

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra



**CAMPOS VECTORIALES HOLOMORFOS COMPLETOS
Y CONDICIÓN JACOBIANA**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR POR**

Álvaro Bustinduy Candelas

Bajo la dirección de los Doctores:

Luis Giraldo Suárez
Jesús Muciño Raymund

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2589-9

Campos vectoriales holomorfos completos y condición jacobiana.

por

Álvaro Bustinduy Candelas

Licenciado en Ciencias Matemáticas

por la Universidad Complutense de Madrid

Memoria presentada al

Departamento de Álgebra

para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Dirigida por los profesores

Luis Giraldo Suárez (Universidad de Cádiz) y

Jesús Muciño Raymundo (Instituto de Matemáticas de la UNAM).

A la memoria de mi padre

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer la ayuda y el apoyo prestados a los directores de este trabajo, Luis Giraldo y Jesús Muciño, quienes me han introducido en el mundo de los Sistemas Dinámicos Holomorfos y los campos completos. En especial, quiero agradecer a Luis Giraldo todo su trabajo desinteresado, su amplio conocimiento en la materia y su apoyo afectivo, en lo que concierne al desarrollo de esta tesis; a Jesús Muciño su invitación al Instituto de Matemáticas de la UNAM (México), su calurosa acogida y las muchas conversaciones de matemáticas con él mantenidas.

Agradezco también los consejos, y las muestras de apoyo y aprecio que constantemente recibo de Ignacio Sols y Jesús M. Ruiz.

Mi labor durante estos años se ha desarrollado en el Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense de Madrid y el Departamento de Ingeniería Industrial de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Antonio de Nebrija. A los miembros del primero, en especial a sus directores Carlos Andradas e Ignacio Luengo, agradezco el trato y todas las facilidades para realizar mi trabajo. A los últimos, en especial a Pilar Vélez y Alberto López, he de agradecer la oportunidad para continuar con mis investigaciones y formarme como docente.

Quiero destacar la ayuda recibida por el proyecto “Geometría Algebraica y Espacios Moduli” del CONACYT y el proyecto PAPIIT-1N108803 de la UNAM en mis tres estancias en Morelia (México). He de agradecer también el apoyo de la Red Europea “Singularidades de ecuaciones diferenciales ordinarias y foliaciones” y del proyecto del MCYT “Variedades analíticas y algebraicas y aplicaciones” del que formo parte por haberme dado la posibilidad de asistir a diversos congresos y cursos.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y a Stéphanie su presencia constante durante la realización este trabajo.

Índice general

Introducción	11
1. Preliminares	19
1.1. Campos vectoriales holomorfos	19
1.2. Singularidades de curvas holomorfas	22
1.3. Singularidades de campos vectoriales	23
1.4. Foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}P^2$	26
1.5. Algunos resultados para polinomios	29
1.6. Campos vectoriales holomorfos completos.	32
2. Trayectorias completas en el infinito de un campo polinómico	37
2.1. Trayectorias en el infinito.	37
2.2. Singularidades no degeneradas en el infinito.	43
2.3. La propiedad de ser completo es no genérica	45
2.4. Trayectorias que explotan a tiempo finito de campos hamiltonianos.	48
3. Campos polinómicos completos en trayectorias transcendentales.	53
3.1. Introducción	53
3.2. Preliminares	56
3.3. Foliación P -completa con P de tipo \mathbb{C}^*	68
3.4. Trayectorias transcendentales	73
3.5. Aplicaciones	88

4. Campos con un cero que no es de tipo Poincaré-Dulac	93
4.1. Introducción	93
4.2. Número de ceros de un campo completo	94
4.3. Ceros que no son de tipo Poincaré-Dulac	100
5. Campos de vectores holomorfos y condición jacobiana	103
Bibliografía	107

Introducción

Un problema clásico en el estudio de la física, que se remonta al siglo diecinueve con H. Poincaré, es *el problema de los n -cuerpos*. Fijados n planetas moviéndose en el espacio, como para cada uno de ellos existen tres coordenadas que nos dan su posición y otras tres que nos dan su velocidad, el sistema formado por esos n cuerpos queda determinado por un total de $6n$ variables. La evolución de este sistema está gobernada por las leyes de Newton. Leyes que se expresan como una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, y que determinan completamente el futuro y evolución pasada de cada uno de los planetas siempre que se fije una condición inicial.

Para saber cómo se comportan, tanto los n -cuerpos con respecto al tiempo, como otros sistemas de la física, se hace necesario entender una ecuación del tipo

$$z' = (z'_1, \dots, z'_k) = X(z_1, \dots, z_k) = X(z), \quad (1)$$

donde $X : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable y z' designa la derivada de z con respecto al tiempo t .

Dado un $z = (z_1, \dots, z_k)$ en \mathbb{R}^k , por la teoría elemental de ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos que (1) tiene una única solución local por z , es decir, una aplicación $t \mapsto \varphi_z(t)$ definida entorno a $t = 0$ que verifica

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t \varphi_z = X(\varphi_z(t)) \quad \text{y} \quad \varphi_z(0) = z.$$

Problema general de la dinámica continua. *El principal propósito de la dinámica continua es saber cómo evoluciona un sistema de la forma (1) a lo largo del tiempo fijada una condición inicial. Es decir, si la función X es vista como un campo vectorial diferenciable en \mathbb{R}^k , se quiere saber cómo es la solución $t \mapsto \varphi_z(t)$ de X cuando t varía empezando desde un punto z en \mathbb{R}^k .* Por dinámica continua estamos entendiendo el estudio de los flujos de los campos vectoriales, en contraposición al estudio de las iteraciones de aplicaciones del que se ocupa la dinámica discreta.

Paso de lo real a lo complejo. Los sistemas en la forma (1) más sencillos de analizar están definidos cuando el campo X es *polinómico*. Podemos ver las variables z_1, \dots, z_k que los definen como complejas y, así, considerarlos como campos vectoriales

holomorfos en \mathbb{C}^k . Esto supone un cambio sobre X , pues, si interpretamos ahora el tiempo t como una variable compleja, el flujo φ de X en torno a un z de \mathbb{C}^k viene dado en este caso por la aplicación holomorfa $\varphi(t, z) := \varphi_z(t)$, donde $t \mapsto \varphi_z(t)$ es la solución local de X por z . Solución que puede extenderse por continuación analítica a lo largo de caminos en \mathbb{C} a su dominio máximo de definición Ω_z en el sentido de Riemann (ver capítulo 1). La aplicación $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ se llama *solución de X por z* y su imagen C_z *trayectoria*. No obstante, podemos recuperar siempre la dinámica real de X , sin más que restringirnos de nuevo a \mathbb{R}^k . *De ahora en adelante, consideraremos campos de vectores holomorfos en \mathbb{C}^k .*

Campos completos. Tomemos un campo vectorial holomorfo X en \mathbb{C}^k . Cuando la solución de X por todo z es *entera* (es decir, definida para todo tiempo t de \mathbb{C}) su flujo holomorfo $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ tiene la siguiente propiedad: fijado cualquier t de \mathbb{C} , la aplicación $\varphi(t, \cdot)$ define un automorfismo (holomorfo) de \mathbb{C}^k que satisface

$$\varphi(t, \cdot) \circ \varphi(s, \cdot) = \varphi(t, \varphi(s, \cdot)) = \varphi(t + s, \cdot),$$

para todo t y s en \mathbb{C} . Es decir, X da lugar a una acción del grupo $(\mathbb{C}, +)$ en \mathbb{C}^k por automorfismos holomorfos. Estos campos se llaman *completos* y son interesantes desde muchos puntos de vista. Veamos sólo cuatro de ellos:

• **1.- Automorfismos de \mathbb{C}^k .** Para estudiar el grupo de automorfismos holomorfos de \mathbb{C}^k los campos vectoriales holomorfos completos son una herramienta indispensable ([And90],[AL92],[ForRo93],[Ro99]). Por ejemplo, sabemos que si $k \geq 2$, este grupo tiene dimensión infinita (ver [AL92]). Por tanto, describir un elemento suyo cualquiera y sus correspondientes iterados puede ser complicado. Sin embargo, si f es de la forma $\varphi(1, \cdot)$, donde φ es el flujo holomorfo de un campo de vectores completo en \mathbb{C}^k , el automorfismo f es fácil de iterar. Pues dado cualquier $p \in \mathbb{C}^k$ la propiedad de grupo implica que

$$\varphi(1, \cdot)^n(p) = \varphi(n, p) = f^n(p).$$

Es natural en dinámica discreta preguntarse *qué automorfismos de \mathbb{C}^k son de la forma $\varphi(1, \cdot)$ para un flujo holomorfo φ de un campo completo* ([BF95],[F96],[LMnR00]).

• **2.- Aproximación de campos vectoriales.** Una pregunta que surge en muchas ocasiones cuando se estudia la aproximación de aplicaciones por automorfismos holomorfos de \mathbb{C}^k es si dado un campo vectorial holomorfo X en \mathbb{C}^k existe una sucesión X_j de campos holomorfos completos que converge (uniformemente) a X en los compactos de \mathbb{C}^k (ver [BF95], [For95], [For96]). De un tal X se dice que puede *aproximarse por campos completos*. Por ejemplo, sabemos que todas las *aplicaciones $F : \mathbb{C}^k \rightarrow B$ de Fatou-Bieberbach*, es decir, aplicaciones que son biholomorfismo de \mathbb{C}^k sobre un subconjunto propio $B \subset \mathbb{C}^k$, que se conocen, pueden aproximarse por una sucesión de automorfismos F_j holomorfos de \mathbb{C}^k (ver ejemplos en [RoRd88]). Dada una aplicación F de Fatou-Bieberbach, si tomamos el campo X levantado por F del campo constante en \mathbb{C}^k , como las trayectorias del campo constante no están contenidas en B ,

X no es completo. Sin embargo, podemos utilizar los automorfismos F_j para levantar el campo constante, y así obtener una sucesión de campos completos X_j que converge a X .

Si consideramos el espacio $\mathfrak{N}(\mathbb{C}^2)$ de los campos vectoriales holomorfos en \mathbb{C}^2 con la topología dada por la convergencia uniforme en los compactos de \mathbb{C}^2 , los primeros resultados que se han obtenido prueban que *el conjunto de campos que pueden ser aproximados por campos vectoriales holomorfos completos está contenido en el complementario de un abierto denso de $\mathfrak{N}(\mathbb{C}^2)$* ([For95], [BF95],[Ro99]). Es decir, los campos completos en \mathbb{C}^2 forman un subconjunto “pequeño” de $\mathfrak{N}(\mathbb{C}^2)$. Este fenómeno contrasta con la situación que se da para campos reales diferenciables, que siempre pueden modificarse fuera de cualquier compacto para ser completos. Si nos fijamos ahora sólo *en el conjunto de los campos polinómicos en \mathbb{C}^2 , e introducimos una topología adecuada en este conjunto, podemos preguntarnos si la propiedad de ser completo es no genérica.*

• **3.- Trayectorias de campos hamiltonianos que explotan a tiempo finito.**

Para un campo vectorial X es importante estudiar cuántas de sus trayectorias explotan a tiempo real finito. O, lo que es lo mismo, cuántas de sus trayectorias tienen la propiedad de que la solución que las define no está acotada en tiempo real finito positivo. Por ejemplo, si el campo X representa el sistema de los n -cuerpos, estas trayectorias dan lugar a puntos donde *el sistema colisiona* y que es importante entender (*ver* [SaXi95]). Para un campo holomorfo hamiltoniano X de \mathbb{C}^2 , es decir, un campo

$$X = -\frac{\partial H}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial H}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

con H una función entera en \mathbb{C}^2 , cabe destacar de este análisis que la propiedad de que exista un conjunto denso de puntos en \mathbb{C}^2 para los cuales la trayectoria de X por cada uno de ellos explote a tiempo finito es genérica en el espacio de los campos hamiltonianos ([FG94],[FG96], [FG96b]). Entendiendo ahora el tiempo como variable compleja, como hemos dicho anteriormente que se hará en esta memoria, una pregunta natural que se desprende de este estudio es si *existe un resultado análogo para las trayectorias que explotan a tiempo (complejo) finito de campos polinómicos hamiltonianos.*

• **4.- Teoría global de foliaciones.** Las foliaciones definidas en \mathbb{C}^k (y, en general en variedades de Stein) dadas por campos vectoriales completos tienen hojas con la topología intrínseca más sencilla posible: planos \mathbb{C} y cilindros \mathbb{C}^* . En dimensión dos, esta propiedad tiene consecuencias en muchos casos sobre la geometría global de este tipo de foliaciones. Destacamos la *existencia de primera integral meromorfa si la hoja genérica de la foliación (en el sentido de la capacidad logarítmica) es biholomorfa a \mathbb{C}^** ([Suz78a],[Suz78b]). Este hecho hace posible a M. Suzuki clasificar en ([Suz77]), salvo conjugación por un automorfismo holomorfo de \mathbb{C}^2 , los siguientes campos vectoriales holomorfos:

- 1) Los campos vectoriales holomorfos completos en \mathbb{C}^2 que tienen por flujo φ una aplicación tal que $\varphi(t, \cdot)$ es algebraica para todo $t \in \mathbb{C}$.
- 2) Los campos vectoriales holomorfos completos en \mathbb{C}^2 con trayectorias propias. Recordemos que una trayectoria de X es *propia* cuando tiene la topología extrínseca más sencilla posible, a saber: la inducida por la topología usual de \mathbb{C}^2 . En este caso, como la inclusión $i : \overline{C}_z \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ es *propia*, la clausura topológica \overline{C}_z en \mathbb{C}^2 define una curva analítica de dimensión (pura) uno. Cabe destacar que cuando X es un campo vectorial holomorfo (no necesariamente polinómico) completo en una variedad de Stein (en particular, \mathbb{C}^k) sabemos por M. Suzuki ([Suz78b]) que todas sus trayectorias biholomorfas a \mathbb{C}^* son propias.

No se conocen campos vectoriales holomorfos completos que no estén en esta clasificación. Este punto de vista clásico de M. Suzuki se ha recuperado recientemente aplicándose al estudio de campos vectoriales polinómicos completos en \mathbb{C}^2 , como puede verse en los trabajos de M. Brunella ([Bru98], [Bru04]), D. Cerveau, B.-A. Scardua ([CS]) y J.-C. Rebelo ([Reb03]). Es el punto de vista que nosotros hemos aplicado en esta tesis, y que ha dado lugar a resultados en parte recogidos en [Bus03], [Bus].

Restricciones. A lo largo de esta memoria haremos dos restricciones:

- a) Por una parte, estudiaremos campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 (caso $k = 2$). Aunque esta simplificación implica que no se puede relacionar directamente el modelo con el problema de los n -cuerpos, las ideas y técnicas matemáticas que se desarrollan son lo suficientemente ricas como para que se respondan muchas preguntas de mecánica celeste que se reducen a un problema de campos vectoriales en \mathbb{C}^2 (ver [Smi97]).
- b) Los campos que consideraremos tendrán como mucho singularidades o ceros aislados.

Un campo X que verifica a) y b) define una foliación \mathcal{F}_X por curvas en \mathbb{C}^2 con un número finito de singularidades (los ceros de X) que extiende a $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty$ (ver capítulo 1 de esta memoria y [GMOB89]). Como cada trayectoria C_z de X está contenida en una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F}_X , esta compactificación de \mathcal{F}_X nos permite estudiar los puntos de C_z cercanos al infinito (su conjunto límite).

Resumen de los resultados de esta memoria.

En el capítulo 1 introducimos los conceptos y definiciones de carácter general que se utilizarán a lo largo de toda la memoria.

