + Y_1(x;z;y)\,, \\ N_1(x;y;z) &= Y_1(y;z;x) + Y_1(z;x;y)\,, \\ Y_1(z;y;x) &= F_1(y+z;x) + F_1(z;y) - F_1(z;x+y) - F_1(y;x)\,; \end{aligned}$$

así, obtenemos

$$Y_1(x;y;z) - Y_1(y;x;z) - Y_1(x;z;y) + Y_1(y;z;x) + Y_1(z;x;y) - Y_1(z;y;x) = 0\,.$$

Esto es

$$\boldsymbol{A}Y_1(x;y;z) = 0\,.$$

Por tanto, la relación anterior se satisface para cualquier $F(x;y)$.

Esta es una trivialidad interesante. De hecho, la definición de $Y(x;y;z)$, implica:

$$Y_1(x;y;z) = F_1(x;y;z) + F_1(x;y) - F_1(x;y+z) - F_1(y;z) = \delta\, F_1(x;y;z)\,.$$

$Y_1(x;y;z)$ es entonces un cociclo exacto. La igualdad $\boldsymbol{A}Y_1(x;y;z) = 0$ se debe satisfacer de acuerdo con los Teoremas de Vey-Lichnerowicz (expresión (d)).

(3) El término en $\hbar^2$ es:

$$Y_2(x;y;z) = M_2(x;y;z) - N_2(x;y;z) + P_2(x;y;z) - Q_2(x;y;z)\,,$$

donde M_2, N_2, P_2, Q_2 son los téminos de segundo orden de las series definidas en (j), (m), (n) y (o) respectivamente. Es decir,

$$\begin{aligned} M_2(x;y;z) &= Y_1(y;x;z)\,S_1(x;y) + \\ &\quad + Y_2(y;x;z) + Y_1(x;y;z)\,S_1(y;z) + Y_2(x;z;y)\,, \\ N_2(x;y;z) &= Y_2(y;z;x) + Y_1(y;z;x)\,\left(S_1(x;z) + S_1(x;y)\right) + \\ &\quad + Y_2(z;x;y) + Y_1(z;x;y)\,\left(S_1(x;z) + S_1(y;z)\right)\,, \\ P_2(x;y;z) &= \left[F(z+y;x)\,F(z;y)\right]_2 + \left[S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\right]_2 + \\ &\quad + \left[F(z+y;x)\,F(z;y)\right]_1 \cdot \left[S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\right]_1\,, \\ Q_2(x;y;z) &= \left[F(z;x+y)\,F(y;z)\right]_2 + \left[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z)\right]_2 + \\ &\quad + \left[F(z;x+y)\,F(y;x)\right]_1 \cdot \left[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z)\right]_1\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}Y_2(x;y;z) = {} & Y_1(y;x;z)\,S_1(x;y) + Y_2(y;x;z) + Y_1(x;z;y)\,S_1(y;z) + \\ & + Y_2(x;z;y) - Y_1(y;z;x)\,\big(S_1(x;z) + S_1(x;y)\big) - \\ & - Y_1(z;x;y)\,\big(S_1(x;z) + S_1(x;y)\big) - Y_2(y;z;x) - Y_2(z;x;y) + \\ & + Y_2(z;y;x) + Y_1(z;y;x)\big[S(y;x)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_1 - X_2(x;y;z)\,.\end{aligned}$$

Si ahora suponemos que $F(x;y)$ es un producto estrella al orden 1 (Definición 3.1), tenemos:

$$Y_1(x;y;z) = -\,\delta\,F_1(x;y;z) = 0\,,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}Y_2(x;y;z) - Y_2(y;x;z) - Y_2(x;z;y) + Y_2(y;z;x) + Y_2(z;x;y) + Y_2(z;y;x) = \\ = -X_2(x;y;z)\,.\end{aligned}$$

Es decir,

$$6AY_2(x;y;z) = -\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_2 = -[S_1\,;S_1]\,. \quad \text{(p)}$$

Pero, por definición,

$$\begin{aligned}Y_2(x;y;z) = {} & F_2(x+y;z) + F_2(x;y) - F_2(x;y+z) - \\ & - F_2(y;z) + \big[F(x+y;z)\,F(x;y) - F(x;y+z)\,F(y;z)\big]_1\,,\end{aligned}$$

y entonces

$$Y_2(x;y;z) = -\,\delta\,F_2(x;y;z) + \alpha_2(x;y;z)\,. \quad \text{(q)}$$

Comparando (p) y (q), obtenemos:

$$6A\alpha_2(x;y;z) = -\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_2$$

y, teniendo en cuenta el Corolario del Teorema 3.1, se puede afirmar:

Un producto estrella al orden 1, (i.e., $\delta\,F_1(x;y;z) = Y_1(x;y;z) = 0$), se puede extender al orden 2, (i.e., existe $\overline{F}_2$ tal que $\delta\,\overline{F}_2(x;y;z) = \alpha_2(x;y;z)$), si y sólo si $S_1(x;y) = F_1(x;y) - F_1(y;x)$ satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter: $[S_1\,;S_1] = 0$ (i.e., la ECTYB se satisface al orden 2, $X_2(x;y;z) = 0$).

(4) Este resultado se puede generalizar a cualquier orden.

El término en $\hbar^k$, para cualquier k, es

$$Y_k(x;y;z) = M_k(x;y;z) - N_k(x;y;z) + P_k(x;y;z) - Q_k(x;y;z)\,. \quad \text{(r)}$$

Pero

$$\begin{aligned}M_k(x;y;z) = {} & Y_k(y;x;z) + \sum_{i+j=k} Y_i(y;x;z)\,S_j(x;y) + \\ & + Y_k(x;z;y) + \sum_{i+j=k} Y_i(x;z;y)\,S_j(y;z)\,, \qquad (i>0)\,.\end{aligned}$$

Si ahora suponemos que $F(x;y)$ es un producto estrella hasta el orden $(k-1)$, tenemos:

$$Y_i(x;y;z) = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots k-1)\,,$$

y entonces los términos de orden k de (j) y (m) son:

$$\begin{aligned} M_k(x;y;z) &= Y_k(y;x;z) + Y_k(x;z;y)\,, \\ N_k(x;y;z) &= Y_k(y;z;x) + Y_k(z;x;y)\,. \end{aligned} \tag{s}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} P_k(x;y;z) - Q_k(x;y;z) &= \big[F(y+z;x)\,F(z;y) - F(z;x+y)\,F(y;x)\big]_k + \\ &+ \sum_{i+j=k} \big[F(y+z;x)\,F(x;y)\big]_i \big[S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_j - \\ &- \sum_{i+j=k} \big[F(z;x+y)\,F(y;x)\big]_i \big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z)\big]_j = \\ = Y_k(z;y;x) - X_k(x;y;z) &- \sum_{\substack{i+j=k \\ j\geq 1}} \big[F(z;y+z)\,F(y;x)\big]_i X_j(x;y;z)\,. \end{aligned} \tag{t}$$

Sustituyendo (s) y (t) en (r), obtenemos:

$$6\boldsymbol{A}Y_k(x;y;z) = -X_k(x;y;z)\,,$$

ya que $X_j(x;y;z) = 0$ para $j < k$.

Pero

$$Y_k(x;y;z) = -\,\boldsymbol{\delta}\,F_k(x;y;z) + \alpha_k(x;y;z)\,,$$

entonces

$$6\boldsymbol{A}\alpha_k(x;y;z) = -X_k(x;y;z)\,.$$

Queda por tanto demostrado el resultado siguiente.

Teorema 3.2 *Sea*

$$F(x;y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x;y)\,\hbar^i\,,$$

un elemento arbitrario de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ *y* $S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y)$. *Supongamos que* $F(x;y)$ *es un producto estrella hasta el orden* $(k-1)$. *Es decir, se satisfacen las relaciones* (c) *para* $i = 1, 2, \dots, k-1$. *Entonces, en la descomposición* (d) *de* α_k *(definido en la expresión* (a) *de 3.3.1) se tiene:*

$$\boldsymbol{A}\alpha_k(x;y;z) = -\frac{1}{6}\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_k\,.$$

En consecuencia, un producto estrella $F(x;y)$ *hasta el orden* $(k-1)$ *se puede extender a un producto estrella hasta el orden* k*, si y sólo si, la* ECTYB *se satisface hasta el orden* k. ∎

3.4 Productos Estrella Invariantes sobre $Gl(n;\mathbb{R})$

3.4.1 Existencia de Productos Estrella Invariantes sobre $Gl(n;\mathbb{R})$

Haciendo uso del Teorema 3.2, se prueba la existencia de productos estrella invariantes sobre el grupo General Lineal $Gl(n;\mathbb{R})$ a partir de soluciones $R \in End(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)[[\hbar]]$ de dicha ecuación.

Teorema 4.1 (Drinfeld V. G. [1983b]) *Sea*

$$R = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i \, \hbar^i \in End(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)[[\hbar]] ,$$

tal que se satisfacen las ecuaciones:

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12} , \tag{a}$$

$$R^{12}R^{21} = I . \tag{b}$$

Entonces, existe un producto estrella $F(x;y)$ sobre el grupo $Gl(n;\mathbb{R})$ tal que si $S(x;y) = F^{-1}(y;x)\, F(x;y)$ se tiene:

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P})\, S(x;y) = R ,$$

donde

$$\boldsymbol{P} : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathbb{R}^n)$$

es la representación natural del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$.

Primero probaremos dos lemas.

Lema 4.1 *Sea*

$$F = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \, \hbar^i$$

un elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Escribamos:

$$F^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{F}_i \, \hbar^i \qquad y \qquad S(x;y) = F^{-1}(y;x)\, F(x;y) .$$

Entonces:

$$\widehat{F}_0(x;y) = 1 , \qquad \widehat{F}_1(x;y) = -F_1(x;y) , \tag{c}$$

$$\widehat{F}_r(x;y) = -F_r(x;y) - \sum_{\substack{l+k=r \\ l\geq 1\,;\, k\geq 1}} \widehat{F}_l(x;y)\, F_k(x;y) , \tag{d}$$

$$S_1(x;y) = F_1(x;y) - F_1(y;x) , \tag{e}$$

y para $r = 2, 3, \ldots$:

$$S_r(x;y) = F_r(x;y) - F_r(y;x) + \sum_{\substack{i+j=r \\ i\geq 1\,;\, j\geq 1}} \widehat{F}_i(y;x) \left(F_j(x;y) - F_j(y;x)\right) .$$

Utilizaremos la igualdad anterior en la forma siguiente:

$$S_r(x;y) = F_r(x;y) - F_r(y;x) + R_r(F_1, \ldots , F_{r-1})(x;y) . \tag{f}$$

donde

$$R_r(F_1, \ldots , F_{r-1})(x;y) = \sum_{\substack{i+j=r \\ i\geq 1\,;\, j\geq 1}} \widehat{F}_i(y;x)\big(F_j(x;y) - F_j(y;x)\big) . \tag{g}$$

Prueba Cálculo directo a partir de:

$$F^{-1}(x;y)\,F(x;y)=1 \qquad \text{y} \qquad S(x;y)=F^{-1}(y;x)\,F(x;y)\,.$$

∎

Observación Para nuestros propositos es importante señalar que R_r depende sólo de $F_1,\dots,F_{r-1}$, porque $\widehat{F}_i$ depende sólo de F_l con $1\le l\le i$. ∎

Lema 4.2 *Sean F y F' dos elementos cualesquiera en $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})\otimes\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Entonces:*

(1) *Para $r=1,2,3,\dots$, tenemos:*

$$\begin{aligned}S'_r(x;y)-S_r(x;y)=\big[F'_r(x;y)-F_r(x;y)\big]-\big[F'_r(y;x)-F_r(y;x)\big]+\\ +R_r(F'_1,\dots,F'_{r-1})(x;y)-R_r(F_1,\dots,F_{r-1})(x;y)\,,\end{aligned}$$

donde R_r está definido en (g).

(2) *Si*

$$F_i(x;y)=F'_i(x;y)\,,\qquad (i=1,\dots,r-1)\,,$$

entonces $S'_r(x;y)-S_r(x;y)$ es antisimétrico y, en el caso $\mathfrak{g}\equiv\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$,

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})[S'_r(x;y)-S_r(x;y)]\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\otimes\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$$

es un 2-cociclo de Hochschild sobre el grupo $Gl(n;\mathbb{R})$.

Prueba Cálculo directo a partir de la expresión (f) del Lema 4.1. ∎

Prueba del Teorema 4.1 Sea $F(x;y)$ el elemento que hay que encontrar. Operando en $\mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))^{\otimes 3}$ se debe satisfacer:

$$S_1^{12}S_1^{13}+S_1^{12}S_1^{23}+S_1^{13}S_1^{23}-S_1^{13}S_1^{12}-S_1^{23}S_1^{12}-S_1^{23}S_1^{13}=0\,, \tag{h}$$

$$S_1^{12}+S_1^{21}=0\,, \tag{i}$$

donde

$$S_1^{12}\equiv S_1(x;y)=F_1(x;y)-F_1(y;x)\in\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\otimes\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\,.$$

Si escogemos $S_1^{12}=r_1$, puesto que por hipótesis se satisface (a), la Proposición 2.1 de la Sección 3.2.1 nos dice:

$$[S_1^{12};S_1^{13}]+[S_1^{12};S_1^{23}]+[S_1^{13};S_1^{23}]=0\,,$$

donde los corchetes se calculan en $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})\equiv End(\mathbb{R}^n)$. Pero esta expresión se puede escribir como en (h).

Claramente, se satisface (i).

Al ser $S_1(x;y)=r_1$ un 2-tensor (antisimétrico), es un 2-cociclo de Hochschild (no exacto), de manera que si definimos $F_1(x;y)$ así:

$$F_1(x;y)=\frac{1}{2}S_1(x;y)=\frac{1}{2}r_1\,,$$

éste es antisimétrico y satisface (c) de 1.4.3:

$$(\delta\, F_1)(x; y; z) = 0\,.$$

Es decir, $F_1(x; y)$ es un producto estrella al orden 1, determinado por el elemento R dado en el teorema y se satisface la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter al orden 2: (h) y (i).

Ahora procedemos por inducción. La hipótesis es la siguiente. Sea

$$F(x; y) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} F_i(x; y)\, \hbar^i$$

un producto estrella hasta el orden $(k-1)$, tal que el elemento

$$S(x; y) = F^{-1}(y; x)\, F(x; y)\,,$$

satisface la ECTYB hasta el orden k:

$$\big[S(x; y)\, S(x; z)\, S(y; z) - S(y; z)\, S(x; z)\, S(x; y)\big]_k = 0$$

y

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P})\, S_i(x; y) = r_i\,; \qquad (i = 1, 2, \dots k-1)\,,$$

donde los r_i son los de la hipótesis del teorema.

Tenemos que probar que existe un $F_k(x; y)$, definido a partir de R, tal que

$$T(x; y) = 1 + S_1(x; y)\, \hbar + \cdots + S_{k-1}(x; y)\, \hbar^{k-1} + S_k(x; y)\, \hbar^k$$

satisface la ecuación ECTYB hasta el orden $(k+1)$. Por supuesto que $S(x; y)$ y $T(x; y)$ coinciden hasta el orden $(k-1)$.

Como la ECTYB al orden k equivale a $A\alpha_k(x; y; z) = 0$ (Teorema 3.2) y se satisface por hipótesis, teniendo en cuenta el Corolario del Teorema 3.1, la ecuación:

$$(\delta\, F_k)(x; y; z) = \alpha_k(x; y; z)$$

tiene soluciones.

Sea $\bar{F}_k(x; y)$ una solución cualquiera de esta ecuación. Teniendo en cuenta el Teorema 4.1 de 1.4.2, cualquier otra tiene la forma:

$$F_k = \bar{F}_k + \beta_k + \delta\, E_k\,,$$

donde $\beta_k \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ es un 2-cociclo antisimétrico de Hochschild y E_k es una 1-cocadena.

Por el Lema 4.2

$$S_k - \bar{S}_k = 2\beta_k\,,$$

por tanto

$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P})(S_k - \bar{S}_k) = 2\beta_k = S_k - \bar{S}_k\,.$$

De $\bar{S}(x;y)\,\bar{S}(y;x) = 1$, obtenemos:

$$\bar{S}_k(x;y) + \bar{S}_k(y;x) + \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} S_i(x;y)\,S_j(y;x) = 0\,.$$

Por otra parte,

$$r_k^{1\,2} + r_k^{2\,1} + \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} r_i^{1\,2} r_j^{2\,1} = 0\,,$$

entonces, por la hipótesis de inducción se obtiene:

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\big(\bar{S}_k(x;y) + \bar{S}_k(y;x)\big) = r_k^{1\,2} + r_k^{2\,1}\,,$$

que se puede escribir así:

$$r_k^{1\,2} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(x;y) = -\big[r_k^{2\,1} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(y;x)\big]\,.$$

Por construcción, $r_k^{1\,2} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(x;y)$ está en $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})^{\otimes 2}$ y la última igualdad nos dice que es antisimétrico. Por tanto, es un 2-cociclo de Hochschild antisimétrico.

Tomemos como valor de β_k:

$$2\beta_k = r_k^{1\,2} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(x;y)$$

y consideremos, ahora, la solución F_k, para $E_k = 0$:

$$F_k(x;y) = \bar{F}_k(x;y) + \frac{1}{2}(r_k^{1\,2} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(x;y))\,.$$

De aquí se obtiene:

$$S_k(x;y) = \bar{S}_k(x;y) + (r_k^{1\,2} - (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\bar{S}_k(x;y))\,,$$

donde, claramente,

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,S_k(x;y) = r_k^{1\,2}\,.$$

Por otra parte,

$$\boldsymbol{A}\alpha_{k+1}(x;y;z) = -\frac{1}{6}\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_{k+1}$$

es un 3-cociclo de Hochschild (Teorema 3.2 y Teorema 4.1 de 1.4.2). Entonces:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\alpha_{k+1}(x;y;z) &= -\frac{1}{6}(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{A}\alpha_{k+1}(x;y;z) = \\ &= \big[R^{1\,2}R^{1\,3}R^{2\,3} - R^{2\,3}R^{1\,3}R^{1\,2}\big]_{k+1} = 0\end{aligned}$$

y la demostración del teorema queda completada. ∎

3.4.2 Lemas Preliminares acerca de la Equivalencia de Productos Estrella

Para completar el Teorema 4.1, demostraremos la unicidad salvo equivalencias del producto estrella determinado por dicho teorema. Los siguientes resultados acerca de la equivalencia de los productos estrella (Secciones 1.3.3 y 1.4.4) serán de utilidad.

Lema 4.3 *Sean F y $\bar{F}$ dos elementos equivalentes de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ (Definición 4.2 de 1.4.4), es decir,*

$$E(x+y)\,\bar{F}(x;y) = F(x;y)\,E(x)\,E(y)\,,$$

donde

$$E = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,.$$

Definamos:

$$S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y) \quad y \quad \bar{S}(x;y) = \bar{F}^{-1}(y;x)\,\bar{F}(x;y)\,.$$

Entonces:

(1) *La relación entre S y $\bar{S}$ se puede escribir así:*

$$\bar{S}(x;y) = E^{-1}(x)\,E^{-1}(y)\,S(x;y)\,E(x)\,E(y)\,,$$

donde

$$E^{-1}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{E}_i\,\hbar^i$$

es tal que $E\,E^{-1} = E^{-1}\,E = 1$.

(2) *Para $r = 1, 2, 3, \ldots$,*

$$\bar{S}_r(x;y) = \widehat{E}_r(x) + \widehat{E}_r(y) + S_r(x;y) + E_r(x) + E_r(y) + \\ + \sum_{\substack{i+j+k+l+s=r \\ i,j,k,l,s<r}} \widehat{E}_i(x)\,\widehat{E}_j(x)\,S_k(x;y)\,E_l(x)\,E_s(y)\,.$$

(3) *La expresión del apartado (2) se puede escribir así:*

$$\bar{S}_r = S_r + B_r\big(E_1, \ldots, E_{r-1}; S_1, \ldots, S_{r-1}; \widehat{E}_1, \ldots, \widehat{E}_{r-1}\big)\,,$$

es decir, la diferencia $\bar{S}_r - S_r$ no depende de E_r (ni de $\widehat{E}_r$).

Prueba Las expresiones se obtienen por cálculo directo a partir de las definiciones. En (3) se utiliza

$$\widehat{E}_r + E_r = -\sum_{l+k=r} \widehat{E}_l\,E_k \qquad (l \geq 1;\ k \geq 1)\,.$$

■

Observación Se observa que el término $B_r(\cdots)$ de (3) es una suma de productos de E_i y S_i, $(1 \leq i \leq r-1)$. En cada uno de estos productos, existe al menos un E_i, $(1 \leq i \leq r-1)$, pero no necesariamente un S_i, $(1 \leq i \leq r-1)$. ■

Lema 4.4 *Sean F y F' dos elementos de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$, equivalentes hasta el orden k (Definición 4.3 de 1.4.4), es decir, existen $E_1, \ldots, E_k \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que, para $i = 1, \ldots, k$, se tiene:*

$$F_i' - F_i + G_i(E_1, \ldots, E_{i-1}; F_1', \ldots, F_{i-1}'; F_1, \ldots, F_{i-1}) = \delta E_i\,, \tag{a}$$

donde $G_1(x; y) = 0$ y para $(i = 2, \ldots, k)$

$$\begin{aligned} G_i(x;y) &\equiv G_i(E_1, \ldots, E_{i-1}; F_1', \ldots, F_{i-1}'; F_1, \ldots, F_{i-1}) \equiv \\ &\equiv \sum_{\substack{m+n=i\\ m,n\geq 1}} \big(E_m(x+y)\, F_n'(x;y) - F_m(x;y)\, E_n(y) - F_m(x;y)\, E_n(x)\big) - \\ &- \sum_{\substack{m+n=i\\ m,n\geq 1}} E_m(x)\, E_n(y) - \sum_{\substack{m+n+l=i\\ m,n\geq 1}} F_m(x;y)\, E_n(x)\, E_l(y)\,. \end{aligned} \tag{b}$$

Entonces, para $r = 1, 2, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} S_r'(x;y) - S_r(x;y) = &-\big(G_r(x;y) - G_r(y;x)\big) + \\ &+ R_r(F_1', \ldots, F_{r-1}')(x;y) - R_r(F_1, \ldots, F_{r-1})(x;y)\,, \end{aligned} \tag{c}$$

donde $R_1 = G_1 = 0$ implica $S_1' = S_1$ y $R_r(F_1, \ldots, F_{r-1})(x;y)$ viene dado (expresión (g) de 3.4.1) por:

$$R_r(F_1, \ldots, F_{r-1})(x;y) = \sum_{\substack{m+n=r\\ m\geq 1\,;n\geq 1}} \widehat{F}_m(y;x)\big(F_n(x;y) - F_n(y;x)\big)\,. \tag{d}$$

Prueba Si F y F' son dos elementos cualesquiera de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$, por el Lema 4.2 (1) de 3.4.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} S_r'(x;y) - S_r(x;y) = &\big(F_r'(x;y) - F_r(x;y)\big) - \big(F_r'(y;x) - F_r(y;x)\big) + \\ &+ R_r(F_1', \ldots, F_{r-1}')(x;y) - R_r(F_1, \ldots, F_{r-1})(x;y)\,, \end{aligned}$$

donde R_r viene dado por (d).

De la definición de equivalencia hasta el orden k se obtiene:

$$F_i' - F_i = -G_i + \delta E_i\,, \qquad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

Sustituyendo esta expresión en la igualdad anterior se obtiene (c). ∎

Sean F y F' dos productos estrella equivalentes hasta el orden k, sabemos (Gerstenhaber [1964b]), que la 2-cocadena

$$F_{k+1}' - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1, \ldots, E_k; F_1', \ldots, F_k'; F_1, \ldots, F_k)$$

es un 2-cociclo de Hochschild. Entonces, por el Teorema 4.1 de 1.4.2, existen $h_{k+1} \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ y $E_{k+1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$F_{k+1}' - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1, \ldots, E_k; F_1', \ldots, F_k'; F_1, \ldots, F_k) = h_{k+1} + \delta E_{k+1}\,. \tag{e}$$

Lema 4.5 *Sean F y F' dos productos estrella equivalentes hasta el orden k. Entonces, con las notaciones anteriores,*

$$S_{k+1}'(x;y) - S_{k+1}(x;y) = 2h_{k+1}(x;y) + A_{k+1}(\cdots)(x;y)\,,$$

donde

$$\begin{aligned} &A_{k+1}(F_1, \ldots, F_k; F_1', \ldots, F_k'; E_1, \ldots, E_k)(x;y) = \\ &\quad = -\big(G_{k+1}(x;y) - G_{k+1}(y;x)\big) + R_{k+1}(F_1', \ldots, F_k')(x;y) - R_{k+1}(F_1, \ldots, F_k)(x;y)\,. \end{aligned}$$

Prueba De la misma forma que en el Lema 4.4, para todo $r = 2, 3, \dots$,

$$S'_r(x;y) - S_r(x;y) = \big(F'_r(x;y) - F_r(x;y)\big) - \big(F'_r(y;x) - F_r(y;x)\big) + \\ + R_r(F'_1, \dots, F'_{r-1})(x;y) - R_r(F_1, \dots, F_{r-1})(x;y),$$

donde F y F' son dos elementos cualesquiera de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ y R_r viene dado por (g) de 3.4.1.

Tomando $r = k+1$ y haciendo uso de la igualdad (e) se obtiene el resultado. ∎

Lema 4.6 *Sean F y F' dos productos estrella equivalentes hasta el orden k. Sea*

$$E = 1 + E_1\,\hbar + \cdots + E_k\,\hbar^k \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$$

el elemento responsable de la equivalencia. Consideremos el producto estrella $\bar{F}$, equivalente a F, definido por:

$$\bar{F}(x;y) = E^{-1}(x+y)\,F(x;y)\,E(x)\,E(y).$$

Sean S y $\bar{S}$ los elementos definidos en el Lema 4.3. Entonces se tiene:

$$F'_i = \bar{F}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, k), \tag{f}$$

$$\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y) = B_{k+1}(\widehat{E}_1, \dots, \widehat{E}_k; S_1, \dots, S_k; E_1, \dots, E_k)(x;y) \tag{g}$$

donde

$$B_{k+1}(\cdots)(x;y) = \sum_{\substack{i+j+r+l+t=k+1 \\ 0\le i,j,r,l,t\le k}} \widehat{E}_i(x)\,\widehat{E}_j(y)\,S_r(x;y)\,E_l(x)\,E_t(y),$$

y también:

$$\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y) = A_{k+1}(F_1, \dots, F_k; F'_1, \dots, F'_k; E_1, \dots, E_k), \tag{h}$$

donde $A_{k+1}(\cdots)$ está definida en el Lema 4.5.

Prueba

(1) La equivalencia de F y F' y la de F y $\bar{F}$, significa $(i = 1, 2, \dots, k)$

$$F'_i - F_i + G_i(F_1, \dots, F_{i-1}; F'_1, \dots, F'_{i-1}; E_1, \dots, E_{i-1} = \delta\, E_i$$
$$\bar{F}_i - F_i + G_i(F_1, \dots, F_{i-1}; \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_{i-1}; E_1, \dots, E_{i-1}) = \delta\, E_i.$$

Entonces, si $i = 1$,

$$F'_1 - F_1 = \delta\, E_1, \qquad \bar{F}_1 - F_1 = \delta\, E_1,$$

por tanto

$$F'_1 = \bar{F}_1.$$

Si $i = 2$,

$$F'_2 - F_2 + G_2(F_1; F'_1; E_1) = \delta\, E_2,$$

y

$$\bar{F}_2 - F_2 + G_2(F_1; F'_1; E_1) = \delta\, E_2.$$

Entonces

$$F'_2 = \bar{F}_2$$

Deforma similar

$$F'_k = \bar{F}_k.$$

De esta forma quedan demostradas las igualdades (f).

(2) La expresión (g) es la expresión (3) en el Lema 4.3, dado que $E_i = 0$ para $i \geq k+1$.

(3) La expresión (h) es la misma que la del Lema 4.5, relativa a dos productos estrella F y $\bar{F}$, que (siendo equivalentes) son equivalentes hasta el orden $(k+1)$. Ya que, si $\bar{F}_{k+1} - F_{k+1} + G_{k+1}$ es un 2-cociclo, en (e) se tiene $h_{k+1} = 0$ y, por (1), se puede reemplazar $\bar{F}_i$ por F'_i para $(i = 1, \dots, k)$. ∎

Teorema 4.2 *Con las notaciones anteriores:*

$$A_{k+1}(F_1,\dots,F_k;F'_1,\dots,F'_k;E_1,\dots,E_k) = \\ = B_{k+1}(\widehat{E}_1,\dots,\widehat{E}_k;S_1,\dots,S_k;E_1,\dots,E_k).$$

Prueba Es consecuencia de (2) y (3) del Lema 4.6. ∎

Lema 4.7 *Dada el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$, sea*

$$P : \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathbb{R}^n)$$

la representación natural (identidad), y sea también

$$P : \mathfrak{A}\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})) \longrightarrow End(\mathbb{R}^n)$$

la representación inducida de su álgebra envolvente. Se tiene:

(1) *Si $X \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$, entonces $\delta X = 0$.*

(2) *Si $Y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$, existe $E \in \mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$ tal que $PE = 0$ y $\delta Y = \delta E$.*

Prueba

(1) Trivial. Es verdad incluso si $X \in \mathfrak{g}^{\otimes n}$.

(2) $PY \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ implica $\delta PY = 0$ y

$$\delta Y = \delta Y - \delta(PY) = \delta(Y - PY) = \delta E,$$

donde $E = Y - PY$, pero $PE = PY - P(PY) = PY - PY = 0$. ∎

Lema 4.8 *Supongamos que en el Teorema 4.2 $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ y sea E_i tal que $PE_i = 0$, lo cual es posible por el Lema 4.7. Se tiene:*

$$(P \otimes P)A_{k+1}(F_1,\dots,F_k;F'_1,\dots,F'_k;E_1,\dots,E_k) = 0.$$

Prueba Por el Teorema 4.2, es suficiente probar que:

$$(P \otimes P)B_{k+1}(\widehat{E}_1,\dots,\widehat{E}_k;F'_1,\dots,F'_k;E_1,\dots,E_k) = 0.$$

Pero esto es cierto en virtud de la observación que sigue al Lema 4.3 y de la elección de E_i con $PE_i = 0$. ∎

3.4.3 Productos Estrella sobre *Gl(n;ℝ)* Determinados por una Solución $R \in End(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)[[\hbar]]$ de la Ecuación Cuántica Triangular de Yang-Baxter

Teorema 4.3 *Sea F el producto estrella construido en el Teorema 4.1. Sea F' otro producto estrella que satisface las hipotesis del mismo teorema, esto es,*

$$(P \otimes P)\, S'(x;y) = R,$$

siendo $S'(x;y) = (F')^{-1}(y;x)\, F'(x;y)$. Entonces, existe

$$E = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i\, \hbar^i,$$

donde $E_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$ y $PE_i = 0$ tal que

$$F'(x;y) = E^{-1}(x+y)\, F(x;y)\, E(x)\, E(y).$$

Prueba De (e) del Lema 4.1, se tiene:

$$S_1(x;y) = F_1(x;y) - F_1(y;x)\,,$$
$$S_1'(x;y) = F_1'(x;y) - F_1'(y;x)\,.$$

En el Teorema 4.1, se tiene:

$$F_1(x;y) = \frac{1}{2}S_1(x;y)\,,$$

pero $\delta\, F_1'(x;y) = 0$, por tanto

$$F_1'(x;y) = \frac{1}{2}S_1'(x;y) + \delta\, E_1(x;y)\,,$$

donde $S_1'(x;y) \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})^{\otimes 2}$.

Por la hipótesis del teorema respecto de $S'(x;y)$,

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})S_1(x;y) = S_1(x;y) = r_1 = S_1'(x;y) = (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,S_1'(x;y)\,.$$

Por tanto,

$$S_1(x;y) = r_1 = S_1'(x;y)\,.$$

De esto, se obtiene

$$F_1'(x;y) = F_1(x;y) + \delta\, E_1(x;y)\,,$$

donde se ha escogido $E_1(x)$ tal que $\boldsymbol{P}E_1(x) = 0$, de acuerdo con el Lema 4.7.

Los productos estrella F y F' son, por supuesto, equivalentes hasta el orden 1.

Ahora se procede por inducción. Supongase F y F' equivalentes hasta el orden k, y que se ha escogido $\boldsymbol{P}E_i = 0$ $(i = 1,\dots,k)$. En consecuencia se tiene:

$$F_{k+1}' - F_{k+1} + G_{k+1} = h_{k+1} + \delta\, E_{k+1}\,,$$

donde $h_{k+1} \in \wedge^2(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$ y $\boldsymbol{P}E_{k+1} = 0$. En este punto, hacemos uso del Lema 4.5. Entonces

$$S_{k+1}' - S_{k+1} = 2h_{k+1} + A_{k+1}(F_1,\dots,F_k;F_1',\dots,F_k';E_1,\dots,E_k)\,.$$

Pero

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,A_{k+1} = 0\,,$$

por el Lema 4.8, y por hipótesis

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,S_{k+1}'(x;y) = (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P})\,S_{k+1}(x;y) = r_{k+1}\,.$$

Así pues $h_{k+1} = 0$, lo que significa que F y F' son equivalentes hasta el orden $k+1$. Además $\boldsymbol{P}E_{k+1} = 0$. Con lo que la demostración queda completada. ∎

Capítulo 4

Productos Estrella Invariantes

Este capítulo está dedicado a la construcción de todos los productos estrella invariantes sobre un grupo de Lie G dotado de una estructura simpléctica invariante β_1.

El procedimiento se debe a V. G. Drinfeld. Nuestro trabajo ha consistido en demostrar los resultados que se enuncian en Drinfeld [1983b], poniendo de manifiesto el papel fundamental que juega el teorema de interpretación cohomológica de la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter (Teorema 3.2 de la Sección 3.3). Dos aspectos se pueden destacar.

Por un parte, el producto estrella de Moyal sobre el grupo abeliano $\mathbb{R}^{2n}$ con estructura simpléctica canónica β_1 se puede obtener a partir de la ley asociativa de Campbell-Hausdorff, $\bar{\gamma}$, correspondiente al grupo de Heisenberg $\boldsymbol{H}_n$, considerado éste como la extensión central de $\mathbb{R}^{2n}$ por el cociclo β_1. Este procedimiento se generaliza convenientemente, para obtener un producto estrella invariante sobre un grupo de Lie arbitrario dotado de una estructura simpléctica invariante β_1.

Por otra parte, se puede generalizar aún mas el procedimiento anterior, sustituyendo el cociclo β_1 por cualquier cociclo de la forma

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \cdots + \beta_R\,\hbar^{R-1} + \cdots ,$$

donde $\hbar$ es el parámetro de deformación. Esto conduce al resultado de que cualquier producto estrella invariante sobre $(\boldsymbol{G};\beta_1)$ es equivalente a uno obtenido a partir de uno de estos cociclos.

Una observación sobre la notación. En las diferentes definiones de operadores bidiferenciales a lo largo de todo el capítulo, se sobrentiende la aplicación $\mu(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = \varphi_1\varphi_2$ para simplificar la escritura.

En la Sección 4.1 describimos con detalle el caso particular abelinano $(\mathbb{R}^{2n};\beta_1)$, cuyos resultados anticipamos a continuación.

