UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Álgebra

ÍNDICE DE ESTABILIDAD Y DESCRIPCIÓN DE CONJUNTOS SEMIANALÍTICOS

Memoria presentada por Antonio Díaz-Cano Ocaña
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Madrid, Mayo 1999

En primer lugar, quiero agradecer profunda y sinceramente al profesor Carlos Andradas, que ha dirigido esta memoria, su esfuerzo y dedicación.

Agradezco también el apoyo y la ayuda que siempre he encontrado en todas las personas que componen el Departamento de Álgebra y, en especial, en su director, Juan Ramón Delgado. Asimismo, he de agradecer el interés y las sugerencias de Jesús M. Ruiz, Francesca Acquistapace y Fabrizio Broglia.

Finalmente, quiero manifestar mi agradecimiento a mi familia y, muy especialmente, a Jesusa, que tanto me ha apoyado durante la realización de este trabajo.

Contenido

Introducción

La Geometría Real tiene por objeto el estudio de conjuntos que pueden ser descritos por un sistema de desigualdades y uno de los problemas fundamentales que se plantea está relacionado con su complejidad, a saber, ¿cuál es el número mínimo de desigualdades necesarias para describir estos conjuntos? El estudio de este problema para gérmenes analíticos, por una parte, y para variedades analíticas, por otra, constituye el objetivo central de esta tesis.

Este problema fue abordado en el contexto semialgebraico a comienzos de la década de los ochenta. Precisando, si V es una variedad algebraica sobre un cuerpo real cerrado R, un conjunto semialgebraico básico abierto se puede escribir como

$$B = \{x \in V(R) | f_1(x) > 0, \ldots, f_r(x) > 0\}, \ f_i \in R[V] .$$

Bröcker demostró que el mínimo número de desigualdades necesarias para describir cualquier conjunto de este tipo (el índice de estabilidad de V, $s(V)$) depende únicamente de la dimensión de V, cf. [Brö1]. Asimismo, planteó el mismo problema para conjuntos básicos cerrados (cambiando > 0 por ≥ 0), introduciéndose así el índice de estabilidad cerrado de V, $\overline{s}(V)$. A finales de los ochenta se determinó el valor exacto de estos dos invariantes, concretamente, se encontró que $s(V) = n$ y $\overline{s}(V) = \frac{1}{2}n(n+1)$, donde n es la dimensión de V, cf. [Brö3] y [Sch].

Para conjuntos semialgebraicos en general, no necesariamente básicos, se plantean problemas similares ya que, por el Teorema de Finitud, cualquier conjunto semialgebraico abierto (resp. cerrado) se puede expresar como una unión finita de conjuntos semialgebraicos básicos abiertos (resp. cerrados). De esta forma, se introduce el invariante $t(V)$ (resp. $\overline{t}(V)$) como el mínimo número de conjuntos básicos abiertos (resp. cerrados) para expresar cualquier semialgebraico abierto (resp. cerrado). También fue Bröcker quien encontró cotas de t y de $\bar{t}$ que dependían únicamente de la dimensión de V, cf. [Brö2]. Sin embargo, la determinación exacta de estos invariantes parece lejos de ser obtenida, salvo en dimensión 1 ó 2.

El mismo tipo de problemas empezó a ser abordado en el caso analítico. En este contexto podemos distinguir entre el problema local y el problema global. Los invariantes s, $\bar{s}$, t y $\bar{t}$ se definen como en el caso semialgebraico pero ahora en lugar de polinomios aparecen gérmenes de funciones analíticas definidas en un germen analítico X_0 (problema local) o funciones analíticas globales definidas en un conjunto analítico global X (problema global).

En el problema local, si X_0 es un germen analítico de dimensión n los resultados obtenidos son similares a los del caso semialgebraico, cf. [An-Brö-Rz2, Th. VIII.2.12]:

$$s(X_0) = n\,, \quad \frac{1}{2}n(n+1) - 1 \leq \bar{s}(X_0) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

Una de las cuestiones abiertas es determinar el valor exacto de $\bar{s}(X_0)$, que sólo es conocido si $\dim X_0 = 1$, en cuyo caso $\bar{s}(X_0) = 1$. En cuanto a los invariantes $t(X_0)$ y $\bar{t}(X_0)$ se tienen cotas que sólo dependen de la dimensión de X_0, aunque al igual que ocurre en el caso semialgebraico son extraordinariamente elevadas si $n > 2$.

En el problema global, el primer resultado obtenido fue la acotación de $s(X)$ en términos de la dimensión de X cuando X es un conjunto analítico compacto, cf. [An-Brö-Rz1]. Posteriormente, las cotas de s y del resto de los invariantes, $\bar{s}$, t, $\bar{t}$, fueron mejoradas, quedando establecidas exactamente como en el caso semialgebraico, siempre en el supuesto de que X es compacto, cf. [An-Brö-Rz2].

Más difícil de abordar es el problema global cuando X es un conjunto analítico no compacto. El único resultado conocido hasta el momento es el caso regular unidimensional. Concretamente, si X es una variedad analítica de dimensión 1 entonces $s(X) = \bar{s}(X) = t(X) = \bar{t}(X) = 1$, cf. [An-Be].

Una buena parte de las herramientas necesarias para abordar este tipo de problemas nos las ofrece la teoría del espectro real, cf. [B-C-R] y [Be], cuyo carácter abstracto proporciona un marco común a los casos algebraico y analítico. Si A es un anillo conmutativo denotaremos por $\operatorname{Spec}_r A$ el espectro real de A, que es el conjunto de conos primos de A (órdenes del cuerpo de fracciones de $A/\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ es cualquier ideal primo de A), donde se introduce una topología. Un conjunto $T \subset \operatorname{Spec}_r A$ se llama constructible si se puede expresar como

$$T = \bigcup_{i=1}^{p} \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r A | f_i(\alpha) = 0, g_{k1}(\alpha) > 0, \ldots, g_{kj_k}(\alpha) > 0\}$$

donde $f_k, g_{kj} \in A$.

Se puede establecer una correspondencia entre conjuntos semialgebraicos o semianalíticos y conjuntos constructibles del espectro real de A (según A sea el anillo de polinomios o de funciones analíticas), a saber: si S es un conjunto semialgebraico (resp. semianalítico) le asociaremos el conjunto constructible $\widetilde{S}$ de $\operatorname{Spec}_r A$ definido por la misma fórmula y recíprocamente. De esta forma se pueden relacionar las propiedades algebraicas de los constructibles y las geométricas de los semialgebraicos (resp. semianalíticos). Sin embargo, no en todos los casos esta aplicación tilde $S \to \widetilde{S}$ tiene las mismas características. Por ejemplo, si se verifica la propiedad de Artin-Lang ($S = \{x \in X | f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\} \neq \emptyset \leftrightarrow \widetilde{S} \neq \emptyset$) la aplicación tilde es biyectiva y, de hecho, es un isomorfismo del álgebra de Boole de los conjuntos semialgebraicos (resp. semianalíticos) en el álgebra de Boole de los constructibles de $\operatorname{Spec}_r A$, siendo aplicables todos los resultados de la teoría del espectro real.

La propiedad de Artin-Lang se verifica si A es el anillo de polinomios, cf. [B-C-R], el anillo de gérmenes de funciones analíticas, cf. [Fe-Re-Rz], o el anillo de funciones analíticas globales $\mathcal{O}(X)$ cuando X es un conjunto analítico compacto, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. VIII.8.2].

En el caso analítico global no compacto la correspondencia $S \to \widetilde{S}$ no es biyectiva, cf. [An-Be], lo que explica la dificultad para obtener resultados en este caso. No obstante, si X es una variedad analítica de dimensión 1, cf. [An-Be], o de dimensión 2, [Ca1], se verifica una versión más débil de la propiedad de Artin-Lang: si $\mathcal{K}$ es el cuerpo de fracciones del anillo A y $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{K}$, entonces $\{x \in X | f_1(x) > 0, \ldots, f_r(x) > 0\} \neq \emptyset \leftrightarrow \{\beta \in \operatorname{Spec}_r \mathcal{K} | f_1 >_\beta 0, \ldots, f_r >_\beta 0\} \neq \emptyset$. Ahora se tiene una aplicación tilde genérica entre los conjuntos semianalíticos globales de X y los constructibles de $\operatorname{Spec}_r \mathcal{K}$. Aunque la correspondencia no es biyectiva, ya que los conjuntos del tipo $\{f = 0\}$ no tienen sentido en $\operatorname{Spec}_r \mathcal{K}$, dos conjuntos S y S' tienen la misma tilde genérica si y sólo si son genéricamente iguales, es decir, si se diferencian en un conjunto contenido en los ceros de una función de A. Esta tilde genérica es suficiente para algunas aplicaciones, cf. [Ca-An], y juega un papel fundamental en la acotación del índice de estabilidad de variedades analíticas de dimensión dos.

En este contexto nos propusimos completar el estudio de los invariantes citados en el caso analítico tanto local como global. Los resultados obtenidos se presentan en los ocho capítulos que componen esta tesis y que exponemos a continuación:

Capítulo 1. Incluye definiciones y resultados que se aplican en los siguientes capítulos. Además de algunos resultados de la teoría del espectro real de un anillo y, en particular, de la teoría de abanicos, se incluye también la *desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz, cf. corolario* 1.2.7, *en una forma* que nos ha resultado muy práctica y que sólo habíamos visto en el caso semialgebraico, cf. [B-C-R, 7.7.10]. Se incluyen también algunos resultados de separación de gérmenes semianalíticos (f separa dos conjuntos C y D si $f|_C \geq 0$, $f|_D \leq 0$ y $(C \cup D) \cap \{f = 0\} = (C \cup D) \cap \overline{C \cap D}^Z$) y en la última sección se dan algunas relaciones entre los conjuntos semianalíticos de un germen X_0 y los de su normalización X_0^ν.

Capítulo 2. El resultado fundamental de este capítulo es que $\overline{s}(X_0) = 2$ si X_0 es un germen analítico normal de dimensión 2, que contrasta con el resultado del caso algebraico, donde $\overline{s}(V) = 3$ si V es un conjunto algebraico de dimensión 2. La idea de la demostración es la siguiente: si $B = \{f_1 \geq 0, \dots, f_r \geq 0\} \subset X_0$ es un básico cerrado, será genéricamente igual al básico abierto $B' = \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$. Ahora bien, como $s(X_0) = 2$, B' se podrá expresar con dos desigualdades, digamos $B' = \{f > 0,\ g > 0\}$. Si relajamos las desigualdades obtenemos un conjunto básico cerrado $B'' = \{f \geq 0,\ g \geq 0\}$ que también será genéricamente igual a B, por lo que su diferencia será un conjunto semianalítico de dimensión 1, es decir, un conjunto finito de semirramas. De esta forma, el problema se reduce a añadir y eliminar semirramas sin aumentar el número de desigualdades. Utilizando los resultados de *separación* y *Hormänder-Lojasiewicz* demostramos que el proceso de inclusión de semirramas es válido sin ninguna hipótesis de normalidad mientras que en el proceso de eliminación utilizamos una propiedad que hemos denominado *del cambio de signo*, propiedad que cualquier germen normal verifica. Un germen X_0 verifica la propiedad del cambio de signo si para cualquier semirrama donde f y g ($f, g \in \mathcal{O}(X_0)$) cambian de signo, el producto fg no cambia de signo.

Capítulo 3. En este capítulo estudiamos el invariante $\overline{s}$ en gérmenes analíticos de dimensión 2 sin imponer ninguna condición de normalidad. La condición para que $\overline{s}(X_0)$ sea 2 ó 3 depende esencialmente de la normalización $\pi : X_0^\nu \to X_0$, lo que justifica la división entre el caso normal y el general. Las relaciones entre los básicos de X_0^ν y los de X_0 establecidas en el primer capítulo nos permiten seguir un proceso similar al del caso normal. En este caso el proceso de eliminación de semirramas puede llevarse a cabo sin aumentar las desigualdades si la normalización verifica cierta condición. En concreto, $\overline{s}(X_0) = 3$ es equivalente a la existencia de un germen de curva analítica $Y \subset X_0$ tal que $\pi(Y)$ es una única semirrama. Encontramos, asimismo, algunos ejemplos, como el *paraguas de Whitney*, cf. ejemplo 3.1.1, donde se cumple esta condición. Así pues, en dimensión 2, el invariante $\overline{s}$ puede tomar tanto el valor 2 como el 3 dependiendo de una condición adicional a la dimensión, fenómeno del que no hemos encontrado ningún precedente en la literatura, ya que siempre que se ha determinado exactamente uno de estos invariantes el resultado ha dependido única y exclusivamente de la dimensión.

También hallamos una caracterización algebraica equivalente a que el índice de estabilidad cerrado sea 3, a saber, la existencia de un abanico con 4 elementos que se especializa en un orden de dimensión 1. Analizamos también la relación de la coherencia con el índice de estabilidad, encontrando que para cualquier germen analítico coherente $\overline{s}(X_0) = 2$. Sin embargo, la coherencia no caracteriza los gérmenes con $\overline{s}(X_0) = 2$, como nos muestra el ejemplo 3.4.3, donde aparecen gérmenes analíticos no coherentes para los que $\overline{s}(X_0) = 2$. En este mismo ejemplo se incluyen gérmenes topológicamente equivalentes con diferente índice de estabilidad lo que nos permite afirmar que $\overline{s}$ no es un invariante topológico en dimensión 2, sino que está relacionado estrechamente con la estructura analítica del germen.

Capítulo 4. Cuando la dimensión de X_0 es $n \geq 3$ se demuestra que $\overline{s}(X_0) = \frac{1}{2}n(n+1)$, resultado que coincide de pleno con el semialgebraico, destacando así la "singularidad" de la dimensión 2.

Como $\frac{1}{2}n(n+1) - 1 \leq \overline{s}(X_0) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, encontrando un básico cerrado que requiera el número máximo de desigualdades, $\frac{1}{2}d(d+1)$, se tendrá el resultado. Un básico cerrado con esta propiedad se construye, en dimensión 3, a partir de subgérmenes tipo *paraguas de Whitney*, prosiguiendo por inducción sobre la dimensión.

Capítulo 5. Está dedicado al invariante t en gérmenes analíticos de dimensión 2. Este invariante presenta un comportamiento similar al de $\overline{s}$, aunque cabe pensar que esta dualidad $\overline{s} - t$ es exclusiva de la dimensión 2. Partiendo de los resultados conocidos, $\overline{t}(X_0) = 2$ y $2 \leq t(X_0) \leq 3$, llegamos a la conclusión de que $t(X_0) = \overline{s}(X_0)$.

El proceso seguido en la demostración es el siguiente: si $C \subset X_0$ es un semianalítico abierto, entonces $\overline{C}$, al ser $\overline{t}(X_0) = 2$, se podrá escribir como $\overline{C} = C_1 \cup C_2$, siendo C_1 y C_2 básicos cerrados que se podrán escribir como $C_i = \{f_i \geq 0, g_i \geq 0\}$. Ahora definimos $B_i = \{f_i > 0, g_i > 0\}$ y así, C y $B_1 \cup B_2$ son genéricamente iguales, es decir, se diferencian en un conjunto finito de semirramas. Por tanto, si conseguimos añadir y eliminar semirramas sin modificar el número de básicos tendremos que $t(X_0) = 2$. Se demuestra que en el caso normal estos procedimientos son factibles y, en el caso general, sólo si la normalización cumple una cierta condición que resulta ser la misma que encontramos en el estudio del invariante s.

Capítulo 6. Estudiamos en este capítulo un nuevo invariante introducido por Marshall, cf. [Ma1], para medir la complejidad de conjuntos semialgebraicos. El invariante p se define como el mínimo entero tal que p polinomios bastan para separar cualquier semialgebraico de su complementario. El objetivo de este capítulo es extender los resultados de Marshall al caso de gérmenes semianalíticos, donde se define el invariante p de forma análoga.

En primer lugar, obtenemos las cotas superiores de este invariante. Concretamente, si X_0 es un germen analítico de dimensión d, entonces $p(X_0) \leq \sum_{i=1}^{d}(4^{i-1} - 2^{i-1} + 1)$. Para la obtención de cotas inferiores demostramos un resultado interesante en sí mismo, un teorema de *realización* que permite afirmar que cualquier espacio de órdenes finito con índice de estabilidad menor o igual que d se puede realizar como subespacio de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$, siendo X_0 cualquier germen analítico de dimensión d y $\mathcal{K}(X_0)$ el cuerpo de gérmenes de funciones meromorfas en X_0, cf. teorema 6.3.4. Este resultado nos permite demostrar que $p(X_0) \geq log_2(\alpha^{d-1}(2)) + d - 1$, siendo $\alpha(n) := n(n+1)/2$.

Capítulo 7. En este capítulo se generalizan los resultados obtenidos en los capítulos anteriores al espectro real de anillos henselianos excelentes con cuerpo residual real cerrado. En particular, los resultados anteriores son también válidos en el caso de álgebras formales $R[[x_1, \dots, x_n]]/I$ y de álgebras del tipo $R[[x_1,\dots,x_n]]_{\mathrm{alg}}/I$, donde $R[[x_1,\dots,x_n]]_{\mathrm{alg}}$ denota las series de potencias formales que son algebraicas sobre los polinomios y R es un cuerpo real cerrado.

En realidad, podríamos haber planteado el problema local en este contexto más general, obteniendo como caso particular los resultados para gérmenes analíticos. Sin embargo, dada su significación geométrica hemos preferido desarrollar todas las demostraciones en el contexto semianalítico, destacando en este capítulo los elementos esenciales para su generalización.

Capítulo 8. El último capítulo lo dedicamos al estudio de los invariantes s, $\overline{s}$, t y $\overline{t}$ en variedades analíticas no compactas de dimensión 2. Hay que destacar que, hasta el momento, no había ningún resultado sobre estos invariantes, *desconociéndose incluso si eran o no finitos.*

En primer lugar, generalizamos algunos resultados ya obtenidos en el caso de variedades analíticas unidimensionales, cf. [An-Be]. Así demostramos que si X es un conjunto analítico de dimensión 1 entonces se verifica la propiedad de Artin-Lang y $s(X)=\overline{s}(X)=t(X)=\overline{t}(X)=1$.

El resultado fundamental que obtenemos en este capítulo es que $s(X)=2$ si X es una variedad analítica paracompacta de dimensión 2. Para obtener este resultado asociamos a cada orden $\beta\in\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$ un ultrafiltro de conjuntos semianalíticos globales cerrados de X, $\mathcal{U}_\beta$, un anillo de valoración, W_β, que es la envoltura convexa de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{K}$ y un abanico, F_β, constituido por todos los órdenes con el mismo anillo de valoración W_β. Hallamos primero $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es el cuerpo de fracciones del anillo de funciones analíticas globales $\mathcal{O}(X)$. Para ello clasificamos los órdenes de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$ en 3 tipos y analizamos en cada caso el número de elementos del abanico F_β o, equivalentemente, el cardinal de $\Gamma_\beta/2\Gamma_\beta$ (siendo Γ_β el grupo de valores de W_β), para acotar el índice de estabilidad.

El primer tipo de órdenes que consideramos es el de aquéllos órdenes cuyo ultrafiltro de cerrados $\mathcal{U}_\beta$ no contiene ningún conjunto analítico propio. En este caso el abanico F_β contiene un único orden por lo que no representa ninguna obstrucción para la acotación del índice de estabilidad. Además, este resultado parcial es válido en cualquier dimensión y no es necesaria la hipótesis de regularidad.

El segundo tipo es el de órdenes para los que $\mathcal{U}_\beta$ contiene algún conjunto analítico de dimensión 1 pero no contiene ningún conjunto discreto. Para este segundo tipo el número de elementos de F_β es dos. En este caso se utilizan propiedades específicas de la dimensión 2, así como la hipótesis de regularidad.

Finalmente, el tercer tipo está constituido por los órdenes cuyo ultrafiltro U_β contiene algún conjunto discreto. En este caso utilizamos una de las consecuencias de la propiedad de Artin-Lang, el Teorema del Ultrafiltro, cf. [Ca-An], que establece una correspondencia uno a uno entre los órdenes de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)$ y los ultrafiltros de conjuntos semianalíticos globales abiertos de X. Una vez establecida esta correspondencia utilizamos algunos resultados de separación local de básicos abiertos que pueden ser globalizados gracias al Teorema B de Cartan, cf. [C].

Una vez obtenido el índice de estabilidad genérico, es decir, $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}) = 2$, utilizando otra de las propiedades específicas de la dimensión 2, a saber, la posibilidad de descomponer una función analítica como producto de una función *libre de cuadrados* por una suma de cuadrados, cf. [Ca1], obtenemos $s(X) = 2$.

A partir de aquí, utilizando la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz, también válida en este caso, obtenemos los valores de los demás invariantes: $\bar{s}(X) = 3$, $t(X) = 3$ y $\bar{t}(X) = 2$. Así pues, en dimensión 2 obtenemos los mismos valores que en el caso semialgebraico.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos una serie de definiciones y resultados que serán de utilidad a lo largo de la memoria.

1 Conjuntos semianalíticos reales

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función real f definida en Ω se dice que es *analítica* si para todo punto $a \in \Omega$ existen un entorno $U \subset \Omega$ y una serie de potencias

$$P_a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-a)^i$$

que converge a f en U. En lo sucesivo $\mathcal{O}(U)$ denotará el anillo de funciones analíticas en U.

Un subconjunto $A \subset \Omega$ se dice que es *analítico* si para todo $a \in \Omega$ existen un entorno $U \subset \Omega$ de a y funciones $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}(U)$ tales que

$$A \cap U = \{x \in U | f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}$$

Así pues, un conjunto analítico $A \subset \Omega$ siempre es cerrado en Ω.

Un subconjunto $Y \subset \Omega$ se dice que es *semianalítico* si para todo $a \in \Omega$ existe un entorno $U \subset \Omega$ de a tal que

$$Y \cap U = \bigcup_{k=1}^{q} \{x \in U | f_k(x) = 0, g_{k1}(x) > 0, \ldots, g_{kj_k}(x) > 0\}$$

para ciertas funciones $f_k, g_{kj} \in \mathcal{O}(U)$.

Lojasiewicz inició el estudio de los conjuntos semianalíticos con su memoria "Ensembles semianalytiques" demostrando, por ejemplo, que al realizar ciertas operaciones con semianalíticos como la unión de una familia localmente finita, la intersección, tomar el complementario o las componentes conexas el resultado vuelve a ser un conjunto semianalítico, cf. [L].

Aunque los conjuntos semianalíticos están definidos localmente, prestaremos especial atención a aquéllos que pueden ser definidos de forma global. Se tiene la siguiente

Definición 1.1 *Sea M una variedad analítica real y $S \subset M$. Se dice que S es un subconjunto semianalítico global de M si admite una representación*

$$S = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\}$$

donde $f_i, g_{ij} \in \mathcal{O}(M)$.

Evidentemente, todo conjunto semianalítico global es un conjunto semianalítico. Sin embargo, existen conjuntos semianalíticos que no pueden ser definidos globalmente. Por ejemplo, si $a(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \geq 1 \\ \exp(\frac{1}{z^2-1}) & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$, entonces el conjunto definido por la ecuación $z(x^2 + y^2) = x^3 a(z)$ es un subconjunto analítico de $\mathbb{R}^3$ que no puede ser definido por ecuaciones analíticas globales, cf. [C].

Si S es un conjunto analítico el conjunto de los puntos regulares de S de una dimensión dada es un conjunto semianalítico. Denotaremos por $\operatorname{Reg}(S)$ el conjunto de puntos regulares de S de cualquier dimensión y por $\operatorname{Sing}(S)$ su complementario en S, el conjunto de puntos singulares de S. El conjunto de puntos regulares de dimensión máxima, es decir, igual a $\dim S$, será denotado como $\operatorname{Reg}^*(S)$.

También estaremos interesados en los gérmenes de los conjuntos semianalíticos en un punto. Para precisar, sean A y B subconjuntos de un espacio topológico Ω. Se dice que los conjuntos A y B son equivalentes en el punto $x \in \Omega$ si existe un entorno U de x tal que $A \cap U = B \cap U$. Esta es una relación de equivalencia cuyas clases reciben el nombre de *gérmenes* en el punto x. El germen en x de un conjunto $A \subset \Omega$ se denotará por A_x.

Vía representantes, las uniones e intersecciones finitas así como complementos de gérmenes de conjuntos son operaciones bien definidas. De igual forma la inclusión y operaciones topológicas como interior y clausura están bien definidas, cf. [Gu-Ro, Ch. II].

Como estamos interesados en gérmenes en variedades analíticas paracompactas y Hausdorff, siempre podremos suponer que Ω es el espacio afín $\mathbb{R}^n$, cf. [Gr]

Asimismo, consideraremos que el punto x donde tomamos los gérmenes es el origen y denotaremos por $\mathcal{O}_n$ el anillo de gérmenes de funciones analíticas reales en $0 \in \mathbb{R}^n$, es decir, el conjunto de clases de equivalencia de funciones analíticas reales en un entorno de 0, siendo f y g equivalentes si existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in W$ y $f|_W = g|_W$. Siempre que no dé lugar a confusión denotaremos de igual forma el germen de una función y el representante que define la clase de equivalencia. Es sabido que el anillo $\mathcal{O}_n$ es isomorfo, vía desarrollo de Taylor, al anillo de series convergentes en un entorno del origen, denotado como $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Si $f \in \mathcal{O}_n$, $\mathcal{Z}(f)$ denotará, según el contexto, el conjunto $\{x \in U | f(x) = 0\}$ o el germen que define, siendo f analítica en el dominio U. Un germen X_0 se llama analítico si existen $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}_n$ tales que $X_0 = \mathcal{Z}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{Z}(f_s)$. Decimos que $f \in \mathcal{O}_n$ es > 0 (resp. $\geq 0, = 0$) en X_0 si $X_0 \subset \{f > 0\}$ (resp. $\{f \geq 0\}, \{f = 0\}$). El ideal de un germen analítico se define como el conjunto $\mathcal{J}(X_0) = \{f \in \mathcal{O}_n | f|_{X_0} = 0\}$, que es un ideal real, cf. [Rz2, Ch. IV].

El anillo cociente $\mathcal{O}(X_0) = \mathcal{O}_n / \mathcal{J}(X_0)$ se denomina anillo de gérmenes de funciones analíticas de X_0. En X_0 consideraremos gérmenes de la forma $Z_0 = \cup_{i=1}^{r} \{f_{i1} > 0, \dots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\} \subset X_0$ donde $f_{ij}, g_i \in \mathcal{O}(X_0)$. Estos gérmenes se denominan semianalíticos de X_0. La colección de todos los gérmenes semianalíticos de X_0 es un álgebra de Boole que denotaremos como $\mathcal{C}(X_0)$.

La *dimensión* del germen analítico X_0 se define como la dimensión de Krull del anillo $\mathcal{O}(X_0)$ y coincide con el mayor entero d tal que cualquier representante de X_0 contiene una variedad analítica de dimensión d, cf. [An-Brö-Rz2, VIII.2.11]. Si $S \subset X_0$ es un germen semianalítico de X_0 entonces la dimensión de S se define como la dimensión de su clausura de

Zariski, que es el menor germen germen analítico que contiene a S.

Un germen analítico X_0 se llama *irreducible* si no es unión de dos gérmenes analíticos estrictamente más pequeños o equivalentemente si el ideal $\mathcal{J}(X_0)$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_n$. Cada germen analítico X_0 tiene una descomposición irredundante en irreducibles, $X_0 = X_0^{(1)} \cup \ldots \cup X_0^{(r)}$. $S, S' \subset X_0$ se dice que son *genéricamente iguales*, y lo denotaremos $S \stackrel{g}{=} S'$, si para todas las componentes irreducibles $X_0^{(i)}$ se tiene que $\dim(X_0^{(i)} \cap ((S \cup S') \setminus (S \cap S'))) < \dim X_0^{(i)}$.

Prestaremos especial interés a ciertos tipos de gérmenes semianalíticos llamados básicos y principales. En concreto, un germen semianalítico de X_0 se llama *principal abierto* (resp. *cerrado*) si puede escribirse como $\{f > 0\}$ (resp. $\{f \geq 0\}$), donde $f \in \mathcal{O}(X_0)$. El germen se llamará *básico abierto* (resp. *cerrado*) si puede escribirse como una intersección finita de principales abiertos (resp. cerrados), es decir, como $\{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\}$ (resp. $\{f_1 \geq 0, \ldots, f_r \geq 0\}$) donde $f_i \in \mathcal{O}(X_0)$. S se llama *genéricamente básico* si es genéricamente igual a algún germen básico S'.

El *índice de estabilidad* $s(X_0)$ (resp. $\overline{s}(X_0)$) se define como el mínimo entero tal que cualquier básico abierto (resp. cerrado) puede escribirse como intersección de $s(X_0)$ (resp. $\overline{s}(X_0)$) principales abiertos (resp. cerrados). Es conocido que $s(X_0) = d$ y que $\frac{1}{2}d(d+1) - 1 \leq \overline{s}(X_0) \leq \frac{1}{2}d(d+1)$, siendo d la dimensión del germen analítico X_0, cf. [An-Brö-Rz2, Th. VIII.2.12].

El Teorema de Finitud, cf. [An-Brö-Rz2, Cor. VIII.3.2], afirma que todo germen semianalítico abierto (resp. cerrado) se puede expresar como una unión de un número finito de gérmenes básicos abiertos (resp. cerrados), lo que da pie a la introducción de los invariantes t y $\overline{t}$. Precisando, el invariante $t(X_0)$ (resp. $\overline{t}(X_0)$) se define como el menor entero t tal que cualquier germen semianalítico abierto (resp. cerrado) se puede escribir como una unión de t gérmenes básicos abiertos (resp. cerrados). Las cotas conocidas de estos invariantes son mucho menos precisas que las de los índices de estabilidad cuando la dimensión de X_0 es mayor que 2. Si $\dim(X_0) = 1$ se tiene que $t(X_0) = \overline{t}(X_0) = 1$. Cuando $\dim(X_0) = 2$ entonces $2 \leq t(X_0) \leq 3$ y $\overline{t}(X_0) = 2$. Sin embargo, si $\dim(X_0) = 3$ sólo se sabe que $t(X_0) \leq 8011$ y $\overline{t}(X_0) \leq 3^{8011}$, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. V.2.16, Th. VIII.2.12].

En el caso de conjuntos analíticos globales se definen de forma análoga los conjuntos principales, básicos y los índices de estabilidad cambiando gérmenes de funciones analíticas por funciones analíticas globales. Las cotas son las mismas que en el caso de gérmenes semianalíticos si X es un conjunto analítico compacto. Sin embargo, cuando X no es compacto únicamente se conoce que $s = \bar{s} = t = \bar{t} = 1$ si X es una variedad analítica de dimensión 1, cf. [An-Be]. En el caso singular o en dimensiones superiores ni siquiera se sabe si existen cotas finitas para estos invariantes.

2 Definición y propiedades del espectro real de un anillo

A lo largo de toda esta sección A denotará un anillo conmutativo con unidad.

Un *cono* α de A es un subconjunto de A que verifica:

i) $a, b \in \alpha \Rightarrow a + b \in \alpha$

ii) $a, b \in \alpha \Rightarrow ab \in \alpha$

iii) $a \in A \Rightarrow a^2 \in \alpha$

El cono α se llama *propio* si, además, se verifica:

iv) $-1 \notin \alpha$

ΣA^2 denotará el conjunto de las sumas de cuadrados de elementos de A. ΣA^2 es el cono más pequeño de A.

Un cono propio α es *primo* si:

v) $ab \in \alpha \Rightarrow a \in \alpha$ ó $-b \in \alpha$

Proposición 2.1 (B-C-R, 4.3.2) *Sea α un cono primo de A y sea $-\alpha = \{a \in A \mid -a \in \alpha\}$. Entonces:*

i) $\alpha \cup -\alpha = A$

ii) $\alpha \cap -\alpha$ es un ideal primo de A, llamado soporte de α (se denotará como $\mathrm{supp}(\alpha)$).

Proposición 2.2 (B-C-R, 4.3.4) *α es un cono primo de un anillo conmutativo A si y sólo si existe un cuerpo ordenado $(F, \leq)$ y un homomorfismo $\varphi : A \to F$ tal que $\alpha = \{a \in A | \varphi(a) \geq 0\}$.*

$\kappa(\text{supp}(\alpha))$ denotará el cuerpo de fracciones del dominio $A/\text{supp}(\alpha)$. El cono α induce en $\kappa(\text{supp}(\alpha))$ un orden $\leq_\alpha$ definido por: $\overline{a} \geq_\alpha 0 \Leftrightarrow a \in \alpha$. $\forall a \in A$ (siendo $\overline{a} = a + \text{supp}(\alpha)$).

Definición 2.3 *Sea A un anillo conmutativo y consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto de homomorfismos de A en cualquier cuerpo real cerrado definida por*

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & R_\alpha \\ & \searrow & \uparrow \\ & & R_\beta \end{array}$$

donde $R_\beta \to R_\alpha$ es una extensión, $A \to R_\alpha$ y $A \to R_\beta$ son homomorfismos, y R_α, R_β son cuerpos reales cerrados. Al cociente $\{\alpha : A \to R_\alpha\}/\sim$ se le llama espectro real de A y se denota $\text{Spec}_r(A)$.

Proposición 2.4 (An-Brö-Rz2, II.1.3) *Entre los siguientes conjuntos existe una correspondencia canónica biyectiva:*

a) $\text{Spec}_r(A)$.

b) El conjunto de conos primos $\alpha \subset A$.

c) El conjunto de todos los pares $(\mathfrak{p}, <)$, donde $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ y $<$ es un orden total del cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{p})$.

Si $\alpha \in \text{Spec}_r A$, se define la dimensión de α, $\dim \alpha$, como la dimensión de Krull del cociente $A/\text{supp}(\alpha)$. Si $Y \subset \text{Spec}_r A$ la dimensión de Y se define como $\dim Y = \sup\{-1, \dim \alpha | \alpha \in Y\}$.

