



* 5 3 0 9 6 4 7 7 4 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Departamento de
Matemática Aplicada



Tratamiento matemático
de algunos modelos no lineales
en Climatología

21.136

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por

Lourdes Tello del Castillo

Dirigida por

Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Junio de 1996



Archivo

A mis padres.

Deseo expresar mi agradecimiento a numerosas personas. Quiero hacer mención expresa a las siguientes personas:

a Jesús Idefonso Díaz Díaz, por haberme ofrecido trabajar en tan interesante tema, por su excelente dirección en este trabajo, su paciencia, apoyo y orientación fundamental; por su constante ejemplo científico y humano;

a los profesores David Arcoya (de la Universidad de Granada), Rodolfo Bermejo (de la U.C.M.) y Jesús Hernández (de la U.A.M.), por su valiosa ayuda en algunos problemas contenidos en esta memoria. Asimismo agradezco a Seaid por su colaboración en la elaboración de las experiencias numéricas;

al profesor Georg Hetzer por las conversaciones mantenidas;

al profesor Jean Michel Rakotoson, por brindarme la posibilidad de realizar una estancia en la Universidad de Poitiers que me permitió conocer técnicas muy finas de EDPs;

al profesor Lucio Boccardo de la Universidad de Roma, por sus enseñanzas al comienzo de mis investigaciones;

al Instituto Nacional de Meteorología, por el apoyo recibido en los años 1995 y 1996;

a mis compañeros actuales del Departamento de Análisis Económico de la Universidad Autónoma de Madrid.

Y finalmente,

a los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la U.C.M. por su acogida, apoyo, ánimo y enseñanzas durante los años de realización de este trabajo, así como a mis compañeros de doctorado: Paco, Angela, Gonzalo, Emanuele, Gema, Angel, Elena e Isabel, que tanto me han acompañado y ayudado.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introducción. | iii |
| I Existencia y criterio de unicidad de soluciones para el modelo bidimensional. | 1 |
| 1 Modelización. Problemas de evolución cero, uni y bidimensionales. Formulación sobre una variedad \mathcal{M} compacta y sin borde. | 1 |
| 2 Preliminares: análisis sobre variedades. | 7 |
| 3 Existencia de solución para el problema (P) . | 27 |
| 3.1 Enunciado del Teorema de existencia | 27 |
| 3.2 El operador A . Propiedades. Un principio de comparación. | 28 |
| 3.3 Funciones multivaluadas. Un teorema de punto fijo. | 37 |
| 3.4 Demostración de la existencia de solución. | 38 |
| 3.5 Demostración de la prolongabilidad y de la regularidad. | 41 |
| 4 Sobre la unicidad de solución. | 48 |
| 4.1 Existencia de solución maximal y solución minimal. | 48 |
| 4.2 Unicidad de soluciones no degeneradas. | 55 |
| 4.3 Criterio sobre u_0 para la existencia de soluciones no degeneradas en el modelo unidimensional. | 66 |
| II Estabilización de soluciones. Problema estacionario. | 69 |
| 1 Aplicación de resultados abstractos al semigrupo asociado al modelo de tipo Sellers. | 70 |
| 2 Estabilización de soluciones para un modelo climatológico más general. | 78 |
| 3 Estudio del modelo estacionario. | 86 |
| 3.1 Multiplicidad de soluciones del modelo bidimensional. | 88 |
| 3.2 Sobre el diagrama de bifurcación | 101 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | Aproximación Numérica. | 113 |
| 1 | El modelo unidimensional. Método de Faedo - Galerkin. | 114 |
| 2 | Aproximación del modelo unidimensional cuasilineal: método de Faedo - Galerkin. | 118 |
| 3 | Aproximación del modelo unidimensional semilineal: método de Fourier - Galerkin. | 120 |
| 4 | Experiencias numéricas. | 124 |
| B | Multiplicidad de soluciones para un problema unidimensional: | |
| | Método de tiro. | 143 |
| | Bibliografía. | 153 |

Introducción.

En esta memoria se estudia un modelo no lineal originado en Climatología. Se trata de un balance de energía en la superficie terrestre que da como resultado una ecuación en derivadas parciales no lineal. Este tipo de modelos fueron introducidos por M.I. Budyko y W.D. Sellers en 1969, de forma independiente y que pese a contener pequeñas diferencias en su formulación sin embargo requieren un tratamiento matemático pormenorizado. Los modelos originarios han sido completados, mejorados, modificados y/o simplificados por diferentes autores. En la literatura podemos encontrar estudios matemáticos sobre modelos unidimensionales de balance de energía (Díaz [1993], Hetzer [1990], North [1990], Xu [1991]) y también sobre el modelo bidimensional bajo ciertas hipótesis (Hetzer [1990]). El objeto de esta memoria es abordar un modelo bidimensional general que incluye el caso de difusión no lineal.

Esta memoria ha sido estructurada en dos capítulos y dos apéndices que a su vez constan de varias secciones.

En el Capítulo 1 se estudia el modelo de evolución (una ecuación parabólica no lineal), describiendo el balance de energía así como las leyes físicas que permiten formular tal balance como una ecuación en derivadas parciales cuya incógnita $u(t, x)$ es la temperatura. La primera peculiaridad del modelo del que es objeto esta memoria es que el dominio espacial es la superficie terrestre, lo que obliga a aplicar la teoría de las *variedades Riemannianas*. Una panorámica de esta teoría se presenta en la sección 2. Mencionamos también allí algunos espacios funcionales definidos sobre variedades que son de interés para nuestro problema.

El operador de difusión de calor considerado puede ser no lineal. La motivación de esto fué el trabajo Stone [1972] en el que el autor propuso un coeficiente de difusión dependiente del gradiente de temperaturas. Esta no

linealidad añade una dificultad adicional al tratamiento del problema [a pesar de que el operador diferencial $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u)$ resulta ser monótono y coercitivo].

Otra peculiaridad del modelo es el efecto del *coalbedo* (fracción de luz absorbida por una superficie) que introduce una nueva no linealidad $\beta(u)$ eventualmente discontinua y que trataremos como un grafo multívoco acotado. En la sección 3, tras definir el espacio funcional de energía adecuado

$$V = \{v \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla v \in L^p(T\mathcal{M})\},$$

se prueba la existencia de solución sobre dicho espacio para el modelo

$$(P) \begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f & \text{en } (0, T) \times \mathcal{M} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M} \end{cases}$$

para datos iniciales en $L^\infty(\mathcal{M})$, donde \mathcal{M} es una variedad Riemanniana orientada compacta y sin borde, \mathcal{G} es una función continua estrictamente creciente y $S(x)$ es estrictamente positiva y acotada. Aplicaremos ciertas técnicas de punto fijo adaptadas a operadores multívocos. Asimismo, se prueba la prolongabilidad de las soluciones locales a todo el intervalo de tiempo $[0, \infty)$ y se obtiene una mayor regularidad de la solución cuando se supone $u_0 \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$.

La última parte de este primer capítulo se dedica al estudio de la unicidad de solución para el modelo. Pese a ser éste un problema parabólico, la presencia del término $\beta(u)$ permite que existan datos iniciales para los que es posible hallar más de una solución. Es aquí donde la función de coalbedo juega un papel clave. En el caso en que $\beta(u)$ es expresado por una función lipschiziana se tiene unicidad de solución para todo dato inicial $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$. Pero éste no es el caso cuando β es un grafo multívoco. Para analizar esta cuestión, inspirados en Díaz [1993], introducimos el concepto de *función no degenerada sobre una variedad*. Nos referimos a la siguiente

Definición. Diremos que $w \in L^\infty(\mathcal{M})$ satisface la propiedad de no-degeneración fuerte (resp. débil) si existe $C > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\mu(\{x \in \mathcal{M} : |w(x) + 10| \leq \epsilon\}) \leq C\epsilon^{p-1}$$

(resp. $\mu(\{x \in \mathcal{M} : 0 < |w(x) + 10| \leq \epsilon\}) \leq C\epsilon^{p-1}$), donde μ es la medida de Lebesgue sobre la variedad \mathcal{M} .

En la subsección 4.2 se obtiene un resultado parcial de unicidad, que asegura lo siguiente:

- (i) Si existe una solución de (P) tal que $u(t)$ verifica la propiedad de no degeneración fuerte para cada $t \in [0, T]$ entonces u es la única solución débil acotada de (P); (ii) a lo sumo puede existir una solución de (P) que verifique la propiedad de no-degeneración débil.

Una cuestión de distinta naturaleza es comprobar cuando se verifican tales condiciones. En el caso unidimensional (e.d. cuando \mathcal{M} se reduce a un intervalo real) damos un criterio de unicidad a partir de la degeneración o no degeneración del dato inicial (sección 4.3).

El Capítulo 2 aborda diversas cuestiones relacionadas con el comportamiento de las soluciones para tiempos grandes. En una primera parte se estudia la estabilización de soluciones del modelo de evolución, cuando t tiende a infinito. Las técnicas que se utilizan nos obligan a distinguir entre los dos tipos de modelos (de Sellers y de Budyko). En el caso del modelo de tipo Sellers (β lipschitz) la existencia de un semigrupo de operadores sobre $L^2(\mathcal{M})$ que describe la dinámica de la ecuación permite probar la existencia de un atractor global (sección 1). Aunque una generalización de estas técnicas a *semigrupos multívocos* podría ser también aplicada a modelos con coalbedo discontinuo, nosotros, hemos utilizado otro tipo de técnicas (válidas para ambos modelos) que no sólo prueban la existencia de atractor sino que caracterizan el conjunto ω -límite de cada solución como un subconjunto de las soluciones estacionarias del modelo (sección 2).

La segunda parte del Capítulo 2 aborda el problema estacionario

$$(P_Q) \quad -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + Bu + C \in QS(x)\beta(u) \text{ en } \mathcal{M}.$$

En este estudio se aborda la unicidad o multiplicidad de soluciones concluyendo que el parámetro solar Q juega un papel determinante. En la sección 3.1 se encuentra un intervalo de valores de Q para el que al menos hay tres soluciones.

En la sección 3.2 se describe el diagrama de bifurcación con respecto al parámetro Q y se prueba que tiene una rama principal en forma de "ese". Las técnicas que aquí se han utilizado se basan en un resultado de Rabinowitz, en

el principio de comparación y en el conocimiento de ciertos rangos de Q en los que se tiene unicidad de solución.

Los resultados presentados en los capítulos I y II son completados con dos apéndices. El *Apéndice A* estudia la convergencia del método de Faedo - Galerkin y Fourier - Galerkin para el modelo unidimensional de tipo Budyko, tanto de difusión lineal ($p = 2$) como el de difusión no lineal ($p > 2$),

$$\begin{cases} u_t - ((1 - x^2)|u_x|^{p-2}u_x)_x + Bu + C \in QS(x, t)\beta(u) & \text{en } (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ (1 - x^2)|u_x|^{p-2}u_x = 0 & \text{en } x = \pm 1 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } (-1, 1). \end{cases}$$

La motivación de este apéndice es completar el estudio iniciado por Lin - North [1990] y Mengel - Short - North [1988], en los que se presentan experiencias numéricas para el modelo unidimensional de evolución de tipo Budyko, pero sin dar una demostración de la convergencia. La segunda parte de este apéndice se refiere a la implementación del método de Faedo - Galerkin para el caso $p = 2$ (con la base de los polinomios de Legendre) combinado con el método implícito de Euler. Los resultados de las experiencias numéricas que hemos incluido aquí ilustran, entre otras propiedades, la sensibilidad del modelo a pequeñas variaciones de Q .

El *Apéndice B* trata sobre una ecuación elíptica unidimensional con un término multívoco pero sin peso en la difusión. Sus características permiten tratarla con un método de tiro para probar la multiplicidad de soluciones. Curiosamente, la ausencia del peso degenerado en los extremos del término de difusión conduce a un conjunto numerable de soluciones lo que contrasta con el diagrama de bifurcación en forma de "ese" mostrado en el Capítulo II.

Capítulo I

Existencia y criterio de unicidad de soluciones para el modelo bidimensional.

1 Modelización. Problemas de evolución cero, uni y bidimensionales. Formulación sobre una variedad \mathcal{M} compacta y sin borde.

En una primera incursión en Climatología, nos encontramos con dos tipos de modelos: modelos de pronóstico y de diagnóstico. Los *modelos de pronóstico* tienen como objetivo pronosticar o predecir la evolución temporal de la dinámica de la atmósfera. A este tipo pertenecen los llamados “modelos de circulación general” (CGM) consistentes en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales obtenidos a partir de leyes físicas de conservación. Por su gran complejidad, su tratamiento está basado en métodos computacionales que permiten aproximar las variables a predecir. Por el contrario, los *modelos de diagnóstico* intentan mostrar aspectos cualitativos del clima y comprender su evolución temporal frente a cambios de parámetros. A este grupo pertenecen los llamados “modelos de balance de energía” (EBM), objeto de estudio en esta memoria.

Los modelos de balance de energía fueron introducidos en 1969 por M.I. Budyko y W.D. Sellers de forma independiente. Estos modelos de diagnóstico

tratan de entender la evolución global del clima de nuestro planeta. Su principal característica es la sensibilidad de la temperatura a pequeñas variaciones de parámetros solares o terrestres. Este tipo de modelos ha sido utilizado también para estudiar la teoría de Milankovitch sobre los periodos de glaciación.

El modelo se obtiene a partir de un balance de energía en la superficie de la Tierra (por ejemplo al nivel del mar). Dicho balance es el siguiente:

$$\text{Incremento de Calor} = R_a - R_e + D,$$

donde R_a y R_e representan respectivamente la energía absorbida y emitida por la superficie terrestre y D representa la redistribución de calor, que viene dada mediante un operador de difusión de segundo orden.

Otra característica es que el dominio espacial es toda la superficie de la Tierra (en este sentido se dice que el modelo es *global*) y la escala de tiempo es considerada relativamente grande, del orden de 10 años. En los modelos estacionales se introduce una escala menor de tiempo, lo que permite analizar la influencia de los ciclos estacionales en el sistema climático y en particular en la formación de los casquetes polares.

Expresemos matemáticamente cada uno de los componentes del balance en función de la temperatura superficial, magnitud a modelizar. Denotaremos por $u(x, t)$ la distribución de la temperatura sobre la superficie terrestre, expresada puntualmente tras un proceso standard de promedios, donde la variable espacial x es un punto de la superficie de la esfera S^2 , o más en general de una variedad \mathcal{M} , y t es la variable temporal. El *incremento de calor* es el producto de la capacidad calorífica (que por simplicidad supondremos igual a uno, aunque tras pequeñas modificaciones lo podríamos suponer más en general de la forma $c = c(x)$ con $c(x) > 0$) por la derivada temporal de la función temperatura u . La *energía absorbida* por la atmósfera R_a depende del *coalbedo* planetario β . La función coalbedo toma valores comprendidos entre 0 y 1, y representa la fracción de energía recibida que es absorbida por la superficie, en otras palabras, es el cociente entre la energía absorbida y la energía incidente. En zonas cubiertas de hielo se refleja más la luz solar que en los océanos y por tanto el coalbedo es mayor en estas últimas. Se observa que existen zonas muy próximas con coalbedos muy diferentes. En los modelos de balance de energía se considera una variación rápida del coalbedo en un entorno de una temperatura crítica que usualmente se toma como $u = -10^0C$. Esta variación

rápida es modelizada representando el coalbedo con una función discontinua en el llamado "modelo de Budyko"

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < -10 \\ \beta_w & u > -10, \end{cases}$$

que en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales será tratado como el grafo

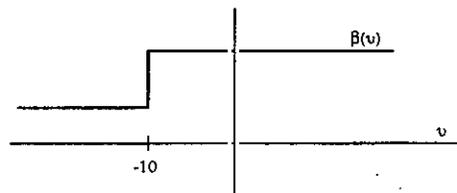


Figura 1

donde β_i y β_w representan el coalbedo de la zona helada y del resto, respectivamente. Estas constantes verifican que $0 < \beta_i < \beta_w < 1$ y a partir de observaciones por satélites se conoce su valor aproximado

$$\beta_i \sim 0,38, \quad \beta_w \sim 0,69.$$

En el llamado "modelo de Sellers", β se supone una función más regular (Lipshitziana, al menos), como por ejemplo

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < u_i, \\ \beta_i - \left(\frac{u-u_i}{u_w-u_i}\right)(\beta_i - \beta_w) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w & u > u_w, \end{cases}$$

con u_i y u_w temperaturas fijadas y cercanas a $-10^{\circ}C$.

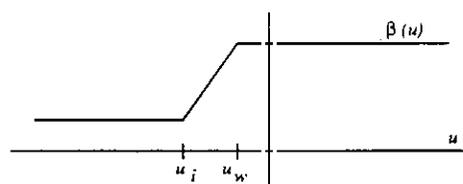


Figura 2

Esta dependencia de la temperatura introduce en el modelo un efecto de retroalimentación (o feedback) producido por el coalbedo. El mecanismo físico al que nos referimos es el siguiente: si una perturbación interna o externa hace descender la temperatura global, favorece la formación de nuevas áreas de hielo. El hielo que encontramos en los polos es blanco y brillante, y refleja casi

toda la radiación solar que incide sobre él. Esto hace que aumente la radiación reflejada y descendan las temperaturas. La nieve y el hielo aumentan y el proceso continúa. De manera análoga se argumenta si dicha perturbación hace que la temperatura aumente, en este caso las áreas de hielo y nieve disminuyen, aumenta el coalbedo y las temperaturas aumentan.

En ambos casos se tiene que la energía absorbida viene dada por

$$R_a = QS(x, t)\beta(x, u)$$

donde $S(x, t)$ es la función insolación o calor suministrado por el Sol y Q la constante solar dividida por cuatro. La constante solar es la radiación solar incidente sobre una unidad de superficie situada en la parte superior de la atmósfera perpendicular a la dirección del Sol. Esta constante experimenta fluctuaciones relacionadas con las variaciones de la rotación del Sol y desarrollo de manchas solares, que son del orden de días y otras más lentas de escala el ciclo de actividad solar (11 años). En la formulación del problema, Q juega el papel de parámetro positivo. En el capítulo 2 se abordará la sensibilidad del modelo a variaciones de Q .

La superficie de la Tierra y la atmósfera, así calentadas por el Sol, reemiten el flujo solar absorbido en forma de radiación infrarroja de grandes longitudes de onda. Esta energía liberada por la Tierra R_e es representada en el modelo de Budyko, según la ley de enfriamiento de Newton, esto es, por una función afín en u ,

$$R_e = Bu + C \tag{1.1}$$

con B y C parámetros positivos, obtenidos mediante observación, y que pueden depender de fenómenos tales como el *efecto invernadero*. En el modelo de Sellers R_e se expresa, escribiendo u en grados Kelvin, utilizando la ley de Stefan - Boltzman

$$R_e = \sigma u^4, \tag{1.2}$$

donde σ es una constante positiva.

La *difusión de calor* D es la divergencia con signo negativo del flujo de calor por conducción F_c más el flujo de calor por advección F_a . La ley de Fourier expresa

$$F_c = -k_c \nabla u$$

donde k_c es el coeficiente de difusión o conducción. El flujo de calor por advección viene dado por

$$F_a = -v\nabla u$$

y por convenios bien aceptados (véase p.e. Childress-Ghil [1987]) la velocidad del flujo atmosférico v en escalas planetarias puede sustituirse por un coeficiente de difusión k_a . Así, $D = \operatorname{div}(k\nabla u)$ con $k = k_c + k_a$. En los modelos introducidos por Budyko [1969] y Sellers [1969], el coeficiente de difusión k es de la forma $k = k(x)$. Posteriormente, P.H. Stone [1972] propuso un coeficiente de la forma $k = k(x, u, \nabla u)$, en particular $k = b(x)|\nabla u|$, incluyendo así el efecto de feedback negativo producido por las corrientes atmosféricas de gran escala. En este último caso se obtiene un operador de difusión no lineal en forma de divergencia, que para el caso $b(x) = 1$ es conocido con el nombre de pseudolaplaciano y se denota por

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Sustituyendo los términos, que acabamos de describir, en el balance de energía, se obtiene una ecuación en derivadas parciales no lineal de tipo parabólico,

$$(P^*) \begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in QS(x)\beta(u) - R_e(u) & \text{en } (0, T) \times \mathcal{M} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

donde el dominio \mathcal{M} se supone una variedad bidimensional Riemanniana compacta sin borde. En el planteamiento del problema se observa la ausencia de condiciones de contorno debido a que el dominio \mathcal{M} no tiene frontera.

Para simplificar la notación correspondiente a las diferentes definiciones de R_e y β , utilizaremos (en lo que sigue) los siguientes nombres:

modelo bidimensional de tipo Sellers si R_e es como en (1.2) y β es Lipschitziana;

modelo bidimensional de tipo Budyko si R_e es como en (1.1) y β es un grafo maximal monótono de tipo Heaviside.

Se han estudiado modelos globales de balance de energía simplificados. Las simplificaciones han sido hechas en base a múltiples observaciones (véase por ejemplo Lorenz [1971]), que muestran que la convección meridional es considerablemente pequeña frente a la longitudinal. Este hecho conduce a introducir como incógnita la temperatura media u sobre cada paralelo. De este

modo, el modelo bidimensional (P^*) se reduce a un modelo unidimensional cuando la variedad \mathcal{M} es la superficie de la esfera y se toman coordenadas esféricas. Los detalles de esta reducción en la dimensión se dan en la siguiente sección de esta memoria. El modelo resultante, llamado “modelo unidimensional”, es

$$(P_1) \begin{cases} u_t - ((1-x^2)^{\frac{p}{2}} |u_x|^{p-2} u_x)_x \in QS(x)\beta(u) - R_e(u) & \text{en } (0, T) \times (-1, 1) \\ (1-x^2)u_x = 0 & \text{en } x = -1 \text{ y } x = 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } (0, 1) \end{cases}$$

donde $x = \text{sen}\theta$ y θ es la latitud. En (P_1) se han introducido condiciones de contorno artificiales justificadas por el hecho de que el flujo meridional de calor en los polos es nulo. La cuestión de existencia de soluciones y estudio de la frontera libre (la curva que separa las regiones $\{x : u(x, t) < -10\}$ y $\{x : u(x, t) > -10\}$) para (P_1) con difusión lineal ($p = 2$) fue estudiada por Xu [1991] y más tarde en el caso no lineal ($p \geq 2$) por Díaz [1993], incluyendo, por primera vez, en la literatura el estudio de la unicidad de soluciones. Para el modelo unidimensional se utilizará la misma nomenclatura que para el bidimensional en función de R_e y β .

El modelo más simple, el llamado “modelo cero-dimensional”, aparece cuando se considera la temperatura uniformemente distribuida sobre la Tierra, es decir, como función únicamente del tiempo. La importancia de este modelo radica en que permite obtener fácilmente informaciones que pueden servir como indicaciones para los modelos de dimensión superior. Según las distintas definiciones de β y R_e resultan los modelos 0-D de Sellers y de Budyko

$$(P_0) \begin{cases} u_t \in Q\beta(u) - R_e(u) & \text{en } (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Los modelos que acabamos de describir son modelos de evolución por su dependencia de la variable temporal. Los estados de equilibrio o estacionarios asociados a estos modelos son descritos por ecuaciones elípticas semilineales o cuasilineales. Mantendremos la nomenclatura anterior para referirnos a los modelos estacionarios 2-D, 1-D ó 0-D de tipo Sellers o Budyko. El modelo estacionario bidimensional se estudiará en la segunda parte del capítulo 2 de esta memoria.

2 Preliminares: análisis sobre variedades.

El origen físico de los problemas que se estudian en este trabajo nos lleva a considerar dominios espaciales que no son abiertos de \mathbb{R}^n ; éste es el caso de la superficie de la Tierra que será tratada como la superficie de la esfera en una primera aproximación. Para establecer resultados más generales un marco adecuado para formular las edp's es el de las variedades Riemannianas.

En esta sección se recogen algunas definiciones básicas de Geometría Diferencial y Riemanniana, así como algunos resultados que serán utilizados en secciones posteriores. El objetivo de esta sección es recordar ciertos aspectos generales de las variedades Riemannianas compactas sin borde y de los operadores en ecuaciones en derivadas parciales definidas sobre ellas, siguiendo los trabajos de Aubin [1982], Boothby [1975], Chavel [1984] y Gallot-Hullin-Lafontaine [1987], entre otros. A lo largo de esta exposición se hacen continuas consideraciones a dos casos particulares relevantes: la superficie de la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y el caso de abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, (puesto que la mayoría de los resultados que se presentan en esta memoria son aplicables a problemas sobre dominios regulares y acotados Ω de \mathbb{R}^n bajo ciertas condiciones de contorno). Estos dos casos se recogen en los ejemplos que llamaremos B y A respectivamente, que iremos describiendo en esta sección.

Sea \mathcal{M} un espacio topológico y $m \geq 0$ un número entero, una *carta* de \mathcal{M} es un par (W_1, \mathbf{w}_1) donde W_1 es un abierto de \mathcal{M} y $\mathbf{w}_1 : W_1 \rightarrow \mathbf{w}_1(W_1) \subset \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo. Dadas dos cartas (W_1, \mathbf{w}_1) y (W_2, \mathbf{w}_2) tales que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, se llaman *cambios de carta* a las funciones

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 \circ \mathbf{w}_1^{-1} : \mathbf{w}_1(W_1 \cap W_2) &\rightarrow \mathbf{w}_2(W_1 \cap W_2), \\ \mathbf{w}_1 \circ \mathbf{w}_2^{-1} : \mathbf{w}_2(W_1 \cap W_2) &\rightarrow \mathbf{w}_1(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

que son homeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^m .

Un *atlas* en \mathcal{M} es una familia de cartas $\mathcal{W} = \{(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ cuyos dominios recubren \mathcal{M} . Dicho atlas es diferenciable si los cambios de cartas son diferenciables. El atlas se llama maximal o completo si toda carta que cambie diferenciablemente con las del atlas está en el atlas.

Definición 1 Una variedad diferenciable es un par $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ donde \mathcal{M} es un

espacio topológico de Hausdorff con base de entornos numerable y W un atlas diferenciable completo.

De esta forma se ha dotado al conjunto \mathcal{M} de una estructura diferenciable, que permitirá trasladar a \mathcal{M} nociones del Cálculo Diferencial de \mathbb{R}^m .

Siempre que no haya confusión posible sobre el atlas al que nos estemos refiriendo, denotaremos la variedad por \mathcal{M} . El número m es llamado *dimensión de la variedad* \mathcal{M} . En lo que sigue, fijaremos nuestra atención en variedades diferenciables bidimensionales ($m = 2$), lo que simplificará la notación en lo que sigue. Sea $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$ una carta de (\mathcal{M}, W) con $\mathbf{w}_\lambda = (w_\lambda^1, w_\lambda^2)$ y $\mathbf{p} \in W_\lambda$. Los elementos del par $(w_\lambda^1(\mathbf{p}), w_\lambda^2(\mathbf{p}))$ pueden considerarse como las *coordenadas* de \mathbf{p} , que denotaremos en general por $(\theta_\lambda, \varphi_\lambda)$. En este sentido, una carta es un sistema de coordenadas locales, y un cambio de cartas puede verse como un cambio de coordenadas.

Un tipo especial de variedades diferenciables son las contenidas en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^n , cuya topología es la heredada de dicho espacio ambiente.

Definición 2 Diremos que $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad euclídea de dimensión m si para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe un entorno $U_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^n$, un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ y un difeomorfismo $\mathbf{x} : V \rightarrow U_{\mathbf{p}} \cap \mathcal{M}$.

La aplicación \mathbf{x} se denomina *parametrización* o sistema de coordenadas en el punto \mathbf{p} (o bien parametrización local o sistema de coordenadas local en un entorno del punto \mathbf{p}). Se llama *entorno coordinado* al conjunto $U_{\mathbf{p}} \cap \mathcal{M}$. Toda variedad euclídea de dimensión m es una variedad diferenciable (basta definir las cartas como inversas de las parametrizaciones).

El origen físico de los problemas que se estudian en esta memoria nos aconseja considerar variedades euclídeas bidimensionales de \mathbb{R}^3 , o lo que en Geometría Clásica se denominan *superficies regulares de \mathbb{R}^3* (las variedades euclídeas de dimensión m de \mathbb{R}^n suelen ser denominadas *superficies abstractas*).

Ejemplos.

A. Un abierto Ω de \mathbb{R}^2 es una superficie regular de \mathbb{R}^3 . Existe una parametrización \mathbf{x} con un solo entorno coordinado $\Omega \times \{0\}$. Es decir, $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \Omega \times \{0\}$ es un difeomorfismo.

B. Sea $\mathcal{M} = S_R^2$ la superficie de la esfera de radio R , veamos que es una superficie regular de \mathbb{R}^3 . Si definimos $C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S_R^2 : x_2 = 0, x_1 \geq 0\}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow S_R^2 \setminus C_1 \\ (\varphi, \theta) &\rightarrow (R \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, R \cos \varphi) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo en S_R^2 menos una semicircunferencia de S_R^2 que une los polos. Es decir \mathbf{x} es una parametrización local en un entorno de cualquier punto $\mathbf{p} \in S_R^2 \setminus C_1$. Considerando ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow S_R^2 \setminus C_2 \\ (\varphi, \theta) &\rightarrow (R \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, R \cos \varphi, R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

donde C_2 es la semicircunferencia $C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S_R^2 : x_3 = 0, x_1 \leq 0\}$, se tiene que S_R^2 puede recubrirse con los entornos coordenados de dos puntos.

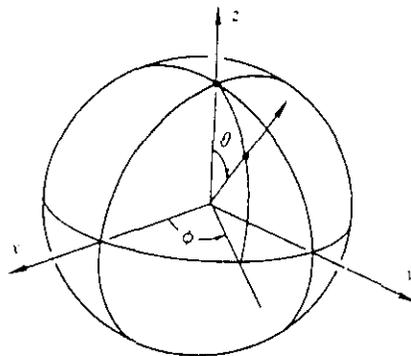


Figura 3

Sea (\mathcal{M}, W) una variedad diferenciable bidimensional y f una aplicación definida sobre ella, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es diferenciable de clase r ($C^r(\mathcal{M})$) si para cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe una carta $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$ en \mathbf{p} tal que $f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}$ está definida en un entorno $E \subset \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{p})$ y es de clase $C^r(E, \mathbb{R})$. Toda función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una *expresión local* \tilde{f} en el sistema de coordenadas θ, φ dado por cada carta.

$$\tilde{f}(\theta, \varphi) = f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta, \varphi).$$

Algunas veces, cuando no se genere confusión, denotaremos a la expresión local de f por f , prescindiendo de la tilde.

Se llama *vector tangente* a la superficie \mathcal{M} en un punto \mathbf{p} a cualquier vector tangente a una curva diferenciable parametrizada contenida en \mathcal{M} que pase por el punto \mathbf{p} . Es decir, si $\mathbf{c} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ es la parametrización de una curva diferenciable arbitraria que verifica que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$ entonces $\mathbf{c}'(0)$ es un vector tangente a \mathcal{M} en \mathbf{p} .

En términos de aplicaciones lineales, la noción de vector tangente puede definirse como una función lineal $\xi : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi(fg) = (\xi f)g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})(\xi g), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Esta definición generaliza la anterior, y es adecuada cuando \mathcal{M} es una variedad diferenciable. Ambas definiciones son equivalentes cuando \mathcal{M} es una superficie y nos permiten identificar vectores de \mathbb{R}^3 con derivadas direccionales.

El conjunto de vectores tangentes en \mathbf{p} se denota por $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, se llama *espacio tangente en \mathbf{p}* y es un subespacio vectorial de dimensión dos de \mathbb{R}^3 . También se define como $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ donde $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}}$ es la diferencial de la parametrización \mathbf{x} en el punto $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$. La definición de plano tangente no depende de la parametrización considerada. La definición de superficie regular o en general de variedad diferenciable garantiza la existencia de plano tangente en cada punto \mathbf{p} de dicha variedad. El *fibrado tangente* $T\mathcal{M}$ es $\cup_{\mathbf{p} \in \mathcal{M}} T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$.

La elección de una parametrización \mathbf{x} en $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ determina una base $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\}$ del plano tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$, que también denotaremos por $\{\mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi\}$. Las coordenadas de un vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ en la base anterior se obtienen tomando una curva parametrizada \mathbf{c} que pasa por \mathbf{p} y tal que $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, donde $\mathbf{c} = \mathbf{x} \circ \alpha$ y $\alpha(t) = (\theta(t), \varphi(t))$, por tanto

$$\mathbf{c}'(0) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(\theta(t), \varphi(t)))|_{t=0} = \theta'(0)\mathbf{x}_\theta + \varphi'(0)\mathbf{x}_\varphi = \mathbf{v}.$$

Sea $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$, con $\mathbf{w}_\lambda = (w_\lambda^1, w_\lambda^2)$ una carta en $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ y $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$ el sistema de coordenadas asociado, entonces se comprueba sin dificultad que el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial \theta_\lambda}|_{\mathbf{p}}, \frac{\partial}{\partial \varphi_\lambda}|_{\mathbf{p}}\}$ es una base de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ y por tanto, $\dim T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} = 2 = \dim \mathcal{M}$. Veamos como actúan estos vectores tangentes. Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f)|_{\mathbf{p}} = \frac{\partial(f \circ w_\lambda^{-1})}{\partial \theta}|_{\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{p})} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}(f)|_{\mathbf{p}} = \frac{\partial(f \circ w_\lambda^{-1})}{\partial \varphi}|_{\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{p})}$$

Ejemplos.

A. Sea $\mathcal{M} = \Omega$ un abierto de \mathbb{R}^2 , el espacio tangente geométrico en $\mathbf{p} \in \Omega$ es el conjunto de vectores fijos de \mathbb{R}^2 que empiezan en \mathbf{p} . Este se identifica con el espacio de aplicaciones lineales cuya base es $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, las derivadas parciales en \mathbb{R}^2 .

B. Si $\mathcal{M} = S_R^2$ el espacio de los vectores tangentes geométricos puede dibujarse como en la figura.

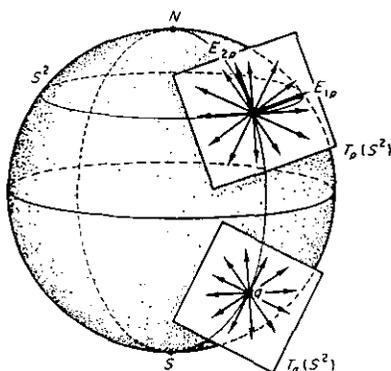


Figura 4.

La noción de plano tangente permite definir la diferencial $df_{\mathbf{p}}$ de una aplicación diferenciable f en un punto \mathbf{p} . Sea \mathbf{c} una curva parametrizada de \mathcal{M} tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, la diferencial de f en \mathbf{p} es la aplicación lineal

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\rightarrow df_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

El producto escalar de \mathbb{R}^3 induce en cada plano tangente $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ de una superficie regular \mathcal{M} un producto escalar, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$. Este producto escalar define en $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ una forma cuadrática denominada *primera forma fundamental* de la superficie regular en $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$; Tal forma expresa la manera en que la superficie \mathcal{M} hereda el producto escalar de \mathbb{R}^3 . Expresemos la primera forma fundamental en la base $\{\mathbf{x}_{\theta}, \mathbf{x}_{\varphi}\}$ asociada a la parametrización $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ en \mathbf{p} . Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ y $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(\theta(t), \varphi(t))$ una curva parametrizada en \mathbf{p} con $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} &= \langle \mathbf{c}'(0), \mathbf{c}'(0) \rangle_{\mathbf{p}} = \\ &= \langle \theta'(0)\mathbf{x}_{\theta} + \varphi'(0)\mathbf{x}_{\varphi}, \theta'(0)\mathbf{x}_{\theta} + \varphi'(0)\mathbf{x}_{\varphi} \rangle_{\mathbf{p}} = \\ &= (\theta'(0))^2 \langle \mathbf{x}_{\theta}, \mathbf{x}_{\theta} \rangle_{\mathbf{p}} + 2\theta'(0)\varphi'(0) \langle \mathbf{x}_{\theta}, \mathbf{x}_{\varphi} \rangle_{\mathbf{p}} + (\varphi'(0))^2 \langle \mathbf{x}_{\varphi}, \mathbf{x}_{\varphi} \rangle_{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

es decir, si $\mathbf{v} = v_1\mathbf{x}_\theta + v_2\mathbf{x}_\varphi$, y si

$$E = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle_{\mathbf{p}}$$

$$F = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi \rangle_{\mathbf{p}}$$

$$G = \langle \mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}_\varphi \rangle_{\mathbf{p}}$$

entonces

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

y E, F, G son entonces los coeficientes de la primera forma fundamental en la base asociada a la parametrización \mathbf{x} en \mathbf{p} . Así, para cada \mathbf{p} del entorno coordenado definido por \mathbf{x} se obtienen unos coeficientes $E(\theta, \varphi)$, $F(\theta, \varphi)$, $G(\theta, \varphi)$. La primera forma fundamental nos permite hacer mediciones (longitud de una curva, área de una región) dentro de un entorno coordenado de una superficie. Sea $\mathbf{c} : I = [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ una curva parametrizada cuya traza está contenida en un entorno coordenado de \mathcal{M} . La longitud de \mathbf{c} viene dada por

$$l = \int_0^T |\mathbf{c}'(t)| dt = \int_0^T \sqrt{\langle \mathbf{c}'(t), \mathbf{c}'(t) \rangle} dt.$$

Si D es un dominio regular de un entorno coordenado de \mathcal{M} de coordenadas θ, φ ,

$$\text{área}(D) = \int_R \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi, \quad \text{siendo } R = \mathbf{x}^{-1}(D).$$

La estructura de variedad euclídea bidimensional (o superficie) nos ha permitido definir un producto escalar en el espacio tangente a cada punto de un entorno coordenado. Para hacerlo de forma global utilizaremos una partición de la unidad subordinada al recubrimiento de \mathcal{M} formado por los entornos coordenados. Recordemos que una familia $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una *partición de la unidad* subordinada al recubrimiento $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si

- i) $\alpha_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es “regular” (por ejemplo de clase C^∞) para todo $\lambda \in \Lambda$,
- ii) soporte de α_λ contenido en W_λ ,
- iii) α_λ es no negativa y para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ se verifica que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(\mathbf{p}) = 1$.

Esta noción permite el paso de propiedades locales (sobre cada carta) a globales (sobre toda la variedad). En cuanto a la existencia de una partición de la unidad, recordemos el siguiente resultado bien conocido en la literatura (véase por ejemplo Boothby [1975])

Lema 1 Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable, y sea $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de \mathcal{M} , entonces existe un recubrimiento $\{V_k\}_{k \in J}$ de \mathcal{M} y una partición de la unidad $\{\alpha_k\}$ subordinada a él tal que

- (i) $\forall k \in J$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $V_k \subset W_\lambda$,
- (ii) cada $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ pertenece a un número finito de elementos V_k .

Una métrica Riemanniana \mathbf{g} sobre la variedad \mathcal{M} es una familia de productos escalares definidos sobre cada espacio tangente $g_{\mathbf{p}} : (T_{\mathbf{p}}\mathcal{M})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que dependen regularmente de \mathbf{p} .

Definición 3 Una variedad Riemanniana es un par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ donde \mathcal{M} es una variedad diferenciable y \mathbf{g} es una métrica Riemanniana sobre \mathcal{M} .

La matriz asociada a $g_{\mathbf{p}}$ es la misma que la matriz que representa a la primera forma fundamental. Llamemos g_{ij} a sus coeficientes. Cuando \mathbf{p} se mueve en un entorno coordinado W_λ los coeficientes de \mathbf{g} varían y se expresan como $g_{ij}(\theta, \varphi)$ dependientes de las coordenadas θ, φ del punto $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$, obteniendo así una métrica g^λ en W_λ . La actuación de $g_{\mathbf{p}}$ sobre $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \times T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ queda determinada por su actuación sobre los vectores de una base

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{p}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= g_{11} \\ g_{\mathbf{p}}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) &= g_{22} \\ g_{\mathbf{p}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) &= g_{12} = g_{21}, \end{aligned}$$

y por tanto si $\mathbf{v} = v_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + v_2 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ se tiene que

$$g_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

La partición de la unidad $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ subordinada al recubrimiento $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ permite definir una métrica Riemanniana \mathbf{g} a partir de g^λ

$$\mathbf{g} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda g^\lambda.$$

Con el fin de renormalizar la base original, en ocasiones trabajaremos con la base $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ definida por

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\mathbf{x}_\theta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\mathbf{x}_\varphi$$

con lo que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta \rangle &= 1 \\ \langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi \rangle &= 1 \\ \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi \rangle &= \langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta \rangle = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}. \end{aligned}$$

Si además $g_{12} = 0$ diremos que $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ es una *base ortonormal* de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$.

Ejemplos.

A. Si $\mathcal{M} = \Omega$ con el atlas dado anteriormente, entonces

$$g_{11} = 1 \quad g_{22} = 1 \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

B. Si la variedad considerada es la superficie de la esfera de radio R ($\mathcal{M} = S_R^2$) con el atlas de las coordenadas esféricas, se tiene

$$g_{11} = R^2 \sin^2 \varphi \quad g_{22} = R^2 \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Además $\{\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ es una base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S_R^2$.

Un resultado útil que se obtiene a partir de una fácil modificación de otro bien conocido (véase p. e. Díaz [1985] cap. 4) es el siguiente

Lema 2 Sea $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ una base de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ con la métrica \mathbf{g} , y sean ξ y η elementos de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \mathbf{e}_\theta + \xi_2 \mathbf{e}_\varphi \\ \eta &= \eta_1 \mathbf{e}_\theta + \eta_2 \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

si $p \geq 2$ entonces,

$$g_{\mathbf{p}}(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta) \geq C|\xi - \eta|^p,$$

donde $|\xi| = \sqrt{g_{\mathbf{p}}(\xi, \xi)}$. \square

El gradiente de una función diferenciable $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como el campo de vectores $\text{grad}_{\mathcal{M}}f : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que a cada punto $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ le asocia el vector $\text{grad}_{\mathcal{M}}f(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ dado por

$$g_{\mathbf{p}}(\text{grad}_{\mathcal{M}}f(\mathbf{p}), \mathbf{v}) = df_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}.$$

De la definición de diferencial de f en un punto \mathbf{p} , se deduce que

$$\text{grad}_{\mathcal{M}} f|_{\mathbf{p}} = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

donde g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de $g_{\mathbf{p}}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$ la base de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ asociada al sistema de coordenadas $\{y_1, y_2\}$ en \mathbf{p} . Expresándolo en la base $\{\mathbf{e}_{\theta} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{\varphi} = \mathbf{e}_2\}$, anteriormente calculada, se obtiene que

$$\text{grad}_{\mathcal{M}} f|_{\mathbf{p}} = \sum_{i,j} g^{ij} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j} \mathbf{e}_i.$$

El vector gradiente también se denota por $\nabla_{\mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi}}$ indicando así la base en que está expresado el gradiente. Una notación más ambigua es la de $\nabla_{\mathcal{M}}$. La expresión obtenida para el gradiente no depende del sistema de coordenadas, de ahí que reciba el nombre de expresión en coordenadas generalizadas.

Ejemplos.

A. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Entonces $\text{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$.

B. Para $u : S_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que $\text{grad}_{\mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi}} u = (\frac{1}{R \sin \varphi} u_{\theta}, \frac{1}{R} u_{\varphi})$.

Sea $X = h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + h_2 \frac{\partial}{\partial \varphi}$ un campo de vectores de $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$. Se define la *divergencia* de X como el campo escalar

$$\text{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 \sqrt{g}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_2 \sqrt{g}),$$

donde $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ y g_{ij} son los coeficientes de la matriz asociada al producto escalar $g_{\mathbf{p}}$. De forma equivalente podríamos expresarlo como

$$\text{div} X = g_{\mathbf{p}}(D_{\frac{\partial}{\partial \theta}}(h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + h_2 \frac{\partial}{\partial \varphi}), \frac{\partial}{\partial \theta}) + g_{\mathbf{p}}(D_{\frac{\partial}{\partial \varphi}}(h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + h_2 \frac{\partial}{\partial \varphi}), \frac{\partial}{\partial \varphi}).$$

Si el campo de vectores X viene expresado en otra base $\{\mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi}\}$, es decir, $X = f_1 \mathbf{e}_{\theta} + f_2 \mathbf{e}_{\varphi}$ se tiene que

$$\text{div} X = g_{\mathbf{p}}(D_{\mathbf{e}_{\theta}}(f_1 \mathbf{e}_{\theta} + f_2 \mathbf{e}_{\varphi}), \mathbf{e}_{\theta}) + g_{\mathbf{p}}(D_{\mathbf{e}_{\varphi}}(f_1 \mathbf{e}_{\theta} + f_2 \mathbf{e}_{\varphi}), \mathbf{e}_{\varphi}).$$

Obsérvese que los vectores $\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, o bien, \mathbf{e}_{θ} y \mathbf{e}_{φ} no son constantes, dependen de θ y φ ; por ello se introducen las *derivadas covariantes*

$$D_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{siendo } y_1 = \theta, y_2 = \varphi, \quad (1.3)$$

donde Γ_{ij}^k son los llamados *símbolos de Christoffel*, definidos por

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1,2} \frac{1}{2} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) g^{kl}, \quad (1.4)$$

con g_{ij} y g^{ij} componentes de las matrices de g_p y su matriz inversa, respectivamente.