En el capítulo 2 analizamos el flujo de un campo vectorial polinómico X sobre sus trayectorias en puntos de la recta del infinito (L_∞). Cuando L_∞ es invariante

por la foliación \mathcal{F}_X inducida por X (caso general), estas trayectorias no son más que separatrices de esta foliación por puntos singulares en L_∞ . Haciendo un cálculo explícito del índice local de \mathcal{F}_X en estos puntos, podemos concluir que *las únicas singularidades no degeneradas que una foliación \mathcal{F}_X en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ inducida por un campo vectorial polinómico X completo de grado ≥ 2 puede presentar en L_∞ son las de tipo Poincaré–Dulac y los puntos de silla–nodo*. Lo que nos permite demostrar los dos resultados de no genericidad sobre los que nos hemos preguntado anteriormente:

- *Para un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 , tanto la propiedad de que no tenga ninguna trayectoria completa en ningún punto de L_∞ , como la propiedad de no ser completo son genéricas en el conjunto de todos los campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 .*

- *Existe un abierto denso W del espacio de los campos vectoriales polinómicos hamiltonianos en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$ tal que, para cada X_H en W , hay un denso de puntos en \mathbb{C}^2 con trayectorias que explotan a tiempo (complejo) finito.*

En el capítulo 3 nos fijamos en las trayectorias propias de un campo vectorial polinómico X sobre las que es completo. Supongamos que X es completo en una trayectoria propia C_z . Entonces, su conjunto límite $\lim(C_z)$ es, o bien un conjunto de a lo más dos puntos, y por el Teorema de Chow \overline{C}_z es una curva algebraica, o bien contiene la recta del infinito L_∞ . En función de estas dos situaciones, diremos que la trayectoria C_z o la correspondiente solución entera φ_z es algebraica o trascendente, respectivamente. En lo que sigue, *trascendente significará propio y no algebraico*. La principal contribución de este capítulo y de toda la memoria es *la clasificación de los campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 que son completos sobre una trayectoria trascendente*, mediante el resultado que enunciamos a continuación (el enunciado más preciso aparece en el capítulo 3):

- *Sea C_z una trayectoria trascendente de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 . Si X es completo en C_z existen dos casos:*

I) C_z es biholomorfa a \mathbb{C}^ y, salvo un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 , tenemos las dos siguientes posibilidades:*

i) Existe una recta algebraica invariante por X , y entonces X es uno de los siguientes campos:

i.1)

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{C}^$.*

i.2)

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y},$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$ y $\alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$.

i.3)

$$x[nS + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ -\frac{[nT + m(x^\ell y + p(x))]S + \alpha T}{x^\ell} \right\} \frac{\partial}{\partial y},$$

para $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $< \ell$ tal que $p(0) \neq 0$, $T = \ell x^\ell y + xp'(x)$, $S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n)$ con $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, y donde

$$[nxp'(x) + mp(x)]S + \alpha xp'(x) \in x^\ell \cdot \mathbb{C}[x, y].$$

En particular, X es completo.

ii) No existe una recta algebraica invariante por X , y entonces para cierta aplicación racional H se tiene que

$$H^*X = u^k \cdot \left\{ a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda v^t (v^n - s)^r \frac{\partial}{\partial v} \right\},$$

donde $a(v) \in \mathbb{C}[v]$, $t \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, y $s, \lambda \in \mathbb{C}^*$.

II) C_z es biholomorfa a \mathbb{C} y, salvo un automorfismo holomorfo de \mathbb{C}^2 , existe una función entera nunca nula f tal que X es de la forma

$$f(y) \frac{\partial}{\partial x}.$$

La demostración de este resultado se basa en una combinación del estudio hecho por M. Brunella en [Bru98] de las foliaciones algebraicas en \mathbb{C}^2 con hojas que tienen un final propio y trascendente, que nos garantiza la existencia de un polinomio P de tipo \mathbb{C} o \mathbb{C}^* tal que la foliación \mathcal{F}_X se puede estudiar de modo especialmente sencillo respecto a P , con algunos métodos trascendentes, concretamente, una versión del Teorema de Borel debida a E. Andersén ([And00]).

Ya que toda trayectoria trascendente sobre la que X es completo define una *hoja entera trascendente* de la foliación \mathcal{F}_X , nuestro resultado puede considerarse como una versión afín en \mathbb{C}^2 para este tipo particular de trayectorias de la clasificación de M. McQuillan en [McQ] de las foliaciones en superficies proyectivas con hojas enteras trascendentes.

Como aplicación, podemos discutir el problema que fue nuestra motivación inicial y que explicamos a continuación. Dos campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 con ceros aislados, que no son colineales, dejan de ser independientes en los puntos de la variedad algebraica (de codimension mayor o igual que uno) definida por los ceros del determinante de la matriz 2×2 cuyas entradas son sus componentes. Así, todo campo vectorial polinómico está determinado, salvo multiplicación por un número complejo

distinto de cero, por una trayectoria trascendente C_z . Podemos preguntarnos, de esta manera, si el que X sea completo sobre una trayectoria trascendente C_z implica que X sea completo. Sobre esta pregunta damos una respuesta completa para un tipo de trayectorias: *las trayectorias singulares*. Veamos brevemente cuáles son. Consideremos una trayectoria trascendente C_z sobre la que X es completo. Como \overline{C}_z es una curva analítica, ésta no puede acumularse en puntos regulares de X . Por tanto, el hecho de que X sea completo en C_z garantiza que $\overline{C}_z \setminus C_z$ sea, o bien un punto p , con $X(p) = 0$, o vacío. Decimos entonces que la trayectoria C_z (o que la solución φ_z) es singular si su clausura en \mathbb{C}^2 contiene ceros del campo, y no singular si no contiene. Demostramos en este capítulo que *todo campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 que es completo sobre una trayectoria C_z trascendente y singular es completo, dando, además, su forma explícita, salvo automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 .*

En el capítulo 4 estudiamos los ceros de campos polinómicos completos en \mathbb{C}^2 . Como los ceros de un campo vectorial holomorfo completo X en una variedad de dimensión dos tienen orden uno (*ver* [Reb00, Lemme 6.1]), es natural preguntarse cuántos pueden ser en número. Existen ejemplos de campos completos con dos ceros (*ver* el ejemplo de [AR99, p.219]). Sin embargo, ninguno de ellos está definido en \mathbb{C}^2 . Los únicos campos vectoriales holomorfos completos en \mathbb{C}^2 conocidos son los de la clasificación de M. Suzuki en [Suz77], que hemos visto anteriormente, y ninguno tiene más de un cero. Por eso, recientemente, J.-P. Rosay y P. Ahern han propuesto la siguiente pregunta ([Ro99], [AR99]): *Si X es un campo vectorial holomorfo completo en \mathbb{C}^2 , ¿tiene X como mucho un cero?* En este capítulo contestamos afirmativamente a esta pregunta para el caso polinómico, probando que *todo campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 completo con singularidades aisladas tiene como máximo un cero*. Utilizando el trabajo de E. Andersén y J.-C. Rebelo sobre campos completos ([And00], [Reb00]), junto con algunos resultados del capítulo 3, *clasificamos todos los campos vectoriales polinómicos completos con un cero que no es de tipo Poincaré–Dulac*.

En el capítulo 5 establecemos condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación polinómica $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que el determinante de su matriz jacobiana es constante sea invertible. La condición para F de tener el determinante de su matriz jacobiana constante se llama *condición jacobiana*, y equivale a su inyectividad local. Siguiendo las ideas de P. Nousiainen y M. E. Sweedler (*ver* [NS83]), asociamos a una tal F una n -upla de campos vectoriales polinómicos $\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}$ en \mathbb{C}^n , que nos permiten dar el siguiente criterio de invertibilidad:

- Si $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica que verifica la condición jacobiana, F es invertible si y sólo si los campos $\frac{\partial}{\partial F_i}$ son completos.

Finalmente, aplicando este último resultado, podemos reformular la *Conjetura Jacobiana* en términos de la propiedad de ser completo con el resultado siguiente:

- La *Conjetura Jacobiana* es verdadera si y sólo si cada base X_1, \dots, X_n sobre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ del espacio $\mathfrak{N}_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$ de campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^n que es

conmutativa, es completa, es decir, X_i es completo para todo i .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán los conceptos y resultados de carácter general que serán utilizados a lo largo de la memoria.

1.1. Campos vectoriales holomorfos

De aquí en adelante, \mathbb{C} será el cuerpo de los números complejos y \mathbb{C}^n , con $n \geq 1$, el espacio vectorial complejo $\{z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$.

Para cada z en \mathbb{C}^n , consideremos la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ del espacio tangente $T_z\mathbb{C}^n$ de \mathbb{C}^n en z , que por definición es el espacio vectorial $\{z\} \times \mathbb{C}^n$.

Definición 1.1.1. (Campo vectorial holomorfo) *Un campo vectorial (o de vectores) holomorfo X en un abierto U de \mathbb{C}^n , es una aplicación holomorfa que a cada punto z de U le asocia un vector tangente $X(z)$ de $T_z\mathbb{C}^n$. En términos analíticos, X está definido por*

$$X = (P_1, \dots, P_n) = P_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + P_n \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad (1.1)$$

para P_1, \dots, P_n funciones holomorfas en U .

Fijemos un abierto U de \mathbb{C}^n y una aplicación holomorfa $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$. La aplicación Φ es un biholomorfismo sobre su imagen si y sólo si $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ es biyectiva. En este caso, diremos que U y $\Phi(U)$ son biholomorfos, y designaremos a esta relación con la notación $U \simeq \Phi(U)$. Si, además, $\Phi(U) = U$, llamaremos a Φ automorfismo de U .

Definiciones 1.1.1. *Si X es un campo vectorial holomorfo en U , que analíticamente se expresa como en (1.1),*

- i) las funciones P_1, \dots, P_n son las componentes de X , y sus ceros comunes los puntos singulares o singularidades de X .
- ii) Si cada componente de X es un polinomio complejo en las variables z_1, \dots, z_n , diremos que X es un campo vectorial polinómico en U .
- iii) Si Φ es un biholomorfismo de U sobre su imagen $\Phi(U) = V$, designaremos por Φ_*X al campo vectorial holomorfo en V definido por

$$\Phi_*X(z) := D\Phi_{\Phi^{-1}(z)}(X(\Phi^{-1}(z))).$$

Si φ es el flujo de X , el flujo de Φ_*X es $\Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$, del que diremos ser conjugado por Φ de φ . Igualmente, si Y es un campo vectorial holomorfo en V , y ϕ es su flujo, entonces Φ^*Y es el campo vectorial holomorfo en U definido por

$$\Phi^*Y(z) := (D\Phi^{-1})_{\Phi(z)}(Y(\Phi(z))), \quad (1.2)$$

que tiene por flujo el conjugado por Φ^{-1} del flujo ϕ de Y , a saber: $\Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi$.

Dado un campo holomorfo X en un abierto U de \mathbb{C}^2 como en (1.1), designaremos a P_1 y P_2 por P y Q , respectivamente. Asociado a X tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = P(z_1, z_2) \\ \frac{dz_2}{dt} = Q(z_1, z_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

Teorema 1.1.1. (Teorema de existencia y unicidad) Para el sistema de ecuaciones diferenciales (1.3) definido por X se verifica:

- i) Existencia de solución: para cualquier $z \in U$ existe un disco \mathbb{D}_{r_z} de centro 0 y radio $r_z > 0$, y una función holomorfa $\varphi_z : \mathbb{D}_{r_z} \rightarrow U$ tal que $\varphi_z(0) = z$ y

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t \varphi_z = X(\varphi_z(t)) = (P(\varphi_z(t)), Q(\varphi_z(t))), \quad \text{para cada } t \text{ en } \mathbb{D}_{r_z}.$$

Diremos que una tal φ_z es solución local de X por z .

- ii) Unicidad: si existe otra solución local $\varphi'_z : \mathbb{D}_{r'_z} \rightarrow U$ de X por z , entonces φ_z y φ'_z coinciden en $\mathbb{D}_{r_z} \cap \mathbb{D}_{r'_z}$.

Demostración. Ver en [Hil76, Capítulo 1]. □

Observación 1.1.1. Si z no es un punto singular de X , la solución local φ_z de X por z , que es una inmersión del disco \mathbb{D}_{r_z} sobre su imagen, puede verse como parametrización local de una superficie de Riemann abierta de U cuya diferencial transforma el campo $\frac{\partial}{\partial t}$ en \mathbb{D}_{r_z} en un campo holomorfo $\varphi_{z*} \frac{\partial}{\partial t} = X|_{\varphi_z(\mathbb{D}_{r_z})}$ sobre esta superficie.

El teorema 1.1.1 nos permite definir una aplicación continua φ en un entorno abierto V de $\{0\} \times U$ en $\mathbb{C} \times U$ de la forma

$$\begin{aligned} V \subset \mathbb{C} \times U &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^2 \\ (t, z) &\mapsto \varphi(t, z) := \varphi_z(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

φ es holomorfa en la variable t por serlo cada $\varphi_z(t)$. Pero, además, como tenemos una familia de campos holomorfos $\{\varphi_{z*} \frac{\partial}{\partial t}\}_{z \in U}$, parametrizados por un abierto U (ver observación 1.1.1), la función φ es holomorfa en la variable z [Hil76], y por tanto, holomorfa en todo V . Vemos que φ satisface las dos siguientes propiedades:

- $\varphi(0, z) = z$ para todo z en U , y
- $\varphi(t, \varphi(s, z)) = \varphi(t + s, z)$, donde quiera que ambos miembros estén definidos.

Llamaremos a φ *flujo (holomorfo)* del campo X .

Para un campo vectorial holomorfo X en U fijemos un punto $z \in U$ no singular de X y la solución local $\varphi_z : \mathbb{D}_{r_z} \rightarrow U$ de X por z . Hemos visto en la observación 1.1.1 que φ_z “puede verse parametrizando” una superficie de Riemann abierta de U . Veamos con más detalle cómo es dicha superficie. Al extender φ_z por prolongación analítica a lo largo de caminos en \mathbb{C} partiendo del punto $t = 0$ a su máximo dominio de definición Ω_z , puede suceder que la nueva función sea multivaluada. En ese caso, en vez de restringirnos a un conjunto menor, podemos entender Ω_z al modo de Riemann, [For96, p. 127]: el dominio Ω_z será la superficie de Riemann abierta y conexa para la que existe una inmersión holomorfa $\pi_z : \Omega_z \rightarrow \mathbb{C}$ tal que la solución local φ_z extiende por prolongación analítica a una aplicación holomorfa $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ que satisface

$$\varphi_z(0) = z \quad \text{y} \quad D\varphi_z(\pi_z^{-1}(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = X(\varphi_z(t)).$$

El campo $\frac{\partial}{\partial t}$ es el levantado por π_z del campo constante en \mathbb{C} .

Definición 1.1.2. (Solución y trayectoria) Para un campo vectorial holomorfo X en U , llamaremos a la aplicación $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ solución de X por z , y a su imagen $C_z = \varphi_z(\Omega_z)$ trayectoria (compleja) de X por z

Observación 1.1.2. Si z no es una singularidad de X , la correspondiente trayectoria C_z , que se llama *no trivial*, tiene estructura de superficie de Riemann inmersa en \mathbb{C}^2 , [For96, p. 126].

Observación 1.1.3. En variedades complejas M en general se pueden definir también campos vectoriales holomorfos. Basta definir un campo X en M como una sección global del fibrado tangente. El campo X en cada carta de M tiene una expresión analítica de la forma (1.1) y las definiciones de trayectoria y solución son las naturales.

1.2. Singularidades de curvas holomorfas

Una curva holomorfa en una variedad compleja M de dimensión 2 es una subvariedad analítica en M definida localmente por los ceros de una función holomorfa. En esta memoria utilizaremos algunos resultados sobre singularidades de curvas que aplicaremos al estudio de campos vectoriales.

Resolución de singularidades para curvas, [LNS97, Capítulo I]. La *explosión* de una variedad compleja de dimensión dos M en un punto p es la variedad compleja \tilde{M} que se obtiene reemplazando en M el punto p por el $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de direcciones pasando por ese punto. A continuación, detallamos esta construcción para el caso en que $M = \mathbb{C}^2$ y p es el origen de coordenadas.