Sea $\boldsymbol{G} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ considerado como grupo de Lie abeliano de álgebra de Lie $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ y aplicación exponencial $\exp x = x$. Sea E un generador. Toda forma bilineal antisimétrica, $\beta_1 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$, es un 2-cociclo de Chevalley-Eilenberg (Definición 1.2 de 1.1.1) de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$. Define, por tanto, una extensión central de $\mathfrak{g}$: $\bar{\mathfrak{g}} \equiv \mathfrak{g} \times_{\beta_1} \mathbb{R}\,\mathrm{E}$, cuyo conmutador es $[\bar{x}\,;\bar{y}] = \beta_1(x;y)\,\mathrm{E}$, donde $\bar{x} = x + a\,\mathrm{E}$, $\bar{y} = y + b\,\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Si β_1 es no-degenerado, el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}$ es el grupo de Heisenberg $\overline{G} \equiv \boldsymbol{H}_n$ y la orbita de $\mathrm{E}^* \in \bar{\mathfrak{g}}^*$ por la representación coadjunta de $\overline{G}$ es el subespacio afín $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \equiv \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$.

En este contexto, el grupo abeliano $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ con estructura simpléctica invariante β_1, es difeomorfo a $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, por medio del difeomorfismo simpléctico (Proposición 1.1):

$$
\begin{aligned}
G \equiv \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\mathcal{K}} \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \equiv \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \\
\exp x = x &\longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x)\, \mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}_1(x) + \mathrm{E}^* ,
\end{aligned}
\tag{a}
$$

donde $\tilde{\beta}_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es el isomorfismo asociado a β_1 definido por: $\langle \tilde{\beta}_1(x)\,;y\rangle = \beta_1(x;y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, $\overline{\mathrm{Ad}}^*$ denota la representación coadjunta de $\overline{G}$ y $\overline{\exp}$ es la aplicación exponencial de $\overline{G}$.

Además, el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathcal{K}"] \arrow[d, "\lambda_{\exp x}"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x)"] \\
G \arrow[r, "\mathcal{K}"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}
\end{tikzcd}
\tag{b}
$$

es conmutativo (Proposición 1.2). Por lo que, en virtud de (a) y (b), a partir de un producto estrella sobre $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ invariante por la representación coadjunta de $\overline{G}$, se define un producto estrella sobre el grupo abeliano $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ invariante por traslación a la izquierda.

El punto de partida para definir un producto estrella sobre la orbita de E^* consiste en considerar la ley de composición siguiente (para las definiciones de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y su inversa $\overline{\mathcal{F}}$, utilizadas en este trabajo, ver por ejemplo: Treves [1967]):

$$
(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i \left\langle (\xi+\mathrm{E}^*)\,;\hbar^{-1}\bar{\gamma}(\hbar x;\hbar y)\right\rangle} \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy = \tag{c}
$$

$$
= \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i \left(\xi(x+y)+\frac{1}{2}\hbar\beta_1(x;y)\right)} \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy , \tag{d}
$$

que tiene sentido sobre espacios funcionales adecuados sobre la orbita, ya que la ley de grupo formal $\bar{\gamma} : \bar{\mathfrak{g}} \times \bar{\mathfrak{g}} \longrightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ es, en este caso, una suma finita:

$$
\bar{\gamma}(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x} + \bar{y} + \frac{1}{2}[\bar{x}\,;\bar{y}] .
$$

Esta ley de composición es la expresión, en términos de $\bar{\gamma}$, del producto de Moyal.

Puesto que $\bar{\gamma}$ es asociativa, la expresión (c) nos dice que la ley de composición $*$ es asociativa (Proposición 1.3).

Por otra parte, al desarrollar en serie de potencias de $\hbar$ la exponencial de la expresión (d), se definen los operadores bidiferenciales con coeficientes constantes, de grado R en cada argumento y sin términos de grado cero, siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) &= \int e^{-2\pi i \xi(x+y)} \frac{(-\pi i)^R}{R!} \beta_1(x;y)^R \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy = \\
&= \left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^R \frac{1}{R!} \left[\beta_1\!\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,;\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^R (\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}
\end{aligned}
\tag{e}
$$

y a partir de la expresión (e), que tiene sentido para cualquier par de funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})$, una ley de composición sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})[[\hbar]]$:

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \sum_{R\geq 1} P_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R\,. \tag{f}$$

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})$ son polinomios sobre la orbita, la suma del segundo miembro de (f) es un polinomio (es finita), por lo que, interpretando (c) en el contexto de la teoría de distribuciones, las expresiones (c) y (f) coinciden. Como $*$ satisface la propiedad asociativa, queda definida una deformación asociativa unitaria, $\triangleright$, del producto de funciones polinómicas sobre $\mathcal{O}_{E^*}$ (Proposición 1.7).

Sean ahora $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})$, $i = 1, 2, 3$, funciones cualesquiera y

$$\varphi_i(\xi) = p_i(\xi - \xi_0) + r_i(\xi;\xi_0)\,,$$

los desarrollos de Taylor en el punto ξ_0 de φ_i. Para cada S fijo, si el orden del desarrollo de Taylor es suficientemente grande, se tiene:

$$\sum_{K+L=S} P_L(P_K(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3)(\xi_0) = \sum_{K+L=S} P_L(P_K(p_1;p_2)\,;\,p_3)(\xi_0) \tag{g}$$

y

$$\sum_{K+L=S} P_L(\varphi_1\,;\,P_K(\varphi_2;\varphi_3))(\xi_0) = \sum_{K+L=S} P_L(p_1\,;\,P_K(p_2;p_3))(\xi_0)\,. \tag{h}$$

Pero la asociatividad de $\triangleright$ sobre el espacio de los polinomios equivale a la igualdad de los segundos miembros de (g) y (h). Por tanto, los primeros miembros son también iguales, lo cual implica que $\triangleright$ es una ley de composición asociativa unitaria sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})$. Así pues, $\big(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})[[\hbar]];\triangleright\big)$ es un álgebra asociativa con unidad (Proposición 1.8).

Un cálculo directo, teniendo en cuenta la igualdad (d) de 4.1.2, demuestra que la ley de composición $\triangleright$, definida en (f), es invariante por la representación coadjunta de $\overline{G}$ (Proposición 1.9), es decir, para todo $R > 0$ se satisface:

$$P_R(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z\,;\,\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z)(\xi) = P_R(\varphi_1;\varphi_2)\big(\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z(\xi)\big)\,.$$

Definamos los operadores bidiferenciales reales (con coeficientes constantes, de grado R en cada argumento y sin términos de grado cero):

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \frac{1}{R!}\left[\beta_1\!\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,;\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^R (\varphi_1\otimes\varphi_2)\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}\,,$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{E^*})$ (sobrentendiendo la aplicación $\mu(f\otimes g) = fg$). Como, para cada $R > 0$,

$$\sum_{T+S=R} P_S(P_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3)(\xi_0) = \sum_{T+S=R} P_S(\varphi_1\,;\,P_T(\varphi_2;\varphi_3))(\xi_0)\,,$$

se verifica que:

$$\sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S} Q_S(Q_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3) = \sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S} Q_S(\varphi_1\,;\,Q_T(\varphi_2;\varphi_3))\,,$$

y, por tanto,

$$\sum_{T+S=R} Q_S\big(Q_T(\varphi_1;\varphi_2);\varphi_3\big) = \sum_{T+S=R} Q_S\big(\varphi_1;Q_T(\varphi_2;\varphi_3)\big),$$

que es la condición, término a término, para que la ley de composición

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) + \sum_{R\geq 0} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R, \tag{i}$$

satisfaga la propiedad asociativa. Además, los operadores P_R son nulos sobre las constantes y la invariancia por la representación coadjunta de los operadores Q_R implica la misma invariancia de los P_R. Así pues, esta igualdad (i) es la expresión de un producto estrella sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, invariante por la representación coadjunta de $\overline{G}$ (Teorema 1.1).

Por medio del difeomorfismo (a), a partir del producto estrella (i) sobre $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, se define sobre el grupo $\boldsymbol{G} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ un producto estrella:

$$\psi_1 * \psi_2 = \psi_1 \cdot \psi_2 + \sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)\,\hbar^R. \tag{j}$$

Los operadores bidiferenciales G_R son:

$$G_R(\psi_1;\psi_2) = \frac{1}{R!}\left[\beta_1\left(\widetilde{\Lambda}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right);\widetilde{\Lambda}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right]^R(\psi_1\otimes\psi_2),$$

donde $\widetilde{\Lambda}_1 \in Hom(\mathfrak{g};\mathfrak{g}^*)$ es el homomorfismo asociado al 2-tensor $\Lambda_1 \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ definido por: $\Lambda_1^{a\,b}(\beta_1)_{c\,b} = \delta_c^a$. La conmutatividad del diagrama (b) y la invariancia por la representación coadjunta de (i) implican la invariancia por traslaciones a la izquierda de (j) (Proposición 1.10).

Consideremos ahora la expresión:

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\,t + \cdots + \beta_k\,t^{k-1}, \tag{k}$$

donde las $\beta_i \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ son 2-cociclos de $\mathfrak{g}$ con respecto al representación trivial sobre $\mathbb{R}$ y sean $\tilde{\beta}_i \in Hom(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})$ $(i = 1,\ldots,k)$ los homomorfismos asociados a β_i. Si $\tilde{\beta}_1$ es invertible, cualquier elemento $\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\,t + \cdots + \tilde{\beta}_k\,t^{k-1}$ admite una serie formal inversa y, si t es suficientemente pequeño, esta serie converge, por lo que (k) define una estructura simpléctica sobre $\boldsymbol{G}$ y el procedimiento descrito para la construcción del producto estrella (j) se reproduce sustituyendo β_1 por β_t.

Sea, pues, $\bar{\mathfrak{g}}_t$ la extensión central de $\mathfrak{g}$ por el 2-cociclo β_t, $\overline{\boldsymbol{G}}_t$ el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$ y $\widetilde{\Lambda}_t$ la suma de la serie formal inversa de $\tilde{\beta}_t$. Sobre la orbita coadjunta $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \equiv \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$ se tiene un producto estrella invariante por la representación coadjunta de $\overline{\boldsymbol{G}}_t$:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) + \sum_{R\geq 0} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R, \tag{l}$$

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \frac{1}{R!}\left[\beta_t\left(\frac{\partial}{\partial\eta};\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^R(\varphi_1\otimes\varphi_2)\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}, \tag{m}$$

y el difeomorfismo

$$G \equiv \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \equiv \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*, \tag{n}$$

transporta este producto estrella al grupo $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$. Es decir, la ley de composición:

$$\psi_1 * \psi_2 = \psi_1 \cdot \psi_2 + \sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)\,\hbar^R, \tag{o}$$

$$G_R(\psi_1;\psi_2) = \frac{1}{R!}\left[\beta_t\left(\widetilde{\Lambda}_t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right);\, \widetilde{\Lambda}_t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right]^R (\psi_1 \otimes \psi_2), \tag{p}$$

define un producto estrella invariante por la izquierda sobre el grupo $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ con estructura simpléctica β_t.

Con vistas a la construcción de todos los productos estrella invariantes sobre un grupo de Lie con una estructura simpléctica invariante determinada, el hecho importante es que, por identificación de los parámetros t y $\hbar$ en (o), se obtiene un producto estrella sobre el grupo de Lie $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ con estructura simpléctica invariante β_1 (Teorema 1.2).

En efecto, desarrollando en serie de potencias de t el segundo miembro de (p), se obtiene:

$$G_R(\psi_1;\psi_2) = \sum_{T\geq 0} G_{RT}(\psi_1;\psi_2)\, t^T$$

y sustituyendo este desarrollo en (o) e identificando t y $\hbar$, se obtienen los operadores:

$$F_L(\psi_1;\psi_2) = \sum_{\substack{R+T=L\\ R,T\geq 0}} G_{RT}(\psi_1;\psi_2)\,.$$

La asociatividad del producto estrella (o) implica:

$$\sum_{K+L=M} G_K(G_L(\psi_1;\psi_2);\psi_3) = \sum_{K+L=M} G_K(\psi_1;G_L(\psi_2;\psi_3))$$

por tanto:

$$\sum_{R+S=M}\sum_{T_1\geq 0} G_{RT_1}\Big(\sum_{T_2\geq 0} G_{ST_2}(\psi_1;\psi_2)\,t^{T_2}\,;\,\psi_3\Big)\,t^{T_1} =$$

$$= \sum_{R+S=M}\sum_{T_1\geq 0} G_{RT_1}\Big(\psi_1\,;\,\sum_{T_2\geq 0} G_{ST_2}(\psi_2;\psi_3)\,t^{T_2}\Big)\,t^{T_1},$$

es decir,

$$\sum_{\substack{R+S=M\\ T_1+T_2=T}} G_{RT_1}\left(G_{ST_2}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right) = \sum_{\substack{R+S=M\\ T_1+T_2=T}} G_{RT_1}\left(\psi_1\,;\,G_{ST_2}(\psi_2;\psi_3)\right)\,.$$

Entonces, descomponiendo $P = M + T$ en todas las formas posibles con $M, T \in \mathbb{N}$ y sumando para cada descomposición las igualdades anteriores, se obtiene:

$$\sum_{K+R+B+N=P} G_{RK}\left(G_{BN}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right) = \sum_{K+R+B+N=P} G_{RK}\left(\psi_1\,;\,G_{BN}(\psi_2;\psi_3)\right),$$

lo cual implica:

$$\sum_{\substack{R+S=M\\R,S\geq 0}} F_R(F_S(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3) = \sum_{\substack{R+S=M\\R,S\geq 0}} F_R\left(\psi_1\,;\,F_S(\psi_2;\psi_3)\right)\,,$$

que es la expresión orden a orden de la propiedad asociativa de la ley de composición:

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = (\psi_1 \cdot \psi_2)(x) + \sum_{S\geq 1} F_S(\psi_1;\psi_2)(x)\,\hbar^S\,. \tag{q}$$

Para distintos cociclos β_t se obtienen distintos productos estrella sobre el grupo $\mathbb{R}^{2n}$ con respecto a la misma estructura simpléctica invariante β_1. De manera que cualquier producto estrella invariante sobre el grupo $(\mathbb{R}^{2n};\beta_1)$ es equivalente a uno determinado, según el procedimiento descrito, por un cociclo β_t. Demostraremos este resultado en el caso general de un grupo de Lie arbitrario.

El procedimiento descrito admite una generalización para el caso de un grupo de Lie arbitrario, dotado de una estructura simpléctica invariante. Los resultados que siguen, desarrollados en la Sección 4.2., describen dicha generalización.

Sea ahora $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie arbitraria y β_i, $(i = 1,\ldots,R)$, 2-cociclos de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$, tales que β_1 es no-degenerado. El polinomio en el parámetro real t:

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\,t + \cdots + \beta_R\,t^{R-1} \tag{a'}$$

define una extensión central, $\bar{\mathfrak{g}}_t = \mathfrak{g}\times\mathbb{R}\,\mathrm{E}$, del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La representación adjunta de $\bar{\mathfrak{g}}_t$ viene dada por:

$$\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x}\cdot\bar{y} = \mathrm{ad}\,x\cdot y + (\tilde{\beta}_t(x)\cdot y)\,\mathrm{E}\,,$$

donde $\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\,t + \cdots\tilde{\beta}_R\,t^{R-1}$ es el homomorfismo asociado a la 2-forma β_t, es decir, $\langle\tilde{\beta}_t(x)\,;y\rangle = \beta_t(x;y)$.

Sea $\overline{G}_t$ el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$ y $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ la orbita de E^* por la acción coadjunta de $\overline{G}_t$, que viene dada por la expresión (Proposición 2.1):

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{x})(\xi + a\,\mathrm{E}^*) = \mathrm{Ad}^*(\exp x)\cdot\xi + a f_{\beta_t}(-x) + a\,\mathrm{E}^*\,,$$

para todo $\xi + a\,\mathrm{E}^* \in \bar{\mathfrak{g}}_t^*$, donde

$$f_{\beta_t}(x) = \tilde{\beta}_t(x)\circ A(x) \in \mathfrak{g}^* \quad \text{y} \quad A(x) = \frac{\exp(\mathrm{ad}\,x) - I}{\mathrm{ad}\,x}\,.$$

El difeomorfismo (a) del caso abeliano $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ es, en el caso general, un difeomorfismo local en $x = 0$ (Proposición 2.2):

$$\begin{gathered}\exp U_0 \equiv U_e \subset G \xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \subset \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*\\ \exp x \longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,x)\cdot\mathrm{E}^* = f_{\beta_t}(-x) + \mathrm{E}^*\,,\end{gathered} \tag{b'}$$

ya que, para t pequeño, $\tilde{\beta}_t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es un isomorfismo y $df_{\beta_t}(0) = \tilde{\beta}_t$. La conmutatividad del diagrama (b) se sigue satisfaciendo localmente. Si $W_0 \subset U_0$ es un entorno simétrico, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \exp W_0 \arrow[r, "\mathcal{K}_t"] \arrow[d, "\lambda_{\exp x}"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,x"] \\ \exp U_0 \arrow[r, "\mathcal{K}_t"'] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \end{tikzcd} \tag{c'}$$

es conmutativo (Proposición 2.3).

La ley de grupo formal $\overline{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y})$ es ahora una serie infinita:

$$\overline{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n(\bar{x};\bar{y})\,, \tag{d'}$$

donde los $\bar{z}_n(\bar{x};\bar{y})$ son polinomios homogéneos de grado n en las componentes de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (ver expresiones (h), (i) y (j) de 4.2.1). La falta de convergencia en general de la serie (d') impide dar sentido a la expresión (c), que no puede, ahora, constituir el punto de partida para la construcción de un producto estrella sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$.

Sin embargo, a partir del desarrollo formal en serie de potencias de $\hbar$ de la exponencial que aparece en (c) (una vez que se ha sustituido $\overline{\gamma}$ por la expresión (d')):

$$\exp\left(\frac{-2\pi i}{\hbar}\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\hbar x;\hbar y)\rangle\right) = e^{-2\pi i\xi(x+y)}\left(1 + \sum_{S=1}^{\infty} B_S(x;y;\xi)\,\hbar^S\right),$$

se definen los operadores bidiferenciales:

$$\begin{aligned} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) &= \int e^{-2\pi i\xi(x+y)} B_S(x;y;\xi)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\,dx\,dy = \\ &= B_S\left(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\eta}\,;\,\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\zeta}\,;\,\xi\right)(\varphi_1\otimes\varphi_2)\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}} \end{aligned} \tag{e'}$$

y una ley de composición sobre $C^\infty(\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*)[[\hbar]]$:

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S>1} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^S\,. \tag{f'}$$

Esta ley de composición es asociativa. Para demostrarlo hay que estudiar el desarrollo en serie que se obtiene si, en la exponencial anterior, se utiliza la suma finita:

$$\overline{\gamma}_{t,R+1}(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{n=1}^{R+1} \bar{z}_n(\bar{x};\bar{y}) \tag{d''}$$

en lugar de $\overline{\gamma}_t$. En este caso,

$$\exp\left(\frac{-2\pi i}{\hbar}\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_{t;R+1}(\hbar x;\hbar y)\rangle\right) = e^{(-2\pi i)\xi(x+y)}\left(1 + \sum_{S=1}^{\infty} \widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi)\,\hbar^S\right),$$

de manera que se tienen las siguientes igualdades (Proposición 2.7):

$$B_S(x;y;\xi) = \widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi) \quad \text{para} \quad S = 1,\ldots,R\,. \tag{g'}$$

Como $B_S(x;y;\xi)$ es una suma de monomios de grados $S+1,\ldots,2S$ en las componentes de x e y y de grados $0,1,\ldots,S$ en las componentes de ξ (Proposición 2.6), si se consideran polinomios φ_1,φ_2 y R suficientemente grande con respecto al grado de dichos polinomios, la suma (f') es finita. Por lo tanto, teniendo en cuenta (g'), se puede escribir:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) &= (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S=1}^{R} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^S = \\ &= \int \exp\left(\frac{-2\pi i}{\hbar}\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_{t;R+1}(\hbar x;\hbar y)\rangle\right)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\,dx\,dy\,, \end{aligned}$$

que es una expresión con sentido en el contexto de la teoría de distribuciones, cuya asociatividad está basada en la de $\overline{\gamma}_t$ (Proposición 2.5 y Proposición 2.8).

Esta caracteristica de la ley de composición $\triangleright$, junto con el hecho de que los operadores P_R no tienen términos de grado cero, dota al conjunto de los polinomios sobre $\mathfrak{g}^*$ de una estructura de álgebra asociativa unitaria (Proposición 2.9).

Volviendo a considerar los desarrollos de Taylor (de orden suficientemente grande) de funciones complejas arbitrarias $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, las expresiones (g) y (h) siguen siendo válidas y, por lo tanto, $(\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\hbar]]\,;\,\triangleright)$ es un álgebra asociativa unitaria (Proposición 2.10).

Para construir un producto estrella sobre $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$, sólo queda observar que, para cada $S \geq 1$, se satisface la siguiente igualdad (ver sección 4.2.2):

$$(-2\pi i)^S B_S(x;y;\xi) = D_S(-2\pi i x; -2\pi i y; \xi)\,, \tag{h'}$$

donde $D_S(x;y;\xi)$ es un polinomio real.

Sean ahora $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ funciones reales, definiendo los operadores bidiferenciales Q_R de la siguiente forma:

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = D_R\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\right)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\,,$$

debido a (h'), la ley de composición:

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \sum_{R\geq 0} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R\,, \tag{i'}$$

es asociativa y por tanto define un producto estrella sobre $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$ (Teorema 2.1). Este producto estrella es invariante por la representación coadjunta de $\overline{G}_t$ (Teorema 2.2)

El transporte al grupo G del producto estrella (i') se realiza, de manera análoga al caso abeliano, por medio del difeomorfismo local $\mathcal{K}_t : \exp U_0 \subset G \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \subset \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$ definido en (c').

Con la notación del diagrama (d'), se definen los operadores sobre $\exp U(0) \equiv U(e)$:

$$F_R^t(\psi_1;\psi_2)(\exp x) = Q_R(\psi_1 \circ \mathcal{K}_t^{-1}; \psi_2 \circ \mathcal{K}_t^{-1})(\xi)\,, \tag{j'}$$

donde $\xi = \mathcal{K}_t(\exp x) \in U(\mathrm{E}^* \subset \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, y la ley de composición:

$$(\psi_1 *_t \psi_2)(\exp x) = (\psi_1 \cdot \psi_2)(\exp x) + \sum_{R\geq 1} F_R^t(\psi_1;\psi_2)(\exp x)\,., \tag{l'}$$

con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(G)$. La conmutatividad de (c') implica que los operadores F_R^t son invariantes por la izquierda y, como $U(e)$ genera el grupo, la expresión (l') define un producto estrella invariante sobre G con estructura simpléctica invariante β_t (Teorema 2.3).

También en el caso general por identificación de los parámetros $\hbar$ y t en (l') se obtiene un producto estrella invariante, sobre el grupo de Lie G con estructura simpléctica invariante β_1. El procedimiento se describe en los Teoremas 2.4 y 2.5 y es en todo análogo al que conduce del producto estrella (o) al producto estrella (q), en el caso $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$.

Un estudio de las contribuciones de los distintos cociclos β_i, $(i = 1, \ldots, k)$, que constituyen $\beta_\hbar$ a los operadores F_R de (j') revela que las β_i con $i > R$ no intervienen en el operador F_R y que la contribución de β_R se realiza por medio del 2-cociclo de Poisson

$$\frac{1}{2}[\mu^{-1}(\beta_R)],$$

(para la cohomología de Poisson ver Secciones 1.2.3 y 1.2.4).

A partir de este resultado, se demuestra (Teorema 2.6) que los productos estrella F y $\bar{F}$ sobre $(G;\beta_1)$, determinados respectivamente por los cociclos

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \cdots + \beta_{R-1}\,\hbar^{R-2}, \qquad \bar{\beta}_\hbar = \beta_\hbar + \beta_R\,\hbar^{R-1},$$

son iguales hasta el orden $R-1$, es decir,

$$\bar{F}_1 = F_1, \ldots, \bar{F}_{R-1} = F_{R-1}$$

y

$$\bar{F}_R = F_R - \frac{1}{2}\mu^{-1}(\beta_R). \tag{m'}$$

Por otra parte, si F y $\bar{F}$ son dos productos estrella invariantes sobre $(G;\beta_1)$, iguales hasta el orden k, en la descomposición (e) de 1.4.4:

$$\bar{F}_{k+1} - F_{k+1} = h_{k+1} + \delta\, E_{k+1},$$

consecuencia de la equivalencia hasta este orden, se tiene que el 2-tensor $h_{k+1} \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es un 2-cociclo de Poisson (Proposición 2.14) y por tanto define un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$, $\beta_{k+1} = \mu(h_{k+1})$ por medio del isomorfismo μ definido en 1.2.3.

Este resultado junto con (m') es la base de un procedimiento inductivo (Teorema 2.7) mediante el cual se demuestra que todo producto estrella invariante sobre el grupo G con estructura simpléctica invariante β_1 es equivalente a un producto estrella invariante determinado por un cociclo $\beta_\hbar = \beta_1 + \cdots + \beta_R\,\hbar^{R-1} + \cdots$ según el Teorema 2.5.

Finalmente, demostraremos (Teorema 2.8) que dos productos estrella invariantes determinados respectivamente por los cociclos cohomólogos:

$$\begin{aligned}\beta_\hbar &= \beta_1 + \beta_2\,\hbar \cdots + \beta_k\,\hbar^{k-1} + \cdots \\ \omega_\hbar &= \beta_1 + (\beta_2 + \tilde{\delta}\,\alpha_2)\,\hbar + \cdots + (\beta_k + \tilde{\delta}\,\alpha_k)\,\hbar^{k-1} + \cdots,\end{aligned}$$

son equivalentes. Por tanto, cualquier producto estrella invariante sobre $(G;\beta_1)$ es equivalente a uno determinado por un cociclo $\beta_\hbar$ donde los β_i no son exactos.

4.1 Producto Estrella de Moyal

La expresión integral del producto de Moyal es (ver por ejemplo Grossmann, Loupias, Stein [1968]):

$$(f * g)(\xi) = (\pi\hat{\hbar})^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\hbar}\left(\beta(\xi;\eta)+\beta(\eta;\zeta)+\beta(\zeta;\xi)\right)} f(\eta)g(\zeta)\, d\eta\, d\zeta\,,$$

donde $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y β es la forma simpléctica canónica sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

Sea $\bar{\mathfrak{g}} \equiv \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{E}$ la extensión central del álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ por el 2-cociclo β y $\overline{G} \equiv \boldsymbol{H}_n$ el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es decir, el grupo de Heisenberg. Mediante el cambio en el parámetro de deformación dado por $\hat{\hbar} = \hbar/2\pi$ y haciendo uso de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y su inversa $\overline{\mathcal{F}}$, esta ley de composición se puede expresar en términos de la ley de grupo formal $\bar{\gamma}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$.

La expresión es la siguiente:

$$(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i\left\langle(\xi+\mathrm{E}^*);\hbar^{-1}\bar{\gamma}(\hbar x;\hbar y)\right\rangle} \left(\overline{\mathcal{F}}f\right)(x)\left(\overline{\mathcal{F}}g\right)(y)\, dx\, dy$$

y constituye el punto de partida adecuado para la construcción de productos estrella invariantes sobre el grupo abeliano $\mathbb{R}^{2n}$, que sea susceptible de generalización a un grupo de Lie arbitrario.

4.1.1 Extensión Central de $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ por un Cociclo β

Consideremos a $\mathbb{R}^{2n}$ como un grupo de Lie abeliano de álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{2n}$. En este caso la aplicación exponencial es la identidad $\exp x = x$. Toda forma bilineal antisimétrica $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ es, por definición, una 2-cocadena de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (Definición 1.1 de la Sección 1.1.1) con respecto a cualquier representación de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$.

Con respecto a la representación trivial $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R})$, definida por $x \longrightarrow 0$, toda 2-cocadena de Chevalley es un 2-cociclo (Definición 1.2 de 1.1.1), pues

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\,\beta(x_1;x_2;x_3) &= \sum_i (-1)^{i+1}\rho(x_i)(\beta(\ldots,\hat{x}_i,\ldots))+ \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\beta([x_i\,;x_j],\ldots,\hat{x}_i,\ldots,\hat{x}_j,\ldots) = 0\,,\end{aligned}$$

ya que $\rho(x_i) = 0$ y $[x_i;x_j] = 0$. Además, es no-exacto ya que

$$\tilde{\delta}\,\eta(x;y) = 0\,; \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathfrak{g}\,,$$

lo cual implica que $\eta = 0$.

Definición 1.1 *Sea β una forma bilineal, antisimétrica, no-degenerada sobre $\mathfrak{g}$ y E un generador. La extensión central de $\mathfrak{g}$ por el cociclo β es:*

$$\bar{\mathfrak{g}} = \{\bar{x} = x + a\,\mathrm{E}\,;\, x \in \mathfrak{g}\,,\, a \in \mathbb{R}\}\,,$$

con el conmutador:

$$[\bar{x}\,;\bar{y}] = \beta(x;y)\,\mathrm{E}$$

(los elementos de $\mathbb{R}\,\mathrm{E}$ están en el centro de $\bar{\mathfrak{g}}_t$).

Si $\bar{y} = y + b\,\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}}$, la representación adjunta de $\bar{\mathfrak{g}}$ viene dada por la expresión:

$$\overline{\mathrm{ad}}(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \beta(x; y)\,\mathrm{E}. \tag{a}$$

El grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}$ es el grupo Heisenberg $\overline{\boldsymbol{G}} \equiv \boldsymbol{H}_n$. La acción adjunta de $\overline{\boldsymbol{G}}$ es la siguiente:

$$\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}\,\bar{x}) \cdot \bar{y} = y + (b + \tilde{\beta}(x) \cdot y)\,\mathrm{E}\,; \quad \bar{x} = x + a\,\mathrm{E}\,,\ \bar{y} = y + b\,\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}}\,, \tag{b}$$

donde la aplicación $\tilde{\beta} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, definida por

$$\langle \tilde{\beta}(x)\,; y \rangle = \beta(x; y)\,, \tag{c}$$

es el homomorfismo asociado a la 2-forma β. En efecto, la igualdad:

$$\overline{\mathrm{Ad}}\,(\overline{\exp}\,\bar{x}) = \exp\left(\overline{\mathrm{ad}}(\bar{x})\right)\ ,$$

se satisface para todo grupo de Lie. Como la aplicación exponencial del miembro de la derecha, $\exp : \mathfrak{gl}(\bar{\mathfrak{g}}) \longrightarrow Gl(\bar{\mathfrak{g}})$, es de la forma:

$$\exp A = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots\,,$$

y como $\overline{\mathrm{ad}}(\bar{x}) \cdot \overline{\mathrm{ad}}(\bar{x}) = 0$, se tiene $\exp\left(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x}\right) = 1 + \overline{\mathrm{ad}}(\bar{x})$, lo que demuestra (b).

La representación coadjunta de $\overline{\boldsymbol{G}}$ viene dada por la expresión:

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*\,(\overline{\exp}\,\bar{x})\,(f_1 + f_2) = f_1 - f_2(\mathrm{E})\,\tilde{\beta}(x) + f_2\,, \tag{d}$$

donde $\bar{x} = x + a\,\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}}\,,\ \ f_1 + f_2 \in \bar{\mathfrak{g}}^* \equiv \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{E}^*\,,\ \ \mathrm{E}^*(\mathrm{E}) = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle\, \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{x})(f_1 + f_2)\,; \bar{y} \rangle &= \left\langle f_1 + f_2\,; \overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-x - a\,\mathrm{E}))(y + b\,\mathrm{E}) \right\rangle = \\
&= \left\langle f_1 + f_2\,; y + (b - \tilde{\beta}(x) \cdot y)\,\mathrm{E} \right\rangle = \\
&= \left\langle f_1\,; y \right\rangle + \left\langle f_2\,; b\,\mathrm{E} \right\rangle - \tilde{\beta}(x) \cdot y f_2(\mathrm{E}) = \\
&= \left\langle f_1 - \tilde{\beta}(x) f_2(\mathrm{E})\,; y \right\rangle + \left\langle f_2\,; b\,\mathrm{E} \right\rangle = \\
&= \left\langle f_1 - \tilde{\beta}(x) f_2(\mathrm{E}) + f_2\,; y + b\,\mathrm{E} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, la ley del grupo formal de Campbell-Hausdorff, $\bar{\gamma}$, correspondiente a $\bar{\mathfrak{g}}$ es:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} : \bar{\mathfrak{g}} \times \bar{\mathfrak{g}} &\longrightarrow \bar{\mathfrak{g}} \\
(\bar{x}; \bar{y}) &\longrightarrow \bar{x} + \bar{y} + \frac{1}{2}[\bar{x}\,; \bar{y}]\,,
\end{aligned} \tag{e}$$

ya que:

$$\left[\bar{x}\,; [\bar{y}\,; \bar{z}]\right] = \left[x + a\,\mathrm{E}\,; 0 + \beta(y; z)\,\mathrm{E}\right] = \beta(x; 0)\,\mathrm{E} = 0\,,$$

y por tanto todos los términos de la serie de Campbell-Hausdorff a partir del tercero son nulos (ver por ejemplo Serre [1965]).

Entonces tenemos:

$$\bar{\gamma}(\bar{x}; \bar{y}) = \gamma(x; y) + \left(a + b + \frac{1}{2}\beta(x; y)\right)\mathrm{E}\,,$$

que relaciona la ley formal de grupo de $\mathfrak{g}$, $\gamma(x; y) = x + y$, y la de $\bar{\mathfrak{g}}$.

Recordemos que $\bar{\gamma}$ satisface las siguientes propiedades:

$$\bar{\gamma}\left(\bar{x}\,; \bar{\gamma}(\bar{y}; \bar{z})\right) = \bar{\gamma}\left(\bar{\gamma}(\bar{x}; \bar{y})\,; \bar{z}\right), \qquad \bar{\gamma}(\bar{x}; 0) = \bar{x}\,, \quad \bar{\gamma}(\bar{x}; -\bar{x}) = 0\,. \tag{f}$$

4.1.2 Ley de Composición Asociativa sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})$

Sea $\overline{G}$ el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}} \equiv \mathfrak{g} \times_\beta \mathbb{R}\,\mathrm{E}$, extensión central de $\mathfrak{g}$ por el cociclo no-degenerado β.

Dado que (expresión (d) de 4.1.1)

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{x}) \cdot \mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}(x) + \mathrm{E}^* \in \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*\,; \quad \bar{x} = x + a\,\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}}\,,$$

la orbita del elemento E^* por la representación coadjunta de $\overline{G}$ es el subespacio afín $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \equiv \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$.

Proposición 1.1 *La aplicación*

$$\begin{aligned} G \equiv \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\mathcal{K}} \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \equiv \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \\ \exp x = x &\longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,x)\,\mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}(x) + \mathrm{E}^*\,, \end{aligned} \tag{a}$$

es un difeomorfismo. ■

Proposición 1.2 *El diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \\ {\scriptstyle \lambda_{\exp z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)} \\ G & \xrightarrow[\mathcal{K}]{} & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \end{array}$$

donde $z \in \mathfrak{g}$ y $\lambda_{\exp z}$ es la traslación a la izquierda definida por $\exp z$.

Prueba Cálculo directo:

$$\left(\mathcal{K} \circ \lambda_{\exp z}\right)(\exp x) = \mathcal{K}(\exp z + \exp x) = \overline{\mathrm{Ad}}^*(\exp(x+z))\,\mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}(x+z) + \mathrm{E}^*$$

y

$$\left(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z) \circ \mathcal{K}\right)(\exp x) = \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)(-\tilde{\beta}(x) + \mathrm{E}^*) = -\tilde{\beta}(x) - \tilde{\beta}(z) + \mathrm{E}^*\,.$$

■

En lo que sigue haremos uso de las definiciónes y propiedades relativas a la transformada de Fourier. Si φ, ψ, f, g, etc. designan funciones sobre $\mathbb{R}^k$, las siguientes definiciones de la trasformada de Fourier y su inversa:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}\varphi\right)(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-2\pi i \eta(x)} \varphi(x)\,dx\,, \quad \eta \in (\mathbb{R}^k)^*\,,\, x \in \mathbb{R}^k\,, \\ \left(\overline{\mathcal{F}}\psi\right)(x) &= \int_{(\mathbb{R}^k)^*} e^{2\pi i \eta(x)} \psi(\eta)\,d\eta\,, \end{aligned}$$

tienen sentido sobre determinados espacios funcionales bién conocidos (ver por ejemplo: Treves [1967]). Si T, S, etc. designan distribuciones apropiadas sobre $\mathbb{R}^k$ se define, para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^k)$,

$$\langle \mathcal{F}T; \varphi \rangle = \langle T; \mathcal{F}\varphi \rangle\,.$$

La propiedad asociativa (expresión (d) de 4.1.1) de la ley de grupo formal es el fundamento de la siguiente proposición.

