UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Estadística e Investigación Operativa II
(Métodos de Decisión)

TESIS DOCTORAL

SINIESTRALIDAD EN SEGUROS NO VIDA: PROVISIÓN PARA PRESTACIONES. UN NUEVO MÉTODO.

Dirigida por:

Dr. D. Carlos A. Delgado Manríquez

Doctoranda:

Dª Ana Isabel Cid Cid

Madrid, 2000

TESIS DOCTORAL

SINIESTRALIDAD EN SEGUROS NO VIDA: PROVISIÓN PARA PRESTACIONES. UN NUEVO MÉTODO.

Dirigida por:

Dr. D. Carlos A. Delgado Manríquez

Doctoranda:

Dª Ana Isabel Cid Cid

Madrid, 2000

AGRADECIMIENTOS

Deseo, en primer lugar, expresar mi agradecimiento al profesor Dr. D. Carlos A. Delgado Manríquez, director de la Tesis. Sus valiosos consejos y sugerencias han hecho posible la conclusión de este trabajo de investigación. No puedo olvidar tampoco que fue él quién me inició en el mundo de la docencia. Su ejemplo de ánimo y constancia han hecho que pudiera superar las dificultades que en la elaboración de toda Tesis Doctoral se presentan.

Agradezco también al Departamento de Estadística e Investigación Operativa II (Métodos de Decisión), de la facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, la ayuda prestada para que haya sido posible el desarrollo del trabajo bajo su tutela.

Mi agradecimiento también a mis compañeros, profesores e investigadores del grupo G.U.I.A. (Grupo Universitario de Investigación Aplicada), fundado y dirigido por el Dr. D. Carlos A. Delgado Manríquez. A Santiago e Irene por las correcciones y sugerencias aportadas; a Maux, Mª Luz, José Mª, Miguel Ángel, Alfredo y José Luís por escuchar mis dudas y ayudarme a superar las distintas etapas del trabajo.

Por último, pero no por ello menos importante, dar las gracias a mis seres queridos; a mi madre y mi hermano por animarme y apoyarme hasta el final y a mi padre que siempre puso su confianza en mi. Gracias a todos ellos ha sido posible la finalización de esta Tesis Doctoral.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La existencia de la Institución Aseguradora responde a la necesidad de protección frente a los riesgos, fundamentalmente económicos, a que está expuesto el hombre. El negocio asegurador consiste en la venta de un servicio de protección frente a riesgos que puedan sufrir sus clientes o asegurados. La compañía aseguradora (empresa de seguros o entidad aseguradora) se compromete por tanto, en el caso en que tenga lugar el siniestro, a indemnizar el daño producido al asegurado, tal y como se establece en el artículo 1 de la Ley de Contrato de Seguro (Ley 50/80 de 8 de octubre).

El coste del servicio de protección que ofrece la empresa aseguradora viene determinado por medio de la siniestralidad que además permite establecer el precio del servicio (prima) y las provisiones. Para que la Entidad Aseguradora pueda hacer frente a las obligaciones contraidas con sus asegurados es necesario que conozca, en todo momento y de la mejor forma posible, cuál es el gasto total al que tiene que enfrentarse. Dado el carácter aleatorio del riesgo es necesario buscar modelos matemáticos y estadísticos que representen las variables y los factores asociados a la incertidumbre: número de siniestros y coste de los mismos.

En esta Tesis Doctoral se estudia conjuntamente la siniestralidad, en lugar de considerar de forma independiente los fenómenos número de siniestros y cuantía de los mismos, mediante la ayuda de la Teoría del Riesgo Colectivo con el objetivo de mejorar los modelos existentes. Dicha teoría considera cada cartera de seguros de forma global en lugar de tratar las pólizas individualmente puesto que es fundamental determinar el coste total de los siniestros ocurridos. Dicho coste es de especial importancia en el análisis de la solvencia de la entidad aseguradora como una garantía más para que la compañía de seguros pueda hacerse cargo en cualquier momento de los pagos a sus asegurados, obviando los gastos técnicos y/o de gestión.

En el Capítulo I se definen y explican en primer lugar los conceptos de riesgo y seguro como fundamento de la práctica actuarial y se expone la Teoría del Riesgo Individual y Colectiva para el tratamiento de la siniestralidad (manifestación de los riesgos asegurados), característica propia y específica de la actividad aseguradora, actividad desarrollada por las compañías de seguros con el fin de cubrir riesgos, objeto de estudio en esta Tesis Doctoral.

Como se ha puesto de manifiesto, la motivación de esta Tesis Doctoral es el estudio de la siniestralidad en la empresa de seguros como medio que permita establecer actuaciones para garantizar la solvencia de la entidad en un momento determinado y poder hacerse cargo de las indemnizaciones a sus asegurados. El concepto general de solvencia y, en particular, el tratamiento dinámico de la misma en el que su elemento básico son las provisiones técnicas, se introduce también en este Primer Capítulo en el que se presenta una visión general del contenido y desarrollo de la Tesis Doctoral.

En el Capítulo II se explican los elementos de la distribución de siniestralidad, aquellos que se necesitan para presentar el modelo de probabilidad como reflejo de la cartera de pólizas de una compañía aseguradora, desde el punto de vista de la Teoría del Riesgo Colectivo, modelando por tanto el coste estadístico del riesgo.

Se estudian de esta forma las distribuciones de las variables aleatorias número de siniestros, de carácter discreto y cuantía de un siniestro, de carácter continuo, para construir finalmente el modelo de distribución de probabilidad del importe o cuantía total, que constituye el proceso general de riesgo.

En concreto, se considera la distribución de Poisson para representar la variable número de siniestros y la distribución Gamma, o exponencial como caso particular de ésta, para representar el coste de los mismos, puesto que son éstas, como se prueba en la aplicación, las que mejor se ajustan en múltiples ocasiones a las variables citadas, además de responder a los requisitos teóricos asumidos.

El comportamiento probabilístico de la siniestralidad total es más complejo. En general no se conoce de forma explícita la distribución de probabilidad de dicha variable y se hace necesario desarrollar métodos de aproximación o métodos exactos para estimar la misma. Existen diferentes métodos que se aplican en la práctica y de ellos, se exponen los más utilizados: métodos de recurrencia, desarrollos en serie o métodos de simulación.

El objetivo de este trabajo es encontrar la mejor aproximación posible que describa la siniestralidad en la Entidad Aseguradora, mediante la **innovadora aplicación de mixturas de** las **distribuciones** más relevantes que modelan el fenómeno. Las ventajas del uso de estas distribuciones son, entre otras, un mayor poder explicativo de las variables que representan, el uso en su definición de distribuciones de probabilidad conocidas y la consideración de distribuciones multimodales.

En el Capítulo III se introduce el concepto de mixturas de distribuciones y los métodos que pueden ser utilizados para la estimación de sus parámetros. En particular, la aplicación a un caso real prueba que una mixtura de un número finito de distribuciones se puede utilizar para modelar las variables que representan la siniestralidad de una entidad aseguradora.

Se hace especial énfasis en el método de máxima verosimilitud, cuya aplicación se lleva a cabo mediante el algoritmo EM. Este algoritmo se desarrolla de forma general y, en particular, para mixturas de distribuciones Gamma, normales o exponenciales. Dichas mixturas son las que más interés presentan en el análisis empírico realizado.

Es importante además, estudiar la siniestralidad de la Entidad Aseguradora en un ambiente dinámico, lo que implica utilizar el concepto de solvencia dinámica. En el primer Capítulo se explican las razones por las que la solvencia tiene especial significado para el asegurador. Estas razones se fundamentan en la naturaleza de las prestaciones que realiza éste, ya que vienen asociadas a situaciones de necesidad del asegurado, debiéndose garantizar la solvencia como un aspecto más de la actividad aseguradora. Por tanto, la solvencia recoge la capacidad de prever posibles desviaciones que se presenten a partir de fluctuaciones aleatorias manifestadas por la siniestralidad o como consecuencia de la gestión de la Entidad. Es importante estudiar la capacidad de la compañía de seguros para hacer frente a los pagos por siniestros conforme se vayan presentando.

Las provisiones técnicas, reservas específicas de la actividad aseguradora, juegan un papel fundamental en la solvencia dinámica. Estas provisiones, constituidas en la fecha de cierre del ejercicio económico, permiten estimar y reflejar el gasto real por siniestralidad del período. Una estimación incorrecta de las provisiones, por exceso o por defecto, pone en peligro la solvencia y el negocio asegurador siendo por tanto fundamental determinar, de la forma más precisa posible, con qué recursos habrá de contar la compañía en próximos ejercicios para hacer frente al gasto real en indemnizaciones por siniestros ocurridos en el ejercicio que se cierre en ese momento.

El cálculo de las provisiones requiere la utilización de hipótesis adecuadas al fenómeno propio de cada ramo, modalidad y tipo de seguro, que permitan justificar su aplicación y defender el método ante la Dirección General de Seguros si fuera necesario. En la Tesis Doctoral se hace especial referencia a las provisiones para siniestros pendientes, en cuya determinación tiene especial importancia la distribución de siniestralidad.

El Nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, aprobado por Real Decreto 2486/1998 de 20 de noviembre, permite a las entidades aseguradoras la utilización de métodos estadísticos en el cálculo de esta provisión. Para estimar el importe final de la misma se deben considerar, al menos, dos métodos basados en las mismas hipótesis o que obtengan sus resultados a partir de las mismas magnitudes o variables, además de contrastar dicho resultado con el método individual de cálculo propuesto por el reglamento.

En el Capítulo IV se enumeran y comentan, de forma muy general, algunos de los métodos estadísticos utilizados en países de reconocida tradición actuarial y que pueden ser aplicados por las compañías de nuestro país, acompañados de referencias bibliográficas que completarían dichos métodos. La elección de alguno de éstos por parte de la compañía de seguros es necesaria para contrastar el resultado último Capítulo.

Se definen los procesos de Poisson en el quinto capítulo, como caso particular de procesos puntuales y se hace una revisión unificada de la metodología basada en procesos puntuales marcados para su aplicación al cálculo de la provisión desde un punto de vista dinámico. Se ilustra esta revisión con algunos métodos de cálculo de la provisión y se exponen además otros, basados en cadenas de Markov, que pueden ser utilizados para contrastar su resultado con el método propuesto.

El método que se propone en el Capítulo VI se basa en procesos puntuales y mixturas de distribuciones. La utilización de procesos de Poisson marcados permite incluir información sobre el **retardo** con que los siniestros son notificados a la entidad, **mediante el novedoso uso de mixturas de distribuciones**, como marca o característica asociada al proceso que representa el número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. El estudio de esta variable se justifica por contener información importante sobre el porcentaje de siniestros pendientes de notificación al cierre del ejercicio económico y se explica detalladamente la estimación de las variables que intervienen en el modelo con la aplicación a un caso real.

Se sintetizan en la última parte del trabajo de investigación, las Conclusiones, los principales resultados obtenidos como consecuencia de la aplicación de mixturas de distribuciones al estudio de la siniestralidad, poniendo punto final a la Tesis Doctoral.

I. LA ACTIVIDAD ASEGURADORA

I. LA ACTIVIDAD ASEGURADORA

I.1. LA INSTITUCIÓN ASEGURADORA

I.1.1. Concepto y manifestaciones

I.1.2. La Empresa de Seguros

I.2. EL RIESGO

I.2.1. Definición, elementos y clases

I.2.2. Tratamiento y formas de afrontarlo

I.3. EL SEGURO

I.3.1. Definición y principios básicos

I.3.2. Elementos fundamentales de la operación de seguro

I.4. TEORÍA DEL RIESGO

I.4.1. Teoría del Riesgo Individual

I.4.2. Teoría del Riesgo Colectivo

I.5. SOLVENCIA EN LA EMPRESA DE SEGUROS

I.5.1. Solvencia y estabilidad

I.5.2. Provisiones Técnicas en los seguros no vida

I.1. LA INSTITUCIÓN ASEGURADORA

La *actividad aseguradora* forma parte de la actividad económica de los países y está constituida por el conjunto de entidades y organismos que intervienen en la misma, tanto del lado de la oferta como del de la demanda, así como sus respectivos medios, prácticas y técnicas. También forman parte de la actividad las normas que regulan su desarrollo y los organismos que se encargan de la función de control y vigilancia del cumplimiento de tales normas. En este sentido, a efectos de esta Tesis, es importante destacar leyes tales como la Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (Ley 30/95, de 8 de noviembre) o el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre) que establece pautas a seguir en el cálculo de provisiones técnicas, como se pondrá de manifiesto en el Capítulo IV de la Tesis, o la Dirección General de Seguros que controla la aplicación de métodos estadísticos de cálculo de dichas provisiones.

La existencia de la actividad y la Institución Aseguradora responde a la necesidad de protección frente al riesgo económico, actual o futuro, al que se enfrentan los hombres y la sociedad en su conjunto. El hecho de que puedan acontecer sucesos con repercusiones económicas negativas (los siniestros) hace que se intenten compensar o cuanto menos minorar tales repercusiones acudiendo al seguro. La existencia del riesgo, junto con la reparación de las consecuencias dañosas que su ocurrencia (siniestro) pueda producir, es el elemento que da razón de ser a la Institución.

Desde los tiempos más remotos, el hombre (en comunidad) ha desarrollado actividades aseguradoras cuyo fin era paliar las consecuencias económicas de sucesos eventuales y desgraciados a los que estaba expuesto, mediante la distribución entre muchos del importe total de aquellos sucesos que sufrían unos pocos.

La actividad aseguradora se incrementa a medida que las sociedades alcanzan un mayor desarrollo económico porque este hecho supone que los riesgos económicos también aumentan (al crecer las actividades económicas que llevan asociada aleatoriedad en su realización y en los resultados), acentuándose de esta forma la necesidad de protección frente a ellos. Además, el mayor poder adquisitivo permite dedicar una parte de los gastos a la cobertura de los mencionados riesgos.

No obstante, en el campo del seguro, no basta la concepción económica del riesgo. Para que la actividad aseguradora pueda ponerse en funcionamiento deben darse además unas condiciones de índole técnica, legal e incluso moral.

I.1.1. CONCEPTO Y MANIFESTACIONES

La *Institución Aseguradora* puede definirse, siguiendo a Guardiola Lozano (1990) como "manifestación técnica y organizada de las iniciativas socioeconómicas de compensación de riesgos".

Su origen básico es, como se ha señalado, la existencia del riesgo y sus consecuencias negativas que conllevan la necesidad de reparar los daños económicos producidos por la ocurrencia del evento. La Institución del Seguro está destinada a diluir entre sus componentes (los asegurados) las consecuencias económicas negativas derivadas de los riesgos que sufran algunos de ellos.

La Institución Aseguradora tiene dos grandes manifestaciones, la Seguridad Social y los seguros privados. La Seguridad Social es un sistema obligatorio de cobertura, arbitrado por el Estado, que está dirigido al bienestar y protección de los ciudadanos. Comprende un conjunto de medidas de previsión ejercidas por determinados Organismos e Instituciones Oficiales dirigidas a cubrir las contingencias que pudieran afectar a los trabajadores y a sus familiares o asimilados. La prima o cuota que el Estado percibe por estas coberturas es aportada (en diferentes porcentajes) por los empresarios y los trabajadores conjuntamente, en el caso de trabajadores asalariados y, únicamente por los trabajadores, en caso de ser autónomos. Estas prestaciones comprenden una doble vertiente: asistencia sanitaria (enfermedad y accidente) y económica (incapacidad, desempleo, fallecimiento, viudedad, orfandad y vejez).

Los seguros privados son gestionados por entidades privadas, con quienes los asegurados contratan libremente las coberturas que le interesan, dentro de la amplia gama de posibilidades que estos seguros ofrecen, destinadas todas ellas a proteger intereses individuales. La prima o cuota es aportada íntegra y exclusivamente por el demandante del Seguro. La actividad aseguradora Privada se ejerce en economías de mercado por empresas privadas y el Estado solo interviene en su ejercicio por razones excepcionales como puede ser la insuficiencia de la iniciativa privada[1].

La Institución Aseguradora Privada, como establece la Ley 30/95 de 8 de noviembre, de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, puede operar bajo las formas jurídicas de Sociedades Anónimas, Sociedades Mutuas, Cooperativas y Mutualidades de Previsión Social. Estas tres últimas pueden trabajar a prima fija o a prima variable. La Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados establece además que cualquier entidad que adopte cualquier forma de Derecho Público cuyo objeto sea la realización de operaciones de seguro podrá realizar la actividad aseguradora en condiciones equivalentes a las de Entidades Aseguradoras Privadas[2].

[1] En España, en la actualidad, el único ejemplo de asegurador no empresa privada es el Consorcio de Compensación de Seguros, Entidad de Derecho Público, creada para atender siniestros de origen extraordinario que las Entidades Privadas no quieren (o no pueden) cubrir, así como para sustituir a la iniciativa privada cuando ésta no cubre determinados seguros obligatorios creados en interés general.

[2] Estas entidades se ajustarán íntegramente a la Ley 30/95, de 8 de noviembre, de Ordenación y Supervisión de los Seguros privados y a la Ley 50/80, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro.

I.1.2. LA EMPRESA DE SEGUROS

La Empresa, desde el punto de vista genérico, puede ser definida siguiendo a Guardiola Lozano (1990) como "unidad económica organizada para combinar un conjunto de factores de producción, con los que llevar a cabo la elaboración de bienes o servicios para su venta o distribución en el mercado".

Una *Empresa de Seguros*, también denominada *Entidad Aseguradora* o *Compañía de Seguros* es, ante todo, una Empresa. Se dedica a la práctica del seguro y, en sentido amplio, puede ser considerada como un conjunto de bienes patrimoniales y de relaciones de hecho y organizativas necesarias para realizar la práctica económica con la que se identifica (el Seguro). Para realizar dicha actividad se vale de poderosos instrumentos de gestión e informáticos con el fin de suscribir riesgos, emitir pólizas, contabilizar la gestión patrimonial y detectar clientes potenciales.

La Empresa de Seguros está inmersa en una sociedad en la cual influye y es influida por varios aspectos que la condicionan y delimitan en la mayoría de sus gestiones. De esta forma, sus "outputs" se integran en todos los sectores de la economía y sus "inputs" (fundamentalmente las primas) son aportados desde la totalidad de los sectores económicos que la rodean.

Las empresas que integran el sector asegurador en España se pueden agrupar en cuatro bloques, según la Ley de Ordenación del Seguro Privado (Ley 30/95, de 8 de noviembre) y siguiendo la clasificación dada por Cuervo y otros (1998): *Entidades*

Aseguradoras Privadas[3], *Mutualidades de Previsión Social*[4], *Entidades de Depósito* que realizan operaciones de seguro[5] y *Consorcio de Compensación de Seguros.*

Las Entidades de Seguros poseen unas características específicas que las diferencian del resto de Empresas, como puede observarse en Castello Matrán y Guardiola Lozano (1992). Estas pueden ser sintetizadas en las siguientes:

a) *Actuación exclusiva* en la actividad aseguradora, reaseguradora e inversión de su patrimonio.

b) Sometimiento *a un organismo de control oficial* debido al carácter social o público de su actividad. En general, toda la actividad de la empresa aseguradora está sometida a medidas de fiscalización y control técnico, económico y financiero.

c) *Operaciones en masa*, necesarias por propia exigencia técnica, cuyo objetivo es la consecución del mayor número de asegurados posible para diversificar riesgos y situarse en las mejores posiciones del mercado, minimizando de este modo el impacto de los siniestros imprevisibles.

d) *Exigencia de capital inicial* que garantice el compromiso económico adquirido con los asegurados.

[3] Éstas pueden revestir la forma de Sociedades Anónimas, Mutuas, Cooperativas o Delegaciones en España de Sociedades aseguradoras extranjeras. Se rigen por la Ley 30/95, de 8 de noviembre.

[4] Hasta la Ley 33/84 las Mutualidades de Previsión Social habían funcionado basándose en principios mutualistas. A partir de la misma y para dotarlas de un mayor grado de seguridad y garantía se les exige unos criterios más técnicos en la actuación. Están sujetas a la ley 30/95.

[5] Este tipo de actividad es desarrollada fundamentalmente por bancos y cajas de ahorro para seguros de vida y algún otro de la modalidad de no vida.

e) *Garantías financieras* como depósitos iniciales de inscripción en valores que ofrezcan una especial seguridad, inversión de reservas técnicas en productos no demasiado arriesgados, constitución de margen de solvencia y regulación de sus inversiones con el fin, como en el caso anterior, de cumplir los compromisos adquiridos con los asegurados.

f) El seguro es una *actividad de servicios* y no una actividad industrial en sentido estricto. Como tal, el elemento capital no es de máxima importancia (dado que no existen unos bienes que se deban convertir en artículos de uso y consumo) sino que predomina el elemento *trabajo* como acción personal de las empresas que prestan esta actividad. El servicio que justifica la existencia de la actividad y la Institución Aseguradora es el de "seguridad" y responde, como ya se ha comentado, a la necesidad de protección frente al riesgo.

g) Es un servicio con un marcado *componente financiero y económico* cuyos elementos principales son el precio, la Ley de los Grandes Números, los resultados técnicos y el ser un instrumento de construcción de ahorro, desarrollo tecnológico industrial, bienestar social y seguridad jurídica.

h) El seguro es *internacional* por definición y es un *sector regulado* que tiende a internacionalizarse y liberalizar las normativas nacionales como vía de crecimiento.

i) Y, finalmente, su razón de ser está en *la transformación del riesgo*.

Entre ellas destacar, por su importancia en esta Tesis, el sometimiento a un organismo de control oficial, la Dirección General de Seguros, como ya se ha señalado al comienzo del capítulo y se pondrá de manifiesto más adelante, en el Capítulo IV. También son importantes la necesidad de efectuar operaciones en masa, además de por exigencia técnica, por su papel en el cálculo de provisiones para prestaciones mediante métodos estadísticos y las garantías financieras que requieren del cálculo de provisiones para su adecuada inversión. Se manifiesta ya desde este momento, al enumerar las características básicas de las empresas de seguros, la importancia de las provisiones técnicas y su cálculo.

La actividad empresarial se lleva a cabo a través de una combinación de factores (trabajo, equipos y material) y dispositivos (dirección de la explotación y gestión) diferenciando entre funciones empresariales (establecimiento de la política empresarial, toma de decisiones y ejercicio de poder) y tareas instrumentales (planificación, organización y control), siguiendo el esquema clásico de Gutenberg (1990).

Los procesos que se desarrollan en las Entidades de Seguros se pueden clasificar, como establece Albarrán Lozano (1999), en *procesos esenciales* (procesos técnico actuariales, suscripción de riesgos, gestión de siniestros, distribución y comercialización y gestión de inversiones) y *procesos de apoyo* (desarrollo de Recursos Humanos, gestión de sistemas operativos, administración y control financiero e instrumentos de la dirección).

De todos ellos destacar la importancia a efectos de esta Tesis de los *procesos técnico actuariales* que comprenden el desarrollo de productos, cálculo de tarifas, análisis estadístico y control de provisiones técnicas. Es importante el cálculo y control de las provisiones técnicas para garantizar la solvencia de la entidad. Su concepto se estudia con más detalle en el epígrafe I.5, dedicando al cálculo de las mismas los tres últimos capítulos de la Tesis.

Subrayar también la contabilidad como parte de la *administración y control financiero*. Precisamente, el cálculo de provisiones para prestaciones se lleva a cabo al finalizar el año contable con el fin de reflejar los gastos reales por siniestros ocurridos en el ejercicio, aunque los pagos se realicen en futuros periodos.

I.2. EL RIESGO

I.2.1. DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASES

Desde cualquier punto que pretenda estudiarse o definirse el seguro, aparece siempre el concepto de riesgo como elemento esencial. Toda actividad humana comporta algún tipo de riesgo (considerado como cualquier eventualidad posiblemente desfavorable para el individuo) y, por esta razón, con el ser humano nacen y se desarrollan las necesidades de prevención y seguridad.

Desde una perspectiva *económica*, el riesgo es el "alea" que se soporta al desarrollar cualquier actividad económica y que puede tener consecuencias favorables o desfavorables. Se observa la tendencia de los economistas a reservar el término riesgo para los eventos desfavorables.

Jurídicamente el riesgo es la causa del contrato del seguro, es decir, la razón objetiva que impulsa al asegurado a contratar con el asegurador.

En la *terminología aseguradora*, se emplea este concepto para expresar indistintamente dos ideas diferentes, como se define en el *Diccionario de Seguros* de Castelló Matrán y Guardiola Lozano (1992): "objeto asegurado y posible ocurrencia por azar de un acontecimiento que produce una necesidad económica".

El riesgo, para poder ser asegurable, debe reunir ciertas condiciones, además de presentar determinadas características que se deducen de la propia definición, como se detalla en I.C.E.A. (1997) y Castelló Matrán y Guardiola Lozano (1992):

1. *Posibilidad e incertidumbre.* Ha de existir posibilidad que se traduzca en un estado o situación de exposición al riesgo y, asimismo, ha de haber una relativa incertidumbre materializada tanto en la posible ocurrencia o no ocurrencia del siniestro como en el momento en que ocurrirá el mismo.

2. *Azar o aleatoriedad.* El concepto de azar en el seguro significa que el evento dañoso no ha de depender de la voluntad de las partes, bien de manera absoluta cuando hace referencia a hechos externos en los que no interviene la voluntad del hombre, o bien de manera relativa cuando sí interviene.

3. *Necesidad patrimonial* que constituye el contenido económico del riesgo. La esencia del seguro no es evitar el siniestro sino reparar el daño económico consecuencia de la realización del mismo.

4. Debe *amenazar por igual a todos los elementos del colectivo asegurado.*

5. Debe ser *lícito.* Según se establece en la legislación de todos los países, el riesgo que se asegure no ha de ir contra las reglas morales o de orden público, ni en perjuicio de terceros.

6. *No* puede producir *lucro* al asegurado.

7. Debe ser *susceptible de tratamiento estadístico.*

8. Debe *cumplir* unas *condiciones de carácter técnico* como independencia, individualización, frecuencia e intensidad, acumulación y homogeneidad.

Todas estas características son importantes en el estudio de la siniestralidad. Las tres primeras determinan dicha función. La posibilidad e incertidumbre se refiere a la posible ocurrencia o no ocurrencia del siniestro y al instante en que ocurrirá el mismo, lo que permite definir la variable que modela el número de siniestros ocurridos en un momento determinado. La necesidad patrimonial se manifiesta en el coste de los siniestros. El asegurador actuando conforme a una técnica muy perfeccionada puede determinar con gran aproximación el número y cuantía de los siniestros que habrá de compensar, ayudándose para ello de la Teoría del Riesgo, mediante la construcción de la distribución de siniestralidad a la que nos referiremos en el epígrafe I.4.

También son importantes en el análisis de la siniestralidad las dos últimas condiciones. Para que el riesgo sea susceptible de tratamiento estadístico es necesario disponer de información que abarque datos de un colectivo suficientemente amplio, así como de una experiencia que comprenda un número de años igualmente suficiente. Las condiciones de carácter técnico significan que el asegurador debe cubrir riesgos diseminados en el espacio, perfectamente determinados, que presenten una regularidad en su comportamiento, agrupados en una cartera lo más amplia posible y homogéneos, tanto cualitativa como cuantitativamente. Estas condiciones, como se estudiará en el Capítulo IV, se exigen a una entidad aseguradora para que pueda aplicar métodos globales de cálculo de la provisión para prestaciones (artículo 43 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados).

La *clasificación de riesgos* posibles es muy amplia, dado que se pueden estudiar desde diferentes puntos de vista como se hace en I.C.E.A. (1997) y Guardiola Lozano (1990):

1. Según su *asegurabilidad* se puede diferenciar entre riesgo *asegurable* y riesgo no *asegurable*. Los primeros representan aquellos acontecimientos inciertos cuya realización no depende con exclusividad de la voluntad de las partes y tales que las consecuencias derivadas de su ocurrencia son estimables económicamente. Los segundos son aquellos que carecen de alguno de los elementos o caracteres del riesgo que impiden su aseguramiento.

2. Según el *objeto sobre el que recae* pueden ser *patrimoniales,* cuando implican una disminución o pérdida de patrimonio o *personales* si afectan a circunstancias de la persona.

3. De acuerdo con su *regularidad estadística* pueden ser *ordinarios* o *catastróficos*. Los riesgos ordinarios son aquellos cuya ocurrencia es susceptible de medición estadística y responden a las pautas normales de contratación en el mercado de seguros. Si en ellos concurren alguna circunstancia que les convierta en atípicos pueden ser asumidos por el asegurador mediante la aplicación de cualquier medida correctora. Los riesgos catastróficos, por el contrario, son de irregular ocurrencia estadística y por la magnitud y naturaleza de sus causas y efectos, exceden de la posibilidad de cobertura de

un seguro normal[6].

4. Diferenciando por el *grado de intensidad* pueden ser *variables* o *constantes*, si revisten diversa graduación o cuantía en su realización o no.

5. Según su *proximidad física* respecto de otros riesgos pueden ser *distintos, comunes, contiguos o próximos.* Los riesgos distintos no tienen relación ni conexión con ningún otro. Dos o varios bienes u objetos constituyen riesgo común cuando la propia naturaleza y proximidad de ellos obliga a considerarlos como un riesgo único, puesto que la ocurrencia de un siniestro en uno afectaría sin duda a los restantes. El riesgo contiguo es aquél que, aun siendo independiente, está en contacto con otro, por lo que el siniestro que afecte a uno de ellos puede transmitirse al otro. Por último, riesgo próximo es aquél que está separado de otro a una distancia lo suficientemente pequeña como para que el siniestro de uno de ellos pueda afectar al otro.

6. De acuerdo con su *comportamiento con el paso del tiempo*, pueden ser *progresivos* si aumentan con el transcurso del tiempo, o *regresivos* cuando van disminuyendo.

Se consideran en esta Tesis riesgos asegurables, ordinarios para que puedan ser tratados estadísticamente y variables dado que, en general, la cuantía de los siniestros ocurridos en el ramo no vida no es constante.

[6] Para este tipo de riesgos es preciso arbitrar fórmulas especiales para su aseguramiento. En España estos riesgos se hallan asegurados por el Consorcio de Compensación de Seguros en el que existe un fondo económico especial destinado a tales efectos.

I.2.2. TRATAMIENTO Y FORMAS DE AFRONTARLO

El asegurador, para asumir la cobertura de un riesgo, debe poner en práctica una serie de técnicas que le permitan establecer la naturaleza, valoración y límites de aceptación del riesgo en cuestión. Tales técnicas pueden resumirse en las siguientes, siguiendo a Guardiola Lozano (1990):

1. La *selección de riesgos* que constituye el conjunto de medidas adoptadas por la entidad con el fin de aceptar aquellos riesgos que presumiblemente no vayan a originar resultados desequilibrados, por no ser peores que el promedio de su categoría.

2. El *análisis del riesgo* como instrumento técnico para lograr el adecuado equilibrio en los resultados de la actividad aseguradora. Esencialmente el análisis del riesgo se concreta en los siguientes aspectos: ponderación o clasificación de riesgos (mediante la tarificación del riesgo aplicando la prima adecuada y creando grupos homogéneos en base a la probabilidad de siniestros e intensidad de los mismos), prevención de riesgos (adopción de las medidas de precaución para evitar la producción de siniestros) y control de resultados para conseguir el necesario equilibrio técnico.

3. La ***evaluación* del riesgo**, proceso por el cual se establece en un período de tiempo determinado, la **probabilidad de que ocurran daños personales o pérdidas materiales, así como su cuantificación.**

4. *Compensación* de riesgos. Constituye el conjunto de medidas que conducen a lograr el adecuado equilibrio de resultados entre los riesgos que componen una cartera de pólizas. Mediante la compensación se pretende que los resultados antieconómicos

que puedan derivarse de los riesgos considerados como de peor calidad sean contrarrestados por otros que originen una menor siniestralidad para la Entidad Aseguradora.

5. *Distribución* de riesgos, que consiste en un conjunto de técnicas para el reparto o dispersión de riesgos que la actividad aseguradora precisa para obtener una compensación estadística, igualando los riesgos que componen su cartera de bienes asegurados. Esta distribución pretende conseguir la homogeneidad cuantitativa de los riesgos y puede llevarse a cabo a través del Coaseguro o del Reaseguro.

Señalar el control de resultados como aspecto del análisis del riesgo. En dicho control y para conseguir el equilibrio técnico es necesario el conocimiento de la siniestralidad en las distintas carteras de pólizas. En el Capítulo II, como ya se ha señalado, se cuantificarán las pérdidas materiales en un periodo de tiempo determinado, proponiendo nuevas aproximaciones de la siniestralidad en el capítulo III.

Ante acontecimientos futuros esperados que puedan afectar económicamente al patrimonio de una persona, resulta de interés analizar las distintas posturas que pueden adoptarse. Ello ayudará a delimitar el concepto del seguro al diferenciarlo de otras fórmulas. Destacar además que en definitiva, el seguro resulta de la insuficiencia de estas otras posturas. Principalmente pueden distinguirse las siguientes posturas ante el riesgo:

1. *Autoasunción del riesgo o indiferencia.* Supone no tomar medida alguna de previsión para combatir el riesgo. El sujeto autoasume el riesgo y soporta con su

patrimonio las consecuencias económicas de accidentes que afectan a sus bienes, sin adoptar medida alguna para paliar las consecuencias dañosas que el acaecimiento del riesgo pueda causar. No se puede considerar éste un sistema de cobertura, sino todo lo contrario, su negación.

2. *Prevención del riesgo.* Es el conjunto de medidas materiales destinadas a evitar o dificultar la ocurrencia de un siniestro y a conseguir que, si el accidente se produce, sus consecuencias de daño sean las mínimas posibles. Dentro de ellas pueden distinguirse las siguientes:

- los medios preventivos en sentido estricto, cuyo fin es eliminar las causas,

- los medios de protección, dirigidos a neutralizar los efectos,

- los medios de atenuación, que aminoran los daños y

- los medios de salvamento, cuyo objeto es preservar el valor de la propiedad afectada por el daño.

La prevención, si bien resulta insuficiente como sistema aislado, es un eficaz complemento del seguro que incluso permite abaratar el coste de este último.

3. *Previsión del riesgo.* En general, es la precaución presente para prevenir la producción de un evento futuro y se caracteriza fundamentalmente porque las medidas adoptadas por el sujeto tienden a la constitución de un fondo económico que pueda hacer frente en el futuro a las consecuencias del siniestro.

En este sentido se distingue entre ahorro y autoseguro, cuando el riesgo no es transferido a un tercero, y seguro donde sí lo es.

Mediante el *ahorro*, parte de la renta de las unidades económicas no dedicada a su consumo o distribución se destina a la formación de capitales futuros que pueden aminorar los efectos de un siniestro. Conceptualmente, dos son las diferencias respecto del seguro. Por un lado el tiempo, que es fundamental en el ahorro y por otro el carácter individual del mismo, como ya se ha comentado, frente al carácter colectivo del seguro, que permite diluir el coste.

El *autoseguro* supone que el individuo soporta con su patrimonio las consecuencias económicas derivadas de sus propios riesgos, constituyendo para ello una masa de bienes atendiendo a ciertos principios técnico-financieros, destinada a la compensación de esos posibles siniestros. No debe confundirse la situación de autoseguro con la de autoasunción del riesgo. Aunque la nota común es la inexistencia de Entidad Aseguradora, en el caso de la autoasunción normalmente se carece de un fondo económico para hacer frente a los riesgos.

Este sistema, aunque no con frecuencia, es practicado por grandes empresas que periódicamente van constituyendo un fondo económico con el que hacer frente a posibles propios siniestros. No obstante, este procedimiento, en cuanto elimina la comunidad y dispersión de riesgos, no puede ser considerado como "seguro" en sentido rigurosamente técnico.

Además, para que sea viable, deben cumplirse unas condiciones tanto por parte de la unidad económica como por el propio riesgo. Los riesgos deben ser homogéneos, presentarse en número y cantidad suficiente, y en disposición tal que no puedan producirse cúmulos que provoquen la desaparición simultánea de todos o la mayoría de los objetos expuestos. En cuanto a la unidad económica que decide constituir un fondo de autoseguro se requiere capacidad financiera suficiente, planificación y organización del fondo y, por último, conocimiento e información estadística suficiente del riesgo en cuestión.

El *seguro* es la institución específica para la cobertura de riesgos, y la única que permite la transformación de las eventualidades a que están sometidos los patrimonios particulares en probabilidades promedias perfectamente soportables a través de una organización empresarial.

I.3. EL SEGURO

I.3.1. DEFINICIÓN Y PRINCIPIOS BÁSICOS

El seguro, como ya se ha comentado en el epígrafe I, es una actividad de servicios. El servicio que justifica su existencia es el de "seguridad" y responde a la necesidad de protección frente al riesgo que puede recaer sobre el hombre, ya sea sobre su persona o sus bienes, originándole necesidades económicas. Como establece Guardiola Lozano (1990) el seguro constituye la fórmula más perfecta y técnicamente eficaz para la cobertura de riesgos, al transferir éstos a un tercero, el asegurador, cuya organización y técnica operativa garantiza la adecuada compensación de aquellos.

El seguro puede ser analizado desde diversos puntos de vista. Desde la *perspectiva individual* se puede definir como "una operación por la que el asegurador se obliga, mediante el cobro de una prima y para el caso de que se produzca el evento cuyo riesgo es objeto de la cobertura, a indemnizar el daño producido al asegurado"[7].

En un *sentido amplio*, el objeto del seguro es la compensación del perjuicio económico experimentado por un patrimonio a consecuencia de un siniestro. Aparte de este sentido, que puede identificarse con la finalidad del seguro, el objeto, en su aspecto contractual, es el bien material afecto al riesgo sobre el cual gira la función indemnizatoria. Es tan grande la importancia de este elemento del contrato que la

[7] Así se establece en el artículo 1 de la Ley 50/80 de 8 de octubre, de Contrato de Seguro.

clasificación del seguro más comúnmente admitida agrupa las diversas modalidades de cobertura en función de los objetos asegurados.

Desde un punto de vista *económico y social* puede definirse el seguro siguiendo a Donati en I.C.E.A. (1997) como "una operación económica con la cual, mediante la contribución de muchos sujetos igualmente expuestos a eventos económicamente desfavorables, se acumula la riqueza para quedar a disposición de aquellos a quienes se presente la necesidad". El aspecto social del seguro se pone de manifiesto al ser éste una fórmula colectiva de protección frente al riesgo. Esta definición, además, implica que la Institución Aseguradora se apoya en la organización empresarial bajo la cual debe llevarse necesariamente la acumulación de aportaciones, desarrollando la actividad con las suficientes garantías de solvencia y estabilidad.

La consecución de tales garantías tendrá lugar mediante la aplicación por la organización empresarial de una serie de normas técnicas que se pueden sintetizar en las siguientes:

1. Aplicación de la "*Ley de los Grandes Números*", mediante la acumulación de la mayor masa posible de riesgos, con el objeto de acercar las probabilidades teóricas de siniestro a las reales. La Ley de los Grandes Números es la base fundamental de la técnica actuarial, en cuanto se refiere al cálculo y determinación concreta de las primas que deben aplicarse a la cobertura de riesgos.

2. *Homogeneidad cualitativa* de riesgos, con el objeto de compensar riesgos de la misma naturaleza[8] y *homogeneidad cuantitativa* de sumas aseguradas, que se consigue mediante la selección de riesgos y su fraccionamiento a través del coaseguro (participando en la cobertura de un mismo riesgo, en proporciones técnicamente aconsejables, dos o más Entidades Aseguradoras) y del reaseguro (cediendo los excesos de los riesgos de más volumen a otras entidades), en sus distintas modalidades.

3. Constitución de *reservas o provisiones técnicas*, específicas de la actividad, que garanticen el cumplimiento de los contratos y en definitiva la estabilidad y de *reservas patrimoniales* que permitan hacer frente a grandes desviaciones con las suficientes garantías de solvencia.

[8] El concepto de ramo constituye una aproximación para delimitar los riesgos homogéneos como los correspondientes al mismo ramo

I.3.2. ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA OPERACIÓN DE SEGURO

En las operaciones de seguro suelen distinguirse elementos *personales, formales y reales.*

Dentro de los primeros, el asegurador, del que ya se ha hablado con anterioridad y el asegurado, aquel cuyos bienes o persona se encuentran expuestos al riesgo que es objeto de cobertura mediante el contrato de segur, son los principales, actuando uno como oferente de la operación y otro como demandante. También son elementos personales de la operación de seguro el tomador del Seguro o contratante (persona que firma la póliza y se compromete a pagar la prima) y el beneficiario (persona a quien el contrato de seguros atribuye el derecho a percibir la prestación del seguro) que pueden coincidir con las personas aseguradas.

Entre los elementos reales de la operación destacar el riesgo como causa de la operación de seguro, la suma asegurada, conocida también como valor asegurado que representa el límite de responsabilidad del asegurador, la prima y la indemnización que representa la obligación fundamental del asegurador y consiste en indemnizar dentro de los límites pactados el daño producido al asegurado, o satisfacer un capital, una renta u otras prestaciones convenidas. El riesgo es fundamental, por ser la causa que da origen a la operación del seguro, puesto que el objeto de las empresas aseguradoras es la cobertura de riesgos a que los contratantes se encuentran expuestos.

Los elementos formales se deducen del aspecto jurídico del seguro. Señalar entre estos la solicitud de seguro, la proposición de seguro u oferta formal y la póliza.

Mención especial merece la *prima* o precio del seguro. Su importancia es vital para la Entidad Aseguradora puesto que constituye el mayor porcentaje de ingresos de la misma.

Técnicamente la prima representa la contribución de cada riesgo al conjunto de ellos por la prevención y seguridad que entraña el seguro, es el coste de la probabilidad media teórica de que ocurra un siniestro de una determinada clase y supone el valor actuarial de la obligación del asegurador. En términos *actuariales* es la esperanza matemática de la siniestralidad o coste medio teórico de un siniestro futuro.

Los principios básicos para el establecimiento de la prima que se distinguen en la práctica son[9]:

- *Principio Mutual o de compensación de riesgos* al repartir el montante entre la masa de riesgos (asegurados) mediante la aportación exigida a cada uno de ellos individualmente. Se basa en la Ley de los Grandes Números, la experiencia y la ciencia actuarial.

- *Principio de Equidad* o de *valoración del riesgo.* Por este principio cada asegurado paga la prima más equitativa y ajustada posible a su riesgo concreto.

[9] La empresa aseguradora debe cumplir estos principios en todo momento para conseguir el equilibrio financiero y la solvencia dinámica necesaria para los riesgos que sume. Ver Nieto de Alba y Vegas Pérez (1994).

- *Principio de Suficiencia del Precio*: la prima del seguro no sólo ha de ser suficiente para que la empresa pueda pagar el total de indemnizaciones por los daños y pérdidas sufridos por los asegurados, sino también para sufragar los gastos de gestión por la administración del negocio y por la comercialización del producto de seguro, remunerar a los accionistas y reforzar la estabilidad financiera y la solvencia de la empresa.

- *Principio de distribución de riesgos* mediante el cual se trata de conseguir la homogeneidad cuantitativa de los riesgos.

La prima se satisface "a priori" como precio cierto, al inicio de la cobertura del seguro, mientras que la prestación del asegurador únicamente se hará efectiva si se produce el siniestro. El carácter anticipado de la misma viene justificado por el principio básico de constituir, con carácter previo, un fondo patrimonial común para hacer frente al pago de los posibles siniestros. Esta percepción anticipada de la prima por parte del asegurador, obliga a éste a determinarla según estimaciones de carácter aleatorio sobre la siniestralidad futura. El mejor conocimiento posible de la función de siniestralidad es fundamental para ayudar a establecer el precio adecuado de la misma.

I.4. TEORÍA DEL RIESGO

La *Teoría del Riesgo* se puede considerar como una parte de la Matemática Actuarial que tiene por objeto el *tratamiento del "riesgo"*. Más en concreto, proporcionar modelos matemáticos para analizar las fluctuaciones aleatorias de variables expuestas a riesgos en general, que permitan el estudio y seguimiento de dichas fluctuaciones, pudiéndose determinar las medidas a tomar entre aquellas, es decir, fundamentar decisiones. Gerber (1979) define la Teoría del Riesgo como "un conjunto de ideas relacionadas para diseñar, administrar y regular una empresa de riesgo".

La Teoría del Riesgo se ha venido aplicando en el estudio de la Entidad Aseguradora, como hacen Goovaerts, de Vylder y Haezendonck (1986), porque la operación de seguros se caracteriza por su aleatoriedad, como se puso de manifiesto en el Epígrafe I.3, al estar determinada por un conjunto de variables que llevan asociada incertidumbre, pudiéndose valorar las consecuencias de su realización en términos financieros. Como establecen Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984) "los estudios de las clases diferentes de fluctuaciones que surgen en una cartera de seguros constituyen la rama de la matemática actuarial denominada Teoría del Riesgo".

Dentro de la Teoría del Riesgo, se consideran dos ámbitos de estudio, la *Teoría del Riesgo Individual* y la *Teoría del Riesgo Colectivo*, que se pueden ver con más detalle en Nieto de Alba y Vegas Pérez (1994).

I.4.1. TEORÍA DEL RIESGO INDIVIDUAL

La Teoría del Riesgo Individual, a diferencia de la Teoría del Riesgo Colectivo, considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que sucede a todas las pólizas individuales admitidas por ella. Como consecuencia, la siniestralidad total de la empresa durante un período de tiempo considerado, por ejemplo un año, será la suma de todas las variaciones aleatorias asociadas a cada póliza individual existentes en la misma. Esto es,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

siendo ξ la siniestralidad total de la cartera y ξ_i la siniestralidad de la póliza i-ésima, $i=1,2,\dots,n$. Si se supone que los sumandos son variables aleatorias independientes, con la misma función de distribución $F(x)$, la variable aleatoria suma, ξ, tendrá por función de distribución:

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) * \dots * F_n(x)$$

es decir, la convolución n-ésima de $F(x)$.

De acuerdo con el Teorema Central del Límite, esta suma será aproximadamente normal si el número de pólizas (sumandos) es suficientemente grande.

Se puede considerar la cartera formada por n pólizas distribuidas en h categorías homogéneas, cada una de ellas con n_i pólizas, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_h$. Cada categoría j esta formada por pólizas cuyos factores de riesgo tienen un mismo nivel. Por ejemplo, en seguros multirriesgo hogar viviendas de similares características, misma zona, etc. La esperanza y varianza de las variables aleatorias asociadas a las pólizas de la categoría j son $E(\xi_{ij}) = \mu_j$ y $V(\xi_{ij}) = \sigma_j^2$ respectivamente. La siniestralidad anual total de la cartera será por tanto una variable aleatoria:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_h = \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{n_j} \xi_{ij}$$

cuya media y varianza, asumiendo las hipótesis de independencia de los sumandos, son $E(\xi) = \mu = \sum_{j=1}^{h} n_j \mu_j$ y $V(\xi) = \sigma^2 = \sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2$, respectivamente.

Si el número total de pólizas que compone la cartera es suficientemente grande, por el Teorema Central del Límite se puede aproximar la distribución de la variable aleatoria ξ por una normal de media μ y desviación típica σ.

La Teoría del Riesgo Individual presenta varios inconvenientes. Entre ellos señalar que no siempre es aceptable la hipótesis de independencia de los sumandos que componen la siniestralidad total, que no se puede aplicar el Teorema Central del Límite si los grupos homogéneos tienen un número pequeño de pólizas y que la cartera de seguros tiene una movilidad que dificulta su aplicación. Además esta teoría no proporciona respuestas a preguntas tales como cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en el futuro.

I.4.2. TEORÍA DEL RIESGO COLECTIVO

En contraposición a la Teoría del Riesgo Individual aparece la Teoría del Riesgo Colectivo que considera a la Entidad Aseguradora como un todo, estudiando el desarrollo del negocio de seguro desde el punto de vista probabilístico, introduciendo modelos generales de probabilidad. Uno de los objetivos de esta teoría es dar respuesta a preguntas como cuál es la probabilidad de ruina de la compañía en un momento determinado, o en el futuro, pregunta a la que no respondía la anterior teoría.

La Teoría del Riesgo Colectivo examina el comportamiento estadístico de las dos variables aleatorias que intervienen en la determinación de la siniestralidad: el número de siniestros y la cuantía o costes de cada uno de ellos. Según esta posibilidad, la cartera de pólizas se considera como un conjunto integrado por una colectividad de riesgos que da lugar a una corriente o flujo de siniestros: el volumen de dicho flujo depende del número de siniestros y de su importe. Esta consideración permite modelar el coste estadístico del riesgo, entendido como coste en términos de probabilidad, a diferencia del coste real que ha de satisfacer la entidad cuando el riesgo se transforma en siniestro.

Las dos variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo son $\upsilon(t)$ de tipo discreto (toma valores en el conjunto de los números naturales), que representa el número de siniestros acaecidos durante el tiempo de observación t y $\xi_i(t)$ de carácter continuo (toma valores en los números reales), que se refiere a la cuantía correspondiente al i-ésimo siniestro.

Asociadas a estas variables aleatorias, las funciones que determinan las distribuciones de probabilidad son la función de cuantía del número de siniestros, $P_n(t)$ que representa la probabilidad de que en el período de tiempo t se produzcan exactamente n siniestros, es decir, $P(\upsilon(t)=n)$ y la función de distribución de probabilidad de la cuantía del siniestro ξ_i, $V_i(x,t)$ que representa la probabilidad de que en el período de tiempo t la cuantía del i-ésimo siniestro no exceda de x unidades monetarias, esto es, $P(\xi_i \leq x)$.

$P_n(t)$ y $V_i(x,t)$ se conocen como *distribuciones básicas del proceso de riesgo*. La siniestralidad total o cuantía total de los siniestros acaecidos en el período de tiempo t es una variable aleatoria ξ que se define como $\xi(t) = \xi_1(t)+\xi_2(t)+\ldots+\xi_n(t)$, supuesto que en t se hayan producido n siniestros.

La función de distribución del daño total o siniestralidad total, vendrá dada por $F(x,t) = P(\xi(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot V(x/n)$, donde $V(x/n)$ es la función de distribución de la cuantía del daño total si se han producido n siniestros.

Bajo las hipótesis de que las cuantías de los siniestros ξ_i son independientes del número de siniestros ocurridos, la función de distribución de la siniestralidad total se expresa como $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot V^{n^*}(x,t)$, donde $V^{n^*}(x,t)$ es la convolución n-ésima de $V(x,t)$ que se calcula mediante la fórmula de recurrencia:

$$V^{n*}(x,t) = \int_0^x V^{(n-1)*}(x-z,t) \cdot dV(z,t) = V^{(n-1)*}(x,t) * V(x,t),$$

de igual forma que se hace en la Teoría del Riesgo Individual.

En general, el proceso de composición no se pueda aplicar explícitamente no siendo por tanto posible determinar una expresión analítica de la función de distribución del daño total. Para su estudio se pueden buscar aproximaciones de la misma utilizando fundamentalmente los momentos de *F(x,t)*, que se pueden obtener sin dificultad a partir de las distribuciones de frecuencia y cuantía. Por ejemplo, el desarrollo en series de Edgeworth, la aproximación Normal Power, distribución de Poisson compuesta, etc. Los métodos de aproximación son útiles para estimar probabilidades máximas de pérdidas y probabilidades de ruina.

El estudio de las distribuciones de estas variables aleatorias así como la aproximación de la siniestralidad total de la entidad mediante modelos de probabilidad se lleva a cabo con más detalle en el Capítulo II, además de aplicar **mixturas de distribuciones** en el Capítulo III en la estimación de las mismas.

I.5. SOLVENCIA EN LA EMPRESA DE SEGUROS.

I.5.1. SOLVENCIA Y ESTABILIDAD

El problema de la solvencia, como establecen Pentikäinen, Taylor y Buchanan (1988) es tan antiguo como el propio seguro. Esta afirmación se justifica si se consideran las razones por las que la solvencia tienen especial significado para el asegurador. Estas razones se fundamentan en la naturaleza de las prestaciones que realiza el asegurador, ya que vienen asociada a situaciones de necesidad del asegurado, debiéndose garantizar la solvencia como un aspecto más de la actividad aseguradora.

En *sentido general*, la *solvencia* puede definirse siguiendo a Castelló Matrán y Guardiola Lozano (1992) como la capacidad para atender el pago de los compromisos económicos mediante el conjunto de recursos que constituyen el patrimonio o activo.

En *sentido estricto* se dice que un asegurador es *solvente* si tiene activos suficientes para atender a los pasivos. Esta definición se podría aplicar a cualquier tipo de empresa. La particularidad de la Empresa de Seguros radica en la variabilidad de los riesgos objeto de cobertura, que determinan el pasivo de la misma. La consecuencia es que el pasivo no es conocido sino que es una variable aleatoria, por lo que la solvencia se estudia en términos probabilísticos jugando un papel importante la distribución de siniestralidad.