Dados $\alpha \in \text{Spec}_r(A)$ y $f \in A$ escribiremos $f(\alpha)$ en lugar de $\alpha(f)$. Escribiremos $f(\alpha) > 0, = 0, < 0$, según el signo de $\alpha(f)$ en R_α. Un conjunto de $\text{Spec}_r(A)$ se llama *principal abierto* (resp. *cerrado*) si puede expresarse como $\{\alpha \in \text{Spec}_r(A) | f(\alpha) > 0\}$ (resp. $\{\alpha \in \text{Spec}_r(A) | f(\alpha) \geq 0\}$), siendo

f un elemento de A. El conjunto se llamará ***básico abierto*** (resp. cerrado) si puede escribirse como una intersección finita de principales abiertos (resp. cerrados), es decir, como $\{\alpha \in \mathrm{Spec}_r(A) | f_1(\alpha) > 0, \ldots, f_r(\alpha) > 0\}$ (resp. $\{\alpha \in \mathrm{Spec}_r(A) | f_1(\alpha) \geq 0, \ldots, f_r(\alpha) \geq 0\}$) donde $f_i \in A$. El álgebra de Boole generada por los básicos abiertos se denota $\mathcal{C}(A)$ y los conjuntos $C \in \mathcal{C}(A)$ se llaman ***constructibles***. El índice de estabilidad de A se define como el mínimo entero tal que cualquier básico abierto (resp. cerrado) puede escribirse como intersección de $s(A)$ (resp. $\bar{s}(A)$) principales abiertos (resp. cerrados).

Los conjuntos básicos abiertos son la base de abiertos de una topología en $\mathrm{Spec}_r A$ denominada ***topología de Harrison***. Cuando no se mencione expresamente ninguna topología se sobreentenderá que la topología utilizada es la de Harrison. También puede considerarse la ***topología constructible*** cuya base de abiertos está constituida por los conjuntos constructibles que, por tanto, son abiertos y cerrados en esta topología. Por último, también se tiene la ***topología de Zariski*** cuya base está formada por los conjuntos del tipo $\{f \neq 0\}$. Para la topología de Zariski utilizaremos el índice Z. Dotado de la topología constructible $\mathrm{Spec}_r A$ es compacto, cf. [B-C-R, 7.1], mientras que con las otras dos es cuasicompacto.

Si $\alpha, \beta \in \mathrm{Spec}_r A$ decimos que α se ***especializa*** en β, que β es una ***especialización*** de α o que α es una ***generización*** de β y lo denotaremos como $\alpha \rightarrow \beta$ si $\beta \in \mathrm{Adh}\alpha$, es decir, si $f >_\beta 0$ implica $f >_\alpha 0$, $\forall f \in A$. De forma equivalente $\alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\mathrm{supp}\alpha \subset \mathrm{supp}\beta$ y el homomorfismo canónico $A/\mathrm{supp}\alpha \rightarrow A/\mathrm{supp}\beta$ transforma elementos $\geq_\alpha 0$ en elementos $\geq_\beta 0$.

La teoría del espectro real nos será de gran utilidad para el estudio de las propiedades de gérmenes semianalíticos. La clave radica en la correspondencia existente entre el retículo de gérmenes semianalíticos, $\mathcal{C}(X_0)$, y el de conjuntos constructibles de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$, $\mathcal{C}(\mathcal{O}(X_0))$. Precisando, se tiene:

Teorema 2.5 *La correspondencia que a cada* $Z_0 = \cup_{i=1}^r \{f_{i1} > 0, \ldots, f_{is_i} > 0, g_i = 0\}$ *asigna* $\widetilde{Z}_0 = \cup_{i=1}^r \{\alpha \in Spec_r(A) | f_{i1}(\alpha) > 0, \ldots, f_{is_i}(\alpha) > 0, g_i(\alpha) = 0\}$ *es un isomorfismo de álgebras de Boole entre el conjunto de gérmenes semianalíticos de* X_0 *y los constructibles de* $Spec_r\mathcal{O}(X_0)$.

Demostración: Ver [An-Brö-Rz2, VIII.2.5]. □

En virtud de esta correspondencia los siguientes resultados se pueden aplicar al caso de gérmenes semianalíticos.

Proposición 2.6 (Desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz) *Sea $C \in \mathcal{C}(A)$ cerrado, y sean $f, g \in A$ tales que $\{f = 0\} \cap C \subset \{g = 0\}$. Entonces existen un entero positivo impar l y $h \in A$ tales que:*

a) $|g^l| \leq (1 + h^2)|f|$, *y*

b) $\text{sign}[(1 + h^2)f + g^l] = \text{sign}[f]$, *donde* $\text{sign} \in \{1, 0, -1\}$

en C.

Demostración: Ver [An-Brö-Rz2, II.1.16]. □

En esta memoria utilizaremos la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz en la siguiente forma que nos resultará mucho más práctica:

Corolario 2.7 (Desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz) *Sea A un anillo local noetheriano y sea $T \in \mathcal{C}(A)$ cerrado. Dados $f, g \in A$ existen $p, q \in A$ tales que:*

a) $p > 0$, $q \geq 0$ *en* $Spec_r(A)$

b) $\text{sign}[pf + qg] = \text{sign}[f]$ *en* T

c) $\mathcal{Z}(q) = \overline{\mathcal{Z}(f) \cap T}^{Z}$

Demostración: Tomemos $u \in A$ tal que $\mathcal{Z}(u) = \overline{\mathcal{Z}(f) \cap T}^{Z}$, con lo que $\{f = 0\} \cap T \subset \{u = 0\}$, u se llama ecuación positiva de $\overline{\mathcal{Z}(f) \cap T}^{Z}$, ya que puede tomarse $u \geq 0$ ($\text{Spec}_r(A)$ es un espacio real noetheriano, ver [An-Brö-Rz2, III.1, V.2 y VIII.2]). Ahora, aplicando la proposición anterior tendremos $\text{sign}[(1 + h^2)f + u^l] = \text{sign}[f]$ en T, donde $h \in A$ y l es un entero impar positivo. De hecho, de la demostración de la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz dada en [An-Brö-Rz2, II.1.16] se sigue que, en T, $|u^l| \leq (1 + h^2)|f|$ y que la desigualdad es estricta en $\{f \neq 0\}$. Si tomamos

$p = 1 + h^2$ y $q = u^l/g$ o $q = u^l/(1+g^2)$ según que g sea o no unidad en A, se tiene que $\mathrm{sign}[pf + qg] = \mathrm{sign}[f]$ en T. □

Este resultado es válido también en el caso semialgebraico (ver [Brö3, 6.5] y [B-C-R, 7.7.10]). Asimismo, de la demostración se sigue que el corolario anterior puede extenderse a aquellos anillos en los que todo cerrado de Zariski de $\mathrm{Spec}_r A$ tenga *una ecuación positiva* y todo elemento del tipo $1 + g^2$ sea una unidad en el anillo A.

Una de las nociones más importantes en la teoría de los espacios de órdenes es la de *abanico* (*fan* en la literatura en lengua inglesa). Según Knebush, cf. [Kn, Sec. 7], si A es un anillo conmutativo con unidad un *abanico finito* de A es un subconjunto $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ cuyos elementos tienen el mismo soporte $\mathfrak{p}$ y tal que para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ el producto $\alpha_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ (considerando los órdenes α_i como caracteres $\alpha_i : \frac{\kappa^*(\mathfrak{p})}{\Sigma\kappa^{*2}(\mathfrak{p})} \to \{+1, -1\}$, cf. [Ma2, 2.1]) está en F. Así pues, los abanicos de $\mathrm{Spec}_r A$ son los abanicos de $\mathrm{Spec}_r \kappa(\mathfrak{p})$ donde $\mathfrak{p}$ es cualquier ideal primo de A.

El soporte de F, $\mathrm{supp}(F)$, es el ideal $\mathfrak{p}$, soporte común de todos los órdenes de F. La dimensión de F se define como la dimensión de Krull del anillo $A/\mathfrak{p}$, que coincide con las dimensiones de los órdenes de F.

El número de elementos de un abanico finito es siempre una potencia de 2, cf. [Brö3, Prop. 4.7], y el índice de estabilidad de $\mathrm{Spec}_r A$ viene dado por el siguiente teorema, cf. [An-Brö-Rz2, Cor. V.1.6]

Teorema 2.8 (Fórmula de estabilidad)

$$s(A) = \sup\{s \mid \text{existe un abanico } F \subset \mathrm{Spec}_r A \text{ con } \#F = 2^s\},$$

salvo que el supremo sea 0, en cuyo caso $s(A) \leq 1$

Los abanicos, además, nos permiten caracterizar conjuntos básicos como se ve en las siguientes proposiciones, cf. [An-Brö-Rz2, Cor. V.1.8, Th. V.2.11]:

Proposición 2.9 *Sea A un anillo tal que $s(A) < \infty$ y sea C un constructible de $\mathrm{Spec}_r A$. C es un básico abierto si y sólo si:*

a) $C \cap \overline{\mathrm{Bd}(C)}^{Z} = \emptyset$.

b) $\#(C \cap F) \neq 3$, *para todo abanico* $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ *con* $\#F = 4$.

En la proposición anterior $\mathrm{Bd}(C)$ denota la frontera de C en la topología de Harrison. Utilizaremos la misma notación para la frontera de un germen semianalítico o la de un conjunto analítico global en la topología usual.

Proposición 2.10 *Sea A un anillo tal que $s(A) < \infty$ y sea C un constructible cerrado de $\mathrm{Spec}_r A$. C es un básico cerrado si y sólo si $\#(C \cap F) \neq 3$, para todo abanico $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ con $\#F = 4$.*

Ejemplo 2.11 Sean X_0 el germen analítico de $\mathbb{R}^2$ en el origen, $\alpha_1 \in \mathrm{Spec}_r \mathcal{O}(X_0)$ el cono de $\mathcal{O}(X_0)$ formado por los gérmenes de funciones ≥ 0 en la semirrama $\{y = 0, x > 0\}$ y α_2 el cono de funciones ≥ 0 en la semirrama $\{y = 0, x < 0\}$. α_1 y α_2 tienen el mismo soporte, $\mathrm{supp}\alpha_1 = \mathrm{supp}\alpha_2 = \mathcal{J}(\{y = 0\})$ y, por tanto, $\dim \alpha_1 = \dim \alpha_2 = 1$. Además, $F_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es un abanico trivial (los abanicos de 1 ó 2 elementos se denominan triviales) de dimensión 1.

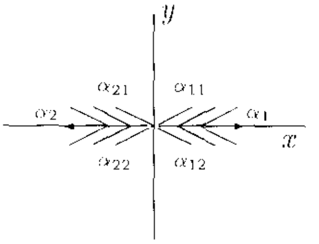


Figura 1.1

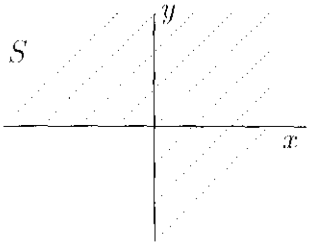


Figura 1.2

$\alpha_{11} \in \mathrm{Spec}_r \mathcal{O}(X_0)$ se define como el cono de $\mathcal{O}(X_0)$ formado por los gérmenes de funciones ≥ 0 en la intersección de algún entorno de α_1 con el *semiplano* $\{y \geq 0\}$. De forma análoga se definen α_{12}, α_{21} y α_{22}. Estos 4 órdenes tienen el mismo soporte, (0), por lo que $\dim \alpha_{ij} = 2$. $F_2 = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}\}$ es un abanico (en este caso, no trivial) de dimensión 2. De las definiciones se sigue que $\alpha_{11}, \alpha_{12} \to \alpha_1$ y $\alpha_{21}, \alpha_{22} \to \alpha_2$.

Por otra parte, la proposición 2.8 nos permite asegurar que el germen semianalítico $S = \{x > 0\} \cup \{y > 0\}$ no es básico ya que $\#(\widetilde{S} \cap F_2) = 3$ (siendo $\widetilde{S}$ el constructible de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ definido de la misma forma que S).

El Teorema del Ultrafiltro (cf. [An-Brö-Rz2, Th. II.1.6]) y la correspondencia entre semianalíticos y constructibles dada por el operador tilde (teorema 2.5) nos permite considerar los órdenes de $\mathcal{O}(X_0)$ como filtros primos de gérmenes de conjuntos semianalíticos abiertos. Así, al orden α_1 le corresponde el filtro primo de todos los semianalíticos abiertos que contienen la semirrama α_1 y a los dos lados de esta semirrama hay asociados dos filtros primos (que, además son ultrafiltros) que se corresponden con los órdenes α_{11} y α_{12}. Otro tanto puede decirse de α_2 y α_{21}, α_{22}.

3 Separación de gérmenes semianalíticos

Dados dos conjuntos constructibles $C, D \in \mathcal{C}(A)$ y un elemento $g \in A$, se dice que g separa C y D, y se escribe $C|_g D$ ($C|D$ si no importa g), cuando $g(\alpha) \geq 0$ si $\alpha \in C$, $g(\alpha) \leq 0$ si $\alpha \in D$ y $(C \cup D) \cap \{g = 0\} = (C \cup D) \cap \overline{(C \cap D)}^Z$. Análoga definición se tiene cuando C y D son gérmenes semianalíticos.

En esta sección veremos algunos resultados de separación que utilizaremos más adelante, concentrándonos especialmente en gérmenes analíticos de dimensión 2. Empezaremos con la siguiente proposición que permite separar un germen analítico de dimensión 1.

Proposición 3.1 *Sea X_0 un germen analítico y sean $S_1, S_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{O}(X_0))$ cerrados tales que $\dim S_1 = 1$ y $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Entonces existe $g \in \mathcal{O}(X_0)$ tal que $S_1 \subset \{g > 0\}$ y $S_2 \subset \{g < 0\}$.*

Demostración: Ver [Rz1], donde además se demuestra que S_1 y S_2 pueden ser separados por un polinomio. □

Como en numerosas ocasiones aparece el concepto de semirrama, lo precisamos a continuación. Sea X_0 un germen analítico irreducible, $Y \subset X_0$ un germen de curva irreducible, es decir, un subgermen analítico irreducible de dimensión 1 y sea $\mathfrak{p} = \mathcal{J}(Y)$ el ideal de gérmenes de funciones analíticas de X_0 que se anulan sobre Y. $\mathcal{O}(X_0)/\mathfrak{p}$ es un dominio analítico de dimensión 1 y, por lo tanto, su normalización es $\mathbb{R}$-isomorfa a $\mathbb{R}\{t\}$, cf. [Rz2, III.3]. La inclusión canónica $\phi : \mathcal{O}(X_0)/\mathfrak{p} \to \mathbb{R}\{t\}$ define una parametrización $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ de Y donde $x_i(t) = \phi(x_i + \mathfrak{p})$. A los gérmenes de los conjuntos $\{x(t)|t > 0\}$ y $\{x(t)|t < 0\}$ los llamaremos *semirramas* de Y. Así pues, cada curva irreducible Y consta de dos semirramas y cualquier germen semianalítico de dimensión 1 es la unión de un número finito de semirramas. Observemos que desde el punto de vista del espectro real una semirrama no es sino un punto γ de dimensión 1.

Al germen semianalítico formado por el conjunto de puntos de dimensión máxima de X_0 lo denotaremos por X_0^*. De igual forma, dado un germen semianalítico $S \subset X_0$ escribiremos $S^* = S \cap X_0^*$. Obviamente, si X_0 es de dimensión pura (por ejemplo, si es normal) $S = S^*$.

Si S es cerrado se podrá expresar como la unión de una parte de dimensión 2 y un conjunto de semirramas sueltas. La parte de dimensión 2 de S es $\mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}S^*$. De la proposición anterior podemos deducir la siguiente

Proposición 3.2 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2 y sea $B \in \mathcal{C}(X_0)$ un básico cerrado. Entonces $\mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^*$ es un básico cerrado.*

Demostración: Tenemos que $B \setminus \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^* = \cup_{i=1}^r \gamma_i$, siendo las γ_i semirramas. De esta forma, si h separa $\cup_{i=1}^r \gamma_i$ de $\mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^*$ se podrá escribir $\mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^* = B \cap \{h \geq 0\}$ que, por tanto, es un básico cerrado. □

De forma análoga se demuestra la

Proposición 3.3 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2 y sea $B \in \mathcal{C}(X_0)$ un básico abierto. Entonces la adherencia de B es un germen básico cerrado.*

Demostración: Puesto que $s(X_0) = 2$ podremos escribir $B = \{f > 0, g > 0\}$ y aplicando la proposición 3.1 a $B' = \mathrm{Adh}(B)$ y $B'' = \{f \geq 0, g \geq 0\} \setminus B' = \cup_{i=1}^r \gamma_i$, siendo las γ_i semirramas. De esta forma, podemos encontrar h tal que $B'|_h B''$, y $\mathrm{Adh}(B) = \{f \geq 0, g \geq 0, h \geq 0\}$. □

El anterior resultado se puede generalizar para gérmenes con $\dim X_0 \leq 3$ y $\dim \mathrm{Sing} X_0 \leq 1$, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. VI.7.4]. Veamos que también es posible separar conjuntos genéricamente básicos cuando uno de ellos tiene dimensión no superior a 2.

Teorema 3.4 *Sea X_0 un germen analítico y sean $S_1, S_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{O}(X_0))$ cerrados y genéricamente básicos. Si $\dim S_1 \leq 2$ entonces existe $h \in \mathcal{O}(X_0)$ que separa S_1 y S_2, es decir, $h(x) \geq 0$ en S_1, $h(x) \leq 0$ en S_2 y $\{h = 0\} \cap (S_1 \cup S_2) \subset \overline{S_1 \cap S_2}^{z}$.*

(Ver [Brö3, 8.9-8.10] para un resultado análogo en el caso semialgebraico).

Demostración: Si $\dim X_0 = 2$, cualquier germen semianalítico genéricamente básico cerrado es básico. Por ejemplo, como S_1 es cerrado se podrá expresar como $S_1 = \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}\, S_1^* \cup (\cup_{i=1}^{r} \gamma_i)$ siendo las γ_i semirramas. Sea $r \in \mathcal{O}(X_0)$ una ecuación positiva de $\overline{\cup_{i=1}^{r} \gamma_i}^{z}$ y sea $S_1 \overset{g}{=} \{f > 0,\, g > 0\}$. Evidentemente, tendremos que $S_1 \subset \{rf \geq 0, rg \geq 0\}$, siendo la diferencia entre ambos gérmenes un conjunto finito de semirramas, es decir, $\{rf > 0, rg > 0\} \setminus S_1 = \cup_{i=1}^{s} \delta_i$. Si tomamos, ahora, $f' \in \mathcal{O}(X_0)$ que separe $\cup_{i=1}^{s} \delta_i$ y S_1 ($f'|_{S_1} > 0$. $f'|_{\cup_{i=1}^{s} \delta_i} < 0$), podremos escribir $S_1 = \{rf \geq 0, rg \geq 0\, f' \geq 0\}$. Así pues, tanto S_1 como S_2 son básicos cerrados y como $s(\overline{S_1 \cap S_2}^{z}) \leq 2$, por las propiedades del operador tilde, cf. teorema 2.5, el resultado se sigue de [An-Brö-Rz2, Cor. V.3.3].

Si $\dim X_0 > 2$, existirá $g \in \mathcal{O}(X_0)$ que separe S_1 y $S_2 \cap \overline{S_1}^{z}$ (ya que $\dim \overline{S_1}^{z} \leq 2$ y es aplicable lo visto para $\dim X_0 = 2$). Sea f una ecuación positiva de $\overline{S_1}^{z}$ y apliquemos Hormänder-Lojasiewicz a $-f$, g y $T = S_2 \cap \{g \geq 0\}$, entonces $h = -pf + qg$ separa S_1 y S_2. $\square$

4 Normalización de gérmenes analíticos

Si X_0 es un germen analítico irreducible, llamaremos X_0^{ν} a su normalización. Se tiene una aplicación $\pi : X_0^{\nu} \to X_0$ que induce un homomorfismo $\pi^* : \mathcal{O}(X_0) \hookrightarrow \mathcal{O}(X_0^{\nu}) : f \to f \circ \pi = f^*$. Este homomorfismo se puede extender a un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones $\mathcal{K}(X_0)$ y $\mathcal{K}(X_0^\nu)$. Asimismo, $\mathcal{O}(X_0^\nu)$ se puede identificar con la clausura íntegra de $\mathcal{O}(X_0)$ en $\mathcal{K}(X_0)$.

La aplicación π es propia, tiene fibras finitas y, además, $\pi|_{X_0^\nu \setminus A}$ es un isomorfismo analítico sobre $X \setminus S$, siendo $S = \mathrm{Sing}(X_0)$ y $A = \pi^{-1}(S)$, cf. [Nar, Ch. VI], [Rz2, Ch. III].

En cuanto al espectro real, la normalización π induce una correspondencia $\pi : \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0^\nu) \to \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$, que denotamos también por π. En concreto, si $\alpha \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0^\nu)$, entonces $\beta = \pi(\alpha) \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ es el orden definido por: $f \geq_\beta 0 \leftrightarrow f^* \geq_\alpha 0$. La restricción $\pi : \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0^\nu) \to \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$ es un isomorfismo.

Se pueden establecer algunas relaciones entre los conjuntos semianalíticos de X_0 y de X_0^ν, especialmente entre conjuntos básicos. La siguiente proposición es válida para cualquier aplicación $\pi : X_0^\nu \to X_0$ aunque no se trate de la normalización.

Proposición 4.1 *Si $B \subset X_0$ es un básico cerrado de X_0 entonces $\pi^{-1}(B)$ es un básico cerrado de X_0^ν.*

En concreto, si $B = \{f_1 \geq 0, \ldots, f_r \geq 0\}$, $\pi^{-1}(B)$ se puede escribir como $\pi^{-1}(B) = \{f_1^* \geq 0, \ldots, f_r^* \geq 0\}$.

Demostración: Tomando representantes, si $y \in \pi^{-1}(B)$, entonces $\pi(y) = x \in B$ y, por tanto, $f_i(x) \geq 0$, es decir, $f_i(\pi(y)) = f_i^*(y) \geq 0$.

Si $f_i^*(y) \geq 0$, entonces $f_i(\pi(y)) \geq 0$, así que $\pi(y) \in B$ y, por tanto, $y \in \pi^{-1}(B)$. □

Proposición 4.2 *Si $B' = \{f_1' > 0, \ldots, f_r' > 0\}$ es un básico abierto de X_0^ν entonces $\pi(B')$ es genéricamente básico.*

De forma más precisa, si $f_i' = f_i^*/g_i^* = (f_i \circ \pi)/(g_i \circ \pi) = \pi^*(f_i/g_i)$ entonces $\pi(B') \overset{g}{=} \{f_1 g_1 > 0, \ldots, f_r g_r > 0\}$.

Demostración: Sean $B = \{f_1 g_1 > 0, \ldots, f_r g_r > 0\} \subset X_0$ y $A = \cup_1^r \{g_i^* = 0\} \subset X_0^\nu$. Vamos a demostrar que $\pi(B' \setminus A) = B \cap \pi(X_0^\nu)$ de donde se sigue el resultado.

Tomando representantes, si $y \in B' \setminus A$ entonces $f_i'(y) > 0$, $g_i^*(y) \neq 0$ y, por tanto, $f_i(\pi(y))g_i(\pi(y)) = f_i^*(y)g_i^*(y) = f_i'(y) > 0$. Por tanto, $\pi(y) \in \{f_ig_i > 0\}$, $\forall i = 1, \ldots, r$, es decir $\pi(B' \setminus A) \subset B$.

Si $x \in B \cap \pi(X_0^\nu)$ entonces $f_ig_i(x) > 0$ y $x = \pi(y)$ para algún $y \in X_0^\nu$, o sea, $f_ig_i(\pi(y)) > 0$ y $f_i'(y) > 0$. De aquí se sigue que $y \in B' \setminus A$, ya que $g_i^*(y) \neq 0$ ($g_i^*(y) = g_i(\pi(y)) = g_i(x) \neq 0$) y por consiguiente $B \cap \pi(X_0^\nu) \subset \pi(B' \setminus A)$.
□

Proposición 4.3 *Sea X_0 un germen analítico irreducible de dimensión 2. Con la notación de la anterior proposición*

$$\pi(\mathrm{Adh}\{f_1' > 0, \ldots, f_r' > 0\}) = \mathrm{Adh}\{f_1g_1 > 0, \ldots, f_rg_r > 0\} \cap X_0^*$$

Demostración: En primer lugar, se tiene que $\pi(X_0^\nu) = X_0^*$. Por otra parte, los dos conjuntos son genéricamente iguales por la anterior proposición. Como π es propia será una aplicación cerrada, cf. [Gr-Rm, 9,4], y tendremos que $\mathrm{Adh}\{f_1g_1 > 0, \ldots, f_rg_r > 0\} \subset \pi(\mathrm{Adh}\{f_1' > 0, \ldots, f_r' > 0\})$.

Además, $\mathrm{Adh}\{f_1' > 0, \ldots, f_r' > 0\}$ no tiene semirramas sueltas por lo que tampoco podrá tenerlas $\pi(\mathrm{Adh}\{f_1' > 0, \ldots, f_r' > 0\})$, por la continuidad de π y, por tanto, se tiene la igualdad entre los dos conjuntos. □

Capítulo 2

Índice de estabilidad de gérmenes analíticos normales de dimensión 2

1 Introducción

Cualquier germen semianalítico se puede escribir como una unión de gérmenes semianalíticos básicos. De hecho, muchas propiedades de los gérmenes semianalíticos se demuestran en primer lugar para conjuntos básicos y después se extienden al caso general. Por este motivo, el estudio de los conjuntos básicos es de crucial importancia dentro de la geometría semianalítica.

Uno de los aspectos más importantes de los conjuntos básicos es el que se refiere a su complejidad, es decir, al número de funciones que son necesarias para describirlos. A esta cuestión dedicamos este capítulo y algunos de los siguientes.

Si X_0 es una variedad algebraica de dimensión d los índices de estabilidad están perfectamente determinados y dependen únicamente de la dimensión de X_0, en concreto, $s(X_0) = d$ y $\overline{s}(X_0) = \frac{1}{2}d(d+1)$, cf. [Sch]. Cuando X_0 es un germen analítico $s(X_0) = d$, como en el caso algebraico, pero de $\overline{s}(X_0)$ sólo es conocido que $\frac{1}{2}d(d+1) - 1 \leq \overline{s}(X_0) \leq \frac{1}{2}d(d+1)$, cf. [An-Brö-Rz, Th. VIII.2.12]. Hasta ahora era un problema abierto determinar cuál de los dos valores posibles tomaba $\overline{s}(X_0)$ cuando la dimensión de X_0 era mayor o igual que dos (en el caso unidimensional siempre es $\overline{s}(X_0) = 1$).

En este capítulo veremos que si X_0 es un germen analítico irreducible normal de dimensión 2, entonces el índice de estabilidad es $\overline{s}(X_0) = 2$. La solución al problema general, es decir, la determinación del índice de estabilidad cuando X_0 es un germen analítico de dimensión 2 arbitrario (no necesariamente normal) se estudiará en el próximo capítulo. El resultado depende esencialmente de cómo se comporte la normalización, por lo que la separación entre gérmenes normales y no normales aparece de forma natural en el estudio de este problema.

Uno de los conceptos que se utilizan a lo largo de este y los siguientes capítulos es el de cambio de signo. Para precisar, si X_0 es un germen analítico diremos que $f \in \mathcal{O}(X_0)$ *cambia de signo* en una semirrama γ si γ está en la adherencia de $\{f > 0\}$ y de $\{f < 0\}$ o, equivalentemente, si, tomando representantes, cualquier entorno de γ contiene puntos donde $f > 0$ y donde $f < 0$ (por supuesto, $f = 0$ sobre γ).

Sea ahora X_0 un germen de dimensión 2 normal, es decir, $\mathcal{O}(X_0)$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones $\mathcal{K}(X_0)$. Geométricamente esta condición implica que X_0 es no-singular en codimensión 1, es decir, el origen es a lo sumo el único punto singular de X_0 [Nar, Th. VI.2.2]. Así, dado cualquier ideal primo de altura uno, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(X_0)$, la localización $\mathcal{O}(X_0)_\mathfrak{p}$ es un anillo de valoración discreta, cf. [A-McD, Prop. 9.2]. Tomemos cualquier generador g de $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{O}(X_0)_\mathfrak{p}$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{O}(X_0)$ tenemos que $f = g^m u$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $u \in \mathcal{O}(X_0)_\mathfrak{p}$ es una unidad. En estas condiciones f cambia de signo en $Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ si m es impar. Obviamente, si f cambia de signo en Y también cambia de signo (según la definición del párrafo anterior) en las dos semirramas γ y γ' tales que $\gamma \cup \gamma' = Y$, así que las dos definiciones son equivalentes.

Ejemplos 1.1

a) En el plano, $X_0 = \mathbb{R}^2$, la función $f = y$ cambia de signo en el eje-x. Por el contrario, la función $h = x$ no cambia de signo en el eje-x ya que es *una unidad en* $\mathcal{O}(X_0)_\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p} = \mathcal{J}(\{y = 0\})$.

b) En el cono $X_0 \subset \mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, la función $f = z - x$ no cambia de signo en ninguna semirrama, tiene signo constante en la hoja superior (donde $f \geq 0$) y en la hoja inferior (donde $f \leq 0$).

De hecho, sobre el cono $z-x = \frac{y^2}{z+x}$, siendo $z+x$ una unidad en $\mathcal{O}(X_0)_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} = \mathcal{J}(z-x=0)$).

c) En el *paraguas de Whitney*, cf. ejemplo 3.1.1, definido por $y^2 - zx^2 = 0$, la función $f = x$ cambia de signo en el semieje-z positivo, pero no en el semieje negativo (que es el *mango* del paraguas y tiene dimensión 1). En este caso, sólo tiene sentido la primera de las dos definiciones dadas de cambio de signo.

2 Eliminación de semirramas

El principal objetivo de este capítulo es demostrar que si X_0 es un germen analítico irreducible bidimensional normal, entonces el índice de estabilidad es $\bar{s}(X_0) = 2$.

La idea de la demostración es la siguiente: si S es un germen semianalítico cerrado de X_0, entonces consta de una parte de dimensión 2, $\operatorname{Adh}\operatorname{Int}(S)$, y de un conjunto finito de semirramas. Pues bien, si S es básico veremos en este apartado que $\operatorname{Adh}\operatorname{Int}(S)$ se puede expresar con sólo dos desigualdades y, posteriormente, damos un procedimiento para añadir semirramas sin aumentar el número de desigualdades.

Veamos en primer lugar la siguiente

Proposición 2.1 *Sea X_0 un germen analítico irreducible normal de dimensión 2 y sea $S \subset X_0$ un germen genéricamente básico. Entonces existen $a, b \in \mathcal{O}(X_0)$ tales que* $\operatorname{Adh}\operatorname{Int}(S) = \{a \geq 0, b \geq 0\}$.

Demostración: Como X_0 es normal, es de dimensión pura y, por tanto, si S y T son genéricamente iguales $\operatorname{Adh}\operatorname{Int}(S) = \operatorname{Adh}\operatorname{Int}(T)$. Podemos, pues, suponer $S = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ [1] .Tenemos que $\operatorname{Adh}\operatorname{Int}(S) \subset S$ y, de hecho, se diferencian en un germen semianalítico de dimensión 1, es decir, en un conjunto finito de semirramas. Así pues, debemos probar que podemos eliminar la parte de dimensión 1 de S sin aumentar el número de desigualdades.

[1] Si S es genéricamente básico será $S \overset{g}{=} \{f > 0, g > 0\}$ ya que $s(X_0) = 2$. Además, $\{f > 0, g > 0\} \overset{g}{=} \{f \geq 0, g \geq 0\}$.

En primer lugar,

$$\{fg \geq 0\} = \mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} \cup \mathrm{Adh}\{f < 0,\ g < 0\} \cup (\cup_{i=1}^{r}\gamma_i)$$

donde las γ_i son semirramas. Por el teorema 1.3.4 existe h que es ≥ 0 en $\mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\}$, es ≤ 0 en $\mathrm{Adh}\{f < 0,\ g < 0\} \cup (\cup_{i=1}^{r}\gamma_i)$ y

$$\{h = 0\} \cap \{fg \geq 0\} \subset \overline{\mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{f < 0,\ g < 0\}}^{Z} \qquad (2.1)$$

Por tanto,

$$\{fg \geq 0,\ h \geq 0\} = \mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} \cup (\cup_{i=1}^{r'}\gamma'_i)$$

donde γ'_i son semirramas que verifican

$$\gamma'_i \subset \overline{\mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{f < 0,\ g < 0\}}^{Z} \setminus \mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\}$$

En particular, si $\mathrm{Adh}\{f > 0, g > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{f < 0, g < 0\} = \{0\}$ no se añadiría ninguna semirrama y habríamos terminado. Vamos a ver que $\{fg \geq 0,\ h \geq 0\}$ tiene esta propiedad, por lo que una segunda aplicación del teorema 1.3.4 concluirá la demostración.

Como S y $\{fg \geq 0,\ h \geq 0\}$ son genéricamente iguales tienen la misma "Adh Int". Supongamos que

$$\mathrm{Adh}\{fg > 0,\ h > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{fg < 0,\ h < 0\} \neq \{0\}$$

y consideremos cualquier semirrama τ en esta intersección. Sea Y la clausura de Zariski de τ y sea $\mathfrak{p} = \mathcal{J}(Y)$. Puesto que τ está en la clausura de $\{h > 0\}$ y de $\{h < 0\}$, h debe anularse en Y. Por otra parte, como τ también está en $\{fg \geq 0\}$, de la fórmula (2.1) deducimos que

$$\tau \subset \overline{\mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{f < 0,\ g < 0\}}^{Z} \qquad (2.2)$$

Esto implica, en particular, que tanto f como g cambian de signo en Y, y, por lo tanto, fg no cambia de signo en Y por ser X_0 normal. Pero, por otro lado, τ está en la clausura de $\{fg > 0\}$ y de $\{fg < 0\}$, por lo que fg debe cambiar de signo en Y, contradicción.