Proposición 1.3 *Sean φ_1 y φ_2 funciones complejas sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$. Consideremos la expresión siguiente:*

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i\left\langle (\xi+\mathrm{E}^*)\,;\hbar^{-1}\bar{\gamma}(\hbar x;\hbar y)\right\rangle}\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\,. \qquad \text{(b)}$$

Sobre espacios funcionales adecuados definidos sobre la órbita ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}), \ldots$; ver Grossmann, Loupias, Stein [1968]; Voros [1978]), esta expresión define una ley de composición asociativa.

Teniendo en cuenta la expresión (e) *en 4.1.1 de $\bar{\gamma}$, esta ley de composición se puede escribir así:*

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i\left(\xi(x+y)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x;y)\right)}\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\,. \qquad \text{(c)}$$

Prueba Consideremos la función siguiente:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \big((\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3\big)(\xi) = \\ &= \int e^{-2\pi i\left(\xi(u+z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(u;z)\right)}\big(\overline{\mathcal{F}}(\varphi_1 * \varphi_2)\big)(u)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_3\big)(z)\,du\,dz\,. \end{aligned}$$

Desarrollando la inversa de la transformada de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$ y la ley decomposición $*$ en la expresión $\overline{\mathcal{F}}(\varphi_1 * \varphi_2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} H(\xi) = \int e^{-2\pi i\eta(x+y-u)}e^{-2\pi i\left(\xi(u)+\xi(z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(u;z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x;y)\right)}\cdot \\ \cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_3\big)(z)\,dx\,dy\,d\eta\,du\,dz\,. \end{aligned}$$

La integral:

$$\int e^{-2\pi i\eta(x+y-u)}e^{-2\pi i(\xi(u)+\xi(z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(u;z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x;y))}\,du\,d\eta\,,$$

es una delta de Dirac actuando sobre la distribución:

$$\Psi(u) = e^{-2\pi i(\xi(u)+\xi(z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(u;z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x;y))}\,,$$

por tanto

$$\begin{aligned} H(\xi) = \int e^{-2\pi i\left(\xi(x+y)+\xi(z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x+y;z)+\frac{1}{2}\hbar\beta(x;y)\right)}\cdot \\ \cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_3\big)(z)\,dx\,dy\,dz\,. \end{aligned}$$

Definiendo la siguiente expresión

$$\bar{\gamma}_\hbar(\bar{x};\bar{y}) = \hbar^{-1}\bar{\gamma}(\bar{x};\bar{y})\,,$$

$H(\xi)$ se escribe así:

$$H(\xi) = \int e^{-2\pi i(\xi+\mathrm{E}^*)\bar{\gamma}_\hbar\left(\hbar\bar{\gamma}_\hbar(\hbar x;\hbar y);\hbar z\right)}\cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_3\big)(z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Por otra parte, partiendo de la expresión $F(\xi) = (\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3))(\xi)$ se tiene:

$$F(\xi) = \int e^{-2\pi i(\xi+\mathrm{E}^*)\bar{\gamma}_\hbar\left(\hbar x\,;\,\hbar\bar{\gamma}_\hbar(\hbar y;\hbar z)\right)}\cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_3\big)(z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Ahora bien, la propiedad asociativa de la ley de grupo formal implica:

$$\bar{\gamma}_\hbar(\hbar\bar{\gamma}_\hbar(\hbar x;\hbar y)\,;\,\hbar z) = \bar{\gamma}_\hbar(\hbar x\,;\,\bar{\gamma}_\hbar(\hbar y;\hbar z))\,,$$

lo que demuestra formalmente la propiedad asociativa de la ley de composición $*$. ∎

En la siguiente proposición, mediante un cambio de variable en (c) después de desarrollar las transformadas de Fourier, obtenemos la expresión integral del producto estrella de Moyal sobre la variedad simpléctica canónica $(\mathbb{R}^{2n};\beta)$ (Grossmann, Loupias, Stein [1968]).

Proposición 1.4 *Sea $\tilde{\beta}:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}^*$ el isomorfismo definido en* (c) *de 4.1.1 a partir del 2-cociclo no-degenerado β. Sea $\Lambda:\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ el 2-tensor definido por:*

$$\Lambda(\xi;\eta)=\langle\eta\,;\widetilde{\Lambda}(\xi)\rangle\,;\quad \textit{para todo}\quad \xi,\eta\in\mathfrak{g}^*\,, \tag{d}$$

donde $\widetilde{\Lambda}=(\tilde{\beta})^{-1}$ (en componentes: $\Lambda^{ab}\beta_{cb}=\delta^a_c$). La ley de composición $*$, definida en (c), *se escribe así:*

$$(\varphi_1*\varphi_2)(\xi)=\left(\frac{2}{\hbar}\right)^{2n}\frac{1}{\det\beta}\int e^{\frac{4\pi i}{\hbar}\Lambda(\xi-\eta\,;\,\xi-\zeta)}\varphi_1(\eta)\varphi_2(\zeta)\,d\eta\,d\zeta\,. \tag{e}$$

Prueba En efecto, si en (c):

$$(\varphi_1*\varphi_2)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i\xi(y)}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i\xi(x)-\pi i\hbar\beta(x;y)}(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)\,dx\right)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\,dy\,,$$

desarrollamos la transformada de Fourier de la integral entre paréntesis, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}}&e^{-2\pi i\xi(x)}e^{-\pi i\hbar\beta(x;y)}(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)\,dx=\\&=\int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i\left(\xi(x)-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)\cdot x\right)}e^{2\pi i\eta(x)}\varphi_1(\eta)\,d\eta\,dx=\\&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i(\xi-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)-\eta)\cdot x}\,dx\right)\varphi_1(\eta)\,d\eta=\\&=\varphi_1\left(\xi-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)\right)\,,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\varphi_1*\varphi_2)(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i\xi(y)}\varphi_1\left(\xi-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)\right)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}}e^{-2\pi i(\xi-\zeta)(y)}\varphi_1\left(\xi-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)\right)\varphi_2(\zeta)\,dy\,d\zeta\,.\end{aligned}$$

Haciendo, ahora, el cambio de variable

$$\eta=\xi-\frac{\hbar}{2}\tilde{\beta}(y)\,;\qquad y=\frac{2}{\hbar}\widetilde{\Lambda}(\xi-\eta)\,;\qquad d\eta=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2n}(\det\tilde{\beta})\,dy\,.$$

se llega al resultado de la proposición. ∎

A partir de (e), mediante el cambio en el parámetro de deformación $\hat{\hbar}=\hbar/2\pi$ y la expresión del tensor de Poisson Λ en términos de la forma simpléctica β, se llega a la fórmula del producto estrella de Moyal dada en la introducción de la Sección 4.1.

Proposición 1.5 *La ley de composición* (c) *es invariante por* $\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{\mathfrak{g}})$ *es decir:*

$$(\varphi_1 * \varphi_2) \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z) = \big(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big) * \big(\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big)$$

para todo $z \in \mathfrak{g}$.

Prueba

$$\begin{aligned}&\big(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big) * \big(\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big)(\xi) = \\ &= \int e^{-2\pi i\xi(x+y)} e^{-\pi i\hbar\beta(x;y)} \big(\overline{\mathcal{F}}(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z)\big)(x) \big(\overline{\mathcal{F}}(\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z)\big)(y)\, dx\, dy\,.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\big(\overline{\mathcal{F}}(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z)\big)(x) &= \int e^{2\pi i\eta(x)} \big(\varphi \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big)(\eta)\, d\eta = \\ &= \int e^{2\pi i\eta(x)} \varphi(\eta - \tilde{\beta}(z))\, d\eta = \int e^{2\pi i\eta(x)} \varphi(\eta')\, d\eta' = \\ &= e^{2\pi i\tilde{\beta}(z)(x)} \int e^{2\pi i\eta'(x)} \varphi(\eta')\, d\eta' = e^{2\pi i\tilde{\beta}(z)(x)} \left(\overline{\mathcal{F}}\varphi\right)(x)\,. \end{aligned} \tag{d}$$

Así pues:

$$\begin{aligned}&\big(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big) * \big(\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\big)(\xi) = \\ &= \int e^{-2\pi i(\xi - \tilde{\beta}(z) + \mathrm{E}^*)\frac{1}{\hbar}\bar{\gamma}(\hbar x;\hbar y)} \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x) \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy = \\ &= (\varphi_1 * \varphi_2)\big(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)(\xi)\big)\,.\end{aligned}$$

■

Toda función sobre sobre el grupo $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ es de la forma $\psi = \varphi \circ \mathcal{K}$, siendo φ una función sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ y $\mathcal{K} : G \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ el difeomorfismo definido en la Proposición 1.1:

$$\mathcal{K}(\exp x) = \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x) \cdot \mathrm{E}^* \equiv -\tilde{\beta}(x) + \mathrm{E}^*\,.$$

Utilizando las coordenadas sobre $\mathbb{R}^{2n}$ dadas por la carta exponencial (es decir, la identidad) y definiendo, para funciones $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(G;\mathbb{C})$ convenientes,

$$(\psi_1 \hat{*} \psi_2)(z) = \big((\psi_1 \circ \mathcal{K}^{-1}) * (\psi_2 \circ \mathcal{K}^{-1})\big)\big(\mathcal{K}(z)\big)\,,$$

se tiene la ley de composición:

$$(\psi_1 \hat{*} \psi_2)(z) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{2n} (\det \beta) \int e^{\frac{4\pi i}{\hbar}\beta(z-x;z-y)} \psi_1(x)\psi_2(y)\, dx\, dy \tag{e}$$

Proposición 1.6 *La expresión* (e) *define una ley de composición asociativa en espacios funcionales adecuados sobre el grupo* $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$.

Esta ley es invariante por traslación a la izquierda:

$$(\psi_1 \hat{*} \psi_2) \circ \lambda_{\exp z} = \left(\psi_1 \circ \lambda_{\exp z}\right) * \left(\psi_2 \circ \lambda_{\exp z}\right)\,,$$

donde $z \in \mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ *y* $\lambda_{\exp z} \cdot x = x + z$.

Prueba La propiedad asociativa de $\hat{*}$ es consecuencia directa de la asociatividad de la ley de composición $*$ definida por la expresión (b) sobre la orbita coadjunta de E^*.

La traslación a la izquierda definida por el elemento $\exp z \equiv z$ sobre $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$ es la transformación $x \longrightarrow \lambda_{\exp z} x = x + z$ y un cálculo sencillo demuestra la invariancia directamente a partir de la definión de $\hat{*}$.

Sin embargo, resulta interesante advertir que esta propiedad está en relación directa con la invariancia, por la representación coadjunta del grupo $\overline{G}$, de la ley de composición $*$ sobre la orbita de E^*. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\big((\psi \hat{*} \psi_2) \circ \lambda_{\exp z}\big)(x) = (\psi_1 \hat{*} \psi_2)(\lambda \exp z \cdot x) = \\
&= \big((\psi_1 \circ \mathcal{K}^{-1}) * (\psi_2 \circ \mathcal{K}^{-1})\big)\big(\mathcal{K} \circ \lambda_{\exp z}(x)\big) = \\
&= \big((\psi_1 \circ \mathcal{K}^{-1}) * (\psi_2 \circ \mathcal{K}^{-1})\big)\,\big(\,\overline{\mathrm{Ad}}^* \,\overline{\exp}\, z \circ \mathcal{K}\big)(x) = \\
&= \big((\psi_1 \circ \mathcal{K}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^* \,\overline{\exp}\, z) * (\psi_2 \circ \mathcal{K}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^* \,\overline{\exp}\, z)\big)(\mathcal{K}(x)) = \\
&= \big((\psi_1 \circ \lambda_{\exp z} \circ \mathcal{K}^{-1}) * (\psi_2 \circ \lambda_{\exp z} \circ \mathcal{K}^{-1})\big)(\mathcal{K}(x)) = \\
&= \big((\psi_1 \circ \lambda_{\exp z}) \hat{*} (\psi_2 \circ \lambda_{\exp z})\big)(x)\,.
\end{aligned}$$

■

4.1.3 Ley de Composición Asociativa sobre $C^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})[[\hbar]]$

Teniendo en cuenta la expresión (c) de 4.1.2, la ley de composición:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i \left\langle (\xi + \mathrm{E}^*)\,;\, \hbar^{-1} \overline{\gamma}(\hbar x; \hbar y)\right\rangle} \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy\,,$$

se puede desarrollar formalmente en serie de potencias de $\hbar$.

De esta forma, quedan definidos los operadores

$$P_R(\varphi_1; \varphi_2)(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi (x+y)} \frac{(-\pi i)^R}{R!} \beta(x; y)^R \big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\, dx\, dy\,, \tag{a}$$

para $R \geq 1$. Para $R = 0$, $P_0(\varphi_1; \varphi_2)(\xi) = \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)$ claramente.

Lema 1.1 *Los operadores $P_R(\varphi_1; \varphi_2)$ son operadores bidiferenciales homogéneos con coeficientes constantes, de grado R en cada argumento, dados por las expresiones:*

$$P_R(\varphi_1; \varphi_2)(\xi) = \frac{(-\pi i)^R}{R!} \beta\Big(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \eta}\,;\, \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big)^R (\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Big|_{\substack{\eta = \xi \\ \zeta = \xi}}\,.$$

Prueba Es consecuencia de la aplicación reiterada de

$$\int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i (\xi - \eta)(x)} x_i \varphi(\eta)\, dx\, d\eta = \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i}\Big|_{\eta = \xi}\,.$$

■

Si φ_1, φ_2 polinomios en las componentes de $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $P_R(\varphi_1; \varphi_2)$ es también un polinomio y, si R es suficientemente grande, claramente $P_R(\varphi_1; \varphi_2) = 0$.

Proposición 1.7 *La ley de composición*

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \sum_{R\geq 1} P_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R\,, \tag{b}$$

define una deformación asociativa, unitaria, del producto de funciones polinómicas con variables en $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, es decir,

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) \triangleright \varphi_3 = \varphi_1 \triangleright (\varphi_2 \triangleright \varphi_3)\,; \qquad \varphi_1 \triangleright 1 = \varphi_1 = 1 \triangleright \varphi_1\,.$$

Prueba Si φ_1 y φ_2 son polinomios, la suma $\sum_{R\geq 1} P_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R$ es finita. Por tanto, $\varphi_1 \triangleright \varphi_2$ coincide con el valor de $\varphi_1 * \varphi_2$ dado por la expresión integral (c) de 4.1.2, considerada ésta en el contexto de las distribuciones. De forma que la propiedad asociativa de $\triangleright$ es consecuencia de la asociatividad de $*$, que a su vez está basada en la propiedad asociativa de la ley del grupo formal de Campbell-Hausdorff, $\bar{\gamma}$, del álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}$.

El hecho de que los operadores bidiferenciales P_R ($R > 0$) no tengan términos de grado cero implica que, si alguna de las funciones φ_1, φ_2 es constante, entonces $P_R(\varphi_1;\varphi_2) = 0$, por lo que $\varphi \triangleright 1 = \varphi = 1 \triangleright \varphi$. ∎

Proposición 1.8 *El espacio $C^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})[[\hbar]]$ dotado de la ley de composición $\triangleright$, definida en* (b)*, es un álgebra asociativa con unidad. Esto es, para todo $T \geq 0$,*

$$\sum_{R+S=T} P_R\big(P_S(\varphi_1;\varphi_2)\,;\varphi_3\big) = \sum_{R+S=T} P_R\big(\varphi_1\,;\,P_S(\varphi_1;\varphi_2)\big)$$
$$1 \triangleright \varphi_1 = \varphi_1 \triangleright 1 = \varphi_1\,,$$

donde

$$P_0(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2)\,(\xi)\,,$$
$$P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^R \frac{1}{R!}\,\beta(\partial_\eta;\partial_\zeta)^R(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}\,; \qquad R \geq 1\,.$$

Prueba Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})$. Consideremos los desarrollos de Taylor en el punto ξ_0:

$$\varphi_i(\xi) = p_i(\xi - \xi_0) + r_i(\xi;\xi_0)\,; \quad i = 1,2,3\,,$$

(p_i son polinomios) y la expresión

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) \triangleright \varphi_3 &= \sum_{K\geq 0} (P_K(\varphi_1;\varphi_2) \triangleright \varphi_3)\,\hbar^K = \\ &= \sum_{\substack{K\geq 0\\ L\geq 0}} \big(P_L(P_K(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3)\,\hbar^L\big)\hbar^K = \\ &= \sum_{S\geq 0}\left(\sum_{K+L=S} P_L\big(P_K(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big)\right)\hbar^S\,.\end{aligned}$$

Para cada S fijo,

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(P_K(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big)(\xi_0)$$

claramente depende sólo de los polinomios p_i, y es por lo tanto igual a

$$\sum_{K+L=S} P_L(P_K(p_1;p_2)\,;\,p_3)(\xi_0)\,. \tag{c}$$

De la misma forma

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(\varphi_1\,;\,P_K(\varphi_2;\varphi_3)\big)(\xi_0)\,,$$

es igual a

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(p_1\,;\,P_K(p_2;p_3)\big)(\xi_0)\,. \tag{d}$$

Ahora bien, por la Proposición 1.7, las expresiones (c) y (d) coinciden. ∎

Proposición 1.9 *La ley de composición*

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) + \sum_{R\geq 1} P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R\,,$$

es invariante por $\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z$ *para todo* $z \in \mathfrak{g}$.

Prueba Teniendo en cuenta la igualdad (d) de 4.1.2:

$$\Big(\overline{\mathcal{F}}(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z)\Big)(x) = e^{2\pi i\bar{\beta}(z)(x)}\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\,,$$

a partir de la expresión integral (a) de P_R, se tiene:

$$\begin{aligned}
&P_R\big(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z\,;\,\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z\big)(\xi) = \\
&= \int e^{-2\pi i\left(\xi(x+y)-\bar{\beta}(z)(x+y)\right)}\,\frac{(-\pi i)^R}{R!}\,\beta(x;y)^R\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy = \\
&= P_R(\varphi_1;\varphi_2)\big(\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z(\xi)\big)\,.
\end{aligned}$$

∎

Teorema 1.1 *Sea* $\overline{G}$ *el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\times_\beta \mathbb{R}\,\mathrm{E}$, *extensión central de* $\mathfrak{g}$ *por el cociclo* β. *Sea* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ *la orbita de* E^* *por la representación coadjunta de* $\overline{G}$ *y* φ_1, φ_2 *funciones reales definidas sobre* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$. *Entonces:*

(1) *La expresión*

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\xi) + \sum_{R\geq 1} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R\,, \tag{e}$$

donde

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \frac{1}{R!}\,\beta(\partial_\eta;\partial_\zeta)^R(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}\,, \tag{f}$$

define una ley de composición asociativa con unidad sobre el espacio vectorial real $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})[[\hbar]]$ *de las series de potencias en* $\hbar$ *con coeficientes en* $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*})$.

Los operadores Q_R *son operadores bidiferenciales con coeficientes constantes, de grado* R *en cada argumento y sin términos de grado cero.*

(2) *Esta ley de composición es invariante por la representación coadjunta de* $\overline{G}$.

Prueba

(1) La ley de composición

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\xi) + \sum_{R\geq 1} P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R$$

donde

$$P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^R \frac{1}{R!}\beta(\partial_\eta;\partial_\zeta)^R(\varphi_1\otimes\varphi_2)\big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}},$$

y φ_1, φ_2 son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas sobre la orbita con valores complejos, satisface la propiedad asociativa. Es decir, la expresión:

$$\begin{aligned}&((\varphi_1 \triangleright \varphi_2) \triangleright \varphi_3)(\xi) = \\ &= \sum_{R\geq 0}\left(\sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S}\frac{1}{T!}\beta(\partial_\xi;\partial_\xi)^T\left((\frac{1}{S!}\beta(\partial_\xi;\partial_\xi)^S(\varphi_1\otimes\varphi_2))\otimes\varphi_3\right)\right)\hbar^R\end{aligned}$$

es igual a

$$\begin{aligned}&(\varphi_1 \triangleright (\varphi_2 \triangleright \varphi_3)) = \\ &= \sum_{R\geq 0}\left(\sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S}\frac{1}{T!}\beta(\partial_\xi;\partial_\xi)^T\left(\varphi_1\otimes\frac{1}{S!}\beta(\partial_\xi;\partial_\xi)(\varphi_2\otimes\varphi_3)\right)\right)\hbar^R.\end{aligned}$$

Entonces, para cada $R \geq 1$,

$$\sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S} Q_S\big(Q_T(\varphi_1;\varphi_2);\varphi_3\big) = \sum_{T+S=R}\left(\frac{-1}{4\pi i}\right)^{T+S} Q_S\big(\varphi_1;Q_T(\varphi_2;\varphi_3)\big).$$

Pero en todos los términos de las sumas el coeficiente $(-1/(4\pi i))^{T+S}$ es el mismo, por lo que

$$\sum_{T+S=R} Q_S\big(Q_T(\varphi_1;\varphi_2);\varphi_3\big) = \sum_{T+S=R} Q_S\big(\varphi_1;Q_T(\varphi_2;\varphi_3)\big),$$

que es la condición, término a término, para que la ley de composición

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2) + \sum_{R\geq 0} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar^R,$$

satisfaga la propiedad asociativa.

Por otra parte, si φ_1, φ_2 son funciones reales sobre la orbita, la función $Q_R(\varphi_1;\varphi_2)$ es real, de forma que $*$ es un producto estrella.

(2) Hay que comprobar que

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)\big(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\cdot\xi\big) = \frac{1}{R!}\,\beta(\partial_\eta;\partial_\zeta)^R(\varphi_1\otimes\varphi_2)\big|_{\substack{\eta=\xi-\tilde\beta(z)\\ \zeta=\xi-\tilde\beta(z)}},$$

es igual a:

$$\begin{aligned}&Q_R\big(\varphi_1\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z);\varphi_2\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\big)(\xi) = \\ &\qquad = \frac{1}{R!}\,\beta\big(\partial_\eta;\partial_\zeta\big)^R\big(\varphi_1\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\otimes\varphi_2\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\big)\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \zeta=\xi}}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como la acción coadjunta de $\overline{G}$ es la transformación afín:

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)(\eta + \mathrm{E}^*) = \eta - \tilde{\beta}(z) + \mathrm{E}^* .$$

se tiene:

$$\frac{\partial^k}{\partial_{\eta_{i_1}} \cdots \partial_{\eta_{i_k}}}(\varphi \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z))\Big|_{\eta=\xi} = \frac{\partial^k}{\partial_{\eta_{i_1}} \cdots \partial_{\eta_{i_k}}}(\varphi)\Big|_{\eta=\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\cdot\xi}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\beta(\partial_\eta;\partial_\varsigma)^R(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z) \otimes \varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z))\Big|_{\substack{\eta=\xi\\ \varsigma=\xi}} &= \\ &= \beta(\partial_\eta;\partial_\varsigma)^R(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Big|_{\substack{\eta=\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\cdot\xi\\ \varsigma=\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z)\cdot\xi}} .\end{aligned}$$

∎

4.1.4 Producto Estrella Definido por el Cociclo β sobre el Grupo $\mathbb{R}^{2n}$

Recordemos, que al ser la 2-forma sobre $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^{2n}$, β, no-degenerada, el homomorfismo $\tilde{\beta} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ asociado (expresión (c) de 4.1.1) es un isomorfismo. Entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} G \equiv \mathbb{R}^{2n} &\xrightarrow{\mathcal{K}} \overline{G}\cdot \mathrm{E}^* \equiv \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\ \exp x &\longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x)\, \mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}(x) + \mathrm{E}^* ,\end{aligned}$$

es un difeomorfismo (Proposición 1.1 de 4.1.2).

Mediante este difeomorfismo el producto estrella sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, definido en (e) de 4.1.3, se puede trasladar al grupo G.

Proposición 1.10 *Sea $\widetilde{\Lambda} = -\tilde{\beta}^{-1}$ y Λ el 2-tensor contravariante asociado a $\widetilde{\Lambda}$. La expresión*

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = (\psi_1 \cdot \psi_2)(x) + \sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)\, \hbar^R$$

donde

$$\begin{aligned} G_R(\psi_1;\psi_2) &= \frac{1}{R!}\beta\left(\widetilde{\Lambda}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big);\widetilde{\Lambda}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right)^R(\psi_1 \otimes \psi_2) = \\ &= \frac{1}{R!}\Lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial x}\Big)^R(\psi_1\otimes\psi_2) ,\end{aligned}$$

y ψ_1, ψ_2 son funciones sobre el grupo $G \equiv \mathbb{R}^{2n}$, define un producto estrella sobre G, invariante por traslaciones a la izquierda.

Prueba

(1) El producto estrella sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$, dado por la expresión (e) de 4.1.3:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\xi) + \sum_{R\geq 1} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\, \hbar^R ,$$

donde

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \frac{1}{R!}\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^R(\varphi_1\otimes\varphi_2)\,,$$

define sobre $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{G})[[\hbar]]$ la siguiente ley de composición:

$$(\psi_1\hat{*}\psi_2) = \big((\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1})*(\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1})\big)(\mathcal{K}(x))\,.$$

Al expresarla en la forma

$$(\psi_1\hat{*}\psi_2)(x) = (\psi_1\cdot\psi_2) + \sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)(x)\,\hbar^R\,,$$

quedan definidos los operadores bidiferenciales

$$G_R(\psi_1;\psi_2)(x) = Q_R\big(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1};\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1}\big)(\mathcal{K}(x))\,.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial^k(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1})}{\partial\xi_{i_1}\cdots\partial\xi_{i_k}} = \frac{\partial^k\psi_1}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_k}}\,\Lambda^{j_1\,i_1}\cdots\Lambda^{j_k\,i_k}(-1)^k\,,$$

por tanto

$$Q_R\big(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1};\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1}\big)(\xi) = \frac{1}{R!}\beta\left(\widetilde{\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right);\widetilde{\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^R(\psi_1\otimes\psi_2)(x)\,,$$

donde $(\widetilde{\Lambda}(\partial/\partial x))^a = \Lambda^{a\,b}(\partial/\partial x^b)$.

La propiedad asociativa de los operadores bidiferenciales G_R es, entonces, consecuencia de la verificación de la misma por los operedares N_R.

(2) En cuanto a la invariancia por la acción a la izquierda de $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{G}$, es consecuencia de la conmutatividad del diagrama (Proposición 1.2):

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{G} & \xrightarrow{\ \mathcal{K}\ } & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \\ {\scriptstyle\lambda_{\exp z}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)} \\ \boldsymbol{G} & \xrightarrow[\ \mathcal{K}\ ]{} & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \end{array}$$

y de la invariancia del producto estrella sobre la orbita (expresión (e) de 4.1.3), por la acción coadjunta $\overline{\boldsymbol{G}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} &G_R\left(\psi_1;\psi_2)(\lambda_{\exp z}(x)\right) = \\ &\quad = Q_R\left(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1}\,;\,\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1}\right)\left(\mathcal{K}\circ\lambda_{\exp z}\right)(x) = \\ &\quad = Q_R\left(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1}\,;\,\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1}\right)\left(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\circ\mathcal{K}\right)(x) = \\ &\quad = Q_R\left(\psi_1\circ\mathcal{K}^{-1}\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\,;\,\psi_2\circ\mathcal{K}^{-1}\circ\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\right)\mathcal{K}(x) = \\ &\quad = Q_R\left(\psi_1\circ\lambda_{\exp z}\circ\mathcal{K}^{-1}\,;\,\psi_2\circ\lambda_{\exp z}\circ\mathcal{K}^{-1}\right)\mathcal{K}(x) = \\ &\quad = G_R\left(\psi_1\circ\lambda_{\exp z}\,;\,\psi_2\circ\lambda_{\exp z}\right)(x)\,. \end{aligned}$$

■

4.1.5 Producto Estrella Definido por el Cociclo $\beta_\hbar$ sobre el grupo $\mathbb{R}^{2n}$ con Estructura Simpléctica β_1

Sean $\beta_i : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,k$, 2-cociclos de $\mathfrak{g}\equiv\mathbb{R}^{2n}$ con respecto a la representación trivial, $\tilde{\beta}_i : \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}^*$ los homomorfismos asociados, es decir,

$$\langle\tilde{\beta}_i(x)\,;y\rangle = \beta(x;y)\,;\quad \text{para todo}\quad x,y\in\mathfrak{g}\,,$$

y t un parámetro real positivo.

Si β_1 es no-degenerada el polinomio:

$$\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\, t + \cdots + \tilde{\beta}_k\, t^k\,,$$

admite una serie formal inversa

$$\widetilde{\Lambda}_t = \sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{\Lambda}_i\, t^{i-1}\,;\qquad \widetilde{\Lambda}_i\in L(\mathfrak{g}^*;\mathfrak{g})\,,$$

dada por las expresiones:

$$\widetilde{\Lambda}_1 = \tilde{\beta}_1^{-1}\,;\qquad \widetilde{\Lambda}_{l+1} = -\widetilde{\Lambda}_1\cdot\tilde{\beta}_{l+1}\cdot\widetilde{\Lambda}_1 - \widetilde{\Lambda}_1\cdot\sum_{i=2}^{l}\tilde{\beta}_i\cdot\widetilde{\Lambda}_{l+2-i}\,.$$

Se satisface, por tanto,

$$\tilde{\beta}_t\circ\widetilde{\Lambda}_t = 1_{\mathfrak{g}^*}\,;\qquad \widetilde{\Lambda}_t\circ\tilde{\beta}_t = 1_{\mathfrak{g}}\,.$$

Para cada t, el cociclo sobre $\mathfrak{g}$:

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\, t + \cdots + \beta_k\, t^{k-1}\,,$$

define una extensión central de $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}_t$. Si $\overline{G}_t$ es el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$, se tiene (Proposición 1.10 de 4.1.4) un producto estrella sobre la variedad simpléctica $(\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*};\beta_t)$:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{R\geq 1} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\epsilon^R\,,$$

donde $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ es la orbita de E^* por la representación coadjunta de $\overline{G}_t$ y donde los operadores bidiferenciales Q_R vienen dados por las expresiones:

$$Q_R(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \frac{1}{R!}\beta_t\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^R(\varphi_1\otimes\varphi_2)\,.$$

Si t es suficientemente pequeño, la serie inversa de $\tilde{\beta}$ converge. Por tanto, $\tilde{\beta}_t$ define una estructura simpléctica invariante sobre el grupo $G\equiv\mathbb{R}^{2n}$. Entonces, mediante el difeomorfismo

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}\equiv\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\ \exp x &\longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x)\mathrm{E}^* = -\tilde{\beta}_t(x) + \mathrm{E}^*\,, \end{aligned}$$

el producto estrella definido sobre la orbita se puede trasladar al grupo G.

Para diferentes cociclos β_t con las condiciones anteriores, se tienen diferentes extensiones del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y productos estrella sobre grupo G con diferentes estructuras simplécticas β_t.

La importancia del teorema siguiente consiste en que, haciendo uso de cociclos con la forma β_t, mediante identificación del parámetro t y el parámetro de deformación $\hbar$, se obtienen diferentes productos estrella sobre el mismo grupo simpléctico $(G;\beta_1)$.

Teorema 1.2 *Sea*

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \beta_3\,\hbar^2 + \cdots + \beta_k\,\hbar^{k-1}$$

un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$ *con respecto a la representación trivial sobre* $\mathbb{R}$*, tal que* β_1 *es no-degenerado. Sea* $\tilde{\beta}_\hbar \in L(\mathfrak{g};\mathfrak{g}^*)$ *el isomorfismo asociado a* $\beta_\hbar$ *(para* $\hbar$ *suficientemente pequeño) y* $\widetilde{\Lambda}_\hbar$ *la serie inversa de* $\tilde{\beta}_\hbar$*. Entonces, la expresión*

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = (\psi_1 \cdot \psi_2)(x) + \sum_{S\geq 1} F_S(\psi_1;\psi_2)(x)\,\hbar^S\,.$$

donde los operadores bidiferenciales $F_S(\psi_1;\psi_2)$ *vienen dados por*

$$F_S(\psi_1;\psi_2)(x) = \sum_{R=1}^{S}\left(\sum_{\substack{\frac{L}{k}\leq R\leq L,P,Q\\ P+Q+L-2R=S}} \frac{1}{R!}\left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_R=L\\ i_1,\dots,i_R\geq 1}} (\beta_{i_1})_{a_1 b_1}\cdots(\beta_{i_R})_{a_R b_R}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_R=P\\ p_1,\dots,p_R\geq 1}} (\Lambda_{p_1})^{a_1 r_1}\dots(\Lambda_{p_R})^{a_R r_R}\right)\cdot\left(\sum_{\substack{q_1+\cdots+q_R=Q\\ q_1,\dots,q_R\geq 1}} (\Lambda_{q_1})^{b_1 s_1}\dots(\Lambda_{q_R})^{b_R s_R}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial^R}{\partial x^{r_1}\dots\partial x^{r_R}}\otimes\frac{\partial^R}{\partial x^{s_1}\dots\partial x^{s_R}}\right)(\psi_1\otimes\psi_2)\right)\,,$$

es un producto estrella invariante sobre $(G;\beta_1)$.

Prueba

(1) Sea

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\,t + \beta_3\,t^2 + \cdots + \beta_k\,t^{k-1}\,,$$

y

$$(\psi_1\hat{*}\psi_2)(x) = (\psi_1\cdot\psi_2)(x) + \sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)\,\epsilon^R\,,$$

la ley de composición sobre $\mathcal{C}^\infty(G)[[\epsilon]]$ definida en la Proposición 1.10 de 4.1.4 por el cociclo β_t, con t suficientemente pequeño. Los operadores $G_R(\psi_1;\psi_2)$ son

$$G_R(\psi_1;\psi_2)(x) = \frac{1}{R!}\left[\beta_t\left(\widetilde{\Lambda}_t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\,;\,\widetilde{\Lambda}_t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right]^R(\psi_1\otimes\psi_2)(x)\,.$$

y los operadores bidiferenciales $F_R(\psi_1;\psi_2)$ se obtienen por identificación de los parámetros t y ϵ en la ley de composición anterior. En efecto, al desarrollar los operadores $G_R(\psi_1;\psi_2)$ en potencias de t se obtiene

$$G_R(\psi_1;\psi_2) = \sum_{T\geq 0} G_{R\,T}(\psi_1;\psi_2)\,t^T\,,$$

donde

$$G_{R\,T}(\psi_1;\psi_2) = \sum_{\substack{L+P+Q-3R=T\\ \frac{L}{k}\leq R\leq L,P,Q}} \frac{1}{R!}\left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_R=L\\ i_1,\dots,i_R\geq 1}} (\beta_{i_1})_{a_1 b_1}\cdots(\beta_{i_R})_{a_R b_R}\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{\substack{p_1+\cdots+p_R=P\\ p_1,\dots,p_R\geq 1}} (\Lambda_{p_1})^{a_1 r_1}\dots(\Lambda_{p_R})^{a_R r_R}\right)\cdot\left(\sum_{\substack{q_1+\cdots+q_R=Q\\ q_1,\dots,q_R\geq 1}} (\Lambda_{q_1})^{b_1 s_1}\dots(\Lambda_{q_R})^{b_R s_R}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^R}{\partial x^{r_1}\dots\partial x^{r_R}}\otimes\frac{\partial^R}{\partial x^{s_1}\dots\partial x^{s_R}}\right)(\psi_1\otimes\psi_2)\,.$$

Entonces, haciendo $t = \epsilon = \hbar$ se tiene:

$$\sum_{R\geq 1} G_R(\psi_1;\psi_2)\,\hbar^R = \sum_{S\geq 1}\left(\sum_{\substack{R+T=S\\ R\geq 1\\ T\geq 0}}\ \sum_{\substack{L+P+Q-3R=T\\ R\leq L\leq Rk\\ R\leq P\,;\,R\leq Q}} \frac{1}{R!}(\cdots)(\cdots)(\cdots)\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^R}{\partial x^{r_1}\cdots\partial x^{r_R}}\otimes\frac{\partial^R}{\partial x^{s_1}\cdots\partial x^{s_R}}\right)(\psi_1\otimes\psi_2)\right)\hbar^S\,.$$

Ahora bien, $T = S - R$, por lo que $L + P + Q - 3R = T$ equivale a $L + P + Q - 2R = S$ y, *como el indice T no aparece en ninguna de las expresiones que hay que sumar*, la suma extendida a $R + T = S\,;\quad R\geq 1\,;\quad T\geq 0$ equivale a la suma desde $R = 1$ hasta $R = S$.