Desde el punto de vista *actuarial*, se estudia la solvencia del asegurador considerando la naturaleza estocástica del proceso de seguro, valorando en términos probables la situación solvente o insolvente de la empresa (que viene dada por la probabilidad de ruina). Para este estudio se aplica la Teoría del Riesgo, introducida en el epígrafe anterior.

Relacionado con la solvencia aparece el término de estabilidad. Se considera que una empresa es *estable* si, a lo largo de un período de tiempo, sus resultados (en concepto amplio: económicos, fiscales, de gestión,...) no fluctúan de manera brusca bajo condiciones de actuación similares. Con la estabilidad se garantiza la continuidad de la actividad de la empresa.

El análisis de la estabilidad de la Empresa de Seguros (requisito fundamental para la solvencia) desde el enfoque financiero-actuarial, identifica a la empresa con la cartera de seguros que posee y se aplica la Teoría del Riesgo Colectivo para lograr el objetivo del sistema de estabilidad. Esto es, evitar que para unos precios dados y equitativos (primas) la probabilidad de ruina (probabilidad de que los siniestros sean superiores a las primas) supere un valor prefijado.

El análisis de la solvencia lleva a establecer el período de tiempo en el que se va a estudiar. Siguiendo a Latorre Llorens (1992), una diferenciación muy utilizada es aquella que introduce tres enfoques temporales. El primero consiste en considerar el período anual, el segundo examina un número finito de ejercicios y el tercero, la duración ilimitada. El objetivo será por tanto garantizar la solvencia durante un año, en un período mínimo de *n* años o durante toda la vida de la empresa, respectivamente.

El horizonte temporal adoptado permite diferenciar además entre distintos tipos de solvencia. Es clásica en la ciencia actuarial la diferenciación de la solvencia en dos apartados, *solvencia estática (break-up)* y *solvencia dinámica (going-concern).*

La primera corresponde a la capacidad técnico-financiera para hacer frente, en un momento determinado, a las obligaciones contraidas por la empresa, valoradas en función de las reglas determinadas por la normativa correspondiente. Byrnes (1986) establece que la solvencia estática equivale a garantizar, con un nivel aceptable de probabilidad, que los activos del asegurador son suficientes para atender sus pasivos en un momento dado. Se estudia así la solvencia sin considerar que la empresa siga funcionando en el futuro y no admitiendo la posibilidad de que pueda ampliar el negocio.

La solvencia dinámica recoge la capacidad de prever posibles desviaciones que se produzcan a partir de fluctuaciones aleatorias experimentadas por la siniestralidad o como consecuencia de la gestión de la Entidad Aseguradora. La argumentación a favor de este sistema supone que es más realista considerar que la empresa va a seguir funcionando en el futuro que en un momento determinado, admitiendo además ampliaciones de negocio. Supone considerar el negocio de seguros desde la continuidad, como un flujo continuo de rentas, estudiando tanto la posición de solvencia como la capacidad de hacer frente a las obligaciones según se vayan originando.

La solvencia está afectada por toda la actividad de la empresa y en particular por los riesgos derivados de esa actividad. Considerando que el proceso de seguro, de manera simplificada, consiste en recibir primas por parte de los asegurados e ingresos de las inversiones que se realizan, y pagar las reclamaciones presentadas a la empresa ante el acaecimiento de los siniestros y otros gastos asociados a la actividad empresarial, se puede efectuar una clasificación de los factores que inciden sobre la solvencia diferenciando el pasivo del activo.

Por el lado del pasivo afectan de manera significativa a la solvencia las *reclamaciones* efectuadas a la compañía por la presentación de los siniestros. Aparece de nuevo el análisis de la cuantía de los siniestros y el número de los mismos, para plantear así la distribución de la siniestralidad total que ayudará a determinar las reclamaciones a las que debe hacer frente la compañía.

I.5.2. PROVISIONES TÉCNICAS EN LOS SEGUROS NO VIDA

Uno de los problemas más importantes que se presenta en la economía de la empresa es la determinación del beneficio económicamente imputable a cada ejercicio. Este beneficio se determina mediante la diferencia entre los ingresos y los gastos económicamente imputables al mismo. Es por ello por lo que resulta fundamental determinar, de la forma más precisa posible, qué parte de los ingresos y gastos resultan imputables al ejercicio económico considerado. Esta determinación de gastos e ingresos se denomina *periodificación* y en la empresa aseguradora se realiza a través de las provisiones técnicas.

Las provisiones técnicas son las reservas de las Entidades Aseguradoras específicas de su actividad dado que proceden directamente de las operaciones de seguros. Recogen las dotaciones fundamentales destinadas a reservar recursos para próximos ejercicios con el fin de adecuar gastos e ingresos. Las provisiones se constituyen en la fecha de cierre del ejercicio.

Una estimación incorrecta de las mismas, ya sea por exceso o por defecto, pone en peligro la solvencia y el negocio asegurador provocando, entre otros problemas, fluctuaciones de los resultados financieros. Estimaciones y dotaciones insuficientes suponen declarar un beneficio superior al real, generando problemas futuros tanto a la hora de hacer frente a obligaciones pendientes del asegurador derivadas de siniestros ocurridos antes del cierre del ejercicio como al determinar primas insuficientes por haber sobreestimado la solvencia. Dotaciones por exceso afectan de forma negativa desde el punto de vista fiscal dado que el exceso está sujeto a gravamen. La importancia del problema es de absoluta actualidad en el ámbito asegurador y prueba de ello son las numerosas publicaciones existentes.

Actualmente, en gran parte de las compañías, parece que las provisiones técnicas son insuficientes y los métodos de cálculo pueden no ser, en ocasiones, los adecuados. El cálculo requiere utilizar hipótesis adecuadas al fenómeno propio de cada ramo y tipo de seguro, que permitan justificar su aplicación y defender el método ante los organismos correspondientes si fuera necesario.

En conjunto existen cuatro grandes clases de reservas o provisiones técnicas en los seguros generales o no-vida: provisiones de riesgos en curso, provisiones de siniestros pendientes de pago o liquidación, provisiones de siniestros desconocidos y provisiones de estabilización o de desviación de siniestralidad. La Ley y el Reglamento de Seguros vigentes actualmente en España contemplan un quinto grupo de provisiones técnicas, las provisiones para primas pendientes de cobro. Las tres primeras provisiones surgen de un criterio económico de periodificación, mientras que el último grupo de provisiones se encuentra dentro de una periodificación con criterio técnico y juegan un papel fundamental en el problema de solvencia de la compañía.

En esta tesis doctoral se hace especial referencia a las provisiones para siniestros pendientes, en cuya determinación tiene especial importancia la distribución de siniestralidad. El nuevo reglamento de seguros se refiere a la provisión de prestaciones como el importe de las obligaciones pendientes del asegurador derivadas de los siniestros ocurridos con anterioridad al cierre del ejercicio. El concepto de siniestros pendientes agrupa siniestros pendientes de declaración, conocidos como I.B.N.R. (Incurred But Not Reported) y siniestros pendientes de pago o liquidación, conocidos como I.B.N.E.R. (Incurred But Not Enough Reserved) también llamados R.B.N.S. (Reported but Not Settled) o I.B.N.F.R. (Incurred But not Fully Reported). Como establece el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados en el artículo 39, apartado quinto, "la provisión de prestaciones estará integrada por la provisión de prestaciones pendientes de liquidación o pago, la provisión de siniestros pendientes de declaración y la provisión de gastos internos de liquidación de siniestros".

En el primer grupo las provisiones se constituyen por el importe estimado de los siniestros ocurridos en cada ejercicio y que no le hayan sido comunicados a la entidad antes del cierre de las cuentas del mismo. En el segundo, la provisión está constituida por el importe definitivo de los siniestros de tramitación terminada, incluidos los gastos originados por la misma, pendientes solamente de pago y por el importe de los siniestros de tramitación en curso o aún no iniciados en la fecha de cierre del ejercicio, incluidos los gastos a que su liquidación vaya a dar lugar[10].

La aplicación de métodos para el estudio de las reservas para siniestros pendientes se puede hacer desde dos puntos de vista. Unos modelos se basan en

[10] En relación con la Provisión Técnica para Prestaciones, el artículo 39 del nuevo Reglamento de ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre) establece en el apartado quinto que la provisión para prestaciones estará integrada por la provisión de prestaciones pendientes de liquidación o pago, la provisión de siniestros pendientes de declaración y la provisión de gastos internos de liquidación de siniestros.

métodos sencillos que incluso pueden no implicar ningún grado de aleatoriedad aunque debido a las estadísticas disponibles puede ser el único método posible. Otras aproximaciones pueden implicar métodos de un alto grado de sofisticación. Todos ellos están basados en el estudio de la siniestralidad en el momento de cierre del ejercicio.

Siguiendo a Gil Fana (1995), una primera clasificación de los métodos es aquella que considera por una parte, los llamados métodos caso a caso y por otra, los métodos colectivos o globales.

Los *métodos caso a caso* se basan en la estimación individual de la cuantía de cada uno de los siniestros en tramitación en el momento del cierre de cuentas del ejercicio siendo por tanto aplicable únicamente a la estimación de los siniestros conocidos. Su aplicación es necesaria cuando existen pocos siniestros y no se dispone de información histórica de la compañía, no siendo válidos en este caso los métodos estadísticos. Este método es criticado porque se basa casi exclusivamente en el juicio subjetivo del actuario.

En contraposición al método individual, los *métodos colectivos o globales* consideran la cartera de siniestros de un ramo o modalidad de seguro como un todo y se basan en el empleo de técnicas matemáticas y estadísticas, más o menos complejas, y en la existencia de ciertas regularidades en el proceso de liquidación de los siniestros. Son necesarios para estimar la Provisión para siniestros pendientes de declaración. Para su aplicación es necesario que los datos históricos sean adecuados, dividir en grupos homogéneos y elegir el método más adecuado a las tendencias observadas en el proceso liquidatorio. Aunque se pueden aplicar simultáneamente varios métodos fundamentados en distintos supuestos, obteniéndose un intervalo de posibles valores de la provisión, un principio de consistencia aconseja el mantenimiento de un único método.

El nuevo Reglamento permite a las Entidades Aseguradoras la utilización de métodos estadísticos en el cálculo de esta provisión, para lo que deberán ir acompañados de una justificación detallada de los contrastes de su bondad y del periodo de obtención de información que se pretende aplicar, comunicándose antes su utilización a la Dirección General de Seguros, quién podrá oponerse a su utilización. La determinación de la provisión de prestaciones utilizando métodos estadísticos requiere que la entidad tenga un volumen de siniestros suficiente para permitir la inferencia estadística (con información de los últimos cinco ejercicios, como mínimo) y que los datos sean homogéneos y procedentes de estadísticas fiables. Se excluyen de la base de datos utilizada para el cálculo estadístico los siniestros o grupos de siniestros que presenten características, o en los que concurran circunstancias, que justifiquen estadísticamente su exclusión. Estos siniestros serán valorados y provisionados de forma individual.

Si se utilizan métodos estadísticos, la estimación del importe final de la provisión se hará tomando en consideración los resultados de, al menos, dos métodos pertenecientes a grupos de métodos estadísticos diferentes. En este sentido, se consideran pertenecientes al mismo grupo aquellos métodos que se basen en las mismas hipótesis o que obtengan sus resultados a partir de las mismas magnitudes o variables. De esta forma, los resultados de la utilización de métodos estadísticos se contrastará a partir de hipótesis o datos obtenidos con diferentes métodos de trabajo. En cualquier caso, durante un periodo mínimo de cinco años, la entidad no deberá abandonar el método individual de valoración de los siniestros dado que se debe comparar el importe de la provisión obtenido mediante los dos métodos estadísticos con el obtenido a partir del método individual, constituyéndose como importe de la misma el mayor de los resultados obtenidos.

La pregunta que surge es qué tipo de modelo se debe aplicar a situaciones reales. Básicamente, cualquiera que sea el modelo que se aplique, los paso a seguir son los siguientes: construir el modelo, estimar los parámetros del mismo, examinar las posibles desviaciones entre el modelo y los datos empíricos disponibles y si el paso anterior revela que el modelo difiere bastante de la realidad, hacer las correcciones precisas o construir un nuevo modelo siguiendo los mismos pasos.

Taylor (1986) propone una clasificación usando diferentes niveles. El mayor nivel de clasificación es la distinción entre *modelos estocásticos* y *modelos no estocásticos*, según la naturaleza estocástica del proceso de siniestralidad. Otra clasificación diferencia entre *macro modelos,* que consideran la totalidad de la siniestralidad y *micro modelos*, que parten de siniestros individuales. Los macro modelos pueden incluir o no el número de siniestros como variable dependiente. En este sentido Taylor examina otros niveles de clasificación distinguiendo primero entre modelos con y sin número de siniestros como variable dependiente y después entre siniestros pagados frente a cuantía total de los siniestros ocurridos. El menor nivel de clasificación se refiere a las variables explicativas que se incluyen en el modelo como volumen de expuestos, momento de pago del siniestro, cuantía media de los siniestros, intensificación de la siniestralidad, etc.

En general, los modelos para estimar los siniestros pendientes son ejemplos de modelos lineales en los que la elección de las variables dependientes es lo que diferencia a los distintos métodos. Las variables dependientes y las explicativas están conectadas por medio de una matriz de diseño. Existen varias técnicas para ajustar el modelo a los datos, tales como el ajuste mecánico, el método de los mínimos cuadrados, inferencia bayesiana, métodos de máxima verosimilitud y el filtro de Kalman. Algunas de ellas, así como otros métodos alternativos para estimar las provisiones, se utilizan en los métodos enumerados en el Capítulos IV de la Tesis Doctoral.

En este Capítulo se ha tratado de forma general la actividad aseguradora, introduciendo características específicas que diferencian a las empresas de seguros del resto de empresas, y las operaciones que éstas realizan. Esta breve introducción lleva a establecer el concepto de riesgo y seguro como razón de ser de la Institución. En los dos últimos epígrafes se han tratado la Teoría del Riesgo aplicada al estudio de la siniestralidad, desarrollada con más amplitud en los siguientes capítulos, y la importancia que este estudio tiene para calcular las provisiones para siniestros pendientes como una garantía más de solvencia, con el fin de tener una visión global del contenido de la Tesis. Se consideran de forma especial las provisiones para prestaciones dado que el nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados hace referencia de forma significativa a las mismas, permitiendo el uso de métodos estadísticos para su cálculo.

II. ANÁLISIS DE LA SINIESTRALIDAD EN LA EMPRESA ASEGURADORA

II. ANÁLISIS DE LA SINIESTRALIDAD EN LA EMPRESA ASEGURADORA

II.1. EL PROCESO GENERAL DE RIESGO

El análisis desarrollado en este trabajo de investigación se centra en los seguros generales o no vida, con una estructura estocástica diferente a la de los seguros vida. Debemos destacar, como establece Bohman (1977), que la probabilidad de los sucesos no depende de una sola característica o variable única y que las desviaciones aleatorias debidas a siniestros extraordinarios, en comparación con las primas, son de mayor importancia que en los seguros de vida.

El estudio del comportamiento estadístico de la siniestralidad puede realizarse desde diversos puntos de vista, entre los que se señalan los siguientes.

1. Una forma de abordar el problema, desde la perspectiva de la Teoría del Riesgo Individual, es considerar las pólizas individuales, cada una de ellas con una cierta probabilidad de siniestro, que forman la cartera de seguros. En este caso la ganancia o pérdida total será la suma de las contribuciones de las pólizas individuales. Tal y como se indicó con anterioridad, esta suma es aproximadamente normal si el número de pólizas es lo suficientemente grande.

Entre los inconvenientes de esta teoría señalar que la cartera tiene una movilidad que dificulta su aplicación y que el uso del teorema central del límite no es posible si los grupos homogéneos son de pequeño tamaño.

2. Se puede considerar la siniestralidad correspondiente a un determinado período de tiempo, por ejemplo un año, como una variable aleatoria y estudiar su distribución.

3. Otro planteamiento, que fundamentó la formulación del margen de solvencia de la Comunidad Económica Europea, es considerar como tal variable los cocientes entre siniestralidad y primas referentes a un ejercicio.

4. Propio de la Teoría del Riesgo Colectivo es examinar el comportamiento estadístico de las dos variables aleatorias que intervienen en la determinación de la siniestralidad: el número de siniestros y la cuantía o costes de cada uno de ellos. Según esta posibilidad, la cartera de pólizas se considera como un conjunto integrado por una colectividad de riesgos que da lugar a una corriente o flujo de siniestros; el volumen de dicho flujo depende del número de siniestros y de su importe.

En el presente trabajo se adopta el cuarto punto de vista, estudiando por tanto las distribuciones de las variables aleatorias número de siniestros y cuantía de un siniestro, para construir finalmente el modelo de distribución de probabilidad del importe o cuantía total, que es lo que constituye el *proceso general de riesgo*. Se establecerá un modelo del coste estadístico del riesgo, entendido como coste en términos de probabilidad, a diferencia del coste real que ha de satisfacer la entidad cuando el riesgo se transforma en siniestro.

Para definir los elementos o variables que constituyen el proceso de riesgo es necesario establecer los conceptos de *tiempo físico o absoluto* y *tiempo actuarial*. En el proceso de riesgo, el tiempo actuarial es el período de tiempo en el que el proceso está sometido a observación. Puede tener la duración de un año, un mes, una semana, etc. y se representa por τ. El tiempo actuarial se encuentra inmerso en el marco del tiempo físico, denotado por t.

Situados en el tiempo físico t y considerando un tiempo actuarial de observación τ, la variable aleatoria $\upsilon(\tau,t)$ representa el número de siniestros acaecidos durante el tiempo actuarial τ y la variable aleatoria $\zeta_i(\tau,t)$ la cuantía correspondiente al i-ésimo siniestro. Las *distribuciones básicas del proceso de riesgo* son la función de cuantía del número de siniestros, $P_n(\tau,t)$ y la función de distribución de probabilidad del siniestro ζ_i, $V_i(x,\tau,t)$.

Siguiendo el esquema desarrollado en el primer capítulo (suponiendo que las cuantías de los siniestros son independientes del número de siniestros ocurridos), la función de distribución del daño total, o siniestralidad total, viene dada por:

$$F(x,\tau,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tau,t)\cdot V^{n^*}(x,\tau,t)$$

donde $V^{n^*}(x,\tau,t)$ es la convolución n-ésima de $V(x,\tau,t)$ que se calcula mediante la fórmula de recurrencia:

$$V^{n^*}(x,\tau,t)=\int_0^X V^{(n-1)^*}(x-z,\tau,t)\cdot dV(z,\tau,t)=V^{(n-1)^*}(x,\tau,t)*V(x,\tau,t)$$

El proceso de riesgo puede ser estacionario, cuando sus dos distribuciones básicas son independientes del tiempo físico o absoluto t, o evolutivo, cuando al menos una de sus distribuciones básicas depende del tiempo físico o absoluto t en el que se desarrolla el proceso. En adelante se supondrá que el proceso de riesgo es estacionario y por simplicidad terminológica se representa el tiempo actuarial por la letra latina t.

La metodología a seguir para estudiar el proceso general de riesgo puede ser muy diversa. Una forma sencilla de abordar el problema de las distribuciones básicas es la adoptada por Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984), diferenciando dos casos. En el primero, el más simplificado, todos los siniestros son de igual montante en el sentido de que todas las sumas aseguradas son de igual cuantía, por lo que la única variable aleatoria es el número de siniestros ocurridos. Si se toma dicho montante como la unidad monetaria, el coste total para el ente asegurador es igual al número de siniestros. El problema es entonces encontrar la distribución de probabilidad del número de siniestros. En el segundo, el más general, las indemnizaciones son de distinta cuantía y a partir de la distribución del número de siniestros se calcula la de la cuantía total de una forma más compleja.

El esquema seguido en el análisis que se desarrolla a continuación se puede dividir en tres partes fundamentales. En la primera, que constituye los epígrafes II.2 y II.3, se estudian de forma independiente las variables número de siniestros y cuantía de los mismos. En la segunda, el epígrafe II.4, se construye la distribución de la siniestralidad total y se revisan algunas aproximaciones existentes de dicha distribución, las más importantes. Por último, en el Capítulo III, se aplican **mixturas de distribuciones** a la estimación de dichas variables.

II.2. LA DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE SINIESTROS

Analicemos en primer lugar la distribución de la variable aleatoria υ, número de siniestros. Si se parte de los esquemas de las urnas de Bernouilli y de Polya-Eggenberger, en el cual el número de expuestos al riesgo es N, finito pero desconocido y se diferencia entre que se produzca o no contagio después de cada extracción de bola, se tiene la distribución de Polya-Eggenberger en el caso de contagio positivo, o en el caso más general, una distribución de Polya-Eggenberger generalizada. Si no hay contagio, la distribución de la variable aleatoria es binomial.

Dado que no es posible conocer con carácter general el número N de expuestos al riesgo, surge el proceso de paso al límite ($N \rightarrow \infty$) que define la distribución de Poisson, en ausencia de contagio, a partir de la distribución binomial, o bien la distribución binomial negativa, si existe contagio positivo débil, como límite de la distribución de Polya-Eggenberger. Es con estas dos últimas distribuciones con las que se trabaja por ser las que mejor se ajustan, en las aplicaciones prácticas, a la variable número de siniestros. Si bien es posible definir las distribuciones de varias formas, el esquema básico y más utilizado es el que se acaba de establecer, aunque en el epígrafe se verán también otras que expliquen mejor la interpretación actuarial del fenómeno.

II.2.1. PROCESOS DE POISSON

La distribución de Poisson como distribución del número de siniestros que tienen lugar en una cartera de pólizas durante un tiempo de observación determinado, se puede definir desde distintos puntos de vista.

Por ejemplo, siguiendo a López Cachero y López de la Manzanara (1996), se puede calcular la probabilidad de que ocurran n siniestros en un periodo de observación unitario como límite de la distribución binomial, siguiendo el esquema de las urnas de Bernouilli, bajo los supuestos de que el número de expuestos al riesgo tienda a infinito ($N \to \infty$), la probabilidad de cada siniestro sea pequeña ($p \to 0$) y el número medio de siniestros en el período de observación unitario (m=Np) permanece constante para todo valor de N y de p.

Esta ley, denominada *ley de los casos raros*, en su interpretación actuarial, significa que la probabilidad del siniestro habrá de ser pequeña y el suceso siniestro un *caso raro* en el contexto de la cartera del ente asegurador. Calculando el límite de la distribución binomial, como se ha señalado, resulta la siguiente función de cuantía:

$$P(\upsilon = n) = \binom{N}{n} \cdot p^{n} \cdot q^{N-n} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{m^{n}}{n!} \cdot e^{-m} \qquad \text{(II.1)}$$

Por ser límite de la distribución binomial la anterior función de cuantía expresa la probabilidad de siniestro en el período de observación unitario. Si el tiempo actuarial de observación es t, en lugar del período unitario, entonces la distribución de Poisson definida en (II.1) tiene la siguiente función de cuantía:

$$P_n(t) = P(\upsilon = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \tag{II.2}$$

siendo $\lambda = mt$ el número esperado de siniestros en el tiempo actuarial de observación t.

Esta distribución se caracteriza por la igualdad entre su media y su varianza. Es por ello un elemento indicador de que el fenómeno que se está considerando sigue una distribución de Poisson el que la media y varianza empíricas sean iguales.

Desde el punto de vista actuarial, la distribución de Poisson se basa en las siguientes hipótesis:

1. *Homogeneidad en el tiempo*: m es constante para cualquier período de observación unitario, con independencia del tiempo físico. Si esto no sucede, se puede introducir el concepto de *tiempo operativo* como hace Bühlmann (1996), quien mide el tiempo tomando como unidad el número medio de siniestros, en lugar del tiempo actuarial.

La hipótesis de homogeneidad en el tiempo implica que la cartera ha de ser lo suficientemente grande como para que la salida de pólizas individuales a causa de siniestros (u otras causas) y la entrada de nuevos casos no afecten el flujo del colectivo a cualquier nivel de significación.

2. *Efecto de contagio nulo*. Significa que un suceso no puede surgir a partir de cualquier otro suceso. La distribución de Poisson simple procede del paso al límite de la binomial, asociada al esquema de urnas de Bernouilli, donde las extracciones se

realizan con reemplazamiento. En este caso, la probabilidad de cualquier extracción no depende de lo que haya ocurrido en anteriores extracciones, lo que en este caso equivale a admitir que el acaecimiento de un siniestro no tiene influencia sobre los demás expuestos al riesgo, o no modifica la probabilidad del elemento siniestrado. Este caso es bastante restrictivo. Esta condición contradice en muchas ocasiones a la realidad, ya que pueden existir riesgos entre los que es posible un contagio. Para eliminar esta objeción se puede definir el riesgo unitario como la combinación de aquellos riesgos cercanos entre los que es posible un contagio, como por ejemplo los riesgos de incendio.

3. *Exclusión de siniestros múltiples.* Las probabilidades de que ocurran al mismo tiempo más de un siniestro y de que tengan lugar un número infinito de siniestros en un intervalo finito de tiempo son cero. Al igual que en la primera hipótesis, en la realidad pueden ocurrir siniestros múltiples, como es el caso de la colisión de dos vehículos. Para evitar este problema se puede definir tal siniestro múltiple como un único siniestro. La exclusión de un número infinito de siniestros no supone restricción alguna desde el punto de vista de las aplicaciones.

Otra forma de generar la distribución de Poisson es considerándolo como un ***proceso de Poisson homogéneo en el tiempo***, como hacen Panjer y Willmot (1992). Se considera una sucesión en el tiempo de sucesos aleatorios que tienen lugar en los instantes t_1, t_2, t_3,...(tiempo físico), como pueden ser por ejemplo los siniestros en una cartera de seguros. Se toma un intervalo de amplitud t (tiempo actuarial) en el cual pueden acaecer υ siniestros, siendo υ una variable aleatoria. El proceso de Poisson homogéneo se basa en las siguientes hipótesis:

1. *Homogeneidad en el espacio* o independencia, lo cual significa que los sucesos acaecerán de forma independiente en dos intervalos de tiempo disjuntos.

2. *Homogeneidad en el tiempo*, entendiendo como tal que la probabilidad de que ocurran n siniestros en un intervalo de amplitud t es independiente del tiempo físico, dependiendo únicamente de la amplitud del intervalo (tiempo actuarial).

3. *Sucesos raros*. La probabilidad de que en un intervalo de amplitud infinitesimal, Δt, ocurra un único suceso es asintóticamente $m \cdot \Delta t$. Es decir:

$$P_1(\Delta t) = m \cdot \Delta t + O(\Delta t), \text{ con } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

de donde se deduce:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t} = m \qquad \text{(II.3)}$$

4. *Imposibilidad de siniestros múltiples simultáneos*. La probabilidad de que en un intervalo de amplitud infinitesimal, Δt, se produzcan más de un suceso es prácticamente despreciable. Es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Puesto que se verifica que $1-P_0(\Delta t)-P_1(\Delta t)=P_2(\Delta t)+P_3(\Delta t)+....$, se deduce a partir de la expresión (II.4) que:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(\Delta t)}{\Delta t}=0\text{, para } k\geq 2 \qquad \text{(II.5)}$$

Considerando las hipótesis 1 y 2, como los sucesos ocurren de forma independiente en intervalos de tiempo disjuntos, siendo además independientes del tiempo físico se tiene que:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot P_0(\Delta t)$$

y por lo tanto:

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=\frac{P_0(t)\cdot(P_0(\Delta t)-1)}{\Delta t}=\frac{P_0(t)\cdot(-P_1(\Delta t)-P_2(\Delta t)-P_3(\Delta t)-....)}{\Delta t}$$

Calculando el límite cuando $\Delta t\to 0$, teniendo en cuenta los resultados (II.3) y (II.5), se obtiene:

$$P_0'(t)=-m\cdot P_0(t) \qquad \text{(II.6)}$$

Como $P_0(0)=1$, la solución de la anterior ecuación diferencial es:

$$P_0(t)=e^{-mt} \qquad \text{(II.7)}$$

Por otra parte se puede determinar $P_n(t+\Delta t)$ a partir de la unión de sucesos mutuamente excluyentes e independientes como:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\cdot P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)\cdot P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t)\cdot P_2(\Delta t) + \ldots$$

de donde resulta:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \frac{P_n(t)\cdot(P_0(\Delta t) - 1) + P_{n-1}(t)\cdot P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t)\cdot P_2(\Delta t) + \ldots}{\Delta t}$$

Calculando el límite cuando $\Delta t \to 0$ y teniendo en cuenta los resultados (II.3) y (II.5), se obtiene:

$$P_n'(t) = -m\cdot P_n(t) + m\cdot P_{n-1}(t),\ n \geq 1 \qquad \text{(II.8)}$$

Para resolver esta ecuación diferencial se consideran los sucesivos valores de n, el resultado (II.7) y se imponen las condiciones naturales $P_n(0)=0$ para $n\geq 1$. Mediante inducción resulta:

$$P_n(t) = P(\upsilon = n) = \frac{(mt)^n}{n!}\cdot e^{-mt}$$

Como puede observarse, es la función de cuantía (II.2). Por tanto, el proceso de Poisson homogéneo en el tiempo (independiente por tanto del tiempo físico) da lugar a la distribución de Poisson.

La hipótesis 2 (*homogeneidad en el tiempo*) que permite definir la distribución de Poisson como un proceso de Poisson homogéneo en el tiempo no se verifica en ciertas ocasiones, por ejemplo cuando la probabilidad de un siniestro varía según los meses del año o incluso según la hora del día, siendo necesario en este caso definir el ***proceso de Poisson no homogéneo*** en el tiempo.

Suponemos entonces que la intensidad de la siniestralidad es función del tiempo (físico) *t*: *m(t)* y cumpliéndose el resto de hipótesis, las ecuaciones diferenciales (II.6) y (II.8) se transforman en:

$$P_0'(t) = -m(t) \cdot P_0(t)$$

$$P_n'(t) = -m(t) \cdot P_n(t) + m(t) \cdot P_{n-1}(t), \; n \geq 1$$

con las condiciones iniciales $P_0(0) = 1$ y $P_n(0) = 0$ para $n \geq 1$.

cuya solución es, como puede verse en Mateos-Aparicio (1995):

$$P_n(t) = P(\upsilon = n) = \frac{(\Delta(t))^n}{n!} \cdot e^{-\Delta(t)}$$

siendo $\Delta(t) = \int_0^t m(z) \cdot dz$

El proceso de Poisson no homogéneo se puede reducir al caso homogéneo si se introduce el concepto de tiempo operacional al que ya nos hemos referido. La idea es, como se ha comentado, medir el tiempo tomando como unidad de medida el número medio de siniestros de tal forma que la media permanezca constante en cada periodo de tiempo operativo unitario. No obstante, como comenta Borch (1974b), esta idea tiene poco sentido práctico porque de lo que se trata es de estudiar la siniestralidad en determinados periodos de tiempo para determinar la solvencia de la entidad.

II.2.2. OTRAS DISTRIBUCIONES

Existen otras distribuciones de probabilidad discretas que pueden ser utilizadas para modelar el número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. De ellas, la más utilizada cuando la distribución de Poisson no resulta adecuada para representar el número de siniestros de una cartera, es la distribución binomial negativa.

Esta distribución puede ser definida de varias formas: siguiendo el esquema de las urnas de Bernouilli (representa el número de pruebas precisas para que se presente una característica determinada), como una distribución de Poisson compuesta (cuando el número medio de siniestros sigue una distribución Gamma) o como límite de la distribución de Polya-Eggenberger para el caso de sucesos raros y contagio débil.

Desde el punto de vista actuarial las dos últimas son las que más interés presentan y son las que se presentan seguidamente. Si se desea estudiar dicha distribución siguiendo el esquema de las urnas de Bernouilli se puede consultar, por ejemplo, la obra de Feller (1991).

Se puede definir, por tanto, la distribución binomial negativa como una ***distribución de Poisson compuesta***. Este punto de vista surge porque no siempre es posible admitir que el número medio de siniestros (λ) permanece constante para cualquier período de observación t.

En el caso general, con planteamiento bayesiano y siguiendo a Panjer y Willmot (1992), la *distribución de probabilidad compuesta* de una variable aleatoria υ con función de distribución $F(x/\lambda)$, con respecto a una segunda variable aleatoria η con función de distribución $G(\lambda)$ es una variable aleatoria definida por la función de distribución:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x|\lambda) \cdot dG(\lambda)$$

Si las variables aleatorias son discretas, y en particular si υ es la función de cuantía de una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ aleatorio y con función de distribución $G(\lambda)$ (con valores en el intervalo $(0,\infty)$), se puede obtener la función de cuantía, en lugar de la función de distribución, mediante la expresión:

$$P(\upsilon = n) = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \cdot dG(\lambda) \qquad \text{(II.9)}$$

En el caso particular en que λ sigue una ley Gamma de probabilidad con función de densidad:

$$g(x) = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-hx}, \text{ para } x>0, \text{ siendo } \alpha \text{ y } h>0.$$

resulta, al sustituir esta función de densidad en la expresión (II.9) referente a la función de cuantía de una distribución de Poisson compuesta:

$$P(\upsilon = n) = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-h\lambda} \cdot d\lambda$$

cuya solución es:

$$P(\upsilon = n) = \left(\frac{h}{1+h}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{1+h}\right)^{n} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} =$$
$$= \binom{-\alpha}{n} \cdot \left(-\frac{1}{1+h}\right)^{n} \cdot \left(\frac{h}{1+h}\right)^{\alpha}$$

Basta poner $\alpha = mh$ para obtener la conocida fórmula de la función de cuantía de una variable aleatoria con distribución de probabilidad binomial negativa, que modela el número de siniestros que tienen lugar en un periodo de observación unitario:

$$P(\upsilon = n) = \binom{-mh}{n} \cdot \left(-\frac{1}{1+h}\right)^{n} \cdot \left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh}$$

Si se trabaja con un período actuarial de observación t, la función de cuantía pasa a ser:

$$P_n(t) = P(\upsilon = n) = \binom{-mh}{n} \cdot \left(-\frac{t}{t+h}\right)^{n} \cdot \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} \qquad \text{(II.10)}$$

La distribución binomial negativa surge también como ***límite de la distribución de Polya-Eggenberger*** cuya consideración como distribución del número de siniestros se justifica a continuación. Diversos fenómenos actuariales se encuentran definidos en un ambiente en el que no es posible admitir la hipótesis de independencia entre sus acaecimientos, dado que pueden producirse contagios que pueden influir en un proceso de riesgo, tanto en la propensión de otros objetos a experimentar el siniestro como en la propensión del objeto considerado a sufrir el siniestro. Bajo este supuesto se introduce la ley de Polya-Eggenberger, explicada por ejemplo por López Cachero y López de la Manzanara (1996), cuya función de cuantía es:

$$P(\upsilon = n) = \frac{\binom{\frac{p}{\delta} + n - 1}{n} \cdot \binom{\frac{q}{\delta} + s - 1}{s}}{\binom{\frac{1}{\delta} + r - 1}{r}} \qquad \text{(II.11)}$$

$P(\upsilon = n)$ representa la probabilidad de que, en el período de observación unitario, entre r expuestos a un riesgo tengan lugar n siniestros, produciéndose un "contagio positivo" de intensidad inicial igual a δ, tras el acaecimiento de cada siniestro, dentro de una población de N elementos, siendo p la probabilidad inicial de siniestro.

La distribución binomial negativa surge también, como se ha señalado anteriormente, como límite de la distribución de Polya-Eggenberger cuando el número de expuestos al riesgo tiende a infinito ($r \to \infty$), la probabilidad inicial de siniestro es muy pequeña ($p \to 0$), el contagio es débil ($\delta \to 0$), la media es $m=rp$ y $r \cdot \delta = 1/h$, donde h es el parámetro de contagio. Bajo estos supuestos, pasando al límite en la expresión (II.11), se obtiene la distribución binomial negativa en un intervalo unitario, con la misma función de cuantía (II.10) que resulta en los dos supuestos anteriores:

El efecto de contagio se traduce en una varianza mayor que la que posee la distribución de Poisson al ser $h>0$. Sin embargo, tal contagio se interpreta como *débil* al afectar únicamente a la varianza.

El significado del parámetro h es el de una medida del grado de homogeneidad relacionada con la intensidad del contagio. Si h es grande, el efecto de contagio es pequeño, así como la varianza. Cuando $h \to \infty$ desaparece el contagio y nos encontramos ante una distribución de Poisson. Por el contrario, si h es pequeño, el efecto de contagio es grande y por tanto la varianza también lo es.

Existen otras distribuciones de probabilidad discretas que se pueden utilizar para modelar el número de siniestros que tienen lugar en una cartera de pólizas, como son la distribución logarítmica o la distribución de Poisson truncada. En este epígrafe se ha desarrollado con más detalle la distribución de Poisson por ser la más utilizada en las aplicaciones prácticas y, como alternativa a la anterior cuando no se puede admitir la hipótesis de ausencia de contagio, la distribución binomial negativa.

II.3. LA DISTRIBUCIÓN DE LA CUANTÍA DE LOS SINIESTROS

El modelo matemático que se sigue en la Tesis está basado en la consideración de que la segunda de las distribuciones básicas, que modela la cuantía de un siniestro (variable aleatoria ζ) es de tipo continuo.

En ciertas ocasiones, al considerar aplicaciones prácticas, puede ser suficiente conocer los dos o tres primeros momentos de la variable aleatoria ζ, mediante estimaciones realizadas sobre los datos empíricos. Sin embargo, cuando interesa conocer la distribución en valores grandes de ζ o la disponibilidad de datos es insuficiente para todo el rango de la variable, se hace necesario utilizar leyes analíticas para explicar el comportamiento de dicha variable. Se pueden presentar pues, las siguientes situaciones con respecto a la variable cuantía de un siniestro:

1. Conocimiento empírico preciso de la variable, siendo suficiente en tal caso el conocimiento de dos o tres momentos de ζ, sin necesidad de recurrir a modelo alguno.

2. Conocimiento suficiente únicamente para valores moderados de la variable, $\zeta \leq L$, siendo necesario ajustar una función que modele la variable en el tramo $\zeta > L$.

3. conocimiento limitado de la variable, referido por ejemplo a sus primeros momentos, interesando conocer el comportamiento de la misma con mayor detalle. Se intenta en este caso ajustar una o varias funciones a los datos empíricos para representar el comportamiento de ζ.

En el desarrollo de la Tesis se considera el tercer caso de los comentados, estudiando cuáles son los modelos de probabilidad que pueden ajustarse a los datos empíricos.

Cabe destacar también la importancia de esta variable aleatoria para calcular la prima como un porcentaje de la suma asegurada. Para ello se impone en primer lugar una clasificación de los riesgos en clases homogéneas. Conviene distinguir dos casos:

- Seguros para los que no existen sumas aseguradas que se puedan relacionar con el valor del interés asegurado, por ejemplo, el seguro de Responsabilidad Civil con garantía máxima ilimitada.

- Seguros para los que existen sumas aseguradas susceptibles de relacionarse con el valor del interés asegurado, dando lugar a los casos de infraseguro, seguro pleno y sobreseguro.

En este último caso se debe procurar que las sumas aseguradas en cada clase sean lo más homogéneas posible, y si son de distinta cuantía es conveniente elaborar la distribución porcentual que representa la probabilidad de indemnización para cada peseta asegurada: $0 \leq X = \frac{I}{S} \leq 1$, siendo I es la indemnización correspondiente, S la suma asegurada y X la cuantía del siniestro por unidad monetaria.

A continuación se analizan y definen algunas distribuciones básicas, las más importantes en términos históricos.

II.3.1. DISTRIBUCIÓN GAMMA

La distribución Gamma es una de las más importantes, desde el punto de vista actuarial, como distribución de la cuantía de los siniestros por ser una de las que mejor se ajustan, en múltiples casos, a la distribución empírica de la cuantía de los siniestros. Además, es muy manejable matemáticamente y está relacionada con otras distribuciones importantes como la de Erlang, que resulta cuando uno de los parámetros de la distribución Gamma es entero (en concreto el parámetro α que aparece en la función de densidad) o la de Poisson. Si los siniestros siguen una distribución de parámetro $\lambda = mt$, la variable aleatoria que representa el tiempo transcurrido hasta la aparición del r-ésimo siniestro sigue una ley de probabilidad Gamma.

Siguiendo a Panjer y Willmot (1992), una variable aleatoria ζ sigue una distribución Gamma de parámetros α y h ($\alpha > 0$ y $h > 0$) cuando, siendo continua, su función de densidad es[11]:

$$f(x) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-hx}, \text{ para } x>0 \qquad \text{(II.12)}$$

siendo $\Gamma(\alpha)$ la integral de Euler de segunda especie, que se calcula como:

[11] Se puede definir la distribución Gamma de forma más general, como hacen López Cachero y López de la Manzanara (1996), si se toma un origen γ, no necesariamente cero, respecto al cual se consideran los valores de la variable. En este caso, la distribución Gamma de parámetros $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\gamma \geq 0$ tiene por función de densidad $f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{(x-\gamma)}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}$, para $x>\gamma$

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \cdot dx .$$

Esta integral es convergente para $\alpha > 0$, y ha sido objeto de múltiples estudios sobre el cálculo aproximado de la misma y su acotación como puede verse en los trabajos de Chakravarty (1969) o Rao (1969). Por ejemplo, para el cálculo aproximado el corolario de la fórmula de Stirling establece que:

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \sqrt{2\pi n}\text{ , } n \text{ entero}$$

o la fórmula de Legrende:

$$\Gamma(2t) = \frac{2^{2t-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(t) \cdot \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

Los análisis de convolución son básicos en la Teoría de Riesgo ya que constituyen el elemento fundamental en la determinación de la distribución del daño total. En el caso de la distribución Gamma, la suma de n variables aleatorias ζ_i con distribución Gamma de parámetros α_i y h, estocásticamente independientes, es otra variable aleatoria con distribución de probabilidad Gamma de parámetros $\sum \alpha_i$ y h.

La ***distribución Gamma truncada por la derecha*** es una distribución continua que encuentra aplicación cuando las investigaciones se producen a partir de muestras procedentes de poblaciones incompletas ó, en el caso de representar el coste de los siniestros de una cartera, cuando dicho coste es inferior a una cantidad determinada. Esta distribución continua de parámetros $\alpha>0$ y $h>0$, tiene como función de densidad:

$$f(x) = k \cdot h^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-hx}, \text{ para } 0<x<a$$

donde a es el punto de truncamiento de la distribución y k la constante que hace que la anterior función sea de densidad. Es decir, se debe verificar que la integral en el intervalo $(0,a)$ sea 1.

La ***distribución exponencial*** es un caso especial de la distribución Gamma en la que el parámetro α toma valor 1. Sin más que considerar el valor dado para α en la expresión (II.12), y siendo el parámetro h positivo, la función de densidad resulta:

$$f(x) = h \cdot e^{-hx}, x>0$$

La distribución exponencial es además la distribución de probabilidad de la variable aleatoria η, *tiempo transcurrido hasta el acaecimiento del primer suceso*, cuando la variable número de siniestros tiene distribución de probabilidad de Poisson de parámetro $\lambda=mt$. En efecto, la probabilidad de que hasta el momento t hayan ocurrido 0 siniestros, produciéndose por tanto el primer suceso a partir de ese instante es:

$$1 - F(t) = P(\eta > t) = P_0(t) = e^{-mt}$$

resultando $F(t) = 1 - e^{-mt}$ que no es más que la función de distribución de una variable aleatoria exponencial.

El parámetro h se puede estimar de diferentes formas, llegando al mismo valor si se hace por el método de los momentos o por máxima verosimilitud: $\hat{h} = \frac{1}{\bar{x}}$, siendo $\bar{x}$ la media muestral que, si la distribución es exponencial, nunca se anula.

Se verifica además que $Ln(1 - F(x)) = -hx$, de donde se deduce que la distribución puede ajustarse a los valores empíricos x_i si el conjunto de pares $\{x_i, Ln(1 - F(x_i))\}$ están razonablemente alineados.

Se puede definir además una distribución de probabilidad que sea una mixtura de distintas componentes que son distribuciones exponenciales, cuando una única distribución exponencial no modele de forma adecuada el coste de los siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. Su concepto y la forma de estimar los parámetros de este nueva distribución se detalla en el siguiente capítulo ilustrándolo además con la aplicación a un caso real.

II.3.2. OTRAS DISTRIBUCIONES

Existen otras distribuciones de probabilidad adecuadas para modelar la cuantía de los siniestros, como son la distribución logarítmo-normal, distribución de Pareto, de Weibull o la distribución por polinomios exponenciales.

La distribución logarítmico-normal suele dar resultados satisfactorios para representar las probabilidades asociadas a la cuantía de un siniestro, como puede observarse en el artículo de Marín Cobo (1985), aunque presenta la dificultad de que la convolución n-ésima no se puede expresar de un modo sencillo. Para valores pequeños de la varianza se asemeja a una distribución normal, aunque este no sea siempre un hecho deseable. Una variable aleatoria sigue una distribución Logarítmico-normal si, tomando valores reales positivos, su logaritmo neperiano sigue una distribución normal para valores positivos de la variable. Su función de densidad viene dada por:

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(Lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para } x>0$$

La distribución de Pareto surge, en principio y siguiendo a Lange (1964), como la distribución de la renta personal en una colectividad. Representa en tal caso la distribución de los ingresos superiores a un nivel determinado x_0. En aplicaciones actuariales x_0 es el siniestro de cuantía mínima y k un coeficiente de igualdad. La función de densidad de la variable aleatoria es:

$$f(x)=-\alpha\cdot\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{-x_0}{x^2}\right)=\alpha\cdot x_0^{\alpha}\cdot x^{-\alpha-1}, \text{ para } x\geq x_0$$

Al igual que en el caso anterior, el cálculo analítico de la convolución resulta bastante complicado si se desea hacer de forma exacta.

La distribución por polinomios exponenciales se forma por combinación lineal convexa de distribuciones exponenciales. Surge con la finalidad de resolver el complejo problema de pasar a la distribución del daño total y su función de densidad se puede obtener como una **mixtura de distribuciones exponenciales**, cuyo concepto se explicará en el Capítulo III, generalizando la distribución propuesta por Panjer y Willmot (1992) que únicamente consideran dos componentes, como:

$$f(x) = \alpha_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + ... + \alpha_n \beta_n e^{-\beta_n x}, \quad x > 0$$

donde $f_i(x) = \beta_i e^{-\beta_i x}$ son distribuciones exponenciales y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Por último, la distribución de Weibull supone una generalización de la ley exponencial con dos parámetros, $\alpha > 0$ (parámetro *de forma*) y $\theta > 0$ (parámetro *de escala*), y se define como la ley de distribución que corresponde a una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}}, \text{ para } x>0.$$

Otras distribuciones de carácter continuo que pueden modelar la cuantía de un siniestro son la distribución beta, la distribución de Esscher, distribución log-logística, la distribución de Burr, la distribución Gamma generalizada, la distribución de Pareto generalizada, etc.

En cada cartera de seguros se deberá estudiar cuál es la distribución de probabilidad que mejor se ajuste al coste de los siniestros ocurridos. Se han enumerado por ello diferentes distribuciones de probabilidad de tipo continuo, haciendo especial énfasis en la distribución Gamma, de la cual la distribución exponencial es un caso particular, puesto que esta última es la que se mejorará con el uso de mixtura de distribuciones en el Capítulo siguiente.

II.4. LA SINIESTRALIDAD TOTAL

II.4.1. DISTRIBUCIÓN DEL DAÑO TOTAL SI EL NÚMERO DE SINIESTROS SIGUE UNA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La Teoría del Riesgo Colectivo permite construir, como ya se ha comentado en el primer capítulo, la función de distribución de la siniestralidad total. Si se han producido n siniestros de cuantías aleatorias $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ (con funciones de distribución $V_1(x)$, $V_2(x), \ldots, V_n(x)$), el daño total producido por esos n siniestros se representa mediante la variable aleatoria $\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n$ cuya función de distribución se denota mediante $V(x/n)$.

En el análisis de tal función de distribución se pueden considerar fundamentalmente dos casos:

1. La cuantía de cada siniestro (ζ_i) es independiente del número de ellos producido, en cuyo caso la distribución de ξ (suponiendo que las variables aleatorias ζ_i son estocásticamente independientes e igualmente distribuidas) es:

$$V(x/n) = V_1(x) \cdot V_2(x) \cdot \ldots \cdot V_n(x) = V^{n*}(x)$$

donde $V^{n*}(x)$ es la convolución n-ésima de $V(x)$.

2. La cuantía de cada daño depende del número de siniestros acaecidos. En este caso no es admisible la hipótesis de independencia entre las variables aleatorias ζ_i y no se puede hablar de convolución n-ésima de $V(x)$. Esto sucede, por ejemplo, en seguros

de incendios, cuando la cuantía del daño depende del número de focos y se da un efecto de contagio.

En general, en las aplicaciones prácticas la situación más común es que el número de siniestros sea independiente de la cuantía de los mismos, y es por ello que se estudia el primero de los casos.

Si no se conoce el número de siniestros que han tenido lugar, esto es, tanto el número de siniestros como la cuantía de cada uno de ellos son variables aleatorias, la función de distribución de la variable aleatoria cuantía del daño total en el período actuarial t es:

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\cdot V(x|n)$$

que, en el caso de que la cuantía de los siniestros sea independiente del número de los mismos, será:

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\cdot V^{n^*}(x)$$

donde $P_n(t)$ representa la probabilidad de que se produzcan n siniestros en un período de observación t y $V^{n^*}(x)$ la probabilidad de que, habiendo sucedido n siniestros, su cuantía total no exceda de x unidades monetarias. Se supone además que las cuantías de cada siniestro son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $V(x)$.

La convolución n-ésima verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$V^{n*}(x) = \int_0^x V^{(n-1)*}(x-z) \cdot dV(z)$$

con:

$$V^{0*}(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ 1 & si\, x \geq 0 \end{cases} \text{ y } V^{1*}(x) = V(x)$$

Se omite de la expresión *V(x)* la letra latina *t*, referida al tiempo actuarial de observación, para simplificar la notación.

El estudio de la distribución del daño total se realiza según las distintas distribuciones que pueden corresponder a la variable número de siniestros. En general se diferencia entre distribuciones de Poisson o binomial negativa. De ellos, el más importante es el primero, y es el que se considera en este trabajo.

Si el número de siniestros es una variable aleatoria que sigue una ley de Poisson la distribución del daño total recibirá el nombre de *distribución de Poisson Generalizada* siendo su función de distribución:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-mt} \cdot (mt)^n}{n!} \cdot V^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda)^n}{n!} \cdot V^{n*}(x)$$

donde $\lambda = mt$ y bajo la hipótesis de que el número medio de siniestros permanece constante para cualquier período de observación unitario.

Cuando el número de siniestros sigue una distribución de Poisson compuesta, la función de distribución de la siniestralidad total es:

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot(\lambda)^{n}}{n!}\cdot V^{n*}(x)$$

y si el número de siniestros es un proceso de Poisson no homogéneo entonces:

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\Delta(t)}\cdot(\Delta(t))^{n}}{n!}\cdot V^{n*}(x)\text{, con }\Delta(t)=\int_{0}^{t}m(z)\cdot dz$$

Se puede considerar en este último caso el tiempo operativo t (número esperado de siniestros) y transformar el proceso en uno homogéneo como se indicó al definir la distribución de Poisson para modelar el número de siniestros. En adelante, t se refiere al tiempo operativo y de esta forma:

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-t}\cdot t^{n}}{n!}\cdot V^{n*}(x)$$

Esta fórmula cumple las hipótesis de homogeneidad en el tiempo, efecto de contagio nulo y exclusión de siniestros múltiples, así como la independencia entre las cuantías de los siniestros.

La esperanza y varianza del daño total se calculan en función de los dos primeros momentos con relación al origen de la distribución de la cuantía de un siniestro. Es decir, $\alpha_k=\int_{0}^{\infty}x^{k}\cdot dV(x)$ ($k=1,2$).

Los momentos de orden 1 y 2 de la variable aleatoria $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$, con función de distribución $V^{n*}(x)$, dada la independencia entre las variables ζ_i son:

$$E(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\zeta_i) = n\alpha_1 \quad \text{y}$$

$$E((\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n)^2) = E\left[\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \zeta_i \zeta_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\zeta_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} E(\zeta_i)E(\zeta_j) = n\alpha_2 + n(n-1)\alpha_1^2$$

En consecuencia,

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot n\alpha_1 = t\alpha_1 \quad \text{y}$$

$$E(\xi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot n\alpha_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot n(n-1)\alpha_1^2 = t\alpha_2 + t^2\alpha_1^2$$

De donde resulta que la media y varianza de la distribución del daño total son:

$$E(\xi) = t\alpha_1 \text{ y } V(\xi) = t\alpha_2$$

Como ya se ha especificado, t es el número medio de siniestros y α_1 y α_2 los momentos respecto al origen, de orden 1 y 2 respectivamente, de la cuantía de un siniestro.