Calculemos las derivadas covariantes de $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\theta) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} D_{\frac{\partial}{\partial \theta}}(\mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{k=1,2} \frac{1}{g_{11}} \Gamma_{11}^k \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} D_{\frac{\partial}{\partial \varphi}}(\mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sum_{k=1,2} \frac{1}{g_{22}} \Gamma_{22}^k \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\theta) &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} D_{\frac{\partial}{\partial \varphi}}(\mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{k=1,2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \Gamma_{21}^k \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} D_{\frac{\partial}{\partial \theta}}(\mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sum_{k=1,2} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \Gamma_{12}^k \frac{\partial}{\partial y_k}, \end{aligned}$$

y cuya expresión en la base $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ viene dada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\theta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{\Gamma_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \mathbf{e}_\varphi, \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\varphi) &= \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1 \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\Gamma_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}} \right) \right) \mathbf{e}_\varphi, \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\theta) &= \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\Gamma_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{e}_\varphi, \\ D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\varphi) &= \frac{\Gamma_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{\Gamma_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}} \right) \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

Ejemplos.

A. Para $\mathcal{M} = \Omega$, $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo i, j, k . Además

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\theta) &= 0 & D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\varphi) &= 0 \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\theta) &= 0 & D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

B. Si $\mathcal{M} = S_R^2$ en la carta (W_1, \mathbf{w}_1) del atlas de las coordenadas esféricas, se calculan los símbolos de Christoffel y las derivadas covariantes

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cot \varphi, \quad \Gamma_{11}^2 = -\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\theta) &= -\cot\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\varphi) &= 0 \\ D_{\mathbf{e}_\varphi}(\mathbf{e}_\theta) &= D_{\mathbf{e}_\theta}(\mathbf{e}_\varphi) = \frac{\cot\varphi}{R}\mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Expresemos el operador diferencial $\operatorname{div}(k(x, u, \operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u) \operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u)$ localmente. Observando que k toma valores reales, debemos calcular la divergencia del campo de vectores $X = k(x, u, \nabla_{\mathcal{M}}u)\nabla_{\mathcal{M}}u$. La expresión local de X es

$$\tilde{X} = \tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, h_1\mathbf{e}_\theta + h_2\mathbf{e}_\varphi)(h_1\mathbf{e}_\theta + h_2\mathbf{e}_\varphi),$$

con h_1 y h_2 coordenadas de $\operatorname{grad}_{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi}u$, i.e.

$$\begin{aligned} h_1 &= g^{11}\sqrt{g_{11}}u_\theta + g^{12}\sqrt{g_{11}}u_\varphi \\ h_2 &= g^{22}\sqrt{g_{22}}u_\varphi + g^{12}\sqrt{g_{22}}u_\theta, \end{aligned}$$

donde u_θ y u_φ denotan $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}$. Con el fin de simplificar los cálculos supongamos que $\{\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial \theta}, \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ (o equivalentemente en el caso de superficies $\{\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\}$) es una base ortonormal, entonces

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi}u = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi.$$

Calculemos $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(X)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathcal{M}}\left(\tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)\right) &= \\ &= D_{\mathbf{e}_\theta}\left(\tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\right) \langle \operatorname{grad}_{\mathcal{M}}, \mathbf{e}_\theta \rangle + \\ &+ \tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi) \langle D_{\mathbf{e}_\theta}(\operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u), \mathbf{e}_\theta \rangle + \\ &+ D_{\mathbf{e}_\varphi}\left(\tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\right) \langle \operatorname{grad}_{\mathcal{M}}, \mathbf{e}_\varphi \rangle + \\ &+ \tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi) \langle D_{\mathbf{e}_\varphi}(\operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u), \mathbf{e}_\varphi \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{d}{d\theta}\left(\tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}u_\theta\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}u_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\right)\left(\frac{u_\theta}{\sqrt{g_{11}}}\langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta \rangle + \frac{u_\varphi}{\sqrt{g_{22}}}\langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta \rangle\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} u_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} u_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \left(\frac{u_{\theta\theta}}{\sqrt{g_{11}}} + 2u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{u_\theta}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{11}^1 + \frac{u_\varphi \sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \Gamma_{12}^1 \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{d}{d\varphi} \left(\tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} u_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} u_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \right) \left(\frac{u_\theta}{\sqrt{g_{11}}} \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi \rangle + \frac{u_\varphi}{\sqrt{g_{22}}} \langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi \rangle \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \tilde{k}(\theta, \varphi, \tilde{u}, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} u_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} u_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \left(\frac{u_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{22}}} + 2u_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} + \frac{u_\varphi}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{22}^2 + \frac{u_\theta \sqrt{g_{22}}}{g_{11}} \right) \Gamma_{21}^2 \right).
\end{aligned}$$

Si $k(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}$, entonces $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \operatorname{grad}_{\mathcal{M}} u)$ viene dado por la expresión,

$$\begin{aligned}
& \frac{u_\theta}{g_{11}} \frac{p-2}{2} \left(\frac{u_\theta^2}{g_{11}} + \frac{u_\varphi^2}{g_{22}} \right)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{2u_\theta u_{\theta\theta}}{g_{11}} + u_\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{g_{11}} \right) + \frac{2u_\varphi u_{\varphi\theta}}{g_{22}} + u_\varphi^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{g_{22}} \right) \right) + \\
& + \frac{u_\varphi}{g_{22}} \frac{p-2}{2} \left(\frac{u_\theta^2}{g_{11}} + \frac{u_\varphi^2}{g_{22}} \right)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{2u_\theta u_{\theta\varphi}}{g_{11}} + u_\theta^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{g_{11}} \right) + \frac{2u_\varphi u_{\varphi\varphi}}{g_{22}} + u_\varphi^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{g_{22}} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{u_\theta^2}{g_{11}} + \frac{u_\varphi^2}{g_{22}} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{u_{\theta\theta}}{\sqrt{g_{11}}} + 2u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{u_\theta}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{11}^1 + \frac{u_\varphi \sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \Gamma_{12}^1 \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{u_\theta^2}{g_{11}} + \frac{u_\varphi^2}{g_{22}} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{u_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{22}}} + 2u_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{u_\varphi}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{22}^2 + \frac{u_\theta \sqrt{g_{22}}}{g_{11}} \Gamma_{21}^2 \right).
\end{aligned}$$

Si $p = 2$ se tiene la expresión local del operador de Laplace-Beltrami sobre \mathcal{M} ,

$$\Delta u = \frac{u_{\theta\theta}}{g_{11}} + 2u_\theta \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{u_\theta}{g_{11}} \Gamma_{11}^1 + \frac{u_\varphi}{g_{22}} \Gamma_{12}^1$$

$$+ \frac{u_{\varphi\varphi}}{g_{22}} + 2u_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{u_{\varphi}}{g_{22}} \Gamma_{22}^2 + \frac{u_{\theta}}{g_{11}} \Gamma_{21}^2$$

Ejemplos.

A. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left((u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{\frac{p-2}{2}} u_{x_i} \right).$$

B. Si $\mathcal{M} = S_R^2$ y $k(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= \frac{u_{\theta}}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \frac{p-2}{2} \left(\frac{u_{\theta}^2}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{u_{\varphi}^2}{R^2} \right)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{2u_{\theta} u_{\theta\theta}}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{2u_{\varphi} u_{\varphi\theta}}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right) \\ &+ \frac{u_{\varphi}}{R^2} \frac{p-2}{2} \left(\frac{u_{\theta}^2}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{u_{\varphi}^2}{R^2} \right)^{\frac{p-4}{2}} \left(\frac{2u_{\theta} u_{\theta\varphi}}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{2u_{\theta}^2 \cot \varphi}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{2u_{\varphi} u_{\varphi\varphi}}{R^2} \right) \\ &+ \frac{1}{R \operatorname{sen} \varphi} \left(\frac{u_{\theta}^2}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{u_{\varphi}^2}{R^2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{u_{\theta\theta}}{R \operatorname{sen} \varphi} + \frac{u_{\varphi} \cos \varphi}{R} \right) \\ &+ \frac{1}{R} \left(\frac{u_{\theta}^2}{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{u_{\varphi}^2}{R^2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{u_{\varphi\varphi}}{R} \right) \end{aligned}$$

Si $p = 2$, el operador de Laplace - Beltrami se expresa en las nuevas coordenadas como sigue,

$$\Delta u = \frac{1}{R \operatorname{sen} \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi u_{\varphi}}{R} \right) + \frac{1}{R \operatorname{sen} \varphi} u_{\theta\theta} \right).$$

Si se consideran temperaturas uniformes sobre cada paralelo, es decir, si u sólo depende de la latitud φ , los operadores anteriores pueden simplificarse a partir del cambio de variable $x = \cos \varphi$, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{si } k(x, u, \nabla u) &= |\nabla u|^{p-2} \quad \text{entonces } D = \operatorname{div} \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{p}{2}}}{R^p} |u_x|^{p-2} u_x \right), \\ \text{si } k(x, u, \nabla u) &= k(x) \quad \text{entonces } D = \operatorname{div} \left(\frac{k(x)(1-x^2)}{R^2} u_x \right). \end{aligned}$$

Se han obtenido así los operadores de difusión de los llamados modelos unidimensionales de tipo Budyko y tipo Sellers.

Una vez que hemos planteado los problemas sobre los que vamos a trabajar, presentaremos algunos espacios funcionales definidos sobre variedades para después determinar un espacio en el que buscaremos la solución del problema.

Con el fin de definir en \mathcal{M} un elemento de área y el concepto de integral, debemos dotar a \mathcal{M} de una orientación, y esto no es siempre posible. Si \mathcal{M} es una superficie regular, diremos que es *orientable* si es posible recubrirla por una familia de entornos coordenados de forma que si un punto \mathbf{p} pertenece a dos entornos de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en \mathbf{p} . Si se elige una tal familia se dice que \mathcal{M} es una *superficie orientada*. Si no es posible tal elección se dice que la superficie es no orientable. La condición \mathcal{M} superficie orientada es equivalente a la existencia de un campo diferenciable de vectores unitarios $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. De forma general, si \mathcal{M} es una variedad diferenciable se dice que es *orientable* si existe un atlas $(U_\lambda, \mathbf{u}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces la diferencial del cambio de coordenadas $\mathbf{u}_\alpha \circ \mathbf{u}_\beta^{-1}$ tiene determinante positivo en cada $\mathbf{p} \in U_\alpha \cap U_\beta$. Los ejemplos A y B son variedades diferenciables orientables.

En lo que sigue supondremos que:

($H_{\mathcal{M}}$) \mathcal{M} es una variedad Riemanniana bidimensional compacta orientada y sin borde.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ el espacio de las funciones $C^\infty(\mathcal{M})$ con soporte compacto en \mathcal{M} . En nuestro caso como \mathcal{M} es compacta, $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$.

Definición 4 Diremos que $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es $C^\infty(\mathcal{M})$ si $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{M}$ existe $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$ carta en $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ tal que $u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}$ está definida en un entorno de $\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{p})$ y es C^∞ en $\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{p})$, es decir su expresión local es C^∞ .

Definición 5 Diremos que $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible en \mathcal{M} si para cada carta $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$,

$$\begin{aligned} u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} : \mathbf{w}_\lambda(W_\lambda) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_\lambda, \varphi_\lambda) &\rightarrow u(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda)) \end{aligned}$$

es medible en $\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda) \subset \mathbb{R}^2$.

Para cada atlas $\{(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, con partición de la unidad $\{\alpha_\lambda\}$ subordinada al recubrimiento $\{W_\lambda\}$, la medida viene dada por la función de densidad

$$dA = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \sqrt{\det \mathbf{g}^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$$

donde $d\theta_\lambda d\varphi_\lambda$ es la densidad de la medida de Lebesgue en $\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda) \subset \mathbb{R}^2$ y \mathbf{g}^λ representa la forma cuadrática $g_{\mathbf{p}}$ definida en $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} \times T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ para cada $\mathbf{p} \in W_\lambda$.

Definición 6 $L^2(\mathcal{M})$ es el espacio de funciones $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ medibles en \mathcal{M} tales que $\int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA < +\infty$, i.e.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(w_\lambda)} \alpha_\lambda |u(w_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda))|^2 \sqrt{\det g^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda < +\infty.$$

En $L^2(\mathcal{M})$ se definen el producto interior y la norma usuales

$$(f, g)_{L^2(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} fg dA, \quad \|f\|_{L^2(\mathcal{M})} := (f, f)_{L^2(\mathcal{M})}^{\frac{1}{2}}.$$

$L^p(\mathcal{M})$ se define a partir de la densidad Riemanniana dA como el conjunto de funciones medibles en \mathcal{M} tales que

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^p dA < +\infty \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \text{ y}$$

$$\text{ess sup } |u| < +\infty \quad \text{si } p = \infty.$$

$(L^2(\mathcal{M}), (\cdot, \cdot))$ es así un espacio de Hilbert y $(L^p(\mathcal{M}), \|\cdot\|_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ un espacio de Banach.

$L^2(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) = L^2(T\mathcal{M})$ representa al espacio de Hilbert de los campos de vectores $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ dotado con el producto escalar de L^2 que induce g en $T_p\mathcal{M}$, i.e. dado $X = h_1 e_\theta + h_2 e_\varphi$ diremos que $X \in L^2(T\mathcal{M})$ si

$$\int_{\mathcal{M}} \langle X, X \rangle dA < +\infty.$$

Mencionamos a continuación algunos resultados básicos relacionados con estos espacios funcionales.

- a) *Desigualdad de Hölder para variedades*: sean $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ($p' = \infty$ si $p = 1$), $f \in L^p(\mathcal{M})$, $g \in L^{p'}(\mathcal{M})$, entonces

$$\int_{\mathcal{M}} |fg| dA \leq \|f\|_{L^p(\mathcal{M})} \|g\|_{L^{p'}(\mathcal{M})}.$$

- b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_{L^p(\mathcal{M})}}{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{p}}} = \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})}, \quad \forall f \in L^\infty(\mathcal{M}).$

Teniendo en cuenta que \mathcal{M} es compacta, se define $H^1(\mathcal{M})$ como el cierre de $C^\infty(\mathcal{M})$ para el producto interior

$$(f, h)_{H^1(\mathcal{M})} := (f, h)_{L^2(\mathcal{M})} + (\text{grad}_{\mathcal{M}}f, \text{grad}_{\mathcal{M}}h)_{L^2(T\mathcal{M})} =$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda f(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda)) h(\mathbf{w}_\lambda^{-1}(\theta_\lambda, \varphi_\lambda)) \sqrt{\det \mathbf{g}^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda g^\lambda(\text{grad}_{\mathcal{M}}f, \text{grad}_{\mathcal{M}}h) \sqrt{\det \mathbf{g}^\lambda} d\theta_\lambda d\varphi_\lambda \right\}.$$

Nótese que $u \in H^1(\mathcal{M})$ si y sólo si $u \in L^2(\mathcal{M})$ y $\text{grad}_{\mathcal{M}}u \in L^2(T\mathcal{M})$. Si $s \in \mathbb{N}$, $H^s(\mathcal{M})$ es el cierre de $C^\infty(\mathcal{M})$ con la norma

$$\|\cdot\|_{H^s(\mathcal{M})} = \left(\int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{1 \leq k \leq s} \sum_{i_j=1,2, j=1,\dots,k} |D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} u|^2 + |u|^2 \right) dA \right)^{\frac{1}{2}},$$

con $D_1 = D_{e_\theta}$, $D_2 = D_{e_\varphi}$ y $|D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} u|^2 = g(D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} u, D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} u)$, sin embargo $|u|$ representa el valor absoluto de un número real. Se define también $H^0(\mathcal{M}) = L^2(\mathcal{M})$. Finalmente si $s < 0$ ó $s \notin \mathbb{N}$, el espacio $H^s(\mathcal{M})$ se define por interpolación y dualidad, como en Lions - Magenes [1968].

Dado $m \in \mathbb{N}$, diremos que $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece al espacio $W^{m,p}(\mathcal{M})$ si u es medible en \mathcal{M} y

$$\|u\|_{m,p} := \left(\int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{i_j=1,2, j=1,\dots,k} |D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} u|^p + |u|^p \right) dA \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donde $D_1 = D_{e_\theta}$, $D_2 = D_{e_\varphi}$. Se demuestra (como en el caso en el que \mathcal{M} es un abierto de \mathbb{R}^n) que los espacios $H^s(\mathcal{M})$ son espacios de Hilbert y los espacios $W^{m,p}(\mathcal{M})$ son espacios de Banach. De nuevo $u \in W^{1,p}(\mathcal{M})$ si y sólo si $u \in L^p(\mathcal{M})$ y $\text{grad}_{\mathcal{M}}u \in L^p(T\mathcal{M})$.

Como veremos más tarde, los problemas que trataremos sugieren introducir el siguiente "espacio de energía"

$$V = \{u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, u \in L^2(\mathcal{M}), \nabla_{\mathcal{M}}u \in L^p(T\mathcal{M})\},$$

que es un espacio de Banach reflexivo si $1 < p < \infty$.

Un resultado técnico de gran utilidad es el que sigue

Teorema 1 *Sea \mathcal{M} una variedad Riemanniana bidimensional compacta. Entonces se tienen las siguientes inclusiones continuas:*

$$\text{si } p = 2, \quad V \hookrightarrow L^q(\mathcal{M}), \quad \forall q \in [2, \infty),$$

$$\text{si } p > 2, \quad V \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{M}). \quad \square$$

Aunque el resultado es bien conocido y se suele representar para espacios de Sobolev standard en vez de V : (véase Aubin [1982], pg. 44), detallaremos aquí la demostración pues se calcularán explícitamente ciertas constantes que serán de gran utilidad en cálculos posteriores.

Demostración.

Sea $\{W_\lambda\}$ un recubrimiento finito de \mathcal{M} , $\lambda = 1 \dots r$ con W_λ abierto de \mathcal{M} y sean (W_λ, w_λ) las cartas correspondientes. Consideramos $\{\alpha_\lambda\}$ partición de la unidad C^∞ subordinada a dicho recubrimiento. Entonces

$$\begin{aligned} f \in V &\iff \alpha_\lambda f \in V \quad \forall \lambda \\ &\iff \alpha_\lambda f \circ w_\lambda^{-1} \in L^2(w_\lambda(W_\lambda)) \text{ y } \nabla \alpha_\lambda f \circ w_\lambda^{-1} \in (L^p(w_\lambda(W_\lambda)))^2 \quad \forall \lambda. \end{aligned}$$

Extendiendo la última función por cero fuera de W_λ , y llamando de nuevo $\alpha_\lambda f \circ w_\lambda^{-1}$ a dicha extensión, se tiene que

$$\alpha_\lambda f \circ w_\lambda^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ y } \nabla \alpha_\lambda f \circ w_\lambda^{-1} \in (L^p(\mathbb{R}^2))^2 \quad \forall \lambda.$$

Por un argumento de densidad, bastará probar que existen unas constantes positivas C_λ tales que $\forall f \in C^\infty(\mathcal{M})$,

$$\|\alpha_\lambda f\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq C_\lambda (\|\alpha_\lambda f\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla \alpha_\lambda f\|_{L^p(\mathcal{T}\mathcal{M})}),$$

$\forall q \in [2, \infty)$ si $p = 2$ y $q = \infty$ si $p > 2$.

Es claro que sobre cada compacto $K_\lambda := \text{supp } \alpha_\lambda \subset W_\lambda$ el tensor de la métrica y sus derivadas de todos los órdenes están acotadas en el sistema de coordenadas $\{y_1^\lambda, y_2^\lambda\}$ asociado a la carta (W_λ, w_λ) . En particular, existen $\nu, \mu > 0$, $0 < \nu \leq \mu$ tales que $\forall X \in T_p \mathcal{M}$, $p \in W_\lambda$, con $X = \sum_{i=1}^2 X^i \frac{\partial}{\partial y_i}$ se tiene

$$\nu \|X\|^2 \leq g(X, X) \leq \mu \|X\|^2 \tag{I.5}$$

donde $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^2 (X^i)^2$. Vemos que (I.5) implica

$$\nu^2 \leq \det g \leq \mu^2, \tag{I.6}$$

y también

$$\frac{1}{\mu}\|X\|^2 \leq g^{-1}(X, X) \leq \frac{1}{\nu}\|X\|^2. \quad (I.7)$$

Utilizando que si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ tales inclusiones son continuas (ver Brezis [1983]).

Por tanto, existen unas constantes $k(q, p)$ tales que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq k(q, p) \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right). \quad (I.8)$$

Además

$$\|\alpha_\lambda f\|_{L^q(\mathcal{M})} = \left(\int_{W_\lambda} |\alpha_\lambda f|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^q \sqrt{g} dy_1 dy_2\right)^{\frac{1}{q}} \leq \quad (I.9)$$

$$\leq \mu^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (I.10)$$

Usando (I.8) la anterior expresión puede ser mayorada por

$$\begin{aligned} & \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \right) \leq \\ & \leq \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \left(\nu^{\frac{-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu |\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \right) \leq \\ & \leq \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \left(\nu^{\frac{-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2 \sqrt{g} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^p \sqrt{g} dx\right)^{\frac{1}{p}} \right). \end{aligned} \quad (I.11)$$

Ahora tenemos que relacionar $\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}$ con $\nabla_{\mathcal{M}} \alpha_\lambda f$, así como sus normas. Sabemos que la expresión de $\nabla_{\mathcal{M}} \alpha_\lambda f$ en el dominio W_λ viene dada por

$$\sum_{lk} g^{lk} \frac{\partial \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l},$$

es decir $\mathbf{M}_{g^{-1}} X$, donde $\mathbf{M}_{g^{-1}}$ es la matriz asociada a g^{-1} (que coincide con la matriz inversa de \mathbf{M}_g), X es el vector $\left(\frac{\partial \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial y_k}\right)_{k=1,2}$ (que coincide con $\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}$). Su norma al cuadrado viene dada por

$$g(\mathbf{M}_{g^{-1}} X, \mathbf{M}_{g^{-1}} X) = \mathbf{M}_{g^{-1}} X \mathbf{M}_g \mathbf{M}_{g^{-1}} X = X \mathbf{M}_{g^{-1}} X,$$

expresión acotada superior e inferiormente según (I.7). Introduciendo estos cálculos en (I.11) puede verse que (I.10) está mayorada por

$$\mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \left(\nu^{\frac{-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2 \sqrt{g} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu^{\frac{-p}{2}} |\nabla \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^p \sqrt{g} dx\right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \left(\nu^{-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}|^2 \sqrt{g} dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&+ \left. \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum g^{ik} \frac{\partial \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} \sum g^{lk} \frac{\partial \alpha_\lambda f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} \right| \sqrt{g} dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \max\{\nu^{\frac{-1}{2}}, \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}}\} \left(\left(\int_{\mathcal{M}} |\alpha_\lambda f|^2 dA \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathcal{M}} |\nabla \alpha_\lambda f|^p dA \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \\
&= \mu^{\frac{1}{q}} k(q, p) \max\{\nu^{\frac{-1}{2}}, \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}}\} \|\alpha_\lambda f\|_V.
\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que si $p > 2$,

$$\|\alpha_\lambda f\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq k(\infty, p) \max\{\nu^{\frac{-1}{2}}, \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}}\} \|\alpha_\lambda f\|_V.$$

De este modo hemos obtenido:

$$\begin{aligned}
C_\lambda &= \mu^{\frac{1}{q}} k(q, 2) \nu^{\frac{-1}{2}} \max\{1, \mu^{\frac{1}{2}}\} \quad \text{si } p = 2, \\
C_\lambda &= k(\infty, p) \max\{\nu^{\frac{-1}{2}}, \nu^{\frac{-1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}}\} \quad \text{si } p > 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando que $|\nabla \alpha_\lambda f| \leq |\nabla f| + |f| |\nabla \alpha_\lambda|$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q(\mathcal{M})} &\leq \sum_{\lambda=1}^r \|\alpha_\lambda f\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq \sum_{\lambda=1}^r C_\lambda (\|\alpha_\lambda f\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla \alpha_\lambda f\|_{L^p(\mathcal{T}\mathcal{M})}) \leq \\
&\leq r \sup_{1 \leq \lambda \leq r} C_\lambda (\|f\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathcal{T}\mathcal{M})} + \sup |\nabla \alpha_\lambda| \|f\|_{L^p(\mathcal{M})}). \quad (\text{I.12})
\end{aligned}$$

Distinguiamos los casos $p = 2$ y $p > 2$. Pues si $p = 2$ se tiene que las constantes de continuidad vienen dadas por la fórmula

$$C := (r \sup_{1 \leq \lambda \leq r} C_\lambda) (1 + \sup |\nabla \alpha_\lambda|), \quad (\text{I.13})$$

y llamando de nuevo μ y ν a los coeficientes que hacen que C_λ alcance su valor máximo, las constantes de continuidad vienen dadas por

$$C_{1,2,q} = \mu^{\frac{1}{q}} k(q, 2, r) \nu^{\frac{-1}{2}} \max\{1, \mu^{\frac{1}{2}}\} (1 + \sup |\nabla \alpha_\lambda|) \quad \text{si } p = 2. \quad (\text{I.14})$$

Consideremos ahora $p > 2$, en este caso se tiene (I.12) para $q = \infty$ y en particular $f \in H^1(\mathcal{M})$ y como $H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^p(\mathcal{M})$ con inclusión continua, existe una constante positiva calculada en (I.14) para $q = p$ que verifica

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mathcal{M})} &\leq C_{1,2,p} (\|f\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{T}\mathcal{M})}) \leq \\
&\leq C_{1,2,p} (\|f\|_{L^2(\mathcal{M})} + |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2p}} \|\nabla f\|_{L^p(\mathcal{T}\mathcal{M})}) \quad (\text{I.15})
\end{aligned}$$

y sustituyendo (I.15) en (I.12) se tiene que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq r \sup_{1 \leq \lambda \leq r} C_\lambda (1 + C_{1,2,p} \sup |\nabla \alpha_\lambda|) \max\{1, |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2p}}\} \|f\|_V.$$

Procediendo como en el caso anterior, se tiene que la constante de continuidad para la inclusión $V \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{M})$ con $p > 2$ viene dada por

$$C_{1,p,\infty} = k(p,r) \max\{\nu^{-\frac{1}{2}}, \nu^{-\frac{1}{p}} \mu^{\frac{1}{2}}\} (1 + C_{1,2,p} \sup |\nabla \alpha_\lambda|) \max\{1, |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2p}}\}. \quad (\text{I.16})$$

También se podría expresar (pues así lo necesitaremos más adelante) como

$$\|f\|_{L^q(\mathcal{M})}^2 \leq \tilde{C}_{1,2,q} (\|\nabla f\|_{L^2(T\mathcal{M})}^2 + \|f\|_{L^2(\mathcal{M})}^2) \quad (\text{I.17})$$

$$\|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p \leq \tilde{C}_{1,\infty,p} (\|\nabla f\|_{L^p(T\mathcal{M})}^p + \|f\|_{L^2(\mathcal{M})}^p), \quad (\text{I.18})$$

donde $\tilde{C}_{1,2,q} = 2C_{1,2,q}^2$ y $\tilde{C}_{1,\infty,p} = 2^{p-1}C_{1,\infty,p}^p$, es decir,

$$\tilde{C}_{1,2,q} = 2\mu^{\frac{2}{q}} k(q, 2, r)^2 \nu^{-1} \max\{1, \mu\} (1 + \sup |\nabla \alpha_\lambda|)^2 \quad (\text{I.19})$$

$$\tilde{C}_{1,p,\infty} = 2^{p-1} k(p, r)^p \max\{\nu^{-\frac{p}{2}}, \nu^{-1} \mu^{\frac{p}{2}}\} (1 + C_{1,2,p} \sup |\nabla \alpha_\lambda|)^p \max\{1, |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2}}\}, \quad (\text{I.20})$$

y $C_{1,2,p}$ dada en (I.14). ■

Utilizando la hipótesis de compacidad sobre \mathcal{M} es posible extender sin dificultad al caso de variedades los resultados conocidos de inclusión compacta para el caso de abiertos.

Teorema 2 *Si $2 \leq p < \infty$ y $V = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \text{grad}_{\mathcal{M}} u \in L^p(T\mathcal{M})\}$ entonces la inclusión $V \subset L^2(\mathcal{M})$ es compacta. □*

3 Existencia de solución para el problema (P) .

La posible discontinuidad de la función coalbedo hace que el modelo no tenga (en general) soluciones clásicas. Se introduce por ello el concepto de solución débil, a partir de la definición del “espacio de energía” V .

3.1 Enunciado del Teorema de existencia

Se considera el problema

$$(P) \begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f & \text{en } (0, T) \times \mathcal{M} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M} \end{cases} \quad (I.21)$$

que es el caso particular de la formulación del problema (P^*) de la sección 1 de mayor relevancia. Las hipótesis estructurales que supondremos tras la descripción realizada en la sección 1, serán las siguientes:

- $(H_{\mathcal{M}})$ \mathcal{M} es una variedad Riemanniana orientada compacta conexa sin borde,
- (H_{β}) β es un grafo maximal monótono acotado en \mathbb{R}^2 ,
- $(H_{\mathcal{G}})$ $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente tal que $\mathcal{G}(0) = 0$, y $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$ para algún $r \geq 1$,
- (H_p) $p \geq 2$,
- (H_s) $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $S \in L^\infty(\mathcal{M})$, $s_1 \geq S(x) > s_0 > 0 \forall x \in \mathcal{M}$,
- (H_f) $f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$, $\forall T > 0$,
- (H_Q) $Q > 0$,
- (H_{∇}) los operadores gradiente y divergencia son entendidos en el sentido de la métrica Riemanniana.

Definición de solución débil acotada de (P) .

Diremos que $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *solución débil acotada de (P)* si

- i) $u \in C([0, T]; L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty((0, T) \times \mathcal{M}) \cap L^p(0, T; V)$

ii) existe $z \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ con $z(t, x) \in \beta(u(t, x)) \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} u(T, x)v(T, x)dA - \int_0^T \langle v_t(t, x), u(t, x) \rangle_{V' \times V} dt + \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle dAdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)v dAdt = \\ & = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} Q_S(x)z(t, x)v dAdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} f v dAdt + \int_{\mathcal{M}} u_0(x)v(0, x)dA \\ & \forall v \in L^p(0, T; V) \cap L^\infty((0, T) \times \mathcal{M}) \text{ tal que } v_t \in L^{p'}(0, T; V'), \end{aligned}$$

donde $\langle, \rangle_{V' \times V}$ denota el producto de dualidad en $V' \times V$ (que no debemos confundir con el producto escalar \langle, \rangle sobre $T_p \mathcal{M}$).

El objeto de esta sección es probar el siguiente resultado

Teorema 3 *Dado $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ existe al menos una solución débil acotada de (P). Además, la solución u de (P) se puede prolongar a $[0, \infty) \times \mathcal{M}$ de manera que $u \in C([0, \infty), L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M}) \cap L^p_{loc}((0, \infty); V)$. Finalmente si $u_0 \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$ y $f \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M}) \cap W^{1,1}_{loc}((0, \infty); L^1(\mathcal{M}))$ con*

$$\int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s, \cdot) \right\|_{L^1(\mathcal{M})} ds \leq C_0 \quad \forall t > 0 \text{ con } C_0 \text{ independiente de } t,$$

entonces se tiene la regularidad adicional $u \in L^\infty((0, \infty); V)$. \square

Como en el caso del modelo unidimensional (Díaz [1993]), seguiremos las técnicas de Díaz-Vrabie [1987] (basadas en argumentos de punto fijo) que son especialmente útiles para ecuaciones no monótonas eventualmente multívocas.

3.2 El operador A . Propiedades. Un principio de comparación.

Definimos el siguiente operador A dado por

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow L^2(\mathcal{M}) \\ u & \longrightarrow -\Delta_p u + \mathcal{G}(u), \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde $D(A) = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : -\Delta_p u + \mathcal{G}(u) \in L^2(\mathcal{M})\}$. Veremos en primer lugar que el operador A es m -acretivo en $L^2(\mathcal{M})$. Siguiendo a Brezis [1973] (véase también Benilan [1981], Barbu [1976] o Vrabie [1987]) recordamos aquí, nociones y resultados relativos a operadores m -acretivos.

Sea X un espacio de Banach,

Definición 7 Un operador $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$ es *acretivo* si $[x - \tilde{x}, y - \tilde{y}]_+ \geq 0$ para cada $x, \tilde{x} \in D(A)$, $y \in Ax$, $\tilde{y} \in A\tilde{x}$ y donde $[\cdot, \cdot]_+$ es el producto semi-interior superior normalizado dado por

$$[a, b]_+ := \lim_{h \searrow 0} [a, b]_h$$

con

$$[a, b]_h := \frac{1}{h} (\|a + hb\| - \|a\|), \quad h \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Definición 8 Un operador $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$ es *T-acretivo* si

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (\|(x - \tilde{x} + h(y - \tilde{y}))^+\| - \|(x - \tilde{x})^+\|) \geq 0$$

para cada $x, \tilde{x} \in D(A)$, $y \in Ax$, $\tilde{y} \in A\tilde{x}$, donde w^+ denota la parte positiva de $w \in X$ (igual a 0 si $w < 0$ e igual a w si $w \geq 0$).

Definición 9 Un operador $A : D(A) \subset X \rightarrow 2^X$ es *m-acretivo* si

i) A es acretivo, y

ii) $R(I + \lambda A) = X \quad \forall \lambda > 0$.

Una subclase, de gran interés, de los operadores m-acretivos es la obtenida a través de la noción de subdiferencial de una función convexa.

Definición 10 Una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *convexa* si

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y) \quad \forall x, y \in X \text{ y } \forall \lambda \in (0, 1). \quad (1.23)$$

Definición 11 Una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *propia* si no es idénticamente $+\infty$, i.e. si $D(\phi) := \{x \in X : \phi(x) < \infty\}$ no es el vacío.

Definición 12 Una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *semicontinua inferiormente* en X si

$$\liminf_{y \rightarrow x} \phi(y) \geq \phi(x) \quad \forall x \in X.$$

Proposición 1 (Brezis [1973]) Sea $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia y convexa. Entonces ϕ es s.c.i. fuerte si y solo si ϕ es s.c.i. débil.

Definición 13 Sea ϕ propia y convexa en $x \in X$: La subdiferencial de ϕ en el punto x es el conjunto

$$\partial\phi(x) := \{x' \in X' : \phi(x) \leq \phi(y) + \langle x - y, x' \rangle \quad \forall y \in X\}$$

donde X' es el espacio dual de X y $\langle, \rangle_{X' \times X}$ es el producto de dualidad correspondiente. Cada elemento $x' \in \partial\phi(x)$ es llamado subgradiente de ϕ en x .

Si suponemos $X = H$ un espacio de Hilbert, se tiene

Teorema 4 (Brezis [1973]) Si ϕ es propia, s.c.i. y convexa entonces $D(\partial\phi) := \{x \in H : \partial\phi(x) \neq \emptyset\}$ es denso en $D(\phi)$.

Observación 1 Es bien conocido que si ϕ es diferenciable en el sentido de Gateaux en $x \in X$, entonces el conjunto $\partial\phi(x)$ es univaluado (tiene un solo elemento) y coincide con la diferencial de Gateaux de ϕ en x .

Teorema 5 (Brezis[1973]) Sea $\phi : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa y s.c.i. entonces su subdiferencial $\partial\phi : D(\partial\phi) \subset H \rightarrow 2^H$ es un operador m -acretivo en H .

Con el fin de aplicar resultados de la teoría abstracta al problema (P) necesitaremos la siguiente

Proposición 2 Sea el funcional $\phi : D(\phi) \subset L^2(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA + \int_{\mathcal{M}} G(u) dA & u \in D(\phi) \\ +\infty & u \notin D(\phi) \end{cases} \quad (1.24)$$

donde $G(u) = \int_0^u \mathcal{G}(\sigma) d\sigma$ y

$$D(\phi) := \{u \in L^2(\mathcal{M}), \nabla u \in L^p(T\mathcal{M}) \text{ y } \int_{\mathcal{M}} G(u) dA < +\infty\}.$$

Entonces

- i) ϕ es propio, convexo y semicontinuo inferiormente en $L^2(\mathcal{M})$.
- ii) $A = \partial\phi$ con A dado por (1.22) y $\overline{D(A)} = L^2(\mathcal{M})$.

iii) A genera un semigrupo compacto de contracciones $S(t)$ sobre $L^2(\mathcal{M})$ para $t \in (0, T)$.

Demostración.

i.1) El funcional ϕ es propio. En efecto, $\phi \not\equiv +\infty$, pues $\phi(0) = 0 < +\infty$.

i.2) ϕ es convexo. En efecto, si $u, v \in D(\phi)$ entonces

$$\begin{aligned} \phi(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} |\lambda \nabla u + (1-\lambda) \nabla v|^p dA + \int_{\mathcal{M}} G(\lambda u + (1-\lambda)v) dA = \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbf{w}_i(W_i)} \alpha_i \left| \lambda \sum_{l,k} g^{lk} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_i^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} + (1-\lambda) \sum_{l,k} g^{lk} \frac{\partial v \circ \mathbf{w}_i^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} \right|^p \sqrt{g^i} d\theta_i d\varphi_i \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_{\mathbf{w}_i(W_i)} \alpha_i G(\lambda u \circ \mathbf{w}_i^{-1} + (1-\lambda)v \circ \mathbf{w}_i^{-1}) \sqrt{g^i} d\theta_i d\varphi_i. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Es claro que las potencias $|\cdot|^p$, con $p \geq 1$, son funciones convexas y G es no negativa y convexa por ser la primitiva de una función g no decreciente que toma el valor cero en el cero. Así, podemos mayorar la expresión (1.25) por

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbf{w}_i(W_i)} \alpha_i \left(\lambda \left| \sum_{l,k} g^{lk} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_i^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} \right|^p + (1-\lambda) \left| \sum_{l,k} g^{lk} \frac{\partial v \circ \mathbf{w}_i^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} \right|^p \right) \sqrt{g^i} + \\ &\quad + \sum_{i \in I} \int_{\mathbf{w}_i(W_i)} \alpha_i (\lambda G(u \circ \mathbf{w}_i^{-1}) + (1-\lambda) G(v \circ \mathbf{w}_i^{-1})) \sqrt{g^i} d\theta_i d\varphi_i \end{aligned}$$

que por la definición de integral sobre una variedad Riemanniana es igual a

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p} \lambda \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA + \frac{1}{p} (1-\lambda) \int_{\mathcal{M}} |\nabla v|^p dA + \\ &\quad + \lambda \int_{\mathcal{M}} G(u) dA + (1-\lambda) \int_{\mathcal{M}} G(v) dA = \\ &= \lambda \phi(u) + (1-\lambda) \phi(v). \end{aligned}$$

Si $u \notin D(\phi)$ ó $v \notin D(\phi)$, entonces se tiene trivialmente que

$$\phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq +\infty = \lambda \phi(u) + (1-\lambda) \phi(v).$$

i.3) ϕ es semicontinua inferiormente. Consideremos una sucesión $\{u_n\} \subset L^2(\mathcal{M})$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $L^2(\mathcal{M})$ y veamos que

$$\phi(u) \leq \liminf_{u_n \rightarrow u} \phi(u_n).$$

- Si $\liminf \phi(u_n) = +\infty$ el resultado es obvio.
- Si $\liminf \phi(u_n) < +\infty$, expresamos $\phi(u)$ como $\phi_1(u) + \phi_2(u)$ donde

$$\phi_1(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA \quad \text{y} \quad \phi_2(u) = \int_{\mathcal{M}} G(u) dA.$$

Sabiendo que la suma de funciones s.c.i. es una función s.c.i. bastará ver que ϕ_1 y ϕ_2 lo son. Los funcionales ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ son no negativos, por tanto existe $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$ tal que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left[\frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_n|^p dA + \int_{\mathcal{M}} G(u_n) dA \right] < +\infty$$

y existe una subsucesión u_{n_k} tal que $\phi(u_{n_k}) \rightarrow \gamma$ y por tanto

$$\phi_1(u_{n_k}) \leq C_1, \quad \phi_2(u_{n_k}) \leq C_1 \quad \forall n_k \quad (1.26)$$

con C_1 constante positiva adecuada. Usando que $u_{n_k} \rightarrow u$ fuerte en $L^2(\mathcal{M})$ y las acotaciones de (1.26) obtenemos una estimación de u_{n_k} en la norma del espacio V ,

$$\|u_{n_k}\|_V \leq C_2. \quad (1.27)$$

Por ser V un espacio de Banach reflexivo, de la estimación anterior se deduce la existencia de $\xi \in V$ y de una subsucesión de u_{n_k} tales que

$$u_{n_{k_j}} \rightharpoonup \xi \text{ débil en } V.$$

Por la inclusión compacta $V \subset L^2(\mathcal{M})$ (véase el Teorema 1) y la unicidad del límite tenemos que $\xi = u$. Finalmente, por las propiedades de límite débil se obtiene que

$$\|u\|_V \leq \liminf \|u_{n_{k_j}}\|_V,$$

es decir,

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})} \leq \liminf \left(\|u_{n_{k_j}}\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|\nabla u_{n_{k_j}}\|_{L^p(T\mathcal{M})} \right)$$

y como $\|u\|_{L^2(\mathcal{M})} = \lim \|u_{n_{k_j}}\|_{L^2(\mathcal{M})}$, entonces

$$\|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})} \leq \liminf \|\nabla u_{n_{k_j}}\|_{L^p(T\mathcal{M})}$$

con lo que

$$\phi_1(u) \leq \liminf \phi_1(u_{n_{k_j}}).$$

Por otro lado, ϕ_2 es continua por serlo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, luego $\phi_2(u) \leq \liminf \phi_2(u_{nkji})$ para toda u_{nkji} subsucesión de u_{nkj} . Se concluye que

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \phi_1(u) + \phi_2(u) \leq \liminf \{ \phi_1(u_{nkji}) + \phi_2(u_{nkji}) \} = \\ &= \liminf \phi(u_{nkji}) = \liminf \phi(u_n). \end{aligned}$$

ii) ϕ es diferenciable en el sentido de Gateaux, veamos que su diferencial coincide con el operador A

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} (|\nabla u + \lambda \nabla v|^p + G(u + \lambda v)) dA - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} (|\nabla u|^p + G(u)) dA}{\lambda} = \\ \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} \frac{|\nabla u + \lambda \nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\lambda} dA + \int_{\mathcal{M}} \frac{G(u + \lambda v) - G(u)}{\lambda} dA. \quad (1.28) \end{aligned}$$

Podemos intercambiar el orden de las operaciones integral y límite gracias al Teorema de la Convergencia Dominada. Justificamos el paso siguiente verificando las hipótesis de dicho Teorema:

1. convergencia en casi todo punto cuando $\lambda \rightarrow 0$,
2. existencia de una función $h \in L^1(\mathcal{M})$ cota superior del integrando.

Como $p \geq 2$,

$$\left| \frac{|\nabla u + \lambda \nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\lambda} \right| \leq C \left| \frac{|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\lambda|^{p-2} \lambda |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla u - \lambda \nabla v}{\lambda} \right|$$

$$= C \left| \lambda^{p-2} \lambda |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + |\lambda|^{p-2} |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla v, \nabla u \rangle \right| \leq$$

puesto que $0 < \lambda < 1$

$$\leq |\nabla v|^p + |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| + |\nabla v|^{p-1} |\nabla u|$$

que es una función de $L^1(\mathcal{M})$. En efecto, como $u, v \in V$ se tiene que

$$|\nabla u|^p \in L^1(\mathcal{M}),$$

$$|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathcal{M}) = L^{p'}(\mathcal{M}).$$

Entonces

$$|\nabla u|^{p-1} \nabla v \in L^1(\mathcal{M})$$

y análogamente,

$$|\nabla v|^{p-1} \nabla u \in L^1(\mathcal{M}).$$

Repetiendo el argumento para $\frac{G(u+\lambda v)-G(u)}{\lambda}$ podemos mayorar la expresión (1.28) por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{|\nabla u + \lambda \nabla v|^p - |\nabla u|^p}{\lambda} dA + \int_{\mathcal{M}} \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{G(u + \lambda v) - G(u)}{\lambda} dA = \\ & = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u) v dA. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\langle \partial\phi(u), v \rangle_{V' \times V} = \langle Au, v \rangle_{V' \times V}$. El hecho de que $\overline{D(A)} = L^2(\mathcal{M})$ se muestra como en Díaz[1983].

- iii) Todo operador m -acretivo en $L^2(\mathcal{M})$ genera un semigrupo de contracciones $S(t) : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ con $t \in [0, T]$ (Brezis [1973]). En nuestro caso este semigrupo es además compacto. Para comprobarlo, según Vrabie [1987] (Proposición 2.2.2, pg. 57), basta probar que el conjunto $B := \{w \in L^2(\mathcal{M}) : \|w\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \phi(w) \leq k\}$ es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$, lo que prueba la afirmación. Es claro que el conjunto B es un acotado de V . Además por la inclusión compacta $V \subset L^2(\mathcal{M})$, B es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$. ■

Veamos un principio de comparación para el operador A definido en 1.22. Más en general trabajaremos con la realización del operador A como operador de $W^{1,p}(\mathcal{M})$ en $L^{p'}(\mathcal{M})$. Sea W un atlas de \mathcal{M} , $W = \{(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ y $g^\lambda = (g_{ij}^\lambda)$ la métrica Riemanniana en W_λ .

Proposición 3 (*Principio débil de comparación*).

