Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad Complutense de Madrid

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA POR METAS.

TEORÍA Y APLICACIONES ECONÓMICAS.

TESIS DOCTORAL

Ana María García Aguado

Madrid, 1998

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Profesor Dr. D. Antonio Heras Martínez, director de la presente tesis, por su impecable orientación y su constante estímulo.

También mi gratitud a todos los compañeros de los Departamentos de Economía Financiera y Contabilidad I (Economía Financiera y Actuarial), en el que inicié mi trabajo como ayudante y he realizado los estudios del Doctorado, y del Departamento de Estadística e Investigación Operativa II (Métodos de Decisión), al que actualmente pertenezco, por su colaboración en mi carrera docente e investigadora.

Indice

INTRODUCCIÓN

La técnica de *Programación por Metas* (*Goal Programming*, en terminología anglosajona), se ha revelado como una de las técnicas más útiles para resolver problemas de Programación Multiobjetivo.

Esta técnica se desarrolla dentro del ámbito del paradigma "satisfaciente" en lugar de hacerlo en el del paradigma "optimizador". Ya Herbert Simon apuntó que los decisores actúan frecuentemente conforme a un paradigma "satisfaciente", más que conforme a un paradigma "optimizador".
Esto se manifiesta especialmente en el ámbito de las decisiones empresariales. En este campo existe un cierto consenso en plantear los problemas de decisión como problemas de consecución de unos objetivos o metas previamente fijados.

El origen de la técnica de *Programación por Metas* se debe a Charnes, Cooper y Ferguson, a mediados de los años 50. Plantean esta técnica como un modelo alternativo a la estimación de parámetros mínimo cuadrática, con la finalidad de resolver dichos problemas de estimación mediante programación lineal, facilitando los cálculos.

Entre la mitad de la década de los 60 y la mitad de la década de los 70 divulgan estas ideas Ijiri (1965), Lee (1972) e Ignizio (1976). A partir de entonces son numerosísimos los trabajos publicados desarrollando aspectos teóricos, aplicaciones prácticas y posibles extensiones de la Programación por Metas.

Una de las extensiones menos estudiada es la *Programación Estocástica por Metas*, siendo, por otro lado, una extensión natural, ya que, frecuentemente, es más realista suponer que todos o algunos de los componentes del problema son aleatorios.

Casi todas las escasas publicaciones que hay sobre este tema, estudian el caso en que los coeficientes de los objetivos originales son aleatorios. Muchos de los trabajos proponen resolver el problema planteado mediante Restricciones Probabilísticas.

Considerando todo lo anterior, nos ha parecido oportuno estudiar en profundidad la *Programación Estocástica por Metas* cuando sólo es aleatorio el vector de los niveles de aspiración, ya que es éste un tema poco estudiado y que responde a situaciones de la vida real. Este es, por tanto, el tema central de esta tesis.

La presente tesis consta de una introducción, nueve capítulos, las conclusiones y la relación general de referencias. Los nueve capítulos están divididos en apartados y éstos, a su vez, frecuentemente en subapartados.

La introducción tiene la finalidad de dar una visión general del trabajo.

Los nueve capítulos se pueden considerar agrupados en dos grandes bloques, uno formado por los cinco primeros capítulos y el otro por los capítulos del seis al nueve.

En los cinco primeros capítulos, comentamos algunos resultados, ya conocidos, de *Programación Multiobjetivo* en ambiente de certeza (capítulo 2), de *Programación Estocástica Escalar y Multiobjetivo* (capítulos 4 y 5) y de *Teoría de la Decisión en ambiente de riesgo* (capítulo 3), que aplicaremos a partir del capítulo 6. En el capítulo 1 hacemos una brevísima introducción a la *Teoría de la* con el fin de situar y enmarcar los resultados de los capítulos siguientes.

A partir del capítulo 6 se desarrolla el tema central de esta tesis, esto es, se aborda en profundidad la técnica de *Programación Estocástica por Metas*, con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración.

A *continuación comentamos brevemente* el contenido de cada uno de los nueve capítulos.

Debido a que la metodología de *Programación Estocástica por Metas*, que estudiamos a partir del capítulo 6, es una técnica adecuada para resolver un tipo de problemas de decisión (problemas de decisión individuales, unietápicos, multiobjetivo y planteados en ambiente de riesgo), el capítulo 1 lo dedicamos a comentar qué es un problema de decisión, cuáles son sus elementos y una posible tipología.

En el capítulo 2, una vez planteado el problema de *Programación Multiobjetivo* y definido el concepto de Optimalidad Paretiana, se dedica la mayor parte del mismo a comentar los principales métodos de resolución. Se dividen estos métodos en generadores, esto es, aquellos que generan todas las soluciones del programa (Método de las Ponderaciones, Método de las Restricciones, Método del Simplex Multicriterio) y aquellos métodos que incorporan la información sobre las preferencias del decisor y proporcionan únicamente un subconjunto de todas las soluciones del problema que esté de acuerdo con dichas preferencias (Construcción de una Función de Valor, Programación de Compromiso, Programación por Metas, y Métodos Interactivos). En este capítulo nos detenemos especialmente en el apartado sobre Programación por Metas debido a que el objetivo de esta tesis es la extensión de dicha metodología al caso estocástico, como hemos comentado anteriormente.

El capítulo 3 lo dedicamos a comentar algunos aspectos de Decisión en ambiente de riesgo porque, como hemos dicho y se constata en el capítulo 7, la Programación Estocástica por Metas es una de las técnicas adecuadas para resolver dichos problemas de decisión en ambiente de riesgo. Comprobaremos que el modelo de solución para problemas de Programación Estocástica por Metas, que proponemos en el capítulo 7, es compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana. Por lo tanto se le pueden aplicar conceptos tales como el Valor Esperado de la Información Perfecta y el Valor Esperado de la Información Muestral. En el capítulo 9, dedicado a aplicaciones, retomaremos la Estimación de Parámetros Bayesiana proponiendo una solución para el caso de estimación vectorial, cuando se utiliza la función de pérdida "proporcional al valor absoluto del error".

Como la Programación Estocástica por Metas es una técnica para resolver problemas de Programación Estocástica Multiobjetivo, en los capítulos 4 y 5 comentamos algunos resultados de Programación Estocástica.

En el capítulo 4 nos centramos en la Programación Estocástica Escalar. Una vez planteado el problema, consideramos algunos conceptos de solución para dicho problema:

- Comenzamos con la que denominamos solución "ingenua", que consiste en sustituir en el problema las variables aleatorias por sus valores esperados y resolver el problema determinista obtenido.

- Pasamos, después, a comentar los problemas de distribución, que son soluciones del tipo "espera y ve" ("wait and see"). Estas soluciones se basan en la hipótesis de que el decisor toma su decisión una vez que se han observado los valores que toman las variables aleatorias.
- En tercer lugar, consideramos la obtención de soluciones mediante Equivalentes Deterministas. Son soluciones del tipo "aquí y ahora" ("here and now"), que se basan en la hipótesis de que la decisión se toma antes de conocer la realización de las variables aleatorias. Comentamos dos modos de obtener Equivalentes Deterministas: los Programas con Restricciones Probabilísticas y los Programas Estocásticos con Recursos.
- Por último, comentamos un modelo de solución por aproximaciones mediante acotaciones, denominado "refinamiento de la solución 'espera y ve'".

En el capítulo 5 planteamos el problema de Programación Lineal Estocástica Multiobjetivo y hacemos un brevísimo comentario de los procedimientos de solución más comúnmente utilizados. Este capitulo es muy breve porque el problema de Programación Estocástica por Metas se reduce a un problema de Programación Estocástica Escalar y, por lo tanto, se resuelve utilizando algunas de las técnicas del capítulo 4.

Los cuatro capítulos restantes los dedicamos a estudiar con detenimiento el tema objeto de este trabajo: la Programación Estocástica por Metas.

Comenzamos esta parte clarificando cuál es el estado de la cuestión. Para ello en el capítulo 6 destacamos cinco trabajos importantes publicados sobre la extensión estocástica de la Programación por Metas determinista. Estos trabajos se deben a Charnes y Cooper, Contini, Stancu-Minasian y Tigan.

Como ya hemos comentado, en casi todos estos trabajos, los autores proponen resolver los problemas planteados mediante Programas con Restricciones Probabilísticas y, también casi todos ellos, estudian el caso en que los coeficientes de los objetivos originales son aleatorios.
Observamos, entonces, que el problema de Programación Estocástica por Metas con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración, sólo ha sido estudiado por Stancu-Minasian. Éste propone resolverlo mediante Restricciones Probabilísticas.

En los capítulos 7 y 8 estudiamos en profundidad este problema.

Comenzamos el capítulo 7 planteando rigurosamente el problema. A continuación proponemos resolverlo mediante un modelo de solución que resulta ser un caso particular de los Programas Estocásticos con Recursos.

El modelo de solución propuesto presenta varias ventajas:

- Resulta formalmente análogo al modelo de Programación por Metas Determinista.
- Es un modelo compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana.
- La función objetivo del modelo se puede expresar mediante las distribuciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias que constituyen el vector de los niveles de aspiración, no afectando, por tanto, en la resolución del problema la dependencia o independencia de dichas variables.
- Otra de las ventajas del modelo de solución que proponemos es su compatibilidad con la Programación Lexicográfica por Metas.

En el último apartado del capítulo criticamos otros métodos de solución alternativos comprobando los inconvenientes que presentan. Algunos de estos inconvenientes son:

- La no compatibilidad con la teoría de la Decisión Bayesiana.
- La infravaloración del verdadero coste de cada decisión.
- La posibilidad de obtener soluciones para las que la probabilidad del suceso consistente en que la solución obtenida sea factible, sea notablemente pequeña.
- Correr el riesgo de que la alternativa más probable sea al mismo tiempo la más costosa.

En el capítulo 8 estudiamos distintos algoritmos de solución para el modelo propuesto en el capítulo anterior.

Comenzamos el capítulo con un estudio detenido de las propiedades de dicho modelo.

- En estas propiedades se demuestra que es un problema convexo y separable, por lo tanto, se puede resolver por los algoritmos propios para este tipo de problemas.
- Debido a la complejidad de los anteriores algoritmos, y a las dificultades de cálculo que lleva consigo el propio modelo propuesto, el resto de las propiedades tiene como finalidad obtener programas equivalentes al modelo propuesto que sean menos complicados de resolver.

A continuación, se dedican dos apartados a los algoritmos de solución:

- Varios algoritmos están destinados a obtener una solución exacta del problema lo menos complicada posible.

- Pero como permanecen ciertas complicaciones de cálculo, se propone, también, un algoritmo para obtener una solución aproximada.

Terminamos el capítulo con un ejemplo numérico que facilita la comprensión de los conceptos expuestos.

En el último capítulo sugerimos algunas de las posibles aplicaciones del modelo de solución para el problema de Programación Estocástica por Metas propuesto en el capítulo 7.

Por último, en las conclusiones vemos la oportunidad de plantear el problema estudiado y las ventajas del modelo de solución propuesto frente a otros modelos alternativos.

Como resumen de lo expuesto en esta introducción, en la presente tesis se aborda de un modo nuevo el planteamiento y el modelo de resolución del problema de Programación Estocástica por Metas con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración, estando en los capítulos 7, 8 y 9 la contribución original al tema.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN :

TEORÍA DE LA DECISIÓN

En los distintos ámbitos de la vida humana (personal, económico, social, político,...) se presentan continuamente situaciones en las que hay que tomar decisiones. Diremos que se da un *"problema de decisión"* cuando un individuo o grupo de individuos se enfrenta a un conjunto de acciones alternativas, excluyentes entre sí, posibles y válidas para la consecución de un determinado fin u objetivo, sin que resulte evidente cuál de ellas satisface mejor sus necesidades, es decir, qué acción es la óptima y, por tanto, debe ser elegida.

La Teoría de la Decisión trata, precisamente, del desarrollo de técnicas y métodos apropiados para tomar decisiones.

Los *elementos* de un problema de decisión son los siguientes:

- el *decisor*, que es la persona o grupo de personas que trata de alcanzar unos objetivos.
- las *alternativas* o *acciones*, que son las distintas formas posibles que tiene el decisor para alcanzar sus objetivos. Son las variables que están bajo el control del decisor.
- los *estados de la naturaleza*, que son los *parámetros* que definen una situación. Son las variables que están fuera del control del decisor. Denotaremos un parámetro por Θ, los valores concretos del parámetro por θ y el conjunto de todos los posibles valores de los parámetros, denominado *espacio paramétrico*, por Ω .
- las *consecuencias*, que son los resultados que se siguen de la elección de una alternativa concreta (o decisión $x \in X$, siendo

X el conjunto de todas las posibles decisiones) cuando el valor del parámetro Θ es θ. Al conjunto de todas las posibles consecuencias que resulten de todos los posibles pares de θ y x lo denotaremos por C. Si el parámetro Θ tiene una distribución de probabilidad conocida, entonces, la elección de cualquier decisión concreta, x, inducirá una distribución de probabilidad, $\gamma(\Theta,x)$, en el conjunto de consecuencias, C. Consecuentemente, elegir entre las decisiones de X es equivalente a elegir entre varias distribuciones de probabilidad del conjunto C.

Para que exista un problema de decisión debe darse como prerrequisito la existencia de un estado de *ambigüedad* caracterizado por un conjunto de posibles acciones a elegir. Un *proceso de decisión* es la resolución del estado de ambigüedad. La última etapa del proceso de decisión, consistente en la elección de una acción una vez que se ha resuelto el estado de ambigüedad, se denomina *decisión*.

El *proceso de decisión* mediante el que se resuelve la situación de ambigüedad dada en un *problema de decisión* requiere poder establecer cuándo una alternativa es *preferida* a otra, siendo, así, posible determinar una *estructura de preferencias* en el conjunto de acciones alternativas. Dicha *estructura de preferencias* reflejará el orden de las alternativas de acuerdo al nivel de satisfacción alcanzado por el decisor en cada una de ellas. La construcción de tal estructura se realiza mediante los denominados *criterios de evaluación* de las alternativas.

Los *problemas de decisión* se pueden clasificar considerando diversos criterios. Algunas de dichas clasificaciones son:

- Atendiendo al número de decisores se tienen:

1. *Problemas de decisión individuales*, cuando existe un único decisor.
2. *Problemas de decisión colectivos*, cuando existen dos o más decisores.

- Teniendo en cuenta el número de criterios cabe señalar:

1. *Problemas de decisión unicriterio*, cuando existe un único criterio de evaluación.
2. *Problemas de decisión multicriterio*, cuando existe más de un criterio de evaluación.

- Considerando el número de decisiones cabe distinguir:

1. *Problemas de decisión unietápicos*, cuando se adopta una única decisión.
2. *Problemas de decisión secuenciales*, cuando se adoptan una serie de decisiones a lo largo del tiempo.

- Si se atiende al grado de conocimiento que el decisor tiene acerca del espacio paramétrico Ω (o de los estados de la naturaleza) se tienen:

1. *Problemas de decisión en ambiente de certeza o certidumbre* que corresponden a una información perfecta, esto es, el decisor conoce el valor θ del parámetro. En este caso a cada alternativa se le asocia una única consecuencia bien definida, convirtiéndo-

se en un problema de optimización matemática. La importancia de los *problemas de decisión en ambiente de certeza* radica en que, de hecho, son la última fase de un gran número de procesos de decisión, puesto que éstos suelen transformarse en un problema de esta naturaleza que, por tanto, debe concluir con la elección de la alternativa óptima.

2. *Problemas de decisión en ambiente de riesgo*, en los que el parámetro Θ se considera como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es conocida por el decisor. Estos problemas se pueden resolver mediante la Metodología Bayesiana, ya que una hipótesis fundamental de la aproximación Bayesiana es que cualquier incertidumbre que se presente en un problema de decisión concreto, en relación a los valores de las variables, se puede expresar en términos de distribución de probabilidad conjunta de dichos valores.

3. *Problemas de decisión en ambiente de incertidumbre*, en los que la información que posee el decisor acerca del parámetro Θ no le permite asignarle una distribución de probabilidad. Estos problemas suelen resolverse mediante la Teoría de la Decisión Clásica.

La aproximación Bayesiana, al admitir la probabilidad subjetiva, no acepta el vacío ambiental para el decisor y convierte cualquier *problema de decisión en ambiente de incertidumbre* en un *problema de decisión en ambiente de riesgo*. Por lo tanto, desde esta aproximación, la tipología de los procesos de decisión atendiendo al conocimiento que el decisor tiene sobre los estados de la naturaleza es

1.- *Procesos de decisión en ambiente de certeza.*

2.- *Procesos de decisión en ambiente de riesgo.*

Tanto los *problemas de decisión unicriterio* como los *problemas de decisión multicriterio*, se pueden resolver mediante dos aproximaciones:

1. *Aproximación axiomática.*

2. *Aproximación no axiomática.*

Por vía *axiomática* ambos tipos de problemas se resuelven a través de la *Teoría de la Utilidad.*

Dicha teoría (o mejor dicho, conjunto de teorías alternativas) pretende la construcción de una función que represente numéricamente las preferencias del decisor, asignando valores mayores a las alternativas más preferidas. La resolución del problema de decisión se reduce, pues, a la maximización de la *función de utilidad*, cuya existencia está garantizada bajo numerosos conjuntos de axiomas más o menos "razonables" acerca de las preferencias del decisor.

Las *funciones de utilidad* suelen denominarse *funciones de valor* cuando estamos en ambiente de certidumbre. Asimismo es habitual utilizar el nombre de *función de pérdida* para representar la *función de utilidad* cambiada de signo, es decir la "desutilidad".

La dificultad práctica de construir las *funciones de utilidad* en los problemas de decisión reales ha motivado el desarrollo de numerosas técnicas "ad hoc", no axiomatizadas, cuyo empleo puede parecer razonable en problemas concretos. Así, en ambiente de certeza, podemos mencionar las diversas técnicas de *Programación Matemática Uniobjetivo* (*lineal*, *no lineal*, *convexa*, *cuadrática*...) y *Multiobjetivo* (*Programación Lineal Multiobjetivo*, *Técnicas de Superación*, *Programación por Metas*, *Técnicas Interactivas*...). Del mismo modo en ambiente de riesgo se han desarrollado técnicas de *Programación Estocástica Uniobjetivo* y *Multiobjetivo*.

El objetivo fundamental de esta tesis es estudiar en profundidad la técnica de ***Programación Estocástica por Metas***, que podemos clasificar como una técnica adecuada para resolver problemas de decisión individuales, unietápicos, multiobjetivo y planteados en ambiente de riesgo. Los capítulos 6, 7 y 8 están dedicados al desarrollo de esta metodología.

No obstante, en los primeros capítulos, comentaremos brevemente algunos resultados de *Programación Multiobjetivo* en ambiente de certidumbre (capítulo 2) y de *Programación Estocástica* (capítulos 4 y 5) que necesitaremos más adelante. Las técnicas de *Programación Matemática Escalar*, aunque también nos serán necesarias, no serán comentadas por considerarlas suficientemente conocidas. El capítulo 3 lo dedicamos a recordar algunos aspectos de *Decisión en ambiente de riesgo* que aplicaremos con posterioridad.

CAPÍTULO 2

PROGRAMACIÓN LINEAL MULTIOBJETIVO

Hemos dicho en el capítulo anterior que los problemas de decisión en *ambiente de certeza* a menudo se convierten en problemas de optimización matemática. Dentro de este tipo de problemas, nos centraremos en la *Programación Lineal Multiobjetivo*, extendiéndonos de un modo especial en el epígrafe *Programación por Metas*, debido, precisamente, a que el objetivo fundamental de esta tesis es estudiar en profundidad la ***Programación Lineal Estocástica por Metas***.

2.1.- Planteamiento del problema.

Cuando el decisor considera que su problema de decisión puede plantearse matemáticamente mediante la optimización simultánea de varias funciones objetivo, aparece la denominada *Optimización Vectorial* o *Programación Multiobjetivo*. Un problema de Programación Multiobjetivo es un problema del tipo

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \tag{2.1}$$

donde

$f_i(\bar{x})$ es la i-ésima *función objetivo*, $f_i : X \to \Re$, $i = 1,\cdots,p$.

$X \subset \Re^n$ es el conjunto de soluciones posibles o *conjunto factible*, que normalmente se define a partir de restricciones matemáticas.

$\bar{x} = (x_1,\cdots,x_n)$ es el vector de variables de decisión.

Un problema de *Programación Multiobjetivo* se denomina *Programa Lineal Multiobjetivo* cuando todas las funciones objetivo y todas las restricciones son lineales.

En lo que sigue consideraremos que el problema a resolver es, habitualmente, el *Programa Multiobjetivo* de la forma

$$\begin{aligned} min \quad & f(\bar{x}) \\ s.a. \quad & g(\bar{x}) \leq \bar{0} \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

donde, como antes,

$$f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(\bar{x})\right)$$

y

$$g(\bar{x}) = \left(g_1(\bar{x}), \cdots, g_m(\bar{x})\right)'$$

es el vector de las m restricciones del programa

$$g_i : \Re^n \rightarrow \Re \ , \quad i = 1, \cdots, m.$$

2.2.- Optimalidad paretiana.

El vector $\bar{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ de variables de decisión se dice que es una *solución eficiente* o *Pareto óptima* cuando es factible, es decir, cuando $g(\bar{x}^*) \leq \bar{0}, \bar{x}^* \geq \bar{0}$ y, además, verifica que no existe ninguna otra solución factible tal que proporcione una mejora en un objetivo sin ocasionar, a la vez, un empeoramiento en al menos otro de los objetivos. Es decir, no existe ninguna variable de decisión $\bar{x}$ factible, esto es, que verifique que $g(\bar{x}) \leq \bar{0}$ y que $\bar{x} \geq \bar{0}$, tal que $f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^*)$ $\forall i = 1, \cdots, p$, siendo estricta al menos una de las desigualdades.

Los distintos enfoques multiobjetivo pretenden obtener soluciones *eficientes* en el sentido que acabamos de definir, ya que, debido a que en la vida real los objetivos de una problema de decisión suelen estar en conflicto, frecuentemente no es posible la optimización simultánea de todos ellos.

2.3.- Principales métodos de resolución.

Los métodos de resolución de programación multiobjetivo se pueden dividir en dos categorías:

- los *métodos generadores*, es decir, aquellos que generan la totalidad de las soluciones del programa
- y los métodos que proporcionan únicamente un subconjunto de dichas soluciones que esté de acuerdo con las preferencias del decisor, *preferencias que se deben explicitar antes o durante la* ejecución del programa.

2.3.1.- Métodos generadores.

2.3.1.1.- Método de las ponderaciones.

En Zadeh [Z.1] se demuestra que si en un problema multiobjetivo, por ejemplo el (2.2), que se puede escribir de la forma

$$\begin{array}{ll} min & \left(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})\right) \\ s.a. & g_j(\bar{x}) \leq 0\,,\, j=1,\cdots,m \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}$$

a cada objetivo se le asocia un peso w_i, $i=1,\cdots,p$, positivo, y, a continuación, se agregan todos los objetivos ponderados, la optimización de la función resultante de la suma ponderada de los p objetivos iniciales genera un punto extremo eficiente para cada conjunto de pesos.

Así, la aplicación de este método a nuestro problema (2.2) conduce al siguiente programa matemático de tipo paramétrico

$$\begin{array}{ll} min & w_1 f_1(\bar{x}) + \cdots + w_p f_p(\bar{x}) \\ s.a. & g_j(\bar{x}) \leq 0 \,,\, j = 1,\cdots,m \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \\ & \bar{w} > \bar{0} \end{array}$$

donde, obviamente, $\bar{w} = (w_1,\cdots,w_p)$.

Como cada vector de pesos, $\bar{w}$, proporciona un punto extremo eficiente del programa (2.2), variando paramétricamente los pesos se puede generar, o al menos aproximar el conjunto eficiente.

Conviene observar que el método de las ponderaciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando los pesos o ponderaciones de los objetivos son estrictamente positivos, $w_i > 0$, $i = 1,\cdots p$, ya que se ha demostrado que, cuando uno de los pesos es cero, si, además, existen óptimos alternativos, la solución obtenida por este método *puede no ser eficiente* (véase Cohon [C.16]).

El método de las ponderaciones requiere la resolución de r^{p-1} programas, siendo r el número de conjuntos de pesos considerados y p el número de objetivos. Para reducir los cálculos se recurre a códigos de programación lineal paramétrica.

2.3.1.2.- Método de las restricciones.

Este método consiste en asociar al programa (2.2) p programas escalares, obtenidos al considerar, como función objetivo, únicamente una de las p componentes de $f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})\right)$, e incluir las $p-1$ componentes restantes como restricciones paramétricas. Así, el k-ésimo programa escalar asociado con (2.2) viene dado por el siguiente programa de tipo paramétrico

$$\begin{aligned} min \quad & f_k(\bar{x}) \\ s.a. \quad & g_j(\bar{x}) \leq 0\,,\, j = 1,\cdots,m \\ & f_i(\bar{x}) \leq \varepsilon_i \,,\, i = 1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,p \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$ es un vector de parámetros.

Marglin [M.3] demostró que, para cada conjunto de valores que se dé al vector de parámetros $\bar{\varepsilon}$, se genera un punto eficiente del programa (2.3). Consecuentemente, mediante variaciones paramétricas de los términos independientes ε_i se generará el conjunto eficiente.

Se ha demostrado que cuando en el óptimo alguna de las restricciones paramétricas no es activa, esto es, cuando alguna de estas restricciones se satisface como desigualdad, si, además, existen óptimos alternativos, entonces la solución generada por el método de las restricciones puede no ser eficiente (véase Cohon [C.16], pág. 117-118). Por lo tanto, conviene subrayar que el método de las restricciones garantiza la obtención de soluciones eficientes sólo cuando todas las restricciones paramétricas son activas, es decir, cuando la correspondiente variable de holgura se hace cero, con lo que la restricción se satisface como igualdad.

Este método requiere la resolución de r^{p-1} programas, siendo r el número de conjuntos de valores dados al vector $\bar{\varepsilon}$ y p es, como siempre, el número de objetivos. Para reducir los cálculos se recurre a códigos de programación lineal paramétrica.

Una dificultad práctica que subyace en los dos métodos generadores anteriores, es que, fácilmente, no se generan todos los puntos eficientes, sino que sólo se obtiene una aproximación del conjunto eficiente. La probabilidad de que esto ocurra disminuirá cuando se reduce la escala de los pesos, en el método de las ponderaciones, o cuando se aumenta el número de conjuntos de valores que se asignan a los términos independientes, en el método de las restricciones. Pero, en cualquier caso, no se puede garantizar la obtención de todo el conjunto eficiente de soluciones.

2.3.1.3.- Método del Simplex Multicriterio.

Si el programa que queremos resolver tiene la forma

$$\begin{array}{ll} min & f(\bar{x}) \\ s.a. & g(\bar{x}) = \bar{0} \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{array} \qquad (2.2)'$$

y es un *programa lineal multiobjetivo*, se pueden encontrar sus soluciones mediante una generalización del método del Simplex, denominada método *del Simplex Multicriterio.*

Este método garantiza la obtención de todos los puntos extremos eficientes del problema (2.2)', desplazándose de un punto extremo o punto esquina a los puntos extremos adyacentes mediante la operación denominada "pivotado" o "paso pivote". El Simplex Multicriterio combina esta operación del "pivotado" con la aplicación de una subrutina que permite comprobar la eficiencia o no de cada punto extremo obtenido.

Para describir el método del Simplex Multicriterio formalmente, necesitamos algunos conceptos previos:

- Sea $C = \{x_{(1)}, \cdots, x_{(r)}\}$ el conjunto formado por todas las soluciones factibles básicas del programa (2.2)'. Se dice que las soluciones $x_{(i)}, x_{(j)}$ son adyacentes cuando hay exactamente un elemento de la parte básica de $x_{(i)}$ que no pertenece a $x_{(j)}$, y viceversa.

- Un subconjunto $C' \subset C$ se dice conexo cuando o bien consta de un único punto, o, si consta de dos o más puntos, se verifica que, para cualquier par de puntos de C', $x_{(i)}, x_{(j)} \in C'$, existe un conjunto de puntos $x_{(i_1)}, \cdots, x_{(i_s)} \in C'$, tales que $x_{(i_t)}$ es adyacente a $x_{(i_{t+1})}$ para todo $t = 1, \cdots, s-1$, y, además, $x_{(i)} = x_{(i_1)}$ y $x_{(j)} = x_{(i_s)}$.

  Se ha demostrado que el conjunto de soluciones básicas factibles que, además, son soluciones paretianas de (2.2)' es un conjunto conexo.

- Para comprobar si una solución factible básica es, también, solución de (2.2)', se puede proceder del siguiente modo. Dada $x_{(i)} \in C$, se resuelve el programa lineal escalar

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \\
s.a. \quad & g(\bar{x}) = \bar{0} \\
& f_k(\bar{x}) + \alpha_k = f_k(x_{(i)}) \,, k = 1, \cdots, p \\
& \bar{x} \geq \bar{0} \\
& \alpha_k \geq 0 \,, k = 1, \cdots, p
\end{aligned}
$$

  ya que se ha demostrado que $x_{(i)}$ es solución de (2.2)' si y sólo si

$$
max \ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 0
$$

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, el algoritmo del Simplex Multicriterio se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se comienza con la obtención de una solución básica factible $x_{(1)}$ que sea también solución de (2.2)'. (Esta solución se puede obtener, por ejemplo, escalarizando el programa (2.2)').
2. Si ninguna solución factible básica adyacente a $x_{(1)}$ es eficiente, $x_{(1)}$ será la única solución eficiente del programa (2.2)', ya que, por ser el conjunto de soluciones factibles básicas Pareto óptimas conexo, se sabe que, si existen más soluciones factibles básicas eficientes, alguna de ellas deberá ser adyacente a $x_{(1)}$. Y se termina el proceso.
3. Si la solución factible básica $x_{(2)}$, adyacente a $x_{(1)}$, es también solución de (2.2)', se debe investigar la optimalidad paretiana de las soluciones factibles básicas adyacentes a $\{x_{(1)}, x_{(2)}\}$, salvo las adyacentes a $x_{(1)}$ ya investigadas.
4. Si ninguna de ellas es solución de (2.2)', entonces $x_{(1)}$ y $x_{(2)}$ son las únicas soluciones Pareto óptimas de (2.2)', y se termina el proceso.
5. En caso contrario, se repite el algoritmo desde el paso 3 con la nueva solución obtenida $x_{(3)}$.

Como el número de soluciones factibles básicas de (2.2)' es limitado, en un número finito de pasos se obtiene la totalidad del conjunto buscado.

El principal problema de esta metodología radica en el elevado número de operaciones y cálculos que deben efectuarse. Además, debe observarse que, en el caso multiobjetivo, no es cierto, en general, que las combinaciones lineales convexas de soluciones sean, a su vez, soluciones (véase, por ejemplo, la proposición 5.4.1 de Heras [H.7]). Por lo tanto, una vez obtenidas soluciones factibles básicas Pareto óptimas, se debe averiguar qué combinaciones proporcionan óptimos y cuáles no los proporcionan. Luego este método sólo resulta aplicable a problemas de muy baja dimensión.

2.3.2.- Métodos que incorporan la información sobre las preferencias del decisor.

2.3.2.1.- Construcción de una función de valor.

Bajo la hipótesis de que se tiene una función de valor, $V: \Re^p \to \Re$, que represente las preferencias del decisor, (y, por lo tanto, la correspondiente función de pérdida, $L: \Re^p \to \Re$), se puede plantear, a partir del programa (2.2), un nuevo programa en el que la función objetivo es

$$L(f(\bar{x})) = L(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x}))$$

y las restricciones coinciden con las del problema (2.2), esto es, en nuestro caso, el nuevo programa será

$$\begin{array}{ll} min & L(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})) \\ s.a. & g(\bar{x}) \leq \bar{0} \\ & \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}$$

Existen varios conjuntos de axiomas sobre las preferencias del decisor que garantizan la existencia de la función L. (Véase French [F.4])

La solución de este programa será el punto factible que más se ajuste a las preferencias del decisor, aunque pudiera ser que dicha solución no sea un óptimo paretiano.

Obsérvese que el método de las ponderaciones es un caso particular de este método puesto que toda función objetivo de la forma $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(\bar{x})$ se puede considerar como la composición de $f(\bar{x})$ y de una función de valor lineal.

La mayor dificultad práctica que conlleva este método es, precisamente, la construcción de la función de valor. Surge así la necesidad de utilizar otro tipo de metodologías.

2.3.2.2.- Programación de compromiso.

En la literatura multiobjetivo se denomina *punto ideal* al punto del espacio de los valores de las funciones objetivo en que todos los objetivos alcanzan su valor óptimo. Este punto se obtiene mediante la resolución de p programas escalares cuando, en cada uno de ellos, se optimiza (en nuestro caso se minimiza) uno de los p objetivos independientemente de los demás.

En la Programación de Compromiso el decisor busca encontrar aquella solución eficiente o zona del conjunto eficiente que esté a una distancia mínima del punto ideal.

La distancia entre dos puntos, $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in \Re^n$, se mide mediante una de las métricas L_p, definidas por el matemático Minkowsky del siguiente modo

$$L_p = \left[\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^1 - x_j^2\right|^p\right]^{1/p} \qquad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$L_\infty = \max_j \left\{\left|x_j^1 - x_j^2\right|\right\} \qquad \text{para} \quad p = \infty$$

La Programación de Compromiso se convierte, así, en un problema de optimización en el que las restricciones coinciden con las del problema inicial, el (2.2) en nuestro caso, y el objetivo es minimizar, según una métrica concreta L_p, la distancia entre una solución eficiente y el *punto ideal* .

Con este método se va reduciendo el tamaño del conjunto eficiente mediante la determinación de aquellos subconjuntos del mismo, denominados *conjuntos compromiso*, que se encuentran más próximos al *punto ideal.*

Una dificultad práctica de este método es que, para obtener la mejor solución compromiso para métricas distintas de L_1 y L_∞, es necesario recurrir a algoritmos de programación matemática no lineal, lo que complica considerablemente los cálculos.

2.3.2.3.- Programación por metas.

2.3.2.3.1.- Introducción.

En palabras de Herbert Simon, los decisores, frecuentemente, no actúan conforme a un paradigma "optimizador" sino que lo hacen conforme a un paradigma "satisfaciente". Así, por ejemplo, en la toma de decisiones empresariales existe un cierto consenso en plantear el problema de decisión como el de la consecución de unos objetivos o metas fijados previamente. La evaluación posterior del grado de consecución de dichos objetivos da lugar a la fijación de nuevos objetivos y / o al cambio de la política decisional de la empresa. Es un proceso dinámico en el que existe retroalimentación y posibilidad de control.

Cuando los costes de no consecución de los objetivos (bien por no llegar a ellos o bien por pasarse) se pueden agregar, por ejemplo, cuando tales costes se pueden agregar monetariamente, las técnicas de *Programación por Metas* son de gran utilidad en los procesos de ayuda a la toma de decisión empresariales.

El origen de la Programación por Metas se debe a Charnes, Cooper y Ferguson [C.6], en 1955, pero el desarrollo y la divulgación de estas ideas iniciales se deben, principalmente, a los trabajos publicados por Ijiri [I.6], 1965; Lee [L.6], 1972; e Ignizio [I.1], 1976. A partir de estas fechas, hay numerosas publicaciones que desarrollan algunos aspectos teóricos, así como aplicaciones a diversas áreas, de la Programación por Metas. En 1993 Romero, C. [C.5] hace un claro y completo resumen del tema. En este epígrafe seguimos fundamentalmente a Ignizio [I.1] y a Romero [C.5].

La terminología establecida por Ignizio, y utilizada posteriormente en la mayoría de los trabajos dedicados al tema es la que sigue:

Objetivo es una afirmación relativamente general que refleja los deseos del decisor. Por ejemplo, maximizar los beneficios de una empresa.

Nivel de aspiración es un valor concreto asociado con un nivel aceptable de éxito del objetivo.

Meta es la conexión de un objetivo con un nivel de aspiración. Por ejemplo, conseguir unos beneficios de, al menos, X.

Desviación de la meta es la diferencia entre lo realmente conseguido en el objetivo y el nivel de aspiración.

2.3.2.3.2.- Formulación de las metas.

Consideremos, de nuevo, el problema (2.2) expresado de la forma

$$\begin{array}{ll} min & f(\bar{x}) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde, obviamente, $X = \{\bar{x} \in \Re^n \,/\, g(\bar{x}) \leq \bar{0}\, , \bar{x} \geq \bar{0}\}$, en el supuesto de que es un *programa lineal multiobjetivo*.

Para cada uno de los objetivos el decisor fija un nivel de aspiración m_i, de manera que alcanzar dicho nivel se considera "satisfactorio".

Se pueden presentar tres posibles formas de metas

1. $f_i(\bar{x}) \leq m_i$, es decir, el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(\bar{x})$ que sea igual o menor que el nivel de aspiración m_i. Por ejemplo, el gobierno de un país desea que, en un año concreto, la inflación sea menor o igual que un porcentaje determinado m_i.

2. $f_i(\bar{x}) \geq m_i$, esto es, el decisor desea que el valor del objetivo sea igual o mayor que el nivel de aspiración m_i. Por ejemplo, una empresa desea que sus beneficios sean de, al menos, la cantidad m_i.

3. $f_i(\bar{x}) = m_i$, es decir, el decisor desea que el valor del objetivo $f_i(\bar{x})$ sea exactamente igual al nivel de aspiración m_i. Por ejemplo, una empresa desea que el número total de empleados fijos sea exactamente m_i.

Estas tres relaciones se pueden expresar en forma de igualdad, restando una *variable de desviación* no negativa, y_i^+, y sumando otra *variable de desviación*, también no negativa, y_i^-, que recogen los excesos y los defectos, respectivamente, del valor realmente alcanzado por el objetivo respecto al nivel de aspiración prefijado, teniendo, en cualquiera de los tres casos

$$f_i(\bar{x}) - y_i^+ + y_i^- = m_i \quad , \quad y_i^+ \geq 0 \, , \, y_i^- \geq 0$$

Como no puede darse que el nivel de aspiración se sobrepase y, a la vez, se quede por debajo de él, necesariamente al menos una de las dos variables de desviación que definen cada meta tiene que ser cero (más adelante demostramos formalmente esta afirmación). Y ambas variables serán cero cuando el valor alcanzado por el objetivo coincida exactamente con el nivel de aspiración.

Se dice que una *variable de desviación* es *no deseada* cuando al decisor le conviene que dicha variable alcance su valor más pequeño posible, esto es, cero.

Cuando la meta procede de la relación $f_i(\bar{x}) \leq m_i$, es decir, cuando el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(\bar{x})$ que sea igual o menor que el nivel de aspiración m_i, la *variable no deseada* y, por tanto, a minimizar es y_i^+, ya que cuantifica el exceso de logro.

Cuando la meta procede de la relación $f_i(\bar{x}) \geq m_i$, es decir, cuando el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(\bar{x})$ que sea mayor o igual que el nivel de aspiración m_i, la *variable no deseada* y, por tanto, a minimizar es y_i^-, ya que cuantifica la falta de logro.

Cuando la meta procede de la relación $f_i(\bar{x}) = m_i$, es decir, cuando el decisor desea que el valor alcanzado por objetivo $f_i(\bar{x})$ que sea exactamente igual que el nivel de aspiración m_i, las *variables no deseadas* y, por tanto, a minimizar, son ambas y_i^+ e y_i^-.

2.3.2.3.3.- Estructura general del problema de programación por metas.

Los pasos a seguir en el proceso de formulación de un problema de Programación por Metas se pueden resumir como sigue:

1. Fijar los objetivos significativos para el problema concreto que se quiere analizar

$$f_i(\bar{x}),\ i = 1,2,\cdots,p.$$

2. Determinar el nivel de aspiración correspondiente a cada objetivo

$$m_i,\ i = 1,2,\cdots,p.$$

3. Formular las metas conectando cada objetivo con su nivel de aspiración, mediante la introducción de las variables de desviación, obteniendo las expresiones

$$f_i(\bar{x}) - y_i^+ + y_i^- = m_i;\ y_i^+ \geq 0,\ y_i^- \geq 0,\ \ i = 1,2,\cdots,p$$

4. Determinar, en el problema concreto que se está analizando, las variables de decisión no deseadas.

5. Proceder a minimizar las variables de decisión no deseadas.

El paso número 5 de la formulación de un problema de programación por metas se puede acometer de diversas maneras, originando cada una de estas maneras una variante de la programación por metas. Las variantes más comúnmente utilizadas son las siguientes:

A. **Programación por metas lexicográficas.**

En los métodos lexicográficos el decisor constituye grupos ordenados de metas según un orden rígido de prioridades excluyentes. En primer lugar se trata de alcanzar las metas situadas en la prioridad más alta. Una vez conseguido esto, se trata de alcanzar las metas situadas en la segunda prioridad y así sucesivamente. Es decir, las preferencias se ordenan de un modo similar a como se ordenan las palabras de un diccionario (de ahí el nombre de programación por metas lexicográficas).

Esto es, el decisor construye el vector $a=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, donde $a_i = g_i(\bar{y}^+,\ \bar{y}^-)$, $i=1,2,\cdots,k$, es una función lineal de las variables de desviación no deseadas de las metas que se desea minimizar (con el fin de conseguir la máxima realización posible de las correspondientes metas) en la i-ésima prioridad. Por lo tanto, el proceso completo de minimización lexicográfica de las variables de desviación no deseadas viene dado por

$$\begin{array}{ll} Lex.\ \ min & a=(a_1,a_2,\cdots,a_k) \\ s.a. & f(\bar{x})-\bar{y}^+ +\bar{y}^- =\bar{m} \\ & \bar{x}\in X \end{array} \qquad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})) \\ \bar{y}^+ &= (y_1^+,y_2^+,\cdots,y_p^+) \\ \bar{y}^- &= (y_1^-,y_2^-,\cdots,y_p^-) \\ \bar{m} &= (m_1,m_2,\cdots,m_p) \end{aligned}$$

Este vector $Lex\ min\, a=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ se denomina *vector de logro*, y reemplaza a la función objetivo de los modelos convencionales de programación lineal.

La minimización lexicográfica del vector de logro implica la minimización ordenada de sus componentes, es decir, primero se encuentra el valor más pequeño de la componente a_1, a continuación se busca el valor más pequeño de la componente a_2, compatible con el valor previamente obtenido de a_1, y así sucesivamente.

Para resolver el programa (2.4) hay distintos algoritmos, de los que vamos a analizar brevemente los más utilizados.

A.1. **Método gráfico para resolver programas lexicográficos.**

Este método se debe a Lee [L.6], Ignizio [I.1]. Básicamente es una adaptación del método gráfico de programación lineal, ya que la diferencia fundamental entre la solución de un problema de programación lineal con un único objetivo y la solución de un problema de programación lineal por metas lexicográficas es que, en el primer caso, se busca un *punto* que optimize un único objetivo, mientras que, en nuestro caso, se busca una *región* que proporcione una solución de compromiso para un conjunto de metas en conflicto.

En el gráfico únicamente se utilizan las variables de decisión (por lo tanto este método sólo es válido para problemas con, a lo sumo, tres variables de decisión, lo que hace que el interés práctico del mismo sea muy limitado). En el caso de tener únicamente dos variables de decisión, se representan las metas mediante líneas rectas. El efecto que tiene el aumento de cualquiera de las variables de desviación se representa en el gráfico mediante arcos. Las variables de desviación no deseadas, es decir, las que se desea minimizar, se encierran en círculos.

Los pasos que se siguen en este método se pueden resumir así:

1. Se *trazan* todas las *metas en términos* de variables de decisión.
2. Se determina el espacio de solución para el grupo de metas de la primera prioridad.
3. Se considera el conjunto de metas con la segunda prioridad y se determina el "mejor" espacio de solución, compatible con la solución obtenida en el segundo paso.
4. Se pasa a la siguiente prioridad, y así sucesivamente.
5. Si en algún momento del proceso el espacio de solución se reduce a un único punto, se termina ahí el procedimiento porque no es posible mejorar la solución.
6. Si en ningún momento del proceso el espacio de solución se reduce a un único punto, se concluye el proceso una vez que se han valorado todos los niveles de prioridad.

A.2. **Método secuencial para resolver programas lexicográficos.**

Este método es el más directamente apoyado en el Simplex. Consiste en la resolución de una secuencia de programas lineales convencionales, pues para cada grupo de prioridad, se establece un programa lineal.

Si se quiere resolver el problema (2.4)

$$\begin{aligned} &Lex.\ min\ \ a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \\ &s.a. \qquad f\,(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ &\qquad\qquad \bar{x} \in X \end{aligned}$$

En primer lugar se minimiza la primera componente del vector de logro, a_1, correspondiente al primer nivel de prioridad, prescindiendo del resto.

El modelo así obtenido es el programa lineal convencional

$$\begin{aligned} &min \quad a_1 = g_1(\bar{y}^+,\ \bar{y}^-) \\ &s.a. \quad f\ (\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ &\qquad\ \bar{x} \in X \end{aligned} \qquad (2.5)$$

La solución óptima de (2.5) garantiza el cumplimiento de las metas de máxima prioridad y, si ello no es posible, proporciona la solución más próxima a dichos objetivos. Sea a_1* el mínimo de la función objetivo.

A continuación se plantea el siguiente modelo de programación lineal para la segunda componente de vector de logro, correspondiente al segundo nivel de prioridad, imponiendo que la solución de este segundo programa sea compatible con la solución obtenida en (2.5).

Es decir, se tiene el programa lineal convencional

$$\begin{aligned} &min \quad a_2 = g_2(\bar{y}^+,\ \bar{y}^-) \\ &s.a. \quad f\ (\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ &\qquad\ \bar{x} \in X \\ &\qquad\ a_1 = a_1{}^* \end{aligned} \qquad (2.6)$$

donde la última restricción garantiza que en la consecución de las metas de segundo nivel no se van a empeorar los resultados obtenidos para las metas de la primera componente del vector de logro. La solución óptima de (2.6) es, por lo tanto, la mejor solución para las dos primeras componentes del vector de logro consideradas de forma simultánea.

En el algoritmo se siguen planteando modelos lineales convencionales, incorporando restricciones del tipo $a_i = a_i{}^*$, que obligan a respetar las metas de mayor prioridad ya logradas.

Se tienen que resolver, como máximo, k programas lineales, es decir, tantos como grupos de prioridad existan. El número de programas lineales a resolver se reducirá cuando al resolver uno de ellos no se detecte la existencia de óptimos alternativos. En este caso, el proceso de cálculo se detiene y no es necesario resolver los programas lineales adicionales. (Véase Ignizio (1982), páginas 107-110).

Para más detalles del método véase Ignizio [I.1], [I.3].

A.3. **Método multifase para resolver programas lexicográficos.**

El método multifase (también llamado "Simplex revisado" o "Simplex modificado"), ha sido propuesto por Lee, en 1972, [L.6], y por Ignizio, en 1976 y 1982, [I.1], [I.3]. Precisamente el nombre de "multifase" se debe a Ignizio, ya que considera este método una extensión del método de las dos fases de la programación lineal. Oslon en 1984 [O.2], ha propuesto algunas modificaciones que permiten simplificar los cálculos.

El método consiste en una adaptación del Simplex de modo que se pueda recoger una ordenación de los objetivos. Para ello, a cada variable de decisión se le asocia no un único coeficiente en la función objetivo, sino un vector de coeficientes con tantas componentes como niveles de prioridad existan

$$c_i = \begin{pmatrix} c_i^1 \\ c_i^2 \\ \vdots \\ c_i^k \end{pmatrix} \quad , \quad i = 1,2,\cdots,p$$

donde cada componente, c_i^j, representa el coeficiente que a la variable i-ésima le corresponde en el grupo de prioridad j-ésimo.

Dado que cada variable puede estar como máximo en un único nivel de prioridad, el vector c_i , $i=1,2,\cdots,p$, tendrá, a lo sumo, una única componente no nula.

Análogamente, a cada variable se le asocia un vector denominado "vector de rendimientos marginales", r_i

$$r_i = \begin{pmatrix} r_i^1 \\ r_i^2 \\ \vdots \\ r_i^k \end{pmatrix} \quad , \ i=1,2,\cdots,p$$

donde cada componente, r_i^j, recoge la modificación, cambiada de signo, que se producirá en la funcional correspondiente al nivel de prioridad $j-$ ésimo como consecuencia de introducir en la solución una unidad de la variable i-ésima.
Por lo tanto, la habitual fila de indicación de la tabla del Simplex se convierte, en el método multifase, en una matriz de indicación, en la que cada fila está asociada a un nivel de prioridad y cada columna a una variable.
Esta matriz de indicación es lo fundamental del método multifase ya que aporta la información necesaria para determinar la optimalidad de una solución así como para conocer la variable entrante en cada solución.

El proceso que se sigue en el método multifase es el siguiente:

1. Se examina la primera fila de indicación, correspondiente al primer nivel de prioridad. Se observa si se cumple la condición de óptimo

$$r_i^1 \leq 0 \,, \forall \ i=1,2,\cdots,p$$

Si no se verifica dicha condición se elige la variable entrante con el criterio habitual del Simplex.

2. Una vez conseguida la condición de óptimo para el primer nivel de prioridad, se pasa al siguiente. Se observa la segunda fila de indicación. Si no se cumple la condición de óptimo para la fila considerada, se elige la variable con mayor rendimiento marginal r_j^2. Pero, antes de iterar, es necesario comprobar que r_j^1 *es nulo porque, si fuera negativo*, la introducción de la variable x_j mejoraría el segundo nivel de prioridad, pero a costa de empeorar el primer nivel de prioridad entrando en contradicción con la filosofía de la programación por metas lexicográfica.
3. Como consecuencia, la segunda fila de indicación se debe abandonar cuando, o bien cumple la condición de óptimo, o bien, aunque no cumpla dicha condición, no es posible elegir ninguna variable que no empeore las niveles conseguidos para las metas de prioridades más altas.
4. El resto de las operaciones necesarias para obtener una nueva solución básica (una vez que se ha determinado la variable entrante en cada iteración), es exactamente igual que las que se realizan en el método del Simplex.

