COMPLEMENTACIÓN, CASINORMABILIDAD Y TONELACIÓN EN ESPACIOS DE POLINOMIOS

Memoria presentada por
FERNANDO BLASCO CONTRERAS
para la obtención del Grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas.
Dirigida por el Dr.
José María Martínez Ansemil

A mi familia, que siempre está conmigo

Los ciento sesenta personajes que bullen – no corren – por sus páginas me han traído durante cinco largos años por el camino de la amargura. Si acerté con ellos o con ellos me equivoqué, es cosa que deberá decir el que leyere.

Camilo José Cela. "La Colmena".

Agradecimientos

Depués de que hubiera terminado la Licenciatura en Ciencias Matemáticas, mi abuela me preguntó un día ¿ahora te vas a meter a médico?. La abuela estaba equivocada, yo no estudiaba para llegar a médico, sino para Doctor. Ahora, a pesar de haber vivido 103 años, no lo va a ver. Esta simple anécdota muestra la preocupación que siempre ha mostrado mi familia por mi trabajo. Deseo agradecerles aquí la ayuda y el apoyo que me han prestado siempre todos ellos, en particular mis padres y mi hermano y Gema, mi esposa.

También estoy en deuda con mis compañeros, actuales y antiguos, de la Unidad Docente de Matemáticas de la E.T.S.I. de Montes, que una vez más han dado muestras de una gran paciencia soportándome, especialmente estos últimos días, en momentos de nervios y tensión. Cuando se realiza un trabajo de este tipo se agradece estar rodeado por personas que han pasado por ello y te ofrecen su experiencia, sobre todo en momentos de "sequía", en particular deseo referirme a Manuel Alonso, que siempre me ha animado a continuar.

No podría terminar los agradecimientos sin referirme al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, como institución, y a las personas que lo integran, cuyo apoyo a mi estudio ha sido fundamental en la realización de esta memoria. En este momento, en el que está todo terminado o, mejor dicho, en el que está todo a punto de comenzar, quiero agradecer al Director de este trabajo, José María Martínez Ansemil, por ofrecerme problemas que estudiar y recordarme, en algunos momentos, que debía dedicarme a ellos. Quiero hacer también una mención especial a Socorro Ponte, que siempre ha acogido mis preguntas. Ha sido fundamental la ciencia y la paciencia que me han dedicado ambos Profesores, ya que sin sus valiosas sugerencias e indicaciones en cuanto a los problemas que se estudian en esta memoria, como en cuanto a la redacción de la misma, el resultado habría sido radicalmente distinto.

Introducción

En esta memoria se presenta un estudio de algunas propiedades relativas a los productos tensoriales de espacios localmente convexos y a los espacios de polinomios homogéneos continuos definidos sobre un espacio localmente convexo, generalmente de Fréchet. Se van a demostrar resultados originales, que van a permitir profundizar en determinadas cuestiones relacionadas con el Análisis Funcional. Como consecuencia de los resultados que se obtienen vamos a poder proporcionar algunos nuevos ejemplos en este ámbito.

El estudio de los Productos Tensoriales Topológicos de espacios localmente convexos fue iniciado por Grothendieck en 1955, con el objeto de obtener un predual para los espacios de formas bilineales. Por otro lado, Nachbin sistematiza a finales de los 60 el estudio de las Aplicaciones Holomorfas en Dimensión Infinita. En principio, se podría pensar que no existe relación alguna entre ambos objetos; sin embargo, ambas teorías están relacionadas a través de los espacios de polinomios.

Un problema clásico en Holomorfía en Dimensión Infinita planteado por Nachbin en 1967 es el estudio de la coincidencia de las topologías compacto-abierta (τ_0) y portada de Nachbin (τ_ω) en los espacios de funciones holomorfas definidas sobre abiertos equilibrados de un espacio localmente convexo. Es bien conocido que, para espacios de Fréchet E, una condición necesaria para la coincidencia de estas dos topologías es que E sea un espacio de Montel. Este problema fue estudiado por Barroso, Barroso-Nachbin, Boland-Dineen, Meise y Mujica a lo largo de los años 70 y principios de los 80 para determinadas clases de espacios de Fréchet-Montel, trabajando directamente con los espacios de funciones holomorfas. En 1988 Ansemil-Ponte relacionaron la igualdad de esas dos topologías en los espacios de funciones holomorfas con la coincidencia de esas dos topologías en los espacios de polinomios n-homogéneos, $\mathcal{P}(^nE)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y dieron además condiciones equivalentes a la coincidencia de τ_0 y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^nE)$, cuando E es un espacio de Fréchet-Montel; pero no se conocía ningún ejemplo de espacio de Fréchet-Montel E para el que ocurriera que $\tau_0 \neq \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$. De hecho, ese problema estuvo abierto algún tiempo más.

Mientras por un lado se desarrollaba la teoría de Holomorfía en Dimensión Infinita, por otro lado se continuaban estudiando cuestiones relativas a Productos Tensoriales Topológicos. En la Tesis Doctoral de Ryan, de 1980, se estudia, entre otras cosas, la relación existente entre los polinomios n-homogéneos y los n-productos tensoriales simétricos que se consideran en ese trabajo. De hecho, el n-producto tensorial simétrico de un espacio localmente convexo (dotado de la topología proyectiva) es un predual para el espacio $\mathcal{P}(^nE)$. Del mismo modo como en Holomorfía un problema importante era el estudio de la coincidencia de τ_0 y τ_ω, en la teoría de Productos Tensoriales estaba presente el "Problema de las Topologías" de Grothendieck: dados dos espacios localmente convexos E y F, y dado un acotado B de $E\hat{\otimes}_\pi F$, ¿existirán acotados B_E de E y B_F de F tales que B esté contenido en la envoltura absolutamente convexa de $B_E \otimes B_F$? En el caso en el que se consideraban E y F dentro de la clase de los espacios de Montel, el Problema de las Topologías resultaba ser equivalente al de saber si $E\hat{\otimes}_\pi F$ era un espacio de Montel. Este problema se mantuvo abierto hasta que Taskinen lo resolvió en 1986, y junto con la resolución de este problema introdujo una nueva clase de espacios: para Taskinen un par de espacios localmente convexos (E, F) verifica la propiedad (BB) si para cada acotado B de $E\hat{\otimes}_\pi F$ existen acotados B_E de E y B_F de F tales que $B \subset \bar{\Gamma}(B_E \otimes B_F)$; esto es, (E, F) verifica la propiedad (BB) si y sólo si para ese par de espacios el Problema de las Topologías de Grothendieck tiene respuesta afirmativa. Lo que hace Taskinen es construir un espacio de Fréchet-Montel E para el que (E, ℓ_2) no verifica (BB). Por otra parte, Taskinen da ejemplos de determinadas clases de espacios E para los que el par (E, F) verifica la propiedad (BB) cuando E es un espacio de Banach. Entre esta clase de espacios se encuentran, por ejemplo, los espacios escalonados de Köthe. Taskinen continuó proporcionando ejemplos de pares de espacios sin verificar la propiedad (BB). En particular, construyó un espacio de Fréchet-Montel E tal que (E, E) no verificaba (BB) (y, por tanto, $E\hat{\otimes}_\pi E$ no podía ser un espacio de Montel).

Tras los trabajos de Taskinen se volvió a relacionar la Teoría de Productos Tensoriales Topológicos con la Teoría de Holomorfía, ya que Ansemil-Taskinen en 1990 ofrecieron, utilizando tensores, el primer ejemplo de un espacio de Fréchet-Montel E para el que $\tau_0 \neq \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^2E)$. Dineen también relaciona los resultados de Taskinen con la Holomorfía, mostrando nuevos ejemplos de espacios de Fréchet-Montel

E para los que $\tau_0 = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$; de hecho, esto le motiva a Dineen a definir la propiedad $(BB)_{n,s}$, que es una versión, válida para n-productos tensoriales simétricos, de la propiedad (BB). Dineen prueba que si E es un espacio de Fréchet-Montel, $\tau_0 = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ si y sólo si E verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$, con lo que finalmente, el problema de la coincidencia de τ_0 y τ_ω se convierte en un problema relativo a productos tensoriales. Más resultados en esta dirección fueron obtenidos por Galindo-García-Maestre y por Defant-Maestre.

Lo que hemos expuesto hasta ahora nos lleva a la conclusión de que está estrechamente relacionado el estudio de los productos tensoriales topológicos y el estudio de ciertos problemas de la holomorfía en dimensión infinita. En esta memoria se van a estudiar propiedades sobre productos tensoriales que abundan en lo conocido hasta el momento. Por otra parte, los resultados que se van a exponer aquí nos van a permitir construir nuevos ejemplos para determinadas situaciones concretas (que se van a mencionar más adelante), contribuyendo así al desarrollo de esta teoría.

La memoria consta de cinco capítulos. En el primero se introducen las notaciones que se van a utilizar en ella, así como las definiciones de los conceptos que se van a manejar posteriormente. Nos centramos en mostrar cuestiones directamente relacionadas con productos tensoriales, productos tensoriales simétricos y polinomios. También se introducen en este capítulo las definiciones básicas de Holomorfía en Dimensión infinita que se utilizan más tarde.

El segundo capítulo constituye una parte básica en la memoria y en él se realiza un estudio sobre complementación en productos tensoriales y productos tensoriales simétricos. Los resultados que se prueban en el capítulo están bastante cercanos al enfoque actual de la teoría de holomorfía que se mencionaba anteriormente. Era conocido que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_0)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^{n+1}E), \tau_0)$, y también que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^{n+1}E), \tau_b)$ cuando E es un espacio de Banach. Uno de los problemas que se podían plantear de modo natural a la vista de esas relaciones era el estudio de la complementación de $(\mathcal{P}(^nE), \tau)$ en $(\mathcal{P}(^{n+1}E), \tau)$ cuando E es un espacio localmente convexo arbitrario y τ es cualquiera de las topologías naturales habitualmente consideradas en esos espacios: τ_b, β o τ_ω (τ_b es la topología de la convergencia uniforme en los acotados, β es la topología fuerte, considerando a $\mathcal{P}(^nE)$ como el espacio dual de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ y τ_ω es la topología portada de Nachbin). En lugar de abordar directamente este problema, abordamos el problema predual, el de estudiar la complementación en productos tensoriales simétricos, y a partir de él nos ocupamos de la complementación en los espacios de polinomios n-homogéneos. Consecuencias derivadas de lo que se obtiene en el segundo capítulo se utilizan en los tres siguientes. La primera sección del capítulo muestra una amplia colección de casos en los que existe complementación en productos tensoriales de espacios localmente convexos, principalmente en productos tensoriales ordinarios (no simétricos). Estos resultados de complementación en productos tensoriales no son resultados muy complicados de probar, es de destacar que en la prueba de esos resultados aparece siempre la propiedad asociativa del producto tensorial, propiedad que no se verifica para el producto tensorial simétrico, con lo que se han de desarrollar nuevas técnicas que nos permitan probar la relación de complementación. En la segunda sección es donde se prueba que $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n+1,s,\pi} E$, utilizando para la prueba de ese resultado algunos Lemas previos que nos van a permitir elegir "buenas" representaciones de los tensores simétricos que utilicemos. En la tercera, y última, sección del capítulo se transportan los resultados sobre complementación en productos tensoriales a resultados sobre complementación en espacios de polinomios homogéneos. Esta forma de obtener resultados sobre polinomios a partir de otros análogos sobre productos tensoriales simétricos es una relación retroalimentada, ya que se puede probar que la propiedad $(BB)_{n+1,s}$ implica la propiedad $(BB)_{n,s}$ utilizando la comparación de dos topologías en los espacios de polinomios homogéneos asociados, y parece que la verificación directa de esa propiedad sería bastante complicada.

En el tercer capítulo de la memoria se expone un ejemplo de espacio localmente convexo E para el que $\mathcal{P}(^nE)$ es casinormable, para cada $n \in \mathbb{N}$, dotado de las topologías antes consideradas, siendo estas topologías distintas entre sí. La introducción de los espacios casinormables se debe a Grothendieck (1954). Gran parte de los espacios usuales del Análisis Funcional son casinormables; por ejemplo, se encuentran dentro de esta clase los espacios de Banach, de Schwartz, los espacios (DF) y los que son un límite inductivo numerable de espacios de Banach. La casinormabilidad de los espacios de polinomios n-homogéneos definidos sobre un espacio de Fréchet E ha sido estudiada en profundidad, por causa de la importancia que tiene en el estudio de la casinormabilidad de los espacios de funciones holomorfas, y, en este contexto, la casinormabilidad de espacios de polinomios y funciones holomorfas ha sido estudiada por Ansemil-Ponte, Isidro, Bonet-Peris, Dineen y Ansemil. Si E es un espacio de Fréchet, los espacios $(\mathcal{P}(^nE), \tau_0)$, $(\mathcal{P}(^nE), \beta)$ y $(\mathcal{P}(^nE), \tau_\omega)$ son espacios casinormables, puesto que se trata de espacios de

Schwartz, (DF) y límite inductivo numerable de espacios de Banach, respectivamente. El estudio de la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ se había abordado hasta ahora para espacios E para los que era conocida la coincidencia de la topología τ_b con otra de las topologías para las que se conocía la casinormabilidad del correspondiente espacio de polinomios. El ejemplo que presentamos en este capítulo es el primer ejemplo en el que se muestra un espacio de Fréchet E para el que el espacio de polinomios n-homogéneos $\mathcal{P}(^nE)$, dotado de las cuatro topologías usuales, es un espacio casinormable, y todas estas topologías son distintas entre sí para $n \geq 2$ y $\tau_0 < \tau_b = \beta < \tau_\omega$, sobre $\mathcal{P}(^1E) = E'$, ya que, sobre este espacio siempre coinciden τ_b y β, por la propia definición de estas topologías. En la primera sección del capítulo se recuerda la definición de los espacios escalonados de Köthe, y se enuncian también conocidas caracterizaciones de algunas de las propiedades que pueden tener estos espacios; concretamente, nosotros vamos a utilizar en nuestro ejemplo un espacio escalonado de Köthe de orden 1 que no sea distinguido. El espacio E que presentamos como ejemplo es el producto tensorial de ese espacio escalonado de Köthe λ_1 y uno de los espacios de Fréchet-Montel F que Taskinen proporciona como contraejemplo al problema de las topologías de Grothendieck. En la segunda sección del capítulo estudiamos una descripción, distinta de la habitual, del espacio $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ (para ese E en particular) así como de su dual. Esto va a ser posible hacerlo debido a las "buenas propiedades" que posee el espacio λ_1 con respecto al producto tensorial por sí mismo. En la tercera sección se prueba la casinormabilidad del espacio de formas n-lineales $(\mathcal{L}(^nE), \tau_b)$ utilizando métodos directos, lo que produce como consecuencia la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$. Al final de la sección se prueba que las cuatro topologías usuales en espacios de polinomios n-homogéneos son distintas entre sí, y para ello se utilizan propiedades de los espacios λ_1 y F (el espacio de Taskinen) que se consideran para producir el ejemplo, como también algunas de las propiedades de complementación en espacios de polinomios que se prueban en el capítulo segundo.

Otro de los problemas clásicos sobre coincidencia de topologías en espacios de polinomios n-homogéneos es el que dio origen al cuarto capítulo de esta memoria. Es conocido que cuando E es de Fréchet τ_ω es la topología tonelada asociada a τ_0 en $\mathcal{P}(^nE)$. Así, se dará la coincidencia de β y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^nE)$ cuando β sea una topología tonelada y la de τ_b, β y τ_ω cuando sea tonelada τ_b. Existen ejemplos conocidos de espacios E para los que se da la coincidencia de τ_b y τ_ω en $\mathcal{P}(^nE)$, y casos importantes dentro de estos son los espacios de Banach y los espacios de Fréchet-Montel que cumplen la propiedad $(BB)_{n,s}$. Lo que estudiaremos en este capítulo es el caso intermedio: ¿qué ocurre con los espacios que no son de Banach ni de Montel?. Encontramos ejemplos de Fréchet en esta situación dentro de los espacios escalonados de Köthe. Lo que se probará es que, si λ_p es un espacio escalonado que no verifica la condición de densidad de Heinrich, entonces si $n \geq p$, $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b)$ no es un espacio tonelado, por lo que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b) \neq (\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_\omega)$. De hecho, se van a caracterizar los espacios λ_p para los que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b) = (\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_\omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ precisamente como los espacios λ_p para los que se verifica la condición de densidad de Heinrich. En la primera sección del capítulo, por completitud, se indica cómo se pueden caracterizar por medio de su matriz de Köthe los espacios escalonados que son de Montel, tal como hacen Bierstedt, Meise y Summers, ya que esta propiedad se va a utilizar en secciones siguientes. En la segunda sección obtenemos condiciones suficientes para la reflexividad de los n-productos tensoriales de espacios escalonados de Köthe, en función del orden p del espacio y el grado n del producto tensorial, independientemente de la matriz de Köthe A. Consecuentemente, se obtendrán condiciones suficientes para la reflexividad de los espacios de polinomios n-homogéneos. En la tercera sección del capítulo vuelve a aparecer la complementación en productos tensoriales. Se probará que cuando $n \geq p$, se puede considerar un espacio $\lambda_1(B)$ complementado en $\bigotimes_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$, habiendo una estrecha relación entre las matrices A y B. De este modo, con elecciones adecuadas de la matriz A vamos a determinar nuevas propiedades sobre los productos tensoriales de esta clase de espacios. Se prueba, en particular, que cuando $\lambda_p(A)$ no verifica la condición de densidad de Heinrich, el espacio $\lambda_1(B)$ no es un espacio distinguido, con lo que tampoco puede serlo $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$, y así $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \beta)$ no será tonelado. La misma técnica de complementación sirve para probar que para un espacio $E = \lambda_p(A)$ que no es de Montel, $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es reflexivo si y sólo si $n < p$.

En el último capítulo de la memoria se continúa estudiando la reflexividad y tonelación de ciertos espacios de polinomios, con el objeto de proporcionar nuevos ejemplos en la teoría de polinomios en dimensión infinita. Todo el capítulo está dedicado a los espacios X-Köthe de sucesiones. Esta clase de espacios engloba a la de los espacios λ_p y ha sido ya utilizada en diversas ocasiones en el contexto de la holomorfía en dimensión infinita. Por ejemplo, Taskinen y Dineen los muestran como espacios que verifican las propiedades (BB) y $(BB)_{n,s}$, respectivamente. En la primera sección del capítulo probamos que estos espacios verifican propiedades parecidas a las que verificaban los espacios λ_p. En particular, se prueba que un espacio $\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad de Heinrich si y sólo si su matriz de Köthe A verifica la condición (D) y que dicho espacio es de Montel si y sólo si su matriz de Köthe verifica (M). Ambos resultados son extensión de los ya conocidos para espacios $\lambda_p(A)$. En la cuarta sección del capítulo se prueba que cuando un espacio de Banach X verifica que $(\mathcal{P}(^nX), \tau_b)$ es reflexivo, entonces el espacio de polinomios n-homogéneos continuos sobre el espacio $\lambda_X(A)$ que se puede construir a partir de X va a ser también reflexivo, independientemente de la matriz de Köthe A que se considere. Aprovecharemos estos resultados, utilizando un espacio X-Köthe, que tiene como espacio de Banach asociado al espacio original de Tsirelson. El espacio de Tsirelson T' tiene la propiedad de que $(\mathcal{P}(^nT'), \tau_b)$ *es un espacio reflexivo para cada* $n \in \mathbb{N}$, *con lo que el espacio* X-Köthe de sucesiones $\lambda_{T'}(A)$ va a verificar que $(\mathcal{P}(^n\lambda_X(A)), \tau_b)$ es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$. Eligiendo la matriz de Köthe A sin verificar la condición (D) vamos a tener que $(\mathcal{P}(^n\lambda_X(A)), \tau_b)$ es un espacio reflexivo para el que $\lambda_X(A)$ no verifica la condición de densidad. Este hecho introduce una novedad en esta teoría, ya que hasta ahora los únicos ejemplos conocidos de espacios E para los que $\mathcal{P}(^nE)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ eran espacios que verificaban la condición de densidad: por una parte se encuentran los espacios de Banach similares al espacio de Tsirelson, por otra parte se encuentran los espacios de Montel, y el único ejemplo que era conocido hasta ahora, ofrecido por Boyd, para el que se daba la reflexividad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ sin ser E un espacio de Banach o de Montel, era el de la clase de los espacios de la forma $E = F \times T'$, donde F en este caso es un espacio de Fréchet-Schwartz, pero estos espacios verifican también la condición de densidad.

Contenidos

Agradecimientos vii

Introducción ix

Capítulo 1. Preliminares **1**

1. Cuestiones generales de Análisis Funcional 3
2. Polinomios y aplicaciones multilineales 4
3. Aplicaciones holomorfas 6
4. Productos Tensoriales 8
5. Topología Proyectiva en Productos Tensoriales 13
6. Topologías en espacios de Polinomios y de Aplicaciones Holomorfas 16

Capítulo 2. Complementación en productos tensoriales y polinomios **25**

1. Complementación y propiedades (BB) y $(BB)_n$ 27
2. Complementación en Productos Tensoriales Simétricos 36
3. Complementación en espacios de Polinomios 42

Capítulo 3. Casinormabilidad en espacios de polinomios **51**

1. Un inciso: espacios escalonados de Köthe 53
2. Sobre el espacio $\hat{\otimes}_{n,s,\pi}(\lambda_1\hat{\otimes}_\pi F)$ 60
3. Casinormabilidad de $\mathcal{P}(^n(\lambda_1\hat{\otimes}_\pi F))$ 61

Capítulo 4. Polinomios definidos sobre espacios escalonados **69**

1. Más resultados sobre espacios escalonados de Köthe 71
2. Reflexividad de productos tensoriales y polinomios 74
3. Caracterización de productos tensoriales distinguidos y reflexivos 76

Capítulo 5. Espacios escalonados $\lambda_X(A)$ **87**

1. Propiedades básicas de los espacios $\lambda_X(A)$ 89
2. Espacios X-Köthe que verifican la condición de densidad 105

3. Espacios X-Köthe que son de Montel 111
4. Polinomios en espacios X-Köthe. Ejemplos 116

Bibliografía **123**

Índice **127**

CAPÍTULO 1

Preliminares

El estudio de las aplicaciones multilineales y los polinomios homogéneos se aborda en la literatura desde diferentes puntos de vista. Uno de ellos, ya contemplado por Grothendieck en 1955, es considerar las aplicaciones multilineales como elementos del dual de un producto tensorial. Así, resultados que se conocen para espacios duales se pueden obtener para los espacios de aplicaciones multilineales, y desde allí se pasan a resultados relativos a polinomios homogéneos. Un poco más tarde (1980) Ryan abordó el problema de buscar un predual para el espacio de los polinomios homogéneos, utilizando para ello los *tensores simétricos.* Actualmente se estudian propiedades acerca de los productos tensoriales simétricos para obtener resultados relacionados con diferentes topologías en espacios de polinomios y, consecuentemente, de funciones holomorfas. Se comentará también en este capítulo introductorio el problema de las topologías de Grothendieck, así como el contraejemplo que construyó Taskinen al mismo, y que se usará en el Capítulo 3, para continuar la exposición comentando la versión, válida para productos tensoriales simétricos, de este mismo problema, establecida recientemente por Dineen.

También se expondrán en este capítulo la mayoría de las definiciones y resultados de Análisis Funcional que se utilizarán repetidamente en la presente memoria. Se va a trabajar principalmente con productos tensoriales simétricos de espacios localmente convexos, polinomios y aplicaciones holomorfas. La notación que se va a utilizar en lo relacionado con los espacios localmente convexos y productos tensoriales es la que se utiliza en los libros de Jarchow ([**Jar**]) y Köthe ([**Köt1, Köt2**]); en algunas ocasiones, también nos referiremos al nuevo libro de Dineen [**Din6**], en preparación, que da un enfoque al tratamiento de estos temas que es distinto al usual. Para cuestiones relacionadas con holomorfía de dimensión infinita se utilizará preferentemente [**Din1**], que además puede consultarse para estudiar el enfoque al tratamiento de las aplicaciones multilineales y los polinomios dado antes de generalizarse la utilización de tensores. En este capítulo solo se expondrán las pruebas de algunos resultados que sean fundamentales en lo que se va a hacer después. Entre estos resultados se encuentran algunos que van a permitirnos manejar con mayor comodidad productos tensoriales y productos tensoriales simétricos.

1. Cuestiones generales de Análisis Funcional

En esta sección mencionaremos algunas definiciones clásicas de Análisis Funcional que vamos a utilizar más tarde. También expondremos algunas notaciones que se van a repetir a lo largo de esta memoria, así como referencias donde se pueden consultar propiedades generales sobre las herramientas que vamos a utilizar. En todo lo relativo a cuestiones generales sobre espacios localmente convexos se pueden consultar como referencias principales los libros de Jarchow [**Jar**] y Köthe [**Köt1, Köt2**].

E, F y G representarán espacios localmente convexos reales o complejos, frecuentemente *espacios de Fréchet,* esto es, espacios metrizables completos. Si S es un subconjunto de E, escribiremos $[S]$ para designar al *subespacio vectorial generado* por S.

Utilizaremos la notación $sc(E)$ para representar el conjunto de las *seminormas continuas* en E.

Si $\alpha \in sc(E)$, utilizaremos la notación E_α para referirnos al espacio normado $E/\alpha^{-1}(0)$.

$\Gamma(A)$ representará la envoltura convexa y equilibrada del subconjunto A de E.

Si E es un espacio normado, B_E denotará la bola unidad cerrada de dicho espacio, esto es: $B_E = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$.

También utilizaremos con frecuencia *límites proyectivos* e *inductivos* de espacios localmente convexos, ya que muchos espacios con los que vamos a trabajar en esta memoria van a estar definidos en estos términos. Las definiciones y propiedades básicas de estos límites pueden consultarse en [**Jar**].

Si E es un espacio localmente convexo, se llama *dual fuerte* de E al espacio dual de E dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E. Se representará generalmente por E'_β.

El símbolo E'_{τ_0} se utilizará para representar al espacio dual de E dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de E, esto es, la *topología compacto-abierta.*

Relacionado con el espacio E'_β está un concepto que vamos a considerar más tarde: el de espacio distinguido.

DEFINICIÓN 1.1. Sea E un espacio localmente convexo. Se dice que E es un espacio *distinguido* si su dual fuerte E'_β es tonelado.

2. Polinomios y aplicaciones multilineales

Las notaciones utilizadas para representar los conjuntos de *aplicaciones multilineales* y *polinomios* son las mismas que se utilizan habitualmente, véanse por ejemplo [**Din1**] y [**Din6**]. Las principales quedan resumidas en las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 1.2. Dados $E_1, \ldots, E_m, E$ y G espacios localmente convexos, se representará por

(1) $\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_m; G)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones m-lineales de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en G;

(2) $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; G)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones m-lineales continuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en G;

(3) $\mathcal{L}_a(^mE; G)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones m-lineales de E^m en G;

(4) $\mathcal{L}(^mE; G)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones m-lineales continuas de E^m en G.

Cuando G es el cuerpo base $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se adoptarán las siguientes notaciones:

(5) $\mathcal{L}_a(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^mE)$ y

(6) $\mathcal{L}(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE)$.

DEFINICIÓN 1.3. Se dice que una aplicación m-lineal L de E^m en G es *simétrica* si

$$L(x_1, \ldots, x_m) = L(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ y cada permutación σ de los primeros m números naturales.

El espacio vectorial de todas las aplicaciones m-lineales simétricas de E en G se representará por $\mathcal{L}_a^s(^mE; G)$.

El espacio vectorial de las aplicaciones m-lineales simétricas continuas de E en G se representará por $\mathcal{L}^s(^mE; G)$.

Cuando $G = \mathbb{K}$, representaremos a estos dos espacios por $\mathcal{L}_a^s(^mE)$ y $\mathcal{L}^s(^mE)$, respectivamente.

OBSERVACIÓN 1.4. Se puede definir de un modo natural una proyección $s : \mathcal{L}_a(^mE;G) \to \mathcal{L}_a^s(^mE;G)$ por

$$s(L)(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathbb{P}_m} L(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}),$$

para cada $L \in \mathcal{L}_a(^mE;G)$ y cada $(x_1,\dots,x_m) \in E^m$, donde $\mathbb{P}_m$ representa el grupo de las permutaciones de los primeros m números naturales. Obviamente la inclusión canónica de $\mathcal{L}_a^s(^mE;G)$ en $\mathcal{L}_a(^mE;G)$ es una aplicación inyectiva. Así $\mathcal{L}_a^s(^mE;G)$ es un *subespacio algebraicamente complementado* de $\mathcal{L}_a(^mE;G)$ ([**Din1**]).

DEFINICIÓN 1.5. Se dice que $P : E \to G$ es un *polinomio m-homogéneo* de E en G si existe una aplicación m-lineal $A : E^m \to G$ tal que $P(x) = A(x,\overset{m}{\smile\cdots},x)$, para cada $x \in E$. P es *continuo* si y sólo si A es una aplicación continua.

Al espacio vectorial de todos los polinomios m-homogéneos de E en G lo representaremos por $\mathcal{P}_a(^mE;G)$.

$\mathcal{P}(^mE;G)$ representará el espacio de todos los polinomios m-homogéneos continuos de E en G.

Cuando $G = \mathbb{K}$, utilizaremos las notaciones $\mathcal{P}_a(^mE)$ y $\mathcal{P}(^mE)$, para designar al espacio vectorial de los polinomios m-homogéneos de E en $\mathbb{K}$ y al de los polinomios m-homogéneos continuos de E en $\mathbb{K}$, respectivamente.

Un resultado de relevante importancia en lo concerniente a la relación que existe entre polinomios y aplicaciones multilineales es la *identidad de polarización*, que es clave para poder establecer un isomorfismo entre el espacio de las aplicaciones multilineales simétricas y el de los polinomios homogéneos.

PROPOSICIÓN 1.6 (Identidad de Polarización. [**Din1**], Teorema 1.5). *Sean E y G espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, entonces dado $P \in \mathcal{P}_a(^mE;G)$, existe una única $L \in \mathcal{L}_a^s(^mE;G)$ tal que $P(x) = L(x,\overset{m}{\smile\cdots},x)$ para cada $x \in E$. Además, L viene dada por*

$$L(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{2^m m!}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm1\\ 1\le j\le m}} \varepsilon_1\dots\varepsilon_m P\Big(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j\Big).$$

Con este resultado podemos justificar el siguiente convenio de notación:

DEFINICIÓN 1.7. (a) Dado $P \in \mathcal{P}_a(^mE; G)$, se denotará por $\check{P}$ a la única aplicación m-lineal simétrica $\check{P} \in \mathcal{L}_a^s(^mE; G)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \overset{m}{\smile\cdots}, x)$ para todo $x \in E$.

(b) Dada $L \in \mathcal{L}_a(^mE; G)$, se denotará por $\hat{L}$ al polinomio $\hat{L} \in \mathcal{P}_a(^mE; G)$ definido por $\hat{L}(x) = L(x, \overset{m}{\smile\cdots}, x)$ para todo $x \in E$.

También es importante, cuando se trabaja con polinomios y aplicaciones multilineales, la *fórmula de Newton*, que permite evaluar un polinomio sobre la suma de varios vectores utilizando la forma multilineal simétrica asociada.

PROPOSICIÓN 1.8 (Fórmula de Newton). *Sea $P \in \mathcal{P}_a(^mE; G)$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x_1, \cdots, x_k \in E$ se tiene*

$$P(x_1 + \cdots + x_k) = \sum_{m_1+\cdots+m_k=m} \frac{m!}{m_1! \cdots m_k!} \check{P}(x_1, \overset{m_1}{\smile\cdots}, x_1, \cdots, x_k \overset{m_k}{\smile\cdots}, x_k).$$

El siguiente resultado que ofrecemos, debido a Nachbin, nos indica en un cierto sentido, cómo es el espacio de los polinomios m-homogéneos definidos sobre un espacio localmente convexo arbitrario con valores en un espacio normado.

LEMA 1.9 (Factorización. [**Din1**], Lema 1.16). *Sean E un espacio localmente convexo y G un espacio normado. Entonces, para cada $P \in \mathcal{P}(^mE; G)$ existen $\alpha \in sc(E)$ y $P_\alpha \in \mathcal{P}(^mE_\alpha; G)$ de tal modo que $P = P_\alpha \circ \pi_\alpha$ (donde π_α es la proyección canónica de E sobre el espacio normado E_α).*

3. Aplicaciones holomorfas

Algunos de los problemas relativos a polinomios tienen su origen en la holomorfía de dimensión infinita, como se comentará un poco más adelante. La definición usual de función holomorfa entre espacios localmente convexos complejos se da, utilizando polinomios, como una extensión natural del concepto de función analítica en un abierto de $\mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 1.10. (1) Sean E y G espacios localmente convexos complejos y U un subconjunto abierto de E. Se dice que una aplicación $f : U \to G$ es *holomorfa* en U si para cada punto $x_0 \in U$, existe una sucesión $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, con $P_m \in \mathcal{P}(^m E; G)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que, dada $\gamma \in sc(G)$ se puede encontrar un entorno V de x_0 en U verificándose que

$$\lim_{n \to \infty} \gamma \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x - x_0) \right) = 0$$

uniformemente para $x \in V$.

(2) Al conjunto de las aplicaciones holomorfas $f : U \to G$ lo representaremos por $\mathcal{H}(U; G)$. Cuando $G = \mathbb{C}$, lo representaremos simplemente por $\mathcal{H}(U)$.

OBSERVACIÓN 1.11. (1) La sucesión de polinomios $\{P_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que aparece en la definición anterior, correspondiente al punto x_0, es única. Así, se puede adoptar la siguiente notación

$$\hat{d}^m f(x_0) = m! P_m$$
$$d^m f(x_0) = m! \check{P}_m,$$

que recuerda la notación empleada para denotar la diferencial m-ésima de f en x_0.

(2) $\mathcal{H}(U; G)$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones habituales en espacios de funciones. $\mathcal{H}(U)$ tiene estructura de álgebra.

Damos a continuación la definición de otro espacio de funciones holomorfas, que se va a utilizar más adelante: el de las funciones holomorfas de tipo acotado.

DEFINICIÓN 1.12. (1) Sean E un espacio localmente convexo, U un abierto de E y B un subconjunto acotado de U. Se dice que B es U-*acotado* si existe un entorno abierto V de 0 en E tal que $B + V \subset U$.

(2) Se dice que $f : U \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa *de tipo acotado* si $f \in \mathcal{H}(U)$ y está acotada sobre los subconjuntos U-acotados de U.

(3) Al espacio vectorial de las funciones holomorfas de tipo acotado lo representaremos por $\mathcal{H}_b(U)$.

4. Productos Tensoriales

Otra aproximación al estudio de los polinomios se obtiene por dualidad de los productos tensoriales simétricos. Grothendieck introduce en su tesis [**Gro2**] el producto tensorial de dos espacios localmente convexos E y G como un espacio predual para las aplicaciones bilineales en $E \times G$. Veinticinco años después Ryan dedica su tesis doctoral [**Rya**] al estudio de los productos tensoriales topológicos y su relación con la holomorfía en dimensión infinita; su trabajo es una referencia obligada para este nuevo enfoque dado al tratamiento de polinomios, ya que se pueden definir éstos y obtener bastantes de las propiedades que poseen como espacio vectorial topológico utilizando teoría de dualidad. Recientemente Dineen en [**Din4**] da un nuevo impulso al estudio de los polinomios considerándolos como elementos de un espacio dual y definiendo en los espacios de polinomios una nueva topología.

DEFINICIÓN 1.13. (a) Sean E y G espacios localmente convexos. Por cada $(x, y) \in E \times G$ denotemos por $x \otimes y$ a la aplicación lineal de $\mathcal{L}(E, G; \mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ definida por

$$x \otimes y(B) = B(x, y) \quad \text{para cada } B \in \mathcal{L}(E, G; \mathbb{K}).$$

En esas condiciones se llama *producto tensorial* de los espacios vectoriales E y G al subespacio vectorial del dual algebraico $(\mathcal{L}(E, G; \mathbb{K}))^*$ de $\mathcal{L}(E, G; \mathbb{K})$ generado por la familia de formas lineales

$$x \otimes y, \text{ con } x \in E \text{ e } y \in G.$$

Al producto tensorial de E y G lo representaremos por $E \otimes G$.

(b) Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios localmente convexos. Para $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$ denotaremos por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ al elemento de $(\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}))^*$ definido del siguiente modo: $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n(L) = L(x_1, \ldots, x_n)$ para cada $L \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$. Entonces se llama *producto tensorial* de los espacios $E_1, \ldots, E_n$, y se representa por $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, el subespacio vectorial de $(\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}))^*$ generado por

$$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

DEFINICIÓN 1.14. (a) Se dice que $\theta \in E \otimes \overset{n}{\smile}\!\!\!\cdots \otimes E$ es un *tensor simétrico* si admite una representación

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_n} x^{(i)}_{\sigma(1)} \otimes x^{(i)}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x^{(i)}_{\sigma(n)},$$

donde N es un número natural y $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \in E$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$.

(b) Se llama *n-producto tensorial simétrico* del espacio localmente convexo E al subespacio de $E \otimes \overset{n}{\smile\!\cdots} \otimes E$ generado por los tensores simétricos. A este espacio lo representaremos por $E \underset{s}{\otimes} \overset{n}{\cdots} \underset{s}{\otimes} E$ o por $\underset{n,s}{\otimes} E$.

(c) Utilizaremos la expresión $x_1 \underset{s}{\otimes} x_2 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n$ para designar al tensor simétrico

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_n} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

(d) La aplicación s que se puede definir sobre los tensores de la forma $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ como

$$\begin{array}{cccc} s: & \underset{n}{\otimes} E & \longrightarrow & \underset{n,s}{\otimes} E \\ & x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n & \mapsto & x_1 \underset{s}{\otimes} x_2 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n \end{array}$$

y extender por linealidad al resto de $\underset{n}{\otimes} E$, se denomina *aplicación de simetrización.*

(e) Si $k + r = n$, $\underset{s}{\otimes}[x^{(k)}, y^{(r)}]$ designará a $x \underset{s}{\otimes} \overset{k}{\cdots} \underset{s}{\otimes} x \underset{s}{\otimes} y \underset{s}{\otimes} \overset{r}{\cdots} \underset{s}{\otimes} y$.

OBSERVACIÓN 1.15. Cuando $x_1 = \cdots = x_n = x$ se tiene que

$$x \underset{s}{\otimes} \overset{n}{\cdots} \underset{s}{\otimes} x = x \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes x.$$

En este caso utilizaremos la notación $\underset{n}{\otimes} x$ para representar a $x \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes x$.

