UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Departamento de Algebra

SOBRE EL GRUPO DE PICARD EN SUBVARIEDADES DE CODIMENSIÓN PEQUEÑA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Jorge Caravantes Tortajada

Bajo la dirección del doctor:
Enrique Arredondo Esteban

Madrid, 2006

ISBN: 978-84-669-2939-4

Sobre el grupo de Picard en subvariedades de codimensión pequeña

por

Jorge Caravantes Tortajada

Licenciado en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Memoria presentada al
Departamento de Álgebra
para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Octubre, 2005

Dirigida por el profesor
Enrique Arrondo Esteban (Universidad Complutense de Madrid).

A Jara, que va a hacer una tesis fantástica.

Resumen

Este trabajo presenta un nuevo método para comprobar si una subvariedad lisa de codimensión pequeña hereda el grupo de Picard de su variedad ambiente (salvo divisibilidad). Aplicamos dicho método a subvariedades en grassmannianas de rectas y productos de espacios proyectivos, de forma que extendemos los resultados de Barth-Larsen para el espacio proyectivo y suavizamos las restricciones que se obtenían de los resultados de Barth-van de Ven y Sommese.

Agradecimientos

Cualquier defecto de la presente memoria es responsabilidad de su autor, pero la mayoría de las virtudes deben atribuirse a las siguientes personas a las que quiero agradecer.

En primer lugar a mi director Enrique Arrondo, por introducirme a la geometría algebraica, por cederme su extraordinaria idea para hacer la tesis y por corregirme mis innumerables errores durante la realización de la misma.

A Giorgio Ottaviani y José Carlos Sierra por sus consejos, que enriquecieron los resultados y abrieron nuevos caminos para aprovechar mejor el método.

A la gente del Depto. de Álgebra de la U.C.M. por sus ayudas con el formato y sus sonrisas cotidianas.

A Miles Reid y Gavin Brown, por abrirme a nuevas disciplinas en geometría algebraica durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Warwick. Y también a Ale Vidal, Dani Hernandez, Andrew Kresh, Peter Frenkel y demás gente que hizo dicha estancia un grato recuerdo.

Al equipo de rugby, al coro, a los amigotes (de Madrid y Alcublas), a la familia y, especialmente, a Jara, que hacen muy difícil dejar de dedicarse a ellos e intentarlo con las matemáticas.

“"Y de veras que nunca sabes lo pomposo que va a resultar algo hasta que lo ves impreso.”

Alisa Kwitney

Introducción

Las subvariedades lisas de codimensión pequeña sobre el cuerpo complejo tienen sus propiedades geométricas muy determinadas por las de la variedad ambiente. Por ejemplo, cuando la codimensión es igual a la dimensión de la subvariedad, la fórmula de autointersección da una relación entre los invariantes numéricos de la subvariedad (como ocurre para una curva en $\mathbb{P}^2$ o una superficie en $\mathbb{P}^4$). Cuanto menor sea la codimensión con respecto a la dimensión, más información numérica sobre la subvariedad proporciona la fórmula de autointersección. En el caso extremo en que la codimensión es uno, la subvariedad puede obtenerse como lugar de ceros de una sección de un fibrado lineal y, por tanto, todos sus invariantes están determinados por los invariantes del fibrado lineal. En codimensión dos la situación no es tan sencilla, si bien se sabe por la correspondencia de Hartshorne-Serre que la subvariedad es entonces lugar de degeneración de $r-1$ secciones de un fibrado de rango r (aunque se requiere para ello cierta anulación de cohomología). En codimensión superior se sabe muy poco en este sentido, habiendo sólo resultados parciales en codimensión 3 (véanse [W] y [EPW]).

En este contexto, el problema abierto más importante es la conjetura de Hartshorne (véase [H]) que afirma que toda subvariedad lisa X de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ con $3n > 2N$ es una intersección completa. Una posible evidencia para esta conjetura la constituyen los teoremas de Barth y Larsen que muestran que X hereda buena parte de la topología de $\mathbb{P}^N$. En concreto, se probó en [B] que $H^i(X, \mathbb{Q}) \cong H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{Q})$ si $i \leq 2n - N$, posteriormente en [BL] que $\pi_1(X) = 0$ si $N \leq 2n - 1$ y, finalmente en [L], que $H^i(X, \mathbb{Z}) \cong H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z})$ si $i \leq 2n - N$. Resultados de este estilo fueron demostrados por Barth y Van de Ven en [BV] para subvariedades de codimensión dos en grassmannianas de dimensión suficientemente alta, y por Sommese en [S] para subvariedades de variedades homogéneas (en particular productos de grassmannianas) pero con restricciones para la relación entre la dimensión y la codimensión más fuertes que en el caso de $\mathbb{P}^N$.

Estos teoremas implican que, si X es una subvariedad lisa de dimensión n en una variedad ambiente Y de dimensión N de las citadas anteriormente con n y N suficientemente cercanos (dependiendo de qué variedad es Y, por ejemplo, $N \leq 2n-2$ si $Y = \mathbb{P}^N$), el grupo de Picard de X está generado por las restricciones a X de los generadores del grupo de Picard de Y. Es decir, la subvariedad heredaría dicho grupo de Picard de la variedad ambiente. Es razonable entonces plantearse si esta herencia del grupo de Picard se puede justificar con argumentos algebraicos y no analíticos. Asimismo, la cuestión de la herencia del grupo de Picard en variedades de todo tipo plantea un problema atractivo. Por ejemplo, es natural preguntarse las condiciones en las que, cuando Y es una de las variedades ambiente estudiadas en [BV] y [S], X hereda el grupo de Picard de Y si $N \leq 2n-2$.

En este sentido, para una subvariedad X de codimensión dos en una grassmanniana de rectas $\mathbb{G}(1,n)$ con $n \geq 4$ (mientras que los resultados de [BV] y [S] son válidos para $n \geq 6$), Arrondo demuestra en [A] que el divisor canónico es, numéricamente, un múltiplo de la sección hiperplana. El método utilizado es, mediante la correspondencia de Hartshorne-Serre y la fórmula de Porteous, obtener una relación numérica que, usando el teorema del índice de Hodge, implica la subcanonicidad de una superficie sección hiperplana. La subcanonicidad de X se obtiene entonces mediante el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz y la fórmula de adjunción.

En esta tesis observamos que la relación numérica obtenida en [A] se puede conseguir para cualquier divisor de X y sin usar la correspondencia de Hartshorne-Serre, sino a partir de la fórmula de autointersección. A raíz de esta observación, desarrollamos un método para decidir cuándo una subvariedad hereda (numéricamente) el grupo de Picard de la variedad ambiente cuando $N \leq 2n-2$. Nuestro método se basa entonces en el teorema del índice de Hodge, la fórmula de autointersección y el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz (esto último hace pues que el método no sea puramente algebraico). Nuestro método precisa que en la variedad ambiente se verifiquen también ciertos resultados de irreducibilidad y lisitud en las intersecciones con determinados ciclos de Y; y, si queremos que el método funcione no sólo numéricamente, necesitaremos también la simple conexión de las subvariedades. Esto muestra hasta qué punto la herencia del grupo de Picard depende más de la relación $N \leq 2n-2$ que de que la variedad ambiente sea el espacio proyectivo.

En esta memoria ilustramos cómo funciona el método aplicándolo a espacios proyectivos, grassmannianas de rectas y productos de dos espacios proyectivos de la misma dimensión y cuádricas de dimensión par. El principal motivo para centrarnos en estas variedades ambiente (aparte de la sencillez del anillo de Chow de estas variedades) es que un trabajo de Debarre (véase [D]) proporciona resultados de irreducibilidad en las intersecciones oportunas y (excepto para las cuádricas) de simple conexión de las subvariedades. Los resultados son variados: si bien en espacios proyectivos se obtiene una versión un poco más débil del teorema de Barth-Larsen y en cuádricas el resultado es bueno o malo dependiendo de la dimensión, en grassmannianas de rectas y productos de espacios proyectivos isomorfos se hacen avances respecto a lo mostrado en [S]. La extensión a grassmannianas y productos de espacios proyectivos más generales se deja para futuras investigaciones, si bien hay razones sólidas para creer que los resultados seguirán siendo positivos. También lo hemos aplicado a ejemplos más concretos ($\mathbb{P}^6$ explotado en un punto y el producto cartesiano de $\mathbb{P}^5$ por una curva).

Esta memoria empieza con un capítulo de preliminares que serán de utilidad al lector aún menos experimentado que el que escribe. El segundo capítulo describe más a fondo la situación actual en cuanto a subvariedades de codimensión pequeña; incluye una sección dedicada a la correspondencia de Hartshorne-Serre y una última en la que redemuestra la propiedad de herencia del grupo de Picard (salvo divisibilidad en dicho grupo) proporcionada por el teorema de Barth-Larsen y se explica el método que presentamos con esta tesis. En los dos siguientes capítulos aplicamos el método satisfactoriamente a grassmannianas de rectas y productos de espacios proyectivos obteniendo un resultado análogo al de la sección final del Capítulo 2. Finalizamos experimentando el método con cuádricas otras variedades ambiente más concretas y de distintas propiedades con resultados diversos y planteando cuestiones a resolver a partir de los resultados expuestos a lo largo de la presente memoria.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo mostramos los resultados previos que necesitaremos para demostrar los de los siguientes capítulos. Se ha intentado hacer una presentación lo más autocontenida posible, indicando aquellas demostraciones o ideas cuya brevedad lo permita. En cualquier caso, la referencia básica para los resultados citados es, salvo que se indiquen otras, [Ha]. En la primera sección recordamos las nociones mínimas de teoría de intersección que usaremos a menudo. En una segunda sección, recordamos la fórmula de autointersección y obtenemos a partir de ella otra fórmula imprescindible para el método que desarrollamos en la presente tesis. Seguiremos con otra sección en la que recordamos el Teorema del índice de Hodge, que será básico en los siguientes capítulos. La cuarta sección recordará el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz, resultado que también usaremos de forma continua. A continuación presentamos en dos secciones los fibrados universales y el cálculo de Schubert de grassmannianas. La última sección contiene teoremas tipo Bertini para la irreducibilidad y lisitud de la intersección con subvariedades generales obtenidas como lugar de degeneración de secciones de fibrados.

Como ya hemos mencionado en la introducción, todas las variedades y esquemas se considerarán sobre $\mathbb{C}$.

1.1 Intersecciones, anillos de Chow y divisores

En esta sección recordamos algunas nociones de teoría de intersección que pueden encontrarse bien desarrolladas en [F].

Definición Dada una variedad algebraica X, un *ciclo* es una combinación lineal con coeficientes enteros de subvariedades irreducibles de X.

Dos ciclos Z_1, Z_l de dimensión pura l son *racionalmente equivalentes* (escribiremos $Z_1 \sim Z_l$ cuando existen ciclos $Z_2, ..., Z_{l-1}$ de dimensión l tales que: para todo $i = 1, ..., l-1$, existe un ciclo Z'_i de dimensión $l+1$ que contiene a Z_i y Z_{i+1} de forma que Z_i y Z_{i+1} son divisores linealmente equivalentes en Z'_i, es decir, existe $f \in K(Z'_i)$ tal que $Z_i - Z_{i+1}$ es el lugar de ceros de f menos el de polos.

El *grupo de Chow* de grado i de X $A^i(X)$ es el conjunto cociente de los ciclos de codimensión i módulo la equivalencia racional. Dado un subesquema $Z \subset X$, notaremos por $[Z]_X$ o bien por $[Z]$ a su clase en $A(X)$.

Obviamente, en el caso $i = 1$, obtenemos la equivalencia lineal de divisores y $A^1(X)$ es el grupo de Picard de X, que notaremos por Pic$X$.

Observación 1.1 Existe un producto de intersección $A^i(X) \times A^j(X) \to A^{i+j}(X)$ que respeta dicha relación de equivalencia y que da a $A(X) := \bigoplus A^i(X)$ estructura de anillo graduado. Dicho anillo se conoce como *Anillo de Chow* de X.

Además, como la única subvariedad irreducible de dimensión cero es el punto, se puede definir una función *grado* $A^{\dim X}(X) \to \mathbb{Z}$ de modo que a cada ciclo $\sum a_i P_i$ se le asocia el entero $\sum a_i$. De hecho, lo normal es que cuando se tienen dos ciclos Z_1, Z_2 de dimensiones i, j complementarias (i.e. $i + j =$dim$X$), se abusa de notación escribiendo $Z_1 Z_2$ para nombrar al grado del ciclo en lugar del ciclo en sí.

Ejemplo 1.2 En el caso de $\mathbb{P}^n$, la equivalencia racional viene dada por la codimensión y el grado. Su anillo de Chow es

$$A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$$

donde h es la clase del hiperplano. Así, un subesquema irreducible de grado d y codimensión i estará representado por dh^i. Esto respeta lo dicho sobre intersección de ciclos: $(dh^i)(eh^j) = deh^{i+j}$ y extiende el teorema de Bézout, que sostiene que en $\mathbb{P}^n$ dos subesquemas de codimensiones i y j y grados d y e generales se intersecan en un esquema de codimensión $i+j$ y grado de.

Dado este producto podemos definir otra relación de equivalencia:

Definición Dados dos ciclos Z_1, Z_2 en X de codimensión pura p, decimos que son *numéricamente equivalentes* (y notamos $Z_1 \equiv_{\text{num}} Z_2$) cuando para toda subvariedad $Z \subset X$ de dimensión p, los productos de intersección $Z_1 Z$ y $Z_2 Z$ tienen el mismo grado.

Observación 1.3 Veamos la relación del anillo de Chow con la topología de X (para más información, ver el capítulo 19 de [F]).

A todo ciclo de dimensión d en una variedad compleja X de dimensión n se puede asignar una clase de cohomología singular en $H^{2n-2d}(X, \mathbb{Z})$. Esta asignación es compatible con la equivalencia racional y el producto de clases de cohomología es compatible con el de $A(X)$. De hecho se tiene que, dados dos ciclos Z_1, Z_2:

$$Z_1 \sim Z_2 \Rightarrow Z_1 \equiv_{\text{hom}} Z_2 \Rightarrow Z_1 \equiv_{\text{num}} Z_2 \tag{1.1}$$

donde $Z_1 \equiv_{\text{hom}} Z_2$ significa que sus clases en $H^{2n-2d}(X, \mathbb{Z})$ coinciden.

En consecuencia tenemos epimorfismos:

$$A^i(X) \xrightarrow{f_i} A^i(X)/\equiv_{\text{hom}} \to A^i(X)/\equiv_{\text{num}}$$

donde $A^i(X)/\equiv_{\text{hom}} \subset H^{2n-2d}(X, \mathbb{Z})$. En particular, dado el isomorfismo $H^1(\mathcal{O}_X^*) \simeq \text{Pic}X \simeq A^1(X)$, se tiene que f_1 compuesto con la inclusión $A^i(X)/\equiv_{\text{hom}} \to H^{2n-2d}(X, \mathbb{Z})$ es precisamente el homomorfismo $H^1(\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ dado por la sucesión de cohomología asociada a la sucesión exponencial:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0 \tag{1.2}$$

y, por tanto,

$$\ker f_1 = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

que, por teoría de Hodge, es un toro.

Observación 1.4 Existe también otra equivalencia de ciclos, llamada algebraica, que coincide en el caso de los divisores con la equivalencia como ciclos topológicos. Dado que el único morfismo que nos interesa en esta tesis es el f_1, no nos extendemos más sobre la equivalencia algebraica.

Ejemplo 1.5 La equivalencia numérica de ciclos en $\mathbb{P}^n$ es la misma que la lineal (y, por lo tanto, la homológica también).

Definición Llamaremos grupo de Néron-Severi $N^1(X)$ al grupo de divisores de la variedad X módulo la equivalencia numérica anteriormente definida (algunos autores, por ejemplo [Ha], llaman grupo de Néron-Severi a $A^1(X)/\equiv_{\text{hom}}$; nosotros seguimos la definición, entre otros, de [L]).

Con esta definición, $N^1(X)$ no puede tener torsión y, dado que por la Observación 1.3, $N^1(X)$ es un subgrupo de $H^2(X,\mathbb{Z})$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.6 (Néron-Severi) *Dada una variedad X, el grupo $N^1(X)$ es libre y finitamente generado.*

De hecho, sobre el morfismo f_1 de la observación 1.3 se sabe más:

Teorema 1.7 *Todo fibrado/divisor numéricamente trivial tiene un múltiplo homológicamente trivial (i.e. $D \equiv_{\text{num}} 0 \Rightarrow mD \equiv_{\text{hom}} 0$ para algún $m > 0$), es decir, el núcleo de $Pic(X)/\equiv_{\text{hom}} \to N^1(X)$ es la torsión.*

Demostración. Véase [La] (si bien el resultado original aparece en [G]). □

El Teorema 1.7 nos permite demostrar un resultado más potente cuando la variedad es simplemente conexa (Teorema 1.9), pero antes necesitamos el siguiente

Lema 1.8 *Si X es simplemente conexa, entonces $PicX$ carece de torsión.*

Demostración. Si $L \in \mathrm{Pic}X$ es un elemento de torsión de orden r, entonces se puede construir a partir de L un recubrimiento cíclico $\tilde{X} \to X$ de grado r (véase por ejemplo [La]). Por tanto, X no sería simplemente conexo. □

Teorema 1.9 *Sea X una variedad simplemente conexa. Entonces $PicX = N^1(X)$.*

Demostración. Por (1.3), $\ker f_1$ es un toro (que tiene torsión si es no trivial), luego por el Lema 1.8, $\ker f_1 = 0$, y por tanto, $\mathrm{Pic}X \subset H^2(X, \mathbb{Z})$, es decir, $\mathrm{Pic}X/ \equiv_{\mathrm{hom}} = \mathrm{Pic}X$. Por el Teorema 1.7, como el Picard no tiene torsión, se tiene el isomorfismo $\mathrm{Pic}X \simeq N^1(X)$. □

Terminamos la sección recordando otros resultados bien conocidos para divisores. Primero un resultado elemental sobre amplitud.