Como ocurre con el método secuencial, hay reglas que permiten simplificar los cálculos en cada iteración sin modificar substancialmente el método. (Entre otros, cabe destacar el trabajo de Oslon [O.2]).

A.4. Método de Arthur y Ravindran para resolver programas lexicográficos.

Este método, propuesto en 1978, se basa en la consideración sucesiva de las restricciones asociadas con las metas del modelo. Se establecen distintos grupos de restricciones

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_j \subset \cdots \subset S_k$$

donde S_j recoge las restricciones asociadas con las metas correspondientes a los j primeros niveles de prioridad.

El proceso que se sigue se puede resumir en los siguientes pasos

1. Se resuelve el problema S_1, que consiste en minimizar la primera componente del vector de logro a_1, sujeto a las restricciones asociadas con las metas correspondientes al nivel de prioridad más alto y a las restricciones iniciales de los objetivos, $\bar{x} \in X$.

2. Se analiza la existencia de óptimos alternativos en el problema S_1. Si éstos no existen, la solución es única. El valor del resto de las metas se determina sustituyendo los valores obtenidos en el paso anterior en las metas no consideradas en el problema S_1. Y el algoritmo finaliza.

3. Si existen óptimos alternativos, se plantea el problema S_2, que consiste en minimizar las dos primeras componentes del vector de logro (a_1, a_2), sujeto a las restricciones asociadas con las metas correspondientes con los dos niveles de prioridad más altos y a las restricciones iniciales de los objetivos, $\bar{x} \in X$. Se resuelve este problema.

4. Una vez optimizado el problema S_2, se observa la existencia o no de óptimos alternativos. Y se itera el proceso descrito en los pasos 2 y 3.

5. El algoritmo finaliza cuando se han analizado todos los problemas $S_1, S_2, \cdots, S_k$ o cuando se obtiene, para alguno de ellos, una solución óptima única, como se ha explicado en el paso 2.

Una de las críticas más fuertes a la Programación por Metas Lexicográficas es la incompatibilidad entre las ordenaciones lexicográficas y la existencia de una función de valor, ya que Debreu [D.4], en las páginas 72 y 73, demuestra formalmente que este modelo no es compatible con ninguna función de valor. Otros estudiosos del tema, entre ellos Zeleny, se apoyan en dicha crítica para afirmar que este método no debería utilizarse en la práctica. En cualquier caso, es evidente que la crítica resta potencialidad al método.

B. **Programación por metas ponderadas.**

El modo más intuitivo de realizar la minimización de las variables de desviación no deseadas es minimizar la suma de dichas variables. Así, en nuestro caso, tendríamos que minimizar la suma

$$min \quad \sum_{i=1}^{p} (y_i^+ + y_i^-) \qquad (2.7)$$

Pero la expresión (2.7) no representa las preferencias del decisor, puesto que implícitamente sugiere que el decisor da la misma importancia al logro de todas las metas, y esto, frecuentemente, no es cierto. Este problema se intenta subsanar multiplicando cada sumando de la expresión (2.7) por un coeficiente de ponderación, w_i, que expresa la importancia relativa que el decisor asigna al cumplimiento de cada meta, obteniendo así la expresión

$$min \quad \sum_{i=1}^{p} w_i (y_i^+ + y_i^-)$$

La formulación completa de este método, que consiste en minimizar la suma ponderada de las desviaciones no deseadas y se denomina *Programación por Metas Ponderadas*, es la siguiente

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\
s.a. & \bar{x} \in X \\
& \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = m_i \\ y_i^+,\ y_i^- \geq 0 \\ w_i^+,\ w_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \cdots, p
\end{array} \tag{2.8}
$$

siendo w_i^+ , w_i^- , $i = 1, 2, \cdots, p$ los coeficientes que se asocian a las variables de desviación por exceso y por defecto, respectivamente.

Observación: Conviene considerar que el objetivo de este programa

$$
\min \quad \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-)
$$

presenta dos dificultades.

1. Por un lado carece de sentido sumar variables de desviación cuando éstas están medidas en unidades diferentes (unidades monetarias, pesos, número de horas trabajadas...).
2. Por otro lado, si los *niveles de aspiración* fuesen muy diferentes, la solución del programa propuesto proporcionaría soluciones sesgadas hacia un mayor cumplimiento de las metas con *niveles de aspiración* más elevados.

Ambos inconvenientes se solucionan minimizando la suma ponderada de las variables de desviación en términos porcentuales, en lugar de hacerlo en términos absolutos. Ninguna de estas dos dificultades se presenta cuando se agregan unidades monetarias. Pero, siempre que sea necesario, se aceptará la hipótesis de que el objetivo del programa es minimizar la suma ponderada de las desviaciones expresada en términos porcentuales.

El programa (2.8), expresando en forma matricial, es

$$
\begin{array}{ll}
\min & \left((\overline{w}^{+})' \overline{y}^{+} + (\overline{w}^{-})' \overline{y}^{-} \right) \\
s.a. & f(\overline{x}) - \overline{y}^{+} + \overline{y}^{-} = \overline{m} \\
 & \overline{x} \in X \\
 & \overline{y}^{+} \geq \overline{0} \, , \overline{y}^{-} \geq \overline{0} \\
 & \overline{w}^{+} \geq \overline{0} \, , \overline{w}^{-} \geq \overline{0} \, , \overline{w} = \overline{w}^{+} + \overline{w}^{-}
\end{array}
\tag{2.9}
$$

Hemos afirmado antes que no puede darse simultáneamente que el nivel de aspiración sea sobrepasado y, a la vez, se quede por debajo de él, luego, necesariamente, una de las dos variables de desviación que definen cada meta tiene que ser cero. Aunque se trata de un resultado bien conocido, reproducimos a continuación su demostración ya que más adelante haremos argumentaciones similares:

Proposición 2.1. Sean $\overline{x}^*$, $\overline{y}^{+*}$, $\overline{y}^{-*}$ los vectores óptimos del programa (2.9). Entonces se verifica que $\overline{y}_i^{+*} = 0$ y / ó $\overline{y}_i^{-*} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

Demostración.-

Supongamos que

$$\exists\, j \in \{1, 2, \cdots, p\} \,/\, y_j^{+*} > 0 \, , y_j^{-*} > 0$$

Definimos

$$\tilde{y}_j^{+} = y_j^{+*} - \delta \; > 0 \; , \quad \tilde{y}_j^{-} = y_j^{-*} - \delta \; > 0$$

para un δ suficientemente pequeño.

Sean

$$\hat{y}_i^+ = \begin{cases} y_i^+ * & \forall\, i \neq j \\ \tilde{y}_j^+ & \text{para } i = j \end{cases} \quad , \quad \hat{y}_i^- = \begin{cases} y_i^- * & \forall\, i \neq j \\ \tilde{y}_j^- & \text{para } i = j \end{cases}$$

entonces, puesto que $\overline{w} \geq \overline{0}$, es decir, w_i^+, $w_i^- \geq 0, \forall\, i = 1,2,\cdots,p$, siendo al menos una de las desigualdades estricta, se verifica que

$$\overline{w}'(\hat{\overline{y}}^+ + \hat{\overline{y}}^-) < \overline{w}'(\overline{y}^+ * + \overline{y}^- *) \quad \text{y} \quad f(\overline{x}*) - \hat{\overline{y}}^+ + \hat{\overline{y}}^- = \overline{m}$$

en contradicción con que $\overline{y}^+ *$, $\overline{y}^- *$ son óptimos. □

El modelo al que hemos llegado, (2.9), tiene una estructura de programación lineal convencional, por lo tanto se puede resolver mediante el algoritmo de Simplex.

Para diferentes sistemas de pesos se generan distintas soluciones, que se pueden enriquecer sometiendo al correspondiente sistema de pesos a un análisis de sensibilidad.

Este modelo sí es compatible con la existencia de funciones de valor ya que, cuando los coeficientes de ponderación, $w_i = (w_i^+, w_i^-)$, $i = 1,2,\cdots,p$, expresan la importancia relativa que el decisor asigna al cumplimiento de cada meta, la función objetivo del modelo (2.8)

$$min \quad \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-)$$

se puede interpretar como una función de valor lineal, separable y aditiva.

Y, cuando la función de valor es lineal y separable en objetivos, la solución óptima coincide con la solución dada por el modelo de *Programación por Metas Ponderadas*.

También ocurre que la solución óptima de los modelos de *Programación por Metas Ponderadas* es compatible con una función de valor perteneciente a un conjunto incluso más amplio que el de las funciones de valor lineales y separables. (Para más detalles véase Romero [R.5], pág.163).

2.3.2.3.4.- Análisis de post-optimización.

Cuando se resuelve un problema de programación lineal por metas, suele ser conveniente analizar los efectos que se originan en la solución óptima como consecuencia de variaciones en los datos del modelo. Si estas variaciones son discretas, surge el análisis de sensibilidad, y si las variaciones son continuas dan lugar a la programación lineal por metas paramétrica. El desarrollo del análisis de sensibilidad y de la programación lineal por metas paramétrica es muy similar al desarrollo de ambos temas en programación lineal convencional (ver Lee [L.6], Ignizio [I.3]). Por eso no nos detenemos en este aspecto.

2.3.2.3.5.- Extensiones de la programación por metas.

Lo mismo que ocurrió con la programación lineal convencional, en el ámbitó de la programación por metas se han desarrollado diversas extensiones del modelo que tratan de ampliar las posibilidades del mismo en su aplicación a la realidad.

En nuestro análisis nos hemos limitado al estudio de la programación lineal por metas con variables de valores continuos. Una primera extensión consiste en considerar variables de valores enteros (o discretas) y / o formas no lineales tanto en las metas como en la función objetivo. Estas extensiones son relativamente sencillas (ver Ignizio [I.1], 1976), pero no nos detenemos en ellas ya que nuestro estudio se ha centrado en la programación por metas estocástica en el caso lineal y de variables continuas.

Otras posibles extensiones surgen de enfoques minimizadores alternativos a los enfoques basados en metas lexicográficas y en metas ponderadas. Tienen lugar así:

1. La programación por metas "minimax", sugerida inicialmente por Flavell en 1976 [F.1]. Este método consiste en buscar la minimización de la máxima desviación entre todas las desviaciones posibles. La estructura matemática del modelo es

$$\begin{array}{ll} \min & d \\ s.a. & \alpha_i y_i^+ + \beta_i y_i^- \le d\ ,\ i = 1,2,\cdots,p \\ & f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ & \bar{y}^+ \ge \bar{0}\ ,\ ,\bar{y}^- \ge \bar{0} \\ & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (2.10)$$

donde

d es la máxima desviación posible de todas las metas.

α_i y β_i son coeficientes indicadores de las preferencias relativas del decisor y, a la vez, normalizadores. $\alpha_i = 0$ cuando en la i-ésima meta la variable de desviación no deseada es y_i^-. Y $\beta_i = 0$ cuando en la j-ésima meta la variable de desviación no deseada es y_i^+.

El problema (2.10) es un problema de programación lineal convencional que se puede resolver por aplicación directa del Simplex.

2. La programación multimetas. Fue propuesta por Zenely [Z.2] en 1982. Este enfoque minimiza las variables de desviación no deseadas en el sentido de la programación multiobjetivo, esto es, buscando soluciones eficientes.

La estructura matemática de este modelo es

$$
\begin{array}{ll}
Eff\ g(\bar{y}^{+},\bar{y}^{-})=[g_1(\bar{y}^{+},\bar{y}^{-}),\cdots,g_p(\bar{y}^{+},\bar{y}^{-})] & \\
s.a. \quad f(\bar{x})-\bar{y}^{+}+\bar{y}^{-}=m & \\
\qquad \bar{y}^{+}\geq\bar{0},\bar{y}^{-}\geq\bar{0} & \\
\qquad \bar{x}\in X &
\end{array}
$$

En este modelo, como en cualquier otro modelo de programación multimetas, la eficiencia se establece en el sentido minimizador. Es un enfoque atractivo ya que combina el deseo del decisor de satisfacer las metas por medio de la programación por metas, con el potente concepto de eficiencia paretiana. Pero, pese a su indudable interés, está todavía poco desarrollado tanto a nivel teórico como a nivel de aplicaciones.

Otras posibles extensiones son

- la Programación Borrosa, en la que no nos detenemos porque requeriría introducir la metodología de los conjuntos borrosos.
- la Programación Lineal Estocástica por Metas, que desarrollamos con detalle a partir del capítulo 6, ya que, justamente, es el tema objeto de estudio de este trabajo.

2.3.2.4.- Métodos interactivos.

Por último, hacemos una brevísima alusión a los denominados *métodos interactivos*. En ellos hay tres elementos, el decisor, el analista y el modelo.

El proceso que se sigue se puede resumir así:

- a partir del modelo, el analista obtiene una solución inicial que presenta al decisor para que la valore.
- el decisor expresa sus preferencias relativas respecto a dicha solución.

- el analista introduce en la estructura del modelo las preferencias del decisor y genera una nueva solución que presenta al decisor para que la valore.

El proceso iterativo finaliza cuando el decisor considera suficientemente buena la solución obtenida.

Estos métodos tienen la ventaja de que permiten al decisor variar sus preferencias ante la solución que el analista le presenta.

Entre los métodos iterativos más importantes cabe destacar

- el método STEM. (Véase Benayoun, Montgolfier y Larichev [B.5]).
- el método de Geoffrion. (Véase Geoffrion, Dyer y Feinberg [G.4]).
- el método de Zionts-Wallenius. (Véase Zionts y Wallenius [Z.4]).
- el Método Interactivo de Programación por Metas. (Véase Dyer [D.10]).
- el método de Frank-Wolfe. (Véase Steuer [S.17], Página 369-370).
- el método SWT o sucedáneo de las tasas de intercambio (Véase Haimes y Hall [H.2]).

En este capítulo nos hemos extendido especialmente, como anunciamos al comienzo, en el apartado 2.3.2.3, Programación por Metas, por ser el objetivo principal de esta tesis su extensión al caso estocástico.

Como veremos, la Programación Estocástica por Metas es una de las técnicas útiles para resolver problemas de decisión en ambiente de riesgo. Por eso, en el próximo capítulo, vamos a ver algunos aspectos de *Decisión en ambiente de riesgo* que después aplicaremos en nuestro problema.

En los dos capítulos siguientes, 4 y 5, comentamos brevemente algunos resultados de Programación Estocástica (Escalar y Multiobjetivo) que posteriormente utilizaremos para la resolución del problema de Programación Estocástica por Metas.

CAPÍTULO 3

DECISIÓN
EN AMBIENTE DE RIESGO

En este capítulo vamos a resumir algunos de los aspectos de la *decisión en ambiente de riesgo* que utilizaremos en el capítulo 7.

3.1.- Planteamiento del problema.

Tal y como comentamos en el capítulo 1, un problema de decisión en ambiente de riesgo está caracterizado por:

a) a cada alternativa se le asocia más de un resultado, asociado a distintos "estados de la Naturaleza".

b) se puede definir una distribución de probabilidad, ζ, que el decisor conoce, sobre el conjunto de estados de la Naturaleza.

c) como consecuencia, la elección de cualquier decisión concreta, x, inducirá una distribución de probabilidad, $\gamma(\theta,x)$, en el conjunto de consecuencias, C, al que también denominaremos conjunto de resultados o pagos.

Por lo tanto, un problema de decisión en ambiente de riesgo se puede representar de siguiente modo:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \cdots & \cdots & \zeta & \cdots & \cdots \\
X \diagdown \Omega & \cdots & \cdots & \theta & \cdots & \cdots \\
\hline
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
x & \cdots & \cdots & C(\theta,x) & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Hemos dicho en el primer capítulo, al hablar de la Teoría de la Utilidad, que el objetivo que se persigue en los procesos de toma de decisión es construir una *función de utilidad* que refleje las preferencias del decisor. A continuación nos referimos brevemente a esta cuestión.

3.2.- Función de utilidad.

La existencia de dicha *función de utilidad* está garantizada por unas hipótesis fundamentales respecto a la coherencia de las preferencias del decisor.

Hay distintas axiomáticas (la de Von Neumann y Morgenstern, la de Luce y Raiffa, la de Blackwell y Girshick, etc.), así como diversos trabajos que critican algunos de los axiomas desde la perspectiva de su desajuste, a veces, con lo observado en la realidad.

Una de las posibles formulaciones de estas hipótesis fundamentales, bastante aceptada, es la que recoge De Groot en [D.5] para distribuciones de probabilidad acotadas, es decir, para aquellas distribuciones de probabilidad, P, tales que existen dos números reales, r_1, r_2, de forma que se verifica que

$$P\{[r_1, r_2]\} = 1$$

En dicha axiomática se utiliza la siguiente notación:

Dado cualquier par de distribuciones de probabilidad acotadas, P_1 , P_2, sobre conjunto de consecuencias, C,

- $P_1 \precsim P_2$ cuando para el decisor P_1 no es preferida a P_2
- $P_1 \prec P_2$ para indicar que P_2 es estrictamente preferida a P_1
- $P_1 \sim P_2$ si el decisor es indiferente entre P_1 y P_2.

Axioma 1°.- Dadas dos distribuciones de probabilidad cualesquiera sobre el conjunto de consecuencias, P_1 , P_2, siempre se verifica que

$$P_1 \prec P_2, \quad \text{ó} \quad P_1 \succ P_2, \quad \text{ó} \quad P_1 \sim P_2.$$

Axioma 2°.- Dadas tres distribuciones de probabilidad cualesquiera P_1 , P_2 , P_3, si $P_1 \precsim P_2$ y $P_2 \precsim P_3$, entonces se tiene que $P_1 \precsim P_3$.

Esta hipótesis, denominada *axioma de transitividad*, es una de la más frecuentemente criticadas porque, con cierta frecuencia, no se corresponde con el comportamiento real de los individuos cuando se les presenta una serie de decisiones apareadas.

Los dos axiomas anteriores unidos establecen una relación de preferencia - indiferencia en el conjunto de las distribuciones de probabilidad de C, que es un preorden completo.

En lo que sigue para cada par de distribuciones P y Q, y cualquiera que sea el número α tal que $\alpha \in (0,1)$, la expresión

$$\alpha\ P + (1-\alpha)Q$$

denotará la distribución de probabilidad que asigna la probabilidad

$$\alpha\ P(A) + (1-\alpha)Q(A)$$

a cada subconjunto de consecuencias $A \subset C$.

Axioma 3°.- Si se tienen tres distribuciones de probabilidad cualesquiera P_1 , P_2 , P, y cualquier número $\alpha \in (0,1)$, entonces

$$P_1 \prec P_2 \Leftrightarrow \alpha\ P_1 + (1-\alpha)P \prec \alpha\ P_2 + (1-\alpha)P.$$

Esta hipótesis, que frecuentemente de denomina *axioma de independencia*, es, también, una de las más controvertidas. La conocida paradoja de Allais demuestra que, en problemas concretos, se puede violar esta hipótesis.

Axioma 4°.- Si se tienen tres distribuciones P_1, P_2, P, de forma que

$$P_1 \prec P \prec P_2$$

entonces existen dos números $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que

$$P \prec \alpha\, P_1 + (1-\alpha) P_2 \quad \text{y} \quad P \succ \beta\, P_1 + (1-\beta) P_2$$

Esta hipótesis, frecuentemente, se denomina *axioma de continuidad*.

Los cuatro axiomas anteriores, junto a algunos otros de índole matemática, garantizan la existencia de la *función de utilidad.* Para más detalles sobre la axiomática se puede consultar cualquier libro de Teoría de la Decisión de los citados en la bibliografía ([D.5], [F.4], ...)

Dicha función de utilidad representa numéricamente las preferencias del decisor, es decir, verifica que

$$P_1 \precsim P_2 \Leftrightarrow U(P_1) \leq U(P_2)$$

Además, es una función lineal, esto es, verifica que

$$U(\alpha\, P_1 + (1-\alpha)\, P_2) = \alpha\, U(P_1) + (1-\alpha)\, U(P_2)$$

y es única salvo transformación afín.

También se puede demostrar que la utilidad de una distribución de probabilidad es el valor esperado de las utilidades asociadas a los resultados ciertos. Es decir:

$$U(P) = \int_X U(x)\, dP(x) = E_P[U(x)]$$

Por esta razón, a la Teoría de la Utilidad de Von Newmann y Morgenstern se la conoce también como "Teoría de la Utilidad Esperada".

3.3.- Decisión de Bayes y Riesgo de Bayes.

Bajo la hipótesis de que en un problema como el planteado en la sección 3.1 se verifican los axiomas de la Teoría de la Utilidad, existirá una función de utilidad que asigna a cada valor del parámetro $\theta \in \Theta$, y a cada decisión $x \in X$, una utilidad $U[C(\theta,x)]$. Y se tendrá, también, la correspondiente función de pérdida o coste que asigna a cada valor del parámetro $\theta \in \Theta$, y a cada decisión $x \in X$, una pérdida o coste $L(\theta,x) = -U[C(\theta,x)]$.

Entonces, el problema considerado se puede representar así:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \cdots & \cdots & \zeta & \cdots & \cdots \\
X \backslash \Omega & \cdots & \cdots & \theta & \cdots & \cdots \\
\hline
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
x & \cdots & \cdots & L(\theta,x) & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}$$

Y, según se deduce de la teoría, el decisor buscará la forma de elegir la decisión x que proporcione la mínima pérdida esperada. Para obtener esta decisión óptima se asocia a cada decisión, $x \in X$, un valor en el campo de los números reales, $\Re$, que se denomina *riesgo* de la decisión x respecto a la distribución de probabilidad ζ, que se representa por $R(\zeta,x)$, y que se define como la pérdida esperada asociada con dicha decisión, es decir

$$R(\zeta,x) = E_{\zeta(\theta)}\left[L(\theta,x)\right] = \int_{\Omega} L(\theta,x)\, d\,\zeta(\theta) \quad (3.1)$$

Esto es, la *función de riesgo* así definida es el valor esperado de la función de pérdida respecto a la distribución de probabilidad a priori, ζ, existente en los estados de la naturaleza o valores del parámetro Ω.

El decisor elegirá, cuando sea posible, la decisión $x = x^*$ que minimice el riesgo, por lo tanto, tal que

$$R(\zeta,x^*) = \inf_x R(\zeta,x)$$

Esta decisión, x^*, se conoce con el nombre de *decisión de Bayes* respecto a la distribución de probabilidad ζ, y al riesgo asociado con ella, que representaremos por $R^*(\zeta)$, se le denomina *riesgo de Bayes* respecto a la distribución de probabilidad ζ.

Luego una decisión $x^* \in X$ es una *decisión de Bayes* respecto a la distribución de probabilidad ζ si y sólo si

$$R^*(\zeta) = R(\zeta,x^*)$$

Hemos dicho que el decisor elegirá una *decisión de Bayes* cuando sea posible, debido a que estas decisiones no siempre existen. Vamos a comprobarlo con un sencillo ejemplo que utiliza De Groot en [D.5]. Consideremos un problema de decisión en el que

- el espacio paramétrico es $\Omega = \{0, 1\}$,
- el conjunto de las posibles decisiones es $X = [0, 1]$,
- la distribución de probabilidad asociada al espacio paramétrico viene dada por $P\{\theta = 0\} = \frac{3}{4}$, $P\{\theta = 1\} = \frac{1}{4}$,

- y la función de pérdida considerada es el valor absoluto del error, es decir

$$L(\theta,x)=|\theta-x|$$

por lo tanto

$$L(0,x)=|0-x|=x$$

$$L(1,x)=|1-x|=1-x$$

El problema de decisión de nuestro ejemplo se puede representar así:

$X \setminus \Omega$	$\theta=0$	$\theta=1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	x	$1-x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para cualquier decisión $x\in X$, el riesgo es

$$\begin{aligned} R(\zeta,x) &= E_{\zeta(\theta)}\left[L(\theta,x)\right] = \\ &= L(0,x)\cdot P\{\theta=0\}+L(1,x)\cdot P\{\theta=1\} = \\ &= \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}(1-x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Obviamente la *decisión de Bayes* que minimiza el riesgo es $x^*=0$ y el *riesgo de Bayes* resulta ser $R^*(\zeta)=\frac{1}{4}$.

Sin embargo, si el espacio de decisiones fuese $X=(0,1]$, el riesgo de Bayes seguiría siendo $R^*(\zeta)=\frac{1}{4}$, pero no estaría asociada a este riesgo ninguna *decisión de Bayes*. Con lo que queda comprobado que no siempre existen *decisiones de Bayes*.

3.4.- Decisiones mixtas o aleatorizadas.

Una decisión x se dice que es una *decisión mixta o aleatorizada* cuando se obtiene como una distribución de probabilidad sobre el conjunto de decisiones X, esto es, cuando se asignan unas probabilidades $p_1, p_2, \cdots$ a un conjunto de decisiones de X, $x_1, x_2, \cdots$ de manera que el decisor selecciona una decisión x_i en base a dichas probabilidades.

Sea M el conjunto de todas las decisiones mixtas en un problema de decisión dado. A las decisiones de X se las denomina *decisiones puras*. Cada decisión $x \in X$ se puede considerar como una decisión mixta suponiendo que se obtiene como una distribución de probabilidad degenerada en x, es decir, una distribución que asigna probabilidad 1 a x. Por lo tanto X es un subconjunto de M y la ventaja de la existencia de decisiones mixtas es que al aumentar el dominio de elección del decisor puede ocurrir que éste realice mejor su elección.

Sin embargo, vamos a ver que el espacio de decisiones mixtas, M, no proporciona una reducción del riesgo del decisor, es decir, vamos a ver que la *decisión óptima* o *decisión de Bayes* de un problema de decisión en ambiente de riesgo considerando el espacio de decisiones mixtas M coincide con la *decisión óptima* o *decisión de Bayes* de dicho problema considerando únicamente el espacio de decisiones puras X. (Por lo tanto en ambiente de riesgo el decisor no necesita considerar el espacio de decisiones mixtas. No ocurre lo mismo en ambiente de incertidumbre).

En efecto, sea x una decisión aleatorizada, la pérdida esperada asociada con esta decisión para un valor $\theta \in \Omega$ dado, si existe, vendrá dada por la expresión

$$L(\theta,x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \, L(\theta,x_i) \qquad (3.2)$$

Para cualquier distribución de probabilidad ζ del parámetro Θ y cualquier decisión mixta x, el riesgo $R(\zeta,x)$, si existe, vendrá dado por la expresión (3.1)

$$R(\zeta, x) = \int_{\Omega} L(\theta,x)\, d\zeta(\theta)$$

Por otro lado, para cualquier distribución de probabilidad ζ del parámetro Θ, el decisor elegirá, si le es posible, la decisión $x \in M$ que minimice el riesgo $R(\zeta,x)$. Teniendo en cuenta las expresiones (3.1) y (3.2), la función de pérdida de cualquier decisión mixta x es la media ponderada de las funciones de pérdida de las decisiones puras $x_1, x_2, \cdots$. Por lo tanto el riesgo $R(\zeta,x)$ para la decisión mixta, si existe, es una media ponderada de los riesgos $R(\zeta,x_i)$ de las decisiones puras x_i, y entonces

$$\inf_{x \in M} R(\zeta,x) = \inf_{x \in X} R(\zeta,x) = R^*(\zeta)$$

expresión que indica que con ninguna decisión mixta se puede obtener un valor del riesgo inferior al *riesgo de Bayes* obtenido con las decisiones puras. Por lo tanto, la solución de un problema de decisión en ambiente de riego o bien es una decisión pura, o si es una decisión mixta, también tienen que ser solución las decisiones puras a partir de las cuales se ha formado dicha decisión mixta.

(Para una demostración formal se puede ver, por ejemplo, De Groot [D.5], Infante [I.8], ...).

3.5.- Metodología Bayesiana. Decisión con experimentación.

En muchos problemas de decisión, el decisor tiene la oportunidad de hacer experiencias previas a la toma de la decisión, esto es, puede observar el valor de un vector aleatorio Y que tiene relación con el parámetro Θ, antes de elegir una decisión de X.

El vector aleatorio observado Y es una muestra de tamaño n, $(y_1,\cdots,y_n)$ que toma valores en el espacio muestral S.

Supondremos que la distribución condicionada de Y dado $\Theta=\theta$ se puede especificar para cada valor $\theta \in \Omega$, representaremos su función de densidad por $f(y/\theta)$ y la denominaremos *función de verosimilitud de la muestra.*

A un problema de este tipo lo denominaremos *problema de decisión estadística*.

Las componentes de un *problema de decisión estadística* son, por lo tanto:

- un espacio paramétrico Ω
- un espacio de decisiones X
- una función de pérdida o coste $L = L(\theta, x)$
- y una familia de funciones de densidad o de probabilidad, $\{f(\bullet/\theta)/\theta \in \Theta\}$, de una observación Y condicionada al valor θ de Θ, denominadas, como hemos comentado, *funciones de verosimilitud* de Y.

La distribución de probabilidad de Θ dependerá, obviamente, del valor observado de Y. Supondremos que existe una distribución de probabilidad inicial de Θ antes de observar Y, que se denomina *distribución a priori* de Θ y cuya función de densidad o probabilidad representaremos por $\zeta(\theta)$.

La distribución de probabilidad condicionada de Θ dado el valor observado de Y, $Y=y$, se denomina *distribución a posteriori* de Θ y su función de densidad, $\zeta(\theta / y)$, vendrá dada por el teorema de Bayes

$$\zeta(\theta / y)=\frac{f(y / \theta)\, \zeta(\theta)}{\int_{\Omega} f(y / \theta)\, \zeta(\theta)\, d\theta}$$

En estas circunstancias, no se busca una única decisión $x \in X$, sino un conjunto de reglas, una para cada observación muestral, de forma que si se presenta una cierta muestra, la decisión asociada con ella, sea de pérdida mínima respecto a la información que dicha muestra proporciona.

Por ello, en lugar de trabajar con el conjunto de decisiones, X, se trabaja con el conjunto de las denominadas *funciones de decisión,* que es un conjunto de aplicaciones del espacio muestral S de observaciones en el conjunto de decisiones X

$$\Delta=\{\delta(y) / \delta : S \rightarrow X\}$$

Como la decisión elegida depende, generalmente, del valor observado de Y, antes de observar ese valor se puede identificar el proceso de decisión con la elección por parte del decisor de una cierta función $\delta \in \Delta$.

Se trata, de nuevo, de elegir la *función de decisión* $\delta^{*} \in \Delta$ que proporcione una pérdida mínima respecto a todos los posibles puntos del espacio muestral $y \in S$ y a todos los posibles valores del parámetro $\theta \in \Omega$.

Para obtener dicha función de decisión definimos el *riesgo*, $R(\zeta,\delta)$, de una *función de decisión* con respecto a la *distribución a priori*, ζ, como la pérdida esperada, es decir

$$R(\zeta,\delta) = \underset{\theta,y}{E}\left[L[\theta,\delta(y)]\right] = \int_\Omega \int_S L[\theta,\delta(y)]\, f(y,\theta)\, dy d\theta =$$

$$= \int_\Omega \int_S L[\theta,\delta(y)]\, f(y/\theta)\,\zeta(\theta) dy d\theta$$

La expresión anterior se puede reescribir así

$$R(\zeta,\delta) = \int_\Omega \left(\int_S L[\theta,\delta(y)]\, f(y/\theta) dy\right)\zeta(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_\Omega R(\theta,\delta)\,\zeta(\theta)\, d\theta$$

Luego un posible procedimiento para calcular el riesgo es

- calcular la pérdida esperada asociada con cada posible valor de Θ

$$R(\theta,\delta) = \int_S L[\theta,\delta(y)]\, f(y/\theta) dy$$

- calcular la esperanza respecto a θ de $R(\theta,\delta)$

$$R(\zeta,\delta) = \int_\Omega R(\theta,\delta)\,\zeta(\theta)\, d\theta$$

Teniendo en cuenta que

$$R(\zeta,\delta) = \int_S \int_\Omega L[\theta,\delta(y)]\, f(y,\theta)\, d\theta\, dy =$$

$$= \int_S \left(\int_\Omega L[\theta,\delta(y)]\ \zeta(\theta/y) d\theta\right) f_1(y) dy$$

un modo alternativo de calcular el riesgo es:

- para cada observación $Y = y$, se calcula el riesgo de la decisión $\delta(y)$ respecto a la distribución a posteriori $\zeta(\theta/y)$

$$R(\delta(y), \zeta(\theta, y))$$

- a continuación se calcula la esperanza respecto a y de dichos riesgos

$$\int_S R(\delta(y), \zeta(\theta / y)) f_1(y) dy$$

siendo $f_1(y)$ la distribución marginal de y.

La función de decisión $\delta^*(y)$ para la que el riesgo es mínimo se denomina *función de decisión de Bayes* con respecto a ζ y su riesgo, $R(\zeta, \delta^*)$, se denomina *riesgo de Bayes* respecto a ζ, y se representa por $R^*(\zeta)$.
Es decir

$$R(\zeta, \delta^*) = \underset{\delta \in \Delta}{Inf}\, R(\zeta, \delta) = R^*(\zeta)$$

La *función de decisión de Bayes* se construye minimizando

$$R(\zeta, \delta) = \int_S \left(\int_\Omega L[\theta, \delta(y)]\, f(y / \theta) \zeta(\theta)\, d\theta\right) dy$$

que equivale a minimizar para cada $y \in S$, la expresión

$$\int_\Omega L[\theta, \delta(y)]\, f(y / \theta) \zeta(\theta)\, d\theta$$

lo que es equivalente a minimizar

$$\int_\Omega L[\theta, \delta(y)] \left(f(y / \theta)\, \zeta(\theta) / f_1(y)\right) d\theta$$

que es igual a

$$\int_\Omega L[\theta, \delta(y)]\, \zeta(\theta / y)\, d\theta$$

siendo $\zeta(\theta / y)$ la distribución a posteriori del parámetro Θ después de haber observado $Y = y$.

En consecuencia, la *función de decisión de Bayes* $\delta^*(y)$ elige, para cada valor observado $Y=y$, la *decisión de Bayes* respecto a la distribución a posteriori $\zeta(\theta / y)$.

Con lo dicho hasta aquí, los *procesos de decisión* en *ambiente de riesgo* se pueden interpretar del siguiente modo:

- Si se debe elegir una decisión sin posibilidad de observación previa, se elige la *decisión de Bayes* respecto a la distribución a priori del parámetro. Si se tiene la posibilidad de observar Y antes de tomar decisiones, una vez observado el valor de Y se elige la *decisión de Bayes* respecto a la distribución a posteriori del parámetro. La única diferencia es que la distribución de Θ ha cambiado.
- El proceso se puede realizar repetidas veces, ya que se puede demostrar sin dificultad que la distribución a posteriori final $\zeta(\theta / y_1,\cdots,y_n)$ no depende del orden en que se ha recibido la información (para la demostración véase, por ejemplo, De Groot [D.5]).
- De esta forma, la incorporación de información para la toma de decisiones se corresponde con el cálculo de las distribuciones a posteriori del parámetro.
- Este proceso provoca, por tanto, revisiones del sistema de creencias del decisor (no de sus preferencias). En cada instante del proceso, si el decisor se ve obligado a tomar decisiones, elegirá las que sean óptimas, es decir las *decisiones de Bayes*, respecto de la última distribución a posteriori calculada hasta ese momento.

Dentro de este análisis es conveniente valorar la información disponible para decidir si interesa o no obtenerla, por eso pasamos a ver

3.6- El valor de la información.

Para valorar la información, el decisor debe comparar la reducción del riesgo que se puede obtener mediante una observación Y, con el coste que supone dicha observación.

Si $R_0(\zeta)$ es el *riesgo de Bayes* que se obtendría eligiendo una decisión $x \in X$ antes de observar Y, es decir, el *riesgo a priori*, que se puede interpretar como el coste esperado de la decisión óptima a priori, y $R(\zeta,\delta^*)$ es el riesgo de la función de decisión de Bayes o *riesgo a posteriori*, entonces la reducción del riesgo obtenida mediante una observación Y viene dada por la diferencia

$$R_0(\zeta)-R(\zeta,\delta^*)$$

a la que denominaremos *Valor Esperado de la Información Muestral* y representaremos por $VEIM$, que será

$$VEIM = R_0(\zeta)-R(\zeta,\delta^*)$$

Esta expresión constituye una cota superior del coste que el decisor estará dispuesto a pagar por obtener la información Y, y es siempre no negativa.

Si no existiera ningún tipo de incertidumbre, esto es, si se tuviese *Información Perfecta* sobre el suceso que ocurrirá, el coste sería el mínimo posible y lo representaremos por $C\,min$ Si se considera, por ejemplo, el caso discreto

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_p \\
X \diagdown \Omega & \theta_1 & \cdots & \theta_p \\
\hline
x_1 & L(\theta_1,x_1) & \cdots & L(\theta_p,x_1) \\
\vdots & & \vdots & \\
x_n & L(\theta_1,x_n) & \cdots & L(\theta_p,x_n)
\end{array}
$$

Suponiendo que se tuviera *Información Perfecta* el coste esperado sería

$$C\,min = \zeta_1 \cdot \left(\min_x L(\theta_1, x)\right) + \cdots + \zeta_p \cdot \left(\min_x L(\theta_p, x)\right)$$

y el *Valor Esperado de la Información Perfecta*, que representaremos por $VEIP$, vendrá dado por la diferencia

$$VEIP = R_0(\zeta) - C\,min$$

que constituye una cota superior del coste de cualquier información.

Esta valoración de la información se basa en el punto de vista coste - beneficio. Otra forma de hacerlo es desde el punto de vista de su eficiencia, lo que requiere de la Teoría de la Información. No consideramos este modo de valorar la información porque no lo hemos aplicado a nuestro problema.

Nos centramos, a continuación, en el cálculo de las distribuciones *a posteriori* que, como sabemos están determinadas por la distribución *a priori* y la *función de probabilidad o de densidad muestral* o *verosimilitud de la muestra*. Para facilitar los cálculos se introduce el concepto de *familia de distribuciones conjugadas*.

Comenzaremos recordando el concepto de *estadístico suficiente* por el papel fundamental que desempeña su existencia en el estudio de las *familias conjugadas*.

3.7. Estadísticos suficientes. Familia de distribuciones conjugadas.

Sean, como siempre:

- Θ un parámetro que toma valores en Ω.
- Y una variable aleatoria (o vector aleatorio) que toma valores en S.
- $f(\bullet/\theta)$ la función de densidad o de probabilidad de Y condicionada a que $\Theta=\theta$, o *función de verosimilitud de la muestra*.

Un estadístico, es decir, cualquier función T de la observación Y, $T=T(Y_1,\cdots,Y_n)$, se dice que es *suficiente* cuando reúne toda la información que proporciona la muestra. Este concepto se puede formalizar así

Definición 3.1. Un estadístico $T=T(Y_1,\cdots,Y_n)$ es *suficiente* si, para cualquier distribución de probabilidad $\zeta(\theta)$ de Θ y para cualesquiera observaciones $(Y_1,\cdots,Y_n)=(y_1,\cdots,y_n)$, la distribución a posteriori $\zeta(\theta/y_1,\cdots,y_n)$ depende de las observaciones $(y_1,\cdots,y_n)$ únicamente a través de $T(y_1,\cdots,y_n)$.

Es decir, el estadístico T es *suficiente* cuando para dos puntos cualesquiera de S,

$$(y_1,\cdots,y_n) \quad \text{y} \quad (y_1',\cdots,y_n')$$

si

$$T(y_1,\cdots,y_n)=T(y_1',\cdots,y_n')$$

entonces

$$\zeta(\theta / y_1,\cdots,y_n) = \zeta(\theta / y_1',\cdots,y_n').$$

El siguiente teorema proporciona un modo sencillo de reconocer los estadísticos *suficientes*.

Teorema 3.1. Un estadístico T es *suficiente* para una familia de funciones de densidad $f(y/\theta)$, $\theta \in \Omega$, si y sólo si $f(y/\theta)$ se puede expresas como el producto

$$f(y/\theta) = u(y)\cdot v(T(y),\theta) \quad , \quad \forall y \in S \,, \forall \theta \in \Omega$$

donde

$u(y) > 0$ y no depende de $\Theta = \theta$

$v(T(y),\theta) \geq 0$ y depende de y sólo a través de $T(y)$.

Para la demostración véase, por ejemplo, De Groot [D.5], página 156.

Observaciones y comentarios.-

- En lo que sigue consideraremos que las variables aleatorias $Y_1,\cdots,Y_n$ son muestras aleatorias simples del espacio muestral S, es decir, son muestras aleatorias constituidas por variables aleatorias estocásticamente independientes y, cada una de ellas, con la misma distribución de probabilidad de la población, dada por la función de densidad $f(y/\theta)$. Por lo tanto, para cualquier valor dado θ de Θ, la función de densidad o *función de verosimilitud* de $(Y_1,\cdots,Y_n) = (y_1,\cdots,y_n)$ cuando $\Theta = \theta$ es

$$f(y_1,\cdots,y_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i/\theta)$$

- La existencia de estadísticos *suficientes* viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.2. Dado un conjunto de observaciones $y_1,\cdots,y_n$, de una muestra aleatoria simple $Y_1,\cdots,Y_n$ y una familia de funciones de densidad $\{f(\bullet/\theta),\theta\in\Omega\}$ pertenecientes a la familia de funciones exponenciales de Koopmans–Darmois, es decir, de la forma

$$f(y/\theta)=a(\theta)\cdot b(y)\cdot e^{\sum_{i=1}^{k}c_i(\theta)\cdot d_i(y)}$$

entonces el estadístico de dimensión fija k

$$T(Y_1,\cdots,Y_n)=\left(\sum_{j=1}^{k}d_1(y_j),\cdots,\sum_{j=1}^{k}d_k(y_j)\right)$$

es un estadístico *suficiente* para cada muestra de dimensión n.

Pasamos, a continuación, a estudiar las *familias de distribuciones conjugadas*.

Supongamos que la distribución a priori de Θ pertenece a una familia paramétrica concreta de distribuciones de probabilidad. Si la distribución a posteriori también pertenece a dicha familia de distribuciones para cualesquiera valores de la muestra $y_1,\cdots,y_n$, la citada familia recibe el nombre de *familia de distribuciones conjugadas* respecto a la distribución muestral. Se trata, por tanto, de familias de distribuciones "cerradas bajo muestreo".

Se comprueba fácilmente que cualquier *familia de distribuciones conjugadas* debe verificar dos propiedades

1. $\forall n,\forall y_1,\cdots,y_n$, la función de verosimilitud $f(y_1,\cdots,y_n/\theta)$, considerada como una función de θ, es proporcional a una de las funciones de la familia.
2. La *familia de distribuciones conjugadas* es cerrada bajo multiplicaciones.

La relación entre la existencia de *estadísticos suficientes* y las *familias de distribuciones conjugadas* viene dada por el siguiente teorema cuya demostración es sencilla y se encuentra en cualquier libro de decisión bayesiana.

Teorema 3.3. Si $\forall n$ existe un estadístico suficiente $T(y_1,\cdots,y_n)$ de dimensión fija k, entonces existe una *familia de distribuciones conjugadas* construida a partir de las dos propiedades anteriores.

De hecho, la mayoría de las familias de distribuciones usualmente utilizadas pertenecen a esta familia de distribuciones exponenciales, y, por lo tanto, existen estadísticos *suficientes*. La excepción más conocida es la distribución *uniforme*, pero también para esta familia de distribuciones existen estadísticos *suficientes*.
La construcción de *familias conjugadas* para muestras de las distribuciones más comúnmente utilizadas se puede encontrar en cualquier libro de decisión bayesiana. A modo de ejemplo y porque lo utilizaremos más adelante, veremos el siguiente caso:

Teorema 3.4. Sea el vector aleatorio $Y=(Y_1,\cdots,Y_k)'$ con una distribución de probabilidad multinomial de parámetros n (un número entero positivo conocido) y $\Theta=(\Theta_1,\cdots,\Theta_k)'$ (desconocido). Supongamos que la distribución a priori de Θ es una distribución de Dirichlet o Beta Multivariante con vector paramétrico $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)'$ tal que $\alpha_i>0, i=1,\cdots,k$. Entonces la distribución a posteriori de Θ cuando $Y_i=y_i, i=1,\cdots,k$ es una distribución de Dirichlet o Beta Multivariante con vector paramétrico $\alpha^*=(\alpha_1+y_1,\cdots,\alpha_k+y_k)'$.
Para la demostración véase De Groot [D.5], página 174.

Cabe preguntarse si es siempre conveniente utilizar la *Metodología Bayesiana* o si hay ocasiones en las que es más oportuno recurrir a la *Metodología Clásica*. Para responder a esta cuestión conviene considerar dos situaciones:

1. Se puede demostrar que, bajo condiciones muy generales, cuando n tiende a infinito, las distribuciones a posteriori $\zeta(\theta / Y_1,\cdots,Y_n)$, convergen en probabilidad al verdadero valor del parámetro θ_0. (Véase De Groot [D.5]). Por lo tanto, para muestras grandes, se puede utilizar el *estimador máximo verosímil* (cuando éste existe), ya que mediante la *Metodología Bayesiana* se llega a los mismos resultados que utilizando los *Métodos Clásicos*.
2. En ausencia de información a priori hay dos posibilidades de utilizar la *Metodología Bayesiana* que, habitualmente, llevan al mismo resultado:
   - o bien partir de una de las denominadas distribuciones a priori "impropias" que refleje la indecisión en la distribución a priori
   - o tomar límites en la distribución a posteriori de forma que se refleje la ignorancia a priori.

   Utilizando cualquiera de estas dos posibilidades en la estimación por intervalos, por ejemplo, los resultados obtenidos, de nuevo, coinciden a menudo con los de la *Metodología Clásica*.

Consecuentemente parecería adecuado proponer que la utilización de la *Metodología Bayesiana* es útil o bien cuando no hay "mucha" información muestral o bien cuando hay información a priori. No obstante y pese a las coincidencias formales, las diferencias filosóficas entre ambas metodologías persisten, y hay quienes afirman la conveniencia de la utilización de la *Metodología Bayesiana* en cualquier tipo de problema.

3.8.- Estimación de parámetros Bayesiana.

Los problemas de estimación típicos de la inferencia estadística se pueden considerar como problemas de decisión en los que la decisión consiste, precisamente, en elegir una estimación del parámetro $\overline{\Theta} = =(\Theta_1,\cdots,\Theta_k)'$, cuyos valores pertenecen al subconjunto Ω de $\Re^k$. Por lo tanto el espacio de decisiones, X, coincide con el espacio paramétrico Ω. Y, para simplificar, se puede suponer que $\Omega = X = \Re^K$, aunque la probabilidad de que Θ esté en algunas regiones de $\Re^K$ pueda ser 0.

Si $\bar{x} = (x_1,\cdots,x_k)'$ es una estimación del valor del parámetro $\bar{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_k)'$ de $\overline{\Theta}$, la pérdida $L(\bar{\theta},\bar{x})$ en que incurre el decisor con esta estimación reflejará la discrepancia entre el valor del parámetro $\bar{\theta}$ y la estimación $\bar{x}$.

Dado un problema de estimación en el que la distribución de probabilidad a priori de $\overline{\Theta}$ se sabe que viene dada por ζ, una *decisión de Bayes* (o en este caso una *estimación de Bayes*), $\bar{x}^*$, será un punto $\bar{x} \in \Re^K$ que minimice el valor del riesgo $R(\zeta,\bar{x})$, es decir, tal que

$$R(\zeta,\bar{x}^*) = \min_{\bar{x}} \int_{\Re^k} L(\bar{\theta},\bar{x})\,d\zeta(\bar{\theta})$$

Cuando el **parámetro** Θ es **unidimensional** y sus valores pertenecen a la recta real (esto es, Ω es un intervalo $[a,b]$ de $\Re$), la función de pérdida frecuentemente tiene la forma

$$L(\theta,x) = a\,|\theta - x|^b$$

con $a > 0$, $b > 0$, siendo especialmente utilizados los casos en que $b = 2$ y $b = 1$.

- Para $b = 2$ se tiene la *función de pérdida error cuadrático*, que tiene la forma

$$L(\theta,x)=a\,(\theta-x)^{2}$$

Una *estimación de Bayes* de Θ para esta función de pérdida será un número, $x=x^{*}$, que haga mínimo el riesgo, $E\left[(\Theta-x)^{2}\right]$. Se trata, por tanto, de determinar

$$\min_{x} E\left[(\Theta-x)^{2}\right]$$

Imponiendo la condición necesaria de mínimo a esta función, esto es, igualando la primera derivada respecto a x a 0, se tiene que

$$x^{*}=E[\Theta]$$

Como también se verifica la condición suficiente de mínimo, ya que la segunda derivada es positiva, *la estimación de Bayes*, x^{*}, es el valor medio de la distribución de Θ, si este existe.
Para este valor de x^{*} el mínimo valor del riesgo es la varianza de dicha distribución, ya que

$$E\left[(\Theta-E[\Theta])^{2}\right]=Var\,[\Theta]$$

Esto es, *el riesgo de Bayes* es la varianza de la distribución de Θ, si esta existe.

Sean Y una observación con función de densidad condicionada a $\Theta=\theta$, $f(\bullet/\theta)$, ζ la función de densidad a priori de Θ y $\zeta(\bullet/y)$ la función de densidad a posteriori de Θ cuando $Y=y$. Suponiendo que $a=1$ con el fin de simplificar, para cualquier valor observado $Y=y$, la *decisión de Bayes* es

$$\delta^{*}(y)=E\left[\Theta/y\right]$$

donde $E\left[\Theta/y\right]$ es el valor medio de la distribución a posteriori de Θ, si éste existe.

Una vez observado el valor y y elegida la estimación $\delta^*(y)$, el riesgo es la varianza de la distribución a posteriori de Θ, $Var[\Theta/y]$, si esta existe.

- Para $b=1$ se tiene *la función de pérdida proporcional al valor absoluto del error*, que tiene la forma

$$L(\theta,x)=a\,|\theta-x|$$

Dada la distribución de Θ, una *estimación de Bayes* x^* es un número que minimiza $E\left[|\Theta-x|\right]$.