La función característica de la siniestralidad total, *F(x,t),* teniendo en cuenta que las variables aleatorias ζ_i son independientes es:

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \cdot dF(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot dV^n(s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^n}{n!} \cdot \psi^n(s) = e^{t\psi(s)-t}$$

donde ψ es la función característica de la variable aleatoria ζ, cuantía de un siniestro:

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \cdot dV(x) \; .$$

Se han desarrollado diferentes métodos para estudiar *F(x,t)* en situaciones donde el proceso de composición no se puede aplicar explícitamente. Estos métodos se agrupan en dos categorías, métodos de aproximación y métodos exactos.

(1) Métodos de aproximación.

Utilizan fundamentalmente los momentos de *F(x,t),* que se pueden obtener sin dificultad desde las distribuciones de frecuencia y cuantía. Los métodos de aproximación son útiles para estimar probabilidades máximas de pérdidas y probabilidades de ruina.

Como aproximaciones a la distribución del daño total, se han utilizado más frecuentemente:

- Aproximación normal.

- Series de Edgeworth

- Aproximación NP (Normal Power)

- Aproximación de Esscher

- Método de Montecarlo.

- Método de recurrencia, debido a Adelson y desarrollado por Panjer.

(2) Métodos exactos.

Las aproximaciones resultan imprecisas en algunas situaciones, por lo que se han tenido que buscar formas más precisas de aproximar $F(x,t)$. Destacan dos métodos muy importantes para solucionar este problema.

- La transformada inversa de Fourier de la función característica.

- La fórmula de recurrencia de Panjer.

A continuación se presentan algunos de ellos, los más utilizados en las compañías aseguradoras. A modo ilustrativo se presenta, además de distintos desarrollos en serie, un método de simulación (el método de Montecarlo) y un método de recurrencia (el algoritmo de Panjer). En el capítulo siguiente se presentará una nueva aproximación mediante mixturas de distribuciones, de aplicación más sencilla que los métodos expuestos a continuación.

II.4.2. APROXIMACIONES A LA DISTRIBUCIÓN DEL DAÑO TOTAL.

La importancia de la distribución del daño total dentro de la Teoría del Riesgo Colectivo y la dificultad de su cálculo directo hacen necesario disponer de aproximaciones prácticas de la misma.

La función de Poisson generalizada *F(x,t)* es complicada a efectos de cálculo. Los métodos directos de tratamiento de *F(x)* a menudo conducen a expresiones voluminosas, nada fáciles de tratar en algunos problemas, como por ejemplo diferentes métodos de reaseguro, retenciones netas y recargos de seguridad. Aunque la naturaleza de los problemas exija cálculos detallados es necesario trabajar con aproximaciones más sencillas. Uno de los principales problemas de la Teoría del Riesgo aplicada es encontrar aproximaciones adecuadas. A continuación se examinan a continuación las más importantes.

II.4.2.1 Serie de Edgeworth.

El desarrollo de Edgeworth, que se puede estudiar por ejemplo en Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984), viene dado por la expresión:

$$F(x,t)=\phi\left(\frac{x-t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\right)-\frac{\alpha_3}{6\sqrt{t}\alpha_2^{3/2}}\phi^{(3)}\left(\frac{x-t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\right)+\frac{\alpha_4}{24t\alpha_2^{2}}\phi^{(4)}\left(\frac{x-t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\right)+$$
$$+\frac{\alpha_3^{2}}{72t\alpha_2^{3}}\phi^{(6)}\left(\frac{x-t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\right)+O(t^{-3/2})$$

donde $\phi^{(k)}$ es la derivada k-ésima de ϕ (función de distribución de una variable aleatoria Normal(0,1)), α_r el momento de orden r respecto al origen de $V(x)$ y t el número medio de siniestros en el período actuarial de observación.

En la expresión explícita de las derivadas de ϕ se puede observar que el error relativo en la Serie de Edgeworth tiende a infinito cuando x tiende a infinito. La Serie de Edgeworth es una serie divergente, por lo que no se obtiene, para un t fijo, una mejor aproximación simplemente incrementando el número de términos. Sin embargo, si se consideran un número adecuado de términos se produce una aproximación aceptable en el entorno del valor medio. Se puede esperar que el resultado sea bueno, para valores de x hasta una distancia a la media de dos desviaciones típicas, si bien para puntos exteriores la bondad de los resultados decrece muy rápidamente.

Desde el punto de vista de la Teoría del Riesgo, este hecho es desafortunadamente importante ya que en muchos problemas el principal interés aparece en puntos situados a la derecha de la media a una distancia de dos o tres veces la desviación típica. Por esta razón es necesario contar con un desarrollo mejor que el de Edgeworth. El método de Esscher da buenos resultados en este sentido, aunque necesita unos cálculos complicados. Sin embargo, otro método que con unas sencillas operaciones da unos resultados ligeramente peores es el NP. Ambos métodos se pueden estudiar con detalle en la obra citada de Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984).

II.4.2.1.1. Aproximación normal.

La aproximación Normal a la distribución del daño total no es más que el desarrollo de Edgeworth de la función *F(x)* en el que únicamente se considera el primer término, ignorando todos aquellos que verifican $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Esta es la aproximación más clásica y una de las que más frecuentemente han sido aplicadas, pudiéndose determinar también mediante la aplicación del Teorema Central del Límite. La función de distribución del daño total viene dada en este caso por:

$$F(x,t) \cong \phi\left(\frac{x - t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\right)$$

siendo ϕ la función de distribución de una variable aleatoria con distribución de probabilidad Normal(0,1).

II.4.2.2. Aproximación NP (Normal Power).

El método NP es un método basado en la inversión del desarrollo de Edgeworth. La aproximación Normal a la distribución de Poisson Generalizada consiste en reemplazar la cuantía total del siniestro por la variable aleatoria $\xi \approx t\alpha_1 + \eta \cdot \sqrt{t\alpha_2}$, donde η es una variable aleatoria normal con media *0* y desviación típica *1*. La idea es reformular η por medio del desarrollo:

$$\delta = a_0 + a_1 \cdot \eta + a_2 \cdot \eta^2 + \ldots$$

en el que los coeficientes a_i se determinan por medio del desarrollo de Edgeworth, como se verá.

Mientras que la aproximación Normal se establece sobre la base de la ecuación:

$$1-\varepsilon = P(\eta \leq y) = \phi(y)$$

la variable modificada obedecerá a la ecuación, reordenando el desarrollo de Edgeworth:

$$1-\varepsilon = \phi(y+\Delta y) - \frac{1}{6}\cdot\gamma_1\cdot\phi^{(3)}(y+\Delta y) + \frac{1}{24}\cdot\gamma_2\cdot\phi^{(4)}(y+\Delta y) + \\ + \frac{1}{72}\cdot\gamma_1^2\cdot\phi^{(6)}(y+\Delta y) + O(t^{-3/2})$$

siendo ϕ la función de distribución de una variable aleatoria con distribución de probabilidad Normal(0,1), $\gamma_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}\cdot\sqrt{t}}$ y $\gamma_2 = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2\cdot t}$ y verificándose además que

$$y + \Delta y = a_0 + a_1\cdot y + a_2\cdot y^2 + \dots$$

Para encontrar los coeficientes a_r se determina en primer lugar Δy (utilizando el método de Newton):

$$\Delta y = \frac{1}{6}\cdot\gamma_1\cdot(y^2-1) + \frac{1}{24}\cdot\gamma_2\cdot(y^3-3y) - \frac{1}{36}\cdot\gamma_1^2\cdot(2y^3-5y) + O(t^{-3/2})$$

---

y el resultado obtenido se aplica en $\frac{x - t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}} = y + \Delta y$.

El método NP trabaja por lo tanto con las dos ecuaciones siguientes:

$$1-\varepsilon=\phi(y) \text{ y}$$

$$\frac{x-t\alpha_1}{\sqrt{t\alpha_2}}\cancel{=y+\Delta y}=y+\frac{1}{6}\cdot\gamma_1\cdot\left(y^2-1\right)+\frac{1}{24}\cdot\gamma_2\cdot\left(y^3-3y\right)- \\ -\frac{1}{36}\cdot\gamma_1^{\,2}\cdot\left(2y^3-5y\right)+O(t^{-3/2}) \qquad \text{(II.13)}$$

Si en la ecuación (II.13) se considera únicamente el primer término resulta de nuevo la aproximación normal a la distribución de Poisson Generalizada. Este método se denomina Aproximación NP_1.

Si se toman los dos primeros sumandos se obtiene el método NP_2. Dada una precisión ε $(1-F(x)=\varepsilon)$ se busca en primer lugar y en las tablas de la normal y se sustituye en la ecuación (II.13) para obtener el correspondiente valor de x. Si por el contrario es x el valor fijado de antemano, se despeja y de la ecuación (con únicamente dos sumandos), resultando ser la precisión:

$$\varepsilon=1-F(x,t)=1-\phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma_1^{\,2}}+1+\frac{6(x-t\alpha_1)}{\sqrt{t\alpha_2}}}-\frac{3}{\gamma_1}\right)$$

Razonando de la misma forma, considerando distinto número de sumandos, se obtienen distintos métodos NP. Dado que el desarrollo del método NP se basa en la hipótesis de que $1-\varepsilon$ se puede representar por un número finito de términos principales de un desarrollo de Edgeworth, no resulta lógico que el resultado sea mejor que el obtenido usando directamente dicho desarrollo. La experiencia de la aplicación del método NP_2 demuestra que casi siempre, con más precisión cuando γ_1 es menor que 2, el método da muy buenos resultados, mientras que el desarrollo de Edgeworth no los proporciona para puntos que se desvían de la media en alguna medida. Sin embargo, es incorrecto decir que el desarrollo de Edgeworth no es muy bueno, incluso aunque solo se pueda aplicar bajo ciertas condiciones. Es por el contrario, un desarrollo exacto, aunque la serie sea divergente.

II.4.2.3. Métodos de simulación. El método de Montecarlo

Se pueden aplicar también métodos de simulación que permiten, al menos de forma teórica, el cálculo aproximado de la convolución. A modo ilustrativo se presenta el método de Montecarlo que permite generar muestras aleatorias de cualquier población con función de distribución $F(x)$. En el campo actuarial se puede estudiar dicho método, por ejemplo, en la obra de Daykin, Pentikäinen y Pesonen (1994), quienes dedican un capítulo a métodos de simulación aplicados a procesos actuariales en general.

Se comienza generando una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$: $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ y se proyecta a otra muestra "simulada", $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de la población con función de distribución $F(x)$ sin más que resolver las ecuación $r_i = F(x_i)$, $i=1,\dots,n$.

Asimismo se puede establecer (desde el punto de vista teórico) la función de distribución de la suma de dos variables aleatorias, $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Es decir, la convolución de dos funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$: $F=F_1(x)*F_2(x)$. Para ello se generan n pares de números aleatorios $(r_{11}, r_{21}; ...; r_{1n}, r_{2n})$. Cada número r_{1i} se transforma en x_{1i} que verifica $r_{1i} = F_1(x_{1i})$ y de la misma forma, cada r_{2i} se transforma mediante F_2 en x_{2i}. La suma $x=x_{1i}+x_{2i}$ nos da la muestra aleatoria $(x_1, x_2, ..., x_n)$ distribuida según la función $F=F_1(x)*F_2(x)$.

Para obtener una estimación de la función de distribución $F(x)$ se ordenan los valores de la muestra según su magnitud. Si se denota por k_x al número de todos los x_i que son menores o iguales que x se obtiene la estimación:

$$F(x) = \frac{k_x}{n}$$

El error depende de la cantidad de números aleatorios generados, n. Suponiendo que el valor real de $F(x)$ es p, la función de distribución de $\frac{k_x}{n}$ es binomial con desviación típica $\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$. Se puede afirmar en este caso que, con un nivel de confianza del 99% el valor observado se encuentra en el intervalo $(p - 2'576\sigma, p + 2'576\sigma)$. Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984) calculan el error máximo relativo para distintos valores de p.

El método de Montecarlo se puede utilizar para calcular aproximaciones a la distribución de Poisson Generalizada. Para ello, se genera en primer lugar un número aleatorio r_{10}. Si $P(N)$ es la función de distribución de la variable aleatoria de Poisson que representa el número de siniestros, la solución de la ecuación $r_{10}=P(N)$, N_1, será el número aleatorio de siniestros producido en la muestra simulada.

A continuación se generan N_1 números aleatorios $(r_{11},r_{12},..., r_{1N_1})$ que permiten obtener una muestra de las cuantías de cada siniestro, $(x_{11},x_{12},..., x_{1N_1})$, mediante la transformación $x_{1i} = V^{-1}(r_{1i})$.

La suma, $x_1 = \sum_{i=1}^{N_1} x_{1i}$ se puede considerar como el primer elemento de la muestra aleatoria correspondiente a $F(x,t)$, distribución del daño total.

De esta forma se generan sucesivas muestras aleatorias simuladas, correspondientes a la distribución del daño total. El procedimiento ha de ser repetido un gran número de veces para que dichas muestras conduzcan a un conocimiento suficiente de dicha población.

II.4.2.4. Métodos recurrentes. El algoritmo de Panjer

Por último, se pueden aplicar métodos recurrentes para determinar la siniestralidad total en un periodo fijo de tiempo, sin necesidad de calcular de forma analítica las convoluciones que intervienen en la fórmula de la misma. Como ejemplo se expone el algoritmo de Panjer (1981) que representa una fórmula de recurrencia aplicable cuando la variable que modela el número de siniestros pertenece a una familia determinada de distribuciones.

Se parte por tanto de una familia particular de distribuciones para el número de siniestros que verifiquen la siguiente fórmula de recurrencia:

$$P(\upsilon = n) = p_n = p_{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right) = P(\upsilon = n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right),\ n=1,2,3,..k \qquad \text{(II.14)}$$

Sundt y Jewell (1981) demuestran que las únicas distribuciones que verifican la relación anterior son la distribución de Poisson, la binomial y la binomial negativa. Como caso particular de la distribución binomial negativa también verificará la fórmula de recurrencia la distribución geométrica.

Si el número de siniestros ocurridos es independiente de la cuantía de los mismos y se diferencia entre siniestros nulos y siniestros con coste distinto de cero, la función de densidad del coste total viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot v^{n^*}(x) & x > 0 \\ p_0 & x = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.15)}$$

donde $v^{n^*}(x)$ es la función de densidad del coste de un siniestro. Si las carteras de pólizas son grandes p_0 es un valor muy pequeño. Cuando el número de siniestros sigue una distribución de Poisson $p_0 = e^{-\lambda}$, si es binomial $p_0 = (1-p)^N$ y si es binomial negativa $p_0 = (1-p)^{\alpha}$.

Panjer demuestra que si p_n y $f(x)$ se definen mediante las expresiones (II.14) y (II.15) y $v(x)$ es cualquier función de densidad para $x>0$ entonces:

$$f(x)=\begin{cases} p_1 v(x)+\int_0^x (a+b\frac{y}{x})v(y)f(x-y)dy & x>0 \\ p_0 & x=0 \end{cases}$$

En el caso en que $v(x)$ es discreta y se define en los enteros positivos, la correspondiente fórmula recurrente es:

$$f_i=\begin{cases} \sum_{j=1}^{i}(a+b\frac{j}{i})v_j f_{i-j} & i=1,2,3,... \\ p_0 & i=0 \end{cases} \qquad \text{(II.16)}$$

Se puede obtener la misma fórmula de recurrencia si la relación (II.14) se verifica para $n=2,3,...$ y además, extender el resultado al caso de siniestros con coste negativo cuando $v(x)$ se distribuye en el conjunto de todos los enteros ($v(x)=P(\varsigma=x), x\in Z$). Se verifica en este último caso:

$$f(0)=\begin{cases} \left(\frac{1-av(0)}{1-a}\right)^{-\left(\frac{a+b}{a}\right)} & a\neq 0 \\ e^{-b(1-f(0))} & a=0 \end{cases}$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-av(0)}\right)\sum_{j=1}^{x}(a+b\frac{j}{x})v(j)(x-j),\ x\geq 1$$

La fórmula recurrente planteada en (II.16) toma como valor inicial $f(0)=p_0$. Panjer y Willmot (1986) advierten que si $p_0<e^{-m}$, donde e^{-m} es el menor valor que puede ser representado en el ordenador, los cálculos al desarrollar la fórmula en algún programa informático pueden conducir a error. Para ello se propone, de forma muy

sencilla, hacer un cambio de escala reemplazando p_0 por cp_0 y utilizar dicho factor c para hacer las transformaciones adecuadas en la fórmula de recurrencia.

El mismo problema surge si en algún momento $cp_j > e^M$, el máximo valor que se puede representar en el ordenador. Si λ es el parámetro de la distribución de Poisson que modela el número de siniestros, el problema se puede evitar tomando un valor c para hacer el cambio de escala que verifique $e^{\lambda-m} < c < e^M(2\pi\lambda)^{0,5}$.

Se han presentado en este capítulo distintas distribuciones de probabilidad que modelan el numero de siniestros o la cuantía de los mismos con el objetivo de, en el último epígrafe, construir la distribución del daño total. En general dicha distribución, como se ha comentado, no se conoce de forma explícita siendo necesario desarrollar métodos de aproximación de la misma.

Se han expuesto diferentes métodos de aproximación que suelen ser utilizados de forma general en las compañías aseguradoras. Estos métodos en general exigen un gran número de observaciones, hipótesis rigurosas, gran número de implementaciones o software específico como es el caso del método de Montecarlo.

En el capítulo siguiente se presentan nuevas distribuciones del número de siniestros, el coste de los mismos y la siniestralidad total. Se denominan mixturas de distribuciones y se construyen a partir de distintas distribuciones de probabilidad, denominadas distribuciones componentes. La ventaja de su utilización es que no requieren hipótesis tan rigurosas y la estimación de sus parámetros se puede realizar aplicando el método de máxima verosimilitud, mediante la implementación del algoritmo EM que se puede programar en cualquier lenguaje e incluso implementar en una hoja de cálculo.

III. MIXTURAS DE DISTRIBUCIONES

III. MIXTURAS DE DISTRIBUCIONES

III.1. INTRODUCCIÓN GENERAL

En el capítulo anterior se han expuesto las distribuciones clásicas que modelan la siniestralidad en una entidad aseguradora, partiendo del número de siniestros y del coste de los mismos para, finalmente, representar el coste de todos los siniestros que ocurren en una cartera de pólizas durante un período actuarial de observación determinado.

En ocasiones, cuando la cartera de pólizas es heterogénea se puede dividir ésta en grupos homogéneos y estudiar en cada uno de ellos la siniestralidad ajustando distintas funciones de probabilidad. Como alternativa al estudio individual de cada grupo se pueden utilizar distribuciones estadísticas, denominadas *mixturas de distribuciones*, que se expresan como superposiciones de distintas distribuciones componentes. La gran utilidad de las mismas se manifiesta cuando "a priori" no es posible establecer a qué grupo pertenece cada observación. Existen datos que pertenecen al conjunto total de la cartera debiéndose estimar los parámetros de cada una de las distribuciones componentes y las proporciones de las mismas.

En el desarrollo que sigue a continuación se considerarán únicamente mixturas de un número finito de componentes ya que son éstas las de mayor utilidad en las aplicaciones prácticas, como muestra el gran número de publicaciones sobre las mismas. Para un estudio más general de las mixturas de distribuciones se puede consultar, por ejemplo, la obra de McLachalan y Basford (1988).

III.1.1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

En términos formales, siguiendo a Everitt y Hand (1981), si $g(x;\theta_i)$ es una función de densidad de probabilidad, o de cuantía para variables aleatorias discretas, que depende de un vector paramétrico θ_i, se denomina *mixtura finita de distribuciones* a la distribución de probabilidad definida mediante la siguiente función de densidad o cuantía:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{c}P(\theta_i)g(x;\theta_i)\ ,\ \sum_{i=1}^{c}P(\theta_i)=1\ ,\ 0\leq P(\theta_i)\leq 1 \qquad \text{(III.1)}$$

En la expresión anterior aparecen parámetros tres tipos diferentes que habrá que estimar:

c: número de componentes de la mixtura

$P(\theta_i)=p_i$, $i=1,2,\ldots,c$: proporciones con que aparece cada una de las componentes y

θ_i, $i=1,2,\ldots,c$: vectores paramétricos de los que dependen las distribuciones componentes.

La estimación de dichos parámetros se complica si la solución no es única, es decir, si se puede presentar más de una mixtura para representar una función de densidad. Para solventar este problema se introduce el concepto de identificabilidad, estudiado por Yakowitz y Spragins (1968) o Teicher (1961,1963), y se considerarán únicamente clases identificables de mixturas:

Una clase D de mixturas de distribuciones se dice que es *identificable* si y solo si para todo $f(x) \in D$ la igualdad entre dos representaciones de la misma, $\sum_{i=1}^{c} p_i \cdot g(x;\theta_i) = \sum_{j=1}^{c'} \hat{p}_j \cdot g(x;\hat{\theta}_j)$ implica que $c=c'$ y que para todo i existe algún j tal que $p_i = \hat{p}_j$ y $\theta_i = \hat{\theta}_j$.

El problema de la no identificabilidad es más frecuente en distribuciones discretas puesto que si existen m categorías, únicamente se pueden establecer $m-1$ ecuaciones independientes y determinar por lo tanto $m-1$ parámetros. La no identificabilidad rara vez se presenta en distribuciones continuas.

Yakowitz y Spragins (1968) demuestran que una condición necesaria y suficiente para que la clase de todas las mixturas finitas de distribuciones del conjunto $\{G(x;\theta); x \in \Re^d, \theta \in \Re^m\}$ sea identificable es que el conjunto sea linealmente independiente en el conjunto de los números reales $\Re$, siendo éste el conjunto de mixturas de distribuciones que se considerará en adelante.

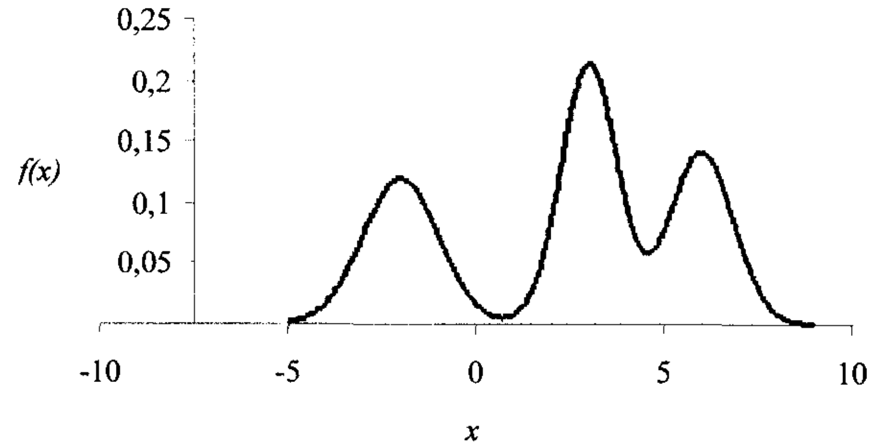
Las mixturas de distribuciones permiten además representar distribuciones de probabilidad multimodales, hecho bastante frecuente en distribuciones muestrales. De hecho, en algunas aplicaciones de las mixturas, el interés se centra en la evidencia de bimodalidad más que en la existencia de diferentes subpoblaciones, como estudian Brazier y otros (1983).

Por ejemplo, una mixtura de tres distribuciones normales con función de densidad:

$$f(x)=0,3\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}+0,4\cdot\frac{1}{0,75\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2(0,75)^2}}+0,3\cdot\frac{1}{0,85\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{2(0,85)^2}}$$

tiene tres modas y se representa gráficamente como:

GRÁFICO III.1. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE UNA MIXTURA DE TRES DISTRIBUCIONES NORMALES

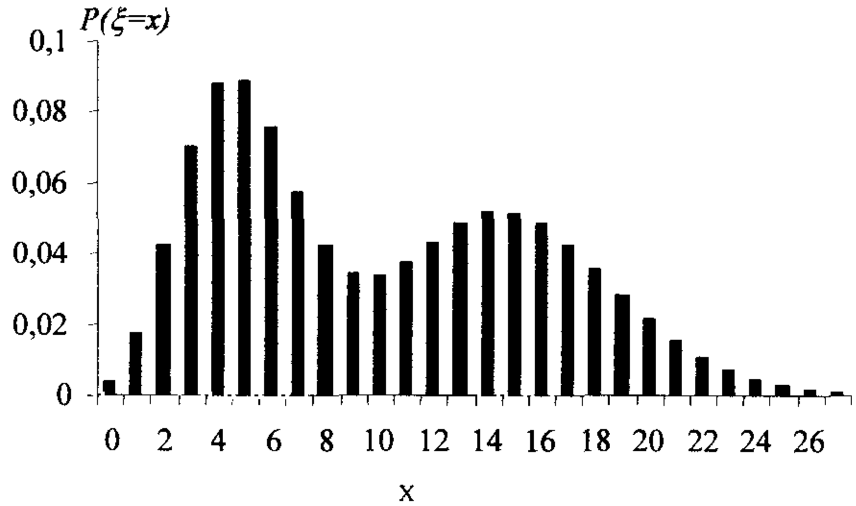


Ocurre lo mismo si se considera una mixtura de distribuciones discretas. Si se define la siguiente función de cuantía compuesta por dos distribuciones de Poisson:

$$P(\xi=x)=0,5\cdot\frac{e^{-5}\cdot 5^{x}}{x!}+0,5\cdot\frac{e^{-15}\cdot 15^{x}}{x!}$$

la representación gráfica de la misma es:

GRÁFICO III.2. FUNCIÓN DE CUANTÍA DE UNA MIXTURA DE DOS DISTRIBUCIONES DE POISSON



III.1.2. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE UNA MIXTURA

Se presentan en este epígrafe, de forma introductoria, métodos generales de estimación de los parámetros de las mixturas de distribuciones, de aplicabilidad general, que más adelante pueden ser utilizados en las mixturas de las distribuciones de interés en el análisis de la siniestralidad.

III.1.2.1. Máxima verosimilitud

El primer método de estimación que se puede aplicar a la mixtura de distribuciones definida en (III.1) es el de máxima verosimilitud, método bastante intuitivo y con propiedades estadísticas deseables: bajo condiciones muy generales, los estimadores obtenidos por este método no solo son consistentes, es decir, convergen al verdadero valor del parámetro, sino que además se distribuyen asintóticamente como una normal.

Dada una muestra aleatoria $X^n \approx \{x_1,\ldots,x_n\}$ de una mixtura de distribuciones, para maximizar la función de verosimilitud $L(X^n;\alpha)$, donde α es el vector de todos los parámetros a estimar, o de forma equivalente la log-verosimilitud, $logL(X^n;\alpha)$, es más sencillo a efectos computacionales definir una nueva función que utiliza multiplicadores de Lagrange λ:

$$\mathrm{L}(X^n;p,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_c) = log\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{c}p_i g_i(x_j;\theta_i)\right)\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{c}p_i - 1\right) \quad \text{(III.2)}$$

con la restricción $\sum_{i=1}^{c} p_i = 1$.

Como la función logaritmo es una transformación monótona, L tomará el valor máximo en el mismo valor paramétrico que la función de verosimilitud L. Derivando la expresión anterior se obtienen las siguientes ecuaciones normales:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_k(x_j;\theta_k)}{f(x_j)} - \lambda = 0 \text{ y } \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} p_k \frac{\dfrac{\partial g_k(x_j;\theta_k)}{\partial \theta_{ik}}}{f(x_j)} = 0$$

El multiplicador de Lagrange λ se puede obtener multiplicando la primera de las ecuaciones por p_k y sumando sobre k para obtener $n\text{-}\lambda=0$

La probabilidad de que un valor dado x_j proceda de la componente k-ésima, utilizando el teorema de Bayes, es:

$$P(k/x_j) = \frac{p_k g_k(x_j;\theta)}{f(x_j)} \qquad \text{(III.3)}$$

Por tanto, si se multiplica la primera de las ecuaciones normales por p_k, se puede expresar la estimación de máxima verosimilitud $\hat{p}_k$ de la siguiente forma:

$$\hat{p}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(k/x_j) \qquad \text{(III.4)}$$

Por otra parte, si se utiliza el resultado proporcionado por el teorema de Bayes (probabilidad de que x_j proceda de la componente k-ésima),las derivadas de L respecto los parámetros θ_{ik} (segunda de las ecuaciones normales) se pueden expresar como:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} P(k / x_j) \frac{\partial \log g_k(x_j;\theta_k)}{\partial \theta_{ik}} = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

Es decir, las ecuaciones de máxima verosimilitud para estimar los parámetros θ son medias ponderadas de las ecuaciones de máxima verosimilitud que surgen a partir de cada componente por separado. Los pesos o ponderaciones son las probabilidades de que los elementos x_j pertenezcan a cada clase.

Las ecuaciones (III.3), (III.4) y (III.5) constituyen la base para calcular una solución iterativa de los parámetros a estimar, que más adelante se desarrollará mediante el algoritmo EM.

III.1.2.2. Inversión y minimización del error

Los métodos basados en la inversión y minimización del error comienzan estableciendo un sistema de ecuaciones:

$$T_j(\alpha) = \phi_j(X^n) \qquad j=1,\ldots,m$$

en el que α es el vector paramétrico de la mixtura, $T_j(\alpha)$ el valor teórico de un estadístico poblacional evaluado en α y $\phi_j(X^n)$ el valor empírico de dicho estadístico evaluado en los valores muestrales $X^n = \{x_1,...,x_n\}$. Por ejemplo, en una mixtura de dos componentes normales $\alpha = \{p, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2\}$. Si se considera la media poblacional, a la que se denominará T_1 se obtiene $T_1(\alpha) = E(x) = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ y $\phi_1(X^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$.

El sistema anterior se puede expresar de forma matricial como:

$$T(\alpha) = \phi(X^n) \qquad \text{(III.6)}$$

En algunos casos es posible encontrar un valor m y un conjunto de funciones T_j de tal forma que la igualdad se puede invertir obteniéndose el valor $\alpha = T^{-1}[\phi(X^n)]$ como estimación de α. En el caso más general, cuando esto no es posible, se define una función de error:

$$e(\alpha) = e[T(\alpha) - \phi(X^n)] \qquad \text{(III.7)}$$

que mide la diferencia entre los valores observados ϕ y los pronosticados T, para un valor particular de α, y se estimará α como el valor que minimiza el error.

Para definir la función e se pueden usar diferentes funciones de sumas de cuadrados tales como las definidas por los intervalos de Kabir (1968), los intervalos de Bartholomew (1959) o distintas funciones cuadráticas de error propuestas por Bartlett y MacDonald (1968) o Binder (1978)

Se debe destacar el método de los momentos como uno de los métodos basados en la inversión y minimización del error. En general este método es más sencillo a efectos computacionales que el de máxima verosimilitud.

La parte izquierda de la expresión (III.6) se puede poner de la forma $\int (x-\mu)^j f(x)dx$, donde $\mu = E(x)$. La integral se resuelve analíticamente para dar una función de los parámetros de *f(x)*.

La parte derecha de (III.6) es una función de los valores muestrales, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^j$, es decir, un estimador muestral de la parte izquierda.

El método tiene la ventaja de que no ocurren singularidades, al contrario que en la aproximación de máxima verosimilitud donde la función de verosimilitud puede no estar acotada. Como desventaja del método, común al método de máxima verosimilitud en el que se intentan encontrar valores estacionarios de la verosimilitud, es la posibilidad de que existan soluciones múltiples. En este caso se pueden comparar los momentos de mayor orden para todas las soluciones obtenidas y seleccionar, basándose en ello, la que mejor se ajuste. Hawkins (1972) propone comparar cada solución con los datos brutos agrupados dados por los tests χ^2. Observar que estos métodos de elección entre soluciones potenciales han trasladado la aproximación de un método de inversión a un método de minimización del error, utilizando la expresión (III.7).

En general, los estimadores del método de los momentos son ineficientes aunque se puede mejorar la eficiencia del método usando otro tipo de momentos, no necesariamente respecto de la media, como se puede hacer en las mixturas consideradas en el análisis de la siniestralidad, en el que se incluyen referencias para estimar los parámetros mediante el método de los momentos. Por ejemplo, Tallis y Light (1968) utilizan momentos fraccionales teóricos y empíricos: $\int |x|^{r_j} dF(x,\alpha)$ y $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{r_j}$, donde los r_j no son necesariamente enteros.

III.1.2.3. Otros métodos de estimación

Se puede estimar el conjunto de parámetros que aparecen en la mixtura utilizando métodos diferentes a los expuestos anteriormente. Por ejemplo, mediante aproximación bayesiana se estima la función de densidad de probabilidad "a posteriori" del vector paramétrico α a través del teorema de Bayes, de forma secuencial:

$$f(\alpha / X^n) = \frac{f(x_n;\alpha) \cdot f(\alpha / X^{n-1})}{\int f(x_n;\alpha) \cdot f(\alpha / X^{n-1}) \cdot d\alpha}$$

La mayor dificultad que presenta este método es la forma de la expresión anterior, que se complica en gran medida cuando el tamaño muestral crece. La expresión se simplificaría si existieran estadísticos suficientes para estimar los parámetros desconocidos. En general, como comentan Everitt y Hand (1981), las mixturas de distribuciones no admiten estadísticos suficientes no pudiéndose factorizar por tanto las funciones de verosimilitud.

Se puede reemplazar el método de Bayes por aproximaciones más sencillas. Por ejemplo, Titterington (1976) supone que se puede determinar una función de densidad de probabilidad "a priori" a partir de las observaciones procedentes de componentes conocidas, obteniendo las estimaciones iniciales de los parámetros de las componentes a partir de la misma. Estas estimaciones son actualizadas utilizando observaciones de la distribución completa.

Otros métodos que se pueden utilizar para estimar los parámetros de las mixturas son, por ejemplo, el de Boes (1966) que supone únicamente las proporciones de mixtura desconocidas, Cox (1966) quien sugiere una aproximación por medio de métodos gráficos y Bryant y Williamson (1978) que consideran una aproximación por máxima verosimilitud diferente a las clásicas.

Es importante también la estimación del parámetro c que representa el número de componentes que aparecen en la mixtura. La decisión sobre el número de componentes es un problema difícil, y no existen muchos trabajos al respecto. Los trabajos existentes se pueden agrupar en dos tipos: técnicas gráficas informales y test de hipótesis formales.

Dentro de la primera clase, la aproximación más obvia es el estudio del histograma muestral. El histograma puede no dar resultados correctos porque la unimodalidad de la distribución no implica la inexistencia de una mixtura. Además, las distribuciones procedentes de cualquier distribución pueden ser multimodales sin que por ello implique que sea una mixtura, aunque puede ser un primer paso para conocer la forma y el número de componentes de la distribución que se desea estimar. Una vez fijado el número de componentes, en una segunda etapa se realiza el análisis de estimación.

En la clase de los test de hipótesis formales, se pueden intentar varios valores de c y comparar los ajustes de las estimaciones resultantes usando razones de verosimilitud o valores χ^2, por ejemplo.

III.1.3. ALGORITMO EM

El algoritmo EM, desarrollado por Dempster, Laird y Rubin (1977), representa una fórmula de recurrencia para resolver las ecuaciones de verosimilitud definidas en (III.4) y (III.5). Los autores utilizan el algoritmo en la estimación por máxima verosimilitud en problemas con datos faltantes o incompletos, aunque se puede aplicar también al caso de mixturas de distribuciones, mediante una adecuada formulación de los datos disponibles.

Si $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ es el vector de observaciones muestrales que se considera como datos incompletos y se definen las variables indicador $z_j=(z_{1j},\ldots,z_{cj})$ como:

$$z_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in G_i \text{ (componente } i-\text{ésima)} \\ 0 & \text{si } x_j \notin G_i \end{cases},$$

la versión completa de $\boldsymbol{x}$ se representará mediante el vector $y=((x_j,z_j);\ j=1,\ldots,n)$. Es decir, las observaciones muestrales y las variables que indican a qué componente pertenecen las mismas.

El conjunto $\Psi(\boldsymbol{x})$ de todos los posibles valores de $\boldsymbol{y}$ esta formado por k^c valores que se corresponden con todas las posibles elecciones de $z_1,\ldots z_n$, denotando a la función de verosimilitud asociada a $\boldsymbol{y}$ por $g(y/\Theta)$.

El algoritmo EM genera, para una aproximación inicial de los parámetros $\Theta^{(0)}$, una sucesión de estimadores $\{\Theta^{(m)}\}$ obtenidos en sucesivas iteraciones que constan de dos pasos:

Paso E: Calcular la esperanza:

$$E(\log g(y/\Theta)/x, \Theta^{(m)}) = Q(\Theta, \Theta^{(m)})$$

Paso M: Obtener $\Theta^{(m+1)}$ que maximice $Q(\Theta, \Theta^{(m)})$.

De forma más sencilla, adaptando el algoritmo al caso de mixturas de distribuciones, la estimación se realiza de la siguiente forma:

INICIALIZACIÓN: Considerar como valores iniciales de los parámetros $\Theta^{(0)} = (p_1^{(0)}, \ldots, p_c^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \ldots, \theta_c^{(0)})$

ITERACIÓN: Dadas las estimaciones $\Theta^{(m)} = (p_1^{(m)}, \ldots, p_c^{(m)}, \theta_1^{(m)}, \ldots, \theta_c^{(m)})$, cada iteración consta de dos pasos:

PASO E: Calcular la probabilidad "a posteriori" de que cada observación pertenezca a las distintas componentes:

$$P^{(m)}(k / x_j) = \frac{p_k^{(m)} g_k(x_j; \theta_k^{(m)})}{f(x_j; \Theta^{(m)})} \qquad j=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,c$$

PASO M: Utilizando las probabilidades obtenidas en el PASO E, obtener las estimaciones $\Theta^{(m+1)} = (p_1^{(m+1)},\ldots,p_c^{(m+1)},\theta_1^{(m+1)},\ldots,\theta_c^{(m+1)})$ de la siguiente forma:

$$p_k^{(m+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(m)}(k/x_j)$$

y los parámetros θ_{ik} como solución de las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)\frac{\partial \log g_k(x_j;\theta_k^{(m)})}{\partial \theta_{ik}^{(m)}} = 0$$

Repetir la iteración con las nuevas estimaciones de los parámetros.

El primer paso de la iteración consiste, por tanto, en estimar la probabilidad de que las observaciones pertenezcan a cada componente y el segundo es equivalente a c problemas de estimación de cada una de las componentes y de las proporciones de la mixtura, utilizando las estimaciones del primer paso.

Es importante estudiar las propiedades de convergencia del algoritmo (Wu (1983)). La convergencia se da siempre aunque es bastante lenta. La log-verosimilitud para los valores muestrales, considerados como datos incompletos, nunca decrece después de cada iteración verificándose por tanto:

$$\mathrm{L}(\Theta^{(k+1)}) \geq \mathrm{L}(\Theta^{(k)}),\ \forall k$$

lo cual implica que $L(\Theta^{(k)})$ converge a alguna función L* para una sucesión acotada de estimadores. Si además $Q(\Theta,\Psi)$ es continua en ambas variables, lo que verifican (como demuestra Wu (1983)) densidades componentes que pertenecen a la familia exponencial, L* será un máximo local de la log-verosimilitud, demostrando que la sucesión no cae en un punto de silla.

Además si $\left\|\Theta^{(k+1)}-\Theta^{(k)}\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ y el conjunto de máximos locales de L es discreto, $\{\Theta^{(k)}\}_k$ converge a un máximo local que será el estimador que se considerará.

Respecto a los valores iniciales que se han de considerar comentar que éstos pueden ser elegidos de diferentes formas. Una de ellas es estimar primero utilizando el método de los momentos y tomar como valores iniciales del algoritmo EM las estimaciones proporcionadas por el anterior. Se puede también hacer un estudio de los datos disponibles mediante métodos gráficos que proporcionen algún tipo de información sobre los parámetros de la mixtura.

Existen además otros métodos numéricos para maximizar la función de verosimilitud. Entre ellos, los más importantes son el método de Newton-Raphson (NR) cuyo paso iterativo se define como:

$$\Theta^{(m+1)} = \Theta^{(m)} - \alpha_m [D^2\mathrm{L}(\Theta^{(m)})]^{-1} D\,\mathrm{L}(\Theta^{(m)}),\ m=0,1,2,\ldots$$

y el método Scoring definido como:

$$\Theta^{(m+1)} = \Theta^{(m)} + \alpha_m [I(\Theta^{(m)})]^{-1} D\, \mathrm{L}(\Theta^{(m)}),\ m=0,1,2,\ldots$$

En ambos casos α_m, normalmente $\alpha_m = 1$, es una constante positiva que se incluye en la iteración para proporcionar un mayor crecimiento en la convergencia. $I(\Theta)$ es la matriz de información esperada de Fisher que proporciona una medida de la información que contiene una muestra de una mixtura de distribuciones y D y D^2 las diferenciales respecto a Θ de primer y segundo orden respectivamente. Si un experimento que consta de n observaciones independientes de una mixtura de distribuciones, la matriz de información de Fisher para cada una de ellas se define como $nI(\Theta)=E[D\mathrm{L}(\Theta)D\mathrm{L}(\Theta)^T]$.

El algoritmo EM es más sencillo de implementar y verifica la propiedad de monotonicidad a la que nos hemos referido anteriormente. El algoritmo de Newton-Raphson y el método de Scoring son más complicados, principalmente por la inversión de la matriz que en ellos aparece, además de no verificar la propiedad de monotonicidad por lo que no siempre convergen, aunque si lo hacen la convergencia resulta más rápida. Es por ello por lo que nos inclinamos hacia la utilización del algoritmo EM para estimar los parámetros de la mixtura.

III.1.4. BONDAD DE AJUSTE

Una vez estimados los parámetros de la mixtura se hace necesario verificar si la muestra procede efectivamente de la mixtura propuesta. Para ello se efectúa alguno de los contrastes clásicos no paramétricos de la bondad de ajuste, descritos por ejemplo por Ruiz-Maya Pérez y Martín Pliego (1999), que parten de la hipótesis nula (H_0) de que las observaciones constituyen una muestra aleatoria simple de la distribución de probabilidad considerada.

En primer lugar se puede aplicar el Test χ^2 que consiste en comparar las frecuencias empíricas y las observadas utilizando el estadístico de la bondad de ajuste, propuesto por Pearson:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$$

donde r es el número de clases (valores diferentes de la variable o intervalos), n_i son las frecuencias empíricas de cada valor y $E_i=np_i$ las teóricas proporcionadas por el modelo (p_i es la probabilidad asignada por el modelo teórico a un valor concreto).

Dicho estadístico sigue una distribución de probabilidad χ^2 con r-k-1 grados de libertad, siendo k el número de parámetros que se han estimado en el modelo. Valores elevados de χ^2 reflejan diferencias relevantes entre las frecuencias empíricas y las observadas, por lo que deberá rechazarse la hipótesis nula de que la muestra procede de una población con la distribución de probabilidad considerada. La región crítica del test es por tanto de la forma $\chi^2 \geq K$ obteniéndose K a partir de las tablas de la distribución χ^2 con *r-k-1* grados de libertad, para un nivel de significación dado α, como el valor que verifica:

$$P(\chi^2 \geq K / H_0) = \alpha$$

Es importante tener en cuenta que la distribución del estadístico χ^2 es asintótica y se puede utilizar como regla de aproximación aceptable siempre que las frecuencias esperadas como mínimo cinco $(E_i \geq 5)$. Si esto no ocurre se deben reagrupar las clases o categorías hasta que se cumpla la regla, lo que implica una disminución de los grados de libertad que hará cambiar la región crítica.

El test G^2 de la razón de verosimilitud para la bondad de ajuste parte del test de razón de verosimilitud que, para la distribución multinomial, se asigna a la muestra agrupada en clases o categorías excluyentes:

$$\lambda(X^n) = \frac{L(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_r^0)}{L(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_r)}$$

donde p_i^0 representa la probabilidad de la clase *i*-ésima de acuerdo con la hipótesis nula H_0 y $\hat{p}_i = \frac{n_i}{n}$ la probabilidad empírica de dicha clase.

El estadístico $G^2 = -2\lambda(X^n) = -2\left[nLn(n) + \sum_{i=1}^{r} n_i Ln\left(\frac{p_i^0}{n_i}\right)\right]$ sigue una distribución asintótica de probabilidad χ^2 con *r-1* grados de libertad, siendo la región crítica del test de la forma $G^2 \geq K$ donde el valor K se obtiene a partir de las tablas de la distribución χ^2 con r-1 grados de libertad, para un nivel de significación dado α, de forma análoga al caso anterior.

Por último, el test de Kolmogorov-Smirnov consiste en comparar las funciones de distribución empírica, $F_n(x)$, y teórica, $F(x)$ (suponiendo que la muestra procede de una población con distribución de probabilidad continua), definiendo el estadístico de Kolmogorov-Smirnov:

$$D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|$$

Para verificar la hipótesis nula con un nivel de significación α se utiliza la región crítica dada $P(D_n \geq K / H_0) = \alpha$, donde los valores críticos K para diferentes niveles de significación se pueden recoger de la tabla reproducida por Miller (1956).

Aunque el Test de Kolmogorv-Smirnov es de sencilla aplicación únicamente es válido para muestras procedentes de distribuciones continuas. Es por ello por lo que para estudiar la bondad de los ajustes realizados en el presente trabajo se utilizarán los test χ^2 y G^2 puesto que ambos son aplicables tanto a distribuciones continuas como a distribuciones discretas.

III.2. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE LA SINIESTRALIDAD

III.2.1. ESTIMACIÓN DEL NÚMERO DE SINIESTROS

En el capítulo anterior se ha considerado la distribución de Poisson como una de las distribuciones fundamentales para modelar el número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas estudiada. Como generalización a la misma se propone **un nuevo enfoque basado en una mixtura finita de distribuciones de Poisson** cuya función de cuantía viene dada por:

$$P_n(t) = P(\upsilon = n) = \sum_{i=1}^{c} p_i \frac{\lambda_i^n}{n!} e^{-\lambda_i} \qquad \text{(III.8)}$$

Se deben estimar *2c* parámetros, $p_1,\ldots,p_c,\lambda_1,\ldots,\lambda_c$, donde p_i es la proporción con que aparece la *i*-ésima distribución de Poisson en la mixtura y λ_i la media de la misma. La estimación de dichos parámetros mediante el método de los momentos se obtiene resolviendo un sistema de *2c* ecuaciones no lineales obtenido al igualar los primeros *2c momentos factoriales* muestrales, como hacen por ejemplo Johnson y Kotz (1969), que se definen como:

$$V_0 = 1$$

$$V_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (x_i - 1) \cdot \ldots \cdot (x_i - r + 1), \; r=1,2,3,\ldots,2c\text{-}1$$

a los momentos poblacionales respecto al origen, de los cuales los anteriores son estimadores insesgados:

$$\upsilon_r = E(V_r) = \sum_{i=1}^{c} p_i \cdot \lambda_i^r \text{, } r=0,1,...,2c\text{-}1$$

A modo de ejemplo veamos cómo se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones en el caso de tres componentes de Poisson:

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ & p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 = V_1 \\ & p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + p_3\lambda_3^2 = V_2 \\ & p_1\lambda_1^3 + p_2\lambda_2^3 + p_3\lambda_3^3 = V_3 \\ & p_1\lambda_1^4 + p_2\lambda_2^4 + p_3\lambda_3^4 = V_4 \\ & p_1\lambda_1^5 + p_2\lambda_2^5 + p_3\lambda_3^5 = V_5 \end{aligned} \tag{III.9}$$

La solución del sistema anterior se puede realizar en dos etapas, tal como se muestra en Blischke (1964), quien estima los parámetros de mixturas de distribuciones binomiales en las que resulta el mismo sistema de ecuaciones definido en (III.9). En la primera, la solución de un polinomio de igual grado que el número de componentes proporciona estimaciones de las medias de las distintas distribuciones de Poisson. Es decir, λ_1, λ_2 y λ_3 son las soluciones del polinomio de grado tres:

$$x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0$$

cuyos coeficientes son la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & V_1 & V_2 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_3 \\ -V_4 \\ -V_5 \end{pmatrix}$$

En la segunda etapa, las estimaciones de las proporciones de la mixtura se calculan sin más que resolver las c primeras ecuaciones del sistema (III.9), utilizando para ello las estimaciones obtenidas en la primera etapa.

El sistema de ecuaciones y su resolución utilizando un polinomio de igual grado al número de componentes se complica si aumenta el número de componentes. Es por ello preferible, como se ha comentado, estimar los parámetros de la mixtura mediante el método de máxima verosimilitud. En este caso concreto el logaritmo de la función de verosimilitud que habrá que maximizar es de la forma:

$$\mathrm{L}(X^n; p_1,\dots,p_c,\lambda_1,\dots,\lambda_c) = \sum_{j=1}^{n} log\left(\sum_{i=1}^{c} p_i \frac{\lambda_i^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda_i}\right)$$

La forma más sencilla para encontrar el máximo de la anterior función es la aplicación del algoritmo EM que en este caso se aplica tal y como se explica a continuación.

Se parte de los valores iniciales de los parámetros, $\Theta^{(0)} = (p_1^{(0)},..., p_c^{(0)}, \lambda_1^{(0)},..., \lambda_c^{(0)})$. En cada iteración, a partir de las estimaciones $\Theta^{(m)} = (p_1^{(m)},..., p_c^{(m)}, \lambda_1^{(m)},..., \lambda_c^{(m)})$ se realizan dos pasos:

En primer lugar, en el PASO E, se calcula la probabilidad "a posteriori" de que cada observación pertenezca a las distintas componentes:

$$P^{(m)}(k / x_j) = \frac{p_k^{(m)} \dfrac{(\lambda_k^{(m)})^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda_k^{(m)}}}{\sum_{i=1}^{c} p_i^{(m)} \dfrac{(\lambda_i^{(m)})^{x_j}}{x_j!} e^{-\lambda_i^{(m)}}} \qquad j=1,...,n, \; k=1,...,c$$

Por último, en el PASO M, se estiman los distintos parámetros de la mixtura, las proporciones con que aparece cada una de las componentes y los parámetros de dichas componentes:

$$p_k^{(m+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P^{(m)}(k / x_j), \; k=1,...,c$$

$$\lambda_k^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j P(k / x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(k / x_j)}, \; k=1,...,c$$

Se repite la iteración utilizando las últimas estimaciones de los parámetros.

Observar que las estimaciones de las medias de las distintas componentes son medias ponderadas de las observaciones muestrales en las cuales la ponderación es la probabilidad de que dicha observación pertenezca a la k-ésima componente.

III.2.2. ANÁLISIS DEL COSTE DE LOS SINIESTROS

Respecto al coste de los siniestros, comentar que la distribución exponencial, como caso particular de la distribución Gamma, es una de las que mejor se ajustan, en el caso que se analiza, a la distribución empírica de la cuantía de los siniestros. De nuevo, como generalización de la misma, **se propone una mixtura de *c* distribuciones exponenciales** definida mediante la siguiente función de densidad:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{c} p_i \cdot h_i \cdot e^{-h_i x} = \sum_{i=1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\mu_i} \cdot e^{-\frac{1}{\mu_i}x}, \ x \geq 0 \qquad \text{(III.10)}$$

La estimación de los parámetros de dicha mixtura, por el método de los momentos, se hace de la misma forma que en el caso anterior, dado que el sistema de ecuaciones resultante es el mismo. En este caso se igualan las funciones:

$$V_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{\Gamma(r+1)} = \frac{a_r}{\Gamma(r+1)}, \ r=0,1,\dots,2c-1$$

donde a_r es el momento de orden r respecto al origen, a los momentos poblacionales, $\upsilon_k = E(V_k) = \sum_{i=1}^{c} p_i \cdot \mu_i^k$, de los cuales los primeros son estimadores insesgados.

También el algoritmo EM se aplica de manera análoga, obteniendo las diferentes estimaciones de p_k y μ_k mediante las mismas expresiones que en el caso de mixturas de distribuciones de Poisson. Únicamente en el PASO E cambia la expresión que permite estimar las probabilidades "a posteriori" de que las observaciones pertenezcan a las distintas componentes, puesto que las funciones de densidad componentes son diferentes. En este caso, dichas probabilidades se calculan utilizando las funciones de densidad como:

$$p^{(m)}(k/x_j)=\frac{p_k^{(m)}\dfrac{1}{\mu_k^{(m)}}e^{-\frac{1}{\mu_k^{(m)}}x_j}}{\sum_{i=1}^{c}p_i^{(m)}\dfrac{1}{\mu_i^{(m)}}e^{-\frac{1}{\mu_i^{(m)}}x_j}}$$

Si dicha mixtura no resulta adecuada para representar el coste de los siniestros se probará que una **mixtura de distribuciones exponenciales y normales** con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{c_1}p_i\cdot h_i\cdot e^{-h_ix}+\sum_{i=c_1+1}^{c}p_i\cdot\dfrac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & x>0\\ \sum_{i=c_1+1}^{c}p_i\cdot\dfrac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & x\leq 0\end{cases} \qquad \text{(III.11)}$$

es válida para representar la variable coste.