Teorema 1.10 *Dado un divisor D y un divisor amplio H, se tiene que para todo $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, $D + kH$ es muy amplio.*

Demostración. Véase [Ha]. □

Por último, dos teoremas de anulación:

Teorema 1.11 (Kodaira) *Sea X una variedad lisa de dimensión n y sea D un divisor amplio en X. Entonces $h^i(X, \mathcal{O}(-D)) = 0$ para todo $i = 0, ..., n - 1$.*

Demostración. Véase [GH]. □

Antes del siguiente teorema recordamos unas definiciones.

Definición Un divisor D en X es *nef* si para toda curva $C \subset X$, el producto de intersección $D[C]$ es no negativo.

Un divisor D nef es *big* si $D^n > 0$.

Lema 1.12 *Sea L un divisor nef sobre una variedad lisa y proyectiva X de dimensión n. Supongamos que $L^{n-k}H^k > 0$ donde H es un divisor nef y big (en particular, es válido si H es amplio) y $0 \leq k \leq n - 2$. Entonces $h^1(-L) = 0$.*

Demostración. Véase [BeS]. □

1.2 Fórmula de autointersección

En esta sección recordamos la fórmula de autointersección y una consecuencia suya que nos será de gran utilidad para el desarrollo del método que presentamos en esta tesis.

Definición Sea X una variedad lisa irreducible. Sea E un fibrado vectorial sobre X de rango r. Sean $\mathbb{P}(E)$ el proyectivizado de hiperplanos de E y su fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ definidos según [Ha, II,7]. Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ la proyección natural. Las *clases de Chern* $c_0(E), ..., c_r(E)$ de E son los únicos elementos del anillo de Chow de X que verifican $c_0(E) = 1$ y:

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \pi^*(c_i(E))\xi^{r-i} = 0$$

donde ξ es el divisor asociado a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$

Observación 1.13 Hay una manera de entender las clases de Chern más intuitiva cuando E está generado por sus secciones globales:

Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre una variedad X. Si E es globalmente generado, la i-ésima clase de Chern $c_i(E)$ es la clase en $A^i(X)$ del lugar geométrico donde $r - i + 1$ secciones generales de E tienen rango $r - i$.

Teorema 1.14 (fórmula de autointersección) *Dada $X \subset Y$ lisas, se verifica la siguiente fórmula de autointersección:*

$$([X]_Y)_{|X} = c_e(\mathcal{N}_{X/Y}) \tag{1.4}$$

donde e es la codimensión de X en Y y $\mathcal{N}_{X/Y}$ representa el fibrado normal de X en Y.

Demostración. Véase [F], Corollary 6.3. □

Veamos cómo esta fórmula da restricciones a los invariantes de subvariedades de codimensión pequeña.

Ejemplo 1.15 Sea C una curva lisa de grado d en $\mathbb{P}^2$. Como, en C, el fibrado cotangenete es el haz dualizante, tenemos:

$$0 \to \mathcal{O}(-K_C) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}|_C \to \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^2} \to 0$$

Luego $K_{\mathbb{P}^2} = K_C - c_1(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^2})$. Por el Teorema tenemos la conocida fórmula de adjunción:

$$K_C = (K_{\mathbb{P}^2} + C)|_C$$

Tomando grados se tiene $2g - 2 = (-3 + d)d$, de donde se obtiene la famosa fórmula:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Ejemplo 1.16 Sea S una superficie lisa S en $\mathbb{P}^4$. En [Ha, Appendix A, Example 4.1.3] se usa la fórmula de autointersección para obtener la siguiente relación entre el grado d de S y el género aritmético p_a (dependiendo del canónico de la superficie):

$$d^2 - 10d - 5HK - 2K^2 + 12 + 12p_a = 0$$

donde H es la clase de la sección hiperplana, K la del divisor canónico y d el grado de la superficie en $\mathbb{P}^4$.

Análogamente, para subvariedades de codimensión dos en $\mathbb{G}(1,3)$ y codimensión tres en $\mathbb{G}(1,4)$ existen fórmulas similares (véase por ejemplo [Ar]) que se han utilizado continuamente en el estudio de tales subvariedades.

Aplicamos ahora la fórmula de autointersección a un caso concreto, lo que nos permitirá obtener la fórmula (1.6), que, sorprendentemente, será clave en el método que desarrollamos en la presente memoria.

Observación 1.17 Sean $D \subset X \subset Y$ lisas de dimensiones $n-1, n$ y $2n-2$ respectivamente. El siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas de fibrados vectoriales en D

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{T}_D & \to & (\mathcal{T}_X)|_D & \to & \mathcal{N}_{D/X} & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{T}_D & \to & (\mathcal{T}_Y)|_D & \to & \mathcal{N}_{D/Y} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & (\mathcal{N}_{X/Y})|_D & = & (\mathcal{N}_{X/Y})|_D & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

(donde $\mathcal{T}$ indica un fibrado tangente y $\mathcal{N}$ uno normal) induce una sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{N}_{D/X} \to \mathcal{N}_{D/Y} \to (\mathcal{N}_{X/Y})_{|D} \to 0 \tag{1.5}$$

Entonces las clases de Chern máximas cumplen:

$$c_{n-1}(\mathcal{N}_{D/Y}) = c_{n-2}(\mathcal{N}_{X/Y})c_1(\mathcal{N}_{D/X})$$

o, lo que es lo mismo, usando la fórmula de autointersección para cada una de las inclusiones en $D \subset X \subset Y$:

$$P := ([D]_Y^2) - [D]_X^2([X]_Y)|_X = 0 \tag{1.6}$$

donde el producto de intersección del primer sumando se realiza en el anillo de Chow de Y y el del segundo en el anillo de Chow de X.

1.3 Teorema del índice de Hodge

El teorema del índice de Hodge relaciona las intersecciones posibles entre dos o más divisores en una superficie irreducible lisa. También tiene implicaciones de dependencia numérica. Este teorema nos va a ser muy útil para el método que desarrollamos en la presente memoria.

Teorema 1.18 (del índice de Hodge) *Sea S una superficie lisa y sean H un divisor amplio y D un divisor cualquiera en S. Entonces*

$$HD = 0 \Rightarrow D^2 \leq 0$$

con igualdad si y sólo si D es numéricamente trivial.

Demostración. Véanse por ejemplo [Be], [Ha] o [R]. □

Observación 1.19 El teorema del índice de Hodge se suele formular también de la siguiente forma equivalente (en las mismas condiciones del teorema):

Para todo D' divisor de S,

$$\begin{vmatrix} H^2 & D'H \\ D'H & D'^2 \end{vmatrix} \leq 0$$

con igualdad si y sólo si D' es numéricamente un múltiplo de H.

Para probarlo vale con realizar la substitución $D' := D - \frac{HD}{H^2}H$.

Observación 1.20 Es evidente que el resultado de la Observación 1.19 es válido para dos divisores que generan uno amplio (sin necesidad de que uno de ellos lo sea).

Las observaciones anteriores se pueden generalizar en realidad a cualquier cantidad de divisores del siguiente modo:

Corolario 1.21 *Dados los divisores $D_1, ..., D_r$ de modo que (numéricamente) generan un divisor amplio, entre los autovalores de su matriz de intersección sólo uno es positivo; y si alguno es cero, existe una combinación no trivial de los divisores que define un divisor numéricamente equivalente a cero.*

En particular, para el caso $r = 2$ se obtiene la Observación 1.19 y para el caso $r = 3$ se obtiene que el determinante

$$\begin{vmatrix} D_1^2 & D_1D_2 & D_1D_3 \\ D_1D_2 & D_2^2 & D_2D_3 \\ D_1D_3 & D_2D_3 & D_3^2 \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

es mayor o igual que cero, con igualdad si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de D_1, D_2, D_3 que es numéricamente equivalente a cero.

Demostración. El Teorema de Néron-Severi afirma que $N^1(X)$ es un grupo libre finitamente generado, por lo que podemos considerar el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión finita $N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. El producto de intersección se puede extender a espacio vectorial como una forma bilineal simétrica. Dicha forma es diagonalizable de forma que la primera entrada de su matriz es la autointersección de H. Es decir, que existen $D_1, ..., D_{r-1}$ que forman una base junto a H de modo que el producto de intersección es:

	H	D_1	...	D_{r-2}	D_{r-1}
H	a_0	0	...	0	0
D_1	0	a_1	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
D_{r-2}	0	0	...	a_{r-2}	0
D_{r-1}	0	0	...	0	a_{r-1}

Por ser H amplio, a_1 es estrictamente positivo. Ahora aplicamos la Observación 1.19 a H y cualquiera de los D_i y obtenemos que $a_1, ..., a_{r-1}$ son todos np positivos y cuando algún a_{i_0} se anule, el D_{i_0} correspondiente es numéricamente trivial, por los que existe una combinación no trivial lineal de los D_i originales que es numéricamente equivalente a cero (la que resulta D_{i_0}). □

1.4 Teorema de la sección hiperplana de Lefschetz

Recordamos en esta sección el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz, que implica la conservación del grupo de Picard por la sección hiperplana. Este teorema es también muy importante en el método que se explica en la Sección 2.3.

Teorema 1.22 (de la sección hiperplana de Lefschetz) *Sea X una variedad lisa de dimension n con un divisor D liso, irreducible y amplio. Entonces los morfismos de restricción naturales:*

$$H^i(X,\mathbb{Z}) \to H^i(D,\mathbb{Z})$$

$$H^i(X,\mathbb{Q}) \to H^i(D,\mathbb{Q})$$

son isomorfismos para $i \leq n-2$ y monomorfismos para $i = n-1$

Demostración. Véase por ejemplo [GH] para la cohomología con coeficientes en $\mathbb{C}$ (y, por tanto, también para $\mathbb{Q}$) y [La] para la cohomología en $\mathbb{Z}$. □

Corolario 1.23 *Sea X una variedad lisa de dimension n con un divisor D amplio. Las restricciones naturales:*

$$\mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}D$$

$$N^1(X) \to N^1(D)$$

son isomorfismos para dim$X \geq 4$ y monomorfismos para dim$X = 3$.

Demostración. Considérese la restricción entre las sucesiones de cohomología asociadas a las sucesiones exponenciales dadas por (1.2) asociadas a X y D:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & H^1(X,\mathbb{Z}) & \to & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \to & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) & \to & H^2(X,\mathbb{Z}) & \to \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & H^1(D,\mathbb{Z}) & \to & H^1(D,\mathcal{O}_D) & \to & H^1(D,\mathcal{O}_D^*) & \to & H^2(D,\mathbb{Z}) & \to
\end{array}$$

Las restricciones de los extremos son isomorfismos por el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz. Por el Lema de los cinco, sólo hace falta ver que la restricción $H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(D, \mathcal{O}_D)$ es biyectiva, pero eso se obtiene aplicando el teorema de anulación de Kodaira (Teorema 1.11) a $H^0(X, \mathcal{O}_X(-D))$ y a $H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))$ en la sucesión de cohomología asociada a

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$

Para el grupo de Néron-Severi, sea D' un divisor tal que $D'_{|D} \equiv_{\text{num}} 0$. Por el Teorema 1.7, existe $m \in \mathbb{Z}$ no nulo tal que $mD'_{|D} \equiv_{\text{hom}} 0$. Como la restricción $H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(D, \mathbb{Z})$ es isomorfismo por el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz, tenemos que $mD' \equiv_{\text{hom}} 0$. En consecuencia, por (1.1), $mD' \equiv_{\text{num}} 0$, de donde concluimos que $D' \equiv_{\text{num}} 0$. $\square$

1.5 Fibrados universales en grassmannianas de rectas

En esta sección recordamos dos fibrados de gran importancia para trabajar con grassmannianas. Recordaremos resultados importantes que usaremos en las secciones, que contienen información necesaria para el capítulo 3.

Sea V el espacio $n+1$-dimensional tal que $\mathbb{P}^n$ es el conjunto de hiperplanos vectoriales de V (o de rectas vectoriales de V^*). Equivalentemente, $V = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Llamamos $\mathbb{G}(1,n)$ a la grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^n$ o, equivalentemente, el conjunto de planos vectoriales de V^*. Podemos considerar el siguiente diagrama de incidencia:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q^\vee & := & \{(v,L) \in V^* \times \mathbb{G} | v \in L\} \\ & \overset{p}{\swarrow} & & \overset{q}{\searrow} & \\ \mathbb{P}^n & & & & \mathbb{G} \end{array}$$

donde p y q son las proyecciones naturales. Entonces la proyección q da a $Q^\vee$ una estructura de fibrado vectorial sobre $\mathbb{G}$. La inclusión de $Q^\vee$ en el fibrado trivial $\mathbb{G} \times V^*$ genera una sucesión exacta (vista como sucesión de haces localmente libres)

$$0 \to Q^\vee \to V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to S \to 0 \tag{1.8}$$

que define un fibrado S. Dualizando (1.8) obtenemos:

$$0 \to S^{\vee} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to Q \to 0 \tag{1.9}$$

Definición Los fibrados $S^{\vee}$ y Q son el *subfibrado universal* y el *fibrado universal cociente* respectivamente.

Observación 1.24 Las sucesiones (1.8) y (1.9) implican que S y Q están generados por sus secciones globales.

1.6 Cálculo de Schubert

Recordamos ahora los ciclos más importantes de las grassmannianas de rectas, que son de gran importancia en el Capítulo 3.

Definición Sea $\mathbb{G}(1,n)$ la grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^n$. Notamos por $\Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b)$ a la variedad de Schubert formado por todas las rectas que cortan al $\mathbb{P}^a$ y están contenidas en el $\mathbb{P}^b$ ambos fijos, y con $\mathbb{P}^a \subset \mathbb{P}^b$.

Notaremos por $\Omega(a,b)$ al *ciclo de Schubert* que es la clase de $\Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b)$ en el anillo de Chow de $\mathbb{G}(1,n)$.

La estructura de producto de los ciclos $\Omega(a,b)$ (que generan el anillo de Chow de $\mathbb{G}(1,n)$) es lo que se conoce como cálculo de Schubert, que puede encontrarse desarrollado en [KL]. Indicamos a continuación los puntos concretos que nos interesan.

Observación 1.25 Algunas propiedades básicas de los ciclos de Schubert son las siguientes:

1. La dimensión de $\Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b)$ es $a+b-1$ y su lugar singular es $\Omega(\mathbb{P}^{a-1}, \mathbb{P}^a)$ (salvo si $a = b-1$, pues entonces la variedad de Schubert es la grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^b$, que es lisa).

2. La clase de la sección hiperplana de $\mathbb{G}(1,n)$ mediante la inmersión de Plücker es $\Omega(n-2, n)$.

3. La intersección de $\Omega(a,b)$ con la sección hiperplana tiene clase $\Omega(a-1, b) + \Omega(a, b-1)$.

4. $A^i(\mathbb{G}(1,n))$ es un grupo libre generado por los ciclos de Schubert de codimensión i. Es decir, los de tipo $\Omega(n-1-i+j, n-j)$ con $n \geq n-j > n-1-i+j \geq 0$.

5. La matriz de intersección de ciclos de dimensión $n-1$ con ciclos de dimensión $n-1$ en $\mathbb{G}(1,n)$ es:

	$\Omega(0,2k)$	$\Omega(1,2k-1)$	$\dots$	$\Omega(k-1,k+1)$
$\Omega(0,2k)$	$\Omega(0,1)$	0	$\dots$	0
$\Omega(1,2k-1)$	0	$\Omega(0,1)$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\Omega(k-1,k+1)$	0	0	$\dots$	$\Omega(0,1)$

si $n = 2k$ y:

	$\Omega(0,2k+1)$	$\Omega(1,2k)$	$\dots$	$\Omega(k,k+1)$
$\Omega(0,2k+1)$	$\Omega(0,1)$	0	$\dots$	0
$\Omega(1,2k)$	0	$\Omega(0,1)$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\Omega(k,k+1)$	0	0	$\dots$	$\Omega(0,1)$

si $n = 2k+1$.

6. La matriz de intersección de ciclos de dimensión $n-1$ con ciclos de dimensión n en $\mathbb{G}(1,n)$ es:

	$\Omega(0,2k)$	$\Omega(1,2k-1)$	$\Omega(2,2k-2)$	$\dots$	$\Omega(k-1,k+1)$
$\Omega(1,2k)$	$\Omega(0,2)$	$\Omega(0,2)$	0	$\dots$	0
$\Omega(2,2k-1)$	0	$\Omega(0,2)$	$\Omega(0,2)$	$\dots$	0
$\Omega(3,2k-2)$	0	0	$\Omega(0,2)$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\Omega(k,k+1)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,2)$

si $n = 2k$, y

	$\Omega(0,2k+1)$	$\Omega(1,2k)$	$\Omega(2,2k-1)$	$\dots$	$\Omega(k,k+1)$
$\Omega(1,2k+1)$	$\Omega(0,2)$	$\Omega(0,2)$	0	$\dots$	0
$\Omega(2,2k)$	0	$\Omega(0,2)$	$\Omega(0,2)$	$\dots$	0
$\Omega(3,2k-1)$	0	0	$\Omega(0,2)$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\Omega(k,k+2)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,2)$

si $n = 2k+1$.