Consideremos dos copias U y V de \mathbb{C}^2 con coordenadas (t, x) y (s, y) respectivamente, y el biholomorfismo

$$U \setminus \{t = 0\} \xrightarrow{\Phi} V \setminus \{s = 0\}.$$

$$(t, x) \mapsto (1/t, tx) = (s, y).$$

Si identificamos U y V mediante Φ , obtenemos una nueva variedad $\tilde{\mathbb{C}}^2$. La aplicación holomorfa $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definida por $\pi(t, x) = (x, tx)$ en U y $\pi(s, y) = (sy, y)$ en V , verifica: (a) es propia, (b) $\pi^{-1}(0) = D$ es una subvariedad compleja de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ biholomorfa a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, y (c) π restringida a $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$ es un biholomorfismo sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. El par formado por $\tilde{\mathbb{C}}^2$ y la proyección π es la *explosión* de \mathbb{C}^2 en el origen, y la subvariedad de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ definida por $\pi^{-1}(0) = D$ se llama *divisor excepcional* de esta explosión. Para una variedad compleja de dimensión dos M , la explosión \tilde{M} de M en un punto arbitrario $p \in M$ se hace efectuando la construcción anterior en una carta local en p de M . Podemos iterar el proceso de explosión de la manera siguiente: comenzamos con la variedad M y el punto $p_0 = p$. Si hacemos la explosión de M en p_0 , obtenemos la variedad $M_1 = \tilde{M}$ con proyección $\pi_1 = \pi$ y divisor excepcional $D_1 = \pi_1^{-1}(p_0)$. Seguidamente, fijamos un p_1 en D_1 , y hacemos la explosión de M_1 en p_1 , obteniendo la variedad $M_2 = \tilde{M}_1$ y la proyección π_2 con divisor excepcional D_2 . Inductivamente, repitiendo el proceso hasta $n \geq 1$ explosiones, obtenemos la variedad M_n con una

aplicación propia $\pi^n = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1 : M_n \rightarrow M$ y divisor excepcional definido inductivamente por:

$$\begin{aligned} D^1 &= D_1, \quad D^2 = D_2 \cup \pi_2^{-1}(D^1) \sim D_2 \cup D_1, \dots, \\ D^n &= D_n \cup \pi_n^{-1}(D^{n-1}) \sim D_n \cup D_{n-1} \cup \cdots \cup D_1, \end{aligned}$$

que se llama *sucesión de explosiones en p* . En este caso D^n es un *grafo de ciclos proyectivos*

Llamaremos *sucesión de explosiones* en un subconjunto finito B de M , a la composición de un número finito de sucesiones de explosiones en puntos de B . Definimos su *divisor excepcional* como la unión de los divisores excepcionales de cada una de las sucesiones. Dada una curva holomorfa C en M y un subconjunto finito B de C , para cualquier sucesión π^n de explosiones en B , tenemos que $(\pi^n)^{-1}(C) = D^n \cup C_n$, donde $D^n \cap C_n$ es una cantidad finita de puntos. La curva C_n se llama *transformada estricta* de C (por π^n). Asociada al conjunto de singularidades de C , que designamos por $Sing(C)$, tenemos la siguiente sucesión de explosiones.

Teorema 1.2.1. (Resolución de singularidades para curvas) *Para toda curva holomorfa C en una superficie compleja M existe una sucesión de explosiones en $Sing(C)$, $\pi^n : M_n \rightarrow M$, con divisor excepcional $D^n = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, tal que la transformada estricta C_n de C verifica: 1) no es singular, 2) corta a cada D_j transversalmente y 3) $D^n \cap C_n$ no contiene ningún punto de $D_i \cap D_j$ con $i \neq j$. Esta sucesión de explosiones es conocida como la resolución de las singularidades de C , y su transformada estricta C_n es la normalización o desingularización de C .*

Este teorema nos permite parametrizar las ramas de una curva:

Corolario 1.2.1. (Existencia de ramas y parametrización) *Sea C una curva holomorfa en una superficie compleja M . Dado $q \in C$, existen curvas holomorfas $C_1, \dots, C_m \subset M$, que llamaremos ramas de C en q , de forma que, para todo $j = 1, \dots, m$, se cumple: a) $q \in C_j$, b) hay un entorno U de q en M tal que $C \cap U \subset C_1 \cup \cdots \cup C_m$, y c) existe un homeomorfismo $\gamma_j : \mathbb{D} \rightarrow C_j \cap U$, con $\gamma_j(0) = q$, tal que restringido a \mathbb{D}^* es un biholomorfismo sobre $C_j \setminus \{q\}$.*

Parametrización de Puiseux, [MM80]. Las parametrizaciones γ_j de las ramas C_j pueden elegirse minimales de forma que se cumpla la siguiente propiedad: si α_j es otra parametrización de C_j , existe una aplicación $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\alpha_j = \gamma_j \circ u$. A esta γ_j la llamamos *Parametrización de Puiseux* de C_j (o de $C_j \cap U$).

1.3. Singularidades de campos vectoriales

Supondremos en este apartado que X es un campo vectorial holomorfo definido en un abierto U de \mathbb{C}^2 y que p es un punto en U .

Singularidades aisladas o ceros de campos vectoriales, [LNS97]. Decimos que p es una *singularidad aislada* o un *cero (aislado)* de X si p es el único punto singular de X en un entorno de p en U . Consideremos un germen irreducible Σ en p de curva analítica. Un tal Σ está definido en un entorno $V \subset U$ de p por una ecuación reducida $\{F = 0\}$, donde $F \in \mathcal{O}(V)$ y $F(p) = 0$.

Definición 1.3.1. Diremos que Σ es una *separatriz* de X por p si $DF_p X(p) = 0$ para todo p de Σ .

La existencia de separatriz en dimensión dos es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 1.3.1. (Teorema de Camacho-Sad, [CS82]) Si X es un campo vectorial holomorfo en un abierto U de \mathbb{C}^2 y p es una singularidad aislada de X , entonces existe siempre una separatriz Σ de X por p .

Singularidades no degeneradas. Sea p una singularidad aislada de X . Por definición, los autovalores de la singularidad son los autovalores de la parte lineal DX_p de X en p . Si los dos autovalores no son ambos cero, decimos que p es *no degenerada*. Si, además, al menos uno de ellos es cero, llamamos a p *silla-nodo*. En este caso, la *dirección fuerte* es la definida por el autovector no nulo y la *dirección débil* la dada por el autovector nulo.

En la siguiente proposición hemos resumido los resultados sobre separatrices de un campo vectorial holomorfo X por una singularidad no degenerada p que utilizaremos.

Proposición 1.3.1. Sea p una singularidad no degenerada de X con autovalores λ y μ . Tenemos dos casos.

i) Si p es un silla-nodo, entonces existen como mínimo una separatriz de X por p , y como máximo dos separatrices de X por p . En el primer caso, la separatriz es lisa (no singular) y tangente a la dirección fuerte, mientras que en el segundo caso ambas separatrices son lisas y tangentes respectivamente a las direcciones fuerte y débil.

ii) Si p no es un silla-nodo existen dos posibilidades:

ii.1) Cuando $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}^+$ (se dice que p es resonante) entonces, o es dicrítica (es decir, existen infinitas separatrices de X por p) o es de tipo Poincaré-Dulac: después de un cambio holomorfo de coordenadas φ en un entorno de p en U , $\varphi_* X$ está definido por un campo de forma:

$$x \frac{\partial}{\partial x} + (ny + x^n) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}^*.$$

ii.2) Cuando $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$, entonces X tiene dos únicas separatrices por p que, además, son lisas y transversales en p .

Demostración. Para *i)* y *ii.2)* ver pp. 518–521 en [MM80]. Para *ii.1)* ver [Arn80]. \square

Las singularidades que verifican *i)* ó *ii.1)* se llaman *singularidades simples*.

Multiplicidad de un campo con respecto a una separatriz, [CNS84]. Sea p una singularidad aislada de X y Σ una separatriz de X por p . Si B es una bola suficientemente pequeña, entonces $B \cap \Sigma$ es homeomorfo a un disco de dimensión dos. Tal homeomorfismo puede ser realizado, por ejemplo, tomando la parametrización de Puiseux de $B \cap \Sigma$. Estamos en la siguiente situación: tenemos un disco $\mathbb{D} = B \cap \Sigma$ y el campo vectorial $X|_{\mathbb{D}}$ definido por la restricción de X a \mathbb{D} con una única singularidad en \mathbb{D} . Si consideramos $X|_{\mathbb{D}}$ como campo vectorial real, el grado topológico de la *aplicación de Gauss*:

$$\frac{X|_{\mathbb{D}}}{\|X|_{\mathbb{D}}\|} : \mathbb{S}_r^1(p) \longrightarrow \mathbb{S}^1,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^2 y $\mathbb{S}_r^1(p)$ es una circunferencia de radio $r > 0$ suficientemente pequeño, es el *índice topológico de $X|_{\mathbb{D}}$ en p* . Tanto en \mathbb{S}^1 como en $\mathbb{S}_r^1(p)$ escogemos la orientación dada por un campo en el disco que es normal en su frontera y apunta hacia afuera.

Definición 1.3.2. Sean X , Σ , B , $\mathbb{D} = B \cap \Sigma$ y $p \in \mathbb{D}$ como antes. Se define la *multiplicidad de X en p con respecto a Σ* como el *índice topológico de $X|_{\mathbb{D}}$ en p* . Designaremos a este índice por $ind_p(X, \Sigma)$.

Este índice puede darse en términos de la parametrización de Puiseux de Σ :

Proposición 1.3.2. Consideremos la parametrización de Puiseux $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma \cap B$ de $\Sigma \cap B$ y el campo γ^*X en \mathbb{D} que se expresa analíticamente por $f(t)\frac{\partial}{\partial t}$, con $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Si el desarrollo en serie de potencias de f es $\sum_{j \geq m} a_j t^j$, con $a_m \neq 0$, se tiene que $ind_p(X, \Sigma) = m$.

Demostración. Ver en [CNS84, Proposition 3]. \square

La multiplicidad de X en p con respecto a Σ es un invariante analítico (local):

Teorema 1.3.2. Dado cualquier biholomorfismo $h : B \rightarrow h(B) \subset \mathbb{C}^2$, con $h(p) = p'$, si tomamos h_*X se verifica que $ind_p(X, \Sigma) = ind_{p'}(h_*X, h(\Sigma))$.

Demostración. Ver en [CNS84, Theorem B]. \square

1.4. Foliaciones holomorfas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

Geometría de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. El plano proyectivo complejo es el espacio de rectas en \mathbb{C}^3 que pasan por el origen. Si consideramos en $\mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$ la acción de \mathbb{C}^* definida por $\lambda(x_0, x_1, x_2) = (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2)$, el cociente de $\mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$ módulo esta acción (con la topología cociente) es el plano proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Las clases de equivalencia se llaman puntos proyectivos y se designarán por $[z_0 : z_1 : z_2]$. Consideremos los tres abiertos

$$U_i := \{[z_0 : z_1 : z_2], z_i \neq 0\} \quad \text{para } i = 0, 1, 2;$$

y los homeomorfismos $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow U_i$ definidos por

$$\phi_0(z_1, z_2) = [1 : z_1 : z_2], \quad \phi_1(y_1, y_2) = [y_1 : 1 : y_2] \quad \text{y} \quad \phi_2(w_1, w_2) = [w_1 : w_2 : 1].$$

Como $\phi_1^{-1}\phi_0$, $\phi_2^{-1}\phi_1$ y $\phi_0^{-1}\phi_2$ son biholomorfismos,

$$\{(U_i, \phi_i^{-1})\}_{i=0,1,2}$$

es un atlas holomorfo que define una estructura de variedad compleja compacta para $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Llamaremos a cada (U_i, ϕ_i^{-1}) carta afín de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, y a cada $\{z_i = 0\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus U_i$ recta del infinito de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con respecto a la carta afín (U_i, ϕ_i^{-1}) .

Para todo entero $n \in \mathbb{Z}$ y subíndices $i, j \in \{0, 1, 2\}$, definimos las funciones

$$U_i \cap U_j \xrightarrow{\zeta_{ij}^n} \mathbb{C}^*$$

$$\zeta_{ij}^n[z_0 : z_1 : z_2] = \left(\frac{z_j}{z_i} \right)^n. \quad (1.5)$$

Si en cada abierto $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}$ identificamos

$$([z_0 : z_1 : z_2], \lambda) \sim ([z_0 : z_1 : z_2], \zeta_{ij}^n[z_0 : z_1 : z_2]\lambda),$$

como las funciones ζ_{ij}^n verifican la condición de cociclo en $U_i \cap U_j \cap U_k$ dada por la relación $\zeta_{ik}^n = \zeta_{ij}^n \cdot \zeta_{jk}^n$, obtenemos un fibrado vectorial complejo de dimensión uno que designaremos por $\mathcal{O}(n)$, resultado de tomar el espacio

$$\bigcup_i (U_i \times \mathbb{C}) / \sim$$

a partir de dichas identificaciones.

Foliaciones inducidas por campos vectoriales polinómicos, [GMOB89].

Supondremos en este apartado que X es un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 con singularidades aisladas. Llamamos grado de un campo vectorial polinómico al máximo de los grados de sus componentes.

Si identificamos \mathbb{C}^2 con la carta afín (U_0, ϕ_0^{-1}) de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, el campo X se expresa en coordenadas como

$$X = P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + Q(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (1.6)$$

Sea m el grado de X . Utilizando los cambios de coordenadas $\phi_1^{-1}\phi_0$ y $\phi_2^{-1}\phi_0$ podemos extender X a las otras dos cartas afines como

$$\frac{1}{y_1^{m-1}} \left(\sum_{i=0}^m -y_1^{m-i+1} P_i(1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=0}^m y_1^{m-i} G_i(y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \text{ en } (U_1, \phi_1^{-1}), \text{ y} \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{w_1^{m-1}} \left(\sum_{i=0}^m -w_1^{m-i+1} Q_i(w_2, 1) \frac{\partial}{\partial w_1} + \sum_{i=0}^m w_1^{m-i} H_i(w_2) \frac{\partial}{\partial w_2} \right) \text{ en } (U_2, \phi_2^{-1}). \quad (1.8)$$

Donde P_i y Q_i son las componentes homogéneas de grado i de P y Q , respectivamente, $G_i(y_2) = [Q_i(1, y_2) - y_2 P_i(1, y_2)]$, y $H_i(w_2) = [P_i(w_2, 1) - w_2 Q_i(w_2, 1)]$.

Por tanto, X define un campo vectorial (holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$), que viene dado en cada carta afín por (1.6), (1.7) y (1.8). De estas ecuaciones concluimos que el polo de X a lo largo de la recta del infinito L_∞ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con respecto a (U_0, ϕ_0^{-1}) se comporta de la siguiente forma:

- i) Si G_m y H_m son idénticamente nulos, el polo es de orden $m - 2$.
- ii) Si G_m ó H_m no son idénticamente nulos, el polo es de orden $m - 1$.

Eliminando el polo de X multiplicando respectivamente (1.7) y (1.8) por y_1^d y w_1^d , para $d = m - 1$ ó $m - 2$ según el orden del polo de X , tenemos en cada carta afín (U_i, ϕ_i^{-1}) un campo vectorial polinómico X_i con singularidades aisladas. Además, como en cada una de las intersecciones $U_i \cap U_j$ (con $i \neq j$) estos campos verifican que $X_i = \zeta_{ij}^d X_j$, para ζ_{ij}^d como en (1.5), podemos verlos definiendo una sección holomorfa global \mathcal{F}_X del producto tensorial del fibrado tangente $T\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con el fibrado $\mathcal{O}(d)$. Motivados por este hecho, definimos:

Definición 1.4.1. (Foliación en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ definida por X) Dado un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 de grado m y con singularidades aisladas, la foliación holomorfa \mathcal{F}_X en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ definida por X es la sección global de $T\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}(d)$, dada en cada carta afín por:

- $X_0 = X$ en U_0 ,
- $X_1 = y_1^d (\phi_1^{-1} \phi_0)_* X$ en U_1 , y

- $X_2 = w_1^d(\phi_2^{-1}\phi_0)_*X$ en U_2 .

Donde $d = m - 1$ ó $m - 2$ es el orden del polo de X en L_∞ .

Observación 1.4.1. Para cualquier par de escalares α y β no nulos, podríamos haber eliminado, igualmente, el polo de X multiplicando respectivamente por αy_1^d y βw_1^d las ecuaciones (1.7) y (1.8), obteniendo como sección, en ese caso, una de la forma $\lambda \mathcal{F}_X$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Para eliminar esta ambigüedad, consideramos \mathcal{F}_X definida de forma única, como en la definición 1.4.1, salvo multiplicación por escalares.