Sea $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Sean $f, \tilde{f} \in L^2(\mathcal{M})$ tales que $f \leq \tilde{f}$ y sean $u, \tilde{u} \in D(A)$ con $\mathcal{G}(u), \mathcal{G}(\tilde{u}) \in L^2(\mathcal{M})$ soluciones débiles de las ecuaciones

$$\begin{aligned} (P_f) \quad & -\Delta_p u + \mathcal{G}(u) = f \\ (P_{\tilde{f}}) \quad & -\Delta_p \tilde{u} + \mathcal{G}(\tilde{u}) = \tilde{f}. \end{aligned}$$

Entonces $u \leq \tilde{u}$ en \mathcal{M} . De hecho, si f y \tilde{f} son arbitrarias en $L^2(\mathcal{M})$ y si se reemplaza $\mathcal{G}(u)$ por $\mathcal{G}(u) + u$ se tiene que

$$\|(u - \tilde{u})^+\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \|(f - \tilde{f})^+\|_{L^2(\mathcal{M})},$$

e.d. el operador $\Delta_p u + \mathcal{G}(u)$ es T -acretivo en $L^2(\mathcal{M})$.

Para probar este principio necesitaremos el siguiente

Lema 3 Sean $u, \tilde{u} \in W^{1,p}(\mathcal{M})$ entonces $(u - \tilde{u})^+ \in W^{1,p}(\mathcal{M})$.

Demostración del Lema 3. Es obvio que

$$u - \tilde{u} \in L^p(\mathcal{M}) \quad \nabla_{\mathcal{M}}(u - \tilde{u}) \in L^p(T\mathcal{M}). \quad (1.29)$$

Además

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} |(u - \tilde{u})^+|^p dA &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda |(u \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ w_\lambda^{-1})^+|^p \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi \leq \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda |u \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ w_\lambda^{-1}|^p \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi = \int_{\mathcal{M}} |u - \tilde{u}|^p dA < \infty. \end{aligned}$$

Por un resultado de Stampacchia (véase por ejemplo Brezis [1983]) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}}(u - \tilde{u})^+|^p dA &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda \left| \sum_{i,k} g^{ik} \frac{\partial(u \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ w_\lambda^{-1})^+}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_i} \right|^p \sqrt{g^\lambda} \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda \left| \sum_{i,k} g^{ik} \frac{\partial(u \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ w_\lambda^{-1})}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_i} \right|^p \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi = \\ &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}}(u - \tilde{u})|^p dA < \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Demostración de la Proposición 3.

Se consideran las formulaciones débiles de (P_f) y $(P_{\tilde{f}})$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u, \nabla_{\mathcal{M}} v \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u) v dA = \int_{\mathcal{M}} f v dA \quad \forall v \in W^{1,p}(\mathcal{M}),$$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}, \nabla_{\mathcal{M}} v \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(\tilde{u}) v dA = \int_{\mathcal{M}} \tilde{f} v dA \quad \forall v \in W^{1,p}(\mathcal{M}).$$

Tomando $v = (u - \tilde{u})^+$ y restando las expresiones anteriores resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u - |\nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}, \nabla_{\mathcal{M}}(u - \tilde{u})^+ \rangle dA + \\ + \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(\tilde{u}))(u - \tilde{u})^+ dA = \\ = \int_{\mathcal{M}} (f - \tilde{f})(u - \tilde{u})^+ dA. \end{aligned}$$

Sabemos que $\nabla u = h_1 \mathbf{e}_\theta + h_2 \mathbf{e}_\varphi$ y $\nabla \tilde{u} = \tilde{h}_1 \mathbf{e}_\theta + \tilde{h}_2 \mathbf{e}_\varphi$ con

$$\begin{aligned} h_1 = h_1(\theta, \varphi) &= g^{11} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \theta} + g^{12} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \varphi}, \\ h_2 = h_2(\theta, \varphi) &= g^{21} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \theta} + g^{22} \frac{\partial u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \varphi}, \\ \tilde{h}_1 = \tilde{h}_1(\theta, \varphi) &= g^{11} \frac{\partial \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \theta} + g^{12} \frac{\partial \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \varphi}, \\ \tilde{h}_2 = \tilde{h}_2(\theta, \varphi) &= g^{21} \frac{\partial \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \theta} + g^{22} \frac{\partial \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

donde $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ es la base de $T_p \mathcal{M}$ dada por la carta $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$, i.e. $\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Entonces

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda (|h_1 \mathbf{e}_\theta + h_2 \mathbf{e}_\varphi|^{p-2} (h_1 \mathbf{e}_\theta + h_2 \mathbf{e}_\varphi) - |\tilde{h}_1 \mathbf{e}_\theta + \tilde{h}_2 \mathbf{e}_\varphi|^{p-2} (\tilde{h}_1 \mathbf{e}_\theta + \tilde{h}_2 \mathbf{e}_\varphi)) \\ &\quad (H_1^+ \mathbf{e}_\theta + H_2^+ \mathbf{e}_\varphi) \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi + \\ &+ \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda (\mathcal{G}(u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}) - \mathcal{G}(\tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})) (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+ \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbf{w}_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda (f \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{f} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}) (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+ \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H_1^+ = H_1^+(\theta, \varphi) &= g^{11} \frac{\partial (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+}{\partial \theta} + g^{12} \frac{\partial (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+}{\partial \varphi}, \\ H_2^+ = H_2^+(\theta, \varphi) &= g^{21} \frac{\partial (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+}{\partial \theta} + g^{22} \frac{\partial (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Definamos $B(\theta, \varphi) := (\mathcal{G}(u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}) - \mathcal{G}(\tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})) (u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+$. Se tiene que $B(\theta, \varphi) \geq 0$ pues si $(u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+ = 0$, entonces claramente $B(\theta, \varphi) = 0$. Si $(u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1})^+ > 0$, entonces como \mathcal{G} es estrictamente creciente,

$$\mathcal{G}(u \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}) - \mathcal{G}(\tilde{u} \circ \mathbf{w}_\lambda^{-1}) > 0$$

y de nuevo se obtiene la conclusión $B(\theta, \varphi) \geq 0$.

Por último, utilizando el hecho de que $\alpha_\lambda \geq 0$ y $\sqrt{\det g^\lambda} \geq 0$ y la coercividad del operador A (Lema 2 de la sección 1) tenemos que

$$C \int_{\mathcal{M}} |\nabla(u - \tilde{u})^+|^p dA \leq$$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u - |\nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} \tilde{u}, \nabla_{\mathcal{M}}(u - \tilde{u})^+ \rangle dA \leq$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{w_\lambda(W_\lambda)} \alpha_\lambda (f \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{f} \circ w_\lambda^{-1})(u \circ w_\lambda^{-1} - \tilde{u} \circ w_\lambda^{-1})^+ \sqrt{\det g^\lambda} d\theta d\varphi \leq 0.$$

Luego $(u - \tilde{u})^+$ es una constante no negativa sobre \mathcal{M} . Como \mathcal{G} es estrictamente creciente se tiene que si la constante no es nula entonces $0 < B(\theta, \varphi) \leq 0$ lo que es absurdo. Así, $u \leq \tilde{u}$ en \mathcal{M} . El resto del enunciado es estandar. ■

3.3 Funciones multivaluadas. Un teorema de punto fijo.

Definición 14 Sea X un espacio de Banach y Ω un conjunto medible de \mathbb{R}^n . Diremos que $F : \Omega \mapsto 2^X$ es medible si para cada cerrado $C \subset X$ se tiene que $F^{-1}(C) := \{y \in \Omega : F(y) \cap C \neq \emptyset\}$ es medible Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Definición 15 Sea U un espacio topológico. Diremos que $F : U \mapsto 2^X$ es continua (o débilmente continua) en $u \in U$ si

- i) $F(u)$ es no vacío, acotado, cerrado y convexo.
- ii) Para cada abierto (o abierto débil) $D \subset X$ tal que $F(u) \subset D$ existe un entorno V de u tal que $F(v) \subset D \forall v \in V$.

El Teorema de punto fijo que deseamos aplicar es una variante del Teorema de Schauder-Tychonoff que enunciamos según Vrabie [1987] pg. 9, como sigue:

Teorema 6 (Arino, Gautier, Penot [1984])

Sea X un espacio de Banach,

- i) $K \subset X$ no vacío, convexo y débilmente compacto.
- ii) $\mathcal{L} : K \rightarrow 2^X$ con valores distintos del vacío, convexos y cerrados, tales que $\mathcal{L}(u) \subset K \forall u \in K$.

Si $\text{graf}(\mathcal{L})$ es secuencialmente débil \times débil cerrado, entonces \mathcal{L} tiene al menos un punto fijo en K , i.e.

$$\exists u \in K \text{ tal que } u \in \mathcal{L}(u).$$

3.4 Demostración de la existencia de solución.

Se considera el problema de Cauchy asociado al operador A dado por (1.22)

$$(P_h) \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni h(t) & t \in (0, T), \text{ en } X = L^2(\mathcal{M}) \\ u(0) = u_0, & u_0 \in L^2(\mathcal{M}). \end{cases}$$

Las propiedades del operador A dadas en la Proposición 2 y los resultados abstractos de Brezis [1973] garantizan que (P_h) tiene una única solución (en sentido de semigrupos) en $C([0, T]; L^2(\mathcal{M}))$ para cada $h \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))$. Además u es solución débil en sentido de distribuciones y verifica

$$u \in L^p((0, T); V), \quad \sqrt{t}u_t \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M})), \quad u \in W^{1,2}((\delta, T); L^2(\mathcal{M})),$$

$0 < \delta < T$. Como β está acotada es claro que si partimos de $u \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ entonces siempre existe $h \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ con

$$h \in QS\beta(u) + f \quad \text{a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M}.$$

El problema de la existencia de solución de (P) se reduce pues a demostrar que cierto operador \mathcal{L} tiene al menos un punto fijo. Sea $Y = L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$. Definiremos $\mathcal{L} : K \rightarrow 2^{L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))}$ por el siguiente proceso. En primer lugar se define

$$K = \{z \in L^p((0, T); L^\infty(\mathcal{M})) : \|z(t)\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq C_0 \text{ } \forall t \in (0, T)\}$$

con C_0 a precisar más tarde.

Comprobemos que K verifica las hipótesis del Teorema 6.

i) Obviamente, K es no vacío. K es convexo; en efecto, basta utilizar la desigualdad triangular para la norma de $L^\infty(\mathcal{M})$. K es débilmente compacto en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ pues por ser $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ reflexivo, basta ver que K es acotado en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ y débilmente cerrado, lo que es sencillo de comprobar. En efecto, utilizando la inclusión continua $L^\infty(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M})$, se tiene que

$$\|z(t)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C\|z(t)\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq CC_0 = C_1 \text{ } \forall t \in (0, T).$$

Tomando supremos esenciales a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\|z(t)\|_{L^\infty((0, T); L^2(\mathcal{M}))} \leq C\|z(t)\|_{L^\infty((0, T); L^\infty(\mathcal{M}))} \leq C_1,$$

y por la inclusión continua $L^\infty((0, T); L^2(\mathcal{M})) \subset L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$, resulta

$$\|z(t)\|_{L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))} \leq C_2 \quad \forall z \in K.$$

K es débilmente cerrado, pues si z es un punto de acumulación de K existe una sucesión de $\{z_n\}$ de elementos de K tal que $z_n \rightharpoonup z$ en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$. Entonces, para casi todo $t \in (0, T)$

$$z_{nk}(t) \rightarrow z(t) \text{ en } L^q(\mathcal{M}) \quad \forall q \in (1, \infty),$$

y como

$$\|z\|_{L^\infty(\mathcal{M})} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|z\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq C_0,$$

se obtiene que $z \in K$.

A continuación, fijado $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, definimos el *operador solución* (u operador de Green generalizado)

$$\begin{aligned} I_0 : K &\rightarrow C([0, T]; L^2(\mathcal{M})) \\ z &\rightarrow v \end{aligned}$$

donde v es la solución de (P_h) asociada a $h \equiv z$. Este operador está bien definido pues por ser A un operador m -acretivo e.d. $\forall z \in L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ existe una única solución en $C([0, T]; L^2(\mathcal{M}))$ (recordemos que $K \subset L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$).

Dado $f \in L^2(\mathcal{M})$, introducimos también el *operador de actuación funcional* asociado a $QS(x)\beta + f(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathcal{M}) &\rightarrow {}_2L^2(\mathcal{M}) \\ v &\rightarrow \{h \in L^2(\mathcal{M}) : h(x) \in QS(x)\beta(v(x)) + f(x) \quad c\forall x \in \mathcal{M}\}, \end{aligned} \tag{I.30}$$

i.e. $\frac{h-f}{QS} \in \beta(v)$ en casi todo punto de \mathcal{M} . Para permitir que sea $f(t, x) \in L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ debe ser $\mathcal{F} : L^p((0, T); L^2(\mathcal{M})) \rightarrow {}_2L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$. Finalmente, definimos \mathcal{L} por

$$\mathcal{L}(z) = \{h \in L^p((0, T); L^2(\mathcal{M})) : h(t) \in \mathcal{F}(I_0(z)(t)) \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \quad c\forall t \in (0, T)\}.$$

Veamos que \mathcal{L} verifica las hipótesis del Teorema 6 de punto fijo. Para ello recogemos aquí propiedades de los operadores solución y actuación funcional.

Proposición 4 Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ un grafo maximal monótono acotado, y sea el operador de actuación $\mathcal{F} : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow 2^{L^2(\mathcal{M})}$ asociado al grafo $QS\beta + f$ definido en (1.30). Entonces

- i) \mathcal{F} toma valores no vacíos, convexos y cerrados;
- ii) \mathcal{F} es acotado en $L^2(\mathcal{M})$;
- iii) $\mathcal{F}(w) \subset L^\infty(\mathcal{M}) \forall w \in L^2(\mathcal{M})$, supuesto que $f \in L^\infty(\mathcal{M})$ (ó $f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$);
- iv) $\mathcal{F} : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow 2^{L^\infty(\mathcal{M})}$ es acotado;
- v) el grafo de \mathcal{F} es cerrado secuencialmente fuerte \times débil en $L^2(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$.

Demostración de la Proposición 4.

Las propiedades i)-iv) se demuestran sin dificultad (véase p.e. Vrabie [1987] (lema 3.4.1. pg. 148)).

v) es consecuencia de las propiedades de grafos maximales monótonos (Brezis [1973] pg. 27, Proposición 2.5). ■

Proposición 5 (Vrabie [1987], Corolario 2.3.2, pg. 68).

Sea $A : D(A) \subset L^2(\mathcal{M}) \rightarrow 2^{L^2(\mathcal{M})}$ definida por $Ax = \partial\phi(x)$ para $x \in D(A) = D(\partial\phi)$, donde $\phi : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa y s.e.i. de tipo compacto. Entonces para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$, la aplicación

$$\begin{aligned} I_0 : L^p((0, T); L^2(\mathcal{M})) &\rightarrow C([0, T]; L^2(\mathcal{M})) \\ z &\rightarrow v \end{aligned}$$

con v solución de (P_h) asociada a $h \equiv z$, es secuencialmente continua de $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ -débil en $C([0, T]; L^2(\mathcal{M}))$ -fuerte. □

Finalmente, $\text{graf}(\mathcal{L})$ es secuencialmente débil \times débil cerrado en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M})) \times L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$. En efecto, sea $(z, h) \in \overline{\text{graf}(\mathcal{L})}^{\text{débil} \times \text{débil}}$ entonces existe $(z_n, h_n) \in \text{graf}(\mathcal{L})$ tal que

$$\begin{aligned} z_n &\rightharpoonup z \quad \text{en } L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-débil,} \\ h_n &\rightharpoonup h \quad \text{en } L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-débil,} \end{aligned}$$

$h_n \in \mathcal{L}(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$ (i.e. $h_n(t) \in \mathcal{F}(I_0(z_n)(t)) \forall t \in (0, T) \forall n$).

Veamos que $(h \in \mathcal{L}(z)$ i.e. $h(t) \in \mathcal{F}(I_0(z)(t)) \forall t \in (0, T)$) y habremos terminado. Por la Proposición 5,

$$I_0(z_n) \rightarrow z \in C([0, T], L^2(\mathcal{M})) \text{ fuerte}$$

y por tanto

$$I_0(z_n)(t) \rightarrow z(t) \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \forall t \in (0, T).$$

Usando que $\text{graf}(\mathcal{F})$ es secuencialmente fuerte \times débil cerrado tenemos la siguiente implicación

$$\left. \begin{array}{l} (I_0(z_n)(t), h_n(t)) \in \text{graf}\mathcal{F} \subset L^2(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M}) \forall t \in (0, T), \\ I_0(z_n)(t) \rightarrow z(t) \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \forall t \in (0, T), \\ h_n(t) \rightarrow h(t) \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \forall t \in (0, T), \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (I_0(z)(t), h(t)) \in \text{graf}\mathcal{F} \forall t \in (0, T) \\ \text{i.e. } h(t) \in \mathcal{F}(I_0(z)(t)) \forall t \in (0, T) \end{array} \right.$$

luego $h \in \mathcal{L}(z)$ y así $\text{graf}(\mathcal{L})$ es secuencialmente débil \times débil cerrado.

Así hemos verificado las hipótesis del Teorema 6 y tenemos que si $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$ y $f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ entonces

i) $u \in C([0, T]; L^2(\mathcal{M})) \cap L^p(0, T; V)$

ii) existe $z \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ con $z(t, x) \in \beta(u(t, x)) \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} u(T, x)v(T, x)dA - \int_0^T \langle v_t(t, x), u(t, x) \rangle_{V', V} dt + \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle dAdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)v dAdt = \\ & = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)z(t, x)v dAdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} f v dAdt + \int_{\mathcal{M}} u_0(x)v(0, x)dA \\ & \quad \forall v \in L^p(0, T; V) \text{ tal que } v_t \in L^{p'}(0, T; V'). \end{aligned}$$

3.5 Demostración de la prolongabilidad y de la regularidad.

La siguiente cuestión que nos planteamos es si la solución u encontrada en la sección anterior puede prolongarse a $(0, \infty)$.

Sabemos que dado $T > 0$ existe $u \in C([0, T], L^2(\mathcal{M})) \cap L^p((0, T); V)$ solución de (P), veamos que si $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ entonces

$$u \in C([0, \infty), L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M}) \cap L^p_{loc}((0, \infty); V).$$

1. $u \in C([0, \infty), L^2(\mathcal{M}))$, en efecto, multiplicando la ecuación por u , e integrando en \mathcal{M} tenemos

$$\int_{\mathcal{M}} u_t u dA + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u) u dA = \int_{\mathcal{M}} Q S z u dA + \int_{\mathcal{M}} f u dA \quad z \in \beta(u). \quad (1.31)$$

Recordando que para todo $z \in \beta(u)$ se tiene que $m \leq z \leq M$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA + c \int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA \leq C + \epsilon \|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$$

donde $C = C(\epsilon, \|S\|_\infty, M, \|f\|_{L^\infty((0, \infty); L^\infty(\mathcal{M}))})$, por tanto

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq -C_1 \|u(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + C_2, \quad C_1, C_2 > 0 \quad (1.32)$$

y por el Lema de Gronwall,

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq e^{-C_1 t} \|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \frac{C_2}{C_1} (1 - e^{-C_1 t}).$$

La última expresión tiende a $\frac{C_2}{C_1}$ si $t \rightarrow +\infty$ y por tanto

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq k \quad \forall t > 0 \quad (\text{con } k \text{ independiente de } t). \quad (1.33)$$

Por un resultado bien conocido (véase p.e. Cazenave - Haraux [1990] Teorema 4.3.4 pg. 57) esto implica la prolongabilidad de u de manera que $u \in C([0, \infty); L^2(\mathcal{M}))$.¹

2. $u \in L^p_{loc}((0, \infty); V)$. En efecto, de la estimación (1.33) se deduce que $u \in L^\infty((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))$ y por tanto $u \in L^p_{loc}((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))$. Veamos algunas estimaciones de $\|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{T}\mathcal{M})}$. Integrando en (1.31) sobre $(0, T)$. Obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (|u(T)|^2 - |u_0|^2) dA + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA dt \leq \\ & \leq Q \|S\|_\infty \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u| dA dt + \int_0^T \|f\|_{L^2(\mathcal{M})} \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} dt. \end{aligned}$$

¹Esta es la primera vez que utilizamos la segunda parte de la hipótesis (H_G) ($|\mathcal{G}(\sigma)| \geq C|\sigma|^r$ para algún $r \geq 1$), de hecho bastaría imponer esta condición para valores grandes de t . Nótese que en el modelo que aquí se aborda esta hipótesis no es muy restrictiva pues en el modelo de Sellers $\mathcal{G}(u) = \sigma u^4$ (u en °Kelvin) y en el de Budyko $\mathcal{G}(u) = Bu$.

Por la inclusión continua $L^\infty(0, T) \subset L^1(0, T)$ y la desigualdad de Young la anterior expresión queda mayorada por

$$C_0 Q \|S\|_\infty M \|u\|_{L^\infty((0, \infty); L^1(\mathcal{M}))} + \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA dt + C_\epsilon \|f\|_{L^\infty((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))},$$

con $C_0 = C_0(T)$. De este modo llegamos a

$$\int_{\mathcal{M}} |u(T)|^2 dA + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p dA dt + (C - \frac{\epsilon}{2}) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u|^2 dA dt \leq k_2$$

donde $k_2 = k_2(\int_{\mathcal{M}} |u_0|^2, Q, \|S\|_\infty, M, \|u\|_{L^\infty((0, \infty); L^1(\mathcal{M}))}, \|f\|_{L^\infty((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))}, C_0)$.

En particular,

$$\int_{\mathcal{M}} |u(T)|^2 \leq k_2, \quad \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p \leq k_2 \quad \forall T.$$

Por tanto $u \in L^p_{loc}((0, \infty); V)$.

3. La demostración de que $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})$ será de gran utilidad en posteriores secciones, por ello la recogemos en el siguiente

Lema 4 Si $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ y $f \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})$ entonces $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})$.

Demostración. Sea $\bar{u}(x, t)$ la única solución de

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \Delta_p \bar{u} + \mathcal{G}(\bar{u}) = MQS(x) + f^+(t, x) & \text{en } (0, \infty) \times \mathcal{M} \\ \bar{u}(0, x) = u_0^+(x) = \max\{0, u_0(x)\} & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

La existencia de \bar{u} está garantizada por ser $-\Delta_p u + \mathcal{G}(u)$ maximal monótono en $L^2(\mathcal{M})$. Es claro que $\bar{u} \geq 0$ pues $u_0^+ \geq 0$, $MQS(x) + f^+(t, x) \geq 0$ y el operador es T-acretivo en $L^2(\mathcal{M})$. Además

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})} \leq L := \max\{\|u_0^+\|_\infty, \mathcal{G}^{-1}(\|MQS\|_\infty + \|f^+\|_\infty)\}$$

pues L es una supersolución y el operador es T-acretivo en $L^2(\mathcal{M})$, lo que garantiza la comparación. Análogamente, si $\underline{u}(x, t)$ es la única solución de

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \Delta_p \underline{u} + \mathcal{G}(\underline{u}) = mQS(x) + f^-(x) \\ \underline{u}(0, x) = u_0^-(x) = \min\{0, u_0(x)\} \end{cases}$$

se tiene que $\underline{u} \leq 0$ y que

$$\|\underline{u}\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})} \leq \max\{\|u_0^-\|_\infty, \mathcal{G}^{-1}(\|mQS\|_\infty + \|f^-\|_\infty)\}.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} \underline{u}_t - \Delta_p \underline{u} + \mathcal{G}(\underline{u}) &\leq u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) \leq \bar{u}_t - \Delta_p \bar{u} + \mathcal{G}(\bar{u}) \\ \underline{u}_0^- &\leq u_0 \leq \bar{u}_0^+ \end{aligned}$$

entonces por la T-acretividad en $L^2(\mathcal{M})$ de A , $\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$. Se sigue que $\forall t > 0$,

$$\|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})} \leq \max\{\|\bar{u}\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}, \|\underline{u}\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}\}, \quad (1.34)$$

lo que muestra el resultado. \blacksquare

Corolario 1 $\forall u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ y $\forall f \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ existe u solución débil acotada del problema (P) en $[0, T]$.

Terminamos la demostración del Teorema de existencia dando un resultado de regularidad.

Lema 5 *Supongamos que*

$$u_0 \in V \cap L^\infty(\mathcal{M}), \quad (1.35)$$

$$f \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M}) \cap W_{loc}^{1,1}((0, \infty); L^1(\mathcal{M})) \text{ y}, \quad (1.36)$$

$$\int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s, \cdot) \right\|_{L^1(\mathcal{M})} ds \leq C_0 \quad \forall t > 0 \text{ con } C_0 \text{ independiente de } t. \quad (1.37)$$

Entonces existe una solución débil de (P) verificando

$$u \in L^\infty((0, \infty); V). \quad (1.38)$$

Demostración.

Sea u una solución débil arbitraria de (P). Como u es la única solución del problema de Cauchy (P_h) en $[0, T]$, $\forall T > 0$ para $u_0 \in V \cap L^\infty(\mathcal{M}) \subset D(\phi)$ y $h \in L^\infty((0, T) \times \mathcal{M})$ dado por $h(t, x) = QS(x)z(t, x) + f(t, x)$ con $z \in \beta(u)$, se tiene que $u_t \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ y $u \in L^\infty((0, T); V)$ (véase Brezis [1971] o Barbu [1976], pg. 187). Veamos que esta regularidad se mantiene en $(0, \infty)$. Dividimos la demostración en tres etapas.

Etapas 1. $\|\nabla u\|_{L^p((t, t+1); L^p(T\mathcal{M}))} \leq C_0$ con C_0 independiente de t .

Multiplicando la ecuación por u e integrando en $(t, t+1) \times \mathcal{M}$ se obtiene,

$$\int_0^T \langle u_t, u \rangle_{V' \times V} + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^p + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)u = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (QS(x)zu + fu),$$

donde $z \in \beta(u)$. Tratemos de estimar cada uno de estos sumandos. Por un resultado bien conocido (véase p.e. Alt-Luckhaus [1983])

$$\int_t^{t+1} \langle u_t, u \rangle_{V' \times V} = \frac{1}{2} \int_t^{t+1} \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} |u|^2 = \int_{\mathcal{M}} |u(t+1, x)|^2 - \int_{\mathcal{M}} |u(t, x)|^2.$$

Esta expresión está acotada independientemente de t , por ser obviamente $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})$ (véase Lema 4). Además

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)u &\geq 0, \\ \int_t^{t+1} \int_{\mathcal{M}} QS(x)zu &\leq Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} M |\mathcal{M}| \|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}, \\ \int_t^{t+1} \int_{\mathcal{M}} f(s, x)u(s, x)dAds &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_t^{t+1} \int_{\mathcal{M}} |u|dAds \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})} |\mathcal{M}| \|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}. \end{aligned}$$

Combinando las anteriores estimaciones resulta

$$\int_t^{t+1} \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(s, x)|^p dAds \leq C_0, \quad (1.39)$$

donde C_0 es la constante positiva que sólo depende de Q , S , $\|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}$ y $\|f\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}$, pero no de t .

Etapa 2.

Supongamos ahora que sustituimos los datos u_0 , $S(x)$ y $f(t, x)$ por aproximaciones regulares, así como los términos $\beta(u)$ y $\Delta_p u$ por regularizaciones, evitando también que el operador sea no degenerado. La solución del problema se puede suponer clásica (por ejemplo por los resultados de Ladyzenskaya – Solonnikov – Uralceva [1968]). Multiplicando la ecuación por u_t e integrando en \mathcal{M} y entre σ y τ , siendo $0 < \tau - \sigma \leq 1$, resulta

$$\begin{aligned} \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} |u_t|^2 + \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} |\nabla u|^p + \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} G(u) &= \\ = \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} QS(x) \frac{d}{dt} j(u) + \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} f u_t, \end{aligned}$$

con $G(s) = \int_0^s \mathcal{G}(\sigma) d\sigma$ y j la función convexa tal que $\partial j = \beta$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} |u_t|^2 + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(\tau)|^p + \int_{\mathcal{M}} G(u(\tau)) - \int_{\mathcal{M}} G(u(\sigma)) &= \\ = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(\sigma)|^p + \int_{\mathcal{M}} QS(x) j(u(\tau)) - \int_{\mathcal{M}} QS(x) j(u(\sigma)) + \int_\sigma^\tau \int_{\mathcal{M}} f u_t \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dado que $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})$, se deduce que existe $C_1 > 0$ independiente de t tal que

$$\int_{\mathcal{M}} G(u(\tau)) \leq C_1, \quad \int_{\mathcal{M}} QS(x)j(u(\tau)) \leq C_1 \quad \forall \tau. \quad (I.41)$$

Por otro lado, integrando por partes en el último término de (I.40) y usando (I.37)

$$\int_{\sigma}^{\tau} \int_{\mathcal{M}} f u_t dA dt = \int_{\mathcal{M}} f(\tau)u(\tau) - f(\sigma)u(\sigma) dA - \int_{\sigma}^{\tau} \int_{\mathcal{M}} f_t u dA dt \leq C_0 \|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}. \quad (I.42)$$

Sustituyendo las estimaciones (I.41), (I.42) en (I.40),

$$\int_{\sigma}^{\tau} \int_{\mathcal{M}} |u_t|^2 dA dt \leq C_2 + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(\sigma)|^p dA dt - \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(\tau)|^p dA dt, \quad (I.43)$$

donde C_2 viene dado por

$$C_2 = 4C_1 + (2|\mathcal{M}| \|f\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})} + C_0) \|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathcal{M})}.$$

Etapa 3.

La estimación buscada (I.38) se consigue a partir de las etapas anteriores por el siguiente resultado debido a Nakao [1978]:

Lema. *Sea $\varphi(t) \geq 0$ una función localmente acotada tal que*

$$\varphi(t+1) \leq C[\varphi(t) - \varphi(t+1)] + \rho(t) \quad t > 0, \quad (I.44)$$

donde C es una constante positiva y $\rho(t) > 0$ para t suficientemente grande. Entonces, cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\varphi(t) = O(1)$ si $\rho(t) = O(1)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso que nos ocupa basta tomar

$$\varphi(t) = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t, x)|^p dA$$

y $\rho(t) = C_2$. Probemos que φ verifica la hipótesis (I.44). Basta observar que de (I.43) se desprende

$$\varphi(t+1) - \varphi(\sigma) \leq C_2 + \int_{\sigma}^{t+1} \int_{\mathcal{M}} |u_t|^2 dA ds, \quad (I.45)$$

para cualquier $\sigma \in (t, t+1)$. Por otro lado, de (I.39) se deduce que para t suficientemente grande, existe $t^* \in (t, t+1)$ tal que $\varphi(t^*) \leq C_0$. Sustituyendo $\sigma = t^*$ en (I.45) se obtiene, por las etapas anteriores, la desigualdad (I.44).

La acotación de $\varphi(t)$ es equivalente a afirmar que

$$u \in L^\infty((0, \infty); V).$$

Finalmente, las cotas anteriores dependen únicamente de los datos, con lo que la conclusión se mantiene para la solución débil u de (P) límite de las soluciones aproximadas. ■

4 Sobre la unicidad de solución.

Una vez que hemos obtenido la existencia de soluciones para el modelo (P) tiene sentido preguntarse si la solución obtenida en la sección anterior es única o no. Existen resultados de diferente naturaleza según que se suponga el término de coalbedo discontinuo o no; éste juega pues un papel fundamental.

En el modelo de Sellers (β localmente Lipschitz) se obtiene la unicidad de solución mediante procedimientos standard (véase Díaz [1993]). En el modelo de Budyko (β multívoco), pese a ser (P) un problema de tipo parabólico pueden darse casos de no unicidad. Ya en Díaz [1993] se obtuvieron infinitas soluciones para el modelo unidimensional con f constante y un dato inicial u_0 verificando

$$\left. \begin{array}{l} u_0 \in C^\infty(I), \quad u_0(x) = u_0(-x) \quad \forall x \in [0, 1], \\ u_0^{(k)}(0) = 0 \quad \text{con } k = 1, 2, \quad u_0(0) = -10 \\ u_0'(x) < 0 \quad x \in (0, 1), \quad u_0'(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.46)$$

Nótese que esta clase de datos iniciales u_0 son muy “planos” cuando llegan al nivel crítico -10 (en la anterior construcción en $x = 0$). Este resultado de no unicidad para el modelo de Budyko con adecuados datos iniciales se extiende al modelo bidimensional cuando $\mathcal{M} = S^2$, dado que cada solución $u_1(t, x)$ del modelo 1D genera una solución $u_2(t, x, y)$ del modelo 2D mediante su rotación respecto al eje que une los polos (nótese que u_2 tiene un dato inicial que no depende de la longitud), e.d. $u_2(t, x, y) = u_1(t, \text{sen}\theta)$ donde aquí (x, y) es un punto de S^2 de latitud θ , u_1 . Se comprueba sin dificultad que u_2 es solución de (P) con dato inicial $u_1(0, \text{sen}\theta)$.

4.1 Existencia de solución maximal y solución minimal.

Lema 6 *El problema (P) posee solución maximal u^* y solución minimal u_* , e.d. soluciones del problema (P) tales que toda solución u de (P) verifica que $u_* \leq u \leq u^*$ en $(0, T) \times \mathcal{M}$.*

Demostración.

Sea \bar{u} la solución del problema

$$(\bar{P}) \left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) = QS(x)M + f(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right.$$

y sea \underline{u} la solución del problema

$$(P) \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) = QS(x)m + f(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Es claro que \bar{u} y \underline{u} son respectivamente supersolución y subsolución del problema (P), dado que para todo $z \in L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ que verifique $z \in \beta(\bar{u})$ se tiene que $z \leq M$ en casi todo punto de $(0, T) \times \mathcal{M}$. Análogamente si $z \in \beta(\underline{u})$ entonces $m \leq z$.

Se construyen las sucesiones $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como las soluciones de los problemas

$$(P^k) \begin{cases} u_t^k - \Delta_p u^k + \mathcal{G}(u^k) = QS(x)\bar{\beta}(u^{k-1}) + f(x, t), \\ u^k(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$$(P_k) \begin{cases} u_{kt} - \Delta_p u_k + \mathcal{G}(u_k) = QS(x)\underline{\beta}(u_{k-1}) + f(x, t), \\ u_k(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

siendo $u^1 = \bar{u}$ y $u_1 = \underline{u}$ y donde $\bar{\beta}$ y $\underline{\beta}$ son funciones reales de variable real verificando ²

$$\bar{\beta}(s) \in \beta(s) \quad \text{tal que} \quad \forall z \in \beta(s) \text{ se verifica } z \leq \bar{\beta}(s)$$

$$\underline{\beta}(s) \in \beta(s) \quad \text{tal que} \quad \forall z \in \beta(s) \text{ se verifica } \underline{\beta}(s) \leq z.$$

Etapla 1. Las sucesiones $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son monótonas.

Veamos que $u^2 \leq u^1 = \bar{u}$, para ello tomamos $(u^2 - \bar{u})^+$ como función test en (P^2) y (\bar{P}) , y restamos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (u_t^2 - \bar{u}_t)(u^2 - \bar{u})^+ - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u^2|^{p-2} \nabla u^2 - |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}, \nabla (u^2 - \bar{u})^+ \rangle + \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{G}(u^2) - \mathcal{G}(\bar{u}))(u^2 - \bar{u})^+ = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(\bar{z} - M)(u^2 - \bar{u})^+ \end{aligned}$$

donde $\bar{z} = \bar{\beta}(\bar{u})$. Y como

$$QS(x) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathcal{M},$$

$$(\bar{z}(x, t) - M) \leq 0 \quad \text{a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M},$$

$$(u^2(x, t) - \bar{u}(x, t))^+ \geq 0 \quad \text{a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M},$$

²A partir del grafo β se definen $\bar{\beta}$ y $\underline{\beta}$ como las funciones que coinciden con β en los puntos donde β no es multívoca y como el máximo y mínimo valor que toma β en los puntos en los que ésta es multívoca.

se tiene que

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u^2(T) - \bar{u}(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(\bar{z} - M)(u^2 - \bar{u})^+ \leq 0.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u^2(T) - \bar{u}(T))^+|^2 = 0$$

y $u^2 \leq \bar{u}$.

Supongamos $u^{k-1} \leq \dots \leq u^2 \leq \bar{u}$ y veamos que $u^k \leq u^{k-1}$. Procediendo como es el caso anterior llegamos a

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u^k(T) - u^{k-1}(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z^{k-1} - z^{k-2})(u^k - u^{k-1})^+,$$

y de la monotonía de $\bar{\beta}$ se deduce que el término de la derecha es menor o igual que cero, entonces

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u^k(T) - u^{k-1}(T))^+|^2 = 0$$

y $u^k \leq u^{k-1}$.

Veamos ahora que $u_1 = \underline{u} \leq u_2$. Tomemos $(\underline{u} - u_2)^+$ como función test en las formulaciones débiles de (\underline{P}) y (P_2) , y restemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\underline{u}_t - u_{2t})(\underline{u} - u_2)^+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (|\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \nabla (\underline{u} - u_2)^+ + \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{G}(\underline{u}) - \mathcal{G}(u_2))(\underline{u} - u_2)^+ = \\ & = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(m - \underline{z})(\underline{u} - u_2)^+ \end{aligned}$$

donde $\underline{z} = \underline{\beta}(\underline{u})$. Y como

$$\begin{aligned} QS(x) & \geq 0 & \text{a.e. } (x, t) \in (0, T) \times \mathcal{M}, \\ (m - \underline{z}(x, t)) & \leq 0 & \text{a.e. } (x, t) \in (0, T) \times \mathcal{M}, \\ (\underline{u}(x, t) - u_2(x, t))^+ & \geq 0 & \text{a.e. } (x, t) \in (0, T) \times \mathcal{M}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(\underline{u}(T) - u_2(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(m - \underline{z})(\underline{u} - u_2)^+ \leq 0.$$

Por tanto,

$$\|(\underline{u}(T) - u_2(T))^+\|_{L^2(\mathcal{M})} = 0$$

y $\underline{u}(T) \leq u_2(T)$.

Supongamos $\underline{u} \leq u_2 \leq \dots \leq u_{k-1}$ y veamos que $u_{k-1} \leq u_k$,

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u_{k-1}(T) - u_k(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z_{k-2} - z_{k-1})(u_{k-1} - u_k)^+,$$

y de la monotonía de $\underline{\beta}$ se deduce que el término de la derecha es menor o igual que cero, entonces

$$\|(u_{k-1}(T) - u_k(T))^+\|_{L^2(\mathcal{M})} = 0 \quad \text{y} \quad u_{k-1} \leq u_k \quad \forall T.$$

De este modo se han obtenido dos sucesiones monótonas, más concretamente,

$$\begin{aligned} \{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} & \text{ verifica } \bar{u} \geq u^2 \geq \dots \geq u^{k-1} \geq u^k \geq \dots \\ \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} & \text{ verifica } \dots \geq u_k \geq u_{k-1} \geq \dots \geq u_2 \geq \underline{u}. \end{aligned}$$

Además, $u^k \geq u_k \forall k$. En efecto,

1.- $\bar{u} \geq \underline{u}$,

2.- supongamos $u^{k-1} \geq u_{k-1}$ entonces

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u_k(T) - u^k(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z_{k-1} - z^{k-1})(u_k - u^k)^+ \leq 0.$$

El término de la derecha es menor o igual que cero, pues $z_{k-1} - z^{k-1} \leq 0$ a.e. $(x, t) \in (0, T) \times \mathcal{M}$ puesto que $u^{k-1} \geq u_{k-1}$ y β es monótona.

Etapa 2. Las sucesiones $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son convergentes en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$.

Se considera la sucesión $\{\bar{u} - u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$,

1.- $\bar{u} - u^k \geq 0$,

2.- $\bar{u} - u^k$ es una sucesión no decreciente,

3.- $\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \bar{u} - u^k \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \bar{u} - \underline{u} = C$ por tanto,

$$\sup \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \bar{u} - u^k \leq C.$$

Se verifican así las hipótesis del teorema de la convergencia monótona, del que se concluye que existe $\phi \in L^1((0, T) \times \mathcal{M})$ tal que

$$\begin{aligned}\bar{u} - u^k &\rightarrow \phi & a.c. (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M} \\ \bar{u} - u^k &\rightarrow \phi & \text{en } L^1((0, T) \times \mathcal{M}),\end{aligned}$$

y llamando $u^* = \bar{u} - \phi$ se tiene que $u^k \rightarrow u^*$ en $L^1((0, T) \times \mathcal{M})$. Podemos obtener convergencia en $L^p((0, T); L^2(\mathcal{M}))$ ($p > 1$) si consideramos la sucesión $\{|\bar{u} - u^k|^p\}$, que verifica también las hipótesis del Teorema de la convergencia monótona.

Análogamente se prueba que la sucesión $\{u_k\}$ converge a u_* , pues

- 1.- $u_k - \underline{u} \geq 0$,
- 2.- $\{u_k - \underline{u}\}$ es una sucesión no decreciente,
- 3.- $\sup \int_0^T \int_{\mathcal{M}} u_k - \underline{u} \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \bar{u} - \underline{u}$,

de nuevo se obtiene la convergencia buscada usando el Teorema de la convergencia monótona.

Etapa 3. u^* y u_* son soluciones de (P).

Consideremos las formulaciones débiles de (P^k) y (P_k) y estudiemos qué ocurre cuando $k \rightarrow \infty$.

- Estimaciones a priori:

$$\begin{aligned}\|u^k(T)\|_{L^2(\mathcal{M})} &\leq C_1 & \|u_k(T)\|_{L^2(\mathcal{M})} &\leq C_1 \\ \|u^k\|_{L^2(0, T; V)} &\leq C_1 & \|u_k\|_{L^2(0, T; V)} &\leq C_1,\end{aligned}$$

y si $u_0 \in V$ se tiene además que

$$\|u_t^k\|_{L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))} \leq C_2 \quad \|u_{kt}\|_{L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))} \leq C_2.$$

- Convergencias:

$$\begin{aligned}u^k &\rightarrow u^* & \text{en } L^2(0, T; V)\text{-débil,} \\ u^k &\rightarrow u^* & \text{en } L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-fuerte,} \\ u_k &\rightarrow u_* & \text{en } L^2(0, T; V)\text{-débil,} \\ u^k &\rightarrow u_* & \text{en } L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-fuerte.}\end{aligned}$$

- Por ser β un grafo maximal monótono

$$\begin{aligned} z^k \rightharpoonup z^* \in \beta(u^*) & \text{ en } L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-débil,} \\ z_k \rightharpoonup z_* \in \beta(u_*) & \text{ en } L^2((0, T); L^2(\mathcal{M}))\text{-débil.} \end{aligned}$$

- De las estimaciones anteriores se deduce también que

$$\begin{aligned} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^k \rightharpoonup Y^* & \text{ en } L^2(0, T; L^{p'}(T\mathcal{M}))\text{-débil,} \\ |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \rightharpoonup Y_* & \text{ en } L^2(0, T; L^{p'}(T\mathcal{M}))\text{-débil,} \end{aligned}$$

Para obtener la formulación débil de (P) como límite cuando $k \rightarrow \infty$ de las formulaciones débiles de (P^k) y (P_k) es necesario que

$$Y^* = |\nabla u^*|^{p-2} \nabla u^* \quad Y_* = |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_*,$$

que se consigue probando que para todo $\chi \in V$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^k - |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, \nabla u^* - \nabla \chi \rangle dAdt \geq 0. \quad (\text{I.47})$$

Tomando ahora $\chi = u^* + \lambda \xi$, con $\lambda < 0$ y haciendo $\lambda \rightarrow \infty$, y posteriormente con $\lambda > 0$ se llega a

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle Y^* - |\nabla u^*|^{p-2} \nabla u^*, \nabla \xi \rangle dAdt = 0.$$

La demostración de (I.47) ha sido detallada en el Lema 10 de esta memoria. Análogamente se obtiene que $Y_* = |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_*$.

Así, tomando $k \rightarrow \infty$ en la expresión

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} u^k(T)v(T) - \int_0^T \langle v_t, u^k \rangle_{V' \times V} + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^k \nabla v + \\ + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u^k)v = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (QS(x)z^{k-1} + f(t, x))v + \int_{\mathcal{M}} u_0 v(0, x), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} u^*(T)v(T) - \int_0^T \langle v_t, u^* \rangle_{V' \times V} + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u^*|^{p-2} \nabla u^* \nabla v + \\ + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u^*)v = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (QS(x)z^* + f(t, x))v + \int_{\mathcal{M}} u_0(x)v(0, x). \end{aligned}$$

Y análogamente se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} u_*(T)v(T) - \int_0^T \langle v_t, u_* \rangle_{V' \times V} + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_* \nabla v + \\ + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_*)v = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} (QS(x)z_* + f)v + \int_{\mathcal{M}} u_0 v(0, x). \end{aligned}$$

Ultima etapa. Toda solución u de (P) verifica que $u_* \leq u \leq u^*$.

Sea u una solución del problema

$$(\overline{P}) \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) = QS(x)\beta(u) + f(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Veamos que $u_k \leq u \leq u^k$,

- $u_1 \leq u \leq u^1$, en efecto, tomando $(u_1 - u)^+$ como función test en las formulaciones débiles de (\underline{P}) y (P) , y restando las expresiones obtenidas se llega a

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u_1 - u)^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(m - z)(u_1 - u)^+ \leq 0.$$

Se concluye que $(u_1 - u)^+ = 0$ a.e. T , es decir, $u_1 \leq u$.