Se sabe que m es la mediana de la distribución de Θ si $P\{\Theta\geq m\}\geq\frac{1}{2}$ y $P\{\Theta\leq m\}\geq\frac{1}{2}$, y que cada distribución tiene al menos una mediana, aunque ésta no es necesariamente única. Se puede demostrar que cualquier mediana de la distribución de Θ es una *estimación de Bayes* para la función de pérdida proporcional al valor absoluto del error, mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.5. Supongamos que $E\left[|\Theta|\right]<\infty$. Un número x^* satisface la ecuación

$$E\left[|\Theta-x^*|\right]=\min_x E\left[|\Theta-x|\right]$$

si y sólo si x^* es una mediana de la distribución de Θ.
(Para la demostración véase, por ejemplo, De Groot [D.5]).

Cuando se dispone de un vector de observaciones Y, el decisor puede construir un estimador de Bayes $\delta^*(y)$ eligiendo una mediana de la distribución a posteriori de Θ para cualquier valor observado y de Y.

Consideremos ahora el caso en que el **parámetro** $\overline{\Theta}$ es **un vector** $\overline{\Theta}=(\Theta_1,\cdots,\Theta_k)'$ para $k\geq 2$.

Una función de pérdida típica para tales problemas es la que viene definida por la forma cuadrática

$$L(\overline{\Theta},\overline{x})=(\overline{\Theta}-\overline{x})'A(\overline{\Theta}-\overline{x})$$

dónde A es una matriz simétrica definida no negativa de orden $k\times k$.

Esta función de pérdida se puede considerar como una generalización de la *función de pérdida error cuadrático*.

Supongamos que el vector valor medio y la matriz de covarianzas de $\overline{\Theta}$ existen y son

$$E[\overline{\Theta}]=\overline{\mu} \quad \text{y} \quad Cov[\overline{\Theta}]=\Sigma.$$

Una *estimación de Bayes* para cualquier distribución de $\overline{\Theta}$ es un punto $\overline{x}\in\Re^k$ que minimiza el riesgo, es decir, que hace mínima la esperanza

$$E[(\overline{\Theta}-\overline{x})'A(\overline{\Theta}-\overline{x})]$$

Pero

$$\begin{aligned} &E[(\overline{\Theta}-\overline{x})'A(\overline{\Theta}-\overline{x})]=\\ &=E[\{(\overline{\Theta}-\overline{\mu})'+(\overline{\mu}-\overline{x})'\}A\{(\overline{\Theta}-\overline{\mu})+(\overline{\mu}-\overline{x})'\}]=\\ &=E[(\overline{\Theta}-\overline{\mu})A(\overline{\Theta}-\overline{\mu})]+(\overline{\mu}-\overline{x})'A(\overline{\mu}-\overline{x}) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Luego el primer término de esta última expresión no depende de $\overline{x}$.

Por ser A una matriz definida no negativa, el segundo término de la expresión (3.1) no puede ser negativo, es decir,

$$(\overline{\mu}-\overline{x})'A(\overline{\mu}-\overline{x})\geq 0$$

cualquiera que sea $\overline{x}$.

Por lo tanto $\bar{x}$ es una *estimación de Bayes* si y sólo si

$$(\bar{\mu}-\bar{x})' A (\bar{\mu}-\bar{x}) = 0 \qquad (3.2)$$

Consecuentemente $\bar{x}=\bar{\mu}$ es una *estimación de Bayes* de $\overline{\Theta}$. Si la matriz A es definida positiva, esta es la única *estimación de Bayes*, en otro caso puede haber otros valores de $\bar{x}$ que satisfagan la ecuación (3.2).

La función de pérdida *proporcional al valor absoluto del error* se podría generalizar al caso en que el **parámetro** $\overline{\Theta}$ **es un vector** $\overline{\Theta}=(\Theta_1,\cdots,\Theta_k)'$, para $k \geq 2$, mediante la norma L_1 de Hölder que hemos visto en el epígrafe B.- "Programación por metas ponderada" del apartado 2.3.2.3 del capítulo anterior, siendo entonces la función de pérdida de la forma

$$L(\bar{\theta},\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left|\theta_i - x_i\right|$$

Pero no se puede generalizar la solución obtenida en al caso unidimensional ya que no se tiene un concepto de mediana para distribuciones de probabilidad multidimensionales.

En el capítulo 9 (Aplicaciones) volveremos a plantearnos este problema y propondremos una posible solución.

CAPÍTULO 4

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA ESCALAR

En este capítulo resumimos algunos de los resultados de *Programación Estocástica Escalar* en el caso *Lineal*, que utilizaremos más adelante.

4.1.- Planteamiento del problema.

Sea el problema determinista de programación lineal escalar en la forma canónica

$$\begin{array}{ll} opt & \bar{c}'\bar{x} \\ s.a. & A\bar{x} \leq \bar{b} \\ & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde

$\bar{c}$ y $\bar{x}$ son vectores de dimensión n.

A es una matriz de orden $m \times n$.

$\bar{b}$ es un vector de dimensión m.

X es un conjunto poliedral convexo, habitualmente $X =$ $= \{\bar{x} / \bar{x} \geq \bar{0}\}$

Una posible interpretación económica de este tipo de problemas es considerar las componentes c_j y b_i, $j = 1, 2, \cdots, n$, $i = 1, 2, \cdots, m$, de los vectores $\bar{c}$ y $\bar{b}$, como precios y demandas, respectivamente, y los coeficientes tecnológicos a_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$ de la matriz A, como productividades. Es claro que es más realista considerar que estos coeficientes no siempre son fijos, sino que pueden ser aleatorios.

Cuando alguno (o todos) de los coeficientes de la matriz A y / ó de los vectores $\bar{c}$ y $\bar{b}$ son variables aleatorias definidas en el espacio probabilístico (Ξ, F, P), (cuya distribución de probabilidad conjunta es conocida e independiente de la variable de decisión

$\bar{x}$), estamos ante un problema de *Programación Lineal Estocástica* que tiene la forma

$$\begin{array}{ll} opt & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array}$$

En estos problemas no está claramente definido el concepto de óptimo (máximo o mínimo). Si el problema, por ejemplo, es de minimización

$$\begin{array}{ll} \text{"}mín\text{"} & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (4.1)$$

como $\bar{c}(\bar{\xi})$ es un vector aleatorio, no es posible, en general, hallar un vector factible $\bar{x}_0$ tal que

$$\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}_0 \leq \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}$$

para cada $\bar{\xi} \in \Xi$ y para cada $\bar{x}$ factible, ya que el valor de la función objetivo $\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}$ en cualquier punto $\bar{x}$ no es un número sino un valor aleatorio.

Por lo tanto, puede ser que para algún $\bar{\xi}_1 \in \Xi$ se verifique que

$$\bar{c}'(\bar{\xi}_1)\bar{x}_0 \leq \bar{c}'(\bar{\xi}_1)\bar{x}$$

mientras que para otro $\bar{\xi}_2 \in \Xi$, se tenga que

$$\bar{c}'(\bar{\xi}_2)\bar{x}_0 \geq \bar{c}'(\bar{\xi}_2)\bar{x}.$$

Un problema análogo se plantea en relación a las restricciones.

Es decir, en un problema del tipo (4.1), no está claramente especificado cómo elegir una decisión $\bar{x}$ antes de conocer la realización del evento aleatorio $\bar{\xi}$. Esto hace necesario especificar los conceptos de solución que se consideran apropiados para el problema concreto descrito por ese modelo.

4.2.- Algunos conceptos de solución en Programación Lineal Estocástica.

4.2.1.- Solución "ingenua".

En un primer momento muchos de estos problemas se han resuelto sustituyendo las variables aleatorias por sus valores esperados (o por una buena estimación de las mismas) y resolviendo el programa lineal resultante.

Pero Kall en [K.2], muestra con un sencillo ejemplo numérico que este procedimiento puede no ser adecuado.

Resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} min & x_1 + x_2 \\ s.a. & \xi\, x_1 + x_2 \geq 7 \\ & \eta\, x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

donde (ξ,η) es un vector aleatorio con una distribución de probabilidad uniforme en el rectángulo

$$\{(1 \leq \xi \leq 4)\,,\,((1/3) \leq \eta \leq 1)\}.$$

Luego el valor esperado de (ξ,η) es

$$E\,[(\xi,\eta)] = (5/2\,,\,2/3).$$

Y se trata de resolver el programa lineal

$$\begin{aligned} & min \quad x_1 + x_2 \\ & s.a. \quad \frac{5}{2} x_1 + x_2 \geq 7 \\ & \qquad \frac{2}{3} x_1 + x_2 \geq 4 \\ & \qquad x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x_1{}^* = \frac{18}{11} \,,\, x_2{}^* = \frac{32}{11} \,.$$

Pero la probabilidad del suceso consistente en que esta solución sea factible es

$$P\{(\xi \,,\eta) \,/\, \xi\, x_1 + x_2 \geq 7 \,,\, \eta\, x_1 + x_2 \geq 4\} =$$
$$= P\{(\xi \,,\eta) \,/\, \xi \geq 5/2 \,,\, \eta \geq 2/3\} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la solución obtenida es no factible con probabilidad $\frac{3}{4}$.

El ejemplo sugiere que hay que ser cuidadosos a la hora de resolver problemas del tipo (4.1) mediante este procedimiento, ya que se pueden obtener soluciones para las que el suceso consistente en que la solución obtenida sea no factible tenga una probabilidad considerablemente grande.

Al intentar mejorar este procedimiento de solución para problemas de *Programación Lineal Estocástica*, éstos se han interpretado, esencialmente, de dos modos diferentes, originando dos modelos distintos, denominados *"espera y ve"* ("wait and see") y *"aquí y ahora"* ("here and now"), que dan lugar, respectivamente, a los *Problemas de Distribución* y a los *Equivalentes Deterministas* (entre otros procedimientos).

4.2.2.- Problemas de Distribución.

Los problemas *"espera y ve"* fueron inicialmente estudiados por Tintner en 1955, [T.2], bajo la denominación de problemas de *"Programación Estocástica Pasiva"*.
Se basan en la hipótesis de que el decisor es capaz de esperar a que se realicen las variables aleatorias, $\bar{\xi}$, y después toma su decisión, $\bar{x}$. Se trata, por tanto, de resolver el problema (4.1)

$$\begin{array}{ll} \text{"min"} & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array}$$

cuyo valor óptimo, si existe, es una función de $\bar{\xi}$, $\varsigma(\bar{\xi})$, para la que cualquier programa (4.1) tiene solución.
El valor de $\varsigma(\bar{\xi})$ no se puede conocer de antemano (antes de observar la realización de las variables aleatorias), y puede ser de interés para el decisor conocer cuál es su distribución de probabilidad, o, al menos, cuál es el valor de algunos de sus momentos más significativos (valor medio y varianza).
Esta cuestión se conoce con el nombre de *Problema de Distribución* de programación estocástica.

Una posible interpretación del denominado *Problema de Distribución* puede ser la siguiente. Supongamos que un plan de producción con estructura lineal se puede resolver a corto plazo para unas realizaciones o valores concretos de precios aleatorios, coeficientes tecnológicos aleatorios y demandas aleatorias. Pero la empresa correspondiente quiere planificar el presupuesto a largo plazo (es decir, para muchos periodos cortos) y para ello desea conocer qué cantidad de dinero disponible, en media, necesitaría para realizar el programa de producción, esto es, necesita conocer el valor medio de la distribución de probabilidad de su programa de costes de producción.

Este tipo de problemas en el caso lineal, que es el que nosotros consideramos, ha sido ampliamente estudiado por Bereanu en diversos trabajos, obteniendo tanto expresiones para la función de distribución, F_ς, de $\varsigma(\bar{\xi})$ (y sus momentos), como métodos numéricos para resolver el *Problema de Distribución*. Una presentación completa de estos aspectos se encuentra en Bereanu [B.10].

4.2.3.- Soluciones mediante Equivalentes Deterministas.

Los modelos *"aquí y ahora"* fueron inicialmente estudiados por Sengupta, Tintner y Morrison en 1963, [S.5], bajo la denominación de problemas de *"Programación Estocástica Activa"*.
Se basan en la hipótesis de que la decisión, $\bar{x}$, se toma antes de conocer la realización de las variables aleatorias que, sin embargo, puede tener influencia en el resultado.

Este tipo de problemas se puede resolver por varios caminos. El más usual consiste en reemplazar el problema de *Programación Lineal Estocástica* por un programa determinista conveniente, denominado *Equivalente Determinista*.

Entre los diversos modos de obtener *Equivalentes Deterministas* los más desarrollados son dos:

- **Programas con Restricciones Probabilísticas**
- **Programas Estocásticos con Recursos**

4.2.3.1.- Programación con Restricciones Probabilísticas

El problema de programación con restricciones probabilísticas fue formulado primero por Charnes y Cooper [C.2] y [C.3] y posteriormente desarrollado, entre otros, por Van de Panne y Popp [V.2] y Miller y Wagner [M.7].

Consideremos, de nuevo, el problema (4.1)

$$\begin{array}{ll} \text{"}min\text{"} & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array}$$

En este tipo de aproximación no es necesario que las restricciones se satisfagan totalmente, sino que es suficiente con que se verifiquen con una cierta probabilidad dada.

Una posible formulación del problema es considerar que la decisión $\bar{x}$ queda restringida a la probabilidad

$$P\left\{\bar{\xi} \,/\, A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\xi)\right\} \geq \bar{\alpha}$$

donde $\bar{\alpha}$ es un vector columna cuyas componentes están en el intervalo [0,1] y los valores concretos que toman los elige el decisor.

Obviamente

$$P\left\{\bar{\xi} \,/\, A(\bar{\xi})\bar{x} \leq \bar{b}(\xi)\right\} =$$

$$= P\left\{\bar{\xi} \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\xi})x_j \leq b_i(\bar{\xi}) \,, i = 1, 2, \cdots, m\right\}$$

Generalmente el objetivo es optimizar la esperanza matemática de $\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}$.

Por lo tanto, el problema tiene la forma

$$\begin{array}{ll} min & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}\right] \\ s.a. & P\left\{\bar{\xi} \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\xi})x_j \le b_i(\bar{\xi})\,,\; i=1,2,\ldots,m\right\} \ge \alpha \\ & \bar{x} \in X \end{array} \quad (4.2)$$

Las restricciones probabilísticas pueden también considerarse como un conjunto de restricciones individuales, en lugar de como una única restricción conjunta. En este caso el problema tiene la forma

$$\begin{array}{ll} min & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}\right] \\ s.a. & P\left\{\bar{\xi} \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\xi})x_j \le b_i(\bar{\xi})\right\} \ge \alpha_i\,, \\ & \qquad i=1,2,\ldots,m \;\; ; \;\; \alpha_i \in [0,1] \\ & \bar{x} \in X \end{array} \quad (4.3)$$

Una de las cuestiones básicas es si los problemas (4.2) y (4.3) son o no convexos, es decir, bajo qué hipótesis los conjuntos factibles

$$X(\alpha) = \left\{\bar{x} \,/\, P\left\{\bar{\xi} \,/\, A(\bar{\xi})\bar{x} \le \bar{b}(\xi)\right\} \ge \bar{\alpha}\right\}$$

o

$$X_i(\alpha_i) = \left\{\bar{x} \,/\, P\left\{\bar{\xi} \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\xi})x_j \le b_i(\bar{\xi})\right\} \ge \alpha_i\right\}$$

son convexos, ya que se conocen contraejemplos sencillos que no lo son (véase, por ejemplo, Kall [K.2]).

En [M.5] Marti ha demostrado que, cuando la distribución de probabilidad conjunta de $\bar{\xi}$ es normal, Cauchy o discreta y para niveles apropiados de α_i (α_i normalmente debe exceder un cierto nivel α_i*, por ejemplo, para la distribución normal $\alpha_i{*} = \frac{1}{2}$), el conjunto $X_i(\alpha_i)$ es convexo.

Para restricciones conjuntas, en general, es más difícil encontrar tipos de distribuciones de probabilidad para las que $X(\alpha)$ es convexo, aunque sería de suma importancia, ya que de ello depende que estemos ante un problema de programación convexa o no convexa.

Si estamos en el caso en que se dan las condiciones necesarias y suficientes para que $X(\alpha)$ o $X_i(\alpha_i)$ sea un conjunto convexo, el programa correspondiente se puede resolver mediante algoritmos de programación convexa. Pero aún así, los cálculos son difíciles. La situación se complica notablemente cuando el programa a resolver es no convexo.

Distintos algoritmos para resolver este tipo de problemas ((4.2), (4.3)) se pueden encontrar en Vajda [V.1], Stancu-Minasian [S.12] y Kall y Wallace [K.6].

Otra posible formulación del problema (4.1) mediante esta aproximación, es considerar el denominado por Charnes y Cooper, en [C.3], *P-Modelo*, estudiado, también, por Bereanu, en [B.11], con el nombre de *Problema de Mínimo Riesgo*.

En este modelo el objetivo es maximizar la probabilidad de que la función objetivo $\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}$ no exceda a una cierta constante k dada. Es decir, el problema a resolver es

$$\begin{aligned} max \quad & P\{\bar{\xi} / \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \le k\} \\ s.a. \quad & P\left\{\bar{\xi} / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\xi})x_j \le b_j(\bar{\xi}), i = 1, \cdots, m\right\} \ge \alpha \qquad (4.4) \\ & \bar{x} \in X \end{aligned}$$

donde k es un parámetro elegido por el decisor.

Este problema ha sido estudiado, entre otros, por Vajda [V.1].

4.2.3.2.- Programas Estocásticos con Recursos.

Consideremos, ahora, el problema de *Programación Lineal Estocástica* en la forma estándar

$$\begin{array}{ll} \text{"mín"} & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} = \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array} \tag{4.5}$$

Supongamos que:

- primero se toma una decisión $\bar{x}$ sin conocer el valor de las variables aleatorias.
- después acaecen los eventos aleatorios y se conocen sus valores. La realización de $\bar{\xi}$ puede, posiblemente, implicar la violación de las restricciones del problema (4.5). Por hipótesis se impone una penalización ya que, compensar las restricciones violadas con el fin de que el programa sea factible, supone unos ciertos "costes".
- por último, se utiliza una variable de desviación $\bar{y}$ para representar las penalizaciones impuestas.

El objetivo, generalmente, es minimizar el valor esperado de la suma de $\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}$ y el mínimo de las penalizaciones impuestas. Se tiene así el programa

$$\begin{array}{ll} mín & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + \underset{\bar{y}}{mín.}\ \bar{q}'\bar{y}\right] \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} + W(\bar{\xi})\bar{y} = \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \\ & \bar{y} \geq \bar{0} \end{array} \tag{4.6}$$

donde

$\bar{q}$ e $\bar{y}$ son vectores de dimensión m, $\bar{y}$ representa las penalizaciones y $\bar{q}$ los costes por unidad de penalización.

W es una matriz de dimensión $m \times n$, denominada *matriz de recursos.*

Este modelo se interpreta del siguiente modo: se determina un vector $\bar{x} \geq \bar{0}$ (denominado "aquí y ahora") antes de conocer una realización de $\bar{\xi}$; cuando se conoce el valor de $\bar{\xi}$, se determina un "recurso" $\bar{y}$ mediante el programa

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{y}} & \bar{q}'\,\bar{y} \\ s.a. & W(\bar{\xi})\bar{y} = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \end{array} \qquad (4.7)$$

que recibe el nombre de *Programa de Segunda Etapa,* (en el que $\bar{x}$ y $\bar{\xi}$ tienen valores dados).

Así el problema inicial se transforma en un programa *Equivalente Determinista* que suele tener la forma

$$\begin{array}{ll} \min & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (4.8)$$

donde

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}} \ \left\{\bar{q}'\,\bar{y} \,/\, W(\bar{\xi})\bar{y} = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \,, \bar{y} \geq \bar{0}\right\}$$

Cuando $W(\bar{\xi})$ es una matriz de valores deterministas, es decir cuando $W(\bar{\xi}) = W$, W se denomina *matriz de recursos fijos*, y el problema recibe el nombre de *Programa Lineal Estocástico con Recursos Fijos.*

Si la matriz de recursos fijos, W, satisface que

$$\left\{\bar{z} \,/\, \bar{z} = W\,\bar{y} \,, \bar{y} \geq \bar{0}\right\} = \Re^m$$

el programa se denomina con *Recursos Fijos Completos.*

En este caso, para cualquier decisión $\bar{x} \geq \bar{0}$ y para cualquier realización de $\bar{\xi}$ dadas, el programa de segunda etapa

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}} \quad \{\bar{q}'\,\bar{y} \,/\, W(\bar{\xi})\bar{y} = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \,,\, \bar{y} \geq \bar{0}\}$$

es siempre factible.

Un caso particular del *Programa con Recursos Fijos Completos* es el denominado *Problema con Recursos Simples* que se obtiene cuando en la matriz W, después de haber reordenando sus filas y sus columnas, se puede hacer una partición de la forma $W = (I,-I)$, donde I es la matriz identidad.
Si de un modo análogo se dividen los vectores $\bar{q}$ e $\bar{y}$ en $(\bar{q}^-, \bar{q}^+)$ y $(\bar{y}^-, \bar{y}^+)$, respectivamente, el programa de segunda etapa tiene la forma

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\bar{y}^-} \quad \{(\bar{q}^+)'\bar{y}^+ + (\bar{q}^-)'\bar{y}^- \,/\, \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \quad , \quad \bar{y}^+ \geq 0 \,,\, \bar{y}^- \geq 0\},$$

con lo que el problema completo *con Recursos Simples* tiene la forma

$$\begin{array}{ll} \min & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (4.9)$$

donde

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\bar{y}^-} \quad \{(\bar{q}^+)'\bar{y}^+ + (\bar{q}^-)'\bar{y}^- \,/\, \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \quad , \quad \bar{y}^+ \geq 0 \,,\, \bar{y}^- \geq 0\}$$

Los programas estocásticos con recursos se denominan, también, *Programas Estocásticos en Dos Etapas* indicando que en la primera etapa, antes de conocer el valor de $\bar{\xi}$, se toma una decisión $\bar{x}$ y en la segunda etapa, después de observar $\bar{\xi}$, se toma una decisión $\bar{y}$, de acuerdo a (4.7), para corregir la posible no factibilidad provocada por la violación de las restricciones al observar la realización de $\bar{\xi}$.

Si X es un conjunto convexo, el problema en dos etapas (4.8) es convexo, ya que se verifican las dos proposiciones siguientes:

Proposición 4.1. Para cada $\bar{\xi} \in \Xi$ fijo, la función $Q(\bullet, \bar{\xi})$es convexa.

(Para la demostración véase, por ejemplo, la proposición (10) de Wets [W.8]).

Proposición 4.2. El programa de primera fase

$$\begin{array}{ll} min & E\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

es convexo.

(Para la demostración véase, por ejemplo, la proposición 1.1 de Kall y Wallace [K.6]).

También se ha demostrado que este tipo de problemas verifica otras propiedades deseables desde el punto de vista de la optimización, tales como la continuidad y la diferenciabilidad (véase, por ejemplo, Kall [K.2] o Vajda [V.1]). Consecuentemente, se puede resolver mediante los algoritmos de *Programación Convexa*.

Las dificultades de cálculo que lleva consigo la ejecución de dichos algoritmos se unen a las dificultades de resolución que comporta el problema (4.8) en sí mismo. Frecuentemente es difícil determinar la forma explícita de $E[Q(\bar{x},\bar{\xi})]$, que depende, lógicamente, de la distribución de probabilidad de $\bar{\xi}$.

Incluso cuando se puede determinar la forma de la función $E[Q(\bar{x},\bar{\xi})]$ y se puede calcular el valor de $\bar{x} \in X$ que minimiza $E[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + Q(\bar{x},\bar{\xi})]$, puede ser muy difícil, siendo frecuentemente prohibitivo, calcular el valor exacto de $E[Q(\bar{x},\bar{\xi})]$, ya que se requieren métodos de integración múltiple.

Este problema ha sido ampliamente estudiado, entre otros, por Beale [B.3], Dantzig [D.2] y [D.3], Kall [K.2], Wets [W.8], Vajda [V.1], Sengupta [S.3], Ziemba [Z.3], Dantzig y Madansky [D.3] y Elmagharaby [E.4].

El modelo *Lineal con Recursos Simples* cuando todos los coeficientes son deterministas salvo el vector $\bar{b}(\xi)$ que es aleatorio (al estar la aleatoriedad únicamente en este vector, podemos escribir $b(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$), tiene la forma

$$\begin{array}{ll} min & E[\bar{c}'\bar{x} + Q(\bar{x},\bar{\xi})] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (4.10)$$

donde

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\bar{y}^-} \left\{ (\bar{q}^+)'\bar{y}^+ + (\bar{q}^-)'\bar{y}^- \;/\; \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi} - A\bar{x} \;\;,\;\; \bar{y}^+ \geq 0, \bar{y}^- \geq 0 \right\}$$

Este caso ha sido ampliamente estudiado, entre otros, por Beale [B.3] y Wets [W.8] y [W.9]. Sobre él volveremos más adelante ya que el problema de *Programación Estocástica por Metas* que estudiamos se puede considerar, como veremos, como un caso particular de un problema de *Programación Lineal con Recursos Simples* de este tipo.

4.3.- Método por aproximaciones mediante acotaciones.

Debido a las dificultades de cálculo para resolver el problema (4.8), surge la idea de proponer algoritmos de resolución de dichos problemas por aproximaciones mediante acotaciones, es decir, determinando un límite inferior I y un límite superior S, de manera que se verifique que función objetivo del problema (4.8) pertenezca al intervalo

$$[I, S]$$

Lógicamente, como en cualquier método de aproximación, conviene asegurar que el error de la aproximación es aceptable, es decir, que la diferencia $S-I$ permanece dentro de un límite de tolerancia aceptado por el decisor.

Para clarificar la conveniencia de utilizar soluciones por aproximación mediante acotaciones en la resolución de problemas de programación estocástica escalar, Kall y Wallace [K.6] sugieren el siguiente ejemplo: Supongamos que una empresa se enfrenta a un problema de decisión con un gran número de parámetros aleatorios relevantes para el problema. La decisión en sí misma se tiene que tomar pasados unos años, y, en ese momento, se conocerá con exactitud el valor de dichos parámetros. Pero, por cuestiones de planificación, la empresa necesita en el momento actual conocer los beneficios esperados en los próximos años. Dado el gran número de parámetros aleatorios, puede no ser posible calcular el valor esperado exacto, pero, utilizando técnicas de acotación, puede ser posible e incluso relativamente fácil, identificar un intervalo que contenga dicho valor esperado.

Por tanto, se desea hallar el valor esperado de la denominada solución "espera y ve", ya que ésta es la solución óptima que se elegiría si se conociera con anterioridad el valor que tendrán los parámetros aleatorios.

Kall y Wallace [K.6] proponen, para la resolución de problemas con recursos, un procedimiento de solución por aproximaciones mediante acotaciones, que ellos denominan "refinamiento de la solución "espera y ve"".

Este método está diseñado para variables aleatorias acotadas, es decir para el caso en que la variable aleatoria $\bar{\xi}$ esté definida en un intervalo $\Xi=[\bar{\alpha},\bar{\beta}]$. Pero, en el caso de que dicha variable no fuese acotada, se podría aplicar el método tomando un intervalo que contenga una gran parte de la distribución de probabilidad de $\bar{\xi}$.

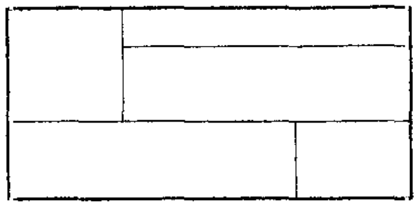
El método consiste en los siguientes pasos:

1. Determinar un límite inferior $I(\bar{\xi})$ y un límite superior $S(\bar{\xi})$ de la función $\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}+Q(\bar{x},\bar{\xi})$ de manera que se verifique que, para un $\bar{x}=\bar{x}^*$ fijo:

$$I(\bar{\xi})\leq E[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x}^*+Q(\bar{x}^*,\bar{\xi})]\leq S(\bar{\xi})$$

2. Se calcula la diferencia $S(\bar{\xi})-I(\bar{\xi})$ en el punto $\bar{x}=\bar{x}^*$.
3. Si dicha diferencia está dentro de un límite de tolerancia aceptado por el decisor, se termina el problema y la solución del mismo es $\bar{x}=\bar{x}^*$.
4. En caso contrario se procede del siguiente modo:
   - se efectúa una partición en el soporte de $\bar{\xi}$, $\Xi=[\bar{\alpha},\bar{\beta}]$
   - se realiza el proceso de acotación inferior y superior de la función objetivo en cada una de las celdas obtenidas en la partición.

Es decir, si por ejemplo la variable aleatoria $\bar{\xi}$ es bidimensional, la partición de Ξ podría ser de la forma



obteniéndose cinco celdas.

- se obtienen un límite inferior global $I_1(\bar{\xi})$ sumando los cinco límites inferiores de cada una de las celdas y ponderando los sumandos con la probabilidad de estar en la celda correspondiente. De un modo análogo se obtendrá el limite superior global, $S_1(\bar{\xi})$.

5. De nuevo se calcula la diferencia $S_1(\bar{\xi})-I_1(\bar{\xi})$, en un punto fijo $\bar{x}=\bar{x}^{**}$.

6. Si el valor obtenido en la diferencia anterior está dentro del límite de tolerancia aceptado por el decisor, se termina el problema y se acepta como solución $\bar{x}=\bar{x}^{**}$. En caso contrario se pasa al paso 4 del proceso, repitiéndolo hasta obtener una solución satisfactoria para el decisor.

Procediendo así la convergencia está garantizada (véase Kall y Stoyan [K.5])

Sin embargo, el método presenta dificultades:

a) No resulta siempre fácil decidir y determinar qué límites inferior y / o superior son convenientes en cada problema. Cuando el problema es convexo se puede utilizar la desigualdad de Jensen (véase [J.3]) para obtener un límite inferior. (Si la función objetivo del problema fuese cóncava, se podría utilizar la misma desigualdad para obtener un límite superior). Esto no tiene mayores complicaciones.

Las dificultades surgen en la elección y, sobre todo en la determinación, del límite superior en el caso de programas convexos (o del límite inferior en el caso de problemas cóncavos). El límite más frecuentemente utilizado es el Edmundson-Madansky, pero su determinación es complicada, complicación que aumenta con la dimensión de la variable aleatoria, resultando prácticamente inviable cuando dicha dimensión es mayor o igual que 10. (Para más detalles sobre este límite y las dificultades para su determinación, véase Kall y Wallace, [K.6]).

b) Otra dificultad, no totalmente resuelta, es decidir los soportes de las variables aleatorias en los que es conveniente realizar las particiones para mejorar la solución. Esta decisión es importante porque puede ocurrir que, si no se eligen las celdas adecuadas, se multiplique el trabajo obteniéndose, prácticamente, el mismo error.

Parece natural elegir aquellas celdas en las que el error obtenido con la solución aproximada sea grande.

Pero, incluso en el caso en que la decisión anterior sea adecuada, cabe preguntarse en qué punto concreto de la celda conviene realizar la partición. Kall y Wallace, [K.6] proponen realizar las particiones en el punto medio del correspondiente intervalo, pero no dan más razón para hacerlo así que la de su propia experiencia.

CAPÍTULO 5

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO

En este capítulo introducimos brevemente algunos conceptos de *Programación Estocástica Multiobjetivo.*

5.1.- Planteamiento del problema.

Sea el problema determinista de Programación Multiobjetivo del tipo

$$\begin{array}{ll} optimizar & f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(\bar{x})\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde, como siempre,

$f_i(\bar{x})$ es la i-ésima *función objetivo*, $f_i : X \to \Re$, $i = 1, \cdots, p$.

$X \subset \Re^n$ es el conjunto de soluciones posibles o *conjunto factible*, que normalmente se define a partir de restricciones matemáticas.

$\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ es el vector de variables de decisión.

Supongamos que el problema anterior es lineal, es decir, las funciones objetivo son funciones lineales ($f(\bar{x}) = A\bar{x}$, donde A es una *matriz de orden* $p \times n$*) y el conjunto factible* X *está definido mediante* restricciones lineales.

Cuando algunos (o todos) de los coeficientes de las funciones objetivo y/o de las restricciones son variables aleatorias $\bar{\xi}$ definidas en el espacio probabilístico (Ξ, F, P), (cuya distribución de probabilidad conjunta es conocida e independiente de la variable de decisión $\bar{x}$), estamos ante un problema de *Programación Estocástica Lineal Multiobjetivo* que tiene la forma

$$\begin{array}{ll} "opt" & f(\bar{x},\bar{\xi}) = \left(f_1(\bar{x},\bar{\xi}), \cdots f_p(\bar{x},\bar{\xi})\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X(\bar{\xi}) \end{array} \qquad (5.1)$$

Como ocurría en la Programación Estocástica Escalar, en este tipo de problemas tampoco está claramente definido el concepto de óptimo, por lo que es necesario especificar nuevos conceptos de solución apropiados para estos problemas de *Programación Estocástica Multiobjetivo.*

5.2.- Solución eficiente.

Hay varios conceptos de *solución eficiente* para Programación Estocástica Multiobjetivo análogos al concepto de *solución eficiente* para Programación Determinista Multiobjetivo. Una de las nociones más extendidas es la siguiente:

Definición 5.1. El vector $\bar{x}^* = (x_1{}^*, \cdots, x_n{}^*)$ de variables de decisión se dice que es una *solución eficiente con probabilidad* 1 para el programa (5.1), cuando no existe ningún otro vector $\bar{x} \in X$, casi seguramente tan "bueno" como $\bar{x}^*$ con respecto a las funciones objetivo $f(\bar{x},\bar{\xi}) = \left(f_1(\bar{x},\bar{\xi}), \cdots f_p(\bar{x},\bar{\xi})\right)$ e incluso "mejor" que $\bar{x}^*$ con una probabilidad positiva, es decir, tal que

$$P\left\{\bar{\xi} \,/\, f(\bar{x}^*,\bar{\xi}) \leq f(\bar{x},\bar{\xi})\right\} = 1$$

y

$$P\left\{\bar{\xi} \,/\, f(\bar{x}^*,\bar{\xi}) < f(\bar{x},\bar{\xi})\right\} > 0$$

Una dificultad práctica de este concepto de *solución eficiente* es que resulta sumamente complicado determinar el conjunto *de puntos eficientes con probabilidad* 1 o, al menos, un subconjunto razonable de este conjunto. Se han buscado definiciones alternativas, pero todas ellas presentan complicaciones a la hora de resolver problemas concretos. (Para más detalles véase Stancu-Minasian [S.12])

5.3.- Procedimientos de solución.

Para resolver problemas de *Programación Estocástica Lineal Multiobjetivo* se suelen seguir dos vías alternativas:

- o bien se reemplaza el problema de *Programación Estocástica Multiobjetivo* por un Equivalente Determinista Multiobjetivo de un modo análogo al utilizado en Programación Estocástica Escalar, y después se utilizan los métodos vistos en el capítulo 2 para resolver problemas de Programación Multiobjetivo.
- o bien se reduce el *Programa Estocástico Multiobjetivo* a un problema de Programación Estocástica Escalar mediante algunas técnicas análogas a las utilizadas en Programación Determinista Multiobjetivo (función de síntesis, métricas, etc), y, a continuación, se resuelve el problema de Programación Estocástica Escalar utilizando alguna de las aproximaciones vistas en el capítulo 4.

Es obvio que las dificultades existentes tanto en la resolución de problemas de Programación Determinista Multiobjetivo como en la resolución de problemas de Programación Estocástica Escalar, se multiplican considerablemente a la hora de resolver problemas de *Programación Estocástica Multiobjetivo*, aún en el caso de que el programa sea lineal, que es la situación que nosotros consideraremos.

A modo de ejemplo y muy brevemente, vamos a ver un modo de resolver un *Programa Lineal Estocástico Multiobjetivo* por la segunda vía. Supongamos que el problema que queremos resolver es de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{"min"} & f(\bar{x},\bar{\xi}) = \left(f_1(\bar{x},\bar{\xi}),\cdots f_p(\bar{x},\bar{\xi})\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X(\bar{\xi}) \end{array} \tag{5.2}$$

Para un $\bar{\xi} \in \Xi$ dado el problema anterior es un problema determinista de Programación Lineal Multiobjetivo, por lo tanto, de un modo análogo al Método de la Ponderaciones visto en el apartado 2.3.1.1 del capítulo 2, se puede obtener una única función objetivo, síntesis de las p funciones objetivos del programa (5.2), mediante la suma ponderada de dichas funciones, obteniéndose el programa

$$\begin{array}{ll} min & w_1 f_1(\bar{x},\bar{\xi}) + \cdots + w_p f_p(\bar{x},\bar{\xi}) \\ s.a. & \bar{x} \in X(\bar{\xi}) \\ & \bar{w} > \bar{0} \end{array} \qquad (5.3)$$

donde $\bar{w} = (w_1, \cdots, w_p)$.

(Las ponderaciones utilizadas deben ser adecuadas, es decir, tales que la suma ponderada esté expresada en términos porcentuales con el fin de evitar problemas de homogeneidad y de dimensionalidad en los p objetivos iniciales).

Se tiene así un Programa Estocástico Escalar, (5.3), que se resuelve mediante cualquiera de los procedimientos vistos en el capítulo anterior.

También se han hecho algunas extensiones de los Métodos Interactivos para resolver problemas deterministas de Programación Multiobjetivo al caso estocástico. Entre ellas cabe destacar el PROTRADE (véase Goicoechea, Hansen y Duckstein [G.6]) y el STRANGE (véase Teghem, Dufrane, Thauvoye y Kunsch [T.1]). Ambos son generalizaciones del Método Interactivo Programación Multiobjetivo determinista STEM al caso estocástico.

En los capítulos que siguen planteamos y estudiamos con detalle un problema de ***Programación Estocástica por Metas***, que, obviamente es un problema de Programación Estocástica Multiobjetivo.

- En el capítulo 6 veremos el estado de la cuestión, es decir, haremos un resumen de los trabajos publicados sobre el tema.
- En el capítulo 7 planteamos resolver el problema de un modo análogo al modelo propuesto en el apartado B del capítulo 2 para Programación por Metas Determinista. Discutimos distintos procedimientos de solución para el problema de Programación Estocástica Escalar resultante. Comprobamos que la solución que proponemos es compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana.

CAPÍTULO 6

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA POR METAS. ESTADO DE LA CUESTIÓN.

La extensión estocástica de la Programación por Metas determinista es un tema, en general, poco estudiado. Destacamos, únicamente, cinco trabajos importantes publicados sobre dicho tema.

El primero se debe a Charnes y Cooper [C.3], en 1963. El segundo lo publicó Contini, en 1968, [C.17]. De los otros tres, dos son de Stancu-Minasian, uno publicado en 1984, [S.12], y el otro en 1990, [S.13], y el quinto se debe a Stancu-Minasian y Tigan, en 1988, [S.14].

Los comentaremos en este mismo orden.

6.1. En 1963 Charnes y Cooper plantean un problema de Programación por Metas en ambiente de riesgo y proponen resolverlo mediante el *P-Modelo* de Restricciones Probabilísticas.
Suponen aleatoriedad en los coeficientes de los objetivos iniciales y en la parte derecha de las restricciones, es decir, parten de un problema de la forma:

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}) = A(\bar{\xi})\bar{x} = \bar{m} \\ s.a. \quad & W\bar{x} \leq b(\bar{\xi}) \qquad\qquad (6.1) \\ & \bar{x} \in X \end{aligned}$$

donde, como siempre,

$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x}))'$ es el vector constituido por los p *objetivos* del problema, cuya matriz de coeficientes, A, es aleatoria, es decir, $A = A(\bar{\xi})$

$\bar{m} = (m_1,\cdots,m_p)'$ es el vector de los p *niveles de aspiración* asociados a los p *objetivos*

$\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ es el conjunto de *variables de decisión*

y el *conjunto factible* es X junto a las restricciones $W\bar{x} \leq \bar{b}(\bar{\xi})$ en las que los coeficientes de la matriz W son números fijos, conocidos, y las componentes del vector $\bar{b}$ son aleatorias, $\bar{b} = \bar{b}(\bar{\xi})$.

Charnes y Cooper proponen resolver este problema de Programación Estocástica mediante Restricciones Probabilísticas, siendo el objetivo que sugieren maximizar la probabilidad de alcanzar los niveles de aspiración, es decir

$$max \quad P\{\bar{\xi} \;/\; A(\bar{\xi})\bar{x} \geq \bar{m}\}$$

Por lo tanto, el *P-Modelo* que proponen para resolver el problema (6.1) es:

$$\begin{array}{ll} max & P\{\bar{\xi} \;/\; A(\bar{\xi})\bar{x} \geq \bar{m}\} \\ s.a. & P\{\bar{\xi} \;/\; W\bar{x} \leq b(\bar{\xi})\} \geq \alpha \\ & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (6.2)$$

que, al ser un problema de Restricciones Probabilísticas conlleva las mismas dificultades de resolución que dichos problemas.

6.2. Contini, en [C.17], estudia más ampliamente la extensión estocástica de la Programación por Metas Determinista.

Supone que existe un "factor de perturbación" en la relación entre los objetivos y los niveles de aspiración y, bajo ciertas hipótesis y condiciones que vemos a continuación, llega a que el problema planteado es equivalente a un problema de programación cuadrática.

Parte de un problema determinista de *Programación Determinista por Metas* que, en su formulación inicial, es

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}) = \tilde{\bar{m}} \\ s.a.\ & \bar{x} \in X \end{aligned} \qquad (6.3)$$

donde, de nuevo como siempre,

$f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(\bar{x})\right)'$ es el vector constituido por los p *objetivos* del problema

$\tilde{\bar{m}} = \left(\tilde{m}_1, \cdots, \tilde{m}_p\right)'$ es el vector de los p *niveles de aspiración* asociados a los p *objetivos*

$\bar{x} = \left(x_1, \cdots, x_n\right)$ es el conjunto de *variables de decisión*

X es el *conjunto factible.*

Si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\cdots,p \\ j=1,\cdots,n}}$ es la matriz de los coeficientes de las funciones objetivo del problema (6.3), dicho problema se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} & f_1(\bar{x}) = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = \tilde{m}_1 \\ & f_2(\bar{x}) = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = \tilde{m}_2 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & f_p(\bar{x}) = a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \cdots + a_{pn}\, x_n = \tilde{m}_p \\ & s.a.\ \ \bar{x} \in X \end{aligned}$$

Contini considera que una extensión natural del modelo de *Programación por Metas* consiste en relajar la relación fija entre los niveles de aspiración $\tilde{\bar{m}}$ y los objetivos $f(\bar{x})$, considerando entre ambos una relación estocástica

$$f(\bar{x}) + \bar{\xi} = \bar{m} \qquad (6.4)$$

o, equivalentemente,

$$A\,\bar{x}+\bar{\xi}=\bar{m} \qquad (6.5)$$

donde $\bar{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_p)'$ es un vector de variables aleatorias.

Y, dado que en los métodos de resolución de *Programación Determinista por Metas* subyace la idea de minimizar las diferencias o discrepancias que se den entre los niveles de aspiración concretos propuestos, $\tilde{m}_i$, $i=1,\cdots,p$ y lo realmente conseguido en el correspondiente objetivo $f_i(\bar{x})$, $i=1,\cdots,p$, Contini sugiere que un procedimiento adecuado para resolver un problema de *Programación Estocástica por Metas* es reinterpretar la relación $f(\bar{x})=A\,\bar{x}=\tilde{\bar{m}}$ del siguiente modo: sea $\tilde{M}$ una región apropiada de $\Re^p$, $\tilde{M}\subset\Re^p$, que contenga a $\tilde{\bar{m}}$, es decir, tal que $\tilde{\bar{m}}\in\tilde{M}$, entonces, el problema (6.5) se resuelve determinando un vector de variables de decisión, $\bar{x}=\bar{x}^*$, tal que la probabilidad de que el vector $A\bar{x}^*+\bar{\xi}$ pertenezca a $\tilde{M}$ sea máxima.

Esto es, se trata de resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\bar{x}} & P\left\{\left(A\bar{x}+\bar{\xi}\right)\in\tilde{M}\right\} \\ s.a. & \bar{x}\in X \end{array} \qquad (6.6)$$

Contini estudia el problema bajo las siguientes hipótesis acerca de la relación (6.5), $A\,\bar{x}+\bar{\xi}=\bar{m}$:

- Los coeficientes de la matriz A, a_{ij}, son números fijos bien determinados.
- El rango de la matriz A es, al menos, p, es decir, $rg.A\geq p$.
- $\bar{\xi}$ es un vector de p variables aleatorias cuya distribución de probabilidad conjunta es Normal multivariante, con media el vector $\bar{0}$ y matriz de covarianzas Σ.

Como consecuencia, $\overline{m}$ también tiene una distribución de probabilidad Normal, con media el vector

$$\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n\right)$$

y matriz de covarianzas Σ, y su función de densidad resulta ser

$$f(m_1, \cdots, m_p) = (2\pi)^{-p/2} \left|\Sigma\right|^{-1/2} e^{-Q/2}$$

donde

$$Q = \left(\overline{m} - A\overline{x}\right)' \Sigma^{-1} \left(\overline{m} - A\overline{x}\right) \qquad (6.7)$$

Por la teoría estadística (véase, por ejemplo, Cramer [C.19], páginas 357-367) se sabe que si $\overline{m}$ tiene una distribución de probabilidad Normal y Σ es no singular, entonces la forma cuadrática (6.7) tiene una distribución de probabilidad Chi-cuadrado con p grados de libertad, χ^2_p.

La hipótesis de normalidad sugiere que la región que se construye, $\widetilde{M}$, para resolver el problema (6.5), por lo general será un elipsoide de $\Re^p$, centrado en $\widetilde{\overline{m}}$ de la forma

$$\widetilde{M} = \left\{\overline{m} \in \Re^p \,/\, \widetilde{Q} = \left(\overline{m} - \widetilde{\overline{m}}\right)' \Sigma^{-1} \left(\overline{m} - \widetilde{\overline{m}}\right) \leq c^2\right\} \qquad (6.8)$$

donde c^2 es un escalar adecuado. (Véase Cramer [C.19], páginas 325-327, 344-346)

Contini demuestra el siguiente resultado:

Proposición 6.1. El programa (6.6)

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\overline{x}} & P\left\{\left(A\overline{x} + \overline{\xi}\right) \in \widetilde{M}\right\} \\ s.a. & \overline{x} \in X \end{array}$$

es equivalente al programa

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{x}} & (\tilde{\bar{m}} - A\bar{x})'\Sigma^{-1}(\tilde{\bar{m}} - A\bar{x}) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (6.9)$$

En efecto, el objetivo de (6.6) es equivalente al objetivo consistente en maximizar la función de máxima verosimilitud del evento $\tilde{\bar{m}} = A\bar{x} + \bar{\xi}$, que es

$$(2\pi)^{-p/2}\,|\Sigma|^{-1/2}\,e^{-\Delta/2}$$

siendo

$$\Delta = (\tilde{\bar{m}} - A\bar{x})'\Sigma^{-1}(\tilde{\bar{m}} - A\bar{x}) \qquad (6.10)$$

y este objetivo es equivalente a maximizar su logaritmo (denominado, habitualmente, segunda función de verosimilitud), $max(-\Delta)$, que, a su vez, es equivalente a minimizar Δ, $min\,\Delta$.

Efectuando algunas operaciones en la función objetivo del problema (6.9), se tiene

$$\begin{aligned} \Delta &= (\tilde{\bar{m}} - A\bar{x})'\Sigma^{-1}(\tilde{\bar{m}} - A\bar{x}) = \\ &= \tilde{\bar{m}}'\Sigma^{-1}\tilde{\bar{m}} - \tilde{\bar{m}}'\Sigma^{-1}A\bar{x} - \bar{x}'A'\Sigma^{-1}\tilde{\bar{m}} + \bar{x}'A'\Sigma^{-1}A\bar{x} = \\ &= \tilde{\bar{m}}'\Sigma^{-1}\tilde{\bar{m}} + \bar{x}'A'\Sigma^{-1}A\bar{x} - 2\tilde{\bar{m}}'\Sigma^{-1}A\bar{x} \end{aligned}$$

y haciendo

$$k = \tilde{\bar{m}}'\Sigma^{-1}\tilde{\bar{m}}, \quad B = A'\Sigma^{-1}A \quad \text{y} \quad r = -A'\Sigma^{-1}\tilde{\bar{m}}$$

Se puede escribir que

$$\Delta = k + \bar{x}'B\bar{x} + 2r\bar{x}$$

Y, consecuentemente, Contini establece el siguiente teorema:

Teorema 6.1. La solución óptima del problema (6.6) se obtiene mediante la resolución del programa

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{x}} \quad k+\bar{x}'B\bar{x}+2r\bar{x} \\ &s.a. \quad \bar{x}\in X \end{aligned} \tag{6.11}$$

Si las restricciones del programa (6.11) son lineales, dicho programa es un problema de programación cuadrática y, por lo tanto, se puede resolver por cualquiera de los algoritmos existentes en la literatura del tema.

En el caso de que las variables aleatorias ξ_i, $i=1,\cdots,p$ sean estocásticamente independientes, como la matriz de covarianzas de $\bar{\xi}$, Σ, es una matriz diagonal

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}$$

la matriz Σ^{-1} también es una matriz diagonal

$$\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}$$

con lo que la segunda función de verosimilitud de $\tilde{\bar{m}}=A\bar{x}+\bar{\xi}$ cambiada de signo, Δ, dada en la expresión (6.10)

$$\Delta=\left(\tilde{\bar{m}}-A\bar{x}\right)'\Sigma^{-1}\left(\tilde{\bar{m}}-A\bar{x}\right)$$

tiene la forma

$$\Delta = \sum_{i=1}^{p}\left[\left(1/\sigma_{ii}^{2}\right)\left(\tilde{m}_i - A_i\bar{x}\right)^2\right]$$

y el problema (6.11) se transforma en el problema

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{x}} & \sum_{i=1}^{p}\left[\left(1/\sigma_{ii}^{2}\right)\left(\tilde{m}_i - A_i\bar{x}\right)^2\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (6.12)$$

que se puede interpretar como un problema de programación por metas determinista, en el que el criterio de optimización es la minimización de la norma L_2, y cada meta está ponderada por la recíproca de su varianza. Por lo tanto, si las variables aleatorias ξ_i , $i = 1,\cdots,p$ son estocásticamente independientes, la solución del modelo estocástico (6.6) es análoga a la solución del modelo determinista (6.12).