La estimación de los parámetros por el método de los momentos no resulta sencilla dada la complejidad de la función de densidad. Por máxima verosimilitud se ha de maximizar la función definida en (III.2), considerando en este caso que las distribuciones componentes, g_i, son distribuciones normales y exponenciales. Mediante la aplicación del algoritmo EM la estimación se realiza como se explica seguidamente.

$$L(X^n;p_1,\ldots,p_c,h_1,\ldots,h_{c_1},\mu_{c_1+1},\ldots,\mu_c,\sigma_{c_1+1},\ldots,\sigma_c)=$$
$$=\sum_{i=1}^{c_1}p_i\cdot h_i\cdot e^{-h_ix}+\sum_{i=c_1+1}^{c}p_i\cdot\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

que mediante el algoritmo EM resulta como sigue.

Se parte, al igual que en el caso anterior, de valores iniciales de los parámetros $\Theta^{(0)} = (p_1^{(0)},\dots,p_c^{(0)},h_1^{(0)},\dots,h_c^{(0)},\mu_{c_1+1}^{(0)},\dots,\mu_c^{(0)},\sigma_{c_1+1}^{(0)},\dots,\sigma_c^{(0)})$ y a partir de las estimaciones $\Theta^{(m)}$ obtenidas después de cada iteración, se repite la misma en dos pasos.

En el PASO E se calculan las probabilidades "a posteriori". Se debe diferenciar entre componentes con distribución de probabilidad normal y componentes con distribución de probabilidad exponencial resultando:

$$P^{(m)}(k/x_j) = \frac{p_i \cdot h_i \cdot e^{-h_i x}}{\sum_{i=1}^{c_1} p_i \cdot h_i \cdot e^{-h_i x} + \sum_{i=c_1+1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}}, \quad \begin{array}{l} j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,c_1 \end{array} \text{ y}$$

$$P^{(m)}(k/x_j) = \frac{p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}}{\sum_{i=1}^{c_1} p_i \cdot h_i \cdot e^{-h_i x} + \sum_{i=c_1+1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}}, \quad \begin{array}{l} j=1,\dots,n \\ k=c_1+1,\dots,c \end{array}$$

En el PASO M se estiman los diferentes parámetros de la mixtura:

$$p_k^{(m+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(m)}(k/x_j),\ k=1,\dots,c$$

$$h_k^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)}{\sum_{j=1}^{n} x_j P(k/x_j)},\ k=1,\dots,c_1$$

$$\mu_k^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j P(k/x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)}, \quad k = c_1 + 1, \ldots, c \text{ y}$$

$$\sigma_k^{(m+1)} = +\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 P(k/x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)} - (\mu_k^{(m+1)})^2}, \quad k = c_1 + 1, \ldots, c$$

Repetir la iteración utilizando las últimas estimaciones de los parámetros.

Observar que, al igual que en el caso anterior, las estimaciones de los parámetros resultan medias ponderadas en las que la ponderación es la probabilidad de pertenecer a la componente que se está estimando.

III.2.3. DISTRIBUCIÓN DE LA SINIESTRALIDAD TOTAL

Como alternativa a la clásica aproximación normal definida mediante el teorema central del límite, y de aplicación más sencilla que otras aproximaciones clásicas, **se pueden utilizar mixturas de distribuciones normales univariantes** para aproximar la distribución de la siniestralidad o daño total que acontece en la entidad aseguradora. Dichas mixturas se definen mediante la función de densidad:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \qquad \text{(III.12)}$$

El número de parámetros a estimar en este caso es *3c*: *c* proporciones de la mixtura ($p_1, p_2, ..., p_c$), *c* medias de las distribuciones componentes ($\mu_1, \mu_2, ..., \mu_c$) y *c* desviaciones típicas ($\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_c$).

La estimación de los parámetros mediante el método de los momentos requiere plantear un sistema de *3c* ecuaciones, obtenidas al igualar los correspondientes momentos muestrales respecto a la media ($V_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$) a los momentos teóricos ($\upsilon_r = \int (x-\mu)^r \cdot f(x) \cdot dx$, donde μ es la esperanza de la mixtura).

En el caso en que existen únicamente dos componentes, mediante un álgebra bastante complicada, Cohen (1967) demuestra que el sistema de seis ecuaciones (cinco si se considera $p_2 = 1 - p_1$):

$$p \cdot \delta_1 + (1-p) \cdot \delta_2 = 0$$

$$p\cdot(\sigma_1^2+\delta_1^2)+(1-p)\cdot(\sigma_2^2+\delta_2^2)=V_2$$

$$p\cdot(3\delta_1\sigma_1^2+\delta_1^3)+(1-p)\cdot(3\delta_2\sigma_2^2+\delta_2^3)=V_3$$

$$p\cdot(3\sigma_1^4+6\sigma_1^2\delta_1^2+\delta_1^4)+(1-p)\cdot(3\sigma_2^4+6\sigma_2^2\delta_2^2+\delta_2^4)=V_4$$

$$p\cdot(15\sigma_1^4\delta_1+10\sigma_1^2\delta_1^3+\delta_1^5)+(1-p)\cdot(15\sigma_2^4\delta_2+10\sigma_2^2\delta_2^3+\delta_2^5)=V_5$$

siendo $\delta_k=(\mu_k-\mu),\ k=1,2$

se puede reducir a un polinomio de grado nueve, $\sum_{i=0}^{9}a_iu^i=0$, cuyos coeficientes son:

$a_9=24$ $\qquad$ $a_8=0$

$a_7=84k_4,$ $\qquad$ $a_6=36V_3^2,$

$a_5=90k_4^2+72V_3k_5,$ $\qquad$ $a_4=444V_3^2k_4-18k_5^2,$

$a_3=288V_3^4-108V_3k_4k_5+27k_4^3,$ $\qquad$ $a_2=-(63V_3^2k_4^2+72V_3^3k_5)$ y

$a_1=-96V_3^4k_4$ y $a_0=-24V_3^6$

y donde k_4 y k_5 vienen dados por $k_4=V_4-3V_2^2$ y $k_5=V_5-10V_3V_2$

Si existe una solución del sistema anterior de cinco ecuaciones, esta se puede deducir a partir de una raíz real negativa $\hat{u}$ del polinomio de grado 9. Las estimaciones de las medias de ambas componentes (δ_1 y δ_2) son las raíces de la ecuación $\delta^2 - \frac{\hat{\omega}}{\hat{u}}\delta + \hat{u} = 0$, con $\hat{\omega} = \frac{-8V_3\hat{u}^3 + 3k_5\hat{u}^2 + 6V_3k_4\hat{u} + 2V_3^3}{2\hat{u}^3 + 3k_4\hat{u} + 4V_3^2}$.

A partir de dichas medias se obtienen las estimaciones de los cinco parámetros de la mixtura de la siguiente forma:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x} + \hat{\delta}_1$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{x} + \hat{\delta}_2$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{3}\hat{\delta}_1\left(\frac{2\hat{\omega}}{\hat{u}} - \frac{V_3}{\hat{u}}\right) + V_2 - \hat{\delta}_1^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{3}\hat{\delta}_2\left(\frac{2\hat{\omega}}{\hat{u}} - \frac{V_3}{\hat{u}}\right) + V_2 - \hat{\delta}_2^2$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{\delta}_2}{\hat{\delta}_2 - \hat{\delta}_1}$$

Como se observa en el desarrollo anterior, las operaciones son bastante complicadas. Además, si se consideran mixturas de más de dos componentes son necesarios momentos de orden superior a ocho y el sistema de ecuaciones resultante es bastante difícil de resolver con una precisión aceptable. Es por ello preferible utilizar el método de máxima verosimilitud que maximiza el logaritmo de la función de verosimilitud:

$$L(X^n; \mu_1,\dots,\mu_c,\sigma_1,\dots,\sigma_c) = \sum_{j=1}^{n} log\left(\sum_{i=1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_j-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}\right)$$

de forma sencilla mediante el algoritmo EM al igual que en los epígrafes anteriores. Las fórmulas que se aplican en la estimación del coste total son parte de las utilizadas en el coste de los siniestros, dado que la distribución normal se puede incluir en la mixtura que modela el coste:

Partiendo de los valores iniciales de los parámetros $\Theta^{(0)} = (p_1^{(0)},\dots,p_c^{(0)},\mu_1^{(0)},\dots,\mu_c^{(0)},\sigma_1^{(0)},\dots,\sigma_c^{(0)})$, cada iteración, a partir de estimaciones de los parámetros ($\Theta^{(m)}$), se realiza en dos etapas. En el PASO E de la iteración se calculan las probabilidades "a posteriori" de que cada observación pertenezca a las distintas componentes:

$$P^{(m)}(k/x_j) = \frac{p_k^{(m)} \cdot \frac{1}{\sigma_k^{(m)}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_j-\mu_k^{(m)})^2}{2(\sigma_k^{(m)})^2}}}{\sum_{i=1}^{c} p_i^{(m)} \cdot \frac{1}{\sigma_i^{(m)}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_j-\mu_i^{(m)})^2}{2(\sigma_i^{(m)})^2}}} \qquad j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,c$$

y en el PASO M se estiman los distintos parámetros de la mixtura:

$$p_k^{(m+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(m)}(k/x_j),\ k=1,\dots,c$$

$$\mu_k^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j P(k/x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)},\ k=1,\dots,c \text{ y}$$

$$\sigma_k^{(m+1)} = +\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 P(k/x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(k/x_j)} - (\mu_k^{(m+1)})^2} \ , \ k=1,\ldots,c$$

Se repite la iteración utilizando siempre las últimas estimaciones de los parámetros.

El planteamiento teórico desarrollado en este epígrafe para algunas mixturas de distribuciones concretas se aplica a continuación a una cartera real. El concepto de dichas distribuciones es bastante sencillo e intuitivo y la gran dificultad de las mismas se encuentra en la estimación de los parámetros que puede simplificarse gracias a la aplicación del algoritmo desarrollado por Dempster y otros (1977).

A pesar de la complejidad del planteamiento inicial del algoritmo EM para estimar parámetros en problemas con datos faltantes, su aplicación a efectos prácticos en el caso de mixturas de distribuciones resulta operativa y sencilla. Se demuestra con esta aplicación cómo las distribuciones propuestas en todos los casos son válidas para representar al número, coste y cuantía total de los siniestros que tienen lugar en una cartera de seguros.

III.2.4. ESTUDIO DE UN CASO

Para ilustrar la validez de las distribuciones teóricas explicadas en los epígrafes precedentes se analiza la siniestralidad en una cartera de seguros multirriesgo hogar, utilizando una base de datos cedida por una importante Entidad Financiera y Aseguradora. Se aproximan las distintas variables que modelan la siniestralidad (número de siniestros, cuantía de los mismos y coste total) por medio de alguna de las distribuciones explicadas en el capítulo anterior, la que mejor se ajuste, y como alternativa a las mismas se buscan mixturas de distribuciones que mejoren esta aproximación.

Los datos originales de la Entidad Aseguradora, correspondientes como se ha dicho a una cartera de seguros multirriesgo hogar, vienen desagregados en tres ficheros con información referente a los siniestros: cuantía, fechas en que han tenido lugar, así como las fechas de firma del contrato y última renovación de la póliza, con un total de 18.652 siniestros en el periodo comprendido entre 1990 y 1994.

Con esta información es posible conocer cuanto tiempo de vida tienen las pólizas y el tiempo transcurrido desde la firma del contrato hasta que ha tenido lugar el siniestro. Para tener información referida al máximo horizonte temporal posible, en un primer análisis de las pólizas se observa que la mayoría (el 69% del total) tienen un tiempo de vida superior a dos años. Algunas de ellas (3%) no han sido renovadas después del primer año y el resto tienen una vigencia inferior a dos años.

En el análisis realizado nos centramos en el momento en que ha ocurrido el siniestro respecto a la fecha de origen de la póliza (tiempo actuarial) durante un periodo de observación de dos años que es el que máxima información proporciona, limitándonos a un total de 10.052 siniestros.

Se observa día a día el número de siniestros ocurridos, el coste de los mismos y la cuantía total. Se dispone de esta forma de 731 registros referidos al número y coste total (el periodo real de observación incluye un año bisiesto) y, como ya se ha dicho, 10.052 referidos al coste individual de los mismos.

Respecto a la variable que modela el **número de siniestros** que han tenido lugar cada día durante el periodo de observación actuarial de dos años, suponemos que sigue una distribución de Poisson. Se estima el parámetro λ de la misma por el método de máxima verosimilitud resultando la siguiente función de cuantía:

$$P_n(t=1)=P(\upsilon=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{13{,}75^n}{n!}\cdot e^{-13{,}75}$$

Al realizar los contrastes χ^2 y G^2 de la razón de verosimilitud, en adelante con un nivel de significación del 5%, descritos en el epígrafe III.1.4, se llega a la misma conclusión de que dicha distribución no es válida para aproximar el número de siniestros. En el contraste χ^2 se agrupan los datos en 18 intervalos para que la frecuencia empírica en los mismos no sea inferior a cinco, resultando el valor crítico del Test $K=\chi^2_{16}=26{,}30$ que se compara con el valor empírico $\chi^2=179{,}71$. Este resultado nos lleva a rechazar la hipótesis nula de que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson.

De igual forma, cuando se realiza el contraste G^2 de la razón de verosimilitud, se disponen de *29* categorías (no es necesario que la frecuencia empírica no sea inferior a cinco), resultando $G^2=174,86>K=\chi^2_{28}=41,337$, lo que nos lleva de igual forma a rechazar la hipótesis nula.

Será por tanto necesario buscar alguna distribución alternativa que modele dicha variable, estudiando si una mixtura de distribuciones de Poisson, definida en (III.8) mejora el ajuste anterior adaptándose a las observaciones:

$$P(\upsilon=n)=\sum_{i=1}^{c}\frac{\lambda_i^n}{n!}\cdot e^{-\lambda_i}$$

Se realiza el ajuste a una mixtura de dos, tres y cuatro componentes $(c=2,3,4)$, estimando los parámetros de las mismas por máxima verosimilitud mediante la implementación del algoritmo EM de la forma descrita anteriormente. Las estimaciones resultantes, así como el resultado de los contrastes de la bondad de ajuste, se muestran en la siguiente Tabla:

TABLA III.1. ESTIMACIÓN DEL NÚMERO DE SINIESTROS SI ES UNA MIXTURA DE DISTRIBUCIONES DE POISSON

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE χ^2 $(\alpha = 0{,}05)$	CONTRASTE G^2 $(\alpha = 0{,}05)$
$P(\upsilon = n) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_i}$	$p_1 = 0{,}6096$	$\lambda_1 = 11{,}2304$	$\chi^2_{18} = 28{,}87$	$\chi^2_{28} = 41{,}337$
	$p_2 = 0{,}3904$	$\lambda_2 = 17{,}6876$	$\chi^2 = 22{,}39$	$G^2 = 36{,}21$
$P(\upsilon = n) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_i}$	$p_1 = 0{,}0111$	$\lambda_1 = 4{,}1783$	$\chi^2_{16} = 26{,}30$	$\chi^2_{28} = 41{,}337$
	$p_2 = 0{,}6567$	$\lambda_2 = 11{,}6987$	$\chi^2 = 17{,}70$	$G^2 = 30{,}46$
	$p_3 = 0{,}3322$	$\lambda_3 = 18{,}1632$		
$P(\upsilon = n) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_i}$	$p_1 = 0{,}0162$	$\lambda_1 = 4{,}7148$	$\chi^2_{14} = 23{,}68$	$\chi^2_{28} = 41{,}337$
	$p_2 = 0{,}5862$	$\lambda_2 = 11{,}4791$	$\chi^2 = 17{,}86$	$G^2 = 27{,}66$
	$p_3 = 0{,}3841$	$\lambda_3 = 17{,}1667$		
	$p_4 = 0{,}0135$	$\lambda_4 = 26{,}0058$		

Estos resultados indican que en todos los casos se puede aceptar la mixtura de distribuciones para modelar el número de siniestros dado que $\chi^2 < K$ y $G^2 < K$. El ajuste a una mixtura de tres distribuciones de Poisson mejora considerablemente el ajuste a dos componentes. Sin embargo, cuando se añade una componente más, el ajuste es similar al caso en que únicamente se utilizan tres componentes. Es más, en el contraste χ^2 de la razón de verosimilitud, la diferencia entre el valor del estadístico y el valor crítico del test es mayor en la última mixtura considerada. Por otra parte, el grado de complejidad de la función de cuantía aumenta al ser mayor el número de sumandos que aparecen en la misma.

Por todo ello se considerará una mixtura de tres componentes de Poisson para modelar el número de siniestros, con función de cuantía:

$$P(\upsilon = n) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_i}$$ con parámetros

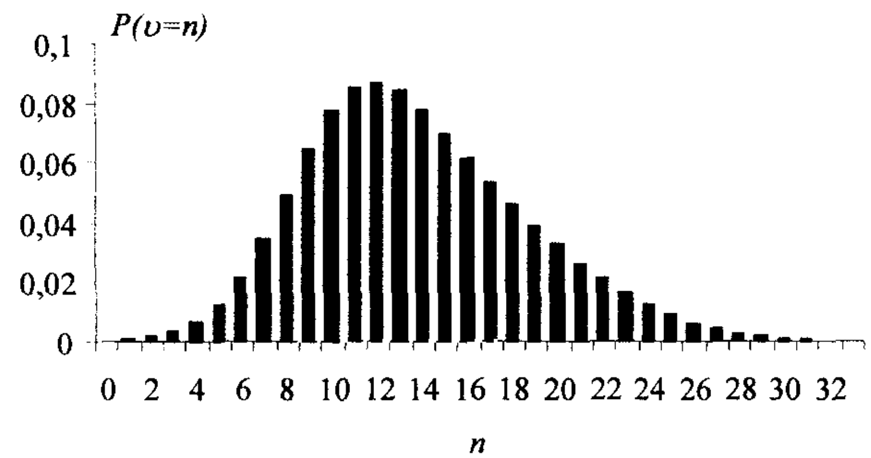
$p_1 = 0,0111 \quad \lambda_1 = 4,1783$

$p_2 = 0,6567 \quad \lambda_2 = 11,6987$ y

$p_3 = 0,3322 \quad \lambda_3 = 18,1632$

cuya representación gráfica es:

GRÁFICO III.3. FUNCIÓN DE CUANTÍA DEL NÚMERO DE SINIESTROS



lo que significa que, en un periodo de observación unitario, el *65,67%* del número de siniestros ocurridos sigue una distribución de Poisson con media *11,7* y el *33,22%* una distribución de Poisson con media *18,16*. El *1,11%* restante, que se puede considerar como datos anómalos dado su pequeño porcentaje y la diferencia existente con las otras dos medias, sigue una distribución de Poisson de parámetro *4,18*.

Por tanto no es posible modelar el número de siniestros ocurridos en la cartera de pólizas mediante una única distribución de Poisson como se hacía en el capítulo anterior. El parámetro de la distribución de Poisson no es único en un periodo de observación actuarial unitario. Sin embargo, se puede considerar que el número de siniestros se puede dividir en tres grupos diferentes y en cada uno de ellos, la distribución de Poisson que modela dicho número de siniestros tiene parámetro diferente al del resto de grupos. Se puede aceptar por tanto una mixtura de distribuciones para modelar el número de siniestros sin que sea necesario estudiar procesos de Poisson no homogéneos, que presentan una mayor dificultad que la distribución propuesta.

Para determinar de forma teórica la función de siniestralidad total es necesario además cuál es el **coste de los siniestros** que han tenido lugar en la cartera de pólizas. De la base de datos utilizada se considera una muestra aleatoria de *975* observaciones, aproximadamente el *10%* del total, lo que permitirá estimar los parámetros de la distribución de probabilidad asociada a la variable coste.

En primer lugar, entre todas las variables aleatorias continuas válidas para representar el coste de los siniestros, distribuciones Gamma, logarítmico-normal, Pareto, Weibull y exponencial, se analizan los gráficos de proporciones acumuladas que se presentan en el Anexo 1 (gráficos V.6 a V.10). Dichos gráficos comparan las proporciones acumuladas de la variable con las correspondientes proporciones acumuladas proporcionadas por una distribución de prueba. Si la variable seleccionada coincide con la distribución de prueba, los puntos se concentran en torno a una línea recta.

Se observa, comparando dichos gráficos, que las distribuciones logarítmico normal y de Weibull podrían ajustarse al coste de los siniestros. Sin embargo, no consideraremos tales distribuciones: la primera solo es válida para representar variables con valores no nulos, se omiten los siniestros que han sido considerados nulos o con coste cero por parte de la compañía lo que conduce a un pérdida importante de información; la distribución de Weibull es similar a la distribución exponencial en cuanto al ajuste realizado. Consideramos entonces una distribución exponencial dado que la estimación de sus parámetros es más sencilla que la de Weibull cuando forma parte de una mixtura de distribuciones. A partir de esta distribución se generalizará la función de densidad añadiendo nuevas distribuciones hasta definir la mixtura adecuada.

Pues bien, suponiendo que el coste de los siniestros sigue una distribución exponencial de probabilidad, se estima el parámetro de la misma por máxima verosimilitud y se realizan los contrastes de la razón de verosimilitud obteniendo los siguientes resultados:

$$\hat{h} = \frac{1}{\hat{\mu}} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{27.317,67} = 3,661 \cdot 10^{-5}$$

Contraste χ^2: $r=71$, $\chi^2=254,22$, $K=89,39$

Contraste G^2: $r=113$, $G^2=362,78$, $K=137,70$

Se llega a la misma conclusión con ambos contrastes de que el coste de los siniestros no sigue una distribución exponencial.

Se prueba si una mixtura de distribuciones exponenciales, definida en (III.10) mejora el ajuste anterior, estimando los parámetros de la misma mediante la implementación del algoritmo EM El resultado de dichas estimaciones, así como los contrastes de la bondad de ajuste, se muestran en la Tabla siguiente:

TABLA III.2. ESTIMACIÓN DEL COSTE DE LOS SINIESTROS SI ES UNA MIXTURA DE DISTRIBUCIONES EXPONENCIALES

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE χ^2 $(\alpha=0,05)$	CONTRASTE G^2 $(\alpha=0,05)$
$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x}$	$p_1=0,9345$	$h_1=4,971\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{60}=79,08$	$\chi^2_{112}=137,70$
	$p_2=0,0655$	$h_2=7,687\cdot 10^{-6}$	$\chi^2=160,85$	$G^2=218,07$
$f(x)=\sum_{i=1}^{3} p_i h_i e^{-h_i x}$	$p_1=0,5192$	$h_1=4,971\cdot 10^{-5}$		
	$p_2=0,4153$	$h_2=4,971\cdot 10^{-5}$		
	$p_3=0,0655$	$h_3=7,687\cdot 10^{-6}$		

Aunque las mixturas mejoran el ajuste a una única distribución exponencial, no se puede aceptar que dicha distribución modele el coste de los siniestros. Se observa además que es lo mismo considerar dos componentes que tres porque las estimaciones finales de los parámetros coinciden al ser dos de las tres componentes la misma y coincidir la suma de sus proporciones con la proporción de dicha componente en una mixtura de dos distribuciones exponenciales.

Si se supone que existen un determinado número de siniestros cuyo coste sigue una distribución normal, se puede definir una mixtura de distribuciones normales y exponenciales con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{c_1} p_i \cdot h_i \cdot e^{-h_i x} + \sum_{i=c_1+1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & x>0 \\ \sum_{i=c_1+1}^{c} p_i \cdot \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & x \le 0 \end{cases}$$

De nuevo se estiman los parámetros de dicha distribución para diferentes valores de c_1 y c, aplicando el algoritmo EM de la forma descrita en el epígrafe III.2.2, y se realizan los contrastes de la bondad de ajuste. Los resultados de este análisis se muestran conjuntamente en la siguiente Tabla:

TABLA III.3. ESTIMACIÓN DEL COSTE DE LOS SINIESTROS SI ES UNA MIXTURA DE DISTRIBUCIONES EXPONENCIALES Y NORMALES

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE χ^2 ($\alpha = 0{,}05$)	CONTRASTE G^2 ($\alpha = 0{,}05$)
$f(x) = p_1 h_1 e^{-h_1 x} + p_2 \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$	$p_1=0{,}6136$	$h_1=2{,}724\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{60}=79{,}08$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}3864$	$\mu_2=12.410{,}09$	$\chi^2=140{,}03$	$G^2=246{,}34$
		$\sigma_2=6.144{,}19$		
$f(x) = p_1 h_1 e^{-h_1 x} + \sum_{i=2}^{3} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}4401$	$h_1=2{,}259\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{52}=69{,}83$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}2704$	$\mu_2=8.075{,}23$	$\chi^2=87{,}05$	$G^2=180{,}64$
		$\sigma_2=3.314{,}16$		
	$p_3=0{,}2895$	$\mu_3=19.540{,}26$		
		$\sigma_3=7.637$		
$f(x) = p_1 h_1 e^{-h_1 x} + \sum_{i=2}^{4} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}2575$	$h_1=1{,}673\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{51}=68{,}67$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}3390$	$\mu_2=7.588{,}08$	$\chi^2=84{,}06$	$G^2=147{,}09$
		$\sigma_2=3.738{,}11$		
	$p_3=0{,}2804$	$\mu_3=18.380{,}64$		
		$\sigma_3=6.413{,}72$		
	$p_4=0{,}1231$	$\mu_4=34.107{,}24$		
		$\sigma_4=11.530{,}90$		
$f(x) = \sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x} + p_3 \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}$	$p_1=0{,}7186$	$h_1=4{,}438\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{55}=73{,}31$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}0629$	$h_2=7{,}601\cdot 10^{-6}$	$\chi^2=94{,}49$	$G^2=174{,}52$
	$p_3=0{,}2185$	$\mu_3=13.067{,}62$		
		$\sigma_3=5.465{,}80$		

TABLA III.3. (Continuación)

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE χ^2 $(\alpha = 0{,}05)$	CONTRASTE G^2 $(\alpha = 0{,}05)$
$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x} + \sum_{i=3}^{4} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}5892$	$h_1=4{,}157\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{49}=66{,}34$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}0636$	$h_2=7{,}690\cdot 10^{-6}$	$\chi^2=64{,}62$	$G^2=136{,}41$
	$p_3=0{,}1670$	$\mu_3=8.533{,}45$		
		$\sigma_3=2.546{,}50$		
	$p_4=0{,}1802$	$\mu_4=19.143{,}83$		
		$\sigma_4=6.294{,}42$		
$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x} + \sum_{i=3}^{5} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}5346$	$h_1=4{,}260\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{43}=59{,}30$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}0706$	$h_2=8{,}093\cdot 10^{-6}$	$\chi^2=52{,}91$	$G^2=132{,}73$
	$p_3=0{,}1775$	$\mu_3=8.398{,}90$		
		$\sigma_3=2.561{,}64$		
	$p_4=0{,}1677$	$\mu_4=17.997{,}37$		
		$\sigma_4=5.489{,}31$		
	$p_5=0{,}0496$	$\mu_5=31.014{,}75$		
		$\sigma_5=8.491{,}57$		
$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x} + \sum_{i=3}^{6} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}5412$	$h_1=4{,}237\cdot 10^{-5}$	$\chi^2_{44}=60{,}48$	$\chi^2_{112}=137{,}70$
	$p_2=0{,}0695$	$h_2=8{,}032\cdot 10^{-6}$	$\chi^2=51{,}75$	$G^2=126{,}004$
	$p_3=0{,}1779$	$\mu_3=8.425{,}79$		
		$\sigma_3=2.569{,}98$		
	$p_4=0{,}1817$	$\mu_4=18.490{,}10$		
		$\sigma_4=5.627{,}08$		
	$p_5=0{,}0077$	$\mu_5=28.204{,}44$		
		$\sigma_5=34{,}62$		
	$p_6=0{,}0221$	$\mu_6=37.080{,}50$		
		$\sigma_6=4.180{,}97$		

TABLA III.3. (Continuación)

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE χ^2 $(\alpha = 0{,}05)$	CONTRASTE G^2 $(\alpha = 0{,}05)$
$f(x)=\sum_{i=1}^{3} p_i h_i e^{-h_i x} + p_4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	p_1 =0,3474	h_1 =4,438·10^{-5}		
	p_2 =0,3713	h_2 =4,438·10^{-5}		
	p_3 =0,0628	h_3 =7,601·10^{-6}		
	p_4 =0,2185	μ_4 =13.067,62		
		σ_4 =5.465,80		
$f(x)=\sum_{i=1}^{3} p_i h_i e^{-h_i x} + \sum_{i=4}^{5} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	p_1 =0,2947	h_1 =4,157·10^{-5}		
	p_2 =0,2945	h_2 =4,157·10^{-5}		
	p_3 =0,0637	h_3 =7,690·10^{-6}		
	p_4 =0,1670	μ_4 =8.533,45		
		σ_4 =2.546,50		
	p_5 =0,1801	μ_5 =19.143,83		
		σ_5 =6.294,42		
$f(x)=\sum_{i=1}^{3} p_i h_i e^{-h_i x} + \sum_{i=4}^{6} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	p_1 =0,3868	h_1 =4,260·10^{-5}		
	p_2 =0,1478	h_2 =4,260·10^{-5}		
	p_3 =0,0706	h_3 =8,093·10^{-6}		
	p_4 =0,1775	μ_4 =8.398,90		
		σ_4 =2.561,64		
	p_5 =0,1677	μ_5 =17.997,37		
		σ_5 =5.489,31		
	p_6 =0,0496	μ_6 =31.014,75		
		σ_6 =8.491,57		

Se observa en primer lugar que una mixtura de dos componentes normales y dos componentes exponenciales, en la que existen diez parámetros, se puede aceptar como válida para modelar el coste de los siniestros de la cartera de seguros. Añadiendo una componente exponencial la estimación es idéntica a la anterior (dos componentes exponenciales se convierten en una única) y con otra componente normal, estimando trece parámetros, la mejoría es notable: los estadísticos χ^2 y G^2 decrecen de forma considerable.

Definiendo una mixtura de dos distribuciones exponenciales y cuatro normales es necesario estimar dieciséis parámetros, frente a los trece anteriores, complicando bastante la función de densidad, aunque dicho ajuste se pueda aceptar como válido. Además, se observa que una de las componentes normales aparece con una proporción del *0,77%*, casi despreciable.

Como consecuencia del análisis realizado se puede afirmar que el coste de los siniestros sigue una distribución de probabilidad compuesta por dos distribuciones exponenciales y tres normales, con función de densidad:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i h_i e^{-h_i x}+\sum_{i=3}^{5} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \quad \text{con parámetros}$$

$$p_1=0{,}5346 \qquad h_1=4{,}260\cdot 10^{-5} \;(\mu_1=24.055{,}39)$$

$$p_2=0{,}0706 \qquad h_2=8{,}093\cdot 10^{-6} \;(\mu_2=130.032{,}33)$$

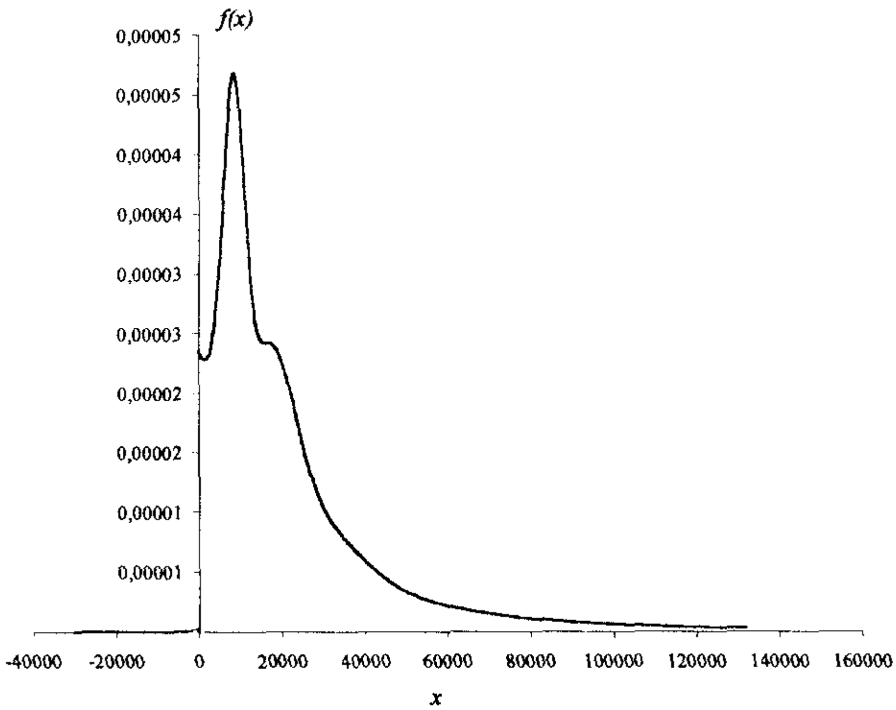
$$p_3=0{,}1775 \qquad \mu_3=8.398{,}90 \qquad \sigma_3=2.561{,}64$$

$$p_4=0{,}1677 \qquad \mu_4=17.997{,}37 \qquad \sigma_4=5.489{,}31$$

$$p_5 = 0{,}0496 \qquad \mu_5 = 31.014{,}75 \qquad \sigma_5 = 8.491{,}57$$

y representación gráfica:

GRÁFICO III.4. FUNCIÓN DE DENSIDAD DEL COSTE DE LOS SINIESTROS



Se deduce de la expresión anterior que el coste de todos los siniestros ocurridos no se puede ajustar a ninguna de las distribuciones continuas clásicas. Sin embargo, si se separan los siniestros en cinco grupos diferentes, es posible definir en cada uno de ellos una distribución de probabilidad diferente. En dos de los grupos el coste se distribuye de acuerdo a una ley exponencial y en los restantes se distribuye según una ley normal. Las medias y varianzas de las distribuciones resultantes son diferentes. Por lo tanto, se puede afirmar que en algunas situaciones prácticas, las distribuciones clásicas de probabilidad no son válidas para modelar de forma adecuada el coste de los siniestros. Será necesario en este caso definir mixturas de distintas distribuciones componentes que sí representen de forma adecuada el fenómeno estudiado.

Por último veamos cuál es el **coste total** que debe pagar la entidad aseguradora respecto al conjunto de las pólizas cuya responsabilidad asume. Aplicando el Teorema Central del Límite, dado el elevado número de observaciones disponibles, este coste es aproximadamente normal y, estimando sus parámetros por el método de máxima verosimilitud, la función de densidad resultante es:

$$f(x) = \frac{1}{214.994{,}95\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-358.404{,}14)^2}{2214.994{,}95^2}}$$

Sin embargo, esta aproximación no puede ser aceptada como válida puesto que en los contrastes χ^2 y G^2 de la razón de verosimilitud resulta $\chi^2 = 215{,}86 > K = 44{,}99$ y $G^2 = 279{,}11 > K = 67{,}50$, respectivamente, tal y como se muestra en la tabla 3 del Anexo.

Veamos por tanto si una mixtura de componentes normales mejora el ajuste pudiéndose aceptar como la distribución de la cuantía total con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{c} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Se han estimado mediante máxima verosimilitud aplicando el algoritmo EM, igual que en casos anteriores, los parámetros para dos, tres, cuatro y cinco componentes ($c=2,3,4,5$) y, en vista a los contrastes de bondad de ajuste realizados, cuyos resultados se muestran conjuntamente en la siguiente Tabla:

TABLA III.4. ESTIMACIÓN DEL COSTE TOTAL SI ES UNA MIXTURA DE DISTRIBUCIONES NORMALES

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE $\chi^2(\alpha=0{,}05)$	CONTRASTE $G^2(\alpha=0{,}05)$
$f(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}8039$	$\mu_1=291.567{,}22$	$\chi^2_{29}=42{,}56$	$\chi^2_{50}=67{,}50$
		$\sigma_1=128.264{,}51$	$\chi^2=55{,}21$	$G^2=72{,}93$
	$p_2=0{,}1961$	$\mu_2=632.319{,}38$		
		$\sigma_2=273.670{,}66$		
$f(x)=\sum_{i=1}^{3} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}0686$	$\mu_1=341.036{,}00$	$\chi^2_{26}=38{,}89$	$\chi^2_{50}=67{,}50$
		$\sigma_1=14.211{,}19$	$\chi^2=1178{,}98$	$G^2=815{,}23$
	$p_2=0{,}9253$	$\mu_2=539.058{,}82$		
		$\sigma_2=203.665{,}11$		
	$p_3=0{,}0061$	$\mu_3=408.959{,}81$		
		$\sigma_3=886{,}90$		
$f(x)=\sum_{i=1}^{4} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}1033$	$\mu_1=119.558{,}50$	$\chi^2_{22}=33{,}92$	$\chi^2_{50}=67{,}50$
		$\sigma_1=42.192{,}10$	$\chi^2=24{,}63$	$G^2=34{,}80$
	$p_2=0{,}3979$	$\mu_2=251.879{,}21$		
		$\sigma_2=76.543{,}16$		
	$p_3=0{,}3953$	$\mu_3=422.464{,}18$		
		$\sigma_3=129.807{,}96$		
	$p_4=0{,}1035$	$\mu_4=761.444{,}54$		
		$\sigma_4=281.351{,}81$		

TABLA III.4. (Continuación)

DISTRIBUCIÓN	ESTIMACIONES		CONTRASTE $\chi^2\ (\alpha = 0{,}05)$	CONTRASTE $G^2\ (\alpha = 0{,}05)$
$f(x)=\sum_{i=1}^{5} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$	$p_1=0{,}1065$	$\mu_1=118.789{,}35$	$\chi^2_{18}=28{,}87$	$\chi^2_{50}=67{,}50$
		$\sigma_1=42.250{,}12$	$\chi^2=23{,}90$	$G^2=31{,}37$
	$p_2=0{,}3923$	$\mu_2=249.138{,}24$		
		$\sigma_2=74.432{,}00$		
	$p_3=0{,}3882$	$\mu_3=416.146{,}38$		
		$\sigma_3=120.521{,}87$		
	$p_4=0{,}1075$	$\mu_4=732.278{,}36$		
		$\sigma_4=215.561{,}60$		
	$p_5=0{,}0055$	$\mu_5=1.409.458{,}39$		
		$\sigma_5=97.301{,}03$		

se observa que una mixtura de dos distribuciones normales mejora la aproximación normal, empeorando notablemente la misma si se consideran tres componentes. En ambos casos dicha distribución no se puede aceptar como la distribución de la siniestralidad total.

Las mixturas de cuatro y cinco componentes se pueden admitir para representar el coste de todos los siniestros que tienen lugar en un periodo de observación unitario. El último caso no presenta gran diferencia respecto al anterior y, además, una de las componentes aparece con una proporción apenas apreciable (*0,55%*). El número de parámetros en dicha mixtura es de quince, lo que dificulta la expresión de la función de densidad.

Por tanto se considerará que el coste total de los siniestros en el periodo de observación unitario es una variable aleatoria cuya función de densidad se compone de cuatro distribuciones normales:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{4} p_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$, cuyos parámetros son

$p_1=0,1033$ $\quad\mu_1=119.558,50$ $\quad\sigma_1=42.192,10$

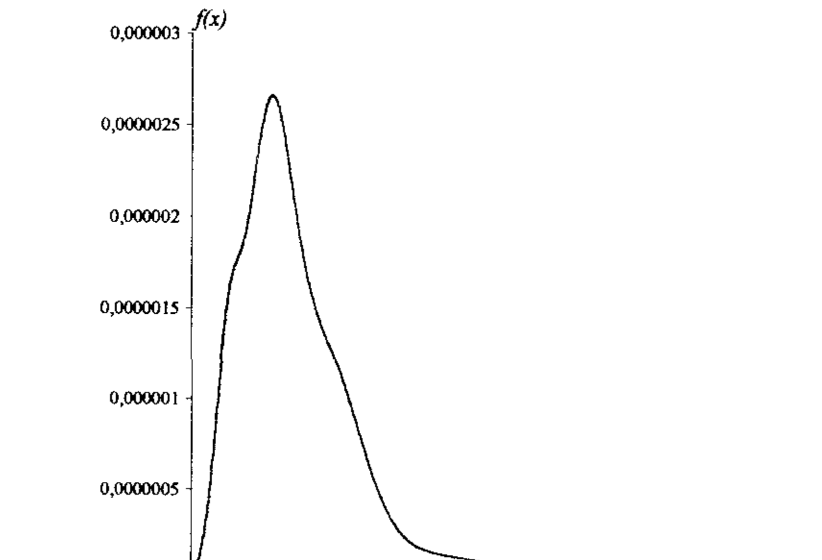
$p_2=0,3979$ $\quad\mu_2=251.879,21$ $\quad\sigma_2=76.543,16$

$p_3=0,3953$ $\quad\mu_3=422.464,18$ $\quad\sigma_3=129.807,96$

$p_4=0,1035$ $\quad\mu_4=761.444,54$ $\quad\sigma_4=281.351,81$

cuya representación gráfica es:

GRÁFICO III.5. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LA SINIESTRALIDAD TOTAL



Como se deduce del análisis realizado, el problema de buscar aproximaciones a la distribución de la siniestralidad total se simplifica cuando se consideran mixturas de distribuciones normales. La ventaja de este método sobre los métodos clásicos del Capítulo III es la fácil implementación del algoritmo utilizado en la estimación de sus parámetros, lo que conduce a una mayor rapidez en la obtención de los resultados. También es más intuitiva la expresión de la función de densidad: por ser una generalización de la aproximación normal se observa cómo el coste de los siniestros se puede separar en cuatro grupos diferentes, en cada uno de ellos la distribución de probabilidad asociada al coste total es una distribución normal.

Se ha demostrado con este caso real que, las mixturas de distribuciones, ya sea de componentes de la misma familia o de distinta familia, mejoran de forma significativa el ajuste de las distintas variables que intervienen en la siniestralidad a distribuciones clásicas como son la distribución normal, de Poisson o la exponencial. La dificultad de la estimación de los parámetros de las mismas se puede simplificar si se aplica el algoritmo EM, diseñado para problemas con datos faltantes, adaptándolo a cada problema en concreto. Este algoritmo es de sencilla implementación, incluso en una hoja de cálculo, definiendo macros adecuadas.

Además, se simplifica el complejo problema de estimación de la siniestralidad total. Para construir de forma teórica dicha distribución, como se explicó en el Capítulo II, es necesario plantear hipótesis sobre la distribución del número de siniestros. La aplicación de mixturas de distribuciones no requiere hipótesis sobre dicha distribución, pudiéndose aplicar por tanto, con independencia de la distribución de probabilidad asociada al número de siniestros.

IV. MÉTODOS DE CÁLCULO DE LA PROVISIÓN PARA PRESTACIONES

IV. MÉTODOS DE CÁLCULO DE LA PROVISIÓN PARA PRESTACIONES

IV.1. INTRODUCCIÓN

El problema de la solvencia y, en particular, la solvencia dinámica, como ya se indicó con anterioridad, es de especial importancia para la empresa de seguros por la naturaleza de las prestaciones que realiza el asegurador. El asegurador se compromete a indemnizar al asegurado y para ello, debe contar con reservas suficientes. La solvencia dinámica recoge la capacidad de prever desviaciones que se produzcan como consecuencia de fluctuaciones aleatorias sufridas por la siniestralidad, o por la gestión de la entidad aseguradora, y estudia la capacidad de hacer frente a las obligaciones conforme se vayan presentando.

Para ello es necesario que la empresa conozca de la mejor forma posible el gasto al que tiene que enfrentarse en el futuro por siniestros ya ocurridos. Ello le permitirá, además, determinar qué gastos resultan imputables a un determinado ejercicio aunque se presenten en el siguiente.

Una garantía más que permite establecer la solvencia dinámica es el conocimiento de la distribución de siniestralidad en un ambiente dinámico, generalizando las expresiones estudiadas en capítulos anteriores. Esta distribución juega además un papel fundamental en el cálculo de las provisiones técnicas. Las provisiones técnicas, reservas específicas de la actividad aseguradora, se constituyen en la fecha de cierre de un ejercicio económico y recogen la parte de gastos pendientes por siniestros ocurridos en el ejercicio.

La motivación del presente Capítulo es el estudio, en particular, de la provisión para siniestros pendientes. Como se ha indicado en el Capítulo I agrupa la provisión para siniestros pendientes de declaración (I.B.N.R.) y la provisión para siniestros pendientes de pago o liquidación (I.B.N.E.R., R.B.N.S. o I.B.N.F.R.) ya que el nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (Real Decreto 2.486/1998, de 20 de Noviembre) deja abierta la posibilidad de la utilización, por parte de las Entidades Aseguradoras, de métodos estadísticos para el cálculo de la provisión contrastando el resultado de los mismos con el método individual definido en el Reglamento, al menos durante un periodo de cinco años.

El ***método individual de cálculo*** consiste, como su nombre indica, en la determinación de la Provisión Técnica para Prestaciones como suma de las cuantías en las que individualmente se valoran los siniestros o prestaciones pendientes de liquidación o pago. El apartado primero del artículo 40 del Reglamento, referente a la provisión de prestaciones pendientes de liquidación o pago, establece que "incluirá el importe de todos aquellos siniestros ocurridos antes del cierre del ejercicio y declarados hasta el 31 de enero del año siguiente, o hasta treinta días antes de la formulación de las cuentas anuales, si esta fecha fuera anterior". Se incluye en esta provisión los gastos externos originados por la liquidación de los mismos, los intereses de demora y las penalizaciones legalmente establecidas en las que haya incurrido la entidad.

El artículo 41, en su apartado primero establece que la provisión para siniestros pendientes de declaración recogerá el importe estimado de los siniestros ocurridos antes del cierre del ejercicio no incluidos en la provisión de prestaciones pendientes de liquidación o pago. Únicamente en el caso de que la entidad no disponga de métodos estadísticos para el cálculo de la provisión o los disponibles no sean los adecuados, deberá determinarse esta provisión multiplicando el número de siniestros no declarados por el coste medio de los mismos, estimando ambos de la manera siguiente[12]:

El número N de siniestros pendientes de declaración se calcula mediante la igualdad:

$$N_t = \frac{N_{t-1} + N_{t-2} + N_{t-3}}{P_{t-1} + P_{t-2} + P_{t-3}} \cdot P_t$$

siendo t el ejercicio que se cierra, t-1, t-2 y t-3 los tres ejercicios inmediatamente anteriores y P las primas devengadas.

El coste medio C de los siniestros no declarados se determinará mediante la igualdad:

$$C_t = \frac{C_{t-1} + C_{t-2} + C_{t-3}}{Q_{t-1} + Q_{t-2} + Q_{t-3}} \cdot Q_t$$

donde t, t-1, t-2 y t-3 tienen el mismo sentido que antes y Q es el coste medio de los siniestros ya declarados.

Los datos relativos al número y coste medio de los siniestros no declarados de ejercicios anteriores serán los conocidos por la entidad a la fecha de cálculo de la provisión con lo que la información utilizada para efectuar los cálculos deberá

[12] Tal y como se establece en el apartado segundo del Artículo 41 del nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros privados

actualizarse anualmente.

El reglamento indica además que cuando la entidad carezca de la necesaria experiencia descrita anteriormente, dotará esta provisión aplicando un porcentaje del cinco por ciento a la provisión para prestaciones pendientes de liquidación o pago del seguro directo y del diez por ciento en el caso del reaseguro y coaseguro aceptados.

Los ***métodos globales de cálculo*** por el contrario, como se ha comentado anteriormente, consideran la cartera de siniestros de cada ramo o modalidad como un todo y trabajan con la experiencia estadística de la misma para inferir conclusiones respecto a la siniestralidad pendiente de liquidación por parte de la Entidad aseguradora.

Existen diferentes clasificaciones de estos métodos. Siguiendo a Vegas Montaner (1999) se pueden clasificar en *métodos Estadísticos* y *Estocásticos*. Los primeros utilizan métodos frecuentistas y, al contrario que los segundos que utilizan *métodos probabilísticos*, no permiten estimar un intervalo de confianza en torno al cual, y con un determinado nivel de probabilidad, se mueve el verdadero valor de la variable a estimar, en este caso la provisión

La mayoría de los métodos sirven para el cálculo de las IBNR y de las IBNER conjuntamente, tanto para el seguro directo como para el reaseguro, como el método chain ladder. Otros, como el modelo probabilístico de Bülmann, sirven para el cálculo de ambas provisiones para el seguro directo, o para el cálculo de las IBNER únicamente en seguro directo como el método de separación de Taylor.

El Instituto de Actuarios Británico, en el manual *Claims Reserving Manual*, hace un recorrido exhaustivo por los distintos métodos de cálculo, clasificándolos en dos grupos según la complejidad del algoritmo, el primero dedicado a *métodos simples*: loss ratios, link ratios, etc. y el segundo a *métodos avanzados*: modelos estocásticos chain ladder, modelo exponencial run-off, método de Reid, etc.

Taylor (1986) describe la metodología para aproximar el análisis de la siniestralidad en tres fases diferenciadas realizando una clasificación de los modelos en cada una de estas fases.

En la primera se construye el modelo, representando el proceso de riesgo mediante una estructura paramétrica, de forma teórica, siendo ω el vector de parámetros incluidos en el modelo.

La clasificación en esta fase se realiza usando diferentes niveles. El mayor nivel de clasificación es la distinción entre *modelos estocásticos* y *modelos no estocásticos*, según la naturaleza estocástica del proceso de siniestralidad. En los últimos el error estocástico se omite y no es posible realizar un estudio sobre la calidad de los datos, del modelo o incluso del efecto de los siniestros extraordinarios.

El siguiente nivel diferencia entre *macro modelos*, que consideran la totalidad de la siniestralidad y *micro modelos*, que trabajan al nivel de siniestros individuales. Reseñar en este punto que no tiene sentido hablar de micro modelos no estocásticos aunque se pueda tratar los siniestros de forma individual ignorando la naturaleza estocástica del proceso.

En los niveles intermedios de clasificación se trata de establecer cuales son las variables dependientes del modelo. De esta forma se pueden considerar como tales el *número de siniestros*, los *pagos realizados* de los mismos o las *cuantías de todos los siniestros* ocurridos. No tiene sentido incluir el número de siniestros como variable dependiente en los micro modelos puesto que estos trabajan a nivel individual de siniestros.

Por último, el menor nivel de clasificación se refiere a las variables explicativas incluidas en el modelo. Se pueden incluir en el mismo variables como número de expuestos al riesgo, cuantía media de los siniestros, número de siniestros finalizados, inflación, tiempo (real u operacional) transcurrido desde la ocurrencia del siniestro, velocidad de finalización de los siniestros, cuantía total de los siniestros respecto del año de origen, año de origen, coste de cada siniestro, pagos parciales realizados hasta una fecha determinada, número de pagos realizados para cada siniestro, efecto de la estacionalidad, etc.

Una vez construido el modelo teórico, en la segunda fase, se estiman los parámetros incluidos en el mismo y se estudia de alguna forma cuál es la bondad de ajuste del modelo. Se denota por $\hat{\omega}$ a la estimación de dichos parámetros.

La primera división entre los modelos para estimar siniestros pendientes es aquella que distingue entre modelos estocásticos y no estocásticos. La diferencia entre estas dos clases es tan amplia que implica diferentes métodos de ajuste.

En cuanto a los modelos estocásticos, dado que existen hipótesis respecto a distribuciones de probabilidad, se puede ajustar el modelo a los datos de acuerdo con alguna técnica considerada, en cierto modo, como óptima. Por ejemplo el método de mínimos cuadrados o el de máxima verosimilitud.

En los modelos no estocásticos no se considera el término de error (estocástico) y la estimación de los parámetros del mismo se basa en la resolución algebraica de un sistema de n ecuaciones, siendo n el número de parámetros a estimar.

La esperanza, varianza, etc. de los siniestros pendientes son funciones de los parámetros incluidos en el modelo: $f(\omega)$. La predicción consiste en, una vez estimados los parámetros de modelo y ajustado éste a los datos disponibles, estimar las funciones más relevantes de estos parámetros, lo que constituye la tercera y última fase de la metodología para aproximar la siniestralidad.