Considerando ahora las formulaciones débiles de (P) y \overline{P} con $(u - u^1)^+$ como función test, se obtiene

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u - u^1)^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z - M)(u - u^1)^+ \leq 0,$$

de lo que se deduce que $(u - u^1)^+ = 0$, o bien, $u \leq u^1$.

- Supongamos $u_{k-1} \leq u \leq u^{k-1}$ y veamos que $u_k \leq u \leq u^k$. Procediendo como en el apartado anterior, pero ahora con (P_k) , (P) y $(u_k - u)^+$ como función test se obtiene

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u_k - u)^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z_{k-1} - z)(u_k - u)^+ \leq 0,$$

pues $u_{k-1} \leq u$ y β monótona. Se deduce que $(u_k - u)^+ = 0$, o bien, $u_k \leq u$.

Tomando ahora $(u - u^k)^+$ como función test en las formulaciones débiles de (P) y (P^k) y restando

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |(u(T) - u^k(T))^+|^2 \leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}} QS(x)(z - z^{k-1})(u - u^k)^+ \leq 0,$$

y como por hipótesis $u \leq u^{k-1}$ entonces de la monotonía de $\bar{\beta}$ y el hecho de que $z \leq \bar{\beta}(u)$ se sigue que $z - z^{k-1} \leq 0$. Así, el término de la derecha es menor o igual que cero y $u \leq u^k$.

Finalmente, como $u_k \rightarrow u_*$ y $u^k \rightarrow u^*$ en $L^\infty(\mathcal{M})$ para todo $t \in (0, T)$ se concluye que $u_* \leq u \leq u^*$. Por tanto, u_* es la solución minimal de (P) y u^* la solución maximal. ■

4.2 Unicidad de soluciones no degeneradas.

En Díaz [1993] se da ya un criterio de unicidad para modelos unidimensionales de tipo Budyko bajo hipótesis de “no degeneración” que posteriormente detallaremos. El objeto de esta sección es mostrar que estas diferentes situaciones se dan también en el modelo bidimensional.

Comenzamos introduciendo la noción de no degeneración sobre una variedad \mathcal{M} .

Definición 16 Diremos que $w \in L^\infty(\mathcal{M})$ satisface la propiedad de no degeneración fuerte (resp. débil) si existe $C > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\mu(\{x \in \mathcal{M} : |w(x) + 10| \leq \epsilon\}) \leq C\epsilon^{p-1}$$

(resp. $\mu(\{x \in \mathcal{M} : 0 < |w(x) + 10| \leq \epsilon\}) \leq C\epsilon^{p-1}$). Donde μ es la medida de Lebesgue en la variedad \mathcal{M} , también denotada por $\mu(E) := |E|$, $\forall E \subset \mathcal{M}$.

Teorema 7

- (i) Si existe una solución de (P) tal que $u(t)$ verifica la propiedad de no degeneración fuerte para cada $t \in [0, T]$ entonces u es la única solución débil acotada de (P);
- (ii) existe a lo sumo una solución de (P) que verifica la propiedad de no degeneración débil. □

La demostración se basa en la idea de que aunque β es discontinua genera un operador continuo de $L^\infty(\mathcal{M})$ en $L^q(\mathcal{M}) \forall q \in [1, \infty)$ cuando se toma como su dominio el conjunto de funciones que verifican la propiedad de no degeneración fuerte. Más concretamente se tiene que

Lema 7

(i) Sean $w, \hat{w} \in L^\infty(\mathcal{M})$ y supongamos que w satisface la propiedad de no degeneración fuerte. Entonces para cada $q \in [1, \infty)$ existe $\tilde{C} > 0$ tal que para cada $z, \hat{z} \in L^q(\mathcal{M})$ con $z(x) \in \beta(w(x))$ y $\hat{z}(x) \in \beta(\hat{w}(x))$ $\forall x \in \mathcal{M}$, se tiene

$$\|z - \hat{z}\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq (b_w - b_i) \min\{\tilde{C} \|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^{(p-1)/q}, |\mathcal{M}|^{1/q}\}. \quad (I.48)$$

(ii) Si $w, \hat{w} \in L^\infty(\mathcal{M})$ y satisfacen la propiedad de no-degeneración débil entonces

$$\int_{\mathcal{M}} (z(x) - \hat{z}(x))(w(x) - \hat{w}(x)) dA \leq (b_w - b_i) C \|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p. \quad (I.49)$$

Demostración del Lema 7.

Sea ϵ_0 dado por la definición 16 aplicada a w . Si $\|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} > \epsilon_0$ entonces

$$\|z - \hat{z}\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq (b_w - b_i) |\mathcal{M}|^{1/q} \leq (b_w - b_i) \frac{|\mathcal{M}|^{1/q}}{(\epsilon_0)^{(p-1)/q}} \|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^{(p-1)/q}.$$

Supongamos ahora que $\|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq \epsilon_0$. Se definen los conjuntos de coincidencia

$$A := \{x \in \mathcal{M} : w(x) = -10\}, \quad \hat{A} := \{x \in \mathcal{M} : \hat{w}(x) = -10\},$$

y se considera la descomposición

$$\mathcal{M} = A \cup \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_-, \quad \mathcal{M} = \hat{A} \cup \hat{\mathcal{M}}_+ \cup \hat{\mathcal{M}}_-,$$

donde

$$\mathcal{M}_+ := \{x \in \mathcal{M} : w(x) > -10\}, \quad \mathcal{M}_- := \{x \in \mathcal{M} : w(x) < -10\}$$

y $\hat{\mathcal{M}}_+, \hat{\mathcal{M}}_-$ se definen de manera similar sustituyendo w por \hat{w} . Sean z, \hat{z} las funciones anteriormente definidas. Entonces

$$\begin{aligned} |z(x) - \hat{z}(x)| &\leq (b_w - b_i) & \text{si } x \in A \cup \hat{A} \cup (\mathcal{M}_+ \cap \hat{\mathcal{M}}_-) \cup (\mathcal{M}_- \cap \hat{\mathcal{M}}_+) \\ z(x) = \hat{z}(x) && \text{si } x \in (\mathcal{M}_+ \cap \hat{\mathcal{M}}_+) \cup (\mathcal{M}_- \cap \hat{\mathcal{M}}_-) \end{aligned}$$

$$\|z - \hat{z}\|_{L^q(\mathcal{M})} \leq (b_w - b_i) \min\{|A \cup \hat{A} \cup (\mathcal{M}_+ \cap \hat{\mathcal{M}}_-) \cup (\mathcal{M}_- \cap \hat{\mathcal{M}}_+)|^{1/q}, |\mathcal{M}|^{1/q}\}. \quad (I.50)$$

Por otro lado, si $\epsilon < \epsilon_0$ tenemos que

$$(A \cup \hat{A} \cup (\mathcal{M}_+ \cap \hat{\mathcal{M}}_-) \cup (\mathcal{M}_- \cap \hat{\mathcal{M}}_+)) \subset B_\epsilon,$$

donde $B_\epsilon := \{x \in \mathcal{M} : -10 - \epsilon \leq w(x) \leq -10 + \epsilon\}$. En efecto, es claro que $A \subset B_\epsilon$. Además,

$$\hat{w}(x) - \|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq w(x) \leq \|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} + \hat{w}(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

Así la inclusión $\hat{A} \subset B_\epsilon$ es obvia. Si $x \in \mathcal{M}_+ \cap \hat{\mathcal{M}}_-$ entonces $-10 < w(x) \leq \epsilon + \hat{w}(x) < -10 + \epsilon$ y así $x \in B_\epsilon$. Finalmente si $x \in \mathcal{M}_- \cap \hat{\mathcal{M}}_+$, se tiene que $-10 - \epsilon \leq -10 - |w(x) - \hat{w}(x)| \leq \hat{w}(x) + w(x) - \hat{w}(x) \leq w(x) < -10$ y por tanto $x \in B_\epsilon$. En consecuencia, la desigualdad (I.48) se obtiene a partir de la propiedad fuerte de no degeneración supuesta para w .

Para probar (ii), suponemos ahora que w y \hat{w} satisfacen la propiedad débil de no degeneración. Procediendo como en (i) podemos suponer que $\|w - \hat{w}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq \epsilon_0$. Observamos que si $x \in A \cap \hat{A}$ entonces

$$(z(x) - \hat{z}(x))(w(x) - \hat{w}(x)) = 0$$

y que si $w(x) \neq -10$ (resp. $\hat{w}(x) \neq -10$) y $x \in \hat{A}$ (resp. $x \in A$) tenemos que

$$x \in \{x \in \mathcal{M} : 0 < |w(x) + 10| \leq \epsilon\} \quad (\text{resp. } \{x \in \mathcal{M} : 0 < |\hat{w}(x) + 10| \leq \epsilon\})$$

obteniendo así (I.49). ■

Demostración del Teorema 7.

Etapa 1. Estimaciones.

Supongamos que existan u y \hat{u} soluciones débiles acotadas de (P), con u verificando la propiedad de no degeneración fuerte, e.d.

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) &= QSz + f \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{M} \\ \hat{u}_t - \Delta_p \hat{u} + \mathcal{G}(\hat{u}) &= QS\hat{z} + f \quad \text{en } (0, T) \times \mathcal{M} \\ u(0) &= \hat{u}(0) = u_0, \end{aligned}$$

para algún $z \in \beta(u)$ y $\hat{z} \in \beta(\hat{u})$.

Restando las ecuaciones obtenemos

$$(u - \hat{u})_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla \hat{u}|^{p-2} \nabla \hat{u}) + (\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(\hat{u})) = QS(z - \hat{z}).$$

Tomando como función test $(u - \hat{u})$ en la formulación débil de (P) obtenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} |u(t) - \hat{u}(t)|^2 dA + \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(\hat{u}))(u - \hat{u}) dA +$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) - |\nabla \hat{u}(t)|^{p-2} \nabla \hat{u}(t), \nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t) \rangle dA = \\ = Q \int_{\mathcal{M}} S(x)(z(x,t) - \hat{z}(x,t))(u(x,t) - \hat{u}(x,t)) dA. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Analicemos cada uno de estos sumandos:

- la expresión

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) - |\nabla \hat{u}(t)|^{p-2} \nabla \hat{u}(t), \nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t) \rangle dA$$

es mayorada por

$$C_0 \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t)|^p dA$$

pues $p \geq 2$, (véase Lema 2 de la sección 2), en concreto si $p = 2$ entonces $C_0 = 1$. Además, utilizando las inclusiones probadas en el Teorema 1 se tiene que si $p > 2$ entonces existe una constante positiva $\tilde{C}_{1,p,\infty}$ definida en (1.20) tal que $\|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p \leq \tilde{C}_{1,p,\infty} \|\nabla f\|_{L^p(T\mathcal{M})}^p + \|f\|_{L^2(\mathcal{M})}^p$ y por tanto

$$C_0 \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t)|^p dA \geq \frac{C_0}{\tilde{C}_{1,p,\infty}} \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p - \tilde{C}_0 \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2, \quad (1.52)$$

con $\tilde{C}_0 = C_0 \|u - \hat{u}\|_{L^\infty((0,T);L^2(\mathcal{M}))}$. Si $p = 2$, se tiene que $V = H^1(\mathcal{M})$ así como la inclusión continua de este espacio en $L^\sigma(\mathcal{M})$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Llegando en este caso a

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t)|^2 dA \geq \frac{1}{\tilde{C}_{1,2,\sigma}} \|u - \hat{u}\|_{L^\sigma(\mathcal{M})}^2 - \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2, \quad (1.53)$$

para todo $\sigma \in [1, \infty)$ y $\tilde{C}_{1,2,\sigma}$ definida en (1.19). Por ser u y \hat{u} soluciones débiles acotadas de (P) es obvio que $u - \hat{u} \in L^\infty(\mathcal{M})$. Este hecho permite usar la propiedad

$$\|\cdot\|_{L^\infty(\mathcal{M})} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\|\cdot\|_{L^\sigma(\mathcal{M})}}{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists \sigma_0 > 1$ tal que $\forall \sigma > \sigma_0$, se tiene que

$$\|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 \leq \frac{\|u - \hat{u}\|_{L^\sigma(\mathcal{M})}^2}{|\mathcal{M}|^{\frac{2}{\sigma}}} + \epsilon.$$

- De la monotonía de \mathcal{G} deducimos que

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(\hat{u}))(u - \hat{u}) dA \geq 0.$$

- $\int_{\mathcal{M}} QS(z - \hat{z})(u - \hat{u})dA$ está mayorado por

$$\int_{\mathcal{M}} QS|z - \hat{z}||u - \hat{u}|dA \leq Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|z - \hat{z}\|_{L^1(\mathcal{M})} \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}$$

y como u verifica la propiedad de no degeneración fuerte, podemos aplicar el Lema 7 con $q = 1$ para mayorar la anterior expresión por

$$C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p$$

donde C_l es la constante del Lema 7 ($C_l = (b_w - b_i)\hat{C}$).

Sustituyendo en (I.51) las estimaciones obtenidas en el caso $p > 2$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq \left(C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{C_0}{\tilde{C}_{1,p,\infty}} \right) \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p + \\ &+ \tilde{C}_0 \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2, \end{aligned} \quad (I.54)$$

y en el caso $p = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq \left(C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{|\mathcal{M}|^{\frac{2}{\sigma}}}{\tilde{C}_{1,2,\sigma}} \right) \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^2 + \\ &+ \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \frac{\epsilon}{\tilde{C}_{1,2,\sigma}}, \end{aligned} \quad (I.55)$$

Etapa 2. *Estudio del signo de algunas constantes.*

- Comenzamos con el caso $p > 2$, si $C_l Q \|S\|_{L^\infty} - \frac{C_0}{\tilde{C}_{1,p,\infty}} \leq 0$, entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq \tilde{C}_0 \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$$

de lo que por el Lema de Gronwall se deduce que

$$\|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq e^{2\tilde{C}_0 t} \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 = 0,$$

y por tanto, $\|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})} = 0$ lo que concluiría la demostración de la parte *i*) del Teorema 7.

Para $p = 2$, si $C_l Q \|S\|_{L^\infty} - \frac{1}{\tilde{C}_{1,2,\sigma}} \leq 0$, procediendo como en el caso anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq e^{2t} \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 - \frac{2\epsilon}{\tilde{C}_{1,2,\sigma}} (e^{2t} - 1) \leq \\ &\leq -2\epsilon C_l Q \|S\|_{L^\infty} (e^{2t} - 1), \end{aligned}$$

y como la desigualdad obtenida es válida para todo ϵ , se concluye la unicidad.

• Si $C_l Q \|S\|_\infty - \frac{1}{\bar{c}_{1,p,\infty}} > 0$, introducimos un cambio de escala apropiado ($\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_\delta$) que permita asegurar que la constante que acompaña al término $\|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p$ es negativa, con lo que se concluye como en el caso anterior. A continuación detallamos el cambio de escala elegido y la dependencia de las constantes de continuidad respecto del mismo.

Se considera una dilatación D de magnitud δ en la variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, ($\delta > 0$ parámetro que determinaremos más adelante)

$$\begin{aligned} D : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow \tilde{x} = \delta x. \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in W_\lambda$, donde W_λ es el dominio de la carta $(W_\lambda, \mathbf{w}_\lambda)$, y sea P una parametrización local (inversa de \mathbf{w}_λ),

$$\begin{aligned} P : \mathbf{w}_\lambda(W_\lambda) &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\theta, \varphi) &\rightarrow (x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1(\theta, \varphi) \\ x_2 &= P_2(\theta, \varphi) \\ x_3 &= P_3(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \delta P_1(\theta, \varphi) = \tilde{P}_1(\theta, \varphi) \\ \tilde{x}_2 &= \delta P_2(\theta, \varphi) = \tilde{P}_2(\theta, \varphi) \\ \tilde{x}_3 &= \delta P_3(\theta, \varphi) = \tilde{P}_3(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ es ahora una parametrización de $D(W_\lambda)$. Así, la dilatación permite definir un atlas $\{\tilde{W}_\lambda, \tilde{\mathbf{w}}_\lambda\}$ en \mathcal{M}_δ como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\lambda &:= D(W_\lambda) \\ \tilde{\mathbf{w}}_\lambda : \tilde{W}_\lambda &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tilde{x} &\rightarrow \mathbf{w}_\lambda\left(\frac{\tilde{x}}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Podemos considerar una partición de la unidad $\{\tilde{\alpha}_\lambda\}$ subordinada al recubrimiento $\{\tilde{W}_\lambda\}$ de \mathcal{M}_δ definida a partir de $\{\alpha_\lambda\}$ partición de la unidad subordinada a $\{W_\lambda\}$, definida como

$$\tilde{\alpha}_\lambda(\tilde{x}) = \alpha_\lambda\left(\frac{\tilde{x}}{\delta}\right).$$

En particular se verifica que $\sup|\tilde{\alpha}_\lambda| = \sup|\alpha_\lambda|$.

Asimismo, D define una métrica $\tilde{\mathbf{g}}$, dada localmente por la fórmula usual

$$\tilde{g}_{ij} := \langle D_i \tilde{\mathbf{P}}(\theta, \varphi), D_j \tilde{\mathbf{P}}(\theta, \varphi) \rangle_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}.$$

Entonces

$$\tilde{g}_{ij} = \langle \delta D_i \mathbf{P}(\theta, \varphi), \delta D_j \mathbf{P}(\theta, \varphi) \rangle = \delta^2 \langle D_i \mathbf{P}(\theta, \varphi), D_j \mathbf{P}(\theta, \varphi) \rangle = \delta^2 g_{ij}$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica \mathbf{g} de \mathcal{M} en W_λ . De la última igualdad se deduce que las constantes de coercitividad y continuidad de la métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ son las de \mathbf{g} multiplicadas por δ^2 . Es decir,

$$\begin{aligned} \nu \|\psi\|^2 &\leq \mathbf{g}(\psi, \psi) \leq \mu \|\psi\|^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{M} \\ \tilde{\nu} \|\tilde{\psi}\|^2 &\leq \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) \leq \tilde{\mu} \|\tilde{\psi}\|^2 \quad \forall \tilde{\psi} \in \mathcal{M}_\delta \end{aligned}$$

con $\tilde{\nu} = \delta^2 \nu$ y $\tilde{\mu} = \delta^2 \mu$.

Observación 2 Esta información sobre las constantes $\tilde{\nu}$ y $\tilde{\mu}$ será de gran utilidad en el cálculo explícito de la constante de Sobolev para \mathcal{M}_δ .

Es obvio que $(\mathcal{M}_\delta, \tilde{\mathbf{g}})$ es de nuevo una variedad Riemanniana de \mathbb{R}^3 de dimensión 2. En particular, si $\mathcal{M} = S^2$ la esfera unidad, entonces \mathcal{M}_δ es la esfera de radio δ . En efecto,

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{sen}\varphi \cos\theta & \tilde{x}_1 &= \delta \text{sen}\varphi \cos\theta \\ x_2 &= \text{sen}\varphi \text{sen}\theta & \tilde{x}_2 &= \delta \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \\ x_3 &= \cos\varphi & \tilde{x}_3 &= \delta \cos\varphi \\ g^\lambda &= \begin{pmatrix} \text{sen}^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \tilde{g}^\lambda &= \begin{pmatrix} \delta^2 \text{sen}^2\varphi & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sea u una función real definida sobre \mathcal{M} . Su expresión en las nuevas coordenadas viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathcal{M}_\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x} &\rightarrow \tilde{u}(\tilde{x}) = u\left(\frac{\tilde{x}}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Sus expresiones locales en términos de las parametrizaciones \mathbf{P} y $\tilde{\mathbf{P}}$ son las siguientes

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi) &:= u(P_1(\theta, \varphi), P_2(\theta, \varphi), P_3(\theta, \varphi)) = u(\mathbf{P}(\theta, \varphi)) \\ \tilde{u}(\theta, \varphi) &:= \tilde{u}(\tilde{\mathbf{P}}(\theta, \varphi)) = \tilde{u}(\delta \mathbf{P}(\theta, \varphi)) = u\left(\frac{\delta \mathbf{P}(\theta, \varphi)}{\delta}\right) = \\ &= u(\mathbf{P}(\theta, \varphi)) = u(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

En cuanto a las derivadas, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\tilde{x}}{\delta} \right) \quad i = 1, 2, 3. \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \theta} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Clarificamos lo anterior con la siguiente figura:

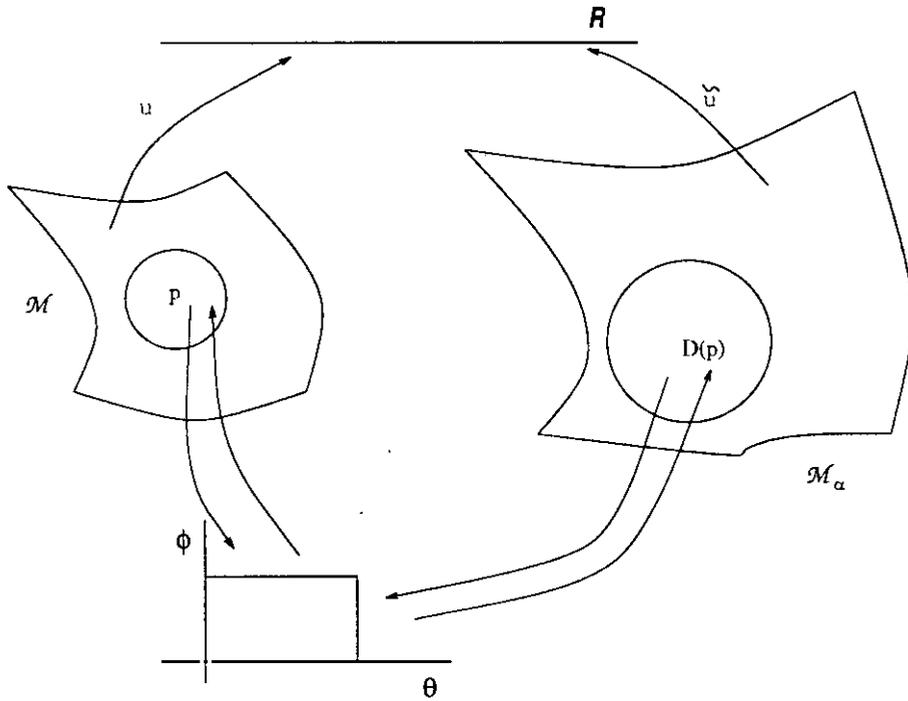


Figura 5.

Volviendo a la expresión local del pseudo-laplaciano, detallada en la sección anterior observamos que

$$\delta^p \operatorname{div}_{\mathcal{M}_\delta} (|\nabla_{\mathcal{M}_\delta} \tilde{u}|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}_\delta} \tilde{u}) = \operatorname{div}_{\mathcal{M}} (|\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u),$$

con lo que la ecuación en las nuevas coordenadas resulta ser la siguiente

$$(P_\delta) \begin{cases} \tilde{u}_t - \delta^p \operatorname{div}_{\mathcal{M}_\delta} (|\nabla_{\mathcal{M}_\delta} \tilde{u}|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}_\delta} \tilde{u}) + \mathcal{G}(\tilde{u}) \in QSB(\tilde{u}) + f & \text{en } (0, T) \times \mathcal{M}_\delta \\ \tilde{u}(0, \tilde{x}) = u_0(\frac{\tilde{x}}{\delta}). \end{cases}$$

Es claro que si \tilde{u} es solución de (P_δ) entonces $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $u(x) = \tilde{u}(\delta x)$ es solución de (P) . Por tanto, la unicidad de (P_δ) implica la

unicidad de (P) , y recíprocamente. *A continuación veremos que existe un número real $\delta > 0$ tal que la solución de (P_δ) es única.*

Sean u_δ y \tilde{u}_δ dos soluciones de (P_δ) tal que una de ellas verifica la propiedad de no degeneración fuerte. Procediendo como en la etapa 1, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}_\delta} |u_\delta(t) - \tilde{u}_\delta(t)|^2 dA_\delta + \delta^p \int_{\mathcal{M}_\delta} < |\nabla u_\delta|^{p-2} \nabla u_\delta - |\nabla \tilde{u}_\delta|^{p-2} \nabla \tilde{u}_\delta, \nabla u_\delta - \nabla \tilde{u}_\delta > dA_\delta \\ + \int_{\mathcal{M}_\delta} (\mathcal{G}(u_\delta) - \mathcal{G}(\tilde{u}_\delta))(u_\delta - \tilde{u}_\delta) dA_\delta = Q \int_{\mathcal{M}_\delta} S_\delta(z_\delta - \hat{z}_\delta)(u_\delta - \tilde{u}_\delta) dA_\delta \end{aligned}$$

para algún $z_\delta \in \beta(u_\delta)$ y $\hat{z}_\delta \in \beta(\tilde{u}_\delta)$. Aquí S_δ viene dado por $S_\delta : \mathcal{M}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, $S_\delta(\tilde{x}) = S(\frac{\tilde{x}}{\delta})$.

Las expresiones (1.54) y (1.55) obtenidas para u y \hat{u} soluciones de (P) permiten estimar $u_\delta - \hat{u}_\delta$ para u_δ y \hat{u}_δ soluciones de (P_δ) . Se tiene que si $p > 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta)}^2 &\leq \\ &\leq (C_{l,\delta} Q \|S_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} - \frac{C_0 \delta^p}{\tilde{C}_{1,p,\infty,\delta}}) \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)}^p + \tilde{C}_0 \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta)}^2, \end{aligned} \quad (1.56)$$

y si $p = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta)}^2 &\leq (C_{l,\delta} Q \|S_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} - \frac{\delta^2 |\mathcal{M}_\delta|^{\frac{1}{2}}}{\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta}}) \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)}^2 \\ &\quad + \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta)}^2 + \frac{\epsilon}{\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Nuestro trabajo ahora es determinar las constantes $C_{l,\delta}$, $\tilde{C}_{1,p,\infty,\delta}$ y $\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta}$ en función de δ . Consideremos el espacio de Banach

$$V_\delta = \{u \in L^2(\mathcal{M}_\delta) : \nabla u \in L^p(T\mathcal{M}_\delta)\}.$$

Cálculo de $C_{l,\delta}$. Veamos como varían las estimaciones del Lema 7 con $q = 1$ al sustituir \mathcal{M} por \mathcal{M}_δ . Se tiene que

$$\|z_\delta - \hat{z}_\delta\|_{L^1(\mathcal{M}_\delta)}^2 \leq (b_w - b_i) \tilde{C}_\delta \|u_\delta - \hat{u}_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)}^{p-1}$$

donde $\tilde{C}_\delta = \max\{C_\delta, \frac{|\mathcal{M}_\delta|}{c_0^{p-1}}\} = \delta^2 \max\{C, \frac{|\mathcal{M}|}{c_0^{p-1}}\} = \delta^2 \tilde{C}$, C y C_δ constantes de no degeneración para \mathcal{M} y \mathcal{M}_δ respectivamente. Se concluye, pues, que

$$C_{l,\delta} = \delta^2 C_l.$$

Cálculo de $\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta}$. Recordemos que esta constante verifica

$$\|f\|_{L^\sigma(\mathcal{M})} \leq \tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta} (\|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{T}\mathcal{M}_\delta)}^2 + \|f\|_{L^2(\mathcal{M}_\delta)}^2).$$

Como ya se vió en (I.19),

$$\|f\|_{L^\sigma(\mathcal{M}_\delta)}^2 \leq 2\tilde{\mu}^{\frac{2}{\sigma}} k(r, 2, \sigma)^2 \tilde{\nu}^{-1} \max\{1, \tilde{\mu}\} (1 + \sup|\nabla\tilde{\alpha}_\lambda|)^2 (\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2).$$

Dado que $\tilde{\nu} = \delta^2\nu$, $\tilde{\mu} = \delta^2\mu$ y $|\tilde{\alpha}_\lambda| = \frac{1}{\delta}|\alpha_\lambda|$, se obtiene

$$\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta} = 2\delta^{\frac{4}{\sigma}-2}\mu^{\frac{2}{\sigma}} k(r, p, \sigma)^2 \nu^{-1} \max\{1, \delta^2\mu\} (1 + \sup\frac{1}{\delta}|\nabla\alpha_\lambda|)^2.$$

Cálculo de $\tilde{C}_{1,p,\infty,\delta}$. Se trata de una constante relacionada con la constante de continuidad para la inclusión $V_\delta \subset L^\infty(\mathcal{M}_\delta)$. En concreto, si $\delta = 1$ se obtiene la constante $\tilde{C}_{1,p,\infty}$ que ya fue calculada en (I.20) para $p > 2$,

$$\tilde{C}_{1,p,\infty} = 2^{p-1} k(p, r)^p \max\{\nu^{-\frac{p}{2}}, \nu^{-1}\mu^{\frac{p}{2}}\} (1 + C_{1,2,p} \sup|\nabla\alpha_\lambda|)^p \max\{1, |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2}}\},$$

por tanto

$$\tilde{C}_{1,p,\infty,\delta} = 2^{p-1} k(p, r)^p \max\{\tilde{\nu}^{-\frac{p}{2}}, \tilde{\nu}^{-1}\tilde{\mu}^{\frac{p}{2}}\} (1 + C_{1,2,p,\delta} \sup|\nabla\tilde{\alpha}_\lambda|)^p \max\{1, |\mathcal{M}_\delta|^{\frac{p-2}{2}}\}.$$

Usando que $\tilde{\nu} = \delta^2\nu$, $\tilde{\mu} = \delta^2\mu$ y $|\nabla\tilde{\alpha}_\lambda| = \frac{1}{\delta}|\nabla\alpha_\lambda|$ obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1,p,\infty,\delta} &= 2^{p-1} k(p, r)^p \max\{\delta^{-p}\nu^{-\frac{p}{2}}, \delta^{p-2}\nu^{-1}\mu^{\frac{p}{2}}\} (1 + \delta^{\frac{2}{p}-1}\mu^{\frac{1}{p}} k(r, 2, p)\nu^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \max\{1, \delta\mu^{\frac{1}{2}}\} (1 + \sup\frac{1}{\delta}|\nabla\alpha_\lambda|) \sup\frac{1}{\delta}|\nabla\alpha_\lambda|)^p \max\{1, \delta^{p-2}|\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2}}\}. \end{aligned}$$

Estudio del signo de $K_{p,\delta}$ definida por

$$K_{p,\delta} := \begin{cases} C_{l,\delta} Q \|S_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} - \frac{\delta^2 |\mathcal{M}|^{\frac{2}{\sigma}}}{\tilde{C}_{1,2,\sigma,\delta}} & \text{si } p = 2, \\ C_{l,\delta} Q \|S_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} - \frac{\delta^p C_0}{\tilde{C}_{1,p,\infty,\delta}} & \text{si } p > 2. \end{cases}$$

Es claro que $\|S_\delta\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} = \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})}$. Sustituyamos ahora cada constante por su valor

$$K_{p,\delta} = \begin{cases} \delta^2 C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M}_\delta)} - \frac{\delta^2 \delta^{\frac{4}{\sigma}} |\mathcal{M}|^{\frac{2}{\sigma}}}{\delta^{\frac{4}{\sigma}-2} \max\{1, \delta^2\mu\} (1 + \frac{1}{\delta} \sup|\nabla\alpha_\lambda|)^2 C_2} & \text{si } p = 2, \\ \delta^2 C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{\delta^p C_0}{\max\{\delta^{-p}\nu^{-\frac{p}{2}}, \delta^{p-2}\nu^{-1}\mu^{\frac{p}{2}}\} \tilde{K}_{p,\delta} C_p} & \text{si } p > 2, \end{cases}$$

donde

$$\tilde{K}_{p,\delta} = (1 + C_{1,2,p,\delta} \sup \frac{1}{\delta} |\nabla \alpha_\lambda|)^p \max\{1, \delta^{p-2} |\mathcal{M}|^{\frac{p-2}{2}}\}$$

y con C_2 y C_p independientes de δ . Por tanto, si $p = 2$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_{2,\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{\delta^4 |\mathcal{M}|^{\frac{2}{\sigma}}}{\max\{1, \delta^2 \mu\} (1 + \frac{1}{\delta} \sup |\nabla \alpha_\lambda|)^2 C_2},$$

y si $p > 2$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K_{p,\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 C_l Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{\delta^p C_0}{\max\{\delta^{-p\nu} \nu^{-\frac{p}{2}}, \delta^{p-2} \nu^{-1} \mu^{\frac{p}{2}}\} \tilde{K}_{p,\delta} C_p}.$$

En ambos casos, el límite es cero. Lo que permite reducir la demostración al primer caso.

Para demostrar la parte (ii) del Teorema 7 supondremos que existen dos soluciones débiles y acotadas u y \hat{u} de (P) que verifican la propiedad de no degeneración débil. Procediendo como en (i) se tiene que el término

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{\tilde{C}_{1,p,q}} \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p$$

está mayorado por

$$\int_{\mathcal{M}} QS(z - \hat{z})(u - \hat{u}) dA + \tilde{C}_0 \|u - \hat{u}\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$$

donde $\tilde{C}_{1,p,q} = \tilde{C}_{1,p,\infty}$ si $p > 2$, e igual a $\tilde{C}_{1,2,\sigma}$ si $p = 2$ y \tilde{C}_0 definida en (1.52). Utilizando la conclusión (ii) del Lema 7 se obtiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - \hat{u}\|_2^2 \leq (C_d Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{C_0}{C_{1,p}}) \|u - \hat{u}\|_\infty^p + \tilde{C}_0 \|u - \hat{u}\|_2^2$$

con C_d la constante de no degeneración débil del lema 7. Se concluye la unicidad como en (i) estudiando el signo de $C_d Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \frac{1}{C_{1,p,\infty}}$ y haciendo un cambio de escala si éste es positivo. ■

4.3 Criterio sobre u_0 para la existencia de soluciones no degeneradas en el modelo unidimensional.

La cuestión de conocer bajo qué hipótesis sobre los datos u_0 y f es posible mostrar la existencia de una solución no degenerada admite distintos tipos de respuestas. En realidad la cuestión se plantea ya en un marco más genérico en el que la función no degenerada no es necesariamente solución del problema (P) . Una respuesta en este sentido, para el caso unidimensional y $p = 2$, es la siguiente

Proposición 6 *Sea $w \in C^1((-1, 1))$ tal que existe $\epsilon_0 > 0$ verificando que*

- (i) *el conjunto $\{x \in (-1, 1) : |w(x) + 10| \leq \epsilon_0\}$ tiene un número finito de componentes conexas I_j con $j = 1, \dots, N$ y para todo $j \exists x_j \in I_j$ tal que $w(x_j) = -10$,*
- (ii) *existe $\delta_0 > 0$ tal que si $x \in I_j$ entonces $|w_x(x)| \geq \delta_0$.*

Entonces w satisface la propiedad de no degeneración fuerte.

Demostración.

Sea $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ y $x \in \{y \in (-1, 1) : |w(y) + 10| \leq \epsilon\}$, $x \in I_j$. Por el Teorema del valor medio aplicado en la componente conexa I_j , existirá $x' \in I_j$ intermedio entre x y x_j tal que

$$w(x) - w(x_j) = w_x(x')(x - x_j).$$

Por tanto $|x - x_j| = \frac{|w(x) - w(x_j)|}{|w_x(x')|}$, y como $x' \in I_j$, $|w_x(x')| \geq \delta_0$, y se concluye que

$$|x - x_j| \leq \frac{|w(x) + 10|}{\delta_0} \leq k\epsilon,$$

para una cierta $k > 0$. En conclusión

$$|I_j| \leq 2k\epsilon$$

y por tanto

$$|\{x \in (-1, 1) : |w(x) + 10| \leq \epsilon\}| \leq 2Nk\epsilon$$

lo que demuestra el resultado. ■

Finalizaremos el capítulo abordando el caso en que la función w es solución de (P_1) . Aproximamos u por u_ϵ solución del problema

$$\begin{cases} u_t - ((1-x^2)|u_x|^{p-2}u_x)_x = QS(x)\beta_\epsilon(u) - \mathcal{G}_\epsilon(u) + f(x) & \text{en } (0, T) \times (-1, 1) \\ (1-x^2)u_x = 0 & \text{en } x = -1 \text{ y } x = 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } (-1, 1) \end{cases}$$

con β_ϵ y \mathcal{G}_ϵ aproximaciones monótonas de β y \mathcal{G} de clase C^1 . Supondremos por simplicidad que $f, u_0 \in C^1(-1, 1)$.

Supongamos que $|u_\epsilon| \leq K$ en $(0, T) \times (-1, 1)$ La función $v = u_x$ verifica

$$\begin{cases} v_t - ((1-x^2)|v|^{p-2}v)_{xx} = v(QS(x)\beta'_\epsilon(u) - \mathcal{G}_\epsilon(u)) + QS_x(x)\beta_\epsilon(u) + f_x(x) \\ (1-x^2)v = 0 & \text{en } x = \pm 1 \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{en } (-1, 1), \end{cases}$$

llamemos $a(t, x) := QS(x)\beta'_\epsilon(u) - \mathcal{G}_\epsilon(u)$ y $b(t, x) = QS_x(x)\beta_\epsilon(u) + f_x(x)$.

Supongamos que existen \underline{x} y \bar{x} con $-1 < \underline{x} < \bar{x} < 1$ tales que

$$(H_1) \begin{cases} S_x(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-1, \underline{x}), \quad S_x(x) \leq 0 \quad \forall x \in (\bar{x}, 1) \\ f_x(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-1, \underline{x}), \quad f_x(x) \leq 0 \quad \forall x \in (\bar{x}, 1) \\ u_{0x}(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-1, \underline{x}), \quad u_{0x}(x) \leq 0 \quad \forall x \in (\bar{x}, 1). \end{cases}$$

Suponemos también que

$$(H_2) \begin{cases} u_{t,x}(t, \underline{x}) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad u_{t,x}(t, \bar{x}) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ u_t(t, \underline{x}) > -10 \quad \forall t \in [0, T], \quad u_t(t, \bar{x}) < -10 \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Nótese que la primera condición de (H_2) se tiene si por ejemplo $S(x)$, $f(x)$ y $u_0(x)$ son funciones pares respecto del origen y $\underline{x} = \bar{x} = 0$.

Sea ahora $w(t, x) := e^{-\lambda t}v(t, x)$. Entonces $v = we^{\lambda t}$ y por tanto

$$\begin{aligned} w_t &= e^{-\lambda t} \left(-\lambda v + ((1-x^2)|v|^{p-2}v)_{xx} - va(t, x) - b(t, x) \right) = \\ &= -\lambda w + \left((1-x^2)e^{\frac{-\lambda t}{p-1}} |w|^{p-2}w \right)_{xx} - aw - be^{-\lambda t} \\ &\geq \left((1-x^2)e^{\frac{-\lambda t}{p-1}} |w|^{p-2}w \right)_{xx} + be^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

supuesto λ elegido tal que

$$-\lambda - a(t, x) \geq 0 \quad \text{e.d. } \lambda \leq -\sup a(t, x).$$

Nótese que como estamos suponiendo $|u_\epsilon| \leq K$ entonces tal λ siempre existe.

Lema 8 Sea $\underline{h}(t, x)$ verificando

$$\begin{cases} h_t - \left((1-x^2)e^{\frac{-\lambda t}{p-1}} |h|^{p-2} h \right)_{xx} = be^{-\lambda t} & \text{en } (0, T) \times (-1, \underline{x}), \\ h(t, \underline{x}) = -10 & \forall t \in (0, T), \\ h(x, 0) = u_{0x}(x) & \text{si } x \in (-1, \underline{x}). \end{cases}$$

Entonces

$$u_{t,x}(t, x) \geq e^{\lambda t} \underline{h}(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (-1, \underline{x}). \quad \square$$

Demostración.

Basta aplicar el principio de comparación entre h y $w = e^{-\lambda t} u_{t,x}$ (que es una supersolución). Nótese que el operador elíptico de segundo orden asociado es T-acretivo en $L^1(-1, \underline{x})$ (lo que es una pequeña variación de los resultados de Benilan [1972]). ■

De manera análoga se puede obtener que

$$u_x(t, x) \leq -e^{\lambda t} \bar{h}(t, x) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (\bar{x}, 1),$$

para λ y \bar{h} adecuados. Estos dos resultados implican la condición (ii) de la Proposición 6. La condición (i) ahora se debe imponer a $u(t, x)$ se tiene si se supone además que

$$(H_3) \quad u(t, x) \text{ verifica la condición (i) } \forall t \in [0, T].$$

En virtud de los resultados existentes en la literatura no parece difícil mostrar que la hipótesis (H_3) se tiene si los datos $u_0(x)$ y $f(x)$ no oscilan más que un número finito de veces y $-10 < u(t, x) \forall (t, x) \in (0, T) \times (\underline{x}, \bar{x})$. ■

En conclusión: si se cumplen (H_1) , (H_2) y (H_3) entonces la solución u generada por paso al límite en u_ϵ es no degenerada. Finalmente, si rotamos la solución unidimensional por el eje que une los polos encontramos una solución bidimensional no degenerada.

Capítulo II

Estabilización de soluciones. Problema estacionario.

En este capítulo, establecemos diversos resultados sobre el comportamiento de las soluciones débilmente acotadas de nuestro modelo cuando $t \rightarrow \infty$; estudio motivado por la cuestión de la estabilidad del clima global de nuestro planeta a largo plazo del tiempo.

En primer lugar, analizaremos el modelo de tipo Sellers con técnicas de semigrupos y demostraremos la existencia de un atractor global para el semigrupo asociado a este modelo.

Posteriormente, abordaremos un modelo más general (en el que pueden aparecer términos temporales en la ecuación) en el que se incluye también el de tipo Budyko, y concluiremos con la estabilización de soluciones de (P) a una solución del modelo estacionario asociado.

La tercera parte de este capítulo comienza con el estudio del modelo estacionario asociado a (P) estableciendo un resultado sobre la multiplicidad de soluciones del mismo en función de la constante solar. Asimismo, se estudia el diagrama de bifurcación con respecto a dicho parámetro mostrándose que tiene forma de "ese".

1 Aplicación de resultados abstractos al semigrupo asociado al modelo de tipo Sellers.

En esta sección, supondremos que β es una función continua localmente Lipschitz y que $f(t, x) \equiv f(x)$ con $f \in L^\infty(\mathcal{M})$. Esta vez definimos el operador no lineal A por

$$Au = -\Delta_p u + \mathcal{G}(u) - QS(\cdot)\beta(u) - f(\cdot)$$

con dominio dado por

$$D(A) = \{w \in V : Aw \in L^2(\mathcal{M})\}.$$

Tenemos el siguiente

Lema 9

- i) $\overline{D(A)} = L^2(\mathcal{M})$ y A genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en $L^2(\mathcal{M})$.
- ii) $\forall \lambda > 0$, $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ es un operador compacto de $L^2(\mathcal{M})$ en $L^2(\mathcal{M})$.
- iii) $S(t)$ es un semigrupo compacto $\forall t \in (0, \infty)$.

Demostración.

(i) La densidad de $D(A)$ en $L^2(\mathcal{M})$ resulta como en el Capítulo 1. La evolución del modelo de tipo Sellers es descrita por la familia de operadores $S(t) : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ que a cada dato inicial $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$ le hace corresponder $u(t) \in L^2(\mathcal{M})$, en el instante t , solución de

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 & \text{en } (0, \infty) \times \mathcal{M} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

Los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para los modelos de tipo Sellers (β lipschiziana y difusión lineal o no lineal), incluidos en el Capítulo 1, aseguran que $S(t)$ está bien definido. Además $S(t)$ verifica las propiedades de semigrupo, pues

$$\begin{aligned} S(t+s)u_0 &= S(t)u(s) = S(t)S(s)u_0 \quad \forall s, t \geq 0 \\ S(0)u_0 &= u_0 \quad \text{i.e. } S(0) = I \text{ en } L^2(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

(ii) Sea $(I + \lambda A)^{-1}: L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ y sea B un conjunto acotado de $L^2(\mathcal{M})$ i.e. $\exists C > 0$ tal que $B \subset B_C$, donde

$$B_C := \{h \in L^2(\mathcal{M}) : \|h\|_{L^2(\mathcal{M})} < C\}.$$

Veamos que $(I + \lambda A)^{-1}B$ es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$.

Toda función $u \in (I + \lambda A)^{-1}B$ verifica que $\exists h \in B \subset L^2(\mathcal{M})$ tal que

$$u + \lambda Au = h \text{ en } \mathcal{M}.$$

Multiplicando la ecuación por u e integrando en \mathcal{M} obtenemos

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}^p + \lambda \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)u - \lambda \int_{\mathcal{M}} QS(x)\beta(u)u = \int_{\mathcal{M}} (h+f)u$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} (h+f)u &\leq \left| \int_{\mathcal{M}} (h+f)u \right| \leq \int_{\mathcal{M}} |(h+f)u| \leq \\ &\leq \|h+f\|_{L^2(\mathcal{M})} \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \frac{1}{2} (\|h+f\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2). \end{aligned}$$

Dado que $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u)u dA \geq 0$ y que $m \leq \beta(r) \leq M \forall r \in \mathbb{R}$ llegamos a

$$\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}^p \leq C_1 + \lambda Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} M \int_{\mathcal{M}} |u| dA,$$

donde $C_1 = \frac{1}{2} \|h+f\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$. Aplicando las desigualdades de Hölder y Young a $\int_{\mathcal{M}} |u| dA$ obtenemos que

$$\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{L^p(T\mathcal{M})}^p \leq C_2,$$

donde $C_2 = C_1 + \lambda^2 Q^2 \|S\|_{L^\infty}^2 M^2 |\mathcal{M}|$. Luego existe una constante positiva C_3 tal que

$$\|u\|_V \leq C_3 \quad \forall u \in (I + \lambda A)^{-1}B$$

y por ser V un espacio de Banach reflexivo, podemos extraer una sucesión $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de la familia $(I + \lambda A)^{-1}B$, que converge a $\omega \in V$ en la topología débil, i.e.

$$u_j \rightharpoonup \omega \text{ débil en } V.$$

De la inclusión compacta $V \subset L^2(\mathcal{M})$, deducimos que existe una subsucesión de $\{u_j\}$, que seguiremos llamando $\{u_j\}$ que converge fuerte en $L^2(\mathcal{M})$, y por la unicidad de límite, es

$$u_j \rightarrow \omega \text{ fuerte en } L^2(\mathcal{M}),$$

con lo que queda demostrado que $(I + \lambda A)^{-1}B$ es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$, pues cada conjunto infinito de puntos de $(I + \lambda A)^{-1}B$ tiene punto de acumulación en $L^2(\mathcal{M})$.