7. La matriz de intersección de ciclos de dimensión n con ciclos de dimensión n en $\mathbb{G}(1,n)$ es:

	$\Omega(1,2k)$	$\Omega(2,2k-1)$	$\Omega(3,2k-2)$	$\dots$	$\Omega(k-1,k+2)$	$\Omega(k,k+1)$
$\Omega(1,2k)$	$\Omega(0,3)$ $+$ $\Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$	0	$\dots$	0	0
$\Omega(2,2k-1)$	$\Omega(0,3)$	$\Omega(0,3)$ $+$ $\Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$	$\dots$	0	0
$\Omega(3,2k-2)$	0	$\Omega(0,3)$	$\Omega(0,3)$ $+$ $\Omega(1,2)$	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Omega(k-1,k+2)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,3)$ $+$ $\Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$
$\Omega(k,k+1)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,3)$	$\Omega(1,2)$

si $n = 2k$ y

	$\Omega(1,2k+1)$	$\Omega(2,2k)$	$\Omega(3,2k-1)$	$\dots$	$\Omega(k-1,k+3)$	$\Omega(k,k+2)$
$\Omega(1,2k+1)$	$\Omega(0,3) + \Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$	0	$\dots$	0	0
$\Omega(2,2k)$	$\Omega(0,3)$	$\Omega(0,3) + \Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$	$\dots$	0	0
$\Omega(3,2k-1)$	0	$\Omega(0,3)$	$\Omega(0,3) + \Omega(1,2)$	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Omega(k-1,k+3)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,3) + \Omega(1,2)$	$\Omega(0,3)$
$\Omega(k,k+2)$	0	0	0	$\dots$	$\Omega(0,3)$	$\Omega(0,3) + \Omega(1,2)$

si $n = 2k+1$.

1.7 Teoremas tipo Bertini

En esta sección recordamos teoremas tipo Bertini sobre irreducibilidad y lisitud de intersecciones. Su importancia para la presente memoria reside en que necesitamos ambas cosas para aplicar el teorema del índice de Hodge en una superficie.

Teorema 1.26 (Bertini) *Sea X variedad irreducible con lugar singular Y y sea $|H|$ un sistema lineal de divisores muy amplio en X. Entonces el elemento general de $|H|$ es irreducible y su lugar singular es $H \cap Y$.*

Demostración. Véase por ejemplo [Har], teoremas 17.16 y 18.10. □

Para la presente memoria necesitamos un teorema que nos garantice la lisitud de la intersección con algo más general que hiperplanos del espacio ambiente. En particular, para el Capítulo 3 necesitaremos intersecar nuestra variedad X con ciclos de Schubert. Primero veamos cómo podemos obtenerlos a partir de fibrados vectoriales:

Proposición 1.27 *La variedad de Schubert* $\Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b) \subset \mathbb{G}(1,n)$ *se puede obtener como el lugar de degeneración de* $a+1$ *secciones del fibrado* S *de la grassmanniana de rectas en el* $\mathbb{P}^b$*. Dicha grassmanniana es además el lugar de ceros de* $n-b$ *secciones de* Q*. En particular,* $\Omega(\mathbb{P}^i, \mathbb{P}^n)$ *es el lugar de degeneración de* $i+1$ *secciones de* S *y* $\Omega(\mathbb{P}^{n-2}, \mathbb{P}^{n-1})$ *es el lugar de ceros de una sección de* Q*, donde* S *y* Q *son los fibrados universales de la grassmanniana.*

Demostración. Véase [KL] □

A continuación necesitamos una generalización del teorema de Bertini para fibrados de rango arbitrario pidiendo algo menos que mucha amplitud. A continuación enunciamos un caso particular de la llamada fórmula de Porteous:

Teorema 1.28 *Sea* E *un fibrado vectorial de rango* r *sobre una variedad lisa* X*. Si* E *está generado por sus secciones globales, el lugar de degeneración de* s *secciones generales de* E *tiene codimensión* $r-s+1$ *y su lugar singular es el lugar donde las secciones generan un subespacio de dimensión menor o igual que* $s-2$*, luego tiene codimensión* $2(r-s+2)$ *en* X*.*

Demostración. Véase por ejemplo [F]. □

Corolario 1.29 *Dados* $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ *una variedad de Schubert* $\Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b)$*, la intersección* $Z := X \cap \Omega(\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b)$ *tiene codimensión* $2n-b-a-1$ *y su lugar singular tiene codimensión* $2n-2a$ *en* X *salvo si* $a = b-1$*, en cuyo caso es liso (esto cuadra perfectamente con el punto 1 de la Observación 1.25).*

Demostración. Los fibrados S y Q están globalmente generados (Observación 1.24). Por el Teorema 1.28, un elemento general $Y := X \cap \Omega(\mathbb{P}^{b-1}, \mathbb{P}^b)$ tiene codimensión $2n-2b$ en X y es liso por ser la intersección en X de los ceros de $n-b$ secciones generales de $Q|_X$(cuando se trata de los ceros de una sección, $s=1$, luego no se puede alcanzar rango menor o igual que $s-2$). Esto demuestra el caso $a = b-1$. Para $a < b-1$, consideramos Y dentro de la grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^b$ y tomamos el lugar de degeneración de $a+1$ secciones generales del fibrado S correspondiente a esa grassmanniana (que es de rango $b-1$) restringido a Y y obtenemos Z. Según el Teorema 1.28, Z tiene codimensión $b-a-1$ en Y y su lugar singular tiene codimensión

$2b-2a$ en Y. Por tanto las codimensiones de Z y su lugar singular en X son respectivamente $2n-b-a-1$ y $2n-2a$. $\square$

El siguiente corolario será exactamente el resultado que necesitaremos a este respecto para el Capítulo 3.

Corolario 1.30 *Sea $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ lisa de dimensión n, entonces la superficie general S_i obtenida cortando X con un $\Omega(\mathbb{P}^i, \mathbb{P}^{n-i+1})$ es lisa.*

Demostración. Según el Corolario 1.29, el lugar singular de S_i tiene codimensión $2n-2i$ en X. Pero $i < n-i+1$, luego $i < \frac{n+1}{2}$. Por tanto, la codimensión es mayor que n en X salvo si $i = \frac{n}{2}$, en cuyo caso S_i ya es lisa por el Corolario 1.29. $\square$

Capítulo 2

Subvariedades de codimensión pequeña

Las subvariedades (lisas) cuya codimensión es pequeña en comparación con la dimensión tienden a estar mucho más condicionadas por la variedad ambiente mientras más pequeña sea la codimensión. Recuérdense por ejemplo los casos de una curva en $\mathbb{P}^2$ o una superficie en $\mathbb{P}^4$ (Ejemplos 1.15 y 1.16). En general, para variedades $X \subset Y$ de dimensiones n y N respectivamente, la fórmula (1.6), sólo da relaciones numéricas cuando $2n - 2 \geq N$ (y cuanto mayor sea n en relación con N, más relaciones da). Es bien conocido que las subvariedades de codimensión uno son lugares de ceros de una sección de un fibrado de rango uno. Por tanto, podemos aplicar resultados como el Teorema 1.23 o el Teorema 1.28 para conocer la geometría de la subvariedad (siempre que el fibrado cumpla ciertas restricciones de amplitud o generación por secciones globales respectivamente). Para codimensión dos, está la correspondencia de Hartshorne-Serre (que explicaremos en la primera sección del presente capítulo), que permite ver a X como lugar de degeneración de secciones de un fibrado vectorial sobre Y. Para codimensión tres existen resultados parciales (véanse [W] y [EPW]) que permiten ver las subvariedades subcanónicas como subvariedades pfaffianas mientras que en codimensión arbitraria no se conocen resultados análogos. La segunda sección de este capítulo recuerda las propiedades topológicas que se heredan de la variedad ambiente, así como la conjetura de Hartshorne, que aventura propiedades muy restrictivas para las mencionadas variedades de codimensión pequeña cuando el espacio ambiente es un espacio proyectivo. Por último, describimos en la última sección el método que hemos desarrollado para la presente tesis, aplicándolo para reobtener resultados conocidos en el espacio proyectivo.

2.1 Subvariedades de codimensión uno y dos

Es bien conocido que toda subvariedad de codimensión uno en una variedad lisa se puede definir localmente como el conjunto de ceros de una función. Las funciones de cada abierto pegan bien unas con otras y proporcionan un fibrado lineal. Por tanto, toda subvariedad de codimensión uno es un divisor y se obtiene como lugar de ceros de una sección de un fibrado invertible.

Un modo de obtener subvariedades de codimensión arbitraria es el Teorema 1.28, que en el caso particular de codimensión dos se puede obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Sea X una variedad lisa de dimensión n y E un fibrado vectorial de rango r sobre Y con $2 \leq r \leq n$. Si existe un subespacio vectorial $V \subset H^0(X, E)$ de dimensión $r-1$ tal que:*

1. *el subhaz de E generado por los elementos de V tiene rango $\geq r-2$ en todos los puntos de X;*

2. *el subesquema cerrado Y de X donde este rango es igual a $r-2$ tiene codimensión dos.*

Entonces:

- *Y es localmente intersección completa;*

- *existe una sucesión exacta*

$$0 \to V \otimes \mathcal{O}_X \to E \to \mathcal{J}_Y \otimes \bigwedge^r E \to 0$$

- *existe un morfismo $\pi : Y \to \mathbb{P}^{r-2}$ definido por $\bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y|X} \simeq \bigwedge^r E \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-2}}(1)$ (es decir, $\bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y|X} \otimes \bigwedge^r E^\vee$ está generado por sus secciones globales);*

- *para todo $s \in \{2, \ldots, r\}$, la clase de Chern $c_s(E)$ es el pulback a Y de un $\mathbb{P}^{r-s} \subset \mathbb{P}^{r-2}$.*

Demostración. Véase [V]. □

Lo interesante de la codimensión dos es que, mediante la llamada correspondencia de Hartshorne-Serre (Teorema 2.3), se tiene que esencialmente cualquier subvariedad se obtiene así. Por completitud, daremos aquí la demostración, pues hubo un paso de la que se encuentra en [V] que no vimos claro. Para ello usaremos los functores $\mathcal{E}xt$ y Ext. Todos los rudimentos necesarios sobre estos functores pueden encontrarse en [Ha], en [GH], si bien algunas propiedades listadas en sección 1.3 de [V] las justificaremos con ayuda de otros textos. Antes necesitamos un resultado de caracterización de haces localmente libres.

Lema 2.2 *Sea X una variedad lisa y $\mathcal{F}$ un haz sobre X. Si $\mathcal{F}$ es coherente y $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ $\forall i \geq 1$, entonces $\mathcal{F}$ es localmente libre.*

Demostración. Usamos el ejercicio II 5.7b de [Ha], que afirma que basta ver que para todo $x \in X$, el $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo $\mathcal{F}_x$ es libre.

$\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, así que tenemos una resolución localmente libre:

$$0 \to L_n \to \cdots \to L_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

Demostraremos que, para todo $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ es libre usando inducción sobre la longitud n de una resolución de $\mathcal{F}$.

El caso $n = 0$ es trivial. En el caso $n = 1$ tenemos la resolución

$$0 \to L_1 \to L_0 \to \mathcal{F} \to 0 \tag{2.1}$$

pero tenemos $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, L_1) \simeq \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_x) \otimes L_1$ que es el haz trivial por hipótesis. Por el teorema III 6.8 de [Ha],

$$Ext^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, L_{1,x}) \simeq \mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{F}, L_1)_x = 0$$

para todo $x \in X$. Por tanto, la extensión (2.1) considerada en fibras debe ser trivial, luego $L_{0,x} \simeq L_{1,x} \oplus \mathcal{F}_x$, con lo que $\mathcal{F}_x$ debe ser un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre.

Para ver que $n \Rightarrow n + 1$, supongamos que se verifica el resultado para fibrados con resolución de longitud n y veámoslo para fibrados con resolución de longitud $n + 1$. Observemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \to L_{n+1} \to \cdots \to & L_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_0 & \to \mathcal{F} \to 0 \\
& & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si vemos que K_1 tiene todos los haces $\mathcal{E}xt$ nulos, por hipótesis de inducción tendremos que es libre, y estaremos en el caso $n = 1$ para $\mathcal{F}_x$. Es fácil, pues tenemos una sucesión exacta

$$\to Ext^i_{\mathcal{O}_X}(L_0, \mathcal{O}_X) \to Ext^i_{\mathcal{O}_X}(K_1, \mathcal{O}_X) \to Ext^{i+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \to$$

y los módulos de los extremos son triviales, luego el del centro también. $\square$

Teorema 2.3 *Sean X una variedad lisa de dimensión n y sea Y un subesquema cerrado de codimensión dos de X. Sea $\mathcal{L}$ fibrado lineal sobre X. Si se cumple que:*

(1) Y es localmente intersección completa;

(2) El fibrado lineal $\bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y|X} \otimes \mathcal{L}^\vee$ está generado por $r-1$ secciones globales, con $2 \leq r \leq n$, que definen un morfismo $\pi : Y \to \mathbb{P}^{r-2}$ (por tanto $\bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y|X} \simeq \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-2}}(1)$)

(3) $H^2(X, (r-1)\mathcal{L}^\vee) = 0$

Entonces, existe una extensión no trivial

$$0 \to (r-1)\mathcal{O}_X \to E \to \mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L} \to 0$$

donde E es localmente libre y para todo $s = 2, \ldots, r$ se tiene que $c_s(E)$ es el pullback por π de un $\mathbb{P}^{r-s}$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0 \tag{2.2}$$

De aquí obtenemos :

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to \\ \to \mathcal{H}om(\mathcal{J}_Y, O_X) \to \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \to 0 \tag{2.3}$$

Como Y es localmente intersección completa, $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{J}_Y, \mathcal{L}^\vee) \simeq \mathcal{E}xt^2_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{L}^\vee) \simeq \bigwedge^2 \mathcal{N}_{Y|X} \otimes \mathcal{L}^\vee$ (el primer isomorfismo se obtiene de (2.2), para el segundo, véase por ejemplo [Ha2, III. Proposition 7.2]). Y esto es, precisamente $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$, es decir, $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ está generado por $r-1$ secciones globales, i.e. existe un morfismo sobre

$$V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \tag{2.4}$$

donde V es un espacio vectorial de dimensión $r-1$).

Es bien conocido que $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_X)\simeq 0$ (ver por ejemplo [Ha2, III. Proposition 7.2]) para todo i salvo la codimensión de Y, que es dos. También que $\mathcal{H}om(\mathcal{J}_Y,\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{O}_X$ y, por tanto, $\mathcal{H}om(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\simeq\mathcal{L}^\vee$ (en [Ha, III.6]).

Ahora, combinemos esto con la siguiente sucesión que se tiene para todo par de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}''$ (obtenida a partir de la sucesión espectral de los $H^p(X,\mathcal{E}xt^q(\mathcal{F},\mathbb{G}))$, que converge a $Ext^{p+q}(\mathcal{F},\mathbb{G})$, véase [AK]):

$$\begin{aligned}0\to H^1(X,\mathcal{H}om_X(\mathcal{G}',\mathcal{G}''))\to Ext^1_X(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')\to\\ \to H^0(X,\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{G}',\mathcal{G}''))\to H^2(X,\mathcal{H}om_X(\mathcal{G}',\mathcal{G}''))\to Ext^1_X(\mathcal{G}',\mathcal{G}'')\end{aligned}$$

Ponemos ahora $\mathcal{G}'=J_Y\otimes\mathcal{L}$ y $\mathcal{G}''=V^*\otimes\mathcal{O}_X$ tomando V como arriba. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}0\to H^1(X,(r-1)\mathcal{L}^\vee)\to Ext^1_X(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},V^*\otimes\mathcal{O}_X)\xrightarrow{g}\\ \xrightarrow{g} H^0(X,\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},V^*\otimes\mathcal{O}_X))\to H^2(X,(r-1)\mathcal{L}^\vee)\simeq 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde g está definido de la manera natural y, en consecuencia, se puede ver como el morfismo natural

$$\begin{aligned}Ext^1_X(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},V^*\otimes\mathcal{O}_X)\to H^0(X,\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},V^*\otimes\mathcal{O}_X))\simeq\\ \simeq V^*\otimes H^0(X,\bigwedge^2\mathcal{N}_{Y|X}\otimes\mathcal{L}^\vee)\simeq Hom(V,H^0(X,\bigwedge^2\mathcal{N}_{Y|X}\otimes\mathcal{L}^\vee))\end{aligned}$$

Sea $s\in Hom(V,H^0(X,\bigwedge^2\mathcal{N}_{Y|X}\otimes\mathcal{L}^\vee))$ el homomorfismo inducido por tomar secciones globales en el epimorfismo (2.4). Sea e un un elemento de la preimagen por g (que es sobre) de s. Entonces e representa una extensión no trivial

$$0\to V^*\otimes\mathcal{O}_X\to E\to\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L}\to 0\tag{2.6}$$

El haz E es coherente por estar en (2.6). Para ver que es localmente libre, podemos usar el Lema 2.2, luego nos basta ver que para todo $i>1$, $\mathcal{E}xt^i_X(E,\mathcal{O}_X)\simeq 0$. Para ello aplicamos el functor $\mathcal{H}om(\_,\mathcal{O}_X)$ a (2.6) y obtenemos:

$$\begin{aligned}0\to\mathcal{H}om(\mathcal{J}_Y\otimes\mathcal{L},\mathcal{O}_X)\to\mathcal{H}om(E,\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{H}om(V^*\otimes\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)\simeq V\otimes\mathcal{O}_X\xrightarrow{f}\mathcal{F}\to\\ \to\mathcal{E}xt^1_X(E,\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_X(V^*\otimes\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)\simeq 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde f es, naturalmente, el epimorfismo (2.4) debido a cómo está definida la extensión (2.6). Por tanto, $\mathcal{E}xt^1_X(E, \mathcal{O}_X) = 0$.

Para $i \geq 2$, $\mathcal{E}xt^i_X(E, \mathcal{O}_X)$ es cero, por la sucesión:

$$\to \mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{J}_Y \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{E}xt^i_X(V^* \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to$$

y el hecho de que $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq 0$ (ver [Ha, III.6]) y $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{J}_Y, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^{i+1}_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \simeq 0$ (el primer isomorfismo es consecuencia trivial de que $\mathcal{E}xt^i_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq 0$ y la segunda está, por ejemplo, en [Ha2, III. Proposition 7.2]).