En lo sucesivo utilizaremos frecuentemente el tipo particular de conjuntos que vamos a describir a continuación.

DEFINICIÓN 1.16. Sea A un subconjunto del espacio vectorial E.
(a) Se denota por $\underset{n}{\otimes} A$ al conjunto

$$\underset{n}{\otimes} A = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \ldots, x_n \in A\}.$$

(b) Se denota por $\underset{n,s}{\otimes} A$ al conjunto

$$\underset{n,s}{\otimes} A = \{x \otimes \cdots \otimes x : x \in A\}.$$

OBSERVACIÓN 1.17. Dineen en [**Din6**], (1.16), prueba la siguiente relación, que va a ser frecuentemente utilizada, entre los conjuntos $\underset{n}{\otimes} A$ y $\underset{n,s}{\otimes} A$:

$$s\left(\underset{n}{\otimes} A\right) \subset \Gamma\left(\underset{n,s}{\otimes}\left(\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} A\right)\right) = \frac{n^n}{n!}\Gamma\left(\underset{n,s}{\otimes} A\right).$$

Para nosotros va a tener un especial interés la siguiente versión tensorial de la *fórmula de polarización*:

PROPOSICIÓN 1.18 (Polarización). *Sea E un espacio localmente convexo y sean $x_1, \ldots, x_n \in E$. Entonces*

$$x_1 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \le j \le n}} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \underset{n}{\otimes} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos la fórmula de polarización para aplicaciones multilineales (Proposición 1.6) y la relación de dualidad existente entre $\underset{n}{\otimes} E$ y $\mathcal{L}(^n E)$. De este modo será suficiente probar que

$$x_1 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n(L) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \underset{n}{\otimes} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right)(L)$$

para cada $L \in \mathcal{L}(^n E)$.

Ahora bien, dado $L \in \mathcal{L}(^n E)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
x_1 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n(L) &= \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_n} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}\right)(L) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{P}_n} L(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \\
&= s(L)(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n s(L)\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j, \overset{n}{\smile\cdots}, \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n L\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j, \overset{n}{\smile\cdots}, \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \underset{n}{\otimes} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right)(L),
\end{aligned}$$

lo que da el resultado. □

OBSERVACIÓN 1.19. Utilizando la anterior fórmula de polarización, cada tensor simétrico n-dimensional se puede escribir como una suma de la forma

$$\sum_{j=1}^{M} \underset{n}{\otimes} x_j,$$

con $M \in \mathbb{N}$ y $x_j \in E$ para cada $j \in \{1, \ldots, M\}$ en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y como

$$\sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \underset{n}{\otimes} x_j,$$

con $M \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ y $\varepsilon_j = \pm 1$ para cada $j \in \{1, \ldots, M\}$, cuando el cuerpo base que se considera es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN 1.20. El espacio $\mathcal{P}_a({}^nE; G)$ se puede identificar con $\mathcal{L}_a(\underset{n,s}{\otimes} E; G)$ en el siguiente sentido: dado $P \in \mathcal{P}_a({}^nE; G)$, existe una única $\dot{P} \in \mathcal{L}_a(\underset{n,s}{\otimes} E; G)$ definida de modo natural a partir de la relación

$$\langle \underset{n}{\otimes} x, \dot{P} \rangle = P(x), \text{ para cada } x \in E.$$

Una consecuencia sencilla, pero útil, que deducimos de la fórmula de polarización es el siguiente resultado:

LEMA 1.21. *Sea $P \in \mathcal{P}_a({}^nE)$ y sean $x, y \in E$. Entonces*

$$\langle \underset{s}{\otimes} [x^{(k)}, y^{(n-k)}], \dot{P} \rangle = \check{P}(x, \overset{k}{\overbrace{\cdots}}, x, y, \overset{n-k}{\overbrace{\cdots}}, y).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\langle \underset{s}{\otimes} [x^{(k)}, y^{(n-k)}], \dot{P} \rangle &= \langle x \underset{s}{\otimes} \overset{k}{\overbrace{\cdots}} \underset{s}{\otimes} x \underset{s}{\otimes} y \underset{s}{\otimes} \overset{n-k}{\overbrace{\cdots}} \underset{s}{\otimes} y, \dot{P} \rangle \\
&= \langle \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \underset{n}{\otimes} (\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_k x + \varepsilon_{k+1} y + \cdots + \varepsilon_n y), \dot{P} \rangle \\
&= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \langle \underset{n}{\otimes} (\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_k x + \varepsilon_{k+1} y + \cdots + \varepsilon_n y), \dot{P} \rangle \\
&= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 x + \cdots + \varepsilon_k x + \varepsilon_{k+1} y + \cdots + \varepsilon_n y) \\
&= \check{P}(x, \overset{k}{\overbrace{\cdots}}, x, y, \overset{n-k}{\overbrace{\cdots}}, y).
\end{aligned}$$

□

También podemos obtener la siguiente versión tensorial del *Lema de Newton,*

LEMA 1.22. *Para cualesquiera $x, y \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\underset{n}{\otimes}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{s}{\otimes} [x^{(k)}, y^{(n-k)}].$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{s}{\otimes} [x^{(k)}, y^{(n-k)}]$. Entonces, por la dualidad algebraica existente entre polinomios y productos tensoriales simétricos ([**Hor**], pg. 184) se tiene que $\underset{n}{\otimes}(x+y) = \theta$ si y sólo si

$$\langle \underset{n}{\otimes}(x+y), \dot{P} \rangle = \langle \theta, \dot{P} \rangle, \qquad \text{para cada } P \in \mathcal{P}_a(^nE) = \mathcal{L}_a(\underset{n,s}{\otimes} E).$$

Pero por la Proposición 1.18,

$$\begin{aligned} \langle \theta, \dot{P} \rangle &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \underset{s}{\otimes}[x^{(k)}, y^{(n-k)}], \dot{P} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \check{P}(x, \overset{k}{\smile\cdots}, x, y, \overset{n-k}{\smile\cdots}, y). \end{aligned}$$

Por la fórmula de Newton para polinomios (Proposición 1.8), esta última suma es precisamente $P(x+y)$, luego

$$\langle \theta, \dot{P} \rangle = P(x+y) = \langle \underset{n}{\otimes}(x+y), \dot{P} \rangle.$$

□

En el siguiente Lema se obtiene una propiedad que es natural en este contexto, debido a la estrecha relación existente entre polinomios y productos tensoriales. Esta propiedad se utilizará con posterioridad en esta memoria; es una propiedad de extensión, que permitirá definir una aplicación relacionando los n-tensores simétricos con los $(n+h)$-tensores simétricos.

LEMA 1.23. *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m, e \in E$. Si dado $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{k}{\smile\cdots} \otimes x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j \otimes \overset{k}{\smile\cdots} \otimes y_j,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \underset{s}{\otimes} \overset{k}{\smile\cdots} \underset{s}{\otimes} x_i \underset{s}{\otimes} e \underset{s}{\otimes} \overset{h}{\smile\cdots} \underset{s}{\otimes} e = \sum_{j=1}^{m} y_j \underset{s}{\otimes} \overset{k}{\smile\cdots} \underset{s}{\otimes} y_j \underset{s}{\otimes} e \underset{s}{\otimes} \overset{h}{\smile\cdots} \underset{s}{\otimes} e,$$

(o, con otra notación:

$$\sum_{i=1}^{n} \underset{s}{\otimes}[x_i^{(k)}, e^{(h)}] = \sum_{j=1}^{m} \underset{s}{\otimes}[y_j^{(k)}, e^{(h)}])$$

para cada $h \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $P \in \mathcal{P}_a(^{k+h}E)$ y consideremos $Q_P \in \mathcal{P}_a(^kE)$, definido por $Q_P(x) = \check{P}(x, \overset{k}{\smile\cdots}, x, e, \overset{h}{\smile\cdots}, e)$. Entonces, por el Lema 1.21,

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{i=1}^{n} \underset{s}{\otimes}[x_i^{(k)}, e^{(h)}], \dot{P}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \check{P}(x_i, \overset{k}{\ldots}, x_i, e, \overset{h}{\ldots}, e) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Q_P(x_i) \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} \underset{k}{\otimes} x_i, \dot{Q}_P\rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^{m} \underset{k}{\otimes} y_j, \dot{Q}_P\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} Q_P(y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \check{P}(y_j, \overset{k}{\ldots}, y_j, e, \overset{h}{\ldots}, e) \\
&= \langle \sum_{j=1}^{m} \underset{s}{\otimes}[y_j^{(k)}, e^{(h)}], \dot{P}\rangle.
\end{aligned}$$

□

5. Topología Proyectiva en Productos Tensoriales

Para aprovechar al máximo las posibilidades del tratamiento de los polinomios como duales de productos tensoriales, consideraremos la topología proyectiva en $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. De este modo podremos considerar los polinomios continuos como elementos del dual topológico del producto tensorial proyectivo simétrico.

DEFINICIÓN 1.24. (a) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ espacios localmente convexos. Se define la *topología proyectiva* π en $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n$ como la topología localmente convexa más fina que hace continua a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n & \rightarrow & E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \end{array}$$

Al espacio $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n$ dotado de la topología proyectiva π lo denotaremos habitualmente por $E_1 \underset{\pi}{\otimes} E_2 \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} E_n$. Si $n = 1$ se sobreentiende que $\underset{1,\pi}{\otimes} E = E$.

(b) Representaremos por

$$E_1 \underset{\pi}{\hat{\otimes}} E_2 \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \ldots \underset{\pi}{\hat{\otimes}} E_n$$

a la compleción del producto

$$E_1 \underset{\pi}{\otimes} E_2 \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} E_n.$$

(c) Representaremos por $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$ al espacio $\underset{n,s}{\otimes} E$ dotado de la topología inducida por la topología proyectiva del espacio $\underset{n,\pi}{\otimes} E = E \overbrace{\underset{\pi}{\otimes} \cdots \underset{\pi}{\otimes}}^{n} E$.

(d) $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ se define como la compleción del espacio localmente convexo $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$.

En esta memoria se utilizarán algunos resultados sobre complementación en productos tensoriales topológicos. El resultado que se enuncia a continuación fue utilizado por Ryan en la prueba de la Proposición 2.3 de [**Rya**]. La prueba de este resultado es sencilla, considerando como aplicaciones que proporcionan la complementación entre estos espacios la inclusión canónica de $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ en $\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}} E$ y la aplicación de simetrización.

PROPOSICIÓN 1.25. *Sean E un espacio localmente convexo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ es un subespacio complementado de $\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}} E$.*

OBSERVACIÓN 1.26. (1) De la Definición 1.24 se sigue que un sistema fundamental de seminormas para la topología proyectiva en $E_1 \underset{\pi}{\otimes} E_2 \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} E_n$ es

$$\{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n : \alpha_1 \in sc(E_1), \ldots, \alpha_n \in sc(E_n)\},$$

donde $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ viene dada por

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n(\theta) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{M} \alpha_1(x_1^{(i)}) \cdots \alpha_n(x_n^{(i)}) : \theta = \sum_{i=1}^{M} x_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(i)} \right\}$$

(véase [**Jar**], Proposición 15.1.1).

En el caso en el que $E_1 = \cdots = E_n = E$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$, escribiremos $\underset{n}{\otimes}\alpha$ para designar a la seminorma $\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha$.

(2) Un sistema fundamental de seminormas para la topología proyectiva π en $\underset{n,s}{\otimes} E$ está dado por $\{\underset{n,s}{\otimes}\alpha : \alpha \in sc(E)\}$, donde

$$(\underset{n,s}{\otimes}\alpha)(\theta) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} \alpha(x_j)^n : \theta = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \underset{n}{\otimes} x_j, \text{ con } \varepsilon_j \in \{-1,1\} \text{ para cada } i = 1,\ldots,j\right\},$$

cuando E es un espacio localmente convexo real, y

$$(\underset{n,s}{\otimes}\alpha)(\theta) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} \alpha(x_j)^n : \theta = \sum_{j=1}^{N} \underset{n}{\otimes} x_j\right\},$$

en el caso en el que E es un espacio localmente convexo complejo.

En principio, parece que estas seminormas podrían no ser suficientes para definir la topología proyectiva en este espacio. Sin embargo, la familia de seminormas que *aparecen en* (1) *inducen sobre* $\underset{n,s}{\otimes} E$ *la misma topología que la familia que acabamos de* mencionar, tal como prueba Ryan en la Proposición 2.2 de [**Rya**].

(3) Gelbaum y Gil de Lamadrid ([**GeGi**]) probaron que si E_1 y E_2 son espacios de Banach con bases de Schauder $\{e_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ respectivamente, entonces

$$\{e_{1,n} \otimes e_{2,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{D}}$$

es una base de Schauder de $E_1 \otimes E_2$, donde utilizamos $\mathbb{D}$ para representar el producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dotado del "orden del cuadrado" ([**GeGi**]). Ryan generaliza este resultado para productos tensoriales de un número arbitrario de espacios y también prueba que los simetrizados de los elementos de la base del producto tensorial, ordenados de acuerdo con el orden inducido por el del cuadrado, forman una base del producto tensorial simétrico ([**Rya**], Capítulo 5).

En algunas ocasiones va a ser útil recordar que el producto tensorial de espacios localmente convexos verifica la *propiedad asociativa*. Este hecho se enuncia en la siguiente

PROPOSICIÓN 1.27 (Propiedad asociativa. [**Köt2**], página 179). *Sean E, F y G espacios localmente convexos. Entonces*

$$(E\hat{\underset{\pi}{\otimes}}F)\hat{\underset{\pi}{\otimes}}G \text{ es isomorfo topológicamente a } E\hat{\underset{\pi}{\otimes}}(F\hat{\underset{\pi}{\otimes}}G).$$

OBSERVACIÓN 1.28. Del mismo modo como antes enunciábamos la dualidad algebráica entre los productos tensoriales - aplicaciones multilineales y productos tensoriales simétricos - polinomios algebraicos, ahora vamos a poder tener una dualidad topológica entre los productos tensoriales proyectivos - aplicaciones multilineales (tanto en el caso algebraico como en el continuo) y polinomios continuos - productos tensoriales proyectivos simétricos.

Podemos identificar al espacio $\mathcal{P}(^nE;G)$ con $\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E;G)$ de modo análogo a como lo hacíamos en el caso algebraico: $P \in \mathcal{P}(^nE;G)$, se identifica con $\dot{P} \in \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E;G)$ definida por la identidad $\langle \bigotimes_n x, \dot{P}\rangle = P(x)$.

A continuación damos una consecuencia de la propia definición de la topología proyectiva que vamos a emplear posteriormente.

LEMA 1.29. *Sea E un espacio localmente convexo y sea $\alpha \in sc(E)$. Entonces se verifica que*

$$(\bigotimes_n \alpha)(x_1 \mathop{\otimes}_s \cdots \mathop{\otimes}_s x_n) \leq \alpha(x_1)\cdots\alpha(x_n).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
(\bigotimes_n \alpha)(x_1 \mathop{\otimes}_s \cdots \mathop{\otimes}_s x_n) &= \\
&= (\bigotimes_n \alpha)\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}\right) \\
&\leq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in P_n} \alpha(x_{\sigma(1)})\cdots\alpha(x_{\sigma(n)}) = \\
&= \alpha(x_{\sigma(1)})\cdots\alpha(x_{\sigma(n)}) = \\
&= \alpha(x_1)\cdots\alpha(x_n).
\end{aligned}$$

□

6. Topologías en espacios de Polinomios y de Aplicaciones Holomorfas

Tradicionalmente se consideran en los espacios de polinomios sobre espacios localmente convexos las siguientes topologías: la topología compacto-abierta τ_0, la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados τ_b y la topología portada de Nachbin τ_ω, cuyas definiciones se van a recordar en lo que sigue. Recientemente Dineen considera también en $\mathcal{P}(^nE;G)$ la topología fuerte β, la topología en $\mathcal{P}(^nE;G)$ de la convergencia uniforme sobre los acotados de $\underset{n,s}{\otimes}E$, considerando en este caso el isomorfismo existente entre $\mathcal{P}(^nE;G)$ y $\mathcal{L}(\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}}E;G)$. topologías Hasta hace poco tiempo se venía utilizando la notación β para hacer mención a la topología que aquí representaremos como τ_b. Puesto que no todo acotado B de $\underset{n,s}{\otimes}E$ puede considerarse contenido en $\bar{\Gamma}(\underset{n,s}{\otimes}C)$, donde C es un acotado de E, estas dos topologías son en general distintas. Va a interesar por múltiples razones el estudio de la coincidencia de esas dos topologías, problema parecido al "problema de las topologías" planteado por Grothendieck; por ejemplo, $(\mathcal{P}(^nE),\beta)$ va a ser siempre un espacio (DF) si E es un espacio de Fréchet, con lo que $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ ha de serlo en los casos de coincidencia de estas dos topologías. Al final de esta sección discutiremos algunas consecuencias derivadas de la igualdad de τ_b y β.

DEFINICIÓN 1.30. (a) La topología compacto-abierta τ_0 sobre $\mathcal{P}(^nE;G)$ se define como la topología en $\mathcal{P}(^nE;G)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de E.

(b) La topología τ_b sobre $\mathcal{P}(^nE;G)$ se define como la topología en $\mathcal{P}(^nE;G)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de E.

(c) La topología *fuerte* β sobre $\mathcal{P}(^nE)$ se define como la topología en $\mathcal{P}(^nE;G) \simeq \mathcal{L}(\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}}E;G)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}}E$. Si $n=1$, la topología fuerte se define como la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E.

La topología portada τ_ω en $\mathcal{P}(^nE;G)$ se define del modo siguiente:

DEFINICIÓN 1.31. (1) Sean E un espacio localmente convexo y G un espacio normado. Definimos la *topología portada* τ_ω por

$$(\mathcal{P}(^nE;G),\tau_\omega) = \varinjlim_{\alpha\in sc(E)} (\mathcal{P}(^nE_\alpha;G),\tau_b)$$

(recuérdese el Lema de Factorización 1.9).

Obsérvese que τ_ω está generada por las seminormas p que están *portadas* por el origen, es decir, para cada entorno V de 0 en E, existe $c(V)>0$ tal que

$$p(P) \le c(V)\sup_{x\in V}\|P(x)\|$$

para cada $P \in \mathcal{P}(^nE;G)$.

(2) Para espacios localmente convexos arbitrarios G, τ_ω está definida por

$$(\mathcal{P}(^nE;G),\tau_\omega) = \varprojlim_{\gamma\in sc(G)} (\mathcal{P}(^nE;G_\gamma),\tau_\omega).$$

OBSERVACIÓN 1.32. (1) Se tiene que $\tau_0 \leq \tau_b \leq \beta \leq \tau_\omega$. En efecto, todo compacto es acotado, y así la topología en $\mathcal{P}(^nE;G)$ de la convergencia uniforme sobre los acotados de E (τ_b) es más fina que la de la convergencia uniforme sobre los compactos de E (τ_0). Por otra parte, es claro que, si B es un acotado de E, se tiene que $\underset{n,s,\pi}{\otimes} B$ es un acotado de $\underset{n,s}{\otimes} E$, con lo que, recordando las definiciones que hemos dado para las topologías τ_b y β en $\mathcal{P}(^nE;G)$, se tiene que $\tau_b \leq \beta$. Finalmente, si G es un espacio normado y $\rho \in sc(\mathcal{P}(^nE;G),\beta)$ podemos suponer que existe un acotado A de $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$ tal que

$$\rho(P) = \sup_{\theta\in A}\|\dot{P}(\theta)\|;$$

además podemos suponer, recordando la definición de acotado en un espacio localmente convexo, que $A \subset \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \bar{\Gamma}(\underset{n,s}{\otimes} r_V V)$, donde $\mathcal{V}$ denota un sistema fundamental de entornos de 0 convexos y equilibrados en E y $r_V > 0$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Así, si U es un entorno de 0, existe $U_0 \in \mathcal{V}$ tal que $U_0 \subset U$. Para este entorno se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho(P) &= \sup_{\theta\in A}\|\dot{P}(\theta)\| \\
&\leq \sup_{\theta\in \bigcap_{V\in\mathcal{V}} \bar{\Gamma}(\underset{n,s}{\otimes} r_V V)} \|\dot{P}(\theta)\| \\
&\leq \sup_{\theta\in\bar{\Gamma}(\underset{n,s}{\otimes} r_{U_0} U_0)} \|\dot{P}(\theta)\| \\
&\leq \frac{1}{r_{U_0}^n} \sup_{x\in U_0} \|P(x)\| \\
&\leq \frac{1}{r_{U_0}^n} \sup_{x\in U} \|P(x)\|,
\end{aligned}$$

lo que prueba que ρ es una seminorma portada por el origen, y por tanto, que $\beta \leq \tau_\omega$. El caso general, en el que G es un espacio localmente convexo arbitrario se deduce a partir de lo que acabamos de probar, teniendo en cuenta la definición de la topología portada en este caso (Definición 1.31 (2)).

(2) Se tiene que para espacios de Fréchet E, $\tau_0 = \tau_b$ sobre $\mathcal{P}(^nE;G)$ si y sólo si E es un espacio de Montel. En efecto, es claro que si E es de Montel, esas dos topologías coinciden. Por otra parte, si E es un espacio de Fréchet que no es de Montel existe un acotado $B \subset E$ que no es relativamente compacto. Pero, si suponemos que $\tau_0 = \tau_b$, entonces para cada $\gamma \in sc(G)$, se tiene que la seminorma $\|\cdot\|_{B,\gamma}$ definida por

$$\|P\|_{B,\gamma} = \sup_{x\in B}\gamma(P(x))$$

para $P \in \mathcal{P}(^nE;G)$, es una seminorma τ_0-continua, luego existen un compacto $K \subset E$, que se puede suponer convexo y equilibrado, y una constante $C > 0$ tales que

$$\|P\|_{B,\gamma} \leq C\|P\|_{K,\gamma} \text{ para cada } P \in \mathcal{P}(^nE;G).$$

De este modo para cada $\phi \in E'$, $\phi \neq 0$ y $b \in G$ con $\gamma(b) \neq 0$, se tiene que $\phi^n b \in \mathcal{P}(^nE;G)$ y

$$\|\phi^n b\|_{B,\gamma} \leq C\|\phi^n b\|_{K,\gamma},$$

o equivalentemente

$$\gamma(b)|\phi|_B^n \leq C\gamma(b)|\phi|_K^n,$$

por lo que, tomando raíces n-ésimas se llega a

$$|\phi|_B \leq C^{\frac{1}{n}}|\phi|_K.$$

Esto, por el Teorema de Hahn-Banach, es una contradicción con lo supuesto. En efecto, si B es un acotado que no es relativamente compacto, el conjunto $C^{-\frac{1}{n}}B$ tampoco lo es, por lo que debe existir $x_0 \in C^{-\frac{1}{n}}B$ tal que $x_0 \notin K$, utilizando el Teorema de Hahn-Banach se concluye que existe una cierta $\psi \in E'$ tal que

$$|\psi(x_0)| > |\psi|_K,$$

hecho que contradice lo anterior.

(3) Si E es un espacio de Banach, $\tau_b = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE;G)$, para cualquier espacio localmente convexo G. En efecto, basta tener en cuenta que la topología de E viene definida por una sola norma, teniendo en este caso, que si G es normado

$$(\mathcal{P}(^nE;G),\tau_\omega) = \varinjlim_{\|\cdot\|}(\mathcal{P}(^nE;G),\tau_b) = (\mathcal{P}(^nE;G),\tau_b),$$

lo que nos proporciona que $\tau_b = \beta = \tau_\omega$, puesto que siempre se tenía $\tau_b \leq \beta \leq \tau_\omega$. Para G arbitrario el resultado es inmediato a partir de lo anterior.

Al considerar el caso en el que $G = \mathbb{C}$, se puede obtener algo más de información sobre la coincidencia de las topologías τ_0 y τ_ω. Por ejemplo, Dineen indica que τ_ω es la topología tonelada asociada a τ_0 sobre $\mathcal{P}(^nE)$ cuando E es un espacio metrizable ([**Din1**], Proposición 3.41). La coincidencia de estas dos topologías cuando E es un espacio de Fréchet Montel se ha estudiado recientemente en profundidad (veanse entre otros [**AnPo2, GGM, Din2, DeMa, Din4**]) a causa de su incidencia, apuntada por Ansemil-Ponte [**AnPo2**], en el clásico problema sobre la coincidencia de τ_0 y τ_ω en espacios de funciones holomorfas. Recordemos, entonces, las definiciones de estas topologías.

DEFINICIÓN 1.33. Sean E un espacio de Fréchet, G un espacio localmente convexo y U un abierto de E. Se define τ_0 en $\mathcal{H}(U;G)$ como la topología generada por la siguiente familia de seminormas:

$$f \to \mid f \mid_{K,\gamma} = \sup_{x \in K} \gamma(f(x)),$$

donde $\gamma \in sc(G)$ y K recorre los compactos de E. A la topología τ_0 se le denomina *topología compacto-abierta.*

DEFINICIÓN 1.34. (a) Sean E un espacio localmente convexo, G un espacio normado y $U \subset E$ abierto. Se dice que una seminorma $p : \mathcal{H}(U;G) \to [0,\infty)$ está *portada* por un compacto $K \subset U$ si para cada abierto V, $V \supset K$, existe $c(V) > 0$ tal que

$$p(f) \leq c(V)\|f\|_V$$

para cada $f \in \mathcal{H}(U;G)$.

(b) Se llama *topología portada de Nachbin* τ_ω en $\mathcal{H}(U;G)$ a la topología generada por la familia de seminormas portadas por los compactos de U.

(c) Para G un espacio localmente convexo arbitrario, definimos:

$$(\mathcal{H}(U;G),\tau_\omega) = \varprojlim_{\gamma \in sc(G)} (\mathcal{H}(U;G_\gamma),\tau_\omega)$$

La igualdad entre las topologías τ_0 y τ_ω en $\mathcal{H}(U)$ ha sido estudiada inicialmente por Barroso, Nachbin, Boland-Dineen, Meise y Mujica en numerosos trabajos utilizando métodos directos sobre determinados tipos de espacios E. En 1988 Ansemil y Ponte establecieron las siguientes proposiciones, que informan sobre la coincidencia de las topologías τ_0 y τ_ω en espacios de funciones holomorfas con valores en el cuerpo $\mathbb{C}$. En estos resultados se pone de manifiesto la importancia que tiene estudiar la coincidencia de topologías en los espacios de polinomios para poder determinar esta coincidencia en los espacios de funciones holomorfas. Para funciones holomorfas con valores en un espacio de Banach también se va a tener un resultado parecido, debido a Boyd y Peris, que se enunciará un poco más adelante.

PROPOSICIÓN 1.35 ([**AnPo2**], Teorema 2). *Sea E un espacio de Fréchet-Montel y sea U un abierto equilibrado de E. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $\tau_0 = \tau_\omega$ *en* $\mathcal{H}(U)$.
(b) $\tau_0 = \tau_\omega$ *en* $\mathcal{P}(^nE)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 1.36 ([**AnPo2**], Proposición 3). *Sea E un espacio de Fréchet-Montel y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\tau_0 = \tau_\omega$ *en* $\mathcal{P}(^nE)$.
(b) $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ *es bornológico.*
(c) $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ *es tonelado.*
(d) $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ *es un espacio de Montel.*
(e) $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ *es el dual fuerte de un espacio de Fréchet-Montel*

(obsérvese que $\tau_b = \tau_0$ puesto que E es un espacio de Montel).

Con la proposición que acabamos de enunciar se consiguió traspasar el problema de la coincidencia de las topologías τ_0 y τ_ω en espacios de funciones holomorfas al de la tonelación del espacio $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$, cuando se toma E dentro de la clase de los espacios de Fréchet-Montel.

Al buscar condiciones sobre el espacio E para que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ fuese un espacio tonelado se relacionó este problema, clásico en holomorfía, con otro célebre problema propuesto por Grothendieck: el conocido como "Problème des topologies." Es conocido que si E_1 y E_2 son espacios de Fréchet y K es un compacto de $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$, existen compactos K_1 de E_1 y K_2 de E_2 tales que $K \subset \overline{\Gamma(K_1 \otimes K_2)}$ ([**Köt2**], §41.4 (5)). Grothendieck cuestionaba si un resultado análogo es cierto cuando se trabaja con conjuntos acotados en lugar de trabajar con conjuntos compactos, esto es, se preguntaba para cada par de espacios de Fréchet E_1 y E_2 y cada acotado B de $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ existían acotados B_1 de E_1

y B_2 de E_2 tales que $B \subset \overline{\Gamma(B_1 \otimes B_2)}$, ya que en todos los casos conocidos era posible encontrar esos acotados. Este problema estuvo abierto hasta 1986, cuando Taskinen en [**Tas1**] construyó el primer ejemplo que resuelve este problema de modo negativo.

Los pares (E_1, E_2) para los que el enunciado anterior es válido son los que Taskinen dice que verifican la propiedad (BB). Es sencillo observar que cuando E_1 y E_2 son espacios de Fréchet-Montel, se tiene que $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ es de Montel si y sólo si (E_1, E_2) verifica la propiedad (BB).

DEFINICIÓN 1.37. Se dice que el par de espacios localmente convexos (E, F) posee la propiedad (BB) si para cada acotado B de $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ existen acotados B_1 de E_1 y B_2 de E_2 tales que $B \subset \overline{\Gamma(B_1 \otimes B_2)}$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado que Boyd y Peris establecieron sobre la coincidencia de las topologías portada y compacto-abierta en espacios de funciones holomorfas con valores en un espacio de Banach.

PROPOSICIÓN 1.38 ([**BoyP**], Teorema 8). *Sea E un espacio de Fréchet-Montel. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) (E, X) tiene la propiedad (BB) para cada espacio de Banach X

(ii) $\tau_0 = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE, X')$ para cada espacio de Banach X

(iii) $\tau_0 = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{H}(U, X')$ para cada abierto equilibrado U de E y cada espacio de Banach X.

La propiedad $(BB)_{n,s}$ fue introducida por Dineen ([**Din4**]) como una versión válida para n-productos tensoriales simétricos de la propiedad (BB) definida por Taskinen ([**Tas1**]). Estas propiedades están siendo estudiadas en profundidad actualmente, dada la importancia que tiene que un espacio verifique esta propiedad al estudiar las relaciones existentes entre las distintas topologías que se definen sobre los espacios de polinomios homogéneos.

DEFINICIÓN 1.39. (a) Se dice que un espacio localmente convexo E tiene la propiedad $(BB)_n$ para $n = 2, 3, \ldots$ si para cada acotado B de $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ existe un acotado C de E tal que B está contenido en la envoltura convexa cerrada de

$$\otimes_n C = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1, \ldots, x_n \in C\}.$$

(b) Un espacio localmente convexo E tiene la propiedad $(BB)_{n,s}$ para $n = 2, 3, \ldots$ si para cada acotado B de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ existe un acotado C de E tal que B está contenido en la envoltura convexa cerrada de $\bigotimes_{n,s} C = \{\bigotimes_n x : x \in C\}$.

En [**Din2**] se prueba que los espacios que tienen una base de un determinado tipo verifican la propiedad $(BB)_{n,s}$, para cada entero positivo n. Entre estos espacios se encuentran los espacios escalonados de Köthe, y se utilizará esta propiedad de esos espacios más adelante. Otra importante clase de espacios que verifican esta propiedad son los espacios de Banach: si E es un espacio de Banach, entonces E verifica $(BB)_{n,s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.40. (1) Las topologías τ_b y β coinciden sobre $\mathcal{P}(^nE)$ si y sólo si E tiene la propiedad $(BB)_{n,s}$. En efecto, si tomamos $\rho \in sc(\mathcal{P}(^nE; G), \beta)$, recordando cómo son las seminormas que definen la topología fuerte en $\mathcal{P}(^nE; G)$, podemos suponer que existe un acotado A de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ tal que

$$\rho(P) = \sup_{\theta \in A} \|\dot{P}(\theta)\|.$$

Suponiendo que el espacio E verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$, se llega a que existe un acotado C de E tal que $A \subset \bar{\Gamma}(\bigotimes_{n,s} C)$. De este modo, si $P \in \mathcal{P}(^nE)$, se tiene

$$\begin{aligned}\rho(P) &= \sup_{\theta \in A} \|\dot{P}(\theta)\| \\ &\leq \sup_{\theta \in \bar{\Gamma}(\bigotimes_{n,s} C)} \|\dot{P}(\theta)\| \\ &\leq \|P\|_C,\end{aligned}$$

lo que indica que la topología τ_b es más fina que la topología β sobre $\mathcal{P}(^nE)$. Recordando ahora la Observación 1.32 (1), se concluye la igualdad de τ_b y β, ya que siempre se tenía que $\tau_b \leq \beta$. Ahora bien, si E no verifica $(BB)_{n,s}$, existe un acotado B de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ de forma que para cada acotado B_1 de E, $B \not\subset \bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_1)$, lo que va a proporcionar una seminorma que es β-continua, mientras que no es τ_b-continua.

Ya hemos indicado que para varias clases de espacios de Fréchet, entre los que se incluyen los espacios escalonados de Köthe y los espacios de Banach, se conoce que se verifica esta propiedad para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que se produce también la coincidencia de las respectivas topologías sobre espacios de funciones holomorfas ([**Din2**, **GGM**, **Din4**]).

(2) Para un espacio de Fréchet-Montel E, $\tau_0 = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE)$ si y sólo si E tiene la propiedad $(BB)_{n,s}$. Por una parte, si $\tau_0 = \tau_\omega$, se verifica que $\tau_b = \beta$, lo que implica que se verifique la propiedad $(BB)_{n,s}$. Si se supone ahora que E es un espacio de Fréchet-Montel que verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$, resulta que el espacio $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ también es un espacio de Montel, condición que implica, en particular, que su dual fuerte $(\mathcal{P}(^nE), \beta) = (\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es un espacio tonelado. De este modo, utilizando la Proposición 1.36, se concluye que $\tau_0 = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE)$.

(3) Ansemil y Taskinen ([**AnTa**]) dieron un ejemplo de espacio de Fréchet-Montel E para el que $\tau_0 \neq \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^2E)$. Lo que hacen es observar que el espacio E que Taskinen construye como contraejemplo al "Problema de las topologías" tiene la propiedad de que $E \underset{s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ contiene una copia del espacio de Banach ℓ_1 y por ello $E \underset{s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ no es de Montel, con lo que necesariamente $\tau_0 \neq \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^2E)$ (si $\tau_0 = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^2E)$ entonces E tiene $(BB)_{2,s}$ y al ser E de Montel, esto equivale a que $E \underset{s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ sea de Montel). Como consecuencia de esto resulta que $\tau_0 \neq \tau_\omega$ para todo abierto U de E. Nótese que cualquiera que sea el abierto U de E, $(\mathcal{P}(^nE), \tau)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{H}(U), \tau)$ con $\tau = \tau_0, \tau_\omega$ ([**Din1**], Proposiciones 2.40 y 2.41).

CAPÍTULO 2

Complementación en productos tensoriales y espacios de polinomios

La mayor parte de las propiedades de un espacio localmente convexo son heredadas por subespacios complementados, de ahí la importancia que tiene estudiar cuándo un espacio localmente convexo es un subespacio complementado de otro. Dentro de la teoría de productos tensoriales topológicos se conocían algunos casos concretos de complementación, y también se había estudiado esta propiedad para algunos espacios de polinomios. Comenzaremos el capítulo mostrando algunos resultados sobre complementación en productos tensoriales ordinarios, para exponer seguidamente las dificultades que aparecen al intentar utilizar una técnica similar para probar resultados de complementación en productos tensoriales simétricos de espacios localmente convexos. Se mostrará también la relación que tiene esto con la propiedad (BB) de Taskinen. También aprovecharemos la primera sección del capítulo para comentar algunos otros resultados conocidos sobre complementación en productos tensoriales, como el resultado debido a Bonet y Peris ([**BonP**]) que permite considerar un producto tensorial como un subespacio complementado de un producto tensorial simétrico.

En la segunda sección desarrollaremos fundamentalmente un estudio sobre complementación en productos tensoriales simétricos, lo que, utilizando después resultados sobre dualidad, nos dará también aplicaciones al estudio de la complementación en espacios de polinomios para las diferentes topologías utilizadas en holomorfía en dimensión infinita, que hemos introducido en el Capítulo 1. En particular, generalizaremos a todas esas topologías usuales y a espacios localmente convexos arbitrarios el resultado de Aron y Schottenloher en [**ArSc**] sobre complementación entre espacios de polinomios de distinto grado, definidos sobre espacios de Banach, dotados de la topología de la norma. Se probará, por ejemplo, que $\mathcal{P}(^m E)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^n E)$ cuando $m \leq n$, para τ_b y β, obteniendo a partir de ello que si E verifica $(BB)_{n,s}$ entonces también verifica $(BB)_{m,s}$. En otra línea de resultados, se estudiará la complementación de $\mathcal{P}(^n F)$ en $\mathcal{P}(^n E)$ cuando F es un subespacio complementado de E. Los resultados que se darán en este Capítulo van a ser utilizados en los tres capítulos siguientes, donde se van a exponer ejemplos originales relativos a algunas cuestiones sobre espacios de polinomios y holomorfía en dimensión infinita.

1. Complementación y propiedades (BB) y $(BB)_n$

En **[Tas1]** Taskinen estudia, entre otras cosas, la estabilidad de la propiedad (BB) *con respecto a las operaciones estándar en Análisis Funcional de tomar productos y* subespacios; y demuestra que esta propiedad es estable al tomar productos y también al pasar a subespacios complementados, mientras que no lo es para el paso a subespacios. Esto último se pone claramente de manifiesto si se considera el espacio E que Taskinen construye en **[Tas1]** y que tiene la propiedad de que (E, ℓ_2) no tiene la propiedad (BB), mientras que $(E, L^1[0,1])$ tiene la propiedad (BB) y ℓ_2 es un subespacio (no complementado) de $L^1[0,1]$.

En la primera sección de este capítulo probamos la estabilidad de las propiedades $(BB)_n$ y $(BB)_{n,s}$, que como se ha indicado en el Capítulo 1, son una generalización de la propiedad (BB) al caso de n-productos tensoriales y n-productos tensoriales simétricos de un mismo espacio E. A partir de ello se deduce una interesante relación entre estas propiedades.

Para el caso de productos tensoriales arbitrarios (no simétricos) los resultados sobre complementación que obtenemos se deducen generalizando la prueba de Taskinen al caso de n-productos tensoriales, utilizando que el producto tensorial verifica la propiedad asociativa. Los resultados relativos al caso simétrico requieren una prueba original en la que, claro está, no tiene sentido el concepto usual de propiedad asociativa al vernos forzados, por la propia naturaleza de los tensores simétricos, a multiplicar sólo espacios idénticos.