De esta forma, escribiendo $f' = fg$ y $g' = h$, podemos repetir el argumento anterior cambiando f y g por f' y g' obteniendo

$$\{f'g' \geq 0\} = \mathrm{Adh}\{f' > 0,\ g' > 0\} \cup \mathrm{Adh}\{f' < 0,\ g' < 0\} \cup (\cup_{i=1}^{r}\gamma'_i)$$

y por el teorema 1.3.4 podemos encontrar una función $b \in \mathcal{O}(X_0)$ que separa $\mathrm{Adh}\{f' > 0,\ g' > 0\}$ y $\mathrm{Adh}\{f' < 0,\ g' < 0\} \cup (\cup_{i=1}^{r} \gamma_i')$, con $\{b = 0\} \cap \{f'g' \geq 0\} = \{0\}$. Por tanto, finalmente tenemos que $\mathrm{Adh}\{f > 0,\ g > 0\} = \{a \geq 0,\ b \geq 0\}$ donde $a = f'g'$ y hemos terminado. □

Observación 2.2 Diremos que un germen analítico X_0 verifica la propiedad del *cambio de signo* si para cualquier semirrama γ existen funciones que cambian de signo en γ y para cualquier par de estas funciones $f, g \in \mathcal{O}(X_0)$, el producto fg no cambia de signo en γ.

Obviamente, si X_0 es normal verifica la propiedad del cambio de signo. De hecho, en la demostración de la proposición anterior sólo se utiliza esta propiedad. Por lo tanto, puesto que el procedimiento de inclusión de semirramas no exige ninguna condición especial, el teorema 3.3 es válido para gérmenes que verifiquen esta propiedad del cambio de signo.

Pero no todos los gérmenes analíticos de dimensión 2 verifican la propiedad del cambio de signo. Por ejemplo, si X_0 es el paraguas de Whitney y γ es el semieje-z positivo, tanto $f = x$ como $g = y$ cambian de signo en γ, pero el producto xy también cambia de signo en γ. Así pues, el paraguas de Whitney no verifica esta propiedad del cambio de signo. Además, no existe ninguna función que cambie de signo en el semieje-z negativo. De hecho, un germen analítico X_0 que no sea de dimensión pura no puede verificar esta propiedad.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento seguido en la proposición 2.1 para la eliminación de semirramas:

Ejemplo 2.3

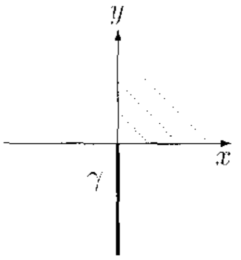


Figura 2.1

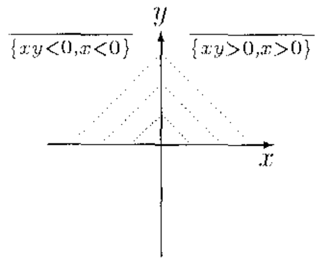


Figura 2.2

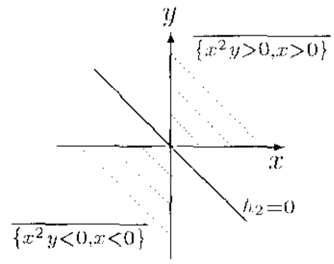


Figura 2.3

En el plano $\mathbb{R}^2$, consideremos el conjunto $S = \{xy \geq 0, x \geq 0\}$. Si llamamos γ al semieje-y negativo, S incluye el primer cuadrante (que es Adh Int$S$) y γ, es decir, $S = \text{Adh Int}S \cup \gamma$. En este caso,

$$\overline{\text{Adh}\{xy > 0, x > 0\} \cap \text{Adh}\{xy < 0, x < 0\}}^{\,z} = \{x = 0\}$$

y la función $h_1 = x$ separa estas dos adherencias (que son el primer y segundo cuadrante). A continuación definimos $S' = \{x^2y \geq 0, x \geq 0\}$. Aunque $S' = S$, ahora

$$\overline{\text{Adh}\{x^2y > 0, x > 0\} \cap \text{Adh}\{x^2y < 0, x < 0\}}^{\,z} = \{0\},$$

por lo que ambas adherencias (ahora, primer y tercer cuadrante) pueden ser separadas "completamente", por ejemplo, por la función $h_2 = y + x$. Finalmente, $S'' = \{x^3y \geq 0, x + y \geq 0\} = \text{Adh Int}(S)$.

3 Inclusión de semirramas

En este apartado damos un procedimiento para añadir semirramas a un germen básico sin aumentar el número de desigualdades.

Proposición 3.1 *Sea X_0 un germen analítico irreducible de dimensión 2 y sea $S = \{f \geq 0, g \geq 0\} \subset X_0$. Entonces dada cualquier semirrama γ existen $f', g' \in \mathcal{O}(X_0)$ tales que $S \cup \gamma = \{f' \geq 0, g' \geq 0\}$.*

Demostración: Puesto que $\gamma \not\subset S$ (en otro caso la afirmación es trivial), podemos suponer (cambiando f por g, si es necesario) que $\gamma \not\subset \{g \geq 0\}$ y, por tanto, $\gamma \subset \{g < 0\}$. Sea Y la clausura de Zariski de γ y sea $r \in \mathcal{O}(X_0)$ una ecuación positiva de Y, es decir, $r \geq 0$ en X_0 y $\{r = 0\} = Y$. Sabemos que Y consta de dos semirramas, $Y = \gamma \cup \gamma'$. Distinguiremos varios casos dependiendo de la posición de γ y γ' respecto a f y g. En primer lugar, observemos que si $\gamma' \subset S$ tendremos $S \cup \gamma = \{rf \geq 0, rg \geq 0\}$. Así que, en adelante, supondremos que $\gamma' \not\subset S$. También podemos suponer f no se anula en Y. En otro caso, aplicando la desigualdad de Hörmander-Lojasiewicz podemos reemplazar f por otra función que no se anule en Y. De hecho, si $f|_Y = 0$, entonces g no se anula en Y (en caso contrario $\gamma \subset S$) y aplicando

Hörmander-Lojasiewicz a $T = \{g \geq 0\}$, f y g, encontramos $p > 0$, $q \geq 0$ tales que $\text{sign}(pf+qg) = \text{sign}(f)$ en T y $\{q = 0\} \subset \overline{\{f = 0\} \cap T}^{Z}$. Por tanto, $\{f \geq 0, g \geq 0\} = \{pf + qg \geq 0, g \geq 0\}$ y como γ, $\gamma' \not\subset T$ tendremos que q no se anula en estas semirramas, y $(pf + qg)|_Y = qg|_Y \neq 0$. Así que cambiando f por $pf + qg$ tenemos que f no se anula en Y. Ahora distinguimos:

Primer caso: $\gamma \not\subset \{f \geq 0\}$.
Aplicamos la proposición 1.3.1 a $S_1 = \{f \geq 0\} \cup \{g \geq 0\} \cup \gamma'$ y $S_2 = \gamma$, encontrando h tal que $S_1 \subset \{h > 0\}$ and $S_2 \subset \{h < 0\}$. De esta forma $S \cup \gamma = \{hf > 0,\ rg \geq 0\}$ o $S \cup \gamma = \{rf \geq 0,\ hg \geq 0\}$, según que $\gamma' \subset \{f < 0\})$ o $\gamma' \subset \{g < 0\})$, respectivamente. Sólo veremos que si $\gamma' \subset \{f < 0\})$ entonces $S \cup \gamma = \{hf \geq 0,\ rg \geq 0\}$ ya que el otro caso es análogo intercambiando los papeles de f y g . En primer lugar, tenemos que $S \cup \gamma \subset T := \{hf \geq 0,\ rg \geq 0\}$ puesto que hf es positivo cuando f lo es y también sobre γ. Por otra parte, tomando representantes en un entorno suficientemente pequeño, cojamos $z \notin S \cup \gamma$. Si $z \in \gamma'$ entonces $f(z) < 0$ pero $h(z) > 0$ lo que implica que $hf(z) < 0$ y, por tanto $z \notin T$. Podemos pues suponer que $z \notin Y$, o lo que es lo mismo que $r(z) \neq 0$. Por tanto, si $g(z) < 0$ será $rg(z) < 0$, de donde $z \notin T$. Para terminar, si $g(z) > 0$ pero $f(z) < 0$ entonces $h(z) > 0$ y nuevamente $hf(z) < 0$ lo que implica que $z \notin T$. De todo esto se sigue que $T \subset S \cup \gamma$ y hemos terminado.

Segundo caso: $\gamma \subset \{f \geq 0\}$, $\gamma' \subset \{f < 0\}$.
En estas condiciones es inmediato comprobar que $S \cup \gamma = \{f \geq 0,\ rg \geq 0\}$

Tercer caso: $\gamma \subset \{f \geq 0\}$, $\gamma' \subset \{f > 0\}$.
En particular, tenemos que $\gamma' \subset \{g < 0\}$, ya que $\gamma' \not\subset S$. De nuevo, aplicamos la proposición 1.3.1, pero esta vez a $S_1 = \{f \leq 0\} \cup \{g \geq 0\} \cup \gamma$ y $S_2 = \gamma'$ para encontrar $h \in \mathcal{O}(X_0)$ tal que $S_1 \subset \{h > 0\}$ y $S_2 \subset \{h < 0\}$. Afirmamos que $S \cup \gamma = \{hf \geq 0,\ rg \geq 0\}$. De hecho, puesto que $S \subset \{h > 0\}$ tenemos que $S \cup \gamma \subset T := \{hf \geq 0,\ rg \geq 0\}$. Ahora, tomando como antes $z \notin S \cup \gamma$ en un entorno suficientemente pequeño. Si $z \in \gamma'$ tendremos $h(z) < 0$ pero $f(z) > 0$ lo que implica $hf(z) < 0$ y $z \notin T$. Por tanto, supongamos que $z \notin \gamma'$, es decir, $r(z) \neq 0$. Si $g(z) < 0$ también $rg(z) < 0$ y, por tanto, $z \notin T$. Si $g(z) > 0$ pero $f(z) < 0$, entonces $z \in S_1$ y será $h(z) > 0$ con lo que $hf(z) < 0$ y, nuevamente, $z \notin T$. Por lo tanto, $T \subset S \cup \gamma$ y se concluye la demostración.

□

Observación 3.2 A diferencia de la proposición 2.1, en esta última no se exige que X_0 sea normal. Incluso, la hipótesis de irreducibilidad no es utilizada en la demostración por lo que el procedimiento para añadir semirramas es válido para cualquier germen analítico de dimensión 2.

La proposición 3.1 nos da un procedimiento para añadir una semirrama γ a un conjunto básico $B = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ que depende de la posición de $\overline{\gamma}^{Z} = \gamma \cup \gamma'$ respecto de los conjuntos $\{f \geq 0\}$ y $\{g \geq 0\}$.

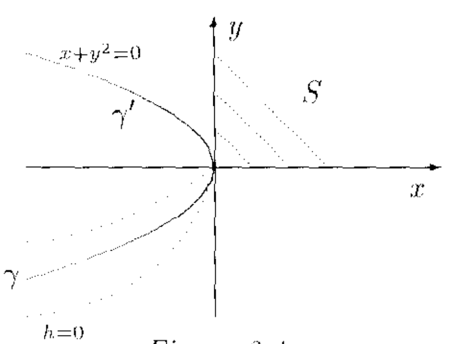


Figura 2.4

Por ejemplo (véase la figura 2.4), si $B = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ y se quiere añadir la semirrama de la curva $x + y^2 = 0$ situada en el tercer cuadrante (γ), consideramos los conjuntos $S_1 = \{x \geq 0\} \cup \{y \geq 0\} \cup \gamma'$, $S_2 = \gamma$ y una función h que separa S_1 de S_2. Entonces,

$$S \cup \gamma = \{hx \geq 0, (x + y^2)^2 y \geq 0\}.$$

Finalmente, combinando las proposiciones 2.1 y 3.1 obtenemos el siguiente teorema que nos da el índice de estabilidad de X_0:

Teorema 3.3 *Sea X_0 un germen analítico normal de dimensión 2. Entonces $s(X_0) = 2$.*

Demostración:

Sea $S \subset X_0$ un germen semianalítico básico cerrado. Tenemos

$$S = \text{Adh}\,\text{Int}(S) \cup (\cup_{i=1}^{r} \gamma_i)$$

para un conjunto finito de semirramas γ_i. Por la proposición 2.1 $\text{Adh}\,\text{Int}(S) = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ para ciertos $f, g \in \mathcal{O}(X_0)$, y aplicando la proposición 3.1 un número finito de veces podemos añadir las semirramas γ_i sin aumentar el número de desigualdades. $\square$

Capítulo 3

Índice de estabilidad de gérmenes analíticos de dimensión 2

1 Introducción

En el capítulo anterior vimos que si X_0 es un germen analítico irreducible bidimensional normal, entonces $\overline{s}(X_0) = 2$. Sin embargo, no todos los gérmenes analíticos bidimensionales tienen el mismo índice de estabilidad, como muestra el siguiente

Ejemplo 1.1 Si X_0 es el paraguas de Whitney, es decir el germen analítico de los ceros de $\mathtt{y}^2 - \mathtt{z}\mathtt{x}^2 \in \mathbb{R}\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ (ver figura 3.5), entonces $\overline{s}(X_0) = 3$.

En efecto, vamos a ver que el germen semianalítico $S = \{\mathtt{x} \geq 0, \mathtt{y} \geq 0, \mathtt{z} \geq 0\}$ no puede escribirse con 2 desigualdades. Supongamos que $S = \{f \geq 0, g \geq 0\}$. Si tanto f como g se anulan en el eje–$\mathtt{z}$ entonces este eje estaría contenido en S, lo que no es cierto. Por tanto, una de ellas, por ejemplo f, no es nula sobre el eje–$\mathtt{z}$. Pero, por continuidad tendremos que $f > 0$ en el semieje positivo, o, de otra forma, el punto $\beta \in \operatorname{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ con soporte $\mathtt{x} = \mathtt{y} = 0$ definido por $\mathtt{z} > 0$ está en $\widetilde{\{f > 0\}}$. De aquí se sigue que las cuatro generizaciones $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ de α en $\operatorname{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ (correspondientes a las cuatro hojas del paraguas a lo largo del eje–$\mathtt{z}$) yacen en $\widetilde{\{f > 0\}}$. Pero, por otro lado, sólo uno de los β_i, p.e. β_1, está en $\widetilde{S}$, así que g deberá separar β_1 de $\{\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, lo que es imposible ya que estos cuatro órdenes forman un abanico en el espacio de órdenes, $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$, del cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(X_0)$, cf. [An-Rz1, ex. 7.2.d].

Así pues, en dimensión 2 el índice de estabilidad puede tomar los valores 2 y 3. Hemos visto que la condición de normalidad es suficiente para que $\bar{s}(X_0) = 2$ pero, según veremos en este capítulo, no es una condición necesaria, pues existen gérmenes analíticos con $\bar{s} = 2$ que no son normales. La condición necesaria y suficiente tiene que ver con el *buen comportamiento* de la normalización de X_0.

2 Índice de estabilidad en el caso general

En este apartado X_0 será un germen analítico irreducible de dimensión 2, X_0^ν su normalización y $\pi : X_0^\nu \to X_0$ la aplicación correspondiente. La aplicación π induce un homomorfismo entre los anillos de X_0 y de X_0^ν,

$$\pi^* : \mathcal{O}(X_0) \hookrightarrow \mathcal{O}(X_0^\nu) \quad : \quad f \to f \circ \pi = f^*$$

Esta aplicación π^* a su vez induce un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones $\mathcal{K}(X_0)$ y $\mathcal{K}(X_0^\nu)$. El carácter birracional de la normalización juega un papel fundamental en la demostración de los resultados de este capítulo.

Vamos a ver que si la aplicación π verifica la condición

(CC): cada germen de curva analítica irreducible de X_0^ν se transforma (mediante π) en otro germen de curva analítica irreducible de X_0,

entonces $\bar{s}(X_0) = 2$.

Si, por el contrario, π no verifica la condición (CC), es decir, verifica la condición

(CS): existe un germen de curva analítica irreducible de X_0^ν que se transforma (mediante π) en una única semirrama de X_0,

entonces puede encontrarse un germen semianalítico cerrado básico en X_0 que no puede ser descrito con 2 desigualdades, es decir, $\bar{s}(X_0) = 3$.

Vamos a ver, en primer lugar la

Proposición 2.1 $(CC) \Rightarrow \overline{s}(X_0) = 2$.

Demostración: Si B es un básico cerrado de X_0, también lo será la parte de dimensión 2, $\mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^*$, cf. proposición 1.3.3. Así que supondremos que B es un básico cerrado de dimensión pura (o sea, $B = \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}\,B^*$ y, en particular, $B \subset \pi(X_0^\nu) = X_0^*$) y demostraremos que se puede expresar con 2 desigualdades. Como siempre podemos añadir semirramas sin aumentar el número de desigualdades, cf. proposición 2.3.1, de aquí se seguirá que $\overline{s}(X_0) = 2$.

Así pues, sea B un básico cerrado de X_0 verificando $B = \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B^*$ y consideremos $\pi^{-1}(B)$ que también será un básico cerrado de X_0^ν, cf. proposición 1.4.1. Llamaremos $B^\nu := \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}\pi^{-1}(B)$ que será un básico cerrado por la proposición 1.3.2 y podrá expresarse con 2 desigualdades (ya que X_o^ν es normal), es decir, $B^\nu = \{f_1' \geq 0,\ f_2' \geq 0\}$, donde $f_i' = \frac{f_i^*}{g_i^*}$.

Puesto que B y $B_1 := \{f_1g_1 > 0,\ f_2g_2 > 0\}$ son genéricamente iguales, cf. proposición 1.4.2, $B = \mathrm{Adh}\,\mathrm{Int}B_1^*$ y $B \stackrel{g}{=} B_2 := \{f_1g_1 \geq 0,\ f_2g_2 \geq 0\}$. Con estas definiciones $B \subset B_2$, aunque B_2 puede contener alguna semirrama adicional. Lo que vamos a ver es que si escogemos f_1' y f_2' adecuadamente, las semirramas adicionales de B_2 pueden eliminarse sin aumentar el número de desigualdades.

Siguiendo el mismo procedimiento que en la proposición 2.2.1 podemos expresar $B^\nu = \{f_1' \geq 0,\ f_2' \geq 0\}$ de forma que $\mathrm{Adh}\{f_1' > 0,\ f_2' > 0\} \cap \mathrm{Adh}\{f_1' < 0,\ f_2' < 0\} = \{0\}$.

Llamaremos $A_+^\nu := \mathrm{Adh}\{f_1' > 0,\ f_2' > 0\} = B^\nu$, $A_-^\nu := \mathrm{Adh}\{f_1' < 0,\ f_2' < 0\}$, $A_+ := \mathrm{Adh}\{f_1g_1 > 0,\ f_2g_2 > 0\} \cap X_0^*$, $A_- := \mathrm{Adh}\{f_1g_1 < 0,\ f_2g_2 < 0\} \cap X_0^*$. Por la proposición 1.4.3 tendremos que $\pi(A_+^\nu) = A_+ = B$ y $\pi(A_-^\nu) = A_-$. Si $A_+ \cap A_- = \{0\}$, entonces podríamos expresar B con 2 desigualdades, $B = \{f_1g_1f_2g_2 \geq 0,\ h \geq 0\}$, para cierto $h \in \mathcal{O}(X_0)$ que separa A_+ y A_- [1]. Ahora bien, puede ocurrir que $A_+ \cap A_- \neq \{0\}$ (a pesar de que $A_+^\nu \cap A_-^\nu = \{0\}$) si hay 2 semirramas de A_+^ν y A_-^ν que se identifican en X_0, es decir, existen $\gamma_0 \subset A_+^\nu$ y $\gamma_1 \subset A_-^\nu$ tales que $\pi(\gamma_0) = \pi(\gamma_1) = \Gamma$. La condición (CC) implica que las semirramas γ_0 y γ_1 son independientes, es decir, que pertenecen a

[1] Si $\{f_1g_1f_2g_2 \geq 0\} = A_+ \cup A_- \cup (\cup\gamma_i)$ entonces escogemos $h \in \mathcal{O}(X_0)$ que sea estrictamente positiva en A_+ y estrictamente negativa en $A_- \cup (\cup\gamma_i)$, lo que es posible en caso de que $A_+ \cap A_- = \{0\}$

gérmenes de curvas analíticas distintas y, por tanto, $\overline{\gamma_0}^{Z} \cap \overline{\gamma_1}^{Z} = \{0\}$.

Si $\overline{\gamma_1}^{Z} = \gamma_1 \cup \gamma_1'$, podemos distinguir varios casos:

a) $\gamma_1 \subset \mathrm{Int}(A_-^\nu) = \mathrm{Int}\overline{\{f_1' < 0,\, f_2' < 0\}}$

b) $\gamma_1 \in \mathrm{Bd}(A_-^\nu)$, $\gamma_1' \not\subset A_+^\nu$

c) $\gamma_1 \in \mathrm{Bd}(A_-^\nu)$, $\gamma_1' \subset A_+^\nu$

Vamos a ver que escogiendo las funciones adecuadamente podemos suponer que no hay semirramas en los casos a) y b). Esto siempre podemos conseguirlo, independientemente de que la condición (CC) se verifique o no.

Caso a): Existe un $r \in \mathcal{O}(X_0^\nu)$ que separa γ_1 de $T = \overline{\{f_1' > 0\}} \cup \overline{\{f_2' > 0\}}$, es decir,

$$r|_{\gamma_1} < 0 \quad \text{y} \quad r|_T > 0$$

con lo que, en particular, $r|_{B^\nu} \geq 0$ y $B^\nu = \{rf_1' \geq 0,\, f_2' \geq 0\}$. Además, $\{rf_1' > 0,\, f_2' > 0\} = \{f_1' > 0,\, f_2' > 0\}$ y $\{rf_1' < 0,\, f_2' < 0\} = \{f_1' < 0,\, f_2' < 0\} \cap \{r > 0\}$, con lo que al sustituir f_1' por rf_1' el nuevo A_+^ν coincide con el anterior y el nuevo A_-^ν está contenido en el anterior y, por tanto, no introducimos nuevas semirramas δ en $A_+ \cap A_-$. Como $\gamma_1 \not\subset \{rf_1' < 0,\, f_2' < 0\}$ podemos suponer que $\gamma_1 \not\subset A_-^\nu$.

En conclusión, si hay semirramas en $\mathrm{Int}(A_-^\nu)$ podemos cambiar las funciones para que esto no ocurra, por lo que estas semirramas no suponen ninguna obstrucción para expresar B con 2 desigualdades.

Caso b): Como $\gamma_1 \in \mathrm{Bd}(A_-^\nu)$ una de las funciones, f_1' o f_2', cambiará de signo en γ_1. Podemos, pues, suponer que f_1' cambia de signo en γ_1, así que también cambiará de signo en γ_1'. Por tanto, existirá un entorno U_1 de γ_1' tal que $f_2'|_{U_1} \leq 0$ (ya que $\gamma_1' \not\subset A_+^\nu$) y $\gamma_1 \subset \mathrm{Bd}(A_-^\nu)$. Además, $f_2'|_{C_1 = \gamma_1 \cup \gamma_1'} \neq 0$, pues en caso contrario, $f_2'|_{C_1} = 0$ implicaría $C_1 \subset A_+^\nu = \overline{\{f_1' \geq 0,\, f_2' \geq 0\}}$, absurdo, puesto que $A_+^\nu \cap A_-^\nu = \{0\}$. La situación es la que se representa en la figura 3.1.

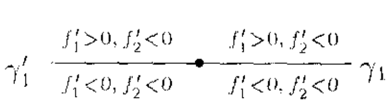


Figura 3.1

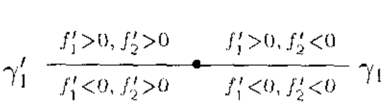


Figura 3.2

Supongamos que $\gamma_2, \ldots, \gamma_p$ son las semirramas que no están en A_+^ν ni en A_-^ν pero que se identifican con alguna semirrama de A_+^ν. Consideremos entornos semianalíticos conexos de γ_1 y γ_1', que denotaremos como U_1 y U_1', respectivamente, tales que $\gamma_2, \ldots, \gamma_p \notin \overline{U_1} \cup \overline{U_1'}$ y $\{f_1' f_2' = 0\} \cap (\overline{U_1} \cup \overline{U_1'}) = \gamma_1 \cup \gamma_1'$. Sea T el complementario de $U_1 \cup U_1'$ en X_0 y apliquemos la desigualdad de Hörmander-Lojasiewicz a T, f_1' y f_2'. Encontraremos $p, q \in \mathcal{O}(X_0^\nu)$ tales que $\operatorname{sign}(pf_1' + qf_2') = \operatorname{sign}(f_1')$ en T y $\{q = 0\} \subset \overline{\{f_1' = 0\} \cap T}^z$. Evidentemente, $\{f_1' \geq 0, f_2' \geq 0\} = \{pf_1' + qf_2' \geq 0, f_2' \geq 0\}$ y $\gamma_1, \gamma_1' \not\subset T$. En consecuencia, q no se anula en C_1 y, por tanto, $(pf_1' + qf_2')|_{C_1} = qf_2'|_{C_1} \neq 0$. Cambiando f_1' por $pf_1' + qf_2'$ se tiene que $B^\nu = \{pf_1' + qf_2' \geq 0, f_2' \geq 0\}$ pero ahora $\gamma_1 \not\subset \operatorname{Bd}\{pf_1' + qf_2' < 0, f_2' < 0\}$ (ni $pf_1' + qf_2'$ ni f_2' se anulan en γ_1). Si ahora $\gamma_1 \subset \operatorname{Int}\{pf_1' + qf_2' < 0, f_2' < 0\}$ procederíamos como en el caso a).

Con esta elección de T no se incluye en $A_-^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') := \operatorname{Adh}\{pf_1' + qf_2' < 0, f_2' < 0\}$ ninguna semirrama cuya imagen coincida con la de otra de A_+^ν que no estuviera ya en $A_-^\nu(f_1', f_2')$. Además, se sigue cumplendo que $A_+^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') \cap A_-^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') = \{0\}$ ya que $A_+^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') \triangle A_-^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') \subset \overline{U_1} \cup \overline{U_1'}$ (donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica de dos conjuntos) y $A_+^\nu(pf_1' + qf_2', f_2') \cap (\overline{U_1} \cup \overline{U_1'}) = \{0\}$.

Caso c): Por lo anterior, si existen $\gamma_0 \subset A_+^\nu$ y $\gamma_1 \subset A_-^\nu$ tales que $\pi(\gamma_0) = \pi(\gamma_1) = \Gamma$, podemos suponer que $\gamma_1 \subset \operatorname{Bd}(A_-^\nu)$ y que $\gamma_1' \subset A_+^\nu$. Como en b) suponemos que f_1' cambia de signo en γ_1' por lo que debe ser $\gamma_1' \subset \operatorname{Bd}(A_+^\nu)$ (si $\gamma_1' \subset \operatorname{Int}(A_+^\nu)$, entonces f_1' no cambiaría de signo en γ_1'), como se muestra en la figura 3.2. La condición (CC) nos garantiza que γ_0 y γ_1 pertenecen a gérmenes de curvas analíticas distintas: $C_0 = \gamma_0 \cup \gamma_0'$ y $C_1 = \gamma_1 \cup \gamma_1'$. Por tanto, $\pi(C_0) = \pi(C_1) = \Gamma \cup \Gamma'$, $\pi(\gamma_0') = \pi(\gamma_1') = \Gamma'$.

Como $\pi(A_+^\nu) = A_+$ y $\pi(A_-^\nu) = A_-$ tendremos que $\Gamma \subset A_+$ ($\pi(\gamma_0) = \Gamma$ y $\gamma_0 \subset A_+^\nu$) y que $\Gamma' \subset A_+$ ($\pi(\gamma_1') = \Gamma'$ y $\gamma_1' \subset A_+^\nu$). Por supuesto, también se tiene que $\Gamma \subset A_-$ ($\pi(\gamma_1) = \Gamma$ y $\gamma_1 \subset A_-^\nu$).

En conclusión, podemos suponer que $B^\nu = \{f_1' \geq 0, f_2' \geq 0\}$, que $A_+^\nu \cap A_-^\nu = \{0\}$ y que las únicas semirramas $(\gamma_{1i})_1^r$ de A_-^ν que se identifican con otras $(\gamma_{0i})_1^r$ de A_+^ν son semirramas $\gamma_{1i} \subset \operatorname{Bd}(A_-^\nu)$ tales que $\gamma_{1i}' \subset \operatorname{Bd}(A_+^\nu)$, donde $\overline{\gamma_{1i}}^z = \gamma_{1i} \cup \gamma_{1i}'$.

Si $B_2 := \{f_1 g_1 \geq 0, f_2 g_2 \geq 0\} \subset X_0$, entonces $A_+ \cap A_- = \cup_1^r \Gamma_i$, siendo $\Gamma_i = \pi(\gamma_{0i}) = \pi(\gamma_i)$ y, por lo visto anteriormente $\overline{\cup_1^r \Gamma_i}^z \subset A_+ = B$. Ahora, escogiendo adecuadamente $h \in \mathcal{O}(X_0)$ (ver la demostración de la proposición

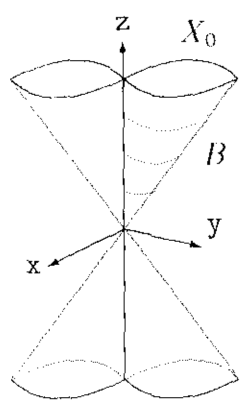
2.2.1)

$$\{f_1g_1f_2g_2 \geq 0,\ h \geq 0\} = A_+ \cup (\cup \Gamma'_j)$$

donde las semirramas $\Gamma'_j \subset \overline{A_+(f_1g_1, f_2g_2) \cap A_-(f_1g_1, f_2g_2)}^Z \setminus A_+(f_1g_1, f_2g_2) = \overline{\cup_j \Gamma'_j}^Z \setminus A_+(f_1g_1, f_2g_2) = \emptyset$. Por lo tanto, $B = \{f_1g_1f_2g_2 \geq 0,\ h \geq 0\}$ y, de esta forma conseguimos expresar B con 2 desigualdades. □

En el siguiente ejemplo se ilustra el proceso seguido en la proposición.

Ejemplo 2.2 Sea $X_0 \subset \mathbb{R}^3_0$ el germen analítico irreducible de ecuación $y^2z^2 = x^2 + y^4$ (ver figura 3.3) y X_0^ν su normalización (ver figura 3.4), el cono de ecuación $z'^2 = x'^2 + y'^2$, donde $x = x'y'$, $y = y'$, $z = z'$.



$\xleftarrow{\pi}$

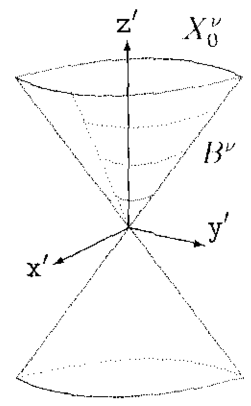


Figura 3.3 *Figura 3.4*

Sea $B \subset X_0$ el básico cerrado definido como $B = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Su imagen inversa, $\pi^{-1}(B) = \{x'y' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0\}$, es un básico cerrado de X_0^ν que, en este caso coincide con $B^\nu = \mathrm{Adh\,Int}\pi^{-1}(B)$. Ahora expresamos B^ν con 2 desigualdades (lo que es posible por ser X_0^ν normal), $B^\nu = \{x' + y' - z' \geq 0,\ z' \geq 0\}$, de forma que $A_+^\nu = \mathrm{Adh}\{x' + y' - z' > 0,\ z' > 0\}$ y $A_-^\nu = \mathrm{Adh}\{x' + y' - z' < 0,\ z' < 0\}$ no se intersecan, es decir, $A_+^\nu \cap A_-^\nu = \{0\}$. Como $x' + y' - z' = \frac{x+y^2-zy}{y}$ ~~y $z' = z$ serán~~ $B_1 = \{(x + y^2 - zy)y > 0,\ z > 0\}$ y $B_2 = \{(x + y^2 - zy)y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

Como $A_+ = \mathrm{Adh}\{(x + y^2 - zy)y > 0,\ z > 0\}$ y $A_- = \mathrm{Adh}\{(x + y^2 - zy)y < 0,\ z < 0\}$ no se cortan ($A_+ \cap A_- = \{0\}$) podemos expresar B con 2 desigualdades, de la siguiente forma, teniendo en cuenta que z separa A_+ y A_-. $B = \{(x+y^2-zy)yz > 0, z > 0\}$. De hecho, en este caso B_2 no contiene ninguna semirrama adicional por lo que coincide con B.

Observación 2.3 La demostración de la proposición 2.2.1 nos asegura que, si X_0 es normal (o incluso si verifica la propiedad del cambio de signo), cualquier básico cerrado sin semirramas sueltas se puede escribir como $B = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ de forma que $A_+ \cap A_- = \{0\}$. En el caso de que X_0 no sea normal pero cumpla (CC) (lo que equivale a decir que $\overline{s}(X_0) = 2$), la demostración de 2.1 nos permite escribir $B = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ de forma que, aunque ahora podría ser $A_+ \cap A_- \neq \{0\}$, si $\gamma \subset A_+ \cap A_-$ entonces también $\gamma' \subset A_+ \cap A_-$, siendo $\overline{\gamma}^z = \gamma \cup \gamma'$.

También de la demostración de la proposición 2.1 se sigue que, en caso de no cumplirse la propiedad (CC), los conjuntos básicos cerrados que pueden requerir 3 desigualdades para su descripción son aquellos en los que se verifica que las semirramas γ_0 y γ_1 son las 2 semirramas de una misma curva irreducible. En este caso, $\Gamma \subset \mathrm{Bd}(B)$ y $\Gamma' \not\subset B$, siendo $\overline{\Gamma}^z = \Gamma \cup \Gamma'$. De hecho, en este caso puede construirse un básico cerrado que necesita 3 desigualdades, como se ve en la siguiente

Proposición 2.4 $(CS) \Rightarrow \overline{s}(X_0) = 3$

Demostración: En este caso suponemos que γ_0 y γ_1 son las 2 semirramas de un mismo germen de curva analítica irreducible de X_0^ν que tienen la misma imagen, es decir, $\pi(\gamma_0) = \pi(\gamma_1) = \Gamma$. En torno a Γ confluyen 4 hojas que definen un abanico y cualquier básico cerrado que contenga una sola de estas 4 hojas necesita 3 desigualdades para ser descrito.