(2) Para demostrar la propiedad asociativa hay que comprobar que, para todo $M\geq 0$, se verifica

$$\sum_{\substack{R+S=M\\ R,S\geq 0}} F_R(F_S(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3) = \sum_{\substack{R+S=M\\ R,S\geq 0}} F_R\left(\psi_1\,;\,F_S(\psi_2;\psi_3)\right)\,.$$

Ahora bién,

$$F_L(\psi_1;\psi_2) = \sum_{\substack{R+T=L\\ R,T\geq 0}} G_{R\,T}(\psi_1;\psi_2)\,,$$

por tanto hay que comprobar que

$$\sum_{L+S=P}\left(\sum_{K+R=L} G_{R\,K}\left(\sum_{B+N=S} G_{B\,N}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right)\right) =$$

$$= \sum_{L+S=P}\left(\sum_{K+R=L}\left(\psi_1\,;\,\sum_{B+N=S} G_{B\,N}(\psi_2;\psi_3\right)\right)\,,$$

donde $L, S, K, R\geq 0$.

Como el único indice fijo es $P\in\mathbb{N}$, la suma extendida a las condiciones $L + S = P$, $K+R = L$ y $B+N = S$ coincide con la suma extendida a la condición $K+R+B+N = P$, entonces la igualdad anterior se puede escribir así

$$\sum_{K+R+B+N=P} G_{R\,K}\left(G_{B\,N}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right) = \sum_{K+R+B+N=P} G_{R\,K}\left(\psi_1\,;\,G_{B\,N}(\psi_2;\psi_3)\right)\,. \quad \text{(a)}$$

Pero, por hipótesis, para cada $M\geq 0$,

$$\sum_{R+S=M} G_R\left(G_S(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right) = \sum_{R+S=M} G_R\left(\psi_1\,;\,G_S(\psi_2;\psi_3)\right)\,,$$

es decir, para todo $t\in\mathbb{R}$ en un entorno de cero y todo $M\geq 0$,

$$\sum_{R+S=M}\ \sum_{T_1\geq 0} G_{R\,T_1}\left(\sum_{T_2\geq 0} G_{S\,T_2}(\psi_1;\psi_2)\,t^{T_2}\,;\,\psi_3\right)t^{T_1} =$$

$$= \sum_{R+S=M}\ \sum_{T_1\geq 0} G_{R\,T_1}\left(\psi_1\,;\,\sum_{T_2\geq 0} G_{S\,T_2}(\psi_2;\psi_3)\,t^{T_2}\right)t^{T_1}\,,$$

o bien, para cada $M \geq 0$ y cada $T \geq 0$

$$\sum_{\substack{R+S=M \\ T_1+T_2=T}} G_{RT_1}\left(G_{ST_2}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\right) = \sum_{\substack{R+S=M \\ T_1+T_2=T}} G_{RT_1}\left(\psi_1\,;\,G_{ST_2}(\psi_2;\psi_3)\right) .$$

Pero si se descompone $P = M + T$ de todas las formas posibles con $M, T \in \mathbb{N}$, sumando las igualdades de la forma anterior correspondientes a cada una de las descomposiciones, se obtiene (a), lo que se quería demostrar.

(3) Los operadores bidiferenciales $F_R(\psi_1;\psi_2)$ son nulos sobre las constantes, es decir,

$$F_R(\psi;1) = F_R(1;\psi) = 0\,, \qquad R \geq 0\,, \quad \psi \in C^\infty(G)\,,$$

ya que los operadores $G_S(\psi_1;\psi_2)$ lo son.

(4) La invariancia por traslaciones a la izquierda del producto estrella es consecuencia de la invariancia de los operadores $G_R(\psi_1;\psi_2)$. ∎

Como veremos en el caso general, para estudiar la equivalencia de los productos estrella invariantes que se pueden definir sobre un grupo de Lie G con estructura simpléctica invariante β_1, resulta conveniente analizar la intervención de los distintos cociclos β_i en el operador bidiferencial F_R. El resultado lo anticipamos a continuación en este caso $G = \mathbb{R}^{2n}$.

En el operador bidiferencial F_S no intervienen los β_M con $M > S$. En efecto, supongamos que en F_S interviniera un β_{i_l} con $i_l = M$, o bien un Λ_{p_l} con $p_l = M$, o bien un Λ_{q_l} con $q_l = M$, donde $M > S$. Por una parte se tiene $i_l \leq L$, $p_l \leq P$ y $q_l \leq Q$. Por otra, como $P + Q + L - 2R = S$ y $P, Q, L \geq R$, tendriamos $L, P, Q \leq S$. Así pues, se llegaría a la contradicción $S < M = i_l \leq L \leq S$ o bien $S < M = p_l \leq P \leq S$ o bien $S < M = q_l \leq Q \leq S$.

En el operador F_S sólo existe un término en el que intervenga β_S. Es el término de orden de diferenciabilidad mínimo:

$$(\Lambda_S)^{r_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) = -\,(\beta_S)_{a_1 b_1}\,(\Lambda_1)^{a_1 r_1}\,(\Lambda_1)^{b_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) .$$

En efecto, β_S sólo puede intervenir si en las sumas existe $i_l = S$ o bien $p_l = S$ o bien $q_l = S$. En el primer caso

$$i_1 + \cdots + i_{l-1} + S + i_{l+1} + \cdots + i_R = L\,,$$

por lo tanto $L \geq S + R - 1$ y entonces $P + Q = S - L + 2R \leq R + 1$. Pero como $P \geq R$ y $Q \geq R$, se tiene $P + Q \geq 2R$. Las dos condiciones implican $2R \leq R + 1$, es decir $R = 1$ y por lo tanto $P + Q = 2$. El término correspondiente es pues de la forma:

$$\frac{1}{1!}(\beta_S)_{a_1 b_1}(\Lambda_1)^{a_1 r_1}(\Lambda_1)^{b_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) =$$
$$= \left(-\,(\Lambda_S)^{r_1 s_1} + T^{r_1 s_1}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{S-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{S-1})\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) .$$

En el segundo caso, se tiene $R = 1$, $P = S$ y $Q + L = 2$, por lo que el término en el que interviene β_S es:

$$\frac{1}{1!}(\beta_1)_{a_1 b_1}(\Lambda_S)^{a_1 r_1}(\Lambda_1)^{b_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right).$$

Y finalmente, en el tercer caso, el término que contribuye con β_S es

$$\frac{1}{1!}(\beta_1)_{a_1 b_1}(\Lambda_1)^{a_1 r_1}(\Lambda_S)^{b_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right).$$

La suma de los tres es:

$$\begin{aligned}
&\Big(- (\Lambda_S)^{r_1 s_1} + (\beta_1)_{a_1 b_1}(\Lambda_S)^{a_1 r_1}(\Lambda_1)^{b_1 s_1} + \\
&\qquad + (\beta_1)_{a_1 b_1}(\Lambda_1)^{a_1 r_1}(\Lambda_S)^{b_1 s_1}\Big)\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) = \\
&= \Big(- (\Lambda_S)^{r_1 s_1} - (\Lambda_S)^{s_1 r_1} + (\Lambda_S)^{r_1 s_1}\Big)\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right) = \\
&= (\Lambda_S)^{r_1 s_1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{r_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial z^{s_1}}\right).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$(\Lambda_S)^{r_1 s_1} = (\Lambda_1)^{r_1 k_1}(\beta_S)_{k_1 j_1}(\Lambda_1)^{j_1 s_1} - \Big(\Lambda_1 \sum_{i=2}^{S-1} \beta_i \Lambda_{S+1-i}\Big)^{r_1 s_1},$$

β_S interviene en el operador F_S en el término: $(\Lambda_1)^{r_1 k_1}(\beta_S)_{k_1 j_1}(\Lambda_1)^{j_1 s_1} = -(\mu^{-1}(\beta_S))$, donde $\mu^{-1}(\beta_S)$ es el 2-cociclo de Poisson invariante correspondiente al 2-cociclo de de Rham invariante β_S (ver Sección 1.2.3)

Finalmente un comentario sobre el término de grado mas alto de diferenciabilidad. Este es el que se obtiene para $R = S$, es decir, $P = Q = L = R = S$ con lo que

$$i_1 = \cdots = i_S = p_1 = \cdots = p_S = q_1 = \cdots = q_S = 1.$$

Por lo tanto, es:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S!}(\beta_1)_{a_1 b_1}\cdots(\beta_1)_{a_S b_S}\cdot(\Lambda_1)^{a_1 r_1}\cdots(\Lambda_1)^{a_S r_S}\cdot \\
&\qquad \cdot(\Lambda_1)^{b_1 s_1}\cdots(\Lambda_1)^{b_S s_S}\cdot\left(\frac{\partial^S}{\partial y^{r_1}\cdots\partial y^{r_S}} \otimes \frac{\partial^S}{\partial z^{r_1}\cdots\partial z^{s_S}}\right) = \\
&= \frac{1}{S!}(\Lambda_1)^{r_1 s_1}\cdots(\Lambda_1)^{r_S s_S}\left(\frac{\partial^S}{\partial y^{r_1}\cdots\partial y^{r_S}} \otimes \frac{\partial^S}{\partial z^{r_1}\cdots\partial z^{s_S}}\right),
\end{aligned}$$

es decir, es la potencia S-ésima de 2-tensor de Poisson. Así, en el caso de que $\beta_h = \beta_1$, la expresión que se obtiene en el Teorema 1.2 es la expresión clásica del producto estrella de Moyal.

4.2 Productos Estrella Invariantes sobre un Grupo de Lie con Estructura Simpléctica Invariante

4.2.1 La Extensión Central $\bar{\mathfrak{g}}_t \equiv \mathfrak{g} \times_{\beta_t} \mathbb{R}\,\mathrm{E}$. La Serie de Hausdorff de $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}_t$

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dotado de una estructura simpléctica $\Omega \in \wedge_2(G)$, invariante por la izquierda, definida por $\beta_1 \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$. El tensor de Poisson asociado a la estructura simpléctica es también invariante por la izquierda (ver Teorema 2.5 de 1.2.4). Si $\Lambda_1 \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es el elemento que lo define, se tiene (ver sección 1.2.3):

$$\Lambda_1^{a\,b}(\beta_1)_{c\,b} = \delta_c^a .$$

Denotemos por

$$\tilde{\beta}_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^* ; \quad \widetilde{\Lambda}_1 : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$$

a los isomorfismos asociados a β_1 y Λ_1, definidos por las relaciones:

$$\langle \tilde{\beta}_1(x) \,; y \rangle = \beta_1(x; y) \,; \qquad \langle \xi \,; \widetilde{\Lambda}_1(\eta) \rangle = \Lambda_1(\xi; \eta) .$$

En componentes,

$$(\tilde{\beta}_1)_{b\,a} x^a y^b = (\beta_1)_{a\,b} x^a y^b ; \quad \xi_a \widetilde{\Lambda}_1^{a\,b} \eta_b = \Lambda_1^{a\,b} \xi_a \eta_b ,$$

es decir, $(\tilde{\beta}_1)_{a\,b} = (\beta_1)_{b\,a}$ y $\widetilde{\Lambda}_1^{a\,b} = \Lambda_1^{a\,b}$. Se tiene, por tanto, $\tilde{\beta}_1 \circ \widetilde{\Lambda}_1 = 1_{\mathfrak{g}^*}$ y $\widetilde{\Lambda}_1 \circ \tilde{\beta}_1 = 1_{\mathfrak{g}^*}$.

Sean β_i, $(i = 2, \ldots , n)$ 2-cociclos sobre $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$ y $\tilde{\beta}_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ los homomorfismos asociados:

$$\langle \tilde{\beta}_i(x) \,; y \rangle = \beta_i(x; y) . \tag{a}$$

Consideremos el polinomio en el parámetro real t:

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2 \, t + \cdots + \beta_R \, t^{R-1} ,$$

y un generador E. La condición de 2-cociclo, con respecto a la representación trivial de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$, de β_t implica que la ley de composición

$$[x + a\,\mathrm{E} \,; y + b\,\mathrm{E}]_t = [x \,; y] + \beta_t(x; y)\,\mathrm{E} ,$$

satisface la identidad de Jacobi y por tanto $\bar{\mathfrak{g}}_t = \mathfrak{g} \times_{\beta_t} \mathbb{R}\,\mathrm{E}$ es un álgebra de Lie: la extensión central de $\mathfrak{g}$ por β_t.

La representación adjunta de $\bar{\mathfrak{g}}_t$ está definida, entonces, por:

$$\overline{\mathrm{ad}}\, \bar{x} \cdot \bar{y} = \mathrm{ad}\, x \cdot y + \tilde{\beta}_t(x) \cdot y\,\mathrm{E} ,$$

para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\mathfrak{g}}_t$, siendo $\tilde{\beta}_t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ el homomorfismo siguiente:

$$\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \, t + \cdots + \tilde{\beta}_R \, t^{R-1} , \tag{b}$$

donde los $\tilde{\beta}_i$ están definidos en (a).

Los siguientes lemas serán útiles al estudiar la serie de Campbell-Hausdorff de $\bar{\mathfrak{g}}_t$.

Lema 2.1 *Sean $\bar{x} = x + a\mathrm{E}$, $\bar{y} = y + b\mathrm{E}$ y $\bar{z} = z + c\mathrm{E}$ elementos de $\bar{\mathfrak{g}}_t$. Si $r \geq 1$ y $s \geq 1$ son enteros, entonces:*

(1) $\left(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x}\right)^r \cdot \bar{z} = \left(\mathrm{ad}\,x\right)^r \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-1} \cdot z\right)\mathrm{E}$.

(2) $(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^r \cdot (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^s \cdot \bar{z} = (\mathrm{ad}\,x)^r \cdot (\mathrm{ad}\,y)^s \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-1}(\mathrm{ad}\,y)^s \cdot z\right)\mathrm{E}$.

Prueba

(1) Por inducción. Si $r = 1$ $(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x}) \cdot \bar{z} = \mathrm{ad}\,x \cdot z + \beta(x; z)\,\mathrm{E}$.

Admitiendo, para $r \geq 2$, que

$$(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{r-1} \cdot \bar{z} = (\mathrm{ad}\,x)^{r-1} \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-2} \cdot z\right)\,\mathrm{E}\,,$$

se tiene

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^r \cdot \bar{z} &= (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{r-1} \cdot \bar{z} = \\ &= \overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x}\left((\mathrm{ad}\,x)^{r-1} \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-2} \cdot z\right)\mathrm{E}\right) = \\ &= \mathrm{ad}\,x \cdot (\mathrm{ad}\,x)^{r-1} \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-1} \cdot z\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^r \cdot (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^s \cdot \bar{z} &= (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^r\left((\mathrm{ad}\,y)^s \cdot z + \beta\left(y\,;\,(\mathrm{ad}\,y)^{s-1} \cdot z\right)\mathrm{E}\right) = \\ &= (\mathrm{ad}\,x)^r(\mathrm{ad}\,y)^s \cdot z + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-1}(\mathrm{ad}\,y)^s \cdot z\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

■

Lema 2.2

(1) *Cualesquiera que sean $q_1, p_1, q_2, \ldots, p_m, q_m \geq 0$ y $p_1 \geq 1$, se tiene*

$$\begin{aligned}&(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_1} \cdot (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_1} \cdots (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_m}(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_m} \cdot \bar{z} = \\ &\quad = (\mathrm{ad}\,x)^{p_1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_m} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_m} \cdot z + \\ &\quad\quad + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{p_1-1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_m} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_m} \cdot z\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

(2) *Si $p_1 \geq 1$, $q_m = 0$, $q_1, p_2, \ldots, p_m \geq 0$ y $y = z$ se tiene*

$$\begin{aligned}&(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_1} \cdot (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_1} \cdots (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_m} \cdot \bar{y} = \\ &\quad = (\mathrm{ad}\,x)^{p_1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_m} \cdot y + \\ &\quad\quad + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{p_1-1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_m} \cdot y\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

(3) *Si $p_1 \geq 1$, $q_1, \ldots, p_{m-1}, q_{m-1} \geq 0$, $p_m = q_m = 0$ y $\bar{z} = \bar{x}$, se tiene*

$$\begin{aligned}&(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_1} \cdot (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_1} \cdots (\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_{m-1}} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_{m-1}} \cdot \bar{x} = \\ &\quad = (\mathrm{ad}\,x)^{p_1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_{m-1}} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_{m-1}} \cdot x + \\ &\quad\quad + \beta\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{p_1-1} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_1} \cdots (\mathrm{ad}\,x)^{p_{m-1}} \cdot (\mathrm{ad}\,y)^{q_{m-1}} \cdot x\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

(4) *Expresiones análogas para $p_1 = 0$, $q_1 \geq 1$.*

Prueba Cálculo directo a partir de Lema 2.1. ■

Denotaremos por $\overline{G}_t$ al grupo de Lie simplemente conexo de álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$ y por $\overline{\exp} : \bar{\mathfrak{g}}_t \longrightarrow \overline{G}_t$ a la aplicación exponencial de $\overline{G}_t$.

Proposición 2.1

(1) *La acción adjunta de $\overline{G}_t$ viene dada por la expresión:*

$$\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}\,\bar{x})\cdot\bar{y}=\mathrm{Ad}(\exp x)\cdot y+(b+\tilde{\beta}_t(x)\circ A(x)\cdot y)\,\mathrm{E}\,,$$

para todo $\bar{x}=x+a\,\mathrm{E}$, $\bar{y}=y+b\,\mathrm{E}\in\bar{\mathfrak{g}}$, donde

$$A(x)=\frac{\exp(\mathrm{ad}\,x)-I}{\mathrm{ad}\,x}\,, \tag{c}$$

es decir,

$$A(x)=\sum_1^\infty\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{p-1}}{p!}=I+\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}\,x+\frac{1}{6}(\mathrm{ad}\,x)^2+\cdots.$$

(2) *La acción coadjunta de $\overline{G}_t$ viene dada por la expresión:*

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}(x+a\,\mathrm{E})\right)\cdot(\xi+u\,\mathrm{E}^*)=\mathrm{Ad}^*(\exp x)\cdot\xi+uf_{\beta_t}(-x)+u\,\mathrm{E}^*\,, \tag{d}$$

para todo $\xi+u\,\mathrm{E}^*\in\bar{\mathfrak{g}}^*$, siendo

$$f_{\beta_t}(x)=\tilde{\beta}_t(x)\circ A(x)\in\mathfrak{g}^*\,, \tag{e}$$

donde $\tilde{\beta}_t$ está definido en (b).

Prueba

(1) En efecto, sean $\bar{x}=x+a\,\mathrm{E}$, $\bar{y}=y+b\,\mathrm{E}$, se tiene

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ad}}\,\overline{\exp}(x+a\,\mathrm{E})\cdot(y+b\,\mathrm{E})&=\exp(\overline{\mathrm{ad}}(x+a\,\mathrm{E}))\cdot(y+b\,\mathrm{E})=\\&=\left(1+\sum_1^\infty\frac{\overline{\mathrm{ad}}(x+a\,\mathrm{E})^p}{p!}\right)(y+b\,\mathrm{E})\,,\end{aligned}$$

pero, por el Lema 2.1,

$$(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^r\cdot\bar{y}=(\mathrm{ad}\,x)^r\cdot y+\beta_t\left(x\,;\,(\mathrm{ad}\,x)^{r-1}\cdot y\right)\,\mathrm{E}\,,$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ad}}\,\overline{\exp}(x+a\,\mathrm{E})\cdot(y+b\,\mathrm{E})&=y+b\,\mathrm{E}+\sum_1^\infty\frac{(\mathrm{ad}\,x)^p\cdot y+(\tilde{\beta}_t(x)\cdot(\mathrm{ad}\,x)^{p-1}\cdot y)\,\mathrm{E}}{p!}=\\&=\exp(\mathrm{ad}\,x)\cdot y+\left(b+\beta_t\left(x\,;\,\sum_1^\infty\frac{(\mathrm{ad}\,x)^{p-1}\cdot y}{p!}\right)\right)\mathrm{E}=\\&=\mathrm{Ad}(\exp x)\cdot y+\left(b+\beta_t\left(x\,;\,\frac{\exp(\mathrm{ad}\,x)-I}{\mathrm{ad}\,x}\cdot y\right)\right)\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

(2) El siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\left\langle\,\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{x})\cdot(\xi+u\,\mathrm{E}^*)\,;\bar{y}\right\rangle&=\left\langle\xi+u\,\mathrm{E}^*\,;\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-\bar{x}))\cdot\bar{y}\right\rangle=\\&=\left\langle\xi+u\,\mathrm{E}^*\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-x))\cdot y+(b+\tilde{\beta}_t(-x)\circ A(-x)\cdot y)\,\mathrm{E}\right\rangle=\\&=\left\langle\xi\,;\mathrm{Ad}(\exp(-x))\cdot y\right\rangle+\left\langle u\,\mathrm{E}^*\,;(b+\tilde{\beta}_t(-x)\circ A(-x)\cdot y)\,\mathrm{E}\right\rangle=\\&=\left\langle\,\mathrm{Ad}^*(\exp x)\cdot\xi\,;y\right\rangle+ub+u\big(\tilde{\beta}_t(-x)\circ A(-x)\cdot y\big)=\\&=\left\langle\,\mathrm{Ad}^*(\exp x)\cdot\xi\,;y\right\rangle+\left\langle u\tilde{\beta}_t(-x)\circ A(-x)\,;y\right\rangle+\left\langle u\,\mathrm{E}^*\,;b\,\mathrm{E}\right\rangle=\\&=\left\langle\,\mathrm{Ad}^*(\exp x)\cdot\xi+u\tilde{\beta}_t(-x)\circ A(-x)+u\,\mathrm{E}^*\,;\bar{y}\right\rangle,\end{aligned}$$

es cierto para todo $\bar{y}\in\bar{\mathfrak{g}}$. ■

En particular, para el elemento E^* se tiene:

$$\overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}(x+a\,\mathrm{E})\right)\cdot(\mathrm{E}^*) = f_{\beta_t}(-x)+\mathrm{E}^*\,,$$

por lo que la orbita de E^* por la representación coadjunta de $\overline{G}_t$ está contenida en $\mathfrak{g}^*+\mathrm{E}^*$.

Si t es pequeño, $\tilde{\beta}_t : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ (expresión (b)) es un isomorfismo, cuya aplicación inversa es la suma $\widetilde{\Lambda}_t$ de la serie $\sum_{j\geq 1}\widetilde{\Lambda}_j\, t^{j-1}$, donde $\widetilde{\Lambda}_1 = (\tilde{\beta}_1)^{-1}$ y, para $l > 1$,

$$\widetilde{\Lambda}_{l+1} = -\widetilde{\Lambda}_1\cdot\tilde{\beta}_{l+1}\cdot\widetilde{\Lambda}_1 - \widetilde{\Lambda}_1\cdot\sum_{i=2}^{l}\tilde{\beta}_i\cdot\widetilde{\Lambda}_{l+2-i}\,.$$

Proposición 2.2 *Para t pequeño, la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\xrightarrow{f_{\beta_t}} \mathfrak{g}^* \\ x &\longrightarrow f_{\beta_t}(x) = \tilde{\beta}_t(x)\circ A(x)\,, \end{aligned}$$

es un difeomorfismo local en $x=0$. Se tiene $df_{\beta_t}(0) = \tilde{\beta}_t$.

Prueba En efecto,

$$df_{\beta_t}(0)\cdot y = \lim_{u\to 0}\frac{f_{\beta_t}(uy)-f_{\beta_t}(0)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\tilde{\beta}_t(uy)\circ A(uy)}{u} = \tilde{\beta}_t(y)\circ\lim_{u\to 0}A(uy)\,.$$

Como $A(uy) = I + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(uy)+\cdots$, cuando $u\longrightarrow 0$, $A(uy)\longrightarrow I$, por tanto,

$$df_{\beta_t}(0)\cdot y = \tilde{\beta}_t(y)\,,\quad \text{para todo } y\in\mathfrak{g}\,.$$

Al ser $\tilde{\beta}_t$ un isomorfismo, f_{β_t} es un difeomorfismo local en $x=0$. ∎

Corolario *Siendo t pequeño y $U_0\subset\mathfrak{g}$, $U_e\subset G$ entornos de $0\in\mathfrak{g}$ y $e\in G$ tales que $\exp : U_0\longrightarrow U_e$ es un difeomorfismo, la aplicación:*

$$\begin{aligned} \exp U_0 \equiv U_e \subset G &\xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}\subset\mathfrak{g}^*+\mathrm{E}^* \\ \exp x &\longrightarrow \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,x\cdot\mathrm{E}^* = f_{\beta_t}(-x)+\mathrm{E}^* \end{aligned} \tag{f}$$

es un difeomorfismo local en $e\in G$.

Proposición 2.3 *Sean $U_0\subset\mathfrak{g}$ y $U_e\subset G$ los entornos de $0\in\mathfrak{g}$ y $e\in G$ definidos en el Corolario anterior. Consideremos un entorno $W_0\subset U_0$ de $0\in\mathfrak{g}$ tal que $\exp(W_0)\equiv W_e\subset U_e$ es un entorno simétrico de la identidad de G, es decir, $W_e = W_e^{-1}$ (W_e se puede escoger de manera que $W_e\cdot W_e\subset U_e$, ver Dieudonné [1970]). Entonces, para t pequeño, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \exp(W_0) & \xrightarrow{\mathcal{K}_t} & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \\ {\scriptstyle\lambda_{\exp z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z} \\ \exp U_0 & \xrightarrow[\mathcal{K}_t]{} & \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \end{array}$$

es conmutativo para todo $z\in W_0$.

Prueba Sean $x, z \in W_0$, entonces $\exp z, \exp x \in W_e$. Como W_e se puede escoger de manera que $W_e \cdot W_e \subset U_e$, tenemos $\exp z \cdot \exp x \in U_e$. Así pues, existe $\gamma(z;x) \in U_0$ tal que:

$$\exp \gamma(z;x) = \exp z \cdot \exp x \,.$$

Si $\overline{\gamma}_t$ es la ley de grupo formal del álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$, se satisface:

$$\overline{\exp}\, z \cdot \overline{\exp}\, x = \overline{\exp}\, \overline{\gamma}_t(z;x) \,.$$

Ahora bién, teniendo en cuenta un resultado posterior dado en la expresión (m),

$$\overline{\gamma}_t(z;x) = \gamma(z;x) + \hat{\gamma}_t(z;x)\,\mathrm{E}\,; \quad \hat{\gamma}_t(z;x) \in \mathbb{R}\,,$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z) \circ \mathcal{K}_t\right) \exp x &= \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, z) \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\, x) \cdot \mathrm{E}^* = \\ &= \overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}\, \overline{\gamma}_t(z;x)\right) \cdot \mathrm{E}^* = \\ &= \overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}(\gamma(z;x) + \hat{\gamma}_t(z;x)\,\mathrm{E}\right) \cdot \mathrm{E}^* = \\ &= \overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}\, \gamma(z;x)\right) \cdot \mathrm{E}^*\,,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la Proposición 2.1.

Por otra parte,

$$\left(\mathcal{K}_t \circ \lambda_{\exp z}\right) \exp x = \mathcal{K}_t\left(\exp z \cdot \exp x\right) = \mathcal{K}_t\left(\exp \gamma(z;x)\right) = \overline{\mathrm{Ad}}^*\left(\overline{\exp}\, \gamma(z;x)\right) \mathrm{E}^*\,.$$

Quedando demostrada la conmutatividad del diagrama. ∎

Recordemos que la ley de grupo formal del álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_t$ satisface la igualdad:

$$\overline{\gamma}_t\left(\overline{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y})\,;\,\bar{z}\right) = \overline{\gamma}_t\left(\bar{x}\,;\,\overline{\gamma}_t(\bar{y};\bar{z})\right). \tag{g}$$

Además, se tienen las siguientes expresiones formales (ver por ejemplo Serre [1965]),

$$\overline{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathrm{z}}_n(\bar{x};\bar{y})$$

$$\bar{\mathrm{z}}_1(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}\,, \tag{h}$$

y si $n \geq 2$

$$\bar{\mathrm{z}}_n(\bar{x};\bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} \left(\bar{\mathrm{z}}'_{p\,q}(x;y) + \bar{\mathrm{z}}''_{p\,q}(x;y)\right)\,,$$

siendo

$$\bar{\mathrm{z}}'_{p\,q}(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p\\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q-1\\ p_i+q_i\geq 1\\ i=1,\ldots,m-1\\ p_m\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_1}(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_1}\cdots(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_m}\cdot\bar{y}}{(p_1!\,q_1!)\cdots(p_{m-1}!\,q_{m-1}!)\,p_m!}\,, \tag{i}$$

$$\bar{\mathrm{z}}''_{p\,q}(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_{m-1}=p-1\\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q\\ p_i+q_i\geq 1\\ i=1,\ldots,m-1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{x})^{p_1}(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_1}\cdots(\overline{\mathrm{ad}}\,\bar{y})^{q_{m-1}}\cdot\bar{x}}{(p_1!\,q_1!)\cdots(p_{m-1}!\,q_{m-1}!)}\,. \tag{j}$$

Los polinomios $\bar{z}'_{pq}$ y $\bar{z}''_{pq}$ son polinomios homogéneos de grado p en las componentes de $\bar{x}$ y de grado q en las componentes de $\bar{y}$ (una vez elegida una base en $\bar{\mathfrak{g}}_t$).

Para el álgebra $\mathfrak{g}$ se tiene, de manera similar,

$$\gamma(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x;y),$$

donde $z_1(x;y) = x + y$ y para $n > 1$

$$z_n(x;y) = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} z'_{pq}(x;y) + z''_{pq}(x;y), \tag{k}$$

siendo $z'_{pq}(x;y)$, $z''_{pq}(x;y)$ expresiones similares a las (i) y (j) relativas al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Teniendo en cuenta el Lema 2.2, introducimos la siguiente notación.

Si $p + q > 1$, $p, q \geq 0$

$$\begin{aligned} \bar{z}'_{pq}(\bar{x};\bar{y}) &= z'_{pq}(x;y) + \hat{z}'_{pq}(x;y)\,\mathrm{E} \\ \bar{z}''_{pq}(\bar{x};\bar{y}) &= z''_{pq}(x;y) + \hat{z}''_{pq}(x;y)\,\mathrm{E}, \end{aligned}$$

donde $z'_{pq}(x;y)$ y $z''_{pq}(x;y)$ son expresiones análogas a las (i) e (j), relativas al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\hat{z}'_{pq}(x;y)$ y $\hat{z}''_{pq}(x;y)$ se obtienen sustituyendo, en las expresiones de $z'_{pq}(x;y)$ y $z''_{pq}(x;y)$ respectivamente, el operador mas a la izquierda por $\tilde{\beta}_t(x)$ ó $\tilde{\beta}_t(y)$ según sea éste $\operatorname{ad} x$ ó $\operatorname{ad} y$, es decir:

$$\hat{z}'_{pq}(x;y) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i\geq 1;\quad p_m\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\tilde{\beta}_t(x)(\operatorname{ad} x)^{p_1-1}(\operatorname{ad} y)^{q_1}\cdots(\operatorname{ad} x)^{p_m}\cdot y}{(p_1!\,q_1!)\cdots(p_{m-1}!\,q_{m-1}!)\,p_m!}, \tag{l}$$

si $p_1 \geq 1$ y si $p_1 = 0$,

$$\hat{z}'_{pq}(x;y) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p \\ q_1+\cdots+q_{m-1}=q-1 \\ p_i+q_i\geq 1;\quad p_m\geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{\tilde{\beta}_t(y)(\operatorname{ad} y)^{q_1-1}\cdots(\operatorname{ad} x)^{p_m}\cdot y}{q_1!\,(p_2!\,q_2!)\cdots(p_{m-1}!\,q_{m-1}!)\,p_m!}, \tag{m}$$

y expresiones análogas para $\hat{z}''_{p,q}$.

Por tanto, definiendo

$$\hat{z}_n(x;y) = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} \left(\hat{z}'_{pq}(x;y) + \hat{z}''_{pq}(x;y)\right) \tag{n}$$

tenemos:

$$\bar{z}_n(\bar{x};\bar{y}) = z_n(x;y) + \hat{z}_n(x;y)\,\mathrm{E}$$

y

$$\bar{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x} + \bar{y} + \sum_{n>1} \bar{z}_n(\bar{x};\bar{y}) = \gamma(x;y) + \left(a + b + \hat{\gamma}_t(x;y)\right)\,\mathrm{E}, \tag{o}$$

donde

$$\hat{\gamma}_t(x;y) = \sum_{n>1} \hat{z}_n(x;y).$$

Proposición 2.4 *Si $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$ y $\bar{z} = z$, entonces*

$$\hat{\gamma}_t\left(\gamma(x;y)\,;\,z\right) + \hat{\gamma}_t(x;y) = \hat{\gamma}_t\left(x\,;\,\gamma(x;y)\right) + \hat{\gamma}_t(y;z)\,.$$

Prueba Haciendo uso de (o), se tiene:

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_t\big(\overline{\gamma}_t(\bar{x};\bar{y})\,;\,\bar{z}\big) &= \overline{\gamma}_t\Big(\gamma(x;y) + \big(\hat{\gamma}_t(x;y) + a + b\big)\,\mathrm{E}\,;\,z + c\,\mathrm{E}\Big) = \\ &= \gamma\big(\gamma(x;y)\,;\,z\big) + \Big(\hat{\gamma}_t\big(\gamma(x;y)\,;\,z\big) + \hat{\gamma}_t(x;y) + a + b + c\Big)\,\mathrm{E}\,,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_t\big(\bar{x}\,;\,\overline{\gamma}_t(y;z)\big) &= \overline{\gamma}_t\Big(x + a\,\mathrm{E}\,;\,\gamma(y;z) + \big(\hat{\gamma}_t(y;z) + b + c\big)\,\mathrm{E}\Big) = \\ &= \gamma\big(x\,;\,\gamma(y;z)\big) + \Big(a + \hat{\gamma}_t(y;z) + b + c + \hat{\gamma}_t\big(x\,;\,\gamma(y;z)\big)\Big)\,\mathrm{E}\,.\end{aligned}$$

La proposición es consecuencia de la propiedad asociativa de $\overline{\gamma}_t$ y γ. ∎

Sea $R \in \mathbb{N}$, definimos

$$\overline{\gamma}_{t;R+1}(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{n=1}^{R+1} \bar{z}_n(\bar{x};\bar{y})\,, \qquad \text{(p)}$$

y de forma similar $\overline{\gamma}_{t;R+1}(x;y)$ y $\hat{\gamma}_{t;R+1}(x;y)$.