Comenzaremos con los detalles de la demostración en el caso no simétrico:

PROPOSICIÓN 2.1 (Propiedad distributiva, **[Köt2]**, §41.6 (5)). *Sean E_1, E_2 y F espacios localmente convexos arbitrarios. Entonces*

$$(E_1 \times E_2)\hat{\otimes}_\pi F = (E_1 \hat{\otimes}_\pi F) \times (E_2 \hat{\otimes}_\pi F).$$

OBSERVACIÓN 2.2. De esta propiedad se derivan varias consecuencias importantes, por ejemplo, que $\hat{\otimes}_{n,\pi} E^k$ es isomorfo a $(\hat{\otimes}_{n,\pi} E)^{k^n}$. Este caso concreto se va a utilizar más adelante, y por ello insistimos en la naturaleza de las aplicaciones que producen el isomorfismo. Para fijar ideas comenzaremos suponiendo que $n = 3$ y $k = 2$. Una aplicación ϕ que da un isomorfismo entre $\hat{\bigotimes}_{3,\pi} E^2$ y $(\hat{\bigotimes}_{3,\pi} E)^8$ puede ser la aplicación

$$\phi : \hat{\bigotimes}_{3,\pi} E^2 \to (\hat{\bigotimes}_{3,\pi} E)^8,$$

que se define sobre los tensores de la forma

$$\theta = (x_{11}, x_{12}) \otimes (x_{21}, x_{22}) \otimes (x_{31}, x_{32})$$

como

$$\begin{aligned}\phi(\theta) = (&x_{11} \otimes x_{21} \otimes x_{31},\ x_{11} \otimes x_{21} \otimes x_{32},\ x_{11} \otimes x_{22} \otimes x_{31},\ x_{11} \otimes x_{22} \otimes x_{32},\\ &x_{12} \otimes x_{21} \otimes x_{31},\ x_{12} \otimes x_{21} \otimes x_{32},\ x_{12} \otimes x_{22} \otimes x_{31},\ x_{12} \otimes x_{22} \otimes x_{32}),\end{aligned}$$

lo que representaremos por

$$(x_{1\sigma(1)} \otimes x_{2\sigma(2)} \otimes x_{3\sigma(3)})_\sigma,$$

donde σ recorre las variaciones con repetición de los 2 primeros números naturales, tomados de 3 en 3. (La aplicación se extiende por linealidad a todo $\bigotimes_{3,\pi} E^2$ y por continuidad a $\hat{\bigotimes}_{3,\pi} E^2$).

En el caso general, la notación se complica pero se mantienen las ideas. Definiremos una aplicación ϕ sobre los n-tensores elementales, cuya extensión a todo $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E^k$ nos dará un isomorfismo (topológico) entre $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E^k$ y $(\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E)^{k^n}$. Esta aplicación queda determinada del modo siguiente: para $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik})$ definiremos

$$\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (x_{1\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{n\sigma(n)})_\sigma,$$

donde $\sigma \in VR_{k,n}$, las variaciones con repetición de los k primeros números naturales, tomados de n en n.

También vamos a necesitar la

PROPOSICIÓN 2.3 ([**Köt2**], §41.5.(5)). *Sean E_1 y E_2 espacios localmente convexos arbitrarios y F_1 y F_2 subespacios complementados de E_1 y E_2, respectivamente. Entonces se tiene que*

$$F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2 \text{ es un subespacio complementado de } E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2.$$

Habiendo enunciado ya esta propiedad, pasamos a exponer algunos resultados que se obtienen a partir de ella.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean E y F espacios localmente convexos, con $F \neq \{0\}$. Entonces E es un subespacio complementado de $E\hat{\otimes}_\pi F$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $F \neq \{0\}$, podemos tomar $e \in F \setminus \{0\}$. Entonces $[e]$, el subespacio de F generado por e, es un subespacio de dimensión finita, y, por tanto, está complementado en F. Por este motivo, y la Proposición 2.3, se tiene que $E\hat{\otimes}_\pi[e]$ es un subespacio complementado de $E\hat{\otimes}_\pi F$. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} j: & E & \to & E\hat{\otimes}_\pi[e] \\ & x & \mapsto & x \otimes e \end{array}$$

y la aplicación $\pi : E\hat{\otimes}_\pi[e] \to E$, que se define como

$$\begin{array}{rccc} \pi: & E\hat{\otimes}_\pi[e] & \to & E \\ & x \otimes \lambda e & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

sobre los tensores de la forma $x \otimes \lambda e$ y se extiende por linealidad y continuidad a todo $E\hat{\otimes}_\pi[e]$, dan lugar a un isomorfismo entre E y $E\hat{\otimes}_\pi[e]$, lo que concluye la prueba.

No obstante, podemos determinar una inclusión $\tilde{\jmath}$, definida por

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\jmath}: & E & \to & E\hat{\otimes}_\pi F \\ & x & \mapsto & x \otimes e \end{array}$$

y una proyección $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$, que es la extensión por linealidad y continuidad de

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\boldsymbol{\pi}}: & E\hat{\otimes}_\pi F & \to & E \\ & x \otimes (\lambda e + z) & \mapsto & \lambda x, \end{array}$$

a todo $E\hat{\otimes}_\pi F$, donde z varía en el complementario de $[e]$. Las aplicaciones $\tilde{\jmath}$ y $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ nos dan la complementación entre E y $E\hat{\otimes}_\pi F$ que estábamos buscando. □

COROLARIO 2.5. *Sean E, F y G espacios localmente convexos, siendo G no trivial (es decir, $G \neq \{0\}$). Entonces $E\hat{\otimes}_\pi F$ es un subespacio complementado de $E\hat{\otimes}_\pi F\hat{\otimes}_\pi G$. Como consecuencia, $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n+1,\pi} E$, para cada entero positivo n.*

DEMOSTRACIÓN. Recordando que el producto tensorial proyectivo cumple la propiedad asociativa, y teniendo en cuenta la Proposición anterior, resulta que $E\hat{\otimes}_\pi F$, que es isomorfo a $(E\hat{\otimes}_{\pi}F)\hat{\otimes}_{\pi}[e]$ para algún $e \in G$, $e \neq 0$, es un subespacio complementado de $(E\hat{\otimes}_{\pi}F)\hat{\otimes}_{\pi}G \simeq E\hat{\otimes}_{\pi}F\hat{\otimes}_{\pi}G$.

La última parte de la afirmación resulta de lo que ya se ha probado, utilizando inducción. □

Al estudiar la complementación en productos tensoriales, es natural preguntarnos sobre la relación existente entre el n-producto tensorial de un subespacio complementado en otro y el n-producto tensorial de ese segundo espacio. Los resultados que vamos a presentar se orientan en esa dirección. Partiendo de que el producto tensorial verifica la propiedad distributiva, Taskinen en [**Tas1**] prueba que si (E_1, F) y (E_2, F) poseen la propiedad (BB), entonces también la posee $(E_1 \times E_2, F)$. A nosotros nos interesa dar versiones de los teoremas que establecía Taskinen que sean válidas para n-productos tensoriales, y estén relacionadas con las propiedades $(BB)_n$. Con ese objeto obtenemos el siguiente bloque de resultados.

LEMA 2.6. *Sea E un espacio localmente convexo y sea F un subespacio complementado de E. Entonces $\bigotimes_{n,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{n,\pi} E$ y, consecuentemente, $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.3, $\bigotimes_{2,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{2,\pi} E$, y usando repetidas veces la propiedad asociativa del producto tensorial, se obtiene que $\bigotimes_{n,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{n,\pi} E$. Más aún, si $i : F \to E$ y $p : E \to F$ son las aplicaciones que dan la complementación de F en E, las aplicaciones $\bigotimes_n i$ y $\bigotimes_n p$ dan la complementación de $\bigotimes_{n,\pi} F$ en $\bigotimes_{n,\pi} E$. La extensión natural de estas aplicaciones a las compleciones de los productos tensoriales de E y F dan el resultado. □

COROLARIO 2.7. *Sea E un espacio localmente convexo y sea F un subespacio complementado de E. Supongamos que E verifica $(BB)_n$, entonces F también verifica $(BB)_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B un acotado de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} F$ y sean i y p como en el Lema 2.6. Entonces, $(\bigotimes_n i)(B)$ es un acotado de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E$, y, por tanto, existe un acotado B_1 de E tal que $(\bigotimes_n i)(B) \subset \bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_1)$, luego

$$B = (\bigotimes_n p) \circ (\bigotimes_n i)(B) \subset (\bigotimes_n p)(\bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_1)) = \bar{\Gamma}((\bigotimes_n p)(\bigotimes_n B_1)) = \bar{\Gamma}(\bigotimes_n (p(B_1))).$$

Como $p(B_1)$ es un acotado de F, se tiene que F verifica la propiedad $(BB)_n$. □

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea E un espacio localmente convexo y sean k y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces E verifica la propiedad $(BB)_n$ si y sólo si E^k verifica $(BB)_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos la suficiencia de la condición. En efecto, como E es un subespacio complementado de E^k, siempre que E^k verifique $(BB)_n$, también lo hará E.

Para probar la necesidad de la condición debemos tener en cuenta la Observación 2.2, en la que se establecía el isomorfismo existente entre $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E^k$ y $(\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E)^{k^n}$. La técnica que se va a utilizar es similar a la que Taskinen usa en **[Tas1]**, Proposición 3.5.

Comencemos tomando un acotado B de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E^k$. Por el isomorfismo ϕ mencionado anteriormente, podemos suponer que existe un acotado B_1 de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E$ tal que

$$B \subset \phi^{-1}(B_1^{k^n}).$$

Como estamos suponiendo que E verifica la propiedad $(BB)_n$, se deduce la existencia de un acotado absolutamente convexo B_2 de E tal que

$$B_1 \subset \bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_2),$$

así, se tiene que

$$B \subset \phi^{-1}(\bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_2))^{k^n}.$$

Sea entonces $z \in (\Gamma(\bigotimes_n B_2))^{k^n}$. Como ϕ es una aplicación suprayectiva, podemos suponer que z es de la forma

$$z = \left(\sum_{j=1}^{r_\sigma} \lambda_\sigma^j b_{1,\sigma(1)}^j \otimes \cdots \otimes b_{n,\sigma(n)}^j \right)_\sigma ,$$

donde $\sum_{j=1}^{r_\sigma} |\lambda_\sigma^j| \leq 1$ y $b_{l,\sigma(l)}^j \in B_2$, variando $\sigma \in VR_{k,n}$ y $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Hagamos

$$z_\sigma^j = (0, \ldots, 0, b_{1,\sigma(1)}^j \otimes \cdots \otimes b_{n,\sigma(n)}^j, 0, \ldots, 0),$$

esto es, z^j es el elemento de $(\hat{\bigotimes}_{n,\pi} E)^{k^n}$ que es imagen por ϕ del tensor

$$(x_{1,1}, \ldots, x_{1,k}) \otimes \cdots \otimes (x_{n,1}, \ldots, x_{n,k}) \in \bigotimes_n E^k,$$

donde

$$x_{i,l} = b^j_{i,\sigma(i)}\delta_{\sigma(i),l},$$

siendo $\delta_{p,q}$ la *delta de Kronecker,* a saber, $\delta_{p,q} = 1$ si $p = q$ y $\delta_{p,q} = 0$ si $p \neq q$. Como $x_{i,l} \in B_2$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $l \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que

$$(x_{i,1}, \ldots, x_{i,k}) \in B_2^k$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esta elección de z^j_σ se realiza para que resulte

$$z = \sum_\sigma \sum_{j=1}^{r_\sigma} \lambda^j_\sigma z^j_\sigma.$$

Si $\lambda = \sum_\sigma \sum_{j=1}^{r_\sigma} \lambda^j_\sigma \neq 0$. se puede escribir

$$z = \lambda \sum_\sigma \sum_{j=1}^{r_\sigma} \frac{\lambda^j_\sigma}{\lambda} z^j_\sigma.$$

Como para cada σ, $\sum_{j=1}^{r_\sigma} |\lambda^j_\sigma| \leq 1$, se tiene que $\sum_\sigma \sum_{j=1}^{r_\sigma} |\lambda^j_\sigma| \leq k^n$ (si $\lambda = 0$ esta desigualdad es obvia), con lo que finalmente obtenemos

$$z \in \phi(\lambda\Gamma(\bigotimes_n B_2^k)) \subset \phi(k^n\Gamma(\bigotimes_n B_2^k)) = \phi(\Gamma(\bigotimes_n kB_2^k)),$$

donde kB_2^k es un acotado de E^k. Esta relación se ha obtenido para $z \in (\Gamma(\bigotimes_n B_2))^{k^n}$, pero una relación análoga permanece siendo cierta cuando se considera la adherencia de $(\Gamma(\bigotimes_n B_2))^{k^n}$, esto es, si tomamos $y \in (\bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_2))^{k^n}$, se llega a que

$$y \in \phi(\lambda\bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_2^k)) \subset \phi(k^n\bar{\Gamma}(\bigotimes_n B_2^k)) = \phi(\bar{\Gamma}(\bigotimes_n kB_2^k)),$$

con lo que se obtiene que

$$B \subset \bar{\Gamma}(\bigotimes_n kB_2^k),$$

tal como queríamos probar. □

OBSERVACIÓN 2.9. La propiedad asociativa del producto tensorial es fundamental para la prueba de los resultados anteriores. El producto tensorial simétrico no verifica esta propiedad; de hecho, no tiene sentido definirla, al menos del modo como cabría esperar que se hiciera; de partida, es complicado dar sentido a la expresión

$$(E \hat{\bigotimes}_{s,\pi} E) \hat{\bigotimes}_{s,\pi} E,$$

puesto que no es el mismo espacio el que se encuentra a ambos lados del símbolo $\hat{\bigotimes}_{s,\pi}$.

Una posible interpretación para la propiedad asociativa en productos tensoriales simétricos podría ser la que se obtiene mediante la definición $x \underset{s}{\otimes} y = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$, pero tampoco es una buena elección, puesto que no verifica propiedades que deberían ser "deseables", ni siquiera en el caso que mostramos a continuación:

$$(\underset{n,s}{\otimes} E) \underset{s}{\otimes} (\underset{n,s}{\otimes} E) \neq \underset{2n,s,\pi}{\otimes} E,$$

aunque E sea un espacio de dimensión finita d. Puede comprobarse que el primero de los espacios tiene dimensión $CR(CR(d,n),2)$, mientras que la dimensión del segundo es $CR(d,2n)$, donde $CR(i,j)$ denota el número de combinaciones con repetición de i elementos tomados de j en j. Ambos números son distintos si, por ejemplo, $d = 1$ y $n = 2$.

Otro tipo de resultados sobre complementación en productos tensoriales de espacios localmente convexos se obtiene por medio de la relación que existe entre los productos tensoriales y los productos tensoriales simétricos. Ya se ha mencionado que $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$ es un subespacio complementado de $\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}} E$ (Proposición 1.25). Bonet y Peris prueban que el producto tensorial (usual) de dos espacios localmente convexos es un subespacio complementado del 2-producto tensorial simétrico de un cierto espacio:

PROPOSICIÓN 2.10 ([**BonP**], Lema 8). *Sean F y Z espacios localmente convexos y definamos $E = F \times Z$. Entonces $F \underset{\pi}{\otimes} Z$ es isomorfo a un subespacio complementado de $E \underset{s,\pi}{\otimes} E$, y consecuentemente $F \underset{\pi}{\hat{\otimes}} Z$ es isomorfo a un subespacio complementado de $E \underset{s,\pi}{\hat{\otimes}} E$.*

Vamos a dar una generalización de este resultado para el producto tensorial de más de dos espacios. La prueba no se puede hacer de modo inmediato por lo observado anteriormente: el producto tensorial simétrico no verifica la propiedad asociativa. La demostración que vamos a hacer sigue las pautas de la prueba del resultado original.

PROPOSICIÓN 2.11. *Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios localmente convexos, y definamos*

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i.$$

Entonces $E_1 \underset{\pi}{\otimes} \cdots \underset{\pi}{\otimes} E_n$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$. Como consecuencia, se obtiene que $E_1 \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \ldots \underset{\pi}{\hat{\otimes}} E_n$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} E$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos, para cada $i = 1, \ldots, n$, las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} j_i : & E_i & \rightarrow & E \\ & x_i & \mapsto & (0, \ldots, \overset{(i)}{x_i}, \ldots, 0) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} \boldsymbol{\pi}_i : & E & \rightarrow & E_i \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

y denotemos por s a la aplicación de simetrización en $\bigotimes_n E$. Entonces la aplicación

$$j : E_1 \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} E_n \rightarrow \underset{n,s}{\otimes} E$$

definida como

$$j = n!\ s \circ (j_1 \otimes \cdots \otimes j_n)$$

es una aplicación lineal y continua. Por otra parte, $\boldsymbol{\pi} : \underset{n,s}{\otimes} E \rightarrow E_1 \underset{\pi}{\otimes} \cdots \underset{\pi}{\otimes} E_n$ definida como

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\pi}_n)|_{\underset{n,s}{\otimes} E}$$

es también una aplicación lineal y continua y se verifica que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} \circ j(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \boldsymbol{\pi}(n!\ j_1(x_1) \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} j_n(x_n)) \\ &= \boldsymbol{\pi}\left(\sum_{\sigma \in P_n} j_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes j_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \boldsymbol{\pi}_1(j_{\sigma(1)}(x_{\sigma(1)})) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\pi}_n(j_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})) \\ &= \boldsymbol{\pi}_1(j_1(x_1)) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\pi}_n(j_n(x_n)) \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \end{aligned}$$

ya que $\boldsymbol{\pi}_r \circ j_s = 0$ si $r \neq s$ y $\boldsymbol{\pi}_r \circ j_r = Id_{E_r}$ para cada $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Como las aplicaciones definidas son lineales y continuas y $\boldsymbol{\pi} \circ j(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, se tiene que $\boldsymbol{\pi} \circ j = Id_{E_1 \otimes \cdots \otimes E_n}$, lo que concluye la prueba de la primera parte del enunciado. Extendiendo por continuidad las aplicaciones j y $\boldsymbol{\pi}$ se obtienen aplicaciones $\bar{j}$ y $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ que dan la complementación buscada entre $E_1 \hat{\underset{\pi}{\otimes}} \ldots \hat{\underset{\pi}{\otimes}} E_n$ y $\hat{\underset{n,s,\pi}{\otimes}} E$. □

La importancia que tiene la Proposición 2.11 radica en que las técnicas que se desarrollarán para el estudio de los productos tensoriales simétricos van a poder aplicarse posteriormente, en algunos casos, al estudio de los productos tensoriales (no simétricos). Además, este resultado nos proporciona un pequeño avance en el estudio de la relación entre las propiedades $(BB)_n$ y $(BB)_{n,s}$, tal como se mostrará en la Proposición 2.13. Previamente vamos a establecer un Lema, que generaliza la Proposición 1.30 de **[Din6]**:

LEMA 2.12. *Sea E un espacio localmente convexo, tal que E verifica $(BB)_n$. Entonces E verifica $(BB)_{n,s}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B un acotado de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$. Como por la Proposición 1.25, $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$, resulta que B es un acotado de $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$, por lo que existe un acotado absolutamente convexo $C \subset E$ tal que $B \subset \bar{\Gamma}(\otimes_n C)$. Además se tiene que

$$B = s(B) \subset s(\bar{\Gamma}(\otimes_n C)) = \bar{\Gamma}(s(\otimes_n C)) \subset \bar{\Gamma}\left(\otimes_{n,s} \frac{n}{(n!)^{1/n}} C\right),$$

siendo esta última inclusión consecuencia de la Observación 1.17. Como $\frac{n}{(n!)^{1/n}} C$ es un acotado de E, se concluye que E verifica $(BB)_{n,s}$. □

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea E un espacio localmente convexo. Entonces E tiene $(BB)_n$ si y sólo si E^n tiene $(BB)_{n,s}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que si E tiene la propiedad $(BB)_n$, entonces también la va a tener E^n (Proposición 2.8), de ahí que, por el Lema 2.12, E^n verifique la propiedad $(BB)_{n,s}$.

Por otra parte, supongamos que E^n verifica $(BB)_{n,s}$. Como consecuencia de la Proposición 2.11, se tiene que $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E^n$. Sean j la inyección y $\boldsymbol{\pi}$ la proyección definidas en la demostración de la Proposición 2.11. Recordemos que, si $\theta = \otimes_n x$, con $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ se tiene que

$$\boldsymbol{\pi}(\theta) = \boldsymbol{\pi}_1(x) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\pi}_n(x) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n.$$

Así, si B es un acotado de $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$, $j(B)$ es un acotado de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E^n$, por lo que existe un acotado B_1 de E^n tal que $j(B) \subset \bar{\Gamma}(\otimes_{n,s} B_1)$. Además, podemos suponer que B_1 es de la forma $B_1 = B_2^n$, donde B_2 es un acotado de E. De este modo,

$$B = \boldsymbol{\pi} \circ j(B) \subset \boldsymbol{\pi}\left(\bar{\Gamma}(\otimes_{n,s} B_1)\right) = \boldsymbol{\pi}\left(\bar{\Gamma}(\otimes_{n,s} B_2^n)\right) =$$

$$= \bar{\Gamma}\left(\boldsymbol{\pi}(\otimes_{n,s} B_2^n)\right) \subset \bar{\Gamma}(\otimes_n B_2),$$

puesto que

$$\boldsymbol{\pi}(\otimes_{n,s} B_2^n) \subset \otimes_n B_2.$$

Con esto se ha concluido la prueba. □

2. Complementación en Productos Tensoriales Simétricos

El resultado que se hace a continuación es el que nos va a permitir considerar todo n-tensor simétrico como un $(n+1)$-tensor simétrico. Esta relación se utilizará en este capítulo y en capítulos posteriores, al estudiar diversos resultados relacionados con espacios de polinomios. Lo que haremos será probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n+1,s,\pi} E$.

Las técnicas utilizadas para el estudio de la complementación en productos tensoriales no simétricos no son válidas para los productos tenso riales simétricos, por lo que se deben desarrollar nuevas técnicas.

Para poder estudiar la complementación entre espacios localmente convexos debemos, en primer lugar, estudiar la complementación algebraica, y pasar posteriormente al estudio de la continuidad de las aplicaciones que producen esa complementación; por ello debemos establecer previamente algunos resultados de tipo algebraico, que probamos a continuación.

LEMA 2.14. *Sea E un espacio localmente convexo sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sean $x, y \in E$ vectores linealmente independientes. Entonces, dado $n = 1, 2, \ldots$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\bigotimes_n x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \bigotimes_n (x + ky).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $F = [x, y]$ el espacio vectorial de dimensión 2 generado por x e y. Utilizando el Lema 5.1 de [**Rya**], se puede comprobar que $\{\bigotimes_s [x^{(k)}, y^{(n-k)}] : k = 0, \ldots, n\}$ es una base de $\bigotimes_{n,s} F$. En efecto, gracias al Lema 1.22, llegamos a que

$$\bigotimes_n (x + ky) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i \bigotimes_s [x^{(i)}, y^{(n-i)}]$$

para cada $k = 1, \ldots, n+1$; de este modo, para probar que $\{\bigotimes_n (x+ky) : k = 1, \ldots, n+1\}$ es una base de F, basta comprobar que el determinante Δ que aparece a continuación es $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 1 & 2\binom{n}{1} & 2^2\binom{n}{2} & \cdots & 2^{n-1}\binom{n}{n-1} & 2^n\binom{n}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n\binom{n}{1} & n^2\binom{n}{2} & \cdots & n^{n-1}\binom{n}{n-1} & n^n\binom{n}{n} \\ 1 & (n+1)\binom{n}{1} & (n+1)^2\binom{n}{2} & \cdots & (n+1)^{n-1}\binom{n}{n-1} & (n+1)^n\binom{n}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & (n+1) & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^{n-1} & (n+1)^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

puesto que este determinante es un determinante de tipo Vandermonde. En consecuencia $\{\underset{n}{\otimes}(x+ky) : k = 1\ldots, n+1\}$ son $n+1$ vectores independientes en F, y, por tanto, una base de F. Así existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$\underset{n}{\otimes} x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \underset{n}{\otimes}(x+ky).$$

□

La importancia de elegir una buena representación para un tensor nos simplificará en muchas ocasiones el tratamiento de estos objetos. Para ello utilizaremos el siguiente

LEMA 2.15. *Sean E un espacio localmente convexo, $\theta \in \underset{n,s}{\otimes} E$ y $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Entonces existe una representación $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i$ de θ con $\varphi(x_i) \neq 0$ y $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba en el caso en el que se considera un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$, tomemos una representación cualquiera de θ, $\theta = \sum_{j=1}^{R} \underset{n}{\otimes} x_j$ y hagamos $J = \{j \in \{1, \ldots, R\} : \varphi(x_j) = 0\}$; elijamos también $e \in E$ tal que $\varphi(e) = 1$. Tenemos que

$$\underset{n}{\otimes} x_j = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \underset{n}{\otimes}(x_j + ke),$$

resultando de este modo

$$\theta = \sum_{j \notin J} \underset{n}{\otimes} x_j + \sum_{j \in J} \sum_{\substack{k=1,\ldots,n+1 \\ \lambda_{k,j} \neq 0}} \underset{n}{\otimes}(\lambda_{k,j}^{\frac{1}{n}}(x_j + ke)),$$

con $\varphi(x_j) \neq 0$ si $j \notin J$ y $\varphi(\lambda_{k,j}^{\frac{1}{n}}(x_j + ke)) \neq 0$, con lo que podemos expresar θ del modo deseado.

Si E es un espacio localmente convexo sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, la prueba anterior se debe modificar ligeramente: tomemos $\theta = \sum_{j=1}^{R} \varepsilon_j \underset{n}{\otimes} x_j$ y hagamos $J = \{j \in \{1, \ldots, R\} : \varphi(x_j) = 0\}$. Elijamos, como antes, $e \in E$ tal que $\varphi(e) = 1$. Resulta entonces

$$\theta = \sum_{j \notin J} \varepsilon_j \underset{n}{\otimes} x_j + \sum_{j \in J} \sum_{\substack{k=1\ldots,n+1 \\ \lambda_{k,j} \neq 0}} \varepsilon_j \frac{\lambda_{k,j}}{|\lambda_{k,j}|} \underset{n}{\otimes} (|\lambda_{k,j}|^{\frac{1}{n}}(x_j + ke)),$$

concluyendo así la demostración. □

TEOREMA 2.16. *Sean E un espacio localmente convexo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$ es un subespacio complementado de $\underset{n+1,s,\pi}{\otimes} E$, para cada entero positivo n.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $e \in E$ y $\varphi \in E'$ tales que $\varphi(e) = 1$. Definiremos una aplicación j sobre los tensores de la forma $\underset{n}{\otimes} x$, $x \in E$, por la fórmula

$$j(\underset{n}{\otimes} x) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \varphi(x)^{k-1} \underset{s}{\otimes} [e^{(k)}, x^{(n-k+1)}].$$

Utilizando el Lema 1.22 podemos conseguir la siguiente relación, que se utilizará más tarde:

$$j(\underset{n}{\otimes} x)\varphi(x) = \underset{n+1}{\otimes} x - \underset{n+1}{\otimes} (x - \varphi(x)e).$$

En efecto,

$$\underset{n+1}{\otimes} x - \underset{n+1}{\otimes} (x - \varphi(x)e) = \underset{n+1}{\otimes} x - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \underset{s}{\otimes} [(-\varphi(x)e)^{(n+1-k)}, x^{(k)}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \varphi(x)^k \underset{s}{\otimes} [e^{(k)}, x^{(n-k+1)}].$$

Para cada $\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i \in \underset{n,s}{\otimes} E$, donde $\varepsilon_i = 1$ o $\varepsilon_i = -1$ en el caso real y podemos tomar $\varepsilon_i = 1$ cuando E es un espacio localmente convexo complejo, se puede extender la aplicación j por linealidad del siguiente modo: $j(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i j(\underset{n}{\otimes} x_i)$. En efecto, si consideramos dos representaciones distintas del mismo tensor $\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i = \sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n}{\otimes} y_i$ y tomamos $P \in \mathcal{P}(^{n+1}E)$, se tiene

$$\langle j(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i), \dot{P}\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_i \varphi(x_i)^{k-1}(-1)^{k+1}\langle \underset{s}{\otimes}[e^{(k)}, x_i^{(n-k+1)}], \dot{P}\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \varepsilon_i \varphi(x_i)^{k-1} \check{P}(e, \overset{k}{\ldots}, e, x_i, \overset{n-k+1}{\ldots}, x_i).$$

Si definimos ahora $Q \in \mathcal{P}(^nE)$ por

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \varphi(x)^{k-1} \check{P}(e, \overset{k}{\ldots}, e, x, \overset{n-k+1}{\ldots}, x),$$

como $\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i = \sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n}{\otimes} y_i$ se tiene

$$\langle j(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i), \dot{P}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i, \dot{Q}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n}{\otimes} y_i, \dot{Q}\rangle = \langle j(\sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n}{\otimes} y_i), \dot{P}\rangle,$$

Lo que implica, gracias al Teorema de Hahn-Banach, que $j(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i) = j(\sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n}{\otimes} y_i)$ son el mismo elemento de $\underset{n+1,s,\pi}{\otimes} E$ y j está bien definida.

A continuación definimos una proyección $\boldsymbol{\pi}$ de $\underset{n+1,s,\pi}{\otimes} E$ sobre $\underset{n,s,\pi}{\otimes} E$ por

$$\boldsymbol{\pi}\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n+1}{\otimes} x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi(x_i) \underset{n}{\otimes} x_i.$$

$\boldsymbol{\pi}$ está bien definida y $\boldsymbol{\pi} \circ j = Id_{\underset{n,s}{\otimes} E}$. En efecto, si $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n+1}{\otimes} x_i = \sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n+1}{\otimes} y_i$ y tomamos $P \in \mathcal{P}(^nE)$, tenemos

$$\langle \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi(x_i) \underset{n}{\otimes} x_i, \dot{P}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi(x_i) P(x_i),$$

pero para P tenemos asociado otro $Q \in \mathcal{P}(^{n+1}E)$, definido por $Q(x) = \varphi(x)P(x)$, para cada $x \in E$. Por tanto,

$$\langle \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi(x_i) \underset{n}{\otimes} x_i, \dot{P}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n+1}{\otimes} x_i, \dot{Q}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{M} \delta_i \underset{n+1}{\otimes} y_i, \dot{Q}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{M} \delta_i \varphi(y_i) \underset{n}{\otimes} y_i, \dot{P}\rangle$$

y obviamente $\boldsymbol{\pi}$ es una aplicación lineal.

Como habíamos observado, tenemos la fórmula

$$\underset{n+1}{\otimes} x - \underset{n+1}{\otimes} (x - \varphi(x)e) = \varphi(x) j(\underset{n}{\otimes} x),$$

entonces

$$\boldsymbol{\pi}(\underset{n+1}{\otimes} x - \underset{n+1}{\otimes} (x - \varphi(x)e)) = \varphi(x)\boldsymbol{\pi}(j(\underset{n}{\otimes} x)),$$

es decir

$$\varphi(x) \underset{n}{\otimes} x - \varphi(x - \varphi(x)e) \underset{n}{\otimes} (x - \varphi(x)e) = \varphi(x)(\boldsymbol{\pi} \circ j)(\underset{n}{\otimes} x).$$

Como $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$, para cada $x \in E$, tenemos

$$\boldsymbol{\pi} \circ j(\underset{n}{\otimes} x) = \underset{n}{\otimes} x$$

para $x \notin \ker \varphi$ y $\boldsymbol{\pi} \circ j$ es la aplicación identidad sobre los tensores que se pueden escribir como $\underset{n}{\otimes} x$, con $x \notin \ker \varphi$. Usando el Lema 2.15 podemos escribir cada tensor $\theta \in \underset{n,s}{\otimes} E$ como una suma $\theta = \sum_{i=1}^{N} \underset{n}{\otimes} x_i$, con $\varphi(x_i) \neq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, y entonces

$$\boldsymbol{\pi} \circ j = Id_{\underset{n,s}{\otimes} E}.$$

Necesitamos probar la continuidad de j y $\boldsymbol{\pi}$.

Elijamos $\alpha \in sc(E)$ y $\theta \in \underset{n,s,\pi}{\otimes} E$. Si $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n}{\otimes} x_i$ es una representación de θ, entonces

$$\begin{aligned}(\underset{n+1}{\otimes} \alpha)(j(\theta)) &= (\underset{n+1}{\otimes} \alpha) \left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} \varphi(x_i)^{k-1} \underset{s}{\otimes} [e^{(k)}, x_i^{(n-k+1)}] \right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\varphi(x_i)|^{k-1} [\alpha(e)]^k \alpha(x_i)^{n-k+1} \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} [\alpha(e)]^k \right) (\sup\{\alpha, |\varphi|\}(x_i))^n = \\ &= C \sum_{i=1}^{N} r(x_i)^n,\end{aligned}$$

donde $r = \sup\{\alpha, |\varphi|\} \in sc(E)$ y $C = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} [\alpha(e)]^k$. Como esto ocurre para cada representación de θ, tenemos

$$(\underset{n+1}{\otimes} \alpha)(j(\theta)) \leq C(\underset{n,s}{\otimes} r)(\theta)$$

y, consecuentemente, la continuidad de j.

Para probar la continuidad de $\boldsymbol{\pi}$ elegimos $\alpha \in sc(E)$. Para $\theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \underset{n+1}{\otimes} x_i$,

$$\begin{aligned}
(\underset{n}{\otimes}\alpha)(\boldsymbol{\pi}(\theta)) = \\
&= (\underset{n}{\otimes}\alpha)\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \varphi(x_i) \underset{n}{\otimes} x_i\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} (\underset{n}{\otimes}\alpha)(\varepsilon_i \varphi(x_i) \underset{n}{\otimes} x_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} |\varphi(x_i)| [\alpha(x_i)]^n \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} [r(x_i)]^{n+1},
\end{aligned}$$

con $r = \sup\{\alpha, |\varphi|\} \in sc(E)$. Tomando ínfimos sobre todas las representaciones de θ tenemos

$$(\underset{n}{\otimes}\alpha)(\boldsymbol{\pi}(\theta)) \leq (\underset{n+1,s}{\otimes} r)(\theta),$$

y entonces $\boldsymbol{\pi}$ es continua. □

La extensión del teorema anterior al producto tensorial completado se obtiene del modo usual, y va a ser la que utilizaremos más frecuentemente en lo sucesivo. La expresamos en el siguiente

COROLARIO 2.17. *Sea E un espacio localmente convexo. Entonces $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n+1,s,\pi} E$.*

A partir de la complementación de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$ en $\hat{\otimes}_{n+1,s,\pi} E$, podemos conseguir los siguientes resultados:

COROLARIO 2.18. *Sea E un espacio localmente convexo, entonces para $n = 2, 3, \ldots$ y $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ tenemos que $\hat{\otimes}_{k,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$.*

DEMOSTRACIÓN. Cada uno de los espacios de la siguiente cadena

$$\hat{\bigotimes}_{k,s,\pi} E \hookrightarrow \hat{\bigotimes}_{k+1,s,\pi} E \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \hat{\bigotimes}_{n-1,s,\pi} E \hookrightarrow \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$$

es un subespacio complementado del siguiente. Por tanto, considerando la composición de todas las inclusiones, por una parte, y la composición de todas las proyecciones por la otra, se tiene una inclusión y una proyección, respectivamente, de $\hat{\bigotimes}_{k,s,\pi} E$ en $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$, que son aplicaciones que nos dan la complementación buscada. □

Como en el caso de los productos tensoriales sin simetría, también se verifica el siguiente Lema que, para el caso en el que E y F son espacios de Banach, ha sido establecido por González y Gutiérrez en [**GoGu**].

LEMA 2.19. *Sea E un espacio localmente convexo y sea F un subespacio complementado de E. Entonces $\bigotimes_{n,s,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{n,s,\pi} E$ y, consecuentemente, $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.6 , $\bigotimes_{n,\pi} F$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{n,\pi} E$. Como $\bigotimes_{n,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\bigotimes_{n,\pi} E$, si denotamos por I_E y s_E a las aplicaciones que dan esta complementación para E, y por I_F y s_F las análogas para F (donde s representa a la *aplicación de simetrización*), e i y p son como en el Lema citado, podemos definir entonces $j : \bigotimes_{n,s,\pi} F \to \bigotimes_{n,s,\pi} E$ como $j = s_E \circ \bigotimes_n i \circ I_F$ y $\boldsymbol{\pi} : \bigotimes_{n,s,\pi} E \to \bigotimes_{n,s,\pi} F$ como $\boldsymbol{\pi} = s_F \circ \bigotimes_n p \circ I_E$, que dan la complementación buscada entre $\bigotimes_{n,s,\pi} F$ y $\bigotimes_{n,s,\pi} E$. La prueba se concluye considerando la extensión natural de j y $\boldsymbol{\pi}$ a las compleciones. □

Utilizando propiedades sobre la complementación en los espacios de polinomios para las diferentes topologías usuales en holomorfía, vamos a poder profundizar un poco más en la naturaleza de la propiedad $(BB)_{n,s}$, tal como presentamos en la próxima sección.

3. Complementación en espacios de Polinomios

En esta sección aprovecharemos las relaciones de complementación que se han obtenido en el marco de los productos tensoriales simétricos para obtener relaciones de complementación en espacios de polinomios, recordando que $\mathcal{P}^n(E;G)$ es algebraicamente isomorfo a $\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E;G)$. Se probará en primer lugar un Lema técnico que nos permite pasar de la complementación entre dos espacios localmente convexos a la complementación entre espacios de aplicaciones lineales definidas sobre esos espacios, cuando a estos espacios de aplicaciones lineales los dotamos de la *topología fuerte*. Este resultado es una extensión del resultado análogo para el caso particular de los espacios duales, que se deduce de [**Jar**], §8.8.