Para el resto del enunciado, la sucesión (2.6) nos dice que E cumple las hipótesis del Teorema 2.1. $\square$

2.2 La conjetura de Hartshorne y resultados relacionados

Ahora nos centramos en resultados para codimensión pequeña en relación con la dimensión. En [H], Hartshorne conjeturó:

Conjetura 2.4 (Hartshorne) *Toda subvariedad lisa de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ con $2N < 3n$ es intersección completa.*

A continuación mostramos resultados que afianzan la credibilidad de esta conjetura. Gracias al teorema de la sección hiperplana de Lefschetz (Teorema 1.22), sabemos que toda intersección completa en $\mathbb{P}^N$ de dimensión n hereda los grupos de cohomología $H^1(X, \mathbb{Z}), .., H^{n-1}(X, \mathbb{Z})$ de los correspondientes a $\mathbb{P}^N$. Por tanto los siguientes resultados constituyen un apoyo a la conjetura de Hartshorne:

Teorema 2.5 (Barth) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una subvariedad lisa de dimensión n. Entonces los morfismos de restricción $H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{C}) \to H^i(X, \mathbb{C})$ son isomorfismos para $i \leq 2n - N$.*

Demostración. Véase [B] $\square$

Teorema 2.6 (Barth-Larsen) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una subvariedad lisa de dimensión n con $N \leq 2n - 1$. Entonces X es simplemente conexa.*

Demostración. Ver [BL] □

Como consecuencia de estos dos teoremas se obtuvo el siguiente.

Teorema 2.7 (Larsen) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una subvariedad lisa de dimensión n. Entonces los grupos de homotopía relativa $\pi_i(\mathbb{P}^N, X)$ son triviales para $i \leq 2n - N + 1$. En particular, los morfismos de restricción $H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z}) \to H^i(X, \mathbb{Z})$ son isomorfismos para $i \leq 2n - N$.*

Demostración. Véase [L]. □

Corolario 2.8 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ lisa de dimensión n con $N \leq 2n - 2$, entonces el grupo de Picard de X está generado por la sección hiperplana.*

Demostración. Se procede con las sucesiones exponenciales como en la demostración del Teorema 1.23, es decir, que, gracias al Teorema 2.7, basta probar que el homomorfismo $H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ es biyectivo. Para ello recurrimos a la teoría de Hodge, según la cual,

$$H^1(X, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}) \oplus H^0(X, \Omega_X) \tag{2.8}$$

$$H^1(\mathbb{P}^N, \mathbb{C}) \simeq H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}) \oplus H^0(\mathbb{P}^N, \Omega_{\mathbb{P}^N}) \tag{2.9}$$

donde Ω_X y $\mathbb{P}^N$ son los fibrados cotangentes a X y $\mathbb{P}^N$ respectivamente. De hecho, la inclusión $H^1(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C})$ es compatible con las restricciones, por lo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{G}(1,n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}) & \hookrightarrow & H^1(\mathbb{P}^N, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, \mathcal{O}_X) & \hookrightarrow & H^1(X, \mathbb{C}) \end{array}$$

es conmutativo. También será conmutativo si ponemos el fibrado cotangente en lugar del trivial. Por tanto, por el Teorema 2.5 y por (2.8) y (2.9), tenemos que la restricción $H^1(\mathbb{G}(1,n), \mathcal{O}_{\mathbb{G}(1,n)}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ es biyectiva.

El resto es igual que en la demostración del Teorema 1.23. □

Hay extensiones de los teoremas de Barth-Larsen a otras variedades ambiente. Para grassmannianas, Barth y Van de Ven demostraron en [BV]:

Teorema 2.9 *Sea $X \subset \mathbb{G}(k,n)$ una subvariedad lisa de codimensión dos. Entonces las restricciones*

$$H^i(\mathbb{G}(k,n),\mathbb{Z}) \to H^i(X,\mathbb{Z})$$

son isomorfismos para $n-k \geq 6$ y $i = 0,1,2$.

En un ambiente más general de espacios homogéneos, Sommese mejoró el resultado anterior obteniendo en el caso de productos de grassmannianas:

Teorema 2.10 (Sommese) *Sea X una variedad lisa de dimensión m contenida en $\prod \mathbb{G}(k_l,n_l)$. Entonces los morfismos de restricción $H^i(\mathbb{G}(k,n),\mathbb{Z}) \to H^i(X,\mathbb{Z})$ son isomorfismos para $i \leq 2m - 2\sum(k_l+1)(n_l-k_l)+min\{n_l\}$.*

Del mismo modo que el Corolario 2.8, este resultado implica (ya particularizando en grassmannianas de rectas y productos de dos espacios proyectivos de la misma dimensión) los siguientes resultados:

Corolario 2.11 *Sea X una variedad lisa de dimensión mayor o igual que $\frac{3}{2}n-1$ contenida en $\mathbb{G}(1,n)$. Entonces el grupo de Picard de X está generado por la sección hiperplana.*

Corolario 2.12 *Sea X una variedad lisa de dimensión mayor o igual que $\frac{3n-1}{2}$ contenida en $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$. Entonces el grupo de Picard de X está generado por los levantados por las dos proyecciones naturales de la sección hiperplana de $\mathbb{P}^{n-1}$.*

Obsérvese que este resultado es más restrictivo en cuanto a la relación entre dimensión y codimensión que el teorema de Barth-Larsen (Teorema 2.7). En el caso de codimensión dos, Arrondo hizo en [A] un avance en este sentido:

Teorema 2.13 *Sea $X \subset \mathbb{G}(1,n)$, con $n = 4,5$, lisa de codimensión dos. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que el divisor canónico K_X es numéricamente equivalente a qH_X, donde H_X es la sección hiperplana.*

La idea de la demostración de este teorema es usar la correspondencia de Hartshorne-Serre (Teorema 2.3), por la cual X es el lugar de degeneración de $r-2$ secciones de un fibrado E de rango r en la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O}^{r-2} \to E \to \mathcal{J}_X \to 0$$

Como X es lisa, el Teorema 1.28 implica que el lugar singular de X (numéricamente $c_3(E)^2 - c_2(E)c_4(E)$) es el vacío. Esta igualdad numérica implica sorprendentemente, usando el teorema del índice de Hodge (concretamente la Observación 1.19), que en la superficie seccional S de X, K_S es, numéricamente un múltiplo racional de H_S. Por el Corolario 1.23, esto pasa también en X.

La idea de la presente memoria es, sin utilizar la correspondencia de Hartshorne-Serre, volver a obtener el análogo de la igualdad numérica $c_3(E)^2 - c_2(E)c_4(E) = 0$. De hecho, observamos que esta igualdad es simplemente la expresión P de (1.6) para $D = K_X$, con lo que podemos mejorar el Teorema 2.13 para cualquier divisor y para cualquier codimensión (en el límite fijado por los teoremas de Barth-Larsen, en concreto del Corolario 2.8).

2.3 Presentación del método

Esta sección está dedicada a dar una demostración directa del Corolario 2.8 salvo divisibilidad en el grupo de Picard (Corolario 2.15). El método que utilizamos para la demostración (que aparece explicado al final de esta sección) es el que, con distintas variantes, aplicaremos en capítulos posteriores a otras variedades ambiente. Empezamos con el mismo resultado sólo para el grupo de Néron-Severi:

Proposición 2.14 *Sea X una variedad proyectiva no singular de dimensión n contenida en $\mathbb{P}^N$, con $N \leq 2n-2$. Sea H_X la restricción a X de la sección hiperplana H de $\mathbb{P}^n$. Sea D un divisor de X. Entonces existe un número racional q tal que $D \equiv_{\text{num}} qH_X$.*

Demostración. Considerando $\mathbb{P}^N$ como un subespacio de $\mathbb{P}^{2n-2}$, podemos suponer que $N = 2n-2$. Por otro lado, es lo mismo demostrar el resultado para D que para $D+kH_{|X}$ con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que, escogiendo k suficientemente grande, podemos suponer que D es muy amplio (Teorema 1.10) y, por el teorema de Bertini, liso. En ese caso, tenemos la sucesión exacta de fibrados normales (1.5) y, como consecuencia, la fórmula (1.6) toma la forma:

$$\delta^2 - d[D]_X^2[H]_X^{n-2} = 0 \tag{2.10}$$

donde d y δ son respectivamente los grados de X y D en $\mathbb{P}^{2n-2}$.

Esto mismo se puede escribir de la forma:

$$([D]_X[H]_X^{n-1})^2 = [H]_X^n([D]_X^2[H]_X^{n-2}) \tag{2.11}$$

Sea S la superficie que se obtiene al intersecar X con $n-2$ hiperplanos generales. Entonces S es una superficie lisa irreducible por el teorema de Bertini. Ahora podemos expresar (2.11) en términos de S:

$$(D_{|S}H_{|S})^2 = H_{|S}^2 D_{|S}^2 \tag{2.12}$$

Luego, por la Observación 1.19 obtenemos que $D_{|S} \equiv_{\text{num}} qH_{|X}$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. Por el teorema de la sección hiperplana de Lefschetz, la restricción $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(S,\mathbb{Q})$ es inyectiva. Esto, unido al hecho de que las equivalencias numérica y homológica coinciden en divisores, nos permite concluir que $D \equiv_{\text{num}} qH_{|X}$. □

Y ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Barth-Larsen (salvo irreducibilidad de la sección hiperplana).

Corolario 2.15 *En las mismas condiciones de la Proposición 2.14,* Pic$X \simeq$ $\mathbb{Z}$.

Demostración. Por la Proposición 2.14, tenemos que $NS(X) \simeq \mathbb{Z}$. Por otro lado, el Teorema 2.6 y el Teorema 1.9 dan que Pic$X \simeq N^1(X)$, con lo que se concluye la demostración. □

Las demostraciones de la Proposición 2.14 y el Corolario 2.15 ilustran el método que introducimos en la presente tesis para decidir cuándo una subvariedad de codimensión pequeña hereda el grupo de Picard de la variedad ambiente. En la siguiente observación explicamos dicho método.

Observación 2.16 Buscamos demostrar que una subvariedad de codimensión pequeña hereda el grupo de Picard de su variedad ambiente. Sea por tanto una variedad ambiente lisa Y de dimensión N y una subvariedad

X lisa de dimensión n con $2n-2 \geq N$. Podemos suponer que N es par (por comodidad sólo trataremos casos así, pero el método es fácilmente adaptable al caso impar), de forma que, al cortar con $\frac{2n-2-N}{2}$ divisores muy amplios generales, tenemos una variedad X' de dimensión $\frac{N+2}{2}$ que, por el Teorema 1.23, ha heredado el grupo de Picard de X. De modo que cualquier cosa que demostremos para el grupo de Picard de X' valdrá para el de X y así podemos suponer que $N = 2n-2$. Sea D un divisor en X (que, de la misma manera que en el principio de la demostración de la Proposición 2.14, podemos suponer liso). Sean $H_1, ..., H_l$ los generadores de Pic$Y$ restringidos a X.

Lo primero que haremos será aplicar la Observación 1.17 a $D \subset X \subset Y$. Llamaremos P a la expresión en (1.6), que es nula. Acto seguido, procedemos como en la Proposición 2.14 y el Corolario 2.15 (si bien resultará un tanto más enrevesado) en dos pasos:

(i) combinamos la nulidad de P con las distintas versiones del teorema del índice de Hodge (Observaciones 1.19 y 1.20 y Corolario 1.21) para deducir una dependencia numérica entre la restricción de D y las restricciones de $H_1, ..., H_l$ a una superficie S que sea la intersección de X con $n-2$ hiperplanos generales. Después, aplicamos el Teorema 1.23 que nos permite levantar la dependencia numérica a X.

(ii) Para los casos en que X sea simplemente conexa, deduciremos la dependencia lineal de la numérica del Teorema 1.9 como en el Corolario 2.15.

El paso (i) no será en general tan fácil como en esta sección, pues para sacar la dependencia lineal en S habrá que probarla primero en superficies dadas por intersecciones con ciclos de codimensión $n-2$ distintos (esto nos obligará a usar el Teorema 1.28). Además, la manera de combinar el Teorema del índice de Hodge con la expresión P consistirá en igualar P a una suma de expresiones del mismo signo (que, en muchas vendrá determinado por el teorema del índice de Hodge), lo cual obligará a estas últimas a anularse. Éste es el método usado en [A] para demostrar la subcanonicidad. De hecho, la expresión P aplicada a $D = K$ coincide con la fórmula (5) de [A] para $\mathbb{G}(1,4)$ y las fórmulas (9) y (10) para $\mathbb{G}(1,5)$.

En cuanto al paso (ii), la simple conexión en X se puede garantizar sólo en algunos casos. Los dos capítulos siguientes tratan con variedades Y que garantizan la simple conexión en cualquier subvariedad X de codimensión pequeña (con algunas condiciónes más). Tales resultados de simple conexión están probados en [D] y enunciados en los siguiente resultados:

Teorema 2.17 *Sea $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ de dimensión mayor o igual que n tal que su intersección con cualquiera de los ciclos de Schubert de codimensión n en $\mathbb{G}(1,n)$ es no vacía. Entonces X es simplemente conexa.*

Demostración. Es un caso particular de [D, Corollaire 7.4]. □

Teorema 2.18 *Sea $X \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ de dimensión mayor o igual que n tal que las dos proyecciones son sobreyectivas. Entonces X es simplemente conexa.*

Demostración. Es un caso particular de [D, Corollaire 2.4]. □

Aprovechamos también para recordar otro resultado del mismo artículo que nos será útil para el Capítulo 3.

Teorema 2.19 *Dada una subvariedad $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ lisa de dimensión n, su intersección con una variedad de Schubert general de tipo $\Omega(\mathbb{P}^i, \mathbb{P}^{n-i+1})$ es irreducible.*

Demostración. Es un caso particular de [D, Théorème 8.1]. □

Capítulo 3

Grassmannianas de rectas

En este capítulo aplicamos el método introducido en el capítulo anterior a una subvariedad X de una grassmanniana. Estudiaremos subvariedades en $\mathbb{G}(1,n)$ (grassmanniana de rectas proyectivas en un espacio proyectivo de dimensión n) debido a que su dimensión es $2n-2$ (y por tanto es par) y, sobre todo, porque las potencias de la sección hiperplana se pueden escribir como combinación de los ciclos de Schubert de manera mucho más fácil que en otras grassmannianas. En este capítulo se tratarán por separado los casos $n = 2k$ y $n = 2k+1$ cuando la situación lo requiera.

3.1 Enunciado del teorema y primeras observaciones

El presente capítulo está dedicado a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Sea $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ una subvariedad lisa de dimensión n' mayor o igual que n. Sea H la clase de la sección hiperplana de X. Supongamos que para todos $H_1, ..., H_{n'-n}$ hiperplanos generales y para todo ciclo de Schubert Ω de codimensión n, $X \cap H_1 \cap ... \cap H_{n'-n} \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $PicX \simeq \mathbb{Z}$.*

Observación 3.2 El Teorema 3.1 mejora el resultado de Sommese (Corolario 2.11) añadiendo sólo unas hipótesis numéricas que, por otro lado, no son superfluas. Considérese por ejemplo el conjunto X de todas las rectas de una cuádrica en $\mathbb{P}^5$. Es una subvariedad lisa de $\mathbb{G}(1,5)$ de dimensión 5 y su intersección con un $\Omega(0,5)$ general es claramente vacía. Por otro lado, identificando la cuádrica en $\mathbb{P}^5$ con $\mathbb{G}(1,3)$, una recta en ella se corresponde con el haz de rectas en un plano de $\mathbb{P}^3$ que pasan por un punto dado de dicho plano. Por tanto X es la subvariedad de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}$ dada por la ecuación $x_0x_0^* + x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_3x_3^* = 0$, que es una sección muy amplia y lisa de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}$. Por tanto, por el teorema 1.23, Pic$X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Sin embargo, a veces las hipótesis numéricas del Teorema 3.1 se pueden obviar:

Observación 3.3 Sea $X \subset \mathbb{G} = \mathbb{G}(1,n)$ una subvariedad lisa e irreducible de codimensión dos. Según lo expuesto en la Observación 1.25, tendrá clase:

$$[X] = a_1\Omega(n-3,n) + a_2\Omega(n-2,n-1)$$

Entonces, la intersección con la sección hiperplana tiene clase:

$$[X]H = a_1\Omega(n-4,n) + (a_1+a_2)\Omega(n-3,n-1)$$

En consecuencia, si $a_1 \neq 0$, X está en las hipótesis del Teorema 3.1 cuando $n \geq 5$, por lo que no es necesario imponer que $a_2 \neq 0$. Esto muestra que en general, cuando $n' > n$, no es necesario imponer la condición suficiente de que la intersección de X con todos los ciclos de Schubert de codimensión n' sea distinta de cero.

Además, en nuestro caso, si $a_1 = 0$, entonces significa que la unión Z de la familia $(2n-4)$-dimensional de rectas parametrizada por X tiene dimensión a lo sumo $n-1$ (al ser la intersección con $\Omega(0,n)$ es vacía, entonces el punto general de $\mathbb{P}^n$ no está en esa unión). Esto implica que X es la variedad de Schubert de las rectas contenidas en un hiperplano (véanse [Se] o [Ro], pero este caso se puede demostrar sencillamente comprobando que dos puntos generales de Z estan unidos por un elemento de X). Entonces $X \simeq \mathbb{G}(1,n-1)$ y, por tanto, Pic$X$ está generado por la sección hiperplana.