Proposición 2.5 *Sean $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$ y $\bar{z} = z$. Entonces:*

(1) $\overline{\gamma}_{t;R+1}(x;y) = \gamma_{R+1}(x;y) + \hat{\gamma}_{t;R+1}(x;y)\,.$

(2) *La expresión*

$$\gamma_{R+1}\big(\gamma_{R+1}(x;y)\,;\,z\big) + \Big(\hat{\gamma}_{t;R+1}\big(\gamma_{R+1}(x;y)\,;\,z\big) + \hat{\gamma}_{t;R+1}(x;y)\Big)\,\mathrm{E}\,,$$

contiene todos los términos homogéneos de grado total menor o igual que $R+1$ en las componentes de x, y, z, de la serie formal $\overline{\gamma}_t\left(\overline{\gamma}_t(x;y)\,;\,z\right)$.

(3) *La expresión*

$$\gamma_{R+1}\big(x\,;\,\gamma_{R+1}(y;z)\big) + \Big(\hat{\gamma}_{t;R+1}\big(x\,;\,\gamma_{R+1}(y;z)\big) + \hat{\gamma}_{t;R+1}(y;z)\Big)\,\mathrm{E}\,,$$

contiene todos los términos homogéneos de grado total menor o igual que $R+1$ en las componentes de x, y, z, de serie formal $\overline{\gamma}_t(x\,;\,\overline{\gamma}(y;z))$. En particular los polinomios de los apartados (2) y (3) coinciden hasta el orden $R+1$. ∎

Haremos uso de estas definiciones y propiedades en la sección siguiente.

4.2.2 Un Producto Estrella sobre $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$

La falta de convergencia, en general, de la serie de Hausdorff $\overline{\gamma}_t(\overline{x};\overline{y})$ impide dar sentido a la expresión

$$\int e^{\frac{-2\pi i}{\hbar}\left\langle \xi+\mathrm{E}^*\,;\gamma_t(\hbar x;\hbar y)\right\rangle}(\overline{\mathcal{F}}\phi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\phi_2)(y)\,dx\,dy\,.$$

Sin embargo, vamos a comprobar que el desarrollo formal en serie de potencias de $\hbar$ de la exponencial es de la forma:

$$e^{\frac{-2\pi i}{\hbar}\left\langle \xi+\mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\hbar x;\hbar y)\right\rangle} = e^{-2\pi i\xi(x+y)}\left(1+\sum_{R=1}^{\infty} B_R(x;y;\xi)\,\hbar^R\right),$$

donde $B_R(x;y;\xi)$ es una suma de monomios de grados $R+1,\dots,2R$ en las componentes de x e y y de grados $0,1,\dots,R$ en las componentes de ξ. Esto permite definir los operadores bidiferenciales

$$P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi(x+y)}B_S(x;y;\xi)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\,dx\,dy$$

y una ley de composición sobre $(\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*)[[\hbar]]$

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S>1} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\hbar\,,$$

cuya asociatividad es consecuencia de la asociatividad de $\overline{\gamma}_t$.

Proposición 2.6 *Sea ϵ un parámetro real. Entonces:*

$$\exp\left(\frac{-2\pi i}{\epsilon}\langle \xi+\mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\epsilon x;\epsilon y)\rangle\right) = \exp\big(-2\pi i\xi(x+y)\big)\cdot\left(1+\sum_{S=1}^{\infty} B_S(x;y;\xi)\,\epsilon^S\right),\quad \text{(a)}$$

siendo

$$B_S(x;y;\xi) = \sum_{l=1}^{S}\left(\frac{1}{l!}(-2\pi i)^l \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}} J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)\right),\qquad \text{(b)}$$

donde

$$J_n(x;y;\xi) = \xi\cdot \mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\,,\qquad \text{(c)}$$

y z_{n+1}, $\hat{\mathrm{z}}_{n+1}$ están definidos en las expresiones (k) *y* (n) *de 4.2.1 respectivamente.*

$B_S(x;y;\xi)$ es una suma de monomios de grados $S+1, S+2,\dots, S+S = 2S$ en las componentes de x e y y de grados $1,\dots,S$ en las componentes de ξ.

Prueba En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{-2\pi i}{\epsilon}\langle \xi+\mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\epsilon x;\epsilon y)\rangle\right) = \\
&= \exp\left((-2\pi i)\xi(x+y) + (-2\pi i)\sum_{n>1}\left(\xi\cdot\overline{\mathrm{z}}_n(x;y)+\hat{\mathrm{z}}_n(x;y)\right)\epsilon^n\right) = \\
&= \exp\left((-2\pi i)\xi(x+y) + (-2\pi i)\sum_{n\geq 1} J_n(x;y;\xi)\,\epsilon^n\right),
\end{aligned}$$

donde

$$J_n(x;y;\xi) = \xi \cdot z_{n+1}(x;y) + \hat{z}_{n+1}(x;y)\,.$$

y por tanto son polinomios homogéneos de grado $n+1$ en las componentes de x e y y de grado 1 en las componentes de ξ.

Al desarrollar en serie de potencias de ϵ la exponencial se tiene:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{-2\pi i}{\epsilon}\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\epsilon x;\epsilon y)\rangle\right) = \\
&= \exp\left(-2\pi i\xi(x+y)\right)\cdot \exp\left(-2\pi i\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x;y;\xi)\,\epsilon^n\right) = \\
&= \exp\left(-2\pi i\xi(x+y)\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^l}{l!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x;y;\xi)\,\epsilon^n\right)^l\right) = \\
&= \exp\left(-2\pi i\xi(x+y)\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^l}{l!}\sum_{S=l}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}} J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)\right)\epsilon^S\right).
\end{aligned}$$

Como para cada S, l interviene en el coeficiente de ϵ^S por medio de la condición $k_1+\cdots+k_l = S$, $k_1,\dots,k_l \geq 1$, es decir, intervienen los valores de l tales que $1 \leq l \leq S$, se tiene:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^l}{l!}\sum_{S=l}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}} = \sum_{S=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{S}\frac{(-2\pi i)^l}{l!}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}},$$

por tanto, finalmente,

$$\exp\left(\frac{-2\pi i}{\epsilon}\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\gamma}_t(\epsilon x;\epsilon y)\rangle\right) = \exp\left(-2\pi i\xi(x+y)\right)\cdot\left(1+\sum_{S=1}^{\infty} B_S(x;y;\xi)\,\epsilon^S\right),$$

donde

$$B_S(x;y;\xi) = \sum_{l=1}^{S}\left(\frac{1}{l!}(-2\pi i)^l \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}} J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)\right).$$

Como los polinomios $J_k(x;y;\xi)$ tienen grado $k+1$ en las componentes de x e y y grado 1 en las componentes de ξ, los productos $J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)$ son polinomios homogéneos de grado $(k_1+1)+\cdots+(k_l+1) = S+l$ en las componentes de x e y y de grado l en las componentes de ξ. Por tanto, $B_S(x;y;\xi)$ es una suma de monomios de grados $S+1, S+2, \dots, S+S = 2S$ en las componentes de x e y y de grados $1,\dots,S$ en las componentes de ξ. ∎

Si ahora partimos de la suma finita definida en (p) de 4.2.1:

$$\overline{\gamma}_{t;R+1}(\bar{x};\bar{y}) = \sum_{n=1}^{R+1}\bar{z}_n(\bar{x};\bar{y}),$$

se tiene

$$\exp\left(\frac{-2\pi i}{\epsilon}\langle \xi + \mathrm{E}^* \,; \overline{\gamma}_{t;R+1}(\epsilon x;\epsilon y)\rangle\right) =$$
$$= \exp\left((-2\pi i)\xi(x+y) + (-2\pi i)\sum_{n=1}^{R} J_n(x;y;\xi)\,\epsilon^n\right) =$$
$$= \exp\left((-2\pi i)\xi(x+y)\right)\left(1 + \sum_{S=1}^{\infty} \widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi)\,\epsilon^S\right),$$

donde

$$\widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi) = \sum_{\frac{S}{R}\leq l\leq S} \frac{(-2\pi i)^l}{l!} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=S\\ 1\leq k_1,\dots,k_l\leq R}} J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)\,. \tag{d}$$

Con estos resultados se satisface la siguiente proposición.

Proposición 2.7 *Las expresiones* (b) *y* (d) *coinciden hasta el orden R. Es decir, se satisfacen las siguientes igualdades: $B_1 = \widehat{B}_{R,1}, \dots, B_R = \widehat{B}_{R,R}$.* ■

Sean $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ la transformada de Fourier y su inversa. Definamos el operador bidiferencial sobre $\mathfrak{g}^*$:

$$P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi(x+y)} B_S(x;y;\xi)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\,,$$

o bien:

$$P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi) = B_S\left(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\right)(\varphi_1\otimes\varphi_2)\,. \tag{e}$$

Como el grado mínimo de los operadores $P_S(\varphi_1;\varphi_2)$ es $S+1$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.8 *Si φ_1 y φ_2 son polinomios en las componentes de $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $P_S(\varphi_1;\varphi_2)$ es también un polinomio, y $P_S(\varphi_1;\varphi_2) = 0$ si S es suficientemente grande con respecto a los grados de los polinomios φ_1 y φ_2.* ■

Con φ_1 y φ_2 polinomios, consideremos la serie formal:

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S\geq 1} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\epsilon^S\,. \tag{f}$$

Esta suma tiene sólo un número finito de términos distintos de cero, es decir, es un polinomio en ϵ con coeficientes que son polinomios en ξ. Por tanto, si R es suficientemente grande con respecto a los grados de los polinomios φ_1, φ_2, tenemos:

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S=1}^{R} P_S(\varphi_1;\varphi_2)(\xi)\,\epsilon^S =$$
$$= (\varphi_1\cdot\varphi_2)(\xi) + \sum_{S=1}^{R}\left(\int e^{-2\pi i\xi(x+y)} B_S(x;y;\xi)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\right)\epsilon^S\,.$$

Ahora bién, teniendo en cuenta la Proposición 2.7,

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = \\
&= (\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\xi) + \sum_{S=1}^{R} \Big(\int e^{-2\pi i \xi(x+y)} \widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\, dx\, dy \Big) \epsilon^S = \\
&= \int e^{-2\pi i \xi(x+y)} \Big(1 + \sum_{S=1}^{R} \widehat{B}_{R,S}(x;y;\xi)\, \epsilon^S \Big) (\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\, dx\, dy = \\
&= \int \exp\Big(\frac{-2\pi i}{\epsilon} \langle \xi + \mathrm{E}^* ; \overline{\gamma}_{t;R+1}(\epsilon x; \epsilon y) \rangle \Big) (\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x)(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y)\, dx\, dy\,, \qquad \text{(g)}
\end{aligned}$$

que es una expresión con sentido en el contexto de la teoría de distribuciones.

Teniendo en cuenta la Proposición 2.5, un razonamiento análogo al de la Proposición 2.3 de 4.2.1 nos dice que la ley de composición $\triangleright$ satisface la propiedad asociativa.

Hemos probado pues la siguiente proposición.

Proposición 2.9 *La ley de composición definida en la igualdad* (f) *ó* (g)*, donde los operadores $P_S(\varphi_1;\varphi_2)$ están definidos en* (e)*, dota al espacio de los polinomios sobre $\mathfrak{g}^*$ de una estructura de álgebra asociativa unitaria, es decir,*

$$\varphi_1 \triangleright 1 = \varphi_1 = 1 \triangleright \varphi_1\,; \qquad (\varphi_1 \triangleright \varphi_2) \triangleright \varphi_3 = \varphi_1 \triangleright (\varphi_2 \triangleright \varphi_3)\,.$$

■

Supongamos ahora que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y definamos como antes

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2)(\xi) = \sum_{S \geq 0} P_S(\varphi_1;\varphi_2)\, \epsilon^S\,.$$

Si

$$\varphi_i(\xi) = p_i(\xi - \xi_0) + r_i(\xi;\xi_0)\,; \quad i = 1,2,3$$

es el desarrollo de Taylor en el punto $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ de orden suficientemente grande, se tiene

$$P_K(\varphi_1;\varphi_2)(\xi_0) = P_K(p_1;p_2)(\xi_0)\,,$$

ya que el orden máximo de los operadores bidiferenciales $P_K(\varphi_1;\varphi_2)(\xi_0)$ es $2K$.

Esta observación implica el siguiente resultado.

Proposición 2.10 *$(\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\epsilon]]\,;\triangleright)$ es un álgebra asociativa unitaria. Esto es, se satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\sum_{K+L=S} P_L(P_K(\varphi_1;\varphi_2)\,;\varphi_3) = \sum_{K+L=S} P_L(\varphi_1\,; P_K(\varphi_2;\varphi_3))\,,$$
$$1 \triangleright \varphi_1 = \varphi_1 = \varphi_1 \triangleright 1\,,$$

para cada $S \in \mathbb{N}$, con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Prueba En la expresión

$$(\varphi_1 \triangleright \varphi_2) \triangleright \varphi_3 = \sum_{K \geq 0} \big(P_K(\varphi_1; \varphi_2) \triangleright \varphi_3\big)\, \epsilon^K = \sum_{S \geq 0} \bigg(\sum_{K+L=S} P_L\big(P_K(\varphi_1; \varphi_2)\, ;\, \varphi_3\big) \bigg)\, \epsilon^S ,$$

para cada S fijo,

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(P_K(\varphi_1; \varphi_2)\, ;\, \varphi_3\big)(\xi_0)$$

está definido por medio de los polinomios p_i de los desarrollos de Taylor $\varphi_i(\xi) = p_i(\xi - \xi_0) + r_i(\xi; \xi_0)$ $(i = 1, 2, 3)$, y es por lo tanto igual a

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(P_K(p_1; p_2)\, ;\, p_3\big)(\xi_0) . \tag{h}$$

de la misma forma, en la expresión

$$\big(\varphi_1 \triangleright (\varphi_2 \triangleright \varphi_3)\big) = \sum_{S \geq 0} \sum_{K+L=S} P_L\big(\varphi_1\, ;\, P_K(\varphi_2; \varphi_3)\big)\, \epsilon^S ,$$

tenemos

$$\sum_{K+L=S} P_L\big(\varphi_1\, ;\, P_K(\varphi_2; \varphi_3)\big)(\xi_0) = \sum_{K+L=S} P_L\big(p_1\, ;\, P_K(p_2; p_3)\big)(\xi_0) . \tag{i}$$

Pero la expresión (h) y el segundo miembro de (i) son iguales por la Proposición 2.9. ∎

Debido a la homogeneidad de orden $k+1$ en las componentes de x e y de los polinomios $J_k(x; y; \xi)$ (definidos en (c)), se tiene la siguiente siguiente igualdad:

$$(-2\pi i)^S B_S(x; y; \xi) = D_S(-2\pi i x; -2\pi i y; \xi) ,$$

siendo, como antes,

$$B_S(x; y; \xi) = \sum_{l=1}^{S} \frac{(-2\pi i)^l}{l!} \sum_{\substack{k_1 + \cdots k_l = S \\ k_1, \dots, k_l \geq 1}} \cancel{J_{k_1}(x; y; \xi) \cdots}\, J_{k_l}(x; y; \xi) ,$$

y

$$D_S(x; y; \xi) = \sum_{l=1}^{S} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{k_1 + \cdots k_l = S \\ k_1, \dots, k_l \geq 1}} J_{k_1}(x; y; \xi) \cdots J_{k_l}(x; y; \xi) \tag{j}$$

un polinomio real.

Por tanto, el operador bidiferencial $P_R(\varphi_1; \varphi_2)$ se puede escribir así:

$$\begin{aligned} P_R(\varphi_1; \varphi_2)(\xi) &\equiv B_R\bigg(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \xi\bigg)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\xi) = \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^R} D_R\bigg(\frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \xi\bigg)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\xi) . \end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ funciones reales, la ley de composición*

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \sum_{R \geq 0} Q_R(\varphi_1; \varphi_2)\, \hbar^R , \tag{k}$$

donde los operadores bidiferenciales Q_R están definidos así:

$$Q_R(\varphi_1; \varphi_2)(\xi) = D_R\bigg(\frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \frac{\partial}{\partial \xi}\, ;\, \xi\bigg)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \tag{l}$$

y D_R está definido en (j), es un producto estrella sobre $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$.

Prueba Los Q_R son operadores bidiferenciales con coeficientes reales.

Para demostrar la propiedad asociativa, hay que comprobar que

$$\sum_{S+T=R} Q_S\big(Q_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big) = \sum_{S+T=R} Q_S\big(\varphi_1\,;\,Q_T(\varphi_2;\varphi_3)\big)$$

para todo R.

De la propiedad asociativa de $\triangleright$:

$$\sum_{S+T=R} P_S\big(P_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big) = \sum_{S+T=R} P_S\big(\varphi_1\,;\,P_T(\varphi_2;\varphi_3)\big)\,,$$

deducimos:

$$\sum_{S+T=R} (-2\pi i)^{S+T} P_S\big(P_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big) = \sum_{S+T=R} (-2\pi i)^{S+T} P_S\big(\varphi_1\,;\,P_T(\varphi_2;\varphi_3)\big)\,,$$

es decir:

$$\sum_{S+T=R} (-2\pi i)^{S} P_S\big((-2\pi i)^T P_T(\varphi_1;\varphi_2)\,;\,\varphi_3\big) =$$
$$= \sum_{S+T=R} (-2\pi i)^{S} P_S\big(\varphi_1\,;\,(-2\pi i)^T P_T(\varphi_2;\varphi_3)\big)\,.$$

Pero $Q_R = (-2\pi i)^R P_R$, por lo tanto, sustituyendo en la última igualdad, se tiene lo que se queria demostrar.

Finalmente, $\varphi_1 * 1 = \varphi_1 = 1 * \varphi_1$ ya que $\varphi_1 \triangleright 1 = \varphi_1 = 1 \triangleright \varphi_1$. ∎

Vamos a comprobar ahora la invariancia por la representación coadjunta de $\overline{G}_t$ de este producto estrella. Para ello introduzcamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,\bar{z})(\xi + \mathrm{E}^*) &= \sigma(z)\cdot\xi + \mathrm{E}^* \\ \sigma(z)\cdot\xi &= \mathrm{Ad}^*(\exp z)\cdot\xi + f_{\beta_t}(-z)\,, \end{aligned} \tag{m}$$

siendo $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Lema 2.3 *Se tienen las siguientes igualdades:*

(1) $J_n\big(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi\big) = J_n\big(\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\,;\,\xi\big)$

(2) $B_R\big(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi\big) = B_R\big(\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\,;\,\xi\big)$,
donde $\sigma(z)\cdot\xi$ *está definido en* (n).

(3) $\hat{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot y\big) = \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) + \beta_t\big(z\,;\,A(z)\cdot \mathrm{z}_{n+1}(x;y)\big)$
donde $A(z)$ *está definido en* (c) *de la Sección 4.2.1.*

Prueba

(1) Por definición

$$\begin{aligned} J_n(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi) &= \langle \sigma(z)\cdot\xi\,;\mathrm{z}_{n+1}(x;y)\rangle + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) = \\ &= \langle \sigma(z)\cdot\xi + \mathrm{E}^*\,;\mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\,\mathrm{E}\rangle = \\ &= \langle \sigma(z)\cdot\xi + \mathrm{E}^*\,;\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\rangle\,. \end{aligned}$$

Como $\sigma(z)\cdot\xi + \mathrm{E}^* = \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z\cdot(\xi+\mathrm{E}^*)$,

$$\begin{aligned} J_n(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi) &= \langle\, \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)\cdot(\xi+\mathrm{E}^*)\,;\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\rangle = \\ &= \langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-z))\cdot\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\rangle\,, \end{aligned}$$

ahora bien, $\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-z))$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir,

$$\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-z))\cdot\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) = \bar{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}(-z))\cdot x;\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-z))\cdot y\big)\,,$$

por tanto,

$$J_n(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi) = \Big\langle \xi + \mathrm{E}^*\,;\bar{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}(-z))\cdot x;\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(-z))\cdot y\big)\Big\rangle\,.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} &\bar{\mathrm{z}}_{n+1}\Big((\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x + f_{\beta_t}(-z)\cdot x\,\mathrm{E}\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y + f_{\beta_t}(-z)\cdot y\,\mathrm{E}\Big) = \\ &\quad= \mathrm{z}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\big) + \\ &\qquad\qquad + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x;\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\big)\,\mathrm{E}\,, \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} J_n(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi) &= \xi\cdot\mathrm{z}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\big) + \\ &\qquad + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\big) = \\ &= J_n\big(\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp(-z))\cdot y\,;\,\xi\big)\,. \end{aligned}$$

(2) Es consecuencia inmediata de (1), sin más que tener en cuenta la definición (b) de B_R.

(3) A partir de la Proposición 2.1 de 4.2.1, se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}(z))\cdot\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) &= \mathrm{Ad}(\exp z)\cdot\mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \\ &\quad + \big(f_{\tilde{\beta}_t}(z)\mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\big)\,\mathrm{E} = \\ &= \mathrm{z}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot y\big) + \\ &\quad + \big(f_{\beta_t}(z)\cdot\mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y)\big)\,\mathrm{E}\,, \end{aligned} \tag{n}$$

donde la última igualdad se debe a que $\mathrm{Ad}^*(\exp z)$ es un automorfismo de álgebras de Lie.

Por otra parte, por ser también $\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}\,z)$ un automorfismo de álgebras de Lie, tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}\,z)\cdot\bar{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) &= \bar{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}\,z)\cdot x\,;\,\overline{\mathrm{Ad}}(\overline{\exp}\,z)\cdot y\big) = \\ &= \mathrm{z}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot y\big) + \\ &\quad + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot y\big)\,\mathrm{E}\,. \end{aligned} \tag{o}$$

Al comparar (n) y (o) se obtiene

$$f_{\beta_t}(z)\cdot\mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{n+1}(x;y) = \hat{\mathrm{z}}_{n+1}\big(\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}(\exp z)\cdot y\big)\,,$$

que es lo que se quería demostrar, si se tiene en cuenta que (expresión (e) de 4.2.1):

$$f_{\beta_t}(z) = \tilde{\beta}_t(z)\circ A(z)\,.$$

■

Teorema 2.2 *El producto estrella*

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_1 \cdot \varphi_2 + \sum_{R\geq 1} Q_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R\,,$$

donde los operadores Q_R están definidos en (l), es invariante por $\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{G}_t$, es decir,

$$(\varphi_1 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\bar{g}) * (\varphi_2 \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\bar{g}) = (\varphi_1 * \varphi_2) \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\,\bar{g}\,,$$

siendo $\bar{g} \in \overline{G}_t$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Prueba Sean φ_1, φ_2 funciones adecuadas. Por definición (Proposición 2.7):

$$P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\sigma(z)\cdot\xi) = \int e^{-2\pi i\left\langle\sigma(z)\cdot\xi\,;x+y\right\rangle} B_R\big(x\,;\,y\,;\,\sigma(z)\cdot\xi\big)\cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\,,$$

donde $\sigma(z)\cdot\xi$ está definido en (m), Entonces, teniendo en cuenta (2) en el lema 2.3,

$$\begin{aligned} P_R(\varphi_1;\varphi_2)(\sigma(z)\cdot\xi) = \int e^{-2\pi i\left\langle\sigma(z)\cdot\xi\,;x+y\right\rangle}\cdot \\ \cdot B_R\big(\,\mathrm{Ad}\exp(-z)\cdot x\,;\,\mathrm{Ad}\exp(-z)\cdot y\,;\,\xi\big)\cdot\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(y)\,dx\,dy\,. \end{aligned} \tag{p}$$

Por otra parte, por definición,

$$\begin{aligned} &P_R\big(\varphi_1\circ\sigma(z);\varphi_2\circ\sigma(z)\big)(\xi) = \\ &\quad = \int e^{-2\pi i\langle\xi\,;x+y\rangle} B_R(x;y;\xi)\overline{\mathcal{F}}\big(\varphi_1\circ\sigma(z)\big)(x)\overline{\mathcal{F}}\big(\varphi_2\circ\sigma(z)\big)(y)\,dx\,dy\,. \end{aligned} \tag{q}$$

Como

$$\overline{\mathcal{F}}\big(\varphi_1\circ\sigma(z)\big)(x) = \int \exp\big(2\pi i\,\langle x\,;\eta\rangle\big)\big(\varphi_1\circ\sigma(z)\big)(\eta)\,d\eta\,,$$

efectuando el cambio de variable

$$\begin{gathered} \zeta = \sigma(z)(\eta) = \mathrm{Ad}^*\exp z\cdot\eta + f_{\beta_t}(-z) \\ \eta = \mathrm{Ad}^*\exp(-z)\cdot\big(\zeta - f_{\beta_t}(-z)\big)\ ;\quad d\eta = \Big(\det\big(\,\mathrm{Ad}^*\exp(-z)\big)\Big)\,d\zeta\,, \end{gathered}$$

se tiene

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}\big(\varphi_1\circ\sigma(z)\big)(x) = \\ &\quad = \Big(\det\big(\,\mathrm{Ad}^*\exp(-z)\big)\Big)\cdot\int\exp\Big(2\pi i\big\langle\,\mathrm{Ad}\exp z\cdot x\,;\zeta - f_{\beta_t}(-z)\big\rangle\Big)\,\varphi_1(\zeta)\,d\zeta = \\ &\quad = \Big(\det\big(\,\mathrm{Ad}^*\exp(-z)\big)\Big)\cdot\exp\Big(-2\pi i\big\langle\,\mathrm{Ad}\exp z\cdot x\,;f_{\beta_t}(-z)\big\rangle\Big)\,\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(\mathrm{Ad}\exp z\cdot x)\,. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en (q),

$$\begin{aligned} &P_R\big(\varphi_1\circ\sigma(z)\,;\,\varphi_2\circ\sigma(z)\big)(\xi) = \\ &\quad = \Big(\det\big(\,\mathrm{Ad}^*\exp(-z)\big)\Big)^2\cdot \\ &\qquad \cdot\int e^{-2\pi i\langle\xi\,;x+y\rangle}e^{-2\pi i\langle\mathrm{Ad}\exp z(x+y)\,;f_{\beta_t}(-z)\rangle}\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot B_R(x;y;\xi)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1\big)(\mathrm{Ad}\exp z\cdot x)\big(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2\big)(\mathrm{Ad}\exp z\cdot y)\,dx\,dy\,. \end{aligned} \tag{r}$$

Si ahora definimos:

$$x' = \operatorname{Ad}\exp z \cdot x\,; \qquad dx = \det\big(\operatorname{Ad}\exp(-z)\big)\,dx'\,,$$

y de manera similar y', dy', sustituyendo en (r), se tiene:

$$\begin{aligned}
&P_R\big(\varphi_1 \circ \sigma(z)\,;\,\varphi_2 \circ \sigma(z)\big)(\xi) = \\
&= \int e^{-2\pi i \left\langle \operatorname{Ad}^* \exp z \cdot \xi\,; x'+y' \right\rangle} e^{-2\pi i \left\langle f_{\beta_t}(-z)\,; x'+y' \right\rangle} \cdot \\
&\qquad \cdot B_R\Big(\operatorname{Ad}\exp(-z)\cdot x'\,;\, \operatorname{Ad}\exp(-z)\cdot y'\,;\,\xi\Big)\,(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x')(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y')\,dx'\,dy' = \\
&= \int e^{-2\pi i \langle \sigma(z)\xi\,; x'+y' \rangle} \cdot \\
&\qquad \cdot B_R\Big(\operatorname{Ad}\exp(-z)\cdot x'\,;\, \operatorname{Ad}\exp(-z)\cdot y'\,;\,\xi\Big)\,(\overline{\mathcal{F}}\varphi_1)(x')(\overline{\mathcal{F}}\varphi_2)(y')\,dx'\,dy'\,.
\end{aligned} \tag{s}$$

Al ser iguales (p) y (s), queda demostrada la invariancia de los operadores P_R. Puesto que $Q_R = (-2\pi i)^R P_R$, la invariancia de P_R implica la de Q_R y, por tanto, queda demostrado el teorema. ∎

4.2.3 Un Producto Estrella Invariante sobre el Grupo $(G;\beta_t)$

El producto estrella sobre la orbita de E^*, invariante por la acción coadjunta de $\overline{G}_t$, definido en el Teorema 2.1, se puede trasladar al grupo de Lie G por medio del difeomorfismo:

$$\begin{aligned}
U(e) \subset G &\xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\
\exp x &\longrightarrow \overline{\operatorname{Ad}}^*(\overline{\exp}\,x)\cdot \mathrm{E}^* \equiv \xi + \mathrm{E}^*\,,
\end{aligned}$$

(expresión (f) de la Sección 4.2.1).

Teorema 2.3 *Sean G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y β_i $(i = 1, \dots, k)$ 2-cociclos de Chevalley con respecto a la representación trivial de $\mathfrak{g}$, tal que β_1 es no-degenerado. Consideremos la expresión*

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\, t + \cdots + \beta_k\, t^{k-1}\,,$$

donde t es un parámetro real (suficientemente pequeño). Si $\exp : U(0) \longrightarrow U(e)$ es un difeomorfismo y

$$\begin{aligned}
U(e) \subset G &\xrightarrow{\mathcal{K}_t} \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*} \subset \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\
\exp x &\longrightarrow \overline{\operatorname{Ad}}^*(\overline{\exp}\,x)\cdot \mathrm{E}^* \equiv \xi + \mathrm{E}^*
\end{aligned}$$

es el difeomorfismo local definido en (f) *de 4.2.1, la expresión:*

$$(\psi_1 *_t \psi_2)(\exp x) = \big((\psi_1 \circ \mathcal{K}_t^{-1}) * (\psi_2 \circ \mathcal{K}_t^{-1})\big)\,(\xi)\,; \qquad x \in U(0)\,, \tag{a}$$

donde $\xi = \mathcal{K}_t(\exp x)$, define un producto estrella invariante sobre el grupo con estructura simpléctica invariante $(G;\beta_t)$, siendo la ley de composición del segundo miembro el producto estrella sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ del Teorema 2.1.

Prueba En efecto definamos los operadores bidiferenciales sobre $U(e)$:

$$F_R^t(\psi_1;\psi_2)(\exp x) = Q_R(\psi_1 \circ \mathcal{K}_t^{-1}\,;\,\psi_2 \circ \mathcal{K}_t^{-1})(\xi)\,, \tag{b}$$

donde $x \in U(0)$, $\xi = \mathcal{K}_t(\exp x) \in U(\mathrm{E}^*) \subset \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ y los operadores Q_R están definidos en (l) de 4.2.2.

Como los operadores Q_R satisfacen la propiedad asociativa del producto estrella definido en (l) de 4.2.1, también la satisfacen los operadores F_R^t para funciones definidas sobre el entorno $U(e)$ de la unidad.

Sea $\exp W(0) \equiv W(e) \subset U(e)$ un entorno simétrico tal que el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} W(e) \subset G \arrow[r, "\mathcal{K}_t"] \arrow[d, "\lambda_{\exp z}"'] & \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z"] \\ U(e) \arrow[r, "\mathcal{K}_t"'] & \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \end{tikzcd}$$

es *comutativo* (Proposición 2.3 de 4.2.1). *Si* $z \in W(0)$, *se tiene:*

$$\begin{aligned}\big(F_R^t(\psi_1;\psi_2) \circ \lambda_{\exp z}\big)(\exp x) &= F_R^t(\psi_1;\psi_2)\big(\lambda_{\exp z}(\exp x)\big) = \\ &= Q_R\big(\psi_1 \circ \mathcal{K}_t^{-1}\,;\,\psi_2 \circ \mathcal{K}_t^{-1}\big) \cdot \big(\overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z \circ \mathcal{K}_t\big)(\exp x) = \\ &= Q_R\big(\psi_1 \circ \mathcal{K}_t^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z\,;\,\psi_2 \circ \mathcal{K}_t^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*\, \overline{\exp}\, z\big)\mathcal{K}_t(\exp x)\,,\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la conmutatividad del diagrama anterior y la última igualdad se tiene por ser los operadores Q_R invariantes por la acción coadjunta de $\overline{G}_t$ (Teorema 2.2 de 4.2.2).

Volviendo a tener en cuenta la conmutatividad del diagrama

$$\big(F_R^t(\psi_1;\psi_2) \circ \lambda_{\exp z}\big)(\exp x) = F_R^t\big(\psi_1 \circ \lambda_{\exp z}\,;\,\psi_2 \circ \lambda_{\exp z}\big)(\exp x)\,,$$

para todo $x, z \in W(0)$.

Esta última relación define F_R^t de manera única como un operador bidiferencial invariante sobre G, ya que $U(e)$ genera el grupo G. ■

Observación Si se identifica el operador F_R^t (expresión (b)) con el correspondiente elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ (ver Sección 1.4.1) y se escribe

$$F^t(x;y) = 1 + \sum F_R^t(x;y)\,\hbar^R\,,$$

la propiedad asociativa $(\psi_1 * \psi_2) * \psi_3 = \psi_1 * (\psi_2 * \psi_3)$ se expresa así:

$$F^t(x+y;z) \cdot F^t(x;y) = F^t(x;y+z) \cdot F^t(y;z)$$

y la condición unitaria $1 * \psi = \psi = \psi * 1$ así:

$$F^t(0;y) = F^t(x;0) = 1\,.$$

■

4.2.4 Los Primeros Términos del Producto Estrella sobre $(G;\beta_t)$

En esta sección vamos a calcular los primeros términos del producto estrella definido en el Teorema 2.3 sobre $(G;\beta_t)$.

Sea $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{g}$, utilizando coordenadas locales de primera especie sobre el grupo G (ver Sección 1.2.5):

$$\begin{aligned} \phi : U(e) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g &\longrightarrow \left(x^1(g), \dots, x^n(g)\right), \end{aligned}$$

donde $g = \exp x$ y $x = \sum x_i(g)e^i$, el difeomorfismo local (definido en (f) de 4.2.1):

$$\begin{aligned} &U(e) \subset G \xrightarrow{\mathcal{K}_t} U(\mathrm{E}^*) \subset \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\ &g = \exp x \longrightarrow \xi = \mathcal{K}_t(x) = \tilde{\beta}_t(-x) \circ A(-x) + \mathrm{E}^* , \end{aligned}$$

se escribe así:

$$\xi_a \equiv \left(\mathcal{K}_t(x)\right)_a = -(\beta_t)_{ik}\left(A(-x)\right)^k_a x^i ,$$

ya que:

$$\langle \xi\,; y\rangle = \left\langle -\tilde{\beta}_t(x)\cdot A(-x)\right); y\rangle = -\beta_t\left(x^i e_i\,;\, \left(A(-x)\right)^k_j y^j e_k\right) = -(\beta_t)_{ik}\left(A(-x)\right)^k_j x^i y^j ,$$

donde

$$(\beta_t)_{ik} = \beta_t(e_i; e_k)\,; \qquad \left(\tilde{\beta}_t(x)\right)_k = (\beta_t)_{ik}x^i .$$

La aplicación $A(x) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ está definida por la expresión (ver Proposición 2.1 de 4.2.1):

$$A(x) = \sum_{r\geq 0} \frac{(\operatorname{ad} x)^r}{(r+1)!} .$$

Ahora bien, si $C^k_{j\,i}$ las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es decir, si

$$[e_j\,; e_i] = C^k_{j\,i} e_k ,$$

las componentes de $\left((\operatorname{ad} x)^r\right)^i_j$ se escriben así:

$$\begin{aligned} \left((\operatorname{ad} x)^r\right)^i_j &= (\operatorname{ad} x)^{j_1}_j \cdot (\operatorname{ad} x)^{j_2}_{j_1} \cdots (\operatorname{ad} x)^{j_{r-1}}_{j_{r-2}} \cdot (\operatorname{ad} x)^i_{j_{r-1}} = \\ &= C^{j_1}_{i_1\,j} \cdot C^{j_2}_{i_2\,j_1} \cdots C^{j_{r-1}}_{i_{r-1}\,j_{r-2}} \cdot C^i_{i_r\,j_{r-1}} x^{i_1} \cdots x^{i_r} , \end{aligned}$$

y definiendo

$$M^i_{i_1,\dots,i_r,j} = (-1)^r \frac{1}{(r+1)!} C^{j_1}_{i_1\,j} \cdot C^{j_2}_{i_2\,j_1} \cdots C^{j_{r-1}}_{i_{r-1}\,j_{r-2}} \cdot C^i_{i_r\,j_{r-1}} ,$$

se tiene

$$\xi_a = -x^i\beta_{i\,a} - x^i(\beta_t)_{i\,k} \sum_{r\geq 1} M^k_{i_1,\dots,i_r,a}\, x^{i_1}\cdots x^{i_r} . \tag{a}$$

Si ahora tenemos en cuenta la aplicación inversa $\widetilde{\Lambda}_t$ de $\tilde{\beta}_t$ (que existe para t suficientemente pequeño), como el 2-tensor asociado satisface $\Lambda^{b\,a}_t \cdot (\beta_t)_{c\,a} = \delta^b_c$, de (a) deducimos:

$$\Lambda^{b\,a}_t \xi_a = -x^b - x^i \Lambda^{b\,a}_t \cdot (\beta_t)_{i\,k} \sum_{r\geq 1} M^k_{i_1,\dots,i_r,a} x^{i_1} \cdots x^{i_r} .$$

Así pues,

$$x^b = \Lambda^{a\,b}_t \xi_a + x^i \Lambda^{a\,b}_t (\beta_t)_{i\,k} \sum_{r\geq 1} M^k_{i_1,\dots,i_r,a}\, x^{i_1}\cdots x^{i_r} . \tag{b}$$

Estas expresiones locales permiten calcular, en principio, los operadores F^t_R.