Así, por ejemplo, si $f(\omega)$ es el valor esperado de los siniestros pendientes, se trata de encontrar la mejor función $\hat{f}(\hat{\omega})$ que se ajuste a la definida anteriormente. Tal función no es simplemente $f(\hat{\omega})$. Se deben estimar tanto los parámetros incluidos en el modelo como las funciones de dichos parámetros.

En general existen tres métodos diferentes de proyección como se puede estudiar en la obra de Taylor (1986): el método de la razón, el método de pagos futuros directos y el método de pagos totales. Los dos primeros son los más utilizados en la práctica. Los tres métodos se aplican una vez que el modelo se ha ajustado, de alguna forma, a los datos disponibles.

En el ***método de pagos futuros*** a partir del modelo y de las estimaciones de sus parámetros se estiman directamente los pagos futuros de los siniestros ocurridos. Este método no tiene en cuenta las posibles desviaciones que puedan existir entre los datos reales que representan los pagos ya realizados y aquellos que se reflejan en el modelo, ignorando por tanto dichas desviaciones en las estimaciones que se realizan respecto a los pagos futuros. Se denota por $\hat{\pi}_{ib}$ a la estimación de los siniestros pendientes en el año b con origen el año i.

El ***método de pagos totales*** supone que cualquier desviación que pueda producirse en el pasado se verá compensada en el futuro. La estimación de siniestros pendientes es en este caso:

$$PSP_i = \hat{\pi}_{ib} - \sum_{j=i}^{b}(c_{ij} - \hat{c}_{ij})$$

donde $\hat{c}_{ij}$ denota el valor de c_{ij} ajustado por el modelo.

El ***método de la razón*** se basa en una hipótesis opuesta a la del método anterior: si en el pasado se ha producido una desviación de los datos respecto al modelo en un porcentaje determinado, se mantendrá en el mismo porcentaje para el futuro. De esta forma los siniestros pendientes se calculan en primer lugar de acuerdo con el método de pagos futuros ajustándose después mediante la razón de los pagos actuales del modelo. De acuerdo con este método la estimación de siniestros pendientes es:

$$PSP_i = \hat{\pi}_{ib} - \frac{\sum_{j=i}^{b} c_{ij}}{\sum_{j=i}^{b} \hat{c}_{ij}}$$

La mayoría de los métodos de cálculo se basan en la información histórica de la Compañía Aseguradora respecto del pago de los siniestros, representada en el llamado *Triángulo de siniestros* o *triángulo run-off*. El triángulo de siniestros, como comenta Vegas Montaner (1993), debe su nombre a la representación de las cuantías de los siniestros se hace de forma matricial, es decir, recogiendo dos características como son el año de ocurrencia del siniestro (*i*) y el año de pago (*j*). La información se va reduciendo conforme los años son cada vez más recientes y de ahí que la matriz tenga forma triangular, representando la última diagonal los datos de pago del último año considerado.

El triángulo de siniestros más habitual es el que recoge información sobre los pagos acumulados de todos los siniestros, aunque la variable que aparece en las diferentes posiciones de la matriz puede ser también la razón de pagos, número de siniestros, pagos por expuesto al riesgo, pagos por siniestro finalizado, etc. La representación de los datos es de la siguiente forma:

Año de origen o notificación	**Año de pago**						
	0	*1*	...	*j*	...	*k-1*	*k*
0	a_{00}	a_{01}	...	a_{0j}	...	$a_{0,k-1}$	a_{0k}
1	a_{10}	a_{11}	...	a_{1j}	...	$a_{1,k-1}$	
...	...	...	...	...	...		
i	a_{i0}	a_{i1}	...	a_{ij}			
...	...	...	...				
k-1	$a_{k-1,0}$	$a_{k-1,1}$					
k	a_{k0}						

Si a_{ij} representa la cuantía total de los siniestros ocurridos (o notificados) en el año i, pagados hasta el año j y se denota por $a_{i\infty}$ la siniestralidad total de año i-ésimo, la provisión para siniestros pendientes del año i, al final del año k (PSP_i)es:

$$PSP_i = a_{i\infty} - a_{i,k-i}$$

Siendo el total de la provisión al final del año k:

$$PSP = \sum_{i=1}^{k} PSP_i = \sum_{i=1}^{k} (a_{i\infty} - a_{i,k-i})$$

La finalidad de los métodos de cálculo de provisiones para siniestros pendientes es estimar la cantidad $a_{i\infty}$, basándose en distintas hipótesis según el modelo utilizado como se expone a continuación.

IV.2. MÉTODOS NO ESTOCÁSTICOS

IV.2.1. MÉTODOS CLÁSICOS

Los métodos del ***coste medio del siniestro*** y del ***tiempo medio de liquidación*** son, quizá, los más elementales de todos los métodos utilizados para estimar las provisiones para siniestros pendientes. Ambos consisten, siguiendo a Vegas Montaner (1993) ó a Gil Fana (1995), en agrupar los siniestros en h clases homogéneas (es decir, de escasa dispersión dentro de las mismas), para estimar en cada una de ellas el coste de los siniestros pendientes.

El primero considera el coste medio de un siniestro por año de ocurrencia i en cada clase j (c_{ij}), el número de siniestros ocurridos (n_{ij}, por año de ocurrencia i y clase j) en tramitación al cierre del ejercicio y el tanto de interés utilizado (α_{ij}, normalmente tasa unitaria de inflación, correspondiente al año de ocurrencia i y a la clase j), calculando la provisión para siniestros pendientes supuestos k años de ocurrencia como:

$$PSP = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} c_{ij} n_{ij} (1 + \alpha_{ij})$$

El segundo se basa en la hipótesis de que existe cierta correlación positiva entre el tiempo que tardan en liquidarse los siniestros y la cuantía de los mismos. Es decir, que a mayor duración en la liquidación del siniestro, mayor coste comportará el mismo. Se calcula la provisión para siniestros pendientes de la siguiente forma:

$$PSP = \sum_{j=1}^{h} a^j \cdot t^j$$

donde a^j es el importe total de los siniestros pagados en el ejercicio en la clase j y t^j el tiempo medio de liquidación en la clase j-ésima, que se calcula a partir del número de días desde que ocurre cada siniestro i-ésimo de cuantía c_i hasta su pago (t_i) como la media ponderada:

$$t^j = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$$

Otro de los métodos clásicos para el cálculo de provisiones, y quizá el primero aplicado al análisis del triángulo de siniestros es el método ***chain-ladder***. Existen múltiples trabajos sobre este método como los de Clarke y Harland (1974), Skurnick (1973) o Kramreiter y Straub (1973), siendo además uno de los más sencillos y con más variantes, por ejemplo la de Berquist y Sherman (1977) o van Eeghen (1981).

El método se basa en las hipótesis de ausencia de factores exógenos como la inflación, cambio en la razón de crecimiento de los fondos, distribución del retardo en la notificación, etc. y en la estabilidad en la distribución temporal de los pagos de los siniestros a lo largo del tiempo. Bajo estas hipótesis, las columnas del triángulo de siniestros, que representan la cuantía acumulada al j-ésimo año de tramitación de los mismos, son proporcionales, definiendo los parámetros de proporcionalidad y estimando los mismos de la siguiente forma:

$$m_j = \frac{a_{i,j+1}}{a_{ij}} \qquad \hat{m}_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-(j+1)} a_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{k-(j+1)} a_{ij}}$$

$$M_j = \frac{a_{i,\infty}}{a_{ij}} \qquad \hat{M}_j = \frac{\hat{a}_{i\infty}}{a_{ij}}$$

verificándose además:

$$\hat{M}_j = \left(\prod_{i=j}^{k-1} m_i\right)\hat{M}_k \tag{IV.1}$$

donde m_j representa la razón de proporcionalidad entre la cuantía total de los siniestros pagados en un año y el inmediatamente anterior y M_j la razón de proporcionalidad entre el coste total de los siniestros ocurridos en un año determinado y la cuantía pagada hasta el último año. El factor $\hat{M}_j$ permitirá obtener la provisión para siniestros pendientes del año i-ésimo al finalizar el j-ésimo año de tramitación como:

$$PSP_{ij} = a_{i\infty} - a_{ij} = a_{ij}(\hat{M}_j - 1) = a_{ij}(m_j \cdot m_{j+1} \cdot m_{j+2} \cdot \ldots\ldots - 1)\,.$$

Si la diferencia entre m_j y 1 es despreciable a partir de un valor K determinado, entonces:

$$PSP_{ij} = a_{ij}\left(\prod_{k=j}^{K} m_k - 1\right)$$

Dada la relación (IV.1), para estimar $\hat{M}_j$ es suficiente estimar el coste total de los siniestros para el primer año de origen incluido en el triángulo de siniestros, $a_{0\infty}$.

El primer año incluido en el triángulo es el que contiene mayor información, aunque no completa porque si así fuera no sería necesario constituir provisión alguna, y la cola $a_{0\infty} - a_{0j}$ es menor que en el resto de años. Tal cola puede estimarse de tres formas posibles, como comenta Vegas Montaner (1999), obteniendo así una estimación de $a_{0\infty}$: mediante experiencia propia de la Entidad referida a años anteriores completamente liquidados, con un mínimo de estabilidad temporal en el comportamiento de las magnitudes como para que los datos puedan ser utilizados a efectos de estimación; mediante experiencia de mercado y mediante métodos estadísticos de estimación como estimación potencial, exponencial, exponencial suavizada, etc.

El método anterior es válido también si se acepta la influencia de la inflación, manteniendo el resto de hipótesis. En este caso, el análisis se hace en unidades monetarias de un año base determinado, u. Utilizando los resultados anteriores se determinará la provisión en unidades monetarias del año considerado.

Una variante del método chain ladder, planteada por Truckle (1978), consiste en considerar en cada año de tramitación estimaciones del coste de todos los siniestros del año i (coste incurrido), en lugar de la cuantía pagada: $i_{ij} = a_{ij} + o_{ij}$, donde o_{ij} es la estimación al finalizar el año j-ésimo de tramitación, de la cuantía pendiente de los siniestros del año i. Los parámetros de proporcionalidad que permiten estimar la provisión se determinan de la misma forma que en el método chain-ladder clásico, calculando la razón entre la suma de dos columnas consecutivas del triángulo de siniestros.

Otro de los métodos clásicos, basado en la hipótesis de estacionaridad en la distribución de pagos, es el método ***grossing-up*** (Gil Fana (1995)). Se pueden calcular los porcentajes del total de los siniestros pagados en cada año de tramitación a partir de una estimación de $a_{0\infty}$ (coste total de los siniestros ocurridos el primer año incluido en el triángulo) obtenida utilizando datos contables de la entidad respecto a periodos anteriores o por alguno de los métodos descritos anteriormente. Sea por tanto P_i el porcentaje del total de siniestros pagado en el año i-ésimo de desarrollo, obtenido como:

$$P_i = \frac{a_{0i}}{a_{0\infty}}$$

donde $\hat{a}_{0\infty}$ se estima, como se ha comentado, utilizando datos históricos de la entidad aseguradora o mediante algún método de estimación estadística. La estimación del total de siniestros para el resto de años será:

$$\hat{a}_{1\infty} = \frac{a_{1,k-1}}{P_{k-1}},\ \hat{a}_{2\infty} = \frac{a_{2,k-2}}{P_{k-2}},\ \hat{a}_{3\infty} = \frac{a_{3,k-3}}{P_{k-3}},\dots,\ \hat{a}_{k\infty} = \frac{a_{k,0}}{P_0}$$

Siendo la provisión para el año i al finalizar el año k:

$$PSP_{ik} = \hat{a}_{i\infty} - a_{i,k-i}$$

El método ***link ratio*** calcula en primer lugar la razón que existe entre la cuantía pagada en dos años consecutivos definiendo los *link ratio*, que permiten pasar de la columna j a la columna $j+1$ como:

$$\lambda_{ij} = \frac{a_{i,j+i}}{a_{i,j}}$$

obteniendo λ_{0k} (para pasar de la columna primera a una estimación de la provisión) a partir de una estimación de $a_{0\infty}$:

$$\lambda_{0k} = \frac{a_{0\infty}}{a_{0k}}$$

Se trata ahora de definir factores de proyección que permitan estimar la provisión respecto cualquier año de origen, factores que permitirán pasar de una columna a cualquier otra del triángulo de siniestros. Dichos factores se pueden definir según distintos criterios:

i) *Criterio de prudencia.* Para cada columna se considera el mayor ratio, $\lambda_j = \max_i \lambda_{ij}$ y se calculan los factores de proyección para determinar la provisión a partir de la n-ésima columna como $\beta_n = \prod_{j=n}^{k} \lambda_j$, siendo la provisión para siniestros pendientes:

$$PSP_{ij} = a_{i\infty} - a_{i,k-i} = a_{i,k-i}(\beta_{k-i} - 1)$$

ii) *Criterio de la media simple de los link ratio.* Este criterio es planteado por Taylor (1986) con el nombre de payment ratio. En este caso, para calcular el factor de proyección, se toma la media simple de los link ratio para cada año de tramitación, $\bar{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-(j+1)} \lambda_{i,j}}{(k-j)}$. La provisión para siniestros pendientes se obtiene de la misma forma que en el caso anterior, calculando en primer lugar los factores de proyección.

La característica principal del séptimo de los métodos clásicos que se presenta, el ***método de separación***, es que permite aislar la distribución básica temporal de los pagos de los siniestros, que se supone estacionaria, del resto de factores exógenos. El método fue desarrollado en principio por Verbeek (1972) para aplicarlo al cálculo de la provisión para siniestros pendientes en reaseguro y, posteriormente, modificado y adaptado para su aplicación en el seguro directo, por ejemplo por Taylor (1977a, 1977b).

Se supone que si las condiciones que afectan a las cuantías de los siniestros permanecen siempre constantes, entonces la razón entre la cuantía pagada en el j-ésimo año de tramitación y la cuantía pagada en los k primeros años (por siniestro de origen i) es estacionaria, es decir, independiente de i, denotándose mediante r_j.

Se supone además que la siniestralidad de año de origen i (N_i) es proporcional al número de siniestros ocurridos ese año incluyendo los desconocidos:

$$N_i = \alpha n_i$$

donde n_i es una estimación del número de siniestros ocurridos el año i.

El modelo tiene en cuenta además el parámetro λ_{i+j}, índice que mide el efecto de la inflación.

Los datos que aparecen en el triángulo de siniestros son los pagos realizados en cada periodo, que se representan mediante $c_{ij} = N_i r_j \lambda_{i+j}$. Si se divide cada una de las filas entre el número estimado de siniestros se obtiene un nuevo triángulo que contiene el pago medio en el año j-esimo de tramitación por siniestro ocurrido el año i: $\alpha r_j \lambda_{i+j}$

La estimación de los parámetros $\alpha\lambda_i$ y r_j puede hacerse de varias formas como se explica a continuación.

(i) El *método de separación aritmético* se basa en la hipótesis de que $\sum_{j=0}^{k} r_j = 1$.

Representando por d_h a la suma de la diagonal h y por v_s a la suma de la columna s y despejando de forma adecuada se obtienen las siguientes estimaciones de los parámetros:

$$\alpha\hat{}\lambda_k = d_k \qquad \hat{r}_k = \frac{v_k}{\alpha\hat{}\lambda_k}$$

$$\alpha\hat{}\lambda_j = \frac{d_j}{1 - \sum_{l=j+1}^{k} \hat{r}_l} \qquad \hat{r}_j = \frac{v_j}{\sum_{l=j}^{k} \alpha\hat{}\lambda_l}, j=k-1,\ k-2,\ \ldots, 2, 1$$

Se pueden obtener estimaciones de los parámetros de la misma forma si la suma $\sum_{j=0}^{k} r_j$ no es unitaria, sin más que normalizar los valores que aparecen en el triángulo de siniestros.

Una vez realizada la estimación de los parámetros $\alpha\lambda_i$ y r_j son necesarias estimaciones de $\alpha\lambda_n$ para $n = k+1,...,k+k$, valores no contemplados en el triángulo de siniestros. Dichas estimaciones se pueden obtener de varias formas diferentes, por ejemplo, mediante técnicas de regresión o teniendo algún tipo de información sobre el futuro índice de inflación.

Para calcular la cuantía de los siniestros pendientes a pagar a partir del k-ésimo año de tramitación se determina en primer lugar la provisión respecto a los siniestros del primer año de origen (*0*), de la forma especificada en el método chain-ladder. La provisión propuesta por Hossack, Pollard y Zehwirth (1983) para siniestros de años posteriores es:

$$PSP_{ik} = \frac{n_i}{n_0} \cdot \frac{\alpha\lambda_{i+k+1}}{\alpha\lambda_{i+k}} \cdot PSP_{0k}$$

(ii) La hipótesis considerada en el *método de separación geométrico* es que el producto $\prod_{s=1}^{k} r_s$ es unitario. Se estiman los parámetros de la misma forma que en el método de separación aritmético, multiplicando en este caso las diagonales y columnas del triángulo de siniestros y despejando de forma adecuada.

Por último, se presenta entre los métodos clásicos el método ***loss ratio***, descrito por ejemplo por Craighead (1979), que considera estimaciones del coste incurrido de los siniestros del año i al finalizar cada año de tramitación, $i_{ij} = a_{ij} + o_{ij}$, verificándose si se suma la igualdad $i_{ik} - i_{i,k-1} = a_i \beta_k$ para $k=0,1,...,j$:

$$i_{ij} = \sum_{k=0}^{j} (i_{ik} - i_{i,k-1}) = a_i \sum_{k=0}^{j} \beta_k$$

siendo a_i es el coste total de los siniestros ocurridos el año i y suponiendo que $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = 1$.

Dividiendo ahora la igualdad entre las primas obtenidas en el periodo de origen i se obtienen los *loss ratio* l_{ij}:

$$l_{ij} = \frac{i_{ij}}{P_i} = \frac{a_i}{P_i} \sum_{k=0}^{j} \beta_k = l_i \sum_{k=0}^{j} \beta_k \qquad \text{(IV.2)}$$

l_{ij} representa por tanto el "*loss ratio*" al final del periodo j asociado al periodo de origen i (basado en estimaciones del coste incurrido) y $l_i = l_{i\infty}$ el "loss ratio" final experimentado en el periodo de origen i.

Las ecuaciones definidas en (IV.2) para $j=1,2,...$ se pueden considerar como puntos de una curva $(l_i(t) = l_i h(t))$ en la cual la variable en tiempo continuo t se puede reemplazar por una variable en tiempo discreto j y h es una función de t que verifica:

$$h(j)=\sum_{k=0}^{j}\beta_k$$

La curva $h(t)$ se elige en el conjunto de familia paramétrica de curvas, $\{h(t;\Omega)\}$ en la que el conjunto de parámetros Ω proporcionará una representación razonable de los posibles $h(\cdot)$. Elegir la curva $l_i(t)=l_i\,h\,(t;\omega)$ para algún $\omega\in\Omega$ y estimar l_i y los parámetros ω constituye un problema de ajuste de curvas y por tanto se puede resolver mediante los métodos clásicos de ajuste de curvas. Por ejemplo, Craighead (1979), elige una curva en la familia paramétrica:

$$h(t,\omega)=1-exp\left[\left(-\frac{t}{B}\right)^{C}\right]$$

representándose el parámetro ω mediante el vector (B,C). El problema de estimación consiste en encontrar los valores adecuados para l_i, B y C. El autor propone un algoritmo que resuelve el problema de estimación aunque, como él mismo comenta, el algoritmo no garantiza la mejor estimación de l_i, B y C por lo que sería recomendable utilizar métodos específicos de ajuste de curvas.

Una vez estimados los parámetros l_i y ω como $\hat{l}_i$ y $\hat{\omega}$ respectivamente, $l_i(t)$ se estimará como $\hat{l}_i(t)=\hat{l}_i\,h\,(t;\hat{\omega})$

La estimación de la cuantía de los siniestros ocurridos en el periodo i ($\hat{l}_i$)se obtiene multiplicando $\hat{l}_i$ por las primas de dicho periodo. Los siniestros pendientes se estimarán por tanto como:

$$PSP_{ij} = \hat{i}_i - a_{ij}$$

IV.2.2. OTROS MÉTODOS NO ESTOCÁSTICOS

IV.2.2.1. Proyección de estimaciones físicas

En este método, desarrollado por ejemplo por Taylor (1986), se consideran estimaciones, al final de cada año de tramitación, del coste de los siniestros incurridos un determinado año de origen, de la misma forma que en el método loss-ratio. A diferencia de los métodos anteriores, la diferencia entre dichas estimaciones no se representará como un porcentaje del coste total de los siniestros ($i_{ij} - i_{i,j-1} = a_i\beta_j$) sino como un porcentaje de la estimación del coste pendiente al finalizar el año anterior de tramitación:

$$i_{ij} - i_{i,j-1} = \eta_j o_{i,j-1} \qquad \text{(IV.3)}$$

de donde se puede interpretar el parámetro $1+\eta_j$:

$$1+\eta_j = \frac{c_{ij} + o_{ij}}{o_{i,j-1}} = \frac{\text{siniestros pagados + siniestros pendientes al finalizar el año } j}{\text{siniestros pendientes al comenzar el año } j}$$

$1+\eta_j$ se denomina *factor de desarrollo del periodo j*. η_j representa el porcentaje del coste estimado de los siniestros pendientes al finalizar el año anterior reconocido como parte del coste total al cambiar de estimaciones en dos años.

Por otro lado, se supone que cada año se paga una proporción de los siniestros pendientes del año anterior (denotada mediante g_j, *factor de pago de la provisión*):

$$c_{ij} = g_j o_{i,j-1} \qquad \text{(IV.4)}$$

El problema consiste en estimar los parámetros η_j y g_j de las expresiones (IV.3) y (IV.4) para obtener a partir de ellos la provisión en futuros periodos de tramitación. Sumando las ecuaciones citadas estimaciones de los parámetros para $j=1,2,\ldots,k$ se obtienen como:

$$1+\hat{\eta}_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j}(c_{ij}+o_{ij})}{\sum_{i=0}^{k-j} o_{i,j-1}} \quad \text{y} \quad \hat{g}_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j} c_{ij}}{\sum_{i=0}^{k-j} o_{i,j-1}}$$

Estimaciones para periodos de tramitación posteriores a k se obtienen de la forma acostumbrada, utilizando datos contables de la entidad, mediante técnicas de estimación estadística, etc.

Para determinar la provisión necesaria, se deben proyectar los valores de c_{ij} y o_{ij} para $j+i>k$, de la siguiente forma:

$$o_{ij} = o_{i,k-i}\prod_{l=k-i+1}^{j}(1+\eta_l-g_l) \text{ y } c_{ij} = g_j o_{i,j-1} = o_{i,k-i} g_j \prod_{l=k-i+1}^{j-1}(1+\eta_l-g_l)$$

siendo $o_{i,k-i}$ el último valor estimado.

Finalmente, la provisión para siniestros pendientes se calculará como:

$$PSP_{ij} = \sum_{k=j+1}^{\infty} c_{ik} = \sum_{k=j+1}^{\infty} g_k o_{i,k-1} = o_{i,j}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(g_k\prod_{l=j+1}^{k-1}(1+\eta_l-g_l)\right)$$

IV.2.2.2. Pagos por unidad de riesgo

El método de pagos por unidad de riesgo se basa en la sencilla hipótesis de que en el j-ésimo año de tramitación siempre se paga la misma cantidad por exposición al riesgo, independientemente del año de ocurrencia del siniestro. Es decir, la cuantía pagada en el año j-ésimo respecto a los siniestros ocurridos el año i se puede expresar como $c_{ij} = e_i q_j$, donde e_i representa el volumen de expuestos al riesgo el año i, como puede ser el número de primas.

Es necesario estimar los parámetros q_j que resultan, al sumar las columnas en que aparecen los mismos:

$$q_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j} c_{ij}}{\sum_{i=0}^{k-j} e_i}$$

Los valores de q_j para $j=k+1,k+2,...$ se podrían obtener de forma sencilla mediante alguno de los métodos clásicos de estimación. A partir de estos valores estimados para q_j el valor de la provisión para cualquier año resulta:

$$PSP_{ij} = \sum_{k=j+1}^{\infty} c_{ik} = e_i \sum_{k=j+1}^{\infty} q_k$$

Podría ocurrir también que el factor q_j no fuera constante, detectándose de forma significativa a partir de los datos. En este caso, Taylor (1986) propone estimar q_j como una media ponderada:

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j} \omega_{ij} c_{ij}}{\sum_{i=1}^{k-j} \omega_{ij} e_i}$$

Una forma de elegir ω_{ij} es hacerlo depender del periodo de pago (año físico $i+j$). Por ejemplo, ai se dispone de observaciones hasta el año b y se detecta una discontinuidad en los datos entre los periodos de pago $b'-1$ y b', los pesos podrían ser elegidos como:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & b' < i+j < b \\ 0 & i+j < b' \end{cases}$$

IV.2.2.3. Pagos por siniestro finalizado

La hipótesis básica de este método, planteado originalmente por Fisher y Lange (1973), es que en cualquier periodo de tramitación los pagos realizados son directamente proporcionales al número de siniestros finalizados. Se supone que la constante de proporcionalidad es independiente del periodo de origen, dependiendo del periodo de tramitación.

Se presentan por tanto los datos del triángulo de siniestros como $c_{ij} = n_{ij}\sigma_j$, donde n_{ij} representa el número de siniestros ocurridos el año i cerrados el j-ésimo año de tramitación y la constante σ_j se denominada *pagos por siniestro finalizado*, aunque esta constante no representa realmente los pagos por siniestro finalizado dado que los pagos realizados en cualquier periodo pueden incluir pagos parciales de siniestros no cerrados.

Para estimar el coste en futuros periodos de tramitación es necesario estimar además el número de siniestros que se cerrarán. Respecto a ellos, se supone que cada año j se cierra una proporción ϕ_j de todos los siniestros ocurridos, n_i:

$$n_{ij} = n_i \phi_j$$

de donde se deduce que $\sum_{k=j}^{\infty} n_{ik} = n_i \sum_{k=j}^{\infty} \phi_k$. Por tanto:

$$\frac{n_{ij}}{\sum_{k=j}^{\infty} n_{ik}} = \frac{\phi_j}{\sum_{k=j}^{\infty} \phi_k} = \psi_j$$

La estimación de los parámetros se obtiene, sumando por columnas como:

$$\sigma_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j} c_{ij}}{\sum_{i=0}^{k-j} n_{ij}} \text{ y } \phi_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j} n_{ij}}{\sum_{i=0}^{k-j} n_i}$$

Los valores de n_i se suponen conocidos antes de comenzar la estimación de los parámetros. Se deben estimar por tanto "a priori" basándose, por ejemplo, en datos disponibles sobre el número de expuestos al riesgo y número de siniestros ocurridos en años anteriores completamente liquidados. A partir de estos datos se proyectarán los valores para años pendientes de liquidación. El problema de proyección consiste además en la proyección de n_{ij} como $n_{ij} = n_i \phi_j$ hasta completar los datos no representados en el triángulo de siniestros. A partir de las estimaciones de σ_j y n_{ij}, se estiman los valores que faltan como:

$$c_{ij} = n_{ij}\sigma_j$$

La provisión para siniestros pendientes es, al igual que en métodos anteriores:

$$PSP_{ij} = \sum_{k=j+1}^{\infty} c_{ik}$$

IV.2.2.4. Método de Reid

Por último, entre los métodos no estocásticos, se presenta el método de Reid (1978) que utiliza el concepto de tiempo operacional para el periodo de origen i correspondiente al tiempo real de tramitación j, en lugar del tiempo físico, definido, siguiendo a Bühlmann (1996) como:

$$t_i(j) = \frac{m_i(j)}{n_i}$$

siendo $m_i(j)$ el número de siniestros ocurridos en el periodo de origen i que han sido cerrados j periodos de tiempo después del comienzo del periodo i. $t_i(j)$ representa por tanto la proporción de siniestros ocurridos en el periodo de origen finalizados por tiempo real de desarrollo j. Además, para j entero, $m_i(j) = m_{i,j-1}$, y por tanto:

$$t_i(j) = \frac{m_{i,j-1}}{n_i}$$

$t_i(j)$ es una función no decreciente en j, $0 = t_i(0) \leq t_i(j) \leq t_i(\infty) = 1$

Taylor (1980) plantea además la hipótesis de "orden invariante" que consiste en suponer que no se producen cambios respecto a periodos de origen diferentes en cuanto a la secuencia de pagos ya hechos y por hacer en el futuro. Es decir, la cuantía por siniestro finalizado (σ) no depende del periodo de origen siendo por tanto la cuantía pagada en la j-ésima zona de tiempo operacional ($(t_j, t_{j+1}]$):

$$c_i(t_j, t_{j+1}) = n_i(t_{j+1} - t_j)\sigma(t_j, t_{j+1}) \qquad \text{(IV.5)}$$

donde $[t_0, t_1, \ldots t_r]$ es una partición del intervalo completo de tiempo operacional $[0,1]$ y $\sigma(t_j, t_{j+1})$ los pagos por siniestro finalizado (respecto de los ocurridos en el periodo i) en la j-ésima zona de tiempo operacional. Además, por definición de tiempo operacional, $n_i(t_{j+1} - t_j) = n_i t_{j+1} - n_i t_j$ representa el número de siniestros que han finalizado en dicha zona.

Se conocen los pagos realizados en el j-ésimo periodo de tramitación respecto a los siniestros ocurridos el periodo i:

$$c_{ij} = c_i(t_i(j), t_i(j+1))$$

En general, los valores de $t_i(j)$ para cualquier periodo de origen i y periodo de tramitación j no coinciden con ninguno de los puntos de la partición $[t_0, t_1, \ldots t_r]$, siendo por tanto desconocido $c_i(t_j,t_{j+1})$. Mediante interpolación lineal, suponiendo que $t_i(j-1)$ y $t_i(j)$ están lo suficientemente cerca de tal forma que $c_i(x,y)$ se puede suponer lineal en *x* e *y* para $t_i(j-1) \le x \le y \le t_i(j)$ (para cada *j*), se puede obtener una aproximación a $c_i(t_j,t_{j+1})$ si *k* y *l* (*l*>*k*) son tales que:

$$t_i(k-1) \le t_j \le t_i(k)$$

$$t_i(l-1) \le t_{j+1} \le t_i(l)$$

de la forma:

$$c_i(t_j,t_{j+1}) = \frac{t_i(k)-t_j}{t_i(k)-t_i(k-1)} c_{i,k-1} + \sum_{h=k}^{l-2} c_{ih} + \frac{t_{j+1}-t_i(l-1)}{t_i(l)-t_i(l-1)} c_{i,l-1}$$

Además, no existe una partición "natural" del intervalo de tiempo operacional $[0,1]$ de la misma forma que la hay para tiempo real (años de tramitación, cuatrimestres,...). La partición $[t_0,t_1,...t_r]$ se podría elegir de alguna forma que correspondiera a la división hecha con los periodos de tramitación.

En la expresión (IV.5) es necesario estimar $\sigma(t_j,t_{j+1})$ que se puede obtener como:

$$\sigma(t_j,t_{j+1}) = \frac{\sum_{i \in I_{j,j+1}} c_i(t_j,t_{j+1})}{\sum_{i \in I_{j,j+1}} n_i(t_{j+1}-t_j)} \qquad \text{(IV.6)}$$

donde $I_{j,j+1}$ es el conjunto de periodos de origen para los cuales se dispone de observaciones en el triángulo respecto al tiempo operacional $(t_j, t_{j+1}]$

Los siniestros pendientes al finalizar el k-1 periodo de tramitación son los siniestros pendientes en el tiempo operacional $t_i(k)$:

$$p_{i,k-1} = p_i(t_i(k))$$

donde $p_i(t)$ representa los siniestros pendientes (en valores actuales) respecto al año de origen i en el periodo de tiempo operacional t.

Además,

$$p_i(t) = n_i(t_j - t)\sigma(t, t_j) + \sum_{l=j}^{r-1} n_i(t_{l+1} - t_l)\sigma(t_l, t_{l+1})$$

donde $t_{j-1} \le t \le t_j$.

Combinando las dos expresiones anteriores se obtiene, para $t_{j-1} \le t_i(k) \le t_j$:

$$p_{i,k-1} = n_i(t_j - t_i(k))\sigma(t_i(k), t_j) + \sum_{l=j}^{r-1} n_i(t_{l+1} - t_l)\sigma(t_l, t_{l+1})$$

En general, como ya se ha comentado, $t_i(k)$ no coincidirá con ninguno de los extremos t_l de las zonas de tiempo operacional. En tal caso, $\sigma(t_i(k), t_j)$ no se puede estimar mediante la expresión (IV.6). Sin embargo, demostrado que el intervalo de tiempo operacional $(t_{j-1}, t_j]$ es suficientemente pequeño se puede adoptar, considerando $\sigma(t, u)$ como una función de una variable (tiempo operacional medio:

$\sigma\left(\frac{t+u}{2}\right)$, la siguiente aproximación por interpolación lineal:

$$\sigma(t_i(k),t_j)=\sigma(t_{j-1},t_j)+\frac{\frac{1}{2}(t_j+t_i(k))-\frac{1}{2}(t_{j-1}+t_j)}{\frac{1}{2}(t_j+t_{j+1})-\frac{1}{2}(t_{j-1}+t_j)}(\sigma(t_j,t_{j+1})-\sigma(t_{j-1},t_j))=$$
$$=\sigma(t_{j-1},t_j)+\frac{t_i(k)-t_{j-1}}{t_{j+1}-t_{j-1}}(\sigma(t_j,t_{j+1})-\sigma(t_{j-1},t_j))$$

Se han presentado en este epígrafe diferentes métodos de estimación de la provisión para siniestros pendientes, todos ellos no estocásticos según la clasificación propuesta por Taylor (1986). Estos métodos no consideran el proceso de siniestralidad como una variable aleatoria y no permiten medir la calidad de las estimaciones. A continuación, en el siguiente epígrafe, se generalizan algunos de estos métodos incluyendo variables aleatorias, loo que permitirá conocer el error cometido en las estimaciones. Se incluye algún otro método dado que, como establece el nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, es necesaria la utilización de al menos dos métodos estadísticos diferentes para estimar el importe final de la provisión.

IV.3. MÉTODOS ESTOCÁSTICOS

IV.3.1. GENERALIZACIÓN DE LOS MÉTODOS NO ESTOCÁSTICOS

IV.3.1.1. Chain-ladder

El método chain ladder estocástico, presentado por Bühlman (1979) o Bühlman, Schnieper y Straub (1980), considera el importe de cada uno de los siniestros como una variable aleatoria, calculando la cuantía final de la provisión a partir de esta variable. La variable considerada se denota por $(X_{ij}^{(k)})_m$ y representa el coste del *m*-ésimo siniestro ocurrido en el periodo *i*-ésimo, notificado en el *k*-ésimo, siendo *j* el periodo actual de tramitación[13].

El método estocástico se basa en la hipótesis de que existe $\lim_{j\to\infty}(X_{ij}^{(k)})_m = X_i^{(k)})_m$, siendo este límite el coste total del siniestro *m*-ésimo.

Para dotar de una estructura probabilística que permita estimar los parámetros del modelo y considerar las variables que intervienen en el mismo como variables aleatorias, se establecen las siguientes hipótesis:

a) *Distribución del número de siniestros*. Las variables número de siniestros ocurridos en el año *i*-ésimo, $\{N_i\}$ son estocásticamente independientes y tienen distribución de probabilidad Poisson($E_i\upsilon$), donde υ es un parámetro escalar. Es decir,

[13] Esta variable puede representar también el coste total estimado del siniestro en el periodo de tramitación *j*-ésimo.

$E(N_i)$ es proporcional al volumen de expuestos E_i o número de asegurados.

b) *Independencia entre el retardo en la notificación y número de siniestros.* Si $(K_i)_m$ es el año de notificación del *m*-ésimo siniestro, los conjuntos $\{N_i\}$ y $\{(K_i)_m\}$ son clases de variables estocásticamente independientes: cualquier variable del primer conjunto y cualquier variable del segundo son estocásticamente independientes.

c) *Independencia entre el coste de los siniestros y el número de siniestros.* Los conjuntos $\{N_i\}$ y $\{(X_{ij}^{(k)})_m\}$ son clases de variables estocásticamente independientes.

d) *Independencia entre distintos periodos de origen.* Dados dos periodos de origen diferentes, $i_1 \neq i_2$, los conjuntos $\{N_{i_1}, (X_{i_1 j}^{(k)})_m, (K_{i_1})_m\}$ y $\{N_{i_2}, (X_{i_2 j}^{(k)})_m, (K_{i_2})_m\}$ son clases de variables estocásticamente independientes.

e) *Variables estocásticas de un determinado periodo de origen.* Los pagos realizados respecto a distintos siniestros son estocásticamente independientes. Es decir, las clases $\{(X_{ij}^{(k)})_m\}$ y $\{(X_{ij}^{(k)})_n\}$ para cualquier $m \neq n$ son estocásticamente independientes. Además las variables del conjunto $\{(X_{ij}^{(k)})_m\}$ con i, j y k constantes y m variable tienen la misma distribución. $\{(K_i)_m\}$ son también estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas.

f) *Estabilidad de las tasas de desarrollo de los importes de siniestros individuales.* El siniestro *m*-ésimo verifica:

$$E((X_{i,j+1}^{(k)})_m / (X_{i,j}^{(k)})_m = x) = \beta_j^{(k)} x \text{ y}$$

$$V((X_{i,j+1}^{(k)})_m / (X_{i,j}^{(k)})_m = x) = (\sigma_j^{(k)})^2 \upsilon(x)$$

donde $\upsilon(\cdot)$ es una función estrictamente positiva.

$\beta_j^{(k)}$ es la razón esperada entre los pagos hasta el final del año $j+1$-ésimo y los pagos hasta el final del j-ésimo que depende del periodo de notificación, a diferencia del caso no estocástico. La estimación de este parámetro es necesaria para calcular la provisión para siniestros pendientes en una año determinado.

Bühlman y otros (1980) buscan estimadores insesgados del mismo, para considerar finalmente una media ponderada de dichos estimadores. Demuestran que $\dfrac{(X_{ij}^{(k)})_m}{(X_{i,j-1}^{(k)})_m}$ es insesgado para $\beta_{j-1}^{(k)}$. Como los pagos realizados respecto a distintos siniestros son variables aleatorias independientes también es insesgado el estimador construido a partir de los pagos totales:

$$\hat{\beta}_{j-1}^{(k)} = \frac{\sum_m (X_{ij}^{(k)})_m}{\sum_m (X_{i,j-1}^{(k)})_m} = \frac{X_{ij}^{(k)}}{X_{i,j-1}^{(k)}} \tag{IV.7}$$

siendo su varianza:

$$V(\hat{\beta}_{j-1}^{(k)}) \approx CTE \cdot \frac{(\sigma_{j-1}^{(k)})^2 U_i^{(k)}}{(X_{i,j-1}^{(k)})^2}$$

donde $U_i^{(k)}$ es el número de siniestros ocurridos en el año i y notificados en el año k.

El estimador propuesto es una media ponderada de los estimadores (IV.7) con ponderaciones $c_i = \frac{(X_{i,j-1}^{(k)})^2}{U_i^{(k)}}$ ~~. Es decir,~~ el estimador utilizado finalmente es:

$$\hat{\beta}_{j-1}^{(k)} = \frac{\sum_i \frac{X_{ij}^{(k)} \cdot X_{i,j-1}^{(k)}}{U_i^{(k)}}}{\sum_i \frac{(X_{i,j-1}^{(k)})^2}{U_i^{(k)}}}$$

La provisión para siniestros pendientes se calcula a partir de estas estimaciones de igual forma que en el caso no estocástico.

IV.3.1.2. Pagos por unidad de riesgo

La versión estocástica del método de pagos por unidad de riesgo, planteado por Pollard (1983), introduce en la definición del modelo un término que representa el error aleatorio. Para cada siniestro *m*, la variable aleatoria $(X_{ij})_m$ que representa los pagos del mismo en el *j*-ésimo año de tramitación se define como:

$$(X_{ij})_m = q_j + (\varepsilon_{ij})_m$$

donde q_j es el parámetro a estimar y $(\varepsilon_{ij})_m$ el error estocástico representado por una variable aleatoria de media cero. La media de los pagos realizados respecto a todos los siniestros es, teniendo en cuenta que el error tiene media nula:

$$E(X_{ij}) = E(\sum_m (X_{ij})_m) = n_i q_j$$

donde n_i es el número de siniestros ocurridos el año de origen i-ésimo. Por el Teorema Central del Límite la variable anterior es aproximadamente:

$$X_{ij} \approx n_i q_j + \varepsilon_{ij}$$

siendo ε_{ij} una variable aleatoria con distribución normal de media cero y matriz de covarianzas $n_i V$. La matriz $n_i V$ contiene en la celda (j,k) la covarianza $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ik})$, es decir, la covarianza entre los pagos realizados en los años j y k que se suponen independientes del año de origen i.

Se supone además que los pagos realizados respecto a distintos siniestros son estocásticamente independientes y se denota mediante ε_i al vector que contiene las perturbaciones aleatorias ε_{ij} y cuya varianza es:

$$Var(\varepsilon_i) = n_i V_i$$

Se deben estimar por tanto los parámetros q_j y la matriz de covarianzas V, a partir de los datos empíricos. El elemento (j,k) de la matriz V se estimará por medio de la covarianza empírica de todos los pares de observaciones $((X_{ij})_m, (X_{ik})_m)$, para j y k fijos y q_j como:

$$\hat{q}_j = \frac{\sum_{z,i \in I_j} c_{zij}}{\sum_{i \in I_j} n_i} = \frac{\sum_{i \in I_j} c_{ij}}{\sum_{i \in I_j} n_i}$$

Para calcular la provisión se hace una partición de la matriz inversa de V en base a la submatriz V_{11}^{1} que es la matriz de covarianzas de orden $(k+1)x(k+1)$ respecto a los años de desarrollo $0,1,...,k$, donde k es el periodo hasta el que se ha desarrollado completamente el periodo de origen i:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11}^{1} & V_{12}^{1} \\ V_{21}^{1} & V_{22}^{1} \end{pmatrix}$$

y el vector q, de forma similar, en:

$$q = \begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \end{pmatrix}$$

separando las primeras $k+1$ componentes del vector q del resto.

Si c es el vector de dimensión $k+1$ formado por X_{ij}, $j=0,1,...,k$, el vector de siniestros pendientes estará formado por X_{ij}, $j=k+1,k+2,...$, siendo su esperanza condicionada por c, suprimiendo el subíndice de n para simplificar la notación:

$$nq_{(2)} - (V_{22}^{1})^{-1} V_{21}^{1} (c - nq_{(1)})$$

La matriz de covarianzas es:

$$n(V_{22}^{1})^{-1}$$

donde $q_{(2)}$, V_{21}^{1} y V_{22}^{1} se estiman como se ha indicado, a partir de los datos empíricos y realizando proyecciones adecuadas de los mismos.

IV.3.1.3. Método de separación

El método de separación estocástico, presentado por Linnemann (1982), considera los pagos de cada siniestro de forma individual. Para el siniestro *m*-ésimo, ocurrido en el periodo *i*, en el *j*-ésimo periodo de tramitación se denota por $(H_{ij})_m$ al número de pagos realizados y por $(X_l)_m$ a la cuantía del *l*-ésimo pago parcial. La cuantía pagada hasta el *j*-ésimo año de tramitación es por tanto:

$$(X_{ij})_m = \sum_{l=l}^{(H_{ij})_m} (X_l)_m$$

Se supone que para cada siniestro *m* las variables aleatorias $(X_l)_m$ son estocásticamente independientes de $(H_{ij})_m$ siendo su esperanza:

$$E((X_l)_m) = e_i \rho_j \lambda_{i+j}$$

$$\text{y } E((H_{ij})_m) = \Pi_{ij}, \text{ función periódica en } i$$

El periodo de la última función representa el efecto de estacionalidad y se puede considerar como el número de periodos con origen en un año. Por ejemplo, si se consideran trimestres el periodo será cuatro. Además, el efecto de estacionalidad hace que la expresión se simplifique para periodos *j* a partir del año siguiente a la fecha de ocurrencia del siniestro, pasando a ser $E((H_{ij})_m) = \Pi_j$, independiente de *i*. Los parámetros e_i, ρ_j y λ_{i+j} tienen el mismo significado que en el caso no estocástico.

La estimación de e_i, ρ_j, λ_k y π_{ij} propuesta por Linnemann se obtiene por el método de mínimos cuadrados proponiendo las funciones de pérdida cuadráticas:

$$Q_1 = \sum_i \sum_j \omega_{ij}^{(C)} \left(\frac{x_{ij}}{h_{ij}} - e_i \rho_j \lambda_{i+j} \right)^2 \quad \text{y} \quad Q_2 = \sum_i \sum_j \omega_{ij}^{(H)} \left(\frac{h_{ij}}{n_i} - \pi_{ij} \right)^2$$

siendo las ponderaciones $\omega_{ij}^{(C)} = h_{ij}$ y $\omega_{ij}^{(H)} = 1$ y x_{ij} y h_{ij} la suma (sobre *m)* de $(x_{ij})_m$ y $(h_{ij})_m$, respectivamente.

Se deben calcular las derivadas de ambas funciones e igualarlas a cero para obtener las estimaciones de los parámetros desconocidos. La solución de las ecuaciones normales no es sencilla y el autor demuestra que las estimaciones de e_i, ρ_j y λ_k se pueden obtener de forma iterativa mediante un proceso que converge rápidamente.

La estimación de π es más sencilla. Se demuestra fácilmente que π_{ij} puede estimarse como la media ponderada de $\frac{h_{ij}}{n_i}$ siendo las ponderaciones $\omega_{ij}^{(H)}$.

Una vez calculadas las estimaciones necesarias se observa que:

$$E(H_{ij}) = \sum_m E((H_{ij})_m) = n_i \pi_{ij} \quad \text{y}$$

$$E(X_{ij}) = n_i E((X_{ij})_m) = n_i E((H_{ij})_m) E((X_l)_m) = n_i \pi_{ij} e_i \rho_j \lambda_{i+j}.$$

Pudiéndose estimar por tanto X_{ij} para posteriores periodos como:

$$X_{ij} = n_i \hat{\pi}_{ij} \hat{e}_i \hat{\rho}_j \hat{\lambda}_{i+j},$$

lo que permite calcular a partir de estos valores la provisión para siniestros pendientes.

IV.3.1.4. Método de Reid

La versión estocástica del método de Reid (1978) reducido utiliza el tiempo operacional y la cuantía de los siniestros como variables explicativas. Se basa en la hipótesis de que todos los periodos de origen generan idénticas generan idénticas experiencias de siniestralidad, aparte de distorsiones impuestas por el efecto de la inflación, cambios en la velocidad de finalización de los siniestros y proporción de siniestros nulos.

La idea del método es ajustar una función de distribución $G(x,t)$ a la variable bidimensional (X,T) donde X representa el coste de un siniestro y T el tiempo operacional a la finalización del mismo. Es decir, se trata de encontrar una función $G(x,t)$ para un periodo de origen dado, denominado *periodo base*:

$$G(x,t) = P(X \leq x, T \leq t)$$

para determinar a partir de ella las correspondientes funciones de distribución adecuadas a cualquier periodo de origen de los siniestros ($G_i(x,t)$).

El trabajo de Reid (1978) busca funciones pertenecientes a familias paramétricas de funciones de distribución que se ajusten a los datos disponibles, diferenciando entre siniestros con coste cero y siniestros no nulos, pudiendo ajustar una función diferente a cada caso. Es decir,

$$G(x,t) = pG_z(t) + (1-p)G_{nz}(x,t)$$

donde p denota la proporción de siniestros que resultan en pagos nulos con función de distribución $G_z(\cdot)$, y $G_{nz}(\cdot,\cdot)$ que es la función de distribución conjunta del tiempo operacional y de la cuantía respecto a siniestros no nulos. La distinción entre ambas componentes dota de mayor eficiencia a la estimación de $G(\cdot,\cdot)$, aunque no en más general que la primera.

Se tienen en cuenta también los siniestros que constituyen el denominado "grupo final" ("end group") caracterizados por un gran retardo en su finalización ($t > t_M$) y los siniestros incluidos en el "grupo de exceso" ("excess group") con coste elevado ($x > x_M$). Es aconsejable estimar en primer lugar la función de distribución conjunta $G(x,t)$ en la región $x < x_M$ y $t < t_M$ y extender esta función de distribución truncada a las regiones que constituyen el "grupo de exceso" y el "grupo final".

La función de distribución para valores de t superiores al máximo considerado se puede obtener mediante extrapolación a partir de valores de G para t menores. Respecto al problema de evaluación de G para siniestros con coste elevado, éste se puede solucionar combinando alguna de las siguientes alternativas: aumentando la cantidad de datos disponibles, por ejemplo agregando datos respecto a otra cartera de pólizas de similares características, usar material publicado respecto a costes de los siniestros o insertar en los datos de menor valor de x una cola seleccionada de alguna familia particular de distribuciones estadísticas conocidas que tengan propiedades adecuadas para representar la cola de la distribución del coste de los siniestros.

De forma equivalente se puede usar la función de distribución "decumulativa" $H(x,t)$ que representa la probabilidad de que un siniestro aleatorio, de un periodo de origen relevante, finalice con posterioridad al tiempo operacional t y por un coste superior a x: $H(x,t)=P(X>x,T>t)=1-G(x,\infty)-G(\infty,t)+G(x,t)$. A partir de dicha función se puede obtener $G(x,t)$ como:

$$G(x,t)=1-H(x,0)-H(0,t)+H(x,t)$$

La versión empírica de la función $H(\cdot,\cdot)$ denotada mediante $\hat{H}(\cdot,\cdot)$ (proporción observada de siniestros del periodo base que finalizaron con posterioridad al tiempo operacional t y por una cuantía superior a x) se puede expresar en términos de la siguiente notación:

$$\hat{H}(\upsilon_e,t)=\sum_{t(g)>t}\frac{n_{ig}^e}{n_i} \tag{IV.8}$$

donde i representa el periodo base, n_i el número de siniestros ocurridos en el periodo i, n_{ig} el número de siniestros ocurridos en i finalizados en la fecha g y cuyo coste esta en el intervalo (υ_e,∞) y $t(g)$ denota el tiempo operacional correspondiente al tiempo real g.

Como se ha comentado, la existencia del "grupo de exceso" y del "grupo final" complica, en la práctica, la expresión anterior. El primero necesita únicamente una redefinición de n^e, reemplazando este valor por:

$$n_{ig}^e - n_{ig}^M$$

donde (υ_M, ∞) es el rango del coste de los siniestros incluidos en dicho grupo. La cola de la cuantía de los siniestros se inserta aquí de acuerdo a alguna función de distribución adecuada.

Respecto al grupo final en el que $t > t_M$, la función $\hat{H}(x,t)$ se define mediante la expresión (IV.8) únicamente para $t < t_M$, representando $\hat{H}(x,t_M)$ el "grupo final". $H(x,t)$ para $t > t_M$ se estima mediante alguna de las alternativas antes descritas.

Una vez estimada la función *H(x,t)* para el periodo base considerado se calcula a partir de ella la proporción estimada de siniestros del periodo de origen *i* con coste superior a *x* y retardo en la finalización en el intervalo $(t_i(j), t_i(j+1)]$ como:

$$\hat{H}(x,t_i(j)) - \hat{H}(x,t_i(j+1))$$

que, si se tiene en cuenta el parámetro que representa el efecto de la inflación que permite pasar del intervalo de tiempo operacional $(t_0(j), t_0(j+1)]$ en el periodo de origen *0* al intervalo $(t_i(j), t_i(j+1)]$ de periodo de origen *i* ($\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{0j}} = \lambda_{i0:j}$), se convierte en:

$$\hat{H}\left(\frac{x}{\lambda_{i0:j}},t_i(j)\right)-\hat{H}\left(\frac{x}{\lambda_{i0:j}},t_i(j+1)\right)$$

Para estimar $\lambda_{i0:j}$ es necesario considerar intervalos de tiempo operacional idénticos con respecto a periodos de origen 0 e i. Es natural adoptar como tales intervalos de tiempo operacional aquellos que coinciden con periodos de desarrollo (en tiempo real) en el periodo base. De esta forma se consideran intervalos de desarrollo en tiempo real:

$$(t_i^{-1}(t_0(j)),t_i^{-1}(t_0(j+1))]$$

cuyo intervalo de tiempo operacional coincide con el del periodo base, $(t_0(j),t_0(j+1)]$.