Veamos ahora que $(I + \lambda A)^{-1} : L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M})$ es un operador continuo. Tomemos $\{h_n\} \subset L^2(\mathcal{M})$ tal que $h_n \rightarrow h$ en $L^2(\mathcal{M})$. Llamemos $u_n = (I + \lambda A)^{-1}h_n$ entonces u_n es solución del problema (P_N) $u_n + \lambda A u_n = h_n$ y tomando u_n como función test en la formulación débil de éste se tiene que

$$\|u_n\|_V \leq C.$$

Como V es un espacio de Banach reflexivo y la inclusión $V \subset L^2(\mathcal{M})$ existe una subsucesión $\{u_n\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{en } V - \text{débil}, \\ u_n &\rightarrow u && \text{en } L^2(\mathcal{M}) - \text{fuerte}. \end{aligned}$$

Consideremos la formulación débil de los problemas (P_n)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} u_n v + \lambda \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v + \lambda \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_n) v &= \\ = \lambda \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta(u_n) v + \int_{\mathcal{M}} (h_n + f) v &\quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la expresión anterior y usando el lema ??, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} u_n v + \lambda \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v + \lambda \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_n) v &= \\ = \lambda \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta(u_n) v + \int_{\mathcal{M}} (h_n + f) v &\quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

y por tanto $u = (I + \lambda A)^{-1}h$.

(iii) Sea B un subconjunto acotado de $L^2(\mathcal{M})$. Veamos que $S(t)B$ es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$.

Sea $u_0 \in B$, si llamamos $u(t)$ a $S(t)u_0$ entonces $u(t)$ verifica

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u + \mathcal{G}(u) = Q S(x) \beta(u) + f & \text{en } (0, \infty) \times \mathcal{M} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

Tomando en la formulación débil del problema la propia solución u como función test se llega a

$$\int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^p(\mathcal{M})}^p + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u) u =$$

$$= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta(u) u + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} f u.$$

Por las desigualdades de Hölder y Young, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(0,T;L^p(T\mathcal{M}))}^p + C_0 \|u\|_{L^2((0,T);L^2(\mathcal{M}))}^2 \\ \leq QM \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u| + \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |u| \leq \\ \leq \sqrt{T} |\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}} (QM \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} + \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})}) \|u\|_{L^2((0,T);L^2(\mathcal{M}))} \leq \\ \leq \frac{T|\mathcal{M}|(QM \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} + \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})})^2}{2C_0} + \frac{C_0 \|u\|_{L^2((0,T);L^2(\mathcal{M}))}^2}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(0,T;L^p(T\mathcal{M}))}^p + \frac{C_0}{2} \|u\|_{L^2((0,T);L^2(\mathcal{M}))}^2 \leq C_4$$

donde

$$C_4 = \frac{T|\mathcal{M}|(QM \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} + \|f\|_{L^\infty(\mathcal{M})})^2}{2C_0} + \sup_{u_0 \in B} \|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})}^2.$$

Así, $\|u\|_{L^1(0,T;V)} \leq C_5$ y por tanto, en casi todo $t \in (0, T)$ fijo, se tiene

$$\|u(t)\|_V \leq C_6$$

es decir,

$$\|S(t)u_0\|_V \leq C_6 \quad \forall u_0 \in B.$$

Como V es un espacio de Banach reflexivo y $V \subset L^2(\mathcal{M})$ con inyección compacta, tenemos

$$\exists \{u_n\} \subset S(t)B \text{ tal que } u_n \rightarrow u \text{ en } L^2(\mathcal{M})\text{-fuerte,}$$

entonces $\forall t \in (0, \infty)$, $S(t)B$ es relativamente compacto en $L^2(\mathcal{M})$. La continuidad de $S(t)$ en $L^2(\mathcal{M})$ se obtiene con un argumento similar al utilizado en (ii) para probar la continuidad del operador resolvente. ■

A continuación, recordamos algunos resultados generales y conceptos sobre conjuntos invariantes y atractores. Veremos que el semigrupo no lineal $\{S(t)\}$ que describe la dinámica de los modelos de tipo Sellers posee un atractor maximal en $L^2(\mathcal{M})$.

Definición 17 Un conjunto $\mathcal{A} \subset L^2(\mathcal{M})$ es un *atractor* para el semigrupo $S(t)$ si

- i) \mathcal{A} es un conjunto invariante por el semigrupo (e.d. $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$),
- ii) existe U entorno abierto de \mathcal{A} tal que para cada $u_0 \in U$ se tiene que $S(t)u_0$ converge a \mathcal{A} cuando $t \rightarrow \infty$, i.e.

$$\text{dist}_{L^2}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

El mayor abierto U que verifica lo anterior es llamado “cuenca de atracción de \mathcal{A} ”.

Definición 18 Diremos que $\mathcal{A} \subset L^2(\mathcal{M})$ es un atractor global o universal para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si \mathcal{A} es un atractor compacto que atrae cada conjunto acotado B_0 de $L^2(\mathcal{M})$ uniformemente. Es decir, $\forall B_0 \subset L^2(\mathcal{M})$ acotado,

$$d(S(t)B_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty$$

donde $d(S(t)B_0, \mathcal{A})$ es la semidistancia así definida,

$$d(S(t)B_0, \mathcal{A}) = \sup_{x \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|x - y\|_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Definición 19 Sea $\mathcal{B} \subset L^2(\mathcal{M})$ y U abierto de $L^2(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{B} \subset U$. \mathcal{B} es un conjunto absorbente en U , si las trayectorias de cada conjunto acotado B_0 de U entran en \mathcal{B} a partir de un cierto t (que puede depender del conjunto B_0), es decir,

$$\forall B_0 \subset U, B_0 \text{ acotado}, \exists t_1 = t_1(B_0) \\ \text{tal que } S(t)B_0 \subset \mathcal{B} \quad \forall t \geq t_1.$$

También se dice que \mathcal{B} absorbe los acotados de U .

En esta línea, hemos obtenido los siguientes resultados para el modelo de tipo Sellers con operador de difusión lineal o no lineal.

Teorema 8 El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ asociado al modelo de tipo Sellers posee un atractor global.

Demostración.

Etapa 1. Existencia de un conjunto absorbente acotado en $L^2(\mathcal{M})$.

Multiplicando la ecuación por u , integrando en \mathcal{M} y utilizando las desigualdades de Hölder y Young, obtenemos como en (I.32) la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq -C_1 \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + C_2,$$

con C_1 y C_2 constantes positivas. Llamemos $U(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2$, entonces la expresión anterior se convierte en

$$U'(t) \leq -C_1 U(t) + C_2.$$

Por el Lema de Gronwall deducimos que

$$U(t) \leq U(0)e^{-C_1 t} + \frac{C_1}{C_2}(1 - e^{-C_1 t})$$

y cuando $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \leq \frac{C_1}{C_2}$$

es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq \frac{C_1}{C_2}.$$

Lo que muestra que el conjunto $\mathcal{B} = B_{L^2(\mathcal{M})}(0, \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \epsilon)$, (bola abierta de $L^2(\mathcal{M})$ centrada en el origen y con radio $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \epsilon$) es un conjunto absorbente acotado en $L^2(\mathcal{M})$.

Etapla 2. *Existencia de un atractor global.*

La existencia de un conjunto absorbente acotado en $L^2(\mathcal{M})$ (etapa 1) y la compacidad del semigrupo $\{S(t)\}$ en $L^2(\mathcal{M})$ para casi todo t permiten la aplicación de un resultado abstracto (ver Temam [1988], Teorema I.1.1) que asegura que el conjunto ω -límite de B ($\omega(B)$) es un atractor global compacto, conexo y maximal para la relación de inclusión. ■

El hecho de que el semigrupo $\{S(t)\}$ posea un funcional de Lyapunov nos da nueva información sobre el atractor. Veamos que existe una función de Lyapunov asociada al semigrupo de Sellers.

Proposición 7 *El funcional*

$$J(w) = \frac{1}{p} \int_{\mathcal{M}} |\nabla w|^p + \int_{\mathcal{M}} G(w) - Q \int_{\mathcal{M}} S(x)j(w) - \int_{\mathcal{M}} fw$$

donde

$$j(r) = \int_0^r \beta(s) ds \quad G(r) = \int_0^r \mathcal{G}(s) ds$$

es una función de Lyapunov para el semigrupo $S(t)$ en $V \subset L^2(\mathcal{M})$.

Demostración. Es fácil ver que

- i) $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo;
- ii) para cada $u_0 \in V$, la función $t \mapsto J(S(t)u_0)$ es decreciente; puesto que esta regularidad del dato inicial garantiza que $u_t \in L^2(\mathcal{M})$ (ver Lema 5) y como J es diferenciable en el sentido de Gateaux, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(J(u)) = \langle J'(u), u_t \rangle_{L^2(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})} = - \langle u_t, u_t \rangle_{L^2(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})} \leq 0;$$

- iii) si $J(S(\tau)u_1) = J(u_1)$ para algún $\tau > 0$, entonces u_1 es un punto fijo del semigrupo.

Sabemos que $t \mapsto J(S(t)u_0)$ es no-creciente, luego si $J(S(\tau)u_1) = J(u_1)$ entonces $J(S(t)u_1) = J(u_1) \forall t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$. Luego,

$$\frac{d}{dt}(J(u)) = 0 \quad t \in (0, \tau)$$

y

$$u_t = 0 \quad t \in (0, \tau).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S(t)u_1 &= u_1 & t \in (0, \tau) \\ S(s)S(t)u_1 &= S(s)u_1 = u_1 & t \in (0, \tau) \quad s \in (0, \tau) \\ S(t)u_1 &= u_1 & \forall t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

■

Corolario 2 Sea Π el conjunto de puntos fijos del semigrupo $\{S(t)\}$. Entonces el atractor global \mathcal{A} es la variedad inestable de Π ($\mathcal{A} = M_+(\Pi)$). Además, si Π es discreto, \mathcal{A} es la unión de Π y las curvas heteroclínicas que unen los elementos de Π .

La demostración es consecuencia inmediata de la existencia de un funcional de Lyapunov, un atractor global y del Teorema VII.4.1 de Temam [1988].

En esta sección hemos comenzado el estudio de la dinámica del modelo climatológico de Sellers. Partiendo de los resultados de existencia y unicidad de estos modelos, hemos definido un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores continuos y compactos. El segundo paso fue probar la existencia de un atractor global maximal, a partir de la construcción de un conjunto absorbente. En la siguiente sección se llega a una descripción más completa de este atractor.

2 Estabilización de soluciones para un modelo climatológico más general.

En esta sección utilizamos técnicas válidas para modelos cuyo coalbedo es un grafo maximal monótono acotado general (que incluye también el modelo de tipo Budyko) y que en particular pueden también aplicarse al modelo de Sellers mejorando así el resultado de la sección anterior.

Se considera f eventualmente dependiente del tiempo ($f = f(t, x)$) y suponemos que existe $f_\infty \in V'$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^{t+1} \|f(\tau, \cdot) - f_\infty(\cdot)\|_{V'} d\tau = 0.$$

Dada u solución débilmente acotada de (P) , se define el conjunto ω - límite de u en $L^2(\mathcal{M})$ de la siguiente manera

$$\omega(u) = \{u_\infty \in V \cap L^\infty(\mathcal{M}) : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } u(t_n, \cdot) \rightarrow u_\infty \text{ en } L^2(\mathcal{M})\}.$$

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos ω - límite del modelo.

Teorema 9 *Sea $u_0 \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$. Entonces si $u \in L^\infty((0, \infty); V)$ se tiene que*

(i) $\omega(u) \neq \emptyset$ para u solución de (P) con $u(0, x) = u_0(x)$;

(ii) si $u_\infty \in \omega(u)$ entonces $\exists t_n \rightarrow +\infty$ tal que $u(t_n + s, \cdot) \rightarrow u_\infty$ en $L^2((-1, 1), L^2(\mathcal{M}))$ y u_∞ es solución débil del modelo estacionario

$$(P_\infty) \quad -\Delta_p u_\infty + \mathcal{G}(u_\infty) \in QS(x)\beta(u_\infty) + f_\infty \text{ en } \mathcal{M},$$

(iii) además, si $u_\infty \in \omega(u)$ existe $\hat{t}_n \rightarrow +\infty$ tal que $u(\hat{t}_n, \cdot) \rightarrow u_\infty$ en V .

Demostración.

Está inspirada en un resultado de naturaleza similar mostrado en Díaz - Thelin [1994].

(i) Como $u \in L^\infty((0, \infty); V)$ entonces $\{u(t_n, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en V . El carácter reflexivo del espacio de Banach V permite extraer una subsucesión $\{u(t_{n_j}, \cdot)\}_{n_j \in \mathbb{N}}$ que converge débilmente en V , es decir,

$$\exists v \in V \text{ tal que } u(t_{n_j}, \cdot) \rightharpoonup v \text{ en } V, \text{ cuando } t_{n_j} \rightarrow \infty.$$

De la inclusión compacta $V \subset L^2(\mathcal{M})$, se deduce que la sucesión anterior posee una subsucesión (que seguiremos llamando $\{u(t_{n_j}, \cdot)\}_{n_j \in \mathcal{N}}$), que converge a v en $L^2(\mathcal{M})$ fuerte, es decir,

$$u(t_{n_j}, \cdot) \rightarrow v \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \text{ - fuerte.}$$

Así $v \in \omega(u)$ y $\omega(u) \neq \emptyset$.

(ii) La primera parte es una consecuencia de la integrabilidad de u_t (Lema 4, cap.1 de esta memoria). Sea $u_\infty \in \omega(u)$, entonces

$$\exists t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } u(t_n, \cdot) \rightarrow u_\infty \text{ en } L^2(\mathcal{M}).$$

$$\begin{aligned} |u(t_n + s, x) - u(t_n, x)| &= \left| \int_{t_n}^{t_n+s} u_t(\sigma, x) d\sigma \right| \leq \int_{t_n}^{t_n+1} |u_t(\sigma, x)| d\sigma \\ &\leq \sqrt{2} \left(\int_{t_n}^{t_n+1} |u_t|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|u(t_n + s) - u(t_n)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq 2 \int_{\mathcal{M}} \int_{t_n}^{t_n+1} |u_t|^2 d\sigma dA = \\ &= 2 \|u_t\|_{L^2((t_n-1, t_n+1); L^2(\mathcal{M}))}^2. \end{aligned}$$

Como $t_n \rightarrow +\infty$ es posible extraer un subsucesión $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} - t_{n_{k-1}} \leq 2$ y utilizando que $u_t \in L^2((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))$ se tiene que $\|u_t\|_{L^2((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))}^2 \geq \sum_n \|u_t\|_{L^2((t_n-1, t_n+1); L^2(\mathcal{M}))}^2$ y se deduce

$$\|u_t\|_{L^2((t_n-1, t_n+1); L^2(\mathcal{M}))}^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } t_n \rightarrow \infty.$$

Luego $u(t_n + s, \cdot) \rightarrow u_\infty$ en $L^2(\mathcal{M})$ para casi todo $s \in (-1, 1)$, i.e.

$$\|u(t_n + s)\|_{L^2(\mathcal{M})} \rightarrow \|u_\infty\|_{L^2(\mathcal{M})} \quad c\forall s \in (-1, 1),$$

además,

$$\|u(t_n + s)\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \|u\|_{L^\infty((0, \infty); L^2(\mathcal{M}))}$$

y por el Teorema de la convergencia dominada,

$$u(t_n + \cdot, \cdot) \rightarrow u_\infty \text{ en } L^2((-1, 1); L^2(\mathcal{M})).$$

Para demostrar la segunda parte de (ii) consideramos la formulación débil de (P) . Construyendo funciones test adecuadas, veremos que al pasar al límite, obtenemos la formulación débil de (P_∞) .

Consideramos funciones $v(t, x) = \varphi(t - t_n)\xi(x)$, con $\xi \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$ y $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$, $\varphi \geq 0$ y $\int_{-1}^1 \varphi = 1$. Sustituyendo en la formulación débil las funciones v así construidas, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} u_t \xi \varphi(t - t_n) dA dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \xi \varphi(t - t_n) \rangle dA dt + \\ & + \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u) \xi \varphi(t - t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} QS(x) z \xi \varphi(t - t_n) + \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} f \xi \varphi(t - t_n) \end{aligned}$$

para algún $z \in \beta(u(t, x))$.

Como $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$, sabemos que

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} u_t \xi \varphi(t - t_n) dA dt = - \int_{t_{n-1}}^{t_n+1} \int_{\mathcal{M}} u \xi \varphi'(t - t_n) dA dt.$$

Introducimos el cambio de variable $s = t - t_n$ y llamaremos $U_n = u(t_n + s, x)$, así

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} U_n \xi \varphi'(s) dA ds + \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n, \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds + \\ & + \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(U_n) \xi \varphi(s) dA ds = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_n \xi \varphi(s) dA ds + \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} f \xi \varphi(s) dA ds, \end{aligned}$$

para $z_n \in \beta(U_n)$.

Etapa 1. Estimaciones a priori.

Como $u \in L^\infty((0, \infty); V)$ y $U_n(s, x) = u(t_n + s, x)$, deducimos que $\{U_n\}$ es una sucesión acotada en $L^\infty((-1, 1); V)$, pues

$$\|U_n\|_{L^\infty((-1, 1); V)} \leq \|u\|_{L^\infty((0, \infty); V)}.$$

Veamos que la sucesión $\{|\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n\}_n$ está acotada en $L^\infty(-1, 1; L^{p'}(T\mathcal{M}))$ con $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\int_{\mathcal{M}} | |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n |^{p'} dA = \int_{\mathcal{M}} |\nabla U_n|^p dA,$$

$$\sup_{s \in (-1, 1)} \|\nabla U_n\|_{L^p(T\mathcal{M})} \leq \sup_{s \in (-1, 1)} \|U_n\|_V \leq \sup_{t \in (0, \infty)} \|u\|_V.$$

Las funciones $z_n \in \beta(U_n)$, verifican $\|z_n(s, x)\|_{L^\infty((-1, 1); L^\infty(\mathcal{M}))} \leq M$.

De este modo se obtienen las estimaciones

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{L^\infty(-1,1;V)} &\leq C_1 & \|U_n\|_V &\leq C_1 \\ \|\nabla U_n\|_{L^\infty(-1,1;L^p(TM))} &\leq C_2 \\ \|z_n\|_{L^\infty(-1,1;L^\infty(\mathcal{M}))} &\leq M. \end{aligned}$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{L^2(-1,1;V)} &\leq C_1 & \|U_n\|_V &\leq C_1 \\ \|\nabla U_n\|_{L^2(-1,1;L^p(TM))} &\leq C_2 \\ \|z_n\|_{L^2(-1,1;L^2(\mathcal{M}))} &\leq M. \end{aligned}$$

Etapla 2. Convergencia.

De las anteriores estimaciones en espacios reflexivos se deduce que existe una subsucesión de $\{U_n\}$ que seguiremos llamando U_n , que verifica

$$\begin{aligned} U_n &\rightharpoonup \hat{u} && \text{en } L^2(-1,1;V) \text{ - débil} \\ |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n &\rightharpoonup Y && \text{en } L^2(-1,1;L^{p'}(TM)) \text{ - débil} \\ z_n &\rightharpoonup w && \text{en } L^2(-1,1;L^2(\mathcal{M})) \text{ - débil} \end{aligned}$$

y como por la primera parte de (ii) $u(t_n + s, \cdot) \rightarrow u_\infty$ en $L^2((-1,1);L^2(\mathcal{M}))$ tenemos que $\hat{u} = u_\infty$.

Por otro lado, utilizando propiedades de los grafos maximales monótonos (Brezis [1973], Prop. 2.5) tenemos que como $z_n \in \beta(U_n)$ y

$$\begin{aligned} U_n &\rightarrow u_\infty && \text{en } L^2((-1,1) \times \mathcal{M}) \\ z_n &\rightarrow w && \text{en } L^2((-1,1) \times \mathcal{M}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (z_n, U_n) &= (w, u_\infty) \end{aligned}$$

entonces $w \in \beta(u_\infty)$, y lo denotaremos por z_∞ .

La convergencia de las anteriores sucesiones permite pasar al límite en las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} U_n \xi \varphi'(s) dA ds &\rightarrow \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} u_\infty \xi \varphi'(s) dA ds = \int_{\mathcal{M}} u_\infty \xi \int_{-1}^1 \varphi'(s) dA ds = \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_\infty \xi (\varphi(1) - \varphi(-1)) dA = 0. \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n, \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds \rightarrow \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle Y, \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(U_n) \xi \varphi(s) dA ds &\rightarrow \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_\infty) \xi \varphi(s) = \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathcal{G}(u_\infty) \xi (\int_{-1}^1 \varphi(s) ds)}{dA} dA \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_\infty) \xi dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_n(s, x) \xi(x) \varphi(s) dA ds &\rightarrow \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_\infty \xi \varphi(s) dA ds = \\ &= \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_\infty \xi (\int_{-1}^1 \varphi(s) ds) dA = \\ &= \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_\infty \xi dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} f \xi \varphi(s) dA ds &\rightarrow \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} f_\infty \xi \varphi(s) dA ds = \\ &= \int_{\mathcal{M}} f_\infty \xi (\int_{-1}^1 \varphi(s) ds) dA = \int_{\mathcal{M}} f_\infty \xi dA. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle Y, \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds = \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_\infty \xi dA + \int_{\mathcal{M}} f_\infty \xi dA - \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(u_\infty) \xi dA.$$

Para concluir (ii) basta ver que $\int_{-1}^1 Y(s, \cdot) \varphi(s) ds = |\nabla u_\infty|^{p-2} \nabla u_\infty$ en $L^{p'}(T\mathcal{M})$. Comenzamos probando el siguiente

Lema 10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n - |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, (\nabla u_\infty - \nabla \chi) \varphi(s) \rangle dA ds \geq 0 \quad (\text{II.1})$$

para toda función $\chi \in V$.

Demostración.

Descomponemos (II.1) en suma de tres integrales, y veremos que cada una de ellas es no negativa. Sea

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n - |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, (\nabla u_\infty - \nabla \chi) \varphi(s) \rangle dA ds = I_1^n + I_2^n + I_3^n$$

donde

$$I_1^n = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n, (\nabla u_\infty - \nabla U_n) \varphi(s) \rangle dA ds$$

$$I_2^n = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n - |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, (\nabla U_n - \nabla \chi) \varphi(s) \rangle dA ds$$

$$I_3^n = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, (\nabla U_n - \nabla u_\infty) \varphi(s) \rangle dA ds$$

Observamos que por la monotonía del operador $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ y el hecho de que $\varphi \geq 0$ se tiene que

$$I_2^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De la convergencia débil $\nabla U_n \rightharpoonup \nabla u_\infty$ en $L^2(-1, +1; L^p(T\mathcal{M}))$ deducimos que

$$I_3^n \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Estudiamos a continuación el signo de $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1^n$,

$$\begin{aligned} I_1^n &= \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n, (\nabla u_\infty - \nabla U_n) \varphi(s) \rangle dA ds = \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} (U_n)_t (u_\infty - U_n) \varphi(s) dA ds - \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(U_n) (u_\infty - U_n) \varphi(s) dA ds + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} f \varphi(s) (u_\infty - U_n) dA ds + \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_n (u_\infty - U_n) \varphi(s) dA ds, \end{aligned}$$

para algún $z_n \in \beta(U_n)$.

Veamos que cada una de las integrales en las que hemos descompuesto I_1^n tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} (U_n)_t (u_\infty - U_n) \varphi(s) dA ds &= \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_\infty - U_n|^2) \varphi(s) dA ds = \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} |u_\infty - U_n|^2 \varphi'(s) dA ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

puesto que $U_n \rightarrow u_\infty$ en $L^2((-1, 1); L^2(\mathcal{M}))$. Además, como $\mathcal{G}(U_n) \rightarrow \mathcal{G}(u_\infty)$ en $L^2((-1, 1); L^2(\mathcal{M}))$ - fuerte y $u_\infty - U_n \rightarrow 0$ en $L^2((-1, 1); L^2(\mathcal{M}))$ - fuerte, obtenemos

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}(U_n) (u_\infty - U_n) \varphi(s) dA ds \rightarrow 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} (U_n - u_\infty) f \varphi(s) dA ds &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(-1,1)} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} |(U_n - u_\infty) f| dA ds \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(-1,1)} \|U_n - u_\infty\|_{L^2((-1,1); L^2(\mathcal{M}))} \|f\|_{L^2((-1,1); L^2(\mathcal{M}))} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} QS(x) z_n (u_\infty - U_n) \varphi(s) &\leq Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} M \|\varphi\|_{L^\infty(-1,1)} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} |u_\infty - U_n| \leq \\ &\leq \sqrt{2} |\mathcal{M}| Q \|S\|_{L^\infty(\mathcal{M})} M \|\varphi\|_{L^\infty(-1,1)} \|u_\infty - U_n\|_{L^2((-1,1); L^2(\mathcal{M}))} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n - |\nabla \chi|^{p-2} \nabla \chi, (\nabla u_\infty - \nabla \chi) \varphi(s) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} I_2^n \geq 0,$$

y se tiene el lema. ■

Apliquemos este lema a $\chi = u_\infty + \lambda \xi$ con $\lambda < 0$, entonces

$$-\lambda \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle Y - |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda \xi), \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds \geq 0$$

es decir,

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle Y - |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda \xi), \nabla \xi \varphi(s) \rangle dA ds \geq 0$$

es claro que, como u_∞ y ξ no dependen de $s \in (-1, 1)$ y la media de φ es 1, la expresión anterior puede escribirse como

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \int_{-1}^1 Y(s, x) \varphi(s) ds, \nabla \xi(x) \rangle - \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda \xi), \nabla \xi \rangle \geq 0.$$

Haciendo $\lambda \rightarrow 0$, por el Teorema de la convergencia dominada se concluye que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \int_{-1}^1 Y(s, x) \varphi(s) ds - |\nabla u_\infty|^{p-2} \nabla u_\infty, \nabla \xi \rangle dA \geq 0.$$

Verifiquemos las hipótesis del Teorema de la convergencia dominada, tenemos convergencia en casi todo punto, veamos que

$$| \langle Y - |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda \xi), \nabla \xi \rangle |$$

puede mayorarse por una función $g \in L^1(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned} | \langle Y - |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-2} \nabla(u_\infty + \lambda \xi), \nabla \xi \rangle | &\leq \\ &\leq (|Y| + |\nabla(u_\infty + \lambda \xi)|^{p-1}) |\nabla \xi| \leq \\ &\leq (|Y| + |\nabla u_\infty| + |\lambda| |\nabla \xi|)^{p-1} |\nabla \xi| \leq \\ &\leq (|Y| + C |\nabla u_\infty|^{p-1} + C |\lambda|^{p-1} |\nabla \xi|^{p-1}) |\nabla \xi|. \end{aligned}$$

Si $|\lambda| < 1$, la expresión anterior puede mayorarse por

$$(|Y| + C |\nabla u_\infty|^{p-1} + C |\nabla \xi|^{p-1}) |\nabla \xi| =: g.$$

Como

$$\begin{aligned} |Y| &\in L^{p'}(\mathcal{M}) \\ |\nabla\psi| &\in L^p(\mathcal{M}) \\ |\nabla u_\infty|^{p-1} &\in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathcal{M}) = L^{p'}(\mathcal{M}) \\ |\nabla\xi|^{p-1} &\in L^{p'}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{G} \in L^1(\mathcal{M})$.

Repetiendo el argumento para $\lambda > 0$ se llega a

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \int_{-1}^1 Y(s, x) \varphi(s) ds - |\nabla u_\infty|^{p-2} \nabla u_\infty, \nabla \xi \rangle dA = 0$$

y se concluye la demostración de (ii).

(iii) Esta prueba está basada en el lema anterior y la coercitividad del operador.

Sean I_1^n, I_2^n, I_3^n como en el lema anterior, sustituyendo en $I_3^n, \chi = u_\infty$ se obtiene,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u_\infty|^{p-2} \nabla u_\infty, (\nabla U_n - \nabla u_\infty) \varphi(s) \rangle dA ds = 0$$

y considerando $I_1^n + I_3^n$ para $\chi = u_\infty$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n - |\nabla u_\infty|^{p-2} \nabla u_\infty, (\nabla U_n - \nabla u_\infty) \varphi(s) \rangle dA ds = 0. \quad (\text{II.2})$$

Por la desigualdad

$$C|\zeta - \hat{\zeta}|^p \leq (|\zeta|^{p-2}\zeta - |\hat{\zeta}|^{p-2}\hat{\zeta})(\zeta - \hat{\zeta})$$

para $\zeta = \nabla U_n$ y $\hat{\zeta} = \nabla u_\infty$, aplicada a (II.2), se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{M}} |\nabla U_n - \nabla u_\infty|^p \varphi(s) dA ds = 0$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(-1, 1), \varphi \geq 0$ y $\int_{-1}^1 \varphi = 1$. Ello implica que no existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla U_n - \nabla u_\infty|^p dA \geq \varepsilon.$$

Entonces, existe $\{s_n\}$ con $s_n \in (-1, 1)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t_n + s_n, \cdot) - \nabla u_\infty|^p dA = 0$$

y se concluye la demostración del Teorema. \blacksquare

3 Estudio del modelo estacionario.

Motivados por el comportamiento de las soluciones de (P) cuando $t \rightarrow \infty$, estudiado en las secciones anteriores a este capítulo, iniciamos aquí un análisis del modelo estacionario (P_Q) . En este estudio es fundamental la forma de las no linealidades que aparecen en el problema, en concreto estudiaremos

$$(P_Q) \quad -\Delta_r u + Bu + C \in QS(x)\beta(u), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Nuestro estudio se centra en la sensibilidad del modelo a los cambios de la constante solar Q . Este estudio tiene interés desde el punto de vista físico pues Q puede sufrir pequeñas variaciones dependientes de parámetros tales como la oblicuidad del eje de rotación terrestre (ángulo determinado por el eje y la normal al plano de la órbita de la Tierra).

Nuestro punto de partida es el estudio realizado por diferentes autores J.I. Díaz, Held, G.Hetzer, Suarez, G.R. North sobre los modelos 0-D y 1-D. Incluimos aquí un resumen de resultados conocidos para estos modelos que nos será útil más adelante.

En el "modelo 0-D" se considera la función de insolación $S(x)$ constante,

$$\begin{cases} u_t + Bu + C \in Q\beta(u) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

En función de la forma y regularidad de β , se han obtenido diferentes diagramas de bifurcación para las soluciones de equilibrio u_∞ de $Bu_\infty + C \in Q\beta(u_\infty)$ en función del parámetro solar Q . Veamos algunos ejemplos:

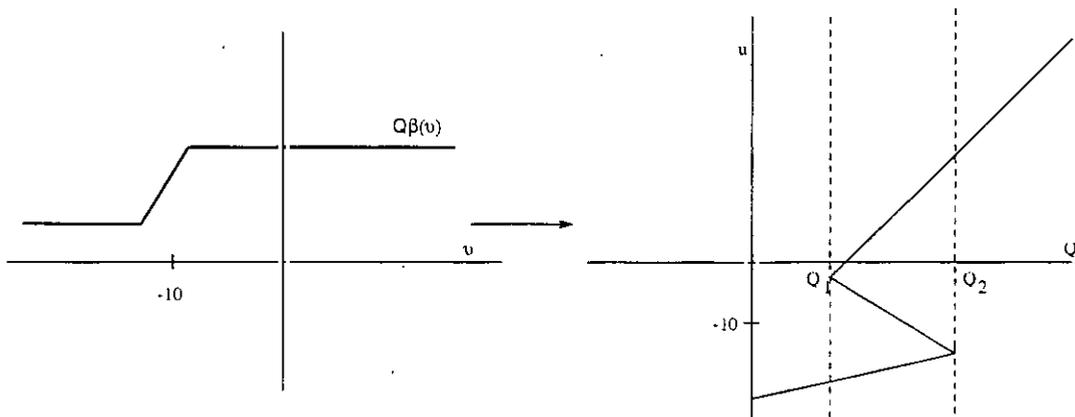


Figura 6. En el modelo cero-dimensional de tipo Sellers, si tomamos β como la función de la figura se obtiene un diagrama de bifurcación para Q en forma de S .

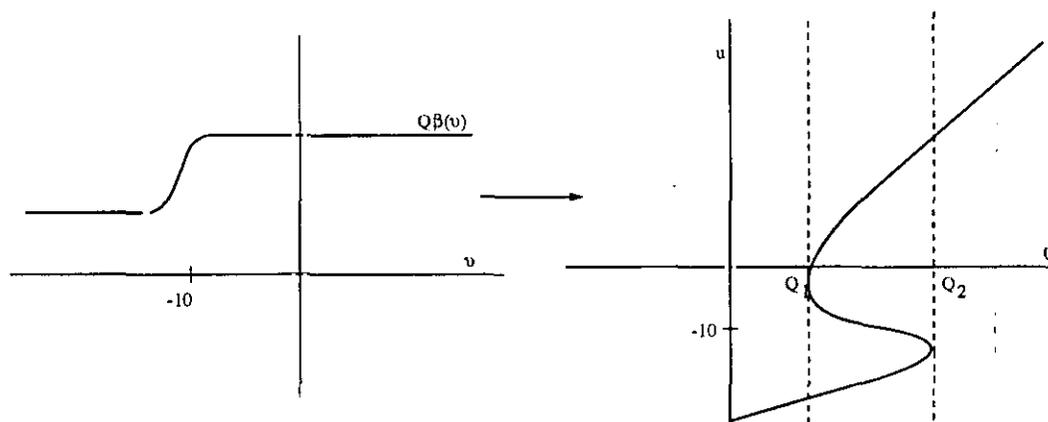


Figura 7. En el modelo cero-dimensional de tipo Sellers, si tomamos la función β más regular que en el caso anterior se obtiene también un diagrama de bifurcación para Q en forma de S más regular que el anterior.

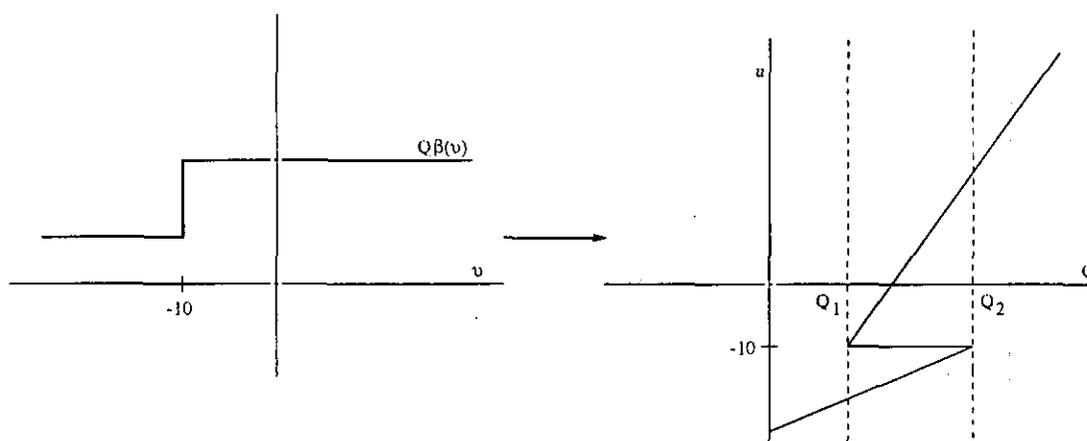


Figura 8. En el modelo cero-dimensional de tipo Budyko, se considera β como un grafo de tipo Heaviside. El diagrama de bifurcación obtenido para Q tiene forma de S .

Así, en los modelos estacionarios 0-D de tipo Sellers o de tipo Budyko, se obtiene un rango de Q para el cual existen exactamente tres soluciones. Dos valores críticos Q_1 y Q_2 para los que la ecuación tiene exactamente dos soluciones, y por último si $Q > Q_2$ ó $Q < Q_1$, hay unicidad de solución. Toda esta información se recoge en el diagrama de bifurcación en forma de S para el parámetro Q , anteriormente representado.

En cuanto a los modelos de dimensión mayor, en Hetzer [1990] se prueba que el modelo de tipo Sellers con difusión lineal y $\beta \in C^2$ presenta un diagrama de bifurcación con un número par de puntos de retorno. Todo ello bajo ciertas condiciones sobre los autovalores del problema linealizado asociado. Dicho resultado se refiere tanto al problema de dimensión uno (intervalo) como al de dimensión dos (variedad).

El objetivo de esta sección es demostrar que el modelo estacionario 2-D de tipo Budyko posee un rango de Q para el que existen al menos tres soluciones. Nótese que la técnica de linealización utilizada en Hetzer [1990] no puede ser ahora aplicada (al menos de manera directa).

3.1 Multiplicidad de soluciones del modelo bidimensional.

En esta sección se estudian los modelos bidimensionales estacionarios de tipo Budyko con $p \geq 2$,

$$(P_Q) \quad -\Delta_p u + Bu + C \in QS(x)\beta(u) \text{ en } \mathcal{M}.$$

Recordemos que la función de insolación $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva, acotada y regular, tal que existen S_0 y S_1 constantes positivas que verifican

$$S_0 \leq S(x) \leq S_1 \quad \forall x \in \mathcal{M},$$

la función coalbedo β es un grafo maximal monótono acotado tal que

$$m \leq \beta(r) \leq M \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

y las constantes B y C son positivas y además

$$-10B + C > 0.$$

Diremos que u es solución de (P_Q) si $u \in V$ y $\forall v \in V$ se verifica que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} Buv dA + \int_{\mathcal{M}} CvdA = \int_{\mathcal{M}} QSzdA$$

para algún $z \in \beta(u)$.

El estudio de la estabilización de soluciones del problema de evolución, llevado a cabo en las secciones 1 y 2 de este capítulo, prueba que para cada $Q > 0$ existe al menos una solución de (P_Q) que puede obtenerse como límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la solución $u(t)$ del problema parabólico (P) .

Nuestro resultado sobre multiplicidad es el siguiente,

Teorema 10 Sea $\frac{M}{m} \geq \frac{S_1}{S_0}$, entonces

- i) si $0 < Q < \frac{-10B+C}{MS_1}$, (P_Q) tiene solución única;
- ii) si $\frac{-10B+C}{S_0M} < Q < \frac{-10B+C}{S_1m}$, (P_Q) tiene al menos tres soluciones;
- iii) si $\frac{-10B+C}{mS_0} < Q$, (P_Q) tiene solución única.

Demostración.

i) Sea u una solución de (P_Q) , entonces

$$QS(x)m - C \leq -\Delta_p u + Bu \leq QS(x)M - C \quad \text{en } \mathcal{M}.$$

Por el principio de comparación para el operador $-\Delta_p + B$ (demostrado en el Capítulo 1), se tiene que si \bar{u} y \underline{u} son las soluciones de los problemas (\bar{P}) y (\underline{P}) definidos por

$$(\bar{P}) \quad -\Delta_p \bar{u} + B\bar{u} = QS(x)M - C \quad \text{en } \mathcal{M}$$

$$(\underline{P}) \quad -\Delta_p \underline{u} + B\underline{u} = QS(x)m - C \quad \text{en } \mathcal{M}$$

entonces u verifica

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{en } \mathcal{M}.$$

Veamos que $\underline{u} < -10$ y $\bar{u} < -10$ en \mathcal{M} . Es claro que (\bar{P}) y (\underline{P}) tienen solución única, veamos que para ambos problemas existen super y subsoluciones menores que -10 , lo que implica que \bar{u} y \underline{u} son menores que -10 .

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{QS_1M - C}{B} \text{ es una supersolución de } (\bar{P}) \\ \bar{u}_2 &= \frac{QS_0M - C}{B} \text{ es una subsolución de } (\bar{P}), \end{aligned}$$

por tanto $\bar{u}_2 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_1$. Por la hipótesis de que $Q < \frac{-10B+C}{MS_1}$ tenemos que

$$\bar{u}_1 = \frac{QS_1M - C}{B} < \left(\frac{(-10B+C)MS_1}{MS_1} - C \right) \frac{1}{B} = -10$$

de donde $\bar{u} < -10$. Análogamente,

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \frac{QS_1m - C}{B} \text{ es supersolución de } (\underline{P}) \\ \underline{u}_2 &= \frac{QS_0m - C}{B} \text{ es subsolución de } (\underline{P}), \end{aligned}$$

entonces $\underline{u}_2 \leq \underline{u} \leq \underline{u}_1$ y

$$\underline{u}_1 = \frac{QS_1m - C}{B} < \left(\frac{(-10B + C)mS_1}{MS_1} - C \right) \frac{1}{B} < -10,$$

pues $\frac{m}{M} < 1$ y $-10B + C > 0$. Finalmente, como $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ se concluye que toda solución u de (P_Q) con $Q < \frac{-10B+C}{MS_1}$ es menor que -10 y por tanto u es también solución de

$$(P_Q) \quad -\Delta_p u + Bu + C \in QS(x)m \text{ en } \mathcal{M}.$$

Pero es claro que esta ecuación tiene solución única. Luego (P_Q) tiene solución única.

ii) Dividimos la demostración de esta parte en varias etapas.

Etapla 1. Cálculo de super y subsoluciones de (P_Q)

a.- Buscamos *supersoluciones* constantes de (P_Q) que verifiquen

$$(\bar{P}_1) \quad BU + C \in QS_1\beta(U) \text{ en } \mathcal{M}.$$

Es claro que toda solución de (\bar{P}_1) es supersolución de (P_Q) .

- Como $Q > \frac{-10B+C}{S_0M}$ y $S_0 < S_1$, entonces

$$U_1 = \frac{QS_1M - C}{B} > \frac{1}{B} \left(\frac{-10B+C}{S_0M} S_1M - C \right) \geq -10$$

es solución de (\bar{P}_1) y por tanto supersolución de (P_Q) .

- Como $Q < \frac{-10B+C}{S_1m}$, entonces

$$U_2 = \frac{QS_1m - C}{B} < \frac{1}{B} \left(\frac{(-10B+C)S_1m}{S_1m} - C \right) = -10$$

es solución de (\bar{P}_1) y por tanto supersolución de (P_Q) .

b.- Análogamente, buscamos *subsoluciones* constantes de (P_Q) que verifiquen,

$$BV + C \in QS_0\beta(V) \text{ en } \mathcal{M}. \quad (\underline{P}_2)$$

Es claro que toda solución de (\underline{P}_2) es subsolución de (P_Q) .

- Como $Q > \frac{-10B+C}{S_0M}$, entonces

$$V_1 = \frac{QS_0M - C}{B} > -10$$

es solución de (P_2) y por tanto subsolución de (P_Q) .

- Como $Q < \frac{-10B+C}{S_1m}$ y $S_0 < S_1$, entonces

$$V_2 = \frac{QS_0m - C}{B} < -10$$

es solución de (P_2) y subsolución de (P_Q) .

De este modo, hemos construido dos subsoluciones y dos supersoluciones constantes. Veamos como estan ordenadas:

$$U_1 = \frac{QS_1M - C}{B} \geq -10 \quad V_1 = \frac{QS_0M - C}{B} > -10$$

$$U_2 = \frac{QS_1m - C}{B} \leq -10 \quad V_2 = \frac{QS_0m - C}{B} < -10,$$

es obvio que $U_1 > U_2$ y $V_1 > V_2$. Además

$$U_1 - V_1 = \frac{QM}{B}(S_1 - S_0) \geq 0$$

$$U_2 - V_2 = \frac{Qm}{B}(S_1 - S_0) \geq 0.$$

Si $S(x)$ es no constante, $S_0 < S_1$ y las desigualdades anteriores son estrictas.

Etapa 2. Existencia de soluciones de (P_Q) que no atraviesan el nivel $u = -10$.

En la etapa 1 obtuvimos subsoluciones V_1, V_2 y supersoluciones U_1, U_2 ordenadas del siguiente modo:

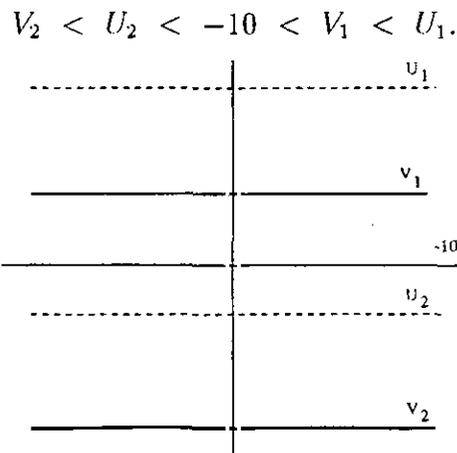


Figura 9. En este dibujo se han representado las supersoluciones U_1 y U_2 y las subsoluciones V_1 y V_2 , anteriormente calculadas.