Proposición 2.11 *En coordenadas locales, el término de orden uno del producto estrella, definido en* (a) *de 4.2.3, sobre el grupo G con estructura simpléctica β_t, se expresa así:*

$$F_1^t(\psi_1;\psi_2)(0) = \frac{1}{2}\Lambda_t^{a\,b}\frac{\partial(\psi_1)}{\partial x^a}(0)\frac{\partial(\psi_2)}{\partial x^b}(0)\,,$$

siendo Λ_t la serie inversa en t del polinomio β_t.

Prueba Teniendo en cuenta las definiciones de $D_R(x;y;\xi)$ y $J_n(x;y;\xi)$ (expresiones (j) y (c) de 4.2.2),

$$\begin{aligned} D_1(x;y;\xi) &= J_1(x;y;\xi) = \xi\cdot z_2(x;y) + \hat{z}_2(x;y) = \\ &= \frac{1}{2}\xi\cdot[x;y] + \frac{1}{2}\beta_t(x;y) = \frac{1}{2}\left(\xi_k c_{i\,j}^k + (\beta_t)_{i\,j}\right)x^i x^j\,. \end{aligned}$$

Por definición (expresión (l) de 4.2.2), el operador bidiferencial real Q_1 sobre la orbita se expresa así

$$\begin{aligned} Q_1(\phi_1;\phi_2)(\xi) &= D_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi};\xi\right)(\varphi_1\otimes\varphi_2) = \\ &= \frac{1}{2}(\xi_k c_{i\,j}^k + (\beta_t)_{i\,j})\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_i}(\mathcal{K}_t(x))\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_j}(\mathcal{K}_t(x))\,, \end{aligned}$$

siendo $\xi = \mathcal{K}_t(x) \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$.

Por tanto, teniendo en cuenta (a),

$$\begin{aligned} F_1^t(\psi_1;\psi_2)(x) &= \frac{1}{2}(\mathcal{K}_t(x)_a c_{i\,j}^a + (\beta_t)_{i\,j})\frac{\partial(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_i}(\mathcal{K}_t(x))\frac{\partial(\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_j}(\mathcal{K}_t(x)) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(-x^i(\beta_t)_{i\,a} - x^i(\beta_t)_{i\,k}\sum_{r\geq 1} M_{i_1,\dots,i_r,a}^k x^{i_1}\cdots x^{i_r}\right)c_{i\,j}^a + (\beta_t)_{i\,j}\right)\cdot \\ &\qquad\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x^a}(x)\frac{\partial(\mathcal{K}^{-1})^a}{\partial\xi_i}(\xi)\frac{\partial\psi_2}{\partial x^b}(x)\frac{\partial(\mathcal{K}^{-1})^b}{\partial\xi_j}(\xi)\,. \end{aligned}$$

Debido a la invariancia del producto estrella por traslaciones a la izquierda, basta con calcular el valor de los operadores F_R^t (expresión (b) de 4.2.3) en $x=0$,

$$F_1^t(\psi_1;\psi_2)(0) = \frac{1}{2}(\beta_t)_{i\,j}\frac{\partial\psi_1}{\partial x^a}(0)\frac{\partial(\mathcal{K}^{-1})^a}{\partial\xi_i}(0)\frac{\partial\psi_2}{\partial x^b}(0)\frac{\partial(\mathcal{K}^{-1})^b}{\partial\xi_j}(0)\,.$$

Sólo queda calcular:

$$\frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^a}{\partial\xi_i}(0)\,,\quad \text{y}\quad \frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^a}{\partial\xi_j}(0)\,.$$

Pero

$$x^b = \left(\mathcal{K}_t^{-1}(\xi)\right)^b;\qquad \xi_a = \left(\mathcal{K}_t(x)\right)_a,$$

entonces, teniendo en cuenta (b),

$$\frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^b}{\partial\xi_i}(0) = \Lambda_t^{a\,b}\delta_a^i + \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\Lambda_t^{a\,b}(\beta_t)_{i\,k}\sum_{r\geq 1}M_{i_1,\dots,i_r,a}^k x^{i_1}\cdots x^{i_r}\cdot x^i\right)_{\xi=0} = \Lambda_t^{i\,b}$$

y, sustituyendo en la expresión de $F_1^t(\psi_1;\psi_2)(0)$, se tiene finalmente:

$$F_1^t(\psi_1;\psi_2)(0) = \frac{1}{2}(\beta_t)_{i\,j}\Lambda_t^{i\,a}\Lambda_t^{j\,b}\frac{\partial\psi_1}{\partial x^a}(0)\frac{\partial\psi_2}{\partial x^b}(0) = \frac{1}{2}\Lambda_t^{a\,b}\frac{\partial\psi_1}{\partial x^a}(0)\frac{\partial\psi_2}{\partial x^b}(0)\,.$$

∎

Proposición 2.12 *El elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ que define por traslación a la izquierda el operador F_1^t es:*

$$F_1^t = \frac{1}{2}\Lambda_t^{r\,s} e_r \otimes e_s \,,$$

o bién, haciendo uso de la notación polinómica definida en 1.4.1,

$$F_1^t(x;y) = \frac{1}{2}\Lambda_t^{r\,s} x_r y_s \,.$$

Prueba A partir de la expresion en coordenadas locales

$$F_1^t(\psi_1;\psi_2)(0) = \frac{1}{2}\Lambda_t^{a\,b}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x^a}(0)\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x^b}(0)\,,$$

teniendo en cuenta que la relación entre los campos locales $(\partial/\partial x^k)$ y los campos invariantes $\bar{e}_j$ viene dada por las expresiones (ver Proposición 2.6 de 1.2.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(x) = \left(B(x)^{-1}\right)^j_k \bar{e}_j(x)\,,$$

donde

$$B(x)^{-1} = \frac{\exp(-\operatorname{ad} x) - I}{-\operatorname{ad} x}$$

se tiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(0) = \bar{e}_k(0) = e_k\,,$$

con lo que queda demostrada la proposición. ∎

Proposición 2.13 *En en función de campos invariantes, el término de orden dos del producto estrella* (a) *de 4.2.3, sobre el grupo G con estructura simpléctica β_t, se expresa así como elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$:*

$$\begin{aligned} F_2^t = {} & \frac{1}{8}\Lambda_t^{\mu\,\gamma}\Lambda_t^{\alpha\,\nu} e_\alpha e_\mu \otimes e_\gamma e_\nu \,+ \\ & + \frac{1}{24}\Lambda_t^{\mu\,\gamma}\Lambda_t^{\sigma\,\nu} C^\alpha_{\gamma\,\sigma}\big(e_\alpha e_\mu \otimes e_\nu + e_\nu \otimes e_\alpha e_\mu\big) + \frac{1}{24}\Lambda_t^{\mu\,\epsilon}\Lambda_t^{\nu\sigma} C^\gamma_{\epsilon\alpha} C^\alpha_{\sigma\,\gamma} e_\mu \otimes e_\alpha \,. \end{aligned}$$

y, en notación polinómica (ver Sección 1.4.1),

$$\begin{aligned} F_2^t(x;y) = {} & \frac{1}{8}\Lambda_t^{\mu\,\gamma}\Lambda_t^{\alpha\,\nu} x_\alpha x_\mu y_\gamma y_\nu \,+ \\ & + \frac{1}{24}\Lambda_t^{\mu\,\gamma}\Lambda_t^{\sigma\,\nu} C^\alpha_{\gamma\,\sigma}\left(x_\alpha x_\mu y_\nu + x_\nu y_\alpha y_\mu\right) + \frac{1}{24}\Lambda_t^{\mu\,\epsilon}\Lambda_t^{\nu\sigma} C^\gamma_{\epsilon\alpha} C^\alpha_{\sigma\,\gamma} x_\mu y_\alpha \,. \end{aligned}$$

Prueba A partir de la definición de $J_n(x;y;\xi)$ (expresión (c) de 4.2.2), con $x, y \in \mathfrak{g}$ y $\xi \in \mathfrak{g}^*$, tenemos:

$$\begin{aligned} J_2(x;y;\xi) &= \xi\cdot \mathrm{z}_3(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_3(x;y) \\ J_1(x;y;\xi) &= \frac{1}{2}\big(\xi\cdot \mathrm{z}_2(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_2(x;y)\big)\,, \end{aligned}$$

además (expresión (k) de 4.2.1)

$$\mathrm{z}_2(x;y) = \frac{1}{2}[x\,;y]\,; \quad \mathrm{z}_3(x;y) = \frac{1}{12}\left([x\,;[x\,;y]] + [y\,;[y\,;x]]\right)$$

y (expresión (n) de 4.2.1)

$$\hat{z}_2(x;y) = \frac{1}{2}\beta_t(x;y)\,; \quad \hat{z}_3(x;y) = \frac{1}{12}\big(\beta_t(x;[x\,;y]) + \beta_t(y;[y\,;x])\big)\,.$$

Por tanto, sustituyendo en (j) de 4.2.2,

$$\begin{aligned} D_2(x;y;\xi) &\equiv J_2(x;y;\xi) + \frac{1}{2}J_1(x;y;\xi)J_1(x;y;\xi) = \\ &= \frac{1}{12}\langle \xi\,;[x\,;[x\,;y]] + [y\,;[y\,;x]]\rangle + \frac{1}{12}(\beta_t(x;[x\,;y]) + \beta_t(y;[y\,;x])) + \\ &\quad + \frac{1}{8}\Big(\langle \xi\,;[x\,;y]\rangle + \beta_t(x;y)\Big)\Big(\langle \xi\,;[x\,;y]\rangle + \beta_t(x;y)\Big)\,, \end{aligned}$$

y, seleccionando una base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}$ donde las constantes de estructura son C^k_{ij}, tenemos:

$$\begin{aligned} D_2(x;y;\xi) &= \frac{1}{12}\xi_k C^k_{ij}C^j_{ab}(x^i x^a y^b + x^b y^i y^a) + \\ &\quad + \frac{1}{8}\xi_k\xi_l C^k_{ij}C^l_{ab}x^i x^a y^j y^b + \frac{1}{4}\xi_k C^k_{ij}(\beta_t)_{ab}x^i x^a y^j y^b + \\ &\quad + \frac{1}{12}(\beta_t)_{ij}C^j_{ab}(x^i x^a y^b + x^b y^i y^a) + \frac{1}{8}(\beta_t)_{ij}(\beta_t)_{ab}x^i x^a y^j y^b\,. \end{aligned} \tag{c}$$

Si ahora se sustituye (c) en la definición (l) de 4.2.2, se obtiene la expresión de Q_2, que en el punto $\xi = 0$ es:

$$\begin{aligned} Q_2(\varphi_1;\varphi_2)(0) &= D_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\frac{\partial}{\partial\xi}\,;0\right)_{\xi=0}(\varphi_1\otimes\varphi_2) = \\ &= \frac{1}{8}(\beta_t)_{ij}(\beta_t)_{rs}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi_i\partial\xi_r}\otimes\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_s}\right)_{\xi=0} + \\ &\quad + \frac{1}{12}(\beta_t)_{ab}C^b_{cd}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi_a\,\partial\xi_c}\otimes\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_d} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_d}\otimes\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\xi_a\,\partial\xi_c}\right)_{\xi=0}\,. \end{aligned} \tag{d}$$

Por definición,

$$F^t_2(\psi_1;\psi_2)(x) = Q_2(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1}\,;\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1})(\xi)\,,$$

por tanto, teniendo en cuenta (d), en coordenadas locales se tiene:

$$\begin{aligned} F^t_2(\psi_1;\psi_2)(0) &= \frac{1}{8}(\beta_t)_{ij}(\beta_t)_{rs}\left(\frac{\partial^2(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_i\partial\xi_r}\otimes\frac{\partial^2(\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_j\,\partial\xi_s}\right)(0) + \\ &\quad + \frac{1}{12}(\beta_t)_{ab}C^b_{cd}\left(\frac{\partial^2(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_a\,\partial\xi_c}\otimes\frac{\partial(\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_d} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_d}\otimes\frac{\partial^2(\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_a\,\partial\xi_c}\right)(0)\,. \end{aligned} \tag{e}$$

Las derivadas:

$$\frac{\partial(\psi_i\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_a} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x^m}\,\frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^m}{\partial\xi_a}\,,$$

y

$$\frac{\partial^2(\psi_i\circ\mathcal{K}_t^{-1})}{\partial\xi_a\partial\xi_b} = \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^m\,\partial x^n}\,\frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^m}{\partial\xi_a}\,\frac{\partial(\mathcal{K}_t^{-1})^n}{\partial\xi_b} + \frac{\partial\psi_i}{\partial x^m}\,\frac{\partial^2(\mathcal{K}_t^{-1})^m}{\partial\xi_a\,\partial\xi_b}\,,$$

se calculan haciendo uso de (a). En efecto,

$$\frac{\partial x^b}{\partial \xi_k} = \Lambda_t^{k\,b} + \Lambda_t^{a\,b}(\beta_t)_{i\,j}\, M^j_{i_1\,a}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi_k}\, x^{i_1} + x^i\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \xi_k}\right) + \\ + \sum_{r\geq 2} \Lambda_t^{a\,b}(\beta_t)_{i\,j}\, M^j_{i_1,\dots,i_r,a}\frac{\partial}{\partial \xi_k}(x^i\cdot x^{i_1}\cdots x^{i_r})\,,$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial (\mathcal{K}_t^{-1})^m}{\partial \xi_a}\right)(0) = \Lambda_t^{a\,m}\,, \tag{f}$$

y

$$\frac{\partial^2 (\mathcal{K}_t^{-1})^b}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}(0) \equiv \frac{\partial^2 x^b}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}(0) = \Lambda_t^{a\,b}(\beta_t)_{i\,j}\, M^j_{i_1\,a}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi_k}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \xi_l} + \frac{\partial x^i}{\partial \xi_l}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \xi_k}\right)(0) = \\ = -\frac{1}{2}(C^k_{c\,a}\Lambda_t^{c\,l} + C^l_{c\,a}\Lambda_t^{c\,k})\Lambda_t^{a\,b}\,, \tag{g}$$

ya que $M^k_{i_1\,a} = -\frac{1}{2}C^k_{i_1\,a}$.

Sustituyendo (f) y (g) en (e), mediante un cálculo directo, se llega a:

$$F_2^t(\psi_1;\psi_2)(0) = \frac{1}{8}\Lambda_t^{m\,a}\Lambda_t^{n\,b}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^m\,\partial x^n}\otimes\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^a\,\partial x^b}\right)(0) - \\ - \frac{1}{24}C^m_{p\,q}\Lambda_t^{p\,n}\Lambda_t^{q\,l}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^m\,\partial x^n}\otimes\frac{\partial\psi_2}{\partial x^l} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x^l}\otimes\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^m\,\partial x^n}\right)(0) + \\ + \frac{1}{48}(C^p_{c\,d}C^c_{p\,q} - (\beta_t)_{a\,b}C^b_{c\,d}C^a_{p\,q}\Lambda_t^{p\,c})\Lambda_t^{d\,l}\Lambda_t^{q\,m}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^m}\otimes\frac{\partial\psi_2}{\partial x^l}\right)(0)\,. \tag{h}$$

Volviendo a utilizar, como en la demostración de la Proposición 2.12, la relación entre los campos locales $\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_0$ y los campos invariantes $\bar{e}_j$ dada por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x = \left(B(x)^{-1}\right)^j_k \bar{e}_j\,,$$

donde

$$B(x)^{-1} = \frac{\exp(-\operatorname{ad} x) - I}{-\operatorname{ad} x}$$

se tiene, en particular,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_0 = \bar{e}_k(0) = e_k\,;\quad \text{y}\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^l}\right)_0 = -\frac{1}{2}C^j_{l\,k}\bar{e}_j(0) + \bar{e}_l(0)\,\bar{e}_k(0)$$

y por tanto

$$F_2^t = \frac{1}{8}\Lambda_t^{m\,a}\Lambda_t^{n\,b}\left(\frac{1}{4}[e_m;e_n]\otimes[e_a\,;e_b] - \frac{1}{2}[e_m\,;e_n]\otimes e_a\,e_b - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}e_m\,e_n\otimes[e_a\,;e_b] + e_m\,e_n\otimes e_a\,e_b\right) + \\ + \frac{1}{24}C^m_{p\,q}\Lambda_t^{p\,n}\Lambda_t^{q\,l}\left(\frac{1}{2}[e_m\,;e_n]\otimes e_l + \frac{1}{2}e_l\otimes[e_m\,;e_n] - \right. \\ \left. - e_m\,e_n\otimes e_l - e_l\otimes e_m\,e_n\right) - \\ - \frac{1}{48}\left(C^p_{c\,d}C^c_{p\,q}\Lambda_t^{q\,m}\Lambda_t^{d\,l} - (\beta_t)_{a\,b}C^a_{p\,q}C^b_{c\,d}\Lambda_t^{p\,c}\Lambda_t^{q\,m}\Lambda_t^{d\,l}\right)(e_m\otimes e_l)\,. \tag{i}$$

El primer término de (i) es igual a:

$$\frac{1}{8}\Lambda_t^{ma}\Lambda_t^{nb}\left(\frac{1}{4}[e_m\,;e_n]\otimes[e_a\,;e_b]+e_n\,e_m\otimes e_a\,e_b+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}[e_m\,;e_n]\otimes e_a\,e_b-\frac{1}{2}e_m\,e_n\otimes[e_a\,;e_b]\right)=$$
$$=\frac{1}{32}\Lambda_t^{ma}\Lambda_t^{nb}\left([e_m\,;e_n]\otimes[e_a\,;e_b]\right)+\frac{1}{8}\Lambda_t^{ma}\Lambda_t^{nb}\left(e_n\,e_m\otimes e_a\,e_b\right)\,.$$

Teniendo en cuenta la expresión del corchete del álgebra en términos de las constantes de estructura, el segundo término de (i) es igual a:

$$-\frac{1}{24}C^m_{pq}\Lambda_t^{pn}\Lambda_t^{ql}\left(e_m\,e_n\otimes e_a+e_a\otimes e_m\,e_n\right)+\frac{1}{48}C^m_{pq}C^r_{mn}\Lambda_t^{n}\Lambda_t^{ql}\left(e_r\otimes e_l+e_l\otimes e_r\right)\,.$$

Haciendo uso de la condición de 2-cociclo de β_t:

$$\beta_t\left([e_p;e_q]\,;\,[e_c;e_d]\right)=\beta_t\left(e_p\,;\,[e_q\,;\,[e_c;e_d]]\right)+\beta_t\left(e_q\,;\,[[e_c;e_d]\,;\,e_p]\right)\,,$$

el tercer término de (i) se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{1}{48}\left(C^p_{cd}C^c_{pq}\Lambda_t^{qm}\Lambda_t^{dl}-(\beta_t)_{pr}C^r_{qs}C^s_{cd}\Lambda_t^{pc}\Lambda_t^{qm}\Lambda_t^{dl}-(\beta_t)_{qr}C^r_{sp}C^s_{cd}\Lambda_t^{pc}\Lambda_t^{qm}\Lambda_t^{dl}\right)=$$
$$=\frac{1}{24}C^c_{pq}C^p_{cd}\Lambda_t^{qm}\Lambda_t^{dl}-\frac{1}{48}C^m_{sp}C^s_{cd}\Lambda_t^{dl}\Lambda_t^{pc}\,.$$

Así pues

$$\begin{aligned}F_2^t=&\frac{1}{8}\Lambda_t^{mq}\Lambda_t^{np}\left(e_n\,e_m\otimes e_q\,e_p\right)+\frac{1}{32}\Lambda_t^{mq}\Lambda_t^{np}\left([e_m\,;e_n]\otimes[e_q\,;e_p]\right)-\\&-\frac{1}{24}C^m_{pq}\Lambda_t^{pn}\Lambda_t^{ql}\left(e_m\,e_n\otimes e_a+e_a\otimes e_m\,e_n\right)+\\&+\frac{1}{48}C^m_{pq}C^r_{mn}\Lambda_t^{pn}\Lambda_t^{qs}\left(e_r\otimes e_s+e_s\otimes e_r\right)+\\&+\frac{1}{24}C^c_{pq}C^p_{cd}\Lambda_t^{qr}\Lambda_t^{ds}\left(e_r\otimes e_s\right)-\frac{1}{48}C^r_{dp}C^d_{cq}\Lambda_t^{qs}\Lambda_t^{pc}\left(e_r\otimes e_s\right)\,.\end{aligned}\tag{j}$$

Finalmente, haciendo uso de la ecuación clásica de Yang-Baxter (ver Teorema 2.7 de 1.2.5), se comprueba que la suma de los términos segundo, cuarto y sexto de (j) es nula. En efecto, la suma de estos tres términos se puede escribir así

$$\frac{1}{32}\Lambda_t^{mq}\Lambda_t^{np}C^r_{mn}C^s_{qp}+\frac{1}{48}\Lambda_t^{pn}\Lambda_t^{qs}C^m_{pq}C^r_{mn}+$$
$$+\frac{1}{48}\Lambda_t^{pn}\Lambda_t^{qr}C^m_{pq}C^s_{mn}-\frac{1}{48}\Lambda_t^{qs}\Lambda_t^{np}C^r_{mn}C^m_{pq}\,,\tag{k}$$

ahora bién, la ecuación clásica de Yang-Baxter, en las componentes que define la base elegida, se escribe así (ver expresión (l) de 1.2.5):

$$\Lambda_t^{a\beta}\Lambda_t^{c\gamma}C^\alpha_{ac}+\Lambda_t^{\alpha a}\Lambda_t^{c\gamma}C^\beta_{ac}+\Lambda_t^{\alpha a}\Lambda_t^{\beta c}C^\gamma_{ac}=0\,,\tag{l}$$

por lo que el primer término de la suma (k) es igual a:

$$-\frac{1}{32}\Lambda_t^{sq}\Lambda_t^{pn}C^m_{qp}C^r_{mn}-\frac{1}{32}\Lambda_t^{sq}\Lambda_t^{mp}C^n_{qp}C^r_{mn}\,,$$

y la suma de estos dos junto con el segundo y el cuarto de (k) es:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{32}\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{p\,n}C^m_{q\,p}C^r_{m\,n}-\frac{1}{32}\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{m\,p}C^n_{q\,p}C^r_{m\,n}+\\
&\quad+\frac{1}{48}\Lambda_t^{p\,n}\Lambda_t^{q\,s}C^m_{p\,q}C^r_{m\,n}-\frac{1}{48}\Lambda_t^{q\,s}\Lambda_t^{m\,p}C^r_{m\,n}C^n_{p\,q}=-\frac{1}{48}\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{n\,p}C^m_{q\,p}C^r_{n\,m}
\end{aligned}
$$

así pues (k) es igual a:

$$
\frac{1}{48}\Lambda_t^{p\,n}\Lambda_t^{q\,r}C^m_{p\,q}C^s_{m\,n}-\frac{1}{48}\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{n\,p}C^m_{q\,p}C^r_{n\,m}\,.
$$

Pero volviendo a hacer uso de la ecuación clásica de Yang-Baxter (l), tenemos:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_t^{p\,m}\Lambda_t^{q\,n}C^r_{p\,q}C^s_{m\,n}+\Lambda_t^{r\,q}\Lambda_t^{p\,n}C^m_{q\,p}C^s_{m\,n}+\Lambda_t^{r\,q}\Lambda_t^{n\,p}C^m_{q\,p}C^s_{n\,m}&=0\\
\Lambda_t^{p\,m}\Lambda_t^{q\,n}C^s_{p\,q}C^r_{m\,n}+\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{p\,n}C^m_{q\,p}C^r_{m\,n}+\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{n\,p}C^m_{q\,p}C^r_{n\,m}&=0\,,
\end{aligned}
$$

y restando ambas igualdades se obtiene:

$$
2\left(\Lambda_t^{r\,q}\Lambda_t^{p\,n}C^m_{q\,p}C^s_{m\,n}-\Lambda_t^{s\,q}\Lambda_t^{p\,n}C^m_{q\,p}C^r_{m\,n}\right)=0\,,
$$

con lo que queda probada la anulación de la suma (k) y, por tanto, la proposición. ∎

Este procedimiento se puede utilizar, en principio, cualquiera que sea R.

4.2.5 Producto Estrella Invariante sobre el Grupo $(G;\beta_1)$ Determinado por el cociclo $\beta_\hbar$

Este procedimiento se puede utilizar, en principio, cualquiera que sea R y concluir que la dependencia en t del operador $F^t_R(x;y)$ (expresión (b) de 4.2.3) se tiene a través de un producto de R componentes de Λ_t.

En efecto, en general D_R viene dado por (expresión (j) de 4.2.2):

$$
D_R(x;y;\xi)=\sum_{l=1}^{R}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=R\\k_1,\ldots,k_l\geq 1}}J_{k_1}(x;y;\xi)\cdots J_{k_l}(x;y;\xi)\,,
$$

siendo (expresión (c) de 4.2.2)

$$
J_{k_i}(x;y;\xi)=\xi\cdot \mathrm{z}_{k_i+1}(x;y)+\hat{\mathrm{z}}_{k_i+1}(x;y)\,,
$$

por lo que, en $\xi=0$,

$$
\begin{aligned}
&D_R\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_0;\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_0;0\right)=\\
&\quad=\sum_{l=1}^{R}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=R\\k_1,\ldots,k_l}}\left[\hat{\mathrm{z}}_{k_1+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cdots\hat{\mathrm{z}}_{k_l+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{\xi=0}.
\end{aligned}
$$

Entonces, los términos del producto estrella sobre el grupo $(G;\beta_t)$ vienen dados por:

$$F_R^t(\psi_1;\psi_2)(e)=\sum_{l=1}^{R}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=R\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}}\left[\hat{z}_{k_1+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\hat{z}_{k_l+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{\xi=0}\left(\psi_1\circ\mathcal{K}_t^{-1}\otimes\psi_2\circ\mathcal{K}_t^{-1}\right).$$

Ahora bien, si $U_e\subset G\xrightarrow{\mathcal{K}_t}U_{\mathrm{E}^*}\subset\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ es el difeomorfismo definido en (f) de 4.2.1, cualesquiera que sean los campos vectoriales $X,Y\in\mathcal{X}(U_{\mathrm{E}^*})$ se tiene:

$$X\left[Y[\psi\circ\mathcal{K}_t^{-1}]\right](\xi)=\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*X\right)\left[((\mathcal{K}_t^{-1})_*Y)[\psi]\right](\mathcal{K}_t^{-1}(\xi)),$$

donde

$$(\mathcal{K}_t^{-1})_*(X)=T\mathcal{K}_t^{-1}\circ X\circ\mathcal{K}_t,$$

por tanto:

$$F_R^t(\psi_1;\psi_2)(e)=\sum_{l=1}^{R}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=R\\ k_1,\dots,k_l\geq 1}}\left[\hat{z}_{k_1+1}\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi};(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\hat{z}_{k_l+1}\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi};(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{e\in G}(\psi_1\otimes\psi_2),$$

El factor $\hat{z}_{k_i+1}(x;y)$ tiene la forma

$$(\beta_t)_{ab}x^a\cdot L^b(x;y)\quad\text{o la forma}\quad(\beta_t)_{ab}y^a\cdot L^b(x;y)$$

donde $L^b(x;y)$ es un polinomio homogéneo de grado k_i, con coeficientes determinados por las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$. Entonces,

$$\hat{z}_{k_i+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right)=(\beta_t)_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_a}\otimes 1\right)\cdot L^b\left(\frac{\partial}{\partial\xi};\frac{\partial}{\partial\xi}\right),$$

o con $\left(1\otimes\frac{\partial}{\partial\xi_a}\right)$ en el lugar de $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_a}\otimes 1\right)$. El operador correspondiente sobre G está definido por la expresión:

$$\left[\hat{z}_{k_i+1}\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi};(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{e\in G}=$$
$$=(\beta_t)_{ab}\left[\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi_a}\otimes 1\right)\cdot L^b\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi};(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{e\in G},\qquad\text{(a)}$$

que se calcularía a partir de la igualdad (b) de 4.2.4:

$$x^b=\Lambda_t^{b\,a}\xi_a+(\beta_t)_{ck}\Lambda_t^{b\,a}x^c(\xi)\cdot\sum_{r\geq 1}M^k_{i_1,\dots,i_r,a}x^{i_1}(\xi)\cdots x^{i_r}(\xi),\qquad\text{(b)}$$

considerando sólo los términos con un número de componentes de ξ menor o igual que k_i+1. Los términos con un número mayor de componentes no contribuyen al operador (a), por ser éste una combinación lineal con coeficientes constantes de operadores de la forma

$$\left((\beta_t)_{ab}(\mathcal{K}_t^{-1})_*\left(\frac{\partial^p}{\partial\xi_a\,\partial\xi_{i_1}\cdots\partial\xi_{i_p}}\otimes\frac{\partial^q}{\partial\xi_{j_1}\cdots\partial\xi_{j_q}}\right)_{p+q=k_i+1}\right)_{e\in G},\qquad\text{(c)}$$

o con el operador $\partial/\partial\xi_a$ despues de $\otimes$. Observando la igualdad (c), se puede concluir que el operador (a) depende de t por medio de k_i componentes de Λ_t; esto es, una por cada operador $\partial/\partial\xi_l$ en la expresión (c) menos una que se contrae con $(\beta_t)_{a\,b}$.

De la misma forma, para calcular el operador:

$$\left[\hat{z}_{k_1+1}\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\cdots\hat{z}_{k_l+1}\left((\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,(\mathcal{K}_t^{-1})_*\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]_{e\in G}, \tag{d}$$

se necesita sólo considerar, en la expresión (b), términos con un número de componentes de ξ menor o igual que $R+l$, y el operador (d) depende de t por medio de un producto de $k_1+\cdots+k_l=R$ componentes de Λ_t.

Así, para calcular $F_R^t(x;y)$ necesitamos considerar en la expresión (b) términos con un número de componentes en ξ menor o igual que $2R$ y $F_R^t(x;y)$ depende de t a través de un producto de R componentes de Λ_t.

Desarrollando los productos de componentes de Λ_t es serie de potencias de t, despues de escribir los operadores $\partial/(\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_a})$ como combinaciones lineales de operadores invariantes $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2\cdots\bar{e}_r$, se obtiene, en notación polinómica, la expresión formal:

$$F_R^t(x;y)=\sum_{L\geq 0}F_{R\,L}(x;y)\,t^L\,, \tag{e}$$

donde $F_{R\,L}(x;y)\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ y $F_R^t(1;\psi)=0$ lo cual implica que:

$$F_{R\,L}(1;\psi)=0\,;\qquad R\geq 0\,;\quad L\geq 0\,. \tag{f}$$

Teorema 2.4 *Para cada $H\in\mathbb{N}$, se satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\sum_{R+S+T_1+T_2=H}F_{R\,T_1}\big(\psi_1\,;\,F_{S\,T_2}(\psi_2;\psi_3)\big)=\sum_{R+S+T_1+T_2=H}F_{R\,T_1}\big(F_{S\,T_2}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\big)\,, \tag{g}$$

$\psi_1,\psi_2,\psi_3\in\mathcal{C}^\infty(G)$.

Prueba Por el Teorema 2.3, sabemos que

$$\psi_1 *_t \psi_2=\sum_{S\geq 0}F_S^t(\psi_1;\psi_2)\,\hbar^S$$

es un producto estrella sobre el grupo $(G;\beta_t)$. Es decir,

$$\sum_{R+S=L}F_R^t\big(F_S^t(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\big)=\sum_{R+S=L}F_R^t\big(\psi_1\,;\,F_S^t(\psi_2;\psi_3)\big)\,.$$

Esto implica, teniendo en cuenta la igualdad (e), que

$$\sum_{R+S=L}\sum_{T_1,T_2\geq 0}F_{R\,T_1}\big(\psi_1\,;\,F_{S\,T_2}(\psi_2;\psi_3)\big)\,t^{T_1+T_2}=$$
$$=\sum_{R+S=L}\sum_{T_1,T_2\geq 0}F_{R\,T_1}\big(F_{S\,T_2}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\big)\,t^{T_1+T_2}\,.$$

Esto es, para cada $L\in\mathbb{N}$ y cada $T\in\mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{R+S=L}\sum_{T_1+T_2=T}F_{R\,T_1}\big(\psi_1\,;\,F_{S\,T_2}(\psi_2;\psi_3)\big)=\\&\qquad=\sum_{R+S=L}\sum_{T_1+T_2=T}F_{R\,T_1}\big(F_{S\,T_2}(\psi_1;\psi_2)\,;\,\psi_3\big)\,.\end{aligned} \tag{h}$$

Descomponiendo H como $H=L+T$ de todas las formas posibles con $L,T\in\mathbb{N}$ y sumando las correspondientes igualdades (h), se obtiene (g). ∎

Teorema 2.5 *Sean $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(G)$. La expresión*

$$\psi_1 * \psi_2 = \sum_{R \geq 0} F_R(\psi_1; \psi_2)\, \hbar^A\,, \tag{i}$$

donde

$$F_R(x; y) = \sum_{S+T=R} F_{S\,T}(x; y) \tag{j}$$

y $F_{S\,T}(x; y)$ viene dado por la descomposición (e), *define un producto estrella invariante sobre el grupo G con estructura simplectica invariante β_1. Diremos que está determinado por el cociclo $\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \cdots + \beta_k\,\hbar^{k-1} + \cdots$.*

Prueba La propiedad asociativa de (i) es consecuencia de (g). La invariancia por traslaciones a la izquierda es consecuencia de la invariancia de los operadores F_S^t. La condición unitaria es consecuencia de (f). ∎

4.2.6 La relación $\overline{F}_R = F_R - \frac{1}{2}\mu^{-1}(\beta_R)$

La obtención de los operadores invariantes F_R del producto estrella sobre el grupo definido en el Teorema 2.5, se puede realizar identificando t y $\hbar$ en el producto estrella definido por β_t, sobre la orbita $\mathcal{O}_{\mathrm{E}^*}$ (expresión (k) de 4.2.2) y haciendo el cambio de variable definido por el difeomorfismo local $\mathcal{K}_\hbar^{-1}$ (expresión (f) de 4.2.1, una vez que se ha hecho $t = \hbar$).