Definición 1.4.2. El conjunto $Sing(\mathcal{F}_X)$ de puntos singulares o singularidades de la foliación \mathcal{F}_X es la variedad algebraica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dada en cada carta afín (U_i, ϕ_i^{-1}) por las singularidades de X_i .

Observación 1.4.2. Todas las propiedades sobre singularidades aisladas para un campo X que hemos visto en la sección 1.3 no dependen de si multiplicamos o no X por un escalar. Como dos campos X e Y definen la misma foliación si y sólo si $X = \lambda Y$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (ver observación 1.4.1), estos resultados también son válidos para \mathcal{F}_X si los enunciamos para cualquier campo que representa a esta foliación en un entorno de una singularidad aislada. Podemos decir, por ejemplo, singularidad de tipo Poincaré–Dulac de \mathcal{F}_X , separatriz de \mathcal{F}_X por una singularidad no degenerada de \mathcal{F}_X , o hablar de multiplicidad de \mathcal{F}_X con respecto a una separatriz Σ en p , que denotaremos por $ind_p(\mathcal{F}_X, \Sigma)$.

Definición 1.4.3. Las hojas \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_X son las subvariedades analíticas conexas inmersas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que en cada carta afín (U_i, ϕ_i^{-1}) corresponden con una trayectoria de X_i .

La definición de foliación en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ se generaliza a una variedad compleja M de dimensión dos de la siguiente manera:

Definición 1.4.4. Una foliación holomorfa singular \mathcal{F} en M está definida por un recubrimiento abierto $\{U_j\}_{j \in I}$ de M y campos vectoriales holomorfos X_j en cada U_j con a lo más singularidades aisladas tales que, en cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ los campos X_i y X_j coinciden salvo por multiplicación por una función holomorfa nunca nula. El conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$ es el conjunto discreto que en cada U_i viene dado por los ceros de X_i .

Resolución de singularidades de una foliación [LNS97]. Consideremos una foliación holomorfa \mathcal{F}_X en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ definida por X . Tomemos un $p \in Sing(\mathcal{F}_X)$, que supondremos sin pérdida de generalidad que está en U_0 . Sea $\pi : \tilde{\mathbb{C}}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ la explosión de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en p , con divisor excepcional $D = \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. El levantado de X por la restricción de $\pi^{-1}(U_0 \setminus \{p\})$, como un simple cálculo demuestra, extiende a un campo holomorfo que se anula sobre D con multiplicidad $\ell_p > 0$, que llamamos

π^*X . En cada una de las dos cartas U y V de $\pi^{-1}(U_0)$ que recubren a D podemos dividir π^*X por x^{ℓ_p} e y^{ℓ_p} , respectivamente, para así obtener un campo de vectores holomorfo con singularidades aisladas en cada uno de estos abiertos. Estos dos campos difieren en el producto por una función holomorfa nunca nula en $U \cap V$. Por tanto se obtiene una foliación $\tilde{\mathcal{F}}_X$ en $\tilde{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$.

Teorema 1.4.1. (Resolución de \mathcal{F}_X , [Sei68]) *Dado cualquier singularidad $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de \mathcal{F}_X , existe una sucesión de explosiones $\pi^n : M_n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en p tal que la foliación $(\pi^n)^*\mathcal{F}_X$ tiene sólo singularidades simples sobre $(\pi^n)^{-1}(p)$.*

1.5. Algunos resultados para polinomios

Designaremos el *anillo de polinomios* en las variables z_1, z_2, \dots, z_n con coeficientes en \mathbb{C} por $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Llamaremos a una aplicación

$$F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m,$$

polinómica si todas sus componentes F_1, \dots, F_m son polinomios.

Un hecho bien conocido es el siguiente tipo de Teorema de Sard para polinomios:

Teorema 1.5.1. *Sea $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Existe un conjunto finito $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ que tiene la propiedad de que P restringido a $\mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(\mathcal{B})$ define una fibración topológicamente trivial sobre $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$.*

Demostración. Ver en [Bro83]. □

Definiciones 1.5.1. *El conjunto más pequeño \mathcal{B}_P que tiene la propiedad del teorema 1.5.1 es el conjunto de valores atípicos de P . Si μ es un valor atípico de P se dice que la fibra $P^{-1}(\mu)$ es atípica o no genérica. En caso contrario, diremos que la fibra es típica o genérica.*

Observaciones 1.5.1. Como todas las fibras genéricas de P son homeomorfas a la misma superficie de Riemann, está justificado que digamos *la fibra genérica* de P . El conjunto \mathcal{B}_P contiene a los valores críticos de P , pero, en general, puede contener otros valores que son los *valores críticos en el infinito* (ver [Suz74]).

Existe otra noción de *fibra genérica* para un polinomio que tiene en cuenta la estructura holomorfa de sus fibras (ver definición 1.5.4). Necesitamos antes algunas definiciones.

Funciones subarmónicas y plurisubarmónicas. Subconjuntos de capacidad cero en \mathbb{C}^n . Convenimos en llamar dominio a todo subconjunto abierto y conexo de \mathbb{C}^n .

Definición 1.5.1. Se dice que una función u definida en un dominio Ω de \mathbb{C} es subarmónica si i) $-\infty \leq u(z) < \infty$ para todo $z \in \Omega$, ii) u es semicontinua superiormente, iii) para todo $\mathbb{D}_r(a) \subset \Omega$

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

y iv) ninguna de las integrales de iii) es $-\infty$.

Las propiedades i) y ii) implican que u está acotada superiormente en cada compacto $K \subset \Omega$. Por tanto, todas las integrales de iii) siempre existen y son $< \infty$.

Ejemplos 1. Para toda función holomorfa f definida en un dominio Ω de \mathbb{C} y no idénticamente nula, las funciones $\log |f|$, $\log^+ |f| = \max(0, \log |f|)$ y $|f|^p$ ($0 < p < \infty$) son subarmónicas [Rud88, p. 382].

Las funciones plurisubarmónicas fueron introducidas por K. Oka, y son la extensión natural a varias variables de las funciones subarmónicas.

Definición 1.5.2. Se dice que una función u definida en un dominio Ω de \mathbb{C}^n es plurisubarmónica si i) u es semicontinua superiormente, y ii) para todo dominio W de \mathbb{C} y toda función holomorfa $\phi : W \rightarrow \Omega$, la composición $u \circ \phi$ es subarmónica o idénticamente igual a $-\infty$.

Ejemplos 2. De los Ejemplos 1 se deduce que toda función holomorfa f definida en un dominio Ω de \mathbb{C}^n , y no idénticamente nula, define las funciones plurisubarmónicas: $\log |f|$, $\log^+ |f|$ y $|f|^p$ ($0 < p < \infty$).

Definición 1.5.3. (Subconjuntos de capacidad cero, [Nis62]) Diremos que un subconjunto S de \mathbb{C}^n es de capacidad cero, si podemos tomar una familia numerable $\{S_n\}$ de subconjuntos de \mathbb{C}^n tales que $S = \bigcup_n S_n$ y, para cada S_n , existe una función plurisubarmónica u_n definida en un dominio de $U_n \subset \mathbb{C}^n$ tal que i) u_n no es idénticamente igual a $-\infty$ en U_n y ii) $S_n \subset \{x \in U_n \mid u_n(x) = -\infty\}$. Si S no es de capacidad cero, diremos que tiene capacidad positiva.

Función racional de tipo \mathcal{S} . El tipo de una función meromorfa, que fue introducido por T. Nishino en [Nis68], [Nis69], [Nis70], [Nis73] y [Nis75], es la generalización para una función meromorfa de lo que es la fibra genérica para un polinomio. Nosotros estamos interesados en funciones racionales de \mathbb{C}^n , es decir, funciones cociente $F = P/Q$ de dos polinomios P y Q de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ que dan lugar en

$$E_0 = \mathbb{C}^n \setminus \{P = Q = 0\}$$

a una función meromorfa que extiende como función racional de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Identificaremos un polinomio P con la función racional que trivialmente define en $E_0 = \mathbb{C}^n$.

Tomemos una función racional $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y una variedad de Stein \mathcal{S} conexa en \mathbb{C}^n de dimensión $n - 1$, definimos:

Definición 1.5.4. Diremos que F es de tipo \mathcal{S} , si existe un subconjunto E de \mathbb{C}^n de capacidad positiva formado por componentes de fibras de F en E_0 que son biholomorfas a \mathcal{S} .

1.5.1. Resultados clásicos en dimensión dos

Destacamos algunos resultados para polinomios en dos variables.

Teorema 1.5.2. (Teorema de Suzuki-Abhyankar-Moh, [Suz74] [AM75])

Si $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio irreducible tal que la curva algebraica definida por $\{P = 0\}$ en \mathbb{C}^2 es no singular y simplemente conexa, entonces, para todo λ distinto de cero, la curva en \mathbb{C}^2 definida por $\{P = \lambda\}$ es irreducible, no singular y simplemente conexa. Además, existe un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 tal que $P \circ \Phi = x$.

Este resultado admite una generalización debida a V.-Y. Lin y a M.-G Zaidenberg y que también utilizaremos.

Teorema 1.5.3. (Teorema de Lin-Zaidenberg, [ZL83])

Si $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio tal que la curva algebraica definida por $\{P = 0\}$ en \mathbb{C}^2 es simplemente conexa (no necesariamente lisa e irreducible), entonces existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 tal que $P \circ \Phi$ es de una de las dos formas siguientes:

- 1) $x^m y^n \prod_{i=1}^s (x^k - a_i y^\ell)$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $(k, \ell) = 1$, y $a_i \in \mathbb{C}^*$, ó
- 2) $x^k q(y)$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $q(y) \in \mathbb{C}[y]$.

Sobre la factorización de un polinomio destacamos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.4. (Teorema de factorización de Stein, [Ste58])

Para cualquier función racional $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ no constante existe una aplicación holomorfa $h : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y una función racional $R : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tales que F se factoriza como $F = h \circ R$. Además, R no puede factorizarse de esta manera para un h de grado distinto de uno. La función R se dice que es primitiva.

Observación 1.5.1. El Teorema de Stein admite una formulación afín cuando F es un polinomio. En ese caso h y R son polinomios en una y dos variables, respectivamente, y R está determinado de forma única salvo composición por una aplicación lineal de \mathbb{C} .

La relación que hay entre el tipo de un polinomio y su fibra genérica queda reflejada en la siguiente proposición:

Proposición 1.5.1. *Si P es un polinomio en \mathbb{C}^2 con fibra genérica biholomorfa a una superficie de Riemann \mathcal{S} entonces es primitivo y de tipo \mathcal{S} .*

Demostración. Es obvio que P es primitivo, pues de no serlo, la fibra genérica de P no sería conexa y \mathcal{S} lo es. Para ver que es de tipo \mathcal{S} es suficiente probar que el conjunto $P^{-1}(\mathcal{B}_P)$, con \mathcal{B}_P el conjunto de valores atípicos de P (ver definiciones 1.5.1), tiene capacidad cero. Ya que el complementario de un conjunto de capacidad cero tiene capacidad positiva. Si $\mathcal{B}_P = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, entonces

$$P^{-1}(\mathcal{B}_P) = \{(P - \lambda_1) \cdots (P - \lambda_s) = 0\}.$$

Tomemos entornos abiertos disjuntos V_s en \mathbb{C} de cada λ_s . Como P es continua, podemos considerar la familia finita $\{U_n\}$ de dominios de \mathbb{C}^2 formada por todas las componentes conexas de los $P^{-1}(V_s)$. Si definimos

$$u = \log |(P - \lambda_1) \cdots (P - \lambda_s)|,$$

esta función es plurisubarmónica en cada U_n (ver ejemplo 2) y toma el valor $-\infty$ exactamente en los puntos de $P^{-1}(\mathcal{B}_P)$. Por tanto $P^{-1}(\mathcal{B}_P)$ tiene capacidad cero, y la proposición queda demostrada. \square

El teorema 1.5.2 afirma en particular que todo polinomio P en \mathbb{C}^2 irreducible que tiene una fibra no singular y simplemente conexa es de tipo \mathbb{C} . Para una función racional en \mathbb{C}^2 de tipo \mathbb{C}^* , M. Suzuki ha generalizado un resultado de H. Saito en [Sai72] con el siguiente teorema.

Teorema 1.5.5. (Teorema de Saito–Suzuki, [Suz77, pp. 528-529])

Si $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es una función racional primitiva de tipo \mathbb{C}^ , existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 tal que $F \circ \Phi = h \circ G$, donde h es una función racional de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de grado uno y G es de la forma*

$$G = x^m(x^\ell y + p(x))^n, \tag{1.9}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}^$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado $\leq \ell - 1$ con término independiente $p(0) \neq 0$ si $\ell > 0$, ó $p(x) \equiv 0$ si $\ell = 0$.*

1.6. Campos vectoriales holomorfos completos.

Consideramos un campo vectorial holomorfo X en una variedad analítica M . Definimos la propiedad más importante que va a ser estudiada en esta memoria.

Definición 1.6.1. *Dada una trayectoria C_z de X , diremos que X es completo en (o sobre) C_z si la solución $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow C_z$ de X es entera, es decir, está definida en $\Omega_z = \mathbb{C}$. El campo X es completo, cuando para cada z en M , X es completo en C_z .*

Si X es un campo vectorial holomorfo completo en M , su flujo φ , que localmente se expresa por (1.4), está definido en todo $\mathbb{C} \times M$ y da lugar a una acción del grupo $(\mathbb{C}, +)$ en M por automorfismos holomorfos. Además, se observa que, recíprocamente, toda acción $\varphi : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ de $(\mathbb{C}, +)$ en M por automorfismos holomorfos, está asociada a un campo vectorial holomorfo

$$X(z) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t, z),$$

de flujo φ , que es completo. Por tanto, *existe una correspondencia biunívoca entre campos vectoriales holomorfos completos en M y acciones del grupo $(\mathbb{C}, +)$ en M por automorfismos holomorfos.*

Proposición 1.6.1. *Las trayectorias C_z sobre las que un campo vectorial holomorfo X en M es completo son biholomorfas, o a un plano \mathbb{C} , o a un plano perforado $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o a un toro complejo T .*

Demostración. Tomemos una trayectoria C_z de X por z sobre la que X es completo. El subconjunto

$$G_z = \{t \in \mathbb{C} \mid \varphi(t, z) = z\}$$

de \mathbb{C} es un subgrupo discreto del grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$, por tanto, un retículo en \mathbb{C} de la forma $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ con α y β en \mathbb{C} . Como dados cualesquiera dos puntos x y x' en C_z , existen valores t_0 y t'_0 en \mathbb{C} tales que $\varphi(t_0, z) = x$ y $\varphi(t'_0, z) = x'$, la operación en C_z definida por

$$x + x' := \varphi(t_0, \varphi(t'_0, z)) = \varphi(t_0 + t'_0, z),$$

dota de una estructura de grupo de Lie a C_z . Respecto de esta operación la solución $\varphi_z : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (C_z, +)$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Como el núcleo de este homomorfismo es G_z , la aplicación φ_z induce de forma natural un biholomorfismo entre \mathbb{C}/G_z y C_z (ver [FaKr80]), y así, C_z es biholomorfa a un plano \mathbb{C} , a un plano perforado $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o a un toro complejo, si el rango de G_z es cero, uno o dos, respectivamente. \square

Atendiendo a las tres posibilidades que existen para una trayectoria sobre la que un campo vectorial holomorfo puede ser completo, según la proposición 1.6.1, diremos que C_z es de tipo \mathbb{C} , \mathbb{C}^* o T , cuando C_z sea biholomorfa a \mathbb{C} , \mathbb{C}^* o T , respectivamente.