Para $n \geq 5$, cualquier variedad lisa con $a_1 \neq 0$ está en las hipótesis del Teorema 3.1. En el caso particular de $n = 4$, una variedad X de codimensión dos no está en dichas hipótesis si y sólo si $a_2 = 0$. Pero entonces X es el lugar de las rectas que cortan a una curva C (véase [ABT]), luego es singular en las bisecantes a C. Por tanto, el Teorema 3.1 implica que el grupo de Picard de una variedad lisa $X \subset \mathbb{G}(1,n)$ de codimensión dos está generado por un solo elemento cuando $n \geq 4$. Esto mejora los resultados de Barth, van de Ven y Sommese (ver Corolario 2.11), válidos para $n \geq 6$, aunque para $n = 4, 5$ no podemos asegurar que el generador del grupo de Picard sea la sección hiperplana.

Ahora haremos algunas reducciones para probar el Teorema 3.1.

Observación 3.4 Por el Teorema 2.17, toda variedad X en las hipótesis del teorema 3.1 es simplemente conexa. Por tanto, según lo descrito en la Observación 2.16, nos basta demostrar que, para $\dim X = n$, se tiene que, si S es la intersección de X con $n-2$ hiperplanos generales, $D_{|S} \equiv_{\text{num}} qH_{|S}$ para algún $q \in \mathbb{Q}$.

El resto del capítulo está dedicado a demostrar el Teorema 3.1 según lo establecido en la Observación 3.4.

3.2 Los invariantes numéricos

Antes de nada, vamos a definir la notación general que usaremos en lo que queda de capítulo. Fijemos una variedad X en $\mathbb{G}(1,n)$ de dimensión n con un divisor liso D. Sea $a_i := [X]_{\mathbb{G}(1,n)}\Omega(i, n-i+1)$ y para todo $i = 1, ..., \frac{n}{2}$ y sea $\alpha_i := [D]_{\mathbb{G}(1,n)}\Omega(i-1, n-i+1)$ para todo $i = 1, ..., \frac{n+1}{2}$.

Observación 3.5 La hipótesis sobre la intersección de X con ciclos de Schubert quiere decir que todos los a_i anteriormente definidos son estrictamente mayores que cero. Además, dicha definición significa que las clases de X y D en el anillo de Chow de $\mathbb{G}(1,n)$ son:

$$[X] = a_1\Omega(1,n) + a_2\Omega(2,n-1) + \ldots + a_{[\frac{n}{2}]}\Omega([\frac{n}{2}],[\frac{n+3}{2}]) \tag{3.1}$$

$$[D] = \alpha_1\Omega(0,n) + \alpha_2\Omega(1,n-1) + \ldots + \alpha_{[\frac{n+1}{2}]}\Omega([\frac{n-1}{2}],[\frac{n+2}{2}]). \tag{3.2}$$

De acuerdo con le cálculo de Schubert recordado en la Observación 1.25, tenemos la siguiente tabla de intersección de ciclos en X (que nos define los λ_i):

	H_X	D
$\Omega(0,n)_X$	a_1	α_1
$\Omega(1,n-1)_X$	$a_1 + a_2$	α_2
$\vdots$		
$\Omega([\frac{n-1}{2}],[\frac{n+2}{2}])_X$	$a_{[\frac{n-1}{2}]} + a_{[\frac{n+1}{2}]}$	$\alpha_{[\frac{n+1}{2}]}$
$D\Omega(1,n)_X$	$\alpha_1 + \alpha_2$	λ_1
$D\Omega(2,n-1)_X$	$\alpha_2 + \alpha_3$	λ_2
$\vdots$		
$D\Omega([\frac{n}{2}],[\frac{n+3}{2}])_X$	$\alpha_{[\frac{n}{2}]} + \alpha_{[\frac{n+2}{2}]}$	$\lambda_{[\frac{n}{2}]}$

Notación En lo sucesivo, por comodidad en la escritura de fórmulas tomaremos como cero cualquier variable a_i, α_i, λ_i cuyo valor no haya sido definido antes (i.e. $a_0 = \alpha_0 = \lambda_0$, $a_i = 0$ si $i > [\frac{n+1}{2}]$, $\alpha_i = 0$ si $i > [\frac{n+2}{2}]$ y $\lambda_i = 0$ si $[\frac{n}{2}]$). Por otro lado, si consideramos la matriz (traspuesta) de intersecciones que se obtiene de la tabla de arriba, podemos definir:

$$M := \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + a_2 & \dots & a_{k-1} + a_k & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \\ \text{si } n = 2k \\ \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + a_2 & \dots & a_k & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & \dots & \alpha_k + \alpha_{k+1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k+1} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \\ \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Lema 3.6 *Para demostrar el teorema 3.1 es suficiente ver que el rango de M es uno.*

Demostración. Como los a_i son estrictamente positivos, rg$M = 1$ implica que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que la segunda fila de M es q veces la primera. Sea $D' := D - qH_X$. Entonces $D'\Omega(i, n-i)_X = D'D\Omega(j, n-j+1) = 0$. Como se dice en la observación 1.25, H_X^{n-1} y H_X^{n-2}son combinaciones lineales de ciclos de Schubert de tipo $\Omega(i, n-1)_X$ y $\Omega(j, n-j+1)_X$ respectivamente. Por tanto $D'H_X^{n-1} = D'DH_X^{n-2} = 0$. Por tanto, si S es la intersección de X con $n-2$ hiperplanos generales, tenemos que:

$$D'_{|S}H_{|S} = D'H_X^{n-1} = 0$$

$$D'^2_{|S} = D'(D - qH_X)H_X^{n-2} = 0$$

Por el teorema del índice de Hodge, tenemos que $D'_{|S}$ es numéricamente trivial. En conclusión, $D_{|S} \equiv_{\text{num}} qH_{|S}$, y, por la Observación 3.4, tenemos el Teorema 3.1. $\square$

En consecuencia, el resto del capítulo estará dedicado a demostrar que el rango de la matriz M es uno.

3.3 Fin de la demostración

Lema 3.7 *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$P := \alpha_1^2 + ... + \alpha_{[\frac{n+1}{2}]}^2 - a_1\lambda_1 - ... - a_{[\frac{n}{2}]}\lambda_{[\frac{n}{2}]} = 0 \tag{3.4}$$

Demostración. La igualdad es (1.6) cuando $Y = \mathbb{G}(1,n)$. Los productos de intersección en $\mathbb{G}(1,n)$ se calculan a partir de (3.1) y (3.2) y en X a partir de (3.3). □

Observación 3.8 Para todo $i = 1, ..., [\frac{n}{2}]$ sea S_i l superficie obtenida intersecando X con un $\Omega(i, n-i+1)$ general. Por el Corolario 1.30, S_i es lisa, y por el Teorema 2.19, es irreducible.

Entonces podemos aplicar el teorema de Hodge y obtenemos que, como $H\Omega(i, n-i+1) = \Omega(i-1, n-i+1) + \Omega(i, n-i)$:

$$0 \geq \mathrm{Hodge}_i := \begin{vmatrix} H_{|S_i}^2 & D_{|S_i}H_{|S_i} \\ D_{|S_i}H_{|S_i} & D_{|S_i}^2 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{i-1} + a_i & \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \lambda_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i + a_{i+1} & \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

salvo cuando n es par y tenemos $i = \frac{n}{2}$, que queda:

$$0 \geq \mathrm{Hodge}_i := \begin{vmatrix} H_{|S_i}^2 & D_{|S_i}H_{|S_i} \\ D_{|S_i}H_{|S_i} & D_{|S_i}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i-1} + a_i & \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \lambda_i \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

Lema 3.9 *Sean P y* Hodge$_i$ *definidos como en (3.4) y (3.5) y (3.6) respectivamente. Entonces:*

$$P = -\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1}} \mathrm{Hodge}_i + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i \begin{vmatrix} a_{i-1} + a_i & a_i + a_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}^2}{(a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1})(a_{i-1} + a_i)(a_i + a_{i+1})} \tag{3.7}$$

si $n = 2k+1$ *y*

$$P = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_{i-1}+2a_i+a_{i+1}} \mathrm{Hodge}_i + \frac{a_k}{a_{k-1}+a_k} \mathrm{Hodge}_k + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i \begin{vmatrix} a_{i-1}+a_i & a_i+a_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}^2}{(a_{i-1}+2a_i+a_{i+1})(a_{i-1}+a_i)(a_i+a_{i+1})} \tag{3.8}$$

si $n = 2k$.

Demostración. Podemos considerar las expresiones como polinomios en las variables $\alpha_1, ..., \alpha_{[\frac{n+1}{2}]}, \lambda_1, ..., \lambda_{[\frac{n}{2}]}$ con coeficientes en el cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[a_1, ..., a_{[\frac{n}{2}]}]$. Los únicos coeficientes que no se anulan son los de $\alpha_i^2, \alpha_i\alpha_{i+1}, \lambda_i$. Por tanto, es suficiente probar que el coeficiente de cada uno de estos monomios es el mismo a la izquierda y a la derecha de (3.7) y (3.8) respectivamente. Esto es trivial para los coeficientes de λ_i, que tanto a la izquierda como a la derecha son a_i.

Para $\alpha_i\alpha_{i+1}$, el coeficiente es cero a la izquierda, mientras que a la derecha, es:

$$2\frac{a_i}{a_{i-1}+2a_i+a_{i+1}} - \\ - 2\frac{a_i}{(a_{i-1}+2a_i+a_{i+1})(a_{i-1}+a_i)(a_i+a_{i+1})}(a_i+a_{i+1})(a_{i-1}+a_i)$$

que es cero.

Para α_i^2, con $i \neq 1, k, k+1$ su coeficiente a la izquierda es uno, mientras que a la derecha es:

$$\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}+2a_{i-1}+a_i} + \frac{a_i}{a_{i-1}+2a_i+a_{i+1}} + \\ \frac{a_{i-1}(a_{i-2}+a_{i-1})^2}{(a_{i-2}+2a_{i-1}+a_i)(a_{i-2}+a_{i-1})(a_{i-1}+a_i)} \\ + \frac{a_i(a_i+a_{i+1})^2}{(a_{i-1}+2a_i+a_{i+1})(a_{i-1}+a_i)(a_i+a_{i+1})}$$

que, tras simplificar, resulta uno.

El caso α_k^2 con $n = 2k+1$ es análogo al anterior. Para el caso $n = 2k$ tenemos a la izquierda uno y a la derecha:

$$\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k}+\frac{a_k}{a_{k-1}+a_k}+\frac{a_{k-1}(a_{k-2}+a_{k-1})^2}{(a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)(a_{k-2}+a_{k-1})(a_{k-1}+a_k)}$$

que también es uno.

Para el caso $n = 2k+1$, α_{k+1}^2, tenemos a la izquierda uno y a la derecha

$$\frac{a_k}{a_{k-1}+2a_k}+\frac{a_k(a_{k-1}+a_k)^2}{(a_{k-1}+2a_k)(a_{k-1}+a_k)a_k}$$

que también es uno.

Por último, para el caso α_1^2 tenemos uno a la izquierda y a la derecha:

$$\frac{a_1}{2a_1+a_2}+\frac{a_1(a_1+a_2)^2}{(2a_1+a_2)a_1(a_1+a_2)}$$

que es uno, con lo que la demostración termina. $\square$

Corolario 3.10 *La matriz M de (3.3) tiene rango uno.*

Demostración. Es claro que en (3.7) y (3.8), el coeficiente de cada Hodge_i es negativo. Por otro lado, cada Hodge_i es no positiva por (3.5) y (3.6) y el otro sumatorio es claramente de términos no negativos (recordemos que todas las a_i son estrictamente positivas). Por tanto, tenemos a la derecha una suma de términos no negativos que da P, que es cero. Esto obliga a que todos los sumandos de la derecha sean nulos. Esto sólo puede pasar si se anulan las Hodge_i y los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{i-1}+a_i & a_i+a_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}$$

Precisamente la anulación de estos determinantes revela que las $[\frac{n+1}{2}]$ primeras columnas de M generan un espacio de dimensión uno. Por otro lado, la anulación de Hodge_i dice que la columna $\begin{pmatrix} \alpha_i+\alpha_{i+1} \\ \lambda_i \end{pmatrix}$ depende linealmente de las columnas $\begin{pmatrix} a_{i-1}+a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_i+a_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix}$, que están entre las primeras. $\square$

Capítulo 4

Productos de espacios proyectivos

En este capítulo aplicamos el método explicado en la Observación 2.16 a subvariedades de productos de espacios proyectivos iguales. El principal resultado a demostrar será el siguiente:

Teorema 4.1 *Sea $X \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ una subvariedad lisa de dimensión mayor o igual que n tal que las dos proyecciones $X \to \mathbb{P}^{n-1}$ son suprayectivas. Entonces $PicX \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ en el cual los levantados H_1 y H_2 de la sección hiperplana de $\mathbb{P}^{n-1}$ por las dos proyecciones respectivamente son linealmente independientes.*

Observación 4.2 El Teorema 4.1 mejora el resultado de Sommese (Corolario 2.12) con el simple añadido de unas hipótesis sobre la sobreyectividad de las proyecciones que son claramente necesarias. Por ejemplo, uno puede tomar subvariedades $Z \times \mathbb{P}^{n-1}$ de $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ con $Z \subset \mathbb{P}^{n-1}$ y Pic$Z$ de rango mayor que uno. Empezando por el mismo $Z \times \mathbb{P}^{n-1}$, habrá muchas que tengan un grupo de Picard de rango mayor o igual que 3 (por ejemplo, tomando sucesivas secciones de un fibrado muy amplio.

Observación 4.3 Según el Teorema 2.18, toda variedad X en las hipótesis del Teorema 4.1 es simplemente conexa. Por tanto, según el paso (ii) de la Observación 2.16, podemos suponer que X tiene dimensión n, y podemos reducir la demostración del Teorema 4.1 a probar que todo divisor liso D de X restringido a la intersección S de X con $n-2$ hiperplanos generales (es decir, divisores de la clase $H_1 + H_2$) es numéricamente equivalente a la combinación racional de H_1 y H_2. Obsérvese que H_1 y H_2 son linealmente independientes, pues al cumplirse $H_1^n = H_2^n = 0 < (H_1+H_2)^n$, la Observación 1.19 en S nos dice que sus restricciones son independientes. El Teorema 1.23 nos da la independencia de H_1 y H_2 en X.

Ahora fijaremos la notación general que usaremos a lo largo de la sección. Sea X una subvariedad lisa de dimensión n en $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ tal que las dos proyecciones $X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ son suprayectivas. Sea D un divisor liso en X y sean $H_1 H_2$ los levantados a X de la clase hiperplana en $\mathbb{P}^{n-1}$ por cada una de las dos proyecciones.

Sean a_i, α_i, λ_i definidos según la siguiente tabla de intersección (definimos por comodidad $a_0 = a_n = 0$):

	H_1	H_2	D
H_1^{n-1}	0	a_1	α_1
$H_1^{n-2}H_2$	a_1	a_2	α_2
$H_1^{n-3}H_2^2$	a_2	a_3	α_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
H_2^{n-1}	a_{n-1}	0	α_n
DH_1^{n-2}	α_1	α_2	λ_1
$DH_1^{n-3}H_2$	α_2	α_3	λ_2
$DH_1^{n-4}H_2^2$	α_3	α_4	λ_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
DH_2^{n-2}	α_{n-1}	α_n	λ_{n-1}

Si D depende numéricamente de H_1, H_2, la matriz de intersección

$$M := \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

tiene rango como mucho dos. De hecho, si la matriz M tiene rango dos, entonces el Teorema 4.1 es cierto. El motivo es que, como $a_1, a_{n-1} \neq 0$ (esto es equivalente al hecho de que las proyecciones $X \to \mathbb{P}^{n-1}$ sean suprayectivas), las dos primeras filas son linealmente independientes, luego es la tercera la que es p veces la primera más q veces la segunda para ciertos $p, q \in \mathbb{Q}$. Entonces el producto de

$$D' := D - pH_1 - qH_2$$

con $H_1^{n-1}, H_1^{n-2}H_2, ..., H_2^{n-1}, DH_1^{n-2}, DH_1^{n-3}H_2, ..., DH_2^{n-2}$ es cero. Sea S la intersección de X con $n-2$ hiperplanos generales. Entonces

$$D'_{|S}(H_1 + H_2)_{|S} = D'(H_1 + H_2)^{n-1} = 0$$

$$D'^2_{|S} := D'(D - pH_1 - qH_2)(H_1 + H_2)^{n-2} = 0$$

Por tanto, por el Corolario 1.21, $D'_{|S}$ es numéricamente trivial. Por la observación 4.3, esto implica el teorema 4.1.

En consecuencia, dedicaremos el resto del capítulo a demostrar que M tiene rango dos.

4.1 Primeras propiedades numéricas

Observación 4.4 Antes de nada, hacemos notar que el anillo de Chow de $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ es:

$$A(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{Z}[H_1, H_2]/(H_1^n H_2^n)$$

donde H_1 y H_2 son los levantados de la sección hiperplana por cada una de las dos proyecciones $p_1, p_2 : \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ (H_1, H_2 se usarán también para denotar las restricciones de estos divisores a X, pero será evidente cuándo estamos refiriéndonos a unos o a otros).

Definición Definiremos $r_{i,j,k}$ como el menor de las columnas i, j, k de la matriz M.

Dados X y D en las hipótesis de la Observación 4.3, sus clases en el anillo de Chow son:

$$[X] = a_{n-1}H_1^{n-2} + a_{n-2}H_1^{n-3}H_2 + \ldots + a_1H_2^{n-2} \tag{4.2}$$

$$[D] = \alpha_n H_1^{n-1} + \alpha_{n-1}H_1^{n-2}H_2 + \ldots + \alpha_1 H_2^{n-1} \tag{4.3}$$

Esto implica el siguiente resultado.

Lema 4.5 *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$P := \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_{n-1} + ... + \alpha_n\alpha_1 - a_1\lambda_{n-1} - a_2\lambda_{n-1} - ... - a_{n-1}\lambda_1 = 0 \tag{4.4}$$

Demostración. Es la fórmula (1.6) usando (4.2) y (4.3) para la intersección en el anillo de Chow de $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ y (4.1) para la intersección en X. □

Lema 4.6 *Sea $X \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ irreducible de dimensión n. Sean $a_1, ..., a_{n-1}$ definidos como antes. Supongamos que $a_1, a_{n-1} \neq 0$. Entonces todos los a_i son estrictamente positivos.*

Demostración. Aunque un resultado más general se encuentra en [D, Théorème 1.3], damos por comodidad una demostración directa del resultado que nos interesa.