Aplicando el método iterativo de super y subsoluciones de manera análoga a como se hizo para el problema de evolución se obtiene la existencia de dos soluciones u_1, u_2 del problema (P_Q) , con

$$V_1 \leq u_1 \leq U_1$$

$$V_2 \leq u_2 \leq U_2.$$

Es obvio que $u_1 > -10$, por lo que además de ser solución de (P_Q) , en particular lo es del problema

$$(P_M) \quad -\Delta_p u + Bu + C = QS(x)M \quad \text{en } \mathcal{M},$$

que tiene solución única. Toda solución de (P_Q) mayor que -10 es solución de (P_M) . Por tanto la única solución de (P_Q) mayor que -10 globalmente sobre \mathcal{M} es u_1 .

Argumentando de modo análogo, la única solución de (P_Q) menor que -10 es u_2 .

Etapas 3. Estudio del modelo aproximado.

Consideremos la familia de problemas aproximados (P'_Q) ,

$$(P'_Q) \quad -\Delta_p u + Bu + C = QS(x)\beta_\epsilon(u) \quad \text{en } \mathcal{M}$$

donde β_ϵ es una función continua y no decreciente, que coincide con el grafo β en $\mathbb{R} - (-10 - \epsilon, -10 + \epsilon)$,

$$\beta_\epsilon(u) = \begin{cases} M & \text{si } u \geq -10 + \epsilon \\ m & \text{si } u \leq -10 - \epsilon \end{cases}$$

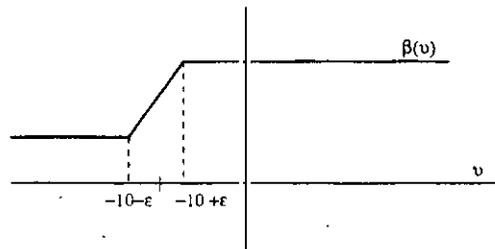


Figura 10. Se han considerado funciones continuas β_ϵ cuyas gráficas aproximan el grafo β cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

y así se verifica que

$$\beta_\epsilon(s) \rightarrow z \in \beta(s) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Como $V_2 < U_2 < -10 < V_1 < U_1$, para cada Q , existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(Q)$ tal que

$$V_2 < U_2 < -10 - \epsilon_0 < -10 < -10 + \epsilon_0 < V_1 < U_1.$$

Por ello, si $\epsilon < \epsilon_0$ entonces U_1, U_2 son supersoluciones de (P_Q^ϵ) y $V - 1, V_2$ son subsoluciones de (P_Q^ϵ) , puesto que si $\epsilon < \epsilon_0$, $\beta_\epsilon(U_i) = \beta(U_i)$ y $\beta_\epsilon(V_i) = \beta(V_i)$ para $i = 1, 2$.

Procediendo como en la etapa 2, obtenemos dos familias de soluciones $\{u_1^\epsilon\}$ y $\{u_2^\epsilon\}$ de (P_Q^ϵ) para $\epsilon < \epsilon_0$:

$$\begin{aligned} -10 < V_1 &\leq u_1^\epsilon \leq U_1 \\ V_2 &\leq u_2^\epsilon \leq U_2 < -10 \end{aligned}$$

Además como $u_1^\epsilon > -10 + \epsilon_0 > -10 + \epsilon$ entonces $\beta_\epsilon(u_1^\epsilon) = \beta(u_1^\epsilon)$ y por tanto $u_1^\epsilon = u_1$ si $\epsilon < \epsilon_0$. A partir de aquí cuando nos refiramos a ϵ será $\epsilon < \epsilon_0$.

Para ver que (P_Q^ϵ) tiene una solución u_3^ϵ distinta de u_1^ϵ y u_2^ϵ utilizamos el Lema 14.1 de Amann [1976]:

Sea X un retracto de un espacio de Banach E y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación compacta. Supongamos que X_1 y X_2 son retractsos disjuntos de X , sean Y_k , $k = 1, 2$ abiertos de X tales que $Y_k \subset X_k$. Supongamos además que $f(X_k) \subset X_k$ y que f no tiene puntos fijos en $X_k \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2$. Entonces f tiene al menos tres puntos fijos distintos x, x_1, x_2 con $x_k \in X_k$ y $x \in X \setminus (X_1 \cup X_2)$.

(P_Q^ϵ) es equivalente al problema de punto fijo

$$u = (\Delta_p + B)^{-1}(QS(x)\beta_\epsilon(u) - C) \quad x \in \mathcal{M}.$$

Sea $E = L^\infty(\mathcal{M})$ [que obviamente es un espacio de Banach ordenado con respecto al orden natural dado por el cono positivo

$$L_+^\infty(\mathcal{M}) = \{v \in L^\infty(\mathcal{M}) : v(x) \geq 0 \text{ cta } x \in \mathcal{M}\}$$

y que tiene interior no vacío]. Sean

$$\begin{aligned} X &= [V_2 - \delta, U_1 + \delta] \\ X_1 &= [V_1 - \delta, U_1 + \delta] \\ X_2 &= [V_2 - \delta, U_2 + \delta] \end{aligned}$$

donde δ^1 es tal que

$$\begin{aligned} V_1 &> -10 + \delta > -10 + \epsilon_0, \\ U_2 &> -10 - \delta > -10 - \epsilon_0. \end{aligned}$$

Sea $f(v) = (-\Delta_p + B)^{-1}(QS(x)\beta_\epsilon(v) - C)$ para $v \in L^\infty(\mathcal{M})$. Verifiquemos las hipótesis del lema de Amann:

1.- X , X_1 y X_2 son retratos de $L^\infty(\mathcal{M})$ y X respectivamente. En efecto, según J. Dugundji [1951] [1966], cada subconjunto no vacío cerrado y convexo de un espacio de Banach es un retrato de dicho espacio. En nuestro caso, no es difícil construir una retracción.

$$\begin{aligned} r : L^\infty(\mathcal{M}) &\longrightarrow X \\ u &\longrightarrow r(u) := \begin{cases} U_1 + \delta & \text{si } u(x) > U_1 + \delta \\ u(x) & \text{si } u \in [V_2 - \delta, U_1 + \delta] \\ V_2 - \delta & \text{si } u(x) < V_2 - \delta \end{cases} \end{aligned}$$

r es continua y además $r|_X = id_X$. r es una función truncatura, recordemos que $V_2 - \delta$ y $U_1 + \delta$ son constantes.

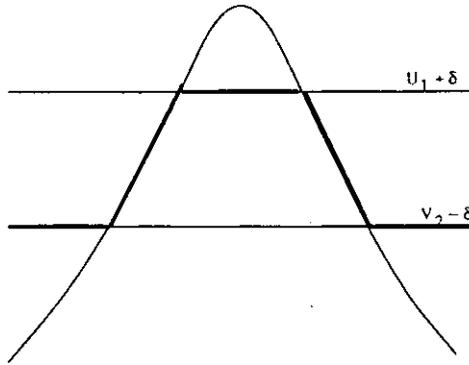


Figura 11. Una función u cuya gráfica es la de la figura, es transformada por la retracción r en otra función $r(u)$ acotada superiormente por $U_1 + \delta$ e inferiormente por $V_2 - \delta$, dibujada con trazo más grueso.

Y análogamente se puede ver que X_1 y X_2 son retratos de X .

¹Hemos introducido δ porque vamos a necesitar que exista un abierto Y_k que contenga a u'_k , $k = 1, 2$ con $Y_k \subset X_k$. Si tomamos $X_k = [V_k, U_k]$ no se puede asegurar que la solución no coincide con V_k o U_k en algún conjunto.

2.- $f(X) \subset X$ y $f(X_k) \subset X_k$.

• Sea $v \in X = [V_2 - \delta, U_1 + \delta]$, $f(v) = (-\Delta_p + B)^{-1}(QS(x)\beta(v) - C)$, y por tanto

$$QS_0M \leq -\Delta_p(f(v)) + Bf(v) + C \leq QS_1M.$$

Por el principio de comparación para $-\Delta_p + B$ se tiene que $f(v) \in [V_2, U_1] \subset X$.

• Si $v \in X_1 = [V_1 - \delta, U_1 + \delta]$, entonces

$$v > -10 + \epsilon_0 \quad \text{y} \quad \beta_\epsilon(v) = M,$$

luego $f(v)$ es la solución de $-\Delta_p u + Bu + C = QS(x)M$. Utilizando que

$$U_1 \text{ es solución de } -\Delta_p u + Bu + C = QS_1M,$$

$$V_1 \text{ es solución de } -\Delta_p u + Bu + C = QS_0M,$$

donde $S_0 \leq S(x) \leq S_1$, tenemos que $f(v) \in [V_1, U_1] \subset X_1$.

• Análogamente se demuestra que $f(X_2) \subset X_2$.

3.- $f : X \rightarrow X$ compacta. Como $N = \dim \mathcal{M} = 2$, distinguimos los casos $p = 2$ y $p > 2$.

Si $p = 2$, definimos

$$\begin{aligned} G : [V_2 - \delta, U_1 + \delta] &\subset L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M}) \\ v &\rightarrow QS(x)\beta_\epsilon(v) - C. \end{aligned}$$

El operador G así definido es continuo.

$$\begin{aligned} (-\Delta + B)^{-1} : L^2(\mathcal{M}) &\rightarrow H^2(\mathcal{M}) \\ g &\rightarrow (-\Delta + B)^{-1}(g) \end{aligned}$$

es continuo. Además

$$\begin{aligned} I : H^2(\mathcal{M}) &\rightarrow L^\infty(\mathcal{M}) \\ u &\rightarrow u \end{aligned}$$

es compacto. Definiendo f como la composición de los anteriores operadores,

$$\begin{aligned} f = (-\Delta + B)^{-1} \circ G : [V_2 - \delta, U_1 + \delta] &\subset L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M}) \\ v &\rightarrow u \end{aligned}$$

donde $u = (-\Delta + B)^{-1}(QS(x)\beta_\epsilon(v) - C)$, se tiene que f es compacta por ser la composición de un operador compacto y otro continuo.

Si $p > 2$, definimos

$$\begin{aligned} G : [V_2 - \delta, U_1 + \delta] &\subset L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^p(\mathcal{M}) \\ v &\rightarrow QS(x)\beta_\epsilon(v) - C. \end{aligned}$$

El operador G así definido es continuo.

$$\begin{aligned} (-\Delta_p + B)^{-1} : L^p(\mathcal{M}) &\rightarrow W^{1,p}(\mathcal{M}) \\ g &\rightarrow (-\Delta_p + B)^{-1}(g) \end{aligned}$$

es continuo.

$$\begin{aligned} I : W^{1,p}(\mathcal{M}) &\rightarrow L^\infty(\mathcal{M}) \\ u &\rightarrow u \end{aligned}$$

es compacto si $p > N = 2$. Se define f como la composición de los anteriores operadores,

$$\begin{aligned} f = (-\Delta_p + B)^{-1} \circ G : &\subset L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M}) \\ v &\rightarrow u \end{aligned}$$

donde $u = (-\Delta_p + B)^{-1}(QS(x)\beta_\epsilon(v) - C)$. f es la composición de un operador compacto y otro continuo, por tanto $f : L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$ es compacta, en particular $f : X \rightarrow X$ lo es.

4.- Existencia de Y_k , $k = 1, 2$.

(P_Q^ϵ) tiene una única solución en $X_1 = [V_1 - \delta, U_1 + \delta]$, en particular, sabemos que dicha solución $u_1^\epsilon \in [V_1, U_1]$ luego $\Omega_1 = B_{L^\infty(\mathcal{M})}(u_1^\epsilon, \frac{\delta}{2})$ (bola abierta en la topología de $L^\infty(\mathcal{M})$ centrada en u_1^ϵ y de radio $\frac{\delta}{2}$) que está contenida en X_1 . (P_Q^ϵ) no tiene ninguna solución en $X_1 - \Omega_1$, es decir, f no tiene puntos fijos en $X_1 - \Omega_1$.

Análogamente se construye Ω_2 abierto de X_2 verificando que f no tiene puntos fijos en $X_2 - \Omega_2$.

5.- Conclusión.

Hemos verificado las hipótesis del lema, con lo que podemos concluir que f tiene al menos tres puntos fijos, o bien que (P_Q^ϵ) tiene al menos tres soluciones:

$$\begin{aligned} u_1^\epsilon &\in X_1 \\ u_2^\epsilon &\in X_2 \\ u_3^\epsilon &\in X_3 - (X_1 \cup X_2). \end{aligned}$$

Etapa 4. Convergencia.

El objetivo de esta etapa es obtener estimaciones a priori para u_ϵ^c que permitan probar la convergencia de una subsucesión de ésta a una solución de (P_Q) . La formulación débil de (P_Q^c) viene dada por

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon, \nabla v \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} B u_\epsilon v dA = \\ & = \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) v dA - C \int_{\mathcal{M}} v dA, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Tomando en la formulación anterior $v = u_\epsilon$ se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_\epsilon|^p dA + \int_{\mathcal{M}} B |u_\epsilon|^2 dA = \\ & = \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) u_\epsilon dA - C \int_{\mathcal{M}} u_\epsilon dA. \end{aligned}$$

Estimemos los términos que aparecen en el lado derecho de la igualdad, utilizando las desigualdades de Hölder y Young:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}} Q S(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) u_\epsilon dA \leq \int_{\mathcal{M}} Q S(x) M |u_\epsilon| dA \leq \\ & \leq Q M \|S\|_{L^2(\mathcal{M})} \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \frac{Q^2 M^2 \|S\|_{L^2(\mathcal{M})}^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{M})}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -C \int_{\mathcal{M}} u_\epsilon dA & \leq C \int_{\mathcal{M}} |u_\epsilon| dA \leq C |\mathcal{M}|^{\frac{1}{2}} \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq \\ & \leq \frac{C^2 |\mathcal{M}|}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{M})}^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla u_\epsilon|^p dA + (B - \delta) \int_{\mathcal{M}} |u_\epsilon|^2 dA \leq C_1$$

donde $C_1 = \frac{Q^2 M^2 \|S\|_{L^2(\mathcal{M})}^2}{2\delta} + \frac{C^2 |\mathcal{M}|}{2\delta}$. Eligiendo $\delta > 0$ de modo que $B - \delta > 0$, se obtiene una estimación de $\{u_\epsilon\}$ en la norma de V ,

$$\|u_\epsilon\|_V \leq C_2.$$

Así, $\{u_\epsilon\}$ es una familia acotada en V . El hecho de que V sea un espacio de Banach reflexivo permite extraer una subsucesión de $\{u_\epsilon\}$ (que seguiremos llamando $\{u_\epsilon\}$) que converge débilmente en V , es decir,

$$\exists u \in V \text{ tal que } u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ en } V,$$

y por la inclusión compacta $V \subset L^2(\mathcal{M})$,

$$u_\epsilon \rightarrow u \text{ en } L^2(\mathcal{M}) \text{ -fuerte.}$$

Veamos que u es solución de (P_Q) , pasando al límite en la formulación débil de (P'_Q) . De la convergencia $u_\epsilon \rightarrow u$ en $L^2(\mathcal{M})$ -fuerte, se deduce

$$\int_{\mathcal{M}} Bu_\epsilon v dA \rightarrow \int_{\mathcal{M}} Buv dA.$$

Además, como

$$\|\beta_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq M^2 |\mathcal{M}|,$$

$\{\beta_\epsilon(u_\epsilon)\}$ está acotada en $L^2(\mathcal{M})$ y existe $z \in L^2(\mathcal{M})$ tal que

$$\beta_\epsilon(u_\epsilon) \rightharpoonup z \quad L^2(\mathcal{M}) \text{ -débil,}$$

que por ser β maximal monótono, es $z \in \beta(u)$. Además se tiene que

$$|\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ en } L^{p'}(\mathcal{M}).$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon\|_{L^{p'}(\mathcal{M})} &= \left(\int_{\mathcal{M}} (|\nabla u_\epsilon|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dA \right)^{\frac{p-1}{p}} = \\ &= \left(\int_{\mathcal{M}} |\nabla u_\epsilon|^p dA \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C_3. \end{aligned}$$

Luego, existe una subsucesión de u_ϵ (que seguiremos llamando u_ϵ) tal que

$$|\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \rightharpoonup Y \text{ en } L^{p'}(\mathcal{M}) \text{ -débil.}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 9 (argumento de tipo Minty, etc) se tiene que

$$Y = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

Con todo esto podemos pasar al límite en la formulación débil de (P'_Q) cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obteniendo así

$$\begin{array}{ccccccc} \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon, \nabla v \rangle + \int_{\mathcal{M}} Bu_\epsilon v & = & \int_{\mathcal{M}} QS(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) v & - & C \int_{\mathcal{M}} v \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\mathcal{M}} Buv = \int_{\mathcal{M}} QS(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) v - C \int_{\mathcal{M}} v$$

$\forall v \in V$ y para algún $z \in \beta(u)$.

Etapa 5. Existencia de una tercera solución para (P_Q) .

Por la etapa anterior sabemos que existen subsucesiones de $\{u_1^i\}$, $\{u_2^i\}$ y $\{u_3^i\}$ soluciones de (P_Q^i) que seguiremos llamando $\{u_1^i\}$, $\{u_2^i\}$ y $\{u_3^i\}$ que convergen en $L^2(\mathcal{M})$ a u_1 , u_2 y u_3 soluciones de (P_Q) . En la etapa 2 vimos que $u_1 \neq u_2$. La idea es probar que u_3^i converge uniformemente a u_3 . Se considera z como en la etapa anterior, es decir, $\beta_\epsilon(u_\epsilon) \rightarrow z \in \beta(u)$, entonces tomando $u_\epsilon - u$ como función test en las formulaciones débiles de los problemas

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_\epsilon + B u_\epsilon + C &= QS(x) \beta_\epsilon(u_\epsilon) && \text{en } \mathcal{M}, \\ -\Delta_p u + B u + C &= QS(x) z && \text{en } \mathcal{M} \end{aligned}$$

y restando las expresiones obtenidas se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_\epsilon - \nabla u \rangle dA + B \int_{\mathcal{M}} |u_\epsilon - u|^2 dA &= \\ &= \int_{\mathcal{M}} QS(x) (\beta_\epsilon(u_\epsilon) - z) (u_\epsilon - u) dA. \end{aligned}$$

Por la desigualdad $\langle |\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta, \xi - \eta \rangle \geq C |\xi - \eta|^p$ para todo $\xi, \eta \in T\mathcal{M}$ y la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p + \int_{\mathcal{M}} B |u_\epsilon - u|^2 \leq QS_1 \| \beta_\epsilon(u_\epsilon) - z \|_{L^2(\mathcal{M})} \| u_\epsilon - u \|_{L^2(\mathcal{M})}. \quad (\text{II.3})$$

De la convergencia $u_\epsilon \rightarrow u$ en $L^2(\mathcal{M})$ se deduce que $\| u_\epsilon - u \|_{L^2(\mathcal{M})} \rightarrow 0$. Como $\beta_\epsilon(u_\epsilon) - z$ es una sucesión débilmente convergente en $L^2(\mathcal{M})$, su norma está uniformemente acotada. Tomando límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en (II.3) obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \| \nabla u_\epsilon - \nabla u \|_{L^p(T\mathcal{M})} = 0.$$

Si $p > 2$ entonces $V \subset L^\infty(\mathcal{M})$ con inyección continua, y por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(\mathcal{M})} = 0.$$

Si $p = 2$ entonces $V \subset L^q(\mathcal{M})$ para todo $q < +\infty$ con inyección continua, por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \| u_\epsilon - u \|_{L^q(\mathcal{M})} = 0 \quad \forall q.$$

Sin embargo, en este caso también se obtiene la convergencia uniforme pues u_ϵ y u son soluciones de (P_Q^i) y (P_Q) respectivamente y por tanto $u_\epsilon \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$ y $u \in V \cap L^\infty(\mathcal{M})$, así usando que

$$\| \cdot \|_{L^\infty(\mathcal{M})} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\| \cdot \|_{L^q(\mathcal{M})}}{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{q}}},$$

se concluye que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\mathcal{M})} = 0 \quad \forall p \geq 2.$$

Ahora sabemos que

$$u_1^\epsilon \rightarrow u_1 \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{M}),$$

$$u_2^\epsilon \rightarrow u_2 \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{M}),$$

$$u_3^\epsilon \rightarrow u_3 \quad \text{en } L^\infty(\mathcal{M}).$$

Para todo $\epsilon < \epsilon_0$,

u_1^ϵ es la única solución de (P_ϵ^∞) mayor que $-10 + \epsilon_0$,

u_2^ϵ es la única solución de (P_ϵ^∞) menor que $-10 - \epsilon_0$.

Luego para todo $\epsilon < \epsilon_0$, existe $w_\epsilon \subset \mathcal{M}$ abierto de \mathcal{M} , tal que

$$u_{3|_{w_\epsilon}}^\epsilon \subset [-10 - \epsilon_0, -10 + \epsilon_0]. \quad (\text{II.4})$$

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $u_1 = u_3$, entonces como $u_3^\epsilon \rightarrow u_3$ uniformemente y $u_1 > -10 + \epsilon_0$ entonces existe ϵ_1 tal que $\forall \epsilon < \epsilon_1$, $u_3^\epsilon > -10 + \epsilon_0$, lo que contradice (II.4). Análogamente se demuestra que u_3 es distinta de u_2 .

Además u_3 solución de (P_Q) atraviesa el nivel -10 , pues (P_Q) tiene exactamente dos soluciones que no atraviesan el nivel -10 , y éstas son u_1 y u_2 , lo que implica que u_3 atraviesa el nivel -10 .

iii) Procediendo como en (i) se muestra que toda solución de (P_Q) con $Q > \frac{-10B+C}{mS_0}$ es mayor que -10 . Así, (P_Q) es equivalente a

$$-\Delta_p u + Bu + C = QS(x)M \quad \text{en } \mathcal{M},$$

que tiene solución única. ■

3.2 Sobre el diagrama de bifurcación

En la sección anterior probamos que el número de soluciones del problema estacionario de tipo Budyko dependía de los valores del parámetro positivo Q .

$$(P_Q) \quad -\Delta_p u + Bu + C \in QS(x)\beta(u) \text{ en } \mathcal{M}.$$

Hemos obtenido intervalos de Q para los que el problema tiene una única solución y un rango de Q para el que el problema tiene al menos tres soluciones. Nuestro estudio en la presente sección está dirigido a conocer la llamada *rama principal* (que parte del punto asociado a $Q = 0$) del diagrama de bifurcación en función del parámetro Q .

Nuestro objetivo es mostrar que de manera similar al modelo 0-dimensional y unidimensional, esta rama tiene forma de S . Sin embargo, como el resultado de multiplicidad de la sección anterior asegura la existencia de “al menos” tres soluciones para un rango de Q pero no conocemos exactamente el número de soluciones, el estudio del diagrama de bifurcación de (P_Q) va dirigido a probar que la rama principal tiene “al menos” forma de S , o bien que existen “al menos” dos puntos de retorno, pero también podrían existir cuatro, seis, ocho... obteniendo en esos casos diagramas en forma de doble S , triple S etc.

Para ello utilizaremos un Teorema de bifurcación debido a Rabinowitz [1971] en el que juega un papel fundamental la compacidad de cierto operador. En el caso de β multívoco esta propiedad es de difícil comprobación. Salvaremos esta dificultad utilizando un argumento de aproximación de β mediante funciones β_ϵ continuas. Estudiaremos en primer lugar el diagrama de bifurcación para un grafo β de la forma

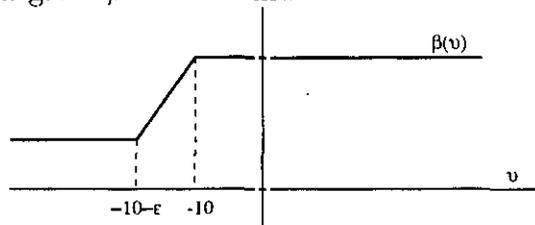


Figura 12.

y para obtener finalmente el resultado deseado utilizando ciertas técnicas topológicas que permitan pasar al límite.

En esta sección llamaremos Σ al conjunto de pares $(Q, u) \in \mathbb{R}^+ \times V$, que verifican la ecuación (P_Q) , es decir

$$\Sigma = \{(Q, u) : Q \geq 0 \text{ y } u \text{ es solución de } (P_Q)\}.$$

Nuestro objetivo es representar cualitativamente Σ en el espacio $\mathbb{R}^+ \times L^\infty(\mathcal{M})$. Utilizaremos el siguiente

Teorema 11 (Rabinowitz [1971], pg.32)

Sea E un espacio de Banach. Si $G : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ es un operador compacto tal que $G(0, u) \equiv 0$, entonces

$$\Sigma = \{(Q, w) : G(Q, w) = w\}$$

posee dos componentes no acotadas C^+ y C^- en $\mathbb{R}^+ \times E$ y $\mathbb{R}^- \times E$ respectivamente y $C^+ \cap C^- = \{(0, 0)\}$.

Nuestro primer resultado es

Teorema 12 Sea β como en la figura 19. Entonces Σ tiene una componente conexa no acotada en forma de S . \square

Demostración.

La demostración la dividiremos en tres etapas. En la primera veremos que es posible aplicar el Teorema 11 a nuestro problema y concluir que Σ posee una componente conexa no acotada que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$. En la segunda etapa se obtienen los diagramas de bifurcación para dos problemas 0-dimensionales (P_Q^1) y (P_Q^2) estrechamente relacionados con (P_Q) . Finalmente, utilizando un principio de comparación para el operador $\Delta_p \cdot + B \cdot$, se muestra que para ciertos rangos de Q la componente principal de Σ se encuentra entre los diagramas de bifurcación de (P_Q^1) y (P_Q^2) . Se concluye después que la rama principal de Σ tiene forma de S .

Etapa 1. Σ posee una componente conexa no acotada que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$.

Para verificar las hipótesis del Teorema de Rabinowitz, consideramos la función trasladada de u ,

$$v = u + \frac{C}{B}$$

que es solución de la ecuación

$$-\Delta_p v + Bv = QS(x)\hat{\beta}(v) \quad (II.5)$$

donde $\hat{\beta}(\sigma) = \beta(\sigma - \frac{C}{B})$. Llamaremos $\hat{\Sigma}$ a su diagrama de bifurcación. Veamos que v verifica las hipótesis del Teorema de Rabinowitz

i) Dado $E = L^\infty(\mathcal{M})$ se define $G : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ por

$$G(Q, v) = (-\Delta_p + B)^{-1}(QS(x)\hat{\beta}(v)).$$

Como G es la composición de un operador continuo con un operador compacto, (ver la demostración del Teorema 10, pg. 96 de esta memoria) se concluye que G es compacto.

ii) Si $Q = 0$, el problema (II.5), es entonces

$$-\Delta_p v + Bv = 0 \text{ en } \mathcal{M}$$

que tiene como única solución $v \equiv 0$. Por tanto $G(0, v) = 0$.

Se concluye así, aplicando el Teorema de Rabinowitz que $\hat{\Sigma}$ posee dos componentes no acotadas \hat{C}^+ y \hat{C}^- en $\mathbb{R}^+ \times L^\infty(\mathcal{M})$ y $\mathbb{R}^- \times L^\infty(\mathcal{M})$ respectivamente tales que $\hat{C}^+ \cap \hat{C}^- = \{(0, 0)\}$. Deshaciendo la traslación se tiene que Σ posee dos componentes no acotadas C^+ y C^- en $\mathbb{R}^+ \times L^\infty(\mathcal{M})$ y $\mathbb{R}^- \times L^\infty(\mathcal{M})$ respectivamente y $C^+ \cap C^- = \{(0, \frac{-C}{B})\}$. En particular, nosotros estamos interesados en la rama C^+ pues Q es un parámetro que por su significado físico es siempre positivo. Además, desde el punto de vista matemático, si Q es negativo el problema es más sencillo pues se tiene unicidad de solución a partir de la monotonía del operador $-\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + Bu - QS(x)\beta(u)$.

Etapa 2. *Diagrama de bifurcación de los problemas cero-dimensionales (P_Q^1) y (P_Q^2) .*

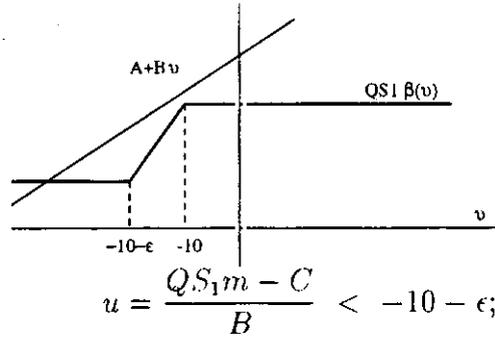
Sean S_0 y S_1 tales que $0 < S_0 \leq S(x) \leq S_1$. Se consideran los problemas auxiliares

$$(P_Q^1) \quad Bu + C = QS_1\beta(u),$$

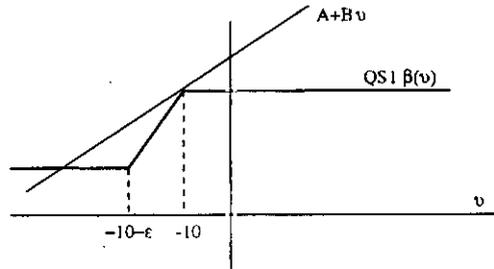
$$(P_Q^2) \quad Bu + C = QS_0\beta(u).$$

Como ya se mostró anteriormente, el número de soluciones de los anteriores problemas depende del valor de Q . En cuanto a las soluciones de (P_Q^1) en función del valor de Q , se tiene que

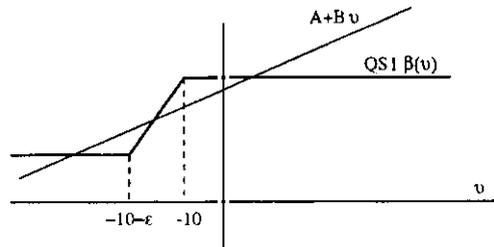
i) si $0 \leq Q < Q_1 := \frac{-10B+C}{MS_1}$ entonces (P_Q^1) tiene solución única,



ii) si $Q = Q_1$ entonces (P_Q^1) tiene dos soluciones;



iii) si $Q_1 < Q < Q_{3,\epsilon} := \frac{-10B-\epsilon B+C}{S_1m}$ entonces (P_Q^1) tiene tres soluciones,

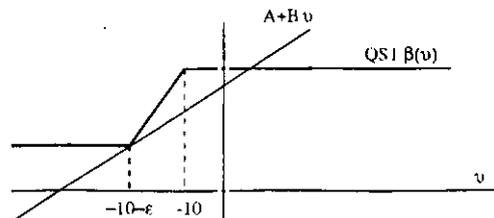


$$u_1 = \frac{QS_1M - C}{B} > -10$$

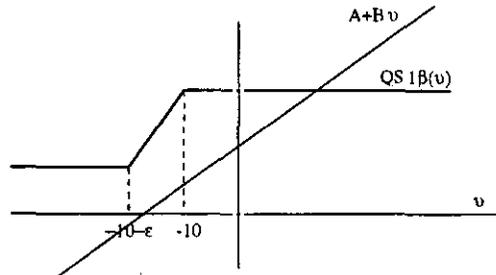
$$u_2 = \frac{QS_1m - C}{B} < -10 - \epsilon$$

$$-10 - \epsilon < u_3 < -10;$$

iv) si $Q = Q_{3,\epsilon}$ entonces (P_Q^1) tiene dos soluciones;



v) si $Q_{3,\epsilon} < Q$ entonces (P_Q^1) tiene una única solución



$$u = \frac{QS_1M - C}{B} > -10.$$

Para el problema (P_Q^2) se obtiene análogamente que

i) si $0 \leq Q < Q_2 := \frac{-10B+C}{MS_0}$ entonces (P_Q^2) tiene solución única,

$$u = \frac{QS_0m - C}{B} < -10 - \epsilon;$$

ii) si $Q = Q_2$ entonces (P_Q^2) tiene dos soluciones;

iii) si $Q_2 < Q < Q_{4,\epsilon} := \frac{-10B-\epsilon B+C}{S_0m}$ entonces (P_Q^2) tiene tres soluciones,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{QS_0M - C}{B} > -10 \\ u_2 &= \frac{QS_0m - C}{B} < -10 - \epsilon \\ -10 - \epsilon &< u_3 < -10; \end{aligned}$$

iv) si $Q = Q_{4,\epsilon}$ entonces (P_Q^2) tiene dos soluciones;

v) si $Q_{4,\epsilon} < Q$ entonces (P_Q^2) tiene una única solución:

$$u = \frac{QS_0M - C}{B} > -10.$$

Observación. La condición $\frac{M}{m} > \frac{S_1}{S_0}$, asegura que

$$0 < \frac{-10B+C}{MS_1} < \frac{-10B+C}{MS_0} < \frac{-10B+C}{mS_1} < \frac{-10B+C}{mS_0}$$

y si ϵ se elige suficientemente pequeño

$$0 < \frac{-10B+C}{MS_1} < \frac{-10B+C}{MS_0} < \frac{-10B-\epsilon B+C}{mS_1} <$$

$$\left\langle \frac{-10B+C}{m.S_0} \left\langle \frac{-10B-\epsilon B+C}{m.S_0} \left\langle \frac{-10B+C}{m.S_0} \right. \right. \right.$$

Es decir, existe ϵ_0 tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$ y si definimos

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-10B+C}{m.S_1} & Q_2 &= \frac{-10B+C}{m.S_0} \\ Q_{3,\epsilon} &= \frac{-10B-\epsilon B+C}{m.S_1} & Q_{4,\epsilon} &= \frac{-10B+C-\epsilon B}{m.S_0} \\ Q_3 &= \frac{-10B+C}{m.S_1} & Q_4 &= \frac{-10B+C}{m.S_0}, \end{aligned}$$

entonces

$$0 < Q_1 < Q_2 < Q_{3,\epsilon} < Q_{4,\epsilon},$$

y también

$$0 < Q_1 < Q_2 < Q_3 < Q_4.$$

Llamaremos Σ_1 y Σ_2 a los diagramas de bifurcación de (P_Q^1) y (P_Q^2) respectivamente.

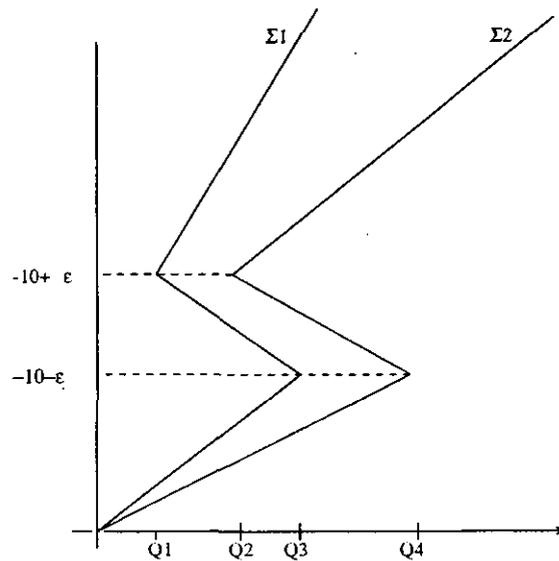


Figura 13. Hemos representado en un diagrama cartesiano la dependencia de las soluciones de (P_Q^1) y (P_Q^2) con respecto al parámetro Q . En el eje de abscisas hemos situado Q y en el de ordenadas u_Q . Σ_1 y Σ_2 denotan los diagramas de bifurcación de dichos problemas cero-dimensionales.

Etapa 3. Principio de comparación.

Si $Q < Q_{3,\epsilon}$, existe u_Q solución de (P_Q) tal que $u_Q < -10 - \epsilon$. Por tanto u_Q es solución de

$$-\Delta_p u + Bu + C = QS(x)m,$$

y además

$$QS_0m \leq -\Delta_p u + Bu + C \leq QS_1m.$$

Para un tal Q , sean u_Q^1 y u_Q^2 , las soluciones constantes de

$$Bu + C = QS_1m \text{ en } \mathcal{M}$$

$$Bu + C = QS_0m \text{ en } \mathcal{M},$$

respectivamente. Es decir, (Q, u_Q^1) y (Q, u_Q^2) son puntos de los diagramas de bifurcación Σ_1 y Σ_2 , respectivamente, pues $Q < Q_{3,\epsilon}$.

Por el principio de comparación para el operador monótono $-\Delta_p + B$ se tiene que, fijado $Q < Q_{3,\epsilon}$, como

$$-\Delta_p u_Q^2 + Bu_Q^2 \leq -\Delta_p u_Q + Bu_Q \leq -\Delta_p u_Q^1 + Bu_Q^1,$$

entonces

$$u_Q^2 \leq u_Q \leq u_Q^1.$$

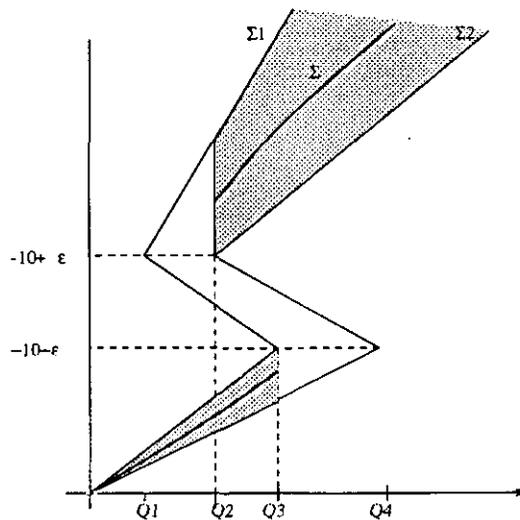


Figura 14. El Principio de comparación para el operador $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + Bu$ garantiza que en las regiones que aparecen sombreadas en la figura existen dos subconjuntos de Σ situados entre Σ_1 y Σ_2 .

Por tanto, la componente de Σ que empieza en $(0, \frac{-C}{B})$ permanece entre Σ_1 y Σ_2 hasta llegar a $(Q_{3,\epsilon}, u_{Q_{3,\epsilon}})$, donde ésta es la única solución de (P_Q) menor que $-10 - \epsilon$ para $Q = Q_{3,\epsilon}$.

Análogamente se prueba que la componente de Σ que une (Q_2, u_{Q_2}) con (∞, ∞) permanece entre Σ_1 y Σ_2 .

Etapa final.

Como se probó en la etapa 1, Σ posee necesariamente una componente conexa no acotada que contiene al punto $(0, \frac{-C}{B})$. Además (P_Q) tiene solución única si $Q < Q_1$ (Teorema 10) por tanto existirá una (única) componente conexa C_1 de Σ que comienza en $(0, \frac{-C}{B})$ y que por la etapa 3 llega hasta (Q_3, u_{Q_3}) entre Σ_1 y Σ_2 .

Por otro lado, fijado Q la solución u_Q es acotada, y si $Q > Q_4$ el problema (P_Q) tiene solución única, por tanto la única rama no acotada que posee Σ ha de contener a la curva C_2 que parte de (Q_2, u_{Q_2}) con $u_{Q_2} > -10$ y tiende a (∞, ∞) cuando $Q \rightarrow \infty$. Así, por la unicidad de solución de (P_Q) para valores suficientemente pequeños y suficientemente grandes de Q resulta que C_1 y C_2 pertenecen a la misma componente conexa. Finalmente, como $Q_3 < Q_2$, se tiene que dicha componente ha de tener al menos dos puntos de retorno (forma de S), y en todo caso un número par de ellos, obteniendo así el resultado buscado. ■

Teorema 13 *Sea β el grafo maximal monótono de tipo Heaviside dado por*

$$\beta(s) = \begin{cases} M & s > -10 \\ [m, M] & s = -10 \\ m & s < -10 \end{cases}$$

entonces Σ tiene una componente conexa no acotada en forma de S.

Antes de dar la demostración necesitamos algunos resultados previos. Se define en primer lugar el concepto de *límite inferior y superior de una familia de conjuntos* C_n pertenecientes a un espacio métrico X ,

$$\liminf C_n = \{p \in X : \text{si } U(p) \text{ es un entorno de } p \text{ en } X \text{ entonces} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : U(p) \cap C_n \neq \emptyset \forall n \geq n_0\}$$

$$\limsup C_n = \{p \in X : \text{si } U(p) \text{ es un entorno de } p \text{ en } X \text{ entonces } U(p) \cap C_n \neq \emptyset \text{ para infinitos } n\}.$$

Necesitaremos el siguiente

Lema 11 (*Whyburn, 1955*)

Sea $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos conexos en un espacio métrico X . Si

i) $\liminf C_n \neq \emptyset$, y

ii) $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$ es precompacto,

entonces $\limsup C_n$ es no vacío, precompacto, cerrado y conexo.

Demostración del Teorema 13

El Teorema 10 muestra que si $0 < Q < \frac{-10B+C}{MS_1} = Q_1$ entonces (P_Q) tiene solución única y además dicha solución es menor que -10 . Por tanto en el intervalo $[0, \frac{-10B+C}{MS_1})$ el diagrama de bifurcación de (P_Q) viene dado por la solución del problema

$$-\Delta_p u + Bu + C = QS(x)m \text{ en } \mathcal{M}. \quad (\text{II.6})$$

Análogamente, si $Q_4 = \frac{-10B+C}{mS_0} < Q$ el diagrama de bifurcación de (P_Q) está determinado por la solución de

$$-\Delta_p u + Bu + C = QS(x)M \text{ en } \mathcal{M}. \quad (\text{II.7})$$

Veamos que los puntos (Q_1, u_{Q_1}) y (Q_4, u_{Q_4}) pertenecen a la misma rama.

Partiendo del hecho de que el resultado es cierto para funciones β lipshizianas (Teorema 12) se considera una familia de funciones continuas $\{\beta_n\}$, como la de la Figura 12, que se aproximan a β cuando $n \rightarrow \infty$. Llamemos S_n a la componente conexa de Σ_n que empieza en $(0, \frac{-C}{B})$ y es no acotada.

Probaremos que el límite superior de la familia de ramas S_n es un conjunto conexo y cerrado de soluciones del problema (P_Q) . Para ello bastará comprobar las hipótesis del Lema 11. El primer obstáculo que encontramos es que los conjuntos S_n no son acotados y por tanto su unión no es precompacta; de ahí que consideremos unos nuevos conjuntos $C_n^j \subset S_n$ acotados. Dado $j > 0$, definimos C_n^j como la componente conexa de $S_n \cap ([0, j] \times L^\infty(\Omega))$ que contiene a $(0, \frac{-C}{B})$.

Etapas 1.

Veamos en primer lugar que fijado j , la sucesión C_n^j verifica las hipótesis del Lema 11. Por su definición, C_n^j es un conjunto conexo $\forall n \in \mathbb{N}$. Además

- (i) $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n^j \neq \emptyset$. En efecto, $(0, \frac{-C}{B}) \in C_n^j$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, todo entorno U de $(0, \frac{-C}{B})$ en $X = ([0, j] \times L^\infty(\Omega))$ verifica que

$$U \cap C_n^j \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y así

$$(0, \frac{-C}{B}) \in \liminf_{n \rightarrow \infty} C_n^j.$$

- (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^j$ es precompacto. Como X es completo, bastará demostrar que

$$\forall \{Q_l, u_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^j$$

existe una subsucesión $\{(Q_{l_k}, u_{l_k})\}$ convergente en X .

Para ello, observamos que, como $Q_l \in [0, j]$, existe $Q \in [0, j]$ y una subsucesión de $\{Q_l\}$ que denotaremos también por $\{Q_l\}$ tal que $Q_l \rightarrow Q$. Para encontrar una subsucesión asociada $\{u_{l_k}\}$ convergente, se considera u_l solución del problema

$$-\Delta_p u_l + B u_l = Q S(x) \beta_l(u_l) - C \text{ en } \mathcal{M}.$$

Tomando u_l como función test en su formulación débil, se obtiene la estimación

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla u_l|^p dA + \int_{\mathcal{M}} \frac{B}{2} |u_l|^2 dA \leq \frac{(j \|S\|_\infty M + C)^2 |\mathcal{M}|}{2B} \quad (11.8)$$

por tanto u_l es una sucesión acotada en V . Por la inclusión compacta de V en $L^\infty(\mathcal{M})$ si $p > 2$, existe $u \in L^\infty(\mathcal{M})$ y una subsucesión de $\{u_l\}$ tal que $u_{l_k} \rightarrow u$ en $L^\infty(\mathcal{M})$. Si $p = 2$ se tiene que existe $\{u_{l_k}\}$ subsucesión tal que

$$u_{l_k} \rightarrow u \quad \text{en } L^q(\mathcal{M}) \quad \forall q$$

y por la propiedad

$$\|u\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\|u\|_q}{|\mathcal{M}|^{\frac{1}{q}}} \quad (11.9)$$

se concluye la convergencia en $L^\infty(\mathcal{M})$ y por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^j$ es precompacto.

Verificadas las hipótesis del lema, se concluye que

$$C^j := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup C_n^j$$

es un conjunto no vacío, conexo y compacto (por ser X un espacio completo).

Etapla 2. C^j está contenido en Σ .