Más concretamente, si $f_1' \in \mathcal{O}(X_0^\nu)$ es una función que cambia de signo en γ_0, $f_2' \in \mathcal{O}(X_0^\nu)$ una función que separa γ_0 de γ_1 y $h \in \mathcal{O}(X_0)$ una función que separa Γ de Γ' ($h|_\Gamma > 0$, $h|_{\Gamma'} < 0$), entonces el conjunto $B = \{f_1 g_1 \geq 0, f_2 g_2 \geq 0, h \geq 0\}$ no puede ser descrito con 2 desigualdades. En efecto, se puede repetir palabra por palabra el argumento empleado en el ejemplo 1.1.

□

Ejemplo 2.5 Sea $X_0 : y^2 - zx^2 = 0$ el paraguas de Whitney (ver figura 3.5). Su normalización es el germen X_0^ν de ecuación $z' - y'^2 = 0$ (figura 3.6), con $x = x'$, $y = x'y'$, $z = z'$.

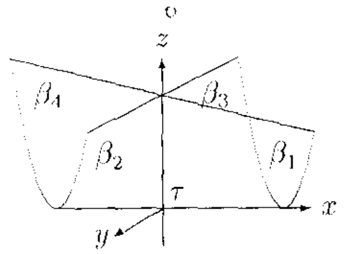


Figura 3.5

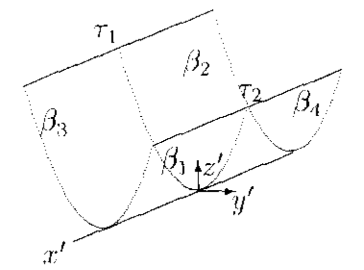


Figura 3.6

La parábola $Z' = X_0^\nu \cap \{x' = 0\}$ tiene como imagen el eje-z positivo de X_0, así que se verifica la condición (CS) y, por la proposición 2.4 $\overline{s}(X_0) = 3$, como ya se vio directamente en el ejemplo 1.1.

Si intentamos seguir el procedimiento de la proposición 2.1 para escribir $B := \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ con 2 desigualdades tendremos que $\pi^{-1}(B) = \{x' \geq 0, x'y' \geq 0, z' \geq 0\} = B^\nu$. Por su parte, B^ν se puede expresar con 2 desigualdades, $B^\nu = \{x' \geq 0, y' \geq 0\}$, de forma que $A_+^\nu = \mathrm{Adh}\{x' > 0, y' > 0\}$ y $A_-^\nu = \mathrm{Adh}\{x' < 0, y' < 0\}$ sólo se cortan en el origen. Ahora, $B_1 = \{x > 0, xy > 0\}$ y $B_2 = \{x \geq 0, xy \geq 0\}$. A diferencia del ejemplo 2.2, $A_+ = \mathrm{Adh}\{x > 0, xy > 0\}$ y $A_- = \mathrm{Adh}\{x < 0, xy < 0\}$ se cortan en el eje z positivo. Además, como $\pi(\tau_1) = \pi(\tau_2) = \tau$ y τ_1 y τ_2 no son independientes no puede seguirse el procedimiento dado en la proposición 2.1 para la eliminación de semirramas. En conclusión, no hay forma de eliminar el eje z negativo de B_2 sin aumentar el número de desigualdades.

Observación 2.6 Un invariante estrechamente relacionado con $\overline{s}$ es el denominado *anchura*, cf. [Re-Pa]. Se puede definir este invariante como el menor entero w' tal que cualquier germen semianalítico cerrado C se puede escribir como

$$C = \{f_{11} \geq 0, \ldots, f_{1w'} \geq 0\} \cup \ldots \cup \{f_{s1} \geq 0, \ldots, f_{sw'} \geq 0\}$$

donde $f_{ij} \in \mathcal{O}(X_0)$. Evidentemente, siempre se verifica que $w'(X_0) \leq \overline{s}(X_0)$. Además si $\overline{s}(X_0) = 3$ entonces $w'(X_0) = 3$. Concretamente, en la demostración de la proposición 2.4 se da un germen semianalítico básico cerrado que no puede ser descrito con 2 desigualdades. Razonando como en el ejemplo 1.1 se concluye que tampoco puede ser descrito como una unión de básicos cerrados definidos por 2 desigualdades.

3 Caracterización algebraica de los gérmenes con $\overline{s} = 3$

En este apartado veremos cómo pueden caracterizarse algebraicamente los gérmenes con $\overline{s} = 3$ mediante el espectro real de $\mathcal{O}(X_0)$.

Proposición 3.1 *Sea X_0 un germen analítico irreducible de dimensión 2. $\overline{s}(X_0) = 3$ si y sólo si existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ tal que $F \to \widetilde{\tau}$ con* $\dim \widetilde{\tau} = 1$.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{s}(X_0) = 3$. Por la proposición 2.4, existen 2 semirramas, γ_0 y γ_1 de un mismo germen de curva analítica irreducible de X_0^ν con la misma imagen: $\pi(\gamma_0) = \pi(\gamma_1) = \tau$. τ define un orden en $\mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ de dimensión 1, $\widetilde{\tau}$, y sus 4 generizaciones $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ (dos de estos órdenes son generizaciones de γ_0 y los otros dos de γ_1) constituyen un abanico F que, obviamente se especializa en $\widetilde{\tau}$. F es un abanico ya que es el *pull back* del abanico trivial $\{\widetilde{\gamma_0}, \widetilde{\gamma_1}\}$ vía el anillo de valoración discreta $\mathcal{O}(X_0^\nu)_{\mathfrak{q}}$ con $\mathfrak{q} = \mathcal{J}(\widetilde{\gamma_0}^{z})$, cf. [An-Rz1, Ch. 7].

$\Leftarrow$) Supongamos que existe un abanico $F \subset \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ con 4 elementos que se especializa en $\widetilde{\tau}$, siendo $\dim(\widetilde{\tau}) = 1$. Si $F = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ existen $f_1, g_1 \in \mathcal{O}(X_0)$ tales que $\{\beta \in F | f_1 >_\beta 0, g_1 >_\beta 0\} = \{\beta_1\}$. Consideramos $B_1 = \mathrm{Adh}\{f_1 > 0, g_1 > 0\}$ que es un básico cerrado, h una función que separe τ de τ' ($h|_\tau > 0$, $h|_{\tau'} < 0$) y sea $\underline{B = B_1 \cap \{h \geq 0\}}$. Entonces B es un básico cerrado que no puede expresarse con 2 desigualdades. En efecto, si $B = \{f \geq 0, g \geq 0\}$ entonces f y g no pueden anularse simultáneamente en $C = \tau \cup \tau'$ y suponiendo que $f|_\tau > 0$, entonces será $\beta_i(f) > 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$. Pero sólo β_1 está en $\widetilde{B}$, así que g tendría que separar β_1 de $\{\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, lo que es absurdo por ser F un abanico. $\square$

Esta proposición junto con los resultados de la sección 2 nos permiten enunciar el

Teorema 3.2 *Sea X_0 un germen analítico irreducible de dimensión dos y $\pi : X_0^\nu \to X_0$ su normalización. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) Existe un germen de curva analítica $Y \subset X_0^\nu$ tal que $\pi(Y)$ es una única semirrama (condición CS).

2) $\bar{s}(X_0) = 3$.

3) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ que se especializa en un único orden $\widetilde{\tau}$ $(F \to \widetilde{\tau})$ con $\dim \widetilde{\tau} = 1$.

Este teorema nos caracteriza completamente el índice de estabilidad cerrado, $\bar{s}$, de los gérmenes analíticos irreducibles de dimensión 2. Una cuestión que puede plantearse ahora es si la propiedad del cambio de signo, cf. observación 2.2.2, es exclusiva de los gérmenes con $\bar{s} = 2$. Lo mismo podríamos decir sobre los gérmenes de dimensión pura, ¿$\bar{s} = 2$ es equivalente a ser de dimensión pura? ¿Todo germen de dimensión pura verifica la propiedad del cambio de signo? Los siguientes ejemplos nos dan las respuestas.

Ejemplos 3.3

a) Sea $X_0 : z(x^2 + y^2) - x^3 = 0$ el *paraguas de Cartan* (ver figura 3.7), que es un germen analítico irreducible con un "mango" de dimensión 1, el eje z.

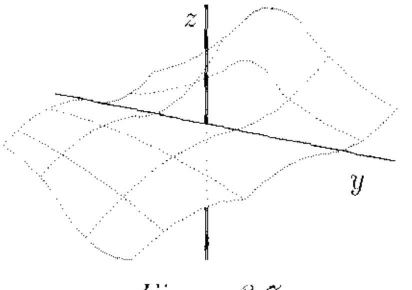


Figura 3.7

A diferencia del paraguas de Whitney, el de Cartan sólo intersecа la parte de dimensión 2 en un punto. En este caso, $\overline{s}(X_0) = 2$ ya que no puede haber ningún abanico de 4 elementos que se especialice en un orden de dimensión 1. Así que hay gérmenes que no son de dimensión pura para los que $\overline{s} = 2$.

b) Sean $X_0^{(k)}$ los gérmenes analíticos definidos por $z^2y^{2k} = x^{2k} + y^{4k}$ (ver figura 3.8). En primer lugar, aunque son de dimensión pura no verifican la propiedad del cambio de signo ya que x e y cambian de signo en τ y también lo hace el producto xy. Sin embargo, como se ve en el ejemplo 4.3, $\overline{s}(X_0^{(k)}) = 2$ si k es impar. Por tanto, hay gérmenes que no verifican la propiedad del cambio de signo con $\overline{s} = 2$.

Para terminar esta sección determinaremos el índice de estabilidad cerrado de gérmenes analíticos no necesariamente irreducibles.

Teorema 3.4 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2 cuya descomposición en irreducibles es $X_0 = X_{01} \cup \ldots \cup X_{0n}$. Entonces $\overline{s}(X_0) = \text{máx}\{\overline{s}(X_{01}), \ldots, \overline{s}(X_{0n})\}$.*

Demostración: Si para algún j es $\overline{s}(X_{0j}) = 3$ entonces $\overline{s}(X_0) = 3$ (ya que cualquier básico cerrado de X_{0j} es un básico cerrado de X_0). Así que lo que tenemos que ver es que si $\overline{s}(X_{0i}) = 2$, $\forall i = 1, \ldots, n$ entonces $\overline{s}(X_0) = 2$.

Como el procedimiento para la inclusión de semirramas es siempre válido, cf. observación 2.3.2, vamos a suponer que B es un básico cerrado que verifica $B = \text{Adh}\,\text{Int}\,B^*$ y veremos que se puede escribir con 2 desigualdades. Si definimos $B_i = \text{Adh}\,\text{Int}(B \cap X_{0i})^*$, se tiene que $B = \cup_1^n B_i$ donde cada B_i es un básico cerrado de X_{0i} sin semirramas sueltas.

Siguiendo la demostración de la proposición 2.1 podremos expresar cada B_i como $B_i = \{f_i \geq 0,\ g_i \geq 0\}$ (restringiéndonos a X_{0i}) y podemos suponer que si $\Gamma \subset A_{i+} \cap A_{i-}$ entonces $\Gamma' \subset A_{i+}$, siendo $\overline{\Gamma}^{Z} = \Gamma \cup \Gamma'$ y $A_{i+} = \text{Adh}\{f_i > 0,\ g_i > 0\} = B_i$, $A_{i-} = \text{Adh}\{f_i < 0,\ g_i < 0\}$, cf. observación 2.3. Por el teorema 1.3.4 existirá un $h \in \mathcal{O}(X_0)$ que separe $\cup_1^n A_{i+} = \cup_1^n B_i = B$ de $\cup_1^n A_{i-}$ (que es un básico cerrado ya que no puede haber ningún abanico de 4 elementos que tenga 3 elementos en común con $\widetilde{A_{i-}}$, cf. proposición 1.2.10) y se tendrá que $B = \{\Sigma_1^n f_i g_i r_i \geq 0,\ h \geq 0\}$, siendo r_i una ecuación positiva del germen analítico $\cup_{j\neq i} X_{0j}$. De esta forma, $B \cap X_{0i} = \{f_i g_i r_i \geq 0,\ h \geq 0\} = B_i$. $\square$

Una consecuencia directa del anterior teorema y de la proposición 3.1 es el siguiente corolario.

Corolario 3.5 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2. Son equivalentes:*

a) $\overline{s}(X_0) = 3$.

b) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r \mathcal{O}(X_0)$ tal que $F \to \widetilde{\tau}$ con $\dim \widetilde{\tau} = 1$.

4 Gérmenes analíticos coherentes

En esta sección estudiaremos la relación existente entre la coherencia de un germen analítico X_0 y su índice de estabilidad $\overline{s}(X_0)$. Veremos en primer lugar algunas definiciones y resultados que nos permitirán caracterizar de forma adecuada los conjuntos analíticos coherentes.

Sea X_0 un germen de un conjunto analítico real en $0 \in \mathbb{R}^n$. Consideraremos $\mathbb{R}^n$ como un subconjunto de $\mathbb{C}^n$ y denotaremos por $\mathcal{J}^{\mathbb{R}}(X_0)$ el ideal de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_0)$ constituido por los gérmenes de funciones analíticas reales que se anulan en X_0. En estas condiciones existe un único germen $(X_0)^{\mathbb{C}}$ analítico complejo que contiene X_0 tal que si $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n_0)$ se anula sobre X_0 entonces se anula también sobre $(X_0)^{\mathbb{C}}$. Además, $(X_0)^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n_0 = X_0$ y cualquier germen analítico complejo S_0 que contiene X_0 también contiene $(X_0)^{\mathbb{C}}$.

El germen analítico complejo $(X_0)^{\mathbb{C}}$ se llama *complexificación* de X_0 y el ideal de gérmenes de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_0)$ que se anulan en $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_0)$ es $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}(X_0)^{\mathbb{C}} = \mathcal{J}^{\mathbb{R}}(X_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Un conjunto analítico real X se dice que es *coherente* si el haz $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ de gérmenes de funciones analíticas reales que se anulan en X es un haz coherente de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$-módulos. Un germen X_0 se dice coherente si está inducido por un conjunto analítico coherente.

Si un germen analítico es coherente debe ser de dimensión pura [Nar, Prop. V.7] aunque el recíproco no es cierto en general (ver ejemplo 4.3). La siguiente proposición nos da una útil caracterización de los gérmenes analíticos coherentes.

Proposición 4.1 *Sean $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ un germen analítico real, $(X_0)^{\mathbb{C}}$ su complexificado, S un conjunto analítico complejo que induce en $0 \in \mathbb{C}^n$ el germen $(X_0)^{\mathbb{C}} = S_0$ y $X = S \cap \mathbb{R}^n$. El germen X_0 es coherente si y sólo si para todo b suficientemente próximo a 0 el germen S_b es la complexificación del germen analítico real X_b.*

Demostración: [Nar, Prop. V.5]. □

La siguiente proposición afirma que la clase de los gérmenes analíticos coherentes de dimensión 2 está contenida en la de gérmenes con $\overline{s} = 2$.

Proposición 4.2 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2. Si $\overline{s}(X_0) = 3$, entonces X_0 no es coherente.*

Demostración: Por el corolario 3.5 sabemos que $\overline{s}(X_0) = 3$ si y sólo si existe un abanico $F = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\} \to \widetilde{\tau_+}$ con $\dim \widetilde{\tau_+} = 1$. Sean $\mathfrak{p} = \operatorname{supp} \widetilde{\tau_+}$, $Y = Z(\mathfrak{p})$, $\widetilde{\tau_-}$ el otro punto de $\operatorname{Spec}_r Y$ y G_{τ_-} el conjunto de generizaciones de $\widetilde{\tau_-}$ en $\operatorname{Spec}_r \mathcal{O}(X_0)$.

Si $G_{\tau_-} = \emptyset$, es decir, si $\widetilde{\tau_-}$ no tiene ninguna generización, entonces los puntos de τ_- son de dimensión 1 y, por tanto, X_0 no es coherente.

Supongamos ahora que $G_{\tau_-} \neq \emptyset$ y consideremos la normalización $\pi : X_0^\nu \to X_0$. Como $G_{\tau_-} \neq \emptyset$ se tendrá $\pi^{-1}(\widetilde{\tau_-}) \neq \emptyset$. Tomemos $\widetilde{\tau_-^1} \in \pi^{-1}(\widetilde{\tau_-})$ y sea $\mathfrak{q}_- = \operatorname{supp} \widetilde{\tau_-^1}$. En $\operatorname{Spec}_r \mathcal{O}(X_0^\nu)$ se tiene que $\sigma_1, \sigma_3 \to \widetilde{\tau_+^1}$ y $\sigma_2, \sigma_4 \to \widetilde{\tau_+^2}$, siendo $\widetilde{\tau_+^1} \neq \widetilde{\tau_+^2}$ (si $\widetilde{\tau_+^1} = \widetilde{\tau_+^2}$ llamemos $\mathfrak{q}_+ = \operatorname{supp} \widetilde{\tau_+^1} = \operatorname{supp} \widetilde{\tau_+^2}$, $\mathcal{O}(X_0^\nu)_{\mathfrak{q}_+}$ será un anillo de valoración discreta y el abanico F, constituido por las generizaciones de $\widetilde{\tau_+^1} = \widetilde{\tau_+^2}$, tendría sólo dos elementos, contra la hipótesis). Por construcción, $\{\widetilde{\tau_+^1}, \widetilde{\tau_+^2}\} \subset \pi^{-1}(\widetilde{\tau_+})$. También se tiene $\mathfrak{q}_+ \neq \mathfrak{q}_-$, ya que, en caso contrario, $\widetilde{\tau_-^1}$ coincidiría con algún $\widetilde{\tau_+^i}$, digamos con $\widetilde{\tau_+^1}$ y, en ese caso, $\sigma_1 \to \widetilde{\tau_-}$, contradicción.

Llamemos $Y_+^\nu = Z(\mathfrak{q}_+)$, $Y_-^\nu = Z(\mathfrak{q}_-)$ y sean $(Y_+^\nu)^{\mathbb{C}}$, $(Y_-^\nu)^{\mathbb{C}}$ sus complexificados. Existe un entorno U de 0 tal que $(Y_+^\nu)^{\mathbb{C}} \cap (Y_-^\nu)^{\mathbb{C}} = \{0\}$ en U. Tomemos cualquier punto $a \in Y_-^\nu \cap U$ suficientemente próximo a 0 y sea $b = \pi(a)$. Si $\pi_{\mathbb{C}}$ es la aplicación de normalización del complexificado de X_0, tendremos que $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \overline{\eta_1}, \ldots, \eta_r, \overline{\eta_r}\}$, donde los ξ_i son puntos reales y los $\eta_j, \overline{\eta_j}$ complejos. Se tiene que $r > 0$ ya que $Y_+^\nu \cap \pi^{-1}(b) = \emptyset$ y, sin embargo, $\pi_{\mathbb{C}}$ aplica $Y_{1\mathbb{C}}^\nu$ sobreyectivamente en $Y_{\mathbb{C}}$.

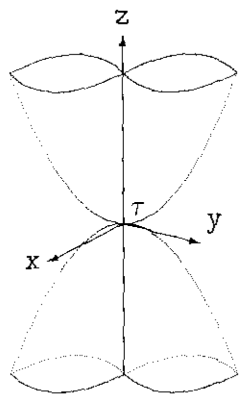
Sean $U_1, \ldots, U_k, V_1, \overline{V}_1, \ldots, V_r, \overline{V}_r$ entornos disjuntos de los puntos de $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(b)$. Si $W \subset \mathbb{C}^n$ es un entorno de b suficientemente pequeño y definimos $h : \pi_{\mathbb{C}}^{-1}(W) \to \mathbb{R}$ como $h|_{U_i} \equiv 0$ y $h|_{V_j \cup \overline{V}_j} \equiv 1$, h podrá escribirse como $h = \frac{f}{g}$, para ciertos $f, g \in \mathcal{O}(W)$. Por lo tanto, $gh = f \in \mathcal{J}(X_b)$ pero $f \notin \mathcal{J}(S_b)$, siendo S un conjunto analítico complejo que induce en $0 \in \mathbb{C}^n$ el germen $(X_0)^{\mathbb{C}}$, y X_0 no puede ser coherente.

□

Sin embargo, la coherencia no caracteriza completamente el índice de estabilidad $\overline{s}$ de los gérmenes analíticos. El siguiente ejemplo nos muestra que existen gérmenes no coherentes tanto con $\overline{s} = 2$ como con $\overline{s} = 3$.

Ejemplo 4.3 Consideremos la familia de gérmenes analíticos irreducibles $X_0^{(k)}$ en $\mathbb{R}^3$ definidos por $\mathsf{z}^2\mathsf{y}^{2k} = \mathsf{x}^{2k} + \mathsf{y}^{4k}$ (ver figura 3.8), cuyo perfil está dado por los pares de curvas $z^2 = y^{2k}$. Estos gérmenes no son coherentes en el origen para $k > 1$, puesto que en todos los puntos del eje z hay un par de hojas complejas que se cortan a lo largo de este eje.

La normalización $(X_0^{(k)})^\nu$ de $X_0^{(k)}$ está definida por $\mathsf{z}'^2 = \mathsf{x}'^{2k} + \mathsf{y}'^{2k}$ (ver figura 3.9), donde $\mathsf{z}' = \mathsf{z}$, $\mathsf{y}' = \mathsf{y}$, $\mathsf{x} = \mathsf{x}'\mathsf{y}'$. Si k es par la "parábola" $\mathcal{Z}'$ definida por $\mathsf{y}' = 0$ y $\mathsf{z}' = \mathsf{x}'^k$ se colapsa al semieje z positivo en $X_0^{(k)}$ y, por tanto, $\overline{s}(X_0^{(k)}) = 3$. Por otra parte, cuando k es impar ninguna curva de $(X_0^{(k)})^\nu$ tiene como imagen una única semirrama en $(X_0^{(k)})$ por lo que, cf. teorema 3.2, $\overline{s}(X_0^{(k)}) = 2$.



$\xleftarrow{\pi}$

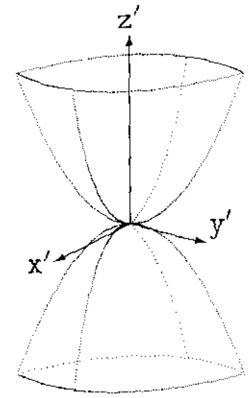


Figura 3.8 *Figura 3.9*

Observación 4.4 Este ejemplo también nos permite afirmar que, en dimensión 2, $\bar{s}$ no es un invariante topológico ya que los gérmenes $X_0^{(k)}$ están inducidos por conjuntos analíticos globales que son homeomorfos y, sin embargo, no todos tienen el mismo índice de estabilidad.

Capítulo 4

Índice de estabilidad de gérmenes analíticos de dimensiones superiores

1 Introducción

Cuando la dimensión de X_0 es $d \geq 3$ el índice de estabilidad viene dado por la expresión $\overline{s}(X_0) = \frac{1}{2}d(d+1)$ que depende exclusivamente de la dimensión de X_0 y coincide con el índice de estabilidad en el caso semialgebraico. Deduciremos en primer lugar esta expresión para gérmenes regulares y posteriormente generalizaremos este resultado a gérmenes de cualquier tipo.

Puesto que $\frac{1}{2}d(d+1) - 1 \leq \overline{s}(X_0) \leq \frac{1}{2}d(d+1)$, cf. [An-Brö-Rz2, Th. VIII.2.12], bastará con encontrar algún básico cerrado que requiera $\frac{1}{2}d(d+1)$ desigualdades. Construiremos un conjunto de este tipo a partir de un subgermen analítico de X_0 del tipo *paraguas de Whitney* cuando $\dim X_0 = 3$ y procederemos por inducción sobre la dimensión.

2 Caso regular

Teorema 2.1 *Para todo $d \geq 3$ se tiene $\overline{s}(\mathbb{R}_0^d) = \frac{1}{2}d(d+1)$*

Demostración: Haremos la demostración por inducción sobre d.

Supongamos, en primer lugar, que $d=3$. Sea $\mathfrak{p}=(\mathtt{y}^2-\mathtt{z}\mathtt{x}^2)\mathbb{R}\{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}$, así que el germen X_0 de los ceros de $\mathfrak{p}$ es el paraguas de Whitney. Entonces, X_0 es un divisor en el sentido de [An-Brö-Rz2, Section V.4] y en él consideramos el germen semianalítico $S\cap X_0=\{\mathtt{x}\geq 0,\mathtt{y}\geq 0,\mathtt{z}\geq 0\}$ que, según hemos visto, requiere tres desigualdades. También, en $\mathrm{Spec}_r(\mathcal{K})\cap S$ podemos construir un abanico F de 4 elementos de la siguiente forma: por el lema de selección de curvas, cf. [An-Brö-Rz2, Theorem VII.4.2], podemos tomar una curva irreducible Y contenida en $S\cap X_0$. En particular, Y no está contenida en el lugar singular de X_0 y $\mathcal{O}(X_0)_{\mathcal{J}(Y)}$ es un anillo de valoración discreta. Definimos F como las cuatro generizaciones en $\mathrm{Spec}_r(\mathcal{K})$ del abanico trivial sobre Y definido por sus dos semirramas. Sea $a_1,a_2\in\mathbb{R}\{\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{z}\}$ tal que $\{a_1>0,a_2>0\}$ contiene un único elemento de F. Entonces, por [An-Brö-Rz2, Prop. V.4.3], se tiene que

$$C=\{\mathtt{y}^2-\mathtt{z}\mathtt{x}^2\geq 0,(\mathtt{y}^2-\mathtt{z}\mathtt{x}^2)^2a_1\geq 0,(\mathtt{y}^2-\mathtt{z}\mathtt{x}^2)^2a_2\geq 0,\mathtt{x}\geq 0,\mathtt{y}\geq 0,\mathtt{z}\geq 0\}$$

no puede escribirse con menos de $1+2+3=6=\frac{1}{2}3\cdot 4$ desigualdades. Por tanto, si $d=3$ se verifica el resultado.

Supongamos ahora que $d>3$ y consideremos un divisor $X_0\subset\mathbb{R}^d_0$ definido como el conjunto de ceros de la primera variable $\mathtt{x}_1$. Entonces X_0 se identifica de forma natural con $\mathbb{R}^{d-1}_0$ y por la hipótesis de inducción hay un germen semianalítico $S\cap X_0$ de dimensión $d-1$ que necesita $m=\frac{1}{2}(d-1)d$ desigualdades, $\{b_1\geq 0,\dots,b_m\geq 0\}$. De nuevo por el lema de selección de curvas podemos encontrar una curva $Y\subset S\cap X_0$. Ahora bien, $\mathcal{O}(X_0)_{\mathcal{J}(Y)}=(\mathcal{O}_{d-1})_{\mathcal{J}(Y)}$ es un anillo local regular de dimensión $d-2$, cf. [Rz2, Prop. II.3.5] y, por tanto, el *pull back* del abanico trivial de Y definido por sus dos semirramas es un abanico $F\subset\mathrm{Spec}_r(\mathcal{K})\cap S$ con 2^{d-1} elementos, cf. [An-Rz1, Ch. VI], donde ahora $\mathcal{K}$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{R}\{\mathtt{x}_2,\dots,\mathtt{x}_d\}$. Sean $a_1,\dots,a_{d-1}\in\mathbb{R}\{\mathtt{x}_1,\dots,\mathtt{x}_d\}$ tales *que aíslan un único elemento de* F, es decir, $\#\{a_1>0,\dots,a_{d-1}>0\}\cap F=1$. Entonces se puede asegurar, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. V.4.3], que el germen semianalítico

$$C=\{\mathtt{x}_1\geq 0,\mathtt{x}_1^2a_1\geq 0,\dots,\mathtt{x}_1^2a_{d-1}\geq 0,b_1\geq 0,\dots,b_m\geq 0\}$$

no puede escribirse con menos de $1+(d-1)+m=\frac{1}{2}d(d+1)$ desigualdades, lo que termina la demostración.

$\square$

3 Caso general

Teorema 3.1 *Sea $X_0 \subset \mathbb{R}^n_0$ un germen analítico de dimensión $d \geq 3$. Entonces $\overline{s}(X_0) = \frac{1}{2}d(d+1)$.*

Demostración: Basta encontrar un germen semianalítico básico cerrado $S \subset X_0$ que requiera al menos $\frac{1}{2}d(d+1)$ desigualdades. Empezaremos por el caso $d = 3$ y proseguiremos después por inducción.

Caso $d = 3$:
Denotaremos por X un conjunto analítico que induce el germen X_0. Por el lema de selección de curvas, cf. [An-Brö-Rz2, Theorem VII.4.2], existirá una curva

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \operatorname{Reg}(X)$$

que, salvo un cambio de coordenadas, será de la forma

$$\gamma(t) = (t^{r_1}, t^{r_2}u_2(t), \ldots, t^{r_n}u_{r_n}(t))$$

donde las u_i son unidades (o idénticamente cero) y la parametrización es primitiva, es decir, el máximo común divisor de los exponentes es 1. Consideremos la aplicación analítica:

$$\pi : (\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n) \quad : \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^{r_1}, x_2, \ldots, x_n)$$

Será $\gamma = \pi(\Gamma)$ donde

$$\Gamma(t) = (t, t^{r_2}u_2(t), \ldots, t^{r_n}u_r(t))$$

Además, puesto que π define un recubrimiento analítico con lugar de ramificacion $x_1 = 0$, para cualquier $t \neq 0$, define un isomorfismo analítico de un entorno de $\Gamma(t)$ en un entorno de $\gamma(t)$. En particular, si $X' = \pi^{-1}(X)$, entonces X' es regular en $\Gamma(t)$, y el límite de los espacios tangentes de X' a lo largo de $\Gamma(t)$ cuando $t \to 0$ está bien definido. Sea T este límite, que será un subespacio lineal tridimensional de $\mathbb{R}^n$. Sean $v_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, v_2, v_3 una base de T. Haciendo un cambio de coordenadas analítico, podemos suponer que Γ es el eje x_1 y que $v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

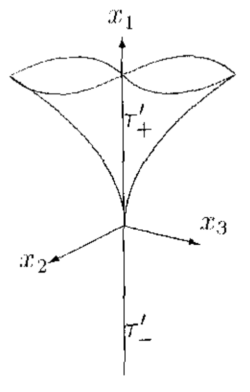


Figura 4.1

Consideremos ahora la hipersuperficie $H \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x_3^2 x_1^3 = x_2^2 + x_3^4$. (ver figura 4.1).

Se tiene que $\Gamma \subset H$, y de hecho $\Gamma \times \mathbb{R}^{n-3} = \{x_2 = x_3 = 0\} = \operatorname{Sing} H$. Además, para cada $x_1 > 0$, H se descompone en $(x_1, 0, \ldots, 0)$ como la unión de dos hojas $n-1$-dimensionales regulares en ese punto, con espacios tangentes $x_3 \sqrt[2]{x_1^3} \pm x_2 = 0$, que convergen a $x_2 = 0$ para $t \to 0$. En particular, puesto que $T \not\subset \{x_2 = 0\}$ se sigue que para todo $t > 0$ suficientemente pequeño, las dos hojas de H intersecan transversalmente X' a lo largo de $\Gamma(t)$. Por otra parte, para $t < 0$, H se reduce al espacio lineal $(n-2)$-dimensional $x_2 = x_3 = 0$, que por nuestra elección de v_2 y v_3 también interseca T transversalmente.

Sea $Y' = H \cap X'$. Por construcción, para cada $t > 0$, Y' tiene dimensión 2 en $\Gamma(t)$ (de hecho, es la intersección de dos hojas a lo largo de estos puntos) mientras que para $t < 0$, Y' se reduce a la curva Γ, y por tanto tiene dimensión 1 en estos puntos. En otras palabras, Y' es una superficie en X' tipo paraguas de Whitney. Denotemos por $\widetilde{\tau'_+}$ (resp. $\widetilde{\tau'_-}$) el punto de $\operatorname{Spec}_r(\mathcal{O}(X'_0))$ con soporte Γ y $t > 0$ (resp. $t < 0$). Como $\widetilde{\tau'_-}$ no tiene generizaciones en Y'_0 se sigue que $\widetilde{\tau'_+}$ tiene cuatro generizaciones en Y'_0 y forman un abanico $F' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4\}$. Por lo tanto, $\overline{s}(Y'_0) = 3$.

Ahora, sea Y_0 la clausura algebraica de $\pi(Y'_0)$, o de forma algebraica, si $\mathfrak{p}'$ es el ideal de Y'_0 en $\mathcal{O}(X'_0) = \mathcal{O}(X_0)[z]/(z^{r_1} - x_1)$, entonces Y_0 es el conjunto de ceros de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap \mathcal{O}(X_0)$. Obviamente, π transforma τ'_+ y τ'_- en las dos semirramas τ_+ y τ_- de γ. Sea F la imagen del abanico F' por π. Entonces F

es un abanico de 4 elementos $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. De hecho, basta ver que estos cuatro órdenes son diferentes. Ahora bien, independientemente de la paridad de r_1, π define un homeomorfismo local de un entorno de τ'_+ en un entorno de τ_+, puesto que están en el conjunto $x_1 > 0$, de donde nuestra afirmación sigue inmediatamente. Por tanto, $\overline{s}(Y_0) = 3$.