Con esta forma de proceder demostramos el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Sea*

$$F(x; y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x; y)\,\hbar^i$$

el producto estrella invariante determinado por el cociclo:

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \cdots + \beta_{R-1}\,\hbar^{R-2}\,,$$

sobre el grupo de Lie simplemente conexo G, con estructura simpléctica invariante β_1 (Teorema 2.5). Sea

$$\overline{F}(x; y) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{F}_i(x; y)\,\hbar^i$$

el determinado por

$$\bar{\beta}_\hbar = \beta_\hbar + \beta_R\,\hbar^{R-1}\,.$$

Entonces,

$$\overline{F}_1(x; y) = F_1(x; y)\,, \quad \overline{F}_2(x; y) = F_2(x; y)\,, \ldots\,, \quad \overline{F}_{R-1}(x; y) = F_{R-1}(x; y)$$
$$\overline{F}_R(x; y) = F_R(x; y) - \frac{1}{2}\mu^{-1}(\beta_R)\,,$$

donde $\mu^{-1}(\beta_R)$ es el 2-cociclo de Poisson invariante sobre $(G; \beta_1)$ correspondiente al 2-cociclo de de Rham invariante β_R (ver Sección 1.2.3). En componentes:

$$\left(\mu^{-1}(\beta_R)\right)^{l\,m} = -\Lambda_1^{l\,k}(\beta_R)_{k\,r}\Lambda_1^{r\,m}\,.$$

Prueba Calcularemos la contribución del 2-cociclo β_R al operador invariante $\bar{F}_R(x;y)$.

(1) Resumamos el procedimiento de obtención del producto estrella sobre $(G;\beta_1)$ del Teorema 2.5.

Los operadores Q_R, del producto estrella sobre la orbita ((k) de 4.2.2), son:

$$Q_R(\varphi_1\varphi_2)(\xi) = D_R\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\Big)(\varphi_1\otimes\varphi_2)\,,$$

donde los $D_R(x;y;\xi)$ se obtienen en el desarrollo (ver expresiones (a), (b) y (j) de 4.2.2):

$$\exp\big(\langle\xi + \mathrm{E}^*\,;\hbar^{-1}\overline{\gamma}_t(\hbar x;\hbar y) - x - y\rangle\big) = 1 + \sum_{S=1}^{\infty} D_S(x;y;\xi)\,\hbar^S\,.$$

A partir de éstos, se definen los operadores F^t_R sobre el grupo $(G;\beta_t)$ (expresión (b) de 4.2.3) por medio del difeomorfismo $\mathcal{K}_t$. Finalmente, haciendo $t = \hbar$ en la serie $\sum_{R\geq 0} F^t_R(\varphi_1;\varphi_2)\,\hbar^R$ y reordenando los términos en serie de potencias de $\hbar$, se obtienen los operadores F_R del Teorema 2.5.

Formalmente, la identificación $t = \hbar$ se puede realizar desde el principio y definir los polinomios $G_S(x;y;\xi)$, $S\geq 1$, a partir del desarrollo:

$$\exp\Big((\xi + \mathrm{E}^*)(\hbar^{-1}\overline{\gamma}_\hbar(\hbar x;\hbar y) - x - y)\Big) = 1 + \sum_{S=1}^{\infty} G_S(x;y;\xi)\,\hbar^S\,, \tag{a}$$

con $x, y \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Entonces, los operadores F_R se obtienen como coeficientes de $\hbar^R$ a partir de:

$$\sum_{S\geq 0} G_S\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\Big)\,\hbar^S\,,$$

efectuando el cambio de variable definido por el difeomorfismo local $\mathcal{K}_\hbar^{-1}$ (expresión (f) de 4.2.1) en $\xi = 0$ y reordenando los términos en serie de potencias de $\hbar$.

Es decir, si

$$G_R\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)_0\,;\,\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)_0\,;\,0\Big)(\psi_1\circ\mathcal{K}_\hbar^{-1}\otimes\psi_2\circ\mathcal{K}_\hbar^{-1}) =$$
$$= \sum_{L\geq 0} G_{R\,L}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_0\,;\,\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_0\Big)(\psi_1\otimes\psi_2)\,\hbar^L\,,$$

entonces

$$F_R(x;y) = \sum_{\substack{S+T=R\\ S\geq 1\,;\,T\geq 0}} G_{S\,T}(x;y)\,.$$

(2) Sea $\hat{z}_{n+1,j}(x;y)$ el polinomio que resulta al sustituir β_t por β_j en $\hat{z}_{n+1}(x;y)$ (expresión (n) de 4.2.1). Vamos a demostrar que:

$$G_R(x;y;\xi) = \xi\cdot \mathrm{z}_{R+1}(x;y) + \frac{1}{2}\beta_R(x;y) + M_R(x;y;\xi) \tag{b}$$

siendo

$$M_R(x;y;\xi) = \sum_{\substack{k+j-1=R \\ R>j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y) + \sum_{l=2}^{R} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_l=R \\ n_1,\ldots,n_l\geq 1}} H_{n_1}(x;y;\xi)\cdots H_{n_l}(x;y;\xi)\,, \quad \text{(c)}$$

y

$$H_n(x;y;\xi) = \xi\cdot \mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=n \\ k,j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y)\,. \quad \text{(d)}$$

En efecto, partiendo de

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\, t + \cdots + \beta_R\, t^{R-1}\,,$$

$J_n(x;y;\xi)$ (definido en (c) de 4.2.2) se escribe así:

$$J_n(x;y;\xi) = \xi\cdot \mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \sum_{j\geq 1} \hat{z}_{n+1,j}(x;y)\, t^{j-1}\,.$$

Como (ver Sección 4.2.2),

$$(\xi + \mathrm{E}^*)\cdot\big(\hbar^{-1}\overline{\gamma}_t(\hbar x;\hbar y)\big) = \xi\cdot(x+y) + \sum_{n\geq 1} J_n(x;y;\xi)\,\hbar^n\,,$$

haciendo $t=\hbar$ en β_t,

$$(\xi + \mathrm{E}^*)\cdot\big(\hbar^{-1}\overline{\gamma}_\hbar(\hbar x;\hbar y) - x - y\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi\cdot \mathrm{z}_{n+1}(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=n \\ k,j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y)\right)\hbar^n\,.$$

Entonces, definiendo $H_n(x;y;\xi)$ como en (d), tenemos:

$$\begin{aligned}\exp(\xi + \mathrm{E}^*)\cdot\big(\hbar^{-1}\overline{\gamma}_\hbar(\hbar x;\hbar y) - x - y\big) &= \\ = 1 + \sum_{R=1}^{\infty}&\left(\sum_{l=1}^{R}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_l=R \\ n_1,\ldots,n_l\geq 1}} H_{n_1}(x;y;\xi)\cdots H_{n_l}(x;y;\xi)\right)\hbar^R\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos G_R de (a) son:

$$G_R(x;y;\xi) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{n_1+\cdots n_l=R \\ n_1,\ldots,n_l\geq 1}} H_{n_1}(x;y;\xi)\cdots H_{n_l}(x;y;\xi)\,. \quad \text{(e)}$$

El primer término de la suma (e) se puede escribir así:

$$\begin{aligned} H_R(x;y;\xi) &= \xi\cdot \mathrm{z}_{R+1}(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=R \\ k,j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y) = \\ &= \xi\cdot \mathrm{z}_{R+1}(x;y) + \hat{z}_{2,R}(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=R \\ k\geq 1 \\ R>j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y) = \\ &= \xi\cdot \mathrm{z}_{R+1}(x;y) + \frac{1}{2}\beta_R(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=R \\ k\geq 1 \\ R>j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y)\,. \end{aligned}$$

por tanto,

$$G_R(x;y;\xi) = \xi \cdot z_{R+1}(x;y) + \frac{1}{2}\beta_R(x;y) + M_R(x;y;\xi)\,,$$

siendo $M_R(x;y;\xi)$ la expresión (c).

(3) La descomposición (b) nos permite analizar la intervención de los distintos cociclos β_i en la expresión de los operadores $G_R(x;y;\xi)$ y concluir que β_R sólo aparece en el término $\frac{1}{2}\beta_R(x;y)$.

En efecto, el término $M_R(x;y;\xi)$ es un polinomio de grado $2R$ en las componentes de x e y con términos de grado mínimo 3. En efecto, puesto que $\hat{z}_{k+1,j}(x;y)$ es un polinomio homogéneo de orden $k+1$ en las componentes de x e y,

$$\sum_{\substack{k+j-1\\ k\geq 2\,;R>j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y)$$

es suma de monomios de ordenes $3, 4, \ldots, R+1$. Por otra parte, $H_{n_i}(x;y;\xi)$ es suma de monomios de ordenes $2, 3, \ldots, R+1$, por tanto, $H_{n_1}(x;y;\xi)\cdots H_{n_l}(x;y;\xi)$ es suma de monomios de ordenes $2 + \overset{l}{\cdots} + 2 = 2l, \ldots, (n_1+1) + \cdots + (n_l+1) = R + l$ y

$$\sum_{l=2}^{R} \frac{1}{l!}\left(\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_l=R\\ n_1,\ldots,n_l\geq 1}} H_{n_1}(x;y;\xi)\cdots H_{n_l}(x;y;\xi) \right)$$

es un polinomio con términos de grado mínimo 4 y de grado máximo $2R$.

En el término $M_R(x;y;\xi)$ sólo intervienen los cociclos $\beta_1, \ldots, \beta_{R-1}$. En efecto, aparece un $\beta_j(x;y)$ por cada $\hat{z}_{k+1,j}(x;y)$, por tanto en la primera suma β_R no interviene pues $j < R$. En la segunda suma, teniendo en cuenta que:

$$H_{n_i}(x;y;\xi) = \xi \cdot \hat{z}_{n_i+1}(x;y) + \sum_{\substack{k+j-1=n_i\\ k,j\geq 1}} \hat{z}_{k+1,j}(x;y)\,,$$

las condiciones $l \geq 2$, $n_1 + \cdots + n_l = R$ y $n_1, \ldots, n_l \geq 1$ implican que $n_1, \ldots, n_l < R$ y, como $j \leq n_i$, se tiene que todos los $\hat{z}_{k+1,j}(x;y)$ que intervienen tienen $j < R$.

(4) Finalmente, la contribución total de β_R a $\overline{F}_R(x;y)$ es:

$$\frac{1}{2}\Lambda_1^{k\,a}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{b\,l} = -\frac{1}{2}\big(\mu^{-1}(\beta_R)\big)^{k\,l}.$$

En efecto, obviamente, los operadores $G_S((\partial/\partial\xi)_0;(\partial/\partial\xi)_0;0)$ con $S > R$ no contribuyen a la construcción de $\overline{F}_R(x;y)$ puesto que todos los términos del desarrollo en potencias de $\hbar$ de $G_S((\partial/\partial\xi)_0;(\partial/\partial\xi)_0;0)\,\hbar^S$, una vez realizado el cambio de variable, serán de orden mayor o igual que S en $\hbar$.

La única contribución de $G_R((\partial/\partial\xi)_0;(\partial/\partial\xi)_0;0)$ a $\overline{F}_R(x;y)$ que contiene a β_R o Λ_R es:

$$\frac{1}{2}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{a\,k}\Lambda_1^{b\,l}e_k\otimes e_l\,. \tag{f}$$

En efecto, $G_R((\partial/\partial\xi)_0;(\partial/\partial\xi)_0;0)$ interviene en $\overline{F}_R(x;y)$ por medio de los términos de orden cero de su desarrollo en serie de potencias de $\hbar$, una vez realizado el cambio de variable. Ahora bién, en el término $M_R\big((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0\big)$ sólo intervienen los cociclos β_S para $1 \leq S < R$, por tanto, en su contribución no aparece explícitamente β_R. Tampoco se encuentra Λ_R pues su aparición corresponde a un término de orden $R-1+R$ en $\hbar$ en el desrrollo de $G_R((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0; 0)\,\hbar^R$. Esto implica que la única contribución a $\bar{F}(x;y)$ de $G_R((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0; 0)$, que contiene a β_R o Λ_R, proviene de:

$$\frac{1}{2}\beta_R\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_0; \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_0\right) = \frac{1}{2}(\beta_R)_{a\,b}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_a}\right)_0\left(\frac{\partial}{\partial\xi_b}\right)_0 .$$

Pero como

$$\left(\frac{\partial(\psi \circ \mathcal{K}_\hbar^{-1})}{\partial\xi_a}\right)_0 = \left(\frac{\partial(\mathcal{K}_\hbar^{-1})^m}{\partial\xi_a}\right)_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^m}\right)_0 = \Lambda_\hbar^{a\,m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^m}\right)_0 ,$$

la contribución de orden cero en $\hbar$ es:

$$\frac{1}{2}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{a\,k}\Lambda_1^{b\,l}e_k \otimes e_l .$$

Si $S < R$, los operadores $G_S((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0; 0)$ no pueden contribuir explícitamente con β_R a $\bar{F}_R(x;y)$. La única contribución de este tipo, una vez realizado el cambio de variable, debe provenir de términos que contengan a Λ_R. Ahora bién, estos términos son de orden $S+R-1$ en $\hbar$ (en el desarrollo de $G_S((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0; 0)\,\hbar^S$), por tanto, si se quiere que $S+R-1 = R$ se debe tener $S = 1$. Esta contribución proviene, entonces, de

$$G_1((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0; 0)\,\hbar = \hat{z}_{2,1}((\partial/\partial\xi)_0; (\partial/\partial\xi)_0)\,\hbar = \frac{1}{2}(\beta_1)_{a\,b}((\partial/\partial\xi)_0 \otimes (\partial/\partial\xi)_0)\,\hbar ,$$

y está contenida en el desarrollo de

$$\frac{1}{2}(\beta_1)_{a\,b}\Lambda_\hbar^{a\,n}\Lambda_\hbar^{b\,m}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_0 \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_0 \hbar .$$

Los términos de orden $\hbar^R$ en el desarrollo anterior son:

$$\frac{1}{2}(\beta_1)_{a\,b}\left(\Lambda_R^{a\,m}\,\hbar^{R-1}\,e_m \otimes \Lambda_1^{b\,n}\,e_n\right)\,\hbar + \\ + \frac{1}{2}(\beta_1)_{a\,b}\left(\Lambda_1^{a\,m}\,e_m \otimes \Lambda_R^{b\,n}\,\hbar^{R-1}\,e_n\right)\,\hbar = \Lambda_R^{k\,l}(e_k \otimes e_l)\,\hbar^R .$$

Como

$$\Lambda_R^{k\,l} = \Lambda_1^{k\,a}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{b\,l} - T^{k\,l}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{R-1}, \beta_2, \ldots, \beta_{R-1}) ,$$

la contribución de los operadores $G_S((\partial/\partial\xi)_0\,;\,(\partial/\partial\xi)_0; 0)$ para $S < R$, con términos que contengan a β_R, es

$$\Lambda_1^{k\,a}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{b\,l} . \tag{g}$$

La contribución total de β_R a $\bar{F}_R(x;y)$ es pues la suma de (f) y (g):

$$\frac{1}{2}\Lambda_1^{k\,a}(\beta_R)_{a\,b}\Lambda_1^{b\,l} = -\frac{1}{2}\left[\mu^{-1}(\beta_R)\right]^{k\,l} .$$

Por otra parte, siendo $\bar{F}_R(x;y)$ el primer término de $\bar{F}(x;y)$ en el que β_R aparece, se tiene:

$$F_i(x;y) = \bar{F}_i(x;y) ,$$

para $i = 1, \ldots, R-1$. Quedando demostrado el teorema. ∎

4.2.7 Un resultado acerca de Productos Estrella Iguales hasta un Cierto Orden

Sean $F(x;y)$, $\bar{F}(x;y)$ dos productos estrella invariantes sobre el grupo $(G;\beta_1)$, entonces sabemos que

$$F_1(x;y) - F_1(y;x) = S_1(x;y)\,; \quad \bar{F}_1(x;y) - \bar{F}_1(y;x) = S_1(x;y)\,,$$

donde $S_1(x;y) \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es el tensor de Poisson de $(G;\beta_1)$, es decir, $S_1(x;y) = \Lambda_1 \equiv r_1$.

Si $\bar{F}$ y F son equivalentes hasta el orden k, existe un elemento

$$E(x) = 1 + \sum_{i=1}^{k} E_i(x)\,\hbar^i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,; \qquad E_i(x) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})\,,$$

tal que, para $i = 1, \ldots, k$,

$$\bar{F}_i - F_i + G_i(E_1, \ldots, E_{i-1}; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_{i-1}; F_1, \ldots, F_{i-1}) = \delta\, E_i\,, \tag{a}$$

donde $G_1(\cdots) = 0$ y, para $i > 1$, $G_i(\cdots)$ es una 2-cocadena definida a partir de los argumentos entre paréntesis (expresión (d) de la Sección 1.4.4).

A partir de la teoría de Gerstenhaber (ver Sección 1.4.4), la cocadena

$$\bar{F}_{k+1} - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1, \ldots, E_k; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k; F_1, \ldots, F_k)\,,$$

es un 2-cociclo de Hochschild. Por tanto, existe $h_{k+1} \in \wedge^2(\mathfrak{g})$ y $E_{k+1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tal que (Teorema 4.1 de 1.4.2):

$$\bar{F}_{k+1} - F_{k+1} + G_{k+1}(E_1, \ldots, E_k; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k; F_1, \ldots, F_k) = h_{k+1} + \delta\, E_{k+1}\,. \tag{b}$$

Consideremos las soluciones de la ecuación cúantica triangular de Yang-Baxter (Teorema 2.1 de 3.2.2):

$$S(x;y) = F^{-1}(y;x)\,F(x;y)\,; \quad \bar{S}(x;y) = \bar{F}^{-1}(y;x)\bar{F}(x;y)\,.$$

Tenemos, entonces, que (Lema 4.5 de 3.4.2):

$$\bar{S}_{k+1} - S_{k+1} = 2h_{k+1} + A_{k+1}(F_1, \ldots, F_k; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k; E_1, \ldots, E_k)\,, \tag{c}$$

donde $A_{k+1}(\cdots)$ es una cocadena definida a partir de los argumentos entre paréntesis.

Proposición 2.14 *Sean $\bar{F}$ y F dos productos estrella invariantes sobre el grupo $(G;\beta_1)$ que coinciden hasta el orden k, esto es,*

$$\bar{F}_1 = F_1\,, \quad \bar{F}_2 = F_2\,, \quad \ldots, \bar{F}_k = F_k\,.$$

Entonces:

(1) *Existen $h_{k+1} \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ y $E_{k+1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que $\bar{F}_{k+1} - F_{k+1} = h_{k+1} + \delta\, E_{k+1}$.*

(2) $\bar{S}_1 = S_1\,, \quad \bar{S}_2 = S_2\,, \quad \ldots, \bar{S}_k = S_k$.

(3) $\bar{S}_{k+1} - S_{k+1} = 2h_{k+1}$.

Además, h_{k+1} es no sólo un 2-cociclo de Hochschild sino también un 2-cociclo de Poisson.

Prueba

(1) Por hipótesis, los dos productos estrella son equivalentes hasta el orden k. Por ser iguales hasta el orden k, en las relaciones (a), que definen la equivalencia orden a orden, se pueden tomar $E_1 = \cdots = E_k = 0$. Por tanto, obsevando la expresión (d) de 1.4.4 se concluye que $G_{k+1}(\cdots) = 0$, quedando demostrado el apartado (1).

(2) Es consecuencia directa de (1) y del Lema 4.4 de 3.4.2, que establece la relación, orden a orden, entre los elementos $S(x;y)$ y $\bar{S}(x;y)$ correspondientes a dos productos estrella F y $\bar{F}$, equivalentes hasta el orden k.

(3) De forma similar, teniendo en cuenta la expresión de $A_{k+1}(\cdots)$ dada en el Lema 4.5 de 3.4.2 y el apartado (1), se concluye:

$$A_{k+1}(F_1, \ldots, F_k; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_k; E_1, \ldots, E_k) = 0\,,$$

por lo que (3) se satisface.

(4) Sólo queda por demostrar que h_{k+1} es un 2-cociclo de Poisson.

Siendo $\bar{F}$ y F productos estrella, son productos estrella al orden $k+2$. El Teorema 3.2 de la Sección 3.3 nos dice que los elementos $S(x;y)$ y $\bar{S}(x;y)$ satisfacen la ecuación cuántica triangular de Yang-Baxter al orden $k+2$. Esto es,

$$\begin{aligned}
&\big[S(x;y)\,S(x;z)\,S(y;z) - S(y;z)\,S(x;z)\,S(x;y)\big]_{k+2} = 0\\
&\big[\bar{S}(x;y)\,\bar{S}(x;z)\,\bar{S}(y;z) - \bar{S}(y;z)\,\bar{S}(x;z)\,\bar{S}(x;y)\big]_{k+2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Estas relaciones se pueden escribir así:

$$\begin{aligned}
&S_{k+1}(x;y)\,S_1(x;z) + S_{k+1}(x;y)\,S_1(y;z) + S_{k+1}(x;z)\,S_1(y;z) +\\
&\quad + S_1(x;y)\,S_{k+1}(x;z) + S_1(x;y)\,S_{k+1}(y;z) + S_1(x;z)\,S_{k+1}(y;z) -\\
&\quad - S_{k+1}(y;z)\,S_1(x;z) - S_{k+1}(y;z)\,S_1(x;y) - S_{k+1}(x;z)\,S_1(x;y) -\\
&\quad - S_1(y;z)\,S_{k+1}(x;z) - S_1(y;z)\,S_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;z)\,S_1(x;y) +\\
&\quad + \sum_{\substack{a+b+c=k+2\\ a,b,c\geq 0}} \big[S_a(x;y)\,S_b(x;z)\,S_c(y;z) - S_c(y;z)\,S_b(x;z)\,S_a(x;y)\big] = 0\,,
\end{aligned}$$

y una igualdad similar para $\bar{S}$.

En la última suma sólo aparecen las S_p con $1 \leq p \leq k$, por lo que es igual a la que se tiene para $\bar{S}$. Entonces, restando la igualdad correspondiente a $\bar{S}$ de la igualdad correspondiente a S se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\big(\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y)\big)\,S_1(x;z) + \big(\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y)\big)\,S_1(y;z) +\\
&\quad + \big(\bar{S}_{k+1}(x;z) - S_{k+1}(x;z)\big)\,S_1(y;z) + S_1(x;y)\,\big(\bar{S}_{k+1}(x;z) - S_{k+1}(x;z)\big) +\\
&\quad + S_1(x;y)\,\big)\bar{S}_{k+1}(y;z) - S_{k+1}(y;z)\big) + S_1(x;z)\,\big)\bar{S}_{k+1}(y;z) - S_{k+1}(y;z)\big) -\\
&\quad - \big(\bar{S}_{k+1}(y;z) - S_{k+1}(y;z)\big)\,S_1(x;z) - \big(\bar{S}_{k+1}(y;z) - S_{k+1}(y;z)\big)\,S_1(x;y) -\\
&\quad - \big(\bar{S}_{k+1}(x;z) - S_{k+1}(x;z)\big)\,S_1(x;y) - S_1(y;z)\,\big(\bar{S}_{k+1}(x;z) - S_{k+1}(x;z)\big) -\\
&\quad - S_1(y;z)\,\big(\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y)\big) - S_1(x;z)\,\big(\bar{S}_{k+1}(x;y) - S_{k+1}(x;y)\big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Relación que, teniendo en cuenta el apartado (3), se puede escribir así:

$$\begin{aligned}
&h_{k+1}(x;y)S_1(x;z) + h_{k+1}(x;y)S_1(y;z) + h_{k+1}(x;z)S_1(y;z) + \\
&+ S_1(x;y)h_{k+1}(x;z) + S_1(x;y)h_{k+1}(y;z) + S_1(x;z)h_{k+1}(y;z) - \\
&- h_{k+1}(y;z)S_1(x;z) - h_{k+1}(y;z)S_1(x;y) - h_{k+1}(x;z)S_1(x;y) - \\
&- S_1(y;z)h_{k+1}(x;z) - S_1(y;z)h_{k+1}(x;y) - S_1(x;z)h_{k+1}(x;y) = 0\,,
\end{aligned}$$

o bién

$$\begin{aligned}
&\left[h^{12}_{k+1}\,;\,S^{13}_1\right] + \left[h^{12}_{k+1}\,;\,S^{23}_1\right] + \left[h^{13}_{k+1}\,;\,S^{23}_1\right] + \\
&\qquad + \left[S^{12}_1\,;\,h^{13}_{k+1}\right] + \left[S^{12}_1\,;\,h^{23}_{k+1}\right] + \left[S^{13}_1\,;\,h^{23}_{k+1}\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Esta última igualdad es la condición para que h_{k+1} sea un 2-cociclo de Poisson (ver Teorema 2.2 de 1.2.2, Proposición 2.7 y expresiones (e), (g) de 1.2.5). ■

4.2.8 Todos los Productos Estrella Invariantes sobre el Grupo con Estructura Simpléctica $(G;\beta_1)$

Como antes, supondremos que $S_1(x;y) \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es el tensor de Poisson sobre G correspondiente a la estructura simpléctica invariante $\beta_1 \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$.

Teorema 2.7 *Sea F' un producto estrella invariante sobre $(G;\beta_1)$, arbitrario. Entonces existe un cociclo*

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \cdots + \beta_R\,\hbar^{R-1} + \cdots\,,$$

determinado por F', y un elemento $E(x) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ tal que:

$$F'(x;y) = E(x+y)\,F(x;y)\,E^{-1}(x)\,E^{-1}(y)\,,$$

siendo $F(x;y)$ el producto estrella sobre $(G;\beta_1)$ determinado, según el Teorema 2.5, por el cociclo $\beta_\hbar$.

Prueba Demostraremos el teorema por inducción sobre el orden de la equivalencia de F y F'.

(1) Sea F' un producto estrella invariante sobre el grupo y F el producto estrella sobre G, determinado en el Teorema 2.5 por el cociclo:

$$\beta_\hbar = \beta_1 + 0\,\hbar + 0\,\hbar^2 + \cdots\,.$$

Por definición de producto estrella

$$F'_1(x;y) - F'_1(y;x) = S_1(x;y)\,, \tag{a}$$

y por construción F satisface:

$$F_1(x;y) = \frac{1}{2}S_1(x;y)\,. \tag{b}$$

La propiedad asociativa al primer orden de F y F' se escribe así (expresión (c) de 1.4.3):

$$\delta\,F'_1(x;y;z) = 0\,; \qquad \delta\,F_1(x;y;z) = 0\,,$$

siendo δ es el operador de cohomología de Hochschild. Por tanto,

$$\delta(F_1 - F_1') = 0\,,$$

es decir, $F_1 - F_1'$ es un 2-cociclo de Hochschild.

Según el Teorema 3.1 de 1.3.1 y el Teorema 4.1 de 1.4.2, la condición de 2-cociclo de $F_1 - F_1'$ implica que existen $h_1 \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ y $E_1 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$F_1 - F_1' = h_1 + \delta\, E_1\,. \tag{c}$$

Por otra parte, de (a) y (b) y teniendo en cuenta que F_1 es antisimétrico, deducimos que $F_1'(x;y) - F_1(x;y) = F_1'(y;x) - F_1(y;x)$, es decir, $F_1' - F_1$ es simétrico. Como, en la descomposición (c), h_1 es la parte antisimétrica de $F - F'$, concluimos que $h_1 = 0$ y

$$F_1 - F_1' = \delta\, E_1\,. \tag{d}$$

La relación (d) significa que F y F' son equivalentes hasta el orden uno, siendo F el producto estrella del Teorema 2.5 determinado por el cociclo $\beta_\hbar = \beta_1$.

(2) Al ser F y F' equivalentes hasta el orden uno, sabemos (Gerstenhaber [1964b]) que $F_2 - F_2' + G_2(E_1; F_1; F_1')$ es un 2-cociclo de Hochschild, donde G_2 es una 2-cocadena definida en la expresión (d) de 1.4.4, que depende sólo de E_1, F_1, F_1'. Entonces, según el Teorema 3.1 de 1.3.1 y el Teorema 4.1 de 1.4.2, existen $h_2 \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ y $E_2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$F_2 - F_2' + G_2(E_1; F_1; F_1') = \frac{1}{2} h_2 + \delta\, E_2\,. \tag{c'}$$

Definamos

$$E = 1 + E_1\, \hbar + E_2\, \hbar^2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,,$$

y consideremos el producto estrella

$$\bar{F}(x;y) = E^{-1}(x+y)\, F'(x;y)\, E(x)\, E(y)\,,$$

equivalente a F' a todo orden.

Al primer orden, la condición de equivalencia se escribe así:

$$\bar{F}_1 - F_1' = \delta\, E_1\,, \tag{d'}$$

pero como se satisface (d), se concluye que

$$\bar{F}_1 = F_1\,.$$

Es decir, F y $\bar{F}$ son iguales al orden uno.

Al segundo orden

$$\bar{F}_2 - F_2' + G_2(E_1; \bar{F}_1; F_1') = \delta\, E_2\,, \tag{e'}$$

pero como F y $\bar{F}$ coinciden al orden uno, $G_2(E_1; \bar{F}_1; F_1') = G_2(E_1; F_1; F_1')$, y comparando (c') y (e') obtenemos:

$$\bar{F}_2 = F_2 - \frac{1}{2} h_2\,. \tag{f'}$$

Puesto que F y $\bar{F}$ coinciden al orden uno y puesto que se tiene la igualdad (f'), la Proposición 2.14 nos dice que h_2 es un 2-cociclo de Poisson (ver Secciones 1.2.3 y 1.2.4), por lo que $\beta_2 = \mu(h_2)$ es un 2-cociclo de de Rham invariante (Proposición 2.3 de 1.2.3) y (e') se puede escribir así:

$$\bar{F}_2 = F_2 - \frac{1}{2}\mu^{-1}(\beta_2)\,. \qquad \text{(g')}$$

A partir de las igualdades (f') y (g'), el Teorema 2.6 nos dice que el producto estrella $\widehat{F}$ determinado, según el Teorema 2.5, por el cociclo

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar\,,$$

es tal que:

$$\widehat{F}_1 = \bar{F}_1 = \frac{1}{2}S_1\,; \qquad \widehat{F}_2 = \bar{F}_2\,. \qquad \text{(h')}$$

Sustituyendo las igualdades (h') en las condiciones de equivalencia al primer y segundo orden de F' y $\bar{F}$ (expresiones (d') y (e')), se obtiene:

$$\widehat{F}_1 - F_1' = \delta\,E_1\,, \qquad \text{(i')}$$

$$\widehat{F}_2 - F_2' + G_2(E_1;\widehat{F}_1;F_1') = \delta\,E_2\,. \qquad \text{(j')}$$

Es decir, F' es equivalente a $\widehat{F}$ hasta el orden dos, siendo $\widehat{F}$ el producto estrella del Teorema 2.5 determinado por el cociclo $\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar$.

(3) Cambiemos la notación y representemos por F al producto estrella $\widehat{F}$ del apartado anterior.

Por ser equivalentes F y F' hasta el orden dos, tenemos (Gerstenhaber [1964b]):

$$F_3 - F_3' + G_3(E_1,E_2;F_1,F_2;F_1',F_2') = \frac{1}{2}h_3 + \delta\,E_3\,, \qquad \text{(c")}$$

para algún $h_3 \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ y $E_3 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$.

Definamos, ahora,

$$E = 1 + E_1\,\hbar + E_2\,\hbar^2 + E_3\,\hbar^3 + 0\,\hbar^4 + \cdots$$

y consideremos el producto estrella, definido por equivalencia,

$$\bar{F}(x;y) = E^{-1}(x+y)\,F'(x;y)\,E(x)\,E(y)\,.$$

La equivalencia a todo orden entre F' y $\bar{F}$ implica, en particular, que:

$$\bar{F}_1 - F_1' = \delta\,E_1 \qquad \text{(d")}$$

y

$$\left.\begin{aligned} &\bar{F}_2 - F_2' + G_2(E_1;\bar{F}_1;F_1') = \delta\,E_2 \\ &\bar{F}_3 - F_3' + G_3(E_1,E_2;\bar{F}_1,\bar{F}_2;F_1',F_2') = \delta\,E_3\,. \end{aligned}\right. \qquad \text{(e")}$$

De la igualdad (i'), donde se ha sustituido $\widehat{F}$ por F, y de (d") se deduce

$$\bar{F}_1 = F_1\,.$$

De este resultado, de la igualdad (j') con la misma sustitución y de la primera igualdad de (e") tenemos:

$$\bar{F}_2 = F_2 .$$

De (c") y la segunda igualdad de (e") se deduce que:

$$\bar{F}_3 = F_3 - \frac{1}{2} h_3 . \tag{f"}$$

Tenemos, pues, que F y $\bar{F}$ son productos estrella coincidentes hasta el orden dos, que al tercer orden satisfacen (f"). La Proposición 2.14 implica que h_3 es un 2-cociclo de Poisson y, si $\beta_3 = \mu(h_3)$ es el correspondiente cociclo de de Rham invariante (Proposición 2.3 de 1.2.3), la igualdad (f") se escribe así:

$$\bar{F}_3 = F_3 - \frac{1}{2} \mu^{-1}(\beta_3) . \tag{g"}$$

Haciendo uso nuevamente del Teorema 2.6, el producto estrella $\widehat{F}$ definido en el Teorema 2.5 por el cociclo

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \hbar^2 ,$$

es tal que

$$\widehat{F}_1 = \bar{F}_1 ; \qquad \widehat{F}_2 = \bar{F}_2 ; \qquad \widehat{F}_3 = \bar{F}_3 . \tag{h"}$$

Sustituyendo las igualdades (h") en las condiciones de equivalencia al primer y segundo orden de $\bar{F}$ y F (expresiones (d") y (e")), se deduce:

$$\widehat{F}_1 - F'_1 = \delta E_1$$

y

$$\widehat{F}_2 - F'_2 + G_2(E_1; \widehat{F}_1; F'_1) = \delta E_2$$
$$\widehat{F}_3 - F'_3 + G_3(E_1, E_2; \widehat{F}_1, \widehat{F}_2; F'_1, F'_2) = \delta E_3 ,$$

es decir, se tiene que F' es equivalente hasta el orden tres a $\widehat{F}$, que es el producto estrella del Teorema 2.5 determinado por el cociclo $\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2 \hbar + \beta_3 \hbar^2$.