Contini, en su artículo, también resuelve el problema (6.11) en el caso de que no tuviese restricciones.

Pasamos a continuación a resumir los trabajos publicados por Stancu-Minasian.

6.3.- Stancu-Minasian, en su libro sobre *Programación Estocástica Multiobjetivo*, [S.12], dedica un epígrafe del capítulo tercero al tema "Programación por Metas. El caso Estocástico" (páginas 141-152). En dicho epígrafe, después de resumir el artículo de Contini [C.17], amplía el estudio de *Programación Estocástica por Metas* a las siguientes situaciones:

6.3.1.- Sea el problema

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}) = A\bar{x} = \tilde{\tilde{m}} \\ & s.a. \quad \bar{x} \in X \end{aligned}$$

en el que los coeficientes $a_{ij}\ , i=1,\cdots,p\ ,\ j=1,\cdots,n$ de la matriz A son variables aleatorias.

Bajo ciertas hipótesis y condiciones que veremos se llega a que este problema es equivalente a uno de programación cuadrática.

Para cada $\bar{x} \in X$ existirán unas diferencias o desviaciones entre $A\bar{x}$ y $\tilde{\tilde{m}}$, que se pueden denotar por $\bar{y}^+(\bar{x})$ y $\bar{y}^-(\bar{x})$.

El criterio de optimización elegido por Stancu-Minasian en la minimización del valor medio de la norma $\| \quad \|_p$ del vector $\tilde{\tilde{m}} - A\bar{x}$, con lo que el problema a resolver es

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{x}} \quad E\left[\left\|\tilde{\tilde{m}} - A\bar{x}\right\|_p\right] \\ & s.a. \quad \bar{x} \in X \end{aligned} \tag{6.13}$$

Si $p=1$ el modelo es

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{x}} \quad E\left[\sum_{i=1}^{p} \left(y_i^+(\bar{x}) + y_i^-(\bar{x})\right)\right] \\ & s.a. \quad \bar{x} \in X \\ & \qquad \left.\begin{aligned} & f_i(\bar{x}) - y_i^+ + y_i^- = \tilde{m}_i \\ & y_i^+, y_i^- \geq 0 \end{aligned}\right\} \ i = 1,\cdots,p \end{aligned} \tag{6.14}$$

Si $p=2$ el modelo es

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{x}} \quad E\left[\sum_{i=1}^{p} \left|\tilde{m}_i - A_i\,\bar{x}\right|^2\right] \\ & s.a. \quad \bar{x} \in X \end{aligned} \tag{6.15}$$

donde A_i es la i-ésima fila de la matriz A.

En el caso de que las variables aleatorias $a_{ij}, i=1,\cdots,p$, $j=1,\cdots,n$ sean estocásticamente independientes, con media $E[a_{ij}]$ y varianza σ_{ij}^2, se comprueba fácilmente (véase Stancu-Minasian [S.12], páginas 146-147) que el problema (6.15) es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{\bar{x}} & \left[\sum_{i=1}^{p}\left(\tilde{m}_i - \sum_{j=1}^{n} E[a_{ij}]\, x_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\sigma_{ij}\right)^2 x_j^2\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X\end{array} \qquad (6.16)$$

que, en el caso de que las restricciones sean lineales, es un problema de programación cuadrática determinista que se puede resolver por cualquiera de los algoritmos existentes.

6.3.2.- Como una segunda situación, Stancu-Minasian, considera el mismo problema planteado por Contini [C.17] en una versión diferente y resuelve el Programa Estocástico Escalar resultante mediante Restricciones Probabilísticas.

Supone, como en la situación anterior, que los coeficientes a_{ij}, $i=1,\cdots,p$, $j=1,\cdots,n$ de la matriz A son variables aleatorias y elige la región $\widetilde{M}$, no como el elipsoide centrado en $\bar{\tilde{m}}$ propuesto por Contini, sino tal que

$$\widetilde{M} = \left\{\bar{m} \in \Re^p \,/\, \varepsilon_{1i} \le m_i \le \varepsilon_{2i} \;, i=1,\cdots,p\right\}$$

Supone conocidos, además, dos umbrales que limitan la probabilidad de que $\bar{m}(\bar{x}) \in \widetilde{M}$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = (\alpha_{1i}) \\ \alpha_2 = (\alpha_{2i})\end{array}\right\} \quad i=1,\cdots,p$$

El criterio de optimización elegido para este problema es determinar la región $\widetilde{M}$ lo más pequeña posible, con la condición de que se verifique que la probabilidad de que $\bar{m}(\bar{x}) \in \widetilde{M}$ esté dentro de los límites dados. Así el problema a resolver es el programa con Restricciones Probabilísticas

$$\begin{array}{ll} min & \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ s.a. & \left.\begin{array}{l} P\{A_i\,\bar{x} \geq m_i - \varepsilon_{1i}\} \geq \alpha_{1i} \\ P\{A_i\,\bar{x} \leq m_i + \varepsilon_{2i}\} \geq \alpha_{2i} \\ \varepsilon_{1i}\ ,\ \varepsilon_{2i} \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \end{array} \tag{6.17}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{ll} min & \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ s.a. & \left.\begin{array}{l} P\{m_i - A_i\,\bar{x} \leq \varepsilon_{1i}\} \geq \alpha_{1i} \\ P\{A_i\,\bar{x} - m_i \leq \varepsilon_{2i}\} \geq \alpha_{2i} \\ \varepsilon_{1i}\ ,\ \varepsilon_{2i} \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \end{array} \tag{6.18}$$

Termina este apartado hallando un Equivalente Determinista del programa (6.18).

6.3.3.- Por último Stancu-Minasian plantea el problema en el caso de que lo aleatorio sea el vector de los niveles de aspiración $\tilde{\bar{m}}$, en el supuesto de que las componentes de dicho vector son estocásticamente independientes y con funciones de distribución conocidas $F_i(\bullet)$, $i = 1,\cdots,p$, y, de nuevo, resuelve el Programa Estocástico Escalar resultante mediante Restricciones Probabilísticas.

Teniendo en cuenta el trabajo de Ben-Israel, Charnes y Kirby [B.7], el problema se puede plantear como un programa con Restricciones Probabilísticas de la forma

$$
\begin{aligned}
& min \quad \|\varepsilon\| \\
& s.a. \quad \left.\begin{array}{l} P\{A_i\,\bar{x} \geq m_i - \varepsilon_i\} \geq \alpha_{1i} \\ P\{A_i\,\bar{x} \leq m_i + \varepsilon_i\} \geq \alpha_{2i} \end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \\
& \qquad \bar{\varepsilon} \geq \bar{0}
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

donde α_{1i} y α_{2i} son los límites inferiores de la probabilidad y $\varepsilon = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$.

Para hallar un determinista equivalente a (6.19), define

$$
\left.\begin{array}{l} F_i^{-1}(\theta) = \inf.\{\eta \,/\, F_i(\eta) \geq \theta\} \\ \hat{F}_i^{-1}(\theta) = \sup.\{\eta \,/\, F_i(\eta) \geq \theta\} \end{array}\right\} \quad 0 \leq \theta \leq 1
$$

e introduce los vectores

$$
\left.\begin{array}{l} F_i^{-1}(\alpha_1) = \left(F_i^{-1}(\alpha_{1i})\right) \\ \hat{F}_i^{-1}(e - \alpha_2) = \left(\hat{F}_i^{-1}(1 - \alpha_{2i})\right) \end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p
$$

donde e es un vector de dimensión p cuyas componentes son todas igual a 1, $e=(1,\cdots,1)$.

Con lo que se tiene que

$$
P\{A_i\,\bar{x} \geq \tilde{m}_i - \varepsilon_i\} = P\{\tilde{m}_i \leq A_i\,\bar{x} + \varepsilon_i\} = F_i\left(A_i\,\bar{x} + \varepsilon_i\right) \geq \alpha_{1i}
$$

que es equivalente a

$$
A_i\,\bar{x} + \varepsilon_i \geq F_i^{-1}(\alpha_{1i})
$$

Análogamente

$$
P\{A_i\,\bar{x} < \tilde{m}_i + \varepsilon_i\} = P\{\tilde{m}_i > A_i\,\bar{x} - \varepsilon_i\} = e - F_i\left(A_i\,\bar{x} - \varepsilon_i\right)
$$

que es equivalente a

$$
A_i\,\bar{x} - \varepsilon_i \leq F_i^{-1}(e - \alpha_{1i})
$$

Luego el Equivalente Determinista de (6.19) es

$$\begin{aligned} &\min \ \|\varepsilon\| \\ &s.a. \quad \left.\begin{aligned} &A_i\,\bar{x} + \varepsilon_i \geq F_i^{-1}(\alpha_{1i}) \\ &A_i\,\bar{x} - \varepsilon_i \leq \hat{F}_i^{-1}(e - \alpha_{2i}) \\ &\varepsilon_i \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \cdots, p \end{aligned}$$

6.4.- En el artículo publicado en 1988, Stancu-Minasian y Tigan estudian dos extensiones del problema de *Programación por Metas* con los objetivos fracciones lineales (es decir, los objetivos son fracciones en las que tanto el numerador como el denominador son funciones afines) y restricciones lineales, estudiado por Kornbluth y Steuer [K.13].

Las extensiones las hacen primero considerando que los niveles de aspiración son aleatorios con distribuciones de probabilidad conocidas y estocásticamente independientes, y después considerando que los coeficientes de los numeradores de las funciones objetivo son aleatorios con distribuciones de probabilidad normales y estocásticamente independientes.

Lo resuelven, como en la situación 6.2.3, apoyándose en el trabajo de Ben-Israel, Charnes, y Kirby [B.7], es decir, planteándolo como un problema de Restricciones Probabilísticas. Los correspondientes deterministas equivalentes que obtienen son problemas min-max en los que los objetivos son fracciones lineales.

No nos detenemos más en este artículo ya que nuestro estudio lo hemos planteado en el caso de objetivos lineales.

6.5.- En el libro titulado "Stochastic versus Fuzzy Aproaches to Multiobjetive Mathematical Programming under Uncertainty", Stancun- Minasian escribe un capítulo sobre distintas aproximaciones para resolver problemas de programación estocástica con varias funciones objetivo, dedicando las páginas 82-85 al tema *Programación Estocástica por metas*. Pero en ellas hace un breve resumen de los dos trabajos a los que se ha aludido en los dos últimos epígrafes anteriores, sin hacer ninguna nueva aportación al tema.

En al capítulo siguiente planteamos una extensión estocástica de un problema de Programación por Metas determinista en el que la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración. Después de proponer un modelo de solución que es compatible con los resultados de la Teoría de la Decisión Bayesiana y, además, resulta ser un caso particular de los Programas Estocásticos con Recursos, discutimos otros posibles modelos de solución y comprobamos algunos de los inconvenientes que presentan.

En el capítulo 8 proponemos algoritmos de solución concretos para el modelo Estocástico con Recursos obtenido en el capítulo 7.

CAPÍTULO 7

PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA POR METAS, CON LA ALEATORIEDAD EN LOS NIVELES DE ASPIRACIÓN.

En este capítulo (y en los que siguen) vamos a estudiar un problema de *Programación Estocástica por Metas* en el que la aleatoriedad está, únicamente, en los *niveles de aspiración*.

Una vez planteado el problema en el apartado 7.1, dedicamos el apartado 7.2 a proponer un modelo de solución que, como comprobaremos, es un caso particular de los *Programas Estocásticos con Recursos*. Veremos, también, que dicho modelo es compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana, y le aplicaremos algunos conceptos tales como *Valor Esperado de la Información Perfecta* y *Valor Esperado de la Información Muestral*. Además, este modelo es compatible con la Programación por Metas Lexicográfica.

Por último en el apartado 7.3 criticamos otros posibles métodos de solución alternativos (vistos en el capítulo 4 para resolver problemas de *Programación Lineal Estocástica Escalar*), comprobando los distintos inconvenientes que presentan.

7.1.- Planteamiento del problema.

Partimos, de nuevo, de un problema determinista de *Programación por Metas* en su formulación inicial

$$\begin{array}{rl} & f(\bar{x}) = \bar{m} \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde, como siempre,

$f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(\bar{x})\right)'$ es el vector constituido por los p *objetivos* del problema

$\bar{m} = \left(m_1, \cdots, m_p\right)'$ es el vector de los p *niveles de aspiración* asociados a los p *objetivos*

$\bar{x} = \left(x_1, \cdots, x_n\right)$ son las *variables de decisión*

X es el *conjunto factible*, definido por restricciones matemáticas.

Y donde, también como siempre, tanto los objetivos como las restricciones son lineales.

En el apartado B del capítulo 2 vimos que un modo de resolver este problema es mediante la denominada Programación por Metas Ponderada, es decir, resolviendo el problema de Programación Lineal Escalar (2.8)

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{p}(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\ s.a. & \bar{x} \in X \\ & \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = m_i \\ y_i^+ , y_i^- \geq 0 \\ w_i^+ , w_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,p \end{array} \tag{7.1}$$

siendo $\bar{w}^+, \bar{w}^-$ los coeficientes que se asocian a las variables de desviación por exceso, $\bar{y}^+$, y por defecto, $\bar{y}^-$, respectivamente, y que representan la relación de intercambio (trade-off) entre tal exceso y defecto, respectivamente, que se supone constante.

Una formulación equivalente puede ser la siguiente:

Para cada $\bar{x} \in X$ definimos

$$Q(\bar{x}) = \min_{\bar{y}^+,\, \bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\ f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = m_i\ ,\ y_i^+ , y_i^- \geq 0\ ,\ i = 1,\cdots,p\right\}$$

que representaremos por (7.2).

Los valores óptimos de las variables y_i^+, y_i^- verifican que $y_i^+ \cdot y_i^- = 0$ para todo i y representan, como siempre, el exceso y el defecto del i-ésimo objetivo, respectivamente, asociado con la solución factible $\bar{x}$.

Y la solución óptima del problema de Programación por Metas es la solución factible que minimice la desviación global de los p objetivos, es decir, la solución del programa

$$\begin{array}{ll} min & Q(\bar{x}) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (7.3)$$

Esta no es la formulación usual porque, en lugar del programa lineal (7.1), se tienen dos programas, el (7.2) que también es un programa lineal, y el (7.3) que es un programa convexo. Pero incluimos aquí esta formulación alternativa porque es similar a la solución que propondremos, en el apartado siguiente, para resolver el problema de *Programación Estocástica por Metas* cuando la aleatoriedad está, únicamente, en los niveles de aspiración.

Supongamos, ahora, que los niveles de aspiración, $\bar{m}$, son aleatorios, es decir, $\bar{m} = \bar{\xi}$, siendo $\bar{\xi}$ un vector aleatorio del espacio probabilístico (Ξ, F, P), con $\Xi \subset \Re^p$, del que se conoce la distribución de probabilidad conjunta. (Como la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración, utilizamos, para simplificar, la notación $\bar{m} = \bar{\xi}$ en lugar de $\bar{m} = \bar{m}(\bar{\xi})$).

Entonces, el problema planteado es

$$\begin{array}{ll} & f(\bar{x}) = \bar{\xi} \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

Si lo resolvemos de un modo análogo al que acabamos de recordar para el caso determinista, obtenemos de programa

$$\begin{array}{lll} \text{"}min\text{"} & \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) & \\ s.a. & \bar{x} \in X & \\ & \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = \xi_i \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \\ w_i^+, w_i^- \geq 0 \end{array}\right\} & i = 1, 2, \cdots, p \end{array} \qquad (7.4)$$

que, claramente, es un problema de *Programación Lineal Estocástica Escalar*.

(Nótese que, aunque en el apartado 6.3.1 del capítulo anterior Stancu-Minasian utiliza la misma idea para resolver el problema de Programación Estocástica por Metas que la propuesta aquí, él supone que la aleatoriedad no está en los niveles de aspiración, sino en los coeficientes a_{ij} ,$i=1,\cdots,p$, $j=1,\cdots,n$ de la matriz A de la función objetivo inicial $f(\bar{x})=\left(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})\right)'$. Además, deja el problema planteado como un problema de Programación Estocástica Escalar sin proponer cómo resolverlo).

Ante el problema (7.4) cabe preguntarse cómo definir adecuadamente un programa Equivalente Determinista que lo resuelva.
Antes de discutir la posible aplicación de algunos de los modelos de solución vistos en el capítulo 4 para resolver problemas de *Programación Lineal Estocástica Escalar*, vamos a proponer un modelo de solución resultante de resolver el problema (7.4) de un modo análogo a la formulación que hemos hecho del mismo problema determinista, (7.1), mediante las expresiones (7.2) y (7.3).

7.2.- Nuestro modelo de solución.

En el capítulo 3 recordamos que, si las preferencias de los decisores sobre las posibles consecuencias de sus decisiones son consistentes con ciertos axiomas del comportamiento racional, es decir, si se verifican los axiomas de la Teoría de la Utilidad (para más detalles ver, por ejemplo, el capítulo 7 de De Groot [D.5]), entonces es posible definir sobre estas consecuencias una función, llamada *utilidad* de las consecuencias, tal que una decisión factible será más preferida a otra, si y solamente si la utilidad esperada de las posibles consecuencias es mayor para la primera decisión que para la segunda. También vimos que es frecuente utilizar, en lugar de la *función de utilidad*, la *función de pérdida*, y, por lo tanto, los decisores elegirán como decisión óptima aquella que minimice la pérdida esperada de sus consecuencias.

¿Cuál será la consecuencia asociada a una decisión factible $\bar{x} \in X$ y a una realización del vector aleatorio $\bar{\xi} \in \Xi$ en un problema del tipo (7.4)?. Teniendo en cuenta que la *Programación Estocástica por Metas* es una generalización de la *Programación por Metas Determinista*, para un valor de $\bar{\xi}$ dado la consecuencia asociada con la elección de cualquier solución factible $\bar{x}$ coincidirá con la solución del *Programa por Metas Determinista* (7.2), y por lo tanto la consecuencia asociada con cualquier $\bar{x} \in X$ y $\bar{\xi} \in \Xi$ vendrá dada por la solución del siguiente programa lineal

$$Q(\bar{x}, \bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\, \bar{y}^-} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^- \right),\ s.a. f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\, ,\ \bar{y}^+, \bar{y}^- \geq \bar{0} \right\} \quad (7.5)$$

La interpretación de este programa es la misma que la del programa (7.2), esto es, $Q(\bar{x},\bar{\xi})$ mide la desviación global entre $f(\bar{x})$ y $\bar{\xi}$. Si las ponderaciones $\bar{w}^+, \bar{w}^-$ se identifican con los costes monetarios del exceso y el defecto del cumplimiento de las metas, la solución del problema (7.5) mide el coste global de todas las desviaciones en unidades monetarias. Además, si el rango de variación de tales costes no es demasiado grande, o si se debe tomar un número grande de decisiones similares a lo largo del tiempo, entonces se puede suponer indiferencia al riesgo y, por lo tanto, una función de pérdida lineal.

Luego, bajo tales condiciones, la solución (bayesiana) de nuestro problema de *Programación Estocástica por Metas*, será la solución óptima del programa

$$\begin{aligned} &\min. \quad E_{\xi}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ &s.a. \quad \bar{x} \in X \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Obsérvese que este programa tiene una estructura similar a la de un *Problema Lineal de Recursos Simples* en la forma (4.10) que vimos en el capítulo 4, en el que $\bar{c}(\bar{\xi})=\bar{0}$, es decir, no hay costes iniciales, la matriz A coincide con la matriz formada por los coeficientes de los p objetivos iniciales, los costes por unidad de penalización, $\bar{q}$, aquí son las ponderaciones de las metas, $\bar{w}$ y la aleatoriedad está sólo en el vector $\bar{b}(\bar{\xi})$, y por eso se puede escribir $\bar{b}(\bar{\xi})=\bar{\xi}$, para simplificar la notación.

Por otro lado, teniendo en cuenta cómo hemos llegado al problema (7.6), es evidente que dicho problema es compatible, bajo ciertas condiciones, con el enfoque Bayesiano de la Teoría de la Decisión. Luego se puede formular mediante la representación que se expuso en el apartado 3.3 del capítulo 3, en el que $\Omega=\Xi$ y por lo tanto $\theta=\bar{\xi}$, $L(\theta,x)=Q(\bar{x},\bar{\xi})$ y X y ζ siguen siendo, respectivamente, el conjunto de decisiones del problema y la distribución de probabilidad de $\bar{\xi}$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \cdots & \cdots & \zeta & \cdots & \cdots \\
X \diagdown \Xi & \cdots & \cdots & \bar{\xi} & \cdots & \cdots \\
\hline
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\bar{x} & \cdots & \cdots & Q(\bar{x},\bar{\xi}) & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}
$$

A cada fila o decisión $\bar{x}$ se le asocian los correspondientes costes esperados $E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$ y la decisión óptima o de Bayes es aquella decisión $\bar{x}=\bar{x}_0$ que minimice estos valores esperados, es decir, aquella decisión que verifique que

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x}_0,\bar{\xi})\right]=\min_{\bar{x}} E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$

Por lo tanto, se pueden aplicar a los problemas de *Programación Estocástica por Metas* cuando la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración, y se resuelven mediante el modelo (7.6), conceptos bayesianos relacionados con el valor de la información acerca de $\bar{\xi}$, tales como *Valor Esperado de la Información Perfecta*, *Valor Esperado de la Información Muestral*, etc.

7.2.1.- Valor esperado de la información perfecta.

En el capítulo 3 hemos visto que si no existiera ningún tipo de incertidumbre, es decir, si se tuviese información perfecta, el coste sería el mínimo posible, $C\,min$, y el *Valor Esperado de la Información Perfecta*, que representamos por $V\,E\,I\,P$, viene dado por la diferencia entre el *coste esperado de la decisión óptima a priori* o *riesgo de Bayes a priori* y el *coste mínimo* anteriormente citado, esto es,

$$V\,E\,I\,P=\textit{Riesgo de Bayes a priori}-C\,min$$

Esta diferencia constituye una cota superior del valor de cualquier información.

Apliquemos estos conceptos a nuestro problema en el caso discreto, es decir, supongamos que la variable aleatoria $\bar{\xi}$ toma los valores $\xi_1,\cdots,\xi_p$, con probabilidades $p_1,\cdots,p_p$ y el conjunto de decisiones X es $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$.

El problema a resolver será

$$\begin{array}{c|ccc}
 & p_1 & \cdots & p_p \\
X \backslash \Xi & \xi_1 & \cdots & \xi_p \\
\hline
x_1 & Q(x_1,\xi_1) & \cdots & Q(x_1,\xi_p) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n & Q(x_n,\xi_1) & \cdots & Q(x_n,\xi_p)
\end{array}$$

Si tuviéramos *Información Perfecta*, el coste sería el mínimo posible

$$C\,min = p_1\left[\min_{\bar{x}} Q(\bar{x},\xi_1)\right] + \cdots + p_p\left[\min_{\bar{x}} Q(\bar{x},\xi_p)\right]$$

y, por tanto, el *Valor Esperado de la Información Perfecta* vendrá dado por

$$V\,E\,I\,P = Riesgo\ \ de\ \ Bayes\ \ a\ \ priori - C\,min$$

que constituye una cota superior del valor de cualquier información.

7.2.2.- Valor esperado de la información muestral.

En el capítulo 3 vimos que, si en un problema de decisión en ambiente de riesgo se puede observar el valor de un vector aleatorio Y, que toma valores en el espacio muestral S y tiene relación con la variable aleatoria $\bar{\xi} \in \Xi$, antes de elegir una decisión de X, si $\delta(y)$ es la *función de decisión de Bayes*, el *Riesgo a posteriori* se identifica con el *Riesgo de Bayes* de dicha función $\delta(y)$.

Vimos, también, que el *Valor Esperado de la Información Muestral* es la diferencia entre el *Riesgo a priori* o *Riesgo de Bayes* (es decir, el coste esperado de la decisión óptima a priori) y el *Riesgo a posteriori* o *Riesgo de la función de decisión de Bayes*:

$$V\ E\ I\ M = Riesgo\ \ a\ \ priori - Riesgo\ \ a\ \ posteriori \geq 0$$

Vamos a aplicar estos conceptos a nuestro problema suponiendo, de nuevo, que estamos en el caso discreto.
Veremos en el apartado 8.2.2 del capítulo siguiente, al estudiar los algoritmos de solución del problema (7.6), que, en este caso discreto, nuestro problema

$$\begin{aligned}
&min \quad E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right] = p_1\, Q\left(\bar{x},\xi_1\right) + \cdots + p_p\, Q\left(\bar{x},\xi_p\right)\\
&s.a. \quad \bar{x} \in X\\
&\qquad Q\left(\bar{x},\xi_p\right) = \min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-} \left\{w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^- \,/\, f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = \xi_i,\, y_i^+,\, y_i^- \geq 0\right\},\ i = 1,\cdots,p
\end{aligned}$$

es equivalente al programa lineal

$$\begin{aligned}
&\min_{\bar{x},\,\bar{y}_i^+,\,\bar{y}_i^-} \quad \sum_{i=1}^{p} p_i\left(\bar{w}^+\bar{y}_i^+ + \bar{w}^-\bar{y}_i^-\right)\\
&s.a. \qquad \left.\begin{aligned} &A_i\bar{x} + \bar{y}_i^- - \bar{y}_i^+ = \bar{\xi}_i\\ &\bar{y}_i^+,\, \bar{y}_i^- \geq 0\end{aligned}\right\}\ i = 1,\cdots,p\\
&\qquad\qquad \bar{x} \in X
\end{aligned}$$

siendo A_i la i-ésima fila de la matriz A, correspondiente, por tanto, a los coeficientes del objetivo $f_i(\bar{x})$, $i = 1,\cdots p$.

Supongamos que las probabilidades $\left(p_1,\cdots,p_p\right)$ no se conocen con certeza, sino que se sabe que están distribuidas según una distribución de probabilidad conjunta de Dirichlet o Beta Multivariante de parámetros $\alpha_1,\cdots\alpha_n$, es decir, su función de densidad es

$$f\left(p_1,\cdots,p_p \,/\, \alpha_1,\cdots,\alpha_n\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_n\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_1\right)}\, p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_n^{\alpha_n-1}$$

y el valor esperado de cada p_i es

$$E[p_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \quad / \quad \alpha_0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

La solución óptima será aquella decisión $\bar{x}_0 \in X$ que haga mínimo

$$E[Q(\bar{x},\bar{\xi})] = E\left[\sum_{i=1}^{p} p_i \; Q(\bar{x},\xi_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} E[p_i] Q(\bar{x},\xi_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} Q(\bar{x},\xi_i)$$

El valor mínimo de $\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} Q(\bar{x},\xi_i)$ será el *Riesgo a priori* y se puede conocer resolviendo el programa

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{x},\bar{y}^+,\bar{y}^-} & \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right) \\ s.a. & f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = \xi_i \ , \ i = 1,\cdots,p \\ & \bar{x} \in X \\ & \bar{y}^+ \geq \bar{0} \ , \bar{y}^- \geq \bar{0} \end{array} \qquad (7.7)$$

Después de observar un valor $Y = \xi_i$, la distribución de $(p_1,\cdots,p_p)$ seguirá siendo de Dirichlet, pero el i-ésimo parámetro en lugar de ser α_i será $\alpha_i + 1$ (y, por lo tanto, también en lugar de α_0, tendremos $\alpha_0 + 1$). Luego resolviendo p programas como el (7.7) cambiando en cada uno de ellos α_i y α_0 por $\alpha_i + 1$ y $\alpha_0 + 1$, respectivamente, y ponderando sus riesgos mínimos por las probabilidades $\frac{\alpha_1}{\alpha_0},\cdots,\frac{\alpha_p}{\alpha_0}$ de que Y sea igual a $\xi_1,\cdots,\xi_p$, se obtiene el *Riesgo a posteriori*.

La diferencia de este riesgo con el *Riesgo a priori* nos dará el *Valor Esperado de la Información Muestral* buscado, cuando el número de elementos de la muestra es 1.

7.2.3.- Otra ventaja del método de solución propuesto es que también es compatible con la Programación por Metas Lexicográfica, cuando se conocen las distribuciones de probabilidad marginales ζ_i de ξ_i , $i=1,\cdots,p$.

En efecto, supongamos que el objetivo más importante es $f_1(\bar{x})$, el siguiente en importancia es $f_2(\bar{x})$, etc. Si, como siempre, X es el conjunto de decisiones factibles, primero se resuelve el problema

$$
\begin{array}{c|c}
 & \zeta_1 \\
X & \xi_1 \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\bar{x} & Q(\bar{x},\xi_1) \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Se halla el coste esperado correspondiente a cada fila

$$E_{\xi_1}\left[Q(\bar{x},\xi_1)\right]$$

y después se determina

$$\min_{\bar{x}} E_{\xi_1}\left[Q(\bar{x},\xi_1)\right].$$

Si la solución es única $\bar{x}=\bar{x}_0$, esa es la decisión óptima y el problema se ha terminado. Por el contrario, si existe un conjunto de soluciones para el problema anterior, $X_1 \subset X$, entonces se resuelve el siguiente problema en el que $\bar{x} \in X_1$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \zeta_2 \\
X_1 & \xi_2 \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\bar{x} & Q(\bar{x},\xi_2) \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

y así sucesivamente.

7.2.4.- Cabe preguntarse qué ocurre con el problema de la inconmensurabilidad, es decir ¿qué sucede si los costes no son todos ellos monetarios?, esto es, ¿cómo resolver el problema cuando se deben minimizar diferentes tipos de desviaciones tales como número de horas trabajadas, unidades monetarias, toneladas de pasta de papel, etc?

Ante esta situación, lo ideal sería expresar las desviaciones en unidades monetarias, valorando en estas unidades los costes de no alcanzar o de sobrepasar los niveles de aspiración.

Si es imposible expresarlo todo en unidades monetarias, caben las siguientes posibles soluciones:

- Minimizar la suma de las desviaciones porcentuales, en vez de las absolutas, ya que como vimos en la Programación por Metas determinista, en la observación hecha en el apartado B del capítulo 2, así quedan resueltos los problemas de homogeneidad en las unidades de medida de los objetivos. (Véase Romero [R.5]).
- Otra posible solución es recurrir a la Programación por Metas Lexicográfica.
- También se pueden incluir fácilmente pseudo-criterios de tipo PROMETEE en nuestro problema de Programación Estocástica por Metas. (Véase Martel y Aouni [M.4]).

A continuación pasamos a discutir otros modelos de solución, vistos en el capítulo 4 para resolver problemas de *Programación Lineal Estocástica Escalar*, y a comprobar los distintos inconvenientes que presentan

7.3.- Otros modelos de solución para el problema de Programación estocástica por Metas con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración.

7.3.1.- En primer lugar veremos la denominada **solución "ingenua".**

Como sabemos, este procedimiento de solución consiste en sustituir el valor de la variable aleatoria $\bar{\xi}$ por su valor esperado $E[\bar{\xi}]$, y resolver el problema resultante que, en nuestro caso, será

$$\begin{array}{ll} \text{mín.} & Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (7.7)$$

Este modelo se puede plantear como un problema de decisión en certidumbre de la forma

$$\begin{array}{c|c} X & E[\bar{\xi}] \\ \hline \vdots & \vdots \\ \bar{x} & Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad (7.8)$$

y por lo tanto su formulación es compatible con la Teoría de la Decisión.

La decisión óptima será aquella decisión $\bar{x} = \bar{x}_0$ que minimice $Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}])$ en $\bar{x}$, es decir, que verifique que

$$\min_{\bar{x}} \; Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) = Q(\bar{x}_0, E[\bar{\xi}])$$

Se trata, por lo tanto, de resolver un problema de Programación por Metas determinista.

Sin embargo, presenta algunos inconvenientes:

Por un lado, ya vimos en el apartado 4.2.1 del capítulo 4 que éste no es un buen procedimiento para resolver problemas de programación estocástica, porque se pueden obtener soluciones para las que la probabilidad del evento consistente en que la solución obtenida sea factible, sea notablemente pequeña.

Además, este método infravalora el verdadero coste de cada decisión. En efecto, veremos en el capítulo siguiente que para cada $\bar{x}$ fijo, la función $Q(\bar{x},\bar{\xi})$ es convexa respecto a $\bar{\xi}$. Por tanto, por la desigualdad de Jensen (véase [J.3]), para cada $\bar{x}$ se tiene que

$$Q\left(\bar{x},E\left[\bar{\xi}\right]\right)\leq E\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$

siendo la desigualdad estricta si $Q(\bar{x},\bar{\xi})$ es estrictamente convexa y si $P\left\{\bar{\xi}=E\left[\bar{\xi}\right]\right\}<1$.

Por otro lado, si $\bar{x}_0$ es la solución "ingenua", entonces

$$Q\left(\bar{x}_0,E\left[\bar{\xi}\right]\right)\leq Q\left(\bar{x},E\left[\bar{\xi}\right]\right),\ \forall\bar{x}$$

En consecuencia, se tiene que, para todo $\bar{x}$

$$Q\left(\bar{x}_0,E\left[\bar{\xi}\right]\right)\leq Q\left(\bar{x},E\left[\bar{\xi}\right]\right)\leq E\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$

es decir, si se utiliza el método "ingenuo", entonces el coste mínimo calculado es menor o igual que el coste verdadero esperado asociado con cualquier decisión.

Veamos un ejemplo concreto. Consideremos un problema de estimación donde tenemos que estimar el valor de una cierta variable aleatoria $\bar{\xi}$, cuyos posibles valores son $\xi=\xi_1=0$, $\xi=\xi_2=2$ y $\xi=\xi_3=4$, con probabilidades $p_1=\frac{3}{5}$, $p_2=\frac{1}{5}$ y $p_3=\frac{1}{5}$.

Resolviendo este problema de estimación mediante nuestra metodología de Programación por Metas, es decir, planteando el problema de minimización del coste esperado de cada decisión, siendo $X=\{0,2,4\}=\Xi$, la matriz A de los coeficientes de los objetivos iniciales, $f(\bar{x})=\left(f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x})\right)'$, la matriz identidad, $A=I$, y $\left(w^+,w^-\right)=$ $=\left(1\,,1\right)$, las consecuencias asociadas con las posibles decisiones vienen dadas por la siguiente tabla, cuyos elementos $\left(i\,,j\right)$ se calculan mediante los costes $Q(x_i,\xi_j)$ para $i\,,j=1,2,3$

	p_1 = 3/5	p_2 =1/5	p_3 =1/5
	$\xi_1=0$	$\xi_2=2$	$\xi_3=4$
$x=x_1=0$	0	2	4
$x=x_2=2$	2	0	2
$x=x_3=4$	4	2	0

La i-ésima fila representa la pérdida asociada con cualquiera de los tres valores del parámetro si se elige la decisión $x=x_i$, y, por lo tanto, los costes esperados reales son

- para $x=x_1=0$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_1,\bar{\xi})\right] = Q\left(x_1,\xi_1\right)\cdot p_1+Q\left(x_1,\xi_2\right)\cdot p_2+Q\left(x_1,\xi_3\right)\cdot p_3=\frac{6}{5}=1.2$$

- para $x=x_2=2$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_2,\bar{\xi})\right] = Q\left(x_2,\xi_1\right)\cdot p_1+Q\left(x_2,\xi_2\right)\cdot p_2+Q\left(x_2,\xi_3\right)\cdot p_3=\frac{8}{5}=1.6$$

- para $x=x_3=4$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_3,\bar{\xi})\right] = Q\left(x_3,\xi_1\right)\cdot p_1+Q\left(x_3,\xi_2\right)\cdot p_2+Q\left(x_3,\xi_3\right)\cdot p_3=\frac{14}{5}=2.8$$

Luego $x_1=0$ es la solución óptima (solución de Bayes o estimador Bayesiano) del problema (7.6), ya que su coste esperado toma el valor mínimo, 1.2, es decir, el riesgo de Bayes es 1.2.

Si lo planteamos mediante el método "ingenuo":

$$E[\bar{\xi}] = 0 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Luego las consecuencias asociadas con las posibles decisiones vendrán dadas por la siguiente tabla, cuyos elementos (i, j) se calculan mediante los costes $Q(x_i, E[\bar{\xi}])$ para $i = 1,2,3$

	$E[\bar{\xi}]$
$x = x_1$	1.2
$x = x_2$	0.8
$x = x_3$	2.8

Y la solución óptima es $x = x_2$ con un coste mínimo igual a 0.8, que es la mitad del coste real esperado de elegir $x = x_2$, ya que éste sería 1.6.

Es decir, en este ejemplo se verifica que

- el coste mínimo "ingenuo" es menor o igual que el coste esperado "real" asociado a cada una de las decisiones posibles.
- el decisor "ingenuo" creerá que el coste (mínimo) asociado a su decisión $x = x_2$ es 0.8. Sin embargo el coste real de dicha decisión es justamente el doble.

Estudiamos, ahora, los modelos de solución propuestos mediante Deterministas Equivalentes obtenidos por medio de *Programas con Restricciones Probabilísticas.*

7.3.2.- Teniendo en cuenta el *Programa con Restricciones Probabilísticas* (4.2) equivalente al problema (4.1) propuesto en el capítulo 4, la formulación natural para resolver nuestro problema de

Programación Estocástica por Metas (7.4) mediante esta aproximación es el programa

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{x}} & E_{\xi}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & P\{f(\bar{x})=\bar{\xi}\}\geq\alpha \end{array} \qquad (7.9)$$

donde el valor del parámetro α lo elige el decisor.

O bien el programa

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{x}} & E_{\xi}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & P\{Q(\bar{x},\bar{\xi})\leq k\}\geq\alpha \end{array} \qquad (7.10)$$

donde los valores de los parámetros k y α también los elige el decisor.

Estos dos modelos de *Programación Estocástica con Restricciones Probabilísticas* no son, en general, compatibles con la Teoría de la Utilidad, ni, por tanto, con la Teoría de la Decisión Bayesiana.

Lo vamos a ver mediante un ejemplo.

Consideremos un problema de estimación discreto análogo al visto en el apartado anterior, en el que los posibles valores de la variable aleatoria a estimar y sus probabilidades son

$\xi=\xi_i$	0	1	2
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Si resolvemos este problema de estimación mediante nuestra metodología de Programación por Metas, siendo $X=\{0,1,2\}=\Xi$, la matriz A de los coeficientes de los objetivos iniciales,

$f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(\bar{x})\right)'$, la matriz identidad, $A = I$, y $\left(w^+, w^-\right) = (1, 1)$, las consecuencias asociadas con las posibles decisiones vienen dadas por la siguiente tabla, cuyos elementos $(i\,,j)$ se calculan mediante $Q(x_i, \xi_j)$ para $i\,, j = 1,2,3$

	$p_1 = 2/5$	$p_2 = 1/5$	$p_3 = 2/5$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$\xi_3 = 2$
$x_1 = 0$	0	1	2
$x_2 = 1$	1	0	1
$x_3 = 2$	2	1	0

La i-ésima fila representa la pérdida asociada con cualquiera de los tres valores del parámetro si se elige la decisión $x = x_i$, y los costes esperados serán, por lo tanto,

- para $x = x_1 = 0$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_1, \bar{\xi})\right] = Q(x_1, \xi_1)\cdot p_1 + Q(x_1, \xi_2)\cdot p_2 + Q(x_1, \xi_3)\cdot p_3 = \frac{5}{5} = 1$$

- para $x = x_2 = 1$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_2, \bar{\xi})\right] = Q(x_2, \xi_1)\cdot p_1 + Q(x_2, \xi_2)\cdot p_2 + Q(x_2, \xi_3)\cdot p_3 = \frac{4}{5} = 0.8$$

- para $x = x_3 = 2$,

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_3, \bar{\xi})\right] = Q(x_3, \xi_1)\cdot p_1 + Q(x_3, \xi_2)\cdot p_2 + Q(x_3, \xi_3)\cdot p_3 = \frac{5}{5} = 1.$$

Luego $x = x_2 = 1$ es la solución óptima (solución de Bayes o estimador Bayesiano) (7.6), ya que su coste esperado toma el valor mínimo, 0.8, es decir, el riesgo de Bayes es 0.8.

Si ahora introducimos una restricción adicional, por ejemplo

$$P\{\bar{x} = \bar{\xi}\} \geq \alpha = \frac{3}{10}$$

y permitimos decisiones mixtas, es decir, decisiones del tipo

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

en que $x = x_i$ se elige con probabilidad q_i para $i = 1,2,3$, entonces, teniendo en cuenta que el coste o riesgo esperado es

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_1,\bar{\xi})\right]\cdot q_1 + E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_2,\bar{\xi})\right]\cdot q_2 + E_{\bar{\xi}}\left[Q(x_3,\bar{\xi})\right]\cdot q_3 =$$

$$= q_1 + \frac{4}{5}q_2 + q_3$$

y que

$$P\{\bar{x} = \bar{\xi}\} = P\{\bar{x} = \bar{\xi} / \bar{\xi} = \xi_1\} \cdot P\{\bar{\xi} = \xi_1\} +$$

$$+ P\{\bar{x} = \bar{\xi} / \bar{\xi} = \xi_2\} \cdot P\{\bar{\xi} = \xi_2\} +$$

$$+ P\{\bar{x} = \bar{\xi} / \bar{\xi} = \xi_3\} \cdot P\{\bar{\xi} = \xi_3\} =$$

$$= \frac{2}{5}q_1 + \frac{1}{5}q_2 + \frac{2}{5}q_3 \geq \alpha = \frac{3}{10}$$

la solución óptima del programa (7.9) coincide con la solución del siguiente programa lineal

$$\begin{aligned} \mathit{min} \quad & q_1 + \frac{4}{5}q_2 + q_3 \\ s.a. \quad & \frac{2}{5}q_1 + \frac{1}{5}q_2 + \frac{2}{5}q_3 \geq \frac{3}{10} \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{aligned}$$

que es

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

es decir, se trata de una decisión mixta consistente en elegir $x_2 = 1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $x_3 = 2$ con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Consecuentemente, el programa (7.9) no es compatible con la Teoría de la Utilidad ni con la Teoría de la Decisión Bayesiana, ya que, como vimos en el apartado 3.4 del capítulo 3, las decisiones óptimas de cualquier problema de Decisión Bayesiana deben ser siempre decisiones puras. O, de ser solución una decisión mixta, deberían serlo, también, las decisiones puras que la constituyen, lo que no ocurre en este caso porque la solución mixta obtenida es única.

Un razonamiento análogo sirve para el programa (7.10)

$$\begin{array}{ll} \underset{\bar{x}}{mín.} & E_{\xi}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & P\{Q(\bar{x},\bar{\xi}) \le k\} \ge \alpha \end{array}$$

ya que para $k = 0$ estaríamos en el caso anterior.

7.3.3.- Consideremos a continuación un nuevo modelo alternativo de *Programación Estocástica por Metas*,

$$\begin{array}{ll} max. & \left[P\{Q(\bar{x},\bar{\xi}) \le k\}\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (7.11)$$

con una "función objetivo probabilística" en lugar de con "restricciones probabilísticas", recordando, en alguna forma, el modelo (6.6) propuesto por Contini. De nuevo comprobamos que se trata de una formulación que, en general, no es compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana.

Por ejemplo, si consideramos el mismo problema de estimación anterior, planteado en las mismas condiciones, las consecuencias asociadas con las posibles decisiones vienen dadas, de nuevo, por la misma tabla que en el problema (7.9)

	$p_1 = 2/5$	$p_2 = 1/5$	$p_3 = 2/5$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$\xi_3 = 2$
$x_1 = 0$	0	1	2
$x_2 = 1$	1	0	1
$x_3 = 2$	2	1	0

Y, si hacemos $k = 1$, entonces

$$P\{Q(x_1,\bar{\xi}) \le 1\} = P\{\bar{\xi} = \xi_1 = 0\} + P\{\bar{\xi} = \xi_2 = 1\} = \frac{3}{5}$$

$$P\{Q(x_2,\bar{\xi}) \le 1\} =$$

$$= P\{\bar{\xi} = \xi_1 = 0\} + P\{\bar{\xi} = \xi_2 = 1\} + P\{\bar{\xi} = \xi_3 = 2\} = 1$$

$$P\{Q(x_3,\bar{\xi}) \le 1\} = P\{\bar{\xi} = \xi_2 = 1\} + P\{\bar{\xi} = \xi_3 = 2\} = \frac{3}{5}$$

Luego la solución del problema es $x = x_2 = 1$. (No son solución $x = x_1 = 0$, ni $x = x_3 = 2$).

Pero supongamos que admitimos decisiones mixtas del tipo

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

El coste asociado con estas decisiones mixtas será

$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\xi_1=0$	$\xi_2=1$	$\xi_3=2$
$q_2+2\,q_3$	q_1+q_3	$2\,q_1+q_2$

Luego la decisión mixta

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

es decir, elegir $x_1=0$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $x_3=2$ con probabilidad $\frac{1}{2}$, es también solución del problema, ya que, sus costes asociados son

$$(q_2+2\,q_3\ ,\ q_1+q_3\ ,\ 2\,q_1+q_2)=(1,1,1)$$

y, por lo tanto,

$$P\left\{Q\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_3,\bar{\xi}\right)\leq 1\right\}=1$$

y esto es de nuevo incompatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana porque en dichos programas Bayesianos, si $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ es una solución óptima, entonces también tendrían que ser soluciones óptimas $x_1=0$ y $x_3=2$, como vimos en el capítulo 3. (Para más detalles, véase el capítulo 8 de De Groot [D.5])

Otra posible solución alternativa sería resolver el programa

$$\begin{aligned} &mín.\ \ k \\ &s.a.\ \ P\{Q(\bar{x},\bar{\xi}) \le k\} \ge \alpha \\ &\qquad \bar{x} \in X \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Planteando el mismo ejemplo con las mismas condiciones, las consecuencias asociadas con las posibles decisiones vienen dadas por la misma tabla que en el problema (7.9)

	$p_1 = 2/5$	$p_2 = 1/5$	$p_3 = 2/5$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$\xi_3 = 2$
$x_1 = 0$	0	1	2
$x_2 = 1$	1	0	1
$x_3 = 2$	2	1	0

Si tomamos $\alpha = 1$, la decisión $x_2 = 1$ verifica que

$$P\{Q(x_2,\bar{\xi}) \le 1\} = 1$$

luego $k \le 1$.

Las decisiones $x_1 = 0$ y $x_3 = 2$ no son soluciones ya que, para que ellas verifiquen

$$P\{Q(x_i,\bar{\xi}) \le k\} = 1\ ,\ i = 1,3$$

tiene que ser $k = 2$.

Supongamos que se permiten decisiones mixtas del tipo

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

El coste asociado con estas decisiones mixtas será

$2/5$	$1/5$	$2/5$
$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$\xi_3 = 2$
$q_2 + 2\,q_3$	$q_1 + q_3$	$2\,q_1 + q_2$

y el programa (7.12) se transforma en el programa lineal

$$\begin{array}{ll} min & k \\ s.a. & q_2 + 2\,q_3 \leq k \\ & q_1 + q_3 \leq k \\ & 2\,q_1 + q_2 \leq k \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array}$$

Se puede observar que este programa no varía si se intercambian q_1 y q_3. Por lo tanto en la solución se tendrá que verificar que

$$q_1 = q_3.$$

Por otro lado,

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3 = 1 - 2\,q_1.$$

Por lo tanto el programa lineal se puede escribir de la forma

$$\begin{array}{ll} min & k \\ s.a. & 1 \leq k \\ & 2\,q_1 \leq k \\ & 1 \leq k \end{array}$$

Y la solución óptima es $k = 1$, luego la decisión $x_2 = 1$ sigue siendo solución.

Pero también es solución

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3$$

sin serlo ni $x_1 = 0$ ni $x_3 = 2$, lo que implica que este problema tampoco es compatible con la Teoría de la Decisión de Bayes.

7.3.4.- Consideremos finalmente otro método alternativo del tipo *"espera y ve"* que vimos en el apartado 4.2.2 del capítulo 4, en el que para todo posible $\bar{\xi}$ calculamos la solución óptima $\bar{x}(\bar{\xi})$ y posteriormente basamos el criterio de solución en algún estadístico (el valor medio, la varianza, la moda,...) asociado a la variable aleatoria $\bar{x}(\bar{\xi})$.

En el contexto que nos ocupa, y suponiendo el caso discreto, podría parecer razonable plantear el programa

$$\begin{array}{ll} max. & P\{\bar{x} = \bar{\xi}\} \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (7.13)$$

Consideremos como ejemplo concreto el mismo que el visto en el caso de la solución "ingenua", es decir, un problema de estimación donde tenemos que estimar el valor de una cierta variable aleatoria $\bar{\xi}$, cuyos posibles valores son

$$\bar{\xi} = \xi_1 = 0,\ \bar{\xi} = \xi_2 = 2 \text{ y } \bar{\xi} = \xi_3 = 4,$$

con probabilidades

$$p_1 = \frac{3}{5},\ p_2 = \frac{1}{5} \text{ y } p_3 = \frac{1}{5}.$$

Entonces, tendríamos que

- Si se realiza $\xi_1 = 0$, elijo $x_1 = 0$.
- Si se realiza $\xi_2 = 2$, elijo $x_2 = 2$.
- Si se realiza $\xi_3 = 4$, elijo $x_3 = 4$.

En consecuencia, la solución óptima a priori es $x_1 = 0$ ya que es la más probable, pues

$$P\{\bar{\xi} = \xi_1\} = p_1 = \frac{3}{5}$$

y

$$P\{\bar{\xi} = \xi_2\} = P\{\bar{\xi} = \xi_3\} = \frac{1}{5}$$

Esta aproximación sí es compatible con la teoría de la Utilidad Bayesiana, ya que para obtener la tabla de consecuencias asociadas con las posibles decisiones, bastaría con asociar a las decisiones más probables los menores costes.