Sean p_1, p_2 las restricciones a X de las proyecciones naturales $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$. Dado que $a_1 \neq 0$, para un punto general $Q \in \mathbb{P}^{n-1}$, $p_1(p_2^{-1}(Q))$ es una curva de grado a_1 (luego no vacía). Del mismo modo, para un punto general $P \in \mathbb{P}^{n-1}$, $p_2(p_1^{-1}(P))$ es una curva de grado a_{n-1}. Por tanto, existe un abierto $U \subset X$ en el que ambas proyecciones consisten en contraer curvas. De hecho, lo que tenemos es que $\dim(p_i^{-1}(Y))$=$\dim(Y) + 1$ para todo $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$ general.

Sean $\Lambda \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de codimensión i y $Q \in \mathbb{P}^{n-1}$ un subespacio y un punto generales de modo que la curva $C := p_1(p_2^{-1}(Q))$ interseca a Λ en un número finito (no nulo) de puntos. Como las proyecciones en U consisten en contraer curvas, $p_2(p_1^{-1}(\Lambda))$ tiene dimensión $\geq n-i-1$. Pero sabemos que la dimensión de $p_1^{-1}(\Lambda)$ es $n-i$, y si hemos perdido una dimensión al hacer la segunda proyección, toda fibra en un punto de la imagen tiene al menos dimensión uno, lo cual no se cumple para Q (pues Λ intersecaría a C en infinitos puntos). Por tanto, la dimensión de $p_2(p_1^{-1}(\Lambda))$ es $n-i$, lo que quiere decir que interseca con cualquier subespacio Λ' de $\mathbb{P}^{n-1}$ de codimensión $n-i$. En conclusión, $a_{n-i} = XH_1^{n-i}H_2^i \neq 0$, ya que$X \cap (\mathbb{P}^{n-i-1} \times \mathbb{P}^{i-1}) = X \cap (\Lambda \times \Lambda') \neq \emptyset$. □

Notación Para todo $i = 1, ..., n-1$, llamaremos S_i a la superficie obtenida intersecando X con un $\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^{n-i}$ general (por tanto, la clase de S_i en X es $H_1^{n-i-1}H_2^{i-1}$).

Observación 4.7 Las S_i se pueden escoger lisas e irreducibles. La lisitud viene dada por el Teorema 1.28 (puesto que son intersección de divisores en sistemas lineales libres). La irreducibilidad se puede encontrar en [D, Théorème 1.3] o bien se sigue trivialmente del Lema 4.6 y el siguiente resultado:

Lema 4.8 *Sea $Z \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^r$ (con $m \geq 2$) lisa e irreducible de dimensión $l \geq 2$ tal que $ZZ' > 0$ para todo ciclo efectivo Z' de codimensión l. Entonces la intersección general $H_1 \cap Z$ es irreducible.*

Demostración. Si $r = 0$, estamos en el teorema de Bertini, así que suponemos $r \geq 1$. Por el Lema 1.12 aplicado a $L := H_1$, $H := H_1 + H_2$ y $k := l-2$ tenemos que $Z'_{|Z} := L^{l-k}H^k = H_{1|Z}^2 H_{|Z}^{l-2} > 0$ por hipótesis (Z' no es trivial precisamente porque $m \geq 2$), luego $h^1(\mathcal{O}_Z(-H_1)) = 0$. Tomando cohomología en

$$0 \to \mathcal{O}_Z(-H_1) \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{H_1 \cap Z} \to 0 \tag{4.5}$$

se obtiene que $h^0(\mathcal{O}_{H_1 \cap Z}) = h^0(\mathcal{O}_Z) = 1$, luego $H_1 \cap Z$ es conexo y, por ser además liso, irreducible. □

Observación 4.9 Aplicando las Observaciones 1.19 y 1.20 a las restricciones de H_1, H_2 a S_i, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{1|S_i}^2 & H_{1|S_i}H_{2|S_i} \\ H_{1|S_i}H_{2|S_i} & H_{2|S_i}^2 \end{vmatrix} \leq 0$$

con igualdad si y sólo si H_1 y H_2 son dependientes en S_i. Podemos escribir las desigualdades de la siguiente manera:

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \leq \ldots \leq \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}. \tag{4.6}$$

Esto quiere decir que para todos $i, j = 1, ..., n-1$ con $i < j$ se tiene:

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} \leq \frac{a_j}{a_{j+1}} \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_j \\ a_i & a_{j+1} \end{vmatrix} \leq 0$$

con igualdad si y sólo si

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \ldots = \frac{a_j}{a_{j+1}}.$$

i.e.

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} a_{j-1} & a_j \\ a_j & a_{j+1} \end{vmatrix} = 0$$

Parece razonable pensar que tales igualdades no pueden producirse, pero no hemos encontrado una demostración o un contraejemplo. En consecuencia, algunas demostraciones se volverán más complicadas por el hecho de no poder dar por imposibles esas igualdades.

Observación 4.10 Aplicando el Teorema 1.21 a la superficie S_i y los divisores H_1, H_2, D, obtenemos:

$$r_{i,i+1,n+i} := \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H^2_{1|S_i} & H_{1|S_i}H_{2|S_i} & H_{1|S_i}D_{|S_i} \\ H_{1|S_i}H_{2|S_i} & H^2_{2|S_i} & H_{2|S_i}D_{|S_i} \\ H_{1|S_i}D_{|S_i} & H_{2|S_i}D_{|S_i} & D^2_{|S_i} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{4.7}$$

con igualdad cuando H_1, H_2 y D son numéricamente independientes en S_i. Por tanto, la anulación de $r_{i,i+1,n+i}$ probará que la restricción de D a S_i es numéricamente combinación lineal de las restricciones de H_1 y H_2 excepto en el caso de que H_1 y H_2 sean numéricamente proporcionales en S_i.

En este último caso (que sólo ocurre cuando $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$), decir que $D_{|S_i}$ depende de H_1 y H_2 es lo mismo que decir que sólo depende de uno solo de los dos. Entonces en este caso lo que tiene sentido es considerar que la desigualdad (que se obtiene de Observación 1.19)

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & \alpha_i \\ \alpha_i & \lambda_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H^2_{1|S_i} & H_{1|S_i}D_{|S_i} \\ H_{1|S_i}D_{|S_i} & D^2_{|S_i} \end{vmatrix} \leq 0 \tag{4.8}$$

es una igualdad. Además, si H_1 y H_2 son numéricamente proporcionales, entonces

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} H^2_{1|S_i} & H_{1|S_i}H_{2|S_i} & H_{1|S_i}D_{|S_i} \\ H_{1|S_i}H_{2|S_i} & H^2_{2|S_i} & H_{2|S_i}D_{|S_i} \end{pmatrix} = 1$$

y, en particular,

$$\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{a_i}\alpha_i \tag{4.9}$$

Observación 4.11 Como muestra la observación anterior, es necesario mirar cuántas igualdades tenemos en la cadena (4.6). Una manera de controlar esas igualdades es definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \{2,\ldots,n\} & \longrightarrow & \{2,\ldots,n\} \\ & i & \mapsto & \begin{array}{c}\text{único } l \text{ tal que} \\ \frac{a_{l-2}}{a_{l-1}} < \frac{a_{l-1}}{a_l} = \ldots = \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} = \frac{a_{i-1}}{a_i}\end{array} \end{array} \tag{4.10}$$

De este modo, es equivalente decir $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_{j-1}}{a_j}$ que decir $\sigma(i) = \sigma(j)$. En otras palabras, las igualdades en (4.6) coinciden con las igualdades en

$$\sigma(2) \leq \sigma(3) \leq \ldots \leq \sigma(n-1) \leq \sigma(1).$$

Por la Observación 4.9 se tiene que $\frac{a_{\sigma(i)-2}}{a_{\sigma(i)-1}} < \frac{a_{\sigma(i)-1}}{a_{\sigma(i)}} = \ldots = \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} = \frac{a_{i-1}}{a_i}$ es equivalente a $\begin{vmatrix} a_{\sigma(i)-1} & a_{i-1} \\ a_{\sigma(i)} & a_i \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_{\sigma(i)-2} & a_{i-1} \\ a_{\sigma(i)-1} & a_i \end{vmatrix} < 0$. Por otro lado, repitiendo(4.9) para los distintos índices involucrados se obtiene:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_{\sigma(i)}} \alpha_{\sigma(i)} \tag{4.11}$$

El propósito de la aplicación σ es permitir la determinación de igualdades "virtuales" en la cadena (4.6) y después efectuar las substituciones dadas en (4.11). Esto será muy útil en la siguiente sección, donde $a_1, ..., a_{n-1}$ serán indeterminadas en vez de valores concretos. Con este propósito hacemos la siguiente definición, que nos ayudará a trabajar con las igualdades en (4.6) que puedan surgir.

Definición Llamaremos *función de partición* a una aplicación $\sigma : \{2, ..., n\} \to \{2, ..., n\}$ tal que

1. $\sigma(i) \leq i$ para todo i

2. $\sigma(i) = \sigma(j)$ para todo $\sigma(i) \leq j \leq i$

4.2 Igualdades Polinomiales

A lo largo de esta sección, consideraremos los a_i, α_i, λ_i como indeterminadas y consideraremos todas las expresiones como elementos del anillo de polinomios $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{n-1})[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$. La idea es pensar en los elementos de $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ como coeficientes y en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ como variables. Volvemos a considerar $a_0 = a_n = 0$ para escribir expresiones de manera más sencilla. Definimos los polinomios:

$$P := \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_n\alpha_1 - a_1\lambda_{n-1} - a_2\lambda_{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda_1$$

$$r_{i,i+1,n+i} := \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix}$$

$$r_{i,i+1,n-i+1} := \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & a_{n-i} \\ a_i & a_{i+1} & a_{n-i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{n-i+1} \end{vmatrix}$$

(trivialmente, si $i = [\frac{n+1}{2}]$ entonces $r_{i,i+1,n-i+1} = 0$), y los coeficientes

$$c_i := \frac{a_{n-i}}{\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}} \tag{4.12}$$

$$d_i := \frac{a_i a_{n-i}}{\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}} \tag{4.13}$$

Lema 4.12 *En el anillo* $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{n-1})[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$ *se verifica la siguiente igualdad:*

$$P = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i r_{i,i+1,n+i} - \sum_{i=1}^{n-1} d_i r^2_{i,i+1,n-i+1} \tag{4.14}$$

Demostración. Al igual que en el Lema 3.9, hay que comparar los coeficientes de los monomios de ambos lados. En esta ocasión, los que no son trivialmente nulos son $\lambda_i, \alpha_i^2, \alpha_i\alpha_{i+1}, \alpha_i\alpha_{n-i+1}$ y $\alpha_i\alpha_{n-i+2}$. El coeficiente de λ_i es trivialmente $-a_{n-i}$ en ambos lados de (4.14). Escribiremos $k = [\frac{n+1}{2}]$ durante esta demostración.

Empezamos con α_i^2 (con $i \neq 1, k, k+1, n$). Su coeficiente a la izquierda de (4.14) es claramente cero. A la derecha, el monomio aparece en $r_{i-1,i,n+i-1}, r_{i,i+1,n+i}, r^2_{i-1,i,n-i+2}, r^2_{n-i+1,n-i+2,i}$ y $r^2_{i,i+1,n-i+1}$, por lo que el coeficiente es:

$$c_{i-1}a_{i-2} + c_i a_{i+1} - d_{i-1} \begin{vmatrix} a_{i-2} & a_{n-i+1} \\ a_{i-1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix}^2 - \\ - d_i \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}^2 - d_{n-i+1} \begin{vmatrix} a_{n-i} & a_{n-i+1} \\ a_{n-i+1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix}^2$$

que también es cero.

El coeficiente de $\alpha_i\alpha_{i+1}$ (con $i \neq k, k+1$) a la izquierda es cero. A la derecha aparece en $r_{i,i+1,n+i}$ y en $r^2_{i,i+1,n-i+1}$, luego el coeficiente es:

$$-2c_i a_i + 2d_i \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}$$

que también es cero.

El coeficiente de $\alpha_i \alpha_{n-i+1}$ (con $i \neq 1, k, k+1$) es dos. A la derecha aparece en $r^2_{i,i+1,n-i+1}$ y $r^2_{n-i+1,n-i+2,i}$, luego su coeficiente es:

$$-2d_i \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix} + 2d_{n-i+1} \begin{vmatrix} a_{n-i} & a_{n-i+1} \\ a_{n-i+1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i+1} \\ a_i & a_{n-i+2} \end{vmatrix}$$

que es también 2.

Para $\alpha_i \alpha_{n-i+2}$ (con $i \neq k, k+1$), el coeficiente a la izquierda es cero y a la derecha (dada su aparición en $r^2_{i-1,i,n-i+2}$ y $r^2_{n-i+1,n-i+2,i}$) es:

$$2d_{i-1} \begin{vmatrix} a_{i-2} & a_{n-i+1} \\ a_{i-1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-2} & a_{i-1} \\ a_{i-1} & a_i \end{vmatrix} + 2d_{n-i+1} \begin{vmatrix} a_{n-i} & a_{n-i+1} \\ a_{n-i+1} & a_{n-i+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix}$$

que es cero.

Ahora quedan los distintos casos particulares que nos hemos ido dejando (α_1^2, $\alpha_1\alpha_n$, α_k^2, α_{k+1}^2, $\alpha_k\alpha_{k+1}$, $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}$, α_{k+2}^2 y α_n^2). Empezamos con los casos en los que no hay que diferenciar según la pareidad de n:

El monomio α_1^2 tiene de coeficiente a la izquierda cero y a la derecha aparece en $r_{1,2,n+1}$ y en $r^2_{1,2,n}$, por lo que su coeficiente es:

$$c_1 a_2 - d_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_{n-1} \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}^2$$

que es cero.

El coeficiente de $\alpha_1\alpha_n$ a la izquierda es dos, mientras que a la derecha aparece en $r^2_{1,2,n}$, por lo que su coeficiente es

$$-2d_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_{n-1} \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

El coeficiente de α_n^2 a la izquierda es cero. A la derecha aparece en $r_{n-1,n,2n-1}, r^2_{1,2,n}$ y $r^2_{n-1,n,2}$, por lo que su coeficiente es:

$$c_{n-1}a_{n-2} - d_{n-1} \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_1 \\ a_{n-1} & a_2 \end{vmatrix}^2 - d_1 \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2$$

que es cero.

Para el resto tendremos que diferenciar casos según la paridad de n. Empecemos con α_k^2

- Si $n = 2k$, a la izquierda el coeficiente es cero, y a la derecha el monomio aparece en $r_{k-1,k,n+k-1}, r_{k,k+1,n+k}, r^2_{k-1,k,n-(k-1)+1} = r^2_{k-1,k,k+2}$ y $r^2_{k+1,k+2,k}$, por lo que su coeficiente es:

$$c_{k-1}a_{k-2} + c_k a_{k+1} - d_{k-1}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_{k+1} \\ a_{k-1} & a_{k+2} \end{vmatrix}^2 - d_{k+1}\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} \end{vmatrix}^2$$

  que también es cero.

- Si $n = 2k-1$, a la izquierda tiene coeficiente uno y a la derecha aparece en $r_{k-1,k,n+k-1}, r_{k,k+1,n+k}$ y $r^2_{k-1,k,n-(k-1)+1} = r^2_{k-1,k,k+1}$, por lo que su coeficiente es

$$c_{i-1}a_{i-2} + c_i a_{i+1} - d_{k-1}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_k \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}^2$$

  que también es uno.

Para $\alpha_k\alpha_{k+1}$:

- Si $n = 2k$, a la izquierda su coeficiente es dos, mientras que a la derecha aparece en $r_{k,k+1,n+k}$ y en $r^2_{k+1,k+2,n-(k+1)+1}r^2_{k,k+1,k+2}$, por lo que su coeficiente es

$$-2c_k a_k - 2d_{k+1}\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k-1} \\ a_{k+2} & a_k \end{vmatrix}$$

  que también es dos.

- Si $n = 2k-1$, a la izquierda su coeficiente es cero, y a la derecha aparece en $r_{k,k+1,n+k}$ y en $r^2_{k-1,k,n-(k-1)+1} = r^2_{k-1,k,k+1}$, luego su coeficiente es:

$$-2c_k a_k + 2d_{k-1}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_k \\ a_{k-1} & a_{k+1} \end{vmatrix}$$

  que también es cero.

Para $\alpha_k\alpha_{k+2}$:

- Si $n = 2k$, a la izquierda tiene coeficiente cero y a la derecha aparece en $r^2_{k-1,k,n-k+2} = r^2_{k-1,k,k+2}$ y $r^2_{n-k+1,n-k+2,k} = r^2_{k,k+1,k+2}$, por lo que se obtiene (obsérvese que es un caso normal de $\alpha_i\alpha_{n-i+2}$):

$$2d_{k-1}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_{k+1} \\ a_{k-1} & a_{k+2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k-2} & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_k \end{vmatrix} + 2d_{k+1}\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{vmatrix}$$

  que es cero.

- Si $n = 2k - 1$, entonces el monomio no aparece en ninguno de los sumandos de cualquiera de los dos lados (nótese que no responde a ninguna de las formas $\alpha_i^2, \alpha_i\alpha_{i+1}, \alpha_i\alpha_{n-i+1}$ o $\alpha_i\alpha_{n-i+2}$), lo que hace que este caso sea obvio.