Aparte del efecto del parámetro λ, los siniestros respecto ambos intervalos de desarrollo son iguales en cuantía esperada. Por tanto, una comparación de las cuantías medias experimentadas en ambos intervalos proporcionan la siguiente estimación de dicho parámetro:

$$\Lambda_{ij}=\frac{\int_0^{x_M} x\cdot dx(\hat{H}_i(x,t_i^{-1}(t_0(j)))-\hat{H}_i(x,t_i^{-1}(t_0(j+1))))}{\int_0^{x_M} x\cdot dx(\hat{H}_0(x,j)-\hat{H}_0(x,j+1))}$$

donde $\hat{H}_i(x,t)$ denota la función de distribución modelada para el periodo de origen i. Dicha función de distribución aparece como $\hat{H}(\frac{x}{\lambda_{i0:j}},t_i(j))$ para $t=t_i(j)$, j entero, y es evaluada en puntos intermedios de t por interpolación. Obviamente $\hat{H}_0(x,t)=\hat{H}(x,t)$.

La cuantía de siniestros pendientes respecto a un año de origen i se estima, sin tener en cuenta el parámetro λ, como:

$$n_i \int_{t(b)}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} x \cdot \hat{g}(x,t) \cdot dx \cdot dt$$

donde $\hat{g}(\cdot,\cdot)$ es la función de densidad asociada a la función de distribución $\hat{G}(\cdot,\cdot)$ (obtenida a partir de $\hat{H}(\cdot,\cdot)$) y $t(b)$ el tiempo operacional correspondiente al momento de evaluación de la provisión.

La estimación básica de la función de distribución $\hat{G}(\cdot,\cdot)$ expresa los pagos de los siniestros ocurridos en el año i en valores monetarios del periodo de desarrollo j demostrado que los pagos en cuestión caen dentro del intervalo de tiempo operacional $(t_i(j),t_i(j+1)]$. Para tener en cuenta la inflación es necesario considerar dos puntos: proyección de futuras velocidades de finalización y proyección de futuros parámetros que representen la inflación.

Como se ha puesto de manifiesto en el desarrollo anterior, la proyección de siniestros pendientes se hace en diferentes etapas. En primer lugar es necesario proyectar futuras velocidades de finalización F_{ij} para determinar los valores $t_i(j)$ correspondientes a futuros j.

A continuación se determinan los tiempos reales de desarrollo $t_i^{-1}(t_0(j))$ correspondientes (en tiempo operacional) a periodos de desarrollo íntegros del periodo base.

Seguidamente se eligen valores Λ_{ij} para futuros j que describan el efecto de la inflación entre periodos de tramitación del año base de origen y el correspondiente intervalo de tiempo de tramitación con periodo de origen i.

Por último se calculan los pagos de los siniestros correspondientes al intervalo de desarrollo, $(t_i^{-1}(t_0(j)), t_i^{-1}(t_0(j+1))]$ mediante la fórmula:

$$n_i \int_{t_1}^{t_2} \int_{0+}^{\infty} \Lambda_{ij} \cdot x \cdot \hat{g}(x,t) \cdot dx \cdot dt$$

donde $(t_1, t_2]$ denota el intervalo $(t_0(j), t_0(j+1)]$.

IV.3.2. OTROS MÉTODOS ESTOCÁSTICOS

Existen, además de los métodos expuestos anteriormente, otros estocásticos. Por ejemplo el ***método see-saw***, planteado por Taylor (1981) que, al igual que el método de Reid, utiliza el concepto de tiempo operacional que se ha definido como:

$$t_i(j) = \frac{m_i(j)}{n_i}$$

siendo $m_i(j)$ el número de siniestros ocurridos en el periodo de origen i que han sido cerrados j periodos después del comienzo del periodo i.

A partir del concepto de tiempo operacional se define el tiempo operacional medio $\bar{t}_{ij}$ durante el j-ésimo periodo de tramitación como:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{t(j) + t(j+1)}{2}$$

Es necesario definir otro concepto relacionado con el tiempo operacional medio, para el cual se debe considerar una partición $\{u_0, \ldots, u_r\}$ del intervalo de tiempo operacional $[0,1]$. Dada dicha partición, se define el *tiempo operacional reducido* asociado al punto u_k como:

$$\bar{t}_{ij}^{(k)} = \bar{t}_{ij} \wedge u_k = min(\bar{t}_{ij}, u_k)$$

Se utiliza también en el planteamiento del modelo la velocidad de finalización de los siniestros, $f_i(j)=\dfrac{\partial t_i(j)}{\partial j}$, que se puede estimar como $\dfrac{n_{ij}}{n_i}$ donde n_{ij} es el número de siniestros que han finalizado en el periodo $(t_i(j),t_i(j+1))$.

Se define $f_{ij}^{(k)}$ como:

$$f_{ij}^{(k)}=\begin{cases} f_{ij} & \text{si } \bar{t}_{ij}\in(u_{k-1},u_k] \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Estos elementos son suficientes para plantear el modelo see-saw, un modelo lineal que representa los pagos por siniestro finalizado en función del tiempo operacional y de la velocidad de finalización:

$$S_{ij}=\alpha+\sum_{k\in S}\beta_k\bar{t}_{ij}^{(k)}+\sum_{k\in T}\gamma_k f_{ij}^{(k)}+\varepsilon_{ij}$$

donde $S,T\subset\{1,\dots,r\}$ son conjuntos para los cuales se dispone de observaciones del tiempo operacional reducido y de la velocidad de finalización, α,β y γ_k son constantes y ε_{ij} representa el error estocástico del modelo, una variable aleatoria con media cero y varianza proporcional a $\dfrac{1}{n_{ij}}$.

Se puede considerar también el modelo see-saw invariante definido mediante la expresión:

$$S_{ij}=\alpha+\sum_{k\in S}\beta_k\bar{t}_{ij}^{(k)}+\frac{\gamma}{f_{ij}}+\varepsilon_{ij}$$

Este modelo se basa por tanto en la hipótesis de que los pagos esperados por siniestro finalizado en un periodo de desarrollo dado respecto a un periodo de origen dado es una función de dos variables: el tiempo medio operacional transcurrido en dicho periodo de desarrollo y la velocidad de finalización experimentada en el mismo.

Se supone además que para cualquier periodo de tramitación respecto a cualquier periodo de origen dado, la cuantía esperada de siniestros pendientes en valores monetarios actuales es invariante bajo variaciones de futuras velocidades de finalización.

En cualquiera de los dos modelos definidos el término de error es una variable aleatoria con media cero y varianza dada por:

$$V(S_{ij}) = n_{ij}^{-1}\varsigma_j$$

Con poca información el error las estimaciones serán bastante sesgadas pero, para un número elevado de datos, el Teorema Central del Límite asegura normalidad en ε_{ij}. Se supone además que las variables aleatorias ε_{ij} forman un conjunto de variables estocásticamente independientes.

La estimación de los parámetros que aparecen en ambos modelos, debido a la heterocedasticidad se hace utilizando regresión por el método de mínimos cuadrados generalizado considerando la siguiente función de riesgo:

$$\sum_{i,j} n_{ij}\varsigma_j^{-1}(s_{ij} - \hat{s}_{ij})^2$$

donde la suma se realiza sobre todas las celdas (i,j) disponibles y $\hat{s}_{ij}$ es el estimador de regresión de σ_{ij} de acuerdo a cualquiera de los dos modelos utilizados.

Se han enumerado en este capítulo distintos métodos de estimación de la provisión para siniestros pendientes, tanto estocásticos como no estocásticos, utilizados en diferentes países. En España, antes del nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, la provisión para siniestros pendientes se estimaba utilizando el método individual de cálculo. El nuevo reglamento deja abierta la posibilidad, como ya se ha señalado, de la utilización de métodos estadísticos para el cálculo de las provisiones para prestaciones.

Existen además otros métodos de cálculo de la provisión basados en procesos estocásticos, diferentes a los expuestos anteriormente que representan la siniestralidad de la compañía en un ambiente dinámico y se exponen en los siguientes capítulos: métodos basados en procesos puntuales o en procesos de Markov.

En el Capítulo siguiente se presentan métodos de cálculo de las provisiones basados en procesos puntuales, además de la metodología necesaria para aplicar los mismos. Se plantea además, en el último Capítulo, un nuevo método que considera mixturas de distribuciones como marca o característica del proceso de Poisson que representa el número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. Al ser necesario contrastar el resultado de este método con el obtenido utilizando algún otro, se han presentado distintos métodos en este Capítulo para que la entidad aseguradora seleccione alguno de ellos que permita contrastar las distintas estimaciones obtenidas. Para completar los métodos enumerados se ha acompañado a los mismos de referencias bibliográficas.

V. MÉTODOS DINÁMICOS PARA EL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN PARA PRESTACIONES

V. MÉTODOS DINÁMICOS PARA EL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN PARA PRESTACIONES

V.1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la siniestralidad de una compañía de seguros y, en particular, su aplicación al estudio de la solvencia dinámica de la misma es de vital importancia. Para ello no es suficiente conocer cuál es la distribución de la variable aleatoria que modela el coste del total de los siniestros ocurridos en un momento determinado, sino que será preciso saber cuál va a ser su evolución a lo largo del tiempo. El conocimiento de esta variable aleatoria a lo largo del tiempo permitirá también poder determinar con qué reservas debe contar la compañía para hacer frente en cualquier momento a los pagos por siniestros ocurridos.

En el presente Capítulo se establecen las bases teóricas necesarias para desarrollar nuevos métodos de cálculo de la provisión para prestaciones, basados en procesos estocásticos, que permitan estudiar el fenómeno de la siniestralidad desde un punto de vista dinámico. Los procesos estocásticos nos servirán para estudiar los fenómenos aleatorios en un ambiente dinámico, es decir, en un ambiente cambiante en el que, por tanto, la variable tiempo juega un papel fundamental.

Un *proceso estocástico*, siguiendo a Malliaris y Brock (1991) es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$, también denotada como $\{X_t\}_{t\in T}$, definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. T se denomina espacio paramétrico y puede ser cualquier conjunto aunque, en general, el parámetro t representa la variable tiempo. Si T es contable, en particular el conjunto de los números naturales incluido el cero, se denominan *procesos en tiempo discreto* y si T es el conjunto de los números reales o cualquier subconjunto del mismo se denominan *procesos en tiempo continuo.*

La definición de proceso estocástico es muy general y abarca multitud de casos diferenciando variables aleatorias discretas, continuas, espacios paramétricos numerables, finitos, etc. o diferentes propiedades que deben verificar las variables aleatorias que constituyen el proceso estocástico. En el presente Capítulo nos referimos en especial a procesos de Poisson por ser éstos los que mejor se adaptan, en el caso estudiado en el Capítulo siguiente, al número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. Se tratarán además los procesos de Markov para ser aplicados de igual forma al cálculo de las provisiones para prestaciones.

Se observa también el creciente uso de procesos estocásticos que se comportan como martingalas en su aplicación al estudio de la Teoría del Riesgo, por ejemplo en los trabajos de Gerber (1973), Delbaen y Haezendonck (1985, 1986), Embrechts (1995) o Grigelionis (1998). Su concepto tiene en cuenta la información de que dispone la compañía a lo largo del tiempo, sintetizada en σ-álgebras crecientes. En la estimación de siniestros pendientes es también importante, como se puede observar en el trabajo de Arjas (1989), dado que dichas estimaciones se basan en la información disponible hasta el momento de valoración de la provisión.

Para definir las martingalas es necesario establecer con anterioridad las bases de su concepto. Para ello se introducen a continuación los conceptos fundamentales de esperanzas condicionadas a σ-álgebras y de procesos adaptados para, finalmente, definir el concepto de martingala.

Sean $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, g una σ-álgebra ($g \subset \Im$) y X una variable aleatoria P-integrable. La *esperanza condicional de X respecto a la σ-álgebra g* es una variable aleatoria g-medible, $E(X/g)$, que verifica:

$$\int_G E(X/g) \cdot dP = \int_G E(X/g) \cdot dP \,,\ \forall G \in g$$

La *probabilidad condicional del suceso B respecto a g* se define como:

$$P(B/g) = E(1_B/g) \text{ c.s.}$$

Si $g \subset \Im$ y X es g-medible, entonces $E(X/g) = X, P_g - c.s.$, lo que significa que difieren únicamente en un conjunto de medida nula.

Un conjunto $(\Im_t)_{t \in T}$ de σ-álgebras de $\Im$ es una *filtración* si es una colección no decreciente de σ-álgebras. Es decir, $\Im_t \subset \Im_s \quad \forall t \leq s$. Ello significa que la información que contienen las σ-álgebras es creciente con el tiempo.

Dado $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, $(\Im_t)_{t \in T}$ una filtración y $(X_t)_{t \in T}$ una colección de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \Im, P)$, se dice que $(X_t)_{t \in T}$ es un *proceso adaptado a $(\Im_t)_{t \in T}$* si X_t es $\Im_t$-medible $\forall t \in T$

Finalmente, en el contexto de procesos adaptados y habiendo definido previamente la esperanza condicional respecto a una σ-álgebra, dado $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $(X_t)_{t\in T}$ un proceso adaptado a $(\Im_t)_{t\in T}$, se dice que $(X_t)_{t\in T}$ es una martingala si $E|X_t| < \infty$, $\forall n$ y $E(X_t / \Im_s) = X_s \quad \forall s \leq t$

$(X_t)_{t\in T}$ es una *supermartingala* (o *submartingala*) si la segunda condición se define mediante la desigualdad $E(X_t / \Im_s) \leq X_s$ $(E(X_t / \Im_s) \geq X_s), \forall s \leq t$.

$\Im_s$ representa, en el contexto del análisis de la siniestralidad en un momento determinado, la información que la compañía tiene sobre el proceso de riesgo hasta dicho instante.

V.2. PROCESOS DE MARKOV

V.2.1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Siguiendo a Srinivasan y Mehata (1988), un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ con espacio de estados E discreto, finito o numerable, es un *proceso de Markov* si para cualesquiera $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ la función de cuantía verifica la *propiedad de Markov*:

$$P(X_{t_n} = i_n / X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n / X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \qquad \text{(V.1)}$$

para todo $i_k \in E$, $k=0,1,2,\ldots,n-1,n$.

Si las variables aleatorias X_t son continuas la propiedad de Markov se enuncia en términos de la función de distribución:

$$P(X_{t_n} \leq x_n / X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} \leq x_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

para cualesquiera valores de $t_k \in T$ y x_k, $k=0,1,2,\ldots,n-1,n$.

Si el espacio de estados E es discreto el proceso de Markov se denomina *cadena de Markov* y se diferencia entre espacio paramétrico T discreto y espacio paramétrico continuo. Son las cadenas de Markov las que se utilizarán más adelante en diferentes métodos de cálculo de la provisión para prestaciones. Para su aplicación se enuncian a continuación las propiedades más importantes de las mismas.

Si el ***espacio paramétrico*** es ***discreto*** la cadena de Markov se puede considerar como una sucesión de variables aleatorias $\{ X_n \}_{n \in N}$, suponiendo en el caso más general que el espacio paramétrico es numerable, que representan el estado del sistema en el instante *n*. La propiedad de Markov definida en (V.1) nos dice que para determinar el futuro del proceso se necesita únicamente el último valor conocido, prescindiendo de todos los anteriores.

Para determinar la ley de probabilidad de una cadena de Markov $\{ X_n \}_{n \in N}$ es suficiente especificar, para todo valor $n \geq m \geq 0$ y cualesquiera estados *i* y *j*, $i, j \in E$, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X_n:

$$P^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_i^{(n)}, \ldots)$$

donde $p_i^{(n)} = P(X_n = i)$, $\sum_{n \geq 0} p_i^{(n)} = 1$ y $0 \leq p_i^{(n)} \leq 1$ y las probabilidades de transición:

$$p_{ij}^{(m,n)} = P(X_n = j / X_m = i)$$

que representan la probabilidad de que la cadena pase del estado *i* en el instante *m* al estado *j* en el instante *n*.

De esta forma es posible calcular probabilidades asociadas a cualquier vector aleatorio aplicando la propiedad de Markov, de la siguiente forma:

$$P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_k} = i_k) = p_{i_1}^{(n_1)} \cdot p_{i_1,i_2}^{(n_1,n_2)} \cdot p_{i_2,i_3}^{(n_2,n_3)} \cdot \ldots \cdot p_{i_{k-1},i_k}^{(n_{k-1},n_k)}$$

Es interesante considerar el caso en el que dichas probabilidades no dependen de los valores de m y n sino únicamente de la diferencia n-m, denominándose en este caso *cadenas de Markov homogéneas*. Las probabilidades de transición en una etapa se denotan por:

$$p_{ij} = P(X_{m+1} = j / X_m = j)$$

para cualquier valor de m, y las probabilidades de transición en n etapas:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j / X_m = i)$$

para cualesquiera valores de m y n.

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov homogénea verifican la *ecuación de Chapman-Kolmogorov*:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

para cualesquiera valores de m y n, $n, m \geq 0$, definiendo previamente:

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov no homogénea verifican también la ecuación de Chapman-Kolmogorov, formulada en este caso como:

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m,u)} p_{kj}^{(u,n)}$$

para todo $m < u < n$ y para todo valor de $i, j \in E$.

El tratamiento de las cadenas de Markov con ***espacio paramétrico continuo***, normalmente $T = \mathbb{R}$ o $T = [0, \infty)$, es diferente al caso en que el espacio paramétrico T es discreto. Son procesos estocásticos $\{X_t, t \in T\}$ que verifican la propiedad de Markov definida en la ecuación (V.1) y quedan perfectamente determinadas mediante las probabilidades de transición:

$$p_{ij}^{(s,t)} = P(X_t = j / X_s = i) \text{ para cualquier valor } s \leq t, s, t \in \mathbb{R}$$

que verifican $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(s,t)} = 1$ y $p_{ij}^{(s,t)} \geq 0$

Dado que el espacio paramétrico T es continuo, el papel de las probabilidades de transición en una etapa lo desempeñan las *funciones de intensidad de paso* suponiendo que la cadena se encuentra en el estado i:

$$\lambda_i(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}^{(t,t+h)}}{h}$$

y las *funciones de intensidad de transición* de i a j:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}^{(t,t+h)}}{h}$$

Ello significa que si la cadena de Markov se encuentra en el estado i en el instante s, la probabilidad de transición al estado j en un intervalo infinitesimal

$(t,t+h)$ es $\lambda_{ij}(t)h+o(h)$ y la probabilidad de que la cadena permanezca en el mismo estado es $1-\lambda_i(t)h+o(h)$.

Si las funciones de intensidad no dependen de t se dice que la cadena de Markov es homogénea, de la misma forma que ocurría en el caso anterior.

Para obtener las probabilidades de transición de una cadena de Markov con espacio paramétrico continuo, en general se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, denominadas *ecuaciones de Kolmogorov*. Para poder obtener las probabilidades de transición a partir de las citadas ecuaciones es necesario plantear las siguientes hipótesis, como puede verse en la obra de Parzen (1972):

Hipótesis 1. Para todo valor $i \in S$, existe una función continua no negativa, $\lambda_i(t) \geq 0$ definida por el límite:

$$\lambda_i(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}^{(t,t+h)}}{h}$$

Hipótesis 2. Para todo $i, j \in S, i \neq j$, existe una función continua no negativa, $\lambda_{ij}(t) \geq 0$ definida por el límite:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}^{(t,t+h)}}{h}$$

Hipótesis 3. Fijado el valor j, el paso al límite en la ecuación anterior es uniforme respecto a i.

Si $p_{ij}^{(s,t)} = P(X_t = j / X_s = i)$ son las probabilidades de transición de una cadena de Markov en tiempo continuo y se verifican las hipótesis anteriores entonces dichas probabilidades de transición verifican la siguiente ecuación diferencial denominada *ecuación adelantada de Kolmogorov*, calculando el límite respecto al valor del tiempo más cercano:

$$\frac{\partial p_{ij}^{(s,t)}}{\partial t} = -\lambda_j(t) p_{ij}^{(s,t)} + \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(s,t)} \lambda_{kj}(t)$$

con condición inicial $p_{ij}^{(s,s)} = \delta_{ij}$, siendo δ_{ij} la función delta de Kronecker.

Si únicamente se verifican las hipótesis 1 y 2, las probabilidades de transición verifican la ecuación diferencial denominada *ecuación atrasada de Kolmogorov*, calculando en este caso el límite respecto al valor del tiempo más lejano:

$$\frac{\partial p_{ij}^{(s,t)}}{\partial s} = \lambda_i(s) p_{ij}^{(s,t)} - \sum_{k \neq i} p_{kj}^{(s,t)} \lambda_{ik}(s)$$

con condición inicial $p_{ij}^{(t,t)} = \delta_{ij}$

Feller (1957) demuestra además que si la sucesión de funciones de intensidad $\{\lambda_i(t)\}$ es acotada para cada valor de *t* entonces existe una única solución para ambos sistemas de ecuaciones que es además la probabilidad de transición de una cadena de Markov en tiempo continuo.

V.2.2. APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN

La estimación de la Provisión para siniestros pendientes mediante el uso de ***cadenas de Markov en tiempo discreto*** ha sido estudiada por Hachemeister (1980). La idea fundamental es suponer que, a lo largo del tiempo, cada siniestro se encuentra en uno de los estados de una cadena de Markov ($a \in S$). Los estados de la cadena se pueden definir teniendo en cuenta factores administrativos relacionados con los siniestros tales como factores laborales, manejo de pequeños siniestros que pueden ser liquidados por teléfono, manejo de siniestros importantes por su cuantía que pueden ser más lentos en su liquidación, etc. Todos estos factores hacen que en cada instante del tiempo $y+\upsilon$ los siniestros puedan situarse en categorías excluyentes relacionadas con los mismos. Un siniestro puede cambiar de categoría a lo largo del tiempo.

Tales categorías, en número finito, constituyen los estados de la cadena de Markov. Por ejemplo, una de las formas más sencilla de definir el conjunto S es considerar que está formado por tres elementos que representan a tres categorías diferentes: siniestros no notificados, siniestros abiertos y siniestros cerrados. Categorías más complicadas son aquellas que consideran rangos diferentes del coste de los siniestros, siniestros cerrados pero pendientes de liquidación, siniestros en pleito, casos de dudosa responsabilidad, etc. Las variables aleatorias de mayor interés son proyectadas a algún punto del futuro y+t conocido su valor en el instante $y+\upsilon$.

Sea $p_{ba}^{(s,t)}(y)$ la probabilidad de que un siniestro pase del estado b en el instante $y+s$ al estado a en el instante y+t. Suponemos que dichas probabilidades son independientes del periodo de origen (y) y se notarán de forma simplificada como $p_{ba}^{(s,t)}$.

El número de siniestros por categoría en el instante $y+t$, respecto a los siniestros que se encontraban en la categoría b en el instante $y+s$ sigue una ley multinomial de probabilidad que se denota como:

$$P(N_{ba}^{(s,t)} = n_{ba}^{(s,t)}; a = 1,2,3,\ldots / N_b^{(s)} = n_b^{(s)}) = n_b^{(s)}! \prod_a \frac{(p_{ba}^{(s,t)})^{n_{ba}^{(s,t)}}}{n_{ba}^{(s,t)}!}$$

Cualquier siniestro que se encuentre en la categoría a en el instante $y+t$ que se encontraba en la categoría b en el instante $y+s$ ha podido pasar por cualquier categoría en instantes intermedios $y+s'$, $s < s' < t$. Las probabilidades de transición, según la ecuación de Chapman-Kolmogorov son:

$$p_{ba}^{(s,t)} = \sum_{a'} p_{ba'}^{(s,s')} p_{a'a}^{(s',t)}$$

Es por tanto suficiente calcular probabilidades de transición para un periodo menor al que nos interesa, por ejemplo probabilidades de transición en una etapa y, de forma recursiva, calcular a partir de ellas las probabilidades de transición en múltiples etapas. Además, las probabilidades de transición en una etapa se pueden estimar de forma más sencilla a partir de los datos disponibles.

Es necesario además tener en cuenta la distribución del coste de un siniestro en cada momento determinado respecto a diferentes estados. Se denota por $(X_{ba}^{(s,t)})_i$ a la cuantía del i-ésimo siniestro que pasa del estado b en el instante $y+s$ al estado a en el instante $y+t$. Por otra parte, la variable aleatoria $(X_{b\cdot}^{(s,t)})_i$ proyecta el coste del siniestro que se encontraba en el estado b en el instante $y+s$ al momento $y+t$. En esta última variable no es importante el estado final en que se encuentra el siniestro aunque debe estar en alguna categoría en el instante $y+t$. Se verifica por tanto:

$$P((X_{b\cdot}^{(s,t)})_i < s) = \sum_a p_{ba}^{(s,t)} P((X_{ba}^{(s,t)})_i < s)$$

La función generatriz de momentos permite obtener la siguiente relación entre las medias y varianzas de ambas distribuciones (aunque no aparece el subíndice i para simplificar la notación, se supone que la relación siguiente se mantiene para el coste del i-ésimo siniestro):

$$\mu(X_{b\cdot}^{(s,t)}) = \sum_a p_{ba}^{(s,t)} \mu(X_{ba}^{(s,t)}) \text{ y}$$

$$\sigma^2(X_{b\cdot}^{(s,t)}) = (\overline{\sigma}_b^{(s,t)})^2 + m_b^{(s,t)}$$

siendo $(\overline{\sigma}_b^{(s,t)})^2 = \sum_a p_{ba}^{(s,t)} \sigma^2(X_{ba}^{(s,t)})$ la varianza media dentro de las categorías en el instante $y+t$ suponiendo que el siniestro se encontraba en la categoría b en el instante $y+s$ y $m_b^{(s,t)} = \sum_a p_{ba}^{(s,t)} \mu^2(X_{ba}^{(s,t)}) - \mu^2(X_{b\cdot}^{(s,t)})$ es la varianza de la cuantía media de los siniestros y representa la varianza entre categorías.

Si el número de categorías es pequeño, la mayor parte de la varianza corresponderá a la varianza dentro de las categorías, $(\overline{\sigma}_b^{(s,t)})^2$ y si el número de categorías es grande, dentro de ellas los siniestros serán más homogéneos y la mayor parte de la varianza corresponderá a la varianza que existe entre las distintas categorías, $m_b^{(s,t)}$.

Se supone que existe al menos una categoría de siniestros no declarados. Sin pérdida de generalidad, suponemos que las categorías menores o iguales que β son las categorías de siniestros pendientes de declaración.

Por último, para valorar la cuantía necesaria para la provisión, veamos cual es el coste incurrido en un momento determinado. Sea $J_{ba}^{(s,t)}$ el conjunto de los índices de los siniestros que pasan de la categoría b en el instante $y+s$ a la categoría a en el instante $y+t$. El coste total de los siniestros que están en la categoría b en el instante $y+s$, proyectado al instante $y+t$ es:

$$L_{b\cdot}^{(s,t)} = \sum_{a} \sum_{i \in J_{ba}^{(s,t)}} (X_{ba}^{(s,t)})_i$$

A partir de la función generatriz de momentos y, suponiendo que los siniestros pertenecientes al conjunto $J_{ba}^{(s,t)}$ son independientes e idénticamente distribuidos se obtiene la siguiente relación entre las medias y varianzas del coste incurrido, número de siniestros y cuantía de los mismos, como demuestra Hachemeister (1980):

$$\mu(L_{b\cdot}^{(s,t)}) = \mu(N_b^{(s)})\mu(X_{b\cdot}^{(s,t)}) \text{ y}$$

$$\sigma^2(L_{b\cdot}^{(s,t)}) = \mu(N_b^{(s)})\sigma^2(X_{b\cdot}^{(s,t)}) + \sigma^2(N_b^{(s)})\mu(X_{b\cdot}^{(s,t)})^2$$

Una compañía de seguros activa tiene carteras formadas por siniestros que tienen lugar a lo largo de diferentes periodos de exposición al riesgo. Para los periodos de exposición más antiguos todos los siniestros han sido completamente liquidados, es decir, todos los siniestros han sido notificados, todos los siniestros válidos han sido pagados y no existen siniestros pendientes. Se denota por *0* el periodo de exposición más antiguo para el que todavía existen siniestros pendientes, *1* el periodo siguiente y así sucesivamente.

En una fecha de evaluación s proyectada al periodo t, el coste total de los siniestros que han tenido lugar se divide entre coste conocido, $K^{(s,t)}$ y coste para siniestros pendientes de declaración, $U^{(s,t)}$ que verifican:

Para siniestros conocidos:

$$K^{(s,t)} = \sum_{y=0}^{s} \sum_{b>\beta} L_{b\cdot}^{(s-y,t-y)}$$

con media y varianza:

$$\mu(K^{(s,t)}) = \sum_{y=0}^{s} \sum_{b>\beta} n_b^{(s-y)} \mu(X_{b\cdot}^{(s-y,t-y)})$$

$$\sigma^2(K^{(s,t)}) = \sum_{y=0}^{s} \sum_{b>\beta} n_b^{(s-y)} \sigma^2(X_{b\cdot}^{(s-y,t-y)})$$

Y para siniestros pendientes de declaración:

$$U^{(s,t)} = \sum_{y=0}^{s}\sum_{h=1}^{\beta} L_{h\cdot}^{(s-y,t-y)}$$

con media y varianza:

$$\mu({}_{\upsilon}U_t) = \sum_{y=0}^{\upsilon}\sum_{h=1}^{\beta} \mu(N_h^{(s-y)})\mu(X_{h\cdot}^{(s-y,t-y)})$$

$$\sigma^2({}_{\upsilon}U_t) = \sum_{y=0}^{\upsilon}\sum_{h=1}^{\beta} [\mu(N_h^{(s-y)})\sigma^2(X_{h\cdot}^{(s-y,t-y)}) + \mu(X_{h\cdot}^{(s-y,t-y)})^2\sigma^2(N_h^{(s-y)}))]$$

El método desarrollado anteriormente se basa en cadenas de Markov en tiempo discreto, modelando el desarrollo de un siniestro hasta su liquidación final como la realización de una cadena de Markov. El espacio de estados representaba los posibles tipos de información sobre el mismo.

Se pueden utilizar también cadenas de Markov en tiempo continuo que generalicen el método anterior como hace Hesselager (1994a), que considera procesos de Poisson marcados en los que las marcas son conjuntamente la realización de una cadena de Markov y los pagos de los siniestros que tienen lugar en los momentos de transición entre diferentes estados. Este método se explicará más adelante, una vez desarrollado el marco teórico en el que se definen los procesos de Poisson marcados.

V.3. PROCESOS DE POISSON MARCADOS

V.3.1. REVISIÓN UNIFICADA DE LA METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN

En la última década han adquirido una mayor importancia métodos de cálculo de la provisión para prestaciones basados en procesos estocásticos y, en particular, en procesos de Poisson marcados, como prueban numerosos artículos al respecto entre los que se encuentran los de Arjas (1989), Norberg (1993), Hesselager (1994a, 1995) o Haastrup y Arjas (1996). Estos métodos permiten estimar la cuantía total de la siniestralidad en cualquier momento del tiempo, por ejemplo al finalizar cada año, lo que posibilita determinar la cuantía de la provisión para siniestros pendientes. A continuación se presenta la base metodológica necesaria para poder aplicar los procesos de Poisson marcados al cálculo de la provisión.

Los procesos de Poisson tienen una estrecha relación con los procesos puntuales, de los que son un caso particular, y con las medidas aleatorias. Para poder definir un proceso de Poisson como una medida aleatoria y poder hacer uso de las propiedades de las mismas, o considerar el mismo como un proceso puntual, se introducen a continuación ambos conceptos.

Sea el conjunto de parámetros $T = [0,\infty)$ dotado de la topología usual $_{T}$, una clase de subconjuntos de T cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas que contiene el conjunto vacío $\varnothing$ y el total T, a partir de la cual se construye la σ-álgebra de Borel $\beta(T)$ de tal forma que $(T, \beta(T))$ es un espacio medible.

Sea $\mathbf{M} = \{\mu;$ medida de Borel en $(T, \beta(T))$, finitas en acotados$\}$, es decir, el conjunto de medidas Borel que verifican $\mu(A) < \infty$ para todo conjunto Borel acotado A y $\beta(\mathbf{M})$ la σ-álgebra de Borel: mínima σ-álgebra definida en $\mathbf{M}$ con respecto a la cual las aplicaciones $\mu \to \mu(A)$ son medibles para todo $A \in \beta(T)$.

Una *medida aleatoria*, siguiendo a Daley y Vere-Jones (1988), es una aplicación medible definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en $(\mathbf{M}, \beta(\mathbf{M}))$, es decir:

$$
\begin{array}{llllll}
N:(\Omega,\Im,P) & \to & (\mathbf{M},\beta(\mathbf{M})) & & \\
\omega & \to & N(\omega):\beta(T) & \to & R^{+} \\
 & & A & \to & N(A,\omega)
\end{array}
$$

$N(\omega)$ es una aplicación medible verificando por tanto:

$$N(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} N(A_i, \omega)$$

para subconjuntos disjuntos A_i, tomando además valores no negativos.

Si se fija el conjunto A, $N(A,\cdot)$ (denotado también como $N(A)$) es una aplicación del espacio muestral Ω en R^{+}. Se demuestra que N es una medida aleatoria si y solo si $N(A)$ es una variable aleatoria para cada conjunto acotado A perteneciente a $\beta(T)$.

Los *procesos puntuales* son un caso particular de procesos estocásticos, $\{N(t);t\in T\}$ de tipo discontinuo, es decir, procesos cuyas trayectorias son funciones escalonadas o constantes en casi todo punto de *T*, continuas por la derecha y cuyos incrementos se llevan a cabo en un conjunto de valores enteros. Se puede denotar de igual forma el proceso puntual como $\{N_t\}_{t\in T}$.

Los procesos puntuales modelan la ocurrencia de algún fenómeno aleatorio en los instantes $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}\subset T$, con *i* perteneciente a un conjunto adecuado de índices. Dado un subconjunto *A* de los números reales, *N(A)* denota el número de ocurrencias del suceso en dicho conjunto, es decir,

$$N(A)=card\{i;t_i\in A\}$$

Los procesos puntuales verifican las siguientes propiedades:

1. Si $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, con $A_i\cap A_j=\varnothing$ para $i\neq j$, entonces $N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}N(A_i)$

2. *N(A)* es un valor entero y no negativo

3. *N(A)* está definida para todo subconjunto Borel *A* de los números reales.

4. *N(A)* es finito para conjuntos *A* acotados

Las hipótesis anteriores hacen que $N(\cdot)$ sea una medida de conteo en la σ-álgebra *B* de todos los subconjuntos Borel de la recta.

$N(A)$ es además una variable aleatoria para cualquier A perteneciente a $\beta(T)$, consecuencia de la definición de proceso puntual a partir de un proceso estocástico. Por tanto, un proceso puntual es también una medida aleatoria.

Si se denota por $N(t)=N((0,t])$ al número de sucesos que tienen lugar en el intervalo $(0,t]$, se dice que un *proceso puntual* es *de incrementos estacionarios* si la distribución de las variables aleatorias $N((t,t+h])=N(t+h)-N(t)$ son independientes de t, dependiendo por tanto de la longitud del intervalo únicamente.

El proceso puntual es de *incrementos independientes* si las variables aleatorias $N((t_{i_1},t_{j_1}])$, $N((t_{i_2},t_{j_2}]),\ldots,N((t_{i_n},t_{j_n}])$ son independientes para cualquier conjunto de intervalos disjuntos $\{(t_{i_k},t_{j_k}],k=1,2,\ldots,n\}$.

Los procesos de Poisson que modelan el número de siniestros que tienen lugar en el intervalo $(0,t]$ son un caso particular de procesos puntuales dado que son procesos no negativos con trayectorias escalonadas, continuas por la derecha y crecientes a lo largo del tiempo. Es habitual suponer además que se trata de procesos puntuales con incrementos independientes.

Aunque los procesos de Poisson han sido definidos con anterioridad, en el Capítulo II, para modelar el número de siniestros que tiene lugar en un periodo de tiempo considerado, a continuación se definen los mismos de forma general, como un caso particular de medidas aleatorias. Siguiendo con la notación de subepígrafes anteriores, si $A=(a,b]$, el número de siniestros ocurridos en el intervalo A es $N((a,b]=N(b)-N(a)$.

Sea $\Lambda(\cdot)$ una medida sobre la recta real. Una *medida aleatoria de Poisson* con medida media $\Lambda(\cdot)$ es una medida aleatoria en la cual la variable $N(A)$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\Lambda(A)$.

Esta definición incluye tanto a los procesos de Poisson homogéneos como a los no homogéneos, como comentan Daley y Vere-Jones (1988). Para el proceso homogéneo con intensidad constante λ (en el intervalo unitario), el parámetro de la distribución de Poisson es $\Lambda(A)=\Lambda((a,b])=\lambda(b-a)$ y para el proceso no homogéneo en el cual la intensidad depende del parámetro t, la media de la variable aleatoria de Poisson es $\Lambda(A)=\Lambda((a,b])=\int_a^b \lambda(x)\cdot dx$.

Se puede definir también una medida aleatoria en el espacio $[0,\infty)\times B$, en lugar de considerar únicamente medidas aleatorias con valores en el espacio de medidas de Borel finitas en acotados en $([0,\infty),\beta([0,\infty)))$. $[0,\infty)$ representa la evolución del proceso en el tiempo y B es un conjunto que recoge las características adicionales a considerar. Además, $\nu(A)$ es la medida de un conjunto A en B. Las variables determinadas por conjuntos disjuntos son independientes y $N((t,s]\times A)$ sigue una distribución de Poisson con intensidad constante $\lambda\cdot\nu(A)$ siendo por tanto su esperanza:

$$E[N(t,s)\times A]=\lambda\cdot(t-s)\cdot v(A)$$

Si se generaliza a un proceso de Poisson no homogéneo en el tiempo considerando la intensidad como $\lambda(x)\cdot v(A)$ la esperanza es:

$$E[N(t,s)\times A]=v(A)\cdot\int_s^t\lambda(x)\cdot dx\,.$$

El proceso asociado $N(t,u)$ es un proceso de Poisson sobre $[0,\infty)\times B$. El número de sucesos ocurridos en el intervalo $(s,t]$ con característica A se determina mediante la integral:

$$I((s,t),A)=\int_s^t\int_A N(ds,du) \qquad \text{(V.2)}$$

Esta expresión ayudará a determinar el número de siniestros ocurridos en un intervalo de tiempo determinado cuando el proceso de Poisson asociado a los mismos no es homogéneo. Si además se tiene en cuenta el coste de dichos siniestros, la cuantía total de los mismos vendrá determinada mediante la integral:

$$I(Z,(s,t),A)=\int_s^t\int_A Z(s,u)\cdot N(ds,du) \qquad \text{(V.3)}$$

expresión que se utilizará posteriormente para el cálculo de la provisión objeto de estudio en el nuevo método propuesto en el siguiente Capítulo.

El proceso $N((t,s]\times A)$ descrito anteriormente es un *proceso de Poisson marcado*, una caso particular de los procesos puntuales marcados cuya definición formal se da a continuación. Las características adicionales consideradas en el proceso se denominan *marcas*.

Los procesos puntuales, como ya se ha comentado, representan la ocurrencia de un fenómeno aleatorio en los instantes $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}\subset T$. Si se denota mediante T_n a la *n*-ésima ocurrencia del suceso y se asocia a dicha ocurrencia una marca o característica aleatoria, denotada mediante Z_n, estamos en condiciones de definir un proceso puntual marcado.

En el caso general, siguiendo a Brémaud (1981), si sobre un espacio medible $(\Omega,\Im)$ se define un proceso puntual $\{N_t\}_{t\in T}$, también denotado $\{T_n\}_{n\geq 1}$, y sobre el espacio medible $(E,\mathcal{E})$ una sucesión de variables aleatoria $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, la doble sucesión $\{T_n,Z_n\}_{n\geq 1}$ se denomina *proceso puntual marcado*. Si $\{T_n\}_{n\geq 1}$ es un proceso de Poisson, $\{T_n,Z_n\}_{n\geq 1}$ se denomina *proceso de Poisson marcado*.

Se ha expuesto en este epígrafe una metodología general para poder aplicar procesos de Poisson marcados al cálculo de la provisión para prestaciones. Los diferentes métodos se caracterizarán por las variables que definen las marcas del proceso puntual. Así, se pueden considerar como marcas del proceso puntual que representa el número de siniestros de una compañía, el tiempo que tardan en ser notificados los mismos a la entidad o el tiempo transcurrido entre la ocurrencia del siniestro y su liquidación final.

Como novedad, se puede incluir en las marcas de un proceso de Poisson una mixtura finita de distribuciones que permitirá definir en el siguiente Capítulo un nuevo método de cálculo de la provisión para prestaciones.

V.3.2. APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN

En el contexto de los procesos puntuales existen diferentes métodos, desarrollados principalmente en la última década como ya se ha señalado, para calcular tanto la provisión para siniestros pendientes de declaración como la provisión para siniestros declarados pendientes de liquidación. Dada la importancia que dichos métodos están adquiriendo se explican dos de ellos para ilustrar la aplicación de los procesos de Poisson marcados al cálculo de la provisión, pudiéndose utilizar además para contrastar su resultado con el del método que se propone en el siguiente capítulo.

V.3.2.1. Método de Arjas

El primero de los métodos que se expone ha sido desarrollado por Arjas (1989) y utiliza procesos de Poisson marcados y Teoría de Martingalas para evaluar la provisión.

Un siniestro que ocurre en un momento determinado, T_i, es notificado a la compañía con un cierto retardo. Si se supone que el número de siniestros que tienen lugar un año, denotado generalmente mediante el intervalo unitario $(0,1]$, es finito, N, se ordenan los tiempos de notificación de forma creciente del siguiente modo:

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_N < T_{n+1} = T_{N+2} = \ldots = \infty$$

Hasta que el siniestro i-ésimo es liquidado se va actualizando la información sobre el mismo en N_i distintos momentos del tiempo que se denotan por T_{ij} y se ordenan, de igual forma, de manera creciente:

$$T_i = T_{i0} < T_{i1} < T_{i2} < \ldots < T_{i,N_i} < T_{i,N_i+1} = T_{i,N_i+2} = \ldots \infty$$

Se denota por X_{ij} a la cuantía pagada del siniestro i-ésimo en el instante T_{ij} y por I_{ij} a la nueva información sobre el i-ésimo siniestro que llega en ese instante. La información I_{ij} está formada por palabras clave o números que reflejan, por ejemplo, la clasificación del siniestro por parte de la compañía en el instante T_{ij} que puede estar abierto, cerrado, pendiente de liquidación, etc. o el **retardo hasta su notificación**. Obviamente $X_{i0} = 0$ e $I_{ij} = \varnothing$ siempre que $T_{ij} = \infty$.

Las definiciones anteriores permiten considerar, para cada siniestro, distintos procesos puntuales marcados como el proceso de pagos asociado al siniestro, el proceso de información y el proceso de liquidación:

El *proceso de pagos* se denota por $(T_{ij}, X_{ij})_{j\geq 0}$, donde X_{ij} son marcas reales no negativas. Respecto a este proceso se puede definir la función creciente que representa los pagos realizados respecto al i-ésimo siniestro hasta el instante t, $X_i(t) = \sum_{\{j:T_{ij}\leq t\}} X_{ij}$.

El coste total del i-ésimo siniestro será por tanto $X_i(\infty) = \sum_{j\geq 0} X_{ij}$ y los pagos pendientes en el instante t se representan mediante la función decreciente

$U_i(t) = X_i(\infty) - X_i(t) = \sum_{\{j: T_{ij} > t\}} X_{ij}$. Obviamente $U_i(t) = X_i(\infty)$ si $t < T_i$ dado que T_i es el instante en que se notifica el siniestro.

El *proceso de información* denotado por $(T_{ij}, I_{ij})_{j \geq 0}$ es un proceso en el que las marcas I_{ij} que toman valores en un conjunto definido de forma adecuada, por ejemplo un conjunto contable que represente como se ha dicho las diferentes situaciones en que se puede encontrar el siniestro en cada momento.

Por último, el *proceso de liquidación* que se denota mediante $(T_{ij}, (X_{ij}, I_{ij}))_{j \geq 0}$ y las marcas contienen información conjunta de los procesos de pagos y de información.

De manera análoga se pueden definir los procesos puntuales con marca de pago, de información y de liquidación, considerando los siniestros de forma global, sin más que sumar las variables anteriores sobre el índice *i*: $X(t) = \sum_i X_i(t)$ y $U(t) = \sum_i U_i(t)$

El problema del cálculo de las provisiones se puede considerar como un problema de predicción en el que, en un momento determinado *t* que representa el presente, la valoración de los pagos futuros se hace en base a la información disponible.

La información disponible en la compañía en el instante t, que se denota mediante $\Im_t$, esta compuesta por dos tipos diferentes de información, $\Im_t = \Im_t^N \vee \mathcal{E}_t$. Por una lado la información basada en todos los pagos realizados hasta el momento, representada mediante la σ-álgebra $\Im_t^N = \sigma\{(T_{ij}, I_{ij}, N_{ij})_{i\geq 1, j\geq 0} : T_{ij} \leq t\}$ y por otro, información exógena a la liquidación hasta el instante t, $\mathcal{E}_t$

El problema de la valoración de los pagos totales $X(\infty)$ (omitiendo el subíndice i ó $\cdot$ por ser válido el estudio en ambos casos) en el instante t es proporcionado por la siguiente distribución condicional, denominada *proceso de predicción*:

$$\mu_t(\cdot) = P(X(\infty) \in \cdot / \Im_t)$$

Son importantes los dos primeros momentos de dicha distribución, $M_t = E(X(\infty)/\Im_t)$ y $V_t = Var(X(\infty)/\Im_t)$

Dado que $X_\infty = X_t + U_t$ y X_t es $\Im_t$-medible, verificándose por tanto que $E(X_t / \Im_t) = X_t$, la predicción basada en $\Im_t$ es equivalente a la predicción de U_t y por tanto:

$$M_t = X_t + m_t$$

siendo $m_t = E(U_t / \Im_t)$ la estimación de la cuantía pendiente en el instante t. Se verifica además que M_t es una martingala y m_t una supermartingala por lo que, para cualquier $t<u$ se verifica que $E(M_u / \Im_t) = M_t$ y $E(m_u / \Im_t) \leq m_t$

Debemos señalar en este punto que el proceso U_t no es observable. Únicamente son observables las diferencias, $U_u - U_t = X_t - X_u$. Es interesante considerar también las diferencias, $M(t,u) = M_u - M_t$ que verifican por ser $U_t = U_u + (X_u - X_t)$ y por tanto $E(U_t / \Im_t) = E(U_u / \Im_t) + E(X(t,u) / \Im_t)$:

$$M(t,u) = [X(t,u) - E(X(t,u) / \Im_t)] + [E(U_u / \Im_u) - E(U_u / \Im_t)]$$

El primer término representa el error en la estimación referido a los pagos en el intervalo $(t,u]$ y el segundo término es la corrección hecha en la estimación de los pagos pendientes cuando el tiempo de estimación cambia de t a u.

Respecto a las varianzas condicionadas, como X_t y $E(U_t / \Im_t)$ son $\Im_t$-medibles y teniendo en cuenta que $M(t,\infty) = M_\infty - M_t = X_\infty - X_t - E(U_t / \Im_t)$ se verifica:

$$V_t = Var(U_t / \Im_t) = Var(M(t,\infty) / \Im_t)$$

Estos resultados respecto a la esperanza y varianza se utilizarán en el cálculo de la provisión para todos los siniestros que componen la cartera de pólizas. Para ello, se divide la estimación $m_t = E(U_t / \Im_t)$ en dos partes según sean conocidos los siniestros o desconocidos.

En el cálculo de la provisión para siniestros declarados se observa que el número de ellos en el instante t es un valor conocido, $N_t = \sum_i I_{(T_i \leq t)}$, siendo el pago pendiente para dichos siniestros $\sum_{i \leq N_t} U_{it}$. Dado que los sucesos $\{T_i \leq t\}$ están determinados por $\Im_t$, la esperanza condicional viene dada por:

$$E\left(\sum_{i \leq N_t} U_{it} / \Im_t\right) = \sum_{i \leq N_t} E(U_{it} / \Im_t) = \sum_{i \leq N_t} m_{it}$$

Por tanto, la provisión para siniestros declarados y pendientes de liquidación puede hacerse de forma individual dado que ésta será la suma de la provisión hecha para cada uno de ellos.

La varianza es de igual forma, dado que U_{it} son incorreladas para distintos siniestros dada $\Im_t$:

$$Var\left(\sum_{i \leq N_t} U_{it} / \Im_t\right) = \sum_{i \leq N_t} Var(U_{it} / \Im_t) = \sum_{i \leq N_t} V_{it}$$

El cálculo de la provisión para siniestros pendientes de declaración es más complicado dado que no se puede hacer de forma individual. En este caso el retardo desde que ocurre el siniestro hasta que es notificado a la compañía juega un papel fundamental y se debe usar la información recogida sobre otros siniestros (conocidos).

Es obvio que $N - N_t$ es desconocido, no estando determinado por $\Im_t$. Se observa que el proceso $E\left(\sum_{i > N_t} U_{it} / \Im_t\right)$ es una supermartingala.

Se considera (T_i, X_i) en el que $X_i = X_i(\infty)$ representa el coste del siniestro i-ésimo. El correspondiente proceso de conteo es $\{N_t(A); t \geq 0, A \subset \mathbb{R}^1\}$ en el que $N_t(A) = \sum_i I_{\{T_i \leq t, X_i \in A\}}$ cuenta el número de siniestros registrados antes del instante t cuyo coste pertenece al conjunto A. $N_t(A)$ no puede, en general, ser determinado a partir de $\Im_t$ dado que los siniestros notificados antes del instante t pueden tener pagos posteriores al mismo instante. Se verifica además que $N_t = N_t(\mathbb{R})$.

Si se denota mediante $\widetilde{U}(t,u;A)$ a la suma en el conjunto $\{i : t < T_i \leq u, X_i \in A\}$ de las cuantías de los siniestros, el coste pendiente para los siniestros no notificados es:

$$\sum_{i>N_t} U_{it} = \sum_{\{i:T_i>t\}} X_i = \int_{s=t}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} x \cdot dN_s(dx) = \widetilde{U}(t,\infty;\mathbb{R}^1).$$

Los "elementos comunes" se formulan en términos de variables latentes no observables cuya distribución se actualiza de acuerdo a la información $\Im_t$. Se supone que estas variables latentes, cuya descripción y estudio se detalla en el trabajo de Norberg (1986), forman un par (Φ,Θ) en el que Φ puede considerarse como un parámetro de la distribución del proceso N_t y Θ parametriza la distribución del coste de los siniestros, X_i.

Se supone además que los parámetros (Φ,Θ) son *suficientes* en el sentido de que si son conocidos junto con alguna información inicial del proceso, $\Im_0$, entonces ninguna información de $\Im_t$ podría cambiar la predicción hecha para los siniestros IBNR después de t. Esto significa que las estimaciones de Φ y Θ obtenidas a partir de $\Im_t$ incluye la información relevante para el problema.

Fijando el presente t, se consideran instantes de tiempo $u \geq t$ y se define:

$$\tilde{\Im}_u = \Im_0 \vee \sigma\{\Phi, \Theta\} \vee \sigma\{(T_i, X_i); t < T_i \leq u\}$$

De esta forma $\tilde{\Im}_\infty$ representa la información contenida colectivamente en $\Im_0$, los parámetros Φ y Θ y los pagos posteriores al instante t. Se supone además que se cumple la propiedad de independencia condicional estableciendo que $\Im_t$ es irrelevante para predecir los pagos posteriores a t demostrado que $\Im_0$ y (Φ, Θ) son conocidos.

Sea $(\tilde{\lambda}_u(A))_{u \geq t}$ con $A \subset \mathbf{R}^1$ la ($\tilde{\Im}_u$)-intensidad del proceso de conteo $(N_u(A))_{u \geq t}$ en el intervalo $T_{i-1} < u \leq T_i$:

$$\tilde{\lambda}_u(A)du = P(dN_u(A) = 1 / \tilde{\Im}_{u-}) = P(T_i \in du, X_i \in A / \tilde{\Im}_{u-})$$

Dicha intensidad puede ser interpretada como el producto $\tilde{\lambda}_u(A) = \bar{\lambda}_u \varphi_u(A)$, donde $(\bar{\lambda}_u)$ es la ($\tilde{\Im}_u$)-intensidad del proceso de conteo (N_u), es decir, $\bar{\lambda}_u du = P(dN_u = 1 / \tilde{\Im}_{u-}) = P(T_i \in du / \tilde{\Im}_{u-})$ para $T_{i-1} < u \leq T_i$ y $\varphi_u(A)$ puede ser interpretado como la probabilidad condicional $\varphi_u(A) = P(X_i \in A / \tilde{\Im}_{u-})$ para $T_i = u$

Se puede elegir $(\tilde{\lambda}_u(\cdot))_{u>t}$ de tal forma que sea $\Im_0$-medible y parametrizada por (Φ,Θ). Según la división hecha sobre los papeles que juegan Φ y Θ se supone que $\bar{\lambda}_u$ está parametrizada por Φ y puede expresarse de la forma:

$$\lambda_u = h(u;\Phi)$$

donde, para Φ fijo la aplicación $u \rightarrow h(u;\Phi)$ es $\Im_0$-medible. Es otra forma de decir que el proceso (N_u) es un Proceso de Poisson doblemente estocástico (proceso de Cox) con parámetros aleatorio Φ.