En nuestro ejemplo se podría asociar

- a la decisión más probable, $x_1 = 0$, los costes $(0,0,0)$,
- y a las otras dos decisiones, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$, los costes $(1,1,1)$, obteniéndose la siguiente tabla de consecuencias:

	$p_1 = 3/5$	$p_2 = 1/5$	$p_3 = 1/5$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 2$	$\xi_3 = 4$
$x_1 = 0$	0	0	0
$x_2 = 2$	1	1	1
$x_3 = 4$	1	1	1

Sin embargo, este método de solución adolece de graves defectos:

- Desprecia información, ya que al construir la tabla de consecuencias, no se tiene en cuenta las costes asociados a cada decisión x_i y a cada realización ξ_i, $Q(x_i, \xi_i), i = 1,2,3$.
- El criterio de decisión utilizado en la aproximación

$$\max_{\bar{x}} \; P\{\bar{x} = \bar{\xi}\}$$

no decide si todas las alternativas son equiprobables, y podría darse el caso de que fuesen equiprobables y, por lo tanto, indiferentes, siendo, a la vez, alguna de ellas mucho más costosa que el resto.

- La alternativa más probable podría ser la más arriesgada. Veámoslo con un ejemplo. Consideremos un problema de estimación en el que deseamos estimar el valor de una cierta variable aleatoria $\bar{\xi}$, cuyos posibles valores son

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = \frac{\varepsilon}{n},\ \xi_3 = \frac{2\,\varepsilon}{n},\ \ldots,\ \xi_{n-1} = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n},$$

$$\xi_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$$

con probabilidades

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1}\ ,\ \ p_n = \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

siendo ε un valor muy pequeño de forma que los valores

$$\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$$

están muy cerca unos de otros.

La solución óptima es la decisión

$$x_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$$

ya que es la alternativa más probable.

La tabla de los costes asociados a las decisiones sería, aproximadamente (despreciando ε por ser un infinitésimo):

	$\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{n-1}$ $\xi_1=0$	$\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{n-1}$ $\xi_2=\frac{\varepsilon}{n}$	...	$\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{n-1}$ $\xi_{n-1}=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}$	$\frac{1}{n}+\varepsilon$ $\xi_n=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}+n$
$x_1=0$	0	0	...	0	n
$x_2=\frac{\varepsilon}{n}$	0	0	...	0	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{n-1}=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}$	0	0	...	0	n
$x_n=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}+n$	n	n	...	n	0

Luego el coste esperado asociado con cada decisión es

- para $x_1=0$, $E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_1,\bar{\xi}\right)\right]=n\left(\frac{1}{n}+\varepsilon\right)=1+\varepsilon n\approx 1$
- para $x_2=\frac{\varepsilon}{n}$, $E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_2,\bar{\xi}\right)\right]=n\left(\frac{1}{n}+\varepsilon\right)=1+\varepsilon n\approx 1$
- ...
- para $x_{n-1}=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}$, $E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_{n-1},\bar{\xi}\right)\right]=n\left(\frac{1}{n}+\varepsilon\right)=1+\varepsilon n\approx 1$
- para $x_n=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}+n$, $E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_n,\bar{\xi}\right)\right]=(n-1)\left(1-\frac{n}{n-1}\varepsilon\right)\approx(n-1)$.

Con lo que, en la medida en que n aumenta, el coste esperado asociado con la decisión $x_n=\frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}+n$, que sería la solución óptima según el método que discutimos, es mucho mayor que el coste asociado con cualquiera de las otras decisiones, siendo muchísimo mayor cuando n tiende a ∞.

En este capítulo hemos analizado distintos modelos de solución para el problema de *Programación Estocástica por Metas* con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración.

En el apartado 7.3 hemos criticado varios de estos modelos por los inconvenientes que presentan:

- el método "ingenuo", aunque es compatible con la Teoría de la Decisión, infravalora el verdadero coste de cada decisión ya que, como se puso de manifiesto en el ejemplo, el coste mínimo calculado es menor o igual que el coste verdadero esperado asociado con cualquier decisión.
- el modelo obtenido mediante Programas con Restricciones Probabilísticas, resulta ser no compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana, lo que implica la no existencia de la Función de Utilidad, la violación de alguno de los axiomas, etc.
- lo mismo ocurre al utilizar otros modelos probabilísticos como el del apartado 7.3.3, que, en alguna forma, recuerda al modelo de Contini, [C.17], al ser la función objetivo probabilística y el del apartado 7.3.4, que recuerda al modelo propuesto por Kataoka [K.7].
- el método analizado en el apartado 7.3.4, del tipo "espera y ve" sí es compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana, pero presenta los siguientes inconvenientes:
  - desprecia información ya que, como vimos en el ejemplo, al construir la tabla de consecuencias no se han tenido en cuenta los costes asociados a cada decisión x_i y a cada realización ξ_i.
  - se corre el riesgo de que la alternativa más probable sea al mismo tiempo la más costosa como se pone de manifiesto en el ejemplo visto.

En el apartado 7.2 hemos propuesto un modelo de solución que, además de ser compatible con la Teoría de la Decisión y con la Programación por Metas Lexicográfica, no presenta ninguno de los inconvenientes anteriormente mencionados.
Hemos observado que dicho modelo resulta ser un caso particular de los *Programas Estocásticos con Recursos Simples*.

En el próximo capítulo vamos a estudiar qué propiedades y algoritmos de solución se pueden aplicar a nuestro modelo de solución. En algunos casos serán casos particulares de las propiedades y algoritmos de los *Programas Estocásticos con Recursos Simples.*

CAPÍTULO 8

ALGORITMOS DE SOLUCIÓN

En el capítulo anterior hemos visto que un modo adecuado de resolver un problema de *Programación Estocástica por Metas*, cuando la aleatoriedad está, únicamente, en los niveles de aspiración, es resolver el *Programa Lineal Estocástico* (7.4)

$$\begin{array}{ll} \text{"}min\text{"} & \sum_{i=1}^{p}(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\ s.a. & \bar{x} \in X \\ & \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = \xi_i \\ y_i^+ ,\ y_i^- \geq 0 \\ w_i^+ ,\ w_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,p \end{array}$$

Y que el mejor modo de resolver este problema es mediante el programa (7.6), que es un caso particular de un *Problema de Recursos Simples* y al que, desde ahora, nos referiremos como (8.1)

$$\begin{array}{ll} mín. & E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (8.1)$$

donde

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\ \bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\, f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\ ,\ \bar{y}^+ ,\ \bar{y}^- \geq \bar{0}\right\}$$

Este capítulo consta de cinco apartados. En los apartados 8.2 y 8.4 proponemos algunos algoritmos de solución para resolver el problema (8.1). En el apartado 8.5 ponemos un ejemplo numérico que ayuda a comprender los algoritmos propuestos. El apartado 8.3 lo dedicamos a demostrar un resultado que necesitamos en el algoritmo que proponemos en el apartado 8.4.

Antes de proponer algoritmos concretos de solución, en el primer apartado estudiamos las propiedades del problema (8.1). En la propiedad 8.1.4 demostramos que dicho problema es convexo, por lo tanto se puede resolver mediante los algoritmos de programación convexa. Pero no es fácil obtener una solución numérica exacta del programa (8.1). La mayor dificultad está en la determinación de $E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{x},\bar{\xi})]$, ya que requiere cálculos de integración difíciles e incluso, en ocasiones, prohibitivos.

Las propiedades siguientes de este primer apartado están fundamentalmente encaminadas a obtener programas equivalentes al problema (8.1) y que presenten menos dificultades operacionales.

8.1.- Propiedades del problema (8.1).

8.1.1.- El programa

$$Q(\bar{x},\bar{\xi})=\min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-}\left\{(\bar{w}^+)'\bar{y}^+ +(\bar{w}^-)'\bar{y}^- \;/\; \bar{y}^- -\bar{y}^+ =\bar{\xi}-f(\bar{x}),\ \bar{y}^+\geq\bar{0},\ \bar{y}^-\geq\bar{0}\right\}$$

al que, por analogía con el *Problema de Recursos Simples*, podemos denominar programa de segunda fase, es evidentemente factible $\forall \bar{x}\in X$ y $\forall \bar{\xi}\in\Xi$ fijos.

Además es acotado inferiormente, por lo tanto siempre tiene solución.

Finalmente, la solución óptima verifica que $y_i^+ . y_i^- =0$, $\forall\, i=1,\ldots,p$, por lo que al menos uno de estos dos términos, y_i^+, y_i^- es cero $\forall\, i=1,\ldots,p$. (La demostración es análoga a la ya establecida para programación por metas determinista, vista en la proposición 2.1 del capítulo 2).

8.1.2.- Si X es un conjunto convexo, para cada $\bar{\xi}\in\Xi$ fijo, la función $Q(\,\circ,\bar{\xi})$ es convexa

Demostración.- Sean

$$\bar{x}^1,\ \bar{x}^2\in X,\ \bar{x}^3=\lambda\ \bar{x}^1+(1-\lambda)\ \bar{x}^2$$

con

$$\lambda \in [0,1]$$

Si las soluciones del problema de segunda fase son

$$(\bar{y}^{1+},\ \bar{y}^{1-}) \text{ para } \bar{x}=\bar{x}^1 \text{ y}$$

$$(\bar{y}^{2+},\ \bar{y}^{2-}) \text{ para } \bar{x}=\bar{x}^2$$

tenemos que

$$Q(\bar{x}^1,\bar{\xi}) = (\overline{w}^+)'\bar{y}^{1+} + (\overline{w}^-)'\bar{y}^{1-} \text{ y}$$

$$Q(\bar{x}^2,\bar{\xi}) = (\overline{w}^+)'\bar{y}^{2+} + (\overline{w}^-)'\bar{y}^{2-}$$

Entonces

$$(\lambda\,\bar{y}^{1+} + (1-\lambda)\bar{y}^{2+}\ ,\ \ \lambda\,\bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-})$$

es factible para $\bar{x}=\bar{x}^3$.

En efecto, es obviò que

$$\lambda\,\bar{y}^{1+} + (1-\lambda)\bar{y}^{2+} \geq \overline{0} \text{ y}$$

$$\lambda\,\bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-} \geq \overline{0}.$$

Además

$$f(\bar{x}^3) + \lambda\,\bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-} - \lambda\,\bar{y}^{1+} - (1-\lambda)\bar{y}^{2+} =$$

$$= f(\lambda\,\bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2) +$$

$$\lambda\,\bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-} - \lambda\,\bar{y}^{1+} - (1-\lambda)\bar{y}^{2+} =$$

$$= \lambda\,[f(\bar{x}^1) + \bar{y}^{1-} - \bar{y}^{1+}] + (1-\lambda)[f(\bar{x}^2) + \bar{y}^{2-} - \bar{y}^{2+}] =$$

$$= \lambda\,\bar{\xi} + (1-\lambda)\bar{\xi} = \bar{\xi}$$

Por otro lado

$$Q(\bar{x}^3,\bar{\xi}) = \ Q(\lambda\,\bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2,\bar{\xi}) \ \leq$$

$$\leq (w^+)'\left[\lambda\,\bar{y}^{1+}+(1-\lambda)\bar{y}^{2+}\right]+(w^-)'\left[\lambda\,\bar{y}^{1-}+(1-\lambda)\bar{y}^{2-}\right]=$$

$$=\lambda\left[(w^+)'\bar{y}^{1+}+(w^-)'\bar{y}^{1-}\right]+(1-\lambda)\left[(w^+)'\bar{y}^{2+}+(w^-)'\bar{y}^{2-}\right]=$$

$$=\lambda\,Q\left(\bar{x}^1,\bar{\xi}\right)+(1-\lambda)Q\left(\bar{x}^2,\bar{\xi}\right)\quad . \quad \square$$

8.1.3.- Si el dominio Ξ de $\bar{\xi}$ es un conjunto convexo, entonces para cada $\bar{x}\in X$ fijo, la función $Q(\bar{x},\circ)$ es convexa.

Demostración.-

Sean

$$\bar{\xi}^1,\ \bar{\xi}^2\in\Xi,\quad \bar{\xi}^3=\lambda\ \bar{\xi}^1+(1-\lambda)\ \bar{\xi}^2$$

con

$$\lambda\in[0,1]$$

Si las soluciones del problema de segunda fase son

$\left(\bar{y}^{1+},\ \bar{y}^{1-}\right)$ para $\bar{\xi}=\bar{\xi}^1$ y

$\left(\bar{y}^{2+},\ \bar{y}^{2-}\right)$ para $\bar{\xi}=\bar{\xi}^2$

se debe verificar

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}^1\right)=(\bar{w}^+)'\bar{y}^{1+}+(\bar{w}^-)'\bar{y}^{1-},\quad \bar{y}^{1-}-\bar{y}^{1+}=\bar{\xi}^1-f(\bar{x})$$

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}^2\right)=(\bar{w}^+)'\bar{y}^{2+}+(\bar{w}^-)'\bar{y}^{2-},\quad \bar{y}^{2-}-\bar{y}^{2+}=\bar{\xi}^2-f(\bar{x})$$

Entonces

$$\left(\lambda\,\bar{y}^{1+}+(1-\lambda)\bar{y}^{2+}\ ,\ \ \lambda\,\bar{y}^{1-}+(1-\lambda)\bar{y}^{2-}\right)$$

es factible para $\bar{\xi}=\bar{\xi}^3$.

En efecto, es evidente que

$$\lambda\,\bar{y}^{1+}+(1-\lambda)\bar{y}^{2+}\geq\bar{0}\quad\text{ y }\quad\lambda\,\bar{y}^{1-}+(1-\lambda)\bar{y}^{2-}\geq\bar{0}.$$

Además

$$\lambda\, \bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-} - \lambda\, \bar{y}^{1+} - (1-\lambda)\bar{y}^{2+} =$$

$$= \lambda\left(\bar{y}^{1-} - \bar{y}^{1+}\right) + (1-\lambda)\left(\bar{y}^{2-} - \bar{y}^{2+}\right) =$$

$$= \lambda\left(\bar{\xi}^{1} - f(\bar{x})\right) + (1-\lambda)\left(\bar{\xi}^{2} - f(\bar{x})\right) =$$

$$= \lambda\,\bar{\xi}^{1} + (1-\lambda)\bar{\xi}^{2} - f\left(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{x}\right) =.$$

$$= \bar{\xi}^{3} - f(\bar{x}).$$

Finalmente,

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}^{3}\right) = Q\left(\bar{x},\lambda\,\bar{\xi}^{1} + (1-\lambda)\,\bar{\xi}^{2}\right) \leq$$

$$\leq (\bar{w}^{+})'\left(\lambda\,\bar{y}^{1+} + (1-\lambda)\bar{y}^{2+}\right) + (\bar{w}^{-})'\left(\lambda\,\bar{y}^{1-} + (1-\lambda)\bar{y}^{2-}\right) =$$

$$= \lambda\left((\bar{w}^{+})'\bar{y}^{1+} + (\bar{w}^{-})'\bar{y}^{1-}\right) + (1-\lambda)\left((\bar{w}^{+})'\bar{y}^{2+} + (\bar{w}^{-})'\bar{y}^{2-}\right) =$$

$$= \lambda\, Q\left(\bar{x},\bar{\xi}^{1}\right) + (1-\lambda)Q\left(\bar{x},\bar{\xi}^{2}\right) \quad \square$$

8.1.4.- Si X es un conjunto convexo, el programa

$$\begin{array}{ll} \min. & E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

también es convexo.

Demostración.-

X es un conjunto convexo por hipótesis.

Además para cada $\bar{\xi} \in \Xi$, $\bar{\xi}$ fijo, se verifica que

$$Q\left(\lambda\,\bar{x}^{1} + (1-\lambda)\bar{x}^{2},\bar{\xi}\right) \leq \lambda\, Q\left(\bar{x}^{1},\bar{\xi}\right) + (1-\lambda)Q\left(\bar{x}^{2},\bar{\xi}\right)$$

Luego

$$E\left[Q\left(\lambda\,\bar{x}^1+(1-\lambda)\bar{x}^2\right),\bar{\xi}\right]\le$$

$$\le E\left[\lambda\,Q\left(\bar{x}^1,\bar{\xi}\right)+(1-\lambda)Q\left(\bar{x}^2,\bar{\xi}\right)\right]=$$

$$=\lambda\,E\left[Q\left(\bar{x}^1,\bar{\xi}\right)\right]+(1-\lambda)E\left[Q\left(\bar{x}^2,\bar{\xi}\right)\right] \quad \square$$

Consecuentemente, un modo de resolver nuestro problema (8.1) es utilizar los algoritmos de programación convexa. No obstante, como la dificultad de calcular $E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right]$ permanece, vamos a continuar con el estudio de las propiedades del problema (8.1), con el fin de obtener, como ya dijimos, otros programas equivalentes a dicho problema y de más fácil solución.

8.1.5.- Es evidente que la función

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)=\min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-}\left\{(\bar{w}^+)'\bar{y}^+ +(\bar{w}^-)'\bar{y}^- \;/\; \bar{y}^- -\bar{y}^+ =\bar{\xi}-f(\bar{x}),\ \bar{y}^+\ge\bar{0},\ \bar{y}^-\ge\bar{0}\right\}=$$

$$=\min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}(w_i^+y_i^+ +w_i^-y_i^-) \;/\; y_i^- -y_i^+ =\xi_i-f_i(\bar{x}),\ y_i^+\ge 0,\ y_i^-\ge 0,\ i=1,..,p\right\}$$

se puede obtener a partir de las soluciones de los p programas asociados en los que solamente se considera un objetivo en cada programa

$$\begin{array}{ll} \min & w_i^+y_i^+ +w_i^-y_i^- \\ s.a. & y_i^- -y_i^+ =\xi_i-f_i(\bar{x}) \qquad i=1,2,\cdots,p \qquad (8.2) \\ & y_i^+,\ y_i^-\ge 0 \end{array}$$

Veamos qué forma tiene dicha solución.

Por la teoría de la dualidad de la programación lineal (véase Balbás y Gil [B.2]), sabemos que, dado un programa en la forma estándar

$$\begin{array}{ll} min & \bar{c}'\bar{x} \\ s.a. & A\bar{x}=\bar{b} \\ & \bar{x}\geq\bar{0} \end{array}$$

su dual es

$$\begin{array}{ll} max & \bar{\lambda}'\bar{b} \\ s.a. & \bar{\lambda}'A\leq\bar{c} \end{array}$$

Nuestro programa es

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-} & w_1^+y_1^+ + w_1^-y_1^- + \ldots + w_p^+y_p^+ + w_p^-y_p^- \\ s.a. & y_1^- - y_1^+ = \xi_1 - f_1(\bar{x}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y_1^- - y_1^+ = \xi_p - f_p(\bar{x}) \\ & \bar{y}^+,\ \bar{y}^-,\bar{x}\geq\bar{0} \end{array}$$

Por lo tanto su dual es

$$\begin{array}{ll} max & \lambda_1\big(\xi_1 - f_1(\bar{x})\big)+\ldots+\lambda_p\big(\xi_p - f_p(\bar{x})\big) \\ s.a. & (\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} w_1^+ \\ w_1^- \\ \vdots \\ w_p^+ \\ w_p^- \end{pmatrix} \end{array}$$

siendo las restricciones equivalentes a

$$\begin{cases} -w_1^- \leq \lambda_1 \leq w_1^+ \\ \qquad\vdots \\ -w_p^- \leq \lambda_p \leq w_p^+ \end{cases}$$

Definamos

$$\bar{\chi} = f(\bar{x})$$

es decir,

$$\bar{\chi} = \left(\chi_1, \cdots, \chi_p\right)$$

donde

$$\chi_i = f_i(\bar{x}), \; i = 1, 2, \cdots, p$$

(Obsérvese que, de hecho, λ_i depende de ξ_i y de χ_i, es decir $\lambda_i = \lambda_i(\xi_i, \chi_i)$, $i = 1, 2, \cdots, p$).

Sea

$$Q_i\left(\chi_i, \xi_i\right) = max\left\{\lambda_i(\xi_i - \chi_i) / -w_i^- \leq \lambda_i \leq w_i^+\right\} \quad , \; i = 1, 2, \cdots, p \qquad (8.3)$$

La solución λ_i^*, $i = 1, 2, \cdots, p$ de estos p programas (8.3) es, obviamente

- Si $(\xi_i - \chi_i) < 0$, $\lambda_i^*(\xi_i, \chi_i) = -w_i^-$.
- Si $(\xi_i - \chi_i) > 0$, $\lambda_i^*(\xi_i, \chi_i) = w_i^+$.
- Si $(\xi_i - \chi_i) = 0$, $\lambda_i^*(\xi_i, \chi_i)$ toma cualquier valor en el intervalo $[-w_i^-, w_i^+]$.

Por lo tanto las soluciones de (8.3) son

$$\lambda_i^* = \begin{cases} w_i^+ & \text{si } \xi_i - \chi_i \geq 0 \\ -w_i^- & \text{si } \xi_i - \chi_i \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, p$$

Es decir

$$Q_i\left(\chi_i,\xi_i\right)=\begin{cases} w_i^+\left(\xi_i-\chi_i\right) & \text{si } \xi_i\geq\chi_i \\ -w_i^-\left(\xi_i-\chi_i\right) & \text{si } \xi_i\leq\chi_i \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,p$$

Finalmente, como consecuencia de las propiedades de la dualidad, podemos concluir que la solución buscada es

$$Q(\bar{x},\bar{\xi})=\sum_{i=1}^{p}Q_i\left(\chi_i,\xi_i\right)$$

Como habíamos observado anteriormente, la función $Q(\bar{x},\bar{\xi})$ resulta ser la suma de las soluciones de los p programas asociados (8.3) en los que únicamente se considera un objetivo cada vez.

Así, si denominamos

$$Q(\bar{\chi},\bar{\xi})=\sum_{i=1}^{p}Q_i\left(\chi_i,\xi_i\right),\quad \mathcal{Q}(\bar{x})=E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right],$$

$$\mathcal{Q}(\bar{\chi})=E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\right]$$

podemos escribir que

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]=\mathcal{Q}(\bar{x})=\mathcal{Q}(\bar{\chi})=E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\right]$$

Consecuentemente la función objetivo de nuestro problema (8.1)

$$\begin{aligned} &\min. && E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ &s.a. && \bar{x}\in X \end{aligned}$$

se puede escribir con cualquiera de las expresiones de la última igualdad.

(Observación: no se deben confundir $\mathcal{Q}(\bar{x})$ y $\mathcal{Q}(\bar{\chi})$ ya que sus dominios son $\Re^n$ y $\Re^p$ respectivamente).

En la propiedad siguiente se demuestra que no es necesario conocer la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria $\bar{\xi}$ para efectuar el cálculo de $E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{x},\bar{\xi})] = Q(\bar{\chi})$, y, por lo tanto, no importa si las componentes, ξ_i, de dicha variable son o no son independientes.

8.1.6.- Conocer las distribuciones de probabilidad marginales de ξ_i es suficiente para determinar la función objetivo del problema (8.1).

En efecto, en el caso continuo tendríamos (suponiendo que se den las condiciones para aplicar el teorema de Fubini):

$$\mathcal{Q}(\bar{x}) = E\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] = \mathcal{Q}(\bar{\chi}) = E\left[Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\right] =$$

$$= \int_{\Xi} Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\, dF(\bar{\xi}) = \int_{\Xi} Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\, f(\bar{\xi})\, d\xi_1 \cdots d\xi_p =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{\Xi} Q_i(\chi_i,\xi_i) f(\bar{\xi}) d\xi_1 \cdots d\xi_p \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{\Xi_i} Q_i(\chi_i,\xi_i) \left(\int_{\Xi_1 \times \cdots \times \Xi_{i-1} \times \Xi_{i+1} \times \cdots \times \Xi_p} f(\bar{\xi}) d\xi_1 \cdots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \cdots d\xi_p \right) d\xi_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_{\Xi_i} Q_i(\chi_i,\xi_i) f_i(\xi_i) d\xi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left\{ w_i^{+} \int_{\xi_i \geq \chi_i} (\xi_i - \chi_i)\, dF_i(\xi_i) - w_i^{-} \int_{\xi_i \leq \chi_i} (\xi_i - \chi_i)\, dF_i(\xi_i) \right\}$$

donde $F(\bar{\xi})$, $f(\bar{\xi})$, $F_i(\xi_i)$ y $f_i(\xi_i)$ son las funciones de distribución y de densidad, respectivamente, de $\bar{\xi}$ y de ξ_i, $i = 1, 2, \cdots, p$. □

En el caso discreto el razonamiento es análogo.

En las dos propiedades que siguen vamos a demostrar que la función objetivo del problema (8.1), $Q(\bar{\chi})$, es convexo - separable, es decir, $Q(\bar{\chi})$ se puede obtener como suma de funciones convexas.

Comencemos demostrando que $Q(\bar{\chi})$ es separable:

8.1.7.- $Q(\bar{\chi})$ es separable, es decir,

$$Q(\bar{\chi})=\sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i)$$

siendo

$$Q_i(\chi_i)=E\left[Q_i(\chi_i,\xi_i)\right]$$

En efecto

$$Q(\bar{\chi})=E\left[Q(\bar{\chi},\bar{\xi})\right]=E\left[\sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i,\xi_i)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{p} E\left[Q_i(\chi_i,\xi_i)\right]=\sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i)\ .\ \square$$

A continuación vamos a estudiar detenidamente las propiedades (continuidad, convexidad y diferenciabilidad) y la forma de cada uno de los sumandos $Q_i(\chi_i)$ de $Q(\bar{\chi})$. Lo hacemos en la propiedad 8.1.8.

8.1.8.- Para estudiar detalladamente la forma de la función $Q_i(\chi_i)$, consideremos

$$\lambda(\bar{\chi})=\left(\lambda_1(\chi_1),\cdots,\lambda_i(\chi_i),\cdots,\lambda_p(\chi_p)\right)$$

con

$$\lambda_i(\chi_i) = E[\lambda_i(\xi_i, \chi_i)]$$

siendo λ_i la solución del i-ésimo programa (8.3).

Por definición

$$\lambda_i(\chi_i) = w_i^+ \int_{\xi_i \geq \chi_i} dF_i(\xi_i) - w_i^- \int_{\xi_i \leq \chi_i} dF_i(\xi_i) =$$

$$= w_i^+ - w_i \int_{\xi_i \leq \chi_i} dF_i(\xi_i)$$

donde

$$w_i = w_i^+ + w_i^-.$$

También

$$Q_i(\chi_i) =$$

$$= w_i^+ \int_{\xi_i \geq \chi_i} (\xi_i - \chi_i) dF_i(\xi_i) - w_i^- \int_{\xi_i \leq \chi_i} (\xi_i - \chi_i) dF_i(\xi_i) =$$

$$= w_i^+ \int_{\xi_i \in \Xi_i} (\xi_i - \chi_i) dF_i(\xi_i) - w_i \int_{\xi_i \leq \chi_i} (\xi_i - \chi_i) dF_i(\xi_i) =$$

$$= w_i^+ E[\xi_i] - w_i \int_{\xi_i \leq \chi_i} \xi_i dF_i(\xi_i) - \left[w_i^+ \chi_i - w_i \int_{\xi_i \leq \chi_i} \chi_i dF_i(\xi_i) \right] =$$

$$= w_i^+ E[\xi_i] - \varphi_i(\chi_i) - \lambda_i(\chi_i)\chi_i$$

donde

$$\varphi_i(\chi_i) = w_i \int_{\xi_i \leq \chi_i} \xi_i \, dF_i(\xi_i)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$Q(\bar{\chi}) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} w_i^+ E[\xi_i] - \sum_{i=1}^{p} [\varphi_i(\chi_i) + \lambda_i(\chi_i)\chi_i]$$

Para ver con más facilidad que $Q_i(\chi_i)$ es convexa y continua y que si la función de distribución $F_i(\xi_i)$ es continua, entonces $Q_i(\chi_i)$ también es diferenciable, vamos a dividir el campo de χ_i en tres partes

$$(-\infty, \alpha_i)\ ,\ [\alpha_i, \beta_i]\ \text{ y }\ (\beta_i, +\infty)$$

siendo α_i y β_i los límites inferior y superior, respectivamente, de los valores de ξ_i, es decir, suponiendo que la variable aleatoria ξ_i está definida en el intervalo $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

(Si ξ_i no tiene límite inferior, hacemos $\alpha_i = -\infty$ y consideramos el primer intervalo vacío, y si ξ_i no tiene límite superior, hacemos $\beta_i = +\infty$ y entonces el tercer intervalo es vacío).

8.1.8.1.- Expresemos $Q_i(\chi_i)$ en cada uno de dichos intervalos:

Caso 1°.- Si $\chi_i < \alpha_i$, entonces $\{\xi_i / \xi_i \le \chi_i\}$ es vacío.

En esta región

$$\lambda_i(\chi_i) = w_i^+$$

$$\varphi_i(\chi_i) = 0$$

$$Q_i(\chi_i) = w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i = w_i^+ \left(E[\xi_i] - \chi_i\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial(\chi_i)} Q_i(\chi_i) = -w_i^+ = -\lambda_i(\chi_i),\ \text{ en } (-\infty, \alpha_i)$$

Por lo tanto en el intervalo $(-\infty, \alpha_i)$, la función $Q_i(\chi_i)$ es lineal.

Caso 2°.- Si $\alpha_i \le \chi_i \le \beta_i$, entonces $\{\xi_i / \xi_i \le \chi_i\} = \{\xi_i / \alpha_i \le \xi_i \le \chi_i\}$

En esta región

$$\lambda_i(\chi_i) = w_i^+ - w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} dF_i(\xi_i)$$

$$\varphi_i(\chi_i) = w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} \xi_i \, dF_i(\xi_i)$$

$$Q_i(\chi_i) = w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i - w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i) \, dF_i(\xi_i)$$

Es decir, la forma de $Q_i(\chi_i)$ en el intervalo depende de $dF_i(\xi_i)$.

Si $Q_i(\chi_i)$ es diferenciable en este intervalo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial(\chi_i)} Q_i(\chi_i) = -w_i^+ + w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} dF_i(\xi_i) = -\lambda_i(\chi_i), \text{ en } [\alpha_i, \beta_i]$$

Caso 3º.- Si $\chi_i > \beta_i$, entonces $\{\xi_i / \xi_i \le \chi_i\} = \Xi$.

En esta región

$$\lambda_i(\chi_i) = w_i^+ - w_i = -w_i^-$$

$$\varphi_i(\chi_i) = w_i E[\xi_i]$$

$$Q_i(\chi_i) = w_i^+ E[\xi_i] - w_i E[\xi_i] + w_i^- \chi_i = -w_i^- (E[\xi_i] - \chi_i)$$

Por lo tanto en el intervalo $(\beta_i, +\infty)$ la función $Q_i(\chi_i)$ es lineal y

$$\frac{\partial}{\partial(\chi_i)} Q_i(\chi_i) = w_i^- = -\lambda_i(\chi_i), \text{ en } (\beta_i, +\infty)$$

Resumiendo, podemos escribir que

$$Q_i(\chi_i) = \begin{cases} w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i & \text{si } \chi_i < \alpha_i \\ w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i - w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i) dF_i(\xi_i) & \text{si } \alpha_i \le \chi_i \le \beta_i \\ -w_i^- E[\xi_i] + w_i^- \chi_i & \text{si } \chi_i > \beta_i \end{cases}$$

(Resultado que aplicaremos con posterioridad).

8.1.8.2.- Proposición. $Q_i(\chi_i)$ es convexa.

Demostración.-

Acabamos de ver que cuando

$$\chi_i < \alpha_i \quad \text{ó} \quad \chi_i > \beta_i,$$

$Q_i(\chi_i)$ es lineal y, por lo tanto convexa (y cóncava).

Luego basta con demostrar que $Q_i(\chi_i)$ es convexa cuando $\alpha_i \le \chi_i \le \beta_i$.

En este caso hemos visto que

$$Q_i(\chi_i) = w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i - w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

Por lo tanto para demostrar la convexidad de $Q_i(\chi_i)$ sólo hay que demostrar que

$$-w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

es convexa en χ_i.

Y dado que $w_i \ge 0$, comprobaremos, únicamente, que

$$\int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\chi_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

es convexa en χ_i .

En efecto, sean

$$\chi_i^1, \chi_i^2, \chi_i^3 = \lambda \chi_i^1 + (1-\lambda)\chi_i^2$$

con

$$\lambda \in [0,1]$$

Supongamos que $\chi_i^1 < \chi_i^2$, entonces tenemos que

$$\int_{\xi_i \le \chi_i^3} (\chi_i^3 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) =$$

$$= \lambda \int_{\xi_i \le \chi_i^3} (\chi_i^1 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) + (1-\lambda) \int_{\xi_i \le \chi_i^3} (\chi_i^2 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) =$$

$$= \lambda \int_{\xi_i \le \chi_i^1} (\chi_i^1 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) + \lambda \int_{\chi_i^1 < \xi_i \le \chi_i^3} (\chi_i^1 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) +$$

$$+ (1-\lambda) \int_{\xi_i \le \chi_i^2} (\chi_i^2 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) -$$

$$- (1-\lambda) \int_{\chi_i^3 < \xi_i \le \chi_i^2} (\chi_i^2 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) \le$$

$$\le \lambda \int_{\xi_i \le \chi_i^1} (\chi_i^1 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) + (1-\lambda) \int_{\xi_i \le \chi_i^2} (\chi_i^2 - \xi_i)\, dF(\xi_i)$$

ya que, obviamente

$$\int_{\chi_i^1 < \xi_i \le \chi_i^3} (\chi_i^1 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) \le 0$$

y

$$\int_{\chi_i^3 < \xi_i \le \chi_i^2} (\chi_i^2 - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) \ge 0$$

Por lo tanto

$$\int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\chi_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

es convexa en χ_i . □

8.1.8.3.- Proposición. $Q_i(\chi_i)$ es continua.

Demostración.-

Si $F_i(\xi_i)$ es una función continua, es obvio observar que $Q_i(\chi_i)$ es continua en todos los puntos interiores de los intervalos

$$(-\infty, \alpha_i) \ , \ [\alpha_i, \beta_i] \quad \text{y} \quad (\beta_i, +\infty)$$

Y tomando $\chi_i \to \alpha_i$ y $\chi_i \to \beta_i$ en las expresiones anteriores, se comprueba sin dificultad que $Q_i(\chi_i)$ también es continua en α_i y en β_i.

Por lo tanto es suficiente con demostrar que $Q_i(\chi_i)$ es continua en los puntos χ_i de discontinuidad de $F_i(\xi_i)$.

Supongamos que $F_i(\xi_i)$ es discontinua en $\xi_i = \alpha_i$

Cuando χ_i converge a α_i por la izquierda, tenemos que

$$\lim_{\chi_i \to \alpha_i^-} Q(\chi_i) = \lim_{\chi_i \to \alpha_i} \left(w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i \right) = w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \alpha_i$$

Cuando χ_i converge a α_i por la derecha, tenemos que

$$\lim_{\chi_i \to \alpha_i^+} Q(\chi_i) =$$

$$= \lim_{\chi_i \to \alpha_i} \left(w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i - w_i \int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i)\, dF_i(\xi_i) \right) =$$

$$= \lim_{\chi_i \to \alpha_i} \left[w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \chi_i - w_i \left(\int_{\alpha_i}^{\chi_i} (\xi_i - \chi_i) f_i(\xi_i)\, d\xi_i + (\alpha_i - \chi_i) P\{\xi_i = \alpha_i\} \right) \right] =$$

$$= w_i^+ E[\xi_i] - w_i^+ \alpha_i$$

Y como ambos límites coinciden, $Q_i(\chi_i)$ es continua en α_i.

De un modo análogo se comprobaría la continuidad de $Q_i(\chi_i)$ en cualquier otro punto de discontinuidad de $F_i(\xi_i)$. □

8.1.8.4.- Proposición. Si $F_i(\xi_i)$ es una función de distribución continua, entonces $Q_i(\chi_i)$ es diferenciable y

$$\frac{\partial}{\partial(\chi_i)} Q_i(\chi_i) = -\lambda_i(\chi_i) \quad \text{en } \Re$$

Demostración.-

Como $F_i(\xi_i)$ es continua, entonces la derivada está bien determinada en todos los puntos interiores de los intervalos

$$(-\infty, \alpha_i) \; , \; [\alpha_i, \beta_i] \; \text{ y } \; (\beta_i, +\infty)$$

y hemos comprobado en el apartado 8.1.8.1 que coincide siempre con

$$-\lambda_i(\chi_i).\ \square$$

Luego la forma de la función $Q_i(\chi_i)$ es

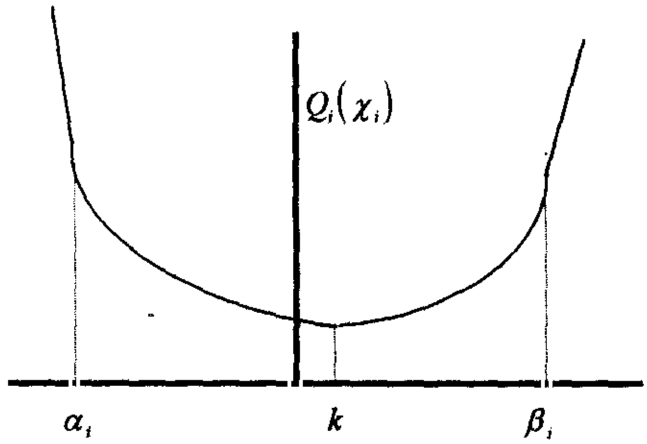


Fig. 1.- Forma de $Q_i(\chi_i)$ cuando $F_i(\xi_i)$ es discontinua en $\xi_i = \{\alpha_i, k, \beta_i\}$

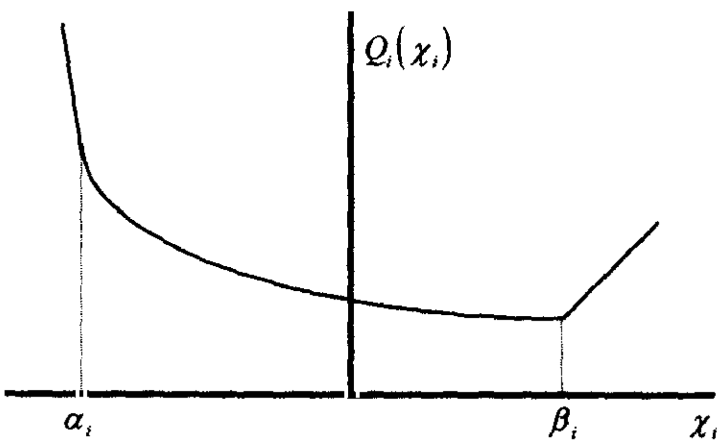


Fig. 2 .- Forma de $Q_i(\chi_i)$ cuando $F_i(\xi_i)$ es una función continua.

Resumiendo las propiedades que hemos visto hasta aquí, tenemos que, nuestro problema (8.1)

$$\begin{array}{ll} mín. & E_{\xi}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)=\min_{\bar{y}^{+},\,\bar{y}^{-}}\left\{(\bar{w}^{+})'\bar{y}^{+}+(\bar{w}^{-})'\bar{y}^{-} \;/\; \bar{y}^{-}-\bar{y}^{+}=\bar{\xi}-f(\bar{x}),\ \bar{y}^{+}\geq\bar{0},\ \bar{y}^{-}\geq\bar{0}\right\}$$

es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll} min & Q(\bar{\chi})=\sum_{i=1}^{p}Q_i(\chi_i) \\ s.a. & \bar{\chi}-f(\bar{x})=\bar{0} \\ & \bar{x}\in X \end{array} \qquad (8.4)$$

y vista la forma de la función $Q_i(\chi_i),\, i=1,\cdots,p$, el problema (8.4) es equivalente al programa que representaremos por (8.5)

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^{+}E\left[\xi_i\right]-w_i^{+}\chi_i-w_i\int_{\xi_i\leq\chi_i}\left(\xi_i-\chi_i\right)dF_i\left(\xi_i\right)\right\} \\ s.a. & \bar{\chi}-f(\bar{x})=\bar{0} \\ & \bar{x}\in X \end{array}$$

cuya función objetivo es lineal salvo en el intervalo $\left[\alpha_i\,,\beta_i\right]$.

Por esto parece razonable construir una nueva función objetivo en la que están separados los términos lineal y no lineal, de manera que el nuevo programa proporcione el mismo conjunto de soluciones que el problema (8.5). A ello llegaremos en la propiedad 8.1.10, y se puede conseguir introduciendo las variables χ_{i1}, χ_{i2} , χ_{i3} y las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}
&-\chi_{i1}+\chi_{i2}+\chi_{i3}=\chi_i-E[\xi_i]\\
&\chi_{i1}\geq E[\xi_i]-\alpha_i\\
&\chi_{i2}\leq \beta_i-\alpha_i\\
&\chi_{i1}\geq 0,\ \chi_{i2}\geq 0,\ \chi_{i3}\geq 0
\end{aligned}\qquad (8.6)$$

Obsérvese que $\chi_{i1}\geq 0$ se verifica siempre ya que $E[\xi_i]\geq \alpha_i$, por lo tanto se puede omitir la restricción $\chi_{i1}\geq 0$.

Si denotamos

$$\Psi_i(\chi_i)=\int_{\xi_i\leq\chi_i}(\chi_i-\xi_i)\,dF_i(\xi_i) \qquad (8.7)$$

$$\Phi_i(\chi_{i1},\chi_{i2},\chi_{i3})=\chi_{i3}+\int_{\xi_i\leq\chi_{i2}+\alpha_i}(\chi_{i2}+\alpha_i-\xi_i)\,dF_i(\xi_i) \qquad (8.8)$$

se puede afirmar la siguiente proposición:

8.1.9.- Proposición. La solución del problema

$$\begin{aligned}
\mathit{min}\quad & \Phi_i(\chi_{i1},\chi_{i2},\chi_{i3})\\
s.a.\quad & -\chi_{i1}+\chi_{i2}+\chi_{i3}=\chi_i-E[\xi_i]\\
& \chi_{i1}\geq E[\xi_i]-\alpha_i\\
& \chi_{i2}\leq \beta_i-\alpha_i\\
& \chi_{i2}\geq 0,\ \chi_{i3}\geq 0
\end{aligned}\qquad (8.9)$$

es $\Psi_i(\chi_i)$.

Demostración.-

Para todo $(\chi_{i1},\chi_{i2},\chi_{i3})$ factible del problema (8.9) tenemos que

$$\Psi_i(\chi_i)=\int_{\xi_i\leq\chi_i}(\chi_i-\xi_i)\,dF_i(\xi_i)=$$

$$=\int_{\xi_i\leq\chi_i}\left(E[\xi_i]-\chi_{i1}+\chi_{i2}+\chi_{i3}-\xi_i\right)dF_i(\xi_i)=$$

$$=\chi_{i3}\,P\{\xi_i\leq\chi_i\}+\left(E[\xi_i]-\chi_{i1}-\alpha_i\right)P\{\xi_i\leq\chi_i\}+$$

$$+\int_{\xi_i \le \chi_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

y como

$$\chi_{i3} \ge 0\,, \quad 0 \le P\{\xi_i \le \chi_i\} \le 1\,, \quad \chi_{i1} \ge E[\xi_i] - \alpha_i$$

tenemos que

$$\Psi_i(\chi_i) \le \chi_{i3} + \int_{\xi_i \le \chi_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) \le$$

$$\le \chi_{i3} + \int_{\xi_i \le \chi_{i2} + \alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

ya que

- si $\chi_{i2} + \alpha_i \ge \chi_i$ la última desigualdad es evidente
- y si $\chi_{i2} + \alpha_i < \chi_i$, se tiene que $\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i < 0$ para cualquier ξ_i tal que $\chi_{i2} + \alpha_i < \xi_i < \chi_i$.

Por lo tanto hemos demostrado que para cualquier $(\chi_{i1}\,, \chi_{i2}\,, \chi_{i3})$ se tiene que

$$\Psi_i(\chi_i) \le \chi_{i3} + \int_{\xi_i \le \chi_{i2} + \alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i) dF_i(\xi_i) =$$

$$= \Phi_i(\chi_{i1}\,, \chi_{i2}\,, \chi_{i3})$$

Veamos a continuación que existe un

$$(\chi_{i1}\,^*, \chi_{i2}\,^*, \chi_{i3}\,^*)$$

factible tal que

$$\Phi_i(\chi_{i1}\,^*, \chi_{i2}\,^*, \chi_{i3}\,^*) = \Psi_i(\chi_i)$$

En efecto,

- si

$$\chi_i < \alpha_i$$

se tiene que

$$\{\xi_i / \xi_i \leq \chi_i\} = \varnothing$$

En este caso hacemos

$$\chi_{i1}{}^* = E[\xi_i] - \chi_i \ , \ \chi_{i2}{}^* = \chi_{i3}{}^* = 0$$

y por lo tanto

$$\{\xi_i / \xi_i \leq \chi_{i2} + \alpha_i\} = \varnothing$$

con lo que

$$\Phi_i(\chi_{i1}{}^*, \chi_{i2}{}^*, \chi_{i3}{}^*) = 0 = \Psi_i(\chi_i).$$

- si

$$\alpha_i \leq \chi_i \leq \beta_i$$

se tiene que

$$\{\xi_i / \xi_i \leq \chi_i\} = \{\xi_i / \alpha_i \leq \xi_i \leq \chi_i\}$$

En este caso hacemos

$$\chi_{i1}{}^* = E[\xi_i] - \alpha_i \ , \ \chi_{i2}{}^* = \chi_i - \alpha_i \ , \ \chi_{i3}{}^* = 0$$

con lo que

$$\Phi_i(\chi_{i1}{}^*, \chi_{i2}{}^*, \chi_{i3}{}^*) = \int_{\xi_i \leq \chi_{i2} + \alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i) dF_i(\xi_i) =$$

$$= \int_{\xi_i \leq \chi_i} (\chi_i - \xi_i) dF_i(\xi_i) = \Psi_i(\chi_i)$$

- si

$$\chi_i > \beta_i$$

puesto que

$$\{\xi_i / \xi_i \leq \beta_i\} = \Xi_i$$

se tiene que

$$\{\xi_i / \xi_i \leq \chi_i\} = \Xi_i$$

En este caso hacemos

$$\chi_{i1}{}^* = E[\xi_i] - \alpha_i \ , \ \chi_{i2}{}^* = \beta_i - \alpha_i \ , \ \chi_{i3}{}^* = \chi_i - \beta_i ,$$

con lo que, por (8.8)

$$\Phi_i(\chi_{i1}{}^*, \chi_{i2}{}^*, \chi_{i3}{}^*) = \chi_i - \beta_i + \int_{\xi_i \leq \beta_i} (\beta_i - \xi_i) dF_i(\xi_i) =$$

$$= \chi_i - \beta_i + \beta_i - E[\xi_i] = \chi_i - E[\xi_i]$$

y por (8.7)

$$\Psi_i(\chi_i) = \int_{\Xi_i} (\chi_i - \xi_i) dF_i(\xi_i) = \chi_i - E[\xi_i]$$

es decir

$$\Phi_i(\chi_{i1}{}^*, \chi_{i2}{}^*, \chi_{i3}{}^*) = \Psi_i(\chi_i) \ . \quad \square$$

8.1.10.- Como consecuencia de la proposición anterior podemos afirmar que si denotamos

$$\Phi_i(\chi_{i1}, \chi_{i2}) = \int_{\xi_i \leq \chi_{i2} + \alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i) \ dF_i(\xi_i)$$

la solución del problema

$$\begin{array}{ll} min & \Phi_i(\chi_{i1}, \chi_{i2}) \\ s.a. & -\chi_{i1} + \chi_{i2} = \chi_i - E[\xi_i] \\ & \chi_{i1} \geq E[\xi_i] - \alpha_i \\ & \chi_{i2} \geq 0 \end{array}$$

es $\Psi_i(\chi_i)$.

La demostración es inmediata por la proposición anterior haciendo $\chi_{i3} = 0$ y $\beta_i = +\infty$.

Ya estamos en condiciones de obtener un programa equivalente al problema (8.1), con la función objetivo convexa y separable y en la que están separados los términos lineal y no lineal:

8.1.11.- Debido a que, por hipótesis, $w_i = w_i^+ + w_i^- \geq 0$ y a la proposición 8.1.9, el problema (8.5) tiene el mismo conjunto de soluciones que el problema

$$
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^+ \chi_{i1} + w_i^- \chi_{i3} - w_i^+ \chi_{i2} + w_i \int_{\xi_i \leq \chi_{i2}+\alpha_i} \left(\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i\right) dF_i(\xi_i)\right\} \\
s.a. & \left.\begin{array}{l}
E[\xi_i] - \chi_{i1} + \chi_{i2} + \chi_{i3} - f_i(\bar{x}) = 0 \\
\chi_{i1} \geq E[\xi_i] - \alpha_i \\
\chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i \\
\chi_{i2} \geq 0 \\
\chi_{i3} \geq 0
\end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \\
& \bar{x} \in X
\end{array}
\tag{8.10}
$$

(Observación: en el caso de que $\beta_i = +\infty$, hacemos $\chi_{i3} = 0$ y se omite al restricción $\chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i$).

Subrayamos de nuevo que, expresado así el problema, para resolverlo es claro que basta con conocer la distribución de probabilidad marginal de cada ξ_i , $i = 1,\cdots,p$, sin ser necesario conocer la distribución conjunta y que, por lo tanto, no importa la dependencia o independencia estocástica de las variables aleatorias ξ_i, $i = 1,\cdots,p$.

También observamos que por ser la función objetivo del problema (8.10) convexa y separable, (es decir, por las propiedades 8.1.7 y 8.1.8.2, dicha función objetivo se puede expresar como suma de funciones convexas), el problema (8.10) se puede resolver por los algoritmos de programación convexa separable propuestos por Dantzig [D.2] (páginas 482-489).

Pero, dado que estos algoritmos son operacionalmente muy complicados, vamos a intentar obtener problemas equivalentes al programa (8.10) (que, a su vez, es equivalente a nuestro problema (8.1)) que sean programas lineales o, a lo sumo, programas cuadráticos. Lo haremos proponiendo distintos algoritmos de solución.

Pasamos, a continuación, a proponer algunos algoritmos de solución para resolver el problema (8.1), bien directamente o bien mediante la resolución de (8.10).

8.2.- Algoritmos de solución para el problema (8.1).

El primer procedimiento de solución que proponemos es el que, en el apartado 4.2.1 del capítulo 4, hemos denominado solución "ingenua". Este método de solución ya lo hemos criticado en el apartado 7.3.1 del capítulo anterior. No obstante, lo proponemos porque permite resolver cualquier problema de programación estocástica y porque, en un primer momento, muchos de estos problemas se han resuelto así.