(4) Supongamos ahora que el producto estrella $F'(x; y)$ es equivalente hasta el orden $(R-1)$ al producto estrella $F(x; y)$ del Teorema 2.5, determinado por el cociclo

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2 \hbar + \cdots + \beta_{R-1} \hbar^{R-2} .$$

Vamos ha demostrar que existen $E_R \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ y $\beta_R \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ tales que F' es equivalente hasta el orden R al producto estrella $\widehat{F}$ determinado, según el Teorema 2.5, por el cociclo:

$$\widehat{\beta}_\hbar = \beta_\hbar + \beta_R \hbar^{R-1} .$$

Por hipótesis, existen $E_1, \ldots, E_{R-1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$F_1 - F'_1 = \delta E_1 , \tag{a'''}$$

y, para $i = 1, 2, \ldots, R-1$,

$$F_i - F'_i + G_i(E_1, \ldots, E_i; F_1, \ldots, F_{i-1}; F'_i, \ldots, F'_{i-1}) = \delta E_i . \tag{b'''}$$

Además (Gerstenhaber [1964b]), existen $h_R \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, $E_R \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, tales que:

$$F_R - F'_R + G_R(E_1, \dots, E_{R-1}; F_1, \dots, F_{R-1}; F'_1, \dots, F'_{R-1}) = \frac{1}{2} h_R + \delta\, E_R \,. \qquad \text{(c''')}$$

Definiendo el elemento:

$$E = 1 + E_1\, \hbar + E_2\, \hbar^2 + \cdots + E_{R-1}\, \hbar^{R-1} + E_R\, \hbar^R$$

y considerando el producto estrella definido por equivalencia:

$$\bar{F}(x;y) = E^{-1}(x+y)\, F'(x;y)\, E(x)\, E(y)\,,$$

se tienen las siguientes igualdades:

$$\bar{F}_1 - F'_1 = \delta\, E_1 \qquad \text{(d''')}$$

y, para $i = 1, 2, \dots, R$,

$$\bar{F}_i - F'_i + G_i(E_1, \dots, E_{i-1}; \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_{i-1}; F'_1, \dots, F'_{i-1}) = \delta\, E_i \,. \qquad \text{(e''')}$$

Entonces, de las relaciones (a''') y (d''') se tiene:

$$\bar{F}_1 = F_1\,,$$

de (b''') y (e'''),

$$\bar{F}_i = F_i\,; \qquad i = 1, 2, \dots, R-1\,,$$

y de (c''') y (e''') para $i = R$,

$$\bar{F}_R = F_R - \frac{1}{2} h_R\,, \qquad \text{(f'')}$$

Por tanto, F y $\bar{F}$ son productos estrella que coinciden hasta el orden $R-1$ y, al orden R, se satisface (f'''). Esto implica que (Proposición 2.14) h_R es un 2-cociclo de Poisson y si $\beta_R = \mu(h_R)$ es el cociclo de de Rham correspondiente (Proposición 2.3 de 1.2.3), la relación (f'') se escribe así:

$$\bar{F}_R = F_R - \frac{1}{2} \mu^{-1}(\beta_R)\,. \qquad \text{(g''')}$$

Teniendo en cuenta el Teorema 2.6, el producto estrella, $\widehat{F}$, definido en el Teorema 2.5 por el cociclo

$$\hat{\beta}_\hbar = \beta_\hbar + \beta_R\, \hbar^{R-1}\,,$$

es tal que:

$$\widehat{F}_i = \bar{F}_i\,; \qquad i = 1, \dots, R\,. \qquad \text{(h''')}$$

Ahora bién, sustituyendo las igualdades (h''') en las condiciones de equivalencia hasta el orden R de $\bar{F}$ y F' (expresiones (d''') y (e'''))se obtienen:

$$\widehat{F}_1 - F'_1 = \delta\, E_1$$

y, para $i = 1, 2, \dots, R$,

$$\widehat{F}_i - F'_i + G_i(E_1, \dots, E_{i-1}; \widehat{F}_1, \dots, \widehat{F}_{i-1}; F'_1, \dots, F'_{i-1}) = \delta\, E_i\,,$$

que nos dicen que F y $\widehat{F}$ son equivalentes hasta el orden R, estando definido $\widehat{F}$, a partir del Teorema 2.5, por el cociclo $\widehat{\beta}_\hbar = \beta_+ \beta_2\, \hbar + \cdots + \beta_R\, \hbar^{R-1}$, que es lo que se quería demostrar. ∎

4.2.9 Equivalencia de los Productos Estrella Determinados por los Cociclos $\beta_\hbar$ y $\omega_\hbar = \beta_\hbar + \tilde{\delta}\,\alpha_\hbar$

Estudiaremos ahora la relación entre los dos productos estrella sobre G obtenidos a partir del Teorema 2.5 por medio de los 2-cociclos:

$$\beta_t = \beta_1 + \beta_2\, t + \cdots + \beta_k\, t^{k-1} + \cdots$$

y

$$\omega_t = \beta_1 + (\beta_2 + \tilde{\delta}\,\alpha_2)t + \cdots + (\beta_k + \tilde{\delta}\,\alpha_k)t^{k-1} + \cdots ,$$

donde $\alpha_k \in \mathfrak{g}^*$ y $\tilde{\delta}$ es el operador de cohomología de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$, con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$ (Definición 1.1 de 1.1.1). Recordemos (ver Observación de la Sección 1.1.1) que la cohomología de de Rham invariante sobre el grupo simplemente conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a la cohomología de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ con respecto a la representación trivial sobre $\mathbb{R}$.

El punto de partida es la existencia de un isomorfismo de álgebras de Lie entre las extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ definidas por los cociclos β_t y ω_t: $\bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t}$ y $\bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t}$. Definiendo

$$\alpha_t = \alpha_2\, t + \cdots + \alpha_k\, t^{k-1} + \cdots , \tag{a}$$

con sólo un número finito de términos no nulos, el isomorfismo está definido así:

$$\begin{array}{c} \bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t} \xrightarrow{C_{\alpha_t}} \bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t} \\ \bar{x} = x + a\,\mathrm{E} \longrightarrow \bar{x} - \langle \alpha_t\,; x\rangle \mathrm{E}\,. \end{array} \tag{b}$$

En efecto, si $\bar{x} = x + aE, \bar{y} = y + b\mathrm{E} \in \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}\mathrm{E}$ son dos elementos cualesquiera y si $\bar{x} - \langle \alpha_t\,; x\rangle\mathrm{E} = \bar{y} - \langle \alpha_t\,; y\rangle\mathrm{E}$, entonces $\bar{x} = \bar{y}$, por lo tanto C_{α_t} es una aplicación lineal inyectiva. Además, si $[\,;]^{\beta_t}$ es el conmutador de $\bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t}$ y $[\,;]^{\omega_t}$ el de $\bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t}$, teniendo en cuenta que

$$\tilde{\delta}\,\alpha_t(x; y) = -\alpha_t([x\,; y])\,, \tag{c}$$

el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t} \times \bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t} \arrow[r, "C_{\alpha_t} \times C_{\alpha_t}"] \arrow[d, "{[\,;]^{\beta_t}}"'] & \bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t} \times \bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t} \arrow[d, "{[\,;]^{\omega_t}}"] \\ \bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t} \arrow[r, "C_{\alpha_t}"'] & \bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t} \end{tikzcd}$$

Un cálculo directo revela que la aplicación transpuesta:

$$\begin{array}{c} (\bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t})^* \xrightarrow{(C_{\alpha_t})^t} (\bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t})^* \\ \bar{\xi} \rightarrow (C_{\alpha_t})^t(\bar{\xi})\,, \end{array}$$

es la traslación $(C_{\alpha_t})^t = \lambda_{-\alpha_t}$, donde,

$$\begin{array}{c} \lambda_{\alpha_t} : (\bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t})^* \rightarrow (\bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t})^* \\ \bar{\xi} \rightarrow \bar{\xi} + \alpha_t\,. \end{array} \tag{d}$$

En la siguiente proposición vemos que el isomorfismo C_{α_t} relaciona las acciones coadjuntas $\overline{\mathrm{Ad}}^* \cdot \overline{\exp}_{\beta_t} x$ y $\overline{\mathrm{Ad}}^* \cdot \overline{\exp}_{\omega_t} x$ de los los grupos de Lie simplemente conexos $\overline{G}_{\beta_t}$ y $\overline{G}_{\omega_t}$ de álgebras de Lie $\bar{\mathfrak{g}}_{\beta_t}$ y $\bar{\mathfrak{g}}_{\omega_t}$ respectivamente.

Proposición 2.15 *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* & \xrightarrow{\lambda_{\alpha_t}} & \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \\ {\scriptstyle \overline{\mathrm{Ad}}^* \cdot \overline{\exp}_{\beta_t} x} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \overline{\mathrm{Ad}}^* \cdot \overline{\exp}_{\omega_t} x} \\ \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* & \xrightarrow[\lambda_{\alpha_t}]{} & \mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^* \end{array}$$

Prueba Sean $\tilde{\beta}_t$, $\tilde{\omega}_t$ y $\widetilde{\tilde{\delta}\,\alpha_t}$ los homomorfismos asociados a β_t, ω_t y $\tilde{\delta}\,\alpha_t$ respectivamente (expresión (b) de 4.2.1).

A partir de la igualdad (d) de 4.2.1, que define la acción coadjunta de G_{β_t} tenemos:

$$\big(\lambda_{\alpha_t} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^*(\exp_{\beta_t} x)\big)(\xi + \mathrm{E}^*) = \mathrm{Ad}^*(\exp x) \cdot \xi + \tilde{\beta}_t(-x) \circ A(-x) + \alpha_t + \mathrm{E}^* . \qquad \text{(e)}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \big(\overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}_{\omega_t} x) \circ \lambda_{\alpha_t}\big)(\xi + \mathrm{E}^*) &= \overline{\mathrm{Ad}}^*(\overline{\exp}_{\tilde{\omega}_t} x)(\xi + \alpha_t + \mathrm{E}^*) = \\ &= \mathrm{Ad}^*(\exp x)(\xi + \alpha_t) + \tilde{\omega}_t(-x) \cdot A(-x) + \mathrm{E}^* = \\ &= \mathrm{Ad}^*(\exp x) \cdot \xi + \mathrm{Ad}^*(\exp x) \cdot \alpha_t + \tilde{\beta}_t(-x) \circ A(-x) + \widetilde{\tilde{\delta}\,\alpha_t}(-x) \circ A(-x) + \mathrm{E}^* , \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

Ahora bién, de (c) se deduce

$$\widetilde{\tilde{\delta}\,\alpha_t}(x) = -\alpha_t \circ \mathrm{ad}\, x ,$$

y por definición de $A(x)$ (expresión (c) de 4.2.1), tenemos

$$\mathrm{ad}(-x) \circ A(-x) = \mathrm{Ad}(\exp(-x)) - I ,$$

con lo cual:

$$\widetilde{\tilde{\delta}\,\alpha_t}(-x) \circ A(-x) = -\alpha_t \circ \mathrm{Ad}(\exp(-x)) + \alpha_t = -\,\mathrm{Ad}^*(\exp x) \cdot \alpha_t + \alpha_t .$$

Sustituyeno en (f) queda demostrada la igualdad de (e) y (f) y por tanto que el diagrama es conmutativo. ■

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ dos funciones arbitrarias. Consideremos los productos estrella determinados por los cociclos ω_t y β_t sobre $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$ (Teorema 2.1):

$$(\varphi_1 *_{\omega_t} \varphi_2)(\xi) = \sum_{R \geq 0} Q_R^{\omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} ; \frac{\partial}{\partial \xi} ; \xi \right) (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\xi)\, \hbar^R ,$$

y

$$(\varphi_1 *_{\beta_t} \varphi_2)(\xi) = \sum_{R \geq 0} Q_R^{\beta_t} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} ; \frac{\partial}{\partial \xi} ; \xi \right) (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\xi)\, \hbar^R ,$$

donde los operadores Q_R están definidos en (l) de 4.2.2. Entonces se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.16

(1) *Los productos estrella* $*_{\omega_t}$ *y* $*_{\beta_t}$ *están relacionados por la igualdad:*

$$(\varphi_1 *_{\omega_t} \varphi_2) \circ \lambda_{\alpha_t} = (\varphi_1 \circ \lambda_{\alpha_t}) *_{\beta_t} (\varphi_2 \circ \lambda_{\alpha_t}),$$

donde λ_{α_t} *está definda en* (d).

(2) *Escribiendo la expresión asintótica:*

$$\varphi \circ \lambda_{\alpha_t} = \Big(1 + \sum_{l \geq 1} H_l\, t^l\Big)(\varphi) \equiv H(t)(\varphi), \tag{g}$$

donde $\{H_l;\, l \geq 1\}$ *son operadores diferenciales sobre* $\mathfrak{g}^* + \mathrm{E}^*$, *se tiene la siguiente expresión formal:*

$$\varphi_1 *_{\omega_\hbar} \varphi_2 = H(\hbar)^{-1}\big(H(\hbar)(\varphi_1) *_{\beta_\hbar} H(\hbar)(\varphi_2)\big),$$

y $H(\hbar)$ *es una equivalencia entre los productos estrella* $*_{\omega_\hbar}$ *y* $*_{\beta_\hbar}$.

Prueba

(1) Los operadores $Q_R^{\omega_t}$ y $Q_R^{\beta_t}$ están construidos (ver Proposición 2.9) a partir de los polinomios

$$J_k^{\omega_t}(x;y;\xi) = \xi \cdot \mathrm{z}_{k+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\omega_t}(x;y), \tag{h}$$

y

$$J_k^{\beta_t}(x;y;\xi) = \xi \cdot \mathrm{z}_{k+1}(x;y) + \hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\beta_t}(x;y),$$

definidos en (c) de 4.2.2.

El Lema 2.1 aplicado al álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{g}}^{\omega_t}$ se escribe así:

$$(\overline{\mathrm{ad}}^{\omega_t}\, \bar{x})^r \cdot (\overline{\mathrm{ad}}^{\omega_t}\, \bar{y})^s \cdot \bar{z} = (\mathrm{ad}\, x)^r \cdot (\mathrm{ad}\, y)^s \cdot z + \big(\tilde{\omega}_t(x) \cdot (\mathrm{ad}\, x)^{r-1} \cdot (\mathrm{ad}\, y)^s \cdot z\big)\,\mathrm{E},$$

es decir,

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{ad}}^{\omega_t}\, \bar{x})^r \cdot (\overline{\mathrm{ad}}^{\omega_t}\, \bar{y})^s \cdot \bar{z} &= \\ &= (\overline{\mathrm{ad}}^{\beta_t}\, \bar{x})^r (\overline{\mathrm{ad}}^{\beta_t}\, \bar{y})^s \cdot \bar{z} + \Big(\, \widetilde{\bar{\delta}\,\alpha_t}(x) \cdot (\mathrm{ad}\, x)^{r-1} \cdot (\mathrm{ad}\, y)^s \cdot z\,\Big)\,\mathrm{E} = \\ &= (\overline{\mathrm{ad}}^{\beta_t}\, \bar{x})^r (\overline{\mathrm{ad}}^{\beta_t}\, \bar{y})^s \cdot \bar{z} - \Big(\alpha_t\big[x\,; (\mathrm{ad}\, x)^{r-1} \cdot (\mathrm{ad}\, y)^s \cdot z\big]\Big)\,\mathrm{E}.\end{aligned}$$

Entonces, los polinomios $\hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\beta_t}(x;y)$ y $\hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\omega_t}(x;y)$ (definidos en (n) y (o) de 4.2.1) están relacionados por la igualdad:

$$\hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\omega_t}(x;y) = \hat{\mathrm{z}}_{k+1}^{\beta_t}(x;y) - \alpha_t(\mathrm{z}_{k+1}(x;y)). \tag{i}$$

Sustituyendo (i) en (h) se tiene:

$$J_k^{\omega_t}(x;y;\xi) = J_k^{\beta_t}(x;y;\xi - \alpha_t).$$

y por tanto

$$Q_R^{\omega_t}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\Big) = Q_R^{\beta_t}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi - \alpha_t\Big).$$

Haciendo $\xi = \xi' + \alpha_t$, tenemos:

$$Q_R^{\omega_t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi\right)(\varphi_1\otimes\varphi_2)(\xi) = Q_R^{\beta_t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi-\alpha_t\right)(\varphi_1\otimes\varphi_2)(\xi) =$$
$$= Q_R^{\beta_t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,;\,\xi'\right)\big((\varphi_1\circ\lambda_{\alpha_t})\otimes(\varphi_2\circ\lambda_{\alpha_t})\big)(\xi'),$$

y finalmente

$$(\varphi_1 *_{\omega_t} \varphi_2)(\xi) = \Big(\big((\varphi_1\circ\lambda_{\alpha_t}) *_{\beta_t} (\varphi_2\circ\lambda_{\alpha_t})\big)\circ\lambda_{-\alpha_t}\Big)(\xi)\,.$$

(2) Como serie de potencias en t y $\hbar$ la última igualdad se escribe así:

$$\varphi_1 *_{\omega_t} \varphi_2 = H(t)^{-1}\left(H(t)(\varphi_1) *_{\beta_t} H(t)(\varphi_2)\right)\,.$$

Si ahora se pone $t=\hbar$, la demostración del Teorema 2.4 implica el resultado. ∎

Con las notaciones de la Proposición 2.3, sean $\mathcal{K}_{\omega_t} : U_e \subset G \longrightarrow \mathcal{O}_{E^*}$ y $\mathcal{K}_{\beta_t} : U_e \subset G \longrightarrow \mathcal{O}_{E^*}$ los difeomorfismos locales correspondientes a los cociclos β_t y ω_t, y sean ψ_1 y ψ_2 dos funciones definidas sobre el entorno U_e de G. Denotemos también por $*_{\beta_t}$ el producto estrella sobre $(G;\beta_t)$ del Teorema 2.3 y por $*_{\omega_t}$ el producto estrella sobre $(G;\omega_t)$.

Proposición 2.17 *Si t es suficientemente pequeño, tenemos:*

$$\psi_1 *_{\omega_t} \psi_2 = \big((\psi_1\circ M_t) *_{\beta_t} (\psi_2\circ M_t)\big)\circ M_t^{-1}\,,$$

siendo $M_t = \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\circ\lambda_{\alpha_t}\circ\mathcal{K}_{\beta_t}$ una aplicación de $W(e)\subset U(e)$ en $U(e)$ y λ_{α_t} la aplicación definida en (d).

Prueba En el entorno de E^*: $\mathcal{K}_{\omega_t}(U_e)\subset \mathfrak{g}^* + E^*$, se tiene:

$$\left(\psi_1\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\right) *_{\omega_t} \left(\psi_2\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\right) = \left(\left(\psi_1\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\circ\lambda_{\alpha_t}\right) *_{\beta_t} \left(\psi_2\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\circ\lambda_{\alpha_t}\right)\right)\circ\lambda_{-\alpha_t} =$$
$$= \left(\left(\psi_1\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\circ\lambda_{\alpha_t}\circ\mathcal{K}_{\beta_t}\right) *_{\beta_t} \left(\psi_2\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\circ\lambda_{\alpha_t}\circ\mathcal{K}_{\beta_t}\right)\right)\circ\mathcal{K}_{\beta_t}^{-1}\circ\lambda_{-\alpha_t}\,,$$

entonces, puesto que sobre el grupo se satisface (Teorema 2.3):

$$\psi_1 *_{\omega_t} \psi_2 = \left(\left(\psi_1\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\right) *_{\omega_t} \left(\psi_2\circ\mathcal{K}_{\omega_t}^{-1}\right)\right)\circ\mathcal{K}_{\omega_t}\,,$$

se concluye:

$$\psi_1 *_{\omega_t} \psi_2 = \left(\left(\psi_1\circ M_t\right) *_{\omega_t} \left(\psi_2\circ M_t\right)\right)\circ M_t^{-1}\,.$$

∎

Sea W_0 un entorno de $0\in\mathfrak{g}$ tal que $\exp(W_0)\equiv W_e$ es un entorno simétrico de la identidad $e\in G$ contenido en el entorno U_e de la proposición anterior. Entonces, según la Proposición 2.3, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \exp(W_0) & \xrightarrow{\mathcal{K}_{\omega_t}} & \mathcal{O}_{E^*} \\ {\scriptstyle\lambda_{\exp z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\mathrm{Ad}}^*\,\overline{\exp}\,z} \\ \exp U_0 & \xrightarrow[\mathcal{K}_{\omega_t}]{} & \mathcal{O}_{E^*} \end{array} \qquad \text{(j)}$$

para todo $z\in W_0$, y de manera similar para el difeomorfismo local $\mathcal{K}_{\beta_t} : \exp(W_0)\longrightarrow\mathcal{O}_{E^*}$.

Como consecuencia de estos resultados se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.18 *Si $z \in W_0$ y t es pequeño, se tiene:*

$$\lambda_{\exp z} \circ M_t = M_t \circ \lambda_{\exp z}\,.$$

Prueba En efecto, teniendo que (j) es conmutativo y la Proposición 2.15, el siguiente cálculo es inmediato:

$$\begin{aligned}\lambda_{\exp z} \circ M_t &= \lambda_{\exp z} \circ \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1} \circ \lambda_{\alpha_t} \circ \mathcal{K}_{\beta_t} = \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^* \,\overline{\exp}_{\omega_t} z \circ \lambda_{\alpha_t} \circ \mathcal{K}_{\beta_t} = \\ &= \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1} \circ \lambda_{\alpha_t} \circ \overline{\mathrm{Ad}}^* \,\overline{\exp}_{\beta_t} z \circ \mathcal{K}_{\beta_t} = \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1} \circ \Lambda_{\alpha_t} \circ \mathcal{K}_{\beta_t} \circ \lambda_{\exp z} = \\ &= M_t \circ \lambda_{\exp z}\,.\end{aligned}$$

■

Considerando coordenadas normales $\{x^a\,;\ a = 1, \ldots, n = \dim G\}$ sobre el entorno $W_e \subset G$, la igualdad

$$x' = M_t(x)$$

se escribe, en componentes, así:

$$(x')^a = \sum_{k\geq 0} A_k^a(x)\, t^k\,; \qquad A_0^a(x) = x^a\,,$$

donde $A_k^a(x)$ son funciones analíticas y el desarrollo en serie de potencias de t es consecuencia del carácter analítico en t de la aplicación $M_t = \mathcal{K}_{\omega_t}^{-1} \circ \lambda_{\alpha_t} \circ \mathcal{K}_{\beta_t}$.

Introduzcamos la notación

$$\Omega_R^{a,l}(x) = \sum_{k_1+\cdots+k_l=R} A_{k_1}^a(x) \cdots A_{k_l}^a(x)\,,$$

y definamos el operador diferencial L_R por medio de la igualdad:

$$\left(L_R\psi\right)(x) = \sum_{\substack{R_1+\cdots R_n=R \\ R_1\geq l_1\geq 0 \\ \vdots \\ R_n\geq l_n\geq 0}} \frac{1}{L!}\,\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}\psi}{(\partial x^1)^{l_1}\cdots(\partial x^n)^{l_n}}(x)\cdot\Omega_{R_1}^{1,l_1}(x)\cdots\Omega_{R_n}^{n,l_n}(x)\,. \tag{k}$$

Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.19 *Con la notación anterior, si ψ es una función definida sobre el entorno $W_e \subset G$, la composición $\psi \circ M_t$ admite el siguiente desarrollo en serie de potencias de t:*

$$(\psi \circ M_t)(x) = \sum_{R\geq 0} (L_R\psi)(x)\, t^R\,, \tag{l}$$

donde los L_R; $(R \geq 0)$, definidos por la expresión (k), son operadores diferenciales invariantes sobre G y $L_0 = 1$

Prueba Del desarrollo de Taylor de la función $\psi_1(x')$ en el punto x tenemos:

$$\psi_1(x') = \sum_{l_1,\dots,l_n\geq 0} \frac{1}{L!}\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}\psi_1}{(\partial x^1)^{l_1}\cdots(\partial x^n)^{l_n}}(x)(x'^1-x^1)^{l_1}\cdots(x'^n-x^n)^{l_n} =$$

$$= \sum_{R\geq 0}\left[\sum_{\substack{R_1+\dots+R_n=R\\ R_1\geq l_1\geq 0\\ R_n\geq l_n\geq 0}} \frac{1}{L!}\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}\psi_1}{(\partial x^1)^{l_1}\cdots(\partial x^n)^{l_n}}(x)\cdot\Omega^{1,l_1}_{R_1}(x)\cdots\Omega^{n,l_n}_{R_n}(x)\right] t^R \equiv$$

$$\equiv \sum_{R\geq 0}(L_R\psi_1)(x)\, t^R\,,$$

Si $z\in\mathfrak{g}$ es pequeño:

$$(\psi_1\circ M_t)(\lambda_{\exp z}x) = \sum_{R\geq 0}(L_R\psi_1)(\lambda_{\exp z}\cdot x)\, t^R\,.$$

A partir de la Proposición 2.18, también tenemos:

$$\left(\psi_1\circ M_t\right)\left(\lambda_{\exp z}\cdot x\right) = \left(\psi_1\circ\lambda_{\exp z}\right)\left(M_t(x)\right) = \sum_{R\geq 0}L_R(\psi_1\circ\lambda_{\exp z})(x)\, t^R\,.$$

Por tanto tenemos:

$$\left(L_R\psi_1\right)\circ\lambda_{\exp z} = L_R\left(\psi_1\circ\lambda_{\exp z}\right)\,,$$

en un entorno pequeño de $e\in G$. Esta relación definine L_R como un operador diferencial invariante sobre G. ■

Pongamos $t=\hbar$ en la Proposición 2.17. Como serie de potencias en $\hbar$, $\psi_1 *_{\omega_\hbar} \psi_2$ es un producto estrella sobre G (Teorema 2.5) determinado por el cociclo $\omega_\hbar$. Si ahora nos referimos al desarrollo (l), se observa que, como serie de potencias en $\hbar$, $\left((\psi_1\circ M_\hbar) *_{\beta_\hbar} (\psi_2\circ M_\hbar)\right)\circ M_\hbar^{-1}$ define un producto estrella sobre G, equivalente al producto estrella $\psi_1 *_{\omega_\hbar}\psi_2$. Con las notaciones ya introducidas se tiene:

Teorema 2.8 *Sean los 2-cociclos*

$$\begin{aligned}\beta_\hbar &= \beta_1+\beta_2\,\hbar+\dots+\beta_k\,\hbar^{k-1}+\dots\\ \omega_\hbar &= \beta_\hbar+\tilde\delta\,\alpha_\hbar\end{aligned}$$

donde $\alpha_\hbar=\alpha_2\,\hbar+\dots+\alpha_k\,\hbar^{k-1}+\cdots$. Sean

$$F^\omega(x;y)=\sum_{R\geq 0}F^\omega_R(x;y)\,\hbar^R\,;\qquad F^\beta(x;y)=\sum_{R\geq 0}F^\beta_R(x;y)\,\hbar^R$$

los productos estrella invariantes sobre G definidos, en el Teorema 2.5, respectivamente por los cociclos $\omega_\hbar$ y $\beta_\hbar$. Sea $L(x)=\sum_{R\geq 0}L_R(x)\,\hbar^R$ el elemento de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ que define el desarrollo (k). *Entonces:*

$$F^\omega(x;y)=L^{-1}(x+y)F^\beta(x;y)L(x)L(y)\,.$$

Esto es, $F^\omega(x;y)$ y $F^\beta(x;y)$ son equivalentes por medio del elemento $L(x)\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.

A partir de los Teorema 2.7 y 2.8 se obtiene obviamente:

Teorema 2.9 (Drinfeld V. G. [1983b]) *Sea V un subespacio vectorial del espacio $Z^2(\mathfrak{g})$ de los 2-cociclos de de Rham invariantes sobre G, suplementario del espacio de los cociclos de de Rham invariantes exactos $B^2(\mathfrak{g})$, i.e. $Z^2(\mathfrak{g}) = V \oplus B^2(\mathfrak{g})$. Sea $F'(x;y)$ un producto estrella invariante cualquiera sobre $(G;\beta_1)$. Entonces $F'(x;y)$ es equivalente a un producto estrella obtenido, en el procedimiento del Teorema 2.5, a partir del cociclo:*

$$\beta_\hbar = \beta_1 + \beta_2\,\hbar + \cdots + \beta_R\,\hbar^{R-1} + \cdots ,$$

tal que $\beta_k \in V$ si $k > 1$.

Bibliografía

1. Abe, E. 1980. *Hopf Algebras*. Cambridge Univ. Press. Cambridge.

2. Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T. 1983. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Addison-Wesley. London.

3. Abraham, R., Marsden, J. 1978. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin-Cummings. London.

4. Aminou, R., Kosmann-Schwarzbach, Y. 1988. Bigèbres de Lie, doubles et carrés. *Annales Inst. Henri Poincaré, Serie A (Physique Théorique)*, **49** (4), 461–478.

5. Aminou, R. 1988. *Groupes de Lie-Poisson et Bigèbres de Lie*, (These). Universite des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois.

6. Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D. 1978. Deformation Theory and Quantization I and II. *Ann. of Phys.*, **111**, 61–151.

7. Bourbaki, N. 1972. *Groupes et Algèbres de Lie*. Diffusion C. C. L. S. Paris.

8. Cartier, P. 1955/56. *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*, Séminaire Sophus Lie, 2ème année 1955/56. Faculté des Sciences de Paris.

9. Choquet-Bruhat, Y., De Witt-Morette, C. 1989. *Analysis, Manifolds and Physics. Part II: 92 Applications*. North-Holland. Amsterdam.

10. Chu, R. Y. 1975. Symplectic Homogeneous Spaces. *Trans. Amer. Mat. Soc.*, **197**, 145–59.

11. De Wilde, M., Lecompte, P. B. A. 1983. Existence of Star-products and of formal deformations of the Poisson-Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. *Letters in Math. Phys.*, **7**, 487–496.

12. De Wilde, M., Lecompte, P. B. A. 1988. in: *Deformation theory of algebras and structures and applications*, Eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber. Kluwer. Dordrecht.

13. Dieudonné, J. 1970. *Elements d'analyse 3*. Gauthier-Villars. Paris.

14. Dixmier, J. 1974. *Algèbres Enveloppantes*. Gauthier-Villars. Paris.

15. Drinfeld, V. G. 1983a. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Sov. Math. Dokl.*, **27**, 68–71.

16. Drinfeld, V. G. 1983b. On constant, quasiclassical solutions of the Yang-Baxter quantum equation. *Soviet Math. Dokl.*, **28**, 667–671.

17. Drinfeld, V. G. 1986. Quantum groups, in: *I. C. M. Proc.* Berkeley, pp. 798–820.

18. Drinfeld, V. G. 1990. Quasi-Hopf algebras. *Leningrad Math. J.*, **1** nº6.
19. Drinfeld, V. G. 1992. On some unsolved problems in quantum group theory, in: *Lectures Notes in Math.* vol. 1510. Springer. Berlin.
20. Faddeev, L. D., Takhtajan, L. A. 1987. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer. Berlin.
21. Fomenko, A. T., Trofimov, V. V. 1988. *Integrable Systems on Lie Algebras and Symetric Spaces*. Gordon and Breach. New York.
22. Gelfand, I. G., Dorfman, I. Ya. 1982. Hamiltonian operators and the classical Yang-Baxter equation. *Funct. Anal. Appl.*, **16** (4), 241–248.
23. Gerstenhaber, M. 1963. The cohomology structure of an associative ring. *Ann. Math.*, **78**, 267–288.
24. Gerstenhaber, M. 1964a. Deformation theory of algebraic structures. *Ann. of Math.*, **79**, 59–90.
25. Gerstenhaber, M. 1964b. On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, **79**, 59–103.
26. Gerstenhaber, M. 1988. in: *Deformation theory of algebras and structures and applications*, Eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber. Kluwer. Dordrecht.
27. Groenwold, H. J. 1946. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, **12**, 405–460
28. Grossmann, A., Loupias, G., Stein, E. M. 1969. An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics phase space. *Ann. Inst. Fourier*, **18**, 343.
29. Guichardet, A. 1980. *Cohomologie des grupes topologiques et des algebres de Lie*. Ferdinand-Nathan. Paris.
30. Guichardet, A. 1995. *Groupes Quantiques*. InterÉdictions/CNRS Éditions. Paris.
31. Helgason, S. 1978. *Diferential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces*. Academic Press. New York.
32. Knapp, A. W. 1988. *Lie Groups, Lie Algebras, and Cohomology*. Princeton University Press. Princeton.
33. Kosmann-Schwarzbach, Y. 1987. Poisson-Drinfeld groups, in: *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations*. World Scientific. London.
34. Kosmann-Schwarzbach, Y., Magri, F. 1988. Poisson-Lie groups and complete integrability. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **49** (4), 433–460.
35. Kosmann-Schwarzbach, Y., Magri, F. 1990. Poisson-Nijenhuis structures. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **53** (1), 35–81.
36. Lazard, M. 1955. Lois des groupes et analyseurs. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **72**, 299–400.
37. Liberman, P., Marle, Ch. 1987. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Reidel. Dordrecht.
38. Lichnerowicz, A. 1962. *Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie*. Edizione Cremonese. Roma.
39. Lichnerowicz, A. 1980. Sur les algèbres formelles associées par déformation a une variété symplectique. *Ann. di Matem.*, **123**, 287–330.

40. Lichnerowicz, A. 1982. Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (Les $*_\nu$-Produits). *Ann. Inst. Fourier*, **32**, 157–209.

41. Lichnerowicz, A. 1983. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Diff. Geom.*, **18**, 523.

42. Lu, J. H., Weinstein, A. 1990. Poisson Lie groups, dressing transformations and the Bruhat decomposition. *J. Diff. Geom.*, **31**, 501–526.

43. Moreno, C. 1990. Produits star sur certains G/K Käleriens. Equation de Yang-Baxter quantique constante, in: *Lecture Notes in Math.* vol. 1416. Springer. Berlin.

44. Moreno, C., Valero, L. 1990. Produits star invariants et équation de Yang-Baxter quantique constante, in: *Proc. of the "Journnées Relativistes"*. pp. 225–256. Grenoble.

45. Moreno, C., Valero, L. 1990. Cohomology de Hochschild de $C^\infty(G)$ et equation de Yang-Baxter quantique constante, in: *Proceedings of the "Encuetros Españoles"*. Palma de Mallorca.

46. Moreno, C., Valero, L. 1992. Star products and quantization of Poisson-Lie groups. *Jour. Geom. Phys.*, **9** (4), 369–402.

47. Moreno, C., Valero, L. 1992. Invariant star products on a Lie group with an invariant sympletic structure, in: *Recent Developments in Gravitation*. World Scientific. London.

48. Moreno, C., Valero, L. 1994. Star products and quantum groups, in: *Physics on Manifolds*. Kluwer. Dordrecht.

49. Moyal, J. E. 1949. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**, 99.

50. Neroslavsky, O. M., Vlassov, A. T. 1979. Sur les déformations de l'algèbredes fonctions d'une variété symplectique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292** (A), 71–73.

51. Nijenhuis, A. 1955. Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. I. *Indag. Math.*, **17**, 390–403.

52. Perelomov, A. M. 1990. *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*. Birkhäuser. Basel.

53. Postnikov, M. 1982. *Groupes et Algèbres de Lie*. Èditions MIR. Moscou.

54. Reyman, A. G., Semenov-Tian-Shansky, M. A. 1994. Group-Theoretical Methods in the Theory of Finite-Dimensional Integrable Systems, in:*Dynamical Systems VII*, pp. 116–225. Springer-Verlag. Berlin.

55. Rieffel, M. A. 1989. Deformation quantization of Heisenberg manifolds. *Comm. Math. Phys.*, **122**, 531–562.

56. Rieffel, M. A. 1990. Lie groups convolution algebras as deformation quantization of linear-Poisson structures. *Amer. J. Math.*, **112** (4), 567–686.

57. Rieffel, M. A. 1993. Deformation quantization for actions of R^d. *Mem. Amer. Math. Soc.* vol. 106 (506).

58. Sagle, A., Walde, R. 1973. *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Academic Press. New York.

59. Semenov-Tian-Shansky, M. A. 1983. What is a classical R-matrix?. *Funct. Anal. Appl.*, **17** (4), 259–272.

60. Serre, J. P. 1965. *Lie Algebras and Lie Groups. Lectures given at Harvard University*. Benjamin. London.

61. Schouten, J. A. 1953. On the differential operators of first order in tensor calculus. *Convengo Intern. Geometria Differenziale Italia*. Edizioni Cremonese. Roma.

62. Sklyanin, E. K. 1982. Quantum version of the method of inverse scattering problem. *Journal Soviet Math.*, **19**, 1546–1596.

63. Takhtajan, L. A. 1990. Lectures on quantum groups, in: *Introduction to Quantum Grpoups and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory*. Nankai Lectures on Mathematical Physics. World Scientific. London.

64. Treves, F. 1967. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press. New York.

65. Van Hove, L. 1951. Sur certaines représentations unitaries d'un groupe infini de transformations. *Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sci.) t. XXVI*, 61–102.

66. Varadarajan, V. S. 1974. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. Springer. Berlin.

67. Vey, J. 1975. Déformations du crochet de Poisson sur une variété symplectique. *Comm. Math. Helv.*, **50**, 421–454.

68. Weinstein, A. 1983. The local structure of Poisson manifolds. *J. Diff. Geom.*, **18**, 523–557.