Sea ahora $A \subset Y_0$ un básico cerrado que requiere exactamente 3 desigualdades,

$$A = \{b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, b_3 \geq 0\},$$

$b_i \in \mathcal{O}(X_0)$. De nuevo, por el lema de selección de curvas, podemos tomar una curva irreducible Z contenida en $A \cap \mathrm{Reg}(Y_0)$. En particular, $\mathcal{O}(Y_0)_{\mathcal{J}(Z)}$ es un anillo de valoración discreta. Definimos F como las cuatro generizaciones en $\mathrm{Spec}_r \mathcal{K}(Y_0)$ (siendo $\mathcal{K}(Y_0)$ el cuerpo de fracciones del dominio $\mathcal{O}(Y_0)$) del abanico trivial sobre Z definido por sus dos semirramas. Sean $a_1, a_2 \in \mathcal{O}(X_0)$ tales que $\{a_1 > 0, a_2 > 0\}$ contiene uno solo de los elementos de F. Para terminar, como Y_0 no está contenido en el lugar singular de X_0, se tiene que $\mathcal{O}(X_0)_{\mathcal{J}(Y_0)}$ también es un anillo de valoración discreta. Sea v un generador de su ideal maximal. Entonces, por [An-Brö-Rz2, Prop. V.4.3], tendremos que

$$S = \{v \geq 0, v^2 a_1 \geq 0, v^2 a_2 \geq 0, b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, b_3 \geq 0\}$$

no puede ser escrito con menos de $1 + 2 + 3 = 6 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4$ desigualdades. Así queda demostrado el resultado para $d = 3$.

Caso general:

Supongamos que $\dim X_0 = d$ y tomemos cualquier divisor Y_0 no contenido en el lugar singular de X_0. Por ser Y_0 un divisor será $\dim Y_0 = d - 1$ y por la hipótesis de inducción existe un germen semianalítico básico cerrado $A \subset Y_0$ que requiere $\overline{s} = \frac{1}{2}(d-1)d$ desigualdades,

$$A = \{b_1 \geq 0, \ldots, b_{\overline{s}} \geq 0\}.$$

Por el lema de selección de curvas, podemos encontrar una curva irreducible Z contenida en $A \cap \mathrm{Reg}(Y_0)$. En particular $\mathcal{O}(Y_0)_{\mathcal{J}(Z)}$ es un anillo local regular de dimensión $d - 2$, cf. [Rz2, Prop. II.4.3]. Definamos F como el *pull-back* en $\mathrm{Spec}_r \mathcal{K}(Y_0)$, vía cualquier anillo de valoración discreta de rango $d - 2$ de $\mathcal{K}(Y_0)$ que domine $\mathcal{O}(Y_0)_{\mathcal{J}(Z)}$, del abanico trivial sobre Z definido por sus dos semirramas. En particular $\# F = 2^{d-1}$ y $F \subset A$. Sean $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathcal{O}(X_0)$ tales que $\{a_1 > 0, \ldots, a_{d-1} > 0\}$ contiene un único elemento de F. Por último, como Y_0 no está contenido en el lugar singular X_0, se sigue que $\mathcal{O}(X_0)_{\mathcal{J}(Y_0)}$ también es un anillo de valoración discreta. Sea v un generador de su ideal maximal. Entonces, de [An-Brö-Rz2, Prop. V.4.3] se sigue que

$$S = \{v \geq 0, v^2 a_1 \geq 0, \ldots, v^2 a_{d-1} \geq 0, b_1 \geq 0, \ldots, b_s > 0\}$$

no puede escribirse con menos de $\frac{1}{2}d(d+1)$ desigualdades, lo que concluye la demostración.

□

Capítulo 5

Invariante t en gérmenes analíticos de dimensión 2

1 Introducción

En este capítulo haremos un estudio del invariante t, cf. capítulo 1, similar al que se ha hecho con el índice de estabilidad $\overline{s}$. En concreto, demostraremos que, en dimensión 2, estos dos invariantes coinciden, es decir, si X_0 es un germen analítico de dimensión 2 entonces $t(X_0) = \overline{s}(X_0)$

En el resto del capítulo X_0 denotará un germen analítico de dimensión 2. Es conocido, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. V.2.16, Th. VIII.2.12], que $\overline{t}(X_0) = 2$ y $2 \leq t(X_0) \leq 3$.

En primer lugar, utilizando el corolario 3.3.5 es fácil ver que:

Proposición 1.1 *Si $\overline{s}(X_0) = 3$, entonces $t(X_0) = 3$.*

Demostración: Como $\overline{s} = 3$, hay un abanico F de 4 elementos que se especializa en un orden $\widetilde{\tau} \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ de dimensión 1. Sea τ la semirrama correspondiente a $\widetilde{\tau}$ y sea $\widetilde{\tau}^{\mathbb{Z}} = \tau \cup \tau'$. Consideremos un germen semianalítico abierto C tal que $\tau' \subset C$, $\tau \not\subset C$ y $\#(\widetilde{C} \cap F) = 3$. Por ejemplo, si $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ y $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{O}(X_0)$ son tales que $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \{f_1 < 0\}$, $\{\alpha_3, \alpha_4\} \subset \{f_1 > 0\}$, $\alpha_1 \in \{f_2 < 0\}$, $\alpha_2 \in \{f_2 > 0\}$, $\widetilde{\tau} \in \{f_3 < 0\}$, $\widetilde{\tau}' \in \{f_3 > 0\}$, entonces podemos tomar $C = \{f_1 > 0\} \cup \{f_2 > 0\} \cup \{f_3 > 0\}$.

Supongamos ahora que $C = B_1 \cup B_2$, siendo B_1 y B_2 básicos abiertos. Como $\tau' \subset C$ podemos suponer que $\tau' \subset B_1$. B_1 no puede ser adherente a τ ya que, en ese caso, cortaría su frontera de Zariski y no sería básico por la proposición 1.2.9. Por tanto, los 3 elementos de F incluidos en $\widetilde{C}$ tendrían que pertenecer a $\widetilde{B}_2$, pero eso no puede ocurrir ya que B_2 es básico. Así pues, C no se puede poner como unión de dos básicos y, por tanto, $t(X_0) = 3$.

□

Ejemplo 1.2 Sea X_0 el *paraguas de Whitney* (ver ejemplos 3.1.1 y 3.2.5). Como $\overline{s}(X_0) = 3$ la proposición anterior nos asegura que $t(X_0) = 3$. Además, siguiendo la demostración puede verse que el germen semianalítico $C = \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \cup \{z < 0\}$ no se puede escribir como unión de 2 básicos abiertos. En este caso, τ y τ' son, respectivamente, la parte positiva y negativa del eje z. Siguiendo la notación del ejemplo 3.1.1, $\widetilde{C} \cap F = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, $\tau' \subset C$ y $\tau \not\subset C$. Curiosamente, en el ejemplo 3.1.1 se vio que el complementario de C en X_0, el básico cerrado $B = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, no puede ser descrito con sólo 2 desigualdades.

El recíproco de la proposición 1.1, es decir que $\overline{s}(X_0) = 2$ implica $t(X_0) = 2$ no es tan inmediato. La idea de la demostración es la siguiente: si $C \subset X_0$ es un germen semianalítico abierto, entonces $\overline{C}$ es un germen semianalítico cerrado [An-Brö-Rz2, Cor. VIII.3.2] y, puesto que $\overline{t}(X_0) = 2$, se podrá escribir $\overline{C} = C_1 \cup C_2$ siendo C_1 y C_2 básicos cerrados. Si $C_i = \{f_i \geq 0, g_i \geq 0\}$ entonces definimos $B_i = \{f_i > 0, g_i > 0\}$. De esta forma, C y $B_1 \cup B_2$ son genéricamente iguales ya que se diferencian en un conjunto finito de semirramas. Por tanto, si queremos escribir C como una unión de 2 básicos abiertos necesitaremos realizar dos operaciones:

1) eliminar semirramas, es decir, si $\gamma \not\subset C$ pero $\gamma \subset B_1 \cup B_2$, encontrar B_1' y B_2', básicos abiertos, tales que $B_1' \cup B_2' = (B_1 \cup B_2) \setminus \overline{\gamma}^z$.

2) añadir semirramas, es decir, si $\gamma \subset C$, encontrar B_1' y B_2', básicos abiertos, tales que $B_1' \cup B_2' = B_1 \cup B_2 \cup \gamma$.

Al añadir semirramas hay que tener en cuenta que, al ser $B_1' \cup B_2'$ abierto, se tendrá que $\gamma \subset \mathrm{Int}(\overline{B_1 \cup B_2})$.

El procedimiento que seguiremos será, en primer lugar, eliminar las semirramas que haya en $(B_1 \cup B_2) \setminus C$. Observemos que en este proceso podemos quitar más semirramas de las necesarias ya que eliminamos $\overline{\gamma}^Z$ y no sólo γ. De esta forma encontraremos básicos abiertos $B_1', B_2' \subset C$ tales que $C \setminus (B_1' \cup B_2') = \cup_{i=1}^r \gamma_i$. Por último, añadiremos estas semirramas para obtener $C = B_1'' \cup B_2''$.

La hipótesis $\overline{s}(X_0) = 2$ será necesaria para añadir semirramas, mientras que eliminarlas siempre es posible:

Proposición 1.3 *Si $\gamma \not\subset C$ pero $\gamma \subset B_1 \cup B_2$, entonces existen B_1' y B_2', básicos abiertos, tales que $B_1' \cup B_2' = (B_1 \cup B_2) \setminus \overline{\gamma}^Z$.*

Demostración: Podemos suponer $B_1 = \{f_1 > 0, g_1 > 0\}$ y $B_2 = \{f_2 > 0, g_2 > 0\}$. Sea $r \in \mathcal{O}(X)$ una ecuación positiva de $\overline{\gamma}^Z$. Entonces $B_1' = \{f_1 r > 0, g_1 > 0\}$ y $B_2' = \{f_2 r > 0, g_2 > 0\}$ verifican la condición. □

Seguiremos un proceso similar al del índice de estabilidad $\overline{s}$. En primer lugar, demostraremos que $t = 2$ para los gérmenes normales y a partir de aquí, utilizando la normalización, veremos que si $\overline{s} = 2$, entonces también $t = 2$. Pero antes, veamos una serie de resultados previos que no exigen ninguna hipótesis de normalidad en X_0.

Lema 1.4 *Si $B \subset X_0$ es un básico abierto y γ una semirrama que verifica:*

i) $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B}$

ii) $\overline{\gamma}^Z \cap \overline{B} = \gamma$

entonces $B' = B \cup \gamma$ es un básico abierto.

Demostración: Puesto que B es un semianalítico abierto, $\mathrm{Int}\overline{B}$ y B se diferencian en un conjunto finito de semirramas, $\mathrm{Int}\overline{B} = B \cup \gamma \cup (\cup_1^r \gamma_i)$. Como $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B}$, podemos tomar un entorno V de γ tal que $V \subset \mathrm{Int}\overline{B}$ y $V \cap (\cup_1^r \gamma_i) = \emptyset$, es decir, $V \subset B \cup \gamma$ y, por tanto, $B' = B \cup \gamma$ es abierto.

Además, por la condición ii) B' no corta su frontera de Zariski y por ser genéricamente igual a B, verifica las condiciones de la proposición 1.2.9. Así pues, B' es un básico abierto. $\square$

De igual forma, puede demostrarse que si $\overline{\gamma}^{z} \subset \mathrm{Int}\overline{B}$ entonces $B' = B \cup \overline{\gamma}^{z}$ es un básico abierto.

Los siguientes lemas nos servirán para manipular semirramas. El siguiente nos permite "quitar" a un básico un entorno de una semirrama tan pequeño como queramos (tomando S adecuadamente) de forma que siga siendo básico.

Lema 1.5 *Sean $B \subset X_0$ un básico abierto, γ una semirrama tal que $\gamma \subset \overline{B}$ y S un semianalítico cerrado tal que $\gamma \not\subset S$. Entonces, existe un básico abierto $B' \subset B$ tal que $\gamma \not\subset \overline{B'}$ y $B' \cap S = B \cap S$.*

Demostración: Existe, cf. proposición 1.3.1, $h \in \mathcal{O}(X_0)$ que separa γ de S, es decir, $\gamma \subset \{h < 0\}$ y $S \subset \{h > 0\}$. De esta forma, $B' = B \cap \{h > 0\}$ verifica las condiciones. $\square$

El siguiente lema nos permitirá añadir un entorno de un germen de curva irreducible a un conjunto básico.

Lema 1.6 *Sean $B \subset X_0$ un básico abierto, γ una semirrama y S un germen semianalítico cerrado tal que $\overline{\gamma}^{z} \cap S = \{0\}$. Entonces existe un básico abierto B' que verifica: $B \cup \overline{\gamma}^{z} \subset B'$ y $B' \cap S = B \cap S$.*

Demostración: Sea $B = \{f > 0, g > 0\}$. Multiplicando f y g por una ecuación positiva de $\overline{\gamma}^{z}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f|_{\overline{\gamma}^{z}} = g|_{\overline{\gamma}^{z}} = 0$. Cojamos h tal que $B \cup \overline{\gamma}^{z} \subset \{h > 0\}$ (por ejemplo $h = 1$), y apliquemos la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz a f, h y S por una parte y a g, h y S por otra. Entonces $B' = \{pf + qh > 0,\ p'g + q'h > 0\}$ es el básico que buscamos. De hecho, $B \cap S = B' \cap S$ por construcción. Además, $\{q = 0\} \subset \overline{\{f = 0\} \cap S}^{z}$ y puesto que $\overline{\gamma}^{z} \cap S = \{0\}$ se verifica que $q|_{\overline{\gamma}^{z}} > 0$ y, por tanto, $pf + qh|_{\overline{\gamma}^{z}} > 0$. $\square$

El siguiente lema es una variante del anterior.

Lema 1.7 *Sean $B \subset X_0$ básico abierto, γ una semirrama y S un germen semianalítico cerrado tal que $\gamma \cap S = \{0\}$. Si $\overline{\gamma}^z = \gamma \cup \gamma'$ y $\gamma' \not\subset \overline{B}$ entonces existe un básico abierto B' tal que $B \cup \gamma \subset B'$ y $B' \cap S = B \cap S$.*

Demostración: Sea $B = \{f > 0, g > 0\}$ y supongamos que f y g se anulan en $\overline{\gamma}^z$ (multiplicando, como en el lema anterior por una ecuación positiva de $\overline{\gamma}^z$ si es necesario). Definamos $\Gamma = \{fg = 0\}$ y tomemos $h \in \mathcal{O}(X_0)$ tal que $h|_\gamma < 0$ y $h|_{S \cup \gamma'} > 0$. Sean U_γ, $U_{\gamma'}$ entornos semianalíticos abiertos conexos de γ y γ', respectivamente, tales que $\overline{U_\gamma} \cap [S \cup \Gamma \cup \{h = 0\}] \subset \gamma$ y $\overline{U_{\gamma'}} \cap [\Gamma \cup \{h = 0\}] \subset \gamma'$.

Apliquemos Hörmander-Lojasiewicz a f, $-h$, $[X_0 \setminus (U_\gamma \cup U_{\gamma'})]$ y sea $f' = pf - qh$. Por construcción, $f'|_\gamma > 0$, $\operatorname{sign}(f') = \operatorname{sign}(f)$ en $[X_0 \setminus (U_\gamma \cup U_{\gamma'})]$ y también tienen el mismo signo en $S \setminus U_{\gamma'}$ (ya que $S \subset X_0 \setminus U_\gamma$). Lo mismo se puede hacer con g obteniendo $g' = p'g - q'h$ tal que $g'|_\gamma > 0$ y $\operatorname{sign}(g') = \operatorname{sign}(g)$ en $S \setminus U_{\gamma'}$. Así tendremos que $\gamma \subset \{f' > 0, g' > 0\}$ y $\{f' > 0, g' > 0\} \cap (S \setminus U_{\gamma'}) = B \cap (S \setminus U_{\gamma'})$. Como $U_{\gamma'} \cap B = \emptyset$ y $h|_{U_{\gamma'}} > 0$ se tiene que $\{f' > 0, g' > 0\} \cap U_{\gamma'} = B \cap U_{\gamma'} = \emptyset$ ya que si nos restringimos a $U_{\gamma'}$ se tiene que $h > 0$ y, por tanto, $f' > 0$, $g' > 0$ implica $f > 0$, $g > 0$. Ahora, $\gamma \subset \{f' > 0, g' > 0\}$, $\{f' > 0, g' > 0\} \cap S = B \cap S$ y $\gamma' \not\subset \overline{\{f' > 0, g' > 0\}}$ (ya que $f'|_{\gamma'} < 0$, $g'|_{\gamma'} < 0$), así que podemos tomar $B' = \{f' > 0, g' > 0\}$.

□

Multiplicando por una ecuación positiva de γ podemos obtener B' tal que $\gamma \subset \operatorname{Int}\overline{B'}$ pero $\gamma \not\subset B'$. La misma modificación se puede hacer al lema 1.6 obteniéndose B' tal que $\overline{\gamma}^z \subset \operatorname{Int}\overline{B'}$ pero $\gamma, \gamma' \not\subset B'$. Veamos con un ejemplo cómo podemos utilizar estos lemas.

Ejemplo 1.8 Sean $X_0 = \mathbb{R}_0^2$ y $B = \{2x - y > 0, y > 0\}$ (ver figura 5.1). El lema 1.5 nos permite quitar un entorno de γ_1 (el eje x positivo) de B. Por otra parte, por el lema 1.7 podemos añadir un entorno de γ_2 (el eje-y positivo) a B. Precisando,

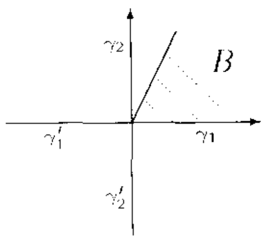


Figura 5.1

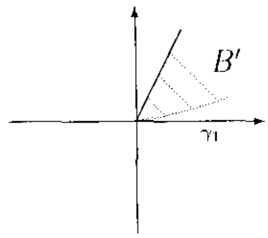


Figura 5.2

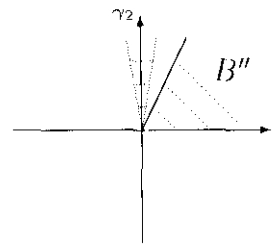


Figura 5.3

a) Si $h = x^3 - y^2$ entonces $B' = B \cap \{h > 0\}$ (ver figura 5.2) no es adherente a γ_1 y $B' \cap S = B \cap S$ (para cualquier semianalítico cerrado S contenido en $\{h \leq 0\}$). En caso de que S fuese mayor tendríamos que tomar un h cuyo conjunto de ceros fuese más próximo a γ_1.

b) Siguiendo la demostración del lema 1.7 se puede escribir $B = \{(2x - y)x^2 > 0, yx^2 > 0\}$ y entonces tomando $f' = (2x - y)x^2 - (2x - y)^2(x^2 - y^3)$, $g' = yx^2 - (x^2 - y^3)y^2$ añadimos un entorno de γ_2 a B obteniendo $B'' = \{f' > 0, g' > 0\}$ (ver figura 5.3). Al igual que antes si tomamos un conjunto S mayor entonces el entorno de γ_2 añadido sería más pequeño.

2 Invariante t en gérmenes normales

En esta sección vamos a suponer que X_0 es un germen analítico normal de dimensión 2.

Lema 2.1 *Sea $B \subset X_0$ un germen básico abierto y sea $\gamma \subset \mathrm{Bd}(\overline{B})$. Se puede escribir $B = \{f > 0, g > 0\}$ de forma que sólo una de las dos funciones, f o g, cambie de signo en γ.*

Demostración: Sea $B = \{f_1 > 0, f_2 > 0\}$, y supongamos que tanto f_1 como f_2 cambian de signo en γ. Entonces $f_1 f_2$ no cambia de signo en γ y $B = \{f_1 > 0, f_2 > 0\} = \{f_1 f_2 > 0, f_2 > 0\}$, lo que demuestra el lema.

□

La siguiente proposición aparece dividida en dos partes. La primera nos permite añadir una semirrama γ a la unión de dos básicos abiertos $B_1 \cup B_2$ y es la única estrictamente necesaria para demostrar que $t(X_0) = 2$ si X_0 es normal. La segunda parte permite "elegir" a cuál de los dos básicos se añade la semirrama y será utilizada en la próxima sección.

Proposición 2.2 *Sean B_1, B_2 gérmenes básicos abiertos y γ una semirrama. Si X_0 es normal y $\gamma \subset \mathrm{Int}(\overline{B_1 \cup B_2})$ entonces existen dos básicos abiertos B_1' y B_2' tales que $B_1 \cup B_2 \cup \gamma = B_1' \cup B_2'$.*

Además, si S es un germen semianalítico cerrado tal que $\overline{\gamma}^{z} \cap S = \{0\}$ entonces podemos escoger B_1' y B_2' tales que $\gamma \subset B_1'$, $\gamma' \not\subset \overline{B_1'}$ (siendo $\overline{\gamma}^{z} = \gamma \cup \gamma'$) y $B_i' \cap S = B_i \cap S$, $i = 1, 2$.

Demostración: Sean $B_1 = \{f_1 > 0, g_1 > 0\}$, $B_2 = \{f_2 > 0, g_2 > 0\}$ y $\Gamma = \{f_1 g_1 f_2 g_2 = 0\}$. Por el lema 2.1 podemos suponer que f_1 y f_2 no cambian de signo en γ. Tomemos U_γ, $U_{\gamma'}$ entornos semianalíticos abiertos conexos de γ y γ', respectivamente, tales que $\overline{U_\gamma} \cap [S \cup \Gamma \cup \{h = 0\}] \subset \gamma$ y $\overline{U_{\gamma'}} \cap [S \cup \Gamma \cup \{h = 0\}] \subset \gamma'$. Vamos a distinguir dos casos:

1. $\gamma' \subset \mathrm{Int}\overline{B_1 \cup B_2}$. Como $\overline{\gamma}^{z} \subset \overline{B_1 \cup B_2}$ se tiene que $\overline{U_\gamma} \subset (B_1 \cup B_2 \cup \gamma)$ y $\overline{U_{\gamma'}} \subset (B_1 \cup B_2 \cup \gamma')$. Aplicando el lema 1.6 a B_1, γ y $[X_0 \setminus (U_\gamma \cup U_{\gamma'})]$ se puede suponer $\overline{\gamma}^{z} \subset \mathrm{Int}\overline{B_1}$. Igualmente, podemos suponer $\overline{\gamma}^{z} \subset \mathrm{Int}\overline{B_2}$.

   En esta situación aplicamos el lema 1.5 a B_1, γ', $[X_0 \setminus U_{\gamma'}]$ por un lado y a B_2, γ, $[X_0 \setminus U_\gamma]$ por otro. De esta forma, encontramos B_1^1 y B_2^1 tales que $\gamma' \not\subset \overline{B_1^1}$, $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B_1^1}$, $\gamma' \subset \mathrm{Int}\overline{B_2^1}$, $\gamma \not\subset \overline{B_2^1}$ y podemos tomar $B_1' = B_1^1 \cup \gamma$, cf. lema 1.4, y $B_2' = B_2$ (o $B_2' = B_2^1 \cup \gamma'$ en caso de que $\gamma' \subset B_1 \cup B_2$). Por construcción $(U_\gamma \cup U_{\gamma'}) \cap S = \emptyset$, por lo que $B_i' \cap S = B_i \cap S$, obteniéndose el resultado.

2. $\gamma' \not\subset \mathrm{Int}\overline{B_1 \cup B_2}$. Si $\gamma' \not\subset \overline{B_1}$ entonces aplicando el lema 1.7 a B_1, γ, $[X_0 \setminus U_\gamma]$ se tiene el resultado. Así pues, supongamos que $\gamma' \subset \overline{B_1}$ y más precisamente que $\gamma' \subset \mathrm{Bd}\overline{B_1}$. Aplicando el lema 1.5 a B_2, γ' y $[X_0 \setminus U_{\gamma'}]$ puede suponerse que $\gamma' \not\subset \overline{B_2}$. Ahora, aplicamos el lema 1.7 a B_2, γ y $[X_0 \setminus U_\gamma]$ para añadir un entorno de γ a B_2. Por último, quitamos un entorno de γ a B_1 mediante el lema 1.5.

Así que podemos reducirnos a la situación siguiente (ver figura 5.4): $\gamma' \subset \mathrm{Bd}\overline{B_1}$, $\gamma \not\subset \overline{B_1}$, $\gamma' \not\subset \overline{B_2}$ y $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B_2}$. También, si $B_1 = \{f_1 > 0,\, g_1 > 0\}$ y $B_2 = \{f_2 > 0,\, g_2 > 0\}$, puede suponerse que f_2 y g_2 no cambian de signo en $\overline{\gamma}^Z$ (puesto que $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B_2}$), $f_2|_{U_{\gamma'}} \leq 0$ (ya que $\gamma' \not\subset \overline{B_2}$), $g_2|_{U_{\gamma'}} \geq 0$ (multiplicando, si es necesario, g_2 por una función negativa en γ' pero positiva en $\{f_2 > 0\}$) y f_1 no cambia de signo en $\overline{\gamma'}^Z$ (por el lema 2.1) pero g_1 sí (por ser $\gamma' \subset \mathrm{Bd}\overline{B_1}$).

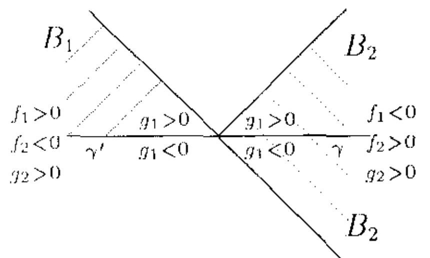


Figura 5.4

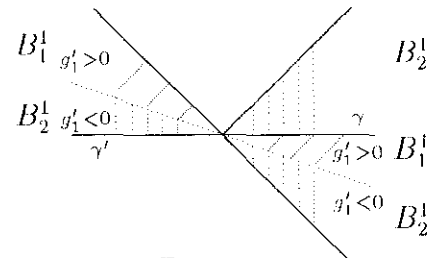


Figura 5.5

Ahora, sea $h \in \mathcal{O}(X_0)$ tal que $h|_{\gamma'} < 0$ y $h|_\gamma > 0$. Tomando U_γ, $U_{\gamma'}$ como antes pero redefiniendo Γ como $\{f_1g_1f_2g_2h = 0\}$ aplicamos Hörmander-Lojasiewicz a g_1, h, $T = [X_0 \setminus (U_\gamma \cup U_{\gamma'})]$ y sea $g_1' = pg_1 + qh$. Si definimos $B_1^1 = \{f_1g_1g_1' > 0,\, g_1' > 0\}$ y $B_2^1 = \{f_2g_1g_1' > 0,\, g_2 > 0\}$ (ver figura 5.5) entonces se puede comprobar que $B_1 \cup B_2$ y $B_1^1 \cup B_2^1$ son genéricamente iguales y, de forma más precisa, $(B_1 \cup B_2) \cap \{g_1g_1' \neq 0\} = (B_1^1 \cup B_2^1) \cap \{g_1g_1' \neq 0\}$. Tenemos que $B_1^1 \cap T = B_1 \cap T$ y $B_2 \cap T = (B_2^1 \cap T) \cup (\{g_1 = 0\} \cap B_2 \cap T)$ (g_1 y g_1' tienen el mismo signo en T) por lo que podemos haber perdido algunas semirramas, pero $B_2^2 = B_2^1 \cup (\{g_1 = 0\} \cap B_2 \cap T)$ es un básico abierto por el lema 1.4. Ahora, se tiene que $\gamma' \not\subset \overline{B_1^1}$ así que aplicando el lema 1.7 a B_1^1, γ y $X_0 \setminus U_\gamma^1$ (tomando como U_γ^1 un entorno semianalítico abierto conexo de γ tal que $\overline{U_\gamma^1} \cap [S \cup \Gamma \cup \{g_1' = 0\}] \subset \gamma$) obtenemos B_1^2 básico abierto tal que $\gamma \subset B_1^2$ y $\gamma' \not\subset \overline{B_1^2}$.

Solamente queda ver qué pasa con las semirramas perdidas en $\{g_1g_1' = 0\} \cap (U_\gamma \cup U_{\gamma'})$. Tenemos que $(B_1 \cup B_2) \setminus (B_1^2 \cup B_2^2) \subset \{g_1g_1' = 0\}$, es decir, que se diferencian en un conjunto finito de semirramas, $\cup_1^r \gamma_i \subset U_\gamma \cup U_{\gamma'}$. Pero, por construcción, si $\overline{\gamma_i}^Z = \gamma_i \cup \gamma_i'$ entonces se tiene que $\gamma_i' \subset \mathrm{Int}\,\overline{B_1^2 \cup B_2^2}$ (de hecho, $\gamma_i' \subset U_\gamma \cup U_{\gamma'}$) y, por tanto, se pueden añadir como en el caso 1.

□

Finalmente, las proposiciones 1.3 y 2.2, nos permiten enunciar el:

Corolario 2.3 *Si X_0 es normal entonces $t(X_0) = 2$.*

Observación 2.4 La condición de normalidad solamente se ha utilizado en el lema 2.1. Por tanto, se puede afirmar que si X_0 verifica la *propiedad del cambio de signo*, cf. observación 2.2.2, entonces $t(X_0) = 2$.

Veamos en el siguiente ejemplo cuál es el proceso seguido:

Ejemplo 2.5 Sea $X_0 = \mathbb{R}_0^2$ y $C = (\{-x > 0\} \cup \{-y > 0\}) \setminus \gamma'$ donde γ' es la semirrama $\{x + y = 0,\ y > 0\}$ (ver figura 5.6). $\overline{C}$ es un germen semianalítico cerrado y por lo tanto se puede escribir como unión de dos básicos cerrados, por ejemplo, $\overline{C} = \{-xy \geq 0\} \cup \{-x \geq 0,\ -y \geq 0\} = C_1 \cup C_2$.

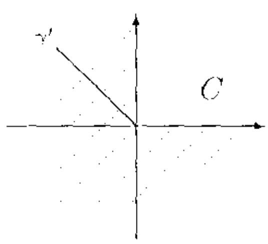


Figura 5.6

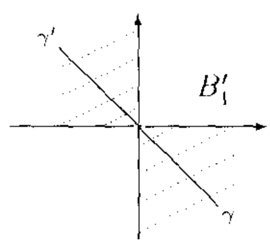


Figura 5.8

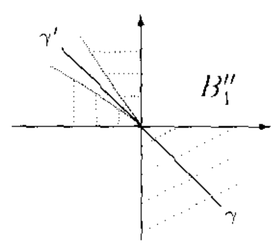


Figura 5.10

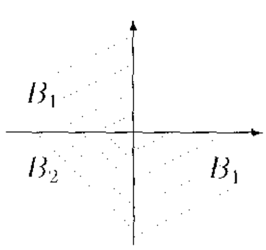


Figura 5.7

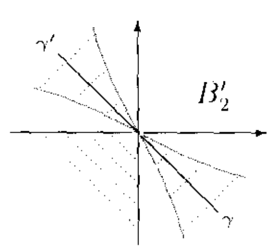


Figura 5.9

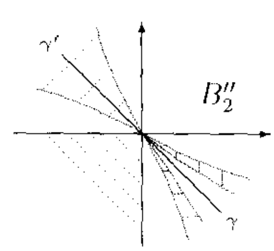


Figura 5.11

Si tomamos $B_1 = \{-xy > 0\}$ y $B_2 = \{-x > 0, -y > 0\}$, entonces $B_1 \cup B_2$ y C son genéricamente iguales. De hecho, $(B_1 \cup B_2) \setminus C = \gamma'$ así que debemos eliminar esta semirrama γ' de of $B_1 \cup B_2$ para conseguir escribir C como una unión de dos básicos abiertos. En primer lugar, multiplicamos por $(y+x)^2$ para obtener $B_1' = \{-(y+x)^2 xy > 0\}$ (ver figura 5.8). Ahora, debemos añadir γ.

Siguiendo la proposición 2.2 añadimos un entorno de $\overline{\gamma}^z$ a B_2 tomando $B_2' = \{-xh_1 > 0, -yh_2 > 0\}$, donde $h_1 = (x-y)^2 - (x+y)^3$ y $h_2 = (x-y)^2 + (x+y)^3$ (ver figura 5.9). Después, quitamos un entorno de γ' a B_1' (este entorno deberá estar contenido en el que se ha añadido previamente a B_2) obteniendo $B_1'' = \{-(y+x)^2 xyh_3 > 0\}$ con $h_3 = (x-y)^2 + (x+y)^5$ (ver figura 5.10) y quitamos también un entorno de γ a B_2' obteniendo $B_2'' = \{-xh_1h_4 > 0, -yh_2h_4 > 0\}$ siendo $h_4 = (x-y)^2 - (x+y)^5$ (ver figura 5.11). De esta forma, $B_1'' \cup \gamma = B_1'''$ es un básico abierto (se puede escribir como $\{-xyh_3 > 0\}$) y, por tanto, $C = B_1''' \cup B_2''$ es la descomposición buscada.

3 Invariante t en el caso general

Sea ahora X_0 un germen analítico irreducible de dimensión dos tal que $\overline{s}(X_0) = 2$ y sea $\pi : X_0^\nu \to X_0$ su normalización. Si $C \subset X_0$ es un germen semianalítico abierto, definimos $C^\nu = \pi^{-1}(C) \subset X_0^\nu$. Tenemos que $C^\nu = B_1^\nu \cup B_2^\nu$ (ya que $t(X_0^\nu) = 2$ por el corolario anterior) y cada B_i^ν se puede escribir como $B_i^\nu = \{f_i' > 0, g_i' > 0\}$. Ahora, si $f_i' = \frac{f_i^*}{h^*} = \frac{f_i \circ \pi}{h \circ \pi} = \pi^*(\frac{f_i}{h})$, $g_i' = \pi^*(\frac{g_i}{h})$, definimos $B_i = \{f_i h > 0, g_i h > 0\}$. De esta forma, C es genéricamente igual a $B_1 \cup B_2$. Si podemos añadir a $B_1 \cup B_2$ las semirramas que hay incluidas en $C \setminus (B_1 \cup B_2)$ sin aumentar el número de básicos (eliminar siempre es posible como vimos en la Proposición 1.3), entonces C se podrá escribir como una unión de dos básicos abiertos.