Campos completos en variedades de Stein. Cuando M es una variedad de Stein (en particular \mathbb{C}^2), el campo X sólo puede tener trayectorias de tipo \mathbb{C} o de tipo \mathbb{C}^* , ya que M no contiene subvariedades analíticas compactas distintas de puntos. Las trayectorias de tipo \mathbb{C}^* son especiales:

Teorema 1.6.1. (M. Suzuki, [Suz77, p.518] [Suz78b, p.86]) *Sea X un campo vectorial holomorfo en una variedad de Stein M . Entonces, toda trayectoria C_z de tipo \mathbb{C}^* de X es tal que su clausura \overline{C}_z en M es una curva analítica en M (Así, $\overline{C}_z \setminus C_z$ consiste en un sólo punto o es vacío).*

Además, existe genericidad del tipo de trayectorias:

Proposición 1.6.2. (M. Suzuki, [Suz78b, p.55]) *Para todo campo vectorial holomorfo completo en una variedad de Stein M existe un subconjunto $E \subset M$ de capacidad cero tal que $\varphi_z(E) = E$ para todo z en E , y tal que todas las trayectorias de X en $\mathbb{C}^2 \setminus E$ son o bien de tipo \mathbb{C} , o bien de tipo \mathbb{C}^* .*

Campos completos en superficies de Riemann. Cuando M es una variedad analítica conexa de dimensión uno, es decir, una superficie de Riemann, se pueden dar fácilmente todos los flujos holomorfos sobre ella. Aparecen en este estudio las siguientes familias:

Proposición 1.6.3. *Si X es un campo de vectores holomorfo completo en una superficie de Riemann M , salvo un biholomorfismo de M , X y M son como sigue:*

$$1) \quad \lambda z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{ó} \quad \lambda z^2 \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en } \mathbb{CP}^1.$$

$$2) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{ó} \quad \lambda z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en } \mathbb{C}.$$

$$3) \quad \lambda z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en } \mathbb{C}^*.$$

$$4) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en } T.$$

Con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. De acuerdo con el Teorema de uniformización de Riemann, el recubridor universal \hat{M} de M , salvo automorfismo, es el plano \mathbb{C} , el disco \mathbb{D} o la esfera de Riemann \mathbb{CP}^1 . Como dada la solución $\varphi_z : \mathbb{C} \rightarrow M$ de X por un $z \in M$ no singular de X podemos levantar φ_z (por prolongación analítica) como solución entera $\hat{\varphi}_z : \mathbb{C} \rightarrow \hat{M}$ de π^*X que verifica

$$\pi \circ \hat{\varphi}_z = \varphi_z,$$

π^*X es completo en \hat{M} . Se trata de estudiar qué flujos hay sobre \hat{M} y cuáles pueden conmutar con un subgrupo discreto de automorfismos. Nos remitimos para una demostración detallada de esta proposición a [LMnR00, p.179]. Nosotros haremos un resumen. Observamos primero que \hat{M} no es \mathbb{D} , pues en caso contrario, la solución φ_z

sería una función entera acotada, y por el Teorema de Liouville sería constante. Por tanto, \hat{M} es \mathbb{C} o \mathbb{CP}^1 . Si M es compacta tenemos dos posibilidades por el Teorema de Riemann-Roch. La primera es que M sea un toro T y X no tenga ceros, lo que nos lleva a que X sea un campo constante como 4). La segunda posibilidad es que M sea \mathbb{CP}^1 . En cuyo caso X tiene un cero doble o dos ceros simples, que pueden llevarse, respectivamente, a 0 ó a 0 e ∞ por un automorfismo de \mathbb{CP}^1 , para así obtener un X como 1). Si M no es compacta entonces M es \mathbb{C} o \mathbb{C}^* . Aplicando un automorfismo adecuado obtenemos las otras familias. \square

Capítulo 2

Trayectorias completas en el infinito de un campo polinómico

En este capítulo estudiamos las posibles singularidades no degeneradas de una foliación \mathcal{F}_X en el infinito cuando X es un campo vectorial polinómico completo, analizando sus trayectorias en puntos próximos al infinito. Este estudio nos permite demostrar que la propiedad de que un campo polinómico no tenga ninguna trayectoria completa en algún punto de L_∞ y la propiedad de no ser completo son genéricas en el conjunto de todos los campos vectoriales polinómicos de grado mayor o igual a dos. Analizamos también las trayectorias de campos hamiltonianos que explotan a tiempo finito, probando que existe un abierto denso del espacio de los campos vectoriales polinómicos hamiltonianos en \mathbb{C}^2 de grado mayor o igual que dos para el que cualquier campo hamiltoniano tiene un denso de puntos en \mathbb{C}^2 con trayectorias que explotan a tiempo finito. Parte de los resultados de este capítulo han sido publicados en [Bus03].

2.1. Trayectorias en el infinito.

En este capítulo analizaremos las trayectorias de un campo polinómico X en puntos cercanos a L_∞ . Para precisar qué entenderemos por puntos de una trayectoria C_z próximos al infinito, tomamos la foliación \mathcal{F}_X inducida por X en \mathbb{CP}^2 , y estudiamos su conjunto límite:

Definición 2.1.1. *Dada una trayectoria C_z de X , definimos su conjunto límite $\lim(C_z)$ en \mathbb{CP}^2 de la siguiente manera: si \mathcal{L} es la hoja de la foliación \mathcal{F}_X restringida a \mathbb{C}^2 que define C_z , y $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión creciente de conjuntos compactos de \mathcal{L} que la recubren, entonces*

$$\lim(C_z) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{L} \setminus K_i}, \quad (2.1)$$

donde $\overline{\mathcal{L} \setminus K_i}$ designa la clausura de $\mathcal{L} \setminus K_i$ en \mathbb{CP}^2

Observación 2.1.1. El conjunto $\lim(C_z)$ son los puntos de la frontera de C_z en \mathbb{CP}^2 .

Una propiedad importante de una trayectoria no trivial es la siguiente:

Proposición 2.1.1. *Toda trayectoria C_z no trivial de X no está acotada.*

Demostración. Argumentemos por contradicción, suponiendo que la trayectoria C_z está acotada. Sea $\varphi_z : \mathbb{D}_r \rightarrow C_z$ la prolongación analítica de la solución local de X por z en el disco $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}$ de mayor radio r posible. Observamos que r es finito, pues si $r = \infty$, $\varphi_z : \mathbb{C} \rightarrow C_z$ sería una función entera acotada, y por el Teorema de Liouville sería constante, lo que contradice el hecho de que $X(z) \neq 0$. Por otra parte, como C_z está acotada, por el teorema de existencia y unicidad (*ver* teorema 1.1.1), obtenemos un $R > 0$ tal que para todo $z' \in C_z$ la solución local de X por z' está definida en todo $t \in \mathbb{D}_R$. Aplicando esto a los puntos $\varphi_z(t_1) = z'$, con t_1 cerca de la frontera de \mathbb{D}_r , obtenemos que φ_z puede extenderse a un disco más grande $\mathbb{D}_{r+\epsilon}$ con $\epsilon > 0$, lo que contradice nuestra elección de r (para más detalles *ver* [GMOB89, p.134]). \square

Observación 2.1.2. Consecuencia inmediata de la proposición 2.1.1 es que el conjunto $\lim(C_z)$ de toda trayectoria no trivial C_z contiene siempre puntos de L_∞ . Esta es la razón principal por la que muchas de las propiedades globales de las trayectorias de X están determinadas por su comportamiento local en algún entorno de L_∞ como se ve en [GMOB89].

En la siguiente proposición vemos con más detalle cómo es el $\lim(C_z)$ cuando L_∞ es una hoja de \mathcal{F}_X (caso genérico, *ver* capítulo 1).

Proposición 2.1.2. *Sea C_z una trayectoria no trivial de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 . Si L_∞ es invariante por \mathcal{F}_X , entonces existen sólo dos posibilidades para su conjunto límite.*

i) *O bien $\lim(C_z) \cap L_\infty \subset \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$, o bien*

ii) *$\lim(C_z) \cap L_\infty = L_\infty$.*

Demostración. Acabamos de ver en la observación 2.1.2 que $\lim(C_z)$ contiene siempre puntos de L_∞ . Si hay un punto p de $\lim(C_z)$ en L_∞ que no es singular de \mathcal{F}_X , probaremos que $L_\infty \subset \lim(C_z)$. Si tomamos un q en $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$, y unimos p con q por un camino continuo

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$$

tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$, podemos elegir una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1,$$

de $[0, 1]$ y unas cartas locales (U_i, ϕ) , $0 \leq i < n$, de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ tales que $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U_i$, y de modo que el campo que represente a \mathcal{F}_X en esas coordenadas sea el campo horizontal en $\phi(U_i)$ (teorema de caja de flujo local, ver [GMOB89, p.12]). De esta manera, se sigue que $\alpha(t_1) \in \lim(C_z)$, y repitiendo el mismo argumento, $q \in \lim(C_z)$. Como este razonamiento es válido para cualquier q en $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$, hemos demostrado que $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_X) \subset \lim(C_z)$. Finalmente, obtenemos $\lim(C_z) \cap L_\infty = L_\infty$ (ver observación 2.1.1). \square

Nos ocuparemos del siguiente tipo de trayectorias.

Definición 2.1.2. (Trayectoria en un punto de L_∞) *Un germen Σ de curva analítica e irreducible se dice que es una trayectoria de X en $p \in L_\infty$ si $p \in \Sigma$ y X es tangente a $\Sigma \setminus \{p\}$.*

Observación 2.1.3. Toda separatriz Σ de \mathcal{F}_X por un punto p de $\text{Sing}(\mathcal{F}_X)$ en L_∞ , y distinta de ésta, define una trayectoria de X en $p \in L_\infty$.

Superficie de Riemann dada por una trayectoria en un punto del infinito.

Tomemos una trayectoria Σ de X en $p \in L_\infty$. Si extendemos $\Sigma \setminus \{p\}$ por continuación analítica, obtenemos una trayectoria C_z de X . Podemos dotar a $\mathcal{L} = C_z \cup \{p\}$ de una estructura de superficie de Riemann de la forma siguiente: para z' en C_z sabemos que existe una única solución local $\varphi_{z'} : \mathbb{D}_r \rightarrow U_{z'}$ de X por z' que parametriza a un entorno $U_{z'}$ de z' en C_z (ver teorema 1.1.1). Definimos la carta local en z' como $(U_{z'}, \varphi_{z'}^{-1})$. Para el punto p , la parametrización de Puiseux $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ de un entorno U_p de p en Σ nos define la carta local en p como (U_p, γ^{-1}) . Por tanto, el atlas

$$\mathcal{A} = \{ (U_{z'}, \varphi_{z'}^{-1}), z' \in C_z \} \cup (U_p, \gamma^{-1})$$

define una estructura de superficie de Riemann en \mathcal{L} .

Esta sencilla construcción permite considerar la restricción de X a C_z como un campo vectorial holomorfo definido en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$. Analizamos su extensión a p en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Dado un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 , si \mathcal{L} es la superficie de Riemann definida por una trayectoria Σ de X en un punto $p \in L_\infty$, X define un campo meromorfo en \mathcal{L} .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $p = [0 : 1 : 0]$. Tomemos la parametrización $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ de un entorno U_p de p en Σ , que asumiremos se escribe en la carta (U_1, ϕ_1^{-1}) como $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$, con $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en $\mathcal{O}(\mathbb{D})$. En este caso γ es biyectiva, holomorfa y $\gamma'(t) \neq 0$ si $t \neq 0$. Consideremos un $t \neq 0$. Como el espacio tangente a Σ en $\gamma(t)$ está generado por $\gamma'(t)$ y $\Sigma \setminus \{p\}$ es invariante por X , podemos escribir

$$(\phi_1^{-1} \phi_0)_* X(\gamma(t)) = f(t) \cdot \gamma'(t), \quad \text{con } f(t) \in \mathbb{C}.$$

De esta manera,

$$\gamma^*(\phi_1^{-1}\phi_0)_*X = f(t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

y la extensión de X en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ al punto p viene definida por

$$X(p) = f(0)\frac{\partial}{\partial t}.$$

Teniendo en cuenta que $(\phi_1^{-1}\phi_0)_*X$ es igual a (1.7), $f(t)$ viene dado por

$$-\frac{1}{y_1^{m-2}(t)y_1'(t)} \cdot \sum_{i=0}^m y_1^{m-i}(t) P_i(1, y_2(t)), \quad \text{si } y_1'(t) \neq 0, \quad \text{ó} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{y_1^{m-1}(t)y_2'(t)} \cdot \sum_{i=0}^m y_1^{m-i}(t) G_i(y_2(t)), \quad \text{si } y_2'(t) \neq 0. \quad (2.4)$$

Siendo (2.3) y (2.4) iguales cuando $y_1'(t) \cdot y_2'(t) \neq 0$. Si ahora sustituimos los desarrollos en serie de potencias de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en (2.3) y (2.4), respectivamente, vemos que $f(t)$ es una función holomorfa en \mathbb{D}^* que tiene un cero, un polo o un valor regular en $t = 0$, y por tanto, X define un campo meromorfo en \mathcal{L} . \square

Apliquemos el análisis del lema 2.1.1 al caso en que X es completo sobre $\mathcal{L} \setminus \{p\}$.

Proposición 2.1.3. *Si tomamos una trayectoria Σ de un campo vectorial polinómico X en $p \in L_\infty$ tal que X es completo en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ entonces, la restricción de X a $\mathcal{L} \setminus \{p\}$, o bien extiende a p con un cero de orden 1 y $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ es de tipo \mathbb{C}^* , o bien extiende a p con un cero de orden 2 y $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ es de tipo \mathbb{C} .*

Demostración. Como X es completo en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$, y puesto que \mathbb{C}^2 es una variedad de Stein, $C_z = \mathcal{L} \setminus \{p\}$ es biholomorfa a \mathbb{C} o a \mathbb{C}^* (ver proposición 1.6.1). Ahora utilizamos la proposición 1.6.3. Si C_z es de tipo \mathbb{C} , sabemos que la restricción de X sobre ella corresponde al campo

$$\lambda \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ y } p = \infty.$$

Tomando el cambio $\varphi(z) = 1/z = w$, este campo se expresa en un entorno de p como

$$\varphi_* \left(\lambda \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\lambda w^2 \frac{\partial}{\partial w},$$

que vemos extiende a p con un cero de orden 2. Si por el contrario C_z es de tipo \mathbb{C}^* , la restricción de X sobre ella corresponde al campo

$$\lambda z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ y } p = 0,$$

que claramente extiende a p con un cero de orden 1. \square

Definición 2.1.3. Sea X un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 , Σ una trayectoria de X en $p \in L_\infty$, y \mathcal{L} la superficie de Riemann definida por Σ . Diremos que Σ es completa si X en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ es completo.

Tenemos la siguiente propiedad geométrica de la foliación \mathcal{F}_X .

Corolario 2.1.1. Si X es un campo vectorial polinómico completo en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$, la línea del infinito L_∞ es invariante por \mathcal{F}_X .

Demostración. Supongamos que L_∞ no es invariante por \mathcal{F}_X . Entonces el polo de X a lo largo de L_∞ es de orden $m - 2$, y tanto G_m como H_m de (1.7) y (1.8), respectivamente, son idénticamente nulas. Fijada la carta afín (U_1, ϕ_1^{-1}) , podemos tomar un punto p en $U_1 \cap L_\infty$ de coordenadas $(0, \alpha)$ tal que $P_m(1, \alpha)$ sea distinto de cero. De no ser esto posible, tanto P_m como G_m serían idénticamente nulos y el grado de X sería $< m$, contradiciendo nuestra hipótesis. Por otra parte, como p no está en $\text{Sing}(\mathcal{F}_X)$, existe una solución local del campo X_1 que representa a \mathcal{F}_X en U_1 por p . Además, ya que $P_m(1, \alpha)$ es distinto de cero, dicha solución es transversal a L_∞ en p . Sea Σ la trayectoria de X en $p \in L_\infty$ definida por esta solución local y \mathcal{L} la correspondiente superficie de Riemann. Si suponemos que Σ está parametrizada por $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$, según (2.3), obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \left(-\frac{1}{y_1^{m-2}(t) y_1'(t)} \cdot \sum_{i=0}^m y_1^{m-i}(t) P_i(1, y_2(t)) \right) &= \\ \text{ord}_0 \left(\frac{P_m(1, \alpha)}{y_1^{m-2}(t) y_1'(t)} \right) &= 1 + (1 - m) \text{ord}_0 y_1(t) < 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Concluimos que el campo X en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ extiende a p con un polo, lo que es imposible por la proposición 2.1.3. \square

Observaciones 2.1.1. Destacamos:

a) Todo campo vectorial polinómico completo X de grado ≥ 2 en \mathbb{C}^2 tiene un polo de orden $m - 1$ a lo largo de L_∞ .