LEMA 2.20. *Sean E, F y G espacios localmente convexos, y supongamos que F es un subespacio complementado de E. Entonces $(\mathcal{L}(F;G), \beta_F)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{L}(E;G), \beta_E)$, siendo β_F la topología generada por las seminormas $||\cdot||_{B,\gamma}$, donde B es un acotado de F y γ una seminorma continua en G; y , análogamente, β_E es la topología generada por las seminormas $||\cdot||_{B,\gamma}$, donde B es un acotado de E y γ es una seminorma continua en G, quedando definidas por*

$$||f||_{B,\gamma} = \sup\{\gamma(f(x)) : x \in B\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Dadas $j : F \to E$ y $\boldsymbol{\pi} : E \to F$ lineales, continuas y verificando $\boldsymbol{\pi} \circ j = Id_F$, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{L}(F;G) & \to & \mathcal{L}(E;G) \\ & f & \mapsto & f \circ \boldsymbol{\pi} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & \mathcal{L}(E;G) & \to & \mathcal{L}(F;G) \\ & g & \mapsto & g \circ j. \end{array}$$

Es inmediato que J y Π son lineales. Además, si $f \in \mathcal{L}(F;G)$,

$$\Pi \circ J(f) = \Pi(f \circ \boldsymbol{\pi}) = (f \circ \boldsymbol{\pi}) \circ j =$$
$$f \circ (\boldsymbol{\pi} \circ j) = f \circ Id_F = f$$

y por tanto $\Pi \circ J = Id_{\mathcal{L}(F;G)}$, resultando que Π es suprayectiva y J es inyectiva. Veamos ahora que estas dos aplicaciones son continuas: sea B un acotado de E y $\gamma \in sc(G)$, entonces

$$||J(f)||_{B,\gamma} = ||f \circ \boldsymbol{\pi}||_{B,\gamma} = \sup\{\gamma(f \circ \boldsymbol{\pi}(x)) : x \in B\} =$$
$$\sup\{\gamma(f(y)) : y \in \boldsymbol{\pi}(B)\} = ||f||_{\boldsymbol{\pi}(B),\gamma}.$$

Tomemos ahora B como un acotado de F y $\gamma \in sc(G)$, como antes. Se tiene:

$$||\Pi(g)||_{B,\gamma} = ||g \circ j||_{B,\gamma} = \sup\{\gamma(g \circ j(x)) : x \in B\} = ||g||_{j(B),\gamma}.$$

De este modo hemos llegado a que esas dos aplicaciones son continuas, y así tenemos que se da la complementación del enunciado. □

La complementación de los espacios de polinomios de distintos grados dotados de la topología fuerte β es ahora inmediata:

COROLARIO 2.21. *Si E y G son espacios localmente convexos y $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$, entonces $(\mathcal{P}(^mE; G), \beta)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE; G), \beta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que $\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E$ es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$ y que para cada entero positivo k, $(\mathcal{P}(^kE; G), \beta)$ es topológicamente isomorfo a $(\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{k,s,\pi} E; G), \beta)$, para concluir la demostración únicamente basta tener en cuenta que $(\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E; G), \beta)$ está complementado en $(\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E; G), \beta)$, por lo que $(\mathcal{P}(^mE; G), \beta)$ lo va a estar en $(\mathcal{P}(^nE; G), \beta)$. □

El Corolario anterior generaliza un conocido resultado que Aron y Schottenloher obtuvieron en [**ArSc**], utilizando una técnica diferente, para el caso en el que E es un espacio de Banach y $G = \mathbb{C}$. Nótese que la topología fuerte en $\mathcal{P}(^nE)$, cuando E es un espacio de Banach, es la topología de la norma.

COROLARIO 2.22 ([**ArSc**], Proposición 5.3). *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ y sea E un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{P}(^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^nE)$.*

Como consecuencia del trabajo que hemos realizado para productos tensoriales simétricos podemos obtener también información sobre complementación en espacios de polinomios dotados de las otras topologías usuales en holomorfía (τ_0, τ_b y τ_ω), lo que nos va a proporcionar también resultados relacionados con la propiedad $(BB)_{n,s}$ y mejorar, de paso, algunos resultados conocidos. Véase, por ejemplo, el Ejercicio 1.94 de [**Din1**].

PROPOSICIÓN 2.23. *Sean E y G espacios localmente convexos y sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces $(\mathcal{P}(^mE; G), \tau)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE; G), \tau)$ para $\tau = \tau_0, \tau_b, \beta$ o τ_ω y $n \geq m$.*

DEMOSTRACIÓN. Por los mismos motivos expuestos anteriormente es suficiente suponer $n = m + 1$.

Fijemos entonces $e \in E$ y $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(e) = 1$, consideremos las aplicaciones j y $\boldsymbol{\pi}$ como en el Teorema 2.16, y definamos

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E; G) \simeq \mathcal{P}(^m E; G) & \to & \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m+1,s,\pi} E; G) \simeq \mathcal{P}(^{m+1} E; G) \\ & \dot{P} & \mapsto & \dot{P} \circ \boldsymbol{\pi} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m+1,s,\pi} E; G) \simeq \mathcal{P}(^{m+1} E; G) & \to & \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E; G) \simeq \mathcal{P}(^m E; G) \\ & \dot{Q} & \mapsto & \dot{Q} \circ j. \end{array}$$

$\Pi \circ J = Id_{\mathcal{P}(^m E;G)}$, por tanto sólo tenemos que probar que J y Π son continuas para las diferentes topologías que estamos considerando. Comenzaremos con la topología compacto–abierta τ_0. La topología inducida sobre $\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E; G)$ $(m \in \mathbb{N})$ por la topología compacto–abierta τ_0 sobre $\mathcal{P}(^m E; G)$ por el isomorfismo algebraico $\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{m,s,\pi} E; G) \simeq \mathcal{P}(^m E; G)$ está generada por las seminormas

$$\dot{P} \in \mathcal{L}(\bigotimes_{m,s,\pi} E; G) \mapsto ||\dot{P}||_{\bigotimes_m K,\gamma} = \sup_{x \in K} \gamma(\dot{P}(\bigotimes_m x)),$$

donde $\gamma \in sc(G)$, K es un subconjunto compacto de E y $\bigotimes_m K = \{\bigotimes_m x : x \in K\}$.

Así

$$\begin{aligned} ||J(\dot{P})||_{\bigotimes_{m+1} K,\gamma} = & \\ & = ||\dot{P} \circ \boldsymbol{\pi}||_{\bigotimes_{m+1} K,\gamma} \\ & = \sup_{x \in K} \gamma(\dot{P} \circ \boldsymbol{\pi}(\bigotimes_{m+1} x)) \\ & = \sup_{x \in K} \gamma(\dot{P}(\varphi(x) \bigotimes_m x)) \\ & = \sup_{x \in K} \gamma(\varphi(x)\dot{P}(\bigotimes_m x)) \\ & \leq |\varphi|_{\gamma,K} \sup_{x \in K} \gamma(\dot{P}(\bigotimes_m x)) \\ & = |\varphi|_{\gamma,K} ||\dot{P}||_{\bigotimes_m K,\gamma} \end{aligned}$$

para cada $P \in \mathcal{P}(^m E; G)$, lo que nos da la continuidad de J para τ_0.

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
||\Pi(\dot{Q})||_{\underset{m}{\otimes} K,\gamma} &= \\
&= ||\dot{Q} \circ j||_{\underset{m}{\otimes} K,\gamma} \\
&= \sup_{x\in K} \gamma(\dot{Q}(j(\underset{m}{\otimes} x))) \\
&= \sup_{x\in K} \gamma\left(\langle \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{k+1}\varphi(x)^{k-1} \underset{s}{\otimes} [e^{(k)}, x^{(m-k+1)}], \dot{Q}\rangle\right) \\
&= \sup_{x\in K} \gamma\left(\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{k+1}\varphi(x)^{k-1}\check{Q}(e, \overset{k}{\ldots}, e, x, \overset{m-k+1}{\ldots}, x)\right) \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} |\varphi|_{\gamma,K}^{k-1}\right) |\check{Q}|_{(K\cup\{e\})^{m+1},\gamma} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} |\varphi|_{\gamma,K}^{k-1}\right) \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} |Q|_{(K\cup\{e\}),\gamma} \\
&= C \cdot ||\dot{Q}||_{\underset{m+1}{\otimes} K',\gamma},
\end{aligned}
$$

donde

$$C = \left(\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} |\varphi|_{K,\gamma}^{k-1}\right) \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} \text{ y } K' = K \cup \{e\},$$

con lo que Π resulta ser continua para τ_0 (se puede utilizar la identidad de polarización para obtener la última desigualdad).

La misma idea, pero trabajando con conjuntos acotados en lugar de trabajar con conjuntos compactos, prueba que estas dos aplicaciones son también continuas para las correspondientes topologías τ_b.

Finalmente, para probar la continuidad de J y Π para la topología τ_ω, no hay pérdida de generalidad si suponemos que G es normado y entonces

$$(\mathcal{P}(^m E; G), \tau_\omega) = \varinjlim_{\alpha\in sc(E)} (\mathcal{P}(^m E_\alpha; G), \tau_b).$$

Para $\alpha \in sc(E)$, $\alpha \ge |\varphi|$, las aplicaciones $J_\alpha : \mathcal{P}(^m E_\alpha; G) \to \mathcal{P}(^{m+1} E_\alpha; G)$ y $\Pi_\alpha : \mathcal{P}(^{m+1} E_\alpha; G) \to \mathcal{P}(^m E_\alpha; G)$, definidas como las J y Π de antes, nos dan la complementación de $(\mathcal{P}(^m E_\alpha; G), \tau_b)$ en $(\mathcal{P}(^{m+1} E_\alpha; G), \tau_b)$.

Entonces la continuidad de J y Π es una consecuencia directa de la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}({}^mE_\alpha;G) & \longrightarrow & \mathcal{P}({}^mE;G) \\ {\scriptstyle J_\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle J}\big\downarrow \\ \mathcal{P}({}^{m+1}E_\alpha;G) & \longrightarrow & \mathcal{P}({}^{m+1}E;G) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}({}^{m+1}E_\alpha;G) & \longrightarrow & \mathcal{P}({}^{m+1}E;G) \\ {\scriptstyle \Pi_\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Pi}\big\downarrow \\ \mathcal{P}({}^mE_\alpha;G) & \longrightarrow & \mathcal{P}({}^mE;G). \end{array}$$

□

OBSERVACIÓN 2.24. La Proposición anterior nos permite dar una demostración más simple que la que se da habitualmente, de que $\tau_0 = \tau_b$ sobre $\mathcal{P}({}^mE)$ si y sólo si E es un espacio de Montel (Observación 1.32). En efecto, es conocido que $E'_{\tau_0} = E'_\beta$ si y sólo si E es de Montel: así, si es $\tau_0 = \tau_b$ sobre $\mathcal{P}({}^mE)$, se tiene que $\tau_0 = \tau_b$ sobre $\mathcal{P}({}^1E) = E'$, lo que implica que E es de Montel, pues $E'_\beta = (\mathcal{P}({}^1E), \tau_b)$. Por otra parte, si E es de Montel, se tiene de forma trivial la coincidencia de estas dos toplogías.

COROLARIO 2.25. *Si para algún $n \in \mathbb{N}$ dado, $\tau_b = \beta$ en $\mathcal{P}({}^nE;G)$, entonces $\tau_b = \beta$ sobre $\mathcal{P}({}^mE;G)$ para cada m con $1 \leq m \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\tau_{b,k}$ a la topología τ_b sobre $\mathcal{P}({}^kE;G)$ y por β_k a la topología β sobre el mismo espacio. Nuestra hipótesis es que $\tau_{b,n} = \beta_n$ y entonces $\tau_{b,n}|_{\mathcal{P}({}^mE;G)} = \beta_n|_{\mathcal{P}({}^mE;G)}$. Pero $(\mathcal{P}({}^mE;G), \tau)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}({}^nE;G), \tau)$ para $\tau = \tau_b$ y $\tau = \beta$, entonces $\tau_{b,n}|_{\mathcal{P}({}^mE;G)} = \tau_{b,m}$ y $\beta_n|_{\mathcal{P}({}^mE;G)} = \beta_m$, por tanto $\tau_{b,m} = \beta_m$, es decir, $\tau_b = \beta$ sobre $\mathcal{P}({}^mE;G)$. □

consiste

COROLARIO 2.26. *Si dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el espacio localmente convexo E tiene la propiedad $(BB)_{n,s}$, entonces E tiene la propiedad $(BB)_{m,s}$ para cada entero positivo m, $2 \leq m \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente recordar que para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, E tiene la propiedad $(BB)_{k,s}$ si y sólo si $\tau_b = \beta$ en $\mathcal{P}({}^kE)$ (**[Din4]**). □

OBSERVACIÓN 2.27. Este Corolario simplifica las hipótesis en algunos problemas comunes en holomorfía de dimensión infinita y en la teoría de productos tensoriales. Por ejemplo, tal como Dineen expone en [**Din6**] adaptando al caso del producto tensorial simétrico la Proposición 7 que él mismo establece en [**Din2**], cuando E es un espacio localmente convexo que verifica la condición de densidad y la propiedad $(BB)_{k,s}$ para cada $k \leq n$, entonces $\hat{\bigotimes}_{k,s,\pi} E$ también tiene la condición de densidad, para cada $k \leq n$. El Corolario 2.26 nos permite suponer simplemente que E verifica $(BB)_n$ y la condición de densidad.

El siguiente resultado, sobre complementación entre los espacios de polinomios definidos sobre un espacio localmente convexo que está complementado en otro espacio, debía ser esperado desde que se estableció el resultado dual para productos tensoriales simétricos:

PROPOSICIÓN 2.28. *Sean E, F y G espacios localmente convexos, y supongamos que F es un subespacio complementado de E. Entonces $(\mathcal{P}(^nF;G),\tau)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE;G),\tau)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\tau \in \{\tau_0, \tau_b, \beta, \tau_\omega\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean i y p la inclusión y la proyección relacionadas con la complementación de F en E y sean J y Π las relacionadas con la complementación de $(\mathcal{P}(^nF;G),\tau)$ en $(\mathcal{P}(^nE;G),\tau)$, definidas por

$$J(P)(x) = P(p(x)),\ P \in \mathcal{P}(^nF;G); \quad \Pi(Q)(x) = Q(i(x)),\ Q \in \mathcal{P}(^nE;G).$$

Entonces $\mathcal{P}(^nF;G)$ es, algebraicamente, un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^nE;G)$. Por el Lema 2.19 tenemos que

$$\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} F;G)'_\beta \text{ es un subespacio complementado de } \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E;G)'_\beta,$$

y como $(\mathcal{P}(^nF;G),\beta) \simeq \mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} F;G)'_\beta$, y $(\mathcal{P}(^nE;G),\beta) \simeq (\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E;G)'_\beta$, se tiene que estos espacios de polinomios son también topológicamente complementados para β.

Un sistema fundamental de seminormas para $(\mathcal{P}(^nE;G),\tau_0)$ es

$$\{||\cdot||_{K,\gamma} : \gamma \in sc(G), K \text{ compacto de } E\}$$

y análogamente para $(\mathcal{P}(^nF;G),\tau_0)$. Tenemos que

$$||J(P)||_{K,\gamma} = \sup_{x\in K}|\gamma(J(P)(x))| = \sup_{y\in p(K)}|\gamma(P(y))| = ||P||_{p(K),\gamma}$$

y

$$||\Pi(Q)||_{K,\gamma} = ||Q||_{j(K),\gamma},$$

lo que da el resultado para τ_0. El mismo argumento se puede aplicar para τ_b.

Para probar el resultado para τ_ω podemos suponer que F es un espacio normado, y, recordando la definición de τ_ω, sólo tenemos que probar que $(\mathcal{P}(^nF_\alpha;G),\tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE_{\alpha op};G),\tau_b)$ para cada $\alpha \in sc(F)$ y esto es cierto, ya que F_α es un subespacio complementado de $E_{\alpha op}$. □

A partir de la Proposición anterior se pueden obtener varias consecuencias interesantes:

COROLARIO 2.29. *Sea E un espacio localmente convexo que verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$ y sea F un subespacio complementado de E. Entonces F también verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior resulta que $(\mathcal{P}(^nF),\tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ y que $(\mathcal{P}(^nF),\beta)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE),\beta)$. La hipótesis que estamos considerando, que E verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$, es equivalente a decir que las topologías τ_b y β coinciden sobre $\mathcal{P}(^nE)$ (ver la Observación 1.40). Por ser F un subespacio complementado de E, se va a tener que las topologías τ_b y β coinciden sobre $\mathcal{P}(^nF)$, lo que es equivalente a decir que F verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$, según acabamos de indicar. □

COROLARIO 2.30. *Si dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el espacio localmente convexo E tiene la propiedad $(BB)_n$, entonces E tiene la propiedad $(BB)_m$ para cada entero positivo m, $2 \leq m \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que E verifica $(BB)_n$. Por la Proposición 2.13, se tiene que E^n verifica $(BB)_{n,s}$. Como consecuencia, por el Corolario 2.26, E^n verifica $(BB)_{m,s}$ y como E^m es un subespacio complementado de E^n cuando $m \leq n$, por el Corolario anterior se tiene que E^m ha de verificar también $(BB)_{m,s}$ y la Proposición 2.13 implica que E verifica $(BB)_m$, resultado que queríamos probar. □

Finalmente, expondremos cómo se pueden relacionar las aplicaciones n-lineales definidas sobre E con los polinomios n-homogéneos definidos sobre E^n. Este resultado lo utilizan Defant y Maestre, de forma implícita, en la prueba de la Proposición 1 de [**DeMa**] y Dineen lo formula en [**Din6**], demostrándolo por métodos directos. Aquí se puede obtener como un corolario de la Proposición 2.11, utilizando resultados sobre dualidad similares a los que hemos empleado al probar la Proposición 2.28.

COROLARIO 2.31. *Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$. Entonces, para cada entero positivo n, $(\mathcal{L}(^nE), \tau)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE^n), \tau)$ para $\tau = \tau_0$ o τ_b.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 2.11 nos indica que $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E^n$. Consideremos las aplicaciones $\bar{\jmath}$ y $\bar{\pi}$ que se indican en dicha Proposición y que son, respectivamente, una inyección y una proyección que producen la complementación entre esos espacios. Definamos entonces $J : \mathcal{L}(^nE) \to \mathcal{P}(^nE^n)$ por

$$J(L)(x_1, \dots, x_n) = \dot{L} \circ \bar{\pi}(x_1 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n),$$

para $x_1, \dots, x_n \in E^n$. A continuación, definamos $\Pi : \mathcal{P}(^nE^n) \to \mathcal{L}(^nE)$ por

$$\Pi(P)(y_1, \dots, y_n) = \dot{P} \circ \bar{\jmath}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n),$$

para $y_1, \dots, y_n \in E$. Resulta que las aplicaciones J y Π son lineales, y que $\Pi \circ J = Id_{\mathcal{L}(^nE)}$.

Probaremos ahora que Π y J son aplicaciones continuas, cuando se considera, tanto en $\mathcal{L}(^nE)$ como en $\mathcal{P}(^nE^n)$ la topología compacto-abierta. Ello se deduce de que si K es un compacto de E^n, existe un compacto K_0 de E tal que $K \subset K_0^n$, y

$$\|J(L)\|_K \leq \|J(L)\|_{K_0^n} \leq \|\dot{L} \circ \bar{\pi}\|_{\underset{n,s}{\otimes} K_0^n} = \|\dot{L}\|_{\bar{\pi}(\underset{n,s}{\otimes} K_0^n)} = \|L\|_{K_0^n},$$

con lo que J es continua. Por otra parte, si M es un compacto de E,

$$\|\Pi(P)\|_M = \|\dot{P} \circ \bar{\jmath}\|_{\underset{n}{\otimes} M} = \|\dot{P}\|_{\bar{\jmath}\underset{n}{\otimes} M} \leq \|\dot{P}\|_{\underset{n,s}{\otimes} M^n} = \|P\|_{M^n},$$

con lo que Π es una aplicación continua, lo que concluye la prueba para el caso en el que se considera τ_0.

La prueba para el caso en el que se considera la topología τ_b es totalmente análoga.

□

CAPÍTULO 3

Casinormabilidad en espacios de polinomios

Los espacios casinormables fueron introducidos por Grothendieck en [**Gro1**] con el objetivo de responder a una pregunta de Dieudonné-Schwartz en relación con la coincidencia entre la convergencia fuerte y la convergencia uniforme en un entorno del origen para una sucesión de funciones en el dual de un espacio localmente convexo E. Como el propio Grothendieck indica en el trabajo antes citado, la mayoría de los espacios usuales de funciones son casinormables.

Por lo que respecta a la casinormabilidad de los espacios de polinomios homogéneos ha habido recientemente una buena cantidad de resultados, motivados principalmente por su conexión con la casinormabilidad de espacios de funciones holomorfas. En concreto, la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ equivale ([**Din3**]) a la casinormabilidad del espacio de las funciones holomorfas de tipo acotado $\mathcal{H}_b(U)$, cuando U es un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet complejo E, y se dota a $\mathcal{H}_b(U)$ de su topología natural de convergencia uniforme en los U-acotados de U (véase la Definición 1.12).

Como se verá a lo largo de este capítulo, la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau)$, con $\tau = \tau_0, \beta$ y τ_ω es consecuencia inmediata de resultados conocidos, pero no se puede decir lo mismo acerca de la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$. Hay varios ejemplos de espacios de Fréchet E para los que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es casinormable ([**Din3, Ans**]) pero existen también espacios de Fréchet E para los que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ no es casinormable ([**Per**], Ejemplo 1.3.3(3)). En todos los ejemplos conocidos de espacios de Fréchet para los que se sabe que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es casinormable se procede de la siguiente manera: se comprueba que para el tipo particular de espacio dado τ_b coincide en $\mathcal{P}(^nE)$ con alguna de las topologías $\tau = \tau_0, \beta$ o τ_ω para la que, como ya se ha indicado, se tiene la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau)$ y, por tanto, la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$.

En este capítulo construiremos un ejemplo de un espacio de Fréchet E tal que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es casinormable para cada $n \in \mathbb{N}$, con la propiedad de que $\tau_b \neq \tau$ para $\tau = \tau_0, \beta$ y τ_ω. Nótese que entonces, para este espacio E que vamos a construir, la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ no se puede obtener con la técnica usada hasta ahora. El ejemplo que obtendremos hace uso de un espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(A)$ no distinguido y del espacio de Fréchet-Montel F que Taskinen construyó en [**Tas2**] para responder en sentido negativo al clásico problema de las topologías de Grothendieck.

1. Un inciso: espacios escalonados de Köthe

Los espacios escalonados de Köthe λ_p se pueden describir de una forma relativamente simple: como límite proyectivo de espacios de Banach ℓ_p, y esta caracterización de los mismos permite que se utilicen frecuentemente para proporcionar ejemplos y contraejemplos en el marco de los espacios de Fréchet. Köthe obtuvo, considerando espacios de este tipo, entre otros, un ejemplo de espacio de Fréchet que goza de la propiedad de no ser *distinguido,* esto es, un espacio cuyo dual fuerte no es tonelado. La descripción de los espacios escalonados que mencionábamos al principio, como límite proyectivo, se debe a Bierstedt, Meise y Summers, quienes dedican un importante trabajo ([**BMS**]) al estudio de estos espacios, consiguiendo profundizar en cierto tipo de propiedades de los mismos y ofreciendo caracterizaciones de éstas en función de la matriz de Köthe A asociada al espacio escalonado. Por ejemplo, consiguen condiciones necesarias y suficientes sobre esa matriz para determinar cuándo un espacio escalonado $\lambda_1(A)$ es un espacio de Montel. Aquí nos interesará principalmente la caracterización de los espacios escalonados distinguidos, debida a Bastin y Bonet ([**BaBo**]), y se va a enunciar un poco más adelante. La caracterización de los espacios escalonados como límites proyectivos es útil también para poder establecer otros tipos de propiedades, y bastantes ejemplos nuevos en la teoría de espacios de Fréchet se han producido en la última década utilizando espacios escalonados, tal como veremos más tarde. En este capítulo sólo trabajaremos con espacios escalonados de orden 1, pero , puesto que los espacios escalonados de orden p se utilizarán en el siguiente capítulo, aprovecharemos para dar en este punto su definición. Comencemos entonces proporcionando las definiciones principales con las que vamos a trabajar.

DEFINICIÓN 3.1 ([**BMS**], Definición 1.2)). Sea I un conjunto de índices arbitrario. Se llama *matriz de Köthe* sobre I a una matriz de funciones $A = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $a_m : I \to \mathbb{R}^+$ verificando que $a_{m,i} \leq a_{m+1,i}$ para cada $i \in I$ y cada $m \in \mathbb{N}$.

Fijados una matriz de Köthe A y un número real p, $1 \leq p < \infty$, se define el espacio

$$\lambda_p(I, A) = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \sum_{i\in I} a_{m,i}|x_i|^p < \infty \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\},$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Resulta que $\lambda_p(I, A)$ dotado de la topología definida por las seminormas $\|\cdot\|_m$ con

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_m = \left(\sum_{i\in I} a_{m,i}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

es un espacio de Fréchet, al que se llamará *espacio escalonado de Köthe de orden p.*

Cuando no haya posibilidad de confusión representaremos estos espacios por $\lambda_p(A)$ o, simplemente, por λ_p.

Se define $\lambda_\infty(I, A)$ como

$$\lambda_\infty(I, A) = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \sup_{i\in I} a_{m,i}|x_i| < \underline{\infty} \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\},$$

y las seminormas que determinan la topología de este espacio se definen de modo análogo a como se hacía antes, siendo ahora

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_m = \sup_{i\in I} a_{m,i}|x_i|.$$

OBSERVACIÓN 3.2. Si $a = (a_i)_{i\in I}$ es una función definida sobre I, se tiene que el conjunto

$$\ell_p(I, a) = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \sum_{i\in I} a_i|x_i|^p < \infty\}$$

es un espacio de Banach, cuando lo dotamos de la norma que se define a continuación:

$$\|(x_i)\| = \left(\sum_{i\in I} a_i|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además, este espacio es canónicamente isomorfo a $\ell_p(I)$.

La definición que se ha dado de espacio escalonado de Köthe y la Observación que le sigue tienen como consecuencia inmediata la siguiente

PROPOSICIÓN 3.3 ([**BMS**], § 2). *Sea A una matriz de Köthe. Entonces para* $1 \leq p < \infty$

$$\lambda_p(I, A) = \varprojlim_m \ell_p(I, a_m)$$

y si $1 < p < \infty$ este límite proyectivo es un límite reducido.

OBSERVACIÓN 3.4. Los espacios escalonados de Köthe han sido utilizados como ejemplos de espacios que verifican propiedades del tipo (BB). Del Teorema 3.3 que Taskinen establece en [**Tas1**] se deduce que si I y J son conjuntos numerables, el par $(\lambda_p(I, A), \lambda_q(J, B))$ verifica la propiedad (BB) para $1 \leq p, q < \infty$. Dineen da otra versión de este resultado, válida para n-productos tensoriales en la Proposición 6 de[**Din2**], probando que si I es un conjunto numerable, el espacio $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p(I, A)$ verifica la propiedad $(BB)_n$, y por tanto (Lema 2.12) la propiedad $(BB)_{n,s}$. Es necesario imponer que I sea un conjunto numerable, puesto que la demostración de estos resultados pasa por utilizar que poseen una base de Schauder que verifica unas determinadas condiciones.

Al trabajar con espacios escalonados de Köthe suele ser de bastante utilidad trabajar con un tipo particular de subespacios, los subespacios seccionales, cuya definición reproducimos a continuación:

DEFINICIÓN 3.5. Sean λ_p un espacio escalonado de Köthe y J un subconjunto de I. Al subespacio de λ_p

$$\lambda_p^J = \{(x_i)_{i\in I} \in \lambda_p : x_i = 0 \text{ si } i \notin J\}$$

se le llama *subespacio seccional* de λ_p.

Al tener una descripción cómoda de los espacios escalonados de Köthe, se va a tener también una descripción bastante cómoda del dual topológico de estos espacios. Una posibilidad para representar este espacio dual es considerando un límite inductivo, pero Bierstedt, Meise y Summers en [**BMS**] dan una útil descripción proyectiva del dual topológico de estos espacios utilizando los conceptos que aparecen en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.6 ([**BMS**], Definiciones 1.2 y 1.4). Sea $A = (a_{m,i})$ una matriz de Köthe sobre I. Asociados a la matriz A se pueden definir los conjuntos

$$V = \{v_m : m \in \mathbb{N}\},$$

siendo $v_m = (v_{m,i})_{i\in I}$ con $v_{m,i} = \frac{1}{a_{m,i}}$ y

$$\bar{V} = \{\bar{v} = (\bar{v}_i)_{i\in I} : \bar{v}_i \geq 0 \text{ para cada } i \in I, \sup_i \ a_{m,i}\bar{v}_i < \infty \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\}.$$

Los espacios co-escalonados se definen para conseguir la ya anunciada descripción proyectiva del dual topológico de un espacio escalonado.

DEFINICIÓN 3.7. Sea $\lambda_p(A)$ un espacio de Köthe y sean V y $\bar{V}$ como anteriormente; entonces se pueden considerar los espacios co-escalonados k_p y $\mathcal{K}_p$, definidos del modo siguiente

a) $k_p(I,V) = \varinjlim_m \ell_p(I, v_m)$, siendo éste un límite inductivo regular.

b) $\mathcal{K}_p(I,\bar{V}) = \varprojlim_{\bar{v}} \ell_p(I,\bar{v})$.

OBSERVACIÓN 3.8. Aunque pueda parecer extraño a primera vista, estos dos espacios k_p y $\mathcal{K}_p$ son iguales algebraicamente, para $1 \leq p \leq \infty$ e incluso isomorfos topológicamente cuando se considera el caso $1 \leq p < \infty$, tal como se prueba en [**BMS**], Lema 2.1 y Teorema 2.3. Una demostración utilizando una técnica similar a la que se usa en [**BMS**] para conseguir un resultado un poco más general que el que aquí nos ocupa se va a hacer en la Proposición 5.14 cuando estudiemos los espacios escalonados X-Köthe.

Bierstedt, Meise y Summers ofrecen en [**BMS**] una caracterización de los acotados de un espacio de Köthe λ_p, que es de utilidad para poder llegar a probar que los espacios co-escalonados $\mathcal{K}_q$ son los duales topológicos de los espacios escalonados λ_p.

PROPOSICIÓN 3.9 ([**BMS**], Proposición 2.5). *Sea B un subconjunto de $\lambda_p(I,A)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces B está acotado si y sólo si existe $\bar{v} \in \bar{V}$ tal que*

$$B \subset \bar{v}B_{\ell_p(I)} = \{(y_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \text{ existe } z \in \ell_p(I),\ \|z\| \leq 1 \text{ tal que } y_i = \bar{v}_i z_i \text{ para cada } i \in I\}.$$

Utilizando esta Proposición se puede obtener, como indicábamos, el siguiente

COROLARIO 3.10 ([**BMS**], Corolario 2.8). *a) Para $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se tiene $(\lambda_p)'_\beta \simeq k_q \simeq \mathcal{K}_q$.*

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $(\lambda_1)'_\beta \simeq k_\infty$,

(i') $\mathcal{K}_\infty \simeq k_\infty$,

(ii) $\mathcal{K}_\infty$ es tonelado y/o bornológico,

(iii) λ_1 es distinguido.

En lo que afecta más directamente a la utilización de los espacios escalonados de Köthe en este capítulo, ya hemos comentado que vamos a estar particularmente interesados en un espacio $\lambda_1(A)$ que no sea distinguido. Köthe ([**Köt1**] §31.7) proporciona un ejemplo de espacio $\lambda_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, A)$ que no es distinguido, considerando la matriz A, definida por

$$a_{m,(i,j)} = \begin{cases} j, & i \leq m \\ 1, & i \geq m+1 \end{cases}$$

para $m, i, j \in \mathbb{N}$.

Posteriormente Bierstedt y Meise establecieron una condición suficiente sobre la matriz de Köthe A para conseguir que el espacio $\lambda_1(A)$ fuera distinguido. Lo que se hace es determinar, en términos de la matriz A, cuándo $\lambda_1(A)$ verifica la denominada *condición de densidad de Heinrich,* que implica la distinción del espacio. Más tarde Bierstedt y Bonet ([**BB1**]) probaron que, para $\lambda_1(A)$ es equivalente ser distinguido a verificar esa condición de densidad; además prueban en ese mismo trabajo que $\lambda_1(A)$ verifica la condición de densidad si y sólo si la verifica $\lambda_p(A)$ para cada p con $1 \leq p < \infty$. Posteriormente Bastin y Bonet ([**BaBo**]) dan una nueva condición que caracteriza los espacios de Köthe que no son distinguidos, viendo que poseen subespacios seccionales muy parecidos al ejemplo original de Köthe de un espacio de Fréchet no distinguido que acabamos de mencionar. Todos estos resultados se enuncian a continuación.

DEFINICIÓN 3.11 ([**Hei**], Definición 1.1). Sea E un espacio localmente convexo separado y denotemos por $\mathcal{U}(E)$ a una base de entornos de 0 en E y por $B(E)$ a un sistema fundamental de acotados de E. Se dice que E satisface la *condición de densidad* si, dada cualquier función $\lambda : \mathcal{U}(E) \to \mathbb{R}_+$ y cualquier $V \in \mathcal{U}(E)$, existen un subconjunto finito $\mathbb{U}$ de $\mathcal{U}(E)$ y $B \in B(E)$ tales que

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} \lambda(U)U \subset B + V.$$

OBSERVACIÓN 3.12 ([**BB1**], Teorema 1.4). Si E es un espacio localmente convexo metrizable, E satisface la condición de densidad si y sólo si cada acotado del dual fuerte E'_β de E es metrizable.

PROPOSICIÓN 3.13 ([**BB2**], Teorema 1.3). *Un espacio escalonado de Köthe $\lambda_p = \lambda_p(I, A)$ de orden p, $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$ satisface la condición de densidad si y sólo si su matriz de Köthe $A = (a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ satisface la siguiente condición (D) (independientemente de p):*

Existe una sucesión creciente $J = (I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos I_k de I tales que

(N,J): para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m_k \in \mathbb{N}$ con $\inf_{i \in I_k} \frac{a_{m_k,i}}{a_{m,i}} > 0$, para $m > m_k$,

y

(M,J): para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $I_0 \subset I$ con $I_0 \cap (I \setminus I_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m' = m'(m, I_0) > m$ con $\inf_{i \in I_0} \frac{a_{m,i}}{a_{m',i}} = 0$.

PROPOSICIÓN 3.14 ([**BB1**], Teorema 1.4). *Para un espacio $\lambda_1 = \lambda_1(I, A)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) λ_1 es distinguido,

(2) λ_1 satisface la condición de densidad,

(3) cada acotado de $\mathcal{K}_\infty \simeq (\lambda_1)'_\beta$ es metrizable.

PROPOSICIÓN 3.15 ([**BaBo**], Proposición 3). *Sea A una matriz de Köthe sobre un conjunto de índices I. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\lambda_1(I, A)$ no es distinguido.

(b) Existe un subespacio seccional de $\lambda_1(I, A)$ isomorfo a un espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, B)$ donde la matriz $B = (b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisface

$$(1) \quad b_{m,(k,j)} = b_{1,(k,j)} \text{ para } m \leqq k \text{ y}$$

$$(2) \lim_{j\to\infty} \frac{b_{m,(m,j)}}{b_{m+1,(m,j)}} = 0.$$

También va a ser conveniente mencionar el concepto de *espacio escalonado con valores vectoriales,* ya que el ejemplo que se va a construir es precisamente uno de esos espacios.

DEFINICIÓN 3.16 ([**BB1**], §2). Sean I un conjunto arbitrario de índices, $A = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe sobre I y E un espacio de Fréchet para el que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de seminormas que define la topología de E. Se define

$$\begin{aligned}\lambda_1(E) &= \lambda_1(I, A; E) \\ &= \{x = (x_i)_{i\in I} \in E^I : \text{ para cada } m \in \mathbb{N},\ q_m(x) := \sum_{i\in I} a_{m,i} p_m(x_i) < \infty\}\end{aligned}$$

y se considera siempre dotado de la topología generada por la familia de seminormas $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

OBSERVACIÓN 3.17. 1.- ([**Köt2**], §41, 7a) En las condiciones en las que se daba la definición anterior, se tiene que $\lambda_1(E)$ es topológicamente isomorfo a $\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi E$. Además, si ψ representa este isomorfismo, se tiene que

$$\psi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} l^{(j)} \otimes x^{(j)}\right) = \left(\sum_{j=1}^{N} l_i^{(j)} x^{(j)}\right)_{i\in I},$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $l^{(j)} \in \lambda_1$ y $x^{(j)} \in E$, para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$.

A partir de aquí se puede obtener que dado un acotado B de $\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi E$ existe un acotado B_1 de λ_1 y un acotado B_2 de E tales que $B \subset \bar{\Gamma}(B_1 \otimes B_2)$ y, por ello, el par (λ_1, E) verifica (BB).

2.- ([**BB1**], pg. 171) El producto tensorial proyectivo de dos espacios de Köthe $\lambda_1(I_1, A_1)$ y $\lambda_1(I_2, A_2)$ es isomorfo a un espacio de la forma $\lambda_1(I_1 \times I_2, A)$, siendo este último espacio distinguido si y sólo si lo son los dos anteriores.

De manera análoga a como se describía el dual del espacio λ_1 en el caso de espacios escalonados de Köthe de sucesiones escalares, se pueden definir los espacios $\mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$, que desempeñarán un importante papel en la representación del espacio dual de $\lambda_1(E)$.

DEFINICIÓN 3.18. ([**BB1**], pg. 163) Dados una matriz de Köthe A (y sus conjuntos asociados V y $\bar{V}$) y un espacio de Fréchet E, se define el espacio

$$\mathcal{K}_\infty(E'_\beta) = \mathcal{K}_\infty(I, \bar{V}; E'_\beta) =$$
$$\left\{\psi = (\psi_i)_i \in (E')^I : \text{ para cada } \bar{v} \in \bar{V}, \{\bar{v}_i \psi_i : i \in I\} \text{ está acotado en } E'_\beta\right\}.$$

La topología habitual en el espacio $\mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$ es la definida por las seminormas

$$\|\psi\|_{\bar{v},B} := \sup_{i \in I} \bar{v}_i |(\psi_i)|_B,$$

donde $\bar{v} \in \bar{V}$ y B es un acotado de E'_β.

PROPOSICIÓN 3.19 ([**BB1**], Proposición 2.2). *Con las notaciones anteriores, se tiene (algebraica y topológicamente)*

$$\begin{aligned}(\lambda_1(E))'_\beta &\simeq (\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi E)'_\beta \\ &\simeq \mathcal{K}_\infty(E'_\beta).\end{aligned}$$

Por conveniencia para los métodos y técnicas que vamos a aplicar después nos conviene definir una nueva topología en $\mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$, topología que vamos a denotar por τ^* :

DEFINICIÓN 3.20. Sea E un espacio de Fréchet. Se define la topología τ^* en $\mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$ como la topología generada por las seminormas

$$\|\psi\|_{\bar{v},L} = \sup\{|\bar{v}_i \psi_i(x)| : i \in I \text{ y } x \in L\}$$

para $\psi = (\psi_i) \in \mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$ y donde $\bar{v} \in \bar{V}$ y L recorre los compactos de E.