Se supone además que $\varphi_u(\cdot)$ está parametrizada por Θ pudiéndose escribir las distribuciones de las cuantías de los siniestros como:

$$\varphi_u(A) = F_u(A;\Phi)$$

donde, para u y Θ fijos, $F_u(\cdot;\Phi)$ es una función de distribución, lo que viene a decir que dado Θ y los momentos de notificación de los siniestros pendientes, las cuantías de los mismos son variables aleatorias independientes.

Las expresiones finales para la esperanza y varianza de los siniestros pendientes resultan, como demuestra Arjas en su artículo:

$$E\left(\sum_{i>N_t} U_{it} / \Im_t\right) = \int_{u=1}^{\infty} E(h(u;\Phi)m_u(\Phi)/\Im_t)du$$

siendo $m_u(\Phi)$ la media $m_u(\Phi) = \int_{x=0}^{\infty} x \cdot F_u(dx;\Phi)$ y

$$Var\left(\sum_{i>N_t} U_{it} / \Im_t \right) = \int_{u=1}^{\infty} E(h(u;\Phi) m_u^{(2)}(\Phi) / \Im_t) du + \\ + Var\left(\int_{u=1}^{\infty} h(u;\Phi) m_u(\Phi) du / \Im_t \right)$$

siendo $m_u^{(2)}(\Phi) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot F_u(dx;\Phi)$

A la vista de las expresiones obtenidas se puede concluir que la esperanza y varianza condicionales de la provisión para siniestros pendientes de declaración $\sum_{i>N_t} U_{it}$ se puede obtener si se conocen las intensidades $h(\cdot;\Phi)$, los dos primeros momentos de las distribuciones $F(\cdot;\Phi)$ y la distribución condicional de las variables latentes (Φ,Θ) dado $\Im_t$, cuyo conocimiento requiere el uso de estadística bayesiana.

Respecto a las intensidades, debemos comentar que la expresión más común para las mismas se obtiene suponiendo que durante el año considerado los siniestros ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad Φ y que los retardos D_i en la notificación son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes con función de distribución $G(\cdot)$ lo que permite demostrar que $h(u;\Phi) = \Phi[G(u) - G((u-1)^+)]$. Es decir, Φ puede parametrizar conjuntamente el proceso de ocurrencia de los siniestros y la distribución de los retardos en la notificación de los mismos.

Los dos primeros momentos de las distribuciones $F(\cdot;\Phi)$ se obtienen de forma sencilla si se consideran únicamente, como es habitual, el número de futuros siniestros $(N - N_t)$ en lugar del coste de los mismos. Bajo esta hipótesis se considera $X_i = 1$ y por tanto $m_u(\Phi) = m_u^{(2)}(\Phi) = 1$.

V.3.2.2. Método de Norberg

También en el contexto de los procesos puntuales de Poisson con marca ha desarrollado Norberg (1993) un método para el cálculo de la provisión para siniestros pendientes. Este método, al igual que el anterior, tiene en cuenta el retardo desde que ocurre el siniestro hasta su notificación incluyendo esta variable en las marcas del proceso de Poisson. Recordemos que Arjas comentaba la posibilidad de incluir el tiempo de demora en la variable *I* que representaba la información que llegaba a la compañía respecto de los siniestros.

Se supone, como es habitual, que un siniestro ocurre en un momento determinado T_i y que el número de siniestros cuya responsabilidad debe ser aceptada por la compañía ocurridos hasta el instante *t*, $N(t) = \sum_i 1_{(T_i \leq t)}$, es finito, al igual que el número total de siniestros $N = \lim_{t \to \infty} N(t)$.

Los datos que se observan respecto al *i*-ésimo siniestro constituirán el proceso de Poisson $\{(T_i, Z_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ donde la marca Z_i está constituida por las variables que representan el tiempo de espera desde la ocurrencia del siniestro hasta su notificación (U_i), desde la notificación del mismo hasta su liquidación final (V_i), por la cuantía pagada υ' unidades de tiempo después de su notificación ($X_i(\upsilon')$, pagado en el intervalo $[T+U, T+U+\upsilon']$) y por el coste total del siniestro ($X_i = X_i(V)$)

El siniestro i-ésimo se representa por tanto mediante el vector aleatorio $(T_i, Z_i = (U, V, X, \{X(\upsilon'); 0 \leq \upsilon' < V\}))$ en el que el espacio de todas las posibles realizaciones es $(0,\infty) \times Z$ siendo Z el espacio de todos los posibles desarrollos del mismo.

El punto de partida para construir el modelo es el proceso de ocurrencia de los siniestros. Se supone que es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\omega(t)$ en el instante $t \geq 0$. Es decir,

$$\{T_i\}_{1 \leq i \leq N} \approx Poisson(\omega(t); t \geq 0)$$

$\omega(t)$ representa los expuestos al riesgo por unidad de tiempo en el instante t. Se supone que $\omega(t) = 0$ para t suficientemente grande siendo por tanto el número total de expuestos al riesgo finito, $W = \int_0^\infty \omega(t) \cdot dt$

Esto significa que el proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes y que $N(t) - N(s)$ se distribuye según una ley de Poisson de parámetro $\int_s^t \omega(t')dt'$ para cada intervalo $(s,t]$. En particular, como el número total de expuestos es finito, el número total de siniestros es finito con probabilidad 1 y se distribuye según una *Poisson(W)*..

Por otra parte, $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de vectores aleatorios en Z, mutuamente independientes e independientes a su vez de $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ cuya distribución se denota por $P_{Z\ t}$. El desarrollo individual de un siniestro se denota mediante los vectores aleatorios $Z_i = Z(T_i)$, $i=1,\dots,N$ que se suponen independientes. La distribución condicional de $Z_i = Z(T_i)$ dado $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ depende únicamente de T_i. $Z_i = Z(T_i)$ es la marca asociada al instante T_i. El proceso de Poisson marcado que se considera se denota mediante:

$$\{(T_i, Z_i)\}_{1\leq i\leq N} \approx Poisson(\omega(t), P_{Z\ t}; t\geq 0)$$

Una forma alternativa de construir el proceso es dada mediante la distribución de probabilidad conjunta de las observaciones:

$$P\{N=n,(T_i,Z_i)\in(dt_i,dz_i), i=1,\dots,n\} = \frac{W^n}{n!}e^{-W}n!\prod_{i=1}^{n}P_{T,Z}(dt_i,dz_i)$$

donde W es una medida del número total de expuestos al riesgo y $P_{T,Z}(dt,dz)=\frac{\omega(t)\cdot dt}{W}P_{Z\ t}(dz)$. $P_{T,Z}$ es por tanto la distribución de probabilidad conjunta del par aleatorio (T,Z) en el que T tiene distribución marginal de probabilidad P_T con densidad $\frac{\omega(t)}{W}$, $t>0$ y Z tiene distribución de probabilidad condicional $P_{Z\,t}$ para $T=t$ fijo.

Si X es el coste total de todos los siniestros asumidos por la compañía hasta el instante determinado τ, que es de la forma $X=\sum_{i=1}^{N} X_i$, donde N se distribuye de la forma especificada anteriormente y la distribución marginal de X_i, suponiendo que las variables aleatorias X_i son independientes e idénticamente distribuidas, puede obtenerse a partir de la distribución conjunta de $P_{T,Z}(dt,dz)=\frac{\omega(t)\cdot dt}{W}\cdot P_{Z\,t}(dz)$ como:

$$P_{X_i}(dy)=\frac{\int_{t>0}\omega(t)\cdot P_{X_i\,t}(dx)\cdot dt}{W}$$

El coste total de los siniestros es una variable aleatoria de Poisson generalizada, $Poisson(W,P_Y)$ en la que $W=\int_0^{\infty}\omega(t)\cdot dt$ y $P_{X_i}(dy)=\frac{\int_{t>0}\omega(t)\cdot P_{X_i\,t}(dx)\cdot dt}{W}$. La distribución de esta variable aleatoria viene dada por:

$$P_X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W^n}{n!}e^{-W}P_{X_i}^{n*}$$

donde $P_{X_i}^{n*}$ es la convolución n-ésima de P_{X_i}. Los tres primeros momentos de esta variable son:

$$m_{X_t}^{(k)} = \int_{t>0} \omega(t) \int_{y>0} x^k P_{X_t\ t}(dx)dt\ ,\ k=1,2,3$$

En el instante τ de valoración de la provisión Norberg considera cuatro tipos diferentes de siniestros: liquidados (*settled=s)*, notificados pero pendientes de liquidación (*reported-not-settled=rns*), ocurridos pero pendientes de notificación (*incurred-not-reported=inr*) y siniestros cubiertos pero no ocurridos (*covered-not-incurred=cnr*). Para cada $t>0$ y $g=s,rns,inr,cni$, se denota mediante Z_t^g al desarrollo de todos los posibles siniestros de la categoría g ocurridos en el momento t. Por ejemplo, respecto a los siniestros clasificados como *inr*, $Z_t^{inr} = \{ z; t \leq \tau < t+u \}$.

Por definición $Z_t^g = \varnothing$ para $t>\tau$ y g=*s,rns,inr*, $Z_t^{cni} = Z$ para $t>\tau$ y $Z_t^{cni} = \varnothing$ para $t<\tau$. Además, para cada valor de t, los conjuntos Z_t^g forman una partición del espacio Z.

Según esta división de los siniestros, el proceso $\{(T_i, Z_i)\}_{1\leq i\leq N}$ se puede descomponer en cuatro procesos componentes independientes, $\{(T_i^g, Z_i^g)\}_{1\leq i\leq N^g}$, $g=s,rns,inr,cni$, cuya distribución de probabilidad es:

$$\{(T_i^g, Z_i^g)\}_{1\leq i\leq N^g} \approx Poisson(\omega^g(t), P^g{}_{Z\ t}; t\geq 0)$$

donde $\omega^g(t) = \omega(t)P_{Z\ t}\{Z_t^g\}$ y $P_{Z\ t}^g(dz) = \dfrac{P_{Z\ t}(dz)}{P_{Z\ t}\{Z_t^g\}}$, $z\in Z_t^g$

Para cada categoría g el proceso que cuenta el número de siniestros de la misma se define mediante $N^g(t)=\sum_i I_{\{T_i\leq t, Z_i\in Z^g_{T_i}\}}$, el instante de ocurrencia del i-ésimo siniestro de la categoría es $T^g_i = inf\{t; N^g(t)\geq i\}$ y su desarrollo es $Z^g_i = Z(T^g_i)$.

La siniestralidad total se puede descomponer de la misma forma en cuatro partes:

$$X = X^s + X^{rns} + X^{inr} + X^{cnt}$$

donde cada una de las componentes representa el coste total de los siniestros pertenecientes a cada una de las categorías:

En el instante de observación τ han sido totalmente liquidados los siniestros clasificados como s (*settled=s)* y parcialmente liquidados los siniestros clasificados como *rns* (*reported-not-settled=rns*) con la cuantía $X^{prns} = \sum_{1\leq i\leq N^{rns}} Y^{rns}_i(\tau - T^{rns}_i - U^{rns}_i)$.

Por otro lado, la cuantía pendiente de todos los siniestros consta de dos partes:

$$X^o = X^{orns} + X^{nr}$$

siendo X^{orns} la parte pendiente correspondiente a los siniestros clasificados como *rns*, $X^{orns} = \sum_{1\leq i\leq N^{rns}}(X^{rns}_i - X^{rns}_i(\tau - T^{rns}_i - U^{rns}_i))$, y X^{nr} la parte correspondiente a siniestros pendientes de notificación constituida por la suma $X^{nr} = X^{inr} + X^{cnt}$ y cuyo desarrollo se puede definir mediante $Z^{nr}_t = Z^{inr}_t \cup Z^{cnt}_t = \{z; t+u > \tau\}$

Sea $\Im_\tau$ la información disponible en el instante τ en el que se desea calcular la provisión. Consiste en la historia de los siniestros individuales que han sido notificados hasta ese momento, es decir a aquellos siniestros cuyo desarrollo es:

$$Z_t^r = Z_t^s \cup Z_t^{rns} = \{ z; t + u \leq \tau \}$$

Respecto a los siniestros pendientes de notificación, se calcula el valor estimado de su cuantía X^{nr} que es independiente de $\Im_\tau$. Teniendo en cuenta que $\omega^{nr}(t) = \omega(t)(1 - P_{U\,t}(\tau - t))$ y que $P_{X_t\,t}^{nr}(dx) = \dfrac{\int_{u>\tau-t} P_{U,X_t\,t}(du, dx)}{1 - P_{U,X_t\,t}(\tau - t)}$ se obtiene, para $k=1,2,3$:

$$m_{X^{nr}}^{(k)} = \int_{t>0} \omega^{nr}(t) \int_{x>0} x^k P_{X_t\,t}^{nr}(dx)dt = \int_{t>0} \omega(t) \int_{u>\tau-t} \int_{y>0} x^k P_{U,X_t\,t}^{nr}(du, dx)dt$$

siendo un valor adecuado para la provisión el primer momento

V.3.2.3. Método de Hesselager

Hesselager (1994a) utiliza, como se ha comentado con anterioridad, cadenas de Markov en tiempo continuo, generalizando el método propuesto por Hachemeister (1980). Considera procesos de Poisson marcados en los que las marcas son la realización de una cadena de Markov y los pagos de los siniestros que tienen lugar en los momentos de transición entre diferentes estados.

Si se considera una cartera de siniestros observada en el intervalo de tiempo $[0,\tau]$ donde τ representa el momento actual en el que se valorará la provisión y se denota por N_t al número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0,t]$, suponiendo que no pueden ocurrir dos siniestros en el mismo instante, los momentos de ocurrencia de los mismos son:

$$0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_{N_t}$$

Sea $Z_i = Z_{T_i}$ la marca asociada al *i*-ésimo siniestro que describe el desarrollo del siniestro hasta su liquidación final. Respecto al *proceso que genera los siniestros* se supone:

(i) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con intensidad $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$, y $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ son independientes e independientes de $\{N_t\}_{t\geq 0}$

Un siniestro es asignado, en cualquier momento del tiempo posterior a su ocurrencia, a uno de los múltiples estados de un conjunto S. Diferentes estados del conjunto S representan diferente información que sobre el siniestro tiene la compañía en distintos momentos del tiempo. Durante el desarrollo del siniestro, éste puede cambiar de estado conforme se disponga de nueva información y se vayan realizando pagos parciales del mismo en momentos de transición entre estados. De esta forma, la marca asociada al proceso de Poisson será:

$$Z_t = \{\{N_t(u)\}_{u\geq 0}, \{X_{t,mn}^{(j)}\}_{j=1,2,\ldots}, m \neq n, m,n \in S\}$$

donde $S_t(u) \in S$ denota el estado de un siniestro ocurrido en el instante t en el momento $t+u$ e $X_{t,mn}^{(j)}$ los pagos realizados hasta la j-ésima transición de m a n.

Respecto a un siniestro ocurrido en el instante t, las transiciones de m a n ocurren en los instantes $t+U_{t,mn}^{(1)}$, $t+U_{t,mn}^{(2)}$,.... Los pagos $X_{t,mn}^{(j)}$ pueden considerarse como las marcas asociadas al proceso puntual $0 < t+U_{t,mn}^{(1)} < t+U_{t,mn}^{(2)} < \ldots$ y se construyen como:

$$X_{t,mn}^{(j)} = X_{t,mn}\{U_{t,mn}^{(j)}\}$$

donde $\{X_{t,mn}(u)\}_{u\geq 0}$ es una familia de variables aleatorias.

Para el *proceso de desarrollo de los siniestros* se supone que:

(ii) $\{S_t(u)\}_{u\geq 0}$ es una cadena de Markov no homogénea en el tiempo con probabilidades de transición:

$$p_{mn}(u,v) = P(S_t(v) = n / S_t(u) = m)$$

e intensidades:

$$\lambda_{mn}(u) = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{mn}(u,u+h)}{h}$$

Las cuantías de los siniestros $\{X_{t,mn}(u)\}_{u\geq 0}$ son mutuamente independientes e independientes para todo $m \neq n \in S$ y $u \geq 0$ e independientes de $\{S_t(u)\}_{u\geq 0}$ con función de distribución:

$$F_{mn}(y/u) = P(X_{t,mn}(u) \leq y)$$

Según esta hipótesis la distribución de la marca Z_t correspondiente a un siniestro ocurrido en el instante t es independiente del tiempo t. Aunque se podría dar la dependencia del tiempo añadiendo el subíndice t a la notación anterior. La dependencia del tiempo podría darse en el caso en que $\lambda_{t,mn}(u) = \lambda_{mn}(t+u)$ dependa del tiempo físico (año de calendario $t+u$) más que del tiempo transcurrido desde la ocurrencia del siniestro u.

Se pueden considerar diferentes espacios de estados. El más sencillo consta de solo dos elementos, $S = \{0, \Delta\}$, donde 0 representa los siniestros denominados *IBNR* y Δ los siniestros completamente liquidados. Se puede añadir un estado al conjunto anterior que represente los siniestros notificados pendientes de liquidación. Hachemeister consideran fundamentalmente cuatro estados, $S = \{0, 1, 2, \Delta\}$ donde 0 representa los siniestros denominados *IBNR*, 1 los siniestros notificados pendientes de liquidación provisionados, 2 los siniestros notificados pendientes de liquidación no provisionados y Δ los siniestros completamente liquidados.

Respecto a un siniestro ocurrido en el instante t es necesaria la siguiente información:

$I_{t,m}(u) = I(S_t(u) = m)$: indicador de que el siniestro ocupa el estado m en el instante $t+u$.

$N_{t,mn}(u)$: número de transiciones directas de m a n durante $[t, t+u]$

$\Im_{t,u} = \sigma(\{S_t(v)\}_{0\leq v\leq u}, \{X_{t,mn}^{(j)}, j = 1,\ldots,N_{t,mn}(u)\})$ la historia generada por el siniestro en el intervalo $[t, t+u]$

$x_{mn}(u) = EX_{t,mn}(u)$: cuantía media pagada en el instante $t+u$ si se produce una transición de m a n en ese instante.

$\sigma^2_{mn}(u) = VarX_{t,mn}(u)$: varianza de la cuantía pagada en el instante $t+u$ si se produce una transición de m a n en ese instante.

Además se verifica que $dN_{t,mn}(u) = I_{t,m}(u-)\lambda_{mn}(u)du + dM_{t,mn}(u)$ donde u- representa el límite por la izquierda y $M_{t,mn}(u)$ para $m \neq n \in S$ son martingalas mutuamente ortogonales con media cero respecto a la historia interna del proceso $\{S_t(u)\}_{u\geq 0}$. Como además $\{S_t(u)\}_{u\geq 0}$ son estocásticamente independientes de las cuantías de los siniestros (hipótesis (ii)), $M_{t,mn}(u)$ es también una martingala con media cero respecto a la filtración $\{\Im_{t,u}\}_{u\geq 0}$.

Se verifica también que $Var[dM_{t,mn}(u)/\Im_{t,u-}] = I_{t,m}(u-)\lambda_{mn}(u)du$

Por convención supongamos que el estado 0 representa los siniestros no notificados (IBNR) y que el estado Δ corresponde a los siniestros completamente liquidados, el número de siniestros ocurridos en t que en el instante τ son clasificados como IBNR o RBNS respectivamente es:

$$N_{IBNR}(t) = \int_0^t I_{s,0}(\tau - s)dN(s) \text{ y}$$

$$N_{RBNS}(t)=\int_0^t [1-I_{s,0}(\tau-s)-I_{s,\Delta}(\tau-s)]dN(s)$$

siendo la cuantía total pendiente en el momento τ:

$$X_{IBNR}(t)=\int_0^t X_s(\tau-s,\infty)dN_{IBNR}(s) \text{ y}$$

$$X_{RBNS}(t)=\int_0^t X_s(\tau-s,\infty)dN_{RBNS}(s)$$

Sea $X_t(u,v)=\sum_{m\neq n}\int_u^v X_{t,mn}(\xi)dN_{t,mn}(\xi)$ la cuantía total pagada en el intervalo $[t+u,t+v]$ respecto a un siniestro ocurrido en el instante t. El objetivo es buscar expresiones para la media y varianza de los pagos realizados respecto a un siniestro ocurrido en el instante t ($X_t(u,\infty)$) dada la historia individual $\Im_{t,u}$ de dicho siniestro. Se puede omitir el índice t dado que dichas cantidades son funciones de las marcas correspondientes a un siniestro ocurrido en t y dichas marcas no dependen de t.

Consideramos la distribución condicional de $X(u,\infty)$ dada $\Im_u$. Dada la independencia vista en el apartado (ii), la información sobre las cuantías pasadas del siniestro $X_{mn}(v)$ para $v\leq u$ pueden ser omitidas de la historia del proceso, $\Im_u$. Además, de la propiedad de Markov la única información contenida en $\Im_u$ sobre el futuro desarrollo de $\{S(v)\}$ es el estado actual $S(u)$. por tanto:

$$E[X(u,\infty)/\Im_u]=E[X(u,\infty)/S(u)]=V[u/S(u)] \text{ y}$$

$$Var[X(u,\infty)/\Im_u] = Var[X(u,\infty)/S(u)] = \Gamma[u/S(u)]$$

Las fórmulas finales a las que se llegan, tanto para la esperanza como para la varianza son:

$$V[u/j] = E[X(u,\infty)/S(u)=j] = \sum_{m\neq n}\int_u^\infty y_{mn}(\xi)p_{jm}(u,\xi)\lambda_{mn}(\xi)d\xi \text{ y}$$

$$\Gamma[u/j] = Var[X(u,\infty)/S(u)=j] =$$
$$= \sum_{m\neq n}\int_u^\infty p_{jm}(u,\xi)\lambda_{mn}(\xi)[\sigma^2_{mn}(\xi)+r_{mn}(\xi)^2]d\xi$$

siendo $r_{mn}(\xi) = y_{mn}(\xi)+V(\xi/n)-V(\xi/m)$

Una vez determinadas la esperanza y varianza del coste total de los siniestros de forma individual, se tratará de encontrar la expresión de la provisión para el total de siniestros que componen la cartera.

En el instante τ están registrados todas las ocurrencias de los siniestros notificados hasta entonces y, para un siniestro notificado en el instante t se conoce la historia del mismo desde dicho instante hasta τ, $\Im_{\tau-t}$.

Si $\Im_\tau$ es la colección de toda la información disponible hasta el momento, la provisión para siniestros pendientes de notificación (IBNR) es:

$$V_{IBNR}(\tau) = E[X_{IBNR}(\tau)/\Im_\tau] = \int_0^\tau \mu_{IBNR}(t)V(\tau-t/0)dt \text{ y}$$

y para siniestros notificados pero pendientes de liquidación (RBNS):

$$V_{RBNS}(\tau) = E[X_{RBNS}(\tau) / \Im_\tau] = \int_0^\tau V(\tau - t / S_t(\tau - t)) dN_{RBNS}(t) \text{ y}$$

Este método permite además controlar los errores cometidos en las estimaciones por medio de las varianzas, que también calcula Hesselager (1994).

Se han enumerado en este capítulo distintos métodos dinámicos de estimación de la provisión para siniestros pendientes basados en procesos de Markov y en procesos de Poisson marcados. En el Capítulo siguiente se presenta un nuevo método de cálculo de las mismas basado también en procesos de Poisson marcados con la novedad de incluir una mixtura de distribuciones en las marcas del proceso de Poisson.

VI. UN NUEVO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN BASADO EN PROCESOS PUNTUALES Y MIXTURAS DE DISTRIBUCIONES

VI. UN NUEVO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LA PROVISIÓN BASADO EN PROCESOS PUNTUALES Y MIXTURAS DE DISTRIBUCIONES

VI.1. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Se plantea en este epígrafe un nuevo método para el cálculo de la provisión para siniestros pendientes de declaración en el contexto de procesos de Poisson marcados que incorpora el **uso novedoso de mixturas de distribuciones** como marca del proceso puntual **para evaluar el retardo con que los siniestros son notificados a la entidad aseguradora.**

En el Capítulo anterior se vio que si el número de siniestros ocurridos, $N(t,u)$, es un proceso de Poisson sobre $[0,\infty)\times B$ en el que B es el conjunto que recoge las marcas o características asociadas al proceso, el número de siniestros ocurridos en el intervalo $(s,t]$ con característica A se determinaba mediante la integral (V.2):

$$I((s,t),A)=\int_s^t\int_A N(ds,du)$$

Además, teniendo en cuenta el coste de dichos siniestros, la cuantía total de los mismos venía determinada mediante la integral (V.3):

$$I(Z,(s,t),A)=\int_s^t\int_A Z(s,u)\cdot N(ds,du)$$

Se deben evaluar las expresiones anteriores para un adecuado conjunto B de características A que represente los siniestros pendientes.

Para ello nos podemos ayudar de una proposición, utilizada por Albarrán y Leguey (1997) para el cálculo de la provisión, que establece que:

$$I(Z,(s,t),A) = \sum_{n=1}^{I((s,t),A)} Z(s_n, u_n)$$

donde s_n y u_n son los instantes de ocurrencia y las marcas del n-ésimo siniestro. Además:

$$E[I(Z,(s,t),A)] = \int_s^t \int_A E[Z(s,u)] \cdot \lambda(s) \cdot ds \cdot dP(U) \qquad \text{(VI.1)}$$

Este resultado es válido bajo las hipótesis de que $\nu(A)$ es una medida de probabilidad $(\nu(A) = P(U \in A))$, $E[I((s,t),A)] = P(U \in A) \cdot \int_s^t \lambda(x)dx$, el número de siniestros que se produzcan es independiente de la cuantía de los mismos y las realizaciones del proceso $Z(t,u)$ son continuas en u, continuas por la izquierda en t y acotadas.

Si la variable aleatoria U representa el tiempo que los siniestros tardan en ser liquidados completamente, se puede estimar la provisión para siniestros pendientes de liquidación y si dicha variable representa el retardo con que los siniestros son notificados a la entidad, estaremos en condiciones de estimar la provisión para siniestros pendientes de notificación.

La proposición anterior es aplicada por los autores considerando la distribución Gamma como la distribución del retardo en la notificación. Sin embargo, en ciertas ocasiones, como se comprobará con la aplicación a un caso práctico, dicha distribución puede no ser adecuada para modelar la variable retardo. Además, pequeñas variaciones en los parámetros de la misma pueden hacer que la provisión sufra cambios considerables. Es por ello por lo que se busca una mixtura que se ajuste a dicha variable, reduciendo el error en las estimaciones.

Los siniestros pendientes de declaración ocurridos en el intervalo *(s,s')* se caracterizan por ser notificados a la entidad con un determinado retardo *u* de tal forma que si *t* es el momento de su ocurrencia se verifica que *t+u>s'*. Por tanto el coste de dichos siniestros, que será la cuantía de la provisión vendrá dado, adaptando la expresión (VI.1) y representando la variable *U* el retardo en la notificación, por:

$$E[I(Z,(s,t),A)] = \int_{s}^{s'} \int_{s'-t}^{\infty} E[Z(t,u)] \cdot \lambda(t) \cdot dt \cdot dP(U) \qquad \text{(VI.2)}$$

probado que se verifican las hipótesis necesarias para poder aplicar la proposición.

Para aplicar el resultado se analiza una cartera de seguros multirriesgo hogar (cedida por una importante Entidad Financiera y Aseguradora) durante un periodo de seis años desde el momento de su creación (1990-1996), información conforme a las exigencias del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados que en el Artículo 43 establece que "la determinación de la provisión de prestaciones utilizando métodos estadísticos requerirá que la entidad tenga un volumen de siniestros suficiente para permitir la inferencia estadística y que disponga de información relativa a los mismos, como mínimo de los cinco últimos ejercicios, que comprenda las magnitudes relevantes para el cálculo".

Para estimar los diferentes factores que aparecen en el integrando de (VI.2) se proponen las siguientes consideraciones:

En primer lugar se analiza la distribución de la variable U que se refiere al retardo con que los siniestros son notificados a la entidad aseguradora desde el momento de su ocurrencia, variable que permitirá estimar la provisión para siniestros pendientes de notificación. Si en lugar de dicha variable se considera el tiempo que tardan en liquidarse completamente los siniestros, la expresión (VI.2) permitiria, como ya se ha comentado, estimar la provisión para siniestros pendientes de liquidación.

A continuación se estudia cuál es la evolución del número de siniestros ocurridos a lo largo del tiempo, la relación con el número de asegurados y se estima la intensidad del proceso de Poisson no homogéneo asociado a los mismos.

Por último se estima el coste medio de los siniestros cerrados hasta el momento en el que se quiere calcular la provisión y se estudia la independencia entre dicha variable y el retardo en la notificación.

VI.2. ESTIMACIÓN DEL NÚMERO DE SINIESTROS PENDIENTES

En el número de siniestros pendientes de notificación al finalizar cada año intervienen, además de la variable que representa el número de siniestros ocurridos en dicho periodo, el tiempo que los mismos tardan en ser notificados a la compañía.

Será preciso por tanto estimar ambas variables para poder determinar, en el caso que se analiza, cuál es el número de siniestros pendientes al finalizar el año lo que permitirá como ya se ha señalado, si se considera además el coste de los mismos, conocer cuál es el importe final de la provisión

VI.2.1. RETARDO EN LA NOTIFICACIÓN

Estimamos en primer lugar la distribución de la variable aleatoria U que representa el retardo con que los siniestros son notificados a la entidad.

Se supone en primer lugar que dicha variable sigue una distribución de probabilidad Gamma con función de densidad:

$$f(u)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}e^{-\frac{u}{\beta}}, u>0$$

y se estiman los parámetros de la misma, dada una muestra $U^n=\{u_1,\ldots,u_n\}$, mediante el método de máxima verosimilitud. Para ello se buscan los máximos $(\hat{\alpha})$ del logaritmo de la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(U^n;\alpha,\beta)=n\cdot\frac{1}{\beta}\cdot Ln\alpha-n\cdot Ln(\Gamma(\alpha))+\\+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}Ln(u_i)-\frac{1}{\beta}\cdot\sum_{i=1}^{n}u_i\end{aligned}$$

que resultan ser la solución de la ecuación:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\partial(\Gamma(\alpha))}{\partial\alpha}-Ln(\alpha)+Ln(\overline{u})-\frac{\sum_{i=1}^{n}Ln(u_i)}{n}=0$$

que requiere métodos iterativos para su resolución, y $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta}=\frac{1}{\hat{\alpha}}\cdot\overline{u}$$

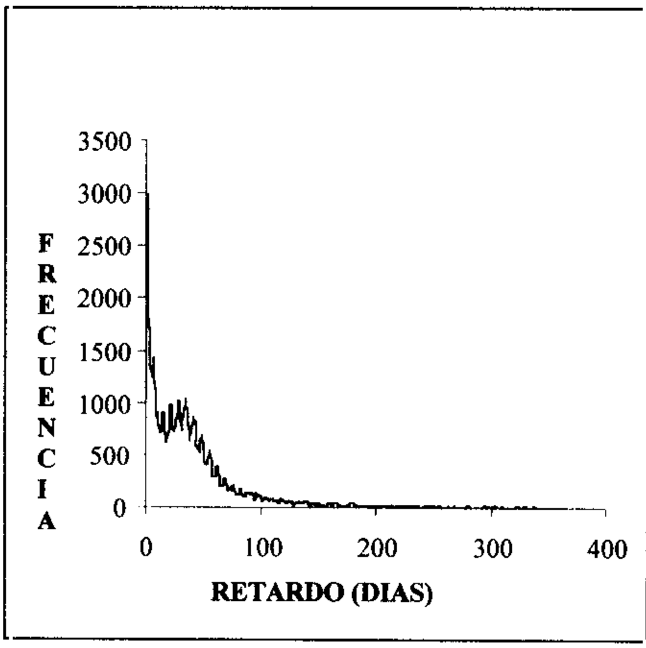
Se obtiene para la muestra de *6.300* observaciones (el 10% del total) las estimaciones $\hat{\alpha} = 0{,}83479$ y $\hat{\beta} = 50{,}5234$. Al realizar el Test χ^2 de la bondad de ajuste, una vez agrupadas las observaciones en *184* intervalos para que la frecuencia empírica no sea inferior a cinco, se observa que:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i} = 897{,}99 > 213{,}39 = \chi^2_{181} = K$$

por lo que no puede aceptarse que el retardo en la notificación sigue una distribución Gamma con los parámetros estimados, haciéndose necesario buscar una ley de probabilidad que represente mejor a la distribución empírica.

La representación gráfica de la distribución de frecuencias de dicha variable es la siguiente:

GRÁFICO VI.1. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE LA VARIABLE RETARDO



El gráfico anterior ayuda a centrar el problema de estimación de dicha variable. Se observa que una mixtura de distribuciones compuesta por una distribución de probabilidad Gamma, una distribución normal y una distribución exponencial puede aproximarse a la distribución empírica del retardo. La función de densidad de la misma es:

$$f(u;\Theta) = p_1 \cdot g_1(u;\alpha,\beta) + p_2 \cdot g_2(u;\mu,\sigma) + p_3 \cdot g_2(u;\lambda) \qquad \text{(VI.3)}$$

donde:

$$g_1(u;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(VI.4)}$$

$$g_2(u;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(VI.5)}$$

$$\text{y } g_3(u;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(VI.6)}$$

La estimación de los parámetros de la función de densidad definida en (VI.3) se obtiene por el método de máxima verosimilitud aplicando el algoritmo EM descrito en el Capítulo III, partiendo de los valores iniciales de los parámetros $\Theta^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \mu^{(0)}, \sigma^{(0)}, \lambda^{(0)})$.

Cada iteración del algoritmo, dadas las estimaciones $\Theta^{(m)}$ de los parámetros, consta de dos pasos. En el primero, el paso E, se calculan las probabilidades "a posteriori" de la siguiente forma:

$$P^{(m)}(k/u_j) = \frac{p_k^{(m)} g_k(u_j;\Theta^{(m)})}{f(u_j;\Theta^{(m)})},\ k=1,2,3,\ j=1,2,\ldots,n$$

donde $f(u_j;\Theta^{(m)})$ y $g_k(u_j;\Theta^{(m)})$ $(k=1,2,3)$ son las funciones de densidad definidas en (VI.3), (VI.4), (VI.5) y (VI.6) respectivamente.

En el segundo paso, el paso M, se estiman las proporciones de la mixtura:

$$p_k^{(m+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P^{(m)}(k/x_j),\ k=1,2,3$$

y los parámetros de las distintas componentes. Respecto a la primera componente, la distribución Gamma, resolviendo las correspondientes ecuaciones normales, se obtiene en primer lugar $\alpha^{(m+1)}$ como solución de la ecuación, obtenida mediante la aplicación del algoritmo de Newton-Raphson:

$$\frac{C}{A} + LnA - LnB + Ln(\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\partial(\Gamma'(\alpha))}{\partial\alpha} = 0$$

siendo:

$$A = \sum_{j=1}^{n} P(1/u_j),\ B = \sum_{j=1}^{n} u_j P(1/u_j) \text{ y } C = \sum_{j=1}^{n} Ln(u_j)P(1/u_j)$$

y a partir de dicho valor, $\beta^{(m+1)}$ se obtiene de forma sencilla como:

$$\beta^{(m+1)} = \frac{1}{\alpha^{(m)}} \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j P(1/u_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(1/u_j)}$$

Respecto a los parámetros de la segunda y tercera componentes se obtienen de la forma explicada en el Capítulo III como:

$$\mu^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j P(2/u_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(2/u_j)}$$

$$\sigma^{(m+1)} = +\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 P(2/u_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(2/u_j)} - (\mu^{(m+1)})^2} \text{ y}$$

$$\lambda^{(m+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(3/u_j)}{\sum_{j=1}^{n} u_j P(3/u_j)}$$

El algoritmo es convergente, resultando las siguientes estimaciones de los parámetros que aparecen en la función de densidad (VI.3):

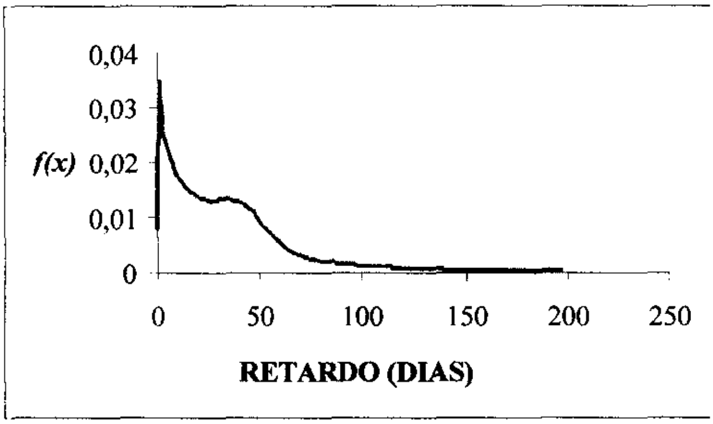
$$p_1 = 0{,}2997, \; \alpha = 0{,}58235, \; \beta = 113{,}62751$$

$$p_2 = 0{,}1946, \; \mu = 40{,}09922, \; \sigma = 12{,}2826 \text{ y} \qquad \text{(VI.7)}$$

$p_3 = 0{,}5057$, $\lambda = 0{,}03477$

cuya representación gráfica es:

GRÁFICO VI.2. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LA VARIABLE RETARDO



Una vez estimados los parámetros de la mixtura es necesario realizar un contraste de la bondad de ajuste para comprobar que, efectivamente, la distribución de probabilidad elegida representa de forma adecuada el retardo con que los siniestros son notificados a la entidad desde el momento de su ocurrencia. Tanto con el contraste χ^2 como con el contraste G^2 se llega a la misma conclusión pudiendo aceptarse la hipótesis nula de que el retardo se distribuye según la mixtura definida en (VI.3). En el contraste χ^2 se agrupan los datos en *168* intervalos resultando el valor crítico del Test $K=\chi^2_{159}=189{,}42$ que se compara con el valor empírico $\chi^2=160{,}92$. Si se realiza el contraste G^2 de la razón de verosimilitud resulta $G^2=62{,}72<K=\chi^2_{167}=198{,}15$, lo que nos lleva de igual forma a aceptar la hipótesis nula.

Se ha estimado de esta forma la distribución de probabilidad de la variable retardo, información fundamental para evaluar la expresión (VI.1) que proporciona el valor de la provisión para siniestros pendientes de notificación.

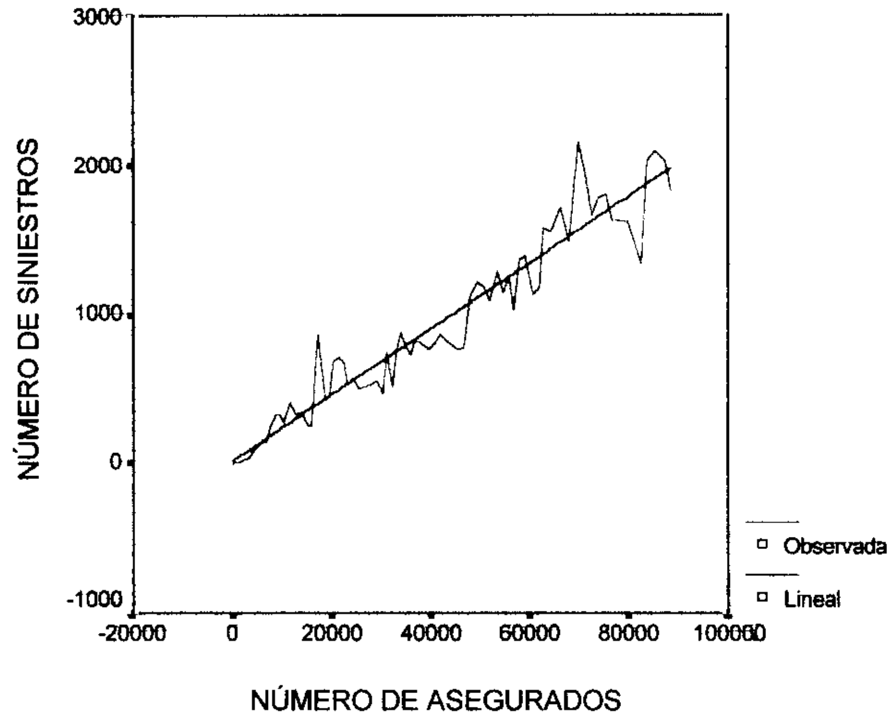
VI.2.2. INTENSIDAD DEL PROCESO DE POISSON

Se supone que el número de siniestros que tienen lugar en el intervalo $(0,t]$ en la cartera de pólizas es un proceso de Poisson cuya intensidad es una función del tiempo, $\lambda(t)$.

Suponemos además que el retardo con que dichos siniestros son notificados a la entidad no es superior a dos años, *730* días. Utilizando la distribución de la variable U estimada anteriormente se obtiene que la probabilidad de que un siniestro se notifique con un retardo superior a *730* días es *0,000137* lo que corrobora la hipótesis asumida. Por tanto se puede suponer que no existen siniestros ocurridos los cuatro primeros años que aún no han sido notificados a la entidad, teniendo así información completa respecto al número de siniestros ocurridos en dicho periodo.

Se utiliza esta información para estimar la intensidad del proceso de Poisson asociado a dichos siniestros, pudiendo proyectar esta información al momento en que se quiere calcular la provisión dado que la evolución de la siniestralidad es proporcional al número de asegurados como se ha comprobado en un ajuste lineal en el que resulta un coeficiente de correlación del *92,1%*. La representación gráfica del número de siniestros ocurridos en función del número de asegurados es:

GRÁFICO VI.3. NÚMERO DE SINIESTROS EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE ASEGURADOS

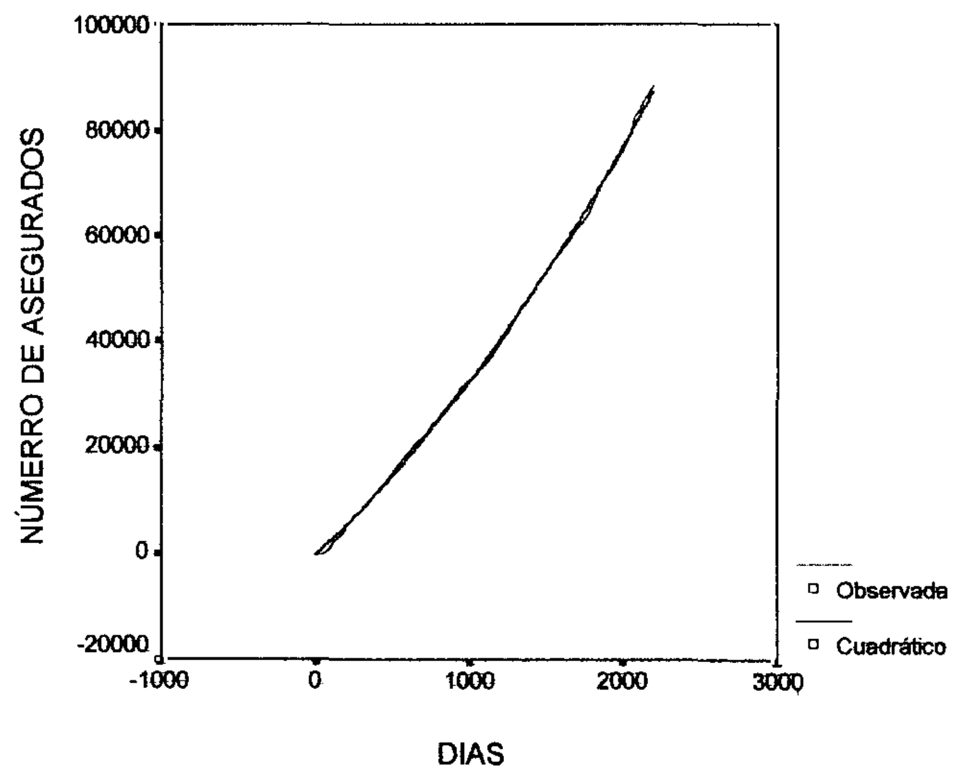


El número de asegurados se puede ajustar mediante funciones polinómicas del mismo tipo que las utilizadas en la estimación de la intensidad. Un polinomio de grado tres representa, con un coeficiente de correlación del *99,9%*, el número de asegurados en función del tiempo:

$$A(t) = -161{,}67 + 26{,}91 \cdot t + 0{,}059 \cdot t^2$$

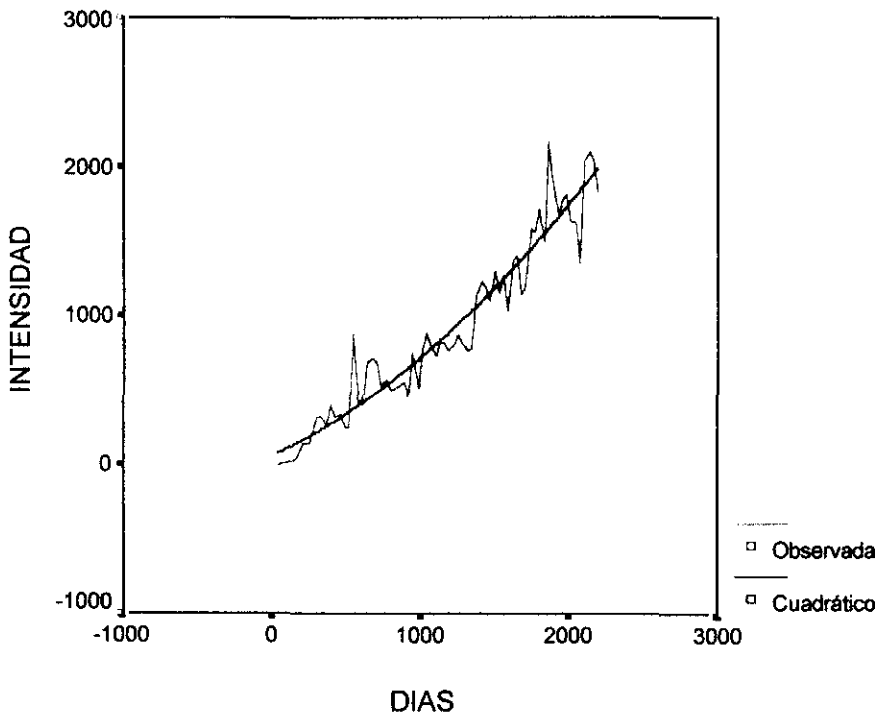
con representación gráfica:

GRÁFICO VI.4. NÚMERO DE ASEGURADOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO



La intensidad del proceso de Poisson resulta ser una función del tiempo, $\lambda(t)$, que se puede ajustar a un polinomio de grado dos con un coeficiente de correlación del *92,4%* con representación gráfica:

GRÁFICO VI.5. INTENSIDAD DEL PROCESO DE POISSON



En el periodo considerado la estimación de dicho polinomio es:

$$\lambda(t) = 1{,}631 + 0{,}0252 \cdot t + 3{,}102 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 \qquad \text{(V.10)}$$

expresión que se utilizará más adelante para calcular el importe final de la provisión.

VI.3. ESTIMACIÓN DEL COSTE DE SINIESTROS

Se debe estimar también la esperanza de la variable $Z(t,u)$ que representa el coste de los siniestros ocurridos en el instante t y notificados con retardo u. Estudiamos en primer lugar si dicha variable es independiente del tiempo que los siniestros tardan en ser registrados.

Si se realiza el contraste de independencia que utiliza el estadístico χ^2 como medida de las desviaciones entre los datos de la muestra representados en una tabla de contingencia y la hipótesis nula de que ambas variables son independientes, resulta para un nivel de significación del *5%* y una vez agrupados los datos en una tabla de contingencia de dimensión *13*x*7* para que la frecuencia empírica no sea inferior a cinco:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = 86{,}431 < 92{,}8083 = \chi^2_{72} = K$$

Se calculará la provisión al finalizar el sexto año por lo que se utiliza, como se ha propuesto, la información referente a todos los siniestros cerrados que se han notificado antes del momento de calcular la provisión, para poder no considerar el efecto de la inflación, estimándose el coste medio de los mismos, dada la independencia de u como:

$$E[Z(t,u)] = E[Z(t)] = 30.492{,}34 \qquad \text{(VI.9)}$$

VI.4. CÁLCULO DE LA PROVISIÓN

Si se considera la variable t representando los días en que han ocurrido los siniestros, el sexto año de desarrollo es el intervalo *[1827; 2192]*, que incluye un año bisiesto.

La provisión para siniestros pendientes de notificación, aplicando la fórmula (VI.2) es:

$$PSP = \int_{1827}^{2192} \int_{2192-t}^{\infty} E[Z(t,u)] \cdot \lambda(t) \cdot dt \cdot f(u) \cdot du$$

donde las distintas componentes del integrando se han estimado mediante las expresiones (VI.3) a (VI.9).

Es decir, la variable retardo sigue una distribución de probabilidad cuya función de densidad es la mixtura de distribuciones:

$$f(u;\Theta) = 0{,}2997 \cdot g_1(u;\alpha,\beta) + 0{,}1946 \cdot g_2(u;\mu,\sigma) + 0{,}5057 \cdot g_2(u;\lambda)$$

siendo:

$$g_1(u;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(113{,}62751)^{0{,}58235}\,\Gamma(0{,}58235)} u^{0{,}58235-1} e^{-\frac{u}{113{,}62751}} & u > 0 \\ 0 & u \le 0 \end{cases}$$

$$g_2(u;\mu,\sigma) = \frac{1}{12{,}2826\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-40{,}09922)^2}{2\cdot(12{,}2826)^2}}$$

$$y \ g_3(u;\lambda) = \begin{cases} 0{,}03477 \cdot e^{-0{,}03477 \cdot u} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

la intensidad del proceso de Poisson que representa el número de siniestros ocurridos en el instante t es una función $\lambda(t) = 1{,}631 + 0{,}0252 \cdot t + 3{,}102 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$ y la cuantía media de los siniestros es, teniendo en cuenta la independencia de esta variable del retardo en la notificación, $E[Z(t)] = 30.492{,}34$ ptas.

Resolviendo la integral anterior resulta el valor estimado para la provisión:

$PSP = 55.274.866$ pts.

Se ha desarrollado por tanto un nuevo método global para el cálculo de la provisión que puede ser utilizado como alternativa al método individual, tal y como se establece en el nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (Real Decreto 2.486/1998, de 20 de Noviembre). Este método deberá ser contrastado con el método individual de cálculo, para lo que es necesario conocer el volumen de primas del periodo, información no disponible en la base de datos utilizada.

La ventaja de este método es que, a pesar de la complejidad del mismo, su aplicación a efectos prácticos resulta sencilla, utilizando el algoritmo EM para estimar los parámetros de la mixtura, y la información necesaria se puede presentar en una hoja de cálculo. Además, permite referir la provisión a cualquier año de partida y de valoración de la misma.

En definitiva, se obtiene un modelo de la siniestralidad de la compañía que contempla el tiempo que tardan en registrarse los siniestros mediante el uso de mixturas de distribuciones como marca del proceso de Poisson que representa el número de siniestros ocurridos.

CONCLUSIONES

La importancia del estudio de la siniestralidad en la Entidad Aseguradora se manifiesta por las características propias y específicas de la actividad desarrollada por la misma, actividad destinada a cubrir riesgos.

El estudio de las variables que intervienen en la siniestralidad, coste y número de siniestros, mediante la Teoría del Riesgo Colectivo, en contraposición a la Teoría del Riesgo Individual, permite determinar el coste total al que tiene que enfrentarse la compañía de seguros. Si se estudia el comportamiento estadístico desde el punto de vista de la Teoría del Riesgo Individual, por el Teorema Central del Límite, la ganancia o pérdida total de la empresa de seguros es aproximadamente normal si el número de pólizas es suficientemente grande. Esto no siempre es cierto como se demuestra en la aplicación a un caso práctico desarrollada en la Tesis Doctoral. No podemos limitarnos a una única distribución de probabilidad, como la distribución normal, para representar el coste de todos los siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas.

La Teoría del Riesgo Colectivo por el contrario, introduce modelos generales de probabilidad para modelar el coste total de la siniestralidad y permite, además, dar respuesta a preguntas tales como cuál es la probabilidad de ruina de la compañía en un momento determinado, o en el futuro, pregunta a la que no responde la Teoría del Riesgo Individual.

La distribución de siniestralidad ayuda además a medir la solvencia financiera de la entidad aseguradora al identificar a la empresa con la cartera de seguros que posee y hace posible poner precio (prima) a los distintos riesgos o pólizas de la cartera.