Para α_{k+1}^2:

- Si $n = 2k$, a la izquierda tiene coeficiente cero, y a la derecha aparece en $r_{k,k+1,n+k}, e_{k+1,k+2,n+k+1}$ y $r_{k+1,k+2,n-(k+1)+1}^2 = r_{k,k+1,k+2}^2$, por lo que su coeficiente es:

$$c_k a_{k-1} + c_{k+1} a_{k+2} - d_{k+1} \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k-1} \\ a_{k+2} & a_k \end{vmatrix}^2$$

  que también es cero.

- Si $n = 2k - 1$, a la izquierda el coeficiente es cero. A la derecha el monomio aparece en $r_{k,k+1,n+k}, r_{k+1,k+2,n+k+1}$, $r_{k+1,k+2,n-(k+1)+1}^2 = r_{k-1,k+1,k+2}^2$ y $r_{k-1,k,n-(k-1)+1}^2 = r_{k-1,k,k+1}^2$, por lo que el coeficiente es:

$$c_k a_{k-1} + c_{k+1} a_{k+2} - d_{k+1} \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k-2} \\ a_{k+2} & a_{k-1} \end{vmatrix}^2 - d_{k-1} \begin{vmatrix} a_{k-2} & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_k \end{vmatrix}^2$$

  que también es cero.

Por último nos queda $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}$.

- Si $n = 2k$, el coeficiente a la izquierda es cero. A la derecha aparece en $r_{k+1,k+2,n+k+1} =$ y $r_{k+1,k+2,n-(k+1)+1}^2 = r_{k,k+1,k+2}^2$, por lo que es (al igual que la de un monomio $\alpha_i\alpha_{i+1}$ normal):

$$-2c_{k+1}a_{k+1} + 2d_{k+1} \begin{vmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k+1} & a_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k-1} \\ a_{k+2} & a_k \end{vmatrix}$$

  que también es cero.

- Si $n = 2k - 1$, a la izquierda no aparece, mientras que a la derecha aparece en $r_{k+1,k+2,n+k+1}$ y $r_{k+1,k+2,n-(k+1)+1}^2 = r_{k-1,k+1,k+2}^2$ por lo que es (al igual que la de un monomio $\alpha_i\alpha_{i+1}$ normal):

$$-2c_{k+1}a_{k+1} + 2d_{k+1} \begin{vmatrix} a_k & a_{k-2} \\ a_{k+1} & a_{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1} & a_{k-2} \\ a_{k+2} & a_{k-1} \end{vmatrix}$$

  que también es cero.

□

El Lema 4.12 es análogo al Lema 3.9, pero no es suficiente porque no hemos encontrado una manera de asegurar que los denominadores de c_i, d_i no vayan a anularse cuando las variables a_i, α_i tomen sus valores. La anulación de dichos coeficientes depende de las igualdades que nos encontremos en la cadena (4.6). Para controlar esto, hemos definido las funciones de partición. Durante el resto de la sección consideraremos una función de partición fija σ.

Empezemos planteando qué pasa cuando el denominador de c_i se anula (esto es cuando $\sigma(i) = \sigma(i+1)$). En este caso, de acuerdo con la Observación 4.10, hay que cambiar $r_{i,i+1,n+i}$ por (4.8). También habrá que substituir c_i por un coeficiente más apropiado. Por otro lado, el denominador de d_i crea también problemas, con lo que es razonable quitar el término $d_i r^2_{i,i+1,n-i+1}$. El siguiente resultado empieza a describir la manera precisa de hacer estos cambios.

Lema 4.13 *Supongamos que $\sigma(i) = \sigma(i+1)$ para algún $i = 2, ..., n-1$. Definimos:*

$$l_i := \frac{a_{n-i} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{n-i+1} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}}{a_i \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}}$$

$$m_i := \frac{a_{n-i} \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} \end{vmatrix} (a_i a_{n-i+1} \alpha_{i+1} - 2 a_i a_{i+1} \alpha_{n-i+1} + a_{i+1} a_{n-i+1} \alpha_i)}{a_i a_{i+1} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}}$$

$$\tilde{r}_i := \begin{vmatrix} a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$-c_i r_{i,i+1,n+i} - d_i r^2_{i,i+1,n-i+1} = -\frac{a_{n-i}}{a_{i+1}} \tilde{r}_i - l_i - m_i$$

y, como consecuencia:

$$P = -\sum_{\sigma(i)<\sigma(i+1)} c_i r_{i,i+1,n+i} - \sum_{\sigma(i)=\sigma(i+1)} \frac{a_{n-i}}{a_{i+1}} \tilde{r}_i - \\ - \sum_{\sigma(i)<\sigma(i+1)} d_i r^2_{i,i+1,n-i+1} - \sum_{\sigma(i)=\sigma(i+1)} l_i - \sum_{\sigma(i)=\sigma(i+1)} m_i \quad (4.15)$$

Demostración. La primera parte se reduce a un simple cálculo. La expresión (4.15) es consecuencia de la primera parte y de (4.14). □

Observación 4.14 La expresión $\tilde{r}_i$ es, precisamente, (4.8).

Los denominadores de l_i y m_i aún pueden dar problemas si $\sigma(n-i+1)$ es igual a $\sigma(i) = \sigma(i+1)$. Del mismo modo, incluso si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, podemos tener problemas con el denominador de d_i si $\sigma(n-i+1)$ es $\sigma(i)$ o $\sigma(i+1)$. Estos problemas se pueden evitar efectuando las substituciones implícitas dadas por (4.11). Para ello efectuamos la siguiente definición:

Definición Dado un polinomio $Q \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{n-1})[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$, definimos el siguiente polinomio (que depende de menos variables):

$$Q^\sigma := Q(a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_1, \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}}\alpha_{\sigma(2)}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_{\sigma(n-1)}}\alpha_{\sigma(n-1)}, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

Veamos cómo estas substituciones afectan a los términos problemáticos de (4.15).

Lema 4.15 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

(i) Si $\sigma(i) = \sigma(i+1)$, entonces $m_i^\sigma = 0$.

(ii) Si $\sigma(i) = \sigma(i+1) = \sigma(n-i+1)$, entonces $l_i^\sigma = 0$.

(iii) Si $\sigma(i) < \sigma(i+1) = \sigma(n-i+1)$, entonces

$$r^\sigma_{i,i+1,n-i+1} = \frac{-a_i}{a_{\sigma(i)} a_{i+1}} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\sigma(i)} & a_{i+1} \\ \alpha_{\sigma(i)} & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}$$

y, por tanto,

$$g_i := d_i(r^{\sigma}_{i,i+1,n-i+1})^2 = \frac{a_i^3 a_{n-i} \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\sigma(i)} & a_{i+1} \\ \alpha_{\sigma(i)} & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}^2}{a_{\sigma(i)}^2 a_{i+1}^2 \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}} \tag{4.16}$$

(iv) Si $\sigma(n-i+1) = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ entonces

$$r^{\sigma}_{i,i+1,n-i+1} = \frac{-1}{a_{\sigma(i)}} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\sigma(i)} & a_{i+1} \\ \alpha_{\sigma(i)} & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}$$

y, por tanto,

$$h_i := d_i(r^{\sigma}_{i,i+1,n-i+1})^2 = \frac{a_i a_{n-i} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{\sigma(i)} & a_{i+1} \\ \alpha_{\sigma(i)} & \alpha_{i+1} \end{vmatrix}^2}{a_{\sigma(i)}^2 \begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}} \tag{4.17}$$

Demostración. Es simplemente un cálculo. □

Corolario 4.16 *Con la notación anterior:*

$$\begin{aligned} P^{\sigma} = &- \sum_{\sigma(i)<\sigma(i+1)} c_i r^{\sigma}_{i,i+1,n+i} - \sum_{\sigma(i)=\sigma(i+1)} \frac{a_{n-i}}{a_{i+1}} \tilde{r}^{\sigma}_i - \\ &- \sum_{\sigma(n-i+1)\neq\sigma(i)<\sigma(i+1)\neq\sigma(n-i+1)} d_i(r^{\sigma}_{i,i+1,n-i+1})^2 - \sum_{\sigma(i)<\sigma(i+1)=\sigma(n-i+1)} g_i - \\ &- \sum_{\sigma(n-i+1)=\sigma(i)<\sigma(i+1)} h_i - \sum_{\sigma(i)=\sigma(i+1)\neq\sigma(n-i+1)} l^{\sigma}_i \end{aligned} \tag{4.18}$$

Demostración. Se obtiene directamente de los Lemas 4.13 y 4.15. □

4.3 Final de la demostración

Volvemos ahora a la situación geométrica con $X \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ con los invariantes anteriormente definidos.

Lema 4.17 *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$0 = -\sum_{\frac{a_{i-1}}{a_i}<\frac{a_i}{a_{i+1}}} \frac{a_{n-i}}{\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} - \sum_{\frac{a_{i-1}}{a_i}=\frac{a_i}{a_{i+1}}} \frac{a_{n-i}}{a_{i+1}} \begin{vmatrix} a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} -$$
$$- \sum_{\frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}\neq\frac{a_{i-1}}{a_i}<\frac{a_i}{a_{i+1}}\neq\frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}} \frac{a_i a_{n-i}}{\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & a_{n-i} \\ a_i & a_{i+1} & a_{n-i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{n-i+1} \end{vmatrix}^2 \tag{4.19}$$

y, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } \tfrac{a_{i-1}}{a_i} < \tfrac{a_i}{a_{i+1}} \tag{4.20}$$

$$\begin{vmatrix} a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } \tfrac{a_{i-1}}{a_i} = \tfrac{a_i}{a_{i+1}} \tag{4.21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i & a_{n-i} \\ a_i & a_{i+1} & a_{n-i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{n-i+1} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{si } \tfrac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}} \neq \tfrac{a_{i-1}}{a_i} < \tfrac{a_i}{a_{i+1}} \neq \tfrac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}} \tag{4.22}$$

Demostración. Sea σ definida por (4.10). Entonces (4.19) es (4.18) una vez substituídas las variables por los invariantes de X. Obsérvese primero que cualquier polinomio $Q \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_{n-1})[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$ toma el mismo valor que Q^σ al substituir las variables por los invariantes de X (supuestos todos los denominadores distintos de cero). En particular, P^σ se anula por el Lema 4.5. Por tanto, podemos aplicar el Corolario 4.16 y analizar cada sumando de (4.18).

Es obvio que los tres primeros sumandos de la parte derecha de (4.18) coinciden con los sumandos de (4.17) y que sus denominadores no se anulan (recuérdese que $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ es equivalente a $\frac{a_{i-1}}{a_i} \neq \frac{a_{j-1}}{a_j}$). Los otros sumandos también se comportan bien. Según el Lema 4.15, si $\frac{a_{i-1}}{a_i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$ o $\frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}} = \frac{a_{i-1}}{a_i} < \frac{a_i}{a_{i+1}}$, entonces $d_i(r^\sigma_{i,i+1,n-i+1})^2$ toma el valor g_i ó h_i respectivamente de (4.16) y (4.17). Dada la relación entre σ y el número de igualdades en la cadena (4.6), es evidente que el denominador de g_i ó h_i (según corresponda) no se anula. Por las mismas razones, se anula el factor $\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_{n-i} \\ a_i & a_{n-i+1} \end{vmatrix}$

ó $\begin{vmatrix} a_i & a_{n-i} \\ a_{i+1} & a_{n-i+1} \end{vmatrix}$ que contiene el numerador de g_i ó h_i. Por tanto, el valor de cada g_i ó h_i que interviene en (4.18) cuando se substituyen las variables por los invariantes de X es cero. Finalmente, el numerador de cada l_i en (4.18) contiene un factor $\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}$, por lo que también se anula y así (4.19) es cierta.

Las igualdades (4.20), (4.21) y (4.22) se obtienen del hecho de que todos los sumandos de (4.18) son no negativos (Observación 4.10) y de que todos los a_i son distintos de cero. $\square$

Ahora podemos probar en pocos pasos que la matriz M de (4.1) tiene rango dos.

Corolario 4.18 *Definimos las siguientes submatrices de M:*

$$M_i' := \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i & a_{n-i} \\ a_i & a_{i+1} & a_{n-i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_{n-i+1} \end{pmatrix} & si\ i < n-i \\ \\ \begin{pmatrix} a_{n-i} & a_{i-1} & a_i \\ a_{n-i+1} & a_i & a_{i+1} \\ \alpha_{n-i+1} & \alpha_i & \alpha_{i+1} \end{pmatrix} & si\ n-i < i-1 \end{cases}$$

Entonces la columna del centro de M_i' es combinación lineal de las de los extremos.

Demostración. Dividimos la demostración en cuatro casos:
(i) Si $\frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}} \neq \frac{a_{i-1}}{a_i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} \neq \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$, entonces dos columnas cualesquiera de M_i' son linealmente independientes. Por (4.22), M_i' tiene rango dos, luego dos columnas cualesquiera generan la tercera.
(ii) Si $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, entonces las columnas $\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix}$ (no nulas, pues ningún a_i es cero) son un múltiplo una de la otra por la Observación 4.10 y una de ellas es la columna del centro.
(iii) Si $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$, entonces las columnas $\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{n-i} \\ a_{n-i+1} \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix}$ son un múltiplo una de la otra por la Observación 4.10. Si una de ellas es la columna

del centro, ya está hecho; si no, tenemos que $i < n - i$ y por tanto, $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$ por la Observación 4.9, con lo que, estamos en el caso del párrafo anterior.

(iv) Por último, si $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$, entonces las columnas $\begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{n-i} \\ a_{n-i+1} \\ \alpha_{i+1} \end{pmatrix}$ son múltiplas una de la otra por la Observación 4.10. Si una de ellas es la columna del centro, ya está hecho; si no, tenemos que $i > n - i$ y por tanto, $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_{n-i}}{a_{n-i+1}}$ por la Observación 4.9, con lo que estamos de nuevo en el caso (i). $\square$

Corolario 4.19 *La submatriz*

$$M' := \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

de M tiene rango dos.

Demostración. Es suficiente probar que, para cada $i = 1, ..., n$, la columna i-ésima de M' es combinación lineal de la primera y la última (que son linealmente independientes). Lo demostraremos por inducción sobre $d(i) := \min\{i-1, n-i\}$. Evidentemente, el resultado es trivial para $d(i) = 0$ (es decir, $i = 0, n$).

Para demostrar el caso inductivo, supongamos primero que $i < \frac{n+2}{2}$ (es decir, $d(i) = i - 1$). El Corolario 4.18 implica que la columna i-ésima de M' es combinación de las columnas $(i-1)$-ésima y $(n-i+2)$-ésima. Como $d(i-1) = d(n-i+2) = i-2$, estas columnas son combinaciones de la primera y la última de M' por hipótesis de inducción, por lo que este caso queda probado.

Supongamos ahora que $i > \frac{n+1}{2}$ (luego $d(i) = n - i$). Entonces, por el Corolario 4.18, la columna i-ésima es combinación de las columnas $(n-i+1)$-ésima y $(i+1)$-ésima. Por hipótesis de indución (puesto que $d(i+1) = n-i-1$), la columna $(i+1)$-ésima de M' es combinación de la primera y la última. La columna $(n-i+1)$-ésima también lo es por lo heho en el párrafo anterior, ya que $d(n-i+1) = d(i)$ y $n-i+1 < \frac{n+2}{2}$. $\square$

Corolario 4.20 *La matriz M de (4.1) tiene rango dos.*

Demostración. Por el Corolario 4.19, sólo hay que probar que cualquier columna de M con un λ_i es combinación de columnas de M'. Para esto, consideremos la submatriz

$$M_i := \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i & \alpha_i \\ a_i & a_{i+1} & \alpha_{i+1} \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Si $\frac{a_{i-1}}{a_i} < \frac{a_i}{a_{i+1}}$, entonces las dos primeras columnas son linealmente independientes. Por (4.20), la matriz tiene rango dos, por lo que la tercera columna es combinación de las dos primeras como se quería.

Si, en cambio, $\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, por (4.9),

$$\begin{vmatrix} a_i & \alpha_i \\ a_{i+1} & \alpha_{i+1} \end{vmatrix} = 0$$

que, junto con (4.21) y $a_{i+1} \neq 0$ implica que la última columna de M_i es un múltiplo de la del centro. $\square$

Capítulo 5

Otros ejemplos y consideraciones finales

Empezaremos con varios ejemplos que ilustran hasta dónde funciona el método desarrollado en la Observación 2.16. Dispondremos de resultados que garanticen que X es simplemente conexa sólo en el ejemplo de las cuádricas, con lo que, en los otros ejemplos, el resultado será sólo numérico al no poder aplicar el paso (ii) de dicho método. Por otro lado, habrá casos en los que no se pueda garantizar la irreducibilidad de las superficies a las que apliquemos el teorema del índice de Hodge, por lo que tendrá que aparecer como hipótesis. Finalizamos el capítulo con unas consideraciones generales sobre el alcance del método y los resultados que se pueden conjeturar a partir de él.

5.1 Cuádricas

Empecemos recordando las propiedades que vamos a utilizar de la cuádrica (véase [GH] ó [O]).

Observación 5.1 Sea Q_{2n-2} la cuádrica lisa $2n-2$-dimensional Q_{2n-2}. Entonces los subespacios lineales de dimensión máxima contenidos en Q_{2n-2} tienen dimensión $n-1$ y forman dos familias disjuntas. El anillo de Chow de Q_{2n-2} es

- Si n es par,

$$\mathbb{Z}[H, A_1, A_2]/(H^{n-1} - A_1 - A_2, H(A_1 - A_2), A_1^2, A_2^2, H^n A_1)$$

donde H es la clase de la sección hiperplana y A_1 y A_2 son las clases de las dos familias de espacios de dimensión máxima que hay en la cuádrica.

- Si n es impar,

$$\mathbb{Z}[H, A_1, A_2]/(H^{n-1} - A_1 - A_2, H(A_1 - A_2), A_1A_2, H^nA_1)$$

donde H es la clase de la sección hiperplana y A_1 y A_2 son las clases de las dos familias de espacios de dimensión máxima que hay en la cuádrica.