2. Sobre el espacio $\hat{\otimes}_{n,s,\pi}(\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F)$

Como se indicó en la introducción al capítulo, se va a construir un ejemplo de un espacio de Fréchet E tal que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es casinormable para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $\tau_b \neq \tau_0, \beta$ y τ_ω. El espacio E que consideraremos será el producto tensorial proyectivo de un espacio de tipo λ_1 por un espacio particular de Fréchet-Montel F. En esta sección damos algunas propiedades de los espacios del tipo $E = \lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F$. Básicamente vamos a dar una descripción del dual de $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ y de una topología que se va a definir en ese espacio.

Comenzamos observando que si λ_1 es un espacio escalonado de Köthe de orden 1, F es un espacio localmente convexo arbitrario y $E = \lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F$, entonces $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es algebraicamente isomorfo al espacio $(\hat{\otimes}_{n,\pi} \lambda_1) \hat{\otimes}_\pi (\hat{\otimes}_{n,\pi} F)$ y, teniendo en cuenta que $(\hat{\otimes}_{n,\pi} \lambda_1)$ es isomorfo a λ_1 (Observación 3.17, 2), resulta que $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es algebraicamente isomorfo a $\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi (\hat{\otimes}_{n,\pi} F)$ y, por tanto, a $\lambda_1(\hat{\otimes}_{n,\pi} F)$.

utilizamos

LEMA 3.21. *Sea $E = \lambda_1(I, A) \hat{\otimes}_\pi F$, siendo F es un espacio de Fréchet- Montel. Entonces el espacio $(\mathcal{L}(^nE), \tau_b)$ es isomorfo topológicamente al espacio $\mathcal{K}_\infty(I', \bar{V}'; \hat{\otimes}_{n,\pi} F)$, para un cierto conjunto de índices I', dotado de la topología τ^* introducida en la Definición 3.20.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para $n = 1$ el resultado es conocido (ver Proposición 3.19), puesto que $(\mathcal{L}(^1E), \tau_b) = (\mathcal{L}(^1E), \beta)$. Veamos que es cierto en el caso general.

Como $\mathcal{L}(^nE)$ es algebraicamente isomorfo al espacio dual $(\hat{\otimes}_{n,\pi}(\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F))'$ se tiene que $(\mathcal{L}(^nE), \tau_b)$ es topológicamente isomorfo a $(\hat{\otimes}_{n,\pi}(\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F))'$ dotado de la topología generada por la familia de seminormas

$$\|\varphi\|_{B_1 \otimes \cdots \otimes B_n} = \sup\{|\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}$$

para $\varphi \in (\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}(\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F))'$ y donde $B_1, \ldots, B_n$ recorren la familia de todos los acotados de $\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F$. Denotaremos a la topología definida sobre $(\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}(\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F))'$ por esa familia de seminormas también por τ_b.

Según se expresaba en la Observación 3.17, para cada acotado B de $\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F$ existen acotados C de λ_1 y D de F tales que $B \subset \bar{\Gamma}(C \otimes D)$ donde C es de la forma $\bar{v}B_{\ell_1}$ para algún $\bar{v} \in \bar{V}$ y siendo B_{ℓ_1} la bola unidad cerrada del espacio de Banach ℓ_1 (confrontar con la Proposición 3.9). De este modo, se puede suponer que $B_i = C_i \otimes D_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, siendo $C_1, \ldots, C_n$ acotados de λ_1 y $D_1, \ldots, D_n$ acotados de F. Podemos tomar el acotado de λ_1 definido por $\tilde{C} = \cup_{i=1}^n C_i$. Como F es un espacio de Montel, los acotados son relativamente compactos y podemos tomar el compacto $\tilde{K} = \bar{\Gamma}(\cup_{i=1}^n D_i)$ para llegar a suponer finalmente que la topología que estamos considerando en $(\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}(\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F))'$ está generada por las seminormas

$$|||\varphi|||_{\tilde{C},\tilde{K}} = \sup\{|\varphi(x_1 \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_n)| : x_1, \ldots, x_n \in \tilde{C}; y_1, \ldots, y_n \in \tilde{K}\}.$$

para $\varphi \in (\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}(\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F))'$, cuando $\tilde{C}$ recorre la familia de todos los acotados de λ_1 y $\tilde{K}$ la de los compactos de F.

Teniendo en cuenta lo indicado antes de establecer el Lema 3.21 se tiene que el espacio $\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}\lambda_1(I, A)$ es isomorfo a un espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(I', A')$, consiguiéndose finalmente que

$$\mathcal{L}(^nE) \simeq \mathcal{K}_\infty((\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}F)'_\beta),$$

lo que unido a los comentarios que se han hecho sobre las seminormas que definen la topología τ_b en $(\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}(\lambda_1\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F))'$ y recordando que por ser metrizable F, para cada compacto $\tilde{K}$ de $\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}F$ existe un compacto K de F tal que $\tilde{K} \subset \bar{\Gamma}(\underset{n}{\otimes}K)$ se concluye que

$$(\mathcal{L}^n(E), \tau_b) \simeq (\mathcal{K}_\infty((\underset{n,\pi}{\hat{\otimes}}F)'_\beta), \tau^*).$$

□

3. Casinormabilidad de $\mathcal{P}(^n(\lambda_1\hat{\otimes}_\pi F))$

El trabajo realizado en la sección anterior nos va a ayudar en la producción de un ejemplo de un espacio localmente convexo E verificando:

1.- $(\mathcal{P}(^nE), \tau)$ es casinormable para $\tau = \tau_0, \tau_b, \beta$ o τ_ω.

2.- $\tau_0 < \tau_b < \beta < \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para $n \geq 2$ y $\tau_0 < \tau_b = \beta < \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^1E)$ (obsérvese que sobre $\mathcal{P}(^1E) \simeq E'$ se tiene siempre que $\beta = \tau_b$).

Para comenzar a estudiar la casinormabilidad del espacio $\mathcal{P}(^n(\lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F))$ dotado de las diferentes topologías que se consideran habitualmente, es necesario recordar qué se entiende por *espacio casinormable.*

DEFINICIÓN 3.22 ([**Gro1**]). Se dice que un espacio localmente convexo E es *casinormable* si para cada entorno U de 0 existe otro entorno V de 0 de modo que para todo $\lambda > 0$ existe un acotado B_λ de E verificando que $V \subset B_\lambda + \lambda U$.

OBSERVACIÓN 3.23. La definición de los espacios casinormables, y el estudio de los mismos, se debe a Grothendieck [**Gro1**], quien los introdujo como una clase de espacios localmente convexos que posee buenas propiedades de estabilidad y a la que pertenecen muchos de los espacios que habitualmente se consideran en Análisis Funcional. Por ejemplo, los espacios de Banach son espacios casinormables, tal como se deduce de modo inmediato a partir de la definición de estos espacios. También son casinormables los espacios (DF) ([**Kat**]) y los espacios de Fréchet-Schwartz; de hecho, se tiene que un espacio localmente convexo separado es de Schwartz si y sólo si es casinormable y sus acotados son precompactos ([**Jar**], Corolario 10.7.3). Sin embargo, no todo espacio de Montel es casinormable, ya que un espacio de Fréchet-Montel es casinormable si y sólo si es de Schwartz ([**Jar**], Corolario 11.5.3).

Los espacios casinormables han sido ampliamente estudiados desde que se estableció su definición. Su relación con la holomorfía de dimensión infinita ha sido puesta de manifiesto en [**Muj2**], [**BonP**],[**BoLi**],[**Din3**] y [**Ans**], entre otros, y en esas referencias se puede encontrar una interesante introducción a este tema. Se tiene que para abiertos equilibrados U de un espacio de Fréchet E, los espacios $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ y $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ son casinormables (citeIsi?2 para el caso de espacios de Banach y[**Din3**], Teorema 3.3, para el caso general). También se sabe que $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ es un espacio casinormable (incluso es un espacio de Schwartz), cuando E es un espacio localmente convexo al que se le exige que verifique alguna condición más débil que la metrizabilidad ([**Nel, Din3**]). También se ha estudiado en profundidad el problema de la casinormabilidad del espacio $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ ([**AnPo1, Isi1**] para espacios de Banach y [**Din3**] para espacios metrizables). Dineen en [**Din3**] estableció el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.24 ([**Din3**], Proposición 3.6). *Sea U un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet E. Entonces $(\mathcal{H}_b(U),\tau_b)$ es casinormable si y sólo si $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ es casinormable para cada entero positivo n.*

Hasta ahora la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ se ha estudiado para espacios de Fréchet E para los que se tiene la coincidencia de la topología τ_b sobre $\mathcal{P}(^nE)$ con otra de las topologías utilizadas habitualmente (τ_0,β o τ_ω), como es el caso en el que E es un espacio de Montel ($\tau_b=\tau_0$), espacios con una descomposición $T-Schauder$ y la condición de densidad ($\tau_b=\tau_\omega$) [**Din3**] o espacios con la propiedad $(BB)_{n,s}$ ($\tau_b=\beta$) [**Ans**], ya que se conoce la casinormabilidad del espacio $(\mathcal{P}(^nE),\tau)$ cuando $\tau=\tau_0,\beta$ o τ_ω, tal como se expresa en el resultado que presentamos a continuación, que posee caracter general, siendo válido para cualquier espacio de Fréchet E.

PROPOSICIÓN 3.25. *Para espacios de Fréchet E, $(\mathcal{P}(^nE),\tau)$ es casinormable, cuando τ es τ_0,β o τ_ω.*

DEMOSTRACIÓN. $(\mathcal{P}(^nE),\tau_0)$ es un espacio de Schwartz ([**Nel, Din3**]), y, por tanto, casinormable ([**Jar**], Corolario 10.7.3).

Como $(\mathcal{P}(^nE),\beta)\simeq(\hat{\otimes}_{n,s,\pi}E)'_\beta$, es el dual fuerte del espacio de Fréchet $\hat{\otimes}_{n,s,\pi}E$, es un espacio (DF), por lo que también es casinormable ([**Kat**]).

$(\mathcal{P}(^nE),\tau_\omega)$ un límite inductivo numerable de espacios de Banach (Definición 1.31), por lo que es un espacio casinormable tonelado, según indica Grothendiieck en [**Gro1**]. □

Dineen en [**Din3**] muestra que no siempre el espacio $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ es un espacio casinormable, ([**Din3**], Ejemplo 4.22) construyendo un contraejemplo a partir de un espacio LB. Peris, en su Tesis Doctoral, proporciona también ejemplos de este tipo ([**Per**], Ejemplo 1.3.3(3)), siendo en este caso E un espacio de Fréchet. Además no hay resultados generales para estudiar la casinormabilidad de $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$, y por tanto este estudio ha de efectuarse bien determinando la coincidencia de la topología τ_b con otra topología o bien estudiando la casinormabilidad del espacio $(\mathcal{P}(^nE),\tau_b)$ por métodos directos. En [**ABP**] abordamos el estudio de ese problema, proporcionando un ejemplo de espacio de Fréchet E verificando que $(\mathcal{P}(^nE),\tau)$ es casinormable para $\tau=\tau_0,\tau_b,\beta$ o τ_ω y para el que $\tau_0<\tau_b<\beta<\tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ si $n\geq 2$. El ejemplo que mostraremos aquí se diferencia de aquél en que también son diferentes entre sí las topologías $\tau_0,\tau_b=\beta$

y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^1E)$. Necesitaremos para ello el resultado preliminar que obtenemos a continuación:

LEMA 3.26. *Sea A una matriz de Köthe, para la que tenemos definido el espacio escalonado $\lambda_1(I,A)$ y su dual $\mathcal{K}_\infty(I,\bar{V})$, al que denotaremos simplemente por $\mathcal{K}_\infty$. Sea G un espacio de Fréchet, entonces el espacio $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta),\tau^*)$ es casinormable.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar la casinormabilidad de $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta),\tau^*)$ se debe comenzar tomando un entorno U de 0 en $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta),\tau^*)$, que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, de la forma

$$U=\{(\varphi_i)_i\in\mathcal{K}_\infty(G'_\beta):\sup_{i\in I}|\varphi_i\bar{u}_i|_K\le 1\},$$

siendo $\bar{u}=(\bar{u}_i)_{i\in I}\in\bar{V}$ y K un compacto de G.

Asociados a este conjunto U se pueden considerar

$$U_l=\{(x_i)\in\mathcal{K}_\infty:\sup_{i\in I}|x_i\bar{u}_i|\le 1\}$$

y

$$U_d=\{\varphi\in G':|\varphi|_K\le 1\},$$

que son entornos del origen en $\mathcal{K}_\infty$ y G'_{τ_0}, respectivamente.

Como $\mathcal{K}_\infty$ es un espacio (DF), es casinormable y, por tanto, dado $\alpha>0$ existen un entorno de 0, W_l y un acotado B_l de $\mathcal{K}_\infty$ de modo tal que

$$W_l\subset B_l+\frac{\alpha}{2}U_l.$$

Además, teniendo en cuenta cómo se definen las seminormas que determinan la topología de $\mathcal{K}_\infty$, podemos suponer que existe $\bar{v}\in\bar{V}$, $\bar{v}\ge\bar{u}$ tal que

$$W_l=\{(y_i)_i\in\mathcal{K}_\infty:\sup_{i\in I}|y_i\bar{v}_i|\le 1\}.$$

También podemos suponer que el acotado B_l contiene al origen. Por ser B_l un conjunto acotado, se puede encontrar $M>0$ de modo que

$$\sup_{i\in I}|b_i\bar{u}_i|\le M,$$

para cada $(b_i)_{i\in I}\in B_l$.

Por otra parte, G'_{τ_0} es un espacio de Schwartz (se puede deducir, por ejemplo, de la Proposición 3.25), con lo que, para los mismos valores $\alpha>0$ y $M>0$ que considerábamos antes, existen un entorno del origen W_d en G'_{τ_0} y un subconjunto finito B_d de G' tales que

$$W_d \subset B_d + \frac{\alpha}{2M} U_d,$$

además, podemos suponer que

$$W_d = \{\psi \in G' : |\psi|_{K'} \leq 1\},$$

donde K' es un compacto de G, $K' \supset K$.

Con el objeto de probar la casinormabilidad de $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta), \tau^*)$ vamos a definir, asociados al conjunto U que considerábamos al principio de la prueba (y que era un entorno de 0 en $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta), \tau^*)$), otro entorno del origen W y un acotado B del siguiente modo:

$$W = \{(\psi_i)_i \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta) : |\psi_i \bar{v}_i|_{K'} \leq 1\}$$

y

$$B = \{(\gamma_i)_i \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta) : \gamma_i = \gamma \cdot b_i, \text{ con } \gamma \in B_d, \ (b_i)_i \in B_l\}.$$

Se tiene que W es un entorno de 0 en $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta), \tau^*)$ y que B es un acotado de $(\mathcal{K}_\infty(G'_\beta), \tau^*)$, pues si L es un compacto de G, $(\gamma_i)_{i\in I} \in B$ y $\bar{w} \in \bar{V}$, entonces

$$\sup_{i\in I} |\gamma_i \bar{w}_i|_L = |\gamma|_L \sup_{i\in I} |\bar{w}_i b_i| < \infty.$$

Para $(\psi_i)_i \in W$, hagamos

$$y_i = |\psi_i|_{K'}.$$

En estas condiciones, si $y_i \neq 0$, se tiene que

$$\left|\frac{\psi_i}{y_i}\right|_{K'} = 1,$$

con lo que $\frac{\psi_i}{y_i} \in W_d$, y se sigue la existencia de $\gamma_i \in B_d$ y $\varphi_i \in U_d$ tales que

$$\frac{\psi_i}{y_i} = \gamma_i + \frac{\alpha}{2M} \varphi_i.$$

Por otra parte, como $(\psi_i)_{i\in I} \in W$, se tiene que $\sup_{i\in I} |y_i \bar{v}_i| \leq 1$, por lo que podemos asegurar que existen $(b_i)_{i\in I} \in B_l$ y $(x_i)_{i\in I} \in U_l$ verificando

$$(y_i)_i = (b_i)_i + \frac{\alpha}{2}(x_i)_i,$$

para obtener finalmente que

$$\begin{aligned}\psi_i &= \\ &= y_i\frac{\psi_i}{y_i} \\ &= b_i\frac{\psi_i}{y_i} + \frac{\alpha}{2}\frac{\psi_i}{y_i}x_i \\ &= b_i\left(\gamma_i + \frac{\alpha}{2M}\varphi_i\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{\psi_i}{y_i}x_i \\ &= b_i\gamma_i + \alpha\left(b_i\frac{\varphi_i}{2M} + \frac{\psi_i}{2y_i}x_i\right).\end{aligned}$$

Definamos por último

$$\eta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } y_i = 0, \\ b_i\gamma_i & \text{si } y_i \neq 0 \end{cases}$$

y

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{\psi_i}{\alpha} & \text{si } y_i = 0, \\ b_i\frac{\varphi_i}{2M} + \frac{\psi_i}{2y_i}x_i & \text{si } y_i \neq 0. \end{cases}$$

Con estas definiciones resulta de modo inmediato que para cada $i \in I$, es

$$\psi_i = \eta_i + \alpha\phi_i$$

y también que $(\eta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta)$, puesto que si H es un acotado de G y $\bar{w} \in \bar{V}$,

$$\sup_{i\in I}|\eta_i\bar{w}_i|_H = \sup_{i\in I}|\bar{w}_i b_i||\gamma_i|_H < \infty.$$

Por la propia definición de η_i se tiene que $(\eta_i)_i \in B$. Como $(\varphi_i)_i \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta)$ y $(\eta_i)_i \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta)$, ha de ser $(\phi_i)_i \in \mathcal{K}_\infty(G'_\beta)$. Veamos que $(\phi_i)_i \in U$.

En efecto, debemos comprobar que $|\phi_i\bar{u}_i|_K \leq 1$ para cada $i \in I$. Si i es tal que $y_i = 0$, se tiene que

$$|\phi_i\bar{u}_i|_K = \frac{\bar{u}_i}{\alpha}|\psi_i|_K \leq \frac{\bar{u}_i}{\alpha}|\psi_i|_{K'} = 0 \leq 1.$$

Si $y_i \neq 0$, queda

$$\begin{aligned}\left|\left(b_i\frac{\varphi_i}{2M} + \frac{\psi_i}{2y_i}x_i\right)\bar{u}_i\right|_K &\leq \left|b_i\frac{\bar{u}_i}{2M}\right||\varphi_i|_K + \frac{|\psi_i|_K}{2y_i}|x_i\bar{u}_i| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

tal como se quería comprobar. □

OBSERVACIÓN 3.27. En vez de trabajar con λ_1 se puede trabajar con el espacio ℓ_1, de la forma como se hace en [**ABP**]. Bajo esos supuestos, la prueba de la casinormabilidad del espacio $\ell_\infty(G'_\beta)$ se simplifica en gran medida, ya que sólo se ha de tener en cuenta que G'_{τ_0} es un espacio de Schwartz, puesto que ℓ_1 se puede considerar como $\lambda_1(A)$, donde la matriz $A = (a_{m,i})$ verifica que $a_{m,i} = 1$, para cada par $(m,i) \in \mathbb{N} \times I$ y no es necesario buscar un cierto control sobre los inversos de los pesos $\bar{v} \in \bar{V}$. De hecho, pretendíamos conseguir el Lema 3.26 utilizando una demostración que extendiera la que habíamos utilizado al probar la casinormabilidad del espacio $\ell_\infty(G'_\beta)$, pero era necesario imponer que, fijado un peso $\bar{v} \in \bar{V}$ estrictamente positivo, para cada peso $\bar{w} \in \bar{V}$, la función $\frac{\bar{w}}{\bar{v}}$ definida por $(\frac{\bar{w}_n}{\bar{v}_n})$ verifica $\frac{\bar{w}}{\bar{v}} \in \ell_\infty$. Eso que queríamos imponer resultaba imposible en el caso que nos interesaba, que es el caso en el que A es una matriz de Köthe que no verifica la condición (D).

En lo que sigue, F representará al espacio que Taskinen construye en [**Tas2**], F es un espacio de Fréchet-Montel que verifica que ℓ_1 es isomorfo a un subespacio complementado de $F\hat{\otimes}_{s,\pi}F$, proporcionando así el primer contraejemplo a la versión simétrica del problema de las topologías de Grothendieck. También, desde aquí hasta el final del capítulo, λ_1 será un espacio escalonado de Köthe que no verifica la condición de densidad (Definición 3.11). En los razonamientos que se van a dar a continuación se utilizan constantemente los resultados sobre complementación en espacios de polinomios que hemos desarrollado con anterioridad en esta memoria.

TEOREMA 3.28. *Sea λ_1 un espacio escalonado de Köthe de orden 1 que no verifica la condición de densidad y sea F el espacio de Taskinen que se ha mencionado anteriormente. El espacio de Fréchet $E = \lambda_1\hat{\otimes}_\pi F$ verifica que $(\mathcal{P}(^nE),\tau)$ es un espacio casinormable, para $\tau \in \{\tau_0,\tau_b,\beta,\tau_\omega\}$. Además verifica que $\tau_0 < \tau_b < \beta < \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $\tau_0 < \tau_b = \beta < \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^1E) = E'$.*

DEMOSTRACIÓN. La casinormabilidad del espacio $\mathcal{P}(^nE)$ dotado de las diferentes topologías del enunciado es consecuencia inmediata de la Proposición 3.25 y el Lema 3.26. Para la prueba de lo referente a la otra parte de esta Proposición consideraremos los tres apartados siguientes.

(a) Probaremos en primer lugar que $\tau_\omega > \beta$: Teniendo en cuenta que λ_1 es un subespacio complementado de E, al haber elegido la matriz de Köthe A de modo que λ_1 no sea distinguido, tampoco puede serlo E ni tampoco $\hat{\otimes}_{n,s,\pi} E$, por lo que vamos a tener que $(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E)'_\beta \simeq (\mathcal{P}(^nE), \beta)$ no es tonelado. Como $(\mathcal{P}(^nE), \tau_\omega)$ es tonelado y $\tau_\omega \geq \beta$ ([**Din1**], pg. 24), ha de ser $\tau_\omega > \beta$.

(b) Como E contiene a λ_1 como subespacio complementado, no puede ser de Montel, pues se supone que λ_1 no es distinguido, con lo que $\tau_b > \tau_0$ en E' (Observación 1.32), y por tanto en $\mathcal{P}(^nE)$, ya que $\mathcal{P}(^nE)$ contiene a E' como subespacio complementado para τ_b y τ_0 (Proposición 2.23).

(c) Es inmediato que sobre $\mathcal{P}(^1E)$ las topologías τ_b y β coinciden. Supongamos entonces que $n \geq 2$. Si fuera $\beta = \tau_b$ en $\mathcal{P}(^nE)$ se tendría en particular que $\beta = \tau_b$ en $\mathcal{P}(^nF)$ (Proposición 2.28), y esto es equivalente a que F verifique $(BB)_{n,s}$ (Observación 1.40). Como F es un espacio de Montel, si verificase $(BB)_{n,s}$, se tendría que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} F$ sería un espacio de Montel y eso es imposible, ya que cuando $n \geq 2$ el espacio ℓ_1, que no es de Montel, está contenido de modo complementado en $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} F$. Así resulta que $\beta > \tau_b$. □

OBSERVACIÓN 3.29. El espacio $E = \lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F$ proporciona un ejemplo de espacio de Fréchet para el que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es casinormable sin ser (DF), cuando $n \geq 2$, no quedando encuadrado dentro de los espacios que satisfacen alguna de las condiciones habituales que son suficientes para la casinormabilidad. En efecto, en [**AnTa**] Corolario 3, se prueba que $(\mathcal{P}(^2F), \tau_b)$ no es un espacio numerablemente casitonelado, esto es, que existe un conjunto $B \subset F \hat{\otimes}_{s,\pi} F$ acotado y numerable que no está contenido en ningún equicontinuo de $\mathcal{P}(^2F)$ y, por tanto, tampoco puede ser (DF). Como F es un subespacio complementado de E se tiene que $(\mathcal{P}(^2F), \tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^2E), \tau_b)$ (Proposición 2.28) y éste a su vez lo es de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ con lo que se concluye que $(\mathcal{P}(^2F), \tau_b)$ es un subespacio complementado de $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ y, por tanto, este último espacio tampoco puede ser (DF).

La Proposición 3.24 y el Teorema 3.28 nos dan el siguiente

COROLARIO 3.30. *Sea U un abierto equilibrado del espacio de Fréchet $E = \lambda_1 \hat{\otimes}_\pi F$. Entonces $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ es casinormable.*

CAPÍTULO 4

Espacios de polinomios definidos sobre espacios escalonados de Köthe

Se ha puesto de manifiesto en el capítulo anterior la utilidad de considerar espacios escalonados de Köthe para obtener ejemplos relativos a algunas cuestiones que aparecen en Análisis Funcional y en Holomorfía de dimensión infinita. En este capítulo vamos a estudiar cuándo el espacio localmente convexo de los polinomios homogéneos de grado n definidos sobre un espacio escalonado de Köthe λ_p, dotado de la topología τ_b, es un espacio localmente convexo reflexivo o tonelado. Se obtendrá una condición suficiente para determinar la reflexividad del espacio $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b)$, en función del grado n de los polinomios homogéneos y del orden p del espacio escalonado. De este modo se dará una generalización natural a espacios λ_p de algunos resultados que ya eran conocidos para los espacios de Banach ℓ_p. Holub comenzó a estudiar estas cuestiones probando que el espacio $\ell_p \hat{\otimes}_\pi \ell_q$ es reflexivo si y sólo si $p > \frac{q}{q-1}$, consiguiendo de este modo caracterizar cuándo son reflexivos los espacios de formas bilineales definidas sobre productos de espacios de Banach de la forma ℓ_p. Posteriormente López Molina ([**Lóp**]) extendió los resultados de Holub para el caso en el que se consideran espacios escalonados de Köthe. Dimant y Zalduendo observan una generalización del resultado de Holub en un sentido distinto al de López Molina: enuncian una caracterización de los espacios reflexivos de formas multilineales definidas sobre espacios de tipo $\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_n}$. Aprovecharemos estos resultados sobre aplicaciones multilineales definidas sobre espacios de Banach ℓ_p para obtener condiciones suficientes para la reflexividad de los espacios de aplicaciones multilineales definidas sobre productos de espacios escalonados de Köthe.

Como consecuencia de los resultados que se obtienen para aplicaciones multilineales mostraremos condiciones suficientes para determinar la reflexividad de $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b)$;

además proporcionaremos condiciones necesarias sobre p para determinar cuándo el espacio de polinomios n-homogéneos definidos sobre λ_p es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$, llegando mediante la aplicación de una técnica distinta a un resultado obtenido recientemente por Dineen y Lindström. En **[DiLi]** se demuestra que si $E = \lambda_p(A)$ es un espacio escalonado de Köthe se tiene que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si E es un espacio de Montel. La técnica que se ha utilizado en nuestra demostración de este resultado pasa por considerar condiciones necesarias para la reflexividad del n-producto tensorial simétrico de λ_p y pasar posteriormente al dual de esos productos tensoriales simétricos, que es el espacio de los polinomios n-homogéneos. Nuestra técnica permite también determinar cuándo $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p$ es un espacio distinguido para cada $n \in \mathbb{N}$, que es una condición más débil que el carácter de Montel, obteniendo que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p$ es distinguido para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si λ_p verifica la condición de densidad. La técnica que se desarrolla también utiliza resultados sobre complementación en productos tensoriales que obtuvimos en el Capítulo 2 y puede ser aplicada para obtener otro tipo de propiedades sobre espacios escalonados. De este modo obtendremos ejemplos de espacios $E = \lambda_p$ para los que se tiene que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es un espacio tonelado si y sólo si $n < p$.

1. Más resultados sobre espacios escalonados de Köthe

En el capítulo anterior mencionábamos las condiciones necesarias y suficientes que Bierstedt y Bonet establecieron para que un espacio escalonado de Köthe $\lambda_p(A)$ verificase la condición de densidad de Heinrich. En este capítulo vamos a necesitar de nuevo esos resultados, pero va a ser también interesante conocer cuándo un espacio escalonado de Köthe es un espacio de Montel. El estudio de las condiciones que ha de cumplir la matriz de Köthe de un espacio escalonado para que éste sea de Montel es anterior al estudio que se exponía en el capítulo anterior, encaminado a detectar cuándo un espacio escalonado cumple la condición de densidad. Valdivia ofrece en [**Val**] condiciones suficientes sobre A para que $\lambda_p(A)$ sea un espacio de Montel. Más tarde Bierstedt, Meise y Summers en [**BMS**] expresaron condiciones necesarias y suficientes para obtener el carácter de Montel en un espacio $\lambda_p(A)$. Las pruebas de estos resultados no se incluirán en este apartado, pero en el siguiente capítulo de esta memoria se van a realizar algunas pruebas que siguen las mismas ideas que las que se utilizan en [**BMS**] para demostrar los resultados que se enuncian a continuación.

DEFINICIÓN 4.1 ([**BMS**], Definición 4.1). Se dice que la matriz de Köthe A (o el conjunto V asociado a ella) satisface la condición (M) si no existe ningún conjunto infinito $I_0 \subset I$ tal que, para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, se tenga que

$$\inf_{i \in I_0} \frac{v_{m,i}}{v_{m_0,i}} = \inf_{i \in I_0} \frac{a_{m_0,i}}{a_{m,i}} > 0, \quad \text{para } m = m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots$$

PROPOSICIÓN 4.2 ([**BMS**], Teorema 4.7). *Sean A una matriz de Köthe, $p \in \mathbb{R}$ verificando $1 \leq p \leq \infty$ y $\bar{V}$ el conjunto de Köthe asociado a la matriz A, que se utiliza al describir el dual de los espacios escalonados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) A satisface la propiedad (M).
(2) $\lambda_p(A)$ es de Montel.
(3) $\mathcal{K}_p(\bar{V})$ es de Montel.

OBSERVACIÓN 4.3. (1) A partir de esta caracterización se obtiene que si $\lambda_p(A)$ no es un espacio de Montel, contiene un subespacio seccional isomorfo a ℓ_p. Esto ha sido probado por Valdivia ([**Val**], 2.2.1.8, 2.3.2.5, 2.4.2.7). La prueba se basa en ver que, efectivamente, el subespacio $\lambda_p(I_0, B)$ es isomorfo a ℓ_p, donde I_0 y m_0 son obtenidos al negar la condición (M) de la Definición 4.1 y B es la matriz de Köthe

$$B = (a_{m,j})_{\substack{m > m_0 \\ j \in I_0}}.$$

Posteriormente vamos a tener que utilizar esta propiedad de los espacios escalonados de Köthe.

(2) También se obtiene de lo anterior que $\lambda_1(A)$ es un espacio reflexivo si y sólo si es de Montel, como indica también Valdivia en [**Val**], 2.2.2.1. La prueba, a partir de lo que se indica en (1) puede hacerse así: todo espacio de Montel es reflexivo y si $\lambda_1(A)$ no es de Montel, entonces contiene a ℓ_1 como subespacio complementado, con lo que no puede ser reflexivo al no serlo ℓ_1.

(3) Cuando la matriz de Köthe A, definida sobre un conjunto de índices I, verifica la condición (M), ese conjunto ha de ser finito o numerable, tal como se indica en la Observación 4.2 de [**BMS**].

La distinción de productos tensoriales de espacios de Fréchet en los que al menos uno de los espacios que intervienen es un espacio escalonado de Köthe ha sido estudiada por diversos autores. Bonet y Defant ([**BoDe**]) establecen la siguiente

PROPOSICIÓN 4.4. *Para un espacio de Köthe $\lambda_1(A)$ son equivalentes:*
(1) $\lambda_1(A)\hat{\otimes}_\pi F$ es distinguido para cada espacio de Fréchet distinguido F.
(2) $\lambda_1(A)$ es reflexivo.

Teniendo en cuenta la Observación 4.3, la condición (2) de la Proposición anterior es también equivalente a indicar que el espacio $\lambda_1(A)$ es de Montel. Todo espacio de Montel verifica la condición de densidad de Heinrich, como indican Bierstedt y Bonet tras la Definición 1 de [**BB1**]. Por tanto, si una matriz de Köthe verifica la condición (M) también ha de verificar la condición (D) dada en el Capítulo 3. Existen sin embargo ejemplos, propuestos incluso por Grothendieck, de espacios escalonados que verifican la condición de densidad pero no son de Montel:

EJEMPLO 4.5 ([**BMS**], Ejemplo 4.11.1). *Consideremos la matriz de Köthe A, formada por una cantidad numerable de funciones positivas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida como sigue:*

$$a_{m,(i,j)} = \begin{cases} j^i, & i \leq m \\ j^m, & i \geq m+1, \end{cases}$$

para $m, i, j \in \mathbb{N}$. Se puede comprobar que A no satisface la condición (M), pero sí satisface la condición (D), consiguiéndose así ejemplos de espacios escalonados que verifican la condición de densidad pero no son de Montel.

En otra línea de resultados está lo referente a los productos cartesianos de espacios de Köthe. A continuación se establece un resultado, cuya prueba está inspirada en la que Valdivia hace en [**Val**], 3.1.1.5, que nos proporciona que el producto de dos espacios λ_p de Köthe vuelve a ser un espacio escalonado de la forma λ_p, aunque no se llega a probar que estos espacios son estables por productos.

LEMA 4.6. *Sean I un conjunto de índices, $A = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $B = (b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ matrices de Köthe sobre I y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces se tiene que*

$$\lambda_p(I, A) \times \lambda_p(I, B) \text{ es isomorfo a } \lambda_p(I \times \{0,1\}), C),$$

donde la matriz $C = (c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ se define por $c_{m,(i,0)} = a_{m,i}$, $c_{m,(i,1)} = b_{m,i}$, para $i \in I$ y cada $m \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que $1 \leq p < \infty$. Consideremos la aplicación $\varphi : \lambda_p(I, A) \times \lambda_p(I, B) \to \lambda_p(C)$ definida por $\varphi((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = (z_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j\in\{0,1\}}}$, con $z_{i,0} = x_i$, $z_{i,1} = y_i$. Para estos vectores se tiene que

$$\sum_{\substack{i\in I \\ j\in\{0,1\}}} c_{m,(i,j)}|z_{i,j}|^p = \sum_{i\in I} c_{m,(i,0)}|z_{i,0}|^p + \sum_{i\in I} c_{m,(i,1)}|z_{i,1}|^p =$$

$$\sum_{i\in I} a_{m,i}|x_i|^p + \sum_{i\in I} b_{m,i}|y_i|^p = \|x\|_m^p + \|y\|_m^p$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, siendo $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$. La última igualdad muestra que la aplicación φ está bien definida. Es inmediato comprobar que φ es lineal y que es inyectiva. La cadena anterior de igualdades muestra por añadidura que φ es continua.

Por otra parte, si $u = (u_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j\in\{0,1\}}}$ denota un elemento cualquiera de $\lambda_p(C)$, podemos considerar sus "componentes" $(u_{i,0})_{i\in I}$ y $(u_{i,1})_{i\in I}$. Se comprueba de modo inmediato que $(u_{i,0})_{i\in I} \in \lambda_p(I, A)$ y que $(u_{i,1})_{i\in I} \in \lambda_p(I, B)$. Además $\varphi((u_{i,0})_{i\in I}, (u_{i,1})_{i\in I}) = u$, con lo cual se tiene que φ es biyectiva y las igualdades anteriores muestran también que es un isomorfismo topológico.

La prueba en el caso $p = \infty$ sigue las mismas ideas que se han indicado en la parte ya probada. □

OBSERVACIÓN 4.7. a) En el caso en el que $I = \mathbb{N}$, se puede probar que $\lambda_p(\mathbb{N}, A) \times \lambda_p(\mathbb{N}, B)$ es isomorfo a $\lambda_p(\mathbb{N}, C)$, tomando la matriz C definida como

$$c_{m,2k-1} = a_{m,k}, \; c_{m,2k} = b_{m,k}.$$

b) Si $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se puede probar que $\lambda_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, A) \times \lambda_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, B)$ es isomorfo a $\lambda_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, C)$, tomando $c_{m,(2k-1,j)} = a_{m,(k,j)}$, $c_{m,(2k,j)} = b_{m,(k,j)}$.

2. Reflexividad de productos tensoriales y polinomios sobre espacios escalonados

López Molina estudió los productos tensoriales de espacios escalonados de Köthe, ofreciendo una caracterización de la reflexividad del producto tensorial de dos espacios escalonados de Köthe ([**Lóp**], Teorema 4). En su prueba utiliza un resultado de Holub sobre reflexividad de productos tensoriales de espacios ℓ_p. Estos resultados se enuncian a continuación:

PROPOSICIÓN 4.8 ([**Hol**], Proposición 3.6). *Sea $1 < p, q < \infty$. Entonces $\ell_p \hat{\otimes}_\pi \ell_q$ es reflexivo si y sólo si $p > \frac{q}{q-1}$.*

PROPOSICIÓN 4.9 ([**Lóp**], Teorema 4). *Sean $\lambda_p(\mathbb{N}, A)$ y $\lambda_q(\mathbb{N}, B)$ espacios escalonados, con $p \geq 1$ y $q \geq 1$. Entonces:*

1) $\lambda_1(\mathbb{N}, A) \hat{\otimes}_\pi \lambda_1(\mathbb{N}, B)$ es reflexivo si y sólo si $\lambda_1(A)$ y $\lambda_1(B)$ son reflexivos.

2) Si $q > 1$, $\lambda_1(\mathbb{N}, A) \hat{\otimes}_\pi \lambda_q(\mathbb{N}, B)$ es reflexivo si y sólo si $\lambda_1(\mathbb{N}, A)$ es reflexivo.

3) Si $p > 1, q > 1$ y $p > \frac{q}{q-1}$, $\lambda_p(\mathbb{N}, A) \hat{\otimes}_\pi \lambda_q(\mathbb{N}, B)$ es siempre reflexivo.

4) Si $p > 1, q > 1$ y $p \leq \frac{q}{q-1}$, $\lambda_p(\mathbb{N}, A) \hat{\otimes}_\pi \lambda_q(\mathbb{N}, B)$ es reflexivo si y sólo si $\lambda_p(\mathbb{N}, A)$ es un espacio de Montel o $\lambda_q(\mathbb{N}, B)$ es un espacio de Montel.

Esta completa caracterización de la reflexividad de los productos tensoriales conduce a condiciones, en principio, suficientes para la reflexividad de productos tensoriales simétricos y, por consiguiente, para los espacios de polinomios homogéneos de grado 2, dotados de la topología fuerte β. Como la reflexividad implica la tonelación, y τ_ω es la topología tonelada asociada a τ_0 cuando E es metrizable, el que $\mathcal{P}(^2E)$ sea reflexivo para un espacio metrizable E implica la coincidencia de β y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^2E)$. Con los resultados expuestos por López Molina se pueden obtener resultados de este tipo para el caso de los polinomios homogéneos de grado 2 definidos sobre espacios escalonados de Köthe. El problema que nos habíamos planteado era la extensión de esos resultados a polinomios homogéneos de grado arbitrario, y en el caso de los espacios escalonados de Köthe esa generalización es posible gracias a la siguiente generalización de los resultados originales de Holub.