Como alternativa a las aproximaciones clásicas expuestas en el Capítulo II, se utilizan mixturas de distribuciones para modelar las variables aleatorias asociadas a la siniestralidad. La ventaja de la utilización de dichas distribuciones es la ausencia de hipótesis rigurosas, necesarias en las aproximaciones clásicas para estimar los parámetros que aparecen de la siniestralidad total.

Existen diferentes métodos de estimación de los parámetros que aparecen en las mixturas de distribuciones. De ellos, se ha utilizado el método de máxima verosimilitud que, mediante la aplicación del algoritmo EM adaptándolo al caso de mixturas de distribuciones, proporciona una estimación de los parámetros de forma sencilla.

La ventaja de este método de estimación sobre el resto radica en las propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud que además de ser consistentes, se distribuyen asintóticamente como una normal y en la implementación del algoritmo EM en una hoja de cálculo. La utilización de este método en lugar del método de los momentos facilita la estimación de los parámetros de las mixturas. El método de los momentos plantea la dificultad de la solución de los sistemas de ecuaciones necesarios para obtener las estimaciones.

La definición de mixturas de distribuciones de Poisson, exponenciales o normales permite representar de forma adecuada las variables aleatorias que intervienen en la siniestralidad. A partir del planteamiento general de la estimación de los parámetros por máxima verosimilitud es posible, mediante la aplicación del algoritmo EM, obtener estimaciones de los parámetros de las mixturas utilizadas de forma sencilla.

En concreto, con los datos utilizados para ilustrar el planteamiento teórico, se observa que una mixtura de dos distribuciones de Poisson mejora en gran medida el ajuste que si se considera una única distribución de Poisson. Una única distribución de Poisson no se puede aceptar como válida para modelar el número de siniestros, como prueban los contrastes de bondad de ajuste realizados. Se pueden utilizar mixturas de distinto número de componentes con distribución de Poisson. Finalmente, se elige una mixtura de tres componentes para modelar el coste de los siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas en lugar de otra de cuatro componentes porque en este último caso se complica la expresión de la función de cuantía sin mejorar el ajuste.

En el estudio de la cuantía de los siniestros, de nuevo, la mixtura de dos distribuciones exponenciales mejora el ajuste realizado a una sola distribución aunque no se puede aceptar como distribución del coste de los siniestros. Si se incluyen además componentes normales, la mixtura definida se aproxima al coste de los siniestros dado que los contrastes de bondad de ajuste permiten aceptarla como válida. Se elegirá una mixtura de dos distribuciones exponenciales y tres distribuciones normales como distribución del coste de los siniestros. El uso de un número mayor de componentes, además de complicar la función de densidad, no mejora de forma significativa la distribución elegida.

Si se estudia la siniestralidad total se observa que la aproximación normal no es válida, haciéndose necesario el uso de una mixtura de componentes normales que mejore dicha aproximación. Son necesarias cuatro distribuciones normales para representar el coste total de los siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas. Incrementar el número de componentes, al igual que ocurre en los dos casos anteriores, complica la expresión de la función de densidad sin mejorar el ajuste.

Como consecuencia, se debe comentar que el uso novedoso de este tipo de distribuciones no se puede obviar en una compañía de seguros. En general se mejoran las aproximaciones clásicas, lo que permite el mejor conocimiento de la siniestralidad con todas las consecuencias que ello implica como establecer medidas que garanticen la solvencia, un precio más adecuado de las primas conforme al servicio de protección que ofrece la entidad aseguradora, mejorar la toma de decisiones, etc.

Además, el uso de este tipo de distribuciones no requiere hipótesis sobre la distribución del número de siniestros para construir la función de siniestralidad total. Se puede utilizar, por tanto, con independencia de la distribución del número de siniestros. En concreto, el número de siniestros ocurridos en la cartera de pólizas analizada no sigue una distribución de Poisson simple, sino que se ajusta a una mixtura de distribuciones de Poisson.

Es importante también estudiar la siniestralidad en un ambiente dinámico. El conocimiento de esta distribución, en cualquier instante de tiempo, permite a la compañía aseguradora conocer con qué recursos ha de contar para hacer frente a los gastos por siniestros. La empresa aseguradora debe mantener para ello un adecuado grado de solvencia que se ve afectada, por el lado del pasivo, por las reclamaciones efectuadas por siniestros.

Para conocer por tanto qué parte de sus recursos debe destinar a pagos por siniestros ocurridos en un determinado ejercicio que se cierra, se calculan las provisiones técnicas. Entre ellas destacan las provisiones para prestaciones, que incluyen la provisión para siniestros pendientes de liquidación o pago y la provisión para siniestros no declarados, además de los gastos internos de liquidación de los mismos, porque el nuevo Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados hace especial referencia a las mismas, en el artículo 43, al permitir la utilización de métodos estadísticos para su cálculo.

En relación al cálculo de la provisión para prestaciones, comentar que existen múltiples métodos estadísticos basados en distintas hipótesis e incluyendo diferentes variables que pueden ser aplicados para determinar la cuantía de la misma. La Entidad Aseguradora debe decidir, en función a la información disponible, el método más adecuado y fiable que permita estimar la provisión.

Los métodos basados en procesos estocáticos permiten el estudio de la siniestralidad en un ambiente dinámico y por tanto, referir la provisión a cualquier periodo de origen, sin necesidad de modificar la función de siniestralidad ni de hipótesis adicionales sobre la misma. La metodología que se incluye en el Capítulo V proporciona la base teórica necesaria, que incluye las herramientas necesarias para su aplicación al cálculo de la provisión. El uso de procesos marcados permite incluir en la función de siniestralidad cualquier característica específica de los siniestros, pudiendo considerar mixturas de distribuciones en las mismas.

En el método propuesto, basado en procesos de Poisson marcados, se incluye el estudio del retardo en la notificación de los siniestros desde el momento de su ocurrencia (U). Esta variable es fundamental en el estudio dinámico de la siniestralidad, un conocimiento lo más preciso posible de la misma permitirá determinar el porcentaje de siniestros pendientes al finalizar el año.

Se demuestra que dicha variable, en el caso concreto analizado, se ajusta a una mixtura de distribuciones con una componente Gamma, una normal y una exponencial, mejorando aproximaciones a distribuciones clásicas. Esta mixtura mejora, por ejemplo, la aproximación de la variable U a una distribución Gamma de probabilidad y la estimación de sus parámetros, de la misma forma que en casos anteriores, resulta sencilla si se aplica el método de máxima verosimilitud mediante la implementación del algoritmo EM.

La determinación explícita de la función de densidad asociada a dicha variable, junto con la estimación de la intensidad del proceso de Poisson que representa el número de siniestros que tienen lugar en la cartera de pólizas, proporciona una estimación del número de siniestros pendientes de notificación al finalizar un ejercicio determinado. La inclusión del coste de los mismos permite calcular el valor final de la provisión para siniestros pendientes de declaración (IBNR).

Debido a la actualidad del tema tratado, en parte por la modificación del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados que permite a las entidades aseguradoras la utilización de métodos estadísticos para el cálculo de la provisión para prestaciones, quedan muchas líneas de investigación abiertas. A continuación se presentan las de mayor interés.

Es necesario, al igual que se ha hecho con los procesos de Poisson marcados, plantear una revisión metodológica de los métodos dinámicos basados en procesos de Markov, para el estudio de la siniestralidad y su aplicación al cálculo de las provisiones, como generalización de los métodos descritos en el Capítulo V.

Se necesita además, un estudio exhaustivo de procesos estocásticos que se comporten como martingalas. De esta forma es posible incluir en los modelos de siniestralidad toda la información que la compañía de seguros tiene sobre los siniestros hasta el momento en el que se desea calcular la provisión.

Una metodología adecuada que permita identificar, entre todos los métodos existentes para el cálculo de la provisión, los más adecuados a las carteras de pólizas e información que una empresa de seguros posee, permitirá a la entidad aseguradora conocer qué métodos de estimación de las provisiones aplicar en cada momento, aunque cambien las características de las carteras.

Dada la función social que este tipo de empresas tiene, al ofrecer un servicio de seguridad frente al riesgo a los clientes, es esencial continuar con este tipo de estudios que garanticen el adecuado funcionamiento de la actividad aseguradora.

BIBLIOGRAFÍA

Aase, K.K. (1985). "Accumulated claims and collective risk in insurance: higher order asymptotic approximations". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 65-85.

Abbott, W.M., Clarke, T.G., Hey, G.B., Reynolds, I.W. and Treen, W.R. (1974). "Some thoughts on technical reserves and statuory returns in general insurance". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 101, Part. II, pág. 217-265.

Aitkin, M. and Tunnicliffe Wilson, G. (1980). "Mixture models, outliers and the EM algorithm". *Technometrics*, Vol. 22, nº 3, pág. 325-332.

Ajne, B. (1974). "On the statistical estimation of cost of claims". *Astin Bulletin,* Vol. 7, nº 3, pág. 181-191.

Albarrán Lozano, I. (1999). *La demanda de los seguros privados en España: un análisis económico y estadístico.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Albarrán Lozano, I. y Leguey Galán, S. (1997). "Un método de cálculo para la provisión de siniestros pendientes basado en los tiempos de demora". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época*, nº 2, pág 11-49

Albrecht, P. (1983a). "Parametric multiple regression risk models: some connections with tariffication, especially in motor insurance". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 2, nº 2, pág. 113-117.

Albrecht, P. (1983b). "Parametric multiple regression risk models: some connections with IBNR". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 2, nº 2, pág. 69-73.

Albrecht, P. (1983c). "Parametric multiple regression risk models: theory and statistical analysis". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 2, nº 1, pág. 49-66.

Albrecht, P. (1985). "An evolutionary credibility model for claim numbers". *Astin Bulletin,* Vol. 15, nº 1, pág. 1-17.

Ambagaspitiya, R. S. (1995). "A family of discrete distributions". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 16, nº 2, pág. 107-127

Ambagaspitiya, R. S. and Balakrishnan, N. (1994). "On the compound generalized Poisson distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 24, nº 2, pág. 255-263.

Anderssen, R.S. and de Hoog, P.R. (editores) (1982). *The application of mathematics in industry.* Martinus Nijhoff Publishers.

Arjas, E. (1989). "The claims reserving problem in non-life insurance: Some structural ideas". *Astin Bulletin,* Vol. 19, nº 2, pág. 139-152.

Asmussen, S. (1989). "Risk theory in a Markovian environment". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 69-100.

Asmussen, S. and Bladt, M. (1996). "Phase-type distributions and risk processes with state dependent premiums". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 19-36.

Bartholomew, D.J. (1959). "Note on the measurement and prediction of labour turnover". *Journal of the Royal Statistical Society. Series A.* nº 122, pág. 232-239.

Bartholomew, D.J. (1975). "Errors for prediction for Markov chain models". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* nº 37, pág. 444-456.

Bartlett, M.S. and MacDonald, P.D.M. (1968). "Least squares estimation of distribution mixtures". *Nature,* nº 217, pág. 195-196

Beard, R.E., Pentikäinen, T. and Pesonen, E. (1984). *Risk Theory.* Chapman and Hall, London.

Beekman, J.A. and Fuelling, C.P. (1987). "A collective risk comparative study". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 6, nº1, pág. 57-62.

Behboodian, J. (1970a). "On a mixture of normal distributions". *Biometrika,* nº 57, pág. 215-217.

Behboodian, J. (1970b). "On the modes of a mixture of two normal distributions". *Technometrics* Vol. 12, nº 1, pág. 131-139.

Benjamin, S. (1976). "Profit and other financial concepts in insurance". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 103, pág. 233-281.

Benjamin, S. (1980). "Solvency and profitability in insurance". *Transactions of the XXI International Congress of Actuaries,* Vol. I, pág. 33-47.

Benjamin, S. (1988). "Some experiments with run-offs". *Transactions of the XXIII International Congress of Actuaries* Vol. I, pág. 23-35

Benjamin, S. and Eagles, L. M. (1986). "Reserves in Lloyd's and the London market". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 113, Part. II, pág. 197-256.

Berger, M. A. (1993). *An introduction to probability and stochastic processes.* Springer Verlag, New York.

Berquist, J.R. and Sherman, R.E. (1977). "Loss reserve adequacy testing: a comprehensive systematic, approach". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LXIV, pág. 123-185.

Berquist, R. (1972). "Loss reserving in the sixties". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LIX, pág. 18-32.

Bilbatua, L. (1990). "Provisiones técnicas de las entidades aseguradoras". *Actuarios,* nº 2, Pág. 22-26.

Binder, D.A. (1978). "Comment on 'Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions'". *Journal of American Statistical Association,* nº 73, pp. 746-747

Blischke, W.R. (1964). "Estimating the parameters of mixtures of binomial distributions". *Journal of American Statistical Association,* nº 59, pág. 510-528

Boes, D.C (1966). "On the estimation of mixing distributions". *Annals of Mathematical Statistics,* nº 37, pp. 177-188

Bohman, H. (1973). "Insurance business described by a mathematical model". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 2, pág. 71-99.

Bohman, H. (1977). "How different are life insurance and general insurance?". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 54-58.

Borch, K. (1974a). "Mathematical models in insurance". *Astin Bulletin,* Vol. 7, nº 3, pág. 192-202

Borch, K. (1974b). *The mathematical theory of insurance.* Lexington Books, Massachusetts.

Bornhuetter, R.L. and Ferguson R.E. (1972). "The actuary and IBNR". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LIX, pág. 181-195.

Boyles, R.A. (1983). "On the convergence of the EM algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* nº 45, pág. 47-50

Brazier, S., Sparks, R.S.J., Carey, S.N., Sigurdsson, H. And Westgate, J.A. (1983). "Bimodal grain size distribution and secondary thickening in air-fall ash layers". *Nature*, nº 301, pág. 115-119.

Brémaud, P. (1981). *Point processes and queues: martingale dinamics.* Springer Verlag, New York

Bryant, P. and Williamson, J.A. (1978). "Asymptotic behaviour of classification maximum likelihood estimates". *Biometrika,* nº 65, pág. 273-281.

Bühlmann, H. (1979). "El problema de las reservas técnicas en los seguros de no-vida". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* nº 20, pág. 23-52.

Bühlmann, H. (1984). "Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: Recursion or fast Fourier transform?". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 116-126.

Bühlmann, H. (1996). *Mathematical methods in risk theory.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Bühlmann, H., Schnieper, R. and Straub, E. (1980). "Claims reserves in casualty insurance based on probabilistic model". *Mitteilungen,* nº 1, pág. 21-45.

Busquets Roca, F. (1988). *Teoría general del seguro.* Vicens-Vives, Barcelona

Byrnes, J.F. (1986). "A survey of the relationship between claims reserves and solvency margins". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol: 5, nº 1. Pág. 3-29.

Castello Matrán, J. y Guardiola Lozano, A. (1992). *Diccionario de seguros.* Mapfre, Madrid.

Chakravarty, P.P (1969). "On certain inequalities connected with Gamma function". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 1-2, pág. 20-25.

Chan, L. K. and Chan, N. N. (1973). "On the optimum best linear unbiased estimates of the parameters of the Normal distribution based on selected order statistics". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 2, pág. 120-128.

Chaubey, Y. P., Garrido, J. and Trudeau, S. (1998). "On the computation of aggregate claims distributions: some new approximations". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 23, nº3, pág. 215-230.

Chung, K. L. and Williams, R. J. (1990). *Introduction to stochastic integration.* Birkhäuser, Boston.

Cinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes.* Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Clarke, T.G. and Harland, N. (1974). "A practical statistical method of estimating claims liability and claims cash flow". *Astin Bulletin,* Vol. 8, 26-37.

Cohen, A.C. (1967). "Estimation in mixtures of two normal distributions" *Technometrics*, nº 9, pág. 15-28.

Collins, M. G. (1990a). *Insurance of the person.* Witherby & Co. Ltd, London.

Collins, M. G. (1990b). *Introduction to insurance.* Witherby & Co. Ltd, London.

Committee on loss reserves. (1979). "Statement of principles regarding property and casualty loss and loss adjustment expense liabilities". *Astin Bulletin,* Vol. 10, nº 3, pág. 305-317.

Cox, D.R and Isham, V. (1992). *Point processes.* Chapman and Hall, London.

Cox, D.R. (1966). "Notes on the analysis of mixed frecuency distributions". *Br. J. Math. Statist. Psycol.*, nº 19, pág. 39-47.

Craighead, D.H. (1979). "Some aspects of the London reinsurance market in world-wide short-term business". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 106, Part. III, pág. 227-277.

Craighead, D.H. (1980). "Loss ratios on liability groups". *Giro Bulletin*, nº 29, pág. 11-12.

Cuervo García, A., Calvo Bernardino, A., Rodríguez Sáiz, L. y Parejo Gámir, J.A. (1998). *Manual de sistema financiero español.* Ariel Economía, Barcelona.

Cummins, J.D. (editor) (1985). *Strategic planning and modeling in property-liability insurance.* Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston.

Cummins, J.D. y Derrig, A. (editores) (1989). *Financial models of insurance solvency.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Cummins, J.D. y Derrig, A. (editores) (1991). *Managing the insolvency risk of insurance companies:proceedings of the Second International Conference on Insurance Solvency.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Cumpston, J.R. (1976). "Payments per unit of risk claims models". *General Insurance Bulletin,* nº 1, pág. 8-11.

Daboni, L. (1974). "Some models of inference in the risk theory from a bayesian view point". *Astin Bulletin,* Vol. 8, nº 1, pág. 38-56.

Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (1988). *An introduction to the theory of point processes.* Springer-Verlag, New York.

Daykin, C. D., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1994). *Practical risk theory for actuaries.* Chapman and Hall, London.

de Jong, P. and Zehnwirth, B. (1983a). "Claims reserving, state-space models and the Kalman filter". *Journal of the Institute of Actuaries,* Vol. 110, pág. 157-181.

de Jong, P. and Zehnwirth, B. (1983b). "Credibility theory and the Kalman filter". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 2, nº 4, pág. 281-286.

de Pril, N. (1985). "Recursions for convolutions of arithmetic distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 15, nº 2, pág. 135-139.

de Pril, N. (1986). "Moments of a class of compound distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 117-120.

de Pril, N. (1989). "The aggregate claims distribution with arbitrary positive claims". *Astin Bulletin,* Vol. 19, nº 1, pág. 9-24.

de Vylder, F. (1978). "Estimation of IBNR claims by least squares". *Bulletin of the Association of Swiss Actuaries,* nº 78, pág. 247-254.

del Rio, J. (1993). "Provision para siniestros pendientes de declaración". *Previsión y Seguro,* nº 24, pág. 53-60.

Delbaen, F. and Haezendonck, J. (1985). "Inversed martingales in risk theory". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 4, nº 3, pág.

Delbaen, F. and Haezendonck, J. (1986). "Martingales in Markov processes applied to risk theory". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 5, nº 3, pág. 201-215.

Delbaen, F. and Haezendonck, J. (1987). "Classical risk theory in an economic environment". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 6, nº2, pág. 85-116.

Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977). "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* nº 39, pág. 1-38

Denuit, M. (1997). "A new distribution of Poisson-type for the number of claims". *Astin Bulletin,* Vol. 27, nº 2, pág. 229-242.

Dickson, D. C. M., Tedesco, L. and Zehnwirth, B. (1998). "Predictive aggregate claims distributions". *Journal of Risk and Insurance,* Vol. 65, nº 4, pág. 689-709

Doob, J.L. (1990). *Stochastic processes.* John Wiley and Sons, New York.

Doray, L. (1994). "IBNR reserve under a loglinear location-scale regression model". *Casualty Actuarial Society Forum, Spring 1994,* pág. 607-651.

Doray, L. G. (1996). "UMVUE of the IBNR reserve in a lognormal linear regression model". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 18, nº 1, pág. 43-57

Doray, L. G. (1997). "A semi-parametric predictor of the IBNR reserve". *Astin Bulletin,* Vol. 27, nº 1, pág. 113-116.

Eeghen, J. van (1981). *Loss reserving methods.* Surveys of Actuarial Studies, nº 1, Nationale Nederlanden N.V., Rotterdam.

Elliott, R. J. (1982). *Stochastic calculus and applications.* Springer Verlag, New York.

Elvers, E. (1991). "A note on the generalized Poisson distribution". *Astin Bulletin,* Vol. 21, pág. 167

Embrechts, P. (1995). "Risk theory of the second and third kind". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 35-43.

Embrechts, P., Maejima, M. and Teugels, J. L. (1985). "Asymptotic behaviour of compound distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 15, nº 1, pág. 45-48

Eshita, N. (1977). "An estimation of claims distribution". *Astin Bulletin,* Vol. 9, nº1-2, pág. 111-118

Everitt, B. S. y Hand, D. J. (1981). *Finite mixture distributions.* Chapman and Hall, London.

Feller, W. (1991). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* Vol. I. Limusa, Mexico.

Ferrara, G. and Quario, G. (1977). "Distribution of the number of claims in motor insurance according to the lag of settlement". *Astin Bulletin,* Vol. 9, nº 1-2, pág. 119-124.

Finger, R.J. (1976). "Modelling loss reserve developments". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LXIII, pág. 90-105.

Fisher, W. H. and Lester, E. P. (1975). "Loss reserve testing in a changing environment". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LXII, pág. 154-171

Fisher, W.H. and Lange, J.T. (1973). "Loss reserve testing: a report year approach". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LX, pág. 189-207.

Frees, E. W. (1986). "Approximation of the initial reserve for known ruin probabilities". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 5, nº 3, pág. 187-196.

Fryer, J.G. and Robertson, C.A. (1972). "A comparison of some methods for estimating mixed normal distributions". *Biometrika,* nº 59, pág. 639-648.

Gallegos Díaz de Villegas, J.E. (1991). *Aspectos Técnicos de la legislación de seguro privado.* Centro de Estudios del Seguro. Madrid.

Gerber, H. (1973). "Martingales in risk theory". *Mitteilungen,* nº 2, pág. 205-216.

Gerber, H.U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory.* Huebner Foundation. University of Pensylvania, Philadelphia.

Gerber, H.U. (1984). "Error bounds for the compound Poisson approximation". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 3, nº 3, pág. 191-194.

Gil Fana, J. A. (1995). "Provisiones para siniestros pendientes. Métodos de cálculo". *Previsión y Seguro* nº 44, pág. 22-38.

Gil Fana, J.A. y Vilar Zanón, J.L. (1991). "Provisión para desviación de siniestralidad: un estudio comparado". *Previsión y Seguro* nº 13, pag. 49-65.

Goovaerts, M. J. and Dhaene, J. (1996). "The compound Poisson approximation for a portfolio of dependent risks". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 18, nº 1, pág. 81-85

Goovaerts, M. J. and Kaas, R. (1991). "Evaluating compound generalized Poisson distributions recursively". *Astin Bulletin,* Vol. 21, nº 1, pág. 193-198.

Goovaerts, M. J. and Kling, B. (1993). "A note on compound generalized distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 60-72.

Goovaerts, M., F. de Vylder y Haezendonck, J. (editores) (1986). *Insurance and risk theory.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Goovaerts, M., Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E. and Bauwelinckx, T. (1990). *Effective actuarial methods.* North-Holland, Amsterdam.

Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory.* Springer Verlag, New York

Grandell, J. (1996). *Mixed Poisson Processes.* Chapman and Hall, London

Grigelionis, B. (1998). "On mixed Poisson processes and Martingales". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 81-88.

Guardiola Lozano, A. (1990). *Manual de Introducción al Seguro.* Mapfre, Madrid

Gutenberg, E. (1990). *Economía de la Empresa. Teoría y práctica de la gestión empresarial.* Deusto, Bilbao. (Traducción y adaptación de Santiago Echevarría).

Guttorp, P. (1995). *Stochastic modeling of scientific data.* Chapman and Hall, London.

Haastrup, P. and Arjas, E. (1996). "Claims reserving in continuous time; a nonparametric bayesian approach". *Astin Bulletin,* Vol. 26, nº 2, pág. 139-164

Habermann, S. and Sibbett, T. A. (editores) (1995) *History of actuarial acience. Volume VII: investment, risk theory, non-life insurance.* William Pickering, London.

Hachemeister, C. A. (1980). "A stochastic model for loss reserving". *Transactions of the XXI International Congress of Actuaries* Vol. I, pág. 185-194.

Hadini, N. (1985). "A note on de Vylder's method of estimation of IBNR claims". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 4, nº 4, pág. 263-266.

Harrison, P.J. and Stevens, C.F. (1976). "Bayesian forecasting". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B,* nº 38, 205-247.

Hawkins, R.H. (1972). "A note on multiple solutions to the mixed distribution problem". *Technometrics* Vol. 14, nº 4, pág. 973-976

Hesselager, O. (1994a). "A Markov model for loss reserving". *Astin Bulletin,* Vol. 24, nº 2, pág. 183-193.

Hesselager, O. (1994b). "A recursive procedure for calculation of some compound distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 24, nº 1, pág. 19-32.

Hesselager, O. (1995). "Modelling of discretized claim mumbers in loss reserving". *Astin Bulletin,* Vol. 25, nº 2, pág. 119-135.

Hesselager, O. (1996). "A recursive procedure for calculation of some mixed compound Poisson distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 54-63.

Hesselager, O., Wang, S. and Willmot, G. (1997). "Exponential and scale mixtures and equilibrium distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 125-142.

Hipp, C. (1985). "Approximation of aggregate claims distributions by compound Poisson distributions". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 4, nº 4, pág. 227-232

Hogg, R.V. and Klugman, S.A. (1984). *Loss Distributions*. John Wiley and Sons, New York.

Hosmer, D.W. (1973). "A comparison of iterative maximum likelihood estimates of the parameters of a mixture of two normal distributions under three diferent types of sample". *Biometrics* Vol. 29, nº 4, pág. 761-770

Hossack, I., Pollard, J. and Zehnwirth, B. (1983). *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge university Press, Cambridge.

I.C.E.A. (1997). *Teoría general del seguro*. Col. Textos Master en Dirección Aseguradora, I.C.E.A., Madrid.

Iranpour, R. and Chacon, P. (1988). *Basic stochastic processes: the Mark Kac lectures*. Macmillan Publishing Company, New York.

Jacobs, K. (1992). *Discrete stochastics (A series of advanced textbooks in mathematic; 3)*. Birkhäuser, Boston.

Jewell, W. S. (1990). "Predecting IBNYR Events and delays II: discrete Time". *Astin Bulletin,* Vol. 20, nº 1, pág. 93-111.

Jewell, W.S. (1983). *A survey of mathematical models in insurance*. Verlag Versicherungswirtschaft eV., Karlsruhe

Jewell, W.S. (1989). "Predicting IBNYR events and delays I: continuous time". *Astin Bulletin,* Vol. 19, nº 1, pág. 25-55.

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1969). *Discrete distributions.* Wiley, New York.

Jorgensen, B. (1982). *Statistical properties of the genaralized inverse Gaussian Distribution. (Lecture Notes in Statistics; V. 9).* Springer Verlag, New York.

Kaas, R., van Heerwaarden, A.E. and Goovaerts, M. J. (1988). "Between individual and collective model for the total claims". *Astin Bulletin,* Vol. 18, nº 2, pág. 169-174

Kabe, D.G. (1972) "On moments of order statistics from the Pareto distribution". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 2, pág. 179-181.

Kabir, A.B.M.L. (1968). "Estimation of parameters of a finite mixture of distributions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B.* nº 30, pág. 472-482

Kalbfleisch, J. and Prentice, R. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data.* John Wiley, New York.

Kaminsky, K.S. (1987). "Prediction of IBNR claim counts by modelling the distribution of report lags". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 6, nº2, pág. 151-159.

Karlsson, J.E. (1976). "The expected value of IBNR claims". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2

Kemeny,J.G. and Snell,J.L. (1976). *Finite Markov chains.* D.Van Nostrand Company Inc.

Kemp, A.W. (1973). "On Gamma function inequalities". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 2, pág. 65-69.

Khury, C. K. (1980). "Loss reserves: performance standards". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LXVII, pág. 1-23.

Kingman, J.F. (1993). *Poisson processes.* Oxford university Press Inc., New York.

Kling, B. and Goovaerts, M. (1993). "A note on compound generalized distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 60-72.

Kramreiter, H. and Straub, E. (1973). "On the calculation of IBNR reserves II". *Mitteilungen,* nº 2, pág. 177-190.

Kremer, E. (1982). "IBNR claims and the two-way model of ANOVA". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 1, pág. 47-55.

Kwapien, S. and Woyczynski, W. A. (1992). *Random series and stochastic integrals: single and multiple.* Birkhäuser, Boston.

Lange, O. (1964). *Introducción a la Econometría.* Fondo de Cultura Económica. Mexico. Pp. 147-163.

Latorre Llorens, L. (1992). *Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora.* Mapfre, Madrid.

Latorre Llorens, L. (1993). "La provisión técnica para desviación de la siniestralidad". *Previsión y Seguro,* nº 23, pág. 57-64.

Legislación: L.O.S.S.P., Ley de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados. Ley 30/95, de 8 de noviembre. B.O.E. nº 268, de 9 de noviembre de 1995

Legislación: L.C.S., Ley de Contrato de Seguro. Ley 50/80, de 8 de octubre. B.O.E. nº 250, de 17 de octubre de 1980.

Legislación: R.O.S.S.P., Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados. Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre. B.O.E. nº 282, de 25 de noviembre de 1998.

Leguey Galán, S. y Albarrán Lozano, I. (1998). "El problema del cálculo de reservas en seguros no vida. Una aplicación estocástica". *Revista Española de Seguros,* nº 93, pág 131-141.

Lemaire, J. (1982). "Claims provisions in liability insurance". *Journal of forecasting,* Vol. 1, pág. 303-318.

Linnemann, P. (1982). "A multiplicative model of loss reserves: a stochastic process approach". Paper presented to the *16th Astin Coloquium*, Liege, Belgium.

Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N. (1986). *Theory of martingales.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

López Cachero, M. y López de la Manzanara Barbero, J. (1996). *Estadística para actuarios*. Mapfre, Madrid

Mack, T. (1990). "Improved estimation of IBNR claims by credibility theory". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 9, nº1, pág. 51-57.

Mack, T. (1991a). "A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves". *Astin Bulletin,* Vol. 21, nº 1, pág. 93-109.

Mack, T. (1991b). "Which stochastic model is underlying the chain ladder method?". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 15, pág. 133-138.

Malliaris, A. G. and Brock, W. A. (1991). *Stochastic methods in economics and finance (Advanced textbooks in economics; v. 17).* North-Holland, Amsterdam.

Marín Cobo, A. (1985). "La distribución logarítmico-normal. Aplicación a la distribución del coste de los siniestros". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* nº 25

Martín Peña, M.L. (1994). *Riesgo de insolvencia en empresas de seguros: un enfoque financiero-actuarial.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Mateos-Aparicio Morales, G. (1995). *Métodos estadísticos para actuarios.* Editorial Complutense. Madrid

McClenahan, C. L. (1975). "A mathematical model for loss reserve analysis". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LXII, pág. 134-153

McLachlan, G.J. and Basford, K.E. (1988). *Mixture Models: inference and applications to clustering. (Statistics, textbooks and monographs; v.84).* Marcel Dekker, New York.

Miller, L. H. (1956). "Table of percentage points of Kolmogorov Statistics". *Journal of American Statistical Association*, vol. 51.

Moore, P.G. (1970). "The theory of risk". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 96, Part. III, pág. 369-377.

Mosteller, F. and Tukey, J.W. (1977). *Data analysis and regression.* AddisonWesley Publishing Company.

Nieto de Alba, U. y Vegas, Pérez, J. (1994). *Matemática actuarial.* Mapfre, Madrid.

Norberg, R. (1986). "A contribution to modelling of IBNR claims". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 3-4, pág. 155-203.

Norberg, R. (1993). "Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance". *Astin Bulletin,* Vol. 23, nº 1, pág. 95-115.

Ord, J. K. (1972). *Families of frecuency distribuctions.* Charles Griffin, London.

Panjer, H. H. (1981). "Recursive evaluation of a family of compound distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 12, nº 1, pág. 22-26.

Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1986). "Computational aspects of recursive evaluation of compound distributions". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 5, nº 2, pág. 113-116.

Panjer, H.H. and Willmot, G.E. (1992). *Insurance risk models.* Society of Actuaries, Schaumburg.

Papageorgiou, H. (1984). "On recursive formulas for aggregate claims". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 102-104.

Parzen E. (1972). *Procesos estocásticos.* Paraninfo, Madrid.

Pentikainen, T. (1977). "On the approximation of the total amount of claims". *Astin Bulletin,* Vol. 9, nº 1-2,.

Pentikäinen, T. (1982). *Solvency of insurers and equalization reserves.* Volume I: Report and general aspects. Insurance Publishing Company Ltd., Helsinki.

Pentikäinen, T. (1987). "Approximative Evaluation of the Distribution Function of Aggregate Claims". *Astin Bulletin,* Vol. 17, nº 1, pág. 15-39.

Pentikäinen, T. and Rantala, J. (1992). "A simulation procedure for comparing different claims reserving methods". *Astin Bulletin,* Vol. 22, nº 2, pág. 191-216.

Pentikäinen, T., Taylor, G.C. and Buchanan, R. (1988). *Classical insurance solvency theory.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Pfeifer, D. (1984). "A note on random time changes of Markov chains". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 127-129.

Pollard, J.H. (1983). "Outstanding claims provisions: a distribution-free statistical approach". *Journal of the Institute of Actuaries,* Vol. 109, pág. 417-433.

Porto, E. J. (1980). "A critique of claim reserve models". *Transactions of the XXI International Congress of Actuaries* Vol. I, pág. 307-311.

Prabhu, N. U. (1965). *Stochastic processes.* The Macmillan Company, New York.

Protter, P. (1992). *Stochastic integration and differential equations: a new approach.* Springer Verlag, New York.

Quandt, R.E. and Ramsey, J.B. (1978). "Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions", with comments. *Journal of American Statistical Association* nº 73, pág. 730-752

Ramsay, C.M. (1991). "A note on the Normal Power approximation". *Astin Bulletin,* Vol. 21, nº 1, pág. 147-150.

Rantala, J. (1982). *Solvency of insurers and equalization reserves.* Volume II: Risk theoretical model. Insurance Publishing Company Ltd., Helsinki.

Rao, B. R. (1969). "An improved inequality satisfied by the Gamma function". *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* nº 1-2, pp. 78-83.

Ravichandran, N. (1990). *Stochastic methods in reliability theory.* John Wiley & Sons, New York.

Reid, D.H. (1978). "Claim reserves in general insurance". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 105, Part. III, pág. 211-296.

Renshaw, A. E. (1994). "Modelling the claims process in the presence of covariates". *Astin Bulletin,* Vol. 24, nº 2, pág. 265-285.

Renshaw, A. E. and Verrall, R. J. (1998). "A stochastic model underlying the chain-ladder technique". *British Actuarial Journal,* Vol. 4, nº 4, pág. 903-923

Resony, A. V. (1972). "Allocated loss expense reserves". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society,* Vol. LIX, pág. 141-149.

Ruiz-Maya Pérez, L. y Martín Pliego, F.J. (1999). *Fundamentos de inferencia estadística.* AC, Madrid

Runnenburg, J.T. and Goovaerts, M. J. (1985). "Bounds on compound distributions and stop-loss premiums". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 4, nº 4, pág. 287-293.

Ruohonen, M. (1988a). "On a model for the claim number process". *Astin Bulletin*, Vol. 18, nº 1, pág. 57-68

Ruohonen, M. (1988b). "The claims ocurrence process the IBNR problem". *Transactions of the XXIII International Congress of Actuaries* Vol. IV, pág. 113-123.

Ryder, J. M. (1980). "A general theory of insurance". *Transactions of the XXI International Congress of Actuaries* Vol. I, pág. 411-417.

Ryder, J.M. (1976). "Subjectivism - a reply in defence of classical actuarial methods". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 103, pág. 59-91.

Samanta, M. (1972). "Characterisation of the Pareto distribution". *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, nº 2. pág. 191-192.

Sanz Montero, D. (1997). "Método estadístico M-1 de cálculo de la provisión para siniestros pendientes". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época*, nº 3, pág. 55-79.

Schmidt, K. D. and Schnaus, A. (1996). "An extension of Mack's model for the chain ladder method". *Astin Bulletin*, Vol. 26, nº 2, pág. 247-262.

Schnieper, R. (1991). "Separating true IBNR and IBNER claims". *Astin Bulletin*, Vol. 21, nº 1, pág. 111-127.

Seal, H. L. (1977). "Approximations to risk theory's F(x,t) by means of the Gamma distributions". *Astin Bulletin*, Vol. 9, nº 1-2, pág. 213-218.

Seal, H.L. (1969). *Stochastic theory of a risk business*. John Wiley and Sons, New York

Seber, G.A.F. (1977). *Linear regression analysis*. John Wiley and Sons, New York.

Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for statistics and data analysis*. (Monographs on Statistics and Applied Probability). Chapman and Hall, New York.

Skurnick, D. (1973). "A survey of loss reserving methods". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, Vol. LX, pág. 16-62.

Srinivasan, S.K. (1974). *Stochastic point processes and their applications*. Griffin, London.

Srinivasan, S.K. and Mehata, K. M. (1988). *Stochastic processes*. McGraw-Hill., New Delhi.

Straub, E. (1988). *Non-life insurance mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Association of Swiss Actuaries, Zurich.

Subrahmaniam, Kocherlakota, Subrahmaniam, Kathleen and Messeri, J.Y. (1975). "On the robustness of some tests of significance in sampling from a compound normal population". *Journal of American Statistical Association* nº 70, pág. 435-438

Sundt, B. (1992). "On some extensions of panjer's class of counting distributions". *Astin Bulletin*, Vol. 22, nº 1, pág. 61-80.

Sundt, B. (1993). *An introduction to non-life insurance mathematics.* Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe.

Sundt, B. and Jewell, W. S. (1981). "Further results on recursive evaluation of compound distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 12, nº 1, pág. 27-39.

Tallis, G.M. and Light, R. (1968). "The use of fractional moments for estimating the parameters of a mixed exponential distribution". *Technometrics*, nº 10, pág. 161-175.

Tanner, M.A. (1991). *Tools for statistical inference. Observed data and data augmentation methods. (Lecture Notes in Statistics; v.67).* Springer–Verlag, New York.

Tapiero, C. S. and Zuckerman, D. (1983). "Optimal investment policy of an insurance firm". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 2, nº 2, pág. 103-112.

Taylor, G. C. (1979). "The negative exponential distribution and average excess claim size". *Astin Bulletin,* Vol. 10, nº 3, pág. 303-304.

Taylor, G.C. (1977a). "Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays". *Astin Bulletin,* Vol. 9, nº 1-2, pág. 217-230.

Taylor, G.C. (1977b). "Some practical variations of the separation method". *General Insurance Bulletin,* nº 11, pág. 9-16.

Taylor, G.C. (1981). "Speed of finalization and claims runoff analysis". *Astin Bulletin,* Vol. 12, pág. 81-100

Taylor, G.C. (1982). "Estimation of outstanding reinsurance recoveries on the basis of incomplete information". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 1, nº 1, pág. 3-11.

Taylor, G.C. (1983). "An invariance principle for the analysis of non-life insurance claims". *Journal of the Institute of Actuaries,* Vol. 110, pág. 205-242.

Taylor, G.C. (1986). *Claim reserving in non-life insurance.* North-Holland. Amsterdam.

Teicher, H. (1961). "Identifiability of mixtures". *Annals of Mathematical Statistics,* nº 32, pp. 244-248

Teicher, H. (1963). "Identifiability of finite mixtures". *Annals of Mathematical Statistics,* nº 34, pp. 1265-1269.

Tiago de Oliveira, J. (1977). "Statistical methodology for large claims". *Astin Bulletin,* Vol. Vol. 9, nº1-2, pág. 1-9.

Titterington, D.M. (1976). "Updating a diagnostic system using unconfirmed cases". *Applied Statistics,* nº 25, pp. 238-247

Titterington, D.M., Smith, A.F.M.and Makov, U.E. (1985). *Statistical analysis of finite mixture distributions.* (Wiley Series in probability and Mathematical Statistics). Wiley, New York.

Truckle, W.W. (1978). "Estimating claims reserves in general insurance". *Giro Bulletin* nº 20, pág. 3-17.

Usabel Rodrigo, M.A. (1994). "Una aplicación del método de Montecarlo al cálculo de las probabilidades de ruina en tiempo discreto y horizonte temporal finito". *Previsión y Seguro* nº 37, pág. 9-39.

Vaughan, E. J. y Vaughan, T. M. (1996). *Fundamentals of risk and insurance.* John Wiley and Sons, New York.

Vegas Asensio, J. (1995). "Análisis metodológico de los métodos estadísticos en el cálculo de las reservas o provisiones técnicas de prestaciones en los seguros no vida". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época*, nº 1, pág. 163-199.

Vegas Montaner, A. (1993). "Métodos estadísticos para el cálculo y comprobación de la provisión técnica para prestaciones". *Previsión y Seguro,* nº 28, pag. 9-46.

Vegas Montaner, A. (1999). "Métodos estadísticos de estimación de la provisión para prestaciones". *Jornada sobre "Solvencia y Provisiones Técnicas No Vida".* (25 de Febrero de 1991), Instituto de Actuarios Españoles, Madrid

Venter, G. (1983). "Transformed beta and Gamma distributions and aggregate losses". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, nº 57, pág. 27-63

Verbeek, H.G. (1972). "An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance". *Astin Bulletin*, Vol. 6, pág. 195-202.

Verrall, R. (1996). "Claims reserving and generalised additive models.". *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 19, nº1, pág. 31-43.

Verrall, R.J. (1991). "Chain ladder and maximum likelihood". *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 118, pag. 489-499.

Verrall, R.J. (1994). "A method for modelling varying run-off evolutions in claims reserving". *Astin Bulletin*, Vol. 24, nº 2, pag. 325-332.

von Chossy, R. and Rappl, G. (1983). "Some approximation methods for the distribution of random sums". *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 2, nº 4, pág. 251-270.

Vylder, F. de (1982). "Estimation of IBNR claims by credibility theory". *Insurance: Mathematics and and Economics* Vol. 1, nº 1, pág. 35-40.

Waldmann, K.-H. (1996). "Modified recursions for a class of compound distributions". *Astin Bulletin*, Vol. 26, nº 2, pág. 213-224.

Wang, S. and Sobrero, M. (1994). "Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions". *Astin Bulletin,* Vol. 24, nº 2, pág. 161-166.

Williams, D. (1979). *Diffusions, Markov processes and martingales.* (Wiley Series in probability and Mathematical Statistics). Wiley, New York.

Willmot, G. E. (1993). "On recursive evaluation of mixed Poisson probabilities and related quantities". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 114-133.

Willmot, G. E. and Lin, X. (1996). "Bounds on the tails of convolutions of compound distributions". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 18, nº 1, pág. 29-33

Willmot, G. E. and Panjer, H. H. (1987). "Difference equation approaches in evaluation of compound distributions". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 6, nº1, pág. 43-56.

Wu, C-F. (1983). "On the convergence properties of the EM algorithm". *Annals of Statistics,* Vol. 11, nº 1, pág. 95-103

Yakowitz, S.J. and Spragins, J.D. (1968). "On the identifiability of finite mixtures". *Annals of Mathematical Statistics,* nº 39, pág. 209-214

Zehnwirth, B (1980). "Applications of credibility theory to the estimation of claim rates and claim size distributions". *Transactions of the XXI International Congress of Actuaries,* Vol. I, pág. 473-478.

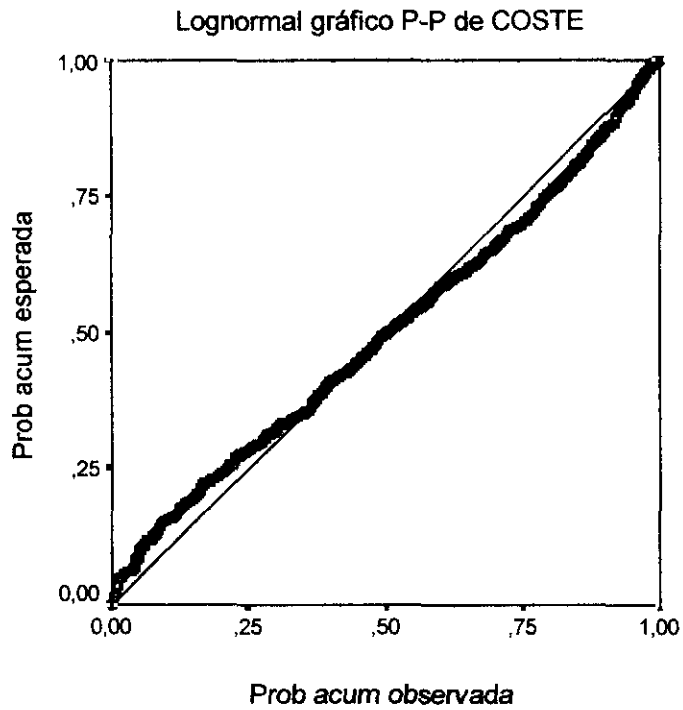
Zehnwirth, B. (1982). "Comments on Taylor's see-saw approach to claims reserving". *Insurance: Mathematics and Economics,* Vol. 1, nº 2, pág. 99-103.

Zwiesler, H. J. (1997). "Remarks on 'A note on compound generalized distributions". *Scandinavian Actuarial Journal,* nº 2, pág. 186-188.

ANEXO

ESTIMACIÓN DEL COSTE DE LOS SINIESTROS

GRÁFICO III.6. PROPORCIONES ACUMULADAS PARA LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL



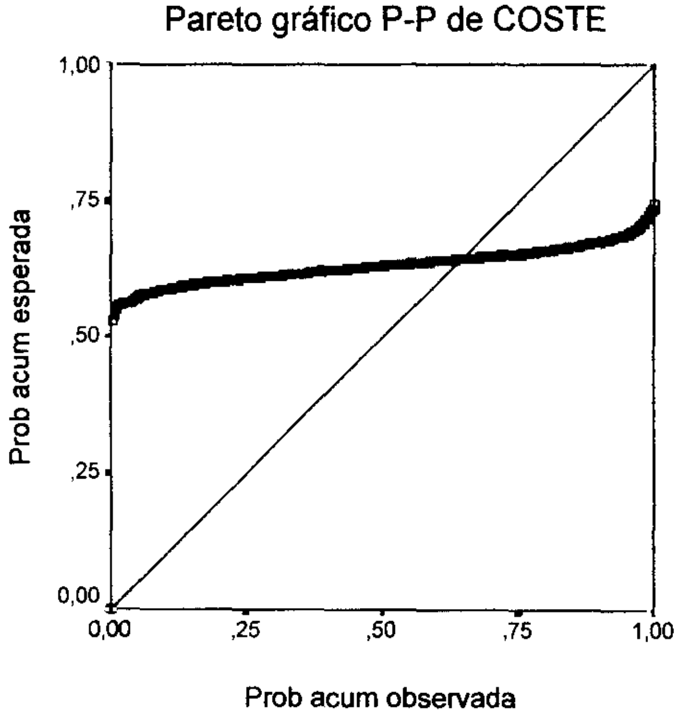
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\frac{(Lnx-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad x>0$$

Estimación de los parámetros:

$$m = Ln(16.381,146) = 9,7039$$

$$\sigma = 1,0880$$

GRÁFICO III.7. PROPORCIONES ACUMULADAS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE PARETO



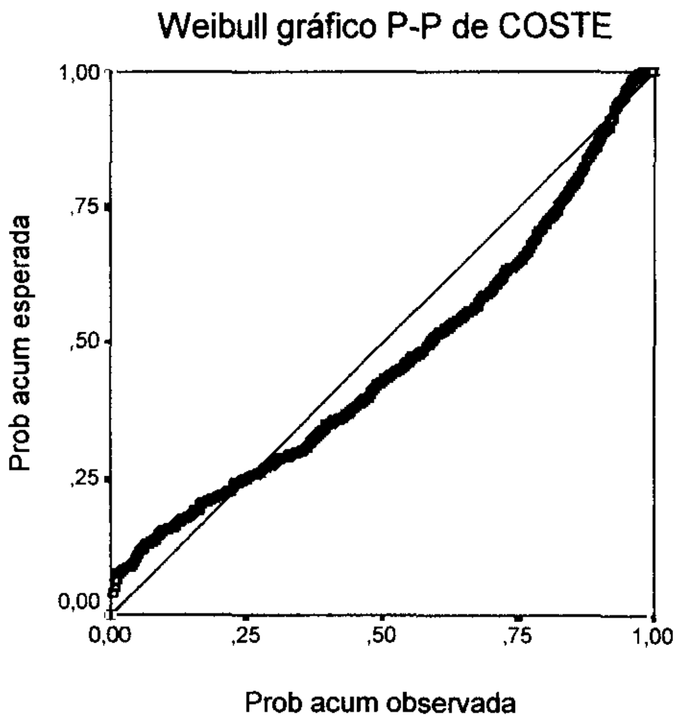
$$f(x) = \frac{b \cdot x_0^b}{x^{b+1}}, \quad x \geq x_0, x_0 > 0, b > 0$$

Estimación de los parámetros:

$x_0 = 1$

$b = 0{,}1031$

GRÁFICO III.8. PROPORCIONES ACUMULADAS PARA LA DISTRIBUCIÓN DE WEIBULL



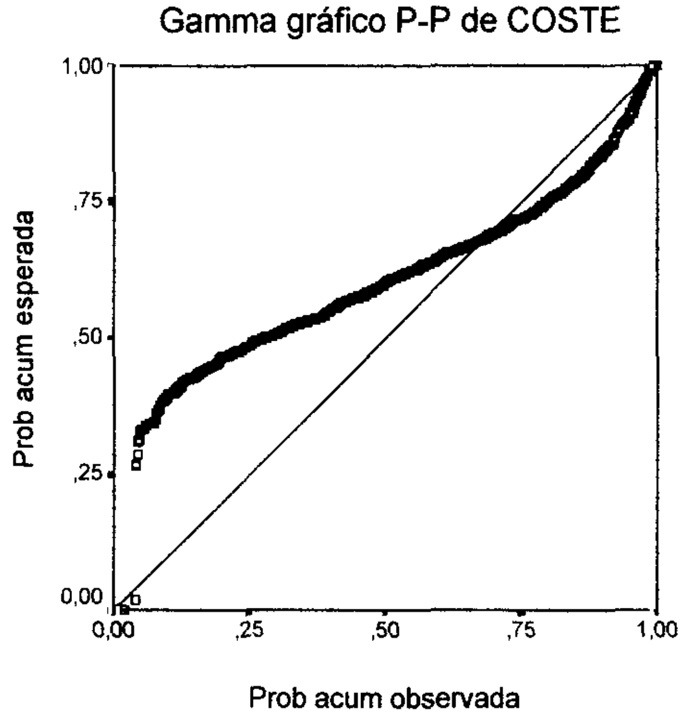
$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-(\frac{x}{\theta})^{\alpha}}$$

Estimación de los parámetros:

$\theta = 27.905,808$

$\alpha = 1,0804$

GRÁFICO III.9. PROPORCIONES ACUMULADAS PARA LA DISTRIBUCIÓN GAMMA



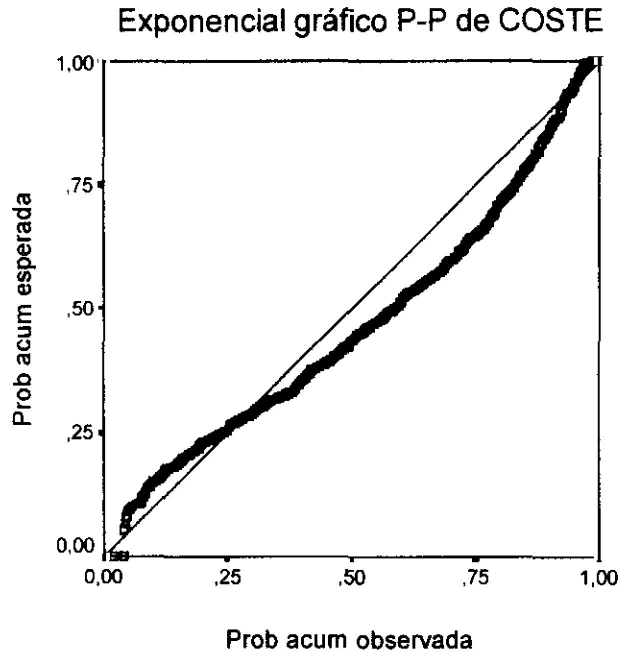
$$f(x)=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-hx} \qquad x>0$$

Estimación de los parámetros:

$\alpha = 0{,}36359504$

$h = 0{,}00001331$

GRÁFICO III.10. PROPORCIONES ACUMULADAS PARA LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL



$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

Estimación de los parámetros:

$$\lambda = 0{,}00003661$$