Veamos que dado $Q \in [Q_1, Q_4]$ cada punto (Q, u) de C^j es tal que u es solución del problema (P_Q) (recuérdese que esto ya se tiene si $Q \in (0, Q_1] \cup [Q_4, +\infty)$). Sea $(Q, u) \in C^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup C_n^j$, es decir, existe una subsucesión de $(Q_n, u_n) \in C_n^j$ tal que $(Q_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow (Q, u)$ en $\mathbb{R} \times L^\infty(\mathcal{M})$ con

$$-\Delta_p u_{n_k} + B u_{n_k} = Q_{n_k} S(x) \beta_{n_k}(u_{n_k}) - C \text{ en } \mathcal{M}.$$

De la estimación (II.8) y las inclusiones compactas $V \subset L^q(\mathcal{M})$ y $V \subset L^\infty(\mathcal{M})$ para $p = 2$ y $p > 2$ respectivamente, así como la propiedad (II.9), se deduce la existencia de $v \in L^\infty(\mathcal{M})$ y de una subsucesión que seguiremos llamando (Q_{n_k}, u_{n_k}) tal que

$$(Q_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow (Q, v) \text{ en } \mathbb{R} \times L^\infty(\mathcal{M}),$$

que por la unicidad de límite es $u = v$. Teniendo en cuenta que β es un grafo maximal monótono tenemos que

$$\beta_{n_k}(u_{n_k}) \rightharpoonup z \in \beta(u) \text{ en } L^2(\mathcal{M})\text{-débil.}$$

Utilizando el Lema 10 se tiene que

$$|\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ en } L^{p'}(\mathcal{M})\text{-débil,}$$

concluyendo así, que u es, de hecho, solución del problema (P_Q) . Por tanto $(Q, u) \in \Sigma$ y $C^j \in \Sigma$.

Etapla final.

Sabemos que para todo n y j naturales

$$C_n^j \cap (\{j\} \times L^\infty(\mathcal{M})) \neq \emptyset$$

y así $\exists \{(j, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(j, u_n) \in C_n^j$ y, en consecuencia,

$$-\Delta_p u_n + B u_n = j S(x) \beta_n(u_n) - C.$$

Por la compacidad del operador $(\Delta_p + B)^{-1}$ entonces existe una subsucesión

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ in } L^\infty(\mathcal{M}).$$

Entonces $(j, u) \in C^j$, por tanto

$$C^j \cap (\{j\} \times L^\infty(\mathcal{M})) \neq \emptyset.$$

Considerando j suficientemente grande ($j > Q_4$), se tiene que C^j está contenida en Σ y une los puntos $(0, \frac{-C}{B})$ y (j, u_j) . Además como para $j > Q_4$, u_j está unívocamente determinada como la única solución de

$$-\Delta_p u + Bu = jS(x)\beta(u) - C,$$

para valores de Q mayores que j sabemos que ésta rama del diagrama coincide con la del problema (II.7). Así, se ha obtenido una rama conexa no acotada que comienza en $(0, \frac{-C}{B})$. Repitiendo el argumento de la etapa final de la demostración del Teorema 12 se obtiene el resultado buscado. ■

Apéndice A

Aproximación Numérica.

El objetivo de este apéndice es mostrar algunos métodos que permitan aproximar las soluciones de modelos de balance de energía en Climatología. En la literatura sobre MBE se pueden encontrar algunos experimentos numéricos para el modelo unidimensional de Budyko (ver Mengel - Short - North [1988] y Lin - North [1990]), basados en el desarrollo de la solución en serie de Fourier para el tiempo y en la base de los polinomios de Legendre para el espacio. El objetivo de este apéndice es dar rigor al uso de este método para dicho modelo probando su convergencia en un espacio funcional adecuado. Una aproximación más general por elementos finitos fue el objeto del artículo Bermejo [1994].

Estudiaremos la aproximación del modelo de evolución unidimensional de tipo Budyko, tanto en el caso de difusión lineal como en el de difusión no lineal, partiendo de la existencia de solución para el modelo continuo probada en Xu[1991] y en Díaz [1993] respectivamente. La obtención de este modelo fue descrita en el Capítulo 1, donde se supuso temperatura constante sobre cada paralelo, reduciendo así la variable espacial (seno de la latitud) a dimensión uno. El dato inicial u_0 lo supondremos en el espacio V (descrito en el capítulo 1), lo que garantiza cierta regularidad de la solución correspondiente.

Comenzamos por introducir la aproximación u_m de Faedo - Galerkin para este problema y mostraremos que converge a una solución u . Como es bien sabido, este método transforma la ecuación en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Finalmente mostraremos diversas experiencias numéricas realizadas para el modelo unidimensional de Budyko con difusión lineal.

1 El modelo unidimensional. Método de Faedo – Galerkin.

Se considera el problema (P_1) con $p = 2$, $\mathcal{G}(u) = Bu$, $f(t, x) = C$ y donde β es un grafo de tipo Heaviside

$$(P^*) \begin{cases} u_t - (\rho(x)u_x)_x + Bu + C \in QS(x)\beta(u), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ \rho \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

donde x es el seno de la latitud y por tanto $\Omega = (-1, 1)$. Siendo $\rho(x) = 1 - x^2$ con $u_0 \in V$. La solución de este problema pertenece al espacio de Banach $L^2(0, T; V)$ con

$$V = \{v \in L^2(\Omega) : v_x \in L^2_p(\Omega)\}$$

(véase Xu [1991], Díaz [1993]). Veamos cómo aproximarla. Construiremos “soluciones aproximadas” pertenecientes a espacios de dimensión finita $V_m \subset V$ generados por las autofunciones w_i del operador diferencial $(\rho(x)u_x)_x$. Es decir, por la compacidad del operador inverso podemos suponer que

- $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ espacio vectorial de dimensión m ,
- $w_i \in V$ es una autofunción de autovalor λ_i ,
- $\forall m, w_1, \dots, w_m$ son linealmente independientes,
- las combinaciones lineales de las funciones $w_i, i \in \mathbb{N}$ son densas en V .

Si $\rho(x) = 1 - x^2$ es bien conocido (véase por ejemplo Legendre [1785], Simmons [1993]) que las autofunciones del operador de difusión son los polinomios de Legendre, definidos por

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \end{aligned}$$

y los autovalores $\lambda_n = n(n+1)$. Además

$$\int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)dx = \frac{2}{2j+1}\delta_{ij},$$

lo que asegura que los polinomios de Legendre son ortogonales en $L^2(\Omega)$ (esto se puede obtener directamente por ser el operador autoadjunto).

Llamaremos "solución aproximada" del problema (P^*) a $u_m = u_m(t, x)$ dada por

$$u_m = \sum_{i=0}^m \alpha_i(t)P_i(\cdot) \in V_m$$

donde α_i queda determinado por

$$(P_m) \begin{cases} \langle u_{m_t}, P_i \rangle + \langle (1-x^2)(u_m)_x, (P_i)_x \rangle + \langle Bu_m, P_i \rangle + \langle C, P_i \rangle = \\ = \langle QS(x)z_m, P_i \rangle & i = 0 \dots m \\ u_m(0, x) = u_{0m}(x), \end{cases}$$

para algún $z_m \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $z_m \in \beta(u_m) \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega$ y siendo $u_{0m}(x) = \sum_{i=1}^m u_0^i P_i(x)$. Aquí el corchete \langle, \rangle representa el producto escalar en $L^2(\Omega)$

Sustituyendo u_m por su expresión en la base de V_m , se obtiene que

$$\begin{cases} \frac{2}{2i+1}\alpha_i'(t) + \frac{2\lambda_i}{2i+1}\alpha_i(t) + \frac{2B}{2i+1}\alpha_i(t) = \Gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) & \text{si } i \neq 0 \\ 2\alpha_0'(t) + 2\lambda_0\alpha_0(t) + 2B\alpha_0(t) + C = \Gamma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \alpha_i(0) = u_0^i \end{cases}$$

con $\Gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \langle QS(x)z_m, P_i \rangle$.

Así, hemos obtenido un sistema de $m+1$ ecuaciones diferenciales ordinarias con $m+1$ incógnitas $\alpha_i(t)$ y $m+1$ datos iniciales u_0^i , $i=0, \dots, m$. La existencia de solución para este sistema está garantizada mediante el siguiente resultado abstracto (véase, por ejemplo, Filippov [1988], pg. 77)

Teorema 14 Si $F(t, v)$ verifica que $\forall (t, v) \in G \subset \mathbb{R}^{N+1}$ toma valores no vacíos, acotados, cerrados, convexos y F es semicontinua superiormente en (t, v) entonces para todo $T > 0$ existe $v \in C([0, T])$ solución del problema

$$\begin{cases} v'(t) \in F(t, v) \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

supuesto que $(0, v_0) \in G$. \square

En el caso que nos ocupa es $v(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$, $v_0 = (u_0^0, u_0^1, \dots, u_0^m)$, y $G = [0, T] \times \mathbb{R}^{m+1}$. Se obtiene que $v \in W^{1,\infty}(0, T)$.

Estimaciones a priori para el problema (P_m) .

Si u_m es solución de (P_m) , verifica también que

$$\begin{aligned} \langle u_{m,t}, v \rangle + \langle \rho(x)(u_m)_x, v_x \rangle + \langle Bu_m, v \rangle + \langle C, v \rangle &= \\ &= \langle QS(x)z_m, v \rangle \quad \forall v \in V_m. \end{aligned}$$

Recuérdese que $z_m \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ y que $z_m \in \beta(u_m)$.

Tomando, en particular, $v = u_m$ se obtiene, aplicando la desigualdad de Young, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 + \int_{\Omega} \rho(x) |(u_m)_x|^2 + B \int_{\Omega} |u_m|^2 &= \\ = \int_{\Omega} (QS(x)z_m - C)u_m &\leq (Q \|S\|_{\infty} M + C) \int_{\Omega} |u_m| \leq \\ &\leq \frac{|\Omega|(Q \|S\|_{\infty} M + C)^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 + \int_{\Omega} \rho(x) |(u_m)_x|^2 + (B - \frac{\epsilon}{2}) \int_{\Omega} |u_m|^2 \leq K$$

donde K es la constante positiva dada por $K = \frac{|\Omega|(Q \|S\|_{\infty} M + C)^2}{2\epsilon}$. Así, si $\epsilon < 2B$, concluimos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 \leq 2K$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2KT + \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2KT + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando ahora $v = u'_m (:= (u_m)_t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u'_m|^2 + \int_{\Omega} \rho(x)(u_m)_x (u'_m)_x + B \int_{\Omega} u_m u'_m &= \\ = \int_{\Omega} (QS(x)z_m - C)u'_m. \end{aligned}$$

Estimando el término

$$\int_{\Omega} (QS(x)z_m - C)u'_m \leq \frac{(Q \|S\|_{\infty} M + C)^2 |\Omega|}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2$$

se llega a

$$(1 - \frac{\epsilon}{2}) \int_{\Omega} |u'_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho(x) |(u_m)_x|^2) + \frac{B}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 \leq K.$$

Así,

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\epsilon}{2}) \|u'_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|(u_m(T))_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{B}{2} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq KT + \frac{1}{2} \|(u_0)_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{B}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De este modo, hemos obtenido las estimaciones débiles

$$\begin{aligned} \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1, \\ \|u'_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_2, \\ \|(u_m(T))_x\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_3, \\ \|z_m\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} &\leq C_4, \end{aligned}$$

de las que se deducen las siguientes convergencias

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u && \text{en } V, \\ u'_m &\rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} && \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Por la inclusión compacta $V \subset L^2(\Omega)$ y la propiedad de los grafos maximales monótonos, aludida en la pg. 81 se tiene también que

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u && \text{en } L^2(\Omega), \\ z_m &\rightarrow z && \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Todo ello permite pasar al límite en la formulación débil del problema, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v + \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x) u_x v_x + B \int_0^T \int_{\Omega} uv + C \int_0^T \int_{\Omega} v &= \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} QS(x)zv \end{aligned}$$

$\forall v \in V_m$, y por densidad de V_m en V se tiene la identidad para todo $v \in V$, por lo que u es una solución débil de (P^*) . ■

2 Aproximación del modelo unidimensional cuasi-lineal: método de Faedo - Galerkin.

Veamos ahora que el método de aproximación anterior también es válido para el modelo unidimensional con difusión no lineal ($p > 2$):

$$(\hat{P}) \begin{cases} u_t - (\rho(x)|u_x|^{p-2}u_x)_x + Bu + C \in QS(x)\beta(u) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ (1-x^2)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

supuesto $u_0 \in V$. Siguiendo a Díaz [1993], es posible encontrar una solución de este problema en el espacio funcional $L^2(0, T; V)$, donde

$$V = \{v \in L^2(\Omega) : v_x \in L^p(\Omega)\}.$$

El hecho de que el operador de difusión no sea lineal hace que la elección de las funciones de base $\{w_i, i \in I\}$ verificando

$$(\rho(x)|w_i)_x|^{p-2}(w_i)_x = \lambda_i w_i,$$

no sea útil para los cálculos (ahora se desconoce si generan un subconjunto denso). Por ello, se considera otra familia distinta $\{w_i : i \in I\} \subset V$ tal que para todo m , $w_1 \dots w_m$ son linealmente independientes y las combinaciones lineales de las funciones w_i son densas en V . Llamaremos $V_m = [w_1 \dots w_m]$ espacio vectorial de dimensión m . En particular, podríamos seguir tomando los polinomios de Legendre como funciones de base.

Llamaremos "solución aproximada" de (\hat{P}) a una función de la forma $u_m(t, x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i(t)w_i(x)$ verificando el "problema aproximado"

$$(P_m) \begin{cases} \text{Hallar } u_m \in V_m \text{ tal que} \\ \langle u'_m, w_j \rangle + \langle \rho(x)|u_m)_x|^{p-2}(u_m)_x, (w_j)_x \rangle + \langle Bu_m, w_j \rangle + \\ + \langle C, w_j \rangle = \langle QS(x)z_m, w_j \rangle \quad j = 0 \dots m, \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=0}^m u_0^i w_i \\ \text{para algún } z_m \in L^\infty((0, T) \times \Omega), z_m \in \beta(u_m) \text{ c}\forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\alpha_0(t) \dots \alpha_m(t)) \text{ tal que} \\ \alpha'_j(t) + \langle \rho(x) | \sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(w_i)_x |^{p-2} (\sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(w_i)_x), (w_j)_x \rangle + B\alpha_j(t) + \\ + \langle C, w_j \rangle = \langle Q.S(x)z_m, w_j \rangle \quad j = 0 \dots m \\ \alpha_j(0) = \alpha_0^j \\ \text{para algún } z_m \in L^\infty((0, T) \times \Omega), z_m \in \beta(u_m) \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \end{array} \right.$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar en $L^2(\Omega)$. Aplicando el Teorema 14 se obtiene existencia de al menos una solución de (P_m) en V_m , pues si definimos $F(t, \alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ como

$$\{h : h_j \in - \langle \rho(x) | \sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(w_i)_x |^{p-2} (\sum_{i=0}^m \alpha_i(t)(w_i)_x), (w_j)_x \rangle + \langle Q.S(x)z_m, w_j \rangle - B\alpha_j(t) - \langle C, w_j \rangle \quad j = 0 \dots m\}$$

podemos expresar (P_m) como

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha'_0(t), \alpha'_1(t), \dots, \alpha'_m(t)) \in F(t, \alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \\ (\alpha_0(0), \alpha_1(0), \dots, \alpha_m(0)) = (\alpha_0^0, \alpha_0^1, \dots, \alpha_0^m) \in \mathbb{R}^{m+1}. \end{array} \right.$$

Finalmente, como F es semicontinuo superiormente y toma valores no vacíos, convexos y acotados (por ser β un grafo maximal monótono acotado) se concluye la existencia de $\alpha_j \in W^{1,\infty}(0, T)$, $0 \leq j \leq m$.

Estimaciones a priori.

Procediendo como en el problema anterior, es decir, multiplicando la ecuación por u_m y u'_m , se obtienen las estimaciones:

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1, \\ \|u'_m\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} &\leq C_2, \\ \|(u_m)_x\|_{L^p_\rho(\Omega)} &\leq C_3, \\ \|z_m\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} &\leq C_4, \end{aligned}$$

lo que permite afirmar que existe una subsucesión (que aún denotamos por $\{u_m\}$) de $\{u_m\}$ tal que

$$\begin{aligned} u_m(t) &\rightharpoonup u(t) \quad \text{en } V, \\ u'_m &\rightharpoonup u' \quad \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ |(u_m)_x|^{p-2}(u_m)_x &\rightharpoonup Y \quad \text{en } L^2(0, T; L^p_\rho(\Omega)). \end{aligned}$$

Por la inclusión compacta $V \subset L^2(\Omega)$, existe una subsucesión que seguiremos llamando $\{u_m\}$ que converge fuertemente en $L^2(\Omega)$. Por la propiedad aludida de los grafos maximales monótonos se tiene además

$$z_m \rightarrow z \in \beta(u) \quad \text{en } L^2((0, T), L^2(\Omega)).$$

Finalmente, $Y = |u_x|^{p-2}u_x$ aplicando un argumento de tipo Minty como en el lema II.1.

Con toda esta información podemos pasar al límite en la formulación débil de (P_m) obteniéndose que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'v + \int_0^T \int_{\Omega} \rho(x)|u_x|^{p-2}u_x v_x + B \int_0^T \int_{\Omega} uv + C \int_0^T \int_{\Omega} v &= \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} QS(x)zv \quad \forall v \in V_m. \end{aligned}$$

Por densidad se obtiene que u es una solución débil de (\hat{P}) . ■

3 Aproximación del modelo unidimensional semi-lineal: método de Fourier - Galerkin.

Se considera el problema (P^*) con $p = 2$. En el método anterior expresábamos u como una serie de la forma

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) P_i(x) \quad (\text{A.1})$$

donde P_i era el i -ésimo polinomio de Legendre y $\alpha_i \in L^2(0, T)$. Ahora bien, es posible desarrollar las funciones $\alpha_i(t)$ en su serie de Fourier

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{ij} \cos 2\Pi jt + b_{ij} \sen 2\Pi jt). \quad (\text{A.2})$$

Lo que conduce a una solución de la forma

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (a_{ij} \cos 2\Pi jt + b_{ij} \sen 2\Pi jt) P_i(x). \quad (\text{A.3})$$

Denotaremos por V_{IJ} al espacio funcional generado por las funciones $P_i(x) \cos 2\Pi jt$ y $P_i(x) \sen 2\Pi jt$ para $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$ que dotado con la norma $\| \cdot \|_V$ es un espacio de Banach de dimensión $(I+1)(2J+1)$.

Ahora llamamos solución aproximada de (P^*) a una función de la forma

$$u_{IJ}(x, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (a_{ij} \cos 2\Pi j t + b_{ij} \sen 2\Pi j t) P_i(x), \quad (\text{A.4})$$

y por tanto sus coeficientes a_{ij} y b_{ij} se obtienen al resolver el que llamaremos "problema aproximado"

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_{IJ} \in V_{IJ} \text{ tal que} \\ u'_{IJ} - ((1-x^2)u_{IJx})_x + Bu_{IJ} + C \in QS(x)\beta(u) \\ u_{IJ}(0, x) = u_{0I}(x) \end{cases}$$

que en su formulación débil se enuncia como

$$(P_{IJ}) \begin{cases} \text{Hallar } u_{IJ} \in V_{IJ} \text{ tal que } \exists z_{IJ} \in L^\infty((0, T) \times \Omega), z_{IJ} \in \beta(u_{IJ}) \text{ verificando} \\ \int_0^T \int_\Omega u'_{IJ} v + \int_0^T \int_\Omega (1-x^2)(u_{IJ})_x v_x + \int_0^T \int_\Omega Bu_{IJ} v + Cv = \\ \int_0^T \int_\Omega QS(x) z_{IJ} v \quad \forall v \in V_{IJ} \end{cases}$$

Esta formulación es equivalente a considerar solamente $v = P_i(x) \cos 2\Pi j t$ y $v = P_i(x) \sen 2\Pi j t$ con $i = 0, \dots, I$ y $j = 0, \dots, J$. Sustituyendo en la formulación débil las expresiones

$$u_{IJ}(x, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (a_{ij} \cos 2\Pi j t + b_{ij} \sen 2\Pi j t) P_i(x),$$

$$u_{IJ,i}(x, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (-2\Pi j a_{ij} \sen 2\Pi j t + 2\Pi j b_{ij} \cos 2\Pi j t) P_i(x),$$

y utilizando la ortogonalidad de las funciones v consideradas, así como el hecho de que P_i es la i ésima autofunción del operador diferencial $-((1-x^2)u_x)_x$, se obtiene el siguiente sistema algebraico de $(I+1)(2J+1)$ ecuaciones

$$\begin{cases} (\lambda_i + B)a_{i0} = \langle QS(x)z_{IJ} + C, P_i(x) \rangle \\ 2\Pi j b_{ij} + (\lambda_i + B)a_{ij} = \langle QS(x)z_{IJ} + C, P_i \cos 2\Pi j t \rangle \quad j \neq 0 \\ -2\Pi j a_{ij} + (\lambda_i + B)b_{ij} = \langle QS(x)z_{IJ} + C, P_i \sen 2\Pi j t \rangle \quad j \neq 0, \end{cases}$$

para algún $z_{IJ} \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $z_{IJ} \in \beta(u_{IJ})$ y donde \langle, \rangle es el producto escalar usual en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. A la vista de este sistema, es claro que conocido el término de la derecha es trivial el cálculo de los coeficientes a_{ij} y b_{ij} , sin embargo es el grafo β (que no podemos linealizar) el que complica su resolución. Procederemos como en la demostración del Teorema de existencia del Capítulo 1. La idea es construir un grafo \mathcal{L} que permita expresar el sistema como un

$\mathbb{R}^{(I+1)(2J+1)} \times \mathbb{R}^{(I+1)(2J+1)}$. Todo ello junto al hecho de que K es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^{(I+1)(2J+1)}$ permite concluir la existencia de al menos un punto fijo de \mathcal{L} en K que es solución del sistema (P_{IJ}) .

Dado que $u_{IJ} \in V_{IJ}$ es solución de (P_{IJ}) , se obtienen (como en las secciones anteriores) las estimaciones:

$$\begin{aligned} \|u_{IJ}(T)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1, \\ \|u'_{IJ}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_2, \\ \|(u_{IJ})_x(T)\|_{L^2_0(\Omega)} &\leq C_3, \\ \|z_{IJ}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} &\leq C_4. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene la convergencia en sentido débil de las subsucesiones, que sigueremos denotando como la sucesión de la que proceden

$$\begin{aligned} u_{IJ} &\rightharpoonup u \quad \text{en } V, \\ u'_{IJ} &\rightharpoonup u' \quad \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Por la inclusión compacta $V \subset L^2(\Omega)$ y las propiedades de los grafos maximales monótonos, tenemos además

$$\begin{aligned} u_{IJ} &\rightarrow u \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ z_{IJ} &\rightarrow z \quad \text{en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Finalmente, pasando al límite en la formulación débil (P_{IJ}) , se concluye que u es solución del problema P_1 y la convergencia del método. ■

4 Experiencias numéricas.

Se considera el problema (P^*) con $p = 2$ y el método de aproximación de Faedo - Galerkin descrito en la sección 1 con la base de los polinomios de Legendre. En la simulación numérica hemos utilizado el método implícito de Euler para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias obtenido en dicha sección.

Este método numérico pone de manifiesto importantes propiedades cualitativas que ya se detectaron anteriormente en la literatura sobre el modelo continuo. Nos referimos a

- sensibilidad de la solución a pequeñas variaciones del parámetro solar Q ,
- multiplicidad de soluciones para datos iniciales degenerados,
- influencia de la periodicidad de la función de insolación $S(t, x)$ sobre la solución (modelos estacionales).

Mostramos a continuación algunos ejemplos en los que se observan estos aspectos. Los datos sobre parámetros utilizados en la simulación numérica han sido tomados de Mengel - Short - North [1988], Lin - North [1990] y North [1993]:

| | |
|-------------------------|---|
| constante solar | $Q = 340$ |
| enfriamiento $(Bu + C)$ | $B = 2 \quad C = 190$ |
| insolación | $S(x) = \frac{1}{4}(5 - 3x^2)$ |
| insolación estacional | $S(t, x) = 1 + S_1 x \cos 2\pi t + (S_2 + S_{22} \cos 4\pi t) P_2(x),$ $S_1 = -0.796, \quad S_2 = -0.477, \quad S_{22} = 0.147$ P_2 polinomio de Legendre de grado 2, |
| coalbedo | $\beta(x, u) = \begin{cases} a_0 + a_2 P_2(x) & \text{si } u > -10 \\ \frac{1}{2}(a_0 + a_2 P_2(x)) & \text{si } u < -10. \end{cases}$ $a_0 = 0.69, \quad a_2 = -0.12$ |

En esta sección se ha considerado una partición en el intervalo de tiempo $[0, T]$ de paso h para aplicar el método implícito de Euler al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (P_m) . Llamaremos problema discreto a

$$\begin{cases} \frac{2}{2i+1} \frac{\alpha_{i,j}(t) - \alpha_{i,j-1}}{h} + \frac{2\lambda_i}{2i+1} \alpha_{i,j}(t) + \frac{2B}{2i+1} \alpha_{i,j}(t) = \Gamma_{i,j}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m,j}) & \text{si } i \neq 0 \\ \frac{2}{2} \frac{\alpha_{0,j}(t) - \alpha_{0,j-1}}{h} + 2\lambda_0 \alpha_{0,j}(t) + 2B \alpha_{0,j}(t) + C = \Gamma_{0,j}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m,j}) \\ \alpha_{i,0} = u_0^i \end{cases}$$

con $\Gamma_{i,j}(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m,j}) = \langle QS(x)z_m, P_i \rangle$. Así se tiene que $\alpha_i(t) = \alpha_{i,j}$ si $hj \leq t < h(j+1)$ y la solución aproximada viene dada por

$$u_m = \sum_{i=0}^m \alpha_i(t) P_i(\cdot) \in V_m.$$

Experiencia 1: Sensibilidad al parámetro Q .

En este experimento se ha considerado un dato inicial simétrico no degenerado $u_0(x) = -60x^2 + 10$ y se ha calculado la solución al problema discreto para $Q = Q_0 = 340$ (valor actual aproximado de esta constante solar) y posteriormente se ha considerado una pequeña variación de Q , en concreto $Q = Q_1 = 0.9Q_0$. En este caso se ha tomado $S(t, x) = S(x)$

Las figuras representan las curvas de nivel de la solución $u(x, t)$ (isotermas) para dos valores distintos de Q . En el eje de abscisas se ha situado la variable espacial (seno de la latitud) y en el de ordenadas la variable temporal.

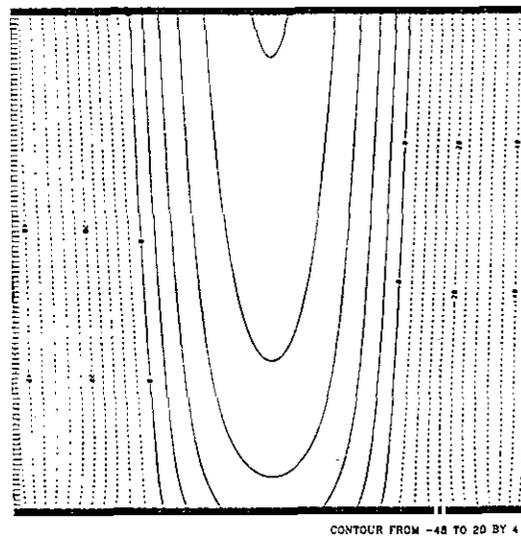
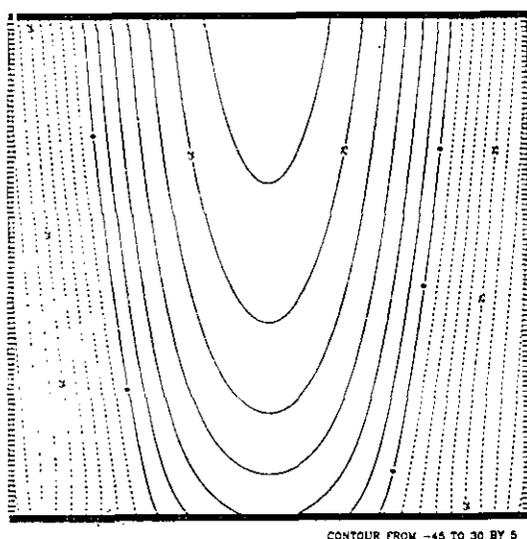


Figura A.1.

En la figura A.1 se ha tomado $Q = Q_0$ y en A.2 $Q = 0.9Q_0$.

Figura A.2.

La curva de nivel $u(x, t) = -10$ representa la línea que separa los casquetes polares del océano (frontera libre). Estas gráficas permiten distinguir en que lugar del espacio se encuentran los casquetes en cada tiempo.

En las figuras A.3 y A.4 puede verse la evolución de la temperatura en un punto espacial, en este caso se ha fijado $x = 1$, valor que representa al polo norte. También aquí se observa la variación de la temperatura cuando Q varía.

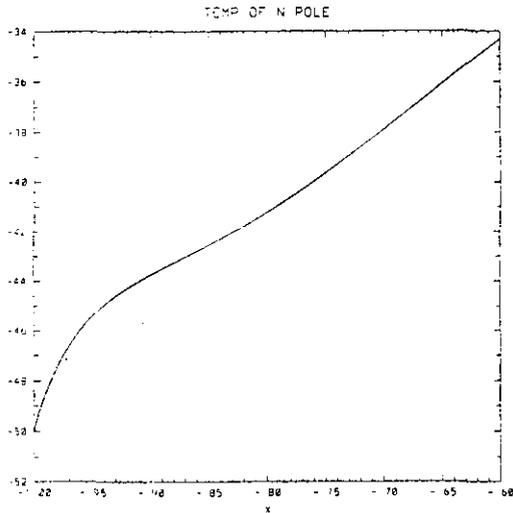


Figura A.3

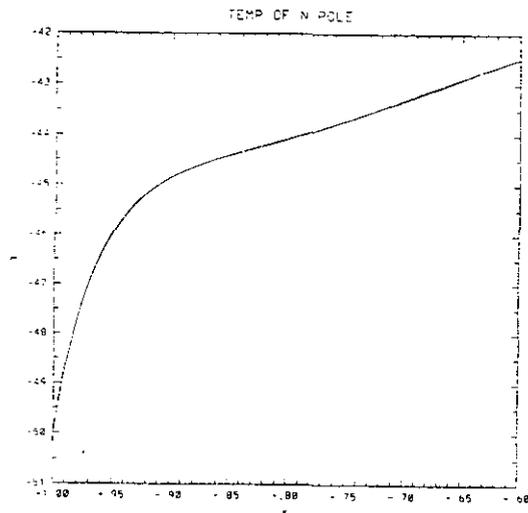


Figura A.4

Experiencia 2: *Multiplicidad de soluciones para un dato inicial degenerado.*

En las figuras A.5 y A.6 se han representado las isotermas de dos soluciones distintas del problema discreto para un mismo dato inicial degenerado, en este caso se ha tomado $u_0(x) = -10$. Las soluciones representadas son la maximal u^* y la minimal u_* respectivamente, es decir, cualquier otra solución u para este dato inicial se encuentra entre ellas $u_* \leq u \leq u^*$. Aquí $S(x) = \frac{1}{4}(5 - 3x^2)$, que representa la media anual de $S(t, x)$.

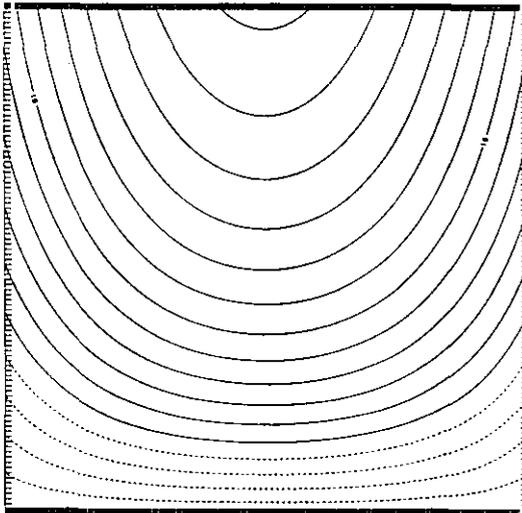


Figura A.5

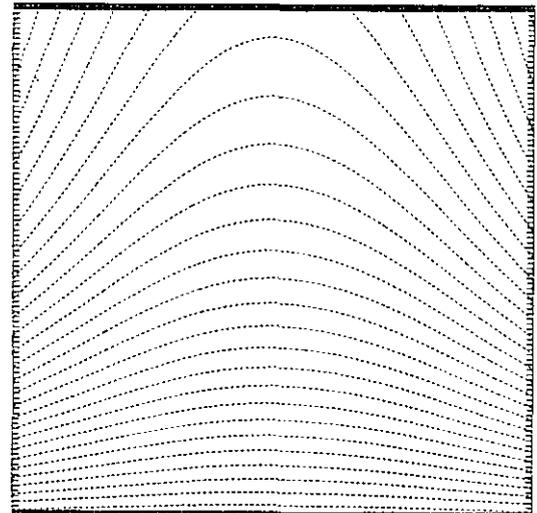


Figura A.6

Experiencia 3: Modelo estacional.

Se considera una función de insolación dependiente del tiempo. Siguiendo a North [1993], hemos tomado

con
$$S(x, t) = S(t, x) = 1 + S_1 x \cos 2\Pi t + (S_2 + S_{22} \cos 4\Pi t) P_2(x),$$

$$S_1 = -0.796, \quad S_2 = -0.477, \quad S_{22} = 0.147$$

P_2 polinomio de Legendre de grado 2.

En este caso, $t = 0$ se toma como el solsticio de invierno.

Las figuras representan isotermas de soluciones durante un año para distintos datos iniciales. En concreto, se han considerado

$$u_0(x) = -25x^2 + 10$$

$$u_1(x) = \begin{cases} -135(x + \frac{2}{3})^2 - 10 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{2}{3} \\ -10 & \text{si } -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \\ 360(x + \frac{1}{3})^2 - 10 & \text{si } -\frac{1}{3} \leq x < -\frac{1}{6} \\ 360x^2 + 10 & \text{si } -\frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{6} \\ -10 & \text{si } -\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ -135(x - \frac{2}{3})^2 - 10 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se observa la influencia de la periodicidad en t de $S(x, t)$ así como la relación entre los hemisferios norte y sur para cada estación. La mitad derecha de cada figura describe la distribución de temperaturas en el hemisferio norte y, la parte izquierda, en el hemisferio sur.

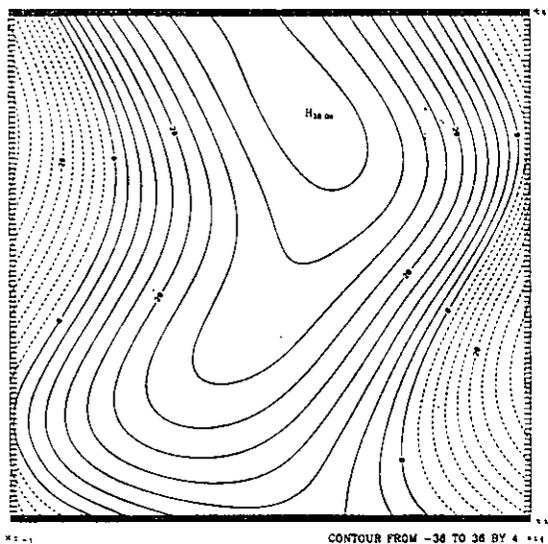


Figura A.7: u_0 .

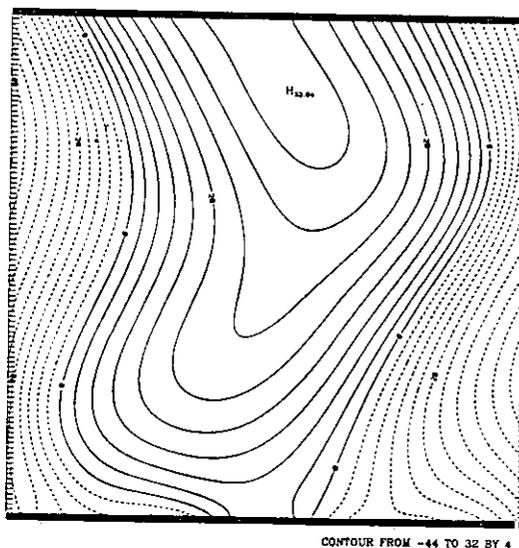


Figura A.8: u_1 .

Experiencia 4. *Sensibilidad del modelo estacional a pequeñas variaciones de Q .*

Hemos tomado el dato inicial $u_0(x) = -60x^2 + 10$ y hemos variado Q . Se observa que con una variación de $Q_0 = 340$ se obtiene distribuciones de temperatura que producen la desaparición de la masa de hielo en los polos.

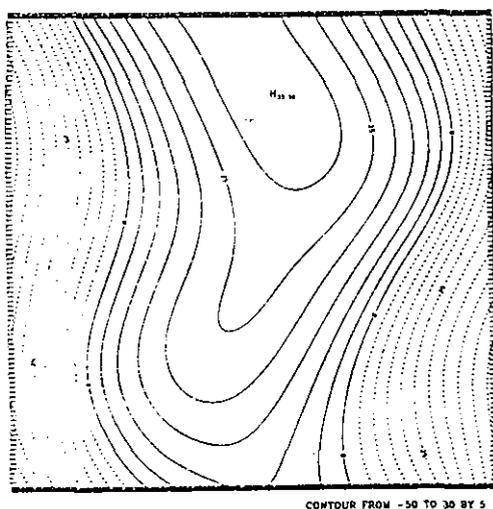


Figura A.9: $Q = Q_0 = 1$

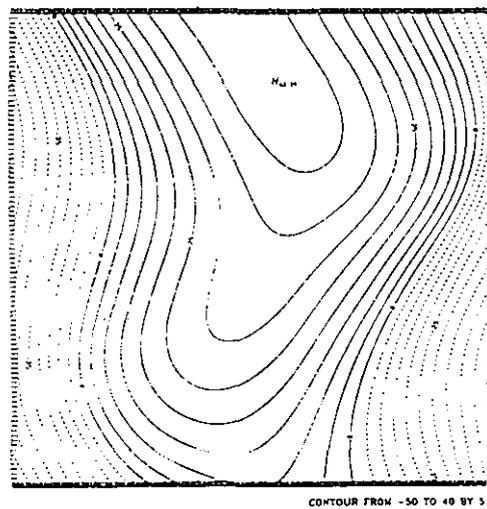


Figura A.10: $Q = 1.0798Q_0$

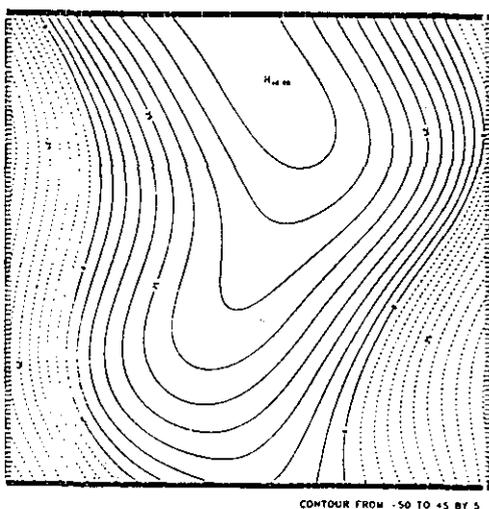


Figura A.11: $Q = 1.1198Q_0$

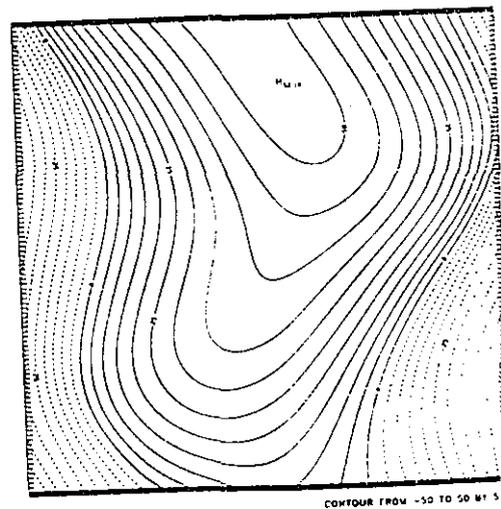


Figura A.12: $Q = 1.1598Q_0$

Incluimos a continuación el programa EBM1D.

```

PROGRAM EBEIM1D
  IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)

C
C THIS PROGRAM COMPUTES THE SOLUTION OF BUDYKO'S 1D EBM WITH DISCONTINUOUS
C COALBEDO AND LINEAR DIFFUSION. THE SOLAR INSOLATION IS TIME DEPENDENT.
C THE SPACIAL DEPENDENCE OF T IS REPRESENTED BY AN EXPANSION IN LEGENDRE
C POLYNOMIALS IN THE INTERVAL [-1,1], WHICH IS DIVIDED INTO NP-1 EQUALLY
C SPACED INTERVALS. THE NUMBER OF LEGENDRE POLYNOMIALS IS NL. THE SYSTEM
C OF ODES IS SOLVED BY EULER IMPLICIT. THE COMPUTATIONAL PARAMETERS ARE:
C NP=NUMBER OF GRID-POINTS, THIS MUST BE AN ODD NUMBER, NL=NUMBER OF
C LEGENDRE POLYNOMIALS IN THE EXPANSION. NTS = NUMBER OF TIME STEPS,
C DT=TIME STEP IN YEARS, DX = LENGTH OF INTERVALS, [0,T] INTEGRATION TIME
C INTERVAL. PHYSICAL PARAMETERS ARE: A0, A2, S1, S2, S22, DO, Q, A, B, Ts.
C Ts= A THRESHOLD TEMPERATURE.
C REAL ARRAYS: TEM(NP)=TEMPERATURE AT INSTANT tn, XP(NP) = GRID-POINTS,
C TC(NL)= LEGENDRE COMPONENTS OF TEMPERATURE AT tn, TC1(NL) AND TC2(NL)
C SAME AS TC BUT IN THE MONOTONE ITERATION. W(NP)=WORKING ARRAY, GAM(NL) =
C LEGENDRE PROJECTION OF THE RHS OF EQUATION .
C
  PARAMETER (NP=501,NL=14,NTS=1000,NP2=NP,NT2=1+(NTS/10))
  PARAMETER (T=1.0, DT=T/NTS, DX=2.0/(NP-1.0))
  COMMON/POLEG/PL(29)
  COMMON/PHYDAT/A0,A2,S1,S2,S22,DO,Q,A,B,TS
  DIMENSION TEM(NP),XP(NP),W(NP)
  DIMENSION XPG(NP2),TD2(NP2,NT2),TNP(NT2)
  DIMENSION TC(NL),TC1(NL),TC2(NL),GAM(NL)

C
  OPEN (8,FILE='DAT')
  OPEN (6,FILE='graph')

C
C ZERO ARRAYS
C
  DO 5 I=1,NP
    TEM(I)=0.0
    W(I)=0.0
  5  CONTINUE

C
  DO 10 I=1,NL
    TC(I)=0.0
    TC1(I)=0.0
    TC2(I)=0.0
    GAM(I)=0.0
  10 CONTINUE

```

```
C
      DO 12 I=1,NT2
      DO 11 J=1,NP2
      TD2(J,I)=0.0
11    CONTINUE
      TNP(I)=0.0
12    CONTINUE
C
C COMPUTE GRID-POINTS
C
      XP(1)=-1.0
      DO 15 J=1,NP-1
      XP(J+1)=XP(J)+DX
15    CONTINUE
C
      DO 18 J=1,NP2
      I=J+(NP-1)/2
      XPG(J)=XP(I)
18    CONTINUE
C
C INPUT COMMON PHYDAT
C
      A0=0.69
      A2=-0.12
      S1=-0.796
      S2=-0.477
      S22=0.147
      D0=0.40
      Q0= 340.
      Q=0.9*Q0
      A=190.0
      B=2.0
      TS=-10.0
C
C INITIALIZE TEMPERATURE. IOP INDICATES THE CHOSEN INITIAL CONDITION.
C SO IT IS NOT NECESSARY TO CALL INIT IOPGR CONTROLS THE GRAPH OF NORTHN
C POLE TEMPERATURE. IOPGR=1 PLOTS NORTH POLE TEMPERATURE, ELSE PLOTS TEM
C OVER THE WHOLE INTERVAL AT NT2
C
      IOP=1
      IOPGR=1
      CALL INIT(NP,NL,XP,TEM,TC,TC1,IOP,DX)
C      IF(IOP.EQ.1) GO TO 150
```

```
      KTIM=1
      CALL GRAP2D(NP, NP2, NT2, TEM, TD2, KTIM)
      CALL GRAP1D(NP, NT2, TEM, TNP, KTIM)
C
C COMPUTE SOLUTION AT INSTANTS tn
C
      IT1=0
      DO 20 ITM=1, NTS
      IT1=IT1+1
C
C COMPUTE LEGENDRE COMPONENTS OF TEMPERATURE
C
      TIM=ITM*DT
      CALL RHS(NP, NL, XP, TC, TC1, TC2, W, TEM, GAM,
1          TIM, DX, DT, ITM)
C
C COMPUTE TEMPERATURE AT GRID-POINTS AT INSTANT tn
C
      CALL RK1P(NP, NL, XP, TEM, TC)
C
C STORE DATA FOR GRAPHICS
C
      IF(IT1.EQ.10) THEN
      KTIM=KTIM+1
      CALL GRAP2D(NP, NP2, NT2, TEM, TD2, KTIM)
      CALL GRAP1D(NP, NT2, TEM, TNP, KTIM)
      IT1=0
      ELSE
      IT1=IT1
      END IF
20  CONTINUE
C
      WRITE(8, *) (XP(J), TEM(J), J=1, NP)
      CALL GRAPH(NP, XP, TEM, TNP, NP2, NT2, TD2, IOPGR)
C
150 CONTINUE
      STOP
      END
C
C
      SUBROUTINE GAMV(NP, NL, XP, W, TEM, GAM, TIM, DX)
      IMPLICIT REAL*4(A-H, O-Z)
      COMMON/PHYDAT/AO, A2, S1, S2, S22, DO, Q, A, B, TS
```

```

COMMON/POLEG/PL(29)
DIMENSION XP(NP),GAM(NL),W(NP),TEM(NP)
C
C THIS SUBROUTINE EVALUATES BY SIMPSON'S RULE THE LEGENDRE PROJECTION OF
C QS(X,T)*COALBEDO. THE VALUES ARE STORTED IN GAM(NL)
C
PARAMETER(PI=3.1425927)
C
C ZERO GAM
C
DO 5 I=1,NL
GAM(I)=0.0
5 CONTINUE
C
C
ARG1=2.0*PI*TIM
ARG2=4.0*PI*TIM
COS2=COS(ARG1)
COS4=COS(ARG2)
C
C COMPUTE QS(X,T)*(A0+A2*P2(X)) AT GRID-POINTS.
C
DO 10 I=1,NP
P3=0.5*(3.0*XP(I)*XP(I)-1.0)
SXT=1.0+S1*XP(I)*COS2+P3*(S2+S22*COS4)
C SXT=(5-3*x*x)/4
W(I)=Q*SXT*(A0+A2*P3)
10 CONTINUE
C
C TEST OF STEP TO CORRECT W
C
DO 15 I=1,NP
DIFT=TEM(I)-TS
IF(DIFT.GT.0.0) THEN
W(I)=W(I)
ELSE
W(I)=0.5*W(I)
END IF
15 CONTINUE
C
C
C COMPUTE INTEGRALS I(J)
C