PROPOSICIÓN 4.10 ([**DiZa**]). *Sean* $1 < p_1, \ldots, p_n < \infty$. *Entonces se tiene que* $\mathcal{L}({}^m\ell_{p_1}, \ldots, \ell_{p_m})$ *es un espacio reflexivo si y sólo si* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$.

Si E es un espacio de Fréchet se tiene que E es reflexivo si y sólo si su dual E' es reflexivo ([**Köt1**], §23.5 (7)), con lo que del resultado anterior tiene el siguiente

COROLARIO 4.11. *Sean* $1 < p_1, \ldots, p_m < \infty$. *Entonces* $\ell_{p_1} \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \ell_{p_m}$ *es un espacio reflexivo si y sólo si* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$.

Una vez establecido el resultado sobre reflexividad de productos tensoriales de espacios ℓ_p podemos dar el siguiente resultado análogo, válido para productos tensoriales de productos escalonados de Köthe, pero que sólo proporciona condiciones suficientes de reflexividad. En todo lo que sigue, supondremos que el conjunto de índices I es un conjunto numerable.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sean* $1 < p_1, \ldots, p_n < \infty$ *y* $A_1 = (a^1_m)_{m\in\mathbb{N}}, \ldots, A_n = (a^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *matrices de Köthe. Entonces si* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} < 1$, *se tiene que*

$$\lambda_{p_1}(A_1) \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \lambda_{p_n}(A_n)$$

es un espacio reflexivo.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $\lambda_{p_j} = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \ell_{p_j}(a^j_m)$, siendo este límite un límite proyectivo reducido para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, puesto que $1 < p_j < \infty$. Utilizando el Teorema 15.4.2 de [**Jar**], que indica que el producto tensorial de espacios que se obtienen como un límite proyectivo reducido de espacios de Hausdorff se puede expresar como otro límite proyectivo reducido se obtiene que

$$\lambda_{p_1} \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \lambda_{p_n} = \varprojlim_{m_1, \ldots, m_n \in\mathbb{N}} \ell_{p_1}(a^1_{m_1}) \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \ell_{p_n}(a^n_{m_n}).$$

Así $\lambda_{p_1} \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi \lambda_{p_n}$ se puede expresar como un límite proyectivo de espacios de Banach reflexivos, por lo que es reflexivo ([**Jar**], 11.4.3 y 11.4.5). □

Para nosotros va a tener un interés particular trabajar con productos tensoriales simétricos y polinomios homogéneos, por lo que daremos una versión de este resultado más restrictiva, pero más acorde con lo que pretendemos mostrar:

COROLARIO 4.13. *Sean λ_p un espacio escalonado de Köthe y $n \in \mathbb{N}$, $n < p$. Entonces:*

1) $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p$ *es reflexivo.*

2) $(\mathcal{L}(^n\lambda_p), \beta)$ *es reflexivo.*

3) $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p$ *es reflexivo.*

4) $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \beta)$ *es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Es un caso particular de la proposición anterior, puesto que si $n < p$ se tiene que $\overbrace{\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}}^{n} < 1$.

2) Lo que aparece aquí es el dual fuerte del espacio de Fréchet reflexivo que aparecía en 1), y por ello es un espacio reflexivo.

3) Es consecuencia inmediata de 1), puesto que es un subespacio complementado de un espacio reflexivo.

4) Se obtiene de 3) del mismo modo como obtuvimos 2) de 1). □

OBSERVACIÓN 4.14. Del Corolario anterior también se deduce que si $n < p$ resulta que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \tau_b)$ es un espacio reflexivo. En efecto, según se indica en [**Din4**], cuando I es un conjunto numerable, los espacios escalonados de Köthe verifican la propiedad $(BB)_n$ (y consecuentemente la $(BB)_{n,s}$). Por tanto, se tiene que $\tau_b = \beta$ sobre $\mathcal{P}(^n\lambda_p)$.

3. Caracterización de productos tensoriales distinguidos y reflexivos

En esta última sección del capítulo vamos a desarrollar nuevos resultados sobre complementación en productos tensoriales. En esta sección se probará que, si $n \geq p$, se puede encontrar un espacio escalonado de orden 1 de la forma $\lambda_1(B)$ que es isomorfo a un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$, donde B es una matriz que verifica (D) (respectivamente (M)) si y sólo si A verifica esa propiedad. De ese modo obtendremos condiciones necesarias para que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ sea reflexivo, para $n \geq p$, completando en cierto modo lo que se hacía en el Corolario 4.13 de la sección anterior, en el que vimos que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ siempre es reflexivo para $n < p$. En particular, podremos obtener una generalización de un resultado debido a Dineen y Lindström, quienes han probado recientemente que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \beta)$ es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $\lambda_p(A)$ es un espacio de Montel. Con la técnica que emplearemos nosotros va a ser posible obtener un resultado análogo a ése, relacionando la tonelación de los espacios de polinomios n-homogéneos sobre $\lambda_p(A)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con que $\lambda_p(A)$ verifique la condición de densidad.

En lo relacionado con el estudio de la distinción de productos tensoriales de espacios de Köthe, trabajos preliminares son los de Bonet-Díaz ([**BoDí**]) y Díaz-Miñarro ([**DíMi**]), donde aparece la siguiente

PROPOSICIÓN 4.15 ([**DíMi**], Teorema 1.15). *a) Si $p = q = 1$, $\lambda_1(A)\hat{\otimes}_\pi\lambda_1(B)$ es distinguido si y sólo si ambos espacios lo son.*

b) Si $p = 1$ y $1 < q < \infty$, $\lambda_1(A)\hat{\otimes}_\pi\lambda_q(B)$ es distinguido si y sólo si $\lambda_1(A)$ es de Montel o ambos espacios verifican la condición de densidad.

c) Si $1 < p, q < \infty$, $\lambda_p(A)\hat{\otimes}_\pi\lambda_q(B)$ es distinguido si y sólo si i) alguno de los espacios es de Montel o ii) ambos espacios tienen la condición de densidad o iii) $p > \frac{q}{q-1}$.

La técnica que vamos a utilizar necesita establecer la siguiente

DEFINICIÓN 4.16. Sea $A = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe sobre I, entonces, para $r > 0$, definiremos $A^{(r)}$ como la matriz de Köthe $(a_m^{(r)})_{m\in\mathbb{N}}$, siendo $a_{m,i}^{(r)} = a_{m,i}^r$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $i \in I$.

De modo inmediato se tiene que lo definido es una matriz de Köthe ya que $a_{1,i}^{(r)} > 0$ para cada $i \in I$ y $(a_m^{(r)})_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones. Además, va a existir una fuerte relación entre las matrices A y $A^{(r)}$, ya que una de estas matrices verifica la condición (D) si y sólo si también lo hace la otra y ocurre algo análogo sobre la propiedad (M), tal como se indica en la siguiente Observación, cuya importancia se va a poner de manifiesto después de haber establecido nuevos resultados sobre complementación en productos tensoriales de espacios escalonados de Köthe.

OBSERVACIÓN 4.17. Si A es una matriz que no verifica (D), según hemos expuesto, existe una sucesión creciente $J = (I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos $I_m \subset I$ tales que verifica las condiciones (N,J) y (M,J) de la Proposición 3.13. Como

$$\inf_{i\in I_n} \frac{a_{m,i}}{a_{k,i}} > 0 \text{ si y sólo si } \inf_{i\in I_n} \frac{a_{m,i}^r}{a_{k,i}^r} > 0$$

y

$$\inf_{i\in I_0} \frac{a_{m,i}}{a_{k,i}} = 0 \text{ si y sólo si } \inf_{i\in I_0} \frac{a^r_{m,i}}{a^r_{k,i}} = 0,$$

para cada elección de enteros positivos n, m y k y cada $r > 0$ se tiene, en virtud de lo expuesto antes, que A verifica (D) si y sólo si lo hace $A^{(r)}$.

Teniendo en cuenta cuándo una matriz de Köthe verifica la propiedad (M), se tiene, observando la Definición 4.1 y aplicando los mismos razonamientos que antes, que A verifica (M) si y sólo si $A^{(r)}$ verifica (M).

El resultado fundamental de esta sección nos indica cómo un espacio de Köthe de orden 1 se puede considerar como subespacio complementado en un producto tensorial de n espacios escalonados de Köthe de orden $p \leq n$. Dicho resultado se obtendrá a partir del

LEMA 4.18. *Sea $1 \leq p < q < \infty$, entonces existe una inclusión continua*

$$\begin{array}{rccc} j: & \lambda_p(A) & \rightarrow & \lambda_q(A^{(\frac{q}{p})}) \\ & (x_i)_{i\in I} & \mapsto & (x_i)_{i\in I}. \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado que se presenta tiene un análogo para los espacios de Banach ℓ_p, que se puede deducir de lo que aquí se presenta.

Sea $(x_i)_{i\in I} \in \lambda_p(A)$, entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{i\in I} |x_i|^p a_{m,i} < \infty$ o, equivalentemente, que $(x_i a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I} \in \ell_p$. Procediendo ahora como en [**Köt1**], §14.8 (9), se tiene que

$$(x_i a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I} \in \ell_q$$

y que

$$\|(x_i a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_q \leq \|(x_i a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_p,$$

lo que prueba que la inclusión canónica de $\ell_p(a_m^{\frac{1}{p}})$ en $\ell_q(a_m^{\frac{1}{p}})$ es continua.

El hecho de que $(x_i a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I} \in \ell_q$ para cada $m \in \mathbb{N}$ implica que $\sum_{i\in I} |x_i|^q a_{m,i}^{\frac{q}{p}} < \infty$ para cada $m \in \mathbb{N}$, o, lo que es lo mismo, que $(x_i)_{i\in I} \in \lambda_q(A^{(\frac{q}{p})})$. La continuidad de la aplicación se deriva de la continuidad de las inclusiones para los espacios ℓ_p y ℓ_q asociados a cada peso. $\square$

TEOREMA 4.19. *Sea $1 < p < \infty$ y consideremos un espacio de Köthe $\lambda_p(A)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq n$ se tiene que*

$$\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})}) \text{ es un subespacio complementado de } \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A).$$

DEMOSTRACIÓN. Denotaremos por e_i al i-ésimo elemento de la base canónica de $\lambda_p(A)$, esto es, $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in I}$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker.

Definamos entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} j: & \lambda_1(A^{(\frac{n}{p})}) & \rightarrow & \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A) \\ & (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} x_i \bigotimes_n e_i. \end{array}$$

Probaremos que la aplicación j está bien definida. Si $(x_i)_{i\in I} \in \lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$ se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$ es $\sum_{i\in I} |x_i| a_{m,i}^{\frac{n}{p}} < \infty$. Para simplificar la notación, denotaremos por $\|\cdot\|_{\ell_p(a_m)}$ a la seminorma asociada a la m-ésima función de la matriz de Köthe de $\lambda_p(A)$ y utilizaremos una notación análoga para designar las seminormas asociadas a $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$. Así, si J es un subconjunto finito de I, se tiene que

$$\bigotimes_{n,s} \|\cdot\|_{\ell_p(a_m)} \left(\sum_{i\in J} x_i \bigotimes_n e_i \right) \leq \sum_{i\in J} \|x_i e_i\|^n_{\ell_p(a_m)} =$$

$$= \sum_{i\in J} |x_i| a_{m,i}^{\frac{n}{p}} \leq \|(x_i)_{i\in I}\|_{\ell_1, a_m^{n/p}},$$

De este modo llegamos a que esta aplicación j está bien definida y que se trata de una aplicación continua.

Definamos ahora

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & \bigotimes_{n,s} \lambda_p(A) & \rightarrow & \lambda_1(A^{(\frac{n}{p})}) \\ & (x_i^1)_{i\in I} \bigotimes_s \cdots \bigotimes_s (x_i^n)_{i\in I} & \mapsto & (x_i^1 \cdots x_i^n)_{i\in I} \end{array},$$

extendiendo la aplicación por linealidad a cualquier elemento de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$. De este modo, si

$$\theta = \sum_{j=1}^{r} (x_i^{j,1})_{i\in I} \bigotimes_s \cdots \bigotimes_s (x_i^{j,n})_{i\in I},$$

entonces

$$\Pi(\theta) = \sum_{j=1}^{r} (x_i^{j,1} \cdots x_i^{j,n})_{i\in I}.$$

Para que la aplicación esté correctamente definida debemos ver en primer lugar qué ocurre con representaciones distintas de un mismo tensor. Consideremos, para cada $i \in I$, la aplicación $L_i : \lambda_p(A)^n \to \mathbb{K}$, definida, por

$$L_i((x_j^1)_{j\in I}, \ldots, (x_j^n)_{j\in I}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in P_n} x_i^{\sigma(1)} \cdots x_i^{\sigma(n)}.$$

Se tiene que $L_i \in \mathcal{L}_s(^n\lambda_p(A))$ y, si

$$\sum_{j=1}^{r} (x_i^{j,1})_{i\in I} \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} (x_i^{j,n})_{i\in I} = \sum_{k=1}^{s} (x_i^{k,1})_{i\in I} \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} (x_i^{k,n})_{i\in I}$$

resulta,

$$L_i\left(\sum_{j=1}^{r} (x_i^{j,1})_{i\in I} \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} (x_i^{j,n})_{i\in I}\right) = \left(\sum_{k=1}^{s} (x_i^{k,1})_{i\in I} \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} (x_i^{k,n})_{i\in I}\right),$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{r} x_i^{j,1} \cdots x_i^{j,n} = \sum_{k=1}^{s} x_i^{k,1} \cdots x_i^{k,n}$$

para cada $i \in I$, tal como deseábamos.

Para concluir que la aplicación está correctamente definida debemos tener en cuenta finalmente que la imagen de un producto tensorial simétrico de elementos de $\lambda_p(A)$ sea un elemento de $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$, pero ese hecho es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder generalizada ([**KaAk**], pg. 93), que indica que si $p_1, \ldots, p_n$ son números verificando $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$, y $(z_i^1)_{i\in I} \in \ell_{p_1}, \ldots, (z_i^n)_{i\in I} \in \ell_{p_n}$, se tiene que la sucesión generalizada (si I no es contable) producto $(z_i^1 \cdots z_i^n)_{i\in I}$ es un elemento de ℓ_1. Al particularizar la desigualdad de Hölder al caso que estamos considerando aplicaremos un razonamiento similar al utilizado en el Lema previo, para ello se considerarán $(x_i^1)_{i\in I}, \ldots, (x_i^n)_{i\in I} \in \lambda_p$, con lo que fijado $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(x_i^1 a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}, \ldots, (x_i^n a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I} \in \ell_p \subset \ell_n.$$

Utilizando la desigualdad de Hölder resulta

$$(x_i^1 a_{m,i}^{\frac{1}{p}} \cdots x_i^n a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I} \in \ell_1,$$

y además

$$\begin{aligned}\|(x_i^1 a_{m,i}^{\frac{1}{p}} \cdots x_i^n a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_1 &\le \|(x_i^1 a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_n \cdots \|(x_i^n a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_n \\ &\le \|(x_i^1 a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_p \cdots \|(x_i^n a_{m,i}^{\frac{1}{p}})_{i\in I}\|_p.\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$(x_i^1 \cdots x_i^n a_{m,i}^{\frac{n}{p}})_{i\in I} \in \ell_1,$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, por lo que $(x_i^1 \cdots x_i^n)_{i\in I} \in \lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$, proporcionando las anteriores desigualdades que

$$\|(x_i^1 \cdots x_i^n)_{i\in I}\|_{\ell_1(a_m^{n/p})} \leq \underset{n}{\otimes}\| \cdot \|_{\ell_p(a_m)} \left((x_i^1)_{i\in I} \otimes \cdots \otimes (x_i^n)_{i\in I}\right).$$

Considerando ahora tensores arbitrarios en $\underset{n,s}{\otimes}\lambda_p(A)$, por aplicación de la desigualdad triangular y tomando ínfimos en las representacones de los tensores, se concluye la continuidad de la aplicación Π, que se puede extender por continuidad a todo $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} \lambda_p(A)$.

Con todo esto tenemos una inclusión y una proyección continuas que además verifican $\Pi \circ j((x_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in I}$ para cada $(x_i)_{i\in I} \in \lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$, dando esta última identidad la complementación buscada. □

Para el caso particular de los espacios de Banach ℓ_p se puede establecer una primera aplicación del resultado que se acaba de probar, obteniéndose los siguientes corolarios, conocidos y utilizados cuando se trabaja con polinomios definidos sobre espacios de Banach y que Dineen proporciona en [**Din5**], Corolario 4.

COROLARIO 4.20. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $n \geq p$. Entonces*

ℓ_1 es un subespacio complementado de $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} \ell_p$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo se debe tener en cuenta que ℓ_p se puede considerar como un espacio $\lambda_p(A)$, donde la matriz $A = (a_{m,i})$ verifica $a_{m,i} = 1$ para cada elección de $m \in \mathbb{N}$ e $i \in I$. □

COROLARIO 4.21. *Sean $1 < p < \infty$ y $n \geq p$. Entonces*

ℓ_∞ es un subespacio (complementado) de $\mathcal{P}(^n\ell_p)$.

DEMOSTRACIÓN. Se obtiene del corolario anterior pasando al espacio dual. □

OBSERVACIÓN 4.22. 1) Obsérvese aquí que para determinar la continuidad de la proyección Π es fundamental que sea $n \geq p$, para poder aplicar la desigualdad de Hölder generalizada.

2) Utilizando la misma técnica que se ha empleado en la prueba del Teorema 4.19, se puede probar que $\lambda_r(A^{(\frac{rn}{p})})$ es un subespacio complementado de $\underset{n,s,\pi}{\hat{\otimes}} \lambda_p(A)$ cuando $rn \geq p$.

Ahora estamos en condiciones de ofrecer ejemplos de espacios λ_p para los que el producto tensorial simétrico $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p$ es distinguido (resp. reflexivo) para algunos $n \in \mathbb{N}$ y no lo es para otros valores de $n \in \mathbb{N}$. Como aplicación de los resultados válidos para productos tensoriales simétricos se establecerán resultados análogos para espacios de polinomios homogéneos.

TEOREMA 4.23. *Sea A una matriz de Köthe que no verifica la condición (D) y sea $1 < p < \infty$. Entonces $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ es un espacio distinguido si y sólo si $n < p$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que, independientemente de la matriz de Köthe A, si $n < p$ el espacio $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ es reflexivo, en virtud de lo afirmado en el Corolario 4.13. Supongamos ahora que A no verifica (D). Entonces la matriz $A^{(\frac{n}{p})}$ tampoco verifica (D), como se indicó en su momento, pero acabamos de probar que, si $n \geq p$,

$$\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})}) \text{ es un subespacio complementado de } \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A).$$

Como $A^{(\frac{n}{p})}$ no verifica (D), el espacio $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$ no es distinguido, con lo que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ tampoco puede serlo, por contener a $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$ de modo complementado. □

COROLARIO 4.24. *Sea A una matriz de Köthe que no verifica la condición (D) y sea $1 < p < \infty$. Entonces $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p(A)$ es un espacio distinguido si y sólo si $n < p$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 4.13 se tiene que si $n < p$, $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p(A)$ es distinguido. Por otra parte, si $n \geq p$, se ha probado en el Teorema anterior que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ no es distinguido. Como ese espacio es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p(A)$, este espacio no puede ser distinguido. □

Con estos resultados se pueden elaborar ejemplos de espacios de Fréchet para los que se da la coincidencia de las topologías τ_b y τ_ω sobre los polinomios homogéneos de ciertos grados; dado que τ_ω es la topología tonelada asociada a τ_b cuando E es metrizable, estas dos topologías coincidirán sobre $\mathcal{P}(^nE)$ cuando $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ sea tonelado. Mujica, en 1978 formula la pregunta de buscar condiciones sobre los espacios E para que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b) = (\mathcal{P}(^nE), \tau_\omega)$ (**[Muj1]**, Problema 15.6). Con el resultado que daremos a continuación vamos a conseguir ejemplos de espacios de Fréchet para los que se da la coincidencia de esas topologías sobre los polinomios de cierto grado. Un poco más adelante determinaremos una clase de espacios para los que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b) = (\mathcal{P}(^nE), \tau_\omega)$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que, gracias a los resultados sobre complementación que se han obtenido en el segundo capítulo de esta memoria, si $\tau_b = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE)$ para un cierto espacio localmente convexo E, entonces también va a ser $\tau_b = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^mE)$ para cada entero positivo $m \leq n$ (y ocurre algo análogo con la coincidencia de las otras topologías utilizadas). Por tanto, si no es cierto que $\tau_b = \tau_\omega$ sobre $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ha de existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_b = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n < m$ y $\tau_b \neq \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n \geq m$. Recordamos que las matrices de Köthe A que consideramos están definidas sobre un conjunto numerable I de índices, aunque no se especifique, dado que vamos a necesitar que los espacios $\lambda_p(A)$ que se consideran verifiquen las propiedades $(BB)_n$ y $(BB)_{n,s}$.

COROLARIO 4.25. *Sea A una matriz de Köthe definida sobre un conjunto numerable I y supongamos que A no verifica la condición (D) y $1 < p < \infty$. Entonces*

a) $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es tonelado si y sólo si $n < p$.
b) $(\mathcal{L}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es tonelado si y sólo si $n < p$.

DEMOSTRACIÓN. a) Es suficiente recordar que $\lambda_p(A)$ posee la propiedad $(BB)_{n,s}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que I es numerable ([**Din2**], Proposición 6), por lo que se da la coincidencia de las topologías τ_b y β sobre $\mathcal{P}(^n\lambda_p(A))$. Así, $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es tonelado si y sólo si $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ es distinguido.

b) Se prueba de modo análogo al apartado anterior, definiendo la topología β sobre $\mathcal{L}(^n\lambda_p(A))$ como la que tiene como dual fuerte de $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p(A)$ y la topología τ_b cómo la de la convergencia uniforme sobre los acotados de $\lambda_p(A)^n$. □

COROLARIO 4.26. *Sea $\lambda_p(A)$ un espacio escalonado de Köthe, con $1 \leq p < \infty$. Entonces*

a) $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es tonelado para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si A verifica la condición (D).

b) $(\mathcal{L}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es tonelado para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si A verifica la condición (D).

DEMOSTRACIÓN. a) Si A verifica (D), entonces $\lambda_p(A)$ tiene la condición de densidad de Heinrich (Proposición 3.13) y como verifica la propiedad $(BB)_n$, se tiene que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$ verifica la condición de densidad para cada $n \in \mathbb{N}$ ([**Din2**], Proposición 7), luego este producto tensorial es distinguido y, por tanto, $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ tonelado.

Si A no verifica (D), se ha probado antes que tomando $n \geq p$ resulta que el espacio $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ no es tonelado.

b) Se obtiene de modo análogo a como se ha obtenido a). □

Es bien conocido que la reflexividad implica la tonelación, por lo que en ocasiones es útil estudiar la reflexividad de los espacios de polinomios para determinar la coincidencia de las topologías fuerte y portada de Nachbin. En el caso que nos ocupa, que es el de los espacios escalonados de Köthe, hemos podido obtener el siguiente

TEOREMA 4.27. *Sea A una matriz de Köthe (definida sobre un conjunto numerable I) que no verifica la condición (M) y sea $1 < p < \infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $n < p$.
2) $\hat{\bigotimes}_{n,\pi} \lambda_p$ es reflexivo.
3) $(\mathcal{L}(^n\lambda_p), \beta)$ es reflexivo.
4) $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p$ es reflexivo.
5) $(\mathcal{P}(^n\lambda_p), \beta)$ es reflexivo.

DEMOSTRACIÓN. El Corolario 4.13 nos prueba

$$(1) \Rightarrow (2),\ (1) \Rightarrow (3),\ (1) \Rightarrow (4),\ (1) \Rightarrow (5).$$

Por otra parte, es claro que

$$(2) \Leftrightarrow (3),\ (4) \Leftrightarrow (5) \text{ y que } (2) \Rightarrow (4),$$

con lo que habremos terminado si probamos, por ejemplo, que (4) implica (1) y esto es así.

En efecto, si $n \geq p$ se tiene que $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$ es un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$, pero si A era una matriz que no verificaba (M), tampoco verifica esa condición $A^{(\frac{n}{p})}$, por lo que $\lambda_1(A^{(\frac{n}{p})})$ contiene un subespacio complementado isomorfo al espacio de Banach ℓ_1 (véase la Observación 4.3). De todo esto resulta que ℓ_1 se puede considerar como un subespacio complementado de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A)$, por lo que este espacio no puede ser reflexivo. □

Utilizando dualidad se puede llegar a probar un resultado obtenido por Dineen y Lindström utilizando técnicas diferentes. Éste será nuestro Corolario 4.28, que se va a deducir de otros resultados sobre reflexividad de productos tensoriales de espacios escalonados de Köthe, que se obtienen del mismo modo que los resultados sobre tonelación, utilizando en este caso el carácter de Montel en lugar de la condición de densidad.

COROLARIO 4.28. *Sea $\lambda_p(A)$ un espacio escalonado de Köthe, con $1 \leq p < \infty$. Entonces $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si A verifica la condición (M).*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si A verifica (M) se tiene que $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que sobre $\mathcal{P}(^n\lambda_p(A))$ coinciden las topologías β y τ_b y $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \beta)$ es el dual fuerte de un espacio de Fréchet Montel ([**AnPo2, Din2**]).

Por otra parte, si A no verifica (M) y se elige $n \geq p$, se acaba de ver que el espacio $(\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)), \tau_b)$ no es reflexivo. □

CAPÍTULO 5

Espacios escalonados $\lambda_X(A)$

Los espacios de sucesiones X-Köthe son una clase de espacios de Fréchet que generaliza a la clase de los espacios escalonados de Köthe $\lambda_p(A)$ con los que hemos trabajado en los capítulos anteriores. Estos espacios de sucesiones X-Köthe ya han sido utilizados para generar ejemplos y contraejemplos en la teoría de productos tensoriales topológicos y en holomorfía de dimensión infinita. Ello es debido a que esta clase de espacios heredan algunas buenas propiedades de los espacios de Banach X que se utilizan en la definición de los mismos, y también mantienen otras buenas propiedades, que son dependientes únicamente de la matriz de Köthe A asociada al espacio, de modo similar a como ocurría con los espacios λ_p. Bellenot define los espacios X-Köthe, obteniendo algunas de sus propiedades en [**Bell**]. Aquí se expondrá en las primeras secciones del capítulo un estudio parecido, en cierto modo, al realizado por Bellenot, ya que se determinarán, por ejemplo, ciertas nuevas propiedades que verifican los espacios X-Köthe que son de Montel; pero abordaremos este estudio desde un punto de vista similar al que Bierstedt, Meise y Summers sugieren en [**BMS**] para el tratamiento de los espacios λ_p y que se ha indicado en el capítulo anterior.

Merece la pena destacar dos referencias importantes donde se utilizan los espacios escalonados de Köthe como fuente de ejemplos dentro de la teoría de productos tensoriales y holomorfía. Taskinen prueba en [**Tas1**] que si E es un espacio de Fréchet perteneciente a la clase de los espacios escalonados X-Köthe, entonces el par (E, F) verifica la propiedad (BB) para cada espacio de Banach F. Dineen generaliza el trabajo de Taskinen en [**Din2**] y, a partir de las propiedades de los productos tensoriales de los espacios que él considera, consigue ejemplos de espacios de Fréchet que verifican la propiedad $(BB)_n$ para cada entero positivo n, entre los que se encuentran los espacios

X-Köthe, obteniendo así nuevos ejemplos de espacios de Fréchet E que no son de Schwartz y para los que coinciden las topologías τ_0 y τ_ω sobre $\mathcal{H}(U)$, siendo U un abierto equilibrado de E, con lo que se dió un paso más en el estudio de la coincidencia de estas dos topologías.

Dado que la definición de los espacios X-Köthe recuerda bastante a la de los espacios escalonados de Köthe usuales y que ambas clases de espacios verifican propiedades comunes, como por ejemplo la Propiedad $(BB)_n$, se va a realizar un estudio más profundo de estos espacios para generalizar cuestiones ya conocidas para los espacios λ_p, tales como la caracterización de los espacios de este tipo que son de Montel, o que cumplen la condición de densidad, en función de su matriz de Köthe A, tal como se hacía para los espacios λ_p. Hemos abordado ese estudio, con el objeto de utilizar estos resultados conseguidos para poner de manifiesto diferencias y analogías de estos espacios con los espacios escalonados de Köthe usuales, proporcionando además algún ejemplo interesante en la teoría de espacios de Fréchet, relacionado con algunos resultados que se han expuesto con anterioridad en esta memoria. Daremos el ejemplo de un espacio E, que no verifica la condición de densidad (y, por tanto, no es de Banach ni de Montel), para el que se tiene que el espacio $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es un espacio reflexivo para cada n. Este ejemplo utilizará el espacio original de Tsirelson T', para el que es conocido que $\mathcal{P}(^nT')$ es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ ([**AAD**]). Hasta el momento, los únicos ejemplos conocidos de espacio E para los que $(\mathcal{P}(^nE), \tau_b)$ es reflexivo para cada entero positivo n y E no es de Banach ni de Montel son la clase de ejemplos que se pueden construir a partir de resultados de Boyd ([**Boy**]), pero los ejemplos que Boyd considera verifican la condición de densidad, con lo que nuestro ejemplo aporta nueva información acerca de la reflexividad en espacios de polinomios.

1. Propiedades básicas de los espacios $\lambda_X(A)$

Comenzaremos proporcionando las definiciones y notaciones básicas que se van a utilizar repetidamente en lo que sigue. Los espacios que se van a definir van a estar fuertemente relacionados con los espacios escalonados de Köthe que aparecían en los capítulos anteriores de esta memoria. En todo lo que sigue, $\|\cdot\|$ representará la norma del espacio de Banach X que se esté considerando en cada momento.

DEFINICIÓN 5.1. Sea X un espacio de Banach con una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Definamos entonces el espacio normado

$$X_a = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n e_n \in X\right\},$$

donde la norma que se considera en él, $\|\cdot\|_a$, viene definida del siguiente modo: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_a$, entonces

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_a = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n e_n\right\|.$$

OBSERVACIÓN 5.2. Cuando $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos, X es isométricamente isomorfo a X_a (éste es un resultado análogo al que se obtiene en [**BMS**], tras la Definición 1.1).

En efecto, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} j_a : & X_a & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n e_n \end{array}$$

es una isometría entre X_a y X.

Siguiendo a Bellenot, y utilizando estos espacios de Banach X_a, se puede dar la definición de un espacio de sucesiones X-Köthe, como un límite proyectivo de los espacios de Banach X_a, tal como se recoge en la siguiente

DEFINICIÓN 5.3 ([**Bell**], Sección 1). Sean X un espacio de Banach, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de X y A una matriz de Köthe sobre $\mathbb{N}$. Se dice que

$$\lambda_X(A) = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} x_n e_n \in X \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\right\},$$

es un espacio de sucesiones $X-$Köthe (con X como espacio base).

A $\lambda_X(A)$ se le proporciona una estructura de espacio de Fréchet cuando se le dota de la topología definida por el sistema de seminormas $\{\|\cdot\|_{a_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, donde

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{a_m} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} x_n e_n\right\|.$$

OBSERVACIÓN 5.4. Los espacios λ_p que se estudiaban en los capítulos anteriores se pueden considerar como un caso particular de esta teoría, ya que si A es una matriz de Köthe, el espacio de tipo X-Köthe $\lambda_{\ell_p}(A)$ es precisamente el espacio $\lambda_p(A^{(p)})$, siendo la matriz $A^{(p)}$ del modo descrito en la Definición 4.16. De hecho, Valdivia en **[Val]**, 2.3.1.1, *define los espacios escalonados* $\lambda_p(A)$ *como* $\lambda_{\ell_p}(A)$.

Los espacios de sucesiones ℓ_p poseen una base 1-incondicional, que es un tipo de base de Schauder que goza de buenas propiedades. Va a ser interesante para lo que haremos después considerar espacios de Banach X que posean una base 1-incondicional. Por ello, a partir de aquí los espacios de Banach X que consideremos para definir espacios X-Köthe serán espacios de Banach con una base 1-incondicional. Recordemos entonces lo que debe verificar una base de un espacio de Banach X para que sea una base 1-incondicional.

DEFINICIÓN 5.5. Una base incondicional $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X sobre $\mathbb{C}$ se dice que es una base *1-incondicional* si para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$ y cada sucesión de números complejos $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ con $|\theta_n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n e_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right\|.$$

OBSERVACIÓN 5.6. Cuando X es un espacio de Banach con base 1-incondicional, la base canónica de $\lambda_X(A)$ es una base incondicional que además verifica otras buenas propiedades. Bajo estas condiciones, los resultados que se enunciaban en la Observación 3.4, válidos para espacios λ_p son también válidos para espacios escalonados X-Köthe. Aquí sólo mencionaremos que $\lambda_X(A)$ verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, independientemente de la matriz de Köthe A que se considere, puesto que se va a utilizar más adelante.

Se pueden establecer algunas definiciones paralelas en el caso de los espacios de sucesiones de Köthe usuales y los espacios X-Köthe. Por ejemplo, se puede extender la definición de subespacio seccional (3.5) a este contexto:

DEFINICIÓN 5.7. Sea $\lambda_X(A)$ un espacio X-Köthe y J un subconjunto de $\mathbb{N}$. Al subespacio de $\lambda_X(A)$

$$\lambda_X^J(A|_J) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda_X(A) : x_n = 0 \text{ si } n \notin J\}$$

se le llama *subespacio seccional.*

Como ocurría en el caso de los espacios λ_p, todo subespacio seccional de λ_X está complementado en $\lambda_X(A)$. Además, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base 1-incondicional de X y se considera una subsucesión suya $\{e_n\}_{n\in J}$, entonces $Y = \overline{[\{e_n : n \in J\}]}$ es un subespacio complementado de X tal que $\lambda_Y(B)$ es trivialmente isomorfo al subespacio seccional $\lambda_X^J(A)$, donde B es la matriz de Köthe $B = (a_{m,n})_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in J}}$.

También de modo análogo a como ocurría con los espacios λ_p, se puede considerar $\lambda_X(A)$ como un límite proyectivo reducido de espacios de Banach, tal como se expresa en la siguiente

PROPOSICIÓN 5.8. *Sean $A = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe sobre $\mathbb{N}$ y X un espacio de Banach con una base 1-incondicional $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Entonces*

$$\lambda_X(A) = \varprojlim_m X_{a_m}$$

y este límite proyectivo es un límite reducido.

DEMOSTRACIÓN. Comprobar que $\lambda_X(A) = \varprojlim_m X_{a_m}$ es inmediato, por la propia definición de $\lambda_X(A)$ y de su topología. Para probar que el límite es reducido, consideraremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el vector $u_n = (0,0,\dots,\overset{n)}{1},0,\dots) \in \lambda_X(A)$, esto es, la sucesión cuyos términos son todos 0 excepto el n-ésimo, que es 1.

Considerando la inclusión

$$\begin{array}{cccc} i_{a_m}: & \lambda_X(A) & \rightarrow & X_{a_m} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

se tiene que $u_n = (0,0,\dots,\overset{n)}{1},0,\dots) \in X_{a_m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}$, de donde

$$i_{a_m}(\lambda_X(A)) \supset [\{u_n : n \in \mathbb{N}\}],$$

y, por tanto, que

$$\overline{i_{a_m}(\lambda_X(A))} \supset \overline{[\{u_n : n \in \mathbb{N}\}]} = X_{a_m},$$

con lo que $i_{a_m}(\lambda_X(A))$ es denso en X_{a_m} y eso indica precisamente que el límite proyectivo utilizado es un límite reducido. $\square$

La prueba que se acaba de realizar es válida para cualquier espacio de Banach X con base 1-incondicional. Sin embargo, cuando X es un espacio reflexivo se puede obtener el mismo resultado de un modo más simple. En efecto, si X es reflexivo, se tiene de forma trivial que X_{a_m} también lo es ya que ambos espacios son isomorfos. A partir de este hecho se puede llegar a que el límite proyectivo que se utiliza en la definición de λ_X es un *límite reducido utilizando la siguiente* Proposición, *que se obtiene a partir* de resultados que Komatsu obtiene sobre límites proyectivos e inductivos *localmente compactos:*

PROPOSICIÓN 5.9 ([**Kom**], Lema 1 y Teorema 1). *Sea* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios de Banach reflexivos. Entonces* $\varprojlim_j X_j$ *es un espacio de Fréchet reflexivo.*

A continuación haremos un estudio un poco más detallado de los espacios $\lambda_X(A)$, que sigue las mismas líneas marcadas en [**BMS**] del conocido para los espacios $\lambda_p(A)$. Estudiaremos un poco más adelante cuándo $\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad o $\lambda_X(A)$ es un espacio de Montel, viendo que estas propiedades dependen únicamente de la matriz de Köthe A. Para ello es necesario dar una descripción suficientemente cómoda del dual de $\lambda_X(A)$ de un modo parecido a como Bierstedt, Meise y Summers tratan, en [**BMS**], la dualidad entre los espacios $\lambda_p(A)$ de Köthe. Aquí vamos a desarrollar un estudio sobre la dualidad existente entre los espacios $\lambda_X(A)$ y $\lambda_{X'}(A)$, en un marco que abarca el caso conocido para los espacios λ_p con $1 < p < \infty$.

Los espacios coescalonados se definen para describir el dual de un espacio escalonado. Por ello, definiremos otro tipo de espacios coescalonados que desempeñarán en la teoría de dualidad de espacios X-Köthe un papel parecido al que desempeñaban los espacios $\mathcal{K}_p$ en la teoría usual sobre espacios escalonados de Köthe.

DEFINICIÓN 5.10. Sea $\lambda_X(A)$ un espacio X-Köthe y consideremos V y $\bar{V}$ como habitualmente (Definición 3.6). Entonces definiremos los espacios coescalonados $k_X(V)$ y $\mathcal{K}_X(\bar{V})$, del modo siguiente

a) $k_X(V) = \varinjlim_m X_{v_m}$.

b) $\mathcal{K}_X(\bar{V}) = \varprojlim_{\bar{v}} X_{\bar{v}}$.