8.2.1.- Solución "ingenua".

Este procedimiento, como sabemos, consiste en sustituir el valor de la variable aleatoria $\tilde{\xi}$ por su valor esperado $E[\tilde{\xi}]$, y resolver el problema de programación resultante.

Al aplicar este procedimiento al problema (8.1):

$$\min E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$
$$s.a.\ \bar{x} \in X$$

donde

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\ f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\,,\ \bar{y}^+,\ \bar{y}^- \geq \bar{0}\right\}$$

se trataría de resolver el problema (7.7) del apartado 7.3.1

$$\min.\quad Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}])$$
$$s.a.\quad \bar{x} \in X$$

donde

$$Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) = \min_{\bar{y}^+,\,\bar{y}^-}\left\{(\bar{w}^+)'\bar{y}^+ + (\bar{w}^-)'\bar{y}^- \ /\ \bar{y}^- - \bar{y}^+ = E[\bar{\xi}] - f(\bar{x})\,,\ \bar{y}^+ \geq \bar{0}, \bar{y}^- \geq \bar{0}\right\}$$

La principal ventaja que ofrece este método es que transforma el problema de Programación Estocástica por Metas en un problema de Programación por metas determinista pudiendo, por tanto, resolverse mediante cualquiera de los algoritmos comentados en el capítulo 2.

Frente a esta ventaja, recordemos que presenta serios inconvenientes:
En primer lugar no hay que olvidar la observación recogida en el epígrafe 4.2.1 respecto a este procedimiento de solución, en cuanto a la posibilidad de obtener soluciones tales que la probabilidad del evento consistente en que dicha solución esté en el conjunto factible sea muy pequeña.

Además, como comentamos en el apartado 7.3.1, debido a la desigualdad de Jensen (véase [J.3]), este método infravalora el verdadero coste de cada decisión. En dicho apartado lo comprobamos con un ejemplo.

Dantzig, en [D.1], sugiere que este método de solución podría ser una buena solución inicial para resolver problemas de programación estocástica mediante cualquier otro procedimiento.

Veamos, a continuación, que cuando la variable aleatoria $\bar{\xi}$ tiene una distribución de probabilidad discreta finita, entonces el problema (8.1) es equivalente a un programa lineal. En efecto:

8.2.2.- Si **la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria** $\bar{\xi}$ **es** una distribución **discreta finita**, es decir, $\bar{\xi}$ toma los valores $\bar{\xi}_1,\cdots,\bar{\xi}_p$, con probabilidades $p_1,\cdots,p_p$, entonces el problema (8.1)

$$\begin{array}{ll} min. & E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde

$$Q\left(\bar{x},\, \bar{\xi}\right) = \min_{\bar{y}^+,\, \bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a. f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\,,\, \bar{y}^+,\, \bar{y}^- \geq \bar{0}\right\}$$

tiene la forma

$$\begin{array}{ll} min & E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right] = p_1 Q\left(\bar{x},\bar{\xi}_1\right) + \cdots + p_p Q\left(\bar{x},\bar{\xi}_p\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}_i\right) = \min_{\bar{y}_i^+,\, \bar{y}_i^-}\left\{(\bar{w}^+)'\bar{y}_i^+ + (w^-)'\bar{y}_i^- \,/\, f(\bar{x}) + \bar{y}_i^- - \bar{y}_i^+ = \bar{\xi}_i,\, \bar{y}_i^+,\, \bar{y}_i^- \geq \bar{0}\right\},\ i = 1,\cdots,p$$

Problema que denotaremos como (8.1)'.

Este problema es equivalente al programa lineal

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{\bar{x},\, \bar{y}_i^+,\, \bar{y}_i^-} & \sum\limits_{i=1}^{p} p_i\left(\bar{w}^+\bar{y}_i^+ + \bar{w}^-\bar{y}_i^-\right) & \\
s.a. & \left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) + \bar{y}_i^- - \bar{y}_i^+ = \bar{\xi}_i \\ \bar{y}_i^+,\, \bar{y}_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \; i = 1,\cdots,p & \\
& \bar{x} \in X &
\end{array}
\qquad (8.12)
$$

Demostración.-

a) Toda solución de (8.12) lo es de (8.1)'.

En efecto, supongamos que

$$p_i > 0, \forall i = 1,\cdots,p$$

sean

$$\bar{x}_1,\, \tilde{\bar{y}}_i^+,\, \tilde{\bar{y}}_i^-,\; i = 1,\cdots,p$$

soluciones de (8.12).

Entonces, $\forall\, i = 1,\cdots,p$

$$Q\left(\bar{x}_1, \bar{\xi}_i\right) = \bar{w}^+\tilde{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^-\tilde{\bar{y}}_i^-$$

es decir, no existen

$$\tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+,\, \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+ \geq 0$$

para algún j tales que

$$f(\bar{x}_1) + \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^- - \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+ = \bar{\xi}_j$$

$$\bar{w}^+\tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+ + \bar{w}^-\tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^- < \bar{w}^+\tilde{\bar{y}}_j^+ + \bar{w}^-\tilde{\bar{y}}_j^-$$

porque si para algún j existieran tales $\tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+, \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^-$, entonces la solución de (8.12) no sería

$$\bar{x}_1,\, \tilde{\bar{y}}_1^+,\cdots,\, \tilde{\bar{y}}_p^+,\, \tilde{\bar{y}}_1^-,\cdots,\, \tilde{\bar{y}}_p^-$$

sino

$$\bar{x}_1, \tilde{\bar{y}}_1^+, \cdots, \tilde{\bar{y}}_{j-1}^+, \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^+, \tilde{\bar{y}}_{j+1}^+, \cdots, \tilde{\bar{y}}_p^+, \tilde{\bar{y}}_1^-, \cdots, \tilde{\bar{y}}_{j-1}^-, \tilde{\tilde{\bar{y}}}_j^-, \tilde{\bar{y}}_{j+1}^-, \cdots, \tilde{\bar{y}}_p^-$$

Luego si $\bar{x}_1$, $\tilde{\bar{y}}_i^+$, $\tilde{\bar{y}}_i^-$, $i=1,\cdots,p$ es la solución de (8.12), entonces

$$\sum_{i=1}^{p} p_i \left(\bar{w}^+ \tilde{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^- \tilde{\bar{y}}_i^-\right) = \sum_{i=1}^{p} p_i Q\left(\bar{x}_1, \bar{\xi}_i\right)$$

y $\bar{x}_1$ resulta ser solución de (8.1)', ya que si existe $\bar{x}_0 \in X$, tal que

$$p_1 Q\left(\bar{x}_0, \bar{\xi}_1\right) + \cdots + p_p Q\left(\bar{x}_0, \bar{\xi}_p\right) <$$

$$< p_1 Q\left(\bar{x}_1, \bar{\xi}_1\right) + \cdots + p_p Q\left(\bar{x}_1, \bar{\xi}_p\right)$$

entonces, existirán $\hat{\bar{y}}_i^+, \hat{\bar{y}}_i^- \geq 0$, $i=1,\cdots,p$ tales que

$$f(\bar{x}_0) + \hat{\bar{y}}_i^- - \hat{\bar{y}}_i^+ = \bar{\xi}_i \ , \ i=1,\cdots,p$$

$$\sum_{i=1}^{p} p_i \left(\bar{w}^+ \hat{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^- \hat{\bar{y}}_i^-\right) < \sum_{i=1}^{p} p_i \left(\bar{w}^+ \tilde{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^- \tilde{\bar{y}}_i^-\right)$$

y por lo tanto $\bar{x}_1$, $\tilde{\bar{y}}_i^+$, $\tilde{\bar{y}}_i^-$, $i=1,\cdots,p$ no sería solución de (8.12).

b) Toda solución de (8.1)' lo es de (8.12).
En efecto, sea $\bar{x}_0$ solución de (8.1)' y sea

$$Q\left(\bar{x}_0, \bar{\xi}_i\right) = \bar{w}^+ \hat{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^- \hat{\bar{y}}_i^- \ .$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{p} p_i \, Q\left(\bar{x}_0, \bar{\xi}_i\right) < \sum_{i=1}^{p} p_i \, Q\left(\bar{x}, \bar{\xi}_i\right), \quad \forall \bar{x} \in X \, ,$$

lo que significa que $\forall \, \bar{x} \in X$ se verifica que

$$\sum_{i=1}^{p} p_i \left(\bar{w}^+ \hat{\bar{y}}_i^+ + \bar{w}^- \hat{\bar{y}}_i^-\right) < \sum_{i=1}^{p} p_i \left(\bar{w}^+ \bar{y}_i^+ + \bar{w}^- \bar{y}_i^-\right)$$

siendo $\bar{y}_i^+, \bar{y}_i^- \geq 0$ tales que

$$f(\bar{x}_0)+\bar{y}_i^- - \bar{y}_i^+ = \bar{\xi}_i \ , \quad \forall\, i=1,\cdots,p$$

Pero esto es equivalente a decir que $\bar{x}_0, \hat{\bar{y}}_i^+, \hat{\bar{y}}_i^-$, $i=1,\cdots,p$ es la solución de (8.12).

A continuación veremos algoritmos de solución del problema (8.10) para ciertos casos en que las variables aleatorias $\xi_i, i=1,\cdots,p$ tienen algunas distribuciones de probabilidad concretas.

8.2.3.- Supongamos que **las variables aleatorias** $\xi_i, i=1,\cdots,p$ **tienen una distribución de probabilidad uniforme** en su soporte $[\alpha_i, \beta_i]$, es decir, su función de densidad es

$$f_i(\xi_i)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta_i-\alpha_i} & \text{si } \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, como

$$0 \leq \chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i$$

tenemos que

$$\int_{\xi_i \leq \chi_{i2}+\alpha_i} (\chi_{i2}+\alpha_i-\xi_i)\, dF_i(\xi_i) =$$

$$= \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+\chi_{i2}} (\chi_{i2}+\alpha_i-\xi_i)\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}\, d\xi_i = \frac{1}{2(\beta_i-\alpha_i)}\chi_{i2}^2$$

Por lo tanto, en este caso, el programa equivalente al problema (8.1) es el programa cuadrático convexo

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{p}\left\{ w_i^+\chi_{i1} + w_i^-\chi_{i3} - w_i^+\chi_{i2} + \frac{w_i}{2(\beta_i-\alpha_i)}\chi_{i2}^2 \right\} \\
s.a. \quad & \left.\begin{array}{l}
E[\xi_i] - \chi_{i1} + \chi_{i2} + \chi_{i3} - f_i(\bar{x}) = 0 \\
\chi_{i1} \geq E[\xi_i] - \alpha_i = \dfrac{\beta_i - \alpha_i}{2} \\
0 \leq \chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i \\
\chi_{i3} \geq 0
\end{array}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \qquad (8.13) \\
& \bar{x} \in X
\end{aligned}
$$

que se puede resolver mediante los algoritmos propios (véase por ejemplo, Beale [B.4]).

8.2.4.- Supongamos que **las variables aleatorias** $\xi_i, i=1,\cdots,p$ **tienen una distribución de probabilidad exponencial** con función de densidad

$$
f_i(\xi_i) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i \xi_i} & \text{para } \xi_i \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

donde $\lambda_i > 0$.

En este caso

$$
\alpha_i = 0, \; \beta_i = +\infty
$$

luego

$$
\chi_{i3} = 0
$$

y se omite la restricción

$$
\chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i
$$

Luego se tiene

$$
\int_{\xi_i \leq \chi_{i2}+\alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i) = \lambda_i \int_0^{\chi_{i2}} (\chi_{i2} - \xi_i)\, e^{-\lambda_i \xi_i} d\xi_i =
$$

$$= \chi_{i2} - \frac{1}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i \chi_{i2}}\right)$$

con lo que el programa equivalente a nuestro problema (8.1) es

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{p}\left\{ w_i^+ \chi_{i1} + w_i^- \chi_{i2} - \frac{w_i}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i \chi_{i2}}\right)\right\} \\ s.a. & \left.\begin{array}{l} E[\xi_i] - \chi_{i1} + \chi_{i2} - f_i(\bar{x}) = 0 \\ \chi_{i1} \geq E[\xi_i] = \frac{1}{\lambda_i} \\ \chi_{i2} \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1, \cdots, p \\ & \bar{x} \in X \end{array} \qquad (8.14)$$

que es un programa convexo.

Wets [W.8] sugiere, en el caso de un problema convexo de programación estocástica con recursos, con el fin de facilitar la resolución del problema, hallar un programa cuadrático aproximado equivalente.

Vamos a hacerlo también en nuestro caso utilizando el desarrollo en serie de Taylor de $e^{-\lambda_i \chi_{i2}}$ y aproximando dicho desarrollo por sus términos de primer y segundo orden, es decir

$$1 - e^{-\lambda_i \chi_{i2}} = 1 - \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\lambda_i \chi_{i2})^r}{r!} =$$

$$= 1 - 1 + \lambda_i \chi_{i2} - \frac{\lambda_i^2 \chi_{i2}^2}{2} + \sum_{r=3}^{\infty} (-1)^r \frac{\lambda_i^r \chi_{i2}^r}{r!} \approx$$

$$\approx \lambda_i \chi_{i2} - \frac{\lambda_i^2 \chi_{i2}^2}{2}$$

Con lo que el programa quedaría

$$
\begin{aligned}
min\quad & \sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^+\chi_{i1}-w_i^+\chi_{i2}+\frac{w_i\lambda_i}{2}\chi_{i2}^2\right\} \\
s.a.\quad & \left.\begin{aligned} & E[\xi_i]-\chi_{i1}+\chi_{i2}-f_i(\bar{x})=0 \\ & \chi_{i1}\geq E[\xi_i]=\frac{1}{\lambda_i} \\ & \chi_{i2}\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad i=1,\cdots,p \qquad (8.15) \\
& \bar{x}\in X
\end{aligned}
$$

Pero, como hemos hallado una función objetivo aproximada a la función objetivo del problema inicial, es conveniente, al menos a posteriori, obtener alguna información sobre la exactitud de la aproximación, es decir, conviene hallar un límite del error del valor obtenido para la función objetivo, que se puede obtener del siguiente modo:

Reescribiendo las funciones objetivo de los programas (8.14) y (8.15)

$$Q(\chi_1,\chi_2)=\sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^+\chi_{i1}+w_i^-\chi_{i2}-\frac{w_i}{\lambda_i}\left(1-e^{-\lambda_i\chi_{i2}}\right)\right\}$$

$$\hat{Q}(\chi_1,\chi_2)=\sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^+\chi_{i1}-w_i^+\chi_{i2}+\frac{w_i\lambda_i}{2}\chi_{i2}^2\right\}$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
& \Delta(\chi_2)=Q(\chi_1,\chi_2)-\hat{Q}(\chi_1,\chi_2)= \\
& =\sum_{i=1}^{p}w_i\left\{\chi_{i2}-\frac{1}{\lambda_i}\left(1-e^{-\lambda_i\chi_{i2}}\right)-\frac{\lambda_i}{2}\chi_{i2}^2\right\}= \\
& =\sum_{i=1}^{p}\Delta_i(\chi_{i2})
\end{aligned}
$$

Dado que

$$\Delta(0)=0$$

$$\Delta'(\chi_{i2}) = w_i\left(1 - e^{-\lambda_i \chi_{i2}} - \lambda_i \chi_{i2}\right)$$

y por lo tanto

$$\Delta'(0) = 0$$

y

$$\Delta''(\chi_{i2}) = w_i\left(\lambda_i e^{-\lambda_i \chi_{i2}} - \lambda_i\right) \leq 0 \text{ , para } \chi_{i2} \geq 0$$

luego

$$\Delta(\chi_{i2}) \leq 0$$

y consecuentemente

$$\Delta(\chi_2) \leq 0 \text{ , para } \chi_2 \geq \overline{0}$$

es decir

$$Q(\chi_1, \chi_2) \leq \hat{Q}(\chi_1, \chi_2) \qquad (8.16)$$

Por otro lado, como

$$w_i\left[\chi_{i2} - \frac{1}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i \chi_{i2}}\right)\right] \geq 0 \text{ , para } \chi_{i2} \geq 0$$

se tiene que

$$Q(\chi_1, \chi_2) \geq \sum_{i=1}^{p}\left\{w_i^+ \chi_{i1} - w_i^+ \chi_{i2}\right\} =$$

$$= -(w^+)' f(\overline{x}) + (w^+)' E[\overline{\xi}] = L(\overline{x}) \qquad (8.17)$$

Teniendo en cuenta (8.16) y (8.17) se puede escribir que

$$L(\overline{x}) \leq Q(\chi_1, \chi_2) \leq \hat{Q}(\chi_1, \chi_2)$$

Luego si $\overline{x}^1, \overline{x}^2$ (y por lo tanto $\overline{\chi}^1, \overline{\chi}^2$) y $\overline{x}^3$ son los vectores factibles mínimos con respecto a Q, $\hat{Q}$ y L, tenemos que

$$L\left(\overline{x}^3\right) \leq L\left(\overline{x}^1\right) \leq Q\left(\chi_1^1, \chi_2^1\right) \leq Q\left(\chi_1^2, \chi_2^2\right) \leq$$

$$\leq \hat{Q}\left(\chi_1^2, \chi_2^2\right)$$

Es evidente que los límites $\hat{Q}(\chi_1^2, \chi_2^2)$ y $L(\bar{x}^3)$, que se determinan resolviendo un programa cuadrático y otro lineal, dependen esencialmente de los datos $\overline{w}^+, \overline{w}^-$, $E[\bar{\xi}]$, f y del conjunto factible X.

Algunas observaciones de interés:

De lo visto hasta aquí es claro que, debido a la complejidad de los cálculos, resulta difícil obtener una solución numérica exacta de nuestro problema (8.1) de *Programación Estocástica por Metas*, incluso siendo únicamente aleatorio el vector de los niveles de aspiración $\bar{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_p)$

Hemos visto que cuando la distribución de probabilidad conjunta de la variable aleatoria $\bar{\xi}$ es discreta finita, el problema se transforma en un programa lineal.

Cuando las distribuciones de probabilidad de las componentes de dicha variable aleatoria, ξ_i , $i = 1, \cdots, p$, son uniformes, el problema se transforma en un problema de programación cuadrática.

En el caso de que las distribuciones de probabilidad de ξ_i , $i = 1, \cdots, p$ sean exponenciales, el programa convexo resultante se puede aproximar por un programa cuadrático concreto, siendo necesario, debido a la aproximación, obtener un error de la estimación a posteriori.

Para otro tipo de distribuciones de probabilidad de la variable aleatoria $\bar{\xi}$ resulta complicado resolver el problema (8.1), incluso utilizando el programa (8.10), porque sigue presentando dificultades la resolución de la integral de la parte no lineal de la función objetivo:

$$\int_{\xi_i \leq \chi_{i2} + \alpha_i} (\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i)\, dF_i(\xi_i)$$

Debido a estas dificultades de cálculo para obtener una solución exacta de nuestro problema (8.1), en el apartado 8.4 proponemos resolverlo utilizando el método de aproximaciones mediante acotaciones considerado en el apartado 4.3 del capítulo 4. En el próximo apartado vamos a demostrar un resultado que permite simplificar notablemente los cálculos de dicho algoritmo.

8.3.- Proposición. Dado un valor concreto de $\bar{x}$, $\bar{x}=\bar{x}^*$, (y por lo tanto un valor concreto de $\bar{\chi}$, $\bar{\chi}=\bar{\chi}^*$, ya que $\bar{\chi}^*=f(\bar{x}^*)$), se puede determinar el valor exacto de $E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{\chi}^*,\bar{\xi})]$.

Demostración,-

En la propiedad 8.1.5 del problema (8.1) vimos que

$$E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{x},\bar{\xi})]=Q(\bar{x}) = Q(\bar{\chi})=E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{\chi},\bar{\xi})]$$

por lo tanto, en lo que sigue, utilizaremos indistintamente la expresión que más nos convenga para referirnos a la función objetivo de dicho problema.

También hemos visto, en la propiedad 8.1.7, que

$$Q(\bar{\chi})=\sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i)$$

A continuación, al estudiar la forma de la función $Q_i(\chi_i)$ en la propiedad 8.1.8, obtuvimos que

$$Q_i(\chi_i)=\begin{cases} w_i^+E[\xi_i]-w_i^+\chi_i & \text{si } \chi_i<\alpha_i \\ w_i^+E[\xi_i]-w_i^+\chi_i-w_i\int_{\alpha_i}^{\chi_i}(\xi_i-\chi_i)dF_i(\xi_i) & \text{si } \alpha_i\le\chi_i\le\beta_i \\ -w_i^-E[\xi_i]+w_i^-\chi_i & \text{si } \chi_i>\beta_i \end{cases}$$

Y como por la propiedad 8.1.5

$$Q_i(\chi_i,\xi_i)=\begin{cases} w_i^+(\xi_i-\chi_i) & \text{si } \xi_i\geq\chi_i \\ -w_i^-(\xi_i-\chi_i) & \text{si } \xi_i\leq\chi_i \end{cases}$$

tenemos que, para $\chi_i<\alpha_i$ y $\chi_i>\beta_i$

$$Q_i(\chi_i)=Q_i(\chi_i,E[\xi_i]) \qquad (8.18)$$

La relación (8.18) nos permite, para cualquier $\chi_i=\chi_i{*}$ fijo, determinar el valor exacto de $Q_i(\chi_i{*})$.

En efecto, consideremos cualquier $\chi_i=\chi_i{*}$ fijo

- si $\chi_i{*}<\alpha_i$ o $\chi_i{*}>\beta_i$

  por (8.18), tenemos que

$$Q_i(\chi_i{*})=Q_i(\chi_i{*},E[\xi_i]) \qquad (8.19)$$

- si $\chi_i{*}\in[\alpha_i,\beta_i]$, es decir, si $\alpha_i\leq\chi_i{*}\leq\beta_i$, realizamos una partición del intervalo $[\alpha_i,\beta_i]$ en los subintervalos

$$[\alpha_i,\chi_i{*}] \text{ y } (\chi_i{*},\beta_i]$$

  Sean las esperanzas condicionales

$$E\left[\xi_i/\xi_i\in[\alpha_i,\chi_i{*}]\right]=E_1[\xi_i]$$

$$E\left[\xi_i/\xi_i\in(\chi_i{*},\beta_i]\right]=E_2[\xi_i]$$

  Obviamente la relación (8.18) se puede aplicar también a las esperanzas condicionales, es decir,

  si

$$Q_i^1(\chi_i{*})=E\left[Q_i(\chi_i{*},\xi_i)/\xi_i\in[\alpha,\chi_i{*}]\right]$$

$$Q_i^2(\chi_i{*})=E\left[Q_i(\chi_i{*},\xi_i)/\xi_i\in(\chi_i{*},\beta_i]\right]$$

podemos escribir que

$$Q_i^1(\chi_i\,^*) = Q_i(\chi_i\,^*, E_1[\xi_i\,]) \quad , \quad Q_i^2(\chi_i\,^*) = Q_i(\chi_i\,^*, E_2[\xi_i\,])$$

y con la notación

$$p_i^1 = P\{\xi_i \in [\alpha_i, \chi_i\,^*]\} \quad , \quad p_i^2 = P\{\xi_i \in (\chi_i\,^*, \beta_i]\}$$

tenemos que

$$Q_i(\chi_i\,^*) = p_i^1 Q_i^1(\chi_i\,^*) + p_i^2 Q_i^2(\chi_i\,^*) =$$

$$= p_i^1 Q_i\,(\chi_i\,^*, E_1[\xi_i\,]) + p_i^2 Q_i\,(\chi_i\,^*, E_2[\xi_i\,]) \qquad (8.20)$$

Con lo que queda demostrado que, para cualquier $\chi_i = \chi_i\,^*$ fijo, se puede determinar fácilmente el valor exacto de $Q_i(\chi_i{}^*)$.

Y, consecuentemente, como

$$E[Q\,(\bar{\chi}^*, \bar{\xi})] = Q\,(\bar{\chi}^*) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i\,^*)$$

se tiene el valor exacto de

$$E[Q\,(\bar{\chi}^*, \bar{\xi})]. \quad \square$$

A continuación proponemos un algoritmo de solución para el problema (8.1) basándonos en el método por aproximaciones mediante acotaciones considerado en el apartado 4.3 del capítulo 4, pero notablemente simplificado en los cálculos debido a que:

- el límite inferior de la función objetivo del problema (8.1) se halla con mucha facilidad ya que, por la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$Q(\bar{\chi}, E[\bar{\xi}]) \leq E[Q(\bar{\chi}, \bar{\xi})] = Q(\bar{\chi}) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i)$$

Luego la cota inferior buscada es $Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) = Q(\bar{\chi}, E[\bar{\xi}])$. Denominaremos a esta cota límite inferior de Jensen.

- Debido a la proposición 8.3, no necesitaremos hallar ningún límite superior de la función objetivo de (8.1) puesto que para un valor concreto de $\bar{\chi}$, $\bar{\chi} = \bar{\chi}^*$, que obtendremos fácilmente, se tiene el valor exacto de dicha función objetivo en $\bar{\chi}^*$.

8.4.- Método por aproximaciones mediante acotaciones.

El algoritmo para resolver nuestro problema (8.1)

$$\begin{array}{ll} \min. & E_{\bar{\xi}}[Q(\bar{x}, \bar{\xi})] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

consiste en los siguientes pasos:

1.- Se determina el límite inferior de Jensen, $Q(\bar{x}, E[\bar{\xi}]) = Q(\bar{\chi}, E[\bar{\xi}])$, para la función objetivo de (8.1).

2.- Se minimiza el límite anterior, obteniendo un valor concreto $\bar{\chi} = \bar{\chi}^*$, solución del problema

$$\min_{\bar{\chi}} \; Q(\bar{\chi}, \bar{\xi})$$

(Por lo tanto, dado que $\bar{\chi} = f(\bar{x})$, también se obtiene un valor de $\bar{x}$, $\bar{x} = \bar{x}^*$, que, evidentemente, coincide con la solución "ingenua").

3.- Con el valor obtenido, $\bar{\chi}^*$, se determina el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$.

4.- Obviamente, el valor de la solución $\bar{\chi}^{**}$ que se busca

$$Q(\bar{\chi}^{**}) = \min_{\bar{\chi}} Q(\bar{\chi})$$

debe cumplir que

$$Q(\overline{\chi}^*, E[\xi]) \leq Q(\overline{\chi}^{**}, E[\xi]) \leq Q(\overline{\chi}^{**}) \leq Q(\overline{\chi}^*)$$

Por lo tanto $\overline{\chi}^*$ puede interpretarse como una solución "aproximada", siendo el error cometido al considerar dicha solución menor o igual que la diferencia

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q(\overline{\chi}^*, E[\xi])$$

5.- Se decide si dicho error es o no es aceptable.

En caso de que lo sea, se termina el problema, y se acepta como solución del problema (8.1) $\bar{x} = \bar{x}^*$.

En caso de que no lo sea, se hace una partición de los intervalos $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \cdots, p$, soportes de las variables aleatorias ξ_i, $i = 1, 2, \cdots, p$, en subintervalos:

$$I_i = [\delta_{i\upsilon}\ ,\ \delta_{i\upsilon+1}] \qquad \upsilon = 1, \ldots, N_{i-1},$$

con

$$\alpha_i = \delta_{i0} < \delta_{i1} < \cdots < \delta_{iN_i} = \beta_i$$

y se obtiene el límite inferior de Jensen en cada subintervalo.

Sumando estos límites y ponderando los sumandos con la probabilidad condicionada a estar en el correspondiente intervalo, se tiene un límite global inferior de Jensen.

6.- A continuación se repite el algoritmo desde el paso 2, es decir, se minimiza el límite obtenido en el paso 5 para obtener un valor concreto de $\overline{\chi}$.

Esto es, si

$$p_{i\upsilon} = P\{\xi_i \in I_{i\upsilon}\} \quad , \quad E[\xi_{i\upsilon}] = E[\xi_i / \xi_i \in I_{i\upsilon}]$$

se resuelve

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\chi}} \quad & \sum_{i=1}^{p}\sum_{\upsilon=0}^{N_{i-1}} p_{i\upsilon}\, Q_i\left(\chi_i, E[\xi_i]\right) \\ s.a. \quad & \bar{x} \in X \\ & f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0} \end{aligned}$$

obteniendo una solución que, de nuevo, denotaremos por

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}^*$$

(Y también se obtiene $\bar{x} = \bar{x}^*$, ya que $\bar{\chi}^* = f(\bar{x}^*)$).

Nota: la restricción $f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0}$ del programa anterior tiene como única finalidad expresar la relación entre las variables $\bar{x}$ y $\bar{\chi}$.

Y se repite el proceso hasta obtener una solución satisfactoria para el decisor.

Observaciones:

- Una vez determinado el valor $\bar{\chi}^*$, por el cuarto paso del algoritmo sabemos que el error cometido al aceptar $\bar{\chi}^*$ como solución del problema (8.1) es menor o igual que

$$Q(\bar{\chi}^*) - Q\left(\bar{\chi}^*, E[\bar{\xi}]\right) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i) - \sum_{i=1}^{p} Q_i\left(\chi_i, E[\xi_i]\right)$$

- Por otro lado, en la proposición 8.3 hemos visto que si $\chi_i^* < \alpha_i$ o $\chi_i^* > \beta_i$, se tiene (8.19):

$$Q_i\left(\chi_i^*\right) = Q_i\left(\chi_i^*, E[\xi_i]\right) \qquad (8.19)$$

y por lo tanto, en estos casos, en la componente $i-$ ésima no existe error al aceptar como solución del problema (8.1) $\bar{\chi}^*$.

- Luego sólo se da error en aquellas componentes χ_i de $\bar{\chi}^*$ tales que $\alpha_i \leq \chi_i^* \leq \beta_i$, ya que en ellas se determina el valor de $Q_i(\chi_i^*)$ mediante la expresión (8.19):

$$Q_i(\chi_i^*) = p_i^1 Q_i\left(\chi_i^*, E_1[\xi_i]\right) + p_i^2 Q_i\left(\chi_i^*, E_2[\xi_i]\right)$$

  que no tiene por que coincidir con $Q_i(\chi_i^*, E[\xi_i])$.

- Por lo tanto, las particiones de los intervalos $[\alpha_i, \beta_i]$, soportes de las variables aleatorias ξ_i, propuestas en el paso 5 del algoritmo con el fin de mejorar la solución aproximada del problema (8.1), sólo se efectuarán en aquellas componentes ξ_i de $\bar{\xi}$ para las que se tenga que $\alpha_i \leq \chi_i^* \leq \beta_i$, puesto que sólo en ellas existe error al aceptar $\bar{\chi}^*$ como solución del problema (8.1).

Con el fin de clarificar los modelos de solución propuestos, en el apartado siguiente resolvemos un ejemplo numérico.

8.5.- Ejemplo Numérico.

Consideremos el problema de programación estocástica por metas (7.4)

$$\begin{aligned}
&\text{"}min\text{"} \quad \sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right) \\
&s.a. \quad \bar{x} \in X \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = \xi_i \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \\ w_i^+, w_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \quad i = 1, \cdots, p
\end{aligned}$$

en el que

- $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$, con $f_1(\bar{x}) = f_1(x_1, x_2) = x_1$, $f_2(\bar{x}) = f_2(x_1, x_2) = x_2$

  Por lo tanto, como $\bar{\chi} = f(\bar{x})$, tendremos que $\chi_1 = f_1(\bar{x}) = x_1$ y $\chi_2 =$ $= f_2(\bar{x}) = x_2$.

  (Utilizaremos indistintamente la variable $\bar{x}$ o la variable $\bar{\chi}$, según nos convenga).

- $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, con distribuciones de probabilidad uniformes e independientes $\xi_1 : U[0,10]$, $\xi_2 : U[8,20]$.

- $w_1^+ = w_1^+ = w_2^+ = w_2^- = 1$

- $X = \{\bar{x} = (x_1, x_2) / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

Luego el problema a resolver es

$$
\begin{array}{ll}
\text{"mín."} & \bar{y}^+ + \bar{y}^- \\
s.a. & x_1 + y_1^- - y_1^+ = \xi_1 \\
 & x_2 + y_2^- - y_2^+ = \xi_2 \\
 & y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\qquad (8.21)
$$

Vamos a resolver el problema aplicando algunos de los procedimientos de solución que hemos visto.

1.- Si lo resolvemos mediante la denominada "solución ingenua", tenemos que sustituir en (8.21) ξ_1 y ξ_2, por sus correspondientes valores esperados, $E[\xi_1] = 5$, $E[\xi_2] = 14$ y resolver, mediante el Simplex, el problema determinista de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{"}min.\text{"} && \bar{y}^+ + \bar{y}^- \\ &s.a. && x_1 + y_1^- - y_1^+ = 5 \\ &&& x_2 + y_2^- - y_2^+ = 14 \\ &&& y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{8.22}$$

cuya solución es

$$x_1{}^* = 5\ ,\ x_2{}^* = 14\ ,\ y_1^+ = y_1^- = y_2^+ = y_2^- = 0$$

2.- Si lo resolvemos utilizando el Equivalente Determinista (8.1)

$$\begin{aligned} &min. && E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ &s.a. && \bar{x} \in X \end{aligned}$$

donde

$$Q(\bar{x},\ \bar{\xi}) = \min_{\bar{y}^+, \bar{y}^-} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\ f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\ ,\ \bar{y}^+,\ \bar{y}^- \geq \bar{0} \right\}$$

la solución se puede obtener de dos modos:

2.1.- Mediante el modelo (8.10)

$$\begin{aligned} &\mathbf{min} && \sum_{i=1}^{p} \left\{ w_i^+ \chi_{i1} + w_i^- \chi_{i3} - w_i^+ \chi_{i2} + w_i \int_{\xi_i \leq \chi_{i2} + \alpha_i} \left(\chi_{i2} + \alpha_i - \xi_i \right) dF_i(\xi_i) \right\} \\ &s.a. && \left. \begin{aligned} & E[\xi_i] - \chi_{i1} + \chi_{i2} + \chi_{i3} - f_i(\bar{x}) = 0 \\ & \chi_{i1} \geq E[\xi_i] - \alpha_i \\ & \chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i \\ & \chi_{i2} \geq 0 \\ & \chi_{i3} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \cdots, p \\ &&& \bar{x} \in X \end{aligned}$$

que, al tener las variables aleatorias una distribución uniforme, es equivalente al modelo (8.13)

$$
\begin{aligned}
min\quad & \sum_{i=1}^{p}\left\{ w_i^{+}\chi_{i1} + w_i^{-}\chi_{i3} - w_i^{+}\chi_{i2} + \frac{w_i}{2(\beta_i-\alpha_i)}\chi_{i2}^{2} \right\} \\
s.a.\quad & \left.\begin{aligned}
& E[\xi_i] - \chi_{i1} + \chi_{i2} + \chi_{i3} - f_i(\bar{x}) = 0 \\
& \chi_{i1} \geq E[\xi_i] - \alpha_i = \frac{\beta_i-\alpha_i}{2} \\
& 0 \leq \chi_{i2} \leq \beta_i - \alpha_i \\
& \chi_{i3} \geq 0
\end{aligned}\right\} \quad i = 1,\cdots,p \\
& \bar{x} \in X
\end{aligned}
$$

que, en nuestro caso, se trataría de resolver el problema convexo de programación cuadrática

$$
\begin{aligned}
min\quad & \left(\chi_{11} + \chi_{13} - \chi_{12} + \chi_{21} + \chi_{23} - \chi_{22} + \frac{1}{20}\chi_{12}^{2} + \frac{1}{24}\chi_{22}^{2} \right) \\
s.a.\quad & 5 - \chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{13} - \chi_1 = 0 \\
& 14 - \chi_{21} + \chi_{22} + \chi_{23} - \chi_2 = 0 \\
& \chi_{11} \geq 5 \\
& \chi_{21} \geq 6 \\
& 0 \leq \chi_{12} \leq 10 \\
& 0 \leq \chi_{22} \leq 12 \\
& \chi_{13}, \chi_{23} \geq 0
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

2.2.- Utilizando el algoritmo por aproximaciones mediante acotaciones propuesto en el apartado 8.4.

Vamos a efectuar los pasos descritos en dicho apartado:

1. Hallamos el límite inferior de Jensen de la función objetivo de (8.1)

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$

que es

$$Q(\bar{\chi}, E[\bar{\xi}])$$

En la propiedad 8.1.5 del problema (8.1) vimos que

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = Q(\bar{\chi},\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i,\xi_i)$$

y que

$$Q_i(\chi_i,\xi_i) = \begin{cases} w_i^+(\xi_i - \chi_i) & \text{si } \xi_i \geq \chi_i \\ -w_i^-(\xi_i - \chi_i) & \text{si } \xi_i \leq \chi_i \end{cases}$$

Por lo tanto, en nuestro caso, por ser

$$w_1^+ = w_1^+ = w_2^+ = w_2^- = 1$$

$$\xi_1 : U[0,10] \Rightarrow E[\xi_1] = 5 \ ; \ \xi_2 : U[8,20] \Rightarrow E[\xi_2] = 14$$

$$f_1(\bar{x}) = f_1(x_1,x_2) = x_1 = \chi_1 ; f_2(\bar{x}) = f_2(x_1,x_2) = x_2 = \chi_2$$

tenemos que, el límite inferior de Jensen es

$$Q(\bar{x},E[\bar{\xi}]) = Q(\bar{\chi},E[\bar{\xi}]) = \sum_{i=1}^{p} Q(\chi_i,E[\bar{\xi}]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \begin{cases} w_i^+(E[\xi_i] - \chi_i) & si \ E[\xi_i] \geq \chi_i \\ -w_i^-(E[\xi_i] - \chi_i) & si \ E[\xi_i] \leq \chi_i \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5 - x_1 \ , & \text{si} \quad 5 \geq x_1 \\ -5 + x_1 \ , & \text{si} \quad 5 \leq x_1 \end{cases} + \begin{cases} 14 - x_2 \ , & \text{si} \quad 14 \geq x_2 \\ -14 + x_2 \ , & \text{si} \quad 14 \leq x_2 \end{cases}$$

2. Minimizamos el límite inferior de Jensen, esto es, resolvemos el programa

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\chi}} \quad & \sum_{i=1}^{p} Q_i(\chi_i, E[\xi_i]) \\ s.a. \quad & \bar{x} \in X \\ & f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0} \end{aligned}$$

Que, en el ejemplo, supone resolver

$$\min_{x_1,x_2} \begin{cases} 5-x_1 \ , & \text{si} \quad 5 \geq x_1 \\ -5+x_1 \ , & \text{si} \quad 5 \leq x_1 \end{cases} + \begin{cases} 14-x_2 \ , & \text{si} \quad 14 \geq x_2 \\ -14+x_2 \ , & \text{si} \quad 14 \leq x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & x_1 - \chi_1 = 0 \\ & x_2 - \chi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, que resolver cuatro posibles programas

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \{5-x_1\} + \{14-x_2\} \\ s.a. \quad & 5 \geq x_1 \\ & 14 \geq x_2 \\ & x_1 - \chi_1 = 0 \\ & x_2 - \chi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \{5-x_1\} + \{-14+x_2\} \\ s.a. \quad & 5 \geq x_1 \\ & 14 \leq x_2 \\ & x_1 - \chi_1 = 0 \\ & x_2 - \chi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \{-5+x_1\} + \{14-x_2\} \\ s.a. \quad & 5 \leq x_1 \\ & 14 \geq x_2 \\ & x_1 - \chi_1 = 0 \\ & x_2 - \chi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \{-5+x_1\} + \{-14+x_2\} \\ s.a. \quad & 5 \leq x_1 \\ & 14 \leq x_2 \\ & x_1 - \chi_1 = 0 \\ & x_2 - \chi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

La solución de estos cuatro programas es

$$\bar{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*) = (5{,}14)$$

(Resultado que ya conocíamos porque la solución obtenida al minimizar el límite inferior de Jensen es, precisamente, la solución "ingenua").

Luego

$$\chi_1{}^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = 5 \quad \text{y} \quad \chi_2{}^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 14$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*) = (5,14)$$

3. Con este valor obtenido de $\bar{\chi}^*$, calculamos el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$.

Para ello utilizaremos la expresión (8.18)

$$Q_i(\chi_i{}^*) = Q_i(\chi_i{}^*, E[\xi_i]), \; i = 1,2$$

si se verifica que

$$\chi_i{}^* < \alpha_i \quad \text{o} \quad \chi_i{}^* > \beta_i, \; i = 1,2$$

y, si se verifica que

$$\chi_i{}^* \in [\alpha_i, \beta_i]$$

es decir, si

$$\alpha_i \le \chi_i{}^* \le \beta_i, \; i = 1, 2$$

utilizaremos la expresión (8.20)

$$Q_i(\chi_i{}^*) = p_i^1 Q_i^1(\chi_i{}^*) + p_i^2 Q_i^2(\chi_i{}^*) =$$

$$= p_i^1 Q_i(\chi_i{}^*, E_1[\xi_i]) + p_i^2 Q_i(\chi_i{}^*, E_2[\xi_i]), \; i = 1,2$$

En nuestro ejemplo, como $\chi_1{}^* = 5$, $\chi_2{}^* = 14$, y los soportes de las variables aleatorias son

$$[\alpha_1, \beta_1] = [0,10] \quad \text{y} \quad [\alpha_2, \beta_2] = [8,20]$$

tenemos que

$$\chi_1{*}=5\in[\alpha_1,\beta_1]=[0,10] \text{ y } \chi_2{*}=14\ \in[\alpha_2,\beta_2]=[8,20]$$

Por lo tanto, tenemos que utilizar la expresión (8.20), y, para ello, previamente tenemos que calcular

$$E_1[\xi_1]=E_1[\xi_1/\xi_1\in[0,5]]=\frac{5}{2}$$

$$E_2[\xi_1]=E_2[\xi_1/\xi_1\in[5,10]]=\frac{15}{2}$$

$$E_1[\xi_2]=E_1[\xi_2/\xi_2\in[8,14]]=11$$

$$E_2[\xi_2]=E_2[\xi_2/\xi_2\in[14,20]]=17$$

$$p_1^1=P\{\xi_1\in[0,5]\}=\frac{1}{10}\int_0^5 dx=\frac{1}{2}$$

$$p_1^2=P\{\xi_1\in(5,10]\}=\frac{1}{10}\int_5^{10} dx=\frac{1}{2}$$

$$p_2^1=P\{\xi_2\in[8,14]\}=\frac{1}{12}\int_8^{14} dx=\frac{1}{2}$$

$$p_2^2=P\{\xi_2\in(14,20]\}=\frac{1}{12}\int_{14}^{20} dx=\frac{1}{2}$$

con lo que

$$Q(\overline{\chi}{*})=\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_i^jQ_i^j(\chi_i{*})=$$

$$=p_1^1Q_1(\chi_1{*},E_1[\xi_1])+p_1^2Q_1(\chi_1{*},E_2[\xi_1])+$$

$$+p_2^1Q_2(\chi_2{*},E_1[\xi_2])+p_2^2Q_2(\chi_2{*},E_2[\xi_2])$$

$$=p_1^1\begin{cases}w_1^+(E_1[\xi_1]-\chi_1) & , \text{ si } E_1[\xi_1]\geq\chi_1\\ -w_1^-(E_1[\xi_1]-\chi_1) & , \text{ si } E_1[\xi_1]\leq\chi_1\end{cases}+$$

$$+p_1^2\begin{cases} w_1^+\left(E_2[\xi_1]-\chi_1\right) & , \quad \text{si} E_2[\xi_1]\geq \chi_1 \\ -w_1^-\left(E_2[\xi_1]-\chi_1\right) & , \quad \text{si} \quad E_2[\xi_1]\leq \chi_1 \end{cases} +$$

$$+p_2^1\begin{cases} w_2^+\left(E_1[\xi_2]-\chi_2\right) & , \quad \text{si} \quad E_1[\xi_2]\geq \chi_2 \\ -w_2^-\left(E_1[\xi_2]-\chi_2\right) & , \quad \text{si} \quad E_1[\xi_2]\leq \chi_2 \end{cases} +$$

$$+p_2^2\begin{cases} w_2^+\left(E_2[\xi_2]-\chi_2\right) & , \quad \text{si} \quad E_2[\xi_2]\geq \chi_2 \\ -w_2^-\left(E_2[\xi_2]-\chi_2\right) & , \quad \text{si} \quad E_2[\xi_2]\leq \chi_2 \end{cases} =$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases} \frac{5}{2}-5 & , \quad \text{si} \quad \frac{5}{2}\geq 5 \\ -\frac{5}{2}+5 & , \quad \text{si} \quad \frac{5}{2}\leq 5 \end{cases} +\frac{1}{2}\begin{cases} \frac{15}{2}-5 & , \quad \text{si} \quad \frac{15}{2}\geq 5 \\ -\frac{15}{2}+5 & , \quad \text{si} \quad \frac{15}{2}\leq 5 \end{cases} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{cases} 11-14 & , \quad \text{si} \quad 11\geq 14 \\ -11+14 & , \quad \text{si} \quad 11\leq 14 \end{cases} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{cases} 17-14, & \quad \text{si} \quad 17\geq 14 \\ -17+14 & , \quad \text{si} \quad 17\leq 14 \end{cases} =$$

$$=-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}+\frac{15}{4}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{22}{4}=5{,}5$$

Es decir, $Q(\overline{\chi}^*)=5{,}5$.

4.- Sabemos que hemos cometido error en las dos componentes ξ_1 y ξ_2 porque

$$\chi_1{}^*=5\in[\alpha_1,\beta_1]=[0{,}10]$$

y

$$\chi_2{}^*=14\in[\alpha_2,\beta_2]=[8{,}20]$$

es decir

$$\alpha_1 \leq \chi_1^* \leq b_1 \quad \text{y} \quad \alpha_2 \leq \chi_2^* \leq b_2$$

Con el fin de conocer el error cometido al tomar como solución la solución "aproximada" $\overline{\chi}^* = (5,14)$, determinamos el valor de

$$Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}])$$

ya que el error cometido es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}])$$

Procedemos al cálculo:

$$Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]) = \sum_{i=1}^{2} Q(\chi_i^*, E[\xi_i]) =$$

$$= \begin{cases} 5 - \chi_1^* \ , & \text{si} \ \ 5 \geq \chi_1^* \\ -5 + \chi_1^*, & \text{si} \ \ 5 \leq \chi_1^* \end{cases} +$$

$$+ \begin{cases} 14 - \chi_2^* \ , & \text{si} \ \ 14 \geq \chi_2^* \\ -14 + \chi_2^*, & \text{si} \ \ 14 \leq \chi_2^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5-5 \ , & \text{si} \ \ 5 \geq 5 \\ -5+5, & \text{si} \ \ 5 \leq 5 \end{cases} + \begin{cases} 14-14 \ , & \text{si} \ \ 14 \geq 10 \\ -14+14, & \text{si} \ \ 14 \leq 10 \end{cases} = 0$$

Es decir, $Q(\overline{\chi}^*, E[\xi_i]) = 0$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar como solución

$$\overline{x}^* = \overline{\chi}^* = (5,14)$$

es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]) = 5{,}5 - 0 = 5{,}5$$

5.- Supongamos que este error no está en el límite de tolerancia aceptado por el decisor y que se rechaza la solución propuesta. Si se decide hacer una partición en el soporte de ξ_1,

$$[\alpha_1, \beta_1] = [0, 10]$$

precisamente en el punto

$$E[\xi_1] = 5$$

teniendo los subintervalos

$$[0, 5] \text{ y } (5, 10]$$

y se obtiene el límite inferior de Jensen en cada subintervalo.

Sumando estos límites y ponderando los sumandos con la probabilidad condicionada a estar en el correspondiente intervalo, tenemos un límite global inferior de Jensen.