Por tanto, cada grupo de Chow tiene un único generador salvo en grado $n-1$, donde hay dos (véase [Fr]).

Ejemplo 5.2 Toda subvariedad X lisa de dimensión n en la cuádrica lisa de dimensión $2n-3$ satisface $\mathrm{Pic}X \simeq \mathbb{Z}$ como consecuencia del Teorema 2.15 aplicado a X como subvariedad de $\mathbb{P}^{2n-2}$. Por otro lado, hay cuádricas de dimensión par que no satisfacen esta propiedad:

La imagen de la inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ es la variedad X definida por los menores de orden dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ X_n & X_{n+1} & \dots & X_{2n-1} \end{pmatrix}$$

y, por tanto, si n es par está contenido en la cuádrica lisa Q_{2n-2}, de ecuación:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 \\ X_n & X_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ X_{n+2} & X_{n+3} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} X_{n-2} & X_{n-1} \\ X_{2n-2} & X_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $\mathrm{Pic}X \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, mientras que $\mathrm{Pic}Q_{2n-2} \simeq \mathbb{Z}$. Luego, en este caso, no hay análogo a los Teoremas 2.15, 3.1 y 4.1.

En esta ocasión extendemos el teorema de Barth-Larsen para el grupo de Picard a cuádricas de dimensión un múltiplo de cuatro.

Proposición 5.3 *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ impar. Para toda variedad $X \subset Q_{2n-2}$ lisa de dimensión n, se tiene que el grupo de Picard es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Trabajaremos con n arbitrario para entender en qué momento se usa que n sea impar. Sea $X \subset Q_{2n-2}$ una subvariedad n-dimensional lisa. Entonces su clase en el anillo de Chow de Q_{2n-2} es

$$[X] = dH^{n-2}$$

con d igual a la mitad del grado de X en $\mathbb{P}^{2n-1}$. Sea D un divisor de X (que, siguiendo la Observación 2.16 podemos suponer liso). Entonces la clase de D en el anillo de Chow de Q es

$$[D] = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$$

La igualdad (1.6) queda:

$$P := \begin{cases} 2\alpha_1\alpha_2 - dD^2H^{n-2} = 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - dD^2H^{n-2} = 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Consideremos la intersección S de X con $n-2$ hiperplanos generales. Entonces $H_S^2 = H^n$, $D_S H_S = SH^{n-1}$ y $D_S^2 = D^2H^{n-2}$ y, por tanto:

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2}\big((D_SH_S)^2 - D_S^2H_S^2\big) - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \frac{1}{2}\big((D_SH_S)^2 - D_S^2H_S^2\big) + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el caso en que n es par, no podemos asegurar nada, pues P aparece como diferencia de dos términos no negativos. En el caso en que n es impar, tenemos que los dos sumandos son no negativos (por la Observación 1.19 y por ser un cuadrado de número entero respectivamente), por lo que ambos son cero. Por tanto, por la Observación 1.19, H_S y D_S son numéricamente dependientes (con coeficientes en $\mathbb{Q}$). Por el Teorema 1.23, existe dependencia numérica también en X. Por último, la dependencia lineal se obtiene del Teorema 1.9 (X es simplemente conexa por el Teorema 2.6). □

5.2 Explosión de $\mathbb{P}^6$ en un punto

Consideraremos ahora el caso de una variedad lisa X de dimensión 4 contenida en $\mathbb{P}^6$ explotado en un punto (llamaremos Y a la variedad ambiente). Volvemos a empezar con la descripción del anillo de Chow de la variedad ambiente (véase por ejemplo [F, Example 8.3.10]):

Observación 5.4 El anillo de Chow de Y está generado por el levantado por la explosión de la sección hiperplana (lo llamaremos H) y el divisor excepcional E. Sabemos también que H^6 es la clase de un punto y que E^6 es su ciclo opuesto. Por último, la intersección HE es nula.

En esta sección demostramos el siguiente resultado:

Proposición 5.5 *Sea $X \subset Y$ lisa irreducible de dimensión cuatro. Si $H-E$ es amplio en X, entonces el grupo de Néron-Severi de X es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Además, H y E son independientes en ese grupo.*

Demostración. Sea D un divisor (liso) de X. Las clases de X y D en el anillo de Chow de Y son

$$[X] = a_1 H^2 + a_2 E^2$$

$$[D] = \alpha_1 H^3 + \alpha_2 E^3$$

Escribimos la tabla de intersección en X:

$$\begin{array}{c|cccc} & H^3 & E^3 & DH^2 & DE^2 \\ \hline H & a_1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ E & 0 & -a_2 & 0 & -\alpha_2 \\ D & \alpha_1 & -\alpha_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \tag{5.1}$$

y entonces la fórmula (1.6) toma la forma

$$P := \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - a_1\lambda_1 - a_2\lambda_2 = 0$$

Es claro que podemos escribir:

$$P = -\frac{a_1 - a_2}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -a_2 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix} \tag{5.2}$$

El primer determinante de esta expresión es el de la matriz de intersección de los divisores H y D restringidos a la superficie S_1 obtenida intersecando X con dos divisores equivalentes a H. El segundo es el determinante de la matriz de intersección de los divisores H, E y D en la superficie S_2 obtenida intersecando X con dos divisores generales de clase $H - E$.

Considérese la proyección $\pi : Y \to \mathbb{P}^6$ asociada a la explosión. Entonces $\pi_{|X\setminus E}$ es un isomorfismo sobre su imagen. Esto quiere decir que $\pi(X)$ es singular, a lo sumo, en $\pi(E)$, que es un punto. Aplicando el teorema de Bertini (Teorema 1.26), dados dos hiperplanos generales, su intersección con $\pi(X)$ es una superficie S_1' lisa no singular que no contiene a $\pi(E)$. Por tanto, $S_1 = \pi^{-1}(S_1') \simeq S_1$ es lisa e irreducible y H es muy amplio en ella. Esto quiere decir que podemos aplicar la Observación 1.19 a S_1 y concluir que el primer sumando de (5.2) es no negativo.

Por otro lado, S_2 es lisa por el Teorema 1.28, ya que $|H-E|$ no tiene puntos base. Además, como $H-E$ es amplio, S_2 es conexa por el teorema de Bertini. Por tanto, S_2 es lisa irreducible. Esto nos permite aplicar el teorema del índice de Hodge a S_2. Por otro lado, $(H-E)^4 = a_1 - a_2$ debe ser positivo porque $H-E$ es amplio. Así, tenemos que también el segundo sumando de (5.2) es no negativo.

Dado que

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

tenemos que la tercera columna de la matriz de intersección (5.1) es un múltiplo de la primera (pues $a_1 \neq 0$). Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -a_2 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

quiere decir que la suma de la tercera y cuarta columnas es combinación de la primera y la segunda. En conclusión, el rango de la matriz de intersección (5.1) es dos y, razonando igual en la demostración del Teorema 4.1 para productos de espacios proyectivos, obtenemos que D es numéricamente combinación de H y E. $\square$

5.3 $C \times \mathbb{P}^5$

El interés de esta sección es mostrar que el método también funciona (aunque sólo numéricamente) en variedades ambiente cuyo grupo de Picard no es finitamente generado. También muestra (haciendo $C = \mathbb{P}^1$) que dicho método sigue funcionando para productos de espacios proyectivos de distintas dimensiones.

Consideremos $Y = C \times \mathbb{P}^5$ donde C es una curva lisa. Recordamos también aquí el anillo de Chow (como Y se puede ver como un fibrado proyectivo trivial sobre C, se puede calcular a partir de [F, Example 8.3.4]):

Observación 5.6 El anillo de Chow de Y está generado por el levantado H de la sección hiperplana de $\mathbb{P}^5$ y los levantados de un sistema de generadores del grupo de Picard de C. Desde el punto de vista numérico, los generadores se reducen a H y el levantado F de un punto cualquiera de C. Evidentemente, $F^2 = 0$ y $H^6 = 0$

Sea $X \subset Y$ una subvariedad lisa e irreducible de dimensión cuatro. Sea D un divisor (liso) de X. Entonces las clases numéricas de X y D son de la forma:

$$[X]_{num} = a_1 H^2 + a_2 HF$$

$$[D]_{num} = \alpha_1 H^3 + \alpha_2 H^2 F$$

Demostraremos lo siguiente:

Proposición 5.7 *Si $a_1, a_2 \neq 0$ y la intersección de X con un ciclo general de clase HF es irreducible, entonces el grupo de Néron-Severi de X es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Además, las clases numéricas de H y F son independientes en ese grupo.*

Demostración. Consideremos la matriz de intersección:

$$\begin{array}{c|cccc} & H_{|X}^3 & H_{|X}^2 F_{|X} & D H_{|X}^2 & D H_{|X} F_{|X} \\ \hline H_{|X} & a_2 & a_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ F_X & a_1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ D & \alpha_2 & \alpha_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{array} \tag{5.3}$$

La igualdad (1.6) toma la forma siguiente:

$$P := 2\alpha_1\alpha_2 - a_1\lambda_2 - a_2\lambda_1,$$

que se puede descomponer de la siguiente manera:

$$P = \frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & \alpha_2 \\ a_1 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}$$

El primer determinante es el de la matriz de intersección de las clase H, F y D en la superficie obtenida al intersecar X con un ciclo de clase H^2, mientras que el segundo corresponde a la matriz de intersección de los divisores H y D en la superficie obtenida como la intersección de X con un ciclo de clase HF (y por tanto, en esta superficie se cumple que $F = 0$).

Antes de seguir, remarcamos que la intersección de X con ciclos generales de clases H^2 y HF son lisas por el Teorema 1.28 e irreducibles por el Lema 4.8 para el caso de H^2 y por hipótesis del enunciado para el caso de HF. Aplicando el Corolario 1.21, obtenemos que los dos sumandos de la descomposición son no negativos y, por tanto, ambos determinantes se anulan. Es evidente por tanto que la matriz de intersección (5.3) tiene rango dos y, en consecuencia, D depende numéricamente de $H_{|X}$ y $F_{|X}$. $\square$

Observación 5.8 Por el resultado de Debarre: [D, Corollaire 2.4], cualquier $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5$ lisa irreducible de dimensión cuatro con $a_1, a_2 \neq 0$ es simplemente conexa. Por tanto, la Proposición 5.7 evidencia que el método desarrollado en el Capítulo 4 es susceptible de ser trasladado a cualquier producto de espacios proyectivos, si bien hay que remarcar que la irreducibilidad en algunas intersecciones es incierta, pues in el Lema 4.8 ni [D, Théorème 1.3] son suficientes.

5.4 Consideraciones finales

Como hemos visto, el método presentado en esta memoria funciona sólo numéricamente. Sólo cuando hay resultados topológicos como los de Debarre podemos dar información del grupo de Picard, pero no completa. Resulta natural plantearse:

Problema 5.9 *En las condiciones del Teorema 3.1, ¿el grupo de Picard de X está generado por H?*

¿En qué condiciones de i, n, dim$X$ es $H^i(X, \mathbb{Z})$ isomorfo a $H^i(\mathbb{G}(1, n), \mathbb{Z})$?

También es razonable pensar en las grassmannianas a las que no se ha aplicado el método ya que en las de rectas y puntos ha funcionado bien:

Conjetura 5.10 *Sea $X \subset \mathbb{G}(k,n)$ lisa e irreducible de dimensión mayor o igual que $\frac{(k-1)(n-k)}{2}+1$. Supongamos que X tiene interseccion no vacía con todo ciclo de Schubert de dimensión complementaria. Entonces $PicX$ tiene rango uno.*

En cuanto al Capítulo 4, deja abierta una pregunta del mismo tipo que la Pregunta 5.9:

Problema 5.11 *En las condiciones del Teorema 4.1, ¿el grupo de Picard de X está generado por H_1, H_2?.*

¿En qué condiciones de i, n, $dimX$ es $H^i(X,\mathbb{Z})$ isomorfo a $H^i(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z})$?

Y, debido a que no podemos garantizar irreducibilidad en todas las intersecciones necesarias para nuestro método, preferimos no hacer una conjetura para productos cartesianos arbitrarios de espacios proyectivos y plantearnos la siguiente pregunta:

Problema 5.12 *Sea $X \subset Y := \mathbb{P}^{a_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{a_r}$ lisa e irreducible. Supongamos que las proyecciones naturales $p_i : X \to \mathbb{P}^{a_i}$ tienen fibra general de dimensión $\max\{0, dimX - a_i\}$.*

¿En qué condiciones de $a_1, ..., a_r$, se tiene que $dimX$ $PicX \simeq \mathbb{Z}^r$ (con independencia lineal en los levantados de la sección hiperplana por $p_1, ..., p_r$)?

El hecho de que los teoremas de Barth-Larsen (al menos los Corolarios 2.8 y 2.15) funcionen en estas variedades exactamente en las mismas hipótesis $N \leq 2n-2$, sugiere también la posibilidad de formular una conjetura como la de Hartshorne cuando $2N < 3n$. Sin embargo, la posible existencia de fibrados vectoriales de rango pequeño en espacios ambientes generales hace difícil formular una conjetura. Arrondo en [A] sugiere la siguiente:

Conjetura 5.13 *Sea X una subvariedad lisa de codimensión dos en $\mathbb{G}(1,n)$. Sea Q el fibrado universal cociente de la grassmanniana (irreducible de rango dos). Entonces X es intersección completa de hipersuperficies o el lugar de ceros de una seccion a $Q(d)$ con $d \in \mathbb{Z}$.*

De hecho, Arrondo y Fania demostraron en [AF] que es así para toda subvariedad de codimensión dos en $\mathbb{G}(1,4)$ de grado menor o igual que 25.

Para cuádricas de dimensión $4k-2$ con k entero positivo, es natural la generalización de la Conjetura 4.5 de [A]:

Problema 5.14 *Sea $X \subset Q_{4k-2}$ de dimensión mayor o igual que $2k$. Si $PicX \not\simeq \mathbb{Z}$, ¿es X necesariamente $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{2k-1}$?*

Bibliografía

[AK] A. Altman, S. Kleiman *Introduction to Grothendieck duality theory*, Springer LNM 146, (1970).

[A] E. Arrondo, *Subcanonicity of codimension two subvarieties*, Rev. Mat. Compl. **18** (2005), 69–80.

[Ar] E. Arrondo, *Subvarieties of grassmannians*, (disponible en www.mat.ucm.es/˜ arrondo).

[ABT] E. Arrondo, M. Bertolini, C. Turrini *Congruences of small degree in* $\mathbb{G}(1,4)$ in Comm. Algebra **26**(190), 3249-3266 (1998).

[AF] E, Arrondo, M.L. Fania, *Evidence to subcanonicity of codimension two subvarieties of* $\mathbb{G}(1,4)$, aceptado en Int. J. Math.

[B] W. Barth, *Transplanting cohomology classes in complex projective space*, Amer. J. Math. **92** (1970), 951–967.

[BL] W. Barth, M.E. Larsen, *On the homotopy-groups of complex projective manifolds*, Math Scand. **30** (1972), 88-94.

[BV] W. Barth and A. Van de Ven, *On the geometry in codimension* 2 *of Grassmann manifolds*, Lecture Notes in Math. **412**, Springer Verlag (1974), 1–35.

[Be] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque 54 (1978).

[BeS] M. C. Beltrametti, A.J. Sommese, *The Adjunction Theory of Complex Projective Varieties*, De Gruyter Expositions in Mathematics 16.

[D] O. Debarre, *Théorèmes de connexité pour les produits d'espaces projectifs et les grassmanniennes*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 6, 1347–1367.

[EPW] D. Eisenbud, S. Popescu, C. Walter *Lagrangian subbundles and codimension 3 subcanonical subschemes* Duke Math. J. **107**-3 (2001), 427–467.

[Fr] K. Fritzsche, *Linear-uniforme bundel auf Quadriken* Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa (4) 10 (1983), 313–339.

[F] W. Fulton *Intersection theory* Springer.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.

[G] A. Grothendieck. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966-1967 (SGA 6), Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J.P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J.P. Serre, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225.

[Har] J. Harris *Algebraic geometry, a first course*, Springer, GTM 133.

[H] R. Hartshorne, *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1017–1032.

[Ha] R. Hartshorne *Algebraic geometry*, Springer, GTM 52 (1977).

[Ha2] R.Hartshorne *Residues and duality* LNM 20, Springer, (1966).

[KL] S.L. Kleiman, D. Laksov, *Schubert calculus*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 1061–1082.

[L] M.E. Larsen, *On the topology of projective manifolds*, Invent. Math. **19** (1973), 251–260.

[La] R. Lazarsfeld *Positivity in algebraic geometry I*, Springer, 2004.

[O] G. Ottaviani *Spinor bundles on quadrics*, Trans. Amer. Math. Soc. **307**-1 (1988), 301–316.

[R] M. Reid *Chapters on algebraic surfaces*, in Complex algebraic varieties, J. Kollár Ed., IAS/Park City lecture notes series (1993 volume), AMS, 1997, 1–154.

[Ro] E. Rogora, *Varieties with many lines*, Manuscripta Math. **82**-2 (1994), 207–226

[Se] B. Segre, *Sulle V_n contienenti più di $\infty^{n-k} S_k$. I,II*, Atti. Accad. Naz. Lincei, VIII. Se., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 5 (1948) 275-280.

[S] A.J. Sommese, *Complex subspaces of homogeneous complex manifolds. II. Homotopy results*, Nagoya Math. J. **86**, 101–129.

[V] J.A. Vogelaar *Constructing vector bundles from codimension-two subvarieties*, tesis doctoral, Leiden 1978.

[W] C. Walter *Pfaffian subschemes*, J. Algebraic Geom. **5**-4 (1996), 671–704.

"A child of five would understand this.
Send someone to fetch a child of five."
Groucho Marx