Lema 3.1 *Sea γ una semirrama y $\overline{\gamma}^z = \gamma \cup \gamma'$. Si $B_i^\nu \cup \pi^{-1}(\gamma)$ es un básico abierto y $\pi^{-1}(\gamma') \cap \overline{B_i^\nu} = \{0\}$, entonces $B_i \cup \gamma$ también es básico abierto.*

Demostración: Como $B_i^\nu \cup \pi^{-1}(\gamma)$ es abierto se tendrá $\pi^{-1}(\gamma) \subset \operatorname{Int} \overline{B_i^\nu}$ y, puesto que $\pi(B_i^\nu)$ y B_i son genéricamente iguales, será $\gamma \subset \operatorname{Int} \overline{B_i}$. Se sigue que $B_i' = B_i \cup \gamma$ es abierto, cf. lema 1.4. Además, B_i' es, obviamente, genéricamente básico así que $\#(F \cap \widetilde{B_i'}) \neq 3$ para cualquier abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X)$. Así pues, sólo queda comprobar que B_i' no corta su frontera de Zariski. Pero si $\gamma' \subset \mathrm{Bd}(B_i)$ entonces $\pi^{-1}(\gamma')$ cortaría $\overline{B_i^\nu}$, contra la hipótesis. $\square$

Ejemplo 3.2 Consideremos el germen analítico irreducible X_0 de $\mathbb{R}^3_0$ definido por la ecuación $y^2z^2 = x^2 + y^4$ (ver figura 5.12) y su normalización $z'^2 = x'^2 + y'^2$, donde $z' = z$, $y' = y$ y $x = x'y'$ (ver figura 5.13). Sean γ y γ', respectivamente, el eje z positivo y negativo de X_0. Tenemos que $\pi^{-1}(\gamma) = \gamma_1 \cup \gamma_2$ y $\pi^{-1}(\gamma') = \gamma_1' \cup \gamma_2'$.

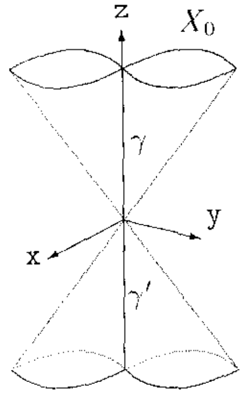


Figura 5.12

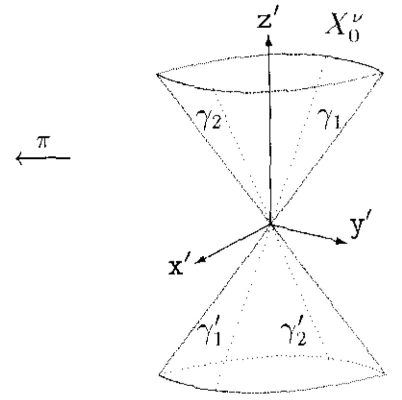


Figura 5.13

Si $B_1^\nu = \{(x' - z')^2 - 4(x' + z')^2 - 4y'^2 > 0,\ z' > 0\}$ (la primera ecuación define un cono alrededor de γ_1) entonces $B_1 = \{y^2[(x - yz)^2 - 4(x + yz)^2 - 4y^4] > 0,\ y^2z > 0\}$. Por supuesto, al ser π un isomorfismo fuera de un conjunto de dimensión 1, tenemos que $\pi(B_1^\nu)$ y B_1 (resp. B_1^ν y $\pi^{-1}(B_1)$) son genéricamente iguales en X_0 (resp. X_0^ν). Con respecto al lema anterior, tenemos que $B_1^\nu \cup \pi^{-1}(\gamma)$ *no* es un básico abierto($\gamma_2 \not\subset \mathrm{Int}\overline{B_1^\nu}$) y, por tanto, no podemos asegurar que $B_1 \cup \gamma$ sea un básico abierto. De hecho no lo es, puesto que B_1 contiene solamente dos de las cuatro hojas alrededor de γ y $\gamma \not\subset \mathrm{Int}\overline{B}_1$.

Si $B_2^\nu = \{[(x'-z')^2-4(x'+z')^2-4y'^2][4y'^2+4(x'-z')^2-(x'+z')^2] > 0,\ z' > 0\}$ entonces $B_2 = \{y^4[(x-zy)^2-4(x+yz)^2-4y^4][4y^4+4(x-yz)^2-(x+yz)^2] >$

$0,\ y^1z > 0\}$. Ahora, $B_2^\nu \cup \pi^{-1}(\gamma)$ es un básico abierto (de hecho, $\gamma_1, \gamma_2 \subset B_2^\nu$) y $B_2^\nu \cup \pi^{-1}(\gamma') = (\gamma_1 \cup \gamma_2) \cap B_2^\nu = \emptyset$, así que $B_2 \cup \gamma$ es un básico abierto, cf. lema 3.1. En este caso B_2 contiene las cuatro hojas alrededor de γ, por tanto, ahora $\gamma \subset \mathrm{Int}\overline{B_2}$ y $\gamma' \cap \overline{B_2} = \{0\}$.

Necesitamos la siguiente generalización de la Proposición 2.2 para añadir varias semirramas al mismo tiempo:

Proposición 3.3 *Sea X_0 un germen analítico normal, B_1 y B_2 básicos abiertos y $\gamma_1, \dots, \gamma_r \subset \mathrm{Int}(\overline{B_1 \cup B_2})$ semirramas independientes (es decir, $\overline{\gamma}_i^Z \cap \overline{\gamma}_j^Z = \{0\}$ si $i \neq j$). Entonces existen dos básicos abiertos B_1', B_2' tales que $B_1' \cup B_2' = B_1 \cup B_2 \cup \{\cup_1^r \gamma_i\}$.*

Además, si S es un germen semianalítico cerrado tal que $(\cup_1^r \overline{\gamma_i}^Z) \cap S = \{0\}$ podemos encontrar B_1', B_2' tales que $B_j' \cap S = B_j \cap S$, $j = 1, 2$. También, para cada i, si $\overline{\gamma_i}^Z = \gamma_i \cup \gamma_i'$ entonces $\gamma_i \subset B_1'$, $\gamma_i' \not\subset \overline{B_1'}$.

Demostración: Haremos la demostración por inducción, siendo el caso $r = 1$ la Proposición 2.2. Supongamos ahora que tenemos B_1^k, B_2^k tales que $B_1^k \cup B_2^k = B_1 \cup B_2 \cup \{\cup_1^k \gamma_i\}$ y $\gamma_i \subset B_1^k$, $\gamma_i' \not\subset \overline{B_1^k}$. Sean U_γ y $U_{\gamma'}$ entornos semianalíticos conexos de γ y γ' respectivamente tales que $\overline{U_\gamma} \cap [S \cup \{f_1^k g_1^k f_2^k g_2^k = 0\}] \subset \gamma$ y $\overline{U_{\gamma'}} \cap [S \cup \{f_1^k g_1^k f_2^k g_2^k = 0\}] \subset \gamma'$ y definamos $T = X_0 \setminus (U_\gamma \cup U_{\gamma'})$. Aplicando la proposición 2.2 a B_1^k, B_2^k y T obtenemos B_i^{k+1} tales que $B_i^{k+1} \cap T = B_i^{(k)} \cap T$. Puesto que $S \subset T$ tenemos $B_i^{k+1} \cap T = B_i^k \cap T = \dots = B_i \cap S$ y también, como $\overline{\gamma_i}^Z \cap T = \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$, se tiene que $\gamma_i \subset B_1^{k+1}$, $\gamma_i' \not\subset \overline{B_1^{k+1}}$. □

Corolario 3.4 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión 2. Si $\overline{s}(X_0) = 2 \Rightarrow t(X_0) = 2$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que X_0 es irreducible. Sea C un germen semianalítico abierto y escribamos $C^\nu = \pi^{-1}(C) = B_1^\nu \cup B_2^\nu$. Sea Σ la unión de la semirramas γ de X_0 tales que $\pi^{-1}(\gamma)$ no es una única semirrama. Si $\overline{\gamma_i}^Z = \gamma_i \cup \gamma_i'$, tendremos $C \cap \Sigma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+1}', \dots, \gamma_s, \gamma_s'\}$. Como

$\bar{s} = 2$ las semirramas en $\pi^{-1}(\gamma_i)$ son independientes y por la proposición anterior podemos suponer $C^\nu = B_1^\nu \cup B_2^\nu$, con $\pi^{-1}(\gamma_i) \subset B_1^\nu$, $\pi^{-1}(\gamma_i') \not\subset \overline{B_1^\nu}$ for $i = 1, \ldots, r$. Por lo tanto. $B_1 \cup \{\cup_1^r \gamma_i\}$ es un básico abierto (ver el lema 3.1). Ahora, como $\{\gamma_{r+1}, \gamma_{r+1}', \ldots, \gamma_s, \gamma_s'\} \subset \mathrm{Int}(\overline{B_1 \cup B_2})$ (ya que están en el abierto C que es genéricamente igual a $B_1 \cup B_2$), por el lema 1.6 podemos añadir un entorno de esas semirramas a B_1.

Finalmente, añadimos las restantes semirramas (puesto que son imagen de una única semirrama de X_0^ν). Por ejemplo, si γ es una de esas semirramas y $\bar{\gamma}^Z = \gamma \cup \gamma'$ entonces aplicando la proposición 2.2 a B_1^ν, B_1^ν y $\pi^{-1}(\gamma)$ podemos suponer $\pi^{-1}(\gamma) \subset B_1^\nu$, $\pi^{-1}(\gamma') \not\subset \overline{B_1^\nu}$ y, por el lema 3.1, $B_1 \cup \gamma$ será un básico abierto. Por tanto, se podrá escribir $C = B_1 \cup B_2$ concluyéndose que $t = 2$.

Supongamos ahora que $X_0 = X_{01} \cup \ldots \cup X_{0n}$, siendo los X_{0i} irreducibles. Como $\bar{s}(X_0) = 2$ se tendrá, cf. teorema 3.3.4, que $\bar{s}(X_{0i}) = 2$, $\forall i$. Sea C un germen semianalítico abierto y definamos $C_i = C \cap X_{0i}$. Si nos restringimos a X_{0i} se tiene que $C_i = B_{1i} \cup B_{2i}$ siendo B_{1i} y B_{2i} básicos abiertos de X_{0i}.

Si $\gamma \subset C$ es una semirrama que pertenece simultáneamente a más de un X_{0i}, por ejemplo $\gamma \subset X_{0i} \cap X_{0j}$, por la proposición 3.3 podemos suponer que $\gamma \subset B_{1i} \cap B_{1j}$. De esta forma, se puede escribir $C = B_1 \cup B_2$, siendo $B_1 = \cup B_{1i}$ y $B_2 = \cup B_{2i}$, que son básicos abiertos ya que verifican las condiciones de la proposición 1.2.9. □

Podemos reunir los resultados de este capítulo y el corolario 3.3.5 en el siguiente:

Teorema 3.5 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión dos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $\bar{s}(X_0) = 3$.

2) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r\mathcal{O}(X_0)$ que se especializa en un único orden $\widetilde{\tau}$ $(F \to \widetilde{\tau})$ con $\dim \widetilde{\tau} = 1$.

3) $t(X_0) = 3$.

Capítulo 6

Invariante p en gérmenes analíticos

1 Introducción

El invariante p fue introducido por Marshall (véase [Ma1]) para medir la complejidad de los conjuntos semialgebraicos de una variedad algebraica real V, definiéndolo como el mínimo entero, $p(V)$, tal que $p(V)$ polinomios bastan para separar cualquier semialgebraico $S \subset V$ de su complementario.

La siguiente definición es válida para cualquier espacio de signos, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. III]. Puesto que el espectro real de un anillo conmutativo es un espacio de signos, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. III], esta definición también es aplicable al caso semianalítico en virtud del isomorfismo 1.2.5.

Definición 1.1 *Sea (X, G) un espacio de signos. $f_1, \dots, f_p \in G$ es una familia separante para un conjunto constructible $Y \subset X$ si $\forall x \in Y$ y $\forall y \in X \setminus Y$, existe algún $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Los conjuntos constructibles de (X, G) se pueden describir de forma natural en términos de familias separantes. Si $f = (f_1, \dots, f_p) \in G^p$ y $e = (e_1, \dots, e_n) \in \{-1, 0, 1\}^p$ definimos $U(f; e) := \{x \in X | f_i(x) = e_i, i = 1, \dots, p\}$. Obviamente, $f_1, \dots, f_p$ es una familia separante para Y si y sólo si $Y = \cup_{e \in \Delta} U(f; e)$, donde Δ es un cierto subconjunto de $\{-1, 0, 1\}^p$. Asimismo, $Y \subset X$ es constructible si y sólo si Y posee una familia separante.

Definición 1.2 *$p(X)$ es el mínimo entero r tal que cualquier constructible $Y \subset X$ tiene una familia separante constituida por r elementos de G.*

Si X_0 es un germen analítico y $S \subset X_0$ es un germen semianalítico de X_0, decimos que $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X_0)$ es una familia separante para S si, tomando representantes, $\forall x \in S$ y $\forall y \in X \setminus S$, existe algún $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\mathrm{sign}(f_i(x)) \neq \mathrm{sign}(f_i(y))$. Equivalentemente, $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X_0)$ es una familia separante para S si y sólo si $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(X_0)$ es una familia separante para $\tilde{S}$. En cuanto al invariante p, el isomorfismo 1.2.5 nos asegura que $p(X_0) = p(\mathrm{Spec}_r \mathcal{O}(X_0))$.

2 Cotas superiores del invariante p

Vamos a ver en primer lugar una cota superior para espacios de órdenes, cf. [Ma1, Cor. 1].

Proposición 2.1 *Sea (X, G) un espacio de órdenes con índice de estabilidad s. Entonces, $p(X, G) \leq 4^{s-1} - 2^{s-1} + 1$.*

Demostración: Si $S \subset X$ es un conjunto constructible existe una forma ϕ de dimensión 4^{s-1} tal que $\sigma(\phi) = \begin{cases} 2^{s-1} & \text{si} \quad \sigma \in S \\ -2^{s-1} & \text{si} \quad \sigma \in X \setminus S \end{cases}$, cf. [Brö3, Prop. 5.24]. Si $\phi = \langle a_1, \dots, a_{4^{s-1}} \rangle$ con $a_i \in G$, entonces $(4^{s-1} + 2^{s-1})/2$ de las a_i son positivas en σ si $\sigma \in S$ ó $(4^{s-1} - 2^{s-1})/2$ si $\sigma \in X \setminus S$. Por tanto, $a_1, \dots, a_p$ es una familia separante para S con $p = 4^{s-1} - 2^{s-1} + 1$. Además, podemos escribir $S = \cup_{e \in \Delta} U(a; e)$ siendo $\Delta = \{e \in \{-1, 1\}^p |$ al menos $1 + (4^{s-1} - 2^{s-1})/2$ de los e_i son $1\}$. □

Observación 2.2 En la descripción del constructible S dada en la proposición anterior como $S = \cup_{e \in \Delta} U(a; e)$ hay que destacar que el conjunto $\Delta \subset \{-1, 1\}^p$ es siempre el mismo, independientemente de S. Lo que caracteriza a S son los elementos a_i de la forma ϕ.

En el caso de que X_0 sea un germen analítico de dimensión d, $\mathcal{O}(X_0)$ el anillo de gérmenes de funciones analíticas y $\mathcal{K}(X_0)$ su cuerpo de fracciones, esta proposición nos dice que $p(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)) \leq 4^{d-1} - 2^{d-1} + 1$. A partir de esta cota genérica se puede obtener por inducción una cota para $p(X_0)$.

Teorema 2.3 *Sea X_0 un germen analítico de dimensión $d < \infty$. Entonces,*

$$p(X_0) \leq \sum_{i=1}^{d}(4^{i-1} - 2^{i-1} + 1).$$

Demostración: Por inducción sobre la dimensión de X_0.

Si la dimensión de X_0 es 1, cada germen semianalítico S está constituido por un número finito de semirramas y basta una función para separar S de su complementario, cf. proposición 1.3.1.

Supongamos ahora que X_0 es un germen analítico de dimensión n y sean $X_{01}, \ldots, X_{0r}$ las componentes irreducibles de X_0 de dimensión máxima. Si S es un germen semianalítico de X_0, por la demostración de la anterior proposición existirán $f_{ij} \in \mathcal{O}(X_0)$, $f_{ij} \notin \mathfrak{p}_i := \mathcal{J}(X_{0i})$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, p$, siendo $p = 4^{n-1} - 2^{n-1} + 1$, tales que:

$$S \cap X_{0i} \overset{g}{=} \cup_{e\in\Delta} U(f_{i1}, \ldots, f_{ip}; e) \cap X_{0i}$$

siendo Δ como en la proposición anterior.

Definimos $f_j := \sum_{i=1}^{r} g_i^2 f_{ij}$, $j = 1, \ldots, p$ donde $g_i \in \cap_{k\neq i}\mathfrak{p}_k \setminus \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$ y $S' := \cup_{e\in\Delta} U(f_1, \ldots, f_r; e)$, de forma que $S \cap X_{0i} \overset{g}{=} S' \cap X_{0i}$, $i = 1, \ldots, r$.

El conjunto $X_0' := \overline{(S \setminus S') \cup (S' \setminus S)}^{z}$ tiene dimensión menor que n y por la hipótesis de inducción existe una familia separante $h_1, \ldots, h_m$ con $m \leq \sum_{i=1}^{n-1}(4^{i-1} - 2^{i-1} + 1)$ para $S \cap X_0'$ en X_0'. Si b es una ecuación positiva de X_0' entonces $bf_1, \ldots, bf_r, h_1, \ldots, h_m$ es una familia separante para S en X_0. □

En el caso semialgebraico la cota obtenida es superior en una unidad, a saber, si V es una variedad algebraica de dimensión d entonces $p(V) \leq \sum_{i=0}^{d}(4^{i-1} - 2^{i-1} + 1)$, cf. [Mal, Th. 1]. En la tabla 6.1 se da el valor de la cota superior para el invariante p en los casos semialgebraico y semianalítico para pequeños valores de la dimensión.

dimensión	1	2	3	4	5	6
$p(X_0) \leq$	1	4	16	74	315	1308
$p(V) \leq$	2	5	17	75	316	1309

Tabla 6.1

3 Cotas inferiores del invariante p

Si (X, G) es un espacio de órdenes finito las cotas superiores dadas por la proposición 2.1 se pueden mejorar. Para ello vamos a generalizar la definición de familia separante.

Definición 3.1 *Sea (X, G) un espacio de órdenes. Una familia separante para una partición $S_1, \dots, S_n$ de X es un conjunto de elementos $f_1, \dots, f_p \in G$ tal que $\forall \sigma \in S_i$ y $\forall \tau \in S_j$, existe algún $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\sigma(f_i) \neq \tau(f_i)$.*

Esta definición coincide con la dada anteriormente en el caso de que la partición de X sea un conjunto S y su complementario $X \setminus S$.

Si $n \geq 2$ definimos

$$p(n, s) = \begin{cases} k & \text{si } 2^{k-1} < n \leq 2^k \text{ y } s = 1 \\ p(n(n+1)/2, s-1) + 1 & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$

Así, $p(n, s)$ es el menor entero $\geq log_2(\alpha^{s-1}(n)) + s - 1$ donde $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está definida como $\alpha(n) = n(n+1)/2$. Definimos también $p(s) := p(2, s)$. Se tienen los siguientes resultados, cf. [Ma1].

Teorema 3.2 *Sea (X, G) cualquier espacio de órdenes finito con índice de estabilidad s. Cualquier partición de X en n subconjuntos tiene una familia separante con $p(n, s)$ elementos de G.*

En particular, cualquier subconjunto de X tiene una familia separante con $p(s)$ elementos.

Teorema 3.3 *Sean $s \geq 1$ y $n \geq 2$ enteros. Existe un espacio de órdenes finito (X, G) con índice de estabilidad s y una partición $S_1, \dots, S_n$ de X tales que cualquier familia separante de esta partición requiere $p(n, s)$ elementos.*

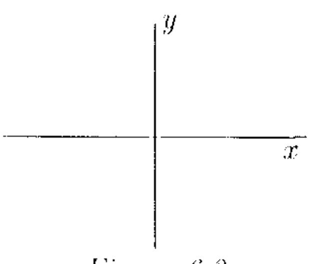
El hecho de que las cotas superiores del teorema 3.2 se alcancen para ciertos espacios de órdenes finitos nos va a permitir establecer las cotas inferiores para el invariante p de gérmenes analíticos. Para ello necesitamos el siguiente *"teorema de realización"*.

Teorema 3.4 *Sea $d \geq 2$. Cualquier espacio de órdenes finito con índice de estabilidad $\leq d$ es realizable como subespacio de* $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$, *siendo X_0 cualquier germen analítico irreducible de dimensión d.*

Demostración: Por inducción sobre d. Supongamos en primer lugar que $d = 2$ y $X_0 = \mathbb{R}^2$. Si (X, G) es un espacio de órdenes finito con índice de estabilidad 2 se podrá descomponer, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. IV], como una suma $(X, G) = (X_1, G_1) \oplus \cdots \oplus (X_r, G_r)$, donde (X_i, G_i) es un *espacio atómico* (espacio de órdenes con un solo elemento) o una extensión. Si (X_i, G_i) es un espacio atómico cogemos una generización de cualquier semirrama de X_0, de forma que a espacios atómicos diferentes les correspondan semirramas independientes.

Si (X_i, G_i) es una extensión de $(\overline{X}_i, \overline{G}_i)$ con $|G/\overline{G}_i| = 2$, entonces $(\overline{X}_i, \overline{G}_i) = (Y_1, H_1) \oplus \cdots \oplus (Y_n, H_n)$ será una suma de espacios atómicos. Hacemos una explosión del origen a lo largo de una recta l_i y consideramos los órdenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ cuyo soporte es el divisor excepcional (ver figuras 6.2 y 6.3, donde se representa una explosión a lo largo del eje-y, siendo el divisor excepcional la recta $\{x' = 0\}$) y cogemos como espacio (X_i, G_i) el conjunto de sus generizaciones $\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}\}$.

Así, el conjunto de todos los órdenes escogidos es una realización en $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$ del espacio de órdenes finito (X, G).



$$x = x' \qquad y = x'y'$$

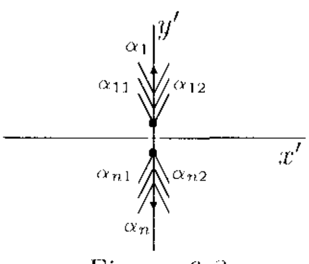


Figura 6.2 *Figura 6.3*

Si $d = 2$ y X_0 no es regular, consideramos su desingularización. De forma precisa, sea $X \subset M$ el *conjunto analítico que induce* X_0 *y* M *una variedad analítica*. Existe una aplicación analítica, cf. [Bi-Mi], $\pi : M' \to M$ tal que $\pi^{-1}(X) = X' \cup \pi^{-1}(\mathrm{Sing}X)$, siendo X' un subespacio analítico regular de M', el *transformado estricto* de X. Además, $\pi : X' \to X$ es sobreyectiva y propia y $\pi : X' \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}X) \to X \setminus \mathrm{Sing}X$ es un isomorfismo. Ahora, si $0' \in X'$ es tal que $\pi(0') = 0$ entonces π nos permite definir una aplicación $\pi : X'_{0'} \to X_0$ y, en consecuencia, tenemos el homomorfismo asociado de los cuerpos de fracciones $\pi^* : \mathcal{K}(X'_{0'}) \to \mathcal{K}(X_0)$ y finalmente la aplicación $\pi : \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X'_{0'}) \to \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_0)$. Puesto que la aplicación π entre los espectros reales es inyectiva (lo que es fácil ver considerando el isomorfismo entre órdenes y ultrafiltros de abiertos en el caso de gérmenes analíticos) y $X'_{0'}$ es regular, se tiene el resultado.

Si $d \geq 2$ es espacio de órdenes finito (T, G) se podrá escribir como $(T, G) = (T_1, G_1) \oplus \cdots \oplus (T_r, G_r)$, siendo (T_i, G_i) o bien un espacio atómico o bien una extensión de $(\overline{T}_i, \overline{G}_i)$ con $|G/\overline{G}_i| = 2$, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. IV]. Si (T_i, G_i) es un espacio atómico definimos $(\overline{T}_i, \overline{G}_i) = (T_i, G_i)$. Sea Y un divisor de X_0, cf. [An-Brö-Rz2, V.4.1]. Por la hipótesis de inducción $(\overline{T}_i, \overline{G}_i)$ es realizable como subespacio de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(Y)$. Consideramos ahora las 2 generizaciones de cada orden de $(\overline{T}_i, \overline{G}_i)$ (o sólo una si (T_i, G_i) es un espacio atómico) y se tiene el resultado. □

Corolario 3.5 *Sea* X_0 *un germen analítico de dimensión* d, *entonces* $p(X_0) \geq log_2(\alpha^{d-1}(2)) + d - 1$ *donde* $\alpha(n) = n(n+1)/2$.

Demostración: Por el teorema 3.3 existe un espacio de órdenes finito (X', G') con índice de estabilidad d tal que $p(X', G') = p(d) \geq log_2(\alpha^{d-1}(2)) + d - 1$. Si X_0 tiene una descomposición en irreducibles $X_0 = X_{01} \cup \ldots \cup X_{0r}$ y, por ejemplo, $\dim X_{0i} = d$, por el teorema anterior, (X', G') es realizable como subespacio de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X_{0i})$ de donde se sigue el resultado. □

En la tabla 6.4 se dan los valores de estas cotas inferiores, junto con las superiores, para algunos valores de la dimensión. Para dimensión 1 la cota inferior del corolario 3.5 no tiene sentido, pero en este caso $p(X_0) = 1$.

dim X_0	2	3	4	5	6
	$3 \leq p \leq 4$	$5 \leq p \leq 17$	$8 \leq p \leq 74$	$12 \leq p \leq 315$	$20 \leq p \leq 1308$

Tabla 6.4

Ejemplo 3.6 Sea $S \subset X_0$ cualquier germen semianalítico tal que α_1, α_{11}, α_{12}, α_2, α_{21}, $\alpha_{31} \in \widetilde{S}$ y $\alpha_{22}, \alpha_3, \alpha_{32}, \alpha_4, \alpha_{41}, \alpha_{42} \notin \widetilde{S}$ (ver figura 6.5) entonces cualquier familia separante para S tiene al menos 3 elementos.

En efecto, supongamos que se puede encontrar una familia separante con dos elementos f_1, $f_2 \in \mathcal{O}(X_0)$. Una de estas funciones, por ejemplo f_1 separará α_{31} y α_{32}. Por tanto, f_1 se anulará en las semirramas α_1 y α_3, cambiando de signo en ambas semirramas. Así pues, f_2 deberá separar α_1 y α_3. En resumen podemos suponer que: $f_1(\alpha_{11}) = +1$, $f_1(\alpha_{12}) = -1$, $f_1(\alpha_{31}) = +1$, $f_1(\alpha_{32}) = -1$ y $f_2(\alpha_{11}) = +1$, $f_2(\alpha_{12}) = +1$, $f_2(\alpha_{31}) = -1$, $f_2(\alpha_{32}) = -1$.

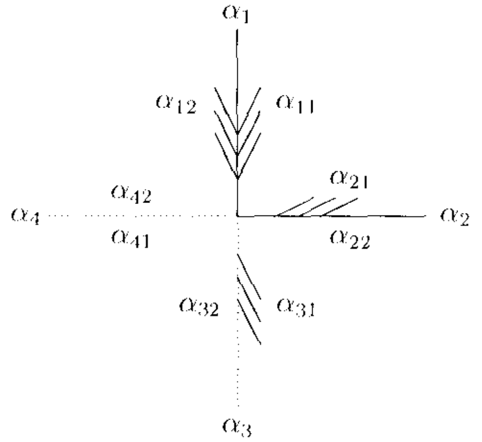


Figura 6.5

Si f_1 separase α_{21} y α_{22}, separaría también α_{41} y α_{42}, así que sería positiva en alguno de estos dos órdenes, por ejemplo en α_{41}. De esta forma, los signos de f_1 y f_2 serán coincidentes en el orden α_{41} y en el orden α_{11} (si $f_2(\alpha_{41}) = +1$) o en el orden α_{31} (si $f_2(\alpha_{41}) = -1$) y $\{f_1, f_2\}$ no podría ser una familia separante para S.

Si es f_2 la función que separa α_{21} y α_{22}, separará también α_{41} y α_{42}, y si, por ejemplo, f_2 es positiva en α_{41}, los signos de f_1 y f_2 en α_{41} coincidirán con los de estas funciones en α_{11} (si $f_1(\alpha_{41}) = +1$) o en α_{12} (si $f_1(\alpha_{41}) = -1$). Así que en ningún caso puede $\{f_1, f_2\}$ ser una familia separante para S.

Capítulo 7

Anillos locales henselianos excelentes

1 Introducción

En este capítulo extenderemos los resultados obtenidos con gérmenes analíticos al espectro real de anillos henselianos excelentes con cuerpo residual real cerrado, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. VII]. A continuación damos las definiciones que se utilizarán a lo largo de este capítulo.

Definición 1.1 *Sea A un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual $k = A/\mathfrak{m}$. Se dice que A es un anillo henseliano si todo polinomio mónico $f(t) \in A[t]$ tal que $\overline{f}(t) \in k[t]$ tiene una raíz simple $x \in k$, donde $\overline{f}(t)$ representa la clase de $f(t)$ módulo $\mathfrak{m}$, tiene una raíz $a \in A$ tal que $\overline{a} = x$.*

Definición 1.2 *Un anillo noetheriano A se denomina excelente si verifica las siguientes condiciones:*

i) A es universalmente catenario, es decir, para toda A-álgebra finitamente generada B y cualesquiera ideales primos $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ de B se tiene que

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$$

donde $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ denota la altura del ideal $\mathfrak{p}$.

ii) Si $B = A_{\mathfrak{p}}$ es cualquier localización en el ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$, el homomorfismo $B \to \hat{B}$ de B en su completado es regular.

iii) Si B es cualquier A-álgebra finitamente generada y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$, existen $h_1, \ldots, h_r \in B$ tales que $B_{\mathfrak{p}}$ es regular si y sólo si $h_i \in \mathfrak{p}$ para algún i, es decir, el lugar singular es la unión del conjunto de ceros de los h_i.

Ejemplos 1.3 Sea k un cuerpo real cerrado. Los siguientes son anillos locales henselianos excelentes con cuerpo residual real cerrado:

a) Álgebras analíticas sobre k, es decir, anillos del tipo $k\{x_1, \ldots, x_n\}/I$, siendo I un ideal de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Estos son los anillos de gérmenes de funciones analíticas que hemos considerado en los capítulos anteriores.

b) Álgebras formales sobre k, es decir, anillos del tipo $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$, siendo I un ideal de $k[[x_1, \ldots, x_n]]$.

c) Álgebras del tipo $k[[x_1, \ldots, x_n]]_{\text{alg}}/I$, donde $k[[x_1, \ldots, x_n]]_{\text{alg}}$ denota las series de potencias formales que son algebraicas sobre los polinomios.

d) La *localización real estricta* de un anillo local excelente con cuerpo residual real cerrado, cf. [An-Brö-Rz2, Th. VII.2.5].

En el resto del capítulo supondremos siempre que A es un anillo local henseliano excelente con cuerpo residual real cerrado. Denotaremos por $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A y por k su cuerpo residual.

Cualquier homomorfismo no trivial $\gamma : A \to k[[t]]$ induce dos generizaciones γ_+ y γ_- con el mismo soporte, $\mathfrak{p} = \operatorname{supp}(\gamma_+) = \operatorname{supp}(\gamma_-) = \ker \gamma$, por restricción al cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{p}) := c.fr.(A/\mathfrak{p})$ de los órdenes de $k[[t]]$ definidos por $t > 0$ y $t < 0$. Si $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$ entonces γ es un *germen de curva* y γ_+, γ_- son las *semirramas* de γ.

En $X := \operatorname{Spec}_r A$ están definidas las topologías de Harrison y de Zariski, cf. 1.2. En este contexto se verifican la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz, cf. corolario 1.2.7, los resultados de separación de la sección 1.3 y los de normalización de la sección 1.4 (aunque en algunos casos se razona tomando representantes de gérmenes, las mismas conclusiones se obtienen razonando únicamente a partir de semirramas).

2 Complejidad de anillos henselianos excelentes

Si A es un anillo local henseliano excelente con cuerpo residual real cerrado k y dimensión d se tiene, cf. [An-Brö-Rz2, Remark VII.5.6.a]:

$$s(A) = d, \quad \frac{1}{2}d(d+1) - 1 \leq \overline{s}(A) \leq \frac{1}{2}d(d+1)$$

Si además $\dim A = 2$ y A es normal, es decir, íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones, la localización $A_{\mathfrak{p}}$ en cualquier ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ de altura uno es un anillo de valoración discreta, cf. [A-McD, Prop. 9.2]. Si g es un generador de $\mathfrak{p}$ en $A_{\mathfrak{p}}$, todo $f \in A$ se puede expresar como $f = g^m u$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $u \in A_{\mathfrak{p}}$ es una unidad. Así podemos decir, al igual que en el capítulo 2, que f cambia de signo en $Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ si m es impar. Si γ_+ y γ_- son las dos semirramas de Y, también diremos que f cambia de signo en γ_+ y en γ_-. De lo anterior podemos deducir que cualquier semirrama tiene dos generizaciones en el espectro real del cuerpo de fracciones de A, según que asignemos a g signo positivo o negativo. Esta última afirmación se corresponde con la idea geométrica de ser de dimensión pura.

En estas condiciones, se pueden extender las proposiciones 2.2.1 y 2.3.1, permitiéndonos enunciar el

Teorema 2.1 *Sea A un dominio normal de dimensión 2. Entonces $\overline{s}(A) = 2$.*

Si A es un dominio no necesariamente normal, denotaremos su normalización como A^ν y definiremos $X^\nu := \operatorname{Spec}_r A^\nu$. En estas condiciones, al igual que en el caso geométrico podemos definir la parte de dimensión 2 de $X = \operatorname{Spec}_r A$ como $X^* := \pi(X^\nu)$, siendo π la normalización. En este caso las condiciones (CC) y (CS) podemos expresarlas como

(CC): cada germen de curva irreducible de X^ν se transforma (mediante π) en otro germen de curva irreducible de X.

(CS): existe un germen de curva irreducible de X^ν que se transforma (mediante π) en una única semirrama de X.