Y se reinicia el proceso desde el paso 1:

1´. Ahora el límite inferior de Jensen es

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i(\chi_i) =$$

$$= p_1^1 Q_1(\chi_1, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1, E_2[\xi_1]) + Q_2(\chi_2, E[\xi_2]) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{5}{2} - \chi_1 & , \text{ si } \frac{5}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{5}{2} + \chi_1, & \text{ si } \frac{5}{2} \leq \chi_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{15}{2} - \chi_1 & , \text{ si } \frac{15}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{15}{2} + \chi_1, & \text{ si } \frac{15}{2} \leq \chi_1 \end{cases} +$$

$$+ \begin{cases} 14 - \chi_2 & , \text{ si } 14 \geq \chi_2 \\ -14 + \chi_2 & , \text{si } 14 \leq \chi_2 \end{cases}$$

2´. Minimizamos el límite anterior en $\bar{x}$ (y por lo tanto también en $\bar{\chi}$), es decir, hallamos

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\bar{\chi}} & \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{2} p_i^j Q_i\left(\chi_i, E_j[\xi_i]\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X \\ & f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0} \end{array}$$

Siendo, en nuestro caso,

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i(\chi_i) =$$

$$= p_1^1 Q_1\left(\chi_1, E_1[\xi_1]\right) + p_1^2 Q_1\left(\chi_1, E_2[\xi_1]\right) + Q_2\left(\chi_2, E\,[\xi_2]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{5}{2} - \chi_1 \ , & \text{si } \ \frac{5}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{5}{2} + \chi_1, & \text{si } \ \frac{5}{2} \leq \chi_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{15}{2} - \chi_1 \ , & \text{si } \ \frac{15}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{15}{2} + \chi_1, & \text{si } \ \frac{15}{2} \leq \chi_1 \end{cases} +$$

$$+\begin{cases} 14 - \chi_2 \ , & \text{si } \ 14 \geq \chi_2 \\ -14 + \chi_2, & \text{si } \ 14 \leq \chi_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{5}{4} - \frac{\chi_1}{2} \ , & \text{si } \ \frac{5}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{5}{4} + \frac{\chi_1}{2} \ , & \text{si } \ \frac{5}{2} \leq \chi_1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{15}{4} - \frac{\chi_1}{2} \ , & \text{si } \ \frac{15}{2} \geq \chi_1 \\ -\frac{15}{4} - \frac{\chi_1}{2} \ , & \text{si } \ \frac{15}{2} \leq \chi_1 \end{cases} +$$

$$+\begin{cases} 14 - \chi_2 \ , & \text{si } \ 14 \geq \chi_2 \\ -14 + \chi_2 \ , & \text{si } \ 14 \leq \chi_2 \end{cases}$$

Tenemos, por lo tanto, que resolver ocho posibles programas

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \left\{\frac{5}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{\frac{15}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{14-x_2\right\} \\ s.a. \quad & \frac{5}{2}\geq x_1 \\ & \frac{15}{2}\geq x_1 \\ & 14\geq x_2 \qquad\qquad (2.1)' \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \left\{\frac{5}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{\frac{15}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{-14+x_2\right\} \\ s.a. \quad & \frac{5}{2}\geq x_1 \\ & \frac{15}{2}\geq x_1 \\ & 14\leq x_2 \qquad\qquad (2.2)' \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \left\{\frac{5}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{-\frac{15}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{14-x_2\right\} \\ s.a. \quad & \frac{5}{2}\geq x_1 \\ & \frac{15}{2}\leq x_1 \\ & 14\geq x_2 \qquad\qquad (2.3)' \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \left\{-\frac{5}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{\frac{15}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{14-x_2\right\} \\ s.a. \quad & \frac{5}{2}\leq x_1 \\ & \frac{15}{2}\geq x_1 \\ & 14\geq x_2 \qquad\qquad (2.4)' \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min_{x_1,x_2} \left\{\frac{5}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{-\frac{15}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\{-14+x_2\}$$
$$\begin{aligned} s.a.\ & \frac{5}{2}\geq x_1 \\ & \frac{15}{2}\leq x_1 \\ & 14\leq x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.5)'$$

$$\min_{x_1,x_2} \left\{-\frac{5}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{\frac{15}{4}-\frac{x_1}{2}\right\}+\{-14+x_2\}$$
$$\begin{aligned} s.a.\ & \frac{5}{2}\leq x_1 \\ & \frac{15}{2}\geq x_1 \\ & 14\leq x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.6)'$$

$$\min_{x_1,x_2} \left\{-\frac{5}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{-\frac{15}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\{14-x_2\}$$
$$\begin{aligned} s.a.\ & \frac{5}{2}\leq x_1 \\ & \frac{15}{2}\leq x_1 \\ & 14\geq x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.7)'$$

$$\min_{x_1,x_2} \left\{-\frac{5}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\left\{-\frac{15}{4}+\frac{x_1}{2}\right\}+\{-14+x_2\}$$
$$\begin{aligned} s.a.\ & \frac{5}{2}\leq x_1 \\ & \frac{15}{2}\leq x_1 \\ & 14\leq x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.8)'$$

De estos ocho programas, el (2.3)'y el (2.5)' no son factibles.

Las soluciones de los seis restantes son

- de los problemas (2.1)', (2.2)', (2.4)' y (2.6)'

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{5}{2}, 14\right)$$

luego

$$\chi_1{}^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{5}{2}, \quad \chi_2{}^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 14$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*) = \left(\frac{5}{2}, 14\right)$$

- de los programas (2.7)´ y (2.8)´

$$\bar{x}^* = (x_1{}^*, x_2{}^*) = \left(\frac{15}{2}, 14\right)$$

luego

$$\chi_1{}^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{15}{2}, \quad \chi_2{}^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 14$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*) = \left(\frac{15}{2}, 14\right)$$

3´. Tanto para la solución $\chi^* = \left(\frac{5}{2}, 14\right)$, como para $\chi^* = \left(\frac{15}{2}, 14\right)$, el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$ es

$$Q(\bar{\chi}^*) = \frac{49}{8}$$

4´. También para ambas soluciones, el valor de $Q(\bar{\chi}^*, E[\bar{\xi}])$ es

$$Q(\bar{\chi}^*, E[\bar{\xi}]) = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar cualquiera de estas soluciones es menor o igual que

$$\mathcal{Q}(\bar{\chi}^*)-\mathcal{Q}(\bar{\chi}^*,E[\bar{\xi}])=\frac{49}{8}-\frac{5}{2}=\frac{29}{8}=3{,}63.$$

5´. Con lo que, efectivamente, al efectuar una partición en el soporte de la variable aleatoria ξ_1, cualquiera de las dos soluciones obtenidas por este procedimiento, es mejor que la obtenida sin hacer la partición ya que el error en el valor de la función objetivo del problema si se acepta la solución aproximada obtenida sin realizar la partición, es menor o igual que 5,5 y realizando dicha partición, el error es menor o igual que 3,63.

Si se hubiese hecho la partición en el soporte de ξ_2,

$$[\alpha_2,\beta_2]=[8,20]$$

precisamente en el punto

$$E[\xi_2]=14$$

obteniendo los subintervalos

$$[8,14] \text{ y } (14,20]$$

y procediendo de modo análogo a como se ha hecho en la situación anterior, los resultados que se obtienen son los siguientes

1´´. El límite inferior de Jensen sería

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{i,j}Q_i(\chi_i)=$$

$$=Q_1(\chi_1,E_1[\xi_1])+p_2^1Q_1(\chi_1,E_2[\xi_1])+p_2^2Q_2(\chi_2,E[\xi_2])=$$

$$=\begin{cases}5-\chi_1 & , \text{ si } 5\geq\chi_1\\ -5+\chi_1, & \text{ si } 5\leq\chi_1\end{cases}+\frac{1}{2}\begin{cases}11-\chi_2 & , \text{ si } 11\geq\chi_2\\ -11+\chi_2, & \text{ si } 11\leq\chi_2\end{cases}+$$

$$+\frac{1}{2}\begin{cases} 17-\chi_2 & , \text{ si } \ 17 \geq \chi_2 \\ -17+\chi_2 \ , & \text{ si } \ 17 \leq \chi_2 \end{cases}$$

2´´. Minimizando el límite anterior en $\bar{x}$ (y por lo tanto también en $\bar{\chi}$), es decir, hallando

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}} \quad & \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{2} p_i^j Q_i\left(\chi_i, E_j[\xi_i]\right) \\ s.a. \quad & \bar{x} \in X \\ & f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0} \end{aligned}$$

Siendo, en este caso,

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i\left(\chi_i\right) =$$

$$= Q_1\left(\chi_1, E_1[\xi_1]\right) + p_1^1 Q_1\left(\chi_1, E_2[\xi_1]\right) + p_2^2 Q_2\left(\chi_2, E\ [\xi_2]\right) =$$

$$= \begin{cases} 5-\chi_1 & , \text{ si } \ 5 \geq \chi_1 \\ -5+\chi_1 \ , & \text{ si } \ 5 \leq \chi_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 11-\chi_2 & , \text{ si } \ 11 \geq \chi_2 \\ -11+\chi_2 \ , & \text{ si } \ 11 \leq \chi_2 \end{cases} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{cases} 17-\chi_2 & , \text{ si } \ 17 \geq \chi_2 \\ -17+\chi_2 \ , & \text{ si } \ 17 \leq \chi_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5-\chi_1 & , \text{ si } \ 5 \geq \chi_1 \\ -5+\chi_1 \ , & \text{ si } \ 5 \leq \chi_1 \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{11}{2}-\dfrac{\chi_2}{2} & , \text{ si } \ 11 \geq \chi_2 \\ -\dfrac{11}{2}+\dfrac{\chi_2}{2}, & \text{ si } \ 11 \leq \chi_2 \end{cases} +$$

$$+\begin{cases} \dfrac{17}{2}-\dfrac{\chi_2}{2} & , \text{ si } \ 17 \geq \chi_2 \\ -\dfrac{17}{2}+\dfrac{\chi_2}{2}, & \text{ si } \ 17 \leq \chi_2 \end{cases}$$

Tenemos, por lo tanto, que resolver ocho posibles programas

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{5-x_1\}+\left\{\frac{11}{2}-\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{\frac{17}{2}-\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \geq x_1 \\
& 11 \geq x_1 \\
& 17 \geq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.1)''$$

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{5-x_1\}+\left\{\frac{11}{2}-\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{-\frac{17}{2}+\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \geq x_1 \\
& 11 \geq x_1 \\
& 17 \leq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.2)''$$

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{5-x_1\}+\left\{-\frac{11}{2}+\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{\frac{17}{2}-\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \geq x_1 \\
& 11 \leq x_1 \\
& 17 \geq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.3)''$$

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{-5+x_1\}+\left\{\frac{11}{2}-\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{\frac{17}{2}-\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \leq x_1 \\
& 11 \geq x_1 \\
& 17 \geq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.4)''$$

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{5-x_1\}+\left\{-\frac{11}{2}+\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{-\frac{17}{2}+\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \geq x_1 \\
& 11 \leq x_1 \\
& 17 \leq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.5)''$$

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & \{-5+x_1\}+\left\{\frac{11}{2}-\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{-\frac{17}{2}+\frac{x_2}{2}\right\} \\
s.a.\ & 5 \leq x_1 \\
& 11 \geq x_1 \\
& 17 \leq x_2 \\
& x_1-\chi_1=0 \\
& x_2-\chi_2=0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (2.6)''$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & \{-5+x_1\}+\left\{-\frac{11}{2}+\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{\frac{17}{2}-\frac{x_2}{2}\right\} \\ s.a. & 5\le x_1 \\ & 11\le x_1 \\ & 17\ge x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{array} \qquad (2.7)''$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & \{-5+x_1\}+\left\{-\frac{11}{2}+\frac{x_2}{2}\right\}+\left\{-\frac{17}{2}+\frac{x_2}{2}\right\} \\ s.a. & 5\le x_1 \\ & 11\le x_1 \\ & 17\le x_2 \\ & x_1-\chi_1=0 \\ & x_2-\chi_2=0 \\ & x_1\ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{array} \qquad (2.8)''$$

De estos ocho programas, el (2.2)´´ y el (2.6)´´ no son factibles. Las soluciones de los seis restantes son,

- de los programas (2.3)´´, (2.4)´´ y (2.7)´

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (5,11)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = 5, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 11$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = (5,11)$$

- de los problemas (2.1)´´, (2.5)´´, y (2.8)´´,

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (5,17)$$

luego,

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = 5, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 17$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = (5,17)$$

3´´. Tanto para la solución $\chi^* = (5{,}11)$, como para $\chi^* = (5{,}17)$, el valor exacto de $Q(\overline{\chi}^*)$ es

$$Q(\overline{\chi}^*) = \frac{25}{4} = 6{,}25 .$$

4´´. También para ambas soluciones, el valor de $Q(\overline{\chi}^*, E[\xi])$ es

$$Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]) = 3$$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar con cualquiera de estas soluciones es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]) = \frac{25}{4} - 3 = 3{,}25$$

5´´. Con lo que, de nuevo, si se efectúa una partición en el soporte de la variable aleatoria ξ_2, cualquiera de las dos soluciones obtenidas por este procedimiento es mejor que la obtenida sin hacer la partición, ya que el error en el valor de la función objetivo del problema sin hacer la partición es menor o igual que $5{,}5$ y con la partición en menor o igual que $3{,}25$, muy parecido al obtenido efectuando la partición en el soporte de la variable aleatoria ξ_1, que era $3{,}63$.

Por último, veamos cómo mejora la solución si se efectúa una partición tanto en el soporte de la variable aleatoria ξ_1 como en el de la variable aleatoria ξ_2. Es razonable realizar particiones en ambos soportes puesto que sabemos que en las dos componentes de la primera solución aproximada obtenida $\overline{\chi}^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = (5, 14)$ se ha cometido error.

En este caso

1´´´. El límite inferior de Jensen será

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i(\chi_i) = p_1^1 Q_1(\chi_1, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1, E_2[\xi_1]) +$$

$$+ p_2^1 Q_2(\chi_2, E_1[\xi_2]) + p_2^2 Q_2(\chi_2, E_2[\xi_2]) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{5}{2} - x_1 ,, & \text{si } \frac{5}{2} \geq x_1 \\ -\frac{5}{2} + x_1 , & \text{si } \frac{5}{2} \leq x_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{15}{2} - x_1 ,, & \text{si } \frac{15}{2} \geq x_1 \\ -\frac{15}{2} + x_1 , & \text{si } \frac{15}{2} \leq x_1 \end{cases} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{cases} 11 - x_2 , & \text{si } 11 \geq x_2 \\ -11 + x_2 , & \text{si } 11 \leq x_2 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 17 - x_2 , & \text{si } 17 \geq x_2 \\ -17 + x_2 , & \text{si } 17 \leq x_2 \end{cases}$$

2´´´. Minimizando el límite anterior en $\bar{x}$ (y por lo tanto también en $\bar{\chi}$), es decir, hallando

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\chi}} \quad & \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{2} p_i^j Q_i(\chi_i, E_j[\xi_i]) \\ s.a. \quad & \bar{x} \in X \\ & f(\bar{x}) - \bar{\chi} = \bar{0} \end{aligned}$$

Siendo, en este caso,

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i(\chi_i) = p_1^1 Q_1(\chi_1, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1, E_2[\xi_1]) +$$

$$+ p_2^1 Q_2(\chi_2, E_1[\xi_2]) + p_2^2 Q_2(\chi_2, E_2[\xi_2]) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{5}{2} - x_1 ,, & \text{si } \frac{5}{2} \geq x_1 \\ -\frac{5}{2} + x_1 , & \text{si } \frac{5}{2} \leq x_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{15}{2} - x_1 ,, & \text{si } \frac{15}{2} \geq x_1 \\ -\frac{15}{2} + x_1 , & \text{si } \frac{15}{2} \leq x_1 \end{cases} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{cases} 11 - x_2 , & \text{si } 11 \geq x_2 \\ -11 + x_2 , & \text{si } 11 \leq x_2 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 17 - x_2 , & \text{si } 17 \geq x_2 \\ -17 + x_2 , & \text{si } 17 \leq x_2 \end{cases} =$$

$$=\begin{cases}\frac{5}{4}-x_1\,,, & \text{si } \frac{5}{2}\geq x_1\\ -\frac{5}{4}+x_1\,, & \text{si } \frac{5}{2}\leq x_1\end{cases}+\begin{cases}\frac{15}{4}-x_1\,,, & \text{si } \frac{15}{2}\geq x_1\\ -\frac{15}{4}+x_1\,, & \text{si } \frac{15}{2}\leq x_1\end{cases}+$$

$$+\begin{cases}\frac{11}{2}-x_2\,, & \text{si } 11\geq x_2\\ -\frac{11}{2}+x_2\,, & \text{si } 11\leq x_2\end{cases}+\begin{cases}\frac{17}{2}-x_2\,, & \text{si } 17\geq x_2\\ -\frac{17}{2}+x_2\,, & \text{si } 17\leq x_2\end{cases}$$

Con lo que tenemos que resolver 16 posibles programas lineales de los que sólo 9 son factibles.

Las soluciones de estos nueve programas son:

- de 4 de ellos

$$x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*) = \left(\frac{5}{2}, 11\right) = \chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*)$$

luego

$$\chi_1{}^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{5}{2},\ \ \chi_2{}^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 11$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*) = \left(\frac{5}{2}, 11\right)$$

- de 2 de ellos

$$x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*) = \left(\frac{5}{2}, 17\right) = \chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*)$$

luego

$$\chi_1{}^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{5}{2},\ \ \chi_2{}^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 1$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1{}^*, \chi_2{}^*) = \left(\frac{5}{2}, 17\right)$$

- de otros 2 de ellos

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{2}, 11\right) = \chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{15}{2}, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 11$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = \left(\frac{15}{2}, 11\right)$$

- y del noveno

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{2}, 17\right) = \chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{15}{2}, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = 17$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = \left(\frac{15}{2}, 17\right)$$

3'''. Para cualquiera de estas cuatro soluciones, el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$ es

$$Q(\bar{\chi}^*) = \frac{55}{8} = 6{,}68$$

4'''. También para cualquiera de dichas soluciones, el valor de $Q(\bar{\chi}^*, E[\xi])$ es

$$Q\left(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]\right) = \frac{22}{4} = 5{,}5$$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar con cualquiera de estas soluciones es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q\left(\overline{\chi}^*, E[\overline{\xi}]\right) = \frac{55}{8} - \frac{22}{4} = \frac{11}{8} = 1{,}38.$$

5´´´. Con lo que queda comprobado que la solución mejora notablemente si se efectúa una partición tanto en el soporte de la variable aleatoria ξ_1 como en el de la variable aleatoria ξ_2 ya que, ahora, el error cometido en el valor de la función objetivo al tomar cualquiera de estas cuatro últimas soluciones "aproximadas" como solución del problema, sería sólo menor o igual que 1,38, mientras que sin efectuar ninguna partición era menor o igual que 5,5, y realizando la partición en uno sólo de los soportes, menor o igual que 3,63 en el caso de la variable aleatoria ξ_1, y menor o igual que 3,25 en el caso de la variable aleatoria ξ_2.

CAPÍTULO 9

APLICACIONES

En la literatura sobre *Programación por Metas* son muy numerosas las aplicaciones de *Programación por Metas Determinista*. (Véase, por ejemplo, Ignizio [I.2], Romero [R.4], Lin [L.9], Lin y O'Leary [L.10], Spronk [S.11]...).

Algunos de los problemas analizados en estas aplicaciones se resuelven mediante *Programación por Metas Lexicográficas*, otros a través de *Programación por Metas Ponderadas* y otros mediante algunas de las extensiones de la *Programación por Metas* (*Programación por Metas Entera*, *Programación por Metas no lineal*, *Programación por Metas Fraccional*, *Dualidad en Programación por Metas*, *Programación por Metas Interactiva*, *Programación por Metas Borrosa*...)

En principio muchos de los problemas estudiados en estas aplicaciones se podrían plantear como problemas de *Programación Estocástica por Metas* con los niveles de aspiración aleatorios (siendo, incluso, en muchos casos más realista este planteamiento), y resolverlos mediante los modelos y los algoritmos propuestos en los capítulos 7 y 8.

En este capítulo vamos a estudiar tres de las muchas aplicaciones posibles de nuestro modelo de solución del problema de *Programación Estocástica por Metas* con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración, propuesto en el capítulo 7.

- Aplicación Estimación de Parámetros Bayesiana.
- Aplicación a un problema de planificación de la producción.
- Aplicación a un problema de financiación de una empresa multinacional.

9.1. Aplicación a la Estimación de Parámetros.

Al final del capítulo 3 estudiamos la Estimación de Parámetros Bayesiana.

Analizamos el caso en que el parámetro a estimar, Θ, es unidimensional, utilizando las dos funciones de pérdida más usuales:

- la *función de pérdida error cuadrático*, que tiene la forma

  $$L(\theta,x) = a\,(\theta - x)^2$$

  para la que una *estimación de Bayes*, x^*, dada una distribución de probabilidad de Θ, *es el valor medio de dicha distribución si* éste existe, es decir

  $$x^* = E[\Theta]$$

- la *función de pérdida proporcional al valor absoluto del error*, que tiene la forma

  $$L(\theta,x) = a\,|\theta - x|$$

  para la que una *estimación de Bayes*, x^*, dada una distribución de probabilidad de Θ, es cualquier mediana de dicha distribución.

También consideramos el caso en que el parámetro a estimar, $\overline{\Theta}$, es un vector, es decir, $\overline{\Theta} = (\Theta_1,\cdots,\Theta_k)'$ para $k \geq 2$, utilizando como función de pérdida la típica para tales problemas, que viene dada por la forma cuadrática

$$L(\overline{\Theta},\bar{x}) = (\overline{\Theta} - \bar{x})'A(\overline{\Theta} - \bar{x})$$

dónde A es una matriz simétrica definida no negativa de orden $k \times k$.

Esta función de pérdida se puede considerar como una generalización de la *función de pérdida error cuadrático*.

Comprobamos que una *estimación de Bayes* para cualquier distribución de $\overline{\Theta}$ es el vector valor medio de $\overline{\Theta}$ si este existe, es decir,

$$E[\overline{\Theta}] = \overline{\mu}$$

siendo ésta la única *estimación de Bayes*, en el caso de que la matriz A sea definida positiva.

Así mismo sugerimos que la *función de pérdida proporcional al valor absoluto del error* también se podría generalizar al caso en que el parámetro $\overline{\Theta}$ es un vector mediante la norma L_1 de Hölder, teniendo entonces la función de pérdida la forma

$$L(\overline{\theta},\overline{x}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left|\theta_i - x_i\right|$$

Pero nos encontramos con la dificultad de no poder generalizar la solución obtenida en el caso unidimensional ya que no se tiene un concepto de mediana para distribuciones de probabilidad multidimensionales.

Sin embargo, teniendo en cuenta que una *estimación de Bayes* para cualquier distribución de $\overline{\Theta}$ es un punto $\overline{x} = \overline{x}^* \in \Re^k$ que minimiza el riesgo, esto es, que hace mínima la esperanza

$$E_{\overline{\theta}}\left[L(\overline{\theta},\overline{x})\right]$$

es decir, tal que

$$\min_{\overline{x}} E_{\overline{\theta}}\left[L(\overline{\theta},\overline{x})\right] = E_{\overline{\theta}}\left[L(\overline{\theta},\overline{x}^*)\right] = E_{\overline{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left|\theta_i - x_i^*\right|\right]$$

se puede observar que la expresión

$$\min_{\overline{x}} \quad E_{\overline{\theta}}\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left|\theta_i - x_i\right|\right] \qquad (9.1)$$

se puede interpretar como un caso particular de nuestro problema de *Programación Estocástica por Metas* (7.6)

$$\begin{array}{ll} \text{mín.} & E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

ya que $Q(\bar{x},\bar{\xi})$ mide la desviación global entre los objetivos

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x}))'$$

y los niveles de aspiración

$$\bar{\xi} = (\xi_1,\cdots,\xi_p)'$$

es decir, el problema (9,1) se puede interpretar como un caso particular del problema (7.6) en el que:

- $k = p$
- los p objetivos son

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\cdots,f_p(\bar{x}))' = (x_1,\cdots,x_p)$$

- los niveles de aspiración son

$$\bar{\xi} = \bar{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_p)'$$

- y los coeficientes que ponderan las desviaciones por exceso y por defecto del cumplimiento de los objetivos respecto a los niveles de aspiración son

$$\bar{w} = (\bar{w}^+,\bar{w}^-) = \bar{\alpha}$$

Con lo que queda resuelto el problema de la Estimación de Parámetros en ambiente de riesgo cuando el parámetro es un vector y la función de pérdida es *proporcional al valor absoluto del error*, utilizando la norma L_1 de Hölder.

Esta solución tiene, además, la ventaja de que el vector que pondera las desviaciones de la *estimación de Bayes* respecto al verdadero valor del parámetro, $\bar{\alpha}$, no necesariamente tiene que tener el mismo valor para las desviaciones por exceso que para las desviaciones por defecto.

Es curioso observar que el trabajo que da origen a la Programación por Metas en 1955, debido a Charnes, Cooper y Ferguson, se plantea justamente como un modelo de estimación de parámetros alternativo a la estimación mínimo cuadrática (el modelo habitualmente utilizado hasta ese momento), con el fin de resolver dichos problemas de estimación mediante Programación Lineal, lo que facilita, e incluso en ocasiones posibilita, los cálculos.

Posteriormente hay otras publicaciones con este mismo planteamiento (véase, por ejemplo, Charnes, Cooper y Sueyoshi [C.8] y [C.9], Lewis y Taha [L.8], ...).

9.2.- Aplicación a la Planificación de la Producción.

Como ya comentamos al iniciar el estudio de la Programación por Metas (apartado 2.3.2.3 del capítulo2), existe un cierto consenso en que la toma de decisiones en la empresa se orienta a la consecución de unos objetivos fijados previamente, en lugar de pretender maximizar utilidades.

Por lo tanto, es realista considerar una empresa que se mueve conforme a un paradigma satisfaciente, es decir, que pretende conseguir unos objetivos fijados previamente.

Consideremos una empresa que produce p bienes a partir de n factores.

Los objetivos de la empresa son:

1. Satisfacer la demanda.

2. No sobrepasar unos determinados costes.

Bajo estas circunstancias, el centro decisor de la empresa tratará de encontrar un vector de factores ("inputs"), $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, que sea solución del programa:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = m_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_p(\bar{x}) &= a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = m_p \\ f_{p+1}(\bar{x}) &= c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq C \\ x_1, &\cdots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

donde

$f(\bar{x}) = \bar{m}$ (siendo $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_p(\bar{x}))$ y $\bar{m} = (m_1, \cdots, m_p)$) es el objetivo o la meta consistente en satisfacer las demandas. Esto es:

$\bar{m}$ es el vector de los niveles de aspiración que, en este caso, son las demandas.

a_{ij} son las unidades del bien i producidas por unidad del factor j. (Suponemos rendimientos constantes a escala)

$f_{p+1}(\bar{x}) \leq C$ es el objetivo consistente en no sobrepasar unos determinados costes. Luego:

c_i es el coste unitario del factor i.

C es el coste máximo admisible.

Planteado así el problema, es mucho más realista suponer que el vector de demandas, $\bar{m}$, es aleatorio, ya que, de hecho, nadie conoce de antemano con certidumbre la demanda de un determinado bien. Si representamos estas demandas aleatorias mediante el vector $\bar{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_p)$, la empresa tratará de encontrar un vector de factores, $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, que sea solución del problema:

$$
\begin{array}{lcl}
f_1(\bar{x}) & = & a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=\xi_1 \\
\vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f_p(\bar{x}) & = & a_{p1}x_1+\cdots+a_{pn}x_n=\xi_p \\
f_{p+1}(\bar{x}) & = & c_1x_1+\cdots+c_nx_n\leq C \\
x_1,\cdots,x_n\geq 0 & &
\end{array}
\qquad (9.3)
$$

que, claramente, es un problema de *Programación Estocástica por Metas*, en el que la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración y el conjunto factible, X, es:

$$
X=\left\{\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)/\sum_{i=1}^{n}c_i\,x_i\leq C\,,x_1,\cdots,x_n\geq 0\right\}
$$

Por lo tanto, se puede resolver mediante el Programa Lineal Estocástico (7.4):

$$
\begin{array}{ll}
\text{"}min\text{"} & \sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+y_i^++w_i^-y_i^-\right) \\
s.a. & \bar{x}\in X \\
 & \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x})+y_i^--y_i^+=\xi_i \\ y_i^+,\,y_i^-\geq 0 \end{array}\right\}\; i=1,\cdots,p
\end{array}
\qquad (9.4)
$$

siendo $w_i^+\geq 0$ el coste del exceso de producción del i-ésimo bien (fundamentalmente un coste de inventario) y $w_i^-\geq 0$ el coste de no satisfacción de la i-ésima demanda (un coste de oportunidad).

La solución se puede obtener aplicando los procedimientos de solución propuestos en los capítulos 7 y 8:

9.2.1.- Si se resuelve mediante la **solución "ingenua"**, se tiene que sustituir en (9.4) las variables aleatorias ξ_i, $i=1,\cdots,p$ por sus correspondientes valores esperados valores esperados, $E[\xi_i]$, y resolver el problema de Programación por Metas determinista resultante:

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right) \\ s.a. & \bar{x} \in X \\ & \left.\begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^- - y_i^+ = E[\xi_i] \\ y_i^+,\ y_i^- \geq 0 \end{array}\right\} \ i=1,\cdots,p \end{array}$$

9.2.2.- También se puede resolver mediante el Equivalente Determinista propuesto en el modelo (8.1), es decir, a través del programa:

$$\begin{array}{ll} min. & E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde

$$Q\left(\bar{x},\ \bar{\xi}\right) = \min_{\bar{y}^+,\ \bar{y}^-}\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\ f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi},\ \bar{y}^+,\ \bar{y}^- \geq \bar{0}\right\}$$

Vamos a resolver el problema (9.4) poniendo un ejemplo numérico muy sencillo, con el fin de simplificar los cálculos.

Supongamos que:

- La empresa dispone de dos factores de producción, x_1, x_2.
- Produce dos bienes, es decir $p=2$
- Los valores a_{ij} de las unidades del bien i producidas por unidad del factor j son:

$$a_{11}=1,\quad a_{12}=0,\quad a_{21}=0,\quad a_{22}=1$$

- Por lo tanto las metas correspondientes a la satisfacción de la demanda de los dos bienes son

$$f_1(\overline{x}) = x_1 - y_1^+ + y_1^- = \xi_1$$

$$f_2(\overline{x}) = x_2 - y_2^+ + y_2^- = \xi_2$$

- Los costes unitarios del factor j son:

$$c_1 = c_2 = 1$$

- El coste máximo admisible es $C = 2$
- Luego la restricción de no sobrepasar los costes es

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

- Las distribuciones de probabilidad de las demandas aleatorias son Uniformes en los intervalos

$$\xi_1 : U[0,\ 1] \ \text{ y } \ \xi_2 : U[0,\ 2]$$

- Satisfacer las demandas de ambos productos es igualmente importante para la empresa, y, a la vez, el coste de una producción insuficiente es igual al coste de la sobreproducción de cualquiera de los dos productos. Por la tanto:

$$w_i^+ = w_i^- = 1\,,\ i = 1, 2$$

En estas circunstancias, el problema (9.4), en nuestro ejemplo es:

$$\begin{aligned} \mathit{min}\quad & y_1^+ + y_2^+ + y_1^- + y_2^- \\ \mathit{s.a.}\quad & x_1 - y_1^+ + y_2^- = \xi_1 \\ & x_2 - y_2^+ + y_2^- = \xi_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_i \geq 0\,,\ i = 1, 2 \\ & y_i^+\,,\ y_i^- \geq 0\,,\ i = 1, 2 \end{aligned} \qquad (9.5)$$

Problema que vamos a resolver aplicando los procedimientos de solución considerados en los apartados 9.2.1 y 9.2.2.

1.- Si lo resolvemos mediante la **"solución ingenua"**, tenemos que sustituir en (9.5) ξ_1 y ξ_2, por sus correspondientes valores esperados, $E[\xi_1]=\frac{1}{2}$, $E[\xi_2]=1$ y resolver, mediante el Simplex, el problema determinista de programación lineal

$$\begin{aligned} min \quad & y_1^+ + y_2^+ + y_1^- + y_2^- \\ s.a. \quad & x_1 - y_1^+ + y_1^- = \frac{1}{2} \\ & x_2 - y_2^+ + y_2^- = 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y_i^+ \,,\; y_i^- \ge 0 \,,\; i = 1,2 \end{aligned} \tag{9.6}$$

cuya solución es

$$x_1 = \frac{1}{2},\; x_2 = 1,\; y_1^+ = y_2^+ = y_1^- = y_2^- = 0$$

Es decir, resolviendo el problema por este procedimiento, el decisor tendría que utilizar media unidad del factor x_1 y una unidad del factor dos x_2. Con lo que las demandas de los dos productos se satisfacen y los costes no superan la cantidad fijada $C=2$.

2.- Si lo resolvemos utilizando el Equivalente Determinista (8.1)

$$\begin{aligned} min. \quad & E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right] \\ s.a. \quad & \bar{x} \in X \end{aligned}$$

donde, para cada $\bar{x} \in X$ y para cada $\bar{\xi} = \Xi$ fijos, $Q(\bar{x},\bar{\xi})$, en este ejemplo, es la solución del programa:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{y_i^+,\, y_i^-} & y_1^+ + y_2^+ + y_1^- + y_2^- \\
s.a. & x_1 - y_1^+ + y_1^- = \xi_1 \\
 & x_2 - y_2^+ + y_2^- = \xi_2 \\
 & y_i^+ \,,\; y_i^- \geq 0 \,,\; i = 1, 2
\end{array}
$$

Vamos a resolver este Equivalente Determinista a través del algoritmo por **aproximaciones mediante acotaciones** propuesto en el apartado 8.4 del capítulo 8.

Efectuemos los pasos descritos en dicho algoritmo:

1. Hallamos el límite inferior de Jensen de

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q(\bar{x},\bar{\xi})\right]$$

que es

$$Q\left(\bar{x}, E[\bar{\xi}\,]\right)$$

Hemos visto , en la propiedad 8.1.5 del problema (8.1) que

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right) = Q\left(\bar{\chi},\bar{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{p} Q_i\left(\chi_i, \xi_i\right)$$

y que

$$Q_i\left(\chi_i, \xi_i\right) = \begin{cases} w_i^+\left(\xi_i - \chi_i\right) & \text{si } \xi_i \geq \chi_i \\ -\, w_i^-\left(\xi_i - \chi_i\right) & \text{si } \xi_i \leq \chi_i \end{cases}$$

Por lo tanto, en nuestro caso, por ser

$$w_1^+ = w_1^+ = w_2^+ = w_2^- = 1$$

$$\xi_1 : U[0,\ 1] \Rightarrow E[\xi_1] = \frac{1}{2} \quad ; \; \xi_2 \, : \, U[0,\ 2] \Rightarrow E[\xi_2] = 1$$

$$f_1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{2} a_{1i} x_i = x_1 = \chi_1 ; \; f_2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{2} a_{2i} x_i = x_2 = \chi_2$$

(Utilizaremos indistintamente la variable $\bar{x}$ o la variable $\bar{\chi}$, según nos convenga).

Se tiene así que el límite inferior de Jensen es

$$Q(\bar{x},E[\bar{\xi}])=Q(\bar{\chi},E[\bar{\xi}])=\sum_{i=1}^{p}Q(\chi_i,E[\bar{\xi}])=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\begin{cases} w_i^+(E[\xi_i]-\chi_i) & \text{si } E[\xi_i]\geq\chi_i \\ -w_i^-([\xi_i]-\chi_i) & \text{si } E[\xi_i]\leq\chi_i \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}-x_1, & \text{si } \frac{1}{2}\geq x_1 \\ -\frac{1}{2}+x_1, & \text{si } \frac{1}{2}\leq x_1 \end{cases}+\begin{cases} 1-x_2, & \text{si } 1\geq x_2 \\ -1+x_2, & \text{si } 1\leq x_2 \end{cases}$$

2. Minimizamos el límite inferior de Jensen, esto es, resolvemos el programa

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}} \quad & \sum_{i=1}^{p}Q_i(\chi_i,E[\xi_i]) \\ s.a. \quad & \bar{x}\in X \\ & f(\bar{x})-\bar{\chi}=\bar{0} \end{aligned}$$

Que, en el ejemplo, es equivalente a resolver

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & \begin{cases} \frac{1}{2}-x_1, & \text{si } \frac{1}{2}\geq x_1 \\ -\frac{1}{2}+x_1, & \text{si } \frac{1}{2}\leq x_1 \end{cases}+\begin{cases} 1-x_2, & \text{si } 1\geq x_2 \\ -1+x_2, & \text{si } 1\leq x_2 \end{cases} \\ s.a. \quad & x_1+x_2\leq 2 \\ & 0\leq x_1 \\ & 0\leq x_2 \end{aligned}$$

Tenemos, por lo tanto, que resolver cuatro posibles programas

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1-x_2+\frac{3}{2} \\ s.a. & x_1+x_2\le 2 \\ & 0\le x_1\le\frac{1}{2} \\ & 0\le x_2\le 1 \end{array} \qquad (2.1)$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1+x_2-\frac{1}{2} \\ s.a. & x_1+x_2\le 2 \\ & 0\le x_1\le\frac{1}{2} \\ & 1\le x_2 \end{array} \qquad (2.2)$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1-x_2+\frac{1}{2} \\ s.a. & x_1+x_2\le 2 \\ & \frac{1}{2}\le x_1 \\ & 0\le x_2\le 1 \end{array} \qquad (2.3)$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1+x_2-\frac{3}{2} \\ s.a. & x_1+x_2\le 2 \\ & \frac{1}{2}\le x_1 \\ & 1\le x_2 \end{array} \qquad (2.4)$$

La solución de estos cuatro programas es

$$\bar{x}^*=(x_1^*,x_2^*)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

(que, como es obvio, coincide con la solución ingenua)

Luego

$$\chi_1^*=f_1(\bar{x}^*)=x_1=\frac{1}{2} \text{ y } \chi_2^*=f_2(\bar{x}^*)=x_2=1$$

y, por lo tanto

$$\chi^*=(\chi_1^*,\chi_2^*)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

3. Con este valor obtenido de $\bar{\chi}^*$, calculamos el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$.

Para ello utilizaremos la expresión (8.19)

$$Q_i(\chi_i^*)=Q_i(\chi_i^*,E[\xi_i]),\ i=1,2$$

si se verifica que

$$\chi_i^*<\alpha_i \text{ o } \chi_i^*>\beta_i,\ i=1,2$$

y, si se verifica que

$$\chi_i^* \in [\alpha_i, \beta_i]$$

es decir, si

$$\alpha_i \leq \chi_i^* \leq \beta_i,\ i = 1, 2$$

utilizaremos la expresión (8.21)

$$Q_i(\chi_i^*) = p_i^1 Q_i^1(\chi_i^*) + p_i^2 Q_i^2(\chi_i^*) =$$

$$= p_i^1 Q_i\left(\chi_i^*, E_1[\xi_i]\right) + p_i^2 Q_i\left(\chi_i^*, E_2[\xi_i]\right),\ i = 1,2$$

En nuestro ejemplo, como, $\chi_1^* = \frac{1}{2}$, $\chi_2^* = 1$, y los soportes de las variables aleatorias son:

$$[\alpha_1, \beta_1] = [0, 1] \quad \text{y} \quad [\alpha_2, \beta_2] = [0, 2]$$

tenemos que

$$\chi_1^* = \frac{1}{2} \in [\alpha_1, \beta_1] = [0, 1] \ \text{ y } \ \chi_2^* = 1 \in [\alpha_2, \beta_2] = [0, 2]$$

Por lo tanto, tenemos que utilizar la expresión (8.21), y, para ello, previamente tenemos que calcular

$$E_1[\xi_1] = E_1\left[\xi_1 / \xi_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right] = \frac{1}{4}$$

$$E_2[\xi_1] = E_2\left[\xi_1 / \xi_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right] = \frac{3}{4}$$

$$E_1[\xi_2] = E_1[\xi_2 / \xi_2 \in [0, 1]] = \frac{1}{2}$$

$$E_2[\xi_2] = E_2[\xi_2 / \xi_2 \in [1, 2]] = \frac{3}{2}$$

$$p_1^1 = P\left\{\xi_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2}$$

$$p_1^2 = P\left\{\xi_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\} = \int_{1/2}^{1} dx = \frac{1}{2}$$

$$p_2^1 = P\{\xi_2 \in [0, 1]\} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}$$

$$p_2^2 = P\{\xi_2 \in [1, 2]\} = \frac{1}{2}\int_1^2 dx = \frac{1}{2}$$

con lo que

$$Q(\overline{\chi}\,*) = \sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_i^j Q_i^j(\chi_i\,*) =$$

$$= p_1^1 Q_1(\chi_1*, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1*, E_2[\xi_1]) +$$

$$+ p_2^1 Q_2(\chi_2*, E_1[\xi_2]) + p_2^2 Q_2(\chi_2*, E_2[\xi_2])$$

$$= p_1^1 \begin{cases} w_1^+(E_1[\xi_1] - \chi_1) & , \text{ si } E_1[\xi_1] \ge \chi_1 \\ -w_1^-(E_1[\xi_1] - \chi_1) & , \text{ si } E_1[\xi_1] \le \chi_1 \end{cases} +$$

$$+ p_1^2 \begin{cases} w_1^+(E_2[\xi_1] - \chi_1), & \text{si } E_2[\xi_1] \ge \chi_1 \\ -w_1^-(E_2[\xi_1] - \chi_1), & \text{si } E_2[\xi_1] \le \chi_1 \end{cases} +$$

$$+ p_2^1 \begin{cases} w_2^+(E_1[\xi_2] - \chi_2) & , \text{ si } E_1[\xi_2] \ge \chi_2 \\ -w_2^-(E_1[\xi_2] - \chi_2) & , \text{ si } E_1[\xi_2] \le \chi_2 \end{cases} +$$

$$+ p_2^2 \begin{cases} w_2^+(E_2[\xi_2] - \chi_2) & , \text{ si } E_2[\xi_2] \ge \chi_2 \\ -w_2^-(E_2[\xi_2] - \chi_2) & , \text{ si } E_2[\xi_2] \le \chi_2 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \ge \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4} \le \frac{1}{2} \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4} \ge \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4} \le \frac{1}{2} \end{cases} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{1}{2}-1, & \text{si } \frac{1}{2}\geq 1\\ -\frac{1}{2}+1, & \text{si } \frac{1}{2}\leq 1\end{cases} +\ \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{3}{2}-1, & \text{si } \frac{3}{2}\geq 1\\ -\frac{3}{2}+1, & \text{si } \frac{3}{2}\leq 1\end{cases} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}=0.75$$

Es decir, $Q(\overline{\chi}^*)=0.75$.

4.- Con el fin de conocer el error cometido al tomar como solución la solución "aproximada" $\overline{\chi}^*=\left(\frac{1}{2},1\right)$, determinamos el valor de

$$Q\left(\overline{\chi}^*,E[\overline{\xi}]\right)$$

ya que sabemos que el error cometido es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*)-Q\left(\overline{\chi}^*,E[\overline{\xi}]\right)$$

Procedemos al cálculo

$$Q\left(\overline{\chi}^*,E[\overline{\xi}]\right)=\ \sum_{i=1}^{2}Q\left(\chi_i^*,E[\xi_i]\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}-\chi_1^*, & \text{si } \frac{1}{2}\geq \chi_1^*\\ -\frac{1}{2}+\chi_1^*, & \text{si } \frac{1}{2}\leq \chi_1^*\end{cases}+\begin{cases}1-\chi_2^*, & \text{si } 1\geq \chi_2^*\\ -1+\chi_2^*, & \text{si } 1\leq \chi_2^*\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2}\geq \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2}\leq \frac{1}{2}\end{cases}+\begin{cases}1-1, & \text{si } 1\geq 1\\ -1+1, & \text{si } 1\leq 1\end{cases}=\ 0$$

Es decir, $Q\left(\overline{\chi}^*,E[\xi_i]\right)=0$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar como solución

$$\overline{x}^*=\overline{\chi}^*=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

es menor o igual que

$$Q(\overline{\chi}^*) - Q(\overline{\chi}^*, E[\xi]) = 0.75 - 0 = 0.75$$

5.- Supongamos que este error no está en el límite de tolerancia aceptado por el centro decisor de la empresa y que se rechaza la solución propuesta.

Si se decide hacer una partición en los soportes de las dos variables aleatorias ξ_1 y ξ_2, precisamente en los puntos

$$E[\xi_1] = \frac{1}{2} \text{ y } E[\xi_2] = 1$$

se obtienen los siguientes subintervalos:

- para la variable aleatoria ξ_1: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- para la variable aleatoria ξ_2: $[0, 1]$ y $(1, 2]$.

A continuación se halla el límite inferior de Jensen en cada subintervalo, se suman dichos límites ponderando los sumandos con la probabilidad condicionada a estar en el correspondiente intervalo, teniéndose, así, un límite global inferior de Jensen, con lo que estaríamos reiniciando el proceso desde el paso 1.

1 '.- Ahora el límite inferior de Jensen sería

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j} Q_i(\chi_i) = p_1^1 Q_1(\chi_1, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1, E_2[\xi_1]) +$$

$$+ p_2^1 Q_2(\chi_2, E_1[\xi_2]) + p_2^2 Q_2(\chi_2, E_2[\xi_2]) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{4} - \chi_1\,, & \text{si } \frac{1}{4} \geq \chi_1 \\ -\frac{1}{4} + \chi_1, & \text{si } \frac{1}{4} \leq \chi_1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{3}{4} - \chi_1, & \text{si } \frac{3}{4} \geq \chi_1 \\ -\frac{3}{4} + \chi_1, & \text{si } \frac{3}{4} \leq \chi_1 \end{cases} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{1}{2}-\chi_2, & \text{si } \frac{1}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{1}{2}+\chi_2, & \text{si } \frac{1}{2}\leq\chi_2\end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{3}{2}-\chi_2, & \text{si } \frac{3}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{3}{2}+\chi_2, & \text{si } \frac{3}{2}\leq\chi_2\end{cases}$$

2 '.- Minimizando el límite anterior en $\bar{x}$ (y por lo tanto también en $\bar{\chi}$), es decir, hallando

$$\begin{aligned} &\min_{\bar{x}} && \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{2} p_i^j Q_i(\chi_i, E_j[\xi_i]) \\ &s.a. && \bar{x}\in X \\ & && f(\bar{x})-\bar{\chi}=\bar{0}\end{aligned}$$

Siendo, en este caso,

$$\sum_{i=i}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{i,j}Q_i(\chi_i) = p_1^1 Q_1(\chi_1, E_1[\xi_1]) + p_1^2 Q_1(\chi_1, E_2[\xi_1]) +$$

$$+p_2^1 Q_2(\chi_2, E_1[\xi_2]) + p_2^2 Q_2(\chi_2, E_2[\xi_2]) =$$

$$=\frac{1}{2}\begin{cases}\frac{1}{4}-\chi_1\ , & \text{si } \frac{1}{4}\geq\chi_1\\ -\frac{1}{4}+\chi_1, & \text{si } \frac{1}{4}\leq\chi_1\end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{3}{4}-\chi_1, & \text{si } \frac{3}{4}\geq\chi_1\\ -\frac{3}{4}+\chi_1, & \text{si } \frac{3}{4}\leq\chi_1\end{cases} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{1}{2}-\chi_2, & \text{si } \frac{1}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{1}{2}+\chi_2, & \text{si } \frac{1}{2}\leq\chi_2\end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases}\frac{3}{2}-\chi_2, & \text{si } \frac{3}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{3}{2}+\chi_2, & \text{si } \frac{3}{2}\leq\chi_2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}-\frac{\chi_1}{2}\ , & \text{si } \frac{1}{4}\geq\chi_1\\ -\frac{1}{8}+\frac{\chi_1}{2}, & \text{si } \frac{1}{4}\leq\chi_1\end{cases} + \begin{cases}\frac{3}{8}-\frac{\chi_1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4}\geq\chi_1\\ -\frac{3}{8}+\frac{\chi_1}{2}, & \text{si } \frac{3}{4}\leq\chi_1\end{cases} +$$

$$+\ \begin{cases}\frac{1}{4}-\frac{\chi_2}{2}, & \text{si } \frac{1}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{1}{4}+\frac{\chi_2}{2}, & \text{si } \frac{1}{2}\leq\chi_2\end{cases} + \begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{\chi_2}{2}, & \text{si } \frac{3}{2}\geq\chi_2\\ -\frac{3}{4}+\frac{\chi_2}{2}, & \text{si } \frac{3}{2}\leq\chi_2\end{cases}$$

Con lo que tenemos que resolver 16 posibles programas lineales de los que sólo son factibles los ocho programas siguientes:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 - x_2 + \frac{3}{2} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 0 \le x_1 \le \frac{1}{4} \\ & 0 \le x_2 \le \frac{1}{2} \end{array} \qquad (2.1)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 + 1 \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 0 \le x_1 \le \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2} \end{array} \qquad (2.2)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_2 + \frac{5}{4} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & \frac{1}{4} \le x_1 \le \frac{3}{4} \\ & 0 \le x_2 \le \frac{1}{2} \end{array} \qquad (2.3)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & \frac{3}{4} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & \frac{1}{4} \le x_1 \le \frac{3}{4} \\ & \frac{1}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2} \end{array} \qquad (2.4)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 0 \le x_1 \le \frac{1}{4} \\ & \frac{3}{2} \le x_2 \end{array} \qquad (2.5)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & \frac{3}{4} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & \frac{1}{4} \le x_1 \le \frac{3}{4} \\ & \frac{3}{2} \le x_2 \end{array} \qquad (2.6)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1 - x_2 + \frac{1}{2} \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & \frac{3}{4} \le x_1 \\ & 0 \le x_2 \le \frac{1}{2} \end{array} \qquad (2.7)'$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1 \\ s.a. & x_1 + x_2 \le 2 \\ & \frac{3}{4} \le x_1 \\ & \frac{1}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2} \end{array} \qquad (2.8)'$$

Las soluciones de estos ocho programas son:

- de los cuatro primeros, (2.1) ', (2.2) ', (2.3) ' y (2.4) ':

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{1}{4}, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

- de los programas (2.5) ' y (2.6) ', la solución es:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{1}{4}, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = \frac{3}{2}$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

- y de los programas (2.7) ' y (2.8) ', la solución es:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

luego

$$\chi_1^* = f_1(\bar{x}^*) = x_1 = \frac{3}{4}, \quad \chi_2^* = f_2(\bar{x}^*) = x_2 = \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto

$$\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

3 '.- Para estas tres soluciones, el valor exacto de $Q(\bar{\chi}^*)$ es

$$Q(\bar{\chi}^*) = \frac{9}{8}$$

4 '.- El valor de $Q(\bar{\chi}^*, E[\xi])$ para las tres soluciones, también coincide, y es:

$$Q(\bar{\chi}^*, E[\xi]) = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, el error cometido al aceptar cualquiera de las tres soluciones

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

es menor o igual que

$$Q(\bar{\chi}^*) - Q(\bar{\chi}^*, E[\xi]) = \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0.375$$

5 '.- Con la que queda comprobado que la solución mejora notablemente si se efectúa una partición tanto en el soporte de la variable aleatoria ξ_1 como en el de la variable aleatoria ξ_2 ya que, ahora, el error cometido en el valor de la función objetivo al tomar cualquiera de estas tres últimas soluciones "aproximadas" como solución del problema, sería sólo menor o igual que 0.375, mientras que sin efectuar ninguna partición era menor o igual que 0.75.

9.3.- Aplicación a la Financiación de una Empresa Multinacional.

Consideremos una empresa multinacional que tiene sucursales en N países y planifica con antelación la financiación de dichas sucursales.

Lógicamente, la empresa puede aprovechar las distintas peculiaridades financieras de los países donde está implantada.

Supongamos que los objetivos de la empresa son:

1. Minimizar el coste total de la financiación de cada sucursal.
2. Que la suma de los fondos generados internamente por cada sucursal y cedidos a las restantes no supere los beneficios de dicha sucursal.
3. Que la razón entre el total de acciones emitida por cada sucursal y sus correspondientes beneficios, no supere una cota máxima fijada previamente, R.
4. Que la razón entre el total de deuda contraida por cada sucursal y sus correspondientes beneficios, no supere una cota máxima fijada previamente, R'.

Además, evidentemente, las necesidades financieras de cada sucursal deben ser cubiertas.