Basta ver que, como \mathcal{F}_X deja invariante L_∞ (ver corolario 2.1.1), G_m y H_m no son idénticamente nulos (ver Capítulo 1), y así el polo de X en L_∞ es de orden $m - 1$. El conjunto de singularidades de \mathcal{F}_X en L_∞ está definido en cada carta por:

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap U_1 &= \{(0, \alpha) \in L_\infty \mid G_m(\alpha) = 0\} \text{ en } (U_1, \phi_1^{-1}), \text{ y} \\ \text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap U_2 &= \{(0, \beta) \in L_\infty \mid H_m(\beta) = 0\} \text{ en } (U_2, \phi_2^{-1}). \end{aligned}$$

Globalmente, $\text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap L_\infty$ puede reescribirse como los puntos $[0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$ tales que:

$$z_1 Q_m(z_1, z_2) - z_2 P_m(z_1, z_2) = 0. \tag{2.6}$$

b) Todo campo vectorial polinómico completo X tal que \mathcal{F}_X no deja invariante L_∞ es múltiplo del campo radial, es decir, de la forma:

$$\lambda \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right), \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Al ser X necesariamente de grado uno, la condición $G_1 = H_1 \equiv 0$ implica que $P_1 = \lambda z_1$ y $Q_1 = \lambda z_2$, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

c) Las únicas trayectorias completas en el infinito que tiene un campo vectorial polinómico X de grado $m \geq 2$ son aquellas definidas por separatrices de la foliación \mathcal{F}_X por puntos en L_∞ .

d) Toda separatriz $\Sigma \neq L_\infty$ de \mathcal{F}_X por un punto p de L_∞ tal que $\Sigma \setminus \{p\}$ está contenida en una trayectoria C_z de X de tipo \mathbb{C} define una trayectoria en el infinito completa, que está contenida en una curva racional.

Es suficiente observar que en este caso \mathcal{L} es isomorfa analíticamente a \mathbb{CP}^1 , y por el Teorema de Chow, algebraica. Además, ya que el campo X restringido a $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ extiende a p con un cero de orden 2 (Riemann-Roch), X en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ es completo (ver proposición 2.1.3).

Índice de trayectorias completas en el infinito. Dada una trayectoria Σ de X por un punto p de L_∞ hemos visto en la proposición 1.3.2 y la observación 1.4.1 cómo se calcula la multiplicidad de \mathcal{F}_X en p con respecto a Σ , $ind_p(\mathcal{F}_X, \Sigma)$. Supongamos que $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$ es la parametrización de Σ y llamemos al orden $ord_0 y_1(t)$ el orden de contacto de Σ con L_∞ en p . Si Σ es completa, podemos saber cuánto vale $ind_p(\mathcal{F}_X, \Sigma)$.

Proposición 2.1.4. Si X es un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$, Σ es una trayectoria completa de X en un punto p en L_∞ , y σ es el orden de contacto de Σ con L_∞ en p , entonces

$$ind_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) - \sigma(m - 1) = 1 \text{ ó } 2.$$

Demostración. Sabemos que Σ es una separatriz ($\neq L_\infty$) de \mathcal{F}_X por $p \in Sing(\mathcal{F}_X)$ (ver c) de observaciones 2.1.1). Sin pérdida de generalidad, supondremos que $p = [0 : 1 : 0]$. Tomemos el campo X_1 que representa \mathcal{F}_X en U_1 , $\gamma(t) = (y_1(t), y_2(t))$ la parametrización de Σ y

$$\gamma^* X_1 = g(t) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Sabemos que $ord_0 g(t)$ es igual a $ind_p(\mathcal{F}_X, \Sigma)$ (ver proposición 1.3.2). Ya que el polo de X a lo largo de L_∞ es de orden $m - 1$ (ver a) en observaciones 2.1.1), $X_1 =$

$y_1^{m-1}(\phi_1^{-1}\phi_0)_*X$. Explícitamente, según las ecuaciones (2.3) y (2.4),

$$\gamma^*X_1 = g(t) \frac{\partial}{\partial t} = y_1^{m-1}(t)f(t) \frac{\partial}{\partial t},$$

y por lo tanto,

$$\text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) - (m-1)\sigma = \text{ord}_0 f(t).$$

El mismo argumento hecho en la demostración de la proposición 2.1.3 prueba que $\text{ord}_0 f = 1$ ó 2 . \square

2.2. Singularidades no degeneradas en el infinito.

En esta sección estudiamos las posibles singularidades no degeneradas de una foliación \mathcal{F}_X en el infinito cuando X es completo. Veamos primero que existen ejemplos de foliaciones \mathcal{F}_X con este tipo de singularidades que dan lugar a trayectorias completas en el infinito.

Ejemplo 1. Tomemos un campo de la forma

$$X = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2(1+z_1) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Este campo es completo (ver proposición 3.4.1). El representante X_1 de \mathcal{F}_{X_1} en la carta afín (U_1, ϕ_1^{-1}) es

$$-y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2(2y_1+1) \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

El punto $p = (0, 0) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap L_\infty \cap U_1$ es un silla-nodo con autovalores $\lambda = 0$ y $\mu = -1$, tal que $L_\infty \cap U_1 = \{y_1 = 0\}$ define la dirección fuerte. Por otra parte, la recta $\{y_2 = 0\}$ es la separatriz de \mathcal{F}_X por p tangente a la dirección débil que, además, define una trayectoria completa de X por p .

En el siguiente Teorema demostramos que la única posibilidad para una trayectoria completa de X por una singularidad no degenerada de \mathcal{F}_X en el infinito es ser como en el Ejemplo 1, a saber: un silla-nodo con dirección fuerte definida por la recta del infinito L_∞ .

Teorema 2.2.1. *Sea X un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$. Si Σ es una trayectoria completa de X en una singularidad p no degenerada de \mathcal{F}_X en L_∞ , entonces p es un silla-nodo y L_∞ define la dirección fuerte.*

Demostración. Por comodidad, podemos suponer que p está en la carta afín (U_1, ϕ_1^{-1}) y que sus coordenadas son $p = (0, \alpha)$. Tomemos X_1 como representante de \mathcal{F}_X en

U_1 . Por el corolario 2.1.1, L_∞ , que tiene a $\{y_1 = 0\}$ por ecuación en esta carta, es invariante por \mathcal{F}_X , y de ahí resulta que $X_1 = y_1^{m-1}(\phi_1\phi_0)_*X$. Reescribamos el jacobiano de X_1 en p como

$$J_p = \begin{pmatrix} -P_m(1, \alpha) & 0 \\ G_{m-1}(\alpha) & G'_m(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \nu & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Estudiamos los siguientes casos:

- Caso $\det J_p = 0$. Probemos que $\lambda = 0$. Si λ no fuese cero, al ser $\det J_p = 0$, necesariamente $\mu = 0$ y p sería un silla-nodo. Como L_∞ define la separatriz de \mathcal{F}_X por p que es tangente a la dirección débil, sabemos entonces que existe una separatriz Σ de \mathcal{F}_X por p tangente a la dirección fuerte, transversal a L_∞ en p , y que define la única trayectoria de X en p (ver *i*) de proposición 1.3.1). Si consideramos el índice de \mathcal{F}_X en p con respecto a Σ , como Σ es completa, aplicando la proposición 2.1.4 sabemos que

$$\text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) \geq 1 + \sigma(m - 1),$$

pero, un sencillo cálculo demuestra que

$$\begin{aligned} \text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) &= \text{ord}_0 \left(-\frac{y_1(t)}{y'_1(t)} [-\lambda + y_1(t)P_{m-1}(1, y_2(t)) + \cdots + y_1^m(t)P_0] \right) \\ &= \text{ord}_0 \left(\frac{y_1(t)}{y'_1(t)} \right) = 1 < 1 + \sigma(m - 1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

y de ahí una contradicción. Concluimos así que λ es cero. Hemos demostrado que p es un silla-nodo tal que L_∞ define la dirección fuerte.

- Caso $\det J_p \neq 0$. Primero observamos que λ/μ está en \mathbb{Q}^+ . De no ser así, existiría siempre una separatriz Σ distinta de L_∞ que define la única trayectoria de X en p (ver *ii.2*) en proposición 1.3.1), y para la cual $\text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma)$ es como en (2.8). Lo que contradice, aplicando de nuevo la proposición 2.1.4, el que por hipótesis Σ sea completa. Además, p no es dicrítica. De otra forma, el índice de cualquier otra separatriz Σ de \mathcal{F}_X por p distinta de L_∞ es como (2.8), y esto impide la existencia de una trayectoria completa de X por p . Finalmente, por la proposición 1.3.1, tenemos que p es de tipo Poincaré–Dulac, y como existe una única separatriz por p que corresponde con L_∞ , no existe trayectoria de X en p . Por tanto, este caso no tiene lugar. \square

Para un campo polinómico completo tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.2.2. *Si X es un campo vectorial polinómico completo en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$, y p es una singularidad no degenerada de \mathcal{F}_X en L_∞ con primer jet no nulo entonces,*

i) o bien p es un silla-nodo y L_∞ define la dirección fuerte,

ii) o bien p es de tipo Poincaré–Dulac y L_∞ define la única separatriz por p .

Demostración. Se sigue directamente de la demostración del teorema 2.2.1. Vemos que el primer caso analizado ($\det J_p = 0$) corresponde con *i*) y el segundo ($\det J_p \neq 0$) con *ii*). \square

2.3. La propiedad de ser completo es no genérica

El conjunto $\aleph(\mathbb{C}^2)$ de los campos vectoriales holomorfos en \mathbb{C}^2 tiene la topología definida por la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos de \mathbb{C}^2 . Se dice que un campo X de $\aleph(\mathbb{C}^2)$ puede ser aproximado por campos vectoriales holomorfos completos si existe una sucesión $\{X_j\}$ de campos vectoriales holomorfos completos en \mathbb{C}^2 que convergen a X uniformemente en los compactos de \mathbb{C}^2 . Sabemos, por un resultado de G. Buzzard y J.-E. Fornæss [BF95, Theorem 4.4], que el conjunto de campos de $\aleph(\mathbb{C}^2)$ que pueden ser aproximados por campos vectoriales holomorfos completos está contenido en el complementario de un abierto denso de $\aleph(\mathbb{C}^2)$. Estamos interesados en estudiar si existe una versión polinómica de este resultado. Lo primero será definir una topología adecuada para nuestro estudio.

Definición 2.3.1. *Identifiquemos (U_0, ϕ_0^{-1}) con \mathbb{C}^2 . Para todo $m \geq 0$, \mathcal{A}_m es el conjunto de foliaciones \mathcal{F}_X definidas por campos polinómicos vectoriales X de grado m con singularidades aisladas.*

Observación 2.3.1. Debido a que dos foliaciones \mathcal{F}_X y \mathcal{F}_Y son iguales si y sólo si $X = \lambda Y$ para un escalar λ en \mathbb{C}^* (ver observación 1.4.1), \mathcal{A}_m está bien definido.

Como todo campo vectorial polinómico de grado cero o uno es completo, nos ocuparemos de los campos vectoriales polinómicos de grado $m \geq 2$. Podemos dotar a cada conjunto \mathcal{A}_m de una topología de la siguiente manera: un entorno de \mathcal{F}_X en \mathcal{A}_m está formado por las foliaciones inducidas por campos vectoriales polinómicos X de grado m con singularidades aisladas cuyas componentes son polinomios que tienen coeficientes cercanos a los de X , salvo multiplicación por escalares. Es decir, si consideramos el espacio lineal complejo de campos polinómicos X de grado $\leq m$, que tiene dimensión

$$(m+1)(m+2) = N+1,$$

podemos identificar el conjunto \mathcal{A}_m con un abierto denso y conexo del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ (ver [Za01]). De ahí, concluimos que \mathcal{A}_m puede ser equipado con la topología inducida y una medida de Lebesgue natural.

La definición de \mathcal{A}_m nos permite descomponer el espacio \mathcal{A} de todas las foliaciones definidas por campos polinómicos en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$ en una unión disjunta $\bigcup_{m \geq 2} \mathcal{A}_m$, y definir una topología en él de forma natural. Un subconjunto U de \mathcal{A} es

abierto si y sólo si $U \cap \mathcal{A}_m$ es abierto en \mathcal{A}_m . Además, \mathcal{A} hereda una medida natural de Lebesgue: un conjunto U de \mathcal{A} tiene medida cero si y sólo si $U \cap \mathcal{A}_m$ tiene medida cero en \mathcal{A}_m . Definimos los siguientes subconjuntos de \mathcal{A}_m .

Definición 2.3.2. Para cada $m \geq 2$, definimos:

- 1) el subconjunto \mathcal{T}_m de \mathcal{A}_m de foliaciones \mathcal{F}_X definidas por campos vectoriales polinómicos X de grado m con alguna trayectoria completa en algún punto de L_∞ .
- 2) el subconjunto \mathcal{C}_m de \mathcal{A}_m de foliaciones \mathcal{F}_X definidas por campos vectoriales polinómicos completos X de grado m .

Observaciones 2.3.1. Destacamos que:

a) los conjuntos \mathcal{T}_m y \mathcal{C}_m están bien definidos. Porque tanto la propiedad de que un campo polinómico tenga una trayectoria completa en el infinito, como la propiedad de ser completo, se conservan al multiplicar por escalares. Obviamente, se cumple que

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{C}_0 = \mathcal{T}_0.$$

Además, si un elemento \mathcal{F}_X de \mathcal{C}_m verifica que X define una trayectoria en algún punto en el infinito, \mathcal{F}_X está también en \mathcal{T}_m .

b) Para todo $m \geq 1$ tenemos que $\mathcal{T}_m \cap \mathcal{C}_m \neq \emptyset$.

Por ejemplo, todos los campos de la forma

$$X^{(m)} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + [a_m(z_1)z_2 + b_m(z_1)] \frac{\partial}{\partial z_2}, \text{ con } m \geq 1,$$

con $a_m(z_1)$ y $b_m(z_1)$ polinomios de grado $m - 1$ en $\mathbb{C}[z_1]$ tales que

$$a_m(z_1)z_2 + b_m(z_1) \notin z_1 \cdot \mathbb{C}[z_1],$$

son completos (ver proposición 3.4.1) y tales que la recta $\{z_1 = 0\}$ define una trayectoria completa para todos los $X^{(m)}$ por $p = [0 : 0 : 1]$. Es decir,

$$\mathcal{F}_{X^{(m)}} \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{C}_m \text{ para todo } m \geq 1.$$

c) Para todo $m \geq 1$ tenemos que $\mathcal{C}_m \not\subset \mathcal{T}_m$.

Por ejemplo, tomemos los campos de la forma

$$Y^{(m)} = \frac{\partial}{\partial z_1} + [a_m(z_1)z_2 + b_m(z_1)] \frac{\partial}{\partial z_2}, \text{ con } m \geq 1,$$

donde $a_m(z_1)$ y $b_m(z_1)$ son polinomios en $\mathbb{C}[z_1]$ de grado $m - 1$. Cada $Y^{(m)}$ es completo y todas sus trayectorias son de tipo \mathbb{C} y no algebraicas (ver proposición 3.4.1). Si tuviera una trayectoria completa Σ en algún punto p de L_∞ , por d) de observaciones 2.1.1, $\Sigma \setminus \{p\}$ estaría contenida en una curva algebraica racional que es invariante por X , lo cual es imposible. Luego,

$$\mathcal{F}_{Y^{(m)}} \in \mathcal{C}_m \text{ y } \mathcal{F}_{Y^{(m)}} \notin \mathcal{I}_m \text{ para cada } m \geq 1.$$

Nuestro primer resultado de *no genericidad* es el siguiente:

Teorema 2.3.1. *Para todo $m \geq 2$, existe un subconjunto \mathcal{I}_m abierto denso de \mathcal{A}_m de modo que toda \mathcal{F}_X en \mathcal{I}_m es tal que el campo X que la define tiene exactamente $m + 1$ trayectorias $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{m+1}$ distintas por puntos del infinito, que además no son completas y corresponden respectivamente a $m + 1$ puntos p_1, \dots, p_{m+1} distintos en L_∞ .*

Demostración. Fijemos un $m \geq 2$. Definamos el conjunto \mathcal{I}_m como el subconjunto de foliaciones \mathcal{F}_X de \mathcal{A}_m que tienen $m + 1$ singularidades distintas en L_∞ que son no degeneradas y no resonantes.