Con estas definiciones, se verifican las proposiciones 3.2.1, 3.2.4 y 3.3.1, por lo que se puede concluir el

Teorema 2.2 *Sea A un dominio de dimensión dos y sea $\pi : A^\nu \to A$ su normalización. Son equivalentes:*

1) Existe un germen de curva $Y \subset X^\nu$ tal que $\pi(Y)$ es una única semirrama.

2) $\overline{s}(A) = 3$.

3) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ que se especializa en un único orden τ ($F \to \tau$) con $\dim \tau = 1$.

Si A no es un dominio, sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ los ideales primos asociados del ideal (0). Definiendo $X_i := \mathrm{Spec}_r(A/\mathfrak{p}_i)$ se tiene la descomposición $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$, por lo que podemos extender el teorema 3.3.4 y el corolario 3.3.5.

Teorema 2.3 *Sea A un anillo de dimensión 2 tal que $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$. Entonces $\overline{s}(A) = \text{máx}\ \{\overline{s}(X_1), \ldots, \overline{s}(X_s)\}$, donde $\overline{s}(X_i) := \overline{s}(A/\mathfrak{p}_i)$.*

Corolario 2.4 *Sea A un anillo de dimensión 2. Son equivalentes:*

i) $\overline{s}(A) = 3$.

ii) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ tal que $F \to \tau$ con $\dim \tau = 1$.

Supongamos ahora que $\dim A = 3$. Realizando una serie finita adecuada de transformaciones cuadráticas podemos obtener un anillo regular A' de la misma dimensión y con el mismo cuerpo de fracciones, cf. [An-Rz2]. Tenemos la siguiente cadena de inclusiones $A \hookrightarrow A' \hookrightarrow \hat{A}'$, siendo $\hat{A}'$ el completado de A', que podemos identificar con $k[[x, y, z]]$, donde x, y, z son generadores del ideal maximal de A'. Sea $\mathfrak{p} := (y^2 - zx^2)k[[x, y, z]]$, $\mathfrak{q}'$ su contracción a A', es decir, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p} \cap A' = (y^2 - zx^2)A'$, y $\mathfrak{q}$ su contracción a A, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$. Eligiendo convenientemente los generadores x, y, z podemos suponer que $\mathfrak{q}'$ no está contenido en el divisor excepcional y que $\mathfrak{q}$ no está contenido en el lugar singular de A.

De esta forma, $Z := \mathrm{Spec}_r(k[[x,y,z]]/\mathfrak{p})$ es un divisor de $\mathrm{Spec}_r k[[x,y,z]]$ con $\overline{s}(Z) = 3$ ya que hay un abanico F de 4 elementos que se especializa en un orden de dimensión 1 y $\mathrm{ht}\mathfrak{q}' = \mathrm{ht}\mathfrak{p} = 1$. Además, por no estar $\mathfrak{q}'$ contenido en el divisor excepcional será $\mathrm{ht}\mathfrak{q} = \mathrm{ht}\mathfrak{q}' = 1$, así que $A_\mathfrak{q}$ será un anillo de valoración discreta. Como la restricción del abanico F al anillo A es también un abanico de 4 elementos (puesto que los 4 órdenes del mismo pueden ser separados por polinomios y $\mathfrak{q}'$ no está contenido en el divisor excepcional) y $A_\mathfrak{q}$ es regular, $Y := \mathrm{Spec}_r(A/\mathfrak{q})$ será un divisor de $X = \mathrm{Spec}_r A$ con $s(Y) = 3$. A partir de aquí, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. V.4.3], podemos encontrar un básico cerrado que necesita 6 desigualdades para ser descrito, concluyendo que $\overline{s}(A) = 6$. Para dimensiones mayores podemos razonar como en la demostración del teorema 4.3.1, lo que nos permite enunciar el

Teorema 2.5 *Sea A un anillo de dimensión $d \geq 3$. Entonces* $\overline{s}(A) = \frac{1}{2}d(d+1)$.

También podemos generalizar los resultados del capítulo 5, ya que, si $\dim A = 2$ tenemos, cf. [An-Brö-Rz2, Ch. V.2],

$$\overline{t}(A) = 2, \qquad 2 \leq t(A) \leq 3$$

lo que, junto con el corolario 2.4, podemos sintetizar en el

Teorema 2.6 *Sea A un anillo de dimensión dos. Son equivalentes:*

i) $\overline{s}(A) = 3$.

ii) Existe un abanico de 4 elementos $F \subset \mathrm{Spec}_r A$ que se especializa en un único orden τ ($F \to \tau$) con $\dim \tau = 1$.

iii) $t(A) = 3$.

En cuanto al invariante p, es evidente que se verifica, cf. teorema 6.2.3, que las cotas superiores son las mismas que en el caso semianalítico. así se tiene el

Teorema 2.7 *Sea A un anillo de dimensión $d < \infty$. Entonces,*

$$p(A) \leq \sum_{i=1}^{d}(4^{i-1} - 2^{i-1} + 1).$$

Si A es un anillo de dimensión d, realizando una serie finita de transformaciones cuadráticas podemos obtener un anillo regular A' de la misma dimensión y con el mismo cuerpo de fracciones, cf. [An-Rz2]. Considerando la inclusión de A' en su completado tenemos $A' \hookrightarrow k[[x_1, \ldots, x_d]]$, donde $x_1, \ldots, x_d$ son los generadores del ideal maximal de A'. Podemos razonar ahora como en la demostración del teorema de realización, cf. teorema 6.3.4, llegando a la conclusión de que cualquier espacio de órdenes finito con índice de estabilidad $\leq d$ se puede realizar como subespacio de $\mathrm{Spec}_r k((x_1, \ldots, x_d))$. Ahora bien, como los órdenes construidos en la demostración del teorema 6.3.4 se pueden separar por polinomios tenemos el

Teorema 2.8 *Sea $d \geq 2$. Cualquier espacio de órdenes finito con índice de estabilidad $\leq d$ es realizable como subespacio de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$, siendo $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de un anillo de dimensión d.*

y, como consecuencia de este teorema de realización obtenemos las cotas superiores para el invariante p.

Corolario 2.9 *Sea A un anillo d, entonces $p(A) \geq log_2(\alpha^{d-1}(2)) + d - 1$ donde $\alpha(n) = n(n+1)/2$.*

Capítulo 8

Índice de estabilidad de variedades analíticas de dimensión 2

1 Introducción

Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico real, $\mathcal{O}(X)$ el anillo de funciones analíticas reales sobre X y $\mathcal{K}(X)$ (o simplemente $\mathcal{K}$ si no hay ambigüedad) su cuerpo de fracciones. Si X es compacto entonces $s(X) = d$ y $\overline{s}(X) \leq \frac{1}{2}d(d+1)$, cf. [An-Brö-Rz2, Prop. VIII.6.2]. Sin embargo, en el caso no compacto no se conoce ninguna cota del índice de estabilidad, ni siquiera si es o no finito, a excepción del caso regular de dimensión 1, cf. [An-Be].

El objetivo fundamental de este capítulo es el estudio de los invariantes s, $\overline{s}$, t y $\overline{t}$ de variedades analíticas paracompactas de dimensión 2. Para ello necesitaremos estudiar ciertas propiedades de los conjuntos analíticos. En primer lugar, diremos que X verifica el *problema 17 de Hilbert*, y escribiremos H^{17}, si toda función $f \in \mathcal{O}(X)$ no negativa en Reg(X) es suma de cuadrados de funciones de $\mathcal{K}$, donde Reg(X) denota el conjunto de puntos regulares de X.

Por otra parte, diremos que X verifica la *propiedad de Artin-Lang* si $\{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\} \neq \emptyset$, siendo $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(X)$, es equivalente a la existencia de un orden $\beta \in \operatorname{Spec}_r\mathcal{K}$ en el que las funciones $f_1, \ldots, f_r$ sean simultáneamente positivas. Evidentemente, cualquier conjunto analítico que verifique la propiedad de Artin-Lang verifica también H^{17} [1]. Otra interesante propiedad que se deriva de la de Artin-Lang es la existencia de una correspondencia biunívoca entre los órdenes de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$ y los ultrafiltros de conjuntos semianalíticos globales abiertos de X, cf. [Ca-An, Th. 2.2].

2 Ultrafiltro asociado a un orden

Vamos a denotar por $\mathcal{C}$ la familia formada por los subconjuntos semianalíticos globales cerrados de X. Es inmediato comprobar que $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones e intersecciones finitas, por lo que tiene sentido considerar filtros en $\mathcal{C}$.

Sean $\beta \in \mathrm{Spec}_r(\mathcal{K})$ y W_β la envoltura convexa de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{K}$ con respecto al orden β, es decir:

$$W_\beta := \{f \in \mathcal{K} | -r <_\beta f <_\beta r, \text{ para algún } r \in \mathbb{R}^+\}$$

W_β es un anillo de valoración con cuerpo residual $\mathbb{R}$ que contiene el anillo de funciones analíticas acotadas, $\mathcal{O}_b(X) \subset W_\beta$, cf. [Ca1]. Su ideal maximal está constituido por los elementos infinitesimales, es decir, si denotamos por $\mathfrak{n}_\beta$ a este ideal, entonces

$$\mathfrak{n}_\beta := \{f \in \mathcal{K} | -r <_\beta f <_\beta r, \forall r \in \mathbb{R}^+\}$$

y el centro de W_β en $\mathcal{O}_b(X)$ será $\mathfrak{m}_\beta := \mathfrak{n}_\beta \cap \mathcal{O}_b(X)$, que es un ideal maximal ya que $W_\beta/\mathfrak{n}_\beta = \mathbb{R}$. Asimismo, denotaremos por $\lambda_\beta : W_\beta \to \mathbb{R}$ el lugar definido por W_β (véase [Ca1]).

Definición 2.1 *Llamaremos ultrafiltro asociado al orden β al siguiente filtro maximal de $\mathcal{C}$:*

$$\mathcal{U}_\beta := \{Y \in \mathcal{C} | Y \cap f^{-1}[-1, 1] \neq \emptyset, \forall f \in \mathfrak{m}_\beta\}$$

$\mathcal{U}_\beta$ así definido es efectivamente un ultrafiltro de $\mathcal{C}$ (ver [Jw]).

Ejemplos 2.2

[1] Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in X$ y no es suma de cuadrados en $\mathcal{K}$ entonces f no es positiva en todos los órdenes de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$, es decir, $-f \in \beta$ para algún orden $\beta \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$. Si se verifica Artin-Lang deberá ser $\{-f(x) > 0\} \neq \emptyset$, absurdo ya que f es no negativa

a) Todos los órdenes centrados en el mismo punto P tienen asociado el mismo ultrafiltro, $\mathcal{U}_\beta = \{A \in \mathcal{C} | P \in A\}$. En particular, la correspondencia $\beta \to \mathcal{U}_\beta$ no es inyectiva.

b) Si $\mathcal{U}_\beta$ contiene un conjunto discreto $\{x_i\}_1^\infty$ entonces induce en $\mathbb{N}$ un ultrafiltro $\mathcal{N}_\beta$ de la siguiente forma: si $J \subset \mathbb{N}$, se tiene que $J \in \mathcal{N}_\beta \leftrightarrow \{x_i\}_{i \in J} \in \mathcal{U}_\beta$. Escojamos ahora un conjunto de órdenes $\{\beta_i\}_1^\infty$ de forma que cada β_i está centrado en el punto x_i. Podemos definir el orden $\alpha := \Pi_{\mathcal{N}_\beta} \beta_i$ como un "ultraproducto" de los órdenes $\{\beta_i\}$. Precisando, si $f \in \mathcal{K}$ decimos que $f >_\alpha 0 \leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} | f >_{\beta_i} 0\} \in \mathcal{N}_\beta$. Así definido, se tiene que $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_\beta$. Una cuestión abierta es determinar si todos los órdenes cuyo ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ contiene un conjunto discreto se pueden expresar como un "ultraproducto" de órdenes centrados en los puntos de ese conjunto discreto.

El siguiente lema caracteriza los elementos de $\mathcal{O}_b(X)$ que tienen signo constante en algún conjunto de $\mathcal{U}_\beta$.

Lema 2.3 *Sea $f \in \mathcal{O}_b(X)$ y supongamos que $f|_Y > 0$ para algún $Y \in \mathcal{U}_\beta$. Entonces $f \in \beta$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u, g \in \mathcal{O}_b(X)$ tales que $u \in U_\beta$, $u|_Y > 0$ y $uf = g^n$.*

Demostración: Ver [Ca2, Lem. 2] o también [An-Be, Lem. 4.2]. □

El anillo W_β define una valoración $w : \mathcal{K} \to \Gamma_\beta \cup \infty$, siendo $\Gamma_\beta = \mathcal{K}^*/U_\beta$ el grupo de valores, donde U_β es el conjunto de unidades de W_β, es decir, $U_\beta = \{f \in W_\beta | f^2 >_\beta r$, para algún $r \in \mathbb{R}^+\}$. El lema anterior nos relaciona el grupo de valores con el ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ en un caso especial, concretamente se tiene la

Proposición 2.4 *Si $\mathcal{U}_\beta$ no contiene ningún conjunto analítico propio, entonces existe un único orden β con dicho ultrafiltro y Γ_β es divisible.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}_b(X)$. Por hipótesis $\mathcal{Z}(f) \notin \mathcal{U}_\beta$ y como $\mathcal{U}_\beta$ es un ultrafiltro existirá $Y \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $\mathcal{Z}(f) \cap Y = \emptyset$. Podemos escribir, $Y = Y_1 \cup Y_2$ siendo $Y_1 = \{x \in Y | f(x) > 0\}$ e $Y_2 = \{x \in Y | f(x) < 0\}$.

Obsérvese que Y_1 e Y_2 son cerrados en Y. Uno de los Y_i, por ejemplo Y_1, estará en $\mathcal{U}_\beta$ (si no, cambiamos f por $-f$), es decir, $f|_{Y_1} > 0$. Ahora, por el lema anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $g \in \mathcal{O}_b(M)$, $u \in U_\beta \cap \mathcal{O}_b(M)$ tal que $u|_{Y_1} > 0$ y $uf = g^n$.

Como cualquier $h \in \mathcal{K}$ se puede escribir como cociente de 2 funciones acotadas, se sigue que Γ_β es divisible, es decir $\Gamma_\beta/n\Gamma_\beta = \{0\}$.

De lo anterior se deduce que el único orden β con ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ viene definido como: $f \in \beta \leftrightarrow f|_Y > 0$ para algún $Y \in \mathcal{U}_\beta$. □

Los órdenes que definen el mismo anillo de valoración W_β constituyen un abanico, que denotaremos F_β, cuyo número de elementos es $\#F_\beta = \#(\Gamma_\beta/2\Gamma_\beta) = \#(\mathcal{K}^*/\mathcal{K}^{*2}U_\beta)$. Además, cualquier abanico está contenido en la unión de 2 abanicos de este tipo, cf. [Ma2, 1.3, 3.1, 3.5]. Así pues, la determinación del número de elementos de $\Gamma_\beta/2\Gamma_\beta$ junto con la fórmula de estabilidad, cf. teorema 1.2.8, nos permitirán acotar el índice de estabilidad de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$.

Si $f \in \mathcal{K}$ denotaremos por $D(f) := \{x \in X | f_x \in \mathcal{O}(X_x)\}$ (donde $\mathcal{O}(X_x)$ representa el anillo de gérmenes de funciones analíticas en el punto $x \in X$). Definamos el ideal $I \subset \mathcal{O}(X)$ de denominadores de $f \in \mathcal{K}$ de la siguiente forma: $g \in I \leftrightarrow f = \frac{h}{g}$ para cierta $h \in \mathcal{O}(X)$. Se comprueba directamente que así definido I es efectivamente un ideal. $\mathcal{Z}(I)$ es un conjunto analítico global, cf. [Nar, Prop. V.16], por lo que podemos escribir $\mathcal{Z}(I) = \{x \in X | g_1(x) = \ldots = g_r(x) = 0\}$, donde podemos suponer que $g_i \in I$. De esta forma, $f = \frac{h_1}{g_1} = \ldots = \frac{h_r}{g_r}$, es decir, $f = \frac{h_1 g_1}{g_1^2} = \ldots = \frac{h_r g_r}{g_r^2}$ y, por tanto, $f = \frac{h_1 g_1 + \ldots + h_r g_r}{g_1^2 + \ldots + g_r^2}$. Así pues, dada $f \in \mathcal{K}$ siempre podemos representarla como h/g de forma que $x \in D(f) \leftrightarrow g(x) \neq 0$. Esta observación nos permite generalizar el lema 2.3 de la siguiente forma:

Lema 2.5 *Sea $f \in \mathcal{K}$ tal que $Y \subset D(f)$ para cierto $Y \in \mathcal{U}_\beta$. Si $f|_Y > 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u, g \in \mathcal{K}$ tales que $u \in U_\beta$, $u|_Y > 0$ y $uf = g^n$.*

Demostración: Podemos suponer que $f = h_1/g_1$, $g_1|Y \neq 0$ y que h_1 y g_1 son acotadas (dividiendo si es necesario por $1 + h_1^2 + g_1^2$). Como h_1 y g_1 tienen el mismo signo en todo punto de Y, si escribimos $f = \frac{h_1 g_1}{g_1^2}$ podemos aplicar el lema 2.3 al numerador y denominador de f obteniendo $u_1(h_1 g_1) = g_2^n$ y $u_2 g_1^2 = g_3^n$. Definiendo $u := \frac{u_1}{u_2}$ y $g := \frac{g_2}{g_3}$ se tiene el resultado. □

Vamos a denotar por $\mathcal{S}$ la familia de todos los subconjuntos semianalíticos globales abiertos de X. Al igual que ocurre con $\mathcal{C}$ esta familia es cerrada por uniones e intersecciones finitas lo que nos permitirá considerar filtros también en $\mathcal{S}$. Si $r \in \mathbb{R}^+$ definimos $A_{f,r} := \{x \in D(f) | f^2(x) < r^2\}$. Evidentemente, $A_{f,r} \in \mathcal{S}$. Estos conjuntos nos permiten definir un filtro de abiertos cuando X verifica H^{17}.

Lema 2.6 *Si X verifica H^{17} entonces $\mathcal{F}'_\beta := \{A_{f,r} | f \in \mathfrak{n}_\beta, r \in \mathbb{R}^+\}$ es una base de filtro en $\mathcal{S}$.*

Demostración: En primer lugar, veamos que $A_{f,r} \neq \emptyset$ si $f \in \mathfrak{n}_\beta$. Podemos escribir $f = f_1/f_2$ con $f_i \in \mathcal{O}(X)$. Supongamos que $A_{f,r} = \emptyset$, entonces $f^2 -$ ~~$r^2 \geq 0, \forall x \in D(f)$ y, por tanto, $f_1^2 - r^2 f_2^2 \geq$~~ $0, \forall x \in X$. Por la solución al problema 17 de Hilbert, $f_1^2 - r^2 f_2^2$ es una suma de cuadrados en $\mathcal{K}$ y, en consecuencia, positiva en todos los órdenes de $\mathcal{K}$, en particular, $f_1^2 - r^2 f_2^2 >_\beta 0$. Por tanto, $f_1^2/f_2^2 >_\beta r^2$ y $f = f_1/f_2 \notin \mathfrak{n}_\beta$, contradicción.

Finalmente, $A_{f,r_1} \cap A_{g,r_2} \neq \emptyset$ si $f, g \in \mathfrak{n}_\beta$ ya que si $r^2 = \text{mín}\{r_1^2, r_2^2\}$, entonces $\emptyset \neq A_{f^2+g^2,r^2} \subset A_{f,r_1} \cap A_{g,r_2}$. □

Al filtro de $\mathcal{S}$ que define $\mathcal{F}'_\beta$ (cuando X verifica H^{17}) lo denotaremos por $\mathcal{F}_\beta$. Este filtro nos permitirá caracterizar los elementos del anillo de valoración W_β, en concreto:

Lema 2.7 *Si X verifica H^{17}, entonces*

a) $W_\beta = \{f \in \mathcal{K} | \ f$ *está acotada en algún abierto de* $\mathcal{F}_\beta\}$

b) $\mathfrak{n}_\beta = \{f \in W_\beta | \ f$ *no está acotada inferiormente en ningún abierto de* $\mathcal{F}_\beta\}$

c) $U_\beta = \{f \in W_\beta | \ f$ *está acotada inferiormente en algún abierto de* $\mathcal{F}_\beta\}$

Demostración: a) Supongamos que $g \in \mathcal{K}$ está acotada en $V \in \mathcal{F}_\beta$, es decir, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{g^2 < r^2\} \in \mathcal{F}_\beta$. Si $g \notin W_\beta$, entonces por ser W_β un anillo de valoración, $1/g \in \mathfrak{n}_\beta$ y será $\{1/g^2 < 1/r^2\} \in \mathcal{F}_\beta$. Por tanto, $\{r^2 < g^2\} \in \mathcal{F}_\beta$, absurdo ya que $\{g^2 < r^2\} \in \mathcal{F}_\beta$ y $\mathcal{F}_\beta$ es un filtro de abiertos. En conclusión, $\{f \in \mathcal{K} | \, f$ está acotada en algún abierto de $\mathcal{F}_\beta\} \subset W_\beta$.

Sean $g \in W_\beta$ y $\lambda_\beta : W_\beta \to \mathbb{R}$ el lugar definido por W_β. Podemos escribir $g = \lambda_\beta(g) + g'$, con $g' \in \mathfrak{n}_\beta$. Como g' está acotada en algún abierto de $\mathcal{F}_\beta$ (por ejemplo, en $A_{g',r}$ con $r \in \mathbb{R}^+$) se tiene que g también lo está y, por tanto, $W_\beta \subset \{f \in \mathcal{K} | \, f$ está acotada en algún abierto de $\mathcal{F}_\beta\}$.

b) Sea $f \in \mathfrak{n}_\beta$. Si f estuviera acotada inferiormente en algún abierto de $\mathcal{F}_\beta$, es decir si existiera $V \in \mathcal{F}_\beta$ tal que $f^2|_V > r^2$ para cierto $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $V \cap A_{f,r} = \emptyset$, contradicción con el hecho de ser $\mathcal{F}_\beta$ un filtro.

Si f no está acotada inferiormente en ningún abierto de $\mathcal{F}_\beta$, entonces $1/f \notin W_\beta$, es decir, $f \in \mathfrak{n}_\beta$.

c) Se sigue directamente de a) y b). □

Observación 2.8

a) El lema anterior nos asegura que hay una correspondencia biunívoca entre los anillos de valoración W_β y los filtros $\mathcal{F}_\beta$. Sin embargo, puede haber órdenes con el mismo ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ pero con diferentes anillos de valoración asociados (y por tanto, diferentes filtros de abiertos).

b) Si $\mathcal{G}_\beta$ es un ultrafiltro de $\mathcal{S}$ que refina $\mathcal{F}_\beta$, entonces define un orden β' de la siguiente forma: $f >_{\beta'} 0 \leftrightarrow \{f > 0\} \in \mathcal{G}_\beta$. Se tiene que $\beta' \in F_\beta$, por lo que si se verifica H^{17} todo abanico del tipo F_β contiene, *al menos, un orden asociado a un ultrafiltro de abiertos. Por supuesto,* cuando se verifica Artin-Lang hay una correspondencia biunívoca entre los órdenes del abanico F_β y los ultrafiltros de $\mathcal{S}$ que refinan $\mathcal{F}_\beta$.

c) Si $A \in \mathcal{F}_\beta$ y B es cualquier conjunto semianalítico global cerrado tal que $B \supset A$, entonces $B \in \mathcal{U}_\beta$. En efecto, consideremos como en el apartado anterior un ultrafiltro $\mathcal{G}_\beta$ que refine $\mathcal{F}_\beta$. La familia de los conjuntos semianalíticos globales cerrados D tales que $\operatorname{Int} D \in \mathcal{G}_\beta$ es un filtro de $\mathcal{C}$ que denotaremos como $\overline{\nu}_\beta$. Una comprobación inmediata muestra que $\overline{\mathcal{V}}_\beta$ está contenido en $\mathcal{U}_\beta$. Obviamente, $A \in \mathcal{G}_\beta$, así que $B \in \overline{\mathcal{V}}_\beta$ y, por tanto, $B \in \mathcal{U}_\beta$. En particular, si X es una variedad analítica de dimensión 2 la adherencia de un subconjunto analítico global es un conjunto analítico global, cf.[Ca-An], y, en consecuencia, si $A \in \mathcal{F}_\beta$ entonces $\overline{A} \in \mathcal{U}_\beta$.

En cualquier caso, $\overline{A}$ corta a todos los cerrados de $\mathcal{U}_\beta$. De hecho $\mathcal{U}_\beta$ se extiende de forma única a un ultrafiltro de cerrados, cf. [Jw], que podemos denotar $\mathcal{U}^c_\beta$, verificándose en general que $\overline{A} \in \mathcal{U}^c_\beta$.

Ejemplo 2.9 Si $\mathcal{U}_\alpha$ es el ultrafiltro de cerrados que contienen el punto P, podemos encontrar diferentes filtros de abiertos asociados a ese $\mathcal{U}_\alpha$. Por ejemplo, ver figura 8.1, $\mathcal{F}_\alpha$ es el filtro de abiertos que contienen entornos de las semirramas α_1 y α_2 que pertenecen al mismo de germen de curva irreducible.

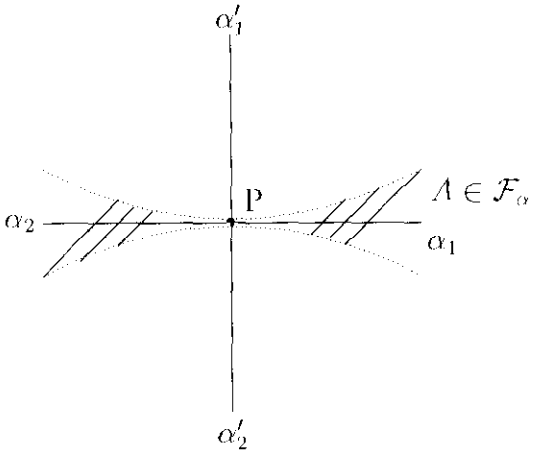


Figura 8.1

Hay 4 ultrafiltros de afiertos que refinan este filtro $\mathcal{F}_\alpha$ que se corresponden con los órdenes $\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}\}$, que son las generizaciones de $\widetilde{\alpha}_1$ y $\widetilde{\alpha}_2$. Estos 4 órdenes constituyen el abanico que hemos denominado F_α. La misma construcción puede realizarse a partir de cualquier otro germen de curva irreducible en el punto P, por ejemplo, la curva cuyas semirramas son α'_1 y α'_2, obteniendo el filtro $\mathcal{F}_{\alpha'}$.

Observemos también que $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha'}$ y que $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}_{\alpha'}$. Sin embargo, $W_\alpha \neq W_{\alpha'}$ ya que, por ejemplo, $y/x \in \mathfrak{n}_\alpha$ pero $y/x \notin \mathfrak{n}_{\alpha'}$, de hecho, $y/x \notin W_{\alpha'}$, como puede comprobarse utilizando la caracterización del lema 2.7. Análogamente se comprueba que $\frac{x+y}{x+y^2} \in U_\alpha$ pero $\frac{x+y}{x+y^2} \notin W_{\alpha'}$. A la vista de este ejemplo se puede concluir que son las funciones meromorfas (no analíticas) las que nos permiten distinguir los filtros $\mathcal{F}_\alpha$, y por tanto los abanicos F_α, con el mismo ultrafiltro de cerrados.

3 Conjuntos analíticos de dimensión 1

En este apartado vamos a estudiar los invariantes s, $\overline{s}$, t y $\overline{t}$ de un conjunto analítico X de dimensión 1. Es conocido que si X es regular se verifica la propiedad de Artin-Lang y $s(X) = \overline{s}(X) = t(X) = \overline{t}(X) = 1$, cf. [An-Be]. En el caso de que X sea singular, si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función no negativa entonces $f^{-1}(0)$ es un conjunto discreto (si f es no nula y X irreducible) y f será una suma de cuadrados de funciones meromorfas, cf. proposición 3.1, es decir, se verifica el problema 17 de Hilbert. Además, puesto que la normalización es birracional en dimensión 1, cf. teorema 3.2, se verifica también la propiedad de Artin-Lang, por lo que pueden generalizarse los resultados obtenidos en el caso regular.

Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto analítico global y $p \in X$, diremos que $\rho_p \in \mathcal{O}(X_p)$ es un *germen elíptico* si ρ_p no cambia de signo y $\mathcal{Z}(\rho_p) = \{p\}$. Si $\rho'_p \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)$ es un representante de $\rho_p \in \mathcal{O}(X_p) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)/\mathcal{J}(X_p)$, puede ocurrir que ρ_p sea elíptico en X y que ρ'_p no lo sea en $\mathbb{R}^n$. Ahora bien, la siguiente proposición nos asegura que en ese caso siempre podemos encontrar un representante elíptico en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.1 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico global y $D \subset X$ un subconjunto discreto de X. Si para cada $p \in D$ fijamos un germen analítico no negativo $\rho_p \in \mathcal{O}(X_p)$ tal que $\mathcal{Z}(\rho_p) = \{p\}$ entonces existe una función analítica $\xi \in \mathcal{O}(X)$ que es una suma de cuadrados de funciones meromorfas sobre X tal que $\mathcal{Z}(\xi) = D$ y $\xi_p\mathcal{O}(X_p) = \rho_p\mathcal{O}(X_p)$, $\forall p \in D$.*

Demostración: Si X es una variedad analítica entonces existe una función $\xi \in \mathcal{O}(X)$ tal que $\mathcal{Z}(\xi) = D$ y $\forall p \in D$, $\xi_p\mathcal{O}(X_p) = \rho_p\mathcal{O}(X_p)$, cf. [Bo-Rs, lem. 1]. En estas condiciones ξ es una suma de cuadrados de funciones meromorfas, cf. [Bo-Ku-Sh, Th. 1].

En el caso general, como $\rho_p \in \mathcal{O}(X_p)$ es semidefinida positiva se verifica que $\rho_p h_p^2 = g_{1,p}^2 + \ldots + g_{s,p}^2$, con $h_p, g_{i,p} \in \mathcal{O}(X_p)$ y $\mathcal{Z}(h) \subset \mathcal{Z}(\rho)$, cf. [Rz2, Prop. IV.5.2]. Sean ρ'_p y h'_p representantes de ρ_p y h_p, respectivamente, en $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)$. Sumando si es necesario una ecuación positiva de X_p podemos suponer que el germen $\rho'_p h'^2_p$ es elíptico en $\mathbb{R}^n$ (hay que tener en cuenta que si $g'_{1,p}, \ldots, g'_{s,p}$ son representantes en $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ de $g_{1,p}, \ldots, g_{s,p}$, respectivamente, entonces $g'^2_{1,p} + \ldots + g'^2_{s,p}$ es un representante de $\rho_p h_p^2$ no negativo en $\mathbb{R}^n$), es decir, $\mathcal{Z}(\rho'_p h'^2_p) = \{p\}$. Por la misma razón podemos suponer que h'^2_p también es elíptico en $\mathbb{R}^n$.

Ahora bien, puesto que el germen $\rho'_p h'^2_p$ es elíptico en $\mathbb{R}^n$ existe $\xi'' \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ suma de cuadrados de funciones meromorfas tal que $\mathcal{Z}(\xi'') = D$ y $\xi''_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p) = \rho'_p h'^2_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)$, $\forall p \in D$. De igual forma, existirá $H \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ suma de cuadrados de funciones meromorfas tal que $\mathcal{Z}(H) = D$ y $H_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p) = h'^2_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)$, $\forall p \in D$. Por tanto, $\xi' := \xi''/H$ es suma de cuadrados de funciones meromorfas y $\xi'_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p) = \rho'_p \mathcal{O}(\mathbb{R}^n_p)$, $\forall p \in D$. Si denotamos como $\xi \in \mathcal{O}(X)$ la clase de ξ' en $\mathcal{O}(X)$ se obtiene el resultado.

□

Evidentemente de esta proposición se sigue que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función no negativa tal que $f^{-1}(0)$ es un conjunto discreto entonces f es una suma de cuadrados de funciones meromorfas, lo que extiende el teorema 1 de [Bo-Ku-Sh] al caso singular. A partir de aquí, si X es de dimensión 1 e irreducible, cualquier función no negativa se puede expresar como una suma de cuadrados de funciones meromorfas, verificándose, por tanto, el problema 17 de Hilbert.

Para la propiedad de Artin-Lang en dimensión 1 necesitamos el siguiente teorema que nos asegura que la normalización es birracional en dimensión 1. De esta forma, si X es un conjunto analítico irreducible de dimensión 1 y X' es su normalización (que es una variedad analítica regular) se tiene que los cuerpos de funciones meromorfas $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(X')$ son isomorfos y, puesto que en $\mathcal{K}(X')$ se verifica la propiedad de Artin-Lang, también se verificará en $\mathcal{K}(X)$.

Teorema 3.2 *Si X es un conjunto analítico irreducible de dimensión 1 y $\pi : X' \to X$ su normalización, entonces los cuerpos de fracciones de $\mathcal{O}(X)$ y de $\mathcal{O}(X')$, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(X')$, respectivamente, son isomorfos.*

Demostración: La normalización $\pi : X' \to X$ induce una aplicación inyectiva entre los anillos de funciones analíticas $\pi^* : \mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(X')$ que se puede extender a los cuerpos de fraciones $\pi^* : \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X')$. Vamos a ver que π^* es el isomorfismo buscado entre $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(X')$.