Por lo tanto, si:

f_{ji} son los fondos internamente generados por la sucursal j, utilizados para financiar a la sucursal i.

a_{ji} son las acciones emitidas por la sucursal j, utilizadas para financiar a la sucursal i.

d_{ji} es la deuda contraida por la sucursal j, utilizadas para financiar a la sucursal i.

r_j es el interés de los préstamos suscritos por la sucursal j.

r_j' es la rentabilidad de las acciones emitidas por la sucursal j.

t_j es el impuesto sobre los activos que se sacan del país j.

b_j son los beneficios de la sucursal j.

c_{ji} es el tipo de cambio entra las divisas j e i.

$c_{j\$}$ es el tipo de cambio entra la divisa j y el dólar.

M_i son las necesidades financieras de la sucursal i.

Con esta notación, los cuatro objetivos propuestos por la empresa multinacional, en el mismo orden en que los hemos formulado, son:

$$min \quad \sum_{j=1}^{N} \left(r_j d_{ji} + r_j' a_{ji}\right) c_{j\$}, \quad i = 1, \cdots, N \qquad (9.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ji} \leq b_j, \quad j = 1, \cdots, N \qquad (9.8)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ji}}{b_j} \leq R, \quad j = 1, \cdots, N \qquad (9.9)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ji}}{b_j} \leq R', \quad j = 1, \cdots, N \qquad (9.10)$$

Y las restricciones que se deben verificar son:

$$f_{ii} + a_{ii} + d_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(f_{ji} + a_{ji} + d_{ji}\right)\left(1 - t_j\right) c_{ji} = M_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

$$f_{ji}, d_{ji}, a_{ji} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, N, \quad j = 1, \cdots, N$$

que representaremos, respectivamente, por (9.11) y (9.12).

Dado que la empresa planifica de antemano, los beneficios b_j de cada sucursal $j=1,\cdots,N$ no se conocen, por lo tanto es más realista suponer que dichos beneficios son aleatorios y los representaremos por ξ_j, $j=1,\cdots,N$.

Supongamos que todos los demás elementos que intervienen en el problema son conocidos. (En caso de que alguno de ellos fuese una variable aleatoria, supondremos que su distribución de probabilidad es conocida y que se toma su valor medio).

Los objetivos (9.9) y (9.10) son equivalentes, respectivamente, a

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ji}}{R} \leq \xi_j, \quad j=1,\cdots,N$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ji}}{R'} \leq \xi_j, \quad j=1,\cdots,N$$

Bajo estas hipótesis el problema se puede plantear como un problema de *Programación Estocástica por Metas* del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(r_j d_{ji} + r_j' a_{ji}\right) - y_{1i}^{+} + y_{1i}^{-} = 0, \quad i=1,\cdots,N$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ji} - y_{1j}^{+} + y_{1j}^{-} = \xi_j, \quad j=1,\cdots,N$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ji}}{R} - y_{2j}^{+} + y_{2j}^{-} = \xi_j, \quad j=1,\cdots,N$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ji}}{R'} - y_{3j}^{+} + y_{3j}^{-} = \xi_j, \quad j=1,\cdots,N$$

$$f_{ii} + a_{ii} + d_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(f_{ji} + a_{ji} + d_{ji}\right)\left(1-t_j\right)c_{ji} = M_i,$$

$$i=1,\cdots,N$$

$$f_{ji}, d_{ji}, a_{ji} \geq 0, \quad i=1,\cdots,N, \quad j=1,\cdots,N$$

Que se puede resolver mediante el programa:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{N} c_{i\$} y_{1i}^{+} + \sum_{j=1}^{N} \left(w_{1j}\, c_{j\$} y_{1j}^{+} + w_{2j}\, c_{j\$} y_{2j}^{+} + w_{3j}\, c_{j\$} y_{3j}^{+} \right) \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{N} \left(r_j\, d_{ji} + r_j{}' a_{ji} \right) \cdot c_{j\$} - y_{1i}^{+} + y_{1i}^{-} = 0 , \quad i = 1, \cdots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} f_{ji} - y_{1j}^{+} + y_{1j}^{-} = \xi_j , \quad j = 1, \cdots, N \\
& \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ji}}{R} - y_{2j}^{+} + y_{2j}^{-} = \xi_j , \quad j = 1, \cdots, N \\
& \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ji}}{R'} - y_{3j}^{+} + y_{3j}^{-} = \xi_j , \quad j = 1, \cdots, N \\
& f_{ii} + a_{ii} + d_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(f_{ji} + a_{ji} + d_{ji} \right) \left(1 - t_j \right) c_{ji} = M_i \\
& \qquad i = 1, \cdots, N \\
& f_{ji} , d_{ji} , a_{ji} \geq 0 , \quad i = 1, \cdots, N , \quad j = 1, \cdots, N \\
& y_{1i}^{+} , y_{1i}^{-} , y_{1j}^{+} , y_{1j}^{-} , y_{2j}^{+} , y_{2j}^{-} , y_{3j}^{+} , y_{3j}^{-} \geq 0 \\
& \qquad i = 1, \cdots, N , \quad j = 1, \cdots, N
\end{aligned}
$$

que representaremos por (9.13), y que, obviamente, es un problema del tipo (7.4)

$$
\begin{aligned}
\text{"}\min\text{"} \quad & \sum_{i=1}^{p} \left(w_i^{+} y_i^{+} + w_i^{-} y_i^{-} \right) \\
s.a. \quad & \bar{x} \in X \\
& \left. \begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^{-} - y_i^{+} = \xi_i \\ y_i^{+} , y_i^{-} \geq 0 \\ w_i^{+} , w_i^{-} \geq 0 \end{array} \right\} \quad i = 1, \cdots, p
\end{aligned}
$$

en el que:

- las variables de decisión $\bar{x}$, son

$$\bar{x} = \left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right)$$

donde, lógicamente,

$$\bar{f} = \left(f_{ji}\right)_{\substack{j=1,\cdots,N \\ i=1,\cdots,N}} \ , \ \bar{a} = \left(a_{ji}\right)_{\substack{j=1,\cdots,N \\ i=1,\cdots,N}} \ , \ \bar{d} = \left(d_{ji}\right)_{\substack{j=1,\cdots,N \\ i=1,\cdots,N}}$$

- el conjunto factible, X, está formado por todos los $\bar{x} = \left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right)$, tales que

$$f_{ji}, d_{ji}, a_{ji} \geq 0, \quad i = 1,\cdots,N, \quad j = 1,\cdots,N$$

y

$$f_{ii} + a_{ii} + d_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(f_{ji} + a_{ji} + d_{ji}\right)\left(1 - t_j\right)c_{ji} = M_i, \quad i = 1,\cdots,N$$

- w_{1j} es la penalización por haberse comprometido a proporcionar fondos que superan los beneficios que realmente ha tenido la sucursal j, y w_{2j} y w_{3j} son las penalizaciones por la violación de las restricciones de tipo legal (9.9) y (9.10), respectivamente, por la sucursal j.

- $\left(\xi_1, \cdots, \xi_N\right) = \bar{\xi}$

Por lo tanto, el problema (9.13), se puede resolver mediante el modelo (8.1):

$$\begin{aligned} min \quad & E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right), \bar{\xi}\right)\right] \\ s.a. \quad & \left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right) \in X \end{aligned} \qquad (9.14)$$

donde, para cada $\bar{x} = \left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right)$ y cada $\left(\xi_1, \cdots, \xi_N\right) = \bar{\xi}$ fijos, $Q\left(\left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d}\right), \bar{\xi}\right)$

es la solución del problema:

$$\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{N} c_{is} y_{1i}^{+} + \sum_{j=1}^{N} \left(w_{1j}\, c_{js} y_{1j}^{+} + w_{2j}\, c_{js} y_{2j}^{+} + w_{3j}\, c_{js} y_{3j}^{+} \right) \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{N} \left(r_j\, d_{ji} + r_j' a_{ji} \right) \cdot c_{js} - y_{1i}^{+} + y_{1i}^{-} = 0 \,, \quad i = 1, \cdots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} f_{ji} - y_{1j}^{+} + y_{1j}^{-} = \xi_j \,, \quad j = 1, \cdots, N \\
& \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ji}}{R} - y_{2j}^{+} + y_{2j}^{-} = \xi_j \,, \quad j = 1, \cdots, N \\
& \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ji}}{R'} - y_{3j}^{+} + y_{3j}^{-} = \xi_j \,, \quad j = 1, \cdots, N \\
& y_{1i}^{+}, y_{1i}^{-}, y_{1j}^{+}, y_{1j}^{-}, y_{2j}^{+}, y_{2j}^{-}, y_{3j}^{+}, y_{3j}^{-} \geq 0 \\
& \qquad i = 1, \cdots, N, \; j = 1, \cdots, N
\end{aligned}$$

Y el problema (9.14) se puede resolver aplicando cualquiera de los algoritmos vistos en el capítulo 8. Obviamente en la determinación del la función objetivo de dicho problema,

$$E_{\bar{\xi}} \left[Q\left(\left(\bar{f}, \bar{a}, \bar{d} \right), \bar{\xi} \right) \right]$$

no influyen los N objetivos deterministas:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(r_j\, d_{ji} + r_j' a_{ji} \right) \cdot c_{js} - y_{1i}^{+} + y_{1i}^{-} = 0 \,, \quad i = 1, \cdots, N$$

CONCLUSIONES

Entre las técnicas utilizadas para resolver problemas de Programación Lineal Multiobjetivo, la Programación por Metas determinista es una de las que cuenta con una literatura más extensa, tanto a nivel teórico como en el ámbito de las aplicaciones.

A la hora de resolver problemas reales en algunos de los campos del amplio espectro de las aplicaciones, se ha visto la conveniencia de realizar distintas extensiones de la Programación por Metas: Programación por Metas entera, Programación por Metas no lineal, Programación por Metas fraccional....

Uno de los aspectos menos estudiados es la *Programación Estocástica por Metas.* Sin embargo, es esta una extensión sumamente natural de la Programación por Metas determinista ya que, frecuentemente, es más realista la hipótesis de que son aleatorios todos o algunos de los coeficientes que intervienen en cualquier problema que se pueda resolver mediante Programación por Metas. La hipótesis de que dichos coeficientes son números fijos conocidos es, con frecuencia, poco realista.

En esta tesis se ha desarrollado una metodología para resolver el problema de *Programación Estocástica por Metas.*

Nos hemos centrado en el caso en que la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración porque, dentro de la poca literatura que hay sobre *Programación Estocástica por Metas*, éste es uno de los aspectos menos estudiado, siendo, sin embargo, de gran interés teórico y práctico.

Como dijimos en la Introducción, la verdadera contribución al tema está en los tres últimos capítulos de la tesis (7, 8 y 9) en los que, respectivamente, proponemos un modelo de solución, estudiamos las propiedades de dicho modelo con la finalidad de proponer algoritmos de solución para el mismo y comentamos algunas de las posibles aplicaciones del problema estudiado.

El modelo de solución que proponemos para el problema de *Programación Estocástica por Metas* con aleatoriedad, únicamente, en los niveles de aspiración, es un Programa Estocástico en dos etapas.

Uno de estos dos programas, el denominado de segunda etapa, es un programa lineal determinista y, por lo tanto, de muy fácil solución.

Sin embargo, el programa de primera etapa es más difícil de resolver porque la función objetivo requiere la determinación de un valor esperado, que depende, lógicamente, de la distribución de probabilidad del vector aleatorio de los niveles de aspiración. No siempre es fácil poder determinar la forma explícita de tal valor esperado. Incluso cuando esto es posible, frecuentemente resulta sumamente difícil determinar su valor exacto porque se requieren métodos de integración múltiple.

Por eso se dedica el capítulo ocho al estudio detallado de este programa de primera etapa, con el fin de obtener o bien programas equivalentes al original y de más fácil solución, o bien algoritmos que nos permitan resolverlo.

Se obtienen los siguientes resultados:

- Se demuestra que el programa de primera etapa, es un programa convexo.
- Se demuestra, también, que dicho programa es convexo-separable.

- En la función objetivo se pueden separar los términos lineal y no lineal, lo que facilita su resolución para algunos tipos de distribución de probabilidad (uniforme, exponencial ...)
- En el caso en que la distribución de probabilidad del vector de niveles de aspiración sea discreta finita, se demuestra que el problema es equivalente a un problema de programación lineal determinista y, por lo tanto, se puede resolver aplicando el método del Simplex.
- Sin embargo, para otros tipos de distribuciones de probabilidad se siguen presentando serias dificultades de cálculo. Por ello, se propone un algoritmo por aproximaciones mediante acotaciones. El algoritmo que se propone para resolver nuestro problema queda notablemente simplificado en relación al algoritmo más general, denominado "refinamiento de la solución 'espera y ve'", propuesto por Kall y Wallace para problemas estocásticos con recursos, al que nos hemos referido en el apartado 4.3 del capítulo 4. Además, obvia algunas de la dificultades que presenta dicho algoritmo ya que:

  1. Como nuestro problema es convexo, se puede hallar como límite inferior de la función objetivo el límite inferior de Jensen, que es muy fácil de determinar sin más que aplicar la conocida desigualdad de Jensen.
  2. No es necesario determinar ningún límite superior porque se demuestra que, dado un punto concreto (que en nuestro problema se obtiene fácilmente sin más que minimizar el límite inferior de Jensen), se puede determinar el valor exacto de la función objetivo en dicho punto.
  3. Ese punto concreto en el que se determina el valor exacto de la función objetivo coincide, obviamente, con la que hemos

denominado solución "ingenua". Por lo tanto, la primera vez que se aplica el algoritmo, se puede partir de la solución ingenua y continuar con el paso número tres.

4. Se sabe en qué componentes de la solución aproximada, $\bar{\chi}^*$, hay error: en aquellas que verifiquen que $\alpha_i \leq \chi_i^* \leq \beta_i$. Por lo tanto, las particiones para mejorar la solución se realizan en los soportes de las variables aleatorias correspondientes a dichas componentes. Y el punto en que se efectúa la partición es, precisamente, χ_i.

- El modelo de solución propuesto presenta, además, notables ventajas frente a otros posibles métodos de solución:
  1. Es un modelo formalmente análogo al de Programación por Metas Determinista.
  2. Es un modelo compatible con la Teoría de la Decisión Bayesiana. Esto nos ha permitido aplicarle conceptos tales como el Valor Esperado de la Información Perfecta y el Valor Esperado de la Información Muestral.
  3. La función objetivo del modelo se puede expresar mediante las distribuciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias que constituyen el vector de los niveles de aspiración. Consecuentemente, en la resolución del problema, no influye la dependencia o independencia de dichas variables.
  4. El modelo de solución que proponemos es compatible con la Programación Lexicográfica por Metas.

- Otros modelos de solución alternativos para resolver el problema de *Programación Estocástica por Metas*, cuando el vector de niveles de aspiración es aleatorio, son criticables ya que ninguno de ellos tiene las ventajas de nuestro modelo:
  - Sólo dos de estos modelos alternativos, la solución "ingenua" y el modelo del tipo "espera y ve" (apartados 7.3.1 y 7.3.4), son compatibles con la Teoría de la Decisión Bayesiana, pero ambos presentan serios inconvenientes:
    - La solución "ingenua" infravalora el verdadero coste de cada decisión.
    - Con el modelo del tipo "espera y ve", además de despreciar información, se corre el riesgo de que la solución sea la alternativa más costosa.
  - Los otros modelos propuestos, es decir, la resolución mediante Programas con Restricciones Probabilísticas y otros modelos probabilísticos que recuerdan al modelo de Contini, no son compatibles con la Teoría de la Decisión Bayesiana, lo que implica la violación de algunas de las condiciones de racionalidad subyacentes a dicha teoría.

La metodología desarrollada se puede aplicar a la inmensa mayoría de los campos a los que se ha aplicado la Programación por Metas determinista. La única condición para hacerlo es que el vector de los niveles de aspiración sea aleatorio en lugar de fijo, lo que suele suceder en gran número de aplicaciones.

A modo de ejemplo, hemos aplicado nuestro problema a la Estimación de Parámetros Bayesiana, resolviendo el caso en que el parámetro a estimar es un vector y se considera como función de pérdida una generalización de la función de pérdida proporcional al valor absoluto, que es una de las funciones de pérdida más frecuentemente utilizadas para estimar parámetros unidimensionales.

También, hemos estudiado una aplicación en el ámbito de empresas de producción en el supuesto de que una empresa disponga de n factores para producir p productos y sus objetivos sean satisfacer las demandas y no sobrepasar unos costes prefijados de antemano. El vector de los niveles de aspiración lo constituyen las demandas que, evidentemente, son aleatorias. El coste máximo que no debe sobrepasarse es un valor fijo, determinado por el centro decisor de la empresa. Este objetivo se considera como una restricción del conjunto factible de nuestro problema.

Por último hemos estudiado una aplicación a la financiación de una empresa multinacional, de modo que se saque partido de las diferentes características de las sucursales de dicha empresa radicadas en distintos países.

BIBLIOGRAFÍA

[A.1] Arthur, J. L. y Ravindran, A. (1978) *"An Efficient Goal Programming Algorithm using Constraint Partitioning and Variable Elimination"*. Management Science, vol. 24, pp. 867-868.

[A.2] Arthur, J. L. y Ravindran, A. (1980) *"A Branch and Algorithm Constraint Partitioning for Integer Goal Programming Problems"*. European Journal of Operational Research, vol. 4, pp. 421-425.

[A.3] Arthur, J. L. y Ravindran, A. (1986) *"Comments on the Special Issue on Generalized Goal Programming"*. European Journal of Operational Research, vol. 4, pp. 421-425.

[B.1] Balachandran, K. R. y Steuer, R. E. (1982) *"An Interactive Model for the C.P.A. Firm Audit Staff Planning Problem with Multiple Objectives"*. The Accounting Review, vol. 57, nº 1, pp. 125-140.

[B.2] Balbás, A. y Gil, J. A. (1990) *"Programación Matemática"*. Editorial A. C. Madrid.

[B.3] Beale, E. M. L. (1955) *"On Minimizing a Convex Function subject to Linear Inequalities"*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, vol. 17, pp. 173-184

[B.4] Beale, E. M. L. (1961) *"The use of Quadratic Programming in Stochastic Linear Programming"*. Tech. Report, Rand Corporation. Santa Mónica.

[B.5] Benayoun, R., Montgolfier, J. T., Tergny, J. y Larivech, O. (1971) *"Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM)".* Mathematical Programming, vol.1, pp. 366-375.

[B.6] Bender, J. F. (1962) *"Partitioning Procedures for solving Mixed-variables Programming Problems".* Numerische Mathematik, vol. 4, pp. 238-252.

[B.7] Ben-Israel, A., Charnes, A. y Kirby, M. J. L. (1970) *"On Stochastic Linear Approximation Problems".* Operations Research, vol. 18, pp. 555-558.

[B.8] Ben-Tal, A. y Teboulle, M. (1986) *"Expected Utility, Penalty Functions, and Duality in Stochastic Nonlinear Programming".* Management Science, vol. 32, nº 11, pp. 1445-1466.

[B.9] Ben-Tal, A. y Teboulle, M. (1987) *"Penalty Functions and Duality in Stochastic Programming via Φ-divergence Functionals".* Mathematics of Operations Research, vol. 12, nº 2, pp. 224-240.

[B.10] Bereanu, B. (1963) *"On Stochastic Linear Programming: Distribution Problems. A single random variable".* Rev. Roumaine Math. Pures Appl, vol.8, nº 4, pp. 683-697.

[B.11] Bereanu, B. (1964) *"Programme de Risque Minimal en Programmation Linéaire Stochastique".* C. R. Académie Science Paris, vol. nº 259, pp. 981-983.

[B.12] Bereanu, B. (1965) *"Distribution Problems and Minimum Risk solutions in Stochastic Programming".* Colloquium on Applications of Mathematics to Economics, Budapest. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, pp. 37-42.

[B.13] Bereanu, B. (1966) *"On Stochastic Linear Programming. II, Distribution Problems: Non-Stochastic Technological matrix".* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., vol.11, nº 6, pp. 713-725.

[B.14] Bereanu, B. (1967) *"On Stochastic Linear Programming. Distribution Problems, Stochastic Technological matrix Z".* Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, vol. 8, pp. 148-152.

[B.15] Bereanu, B. (1976) *"The generalized Distribution Problem of Stochastic Linear Programming".* Symposia Matematica. Academic Press. Nueva York.

[B.16] Bernhard, R. H. (1969) *"Mathematical Programming Models for Capital Budgeting. A Survey, Generalization and Critique".* Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.4, nº 2, pp. 111-158.

[B.17] Birge, J. R. (1985) *"Decomposition and Partitioning Methods for Multistage Stochastic Linear Programs".* Operations Research, vol. 33, nº 5, pp. 989-107.

[B.18] Birge, J. R. y Qi, L. (1988) *"Computing Block-Angular Karmarkar Projections with Applications to Stochastic Programming"*. Management Science, vol. 34, nº 12, pp. 1472-1479.

[B.19] Birge, J. R. y Wets, R. J.-B. (1987) *"Computing Bounds for Stochastic Programming Problems by means of a Generalized Moment Problem"*. Mathematics of Operations Research, vol. 12, nº 1, pp. 149-162.

[B.20] Blau, R. A. (1974) *"Stochastic Programming and Decision Analysis: an apparent Dilemma"*. Management Science, vol. 21, nº3, pp. 271-276.

[B.21] Booth, G. G. y Bessler, W. (1989) *"Goal Programming Models for Managing Interest-Rate Risk"*. Omega, vol. 17, nº 1, pp. 81-89.

[C.1] Charnes, A. y Cooper, W. W. (1954) *"The Stepping Stone Method of explaining Linear Programming Calculations in Transportation Problems"*. Management Science, vol. 1, nº 1, pp. 49-69.

[C.2] Charnes, A. y Cooper, W. W. (1959) *"Chance-Constrained Programming"*. Management Science, vol. 6, nº 1, pp. 73-79.

[C.3] Charnes, A. y Cooper, W. W. (1963) *"Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constrained"*. Operations Research, vol. 11, pp. 18-39.

[C.4] Charnes, A. y Cooper, W. W. (1975) *"A comment on Blau's Dilemma in 'Stochastic Programming' and Bayesian Decision Analysis"*. Management Science, vol. 22, pp. 498-500.

[C.5] Charnes, A. y Cooper, W. W. (1983) *"Response to 'decision Problems under Risk and Chance Constrained Programming: Dilemmas in the Transition'"*. Management Science, vol. 29, pp. 750-753.

[C.6] Charnes, A., Cooper, W. W. y Ferguson, R. O. (1955) *"Optimal Estimation of executive compensation by Linear Programming"*. Management Science, vol. 1, nº 2, pp. 138-151.

[C.7] Charnes, A., Cooper, W. W., Learner, D. B. y Sonw, E. F. (1968) *"Note on Applications of a Goal Programming Model for Media Planning"*. Management Science, vol. 14, nº 8, pp. B-431-B-436.

[C.8] Charnes, A., Cooper, y Sueyoshi, T. (1986) *"Least squares/ridge Regression and Goal Programming/Constrained Regression alternatives"*. European Journal of Operational Research, vol. 27, pp. 146-157.

[C.9] Charnes, A., Cooper, y Sueyoshi, T. (1988) *"A Goal Programming/Constrained Regression Review of the Bell System Breakup"*. Management Science, vol. 3, nº 1, pp. 1-26.

[C.10] Charnes, A., Cooper, W. W., y Thompson, G. L. (1965) *"Constrained Generalized Medians and Hypermedians as Deterministic Equivalents for Two-stage Linear Programs un-*

der Uncertainty". Management Science, vol. 12, nº 1, pp. 83-112.

[C.11] Charnes, A., Cooper, W. W., DeVoe, J. K. Learner, D. B. y Reinecke, W. (1968) *"A Goal Programming Model for Media Planning".* Management Science, vol. 14, nº 8, pp. B-423 - B-430.

[C.12] Charnes, A., Drèze, J. y Miller, M. (1966) *"Decision and Horizon Rules for Stochastic Planning Problems: A Linear example".* Econométrica, vol. 34, nº 2, pp. 307-330.

[C.13] Charnes, A. y Stedry, A. C. (1966) *"Search-Theoretic Models of Organization Control by Budgeted Multiple Goals".* Management Science, vol. 12, nº 5, pp. 457-482.

[C.14] Chateau, J.-P. D. (1975) *"The Capital Budgeting Problem under Conflicting Financial Policies".* Journal of Business Finance and Accounting, vol. 2, nº 1, pp. 83-103.

[C.15] Cocks, H. D. (1968) *"Discrete Stochastic Programming".* Management Science, vol. 15, nº 1, pp. 72-79.

[C.16] Cohon, J. L. (1978) *"Multiobjective Programming and Planing".* Academic Press. Nueva York.

[C.17] Contini, B. (1968) *"A Stochastic Approach to Goal Programming".* Operations Research, vol. 16, nº 3, pp. 576-586.

[C.18] Cornen, J. L., Deckro, R. F. y Spahr, R. W. (1993) *"Multiple-Objective Linear Programming Capital Budgeting"*. Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 3, pp. 241-264.

[C.19] Cramer, H. (1970) *"Métodos Matemáticos de Estadística"*. Aguilar. Madrid.

[C.20] Cyert, R. M. y DeGroot, M. H. (1987) *"Bayesian Analysis and Uncertainty in Economic Theory"*. Rowman & Littlefield. Nueva Jersey.

[D.1] Dantzig, G. B. (1955) *"Linear Programming under Uncertainty"*. Management Science, vol. 1, nº 3, pp. 197-206.

[D.2] Dantzig, G. B. (1963) *"Linear Programming and Extensions"*. Princeton University Press. Nueva Jersey.

[D.3] Dantzig, G. B. y Madansky, A. (1961) *"On the Solution of Two-Stage Linear Programming under Uncertainty"*. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistic and Probability. University of California Press, Berkeley, pp. 165-176.

[D.4] Debreu, G. (1959) *"Theory of Value – An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium"*. John Wiley and Sons. Nueva York.

[D.5] De Groot, M. H. (1970) *"Optimal Statistical Decisions"*. McGraw-Hill. Nueva York.

[D.6] De Groot, M. H. y Rao, M. M. (1963) *"Bayes Estimation with Convex Loss"*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 34, pp. 839-846.

[D.7] Donckels, R. (1977) *"Regional Multiobjective Planning under Uncertainty: A Stochastic Goal Programming Formulation"*. Journal of Regional Science, vol. 17, nº 2, pp. 207-216.

[D.8] Dupacová, J. (1984) *"Stability in Stochastic Programming with Recourse-Estimated Parameters"*. Mathematical Programming, vol. 28, pp. 72-83.

[D.9] Dupacová, J., Gaivoronski, A. Kos, Z. Y Szántai, T. (1991) *"Stochastic Programming in Water Management: a Case Study and a Comparison of Solution Techniques"*. European Journal of Operational Research, vol. 52, pp. 28-44.

[D.10] Dyer, J. S. (1972) *"Interactive Goal Programming"*. Management Science, vol. 19, nº 1, pp. 62-70.

[E.1] Edirisinghe, N. C. P. y Ziemba, W. T. (1994) *"Bound for Two-Stage Stochastic Programs with Fixed Recourse"*. Mathematical of Operations Research, vol. 19, nº 2, pp. 292-313.

[E.2] Edirisinghe, N. C. P. y Ziemba, W. T. (1994) *"Bounding the Expectation of a Saddle Function with Application to Stochastic Programming"*. Mathematical of Operations Research, vol. 19, nº 2, pp. 314- 340.

[E.3] El-Agizy, M. (1964) *"Programming under Uncertainty with Discrete Distribution Function"*. Operations Research Center, vol. 13, pp. 1-18.

[E.4] Elmaghraby, S. E. (1959) *"An Approach to Linear Programming under Uncertainty"*. Operations Research, vol. 7, nº 1, pp. 208-216.

[E.5] Everitt, R. y Ziemba, T. (1979) *"Two-Period Stochastic Programs with Simple Recourse"*. Operations Research, vol. 27, nº 3, pp. 485-502.

[E.6] Evers, W. H. (1967) *"A new Model for Stochastic Linear Programming"*. Management Science, vol. 13, nº 9, pp. 680-693.

[F.1] Flavell, R. B. (1976) *"A New Goal Programming Formulation"*. Omega, vol.4, pp. 731-732.

[F.2] Fowler, K. L. y Schniederjans, M. J. (1987) *"A Goal Programming Model for Strategic Acquisition Problem Solving"*. Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 1, pp. 139-151.

[F.3] Frauendorfer, K. (1988) *"Solving S.L.P. Recourse Problems with Arbitrary Multivariate Distributions. The Dependent Case"*. Mathematical of Operations Research, vol. 13, nº 3, pp. 377- 394.

[F.4] French, S. (1993) *"Decision Theory: an Introduction to the Mathematics of Rationality"*. Ellis Horwood Limited. Nueva York.

[F.5] Fukushima, M. (1983) *"A Fixed Point Approach to certain Convex Programs with Applications in Stochastic Programming"*. Mathematics of Operations Research, vol. 8, nº 4, pp. 517- 524.

[G.1] Garstka, S. J. (1973) *"Stochastic Programs with Recourse: Radon Recourse Cost only"*. Management Science, vol. 19, nº 7, pp. 747-750.

[G.2] Gassmann, H. I. (1990) *"MSLIP: a Computer Code for the Multistage Stochastic Linear Programming Problem"*. Mathematics Programming, vol. 47, pp. 407-423.

[G.3] Geoffrion, A. M. (1967) *"Stochastic Programming with Aspiration for Fractile Criteria"*. Management Science, vol. 13, nº 9, pp. 672-679.

[G.4] Geoffrion, A. M., Dyer, J. S. y Feinberg, A. (1972) *"An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to Operation of an Academic Department"*. Management Science, vol. 19, nº 9, pp. 359-368.

[G.5] Goicoechea, A., Duckstein, L. y Fogel, M. M. (1979) *"Multiple Objectives under Uncertainty: an illustrative Application of Protrade"*. Water Recourses Research, vol. 15, nº 2, pp. 203-210.

[G.6] Goicoechea, A., Hansen, D. R. y Duckstein, L. (1982) *"Multipleobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications".* John Wiley and Sons. Nueva York.

[G.7] Gregory, R. y Lichtenstein, S. (1994) *"A Hint of Risk: Tradeoffs between Quantitative and Qualitative Risk Factors".* Risk Analysis, vol. 14, nº 2, pp. 199-206.

[G.8] Guerard, J. B. y Lawrence, K. D. (1987) *"Multiperiod Strategic Planning in a Firm. A Goal Programming Model".* Advances in Mathematical Programming and Financial Planning", vol. 1, pp. 107-124.

[H.1] Hahn, R. W. (1984) *"On Reconciling Conflicting Goals: Applications of Multiobjective Programming".* Operations Research, vol. 32, nº 1, pp. 221-228.

[H.2] Haimes, Y. Y. y Hall, W. A. (1974) *"Multiobjective in Water Resources Systems Analysis: the surrogate worth Trade-Off Method".* Water Resources Research, vol. 10, pp. 615-623.

[H.3] Hansotia, B. J. (1980) *"Stochastic Linear Programming with Simple Recourse: the Equivalent Deterministic Convex Program for the Normal, Exponential and Erlang cases".* Naval Research Logistics Quarterly", vol. 27, pp. 257-272.

[H.4] Hättenschwiler, P. (1988) *"Goal Programming becomes most useful using L_1-Smoothing Functions".* Computational Statistic & Data Analysis, vol. 6, nº 4, pp. 369-383.

[H.5] Haugland, D. y Wallace, S. W. (1988) *"Solving many Linear Programs that differ only in the Right-hand Side"*. European Journal of Operational Research, vol. 37, pp. 318-324.

[H.6] Hawkins, C. A. y Adams, R. A. (1974) *"A Goal Programming Model for Capital Budgeting"*. Financial Management, vol. 3, pp. 52-57.

[H.7] Heras, A. (1989) *"Programación Multiobjetivo Estática y Dinámica. Aplicaciones a la Economía y a la Empresa"*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid.

[H.8] Higle, J. L. y Sen S. (1991) *"Stochastic Decomposition: an Algorithm for Two-Stage Linear Programs with Recourse"*. Mathematics of Operations Research, vol. 16, nº 3, pp. 650-669.

[H.9] Hogan, A. J., Morris, J. G. y Thompson, H. (1981) *"Decision Problems under Risk and Chance Constrained Programming: Dilemmas in the Transition"*. Management Science, vol. 27, pp. 698-716.

[H.10] Huang, C. C., Vertinsky, I. y Ziemba, W. T. (1977) *"Sharp Bound on the Value of Perfect Information"*. Operations Research, vol. 25, nº 1, pp. 128-139.

[H.11] Huang, C. C., Ziemba, W. T. y Ben-Tal, A. (1977) *"Bounds on the Expectation of a Convex Function of a Random Variable: with Applications to Stochastic Programming"*. Operations Research. Vol. 25, nº 2, pp. 315-325.

[I.1] Ignizio, J. P. (1976) *"Goal Programming and extensions"*. Lexington Books. Massachusetts.

[I.2] Ignizio, J. P. (1978) *"A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjective Analysis"*. Journal of the Operational Research Society, vol. 29, pp. 1109-1119.

[I.3] Ignizio, J. P. (1982) *"Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems"*. Prentice – Hall. Englewood Cliffs. Nueva York.

[I.4] Ignizio, J. P. (1984) *"A note on the Multidimensional Dual"*. European Journal of Operational Research, vol. 17, pp. 116-122.

[I.5] Ignizio, J. P. (1985) *"Introduction to Linear Goal Programming"*. Sage Publications. California.

[I.6] Ijiri, Y. (1965) *"Management Goals an Accounting for Control"*. North-Holland. Amsterdam.

[I.7] Infante, R. (1986) *"Métodos de Programación Matemática"*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid.

[I.8] Infante, R. (1992) *"Teoría de la Decisión"*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid.

[J.1] Jagannathan, R. (1985) *"Use of Sample Information in Stochastic Recourse and Chance-Constrained Programming Models"*. Management Science, vol. 31, nº 1, pp. 96-108.

[J.2] Jagannathan, R. (1987) *"Response" (A La Valle, I. H. 1987)* Management Science, vol. 33, nº 10, pp. 1229-1231.

[J.3] Jensen, J. L. W. V. (1906) *"Sur les Functions Convexs et les Inégualités entre les Valeurs Moyennes"* Acte Mathématiques, vol. 30, pp.175-193.

[K.1] Kall, P. (1974) *"Approximations to Stochastic Programs with Complete Fixed Recourse"*. Numerische Mathamatik, vol. 22, pp. 333-339.

[K.2] Kall, P. (1976) *"Stochastic Linear Programming"*. Springer-Verlag. Nueva York.

[K.3] Kall, P. (1979) *"Computational Methods for solving Two-Stage Stochastic Linear Programming Problems"*. Journal of Applied Mathematics and Physics, vol. 30, pp. 261-271.

[K.4] Kall, P. (1982) *"Stochastic Programming"*. European Journal of Operational Research, vol. 10, pp. 125-130.

[K.5] Kall, P. y Stoyan, D. (1982) *"Solving Stochastic Programming Problems with Recourse including Error Bounds"*. Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Optimmization, vol. 13, nº 3, pp. 431-448.

[K.6] Kall, P. y Wallace, S. W. (1995) *"Stochastic Programming"*. John Wiley & Sons LTD. Nueva York.

[K.7] Kataoka, S. (1963) *"A Stochastic Programming Model"*. Econométrica, vol. 31, nº 1-2, pp. 181-196.

[K.8] Khorramshahgol, R. y Okoruwa, A. A. (1994) *"A Goal Programming Approach to Investment Decisions: a Case Study of Fund Allocation among different Shopping Malls"*. European Journal of Operational Research, vol. 73, pp. 17-22.

[K.9] Killough, L. N. y Souders, T. L. (1973) *"A Goal Programming Model for Public Accounting Firms"*. The Accounting Review, vol. nº 48, pp. 268-279.

[K.10] Kluyver, C. A. (1979) *"An Explorations of Various Goal Programming Formulations with Application to Advertising Media Scheduling"*. Journal of the Operational Research Society, vol. 20, pp. 161-171.

[K.11] Korhonen, A. (1987) *"A Dynamic Bank Portfolio Planing Model with Multiple Scenarios, Multiple Goals and Changing Priorities"*. European Journal of Operational Research, vol. 30, pp. 13-23.

[K.12] Korhonen, P. y Laakso, J. (1986) *"Solving Generalized Goal Programming Problems using a Visual Interactive Approach"*. European Journal of Operational Research, vol. 26, pp. 355-363.

[K.13] Kornbluth, J.S. H. y Steuer, R. E. (1981) *"Goal Programming with Linear Fractional Criteria"*. European Journal of Operational Research, vol. 1, pp. 58-61.

[K.14] Kumar, P. C. Philippatos, G. C. y Ezell, J. R. (1978) *"Goal Programming and the Selection of Portfolios by Dual Purpose Funds".* The Journal of Finance, vol. 33, nº 1, pp. 303-310.

[L.1] Lavalle, I. H. (1986) *"On Information-Augmented Change-Constrained Programs".* Operations Research Letters, vol. 4, nº 5, pp. 225-230.

[L.2] Lavalle, I. H. (1986) *"On the 'Bayesability' of Change-Constrained Programming Problems".* Operations Research Letters, vol. 4, nº 6, pp. 281-283.

[L.3] Lavalle, I. H. (1987) *"Response to 'Use of Sample Information in Stochastic Recourse and Chance-Constrained Programming Models': on the 'Bayesability' of CCP'S".* Management Science, vol. 33, nº 10, pp. 1224-1228.

[L.4] Lawrence, K. D. y Marose, R. A. (1993) *"Multi-Decision-Maker, Multicriteria Strategic Planning for the Mutual Life Insurance Company".* Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 3, pp. 271-295.

[L.5] Leclercq, J.-P. (1982) *"Stochastic Programming: an Interactive Multicriteria Approach".* European Journal of Operational Research, vol. 10, pp. 33-41.

[L.6] Lee, S. M. (1972) *"Decision Analysis".* Auerbach Publishers. Finlandia.

[L.7] Lee, S. M. y Chesser, D. L. (1980) *"Goal Programming for Portfolio Selection".* Journal of Portfolio Management", vol. 6, pp. 22-26.

[L.8] Lewis, R. P. y Taha, H. A. (1995) *"An Investigation of use of Goal Programming to Fit Response Surfaces".* European Journal of Operational Research, vol. 86, pp. 537-548.

[L.9] Lin, T. W. (1993) *"Multiple-Criteria Capital Budgeting under Risk".* Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 3, pp. 231-239.

[L.10] Lin, T. W. y O'Leary, D. (1993) *"Goal Programming Applications in Financial Management".* Advances in Mathematical Programming and Financial Planning, vol. 3, pp. 211-229.

[L.11] Lorie, J. H. y Savage, L. J. (1955) *"Three Problems in Capital Rationing".* Journal of Business, vol. 3, pp. 229-239.

[L.12] Louveaux, F. V. (1980) *"A Solution Method Multistage Stochastic Programs with Recourse with Application to an Energy Investment Problem".* Operations Research, vol. 28, nº 4, pp. 889-902.

[M.1] Madansky, A. (1960) *"Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems".* Management Science, vol. 6, nº 2, pp. 197-204.

[M.2] Madansky, A. (1962) *"Methods of Solutions of Linear Programs under Uncertainty".* Operations Research, vol. 10, pp. 165-176.

[M.3] Marglin, J. A. (1967) *"Public investment Criteria".* MIT press, Cambridge, Massachusetts.

[M.4] Martel, J-M., Y Aouni, B. (1990) *"Incorporating the Decision-Maker's Preferences in the Goal-Programming Model".* Journal of the Operational Research Society, vol. 41, pp. 1121-1132.

[M.5] Marti, K. (1971) *"Konvexitätsaussagen zum Linear Stochastischen Optimierungsproblem".* Z. Wahrsch Verw. Gebiete, vol. 28, pp. 159-166.

[M.6] Miller, C. E. (1963) *"The Simplex Method for Local Separable Programming".* En: Recent Advances in Mathematical Programming. Graves and Wolfe, pp. 89-100.

[M.7] Miller, M.L. y Wagner, H. M. (1965) *"Chance Constrained Programming with Joint Constraints".* Operations Research, vol. 13, pp. 930-945.

[M.8] Miyasawa, K. (1968) *"Information Structures in Stochastic Programming Problems".* Management Science, vol. 14, nº 5, pp. 275-291.

[M.9] Morita, H. y Ishii, H. (1992) *"A Stochastic Improvement Method for Stochastic Programming".* Computational Statistic & Data Analysis, vol. 14, pp. 477-487.

[M.10] Muhlemann, A. P. y Lockett, A. G. (1980) *"Portfolio Modeling in Multiplecriteria situations under Uncertainty Rejoinder"*. Decision Sciences, vol. 2, pp. 178-180.

[N.1] Näslund, B. (1966) *"A Model of Capital Budgeting under Risk"*. Journal of Business, vol. 2, pp. 257-271.

[N.2] Nau, R. F. (1987) *"Blau's Dilemma Revisited"*. Management Science, vol. 33, nº 10, pp. 1232-1237.

[O.1] Odom, P. R., Shannon, R. E. y Buckles, B. P. (1979) *"Multi-Goal Subject Selection Problems under Uncertainty"*. AIIE Transactions, vol. 11, pp. 61-69.

[O.2] Oslon, D. L. (1984) *"Comparison of Four Goal Programming Algorithms"*. Journal of the Operational Research Society, vol. 35, pp. 347-354.

[P.1] Prékopa, A. (1971) *"Logarithmic Concave Measure with Applications to Stochastic Programming"*. Act Science Mathematics, vol. 32, pp. 301-316.

[R.1] Rakes, T. R. y Reeves, G. R. (1985) *"Selecting Tolerances in Chance-Constrained Programming a Multiple Objective Linear Programming Approach"*. Operations Research Letters, vol. 4, nº 2, pp. 65-69.

[R.2] Rinott, Y. (1976) *"On Convexity of Measures"*. Ann. Probability, vol. 4, pp. 1020-1026.

[R.3] Rios-Insua, M. J. y Rios-Insua, S. (1989) *"Procesos de Decisión Multicriterio"*. Eudema. Madrid.

[R.4] Romero, C. (1986) *"A Survey of Generalized Goal Programming (1.970-1.982)"*. European Journal of Operational Research, vol. 25, pp. 183-191.

[R.5] Romero, C. (1993) *"Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones"*. Alianza. Madrid.

[R.6] Römisch, W. y Schultz, R. (1991) *"Distribution Sensitivity in Stochastic Programming"*. Mathematical Programming, vol. 50, pp. 197-226.

[R.7] Römisch, W. y Schultz, R. (1993) *"Stability of Solutions for Stochastic Programming with Complete Recourse"*. Mathematics of Operations Research, vol. 18, nº 3, pp. 590-609.

[S.1] Santhanam, R., Muralidhar, K. y Schniederjans, M. (1989) *"A Zero-one Goal Programming Approach for Information System Project Selection"*. Omega, vol. 17, nº 6, pp. 583-593.

[S.2] Sengupta, J. K. (1966) *"The Stability of Truncated Solutions of Stochastic Linear Programming"*. Econométrica, vol. 34, nº 1, pp. 77-104.

[S.3] Sengupta, J. K. (1982) *"Decision Models in Stochastic Programming. Operational Methods of Decision Making under Uncertainty"*. Elsevier Science Publishing Co. Inc. Nueva York.

[S.4] Sengupta, J. K., Tintner, K. y Millham, C. (1963) *"On some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications"*. Management Science, vol. 10, pp. 143-159.

[S.5] Sengupta, J. K., Tintner, K. y Morrison, B. (1963) *"Stochastic Linear Programming with Applications to Economic Models"*. Económica, vol. 30, pp. 262-275.

[S.6] Sharda, R. y Musser, K. D. (1986) *"Financial Futures Hedging via Goal Programming"*. Management Science, vol. 32, nº 8, pp. 933-947.

[S.7] Simon, H. A. (1957) *"Models of Man, Part IV: Rationality and Administrative Decision Making"*. Weley. Nueva York.

[S.8] Slowinski, R. y Teghem, J. (1988) *"Fuzzy versus Stochastic Approach to Multicriteria Linear Programming under Uncertainty"*. Naval Research Logistic, vol. 35, nº 6, pp.673-695.

[S.9] Slyke, R. y Wets, R. J.-B. (1969) *"L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Linear Programs"*. SIAM J. Appl. Math., vol. 17, pp. 638-663.

[S.10] Spivey, W. A. y Tamura, H. (1970) *"Goal Programming in Econometrics"*. Naval Research Logistic Quarterly", vol. 17, pp. 183-192.

[S.11] Spronk, J. (1981) *"Interactive Multiple Goal Programming. Applications to Financial Planning"*. Martinus Nijhoff Publishing. Boston.

[S.12] Stancu-Minasian, I. M. (1984) *"Stochastic Programming with Multiple Objective Functions"*. D. Reidel Publishing Company. Bucarest.

[S.13] Stancu-Minasian, I. M. (1990) *"Overview of Different Approaches for Solving Stochastic Programming Problem with Multiple Objective Functions"*. En: Stochastic versus fuzzy. Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty. Kluwer Academic Publishers, pp. 71-101.

[S.14] Stancu-Minasian, I. M. y Tigan, ST. (1988) *"A Stochastic Approach to some Linear Fractional Goal Programming Problems"*. Kybernetika, vol. 24, nº 2, pp. 139-149.

[S.15] Stancu-Minasian, I. M. y Wets, M. J. (1976) *"A Research Bibliography in Stochastic Programming, 1.955-1.975"*. Operations Research, vol. 24, pp. 1078-1119.

[S.16] Strazicky, B. (1974) *"On an Algorithm for Solution of the Two-Stage Stochastic Programming Problem"*. Methods of Operations Research, vol. 19, pp. 142-156.

[S.17] Stuer. R. (1986) *"Multiple Criteria Optimization: Theory Computation and Applications"*. Capítulo 13, pp.369-370. Wiley. Nueva York.

[T.1] Teghem, J., Dufrane, D., Thauvoye, M. y Kunsch, P. (1986) *"STRANGE: an Interactive Method for Multi-Objective Linear Programming under Uncertainty"*. European Journal of Operational Research, vol. 26, pp. 65-82.

[T.2] Tintner, G. (1955) *"Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics"*. En: Second Symposium Linear Programming. Antosiewiez. Washington, pp. 197-228.

[T.3] Tintner, G. (1960) *"A note on Stochastic Linear Programming"*. Econométrica, vol. 28, nº2, pp. 490-495.

[U.1] Urli, B. y Nadeau, R. (1990) *"Stochastic MOLP with Incomplete Information: an Interactive Approach with Recourse"*. Journal Operational Research Society, vol. 41, nº 12, pp. 1143-1152.

[V.1] Vajda, S. (1972) *"Probabilistic Programming"*. Academic. Press. Nueva York.

[V.2] Van de Panne, C. y Popp, W. (1963) *"Minimum – Cost Cattle Feed Under Probabilistic Protein Constraints"*. Management Science, vol. 9, pp. 405-430.

[W.1] Wallenius, H., Wallenius, J. y Vartia, P. (1978) *"An Approach to solving Multiple Criteria Macroeconomic Policy Problems and an Application"*. Management Science, vol. 24, nº 10, pp. 1021-1030.

[W.2] Walters, A., Mangold, J. y Haran, E. G. P. (1976) *"A comprehensive Planning Model for Long-Range Academic Strategies"*. Management Science, vol. 22, nº 7, pp. 727-738.

[W.3] Weingartner, H. M. (1963) *"Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems"* larkham Publishing Company. Chicago.

[W.4] Weingartner, H. M. (1966) *"Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis".* Management Science, vol. 12, nº 7, pp. 485-516.

[W.5] Weingartner, H. M. (1966) *"Criteria for Programming Investment Project Selection".* Journal of Industrial Economics. Vol. 15, nº 1, pp. 65-77.

[W.6] Weistroffer, H. R. (1982) *"Multiple Criteria Decision Making with Interactive Over-Achievement Programming".* Operations Research Letters, vol. 1, nº 6, pp. 241-245.

[W.7] Welam, U. P. (1976) *"Comments on Goal Programming for Aggregate Planning".* Management Science, vol. 22, nº 6, pp. 708-712.

[W.8] Wets, R. (1966) *"Programming under Uncertainty: the Complete Problem".* Z. Wahrscheinlickeitstheorie U. Verw, vol. 4, pp. 316-339.

[W.9] Wets, R. (1983) *"Solving Stochastic Programs with Simple Recourse".* Stochastic, vol. 10, pp. 219-242.

[W.10] Wets, R. (1996) *"Challenges in Stochastic Programming".* Mathematical Programming, vol. 75, pp. 115-135.

[W.11] White, D. J. (1992) *"A Min-max-min-max Approach to Solving a Stochastic Programming Problem with Simple Recourse"*. Management Science, vol. 38, nº 4, pp. 540-554.

[W.12] Williams, A. C. (1963) *"A Stochastic Transportation Problem"*. Operations Research, vol. 11, pp.759-770.

[W.13] Williams, A. C. (1965) *"On Stochastic Programming"*. SIAM Appl. Math, vol. 13, pp. 927-940.

[W.14] Williams, A. C. (1966) *"Approximation formulas for Stochastic Linear Programming"*. SIAM Appl. Math, vol. 14, pp. 668-677.

[Y.1] Yu, P. L. y Zeleny, M. (1975) *"The Set of all Non-Dominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method"*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 49, nº 2, pp. 430-468.

[Z.1] Zadeh, L. A. (1963) *"Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria"*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC. 8, pp. 59-60.

[Z.2] Zenely, M. (1982) *"Multiple Criteria Decision Making"* Mc Graw-Hill. Nueva York.

[Z.3] Ziemba, W. T. (1974) *"Stochastic Programs with Simple Recourse"*. En: Mathematical Programming in Theory and Practice. Hammer, P. L., Zoutndijk, G. North-Holland Publishing Company, pp. 213-273.

[Z.4] Zionts, S. Y Wallenius, J. (1976) *"An Interactive Programming Method for solving the Multiple Criteria Problem"*. Management Science, vol. 22, pp. 652-663.