```

```
C FIRST, COMPUTE FOR XP(1)
C
  PL(1)=1.0
  PL(2)=XP(1)
  DO 20 J=1,NL
    PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(1)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
20  CONTINUE
C
  DO 25 K=1,NL
    GAM(K)=GAM(K)+(1.0/3.0)*DX*W(1)*PL(K)
25  CONTINUE
C
  DO 40 I=2,NP-1,2
    PL(1)=1.0
    PL(2)=XP(I)
    DO 30 J=1,NL
      PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(I)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
30  CONTINUE
C
  DO 35 K=1,NL
    GAM(K)=GAM(K)+(4.0/3.0)*DX*W(I)*PL(K)
35  CONTINUE
40  CONTINUE
C
  DO 43 I=3,NP-2,2
    PL(1)=1.0
    PL(2)=XP(I)
    DO 41 J=1,NL
      PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(I)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
41  CONTINUE
C
  DO 42 K=1,NL
    GAM(K)=GAM(K)+(2.0/3.0)*DX*W(I)*PL(K)
42  CONTINUE
43  CONTINUE
C
C COMPUTE FOR XP(NP)
C
  PL(1)=1.0
  PL(2)=XP(NP)
  DO 45 J=1,NL
    PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(NP)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
45  CONTINUE
```

```

C
  DO 50 K=1,NL
    GAM(K)=GAM(K)+(1.0/3.0)*DX*W(NP)*PL(K)
  50 CONTINUE
C
  RETURN
  END
C
  SUBROUTINE RHS(NP,NL,XP,TC,TC1,TC2,W,TEM,GAM,
1          TIM,DX,DT,ITM)
C
  IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
  COMMON/PHYDAT/A0,A2,S1,S2,S22,DO,Q,A,B,TS
  COMMON/POLEG/PL(29)
  DIMENSION XP(NP),TC(NL),TC1(NL),TC2(NL),W(NP),
1          TEM(NP),GAM(NL)
C
C EVALUATE THE RHS OF ODE SYSTEM
C
  PARAMETER(EPS=0.00000001,NIT=100)
C
C MONOTONE ITERATION
C
  DO 100 IT=1,NIT
    CALL GAMV(NP,NL,XP,W,TEM,GAM,TIM,DX)
C
C SWITCH TC1 TO TC2
C
  DO 5 J=1,NL
    TC2(J)=TC1(J)
  5 CONTINUE
C
C FIND THE ABSOLUTE MAXIMUM OF TC1
C
  DMAXO=ABS(TC1(1))
  DO 10 J=2,NL
    IF(ABS(TC1(J)).GE.DMAXO) THEN
      DMAXO=ABS(TC1(J))
    ELSE
      DMAXO=DMAXO
    END IF
  10 CONTINUE
C

```

```
      IF(DMAXO .EQ. 0.0) THEN
      PRINT*, 'DMAXO=0'
      PRINT*, ITM
      PAUSE
      ELSE
      CONTINUE
      END IF

C
C COMPUTE NEW TC1
C
      DO 50 J=1,NL
      BJ=(J-1.0)*J*DO+B
      CJ=0.5*(2.0*J-1.0)
      CJ1=CJ*INT(1/J)
      DTB=1.0+DT*BJ
      TC1(J)=(TC(J)/DTB)+(DT/DTB)*(CJ*GAM(J)-2.0*CJ1*A)
50  CONTINUE
      DMAX=ABS(TC1(1)-TC2(1))
      DO 55 J=2,NL
      DIF=ABS(TC1(J)-TC2(J))
      IF(DMAX.GE.DIF) THEN
      DMAX=DMAX
      ELSE
      DMAX=DIF
      END IF
55  CONTINUE
C
      IF((DMAX/DMAXO).LE.EPS) GO TO 110
      CALL RK1P(NP,NL,XP,TEM,TC1)
100 CONTINUE
C
110 CONTINUE
C
C DO TC1=TC
C
      DO 115 I=1,NL
      TC(I)=TC1(I)
115 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE RK1P(NP,NL,XP,RK,RKC)
```

```

      IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
      COMMON/POLEG/PL(29)
      DIMENSION XP(NP),RK(NP),RKC(NL)
C
C COMPUTE RK AT XP FROM RKC
C
      DO 50 I=1,NP
      RK(I)=0.0
      PL(1)=1.0
      PL(2)=XP(I)
      DO 20 J=1,NL
      PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(I)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
20  CONTINUE
C
      DO 25 J=1,NL
      RK(I)=RK(I)+RKC(J)*PL(J)
25  CONTINUE
50  CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE GRAP2D(NP,NP2,NT2,TEM,TD2,KTIM)
      IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
      DIMENSION TEM(NP),TD2(NP2,NT2)
C
C STORE VALUES OF TEM EVERY 5 TIME STEPS FOR POINTS OF THE UPPER HALF
C INTERVAL [-1,1]
C
      DO 10 J=1,NP2
      I=J
      TD2(J,KTIM)=TEM(I)
10  CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE GRAP1D(NP,NT2,TEM,TNP,KTIM)
      IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
      DIMENSION TEM(NP),TNP(NT2)
C
C STORE NORTH POLE TEMPERATURE AT EVERY 5 TIME STEPS
C

```

```
TNP(KTIM)=TEM(NP)
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE CFUNC(NP,NL,FUN,XP,CF,DX)
IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
COMMON/POLEG/PL(29)
DIMENSION FUN(NP),XP(NP),CF(NL)
C
C COMPUTE THE LEGENDRE COMPONENTS OF A FUNCTION FUN WITH VALUES AT
C NP GRID-POINTS.
C
DO 5 J=1,NL
CF(J)=0.0
5 CONTINUE
C
PL(1)=1.0
PL(2)=XP(1)
DO 20 J=1,NL
PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(1)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
20 CONTINUE
C
DO 25 K=1,NL
CF(K)=CF(K)+(1.0/3.0)*DX*FUN(1)*PL(K)
25 CONTINUE

DO 40 I=2,NP-1,2
PL(1)=1.0
PL(2)=XP(I)
DO 30 J=1,NL
PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(I)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
30 CONTINUE
C
DO 35 K=1,NL
CF(K)=CF(K)+(4.0/3.0)*DX*FUN(I)*PL(K)
35 CONTINUE
40 CONTINUE
C
DO 43 I=3,NP-2,2
PL(1)=1.0
PL(2)=XP(I)
DO 41 J=1,NL
```

```

        PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(I)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
41  CONTINUE
C
        DO 42 K=1,NL
        CF(K)=CF(K)+(2.0/3.0)*DX*FUN(I)*PL(K)
42  CONTINUE
43  CONTINUE

C
C COMPUTE FOR XP(NP)
C
        PL(1)=1.0
        PL(2)=XP(NP)
        DO 45 J=1,NL
        PL(J+2)=((2.0*J+1.0)*XP(NP)*PL(J+1)-J*PL(J))/(J+1.0)
45  CONTINUE
C
        DO 50 K=1,NL
        CF(K)=CF(K)+(1.0/3.0)*DX*FUN(NP)*PL(K)
50  CONTINUE
C
        DO 55 K=1,NL
        CF(K)=0.5*(2.0*K-1.0)*CF(K)
55  CONTINUE
C
        RETURN
        END

C
C
C
        SUBROUTINE INIT(NP,NL,XP,TEM,TC,TC1,IOP,DX)
        IMPLICIT REAL*4(A-H,O-Z)
        COMMON/POLEG/PL(29)
        DIMENSION TEM(NP),XP(NP),TC(NL),TC1(NL)
C
C INPUT INITIAL CONDITION AND COMPUTE ITS LEGENDRE COMPONENTS
C
        IF (IOP .EQ. 1) GO TO 10
        IF (IOP .EQ. 2) GO TO 25
        IF (IOP .EQ. 3) GO TO 45
C
C COMPUTE THE FIRST OPTION
C
10  CONTINUE

```

```
DO 20 I=1,NP
C   TEM(I)=-10.0
   TEM(I)=-60.0*XP(I)*XP(I)+10.0
C   WRITE(6,*) TEM(I)
20  CONTINUE
C
C TERMINATE
   GO TO 100
C
C COMPUTE SECOND OPTION
C
25  CONTINUE
   DO 40 I=1,NP
   IF((-1.0 .LE. XP(I)) .AND. (XP(I).LT.(-2.0/3.0))) THEN
   TEM(I)=15.0*XP(I)
   ELSE IF((-2.0/3.0 .LE. XP(I)) .AND.
1      (XP(I) .LT. (-1.0/3.0))) THEN
   TEM(I)=-10.0
   ELSE IF((-1.0/3.0 .LE. XP(I)) .AND.
1      (XP(I) .LT. 0.0)) THEN
   TEM(I)=60.0*XP(I)+10.0
   ELSE IF ((0.0 .LE. XP(I)) .AND.
1      (XP(I) .LT. (1.0/3.0))) THEN
   TEM(I)=-60.0*XP(I)+10.0
   ELSE IF(((1.0/3.0) .LE. XP(I)) .AND.
1      (XP(I) .LT. (2.0/3.0))) THEN
   TEM(I)=-10.0
   ELSE
   TEM(I)=-15.0*XP(I)
   END IF
40  CONTINUE
C
   GO TO 100
C
C COMPUTE THIRD OPTION
C
45  CONTINUE
   DO 50 I=1,NP
   XP23=XP(I)+(2.0/3.0)
   XP13=XP(I)+(1.0/3.0)
   XM23=XP(I)-(2.0/3.0)
   XM13=XP(I)-(1.0/3.0)
   IF((-1.0 .LE. XP(I)) .AND. (XP(I).LT.(-2.0/3.0))) THEN
```

```

      TEM(I)=-135.0*XP23*XP23-10.0
      ELSE IF((( -2.0/3.0) .LE. XP(I)) .AND.
1         (XP(I) .LT. (-1.0/3.0))) THEN
      TEM(I)=-10.0
      ELSE IF((( -1.0/3.0) .LE. XP(I)) .AND.
1         (XP(I) .LT. (-1.0/6.0))) THEN
      TEM(I)=360.0*XP13*XP13-10.0
      ELSE IF((( -1.0/6.0) .LE. XP(I)) .AND.
1         (XP(I) .LT. (1.0/6.0))) THEN
      TEM(I)=-360.0*XP(I)*XP(I)+10.0
      ELSE IF(((1.0/6.0) .LE. XP(I)) .AND.
1         (XP(I) .LT. (1.0/3.0))) THEN
      TEM(I)=360.0*XM13*XM13-10.0
      ELSE IF(((1.0/3.0) .LE. XP(I)) .AND.
1         (XP(I) .LT. (2.0/3.0))) THEN
      TEM(I)=-10.0
      ELSE
      TEM(I)=-135.0*XM23*XM23-10.0
      END IF
50  CONTINUE
C
C COMPUTE LEGENDRE COMPONENTS
C
100 CALL CFUNC(NP,NL,TEM,XP,TC,DX)
C
C GENERATE TC1
C
      DO 150 J=1,NL
      TC1(J)=TC(J)
150 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE GRAPH(NP,XP,TEM,TNP,NP2,NT2,TD2,IOPGR)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*80 FNAME,CDUM
      DIMENSION XP(NP),TEM(NP),TNP(NT2),TD2(NP2,NT2)
C
C OPEN GKS.
C
      CALL GOPKS (6,IDUM)
C

```

C open GKS,open and active a metafile with the name sgra1.

C

```
FNAME ='sgra1'  
CALL GESC (-1391,1,FNAME,1,IDUM,CDUM)  
CALL GOPWK (1,2,1)  
CALL GACWK (1)
```

C

C out put the TEM's graphic using EZXY

C

```
CALL GSCR (1,0,0.,0.,0.)  
CALL GSCR (1,1,0.,1.,1.)  
CALL GSCR (1,2,1.,1.,0.)  
CALL GSCLIP (0)
```

C

```
IF(IOPGR.EQ.1) THEN  
CALL EZXY (XP,TNP,NT2,'TEMP OF N.POLE')  
ELSE  
CALL EZXY (XP,TEM,NP,'TEMPERTURE')  
END IF
```

C

C deactive and close the sgra1 metafile.

C

```
CALL GDAWK (1)  
CALL GCLWK (1)
```

C

C open GKS,open and active a metafile with the name sgra2.

```
FNAME ='sgra2'  
CALL GESC (-1391,1,FNAME,1,IDUM,CDUM)  
CALL GOPWK (1,2,1)  
CALL GACWK (1)
```

C

C out put the TD2's graphic using CPEZCT

```
CALL CPEZCT (TD2,NP2,NT2)
```

C

C deactive and close the sgra2 metafile.

```
CALL GDAWK (1)  
CALL GCLWK (1)  
CALL GCLKS  
RETURN  
END
```


Apéndice B

Multiplicidad de soluciones para un problema unidimensional: Método de tiro.

En este apéndice se estudia un problema estrechamente relacionado con los modelos de clima de esta memoria. Se utiliza un método de tiro que permite mostrar que la ausencia del peso en el operador de difusión conduce a una cantidad numerable de soluciones.

Se considera el problema de contorno autónomo

$$(PA) \begin{cases} -u'' + Bu + C \in Q\beta(u) & x \in (0, 1) \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

donde Q es un parámetro positivo y β es una función de tipo Heaviside definida por

$$\beta(u) = \begin{cases} m & \text{si } u < -10 \\ [m, M] & \text{si } u = -10 \\ M & \text{si } u > -10. \end{cases}$$

Nótese que no es exactamente el que surge del modelo 1-dimensional debido a la ausencia de la función peso. Veamos que existe un rango de Q para el que el problema posee infinitas soluciones. Esto contrasta con los resultados de la sección 4 del Capítulo II, así como el hecho de que haya sólo tres soluciones constantes.

Lema 12 Sea $\frac{-10B+C}{M} < Q < \frac{-10B+C}{m}$. El problema de contorno (PA) tiene infinitas soluciones.

Demostración.

Las hipótesis sobre Q garantizan la existencia de exactamente tres soluciones constantes, pues la recta $Bu + C$ y el grafo $Q\beta(u)$ intersectan en tres puntos.

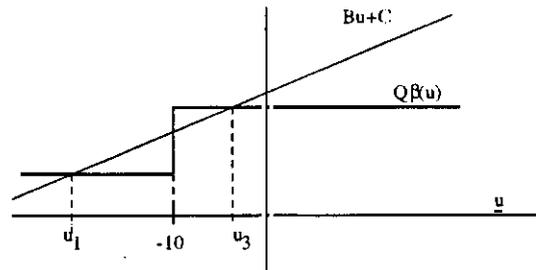


Figura B.1. Si $\frac{-10B+C}{M} < Q < \frac{-10B+C}{m}$, los grafos $Bu + C$ y $Q\beta(u)$ tienen tres puntos en común.

Donde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{Qm-C}{B} \\ u_2 &= -10 \\ u_3 &= \frac{QM-C}{B}. \end{aligned}$$

Consideremos el sistema conservativo

$$(S) \begin{cases} u' = v \\ v' = -Q\beta(u) + Bu + C \end{cases}$$

cuya función de potencial es

$$V(u) = \begin{cases} QMu - \frac{Bu^2}{2} - Cu & u \geq -10 \\ (Qm - C)u - \frac{Bu^2}{2} - 10Q(M - m) & u < -10. \end{cases}$$

Así, si u es solución de (S), se verifica la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{(u')^2}{2} + V(u) = E, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dibujemos el espacio de fases para este sistema conservativo. Para ello estudiamos las propiedades de la función V .

1. V es continua pero no C^1 .
2. V tiene un mínimo en u_2 . En efecto, aunque no es C^1 en ningún entorno de u_2 , es fácil ver que V decrece a la izquierda de u_2 y crece a la derecha.

3. V tiene dos máximos en u_1 y u_3 .
4. $V(u_2) < V(u_3)$ y $V(u_2) < V(u_1)$. En efecto,

$$\begin{aligned} V(u_1) &= \frac{(Qm - C)^2}{2B} - 10Q(M - m) \\ V(u_2) &= -10(QM - C) - 50B \\ V(u_3) &= \frac{(QM - C)^2}{2B} > 0 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} V(u_3) - V(u_2) &= (QM - C)\left(\frac{(QM - C)}{B} + 10\right) - \frac{B}{2}\left(\frac{(QM - C)^2}{B^2} - 100\right) = \\ &= \frac{(QM - C)^2}{2B} + 10(QM - C) + 50B \\ &= \left(\frac{QM - C}{\sqrt{2B}} + 5\sqrt{2B}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(u_1) - V(u_2) &= (Qm - C)\left(\frac{(Qm - C)}{B} + 10\right) - \frac{B}{2}\left(\frac{(Qm - C)^2}{B^2} - 100\right) = \\ &= \frac{(Qm - C)^2}{2B} + 10(Qm - C) + 50B \\ &= \left(\frac{Qm - C}{\sqrt{2B}} + 5\sqrt{2B}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Denotamos por

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-10B + C}{M}, \\ Q_2 &= \frac{-10B + C}{m}, \\ Q_3 &= \frac{2(-10B + C)}{M + m}. \end{aligned}$$

Obviamente $Q_1 < Q_3 < Q_2$. Calculemos $V(u_3) - V(u_1)$,

$$\begin{aligned} V(u_3) - V(u_1) &= \frac{(QM - C)^2}{2B} - \frac{(Qm - C)^2}{2B} + 10Q(M - m) = \\ &= \left(\frac{(QM - C)}{\sqrt{2B}} - \frac{(Qm - C)}{\sqrt{2B}}\right)\left(\frac{(QM - C)}{\sqrt{2B}} + \frac{(Qm - C)}{\sqrt{2B}}\right) + 10Q(M - m) = \\ &= Q(M - m)\left(\frac{Q(M + m) - 2C}{2B} + 10\right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{si } Q > Q_3 \text{ se tiene que } V(u_3) - V(u_1) > 0$$

si $Q = Q_3$ se tiene que $V(u_3) - V(u_1) = 0$,

si $Q < Q_3$ se tiene que $V(u_3) - V(u_1) < 0$.

Dibujemos el diagrama de fases en cada uno de estos casos.

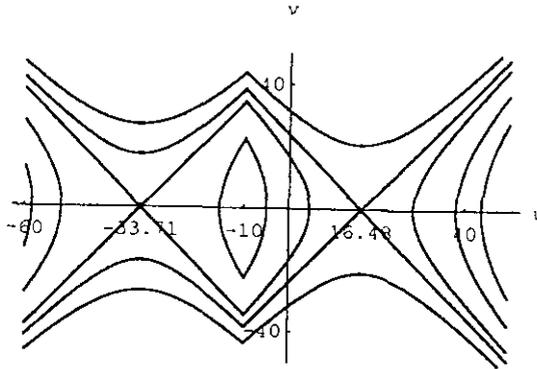


Figura B.2. $Q \in (Q_3, Q_2)$.

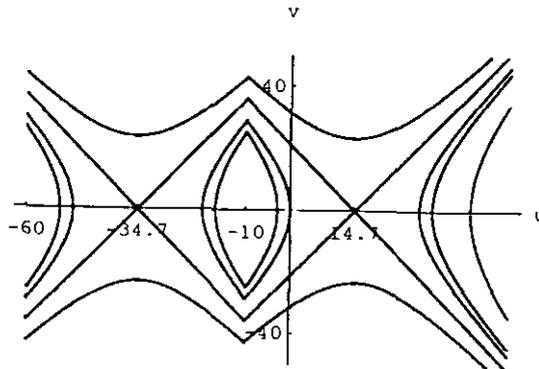


Figura B.3. $Q = Q_3$.

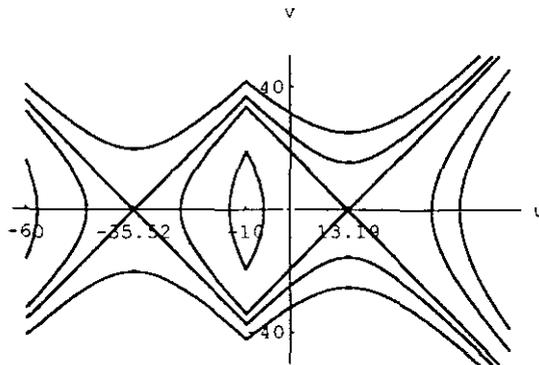


Figura B.4. $Q \in (Q_1, Q_3)$.

Cada trayectoria del diagrama de fases es solución de un problema de valor inicial

$$\begin{cases} -u'' + Bu + C \in Q\beta(u) & x \in \mathbb{R} \\ u(x_0) = \gamma \\ u'(x_0) = \xi \end{cases}$$

Nuestro objetivo es resolver el problema de contorno,

$$\begin{cases} -u'' + Bu + C \in Q\beta(u) & x \in (0, 1) \\ u'(0) = 0 = u'(1) \end{cases}$$

para ello, utilizamos el método de tiro.

Método de tiro. Se consideran los problemas de valor inicial,

$$(P_\mu) \begin{cases} -u'' + Bu + C \in Q\beta(u) & x \in \mathbb{R} \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = \mu \end{cases}$$

Nuestro objetivo es determinar los valores de μ para los que la solución de (P_μ) , que llamaremos u_μ , verifica

$$u'_\mu(1) = 0.$$

Las únicas soluciones que toman al menos dos veces el valor $u' = 0$ son las dadas por las trayectorias periódicas encerradas por la separatriz s_1 . La idea es elegir entre las trayectorias periódicas aquellas que partiendo de $(\mu, 0)$ lleguen a $(\lambda, 0)$ cuando haya transcurrido exactamente un tiempo $x = 1$. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u')^2 + V(u) &= E \\ \frac{u'}{\sqrt{2(E - V(u))}} &= 1 \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la última igualdad entre 0 y 1, obtenemos

$$\int_{u(0)}^{u(1)} \frac{ds}{\pm \sqrt{2(E - V(s))}} = \int_0^1 d\sigma = 1,$$

donde $\sqrt{2(E - V(s))}$ tendrá el mismo signo que u' . Calculemos el periodo de una órbita periódica del plano de fases obtenido

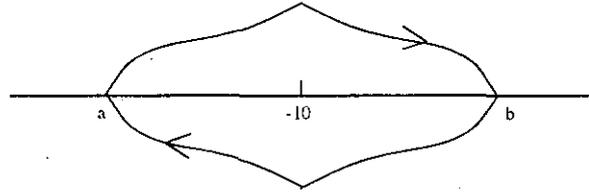


Figura B.5. Se ha dibujado una trayectoria periódica arbitraria.

$$\tau = 2 \int_a^{-10} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} + 2 \int_{-10}^b \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}}.$$

Haciendo los cálculos se llega a la siguiente expresión para el periodo

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{B}} \log \frac{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}} + 10\sqrt{B} + \sqrt{2(E-V(-10))}\right) \left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}} - 10\sqrt{B} + \sqrt{2(E-V(-10))}\right)}{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}} - b\sqrt{B}\right) \left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}} + a\sqrt{B}\right)};$$

donde a y b pueden tomar diferentes valores según los casos:

- i) $u(0) = \mu = b, \quad u(1) = a,$
- ii) $u(0) = \mu = a, \quad u(1) = b,$
- iii) $u(0) = \mu = b = u(1),$
- iv) $u(0) = \mu = a = u(1).$

Nos limitaremos al primer caso, los demás se estudian de manera análoga.

Sean

$$\begin{aligned} u(0) &= \mu = b > -10 \\ u(1) &= a < -10, \end{aligned}$$

como en el dibujo

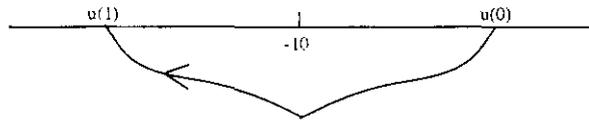


Figura B.6.

Entonces,

$$N\tau + \int_{-10}^{u(0)} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} + \int_{u(1)}^{-10} \frac{ds}{\sqrt{2(E - V(s))}} = 1$$

es decir,

$$\frac{2N+1}{\sqrt{B}} \log \frac{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}} + 10\sqrt{B} + \sqrt{2(E-V(-10))}\right) \left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}} - 10\sqrt{B} + \sqrt{2(E-V(-10))}\right)}{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}} - \mu\sqrt{B}\right) \left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}} + u(1)\sqrt{B}\right)} = 1.$$

O bien,

$$\frac{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}}+10\sqrt{B}+\sqrt{2(E-V(-10))}\right)\left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}}-10\sqrt{B}+\sqrt{2(E-V(-10))}\right)}{\left(\frac{QM-C}{\sqrt{B}}-\mu\sqrt{B}\right)\left(\frac{C-Qm}{\sqrt{B}}+u(1)\sqrt{B}\right)} = e^{\frac{\sqrt{B}}{2N+1}}, \quad (\text{B.1})$$

donde $E = V(\mu) = V(u(1))$, puesto que $u'(0) = 0 = u'(1)$. La ecuación de conservación de la energía permite expresar $u(1)$ en función de μ .

$$\begin{aligned} V(\mu) &= V(u(1)) \\ (QM - C)\mu - \frac{B}{2}\mu^2 &= (Qm - C)u(1) - \frac{B}{2}(u(1))^2 - 10Q(M - m), \\ \frac{B}{2}(u(1))^2 + (C - Qm)u(1) + (QM - C)\mu - \frac{B}{2}\mu^2 + 10Q(M - m) &= 0. \end{aligned}$$

Así,

$$u(1) = \frac{(Qm - C) + \sqrt{(C - Qm)^2 - 2B[(QM - C)\mu - \frac{B}{2}\mu^2 + 10Q(M - m)]}}{B} \quad (\text{B.2})$$

De las dos soluciones de la ecuación de segundo grado nos interesa solamente aquella que verifica $u_1 < u(1)$, pues en otro caso $u(1)$ estaría fuera de la zona que encierra la separatriz.

Sustituyendo (B.2) en (B.1) se tiene que

$$\frac{N(\mu)}{D(\mu)} = e^{\frac{\sqrt{B}}{2N+1}} \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\begin{aligned} N(\mu) &= \frac{(QM - C + 10B)(C - Qm - 10B)}{B} + \\ &+ \frac{Q(M - m)}{\sqrt{B}} \sqrt{2(E - V(-10))} + 2(E - V(-10)) \\ D(\mu) &= (QM - C - B\mu) \sqrt{\left(\frac{C - Qm}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{QM - C}{B}\mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{10Q(M - m)}{B}\right)}. \end{aligned}$$

Se define

$$f(\mu) = f_{Q,M,m,C,B}(\mu) := \frac{N(\mu)}{D(\mu)}.$$

Para ver cuántas soluciones tiene (B.3), estudiamos la gráfica de $f(\mu)$. $f(\mu)$ tiene a lo sumo tres asíntotas verticales:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{QM - C}{B} \\ \mu &= \frac{QM - C}{B} - \sqrt{\left(\frac{QM - C}{B}\right)^2 - \left(\frac{Qm - C}{B}\right)^2 + \frac{20Q(M - m)}{B}} \\ \mu &= \frac{QM - C}{B} + \sqrt{\left(\frac{QM - C}{B}\right)^2 - \left(\frac{Qm - C}{B}\right)^2 + \frac{20Q(M - m)}{B}} \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\mu &= u_3 \\ \mu &= u_3 - \sqrt{(u_3)^2 - (u_1)^2 + 20(u_3 - u_1)} = \mu_1 \\ \mu &= u_3 + \sqrt{(u_3)^2 - (u_1)^2 + 20(u_3 - u_1)} = \mu_2.\end{aligned}$$

Se observa que $N(\mu) > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\mu \rightarrow u_3^-} f(\mu) &= +\infty \\ \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^-} f(\mu) &= +\infty, \\ \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^+} f(\mu) &= -\infty.\end{aligned}$$

Veamos que f es creciente en el intervalo $(-10, u_3)$.

$$\begin{aligned}f'(\mu) &= \frac{N'D - ND'}{D^2} \\ N'(\mu) &= \frac{Q(M-m)E'}{\sqrt{2B(E-V(-10))}} + 2E'\end{aligned}$$

donde $E' = (QM - C) - B\mu > 0 \forall \mu < u_3$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}D(\mu) &> 0 \\ D'(\mu) &= -B\sqrt{\left(\frac{C-Qm}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{QM-C}{B}\mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{10Q(M-m)}{B}\right)} + \\ &+ \frac{(QM-C-B\mu)\left(-\frac{QM-C}{B} + \mu\right)}{\sqrt{\left(\frac{C-Qm}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{QM-C}{B}\mu - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{10Q(M-m)}{B}\right)}} < 0.\end{aligned}$$

Luego, $f'(\mu) > 0$. Veamos que

$$u_3 - \sqrt{u_3^2 - u_1^2 + 20(u_3 - u_1)} > -10,$$

o bien que

$$u_3 + 10 \geq \sqrt{u_3^2 - u_1^2 + 20(u_3 - u_1)}.$$

Tenemos dos números positivos a ambos lados de la desigualdad,

$$\begin{aligned}(u_3 + 10)^2 &\geq u_3^2 - u_1^2 + 20(u_3 - u_1) \\ u_3^2 + 100 + 20u_3 &\geq u_3^2 - u_1^2 + 20u_3 - 20u_1 \\ 100 &\geq -(u_1^2 + 20u_1) \\ 0 &\geq -(u_1^2 + 20u_1 + 100) \\ 0 &\geq -(u_1 + 10)^2\end{aligned}$$

lo cual es obvio. Finalmente, $f(-10) = 1$. El estudio realizado permite representar $f(\mu)$.

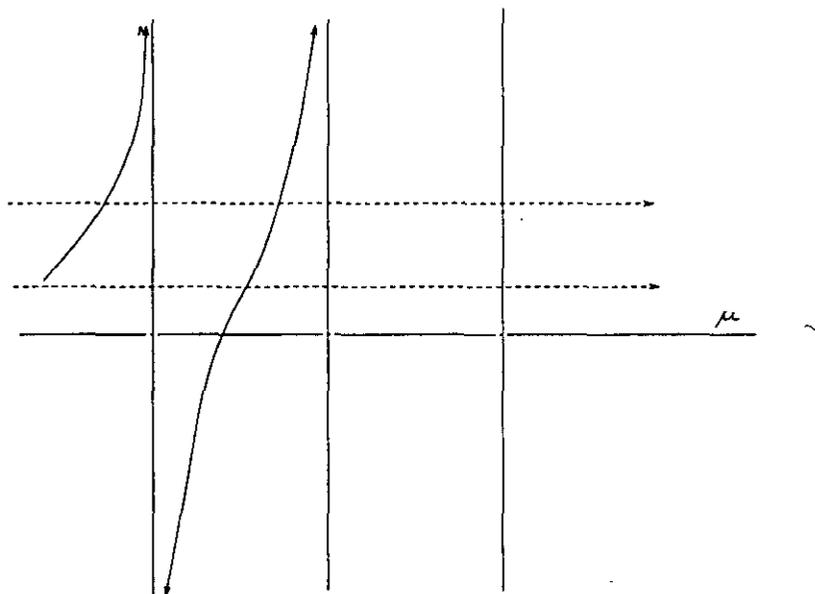


Figura B.7. Representación gráfica de f .

$\forall N \in \mathbb{N} e^{\frac{\sqrt{B}}{2N+1}} > 1$, y por tanto $\exists \mu \in (-10, u_3)$ tal que

$$f(\mu) = e^{\frac{\sqrt{B}}{2N+1}}.$$

Se concluye así, la prueba de la existencia de infinitas soluciones del problema autónomo (PA) con $Q \in (Q_1, Q_2)$.

Bibliografía.

- Adams, R.A. [1980]: *Sobolev spaces*, Academic Press, New York.
- Alt, H.W. y Luckhaus, S. [1983]: *Quasilinear Elliptic - Parabolic Differential Equations*. Math. Z. 183, pp. 311-341.
- Amann, H. [1972]: *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces*. Journal of Functional Analysis II, pp. 346-384.
- Amann, H. [1976]: *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*. SIAM Review, vol. 18, No. 4, Octubre 1976.
- Ambrosetti, A. y Prodi, G. [1993]: *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press.
- Arcoya, D. y Calahorrano, M. [1994]: *Some discontinuous problems with a quasilinear operator*. Journal of Mathematics Analysis and Applications, vol. 187, No. 3, pp. 1059-1072.
- Arino, O. Gautier, S. y Penot, J.P. [1984]: *A Fixed Point Theorem for sequentially continuous mappings with applications to ordinary differential equations*. Funkcialaj Ekvacioj, 27, pp. 273-279.
- Aubin, T. [1982]: *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations*. Springer-Verlag.
- Barbu, V. [1976]: *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff International Publishing.
- Benilan, Ph. [1981]: *Evolution Equations and Accretive Operator*. Lecture Notes, Univ. of Kentucky.

- Benilan, Ph.** [1972]: *Equations d'évolution dans un espace de banach quelconque et applications*. These, Orsay.
- Berger, M.S.** [1977]: *Nonlinearity and functional analysis*. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis. Academic Press.
- Bermejo, R.** [1994]: *Numerical solution to a two-dimensional diffusive climate model*. En "Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio - ambientales: Aspectos Matemáticos y Numéricos". Editado por A. Valle y C. Parés (Grupo de Análisis Matemático Aplicado de la Universidad de Málaga).
- Boothby, W.M.** [1975]: *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York.
- Brezis, H.** [1971]: *Propriétés regularisantes de certains semi-groupes nonlinéaires*. Israel J. Math. vol. 9, pp. 513-534.
- Brezis, H.** [1973]: *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam.
- Brezis, H.** [1983]: *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris y Alianza Universidad 1984.
- Brezis, H. y Strauss, W.A.** [1973]: *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1* . J. Math. Soc. Japan. Vol. 25, No. 4, pp. 565-590.
- Brown, K.J. , Ibrahim, M.M.A. and Shivaji, R.** [1981]: *S-shaped bifurcation curves*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol. 5, No 5, pp. 475 - 486.
- Budyko, M.I.** [1969]: *The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth*. Tellus, 21, pp 611-619.
- Carl, S.** [1989]: *The monotone iterative technique for a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity*. Nonlinear Analysis, 13, pp 1399-1407.
- Carmo, M. do** [1976] [1990]: *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad.

- Carmo, M. do [1979]: *Geometría Riemanniana*. Livros Tecnicos e Cientificos. Brasil.
- Cazenave, T., Haraux, H. [1990]: *Introduction aux problemes d'évolution semi-lineaires*. Mathematiques et Applications, 1. Ed. Ellipses, Paris.
- Curtis, W.D. y Miller, F.R. [1985]: *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press.
- Chavel [1984]: *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press.
- Deimling, K. [1985]: *Nonlinear Functional Analysis*. Springer - Verlag.
- Díaz, J.I. [1983]: *On a fully Nonlinear Parabolic Equation and Asymptotic Behaviour of its Solutions*. J. Math. An. Appl. vol 95, No. 1.
- Díaz, J.I. [1984]: *Ecuaciones Cuasilineales generando una frontera libre: Una panorámica*. Publicaciones del Departamento de Ecuaciones Funcionales. Univ. Complutense de Madrid.
- Díaz, J.I. [1985]: *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries*. Pitman, Londres.
- Díaz, J.I. [1986]: *Elliptic and Parabolic Quasilinear Equations give rise to a free boundary: the boundary of the support of the solutions*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 45.
- Díaz, J.I. [1992]: *Mathematical treatment of some simple climate models*. Apéndice del libro *La Planete Terre* de J.L. Lions.
- Díaz, J.I. [1993]: *Mathematical Analysis of some diffusive energy balance climate models*. En el libro "Mathematics, Climate and Environment"; eds. J.I. Díaz y J.L. Lions. Masson, 28-56.
- Díaz, J.I. [1994]: *Controllability and obstruction for some non linear parabolic problems in Climatology*. En "Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio - ambientales: Aspectos Matemáticos y Numéricos". Editado por A. Valle y C. Parés (Grupo de Análisis Matemático Aplicado de la Universidad de Málaga).
- Díaz, J.I. y Lions, J.L. [1993]: *Mathematics, Climate and Environment*. Masson.

- Díaz, J.I. y Lions, J.L. [1994]: *Environment, Economics and their mathematical models*. Masson.
- Díaz, J.I. y Lions, J.L. [1996]: *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*. Aparecerá.
- Díaz, J.I. y Thelin, F. de [1994]: *On a Nonlinear Parabolic Problem arising in some models related to Turbulent Flows*. SIAM Math. An. Vol 25, No. 4, pp. 1085-1111
- Díaz, J.I. y Vrabie, I.I. [1994]: *Existence for reaction diffusion systems. A compactness method approach*. J. Math. An. Appl. vol 188, No. 2, 521-328.
- Drazin, P.G. y Griffel, D.H. [1977]: *On the branching structure of diffusive climatological model*. J. Atmospheric Sciences, vol 34, pg. 1696-1706.
- Dugundji [1966]: *Topology*. Allyn and Bacon. Boston.
- Evans, L.C. [1978]: *Application of Nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations*. En "Nonlinear evolution equations". Ed. M.G. Crandall. Academic Press.
- Feireisl, E. [1991]: *A note on uniqueness for parabolic problems with discontinuous nonlinearities*. Nonlinear Analysis. 16, pp. 1053-1056.
- Feireisl, E. y Norbury, J. [1991]: *Some Existence, Uniqueness, and Non-uniqueness Theorems for solutions of Parabolic Equations with Discontinuous Nonlinearities*. Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 119 A, pp. 1-17.
- Filippov, A. F. [1988] *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its applications. Kluwer Academic Publishers.
- Friedman, A. [1964]: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Gallot, S, Hulin, D. and Lafontaine, J. [1987] [1990]: *Riemannian Geometry*. Springer - Verlag.
- Gámez, J.L [1995]: *Existence and bifurcation of positive solutions of a semi-linear elliptic problem on \mathbb{R}^n* . Preprint di Matematica, n. 13. Scuola Normale Superiore, Pisa.

- Ghil, M. y Childress, S.** [1987]: *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer - Verlag. Applied Mathematical Sciences.
- Gianni, R. y Hulshof, J.** [1992]: *The semilinear heat equation with a Heaviside source term*. Euro. Jnl. of Applied Mathematics, vol. 3, pp. 367-379. Cambridge University Press.
- Gilbarg, D. y Trudinger, N.S.** [1983]: *Elliptic Partial Differential equations of Second order*. Springer Verlag.
- Glowinski, R. , Lions, J.L. y Tremolieres, R.** [1976]: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North - Holland.
- Held, I.M. y Suarez, M.J.** [1974]: *Simple Albedo Feedback models of the icecaps*. Tellus, 36.
- Held, I.M., Linder, D.I. y Suarez M.J.** [1981]: *Albedo Feedback, the Meridional Structure of the Effective Heat Diffusivity, and Climatic Sensitivity: Results from Dynamic and Diffusive Models*, American Meteorological Society. pp. 1911-1927.
- Henderson - Sellers, A. y McGuffie, K.** [1987] [1990]: *Introducción a los modelos climáticos*. Omega.
- Hernández, J.** [1986]: *Qualitative methods for nonlinear diffusion equations*. Nonlinear diffusion equations; A. Fasano and M. Primicerio eds. Springer - Verlag, Lecture Notes, pp. 47-118.
- Hetzer, G.** [1990]: *The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models*, Houston Journal of Math. 16, pp. 203-216.
- Hetzer, G., Jarausch, H. y Mackens, W.** [1989]: *A Multiparameter Sensitivity Analysis of a 2D Diffusive Climate Model*. Impact and Computing in Science and Engineering, vol. 1, pp. 327-393.
- Hetzer, G. y Schmidt, P.G.** [1990]: *A Global Attractor and Stationary Solutions for a Reaction - Diffusion System arising from Climate Modeling*. Nonlinear Analysis, Theory, methods and Applications, 14, No 11, pp. 915-926.

- Jones, A., Gray, A. y Hutton, R.** [1987]: *Manifolds and Mechanics*. Australian Mathematical Society Lecture series 2. Cambridge University Press.
- Kroner, D. y Rodrigues, J.F.** [1985]: *Global behaviour for bounded solutions on a porous media equation of elliptic parabolic type*. J. Math. Pures Appl. vol 64, pp. 105-120.
- Ladyzenskaya, O.A., Solonnikov V.A. y Ural'ceva N.N.** [1968]: *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type*. Transl. Math. Monographs, Vol 23, Amer.Math.Soc, Providence, R. I.
- Langlais, M. y Phillips, D.** [1985]: *Stabilization of solutions of Nonlinear and degenerate evolution equations*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 9, No. 4, pp. 321-333.
- Legendre, A.** [1785]: *Recherches sur l'attraction des spheroides*. Mem. des sav. etrangers, 10, pp. 411-434.
- Lin, R.Q. and North, G.R.** [1990]: *A study of abrupt climate change in a simple nonlinear climate model*. Climate Dynamics, 4, 253-261.
- Lions, J.L.** [1969]: *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod. Paris.
- Lions, J.L.** [1990]: *El Planeta Tierra*. Espasa-Calpe. Serie Instituto de España. Madrid.
- Lions, J.L., Magenes, F.** [1968]: *Problemes aux limites non homogenes*. (3 volúmenes). Dunod.
- Lions, J.L, Temam, R. y Wang, S.** [1992]: *New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications*. Nonlinearity, vol 5, pp. 237-288.
- Lorenz, E.N.** [1979]: *Forced and free variations of weather and climate*. Atmos. Sci. Vol. 36, pp. 1367-76.
- Mengel, J.G, Short, D.A. y North, G.R.** [1988]: *Seasonal snowline instability in an energy balance model*. Climate Dynamics, 2, 127-131.

- Nakao, M.** [1978]: *A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations*. J. Math. Soc. Japan, vol 30, pp. 747-762.
- North, G.R.** [1990]: *Multiple solutions in energy balance climate models*. Paleogeography, Paleoclimatology, Paleocology (Global and Planetary Change Section), 82, 225-235. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam.
- North, G.R., Howard, L., Pollard, D. y Wielicki, B.** [1979]: *Variational formulation of Budyko - Sellers climate models*. J. Athm. Sci. vol 36, No. 2.
- Pao, C.V.** [1992]: *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Publishing Corporation. New York.
- Protter, M.H. y Weinberger, H.F** [1967]: *Maximum principles in Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Rabinowitz, P.H.** [1971]: *A Global Theorem for Nonlinear Eigenvalue Problems and Applications*. En *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E.H. Zarantonello ed. Academic Press.
- Raviart, P.A. y Thomas, J.M.** [1983]: *Introduction al analyse numerique des equations aux derivees partielles*. Masson.
- Sellers, W.D.** [1969]: *A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system*. J. Appl. Meteorol. 8, pp. 392-400.
- Schmidt, B.E.** [1994]: *Bifurcation of Stationary Solutions for Legendre - type Boundary Value Problems arising from Energy balance Models*. Thesis.
- Simmons, G.F.** [1993]: *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.
- Stakgold, I.** [1993]: *Free Boundary Problems in Climate Modeling*. En "Mathematics, Climate and Environment". Masson.
- Stone, P.H.** [1972]: *A Simplified Radiative-Dynamical Model for the Static Stability of Rotating Atmospheres*. Journal of the Atmospheric Sciences, vol 29, 3, pp. 405-418.

- Temam, R.** [1988]: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, New-York.
- Vainberg, M. M.** [1973]: *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*. Israel Program for Scientific Translations Ltd. Halsted Press.
- Veron, L.** [1992]: *Some existence and uniqueness results for solutions of some quasilinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds*. Publicaciones del "Laboratoire de Mathematiques et applications" de la Universidad de Francois Rabelais de Tours, 39.
- Vrabie, I.I.** [1987]: *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Longman. London.
- Xu, X.** [1991]: *Existence and Regularity Theorems for a Free Boundary Problem Governing a Simple Climate Model*. *Aplicable Anal.* 42,pp. 33-59.
- Zeidler, E.** [1990]: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Springer - Verlag.