OBSERVACIÓN 5.11. Para lo que vamos a hacer después, es interesante establecer algunas propiedades que verifican los conjuntos V y $\bar{V}$. Recordemos que

$$V = \{v_m : m \in \mathbb{N}\},$$

siendo $v_m = (v_{m,n})_{n\in N}$ con $v_{m,n} = \frac{1}{a_{m,n}}$ y

$$\bar{V} = \{\bar{v} = (\bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} : \bar{v}_n \geq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\bar{v}_n < \infty \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}\}.$$

Con esta definición, cada $v \in V$ resulta ser una sucesión de números estrictamente positivos, aunque esto no ocurre con los $\bar{v} \in \bar{V}$. En efecto, cada sucesión $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con un número finito de términos no nulos verifica $\mu \in \bar{V}$, puesto que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\mu_n = \max_{n\leq N} a_{m,n}\mu_n < \infty \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N},$$

donde $N \in \mathbb{N}$ se elige de modo que $\mu_n = 0$ si $n > N$.

Cuando se considera una matriz de Köthe definida sobre un conjunto arbitrario de índices I (el caso que se consideraba en los capítulos anteriores), no siempre existe un $\bar{v} \in \bar{V}$ que es estrictamente positivo. Pero en el caso que nos ocupa, cuando consideramos la matriz de Köthe definida sobre $\mathbb{N}$, siempre existen elementos positivos en $\bar{v}$. Además, en lo que sigue va a ser necesario utilizar algunos $\bar{v} \in \bar{V}$ estrictamente positivos construidos de acuerdo con el siguiente procedimiento:

Fijemos una sucesión $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos y definamos

$$\bar{v}_n = \min\{R_k v_{k,n} : 1 \leq k \leqq n\}.$$

Se tiene que la sucesión $\bar{v} = (\bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $\bar{v} \in \bar{V}$. En efecto, si $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ es

$$a_{m,n}\bar{v}_n \leq a_{m,n}R_m v_{m,n} = R_m,$$

con lo que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\bar{v}_n \leq \max\{R_m, \max\{a_{m,n}\bar{v}_n : 1 \leq n \leq m\}\} < \infty,$$

resultando finalmente que $\bar{v} \in \bar{V}$.

Es conocido que cuando $1 \leq p < \infty$, el límite inductivo que se utiliza en la definición de $k_p(V)$ es regular ([**BMS**]). A nosotros nos interesará que el límite inductivo que aparece en la definición del espacio $k_X(V)$ sea también un límite inductivo regular, y cuando X es un espacio de Banach reflexivo eso se consigue utilizando la teoría de Komatsu.

PROPOSICIÓN 5.12 ([**Kom**], Lema 1 y Teorema 6). *Sea $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Banach reflexivos. Entonces $\varinjlim_j X_j$ es un espacio (DF) completo y reflexivo. Además, para cada acotado B de $\varinjlim_j X_j$ existe un índice k tal que B está acotado en E_k, por lo que se trata de un límite inductivo regular.*

Volviendo de nuevo a utilizar razonamientos similares a los que usan Bierstedt, Meise y Summers en [**BMS**], vamos a probar que los espacios $k_X(V)$ y $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ son coincidentes. Este hecho va a ser útil en la descripción del espacio dual de $\lambda_X(A)$. Necesitaremos para ello trabajar con una base acotadamente completa; dado que este concepto está relacionado con el de base reductora, que se va a utilizar más adelante, recordamos aquí ambas definiciones:

DEFINICIÓN 5.13. a) Se dice que una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es una *base reductora* si $\lim\limits_{n\to\infty} \|x'\|_n = 0$ para cada $x' \in X'$, siendo $\|x'\|_n$ la norma de x' cuando se considera restringida a $\overline{[e_k : k > n]}$.

b) Se dice que una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es una *base acotadamente completa* si para cada sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la que

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : n \in \mathbb{N}\right\}$$

es un conjunto acotado, entonces existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

PROPOSICIÓN 5.14. *Sea X un espacio de Banach con una base 1-incondicional acotadamente completa. Entonces los espacios k_X y $\mathcal{K}_X$ son iguales algebraicamente e isomorfos topológicamente, y, por tanto, se trata del mismo espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base a la que se hace referencia en el enunciado. Sea $x \in \mathcal{K}_X$. Queremos probar que para algún $m \in \mathbb{N}$ es $x \in X_{v_m}$, con lo que se tendrá que $\mathcal{K}_X \subset k_X$ como conjuntos. Supongamos que esto no es así, es decir, que no existe ningún $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_{v_m}$. Como la base es acotadamente completa, lo que se acaba de indicar es equivalente a decir que para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\left\{\left\|\sum_{n=1}^{N} v_{m,n} x_n e_n\right\| : N \in \mathbb{N}\right\}$$

no está acotado. Por esta razón, y por ser $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base 1-incondicional, existe una sucesión creciente $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales, para la que se verifica

$$\left\|\sum_{n=1}^{N_m} v_{m,n} x_n e_n\right\| > m.$$

Además podemos suponer que la sucesión $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente puesto que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base 1-incondicional.

Fijada la sucesión $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en esas condiciones, se define la sucesión de números reales positivos $\bar{v} = (\bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\bar{v}_n = v_{k,n}, \text{ si } N_{k-1} < n \leq N_k.$$

Se tiene que la sucesión $\bar{v}$ que acabamos de definir verifica $\bar{v} \in \bar{V}$. En efecto, fijemos $m \in \mathbb{N}$; entonces, para $n \in \mathbb{N}$ es

$$a_{m,n}\bar{v}_n = a_{m,n}v_{k,n}$$

para un cierto $k \in \mathbb{N}$ verificando que $N_{k-1} < n \leq N_k$. Por ser $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{N}$ decreciente, se tiene que si $k \geq m$ queda

$$a_{m,n}v_{k,n} \leq a_{m,n}v_{m,n} = 1.$$

Por otra parte, el conjunto

$$\{a_{m,n}v_{k,n} : k < m \text{ y } N_{k-1} < n \leq N_k\}$$

es un conjunto finito, por lo que está acotado superiormente, con lo que obtenemos finalmente que

$$a_{m,n}\bar{v}_n \leq \max\{1, \max\{a_{m,n}v_{k,n} : k < m \text{ y } N_{k-1} < n \leq N_k\}\}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que se concluye que $\bar{v} \in \bar{V}$.

Además, si $n \leq N_m$, utilizando la condición de crecimiento que se había impuesto al definir la matriz de Köthe, se tiene que

$$\bar{v}_n \geq v_{m,n}.$$

Por esta razón, y porque $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base 1-incondicional, resulta

$$\left\|\sum_{n=1}^{N_m} \bar{v}_n x_n e_n\right\| \geq \left\|\sum_{n=1}^{N_m} v_{m,n} x_n e_n\right\| > m,$$

lo que contradice la suposición $x \in \mathcal{K}_X$ que habíamos establecido al principio. Consecuentemente debe existir un $m \in \mathbb{N}$ para el que se tenga $x \in X_{v_m}$. Como $k_X = \varinjlim_j X_{v_j}$ se tiene que $x \in k_X$ y con ello llegamos a probar finalmente que

$$\mathcal{K}_X \subset k_X.$$

Para probar ahora que $k_X \subset \mathcal{K}_X$ y así terminar de probar la igualdad de estos dos conjuntos, tomemos $m \in \mathbb{N}$, $x \in X_{v_m}$ y $\bar{v} \in \bar{V}$. Se verifica

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{v}_n e_n\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\bar{v}_n}{v_{m,n}} v_{m,n} e_n\right\| \\ &\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\bar{v}_n\right)\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n v_{m,n} e_n\right\| \\ &= \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\bar{v}_n\right)\|x\|_{v_m} < \infty,\end{aligned}$$

lo que indica que $X_{v_m} \subset X_{\bar{v}}$. Además, las desigualdades anteriores prueban que la inclusión canónica de X_{v_m} en $X_{\bar{v}}$ es una aplicación continua.

Como para cada $x \in k_X(V)$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_{v_m}$, en virtud de lo probado, se tiene que $k_X(V) \subset X_{\bar{v}}$ para cada $\bar{v} \in \bar{V}$ y, por ello, que $k_X(V) \subset \mathcal{K}_X(\bar{V})$. Recordando la definición de $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ como un límite proyectivo y la de $k_X(V)$ como un límite inductivo, así como que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $\bar{v} \in \bar{V}$ la inclusión canónica de X_{v_m} en $X_{\bar{v}}$ es una aplicación continua, se tiene que la inclusión canónica de $k_X(V)$ en $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ es también una aplicación continua.

Ahora se probará que estos espacios son además isomorfos topológicamente.

La continuidad de la inclusión de k_X en $\mathcal{K}_X$ es consecuencia de la continuidad de las aplicaciones de inclusión canónicas definidas entre X_{v_m} y $X_{\bar{v}}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $\bar{v} \in \bar{V}$, que ya había sido probada con anterioridad.

Para probar la continuidad de la aplicación inversa de ésta, consideraremos un entorno U de 0 en k_X, que, por ser k_X un límite inductivo de espacios de Banach, podemos pensar que es de la forma

$$U = \bar{\Gamma}\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \rho_m B_{X_{v_m}}\Big),$$

donde $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos. Definamos, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha_m = \max\left\{\max\{a_{m,n} : 1 \leq n \leq m\}, \frac{2^m}{\rho_m}\right\}.$$

Una vez definida la sucesión $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bar{v}_n = \min\{\alpha_m v_{m,n} : 1 \leq m \leq n\},$$

lo que define una sucesión $\bar{v} = (\bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos cualquiera de los valores m, con $1 \leq m \leq n$, donde se alcanza el mínimo anterior y llamémosle j_n, con lo que queda definida una sucesión $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que

$$1 \leq j_n \leq n$$

y

$$\bar{v}_n = \alpha_{j_n} v_{j_n,n} = \min\{\alpha_m v_{m,n} : 1 \leq m \leq n\},$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m \leq n$.

Gracias a la definición de $\bar{v}$ y a la Observación 5.11, se tiene que $\bar{v} \in \bar{V}$.

Fijemos entonces $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = 0$ si $n \geq N$, para algún $N \in \mathbb{N}$ y tal que $\|x\|_{\bar{v}} \leq 1$. Teniendo en cuenta lo expuesto antes, se obtiene

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_{j_n} v_{j_n,n} x_n e_n\right\| = \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{v}_n x_n e_n\right\| = \|x\|_{\bar{v}}.$$

Con el objeto de concluir la prueba definimos, para cada $m \in \mathbb{N}$, la sucesión (de sucesiones) $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X_{\bar{v}}$, donde $g_m = (g_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por

$$g_{m,n} = \begin{cases} \alpha_m \rho_m x_n, & \text{si } j_n = m \\ 0, & \text{si } j_n \neq m \end{cases}$$

(obsérvese que cada sucesión $g_{m,n} = 0$ si $n > N$, con lo que tiene sólo un número finito de términos no nulos).

Entonces,

$$\begin{aligned} \|g_m\|_{v_m} &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n} g_{m,n} e_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{N} v_{m,n} g_{m,n} e_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} v_{j_n,n} g_{j_n,n} e_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} v_{j_n,n} \alpha_m \rho_m x_n e_n\right\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \rho_m \left\| \sum_{n=1}^{N} v_{m,n}\alpha_m x_n e_n \right\| \\
&= \rho_m \left\| x \right\|_{\bar{v}} \\
&\leq \rho_m
\end{aligned}
$$

Además, si $n > N$ se tiene que

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\alpha_m \rho_m} g_{m,n} = x_n = 0$$

y, si $n \leq N$, se tiene que $g_{m,n} = 0$ si $m \neq j_n$, con lo que

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\alpha_m \rho_m} g_{m,n} = \frac{1}{\alpha_{j_n} \rho_{j_n}} g_{j_n,n} = x_n$$

con lo que es claro que

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\alpha_m \rho_m} g_m = x.$$

Como

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m \rho_m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1,$$

se tiene que

$$x = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\alpha_m \rho_m} g_m \in \bar{\Gamma}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \rho_m B_{X_{v_m}} \right) = U.$$

De este modo, si $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}_X \cap B_{X_{\bar{v}}}$ se tiene que $y \in k_X$, puesto que habíamos probado que k_X y $\mathcal{K}_X$, como conjuntos, eran iguales. Como $y \in k_X$, tiene que existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \in X_{v_m}$ entonces, definiendo $y^N = (y_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$y_n^N = \begin{cases} y_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

se tiene que

$$\|y - y^N\|_{v_m} = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} y_n v_{m,n} e_n \right\|,$$

con lo que

$$\lim_{N \to \infty} y^N = y$$

en X_{v_m} y, por lo tanto, en $k_X(V)$. Además, por lo expuesto anteriormente, $y^N \in U$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Como U es un conjunto cerrado en k_X, se tiene que

$$y = \lim_{N\to\infty} y^N \in U,$$

con lo que resulta finalmente que

$$\{x \in \mathcal{K}_X : \|x\|_{\bar{v}} \leq 1\} \subset U,$$

siendo así la topología canónica en k_X (la topología inductiva) más fina que la canónica en $\mathcal{K}_X$ (la topología proyectiva), lo cual nos permite concluir la prueba del resultado. □

Ya se ha comentado que trabajaremos principalmente con espacios de Banach reflexivos, aunque en algunos casos no es necesario imponer esa condición sino alguna un poco más débil. Es un hecho conocido (véase ([**Die**], Capítulo V) que un espacio de Banach con base es reflexivo si y sólo si ésta es reductora y acotadamente completa. Cuando una base incondicional no es reductora, el espacio X contiene una copia de ℓ_1 y cuando no es acotadamente completa, X contiene una copia de c_0. De este modo, si X es un espacio de Banach con base incondicional, es reflexivo si y sólo si no contiene copias de c_0 o ℓ_1. Espacios del tipo de los espacios $k_X(V)$ y $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ que acabamos de definir, nos van a servir para poder dar una descripción algebraica sencilla del dual topológico de λ_X donde X es un espacio de Banach con una base 1-incondicional a la que además vamos a imponer la condición de ser reductora.

En lo sucesivo, siempre que se hable del dual X' del espacio de Banach X, se supondrá que X' está dotado de la topología inducida por la norma canónica en él. Es conocido que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base reductora incondicional de X, entonces $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de X', pero para poder obtener los resultados en nuestro contexto es necesario establecer un lema previo sobre la constante de incondicionalidad de esta base.

LEMA 5.15. *Sea X un espacio de Banach, supongamos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora 1-incondicional de X y denotemos por $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de funcionales asociados. Entonces $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base 1-incondicional de X', el dual del espacio de Banach X para la topología inducida por la norma en X'.*

DEMOSTRACIÓN. Bajo estas hipótesis, que $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de X', el dual topológico de X, es un hecho bien conocido ([**Jam**], Teorema 3). Lo único que mostraremos aquí es que la constante de incondicionalidad de esa base es también 1. Para ello tomemos sucesiones de números complejos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\theta_n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y elijamos también $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left|(\sum_{n=1}^{N} y_n\theta_n e'_n)(x)\right| = \left|(\sum_{n=1}^{N} y_n\theta_n e'_n)(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{N} y_n\theta_n x_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} y_n(\theta_n x_n)\right| = \left|(\sum_{n=1}^{N} y_n e'_n)(\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n e_n)\right| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{N} y_n e'_n\right\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n e_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{N} y_n e'_n\right\| \|x\|$$

para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, luego

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} y_n\theta_n e'_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{N} y_n e'_n\right\|$$

y así $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de X' cuya constante de incondicionalidad es 1. □

PROPOSICIÓN 5.16. *Sean X un espacio de Banach, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base reductora 1-incondicional de X y $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos. Entonces*

$$(X_a)' = (X')_{\frac{1}{a}},$$

donde $\frac{1}{a}$ representa a la sucesión cuyo término n-ésimo viene dado por $(\frac{1}{a})_n = \frac{1}{a_n}$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que los espacios de Banach X y X_a son isomorfos (Observación 5.2) por medio del isomorfismo $j_a : X_a \to X$. Entonces la aplicación transpuesta $j'_a : X' \to (X_a)'$ es un isomorfismo entre esos espacios. Además nos muestra que $y \in (X_a)'$ si y sólo si existe $y^0 = \sum_{n=1}^{\infty} y^0_n e'_n \in X'$ tal que $y = j'_a(y^0)$. Así, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_a$ se tiene que

$$y(x) = y^0(j_a(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} y^0_n x_n a_n,$$

luego el dual de X_a puede identificarse con las sucesiones de la forma $(y^0_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican $\sum_{n=1}^{\infty} y^0_n e'_n \in X'$, y estas sucesiones son precisamente las sucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X')_{\frac{1}{a}}$. □

COROLARIO 5.17. *Sean X un espacio de Banach y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base reductora 1-incondicional de X. Entonces se tiene la siguiente identidad entre espacios vectoriales:*

$$(\lambda_X(A))' = k_{X'}(V),$$

independientemente de la matriz de Köthe A (y del conjunto asociado V).

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta la Proposición 5.16, la propia definición de λ_X y k_X y la Proposición 8.8.7 de **[Jar]**, que describe el dual de un límite proyectivo en términos de un límite inductivo. Así conseguimos

$$(\lambda_X)' = (\varprojlim_m X_{a_m})' = \varinjlim_m (X_{a_m})' = \varinjlim_m (X')_{v_m}.$$

Además, la dualidad existente entre estos dos espacios viene dada de la siguiente manera: si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda_X(A)$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in k_{X'}(V)$, se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

$\square$

La última identidad que hemos establecido entre espacios vectoriales es una identidad puramente algebraica, ya que no se ha especificado ninguna topología para esos espacios duales, pero la identidad topológica análoga permanece siendo válida cuando dotamos a $(\lambda_X)'$ de la topología fuerte y consideramos en X' la topología de la norma. Estos resultados los vamos a establecer a continuación, pero primero debemos caracterizar los acotados de λ_X.

PROPOSICIÓN 5.18. *Sea X un espacio de Banach y sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base 1-incondicional de X que además es acotadamente completa. Entonces $B \subset \lambda_X$ es un conjunto acotado si y sólo si existe $\bar{v} \in \bar{V}$ estrictamente positivo tal que $B \subset B_{X_{1/\bar{v}}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos, en primer lugar, la necesidad de la condición. Si B es un acotado de λ_X, se puede suponer que existe una sucesión $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de números positivos tales que

$$B = \{y \in \lambda_X : \|y\|_{a_m} \leq M_m \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\}.$$

Con el propósito de conseguir $\bar{v} \in \bar{V}$ tal que $B \subset B_{X_{1/\bar{v}}}$, definamos la sucesión $\bar{v} = (\bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\bar{v}_n = \min\{2^{m+1} M_m v_{m,n} : 1 \leq m \leq n\}.$$

Según la Observación 5.11, se tiene que $\bar{v} \in \bar{V}$ y los factores M_m y 2^{m+1} que aparecen en la definición de $\bar{v}_n$ se introducen con el objeto de llegar a que B es un subconjunto de $B_{X_{1/\bar{v}}}$.

A continuación, elijamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un $j_n \in \mathbb{N}$, verificando que $1 \leq j_n \leq n$ y

$$2^{j_n+1} M_{j_n} v_{j_n,n} \leq 2^{m+1} M_m v_{m,n} \text{ para cada } m \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq m \leq n.$$

(para esa elección de j_n se tiene que

$$\bar{v}_n = 2^{j_n+1} M_{j_n} v_{j_n,n}).$$

Así se tiene que

$$a_{j_n,n}\bar{v}_n = a_{j_n,n} 2^{j_n+1} M_{j_n} v_{j_n,n} = 2^{j_n+1} M_{j_n},$$

con lo que

$$\frac{a_{j_n,n}}{2^{j_n+1} M_{j_n}} = \frac{1}{\bar{v}_n},$$

y si $y \in B$, para cada $N \in \mathbb{N}$ por ser $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base 1-incondicional,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} y_n \frac{1}{\bar{v}_n} e_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{N} y_n \frac{a_{j_n,n}}{2^{j_n+1} M_{j_n}} e_n \right\|$$

pero, como para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq N$ existe un único $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N$ para el que $j_n = m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N} y_n \frac{a_{j_n,n}}{2^{j_n+1} M_{j_n}} e_n \right\| &= \left\| \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} y_n \frac{a_{j_n,n}}{2^{j_n+1} M_{j_n}} e_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} y_n \frac{a_{m,n}}{2^{m+1} M_m} e_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^{m+1} M_m} \sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} y_n a_{m,n} e_n \right\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^{m+1} M_m} \left\| \sum_{\substack{j_n=m \\ n\leq N}} y_n a_{m,n} e_n \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^{m+1}M_m}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} y_n a_{m,n} e_n\right\| \\
&\le \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^{m+1}M_m} M_m \\
&\le \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

A partir de aquí, utilizando que la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotadamente completa, resulta que si $y \in B$, se tiene que $\|y\|_{1/\bar{v}} \le 1$ y $B \subset B_{X_{1/\bar{v}}}$.

La prueba de la suficiencia de la condición es más sencilla: si fijamos $\bar{v} \in \bar{V}$ y $m \in \mathbb{N}$, haciendo $M_m = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{v}_n a_{m,n}$ resulta para $y \in B_{X_{1/\bar{v}}}$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} y_n e_n\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \bar{v}_n y_n \frac{1}{\bar{v}_n} e_n\right\| \\
&\le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} M_m \bar{v}_n y_n \frac{1}{\bar{v}_n} e_n\right\| \\
&\le M_m,
\end{aligned}$$

con lo que $B_{X_{1/\bar{v}}}$ es un conjunto acotado de λ_X. □

Ya podemos establecer la igualdad topológica entre $(\lambda_X)'$ y $\mathcal{K}_{X'}$, cuando dotamos al espacio dual de la topología fuerte, tal como se refleja en el siguiente

COROLARIO 5.19. *Sea X un espacio de Banach reflexivo con base 1-incondicional. Entonces:*

1) $(\lambda_X(A))'_\beta = \mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$,

2) $(\mathcal{K}_X(\bar{V}))'_\beta = \lambda_{X'}(A)$,

donde se consideran las topologías usuales para espacios escalonados y coescalonados.

DEMOSTRACIÓN. Por ser X un espacio reflexivo con base 1-incondicional, ésta ha de ser reductora y acotadamente completa ([**Die**]), con lo que se pueden aplicar los resultados anteriores.

1) Por la Proposición 5.18, $\{B_{X_{1/\bar{v}}} : \bar{v} \in \bar{V},\ \bar{v} \text{ es estrictamente positivo}\}$ es un sistema fundamental de acotados en λ_X, y, por ello el sistema formado por las polares de estos conjuntos, $\{B^{\circ}_{X_{1/\bar{v}}} : \bar{v} \in \bar{V},\ \bar{v} \text{ estrictamente positivo}\}$ es una base de entornos

de 0 en $(\lambda_X)'_\beta$. Recordando que

$$\mathring{B}_{X_{1/\bar{v}}} = \left\{ y \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \right| \leq 1 \text{ para cada } x \in B_{X_{1/\bar{v}}} \right\}$$
$$= \left\{ y \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n y_n e'_n \right\| \leq 1 \right\}$$

se consigue llegar al resultado buscado.

2) Recordemos que $\mathcal{K}_X(\bar{V}) = k_X(V) = \varinjlim_m X_{v_m}$, siendo este límite un límite inductivo regular. Entonces se tiene que $\{B_{X_{v_m}}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de acotados para este espacio. Como

$$\mathring{B}_{X_{v_m}} = \left\{ y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \lambda_{X'}(A) : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} y_n e'_n \right\| \leq 1, \right\},$$

se tiene que la topología usual en $\lambda_{X'}(A)$ y la topología fuerte $\beta(\lambda_{X'}(A), k_X(V))$ coinciden. □

Observación 5.20. a) Se puede realizar una prueba distinta del Corolario 5.19 utilizando resultados debidos a Komatsu. De hecho, ese resultado se sigue directamente de los Teoremas 11 y 12 de [**Kom**], aunque aquí se ha preferido realizar una prueba que recuerda a la que Bierstedt, Meise y Summers realizan en [**BMS**] y que está más cercana al contexto en el que nos encontramos.

b) Del Corolario 5.19 se sigue que si X es un espacio reflexivo, entonces $\lambda_X(A)$ es un espacio reflexivo para cualquier matriz de Köthe A, ya que

$$\left((\lambda_X(A))'_\beta\right)'_\beta = (\mathcal{K}_{X'}(\bar{V}))'_\beta = \lambda_{X''}(A) = \lambda_X(A).$$

No obstante, aunque X no sea un espacio reflexivo, $\lambda_X(A)$ puede serlo para ciertas elecciones de la matriz A. Por ejemplo, se vio en el Capítulo 4 que eligiendo A de forma que verifique la condición (M), el espacio $\lambda_1(A) = \lambda_{\ell_1}(A)$ resultaba ser un espacio de Montel (y por tanto reflexivo) aunque el espacio de Banch ℓ_1 no sea un espacio reflexivo.

Análogamente se puede probar que, bajo estas hipótesis, también $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ es un espacio reflexivo.

2. Espacios X-Köthe que verifican la condición de densidad

Es interesante conocer cuándo un espacio λ_X es un espacio de Montel o cumple la condición de densidad. Ya se ha expuesto cómo Bierstedt y Bonet lo desarrollan para espacios λ_p en [**BB2**], y se han obtenido algunos nuevos ejemplos sobre polinomios en espacios localmente convexos utilizando esa teoría. Aquí adaptaremos sus pruebas para poder obtener algunos resultados sobre espacios λ_X. Debemos prestar atención a la teoría de dualidad que se ha establecido en la sección anterior. Probaremos que las propiedades *"$\lambda_X(A)$ es de Montel"* o *"$\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad"* son propiedades que sólo dependen de la matriz de Köthe A.

El trabajo que vamos a desarrollar en esta sección está destinado a ver que un espacio $\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad si y sólo si la matriz de Köthe A verifica la condición (D) de la Proposición 3.13, tal como cabía esperar. Para ello debemos estudiar de un modo más profundo algunas otras propiedades de los espacios $\lambda_X(A)$, utilizando la descripción de los acotados que se ha obtenido antes. Es necesario establecer otras propiedades sobre los acotados del espacio dual. Antes de continuar con las pruebas originales, debemos indicar un Lema, debido a Grothendieck, que nos va a servir para comparar diferentes topologías sobre un conjunto absolutamente convexo.

LEMA 5.21 ([**Gro1**], Lema 3.5). *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías localmente convexas sobre un espacio vectorial E. Sea A una parte convexa y equilibrada de E y supongamos que para cada τ_1-entorno V_1 de cero existe un τ_2-entorno de cero tal que $A \cap V_2 \subset V_1$. Entonces $\tau_2|_A$ es más fina que $\tau_1|_A$.*

PROPOSICIÓN 5.22. *Sea $J = (I_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos de índices I_k, $I_k \subset \mathbb{N}$ para cada k. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $I_0 \subset \mathbb{N}$ tal que $I_0 \cap (\mathbb{N} \setminus I_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces existe $m' = m'(m, I_0)$ con

$$\inf_{n \in I_0} \frac{a_{m,n}}{a_{m',n}} = 0.$$

(2) En cada acotado de $\mathcal{K}_X(\bar{V})$, la topología inducida viene dada por el sistema de seminormas $\{\|\cdot\|_{\bar{v},k}\}_{\substack{\bar{v}\in\bar{V} \\ k\in\mathbb{N}}}$, definidas por

$$\|x\|_{\bar{v},k} = \left\| \sum_{n \in I_k} \bar{v}_n x_n e_n \right\|,$$

para cada $x \in \mathcal{K}_X$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por B_m a la bola unidad del espacio X_{v_m}, esto es:

$$B_m = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{v_m} : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_{m,n} e_n \right\| \leq 1 \right\}.$$

Por la Proposición 5.18, sabemos que $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de acotados de $\mathcal{K}_X(\bar{V})$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $\bar{v} \in \bar{V}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{v}_n a_{m,n} \leq \frac{1}{2}$ si $n \notin I_k$. En efecto, si esto no es cierto, para cada $k \in \mathbb{N}$ se puede encontrar un cierto $n_k \notin I_k$ tal que $\bar{v}_{n_k} a_{m,n_k} \geq \frac{1}{2}$. De este modo, llamando $I_0 = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que $I_0 \cap (\mathbb{N} \setminus I_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con lo que debería existir $m' \in \mathbb{N}$ con $\inf\limits_{n\in I_0} \frac{a_{m,n}}{a_{m',n}} = 0$, pero esto no es cierto, puesto que para cada $m' \in \mathbb{N}$ y cada $n \in I_0$ se tiene que

$$\frac{a_{m,n}}{a_{m',n}} \geq \frac{a_{m,n}}{\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{m',j}\bar{v}_j}\bar{v}_n \geq \frac{1}{2}\frac{1}{\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{m',j}\bar{v}_j} > 0,$$

lo que es una contradicción con la suposición (1).

Tomemos entonces el entorno U de 0 en $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ definido por

$$U = \left\{ x \in \mathcal{K}_X(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{v}} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{v}_n e_n \right\| \leq 1 \right\}.$$

y definamos

$$\tilde{U} = \left\{ x \in \mathcal{K}_X(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{v},k} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Claramente, $U \subset 2\tilde{U}$, con lo que $U \cap B_m \subset 2\tilde{U} \cap B_m$.

Por otra parte, si $x \in \tilde{U} \cap B_m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n x_n e_n \right\| &\leq \left\| \sum_{n\in I_k} \bar{v}_n x_n e_n \right\| + \left\| \sum_{n\in I_k^c} \bar{v}_n x_n e_n \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \left\| \sum_{n\in I_k^c} \bar{v}_n a_{m,n} v_{m,n} x_n e_n \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\| \sum_{n\in I_k^c} v_{m,n} x_n e_n \right\| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Con lo que

$$\tilde{U} \cap B_m \subset U,$$

y utilizando el Lema 5.21 se llega a que la topología inducida sobre B_m por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{\bar{v},k}\}_{\substack{\bar{v}\in\bar{V}\\ k\in\mathbb{N}}}$, coincide con la topología que induce $\mathcal{K}_X$ sobre ese mismo conjunto.

(2) $\Rightarrow$ (1) : De modo análogo a como se indicaba en la parte anterior de esta prueba, si no se satisface la condición (1), han de existir $m_0 \in \mathbb{N}$ e $I_0 \subset \mathbb{N}$ (tal que $I_0 \cap I_k^c \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$) de modo que para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifique

$$\inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} > 0.$$

Como para cada $j \in \mathbb{N}$ es $I_0 \cap I_j^c \neq \emptyset$, podemos construir una sucesión $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ verificando que $i_j \in I_j^c \cap I_0$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Una vez definida esa sucesión de números naturales, se puede tomar una sucesión de escalares, $x^j = (x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $x_{i_j}^j = a_{m_0,i_j}$ y $x_n^j = 0$ siempre que $n \neq i_j$ se tiene que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n x_n^j e_n \right\| =$$

$$= \sup_{j\in\mathbb{N}} \bar{v}_{i_j} a_{m_0,i_j} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{v}_n a_{m_0,n} < \infty,$$

para cada $\bar{v} \in \bar{V}$, con lo que $(x^j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{K}_X(\bar{V})$ que además verifica que para cada $\bar{v} \in \bar{V}$ y cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^j\|_{\bar{v},k} = \left\| \sum_{n\in I_k} \bar{v}_n x_n^j e_n \right\| = 0$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que $(x^j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nula para la topología generada por la familia $\{\|\cdot\|_{\bar{v},k}\}_{\substack{\bar{v}\in\bar{V}\\ k\in\mathbb{N}}}$ y si se verifica (2), al ser una sucesión acotada, ha de ser también una sucesión nula para la topología canónica de $\mathcal{K}_X(\bar{V})$, pero esto no es así. En efecto, definamos $\bar{w} = (\bar{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por

$$\bar{w}_n = \begin{cases} v_{m_0,n} & \text{si } n \in I_0 \\ 0 & \text{si } n \notin I_0. \end{cases}$$

Se tiene que $\bar{w} \in \bar{V}$, puesto que observemos que fijado $m \in \mathbb{N}$,

$$a_{m,n}\bar{w}_n \leq \sup_{n\in I_0} v_{m_0,n} a_{m,n} \left(\inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} \right)^{-1} < \infty$$

y para este $\bar{w} \in \bar{V}$ se tiene que

$$\|x^j\|_{\bar{w}} = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{w}_n x_n^j e_n \right\| = v_{m_0,i_j} a_{m_0,i_j} = 1,$$

con lo que se llega a una contradicción con lo que se estaba suponiendo en (2). □

Cuando en el Capítulo 3 se definía la condición de densidad para espacios localmente convexos, se establecía también la Observación 3.12, que nos permitió dar una descripción de los espacios que verifican dicha condición en función de la metrizabilidad de los acotados del dual fuerte, para luego obtener la caracterización de los espacios de Köthe que verifican esa condición. La siguiente Proposición demuestra que λ_X verifica la condición de densidad si y sólo si A satisface la condición (D).

PROPOSICIÓN 5.23. *Sea X un espacio de Banach reflexivo con base 1-incondicional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) A satisface la condición (D).

(2) Cada acotado de $(\lambda_X(A))'_\beta \simeq \mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$ es metrizable, cuando se le dota de la topología inducida por $\mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$.

(3) $\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad de Heinrich.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia de (2) y (3) es consecuencia de lo indicado en la Observación 3.12, ya que $\lambda_X(A)$ es un espacio metrizable. Por tanto, nos limitaremos a probar la equivalencia entre (1) y (2).

Supongamos en primer lugar que A satisface la condición (D), esto es, existe una sucesión creciente $J = (I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos I_k de I tales que se verifican las dos condiciones siguientes:

(N,J): para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m_k \in \mathbb{N}$ con $\inf\limits_{n \in I_k} \frac{a_{m_k,n}}{a_{m,n}} > 0$, para $m > m_k$

y

(M,J): para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $I_0 \subset I$ con $I_0 \cap (I \setminus I_k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m' = m'(m, I_0) > m$ con $\inf\limits_{n \in I_0} \frac{a_{m,n}}{a_{m',n}} = 0$.

Por verificarse la condición (M, J), y gracias a la Proposición 5.22, la topología inducida por $\mathcal{K}_{X'}$ sobre cada uno de sus acotados coincide con la topología inducida sobre el mismo acotado por el sistema de seminormas $\|x\|_{\bar{v},k}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se puede definir una sucesión $\bar{v}_k$ del modo siguiente

$$\bar{v}_{k,n} = \begin{cases} v_{m_k,n} & \text{si } n \in I_k \\ 0 & \text{si } n \notin I_k, \end{cases}$$

donde se elige m_k de tal modo que $\inf\limits_{n\in I_k} \frac{a_{m_k,n}}{a_{m,n}} > 0$ para $m > m_k$. Se comprueba que $\bar{v} = (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \bar{V}$, utilizando la condición (N,J).

Además para cada $\bar{v} \in \bar{V}$ existe ρ_k tal que

$$\|\cdot\|_{\bar{v},k} \leqq \rho_k \|\cdot\|_{\bar{v}_k,k},$$

ya que para todo $x \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\bar{v},k} &= \left\| \sum_{n\in I_k} \bar{v}_n x_n e'_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n\in I_k} \bar{v}_n a_{m_k,n} v_{m_k,n} x_n e'_n \right\| \\
&\leq \rho_k \left\| \sum_{n\in I_k} v_{m_k,n} x_n e'_n \right\| \\
&= \rho_k \|x\|_{\bar{v}_k,k},
\end{aligned}$$

siendo $\rho_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{v}_n a_{m_k,n} < \infty$. Así la topología en cada acotado de $\mathcal{K}_{X'}$ viene definida por una familia contable de seminormas, y por tanto cada acotado de $\mathcal{K}_{X'}$ es metrizable.

Para probar la otra implicación, definamos, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$B_m = \{x \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \|x\|_{v_m} \leq 1\}.$$

Fijado, por un momento, $m \in \mathbb{N}$, como B_m es metrizable cuando se le dota de la topología inducida por $\mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$, existe una cantidad numerable de seminormas de las que definen la topología de $\mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$, de forma que la topología inducida por $\mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$ sobre B_m es la misma que la topología inducida sobre ese conjunto por la familia numerable de seminormas que se ha indicado. Por tanto, existe una sucesión $(\bar{w}_k^m)_{k\in\mathbb{N}} \subset \bar{V}$ de modo que para cada $\bar{v} \in \bar{V}$ existe $k \in \mathbb{N}$ con

$$\{y \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{w}_k^m} \leqq 2\} \cap B_m \subset \{x \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{v}} \leq 1\} \cap B_m.$$

Definiendo para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\bar{v}_k = \max\{\bar{w}_i^j : i,j \in \mathbb{N},\ i,j \leq k\}$$

se tiene que $(\bar{v}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $\bar{V}$ (puesto que el máximo de una cantidad finita de elementos de $\bar{V}$ es un elemento de $\bar{V}$) y la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{X_{\bar{v}_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ define sobre B_m la misma topología que $\mathcal{K}_{X'}(\bar{V})$, para cada $m \in \mathbb{N}$

ya que dados $m \in \mathbb{N}$ y $\bar{v} \in \bar{V}$, se tenía la existencia de un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x \in B_m : \|x\|_{\bar{w}_k^m} \leq 1\} \subset \{x \in B_m : \|x\|_{\bar{v}} \leq 1\},$$

con lo que, eligiendo $k = \max\{i, m\}$ se tiene que

$$\{x \in B_m : \|x\|_{\bar{v}_k} \leq 1\} \subset \{x \in B_m : \|x\|_{\bar{v}} \leq 1\}.$$

Definamos ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$I_k = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{\bar{v}_{k,n}}{v_{k,n}} \geq 1\right\}.$$

Nótese que $I_{k+1} \subset I_k$. En efecto, la sucesión $(\bar{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y la sucesión $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es decreciente, con lo que, si $n \in I_k$ es

$$\frac{\bar{v}_{k,n}}{v_{k,n}} \geq 1,$$

pero

$$\frac{\bar{v}_{k+1,n}}{v_{k+1,n}} \geq \frac{\bar{v}_{k,n}}{v_{k,n}} \geq 1,$$

con lo que $n \in I_{k+1}$. Por otra parte, se puede conseguir que los conjuntos de índices I_k no sean conjuntos vacíos, habiendo tenido la precaución de tomar $\bar{v}_1 \geq \bar{v}_0$, donde $\bar{v}_{0,n} = v_{1,1}\delta_{n,1}$, esto es: $\bar{v}_0 = (v_{1,1}, 0, 0, \dots)$.