Sea

$$X = P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + Q(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

un campo polinómico tal que \mathcal{F}_X está en \mathcal{I}_m . Si p_1, \dots, p_{m+1} son las $m + 1$ singularidades de \mathcal{F}_X en L_∞ , para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$ suponemos que p_i está en la carta U_1 y sus coordenadas son $(0, \alpha_i)$. El hecho de que cada p_i sea no degenerado y no resonante, de acuerdo con (2.7), sólo depende de la parte homogénea de grado m de X y es equivalente a que para todo α_i se cumpla

$$P_m(1, \alpha_i) \cdot G'(\alpha_i) \neq 0 \quad \text{y}$$

$$-\frac{P_m(1, \alpha_i)}{G'(\alpha_i)} \notin \mathbb{Q}^+.$$

Obviamente, ambas condiciones son abiertas y densas en \mathcal{A}_m . Sabemos, según la proposición 1.3.1, que por cada p_i existe una única separatriz $\Sigma_i \neq L_\infty$ de \mathcal{F}_X , y que, además, las Σ_i definen $m + 1$ trayectorias Σ_i de X en los puntos $p_i \in L_\infty$ que no pueden ser completas por el teorema 2.2.1. Luego, \mathcal{I}_m es un conjunto que cumple las condiciones del enunciado y el teorema queda demostrado. \square

Teorema 2.3.2. *El conjunto de foliaciones definidas por campos vectoriales polinómicos de grado $m \geq 2$ en \mathbb{C}^2 con alguna trayectoria completa en algún punto de L_∞ , y el conjunto de foliaciones definidas por campos vectoriales polinómicos completos de grado $m \geq 2$ en \mathbb{C}^2 están contenidos en el complementario de un abierto denso del espacio \mathcal{A} de todas las foliaciones definidas por campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 .*

Demostración. Si definimos

$$\mathcal{U} = \bigcup_{m \geq 2} \mathcal{I}_m,$$

donde \mathcal{I}_m es el abierto denso de \mathcal{A}_m que obtenemos por el teorema 2.3.1, como los conjuntos \mathcal{C}_m y \mathcal{T}_m están contenidos en el complementario de \mathcal{I}_m en \mathcal{A}_m para cada $m \geq 2$, entonces \mathcal{U} es el abierto buscado. \square

La observación 2.3.1 y la topología de \mathcal{A} justifican la siguiente definición.

Definición 2.3.3. *Diremos que una propiedad \mathcal{P} es genérica en el conjunto de todos los campos vectoriales polinómicos de \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 , si existe un subconjunto E del espacio \mathcal{A} de medida cero, tal que toda foliación \mathcal{F}_X de $\mathcal{A} \setminus E$ verifica \mathcal{P} .*

Teorema 2.3.3. *La propiedad de que un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 no tenga ninguna trayectoria completa en ningún punto de L_∞ , y la propiedad de que un campo polinómico vectorial en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 no sea completo son genéricas en el conjunto de todos los campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 de grado ≥ 2 .*

Demostración. Si $E = \mathcal{A} \setminus \mathcal{U}$, donde

$$\mathcal{U} = \bigcup_{m \geq 2} \mathcal{I}_m$$

es como en la demostración del teorema 2.3.2, para cada $m \geq 2$ el conjunto

$$E \cap \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m \setminus \mathcal{I}_m$$

es complementario de un abierto denso en \mathcal{A}_m , y por tanto de medida cero en \mathcal{A}_m . Concluimos que E es de medida cero en \mathcal{A} , y según el teorema 2.3.1 se sigue el resultado. \square

2.4. Trayectorias que explotan a tiempo finito de campos hamiltonianos.

Nos ocuparemos en esta sección de un caso particular de campos holomorfos, a saber: los campos vectoriales holomorfos hamiltonianos en \mathbb{C}^2 . Recordemos su definición.

Definición 2.4.1. (Campo hamiltoniano) *Diremos que un campo holomorfo X en \mathbb{C}^2 es hamiltoniano si existe una función holomorfa H en \mathbb{C}^2 tal que*

$$X = -\frac{\partial H}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial H}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Para un campo hamiltoniano X tenemos que $dH(X)$ vale idénticamente cero. Esto significa que todas sus trayectorias están contenidas en las curvas $\{H = \lambda\}$ de nivel de H , y así H es una primera integral holomorfa de X . Sea X_H el campo holomorfo hamiltoniano asociado a H . Ya que H está determinada de forma única salvo adición de un escalar, podemos identificar el conjunto de los campos holomorfos hamiltonianos con el espacio de funciones holomorfas de \mathbb{C}^2 con la topología dada por la convergencia uniforme en compactos. En [FG96] y [FG94], J.-E. Fornæss y S. Grellier estudian para un campo holomorfo hamiltoniano X de \mathbb{C}^2 las trayectorias C_z de X tales que la solución φ_z que las define no está acotada en tiempo real positivo, probando que la propiedad de que exista un conjunto denso de puntos z en \mathbb{C}^2 para los cuales la trayectoria C_z sea de este tipo es genérica en el espacio de los campos hamiltonianos.

Estamos interesados en estudiar si existe un resultado análogo al de J.-E. Fornæss y S. Grellier para campos polinómicos. Los campos polinómicos hamiltonianos de grado cero (constantes) y de grado uno (lineales) no tienen ninguna trayectoria que explote a tiempo finito, porque son, trivialmente, completos. Por esto, prescindiremos en nuestro análisis de ellos, y consideraremos el conjunto de campos polinómicos hamiltonianos de grado ≥ 2 . Lo primero es dotar a este conjunto de una topología. Igual que en el caso holomorfo, el polinomio H que define X_H está determinado de forma única salvo adición de un escalar. Por eso, fijado un m natural ≥ 3 , podemos identificar el conjunto de campos hamiltonianos polinómicos de grado $\leq m - 1$ con el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}[z_1, z_2]_m$ de polinomios de grado $\leq m$. Si T_m es la topología de $\mathbb{C}[z_1, z_2]_m$, y tomamos para todo par $3 \leq k \leq \ell$ las inclusiones naturales

$$i_{k,\ell} : \mathbb{C}[z_1, z_2]_k \hookrightarrow \mathbb{C}[z_1, z_2]_\ell,$$

obtenemos un sistema inductivo dirigido de espacios topológicos cuyo límite nos define una topología T para el conjunto de polinomios de grado ≥ 3 , al que designaremos por $\mathbb{C}[z_1, z_2]^3$, y por tanto, también, para el conjunto de campos polinómicos hamiltonianos de grado $m \geq 2$. Así, tenemos que un conjunto U de $\mathbb{C}[z_1, z_2]^3$ está en T , si su intersección con cada $\mathbb{C}[z_1, z_2]_k$ está en T_k . Definimos las trayectorias que vamos a analizar.

Definición 2.4.2. *Sea X un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^2 , y consideremos un punto z en \mathbb{C}^2 . Diremos que la trayectoria C_z de X por z explota a tiempo finito, si la solución $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow C_z \subset \mathbb{C}^2$ no está acotada en algún disco perforado de radio positivo $\mathbb{D}_r \subset \Omega_z$.*

Nuestro resultado es el siguiente.

Proposición 2.4.1. *Existe un abierto denso W del espacio de los campos vectoriales polinómicos hamiltonianos en \mathbb{C}^2 de grado $m \geq 2$ tal que, para cada X_H en W , hay un denso de puntos en \mathbb{C}^2 con trayectorias que explotan en tiempo finito.*

Demostración. Probaremos primero que para todo $m \geq 3$ existe un conjunto abierto denso W_m de $\mathbb{C}[z_1, z_2]_m$ tal que, para cada $H \in W_m$, X_H tiene un denso de puntos con trayectorias que explotan en tiempo finito.

Definimos el conjunto W_m de polinomios H de $\mathbb{C}[z_1, z_2]_m$ cuya componente homogénea H_m de grado m verifica que $H_m = 0$ tiene m raíces p_1, \dots, p_m en \mathbb{CP}^1 distintas.

Claramente, W_m es un abierto denso de $\mathbb{C}[z_1, z_2]_m$. Para cada H en W_m , la foliación \mathcal{F}_{X_H} está determinada por la clausura proyectiva C_λ en \mathbb{CP}^2 de las curvas de nivel $\{H = \lambda\}$. Sabemos, por (2.6), que las singularidades de \mathcal{F}_{X_H} en L_∞ son los puntos $[0 : z_1 : z_2]$ tales que

$$z_1 \frac{\partial H_m}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial H_m}{\partial z_2} = 0. \quad (2.9)$$

Por la identidad de Euler, (2.9) es igual a $mH_m = 0$, y así obtenemos que estos puntos son exactamente p_1, \dots, p_m . Supondremos, además, que todos ellos están en $L_\infty \cap U_1$ y que sus coordenadas son $(0, \alpha_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. De acuerdo con (2.7), el jacobiano en p_i del campo X_1 representante de la foliación \mathcal{F}_{X_H} en U_1 viene dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_m}{\partial z_2}(1, \alpha_i) & 0 \\ (m-1)H_{m-1}(1, \alpha_i) & m \frac{\partial H_m}{\partial z_2}(1, \alpha_i) \end{pmatrix}.$$

Como estamos suponiendo que cada p_i es una raíz de multiplicidad uno de $\{H_m = 0\}$ vemos que

$$\frac{\partial H_m}{\partial z_2}(1, \alpha_i) \neq 0.$$

Por tanto, \mathcal{F}_{X_H} tiene una singularidad no degenerada en p_i , que es dicrítica, pues todas las curvas C_λ pasan por él. Cada rama Σ de C_λ en p_i define una separatriz de \mathcal{F}_{X_H} por p_i distinta de L_∞ , y por tanto, una trayectoria L de X_H en $p_i \in L_\infty$. Por el teorema 2.2.1 (ver ecuación (2.8)), se verifica que

$$\text{ind}_p(\mathcal{F}_{X_H}, \Sigma) = 1 < 1 + \sigma(m-1).$$

Esto implica que X_H en $\mathcal{L} \setminus \{p\}$ extiende a p con un polo de orden

$$k = 1 - \sigma(m-1) \leq 0.$$

Concluimos que la norma de X no está acotada en \mathbb{D}^* , y L explota en tiempo finito. Si definimos, para cada $\ell \geq 3$, el conjunto

$$\Lambda_\ell = \bigcup_{k \geq \ell} W_k,$$

tenemos que

$$W = \bigcup_{m \geq 3} W_m = \bigcup_{\ell \geq 3} \Lambda_\ell.$$

Al ser $\Lambda_\ell \cap \mathbb{C}[z_1, z_2]_\ell$ un elemento de T_ℓ , sabemos que W está en T . Si U es un abierto no vacío de T , es obvio que $W \cap U \neq \emptyset$. Concluimos que W es denso, y la proposición queda demostrada. \square

Capítulo 3

Campos polinómicos completos en trayectorias transcendentales.

En este capítulo clasificamos los campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^2 que son completos sobre una trayectoria transcendente (es decir, propia y no algebraica). Como aplicación más importante de este resultado demostramos que si un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 es completo sobre una trayectoria transcendente y singular (es decir, con ceros de X en su clausura), X es completo. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [Bus].

3.1. Introducción

Establezcamos el tipo de trayectorias y de campos vectoriales que vamos a estudiar. Con respecto a las trayectorias, estamos interesados en analizar aquellas que desde un punto de vista extrínseco tienen la topología más sencilla posible, a saber: la inducida por la topología usual en \mathbb{C}^2 .

Definición 3.1.1. *Si X es un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^2 y C_z es una trayectoria de X , diremos que*

- 1) C_z es propia si su clausura \overline{C}_z en \mathbb{C}^2 define una curva analítica de dimensión (pura) uno en \mathbb{C}^2 . O, equivalentemente, si la inclusión $i : \overline{C}_z \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ es propia.
- 2) la solución $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow C_z$ asociada a C_z es propia si la trayectoria C_z es propia.
- 3) una hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F}_X es propia si la trayectoria C_z de X que la define es propia.

Ejemplo 2. Toda trayectoria de tipo \mathbb{C}^* de un campo vectorial completo en \mathbb{C}^2 sabemos que es propia en el sentido de la definición 3.1.1 (ver teorema 1.6.1).

Una propiedad importante de las trayectorias propias es que no pueden acumularse en puntos regulares del campo.

Proposición 3.1.1. *Si C_z es una trayectoria propia*

$$\overline{C}_z = C_z \cup (\text{Sing}(X) \cap \overline{C}_z).$$

Demostración. Si existe un z' en $\overline{C}_z \setminus C_z$ tal que $z' \notin \text{Sing}(X)$, fijado un punto p de $C_{z'} \setminus \text{Sing}(X)$, uniendo z' con p por un camino continuo

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow C_{z'} \setminus \text{Sing}(X)$$

tal que $\alpha(0) = z'$ y $\alpha(1) = p$, podemos elegir una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

de $[0, 1]$, y unas cartas locales (U_i, ϕ) , $0 \leq i < n$, de \mathbb{C}^2 tales que $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U_i$, y de modo que el campo ϕ_*X en cada una de esas cartas sea el campo horizontal (teorema de caja de flujo local, ver [GMOB89, p.12]). Luego, $\alpha(t_1) \in \overline{C}_z$, y repitiendo el mismo argumento, $p \in \overline{C}_z$. Como este razonamiento es válido para cualquier p en $C_{z'} \setminus \text{Sing}(X)$, hemos demostrado que $C_{z'} \setminus \text{Sing}(X) \subset \overline{C}_z$. Por tanto, $C_z = C_{z'}$, y de ahí una contradicción. \square

Observación 3.1.1. Sabemos que un campo polinómico X en \mathbb{C}^2 define una foliación por curvas en \mathbb{C}^2 con singularidades aisladas que extiende a una foliación \mathcal{F}_X de \mathbb{CP}^2 (ver capítulo 2). Designaremos también a esta foliación en \mathbb{C}^2 por \mathcal{F}_X , aunque, estrictamente hablando, ésta corresponda con la restricción de \mathcal{F}_X a \mathbb{C}^2 . Para cada trayectoria C_z de X hemos definido su conjunto límite $\lim(C_z)$, y cuando C_z es propia, tenemos que $\lim(C_z) \cap L_\infty$, o está formado por un subconjunto finito de puntos en L_∞ , o coincide con L_∞ (ver definición 2.1.1 y proposición 2.1.2). Estas dos situaciones implican, respectivamente, que \overline{C}_z sea algebraica o transcendente. Este hecho motiva las siguientes definiciones.

Definiciones 3.1.1. *Sea C_z una trayectoria propia de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 . Diremos que C_z es transcendente (resp. algebraica) si $\lim(C_z) \cap L_\infty = L_\infty$ (resp. si $\lim(C_z) \cap L_\infty$ es una cantidad finita de puntos). La correspondiente solución $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow C_z$ será algebraica o transcendente, si C_z es algebraica o transcendente, respectivamente.*

Observación 3.1.2. En lo que sigue, *transcendente* significará *propio y no algebraico*.

Enunciado de los resultados principales.

La principal contribución de este capítulo es la clasificación de los *campos vectoriales polinómicos que son completos sobre una trayectoria transcendente*, y que es consecuencia de los dos siguientes teoremas.