Dada $f' \in \mathcal{O}(X')$ se puede definir $f \in \mathcal{O}(X \setminus D)$ ya que $\pi : X' \setminus \pi^{-1}(D) \to X \setminus D$, siendo $D \subset X$ un conjunto discreto, es un isomorfismo analítico. Sea ahora $p \in D$ y $X_p = X_{1,p} \cup \ldots X_{r,p}$ la descomposición del germen X_p en irreducibles. Puesto que π es sobreyectivo en dimensión 1, existe un entorno U de p tal que $\pi^{-1}(U) = W_1 \cup \ldots W_r$ y la restricción de π a cada W_i, induce la normalización de $X_{i,p}$. Como el anillo total de fracciones de $\mathcal{O}(X_p)$, que denotaremos como $\mathcal{K}(X_p)$, es isomorfo al producto $\Pi\mathcal{K}(X_{i,p})$, las restricciones de f' a cada W_i definen un elemento en $\mathcal{K}(X_p)$. Por consiguiente, el germen $f_p \in \mathcal{K}(X_p)$ está bien definido y podemos escribir $f_p = g_p/h_p$, con $g_p, h_p \in \mathcal{O}(X_p)$. Podemos suponer también que h_p es elíptico $\forall p \in D$ (en otro caso, multiplicamos y dividimos por h_p). Por la proposición anterior existe $H \in \mathcal{O}(X)$ suma de cuadrados de funciones meromorfas sobre X tal que $\mathcal{Z}(H) = D$ y $H_p\mathcal{O}(X_p) = h_p\mathcal{O}(X_p), \forall p \in D$. De esta forma, $fH \in \mathcal{O}(X)$ y, por tanto, $f \in \mathcal{K}(X)$. En conclusión, la aplicación π^* es biyectiva y, por tanto, un isomorfismo entre $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(X')$. □

Razonando como en la demostración de este teorema se concluye que si X es un conjunto analítico de dimensión 1 irreducible, entonces las secciones globales del haz de funciones meromorfas coinciden con las funciones del cuerpo de fracciones del anillo de funciones analíticas de X.

Teorema 3.3 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto analítico irreducible de dimensión 1, entonces $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)) = 1$.*

Demostración: Si X es regular $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)) = 1$, cf. [An-Be]. Si X no es regular, por el teorema anterior $\mathcal{K}(X)$ será isomorfo al cuerpo de fracciones de X', siendo X' regular, y, por lo tanto, $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)) = s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X')) = 1$.

□

Proposición 3.4 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico irreducible de dimensión 1, entonces $s(X) = 1$.*

Demostración: Sea $B = \{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\}$ un básico abierto. Por el teorema anterior, será genéricamente igual a $B' = \{f > 0\}$. En primer lugar, $Y := B' \setminus B$ será un conjunto discreto. Multiplicando f por una función no negativa que se anule en los punto de Y podemos suponer que $B \subset B'$. Ahora, $Y' := B \setminus B'$ es un conjunto discreto y cada punto $p \in Y'$ está en el interior de B', es decir, f_p es elíptico en cada punto de Y'. Existe una función analítica global f' que es suma de cuadrados de funciones meromorfas tal que $\mathcal{Z}(f') = Y'$ y $f'_p\mathcal{O}(X_p) = f_p\mathcal{O}(X_p)$, $\forall p \in Y'$. De esta forma, $f'' = f/f'$ es una función analítica global y $B = \{f'' > 0\}$. □

Proposición 3.5 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico irreducible de dimensión 1, entonces $\overline{s}(X) = t(X) = \overline{t}(X) = 1$.*

Demostración: Si B es un básico cerrado será $B \stackrel{g}{=} \{f \geq 0\} = B'$ y, multiplicando f por una función no negativa, como en la proposición anterior, que se anule en los puntos de $B' \setminus B$ podemos suponer que $B \subset B'$. Ahora, en los puntos de $Y = B' \setminus B$ el germen de f es elíptico. Existe una función analítica global f' que es suma de cuadrados de funciones meromorfas tal que $\mathcal{Z}(f') = Y$, $f'_p\mathcal{O}(X_p) = f_p\mathcal{O}(X_p)$, $\forall p \in Y$. De esta forma, $f'' = f/f'$ es una función analítica global y $B = \{f'' \geq 0\}$.

Por otra parte, cualquier conjunto semianalítico abierto será un básico abierto, cf. proposición 1.2.9, por lo que $t(X) = 1$. El mismo razonamiento se hace con los cerrados, utilizando la proposición 1.2.10, para concluir que $\overline{t}(X) = 1$. □

Los mismos resultados se obtienen si X es un conjunto analítico no irreducible.

Teorema 3.6 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico de dimensión 1, no necesariamente irreducible, entonces $s(X) = \overline{s}(X) = t(X) = \overline{t}(X) = 1$.*

Demostración: Podemos suponer que $X = \cup_1^\infty X_i$ donde cada X_i es un conjunto analítico irreducible de dimensión 1. Sea $r_i \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ una ecuación positiva de $\overline{X \setminus X_i}$ y $B = \{g_1 > 0, \ldots, g_s > 0\} \cap X$, $g_i \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, un básico abierto de X. Como cada X_i es irreducible, $B_i := B \cap X_i$ se podrá escribir, cf. proposición 3.4, como $B_i = \{h_i > 0\} \cap X_i$. Definiendo $f_x := \Sigma_{i \in J_x} h_{i,x} r_{i,x}$, con $J_x := \{i | x \in X_i\}$, se obtiene una sección global del haz $\mathcal{O}_X$. Puesto que X es coherente (tiene dimensión 1), esta sección global define una función analítica $f \in \mathcal{O}(X)$. De esta forma, B y $B' := \{f > 0\}$ se diferencian en un conjunto discreto. Razonando ahora como en la proposición 3.4 podemos concluir que $B = \{f'' > 0\} \cap X$ y, por tanto, $s(X) = 1$.

En cuanto a los otros invariantes, $\overline{s}$, t y $\overline{t}$, podemos repetir la demostración dada en la proposición 3.5. □

4 Variedades analíticas de dimensión 2

En esta sección X representará una variedad analítica paracompacta de dimensión 2. Por lo tanto, X verifica la propiedad de Artin-Lang, cf. [Ca1] y, *a fortiori*, H^{17}. Una de las consecuencias de la propiedad de Artin-Lang que utilizaremos es el Teorema del Ultrafiltro, cf. [Ca-An, Th. 2.2], que establece una correspondencia uno a uno entre los órdenes de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)$ y los ultrafiltros de $\mathcal{S}$. Concretamente, si $\beta \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)$ el ultrafiltro de abiertos correspondiente está definido como $\nu_\beta := \{S \in \mathcal{S} | \{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\} \subset S, f_1, \ldots, f_r \in \beta\}$. A la inversa, si ν_β es un ultrafiltro de $\mathcal{S}$, define un orden β de la siguiente manera: $f \in \beta \leftrightarrow \{f > 0\} \in \nu_\beta$.

Otra consecuencia de la propiedad de Artin-Lang es que puede asociarse a cada semianalítico global S de X un constructible de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)$, $\widetilde{S}$ definido por las mismas fórmulas que S. Aunque esta aplicación no es biyectiva, si $\widetilde{S} = \widetilde{T}$ entonces S y T son genéricamente iguales, cf. [Ca-An, Prop. 2.4].

Dentro de $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$ distinguiremos 3 tipos de órdenes y analizaremos en cada caso el cardinal del abanico F_β o, equivalentemente, de $\Gamma_\beta/2\Gamma_\beta$, para acotar el índice de estabilidad. El primer tipo de órdenes a considerar es el de aquéllos órdenes cuyo ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ no contiene ningún conjunto analítico propio. En este caso el abanico F_β contiene un único orden, cf. proposición 2.4, por lo que no representa ninguna obstrucción para la acotación del índice de estabilidad.

El segundo tipo es el de órdenes para los que $\mathcal{U}_\beta$ contiene algún conjunto analítico de dimensión 1 pero no contiene ningún conjunto discreto. Finalmente, el tercer tipo está constituido por los órdenes cuyo ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ contiene algún conjunto discreto. Estos dos últimos tipos son los que vamos a estudiar a continuación, aunque necesitaremos el siguiente resultado, cf. [Ca1, Prop. 3.3]

Proposición 4.1 *Sea $f \in \mathcal{O}(X)$. Existe una única función (salvo unidades) $f' \in \mathcal{O}(X)$ tal que:*

a) $\mathcal{Z}(f') = \{x \in X | f(x) = 0$ *y f cambia de signo en x*$\}$.

b) $\forall x \in \mathcal{Z}(f')$, $\mathcal{J}(\mathcal{Z}(f')_x) = f'_x\mathcal{O}(X_x)$*; en particular, f' cambia de signo en todos los puntos de $\mathcal{Z}(f')$.*

c) $f = f'\Sigma_1^r A_i^2$, *con* $A_i \in \mathcal{O}(X)$.

Ahora estamos en condiciones de demostrar la

Proposición 4.2 *Supongamos que $\mathcal{U}_\beta$ contiene algún conjunto analítico de dimensión 1 pero que no contiene ningún conjunto discreto, entonces $\frac{\Gamma_\beta}{2\Gamma_\beta}$ es isomorfo a un subgrupo de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.*

Demostración: Supongamos que $\Gamma_\beta \neq 2\Gamma_\beta$. Existirá $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $w(f) \notin 2\Gamma_\beta$. Evidentemente, $\mathcal{Z}(f) \in \mathcal{U}_\beta$ ya que en otro caso se podría escribir, cf. lema 2.3, $f = uh^2$ con $u \in U_\beta$. Factorizando f como en la proposición 4.1 se tendrá que $f = f'\Sigma_1^r A_i^2$. Si $\mathcal{Z}(f') \notin \mathcal{U}_\beta$ entonces $f' = u_1 h_1^2$ con $u_1 \in U_\beta$, es decir, $f = u_1 h_1^2 \Sigma_1^r A_i^2$ y, por tanto, $w(f) \in 2\Gamma_\beta$, contradicción. Así pues, $\mathcal{Z}(f') \in \mathcal{U}_\beta$.

Sea ahora $g \in \mathcal{O}(X)$ tal que $w(g) \notin 2\Gamma_\beta$. Al igual que antes se podrá escribir $f = g'\Sigma_1^s B_i^2$ con $\mathcal{Z}(g') \in \mathcal{U}_\beta$. Como g'/f' es analítica y no nula en

$\mathcal{Z}(f')\cap\mathcal{Z}(g') \in \mathcal{U}_\beta$, por el lema 2.5 se podrá escribir $g'/f' = u_2 h_2^2$ con $u_2 \in U_\beta$. Ahora, $g = (g'/f')(\Sigma_1^s B_i^2/\Sigma_1^r A_i^2)f'$ y, por lo tanto, $w(g) \in w(f') + 2\Gamma_\beta$, de donde se sigue el resultado. □

Teorema 4.3 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2, entonces* $s(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)) = 2$.

Demostración:

Sea $\beta \in \mathrm{Spec}_r\mathcal{K}$. Si $\mathcal{U}_\beta$ no contiene ningún conjunto discreto, entonces el número de elementos de F_β es 1 ó 2, cf. proposición 2.4 y 4.2, y cada abanico contiene como máximo la unión de 2 abanicos de este tipo.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}_\beta$ contiene un conjunto discreto $\{x_i\}_1^\infty$. Llamemos ν_β al ultrafiltro de $\mathcal{S}$ asociado a β y distingamos dos casos:

Caso a) Dado cualquier conjunto analítico global de dimensión 1, Y, existe $B \in \nu_\beta$ tal que $\overline{B} \cap Y$ es discreto.

Supongamos que el abanico F_β, constituido por todos los órdenes con el mismo anillo de valoración W_β, contiene un abanico con 8 órdenes $\{\beta_1 = \beta, \dots, \beta_8\}$. En lo ultrafiltros correspondientes $\nu_{\beta_1}, \dots, \nu_{\beta_8}$ podemos encontrar abiertos básicos $B_1, \dots, B_8$ tales que $B_i \in \nu_{\beta_i}$ y $\overline{B_i}\cap\overline{B_j} = \{x_k\}_1^\infty$ si $i \neq j$. En cada punto x_i ($\{x_i\}_1^\infty \in \mathcal{U}_\beta$) podemos encontrar dos polinomios $f_1^{(i)}$ y $f_2^{(i)}$ que separan localmente, en x_i, B_1 de $B_2, \dots, B_8$. Además, si $g_1^{(i)}, g_2^{(i)} \in \mathcal{O}(X_{x_i})$ tienen como formas iniciales $f_1^{(i)}$ y $f_2^{(i)}$, respectivamente, también separan B_1 de $B_2, \dots, B_8$. Por el teorema B de Cartan existen funciones analíticas globales f_1 y f_2 cuyos gérmenes en cada x_i tienen como formas iniciales $f_1^{(i)}$ y $f_2^{(i)}$, por lo que separarán globalmente B_1 de $B_2, \dots, B_8$ (ya que si U es un entorno abierto de $\{x_i\}_1^\infty$ entonces $B_j \cap U \in \nu_{\beta_j}$ y trabajaríamos con los abiertos $B_j \cap U$ en lugar de los B_j) y, por consiguiente, también β_1 de $\{\beta_2, \dots, \beta_8\}$, lo que es absurdo por ser $\{\beta_1, \dots, \beta_8\}$ un abanico.

Caso b) Existe un conjunto analítico global de dimensión 1, $Y = \mathcal{Z}(f)$, tal que $\dim(\overline{B} \cap Y) = 1, \forall B \in \nu_\beta$.

Como en el caso anterior, supongamos que $\{\beta_1 = \beta, \dots, \beta_8\}$ es un abanico de 8 elementos contenido en el abanico F_β. Sean $B_1, \dots, B_8$ básicos abiertos tales que $B_i \in \nu_{\beta_i}$. B_1 será adherente en cada x_i a alguna de las semirramas, llamémosla γ_i, definidas por $Y = \mathcal{Z}(f)$. Esa semirrama γ_i será adherente como máximo a dos básicos, por ejemplo, a B_1 y B_2. Cogemos ahora un polinomio $f_2^{(i)}$ que separe localmente γ_i de $B_3, \dots, B_8$. Al igual que antes definimos una función global que coincida con $f_2^{(i)}$ en cada x_i hasta un orden suficientemente alto. De esta forma $f_1 := f$ y f_2 separan B_1 de $B_2, \dots, B_8$ y, por tanto, β_1 de $\beta_2, \dots, \beta_8$, absurdo por tratarse de un abanico.

De esta forma, si $\mathcal{U}_\beta$ contiene un conjunto discreto el abanico F_β contendrá como máximo 4 elementos. Además, no puede haber ningún abanico $F = F_\beta \cup F_{\beta'}$ siendo F_β y $F_{\beta'}$ abanicos de 4 elementos distintos ya que, al igual que antes, podríamos encontrar dos funciones que aislaran un orden de F del resto, por lo que F no podría ser un abanico. □

El anterior teorema nos dice que genéricamente cualquier básico abierto se puede escribir con dos desigualdades. De hecho, no sólo genéricamente como afirma el siguiente

Teorema 4.4 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2, entonces $s(X) = 2$.*

Demostración: Sea $B = \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$ un básico abierto. Por el teorema anterior, $B \stackrel{g}{=} \{f > 0, g > 0\} = B'$. Además, si escogemos f y g libres de cuadrados, cf. [Ca1], podemos suponer que $B \subset B'$. Por tanto, $B' \setminus B$ estará contenido en un conjunto analítico global de dimensión 1, que tendrá una ecuación positiva r. En estas condiciones, $B = \{fr > 0, g > 0\}$ y se tiene el resultado. □

Vamos a continuar con el estudio de los invariantes $\bar{s}$, t y $\bar{t}$. Para ello necesitamos nuevamente la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz.

Proposición 4.5 (Desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz) *Sean X una variedad analítica de dimensión 2 y T un conjunto semianalítico global cerrado. Dadas $f, g \in \mathcal{O}(X)$ existen $p, q \in \mathcal{O}(X)$ tales que:*

a) $p > 0$, $q \geq 0$ *en* X

b) $\operatorname{sign}(pf+qg) = \operatorname{sign} f$ *en* T

c) $\{q=0\} = \overline{\{f=0\}\cap T}^{\mathcal{Z}}$

Demostración: Definamos $Y := \{f=0\}$ e $Y' := \overline{\{f=0\}\cap T}^{\mathcal{Z}}$. Si $Y = \cup_{i\in I} Y_i$ es la descomposición de Y en irreducibles, entonces $Y' = \cup_{i\in I'} Y_i$ con $I' \subset I$. Si llamamos $Y'' := \cup_{i\in I\setminus I'} Y_i$, entonces Y'' estará constituido por las componentes de Y que no cortan T.

Si $x \in Y'\cap Y''$ entonces se podrá escribir $f_x = h_{1,x}h_{2,x}$ con $\mathcal{Z}(h_{1,x}) = Y'_x$ y $\mathcal{Z}(h_{2,x}) = Y''_x$. Sea ahora $\mathcal{F}$ el haz coherente definido como

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} f_x^2\mathcal{O}(X_x) & \text{si } x\in Y'\setminus Y'' \\ h_{1,x}^2\mathcal{O}(X_x) & \text{si } x\in Y'\cap Y'' \\ \mathcal{O}_x(X) & \text{si } x\notin Y \end{cases}$$

Por ser $\mathcal{F}$ coherente existe un número finito de secciones globales $g_1,\dots,g_t$ que generan cada fibra $\mathcal{F}_x$, $x\in X$, cf. [Co]. Si $q := f^2+g_1^2+\dots+g_t^2$, tendremos que $\mathcal{Z}(q) = Y'$ y q/f será analítica en T ya que si $x \in Y\cap T$ entonces $x\in Y'\setminus Y''$, por lo que $g_{i,x} = a_{i,x}f_x^2$ y $\frac{q_x}{f_x} = \frac{f_x^2(1+a_{1,x}^2+\dots+a_{t,x}^2)}{f_x} \in \mathcal{O}(X_x)$. Por tanto, qg/f también es analítica en T y podremos encontrar $p\in\mathcal{O}(X)$ tal que $|qg/f| < p$ en T. De esta forma podemos asegurar que $\operatorname{sign}(pf+qg) = \operatorname{sign} f$ en T obteniéndose el resultado.

□

A partir de esta proposición se puede obtener como corolario la desigualdad de Hormänder-Lojasiewicz en su forma original, cf. [An-Brö-Rz2, 3.1.12], definiendo $\langle f,g\rangle(x) := \operatorname{sign} f(x) + \operatorname{sign} g(x)$.

HL: *Sean* $T\in\mathcal{C}$ *y* $f,g\in\mathcal{O}(X)$ *tales que* $\{f=0\}\cap T\subset\{g=0\}$. *Entonces existe* $f'\in\mathcal{O}(X)$ *tal que:*

a) $\operatorname{sign} f' = \operatorname{sign} f$ *en* T,

b) $\operatorname{sign} f' = \operatorname{sign} g$ *en* $\{f=0\}$ *y*

c) $\langle f,g\rangle(x) = \langle f', f'fg\rangle(x)$, $\forall x\in X$.

Demostración: Cogemos $f' = pf + qg$ según la proposición anterior. Por tanto, la condición a) se verifica.

Por otra parte, como $T \cap \{f = 0\} \subset \{g = 0\}$ entonces $\overline{T \cap \{f = 0\}}^{z} \subset \{g = 0\}$, es decir $\{q = 0\} \subset \{g = 0\}$ así que en $\{f = 0\}$ se tiene que $f' = qg$ y si $g \neq 0$ entonces $q > 0$. Por tanto, se tiene que $\operatorname{sign} f' = \operatorname{sign} g$ en $\{f = 0\}$.

En cuanto al apartado c), teniendo en cuenta que sign $\in \{-1, 0, 1\}$ se comprueba fácilmente caso por caso. □

Lema 4.6 *Sean X una variedad analítica de dimensión 2, $Y \subset X$ un conjunto analítico de dimensión 1 y $B \subset X$ un conjunto semianalítico global cerrado.*

Si $B \setminus Y = \{a_1 \geq 0, \ldots, a_k \geq 0\} \setminus Y$ y $B \cap Y = \{b_1 \geq 0, \ldots, b_l \geq 0\} \cap Y$, con a_i, $b_j \in \mathcal{O}(X)$, entonces existen $c_1, \ldots, c_m \in \mathcal{O}(X)$, $m \leq k + l$ tales que $B = \{c_1 \geq 0, \ldots, c_m \geq 0\}$.

Demostración: Multiplicando, si es necesario, las a_i por una ecuación positiva de Y podemos suponer que $Y \subset \{a_1 \geq 0, \ldots, a_k \geq 0\}$. Para cada $i = 1, \ldots, l$ definimos $B_i = B \cap \{b_i \leq 0\}$. Se tiene que $B_i \cap \{r = 0\} \subset \{b_i = 0\}$, así que por HL existe $c_{k+i} = p_i r + q_i b_i$ tal que $\operatorname{sign} c_{k+i} = \operatorname{sign} r$ en B_i y $\operatorname{sign} c_{k+i} = \operatorname{sign} b_i$ en Y. Además $c_{k+i} > 0$ en $B \setminus B_i$ (ya que en $B \setminus B_i$ es $b_i > 0$ y $c_{k+i} = p_i r + q_i b_i$).

Si hacemos, $c_i = a_i$, para $i = 1, \ldots, k$, entonces se tiene que $B = \{c_1 \geq 0, \ldots, c_m \geq 0\}$. □

Lema 4.7 *Sean X una variedad analítica de dimensión 2 y $S \subset X$ un conjunto semianalítico global abierto.*

Si Y es un conjunto analítico de dimensión 1 y $B_1, \ldots, B_l$ son básicos abiertos tales que $S \setminus Y = (B_1 \cup \ldots \cup B_m) \setminus Y$, $S \cap Y = (B_{m+1} \cup \ldots \cup B_l) \cap Y$, entonces existen $B'_1, \ldots, B'_l$, básicos abiertos, tales que $S = B'_1 \cup \ldots \cup B'_l$.

Demostración: Para $i = 1, \ldots, m$ definimos $B'_i := B_i \setminus Y$ que son básicos abiertos. De esta forma, $B'_1 \cup \ldots \cup B'_m = S \setminus Y$.

Para $i = m+1, \dots, l$ se podrá escribir $B_i = \{g_{i1} > 0,\, g_{i2}\}$ de tal forma que cada g_{ij} se anule en $\overline{\mathrm{Bd}B_i}^{Z}$ (en otro caso, se multiplicaría g_{ij} por una ecuación positiva de $\overline{\mathrm{Bd}B_i}^{Z}$). Sea ahora $D_i = (B_i \cup \overline{\mathrm{Bd}B_i}^{Z}) \setminus S$ y sea f una ecuación positiva de Y. Si $x \in D_i \cap Y$, se tendrá que $x \notin S$ (ya que $x \in D_i$) y, por lo tanto, $x \notin B_i$ (si $x \in B_i$ entonces $x \in B_i \cap Y \subset S \cap Y$, pero $x \notin S$), así que $x \in \overline{\mathrm{Bd}B_i}^{Z} \subset \{g_{ij} = 0\}$. En conclusión, $\{-f = 0\} \cap D_i \subset \{g_{ij} = 0\}$. Utilizando HL encontramos $g'_{ij} \in \mathcal{O}(X)$ tal que $\operatorname{sign} g'_{ij} = -\operatorname{sign} f$ en D_i, $\operatorname{sign} g'_{ij} = \operatorname{sign} g_{ij}$ en $\{-f = 0\} = Y$ y $\langle g'_{ij}, -g'_{ij} g_{ij} f\rangle = \langle g_{ij}, -f\rangle$.

Si ahora definimos $B'_i := \{g'_{i1} > 0,\, g'_{i2}\}$ para $i = m+1, \dots, l$ entonces se comprueba directamente que $S = B'_1 \cup \ldots \cup B'_l$. □

Proposición 4.8 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2 entonces* $\bar{s}(X) = 3$

Demostración: a) $\bar{s}(X) \le 3$: Si $B = \{f_1 \ge 0, \dots, f_r \ge 0\}$, entonces $B \overset{g}{=} \{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \overset{(s=2)}{=} \{f > 0,\, g > 0\} \overset{g}{=} \{f \ge 0,\, g \ge 0\}$. Es decir, $B \setminus Y = \{f \ge 0,\, g \ge 0\} \setminus Y$, siendo Y un conjunto analítico de dimensión 1, por lo que $B \cap Y = \{h \ge 0\} \cap Y$ ($\bar{s}(Y) = 1$). Ahora, por el lema 4.6, se tendrá que $B = \{c_1 \ge 0,\, c_2 \ge 0,\, c_3 \ge 0\}$.

b) $\bar{s}(X) \ge 3$: El conjunto básico cerrado $B = \{y \ge 0,\, y^2(x-1) \ge 0,\, x \ge 0\}$ (ver figura 8.2) no puede expresarse con dos desigualdades.

En efecto, supongamos que se pudiera escribir $B = \{f \ge 0,\, g \ge 0\}$. Una de las dos funciones, por ejemplo f, debe cambiar de signo en el eje-x. Sean α_1 y α_2 los órdenes centrados en el origen definidos por las semirramas $\{y = 0,\, x > 0\}$ y $\{y = 0,\, x < 0\}$, respectivamente, y sean $\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\}$ y $\{\alpha_{21}, \alpha_{22}\}$ sus generizaciones (ver figura 8.2). Como f es nula en los órdenes α_1 y α_2, la función g debe separar ambos órdenes. Supongamos que $g >_{\alpha_1} 0$ y $g <_{\alpha_2} 0$. Por tanto, g será positiva en α_{11} y en α_{12}. Por otro lado, como f cambia de signo en el eje-x será positiva en uno de estos dos órdenes, por ejemplo en α_{11}. De esta forma, f y g son positivas en α_{11}, absurdo.

Un ejemplo similar se puede construir si X es una variedad analítica distinta de $\mathbb{R}^2$.

□

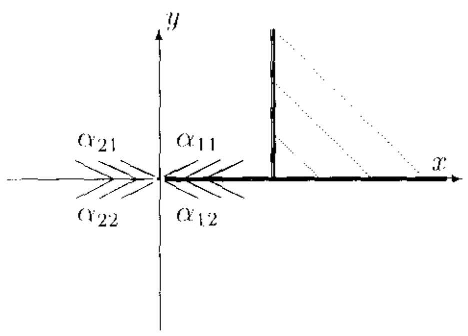


Figura 8.2

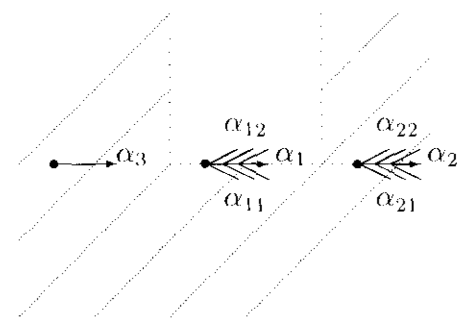


Figura 8.3

Proposición 4.9 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2 entonces* $t(\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)) = 2$.

Demostración: Puesto que $\mathrm{Spec}_r\mathcal{K}(X)$ es un espacio de órdenes con índice de estabilidad 2, el resultado se sigue directamente del corolario IV.7.9.a) de [An-Brö-Rz2]. □

Proposición 4.10 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2 entonces* $t(X) = 3$.

Demostración: a) $t(X) \leq 3$: Si C es un semianalítico abierto, por la proposición anterior será genéricamente igual a $B_1 \cup B_2$, es decir $C \setminus Y = (B_1 \cup B_2) \setminus Y$, donde Y es un conjunto analítico de dimensión 1 y B_1, B_2 son básicos abiertos. Por otra parte, $C \cap Y = B_3 \cap Y$ (ya que $t(Y) = 1$). Ahora, por el lema 4.7 se podrá escribir $C = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$.

b) $t(X) \geq 3$. El conjunto semianalítico definido como $C = \{y < 0\} \cup \{x < -1\} \cup \{x > 1, y > 0\}$ (ver figura 8.3) no puede escribirse como unión de dos básicos abiertos.

Supongamos que se puede escribir $C = B_1 \cup B_2$. Introduzcamos los órdenes α_1, α_2, α_3, α_{11}, α_{12}, α_{21} y α_{22} según se representan en la figura

8.3 y supongamos que $\alpha_{11} \in \widetilde{B_1}$. Puesto que $\alpha_1 \in \operatorname{Bd}\widetilde{B_1}$, entonces $Y := \{x = 0\} \subset \overline{\operatorname{Bd}B_1}^{Z}$ y como B_1 es básico tendremos que $\widetilde{Y} \cap \widetilde{B_1} = \emptyset$. Así pues, $Y \cap C \subset B_2$ y, en particular, $\alpha_3 \in \widetilde{B_2}$. Si $\alpha_{21} \in \widetilde{B_2}$ ó $\alpha_{22} \in \widetilde{B_2}$, al igual que antes tendríamos que $Y \cap B_2 = \emptyset$, lo que es absurdo. Por lo tanto, $\alpha_{21}, \alpha_{22} \in \widetilde{B_1}$. Pero $F := \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}\}$ es un abanico y $\#F \cap \widetilde{B_1} = 3$, contradicción.

□

Proposición 4.11 *Si X es una variedad analítica de dimensión 2 entonces $t(X) = 2$.*

Demostración: Sea S un semianalítico cerrado de X. Por la proposición 1.9 existirán B_1 y B_2 básicos cerrados tales que $[S \setminus (B_1 \cup B_2)] \cup [(B_1 \cup B_2) \setminus S] \subset Y$, donde Y es un conjunto analítico de dimensión 1. Definiendo $B_i' := (B_i \cup Y) \cap S$, se tiene que $S = B_1' \cup B_2'$, siendo cada B_i' un básico cerrado, cf. proposición 1.2.10. □

Bibliografía

[An-Be] C. Andradas, E. Becker: "A note on the real spectrum of analytic *functions on an analytic manifold of dimension one*". Lecture Notes in Math., **1420**, 1-21, Springer-Verlag (1990).

[An-Brö-Rz1] C. Andradas, L. Bröcker, J. Ruiz: "Minimal generation of basic open semianalytic sets". Invent. Math., **92**, 409-430 (1988).

[An-Brö-Rz2] C. Andradas, L. Bröcker, J. Ruiz: "Constructible sets in real geometry". Springer-Verlag (1996).

[An-Rz1] C. Andradas, J. Ruiz: "Algebraic and analytic geometry of fans". Memoirs AMS, **253**.

[An-Rz2] C. Andradas, J. Ruiz: "*On local uniformization of orderings*". AMS Contemporary Math. **155**, 19-46 (1994).

[A-McD] M. Atiyah, I.G. Macdonald: "Introducción al Álgebra Conmutativa". Reverté (1989).

[Be] E. Becker: "On the real spectrum of a ring and its applications to semialgebraic geometry". Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **15**, 19-60 (1986).

[Bi-Mi] E. Bierstone, P.D. Milman: "Local Resolution of Singularities". Lecture Notes in Math., **1420**, 42-64, Springer-Verlag (1990).

[B-C-R] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy: "Géométrie algébrique réelle". Springer-Verlag (1987).

[Bo-Ku-Sh] J. Bochnak, W. Kucharz, M. Shiota: "On equivalence of ideals of *real global analytic functions and the 17th Hilbert problem*". Invent. Math., **63**, 403-421 (1981).

[Bo-Rs] J. Bochnak, J. Risler: "Le théorème des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2". Ann. Sci. École Norm. Sup., **8**, 353-364 (1975).

[Brö1] L. Bröcker: "Minimale Erzeugung von Positivbereichen". Geom. Dedicata, **16**, 335-350 (1984).

[Brö2] L. Bröcker: "Spaces of orderings and semialgebraic sets". Quadratic and Hermitian Forms, Conf. Hamilton 1983, ed. I. Hambleton, C.R. Riehm, Canad. Math. Soc. Conf. Proc., **4**, 231-248 (1984).

[Brö3] L. Bröcker: "On basic semialgebraic sets". Expo. Math., **9**, 289-334 (1991).

[C] H. Cartan: "Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes". Bull. Soc. Math. France, **85**, 77-99 (1957).

[Ca1] A. Castilla: "Artin-Lang property for analytic manifolds of dimension two". Math. Zeit., **217**, 5-14 (1994).

[Ca2] A. Castilla: "Sums of 2n-th powers of meromorphic functions with compact zero set". Lecture Notes in Math., **1524**, 174-177, Springer-Verlag (1991).

[Ca-An] A. Castilla, C. Andradas: "Connected components of global semianalytic subsets of 2-dimensional analytic manifolds". J. Reine angew. Math., **475**, 137-148 (1996).

[Co] S. Coen: "Sul rango dei fasci coerenti". Boll. Un. Mat. Ital., **22**, 373-383 (1967).

[Fe-Re-Rz] F. Fernández, T. Recio, J. Ruiz: "Generalized Thom's Lemma in Semianalytic Geometry". Bull. Acad. Polon. Sci. Mathematics, **35**(5-6), 297-301, (1987).

[Gr] H. Grauert: "On Levi's Problem and the Imbedding of Real Analytic Manifolds". Ann. of Math., **68**(2) (1958).

[Gr-Rm] H. Grauert, R. Remmert: "Coherent Analytic Sheaves". *Grundlehren der matematischen Wissenchaften*, **265**, Springer-Verlag (1984).

[Gu-Ro] R. Gunning, H. Rossi: "Analytic functions of several complex variables". Prentice-Hall, N.J. (1965).

[Jw] P. Jaworski: "The 17-th Hilbert problem for noncompact real analytic manifolds". Lecture Notes in Math., **1524**, 289-295, Springer-Verlag (1991).

[Kn] M. Knebusch: "On the local theory of signatures and reduced quadratic forms". Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **51**, 149-195 (1981).

[L] S. Loiasiewicz: "Ensembles semianalytiques". Lecture Note at IHES, Bures-sur-Yvette, reproduit 466765, Ecole Polytechnique, Paris.

[Ma1] M. Marshall: "Separating families for semi-algebraic sets". Manuscripta Math., **80**, 73-79 (1993).

[Ma2] M. Marshall: "Spaces of orderings and abstract real spectra". Lecture Notes in Math., **1636**, Springer-Verlag (1996).

[Nar] R. Narasimhan: "Introduction to the theory of analytic spaces". Springer-Verlag (1966).

[Re-Pa] T. Recio, L. Pardo: "Rabin's width of a complete proof and the width of a semialgebraic set". Lecture Notes in Computer Sci., **378**, 456-463, Springer (1989).

[Rz1] J. Ruiz: "A note on a separation problem". Arch. Math., **43**, 422-426 (1984).

[Rz2] J. Ruiz: "The basic theory of power series". Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg (1993).

[Sch] C. Scheiderer: "Stability index of real varieties". Invent. math., **97**, 467-483 (1989).