La familia de conjuntos de índices que se acaba de definir verifica la condición (N, J), puesto que , para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $m_k = k$ (ver definición de esta condición), se tiene que si $n \in I_k$ entonces $\bar{v}_{m_k,n} \geq v_{m_k,n}$. Por otro lado, como $\bar{v}_k \in \bar{V}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una constante $M_{k,m}$ tal que $a_{m,n}\bar{v}_{k,n} \leq M_{k,m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Reuniendo estos dos hechos se tiene que para cada $n \in I_k$ es

$$\frac{1}{a_{m,n}} \geq \frac{1}{M_{k,m}}\bar{v}_{k,n} \geq \frac{1}{M_{k,m}}v_{k,n} = \frac{1}{M_{k,m}a_{k,n}},$$

de donde

$$\inf_{n\in I_k} \frac{v_{m,n}}{v_{m_k,n}} = \inf_{n\in I_k} \frac{a_{m_k,n}}{a_{m,n}} \geq \frac{1}{M_{k,m}} > 0$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Esta sucesión de conjuntos también verifica (M, J) y para probarlo vamos a utilizar la Proposición anterior. Veremos que la topología inducida sobre cada acotado de $\mathcal{K}_{X'}$ viene dada por las seminormas $\{\|\cdot\|_{\bar{v},k} : \bar{v} \in \bar{V},\ k \in \mathbb{N}\}$.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x \in B_m$ y $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, verificando además que $\|x\|_{\bar{v}_k,k} \leq 1$. Como $\frac{\bar{v}_{k,n}}{v_{k,n}} < 1$ para cada $n \notin I_k$, resulta

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_{k,n} x_n e_n'\right\| &\leq \left\|\sum_{n\in I_k} \bar{v}_{k,n} x_n e_n'\right\| + \left\|\sum_{n\notin I_k} \bar{v}_{k,n} x_n e_n'\right\| \\
&\leq 1 + \left\|\sum_{n\notin I_k} \frac{\bar{v}_{k,n}}{v_{k,n}} v_{k,n} x_n e_n'\right\| \\
&\leq 1 + \left\|\sum_{n\notin I_k} v_{k,n} x_n e_n'\right\| \\
&\leq 1 + \left\|\sum_{n=1}^{\infty} v_{m,n} x_n e_n'\right\| \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\{y \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{v}_k,k} \leq 1\} \cap B_m \subset \{y \in \mathcal{K}_{X'}(\bar{V}) : \|x\|_{\bar{v}_k} \leq 2\} \cap B_m,$$

con lo que la topología inducida en B_m por $(\|\cdot\|_{\bar{v}_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es menos fina o igual que la inducida por $(\|\cdot\|_{\bar{v}_k,k})_{k\in\mathbb{N}}$ y ésta es menos fina o igual que la inducida por $(\|\cdot\|_{\bar{v},k})_{k\in\mathbb{N}}$, que a su vez es menos fina que la generada por $(\|\cdot\|_{\bar{v}})_{\bar{v}\in\bar{V}}$ y ésta coincide sobre los acotados con la generada por $(\|\cdot\|_{\bar{v}_k})_{k\in\mathbb{N}}$. □

3. Espacios X-Köthe que son de Montel

Después de haber determinado cuándo un espacio $\lambda_X(A)$ verifica la condición de densidad, vamos a estudiar ahora qué se debe pedir a la matriz A para que el espacio $\lambda_X(A)$ sea de Montel. En esta sección también nos restringiremos al caso en el que X es un espacio de Banach con base acotadamente completa. Bierstedt, Meise y Summers ([**BMS**]) dan estos resultados también para λ_1 y λ_0, trabajando con algunas propiedades particulares de los mismos.

A continuación vamos a probar un resultado que es fundamental para lo que queremos hacer más tarde: probaremos que, del mismo modo como ocurre con los espacios escalonados de Köthe $\lambda_p(A)$, un espacio escalonado $\lambda_X(A)$ es un espacio de Montel si y sólo si su matriz de Köthe A verifica la condición (M) que se menciona en la Definición 4.1 .

LEMA 5.24. *Sea X un espacio de Banach con base 1-incondicional acotadamente completa. Si A es una matriz de Köthe que no verifica la condición (M), entonces existe un espacio de Banach de dimensión infinita Y verificando que Y es un subespacio complementado de X y a la vez es isomorfo a un subespacio seccional de $\lambda_X(A)$. (se recuerda que A verifica la condición (M) si no existe ningún conjunto infinito $I_0 \subset \mathbb{N}$ tal que, para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, ocurre que*

$$\inf_{n\in I_0} \frac{v_{m,n}}{v_{m_0,n}} = \inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} > 0, \quad \textit{para } m > m_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lambda_X(A)$ no verifica la condición (M). Entonces existen un conjunto infinito de índices $I_0 \subset \mathbb{N}$, un $m_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión de números positivos $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} = \varepsilon_m > 0 \text{ para cada } m \in \mathbb{N}$$

(si $m \leq m_0$, por ser $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, se tiene que $\inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} \geq 1$).

Definamos entonces

$$Y = \overline{[e_n : n \in I_0]},$$

que es un subespacio complementado de X, puesto que la base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base 1-incondicional de X. Por otra parte, $\lambda_X^{I_0}(A)$ es un subespacio seccional de $\lambda_X(A)$ (Definición 5.7) que es isomorfo a Y. En efecto,

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \lambda_X^{I_0}(A) & \to & Y \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & & \sum_{n\in I_0} a_{m_0,n} x_n e_n \end{array}$$

es una aplicación que está bien definida, puesto que por ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda_X^{I_0}(A)$ se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{a_{m_0}}$ y, consecuentemente, $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in Y$.

Además, de forma trivial se obtiene que esa aplicación es lineal y ese hecho, junto con que

$$\|\varphi(x)\|_Y = \|\sum_{n\in I_0} a_{m_0,n} x_n e_n\| = \|x\|_{X_{a_{m_0}}},$$

da como resultado la continuidad de φ.

La aplicación

$$\begin{array}{cccc} \psi: & Y & \to & \lambda_X^{I_0}(A) \\ & \sum_{n\in I_0} x_n e_n & \mapsto & (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

con

$$y_n = \begin{cases} \frac{x_n}{a_{m_0,n}} & \text{si } n \in I_0 \\ 0 & \text{si } n \notin I_0 \end{cases}$$

es una aplicación que está bien definida, puesto que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda_X^{I_0}(A)$. En efecto, si $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\psi\left(\sum_{n\in I_0} x_n e_n\right)\right\|_{a_m} &= \left\|\sum_{n\in I_0} a_{m,n} y_n e_n\right\| \\ &= \left\|\sum_{n\in I_0} \frac{a_{m,n}}{a_{m_0,n}} x_n e_n\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{n\in I_0} \frac{1}{\varepsilon_m} x_n e_n\right\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon_m}\|x\|_Y.\end{aligned}$$

La aplicación ψ es una aplicación lineal, y las desigualdades que se han conseguido al probar que estaba bien definida, nos muestran que es una aplicación continua. Como $\psi \circ \varphi$ es la aplicación identidad sobre $\lambda_X^{I_0}(A)$ y $\varphi \circ \psi$ es la aplicación identidad sobre Y, se concluye que estos dos espacios son isomorfos. □

PROPOSICIÓN 5.25. *Sea X un espacio de Banach con base 1-incondicional acotadamente completa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\lambda_X(A)$ es de Montel.

(2) A satisface la propiedad (M).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se verifica (1) y no se verifica (2). Por el Lema anterior, si no se verifica (2), $\lambda_X(A)$ posee un subespacio seccional $\lambda_X^{I_0}(A)$ que es isomorfo a un espacio de Banach de dimensión infinita. Recordando que los subespacios seccionales de un espacio escalonado X-Köthe son subespacios complementados de dicho espacio escalonado, se concluye que $\lambda_X(A)$ contiene de modo complementado un espacio de Banach de dimensión infinita (que no es de Montel), con lo que $\lambda_X(A)$ no puede ser un espacio de Montel, lo que es una contradicción con (1).

Para probar la veracidad de la otra implicación, tomemos $\bar{v} \in \bar{V}$, estrictamente positivo y veamos que $B_{X_{1/\bar{v}}}$ es un conjunto relativamente compacto en $\lambda_X(A)$. Observemos en primer lugar que se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$ es $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\bar{v}_n = 0$. En efecto, si esto no fuera así, existiría algún $m_0 \in \mathbb{N}$, algún $\varepsilon > 0$ y algún subconjunto infinito I_0 de $\mathbb{N}$ tales que

$$a_{m_0,n}\bar{v}_n > \varepsilon \text{ para cada } n \in I_0.$$

Entonces, si $m > m_0$, se tendría que

$$\inf_{n\in I_0} \frac{a_{m_0,n}}{a_{m,n}} \geq \inf_{n\in I_0} \frac{\varepsilon}{a_{m,n}\bar{v}_n} \geq \varepsilon \left(\sup_{n\in I_0} a_{m,n}\bar{v}_n \right)^{-1} > 0,$$

por lo que A no verificaría (M), que es una contradicción con la hipótesis.

Por ser $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\bar{v}_n = 0$, se tiene que existe un subconjunto finito (que va a ser dependiente de m) I_1 de $\mathbb{N}$ tal que

$$a_{m,n}\bar{v}_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } n \notin I_1.$$

Probaremos que sobre $B_{X_{1/\varepsilon}}$ la topología de la convergencia coordenada a coordenada es más fina que la topología inducida por $\lambda_X(A)$ sobre ese conjunto $B_{X_{1/\varepsilon}}$. Pero este conjunto es compacto para la topología de la convergencia coordenada a coordenada, esto es, la topología usual de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, que es un espacio de Montel. Por ello $B_{X_{1/\varepsilon}}$ será compacto para la otra topología, que es menos fina, y así $\lambda_X(A)$ será un espacio de Montel, lo que concluirá la prueba.

Para la comparación de esas dos topologías sobre $B_{X_{1/\varepsilon}}$ utilizaremos nuevamente el Lema 5.21. Definamos el siguiente entorno de 0 para la topología de la convergencia coordenada a coordenada en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

$$U_m = \left\{ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda_X(A) : |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2a_{m,n}} \left\| \sum_{j\in I_1} e_j \right\|^{-1} \quad \text{para cada } n \in I_1 \right\}.$$

Tomando $y \in B_{X_{1/v}} \cap U_m$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|y\|_{a_m} &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} y_n e_n\right\| \\
&= \left\|\sum_{n\in I_1} a_{m,n} y_n e_n + \sum_{n\notin I_1} a_{m,n} y_n e_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n\in I_1} a_{m,n} y_n e_n\right\| + \left\|\sum_{n\notin I_1} a_{m,n} \bar{v}_n \frac{y_n}{\bar{v}_n} e_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n\in I_1} a_{m,n} y_n e_n\right\| + \frac{\varepsilon}{2}\left\|\sum_{n\notin I_1} \frac{y_n}{\bar{v}_n} e_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n\in I_1} a_{m,n} y_n e_n\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \left\|\sum_{n\in I_1} a_{m,n} \frac{1}{a_{m,n}} \frac{\varepsilon}{2\left\|\sum_{j\in I_1} e_j\right\|} e_n\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Así

$$U_m \cap B_{X_{1/v}} \subset \{y \in B_{X_{1/v}} : \|y\|_{a_m} \leq \varepsilon\},$$

prueba que X_{a_m} induce en $B_{X_{1/v}}$ una topología menos fina que la de la convergencia coordenada a coordenada. La arbitrariedad de m da el resultado. □

OBSERVACIÓN 5.26. 1) Se había comentado en la Observación 4.3 que los espacios escalonados λ_p de Köthe que no son de Montel contienen a ℓ_p como subespacio complementado. Bellenot prueba en la Proposición 3.7 de [**Bell**] que si λ_X no es un espacio de Montel, entonces existe una subsucesión de la base canónica de λ_X que genera un espacio de Banach de dimensión infinita, utilizando una técnica distinta a la que nosotros hemos utilizado en la prueba del Lema 5.24, en el que concluíamos la existencia de un espacio de Banach Y de dimensión infinita que es a la vez un subespacio complementado de X y de λ_X. Este Lema generaliza el resultado que era conocido para los espacios λ_p, ya que si Y es un subespacio (de dimensión infinita) complementado en ℓ_p, entonces Y es isomorfo a ℓ_p ([**Sin**], Lema 18.6).

2) La técnica que se ha utilizado en la prueba de la Proposición anterior recuerda la que utilizan Bierstedt, Meise y Summers para probar el resultado análogo relativo

a espacios λ_p. No obstante, la caracterización de los espacios escalonados que son de Montel en función de su matriz de Köthe se puede obtener también a partir de resultados de Díaz y López Molina ([**DíLo**]).

4. Polinomios en espacios X-Köthe. Ejemplos

Como final de esta memoria queremos mostrar algún ejemplo que se puede obtener utilizando las propiedades de los espacios escalonados X-Köthe que se han estudiado en las secciones anteriores. De esta forma queremos enfatizar las propiedades que tienen estos espacios para elaborar ejemplos a distintas cuestiones. Estudiaremos qué ocurre, para el caso de los espacios X-Köthe, con la condición de densidad y el carácter de Montel, las dos propiedades con las que se hemos trabajado en los capítulos anteriores, en el marco de los espacios λ_p. Concretamente, si tomamos como X el espacio original de Tsirelson, resulta que X es un espacio reflexivo con base 1-incondicional y se puede considerar entonces el espacio $\lambda_X(A)$ para cualquier matriz de Köthe A. Se obtendrá que $\mathcal{P}(^n\lambda_X(A))$ es un espacio reflexivo, para cada $n \in \mathbb{N}$, independientemente de la matriz de Köthe A que se considere, resultado que contrasta con lo que se tenía para los espacios λ_p (ver Teorema 4.27).

Se ha descrito cómo representar $\lambda_X(A)$ como un límite proyectivo de espacios de Banach, de modo análogo a lo que se podía hacer con $\lambda_p(A)$ como límite proyectivo de espacios ℓ_p. Para estudiar la reflexividad de los espacios de polinomios homogéneos definidos sobre λ_p utilizábamos los resultados de Holub y de Dimant-Zalduendo. Ahora no pueden aplicarse resultados de ese tipo, puesto que no se tiene mucha información sobre el espacio de Banach X; lo único que se puede intentar es estudiar la reflexividad del espacio $\mathcal{P}(^n\lambda_X(A))$ a partir de la reflexividad de $\mathcal{P}(^nX)$. Para ello comenzaremos probando que el n-producto tensorial simétrico de un espacio X-Köthe se puede expresar como límite proyectivo reducido de espacios isomorfos a $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$.

PROPOSICIÓN 5.27. *Sea X un espacio de Banach con base 1-incondicional y sea A una matriz de Köthe sobre $\mathbb{N}$. Entonces*

$$\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A) = \varprojlim_m \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m}$$

y este límite proyectivo es reducido.

DEMOSTRACIÓN. En $E = \bigotimes_{n,s} \lambda_X(A)$ la topología proyectiva π es la generada por las seminormas $\{\bigotimes_{n,s} \alpha\}_{\alpha \in sc(E)}$, siendo

$$\bigotimes_{n,s} \alpha(\theta) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} [\alpha(x_i)]^n : \theta = \sum_{i=1}^{N} \bigotimes_n x_i \right\}$$

o, lo que es lo mismo, la generada por la familia de seminormas $\{\pi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, donde

$$\pi_m(\theta) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left\| \sum_{r=1}^{\infty} a_{m,r} x_{i,r} e_r \right\|^n : \theta = \sum_{i=1}^{N} \bigotimes_n x_i \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|_{a_m}^n : \theta = \sum_{i=1}^{N} \bigotimes_n x_i \right\} = \|\theta\|_{\bigotimes_{n,s,\pi} X_{a_m}},$$

con lo que podemos concluir que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A) = \varprojlim_m \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m}$.

Probaremos ahora que ese límite es reducido o, equivalentemente, que

$$(\bigotimes_n i_{a_m})(\bigotimes_{n,s} \lambda_X(A)) \text{ es denso en } \hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m},$$

donde i_{a_m} es la inclusión canónica de $\lambda_X(A)$ en X_{a_m}. Pero dicho aserto es cierto, ya que para cada $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$ es el conjunto $\mathbb{N} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{N}$ dotado del "orden del cuadrado" que aparece en [**Rya**], Capítulo V) se tiene que $u_{r_1} \otimes_s \cdots \otimes_s u_{r_n} \in \bigotimes_{n,s} \lambda_X(A)$ (donde u_i representa a la sucesión $u_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, 0, \ldots))$.

De este modo se llega a que

$$(\bigotimes_n i_{a_m})(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A)) \supset [\{u_{r_1} \otimes_s \cdots \otimes_s u_{r_n} : (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{D}\}]$$

y, con ello a que $(\bigotimes_n i_{a_m})(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A))$ es denso en $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, puesto que contiene un subespacio vectorial en el que están todos los elementos de una base de Schauder de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m}$. □

TEOREMA 5.28. *a) Si $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$ es reflexivo, entonces $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A)$ es reflexivo para cualquier matriz de Köthe A.*

b) Si $(\mathcal{P}(^n X), \tau_b)$ es reflexivo, entonces $(\mathcal{P}(^n \lambda_X(A)), \tau_b)$ es reflexivo, para cualquier matriz de Köthe A.

DEMOSTRACIÓN. a) Como, por hipótesis, $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$ es reflexivo, se tiene que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X_{a_m}$ es reflexivo para cada $m \in \mathbb{N}$ puesto que X y X_{a_m} son espacios isomorfos. Así,

$\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A)$ es un límite proyectivo de espacios reflexivos, y, por la Proposición 5.9 también es reflexivo.

b) Según se indicaba en la Observación 5.6, se tiene que $\lambda_X(A)$ verifica la propiedad $(BB)_{n,s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada matriz de Köthe A. Por tanto, se da la coincidencia de las topologías τ_b y β sobre $\mathcal{P}(^n\lambda_X(A))$ (vease la Observación 1.40). De este modo $(\mathcal{P}(^nX), \tau_b) = (\mathcal{P}(^nX), \beta)$ es reflexivo si y sólo si lo es su predual $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$, según lo expuesto en [**Köt1**], §23.5 (7). Por lo que hemos probado en (a), se tiene que $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A)$ es reflexivo, con lo que aplicando nuevamente el resultado anterior, $(\mathcal{P}(^n\lambda_X(A)), \beta) = (\mathcal{P}(^n\lambda_X(A)), \tau_b)$ es reflexivo. □

A continuación vamos a considerar como espacio de Banach X el espacio original de Tsirelson T'. Este espacio fue construido por Tsirelson ([**Tsi**]) como un espacio de sucesiones sin copias de c_0 o ℓ_p y ha tenido gran trascendencia en la teoría de espacios de Banach, como prueban numerosos trabajos donde este espacio ha sido utilizado para obtener ejemplos a distintas cuestiones (ver [**CaSh**]). Alencar, Aron y Dineen utilizan este espacio T' en [**AAD**] para proporcionar el primer ejemplo de un espacio de Banach E de dimensión infinita para el que $(\mathcal{H}(E), \tau_\omega)$ es reflexivo. No vamos a entrar en la definición del espacio T' pero vamos a enunciar algunas de sus propiedades que utilizaremos.

PROPOSICIÓN 5.29 ([**Tsi, CaSh**]). *Existe un espacio de Banach de sucesiones T' con las siguientes propiedades:*

i) T' es reflexivo.

ii) La sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base 1-incondicional de T', donde e_n representa a la sucesión $e_n = (0, \ldots, \overset{n)}{1}, 0, \ldots)$.

iii) T' no contiene copias de c_0 ni de ningún ℓ_p.

PROPOSICIÓN 5.30 ([**AAD**]). *$(\mathcal{P}(^nT'), \tau_b)$ es un espacio reflexivo, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Se ha probado que los espacios escalonados de Köthe $\lambda_p(A)$ y los espacios X-Köthe $\lambda_X(A)$ verificaban bastantes propiedades análogas. No obstante, para elecciones adecuadas del espacio de Banach X, esta situación cambia, obteniéndose diferencias importantes en la estructura de estos espacios. Un ejemplo que muestra esta situación es el siguiente: para los espacios escalonados clásicos $\lambda_p(A)$ se tenía que $\mathcal{P}(^n\lambda_p(A)),\tau_b)$ era un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si A verificaba la condición (M) (ver Capítulo 4).

El Teorema 5.28 nos indica que si $(\mathcal{P}(^nX),\tau_b)$ es un espacio reflexivo, entonces $(\mathcal{P}(^n\lambda_X(A),\tau_b)$ es también un espacio reflexivo, independientemente de la matriz de Köthe A que se considere. Este hecho, junto con la Proposición 5.30 nos dan el siguiente

COROLARIO 5.31. *Consideremos el espacio escalonado $\lambda_{T'}(A)$, donde T' es el espacio original de Tsirelson y A es una matriz de Köthe arbitraria. Entonces*

$$(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)),\tau_b)$$

es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Los resultados sobre reflexividad que se han obtenido proporcionan un nuevo ejemplo al problema, planteado explícitamente por Mujica en [**Muj1**], de buscar espacios E para los que se da la coincidencia de las topologías τ_b y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^nE)$, tal como se expresa en el siguiente

COROLARIO 5.32. $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)),\tau_b) = (\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)),\tau_\omega)$, *para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada matriz de Köthe A.*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)),\tau_b)$ es un espacio reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada matriz de Köthe A, lo que implica que $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)),\tau_b)$ es tonelado. Como $\lambda_{T'}(A)$ es metrizable, τ_ω es la topología tonelada asociada a τ_0, por lo que ha de ser $\tau_b = \tau_\omega$. □

El primer ejemplo de un espacio de Banach E para el que se daba la coincidencia de las topologías τ_b y τ_ω sobre $\mathcal{P}(^nE)$ para cada entero positivo n fue el obtenido por Alencar, Aron y Dineen al que nos hemos referido antes. Para los espacios de Montel que cumplen la propiedad $(BB)_{n,s}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es conocido que $\tau_0 = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$ y, por tanto, se tiene $\tau_b = \tau_\omega$ en $\mathcal{P}(^nE)$. Hasta ahora, los únicos ejemplos conocidos de espacios de Fréchet E, que no son de Banach ni de Montel, para los que se tiene que $(\mathcal{P}(^nE),\beta)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ es la clase de espacios que se puede obtener a partir del siguiente resultado de Boyd:

PROPOSICIÓN 5.33 ([**Boy**], Proposición 5). *Sea E un espacio de Fréchet, de cualquiera de los tipos siguientes:*

(a) un espacio (FG) descomponible que es de Montel,

(b) un espacio de Fréhet Schwartz con la propiedad de aproximación acotada,

(c) un espacio de Fréchet nuclear

y sea F un espacio de Fréchet tal que $\hat{\otimes}_{n,\pi} E$ es de Montel (resp. reflexivo, tiene la condición de densidad). Entonces se verifica que $\hat{\otimes}_{n,\pi}(E \hat{\otimes}_\pi F)$ y $\hat{\otimes}_{n,\pi}(E \times F)$ son espacios de Montel (resp. son reflexivos, verifican la condcición de densidad).

Así, tomando un espacio de Fréchet-Schwartz F, se tiene que el espacio $E = T' \times F$ verifica que $(\mathcal{P}(^nE), \beta)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ y, obviamente, E no es de Montel, pero ese mismo resultado nos indica que E es un espacio que verifica la condición de densidad de Heinrich, puesto que T' la verifica (por ser un espacio de Banach), F la verifica (por ser un espacio de Fréchet-Schwartz y, por tanto, de Fréchet-Montel).

Los resultados que hemos desarrollado nos han permitido probar que el espacio $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)), \tau_b) = (\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A)), \beta)$ es un espacio reflexivo, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier matriz de Köthe A. Así, eligiendo una matriz A_0 que no verifique la condición (D) se obtiene que $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A_0)), \tau_b)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_{T'}(A_0)$ no verifica la condición de densidad, obteniéndose de este modo ejemplos que aportan novedad a esta teoría. Lo establecemos en la siguiente

PROPOSICIÓN 5.34. *Sea T' el espacio original de Tsirelson y sea A_0 una matriz de Köthe que no verifica la condición (D). Entonces el espacio $(\mathcal{P}(^n\lambda_{T'}(A_0)), \tau_b)$ es reflexivo para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lambda_{T'}(A_0)$ no verifica la condición de densidad.*

Finalmente, queremos contrastar este resultado con lo que obteníamos en el Capítulo anterior para los espacios de polinomios sobre $\lambda_{\ell_p}(A) = \lambda_p(A^{(p)})$ dotados de la topología τ_b. Éstos eran reflexivos para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $A^{(p)}$ verifica (M). Además, este resultado ayuda a buscar nuevos ejemplos de espacios de Fréchet para los que ocurren cosas parecidas. Por ejemplo, utilizando diferentes técnicas usuales en el estudio de los espacios de Banach, se pueden encontrar ejemplos de espacios de Banach X con base 1-incondicional conteniendo una copia complementada de ℓ_p (véase, por ejemplo, [**Gon**], I.2.16). Si X es un espacio en estas condiciones, cuando $n \geq p$ se tendrá, gracias a resultados de complementación que se han obtenido en esta memoria, que

$$\lambda_1(A^{(n)}) \subset \hat{\otimes}_{n,s,\pi} \lambda_p(A^{(p)}) = \hat{\otimes}_{n,s,\pi} \lambda_{\ell_p}(A) \subset \hat{\otimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A),$$

siendo todos estos contenidos en el sentido de subespacios complementados. Esta cadena proporciona condiciones suficientes para la no distinción y la no reflexividad de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} \lambda_X(A)$ y, consecuentemente, para la no tonelación y la no reflexividad de $(\mathcal{P}(^n\lambda_X(A)), \tau_b)$.

Bibliografía

[AAD] R. ALENCAR, R.M. ARON Y S. DINEEN. A Reflexive Space of Holomorphic Functions in Infinitely Many Variables. *Proc. Amer. Math. Soc.* **90** (1984), 407–411.

[Ans] J.M. ANSEMIL. On the Quasinormability of $\mathcal{H}_b(U)$. *Extracta Math.* **9** (1994), 71–74.

[ABP] J.M. ANSEMIL, F. BLASCO Y S. PONTE. About Quasinormability on Spaces of Polynomials. *Preprint* (1995)

[AnPo1] J.M. ANSEMIL Y S. PONTE. An Example of a Quasi-Normable Fréchet Function Space which is not a Schwartz Space. *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory.* Ed. S. Machado, Springer Verlag Lecture Notes in Math., 843, 1981, p:1–8.

[AnPo2] J.M. ANSEMIL Y S. PONTE. The Compact Open and the Nachbin Ported Topologies on Spaces of Holomorphic Functions. *Arch. Math.* **51** (1988), 65–70.

[AnTa] J. M. ANSEMIL Y J. TASKINEN. On a Problem of Topologies in Infinite Dimensional Holomorphy. *Arch. Math.* **54** (1990), 61–64.

[ArSc] R. ARON Y M. SCHOTTENLOHER. Compact Holomorphic Mappings on Banach Spaces and the Approximation Property. *J. Funct. Anal.*, **21** (1976), 7–30.

[BaBo] F. BASTIN Y J. BONET. Locally Bounded Noncontinuous Linear Forms on Strong Duals of Nondistinguished Köthe Echelon Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 769–774.

[Bell] S. BELLENOT. Basic Sequences in non-Schwartz-Fréchet Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980), 199–216.

[BB1] K. BIERSTEDT Y J. BONET. Stefan Heinrich's Density Condition for Fréchet Spaces and the Caracterization of the Distinguised Köthe Echelon Spaces. *Math. Nachr.* **135** (1988), 149–180.

[BB2] K. BIERSTEDT Y J. BONET. Density Conditions in Fréchet and (DF)-spaces. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, **2** (1989), 59–75.

[BMS] K. BIERSTEDT, R. MEISE Y B. SUMMERS. Köthe Sets and Köthe Sequence Spaces. *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory.* North Holland Math. Studies 71, 1982, 27–91.

[Bla] F. BLASCO. Complementation in Spaces of Symmetric Tensor Products and Polynomials. *Preprint* (1995).

[BoDe] J. BONET Y A. DEFANT. Projective Tensor Products of Distinguished Fréchet Spaces. *Proc. R. Irish Acad.* **85 A** (1985), 193–200.

[BoDí] J. BONET Y J.C. DÍAZ. The Problem of Topologies of Grothendieck and the Class of Fréchet T-Spaces. *Math. Nachr.* **150** (1991), 109–118.

[BoLi] J. BONET Y M. LINDSTRÖM. Convergent Sequences in Duals of Fréchet Spaces. *Functional Analysis. Proceedings of the Essen Conference.* Marcel Dekker, 1993, 391–404.

[BonP] J. BONET Y A. PERIS. On the Injective Tensor Product of Quasinormable Spaces. *Results in Math.* **20** (1991), 431–443.

[Boy] C. BOYD. Montel and Reflexive Preduals of Spaces of Holomorphic Functions on Fréchet Spaces. *Studia Math.* **107** (1993), 305–315.

[BoyP] C. BOYD Y A. PERIS. Equivalence of Topologies of Vector-valued Holomorphic Functions. *Aparecerá en J. Math. Anal. Appl.*

[CaSh] P.G. CASAZZA Y T.J. SHURA. *Tsirelson's Space.* Lecture Notes in Mathematics, 1363. Springer Verlag, Berlín, 1989.

[DeMa] A. DEFANT Y M. MAESTRE. Property (BB) and Holomorphic Functions on Fréchet-Montel Spaces. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **115** (1993), 305–313.

[DíLo] J.C. DÍAZ Y J.A. LÓPEZ MOLINA. Projective Tensor Products of Fréchet Spaces. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **34** (1991), 169–178.

[DíMi] J.C. DÍAZ Y M.A. MIÑARRO. Distinguished Fréchet Spaces and Projective Tensor Products. *DOGA Turk. J. Math.*, **14** (1990), 191–208.

[Die] J. DIESTEL. *Sequences and Series in Banach Spaces.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1984.

[DiZa] V. DIMANT Y I. ZALDUENDO. Bases in Spaces of Multilinear Forms over Banach Spaces. *Aparecerá en J. Math. Anal. Appl.*

[Din1] S. DINEEN. *Complex Analysis in Locally Convex Spaces.* North Holland Math. Studies 57, Amsterdam, 1981.

[Din2] S. DINEEN. Holomorphic Functions on Fréchet-Montel Spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **163** (1992), 581-587.

[Din3] S. DINEEN. Quasinormable Spaces of Holomorphic Functions. *Note di Matematica* **XII** (1993), 155–195.

[Din4] S. DINEEN. Holomorphic Functions and the (BB)-property. *Math. Scand.* **74** (1994), 215–236.

[Din5] S. DINEEN. A Dvoretzky Theorem for Polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 2817–2821.

[Din6] S. DINEEN. *Infinite Dimensional Complex Analysis.* (Libro, en preparación).

[DiLi] S. DINEEN Y M. LINDSTRÖM Spaces of Homogeneous Polynomials Containing c_0 or ℓ_∞. *Preprint.*

[GGM] P. GALINDO, D. GARCÍA Y M. MASTRE. The Coincidence of τ_0 and τ_ω for Spaces of Holomorphic Functions on some Fréchet-Montel Spaces. *Proc. R. Irish Acad.* **91A** (1991), 137–143.

[GeGi] B.R. GELBAUM Y J. GIL DE LAMADRID. Bases of Tensor Products of Banach Spaces. *Pacific J. Math.* **11** (1961), 1281-1286.

[GoGu] M. GONZÁLEZ Y J.M. GUTIÉRREZ. Polynomial Grothendieck Properties. *Glasgow Math. J.*, **37** (1995), 211–219.

[Gon] R. GONZALO. *Smoothness and Polynomials on Banach Spaces.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense, Madrid, 1994.

[Gro1] A. GROTHENDIECK. Sur les espaces F e DF. *Summa Brasil Math.*, **3** (1954), 57–123.

[Gro2] A. GROTHENDIECK. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **16** (1955).

[Hei] S. HEINRICH. Ultrapowers of Locally Convex Spaces and Applications, I. *Math. Nach.*, **118** (1984), 285–315.

[Hol] J.R. HOLUB. Hilbertian operators and reflexive tensor products. *Pacific J. Math.*, **36** (1971), 185–194.

[Hor] J. HORVÁTH. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1966.

[Isi1] J.M. ISIDRO. On the Distinguished Character of the Function Spaces of Holomorphic Functions of Bounded Type. *J. Funct. Anal.*, **38 (2)** (1980), 139–145.

[Isi2] J.M. ISIDRO. Quasinormability of some Spaces of Holomorphic Mappings. *Rev. Math. Univ. Complut. Madrid*, **3** (1990), 13–17.

[Jam] R.C. JAMES. Bases and Reflexivity of Banach Spaces. *Annals of Math.*, **52** (1950), 518–527.

[Jar] H. JARCHOW. *Locally Convex Spaces.* B.G. Teubner. Stuttgart, 1981.

[KaAk] L.V. KANTOROVICH Y G.P. AKILOV. *Functional Analysis.* Segunda Edición. Pergamon Press. Oxford, 1982.

[Kat] M. P. KATS. Every DF-space is Quasinormable. *Funct. Anal. Appl.*, **7** (1973), 157–158.

[Kom] H. KOMATSU. Projective and Injective Limits of Weakly Compact Sequences of Locally Convex Spaces. *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 366-383.

[Köt1] G. KÖTHE. *Topological Vector Spaces I.* "Grundlehren der math. Wissenchaften", 159. Springer Verlag, New York, 1969.

[Köt2] G. KÖTHE. *Topological Vector Spaces II.* "Grundlehren der math. Wissenchaften", 237. Springer Verlag, New York, 1979.

[L-T] J. LINDENSTRAUSS Y L. TZAFRIRI. *Classical Banach Spaces I.* "Ergebnisse der Mathematik," 92. Springer Verlag, New York, 1977.

[Lóp] J.A. LÓPEZ MOLINA. Reflexivity of Projective Tensor Products of Echelon and Coechelon Köthe Spaces. *Collec. Math.*, **33** (1982), 259–284.

[Muj1] J. MUJICA *Gérmenes Holomorfos y Funciones Holomorfas en Espacios de Fréchet.* Departamento de Teoría de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela, 1978.

[Muj2] J. MUJICA Spaces of Germs of Holomorphic Functions. *Adv. in Math. Suppl. Stud.* **4** (1979), 1–41.

[Nel] E. NELIMARKKA. On Spaces of Holomorphic Functions on Locally Convex Spaces defined by an Operator Ideal. *Notes on Functional Analysis II,* Ed: L. Holmström. University of Helsinky, 1980, 25–35.

[Per] A. PERIS. *Productos tensoriales en espacios localmente convexos y otras clases relacionadas.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia, Valencia, 1992.

[Rya] R.A. RYAN. *Applications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy.* Tesis Doctoral. Trinity College, Dublin, 1980.

[Sch] H.H. SCHAEFFER. *Espacios Vectoriales Topológicos.* Teide, Barcelona, 1974

[Sin] I. SINGER. *Bases in Banach Spaces.* Springer-Verlag, 1970.

[Tas1] J. TASKINEN. Counterexamples to "Problème des Topologies " of Grothendieck. *Ann. Acad. Sci. Fenn., A, I. Math. Dissertationes*, **63** (1986).

[Tas2] J. TASKINEN. The Projective Tensor Product of Fréchet-Montel Spaces. *Studia Math.*, **91** (1988), 17–30.

[Tas3] J. TASKINEN. Examples of non-distinguised Fréchet Spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **14** (1989), 75–88.

[Tsi] B.S. TSIRELSON. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0. *Functional Anal. Appl.*, **8** (1974), 138–141.

[Val] M. VALDIVIA. *Topics in Locally Convex Spaces.* North Holland Math. Studies 67, Amsterdam, 1982.

Índice

$\bigotimes_n A$, 9
$\bigotimes_{n,s} A$, 9
$\bigotimes_{n,s} E$, 9
$\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} E$, 14
$\bigotimes_s[x^{(k)}, y^{(r)}]$, 9
$x \otimes y$, 8
$x_1 \underset{s}{\otimes} x_2 \underset{s}{\otimes} \cdots \underset{s}{\otimes} x_n$, 9

[S], 3

$A^{(r)}$, 77
asociativa, propiedad, 15

$(\mathrm{BB})_n$, propiedad, 22
$(\mathrm{BB})_{n,s}$, propiedad, 23
(BB), propiedad, 22
B_E, 3
base 1-incondicional, 90
base acotadamente completa, 94
base reductora, 94

casinormable espacio, 62
condición de densidad, 57

(D), condición, 57

dual fuerte, 3

$E \otimes G$, 8
E'_β, 3
E'_{τ_0}, 3
$E_1 \underset{\pi}{\hat{\otimes}} E_2 \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \ldots \underset{\pi}{\hat{\otimes}} E_n$, 14
E_α, 3
espacio X-Köthe, 89
espacio de Fréchet, 3
espacio distinguido, 3
espacio escalonado de Köthe, 54

factorización, lema de, 6

$\Gamma(A)$, 3

$\mathcal{H}(U)$, 7
$\mathcal{H}(U;G)$, 7
$\mathcal{H}_b(U)$, 7
holomorfa, aplicación, 7

$k_p(I,V)$, 55
$\mathcal{K}_\infty(E'_\beta)$, 59
$\mathcal{K}_p(I,\bar{V})$, 55

$\mathcal{L}(^mE;G)$, 4

$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; G)$, 4
$\mathcal{L}(^m E)$., 4
$\mathcal{L}^s(^m E)$, 4
$\mathcal{L}^s(^m E; G)$, 4
$\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_m; G)$, 4
$\mathcal{L}_a(^m E; G)$, 4
$\mathcal{L}_a^s(^m E)$, 4
$\mathcal{L}_a^s(^m E; G)$, 4
$\mathcal{L}_a(^m E)$, 4
$\hat{L}$, 6
$\lambda_1(I, A; E)$, 58
$\lambda_X(A)$, 89
$\lambda_p(I, A)$, 53

(M), condición, 71
matriz de Köthe, 53
m-homogéneo, polinomio, 5

Newton, fórmula de, 6
Newton, lema de, 12

$\mathcal{P}(^m E)$, 5
$\mathcal{P}(^m E; G)$, 5
$\mathcal{P}_a(^m E)$, 5
$\mathcal{P}_a(^m E; G)$, 5
$\check{P}$, 6
polarización, fórmula de, 10
polarización, identidad de, 5
portada, seminorma, 20
producto tensorial, 8
propiedad distributiva, 27

sc(E), 3
seminorma portada, 20
simétrica, aplicación m-lineal, 4
simétrico, n-producto tensorial, 9
simétrico, tensor, 9
simetrización, 9
subespacio seccional, 55, 91

τ^*, 59
τ_0, 17, 20
τ_ω, 17, 20
τ_b, 17
τ_0, 20
tipo acotado, f. holomorfa de, 7
topología compacto-abierta, 3, 17, 20
topología portada, 17
topología proyectiva, 13
topología portada, 20
Tsirelson, espacio de, 118

U-acotado, abierto, 7

V, conjunto, 55
$\bar{V}$, conjunto, 55

X_a, 89