Teorema 3.1.1. *Consideremos una trayectoria trascendente C_z de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 con ceros aislados, que es biholomorfa a \mathbb{C}^* . Si X es completo en C_z , salvo un automorfismo polinómico del plano, tenemos las dos siguientes posibilidades:*

i) *Existe una recta algebraica invariante por X , y entonces X es uno de los siguientes campos:*

i.1)

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

i.2)

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y},$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$ y $\alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$.

i.3)

$$x[nS + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ -\frac{[nT + m(x^\ell y + p(x))]S + \alpha T}{x^\ell} \right\} \frac{\partial}{\partial y},$$

para $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $< \ell$ tal que $p(0) \neq 0$, $T = \ell x^\ell y + xp'(x)$, $S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n)$ con $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, y donde

$$[nxp'(x) + mp(x)]S + \alpha xp'(x) \in x^\ell \cdot \mathbb{C}[x, y].$$

En particular, X es completo en todos los casos.

ii) *No existe una recta algebraica invariante por X , y entonces para una aplicación racional H definida como en (3.12) (ver Sección 1.3 de este capítulo)*

$$H^* X = u^k \cdot \left\{ a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda v^t (v^n - s)^r \frac{\partial}{\partial v} \right\}$$

donde $a(v) \in \mathbb{C}[v]$, $t \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, y $s, \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Teorema 3.1.2. *Consideremos una trayectoria trascendente C_z de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 con ceros aislados, que es biholomorfa a \mathbb{C} . Si X es completo en C_z , existe un automorfismo analítico Φ de \mathbb{C}^2 tal que*

$$\Phi^* X = f(y) \frac{\partial}{\partial x},$$

siendo f una función entera y nunca nula.

3.2. Preliminares

En esta sección daremos las definiciones, resumiremos los conceptos y enunciaremos los resultados que serán necesarios para la demostración de nuestros teoremas.

3.2.1. Hojas propias de una foliación algebraica

Finales trascendentes y algebraicos

Consideremos un campo polinómico X en \mathbb{C}^2 , y la foliación \mathcal{F}_X inducida por él en \mathbb{C}^2 . Si \mathcal{L} es una hoja de la foliación \mathcal{F}_X , intrínsecamente, la topología de \mathcal{L} es la de una superficie de Riemann inmersa en \mathbb{C}^2 . Empezamos nuestro estudio de \mathcal{L} fijándonos, solamente, en algunas de sus *partes*.

Definición 3.2.1. *Un final aislado y plano Σ de una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F}_X es una sub-superficie de Riemann con borde de \mathcal{L} que es difeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$.*

Observación 3.2.1. Como puede verse en [Tsu59], si tenemos en cuenta la estructura holomorfa de Σ , existe un único $r \in [0, 1)$ verificando que Σ es biholomorfo al conjunto $\mathbf{A}_r = \{z, r < |z| \leq 1\}$ (ver figura 3.1). De ahora en adelante, nos referiremos a los finales aislados y planos de \mathcal{L} , simplemente, como finales. Si r es cero diremos que el final Σ es *parabólico*. En caso contrario, se dice que Σ es *hiperbólico*. La hoja \mathcal{L} es de *tipo topológico finito* si tiene una cantidad finita de finales.

Definición 3.2.2. *El final Σ es propio si la inclusión $i : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ define una inmersión propia.*

Observación 3.2.2. *Un final Σ de una hoja es propio si tiene la topología extrínseca más sencilla posible, es decir, la inducida por la topología usual de \mathbb{C}^2 . Para un tal Σ podemos definir su conjunto límite $\lim(\Sigma)$ análogamente a como se hizo para una trayectoria de X en (2.1). Basta tomar una sucesión creciente de conjuntos compactos $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ de Σ que lo recubren, y definir*

$$\lim(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\Sigma \setminus K_i},$$

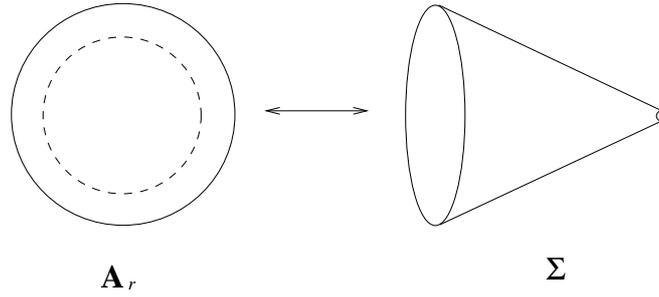


Figura 3.1: Representación holomorfa de un final Σ aislado y plano.

donde $\overline{\Sigma \setminus K_i}$ designa la clausura de $\Sigma \setminus K_i$ en \mathbb{CP}^2 . Además, es posible saber cómo son los puntos de $\lim(\Sigma) \cap L_\infty$ por el mismo análisis hecho en la proposición 2.1.2.

Definición 3.2.3. Dado un final Σ propio de una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F}_X , si $\lim(\Sigma) \cap L_\infty$ no es vacío, este conjunto, o bien se reduce a un único punto p de L_∞ que, además, es una singularidad de \mathcal{F}_X cuando L_∞ es una hoja de esta foliación, o por el contrario es todo L_∞ . Decimos que Σ es algebraico o trascendente, respectivamente.

Foliaciones P -completas

Sea $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio complejo, entonces:

Definición 3.2.4. La foliación \mathcal{F}_X es P -completa si existe un conjunto finito \mathcal{Q} de \mathbb{C} tal que para todo $t \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$:

- 1) la fibra $P^{-1}(t)$ es transversal a \mathcal{F}_X , y
- 2) hay un entorno abierto U_t de t en \mathbb{C} tal que $P : P^{-1}(U_t) \rightarrow U_t$ es una fibración holomorfa y la restricción de \mathcal{F}_X a $P^{-1}(U_t)$ define una trivialización de esta fibración: existe un biholomorfismo de $P^{-1}(U_t)$ sobre $U_t \times P^{-1}(t)$ que transforma la foliación $\mathcal{F}_X|_{P^{-1}(U_t)}$ en la foliación horizontal y la fibración $P|_{P^{-1}(U_t)}$ en la fibración vertical.

Observación 3.2.3. Consideremos una foliación \mathcal{F}_X que es P -completa. Sea $t_0 (\in \mathcal{Q})$ un valor para el que la correspondiente fibra $P^{-1}(t_0)$ y \mathcal{F}_X no son transversales en un punto p de \mathbb{C}^2 . Como \mathcal{Q} es finito, podemos elegir un abierto U_{t_0} de \mathbb{C} que contiene a t_0 y a ningún otro valor de \mathcal{Q} . Tomemos ahora la foliación cuyas hojas vienen dadas por los niveles del polinomio P y cuyo conjunto singular tiene codimensión ≥ 2 . Esta foliación está definida, salvo multiplicación por un número complejo distinto de cero, por la uno forma polinómica η resultado de eliminar el conjunto de ceros de

dimensión uno de la diferencial dP . Vemos que la contracción de η con X define una curva algebraica

$$\{\eta(X) = 0\}$$

que pasa por p y se proyecta por P sobre un subconjunto de \mathcal{Q} . Por la elección de U_{t_0} , esto sólo es posible si

$$\{\eta(X) = 0\} \cap P^{-1}(U_{t_0}) \subset P^{-1}(t_0).$$

Por tanto, el conjunto de puntos en \mathbb{C}^2 tales que P no es transversal a \mathcal{F}_X es una curva algebraica (quizá con más de una componente conexa) contenida en $P^{-1}(\mathcal{Q})$. Hemos probado que \mathcal{Q} está formado por el conjunto \mathcal{B}_P de valores atípicos de P , entorno a los cuales P no define una fibración (topológica) trivial (ver definiciones 1.5.1), y los valores de \mathbb{C} donde algunas de las componentes de la correspondiente fibra son invariantes por \mathcal{F}_X , y que notaremos por \mathcal{T}_P . Como \mathcal{F}_X y P son tangentes en los ceros del campo X , se verifica que

$$P(\text{Sing}(\mathcal{F}_X)) \subset \mathcal{T}_P.$$

Así, por cada cero p de X pasa una curva algebraica invariante por X , que es una componente de $P^{-1}(P(p))$. Si t es valor crítico de P , la fibra $P^{-1}(t)$ puede tener varias componentes (irreducibles), unas pueden ser invariantes por X , y otras no (ver figura 3.2). Vemos también, consecuencia inmediata de 2) de la definición 3.2.4, que todas las fibras de P definidas por los valores de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$, son biholomorfas a la misma superficie de Riemann \mathcal{S} . Además, \mathcal{B}_P y \mathcal{T}_P no son necesariamente disjuntos (ver lema 3.4.11 y ejemplo [Bru98, p.1245]).

Ejemplo 3. Tomemos un campo X de la forma

$$X = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + [b(x)y + c(x)] \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.1)$$

donde $a(x)$, $b(x)$ y $c(x) \in \mathbb{C}[x]$. La foliación \mathcal{F}_X es x -completa. Como $\mathcal{B}_x = \emptyset$, por la observación 3.2.3, tenemos que

$$\mathcal{Q} = \mathcal{T}_x = \{x \in \mathbb{C} \mid a(x) = 0\}.$$

Si tomamos un $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$, la ecuación:

$$x'(t) = a(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

tiene solución local $x : \mathbb{D}_r \rightarrow \mathbb{C}$ en un disco de radio suficientemente pequeño en el que supondremos define un biholomorfismo sobre su imagen. Obtenemos para cada (x_0, y) una ecuación

$$y'(t) = b(x(t))y(t) + c(x(t)), \quad y(0) = y,$$

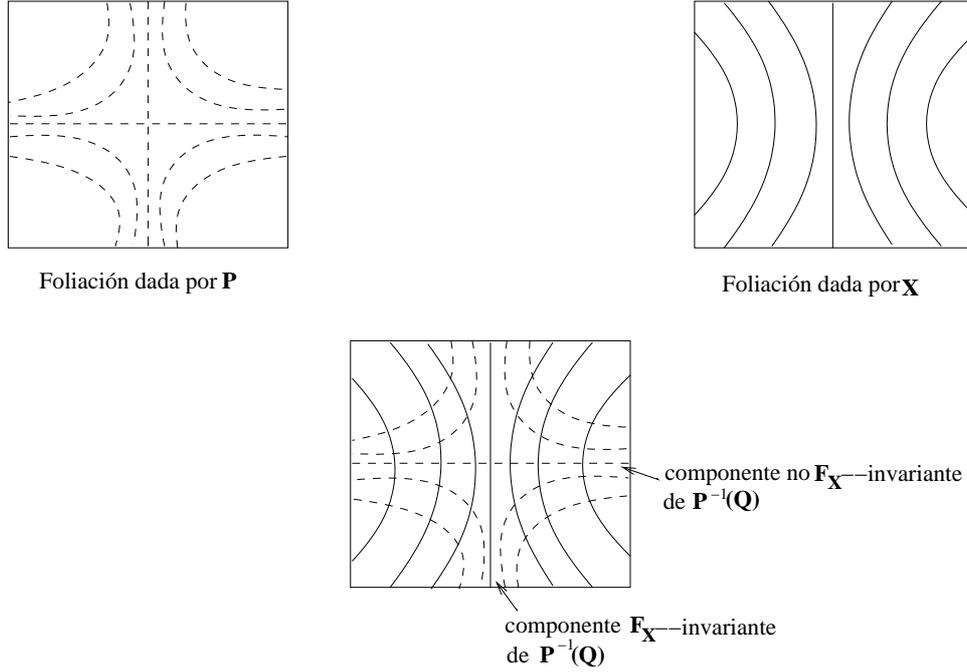


Figura 3.2: Estructura de $P^{-1}(\mathcal{Q})$.

que tiene por solución $y(t)$ en \mathbb{D}_r , como se verá explícitamente en la demostración de la proposición 3.4.1, la función

$$y(t) = \left\{ y + \int^t c(x(z)) e^{-[\int^z b(x(s)) ds]} dz \right\} e^{\int^t b(x(s)) ds}.$$

Cada $t \in \mathbb{D}_r \rightarrow (x(t), y(t))$ define una solución local (distinta) del campo X por (x_0, y) . Identificando $x(\mathbb{D}_r)$ con el disco $\mathbb{D}_r(x_0)$, y expresando t como función de x , definimos el automorfismo

$$(x, y) \xrightarrow{\psi} \left(x, \left\{ y + \int^{t(x)} c(x(z)) e^{-[\int^z b(x(s)) ds]} dz \right\} e^{\int^{t(x)} b(x(s)) ds} \right)$$

de $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{D}_r(x_0)\}$ que transforma los discos horizontales $\mathbb{D}_r(x_0) \times \{y\}$ en las hojas de la foliación \mathcal{F}_X , preservando las líneas verticales.

Holonomía global de \mathcal{F}_X entorno a $P^{-1}(\mathcal{Q})$

Sea P un polinomio de fibra genérica \mathcal{S} y \mathcal{F}_X una foliación P -completa. Si tomamos el fibrado $E = \mathbb{C}^2 \setminus P^{-1}(\mathcal{Q})$ con proyección $P : E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ y fibra \mathcal{S} vemos que se cumplen las dos siguientes propiedades:

- a) para todo $p \in E$, la fibra de P sobre el valor $P(p)$ es transversal a la hoja \mathcal{L}_p de \mathcal{F}_X que pasa por p .
- b) Para cada hoja \mathcal{L} de \mathcal{F}_X , $P : \mathcal{L} \cap E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ es una cubierta holomorfa.

Estas dos condiciones nos dicen que la restricción a E de \mathcal{F}_X es transversal a E en el sentido clásico de foliación transversal a un fibrado (*ver* capítulo 5 de [CLN85]). Podemos definir entonces en cada abierto $P^{-1}(U_t)$, donde $t \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ y $U_t \subset \mathbb{C}$, una identificación canónica entre las fibras de P a través de las hojas de \mathcal{F}_X , que nos permite calcular la monodromía h_γ de P a lo largo de cualquier camino γ en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ mediante las trivializaciones de \mathcal{F}_X . Explícitamente, h_γ está definida de la forma siguiente (*ver* [CLN85, Capítulos 4 y 5]): para cada $t_0 \neq t_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ y cualquier camino $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ con $\gamma(0) = t_0$ y $\gamma(1) = t_1$, dado un punto p en $P^{-1}(t_0)$, si \mathcal{L}_p es la hoja de \mathcal{F}_X que contiene a p , como

$$P : \mathcal{L}_p \cap E \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$$

define una cubierta holomorfa, existe un único camino $\tilde{\gamma}_p : I \rightarrow \mathcal{L}_p$ tal que

$$\tilde{\gamma}_p(0) = p \quad \text{y} \quad P \circ \tilde{\gamma}_p = \gamma.$$

Consideremos el biholomorfismo $h_\gamma : P^{-1}(t_0) \rightarrow P^{-1}(t_1)$ dado por $h_\gamma(p) = \tilde{\gamma}_p(1)$. Se verifica

$$h_\delta = h_\gamma$$

para todo camino $\delta : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ homótopo a γ en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ por una homotopía relativa a los extremos. Definimos la representación (aplicación de monodromía) del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t_0)$ en el grupo de automorfismos de \mathcal{S} , $Aut(\mathcal{S})$, siguiente:

$$\begin{aligned} h^{t_0} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t_0) &\longrightarrow Aut(\mathcal{S}) \simeq Aut(P^{-1}(t_0)) \\ [\gamma] &\longmapsto h^{t_0}[\gamma] = h_{\gamma^{-1}} \end{aligned}$$

Como el extremo final de la curva $\tilde{\gamma}_p$ sólo depende de la clase de homotopía de γ^{-1} , se tiene que $h_\gamma(p)$ sólo depende en su definición de la clase de homotopía de γ^{-1} . Podemos escribir $h_\gamma = h_{[\gamma]}$. Se cumple que

$$(h_{[\gamma]})^{-1} = h_{[\gamma]^{-1}} \quad \text{y} \quad h_{[\gamma * \delta]} = h_{[\gamma]} \circ h_{[\delta]}$$

para todo $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t_0)$, y por tanto, h^{t_0} es homomorfismo de grupos.

Dados $t_0, t_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$, cualquier camino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ con $\alpha(0) = t_0$ y $\alpha(1) = t_1$ induce un isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \alpha^* : h^{t_0}(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t_0)) &\longrightarrow h^{t_1}(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t_1)) \\ h^{t_0}[\gamma] &\longmapsto h_\alpha \circ h^{t_0}[\gamma] \circ h_{\alpha^{-1}} \end{aligned}$$

De esta manera podemos definir sin ambigüedad (salvo conjugación):

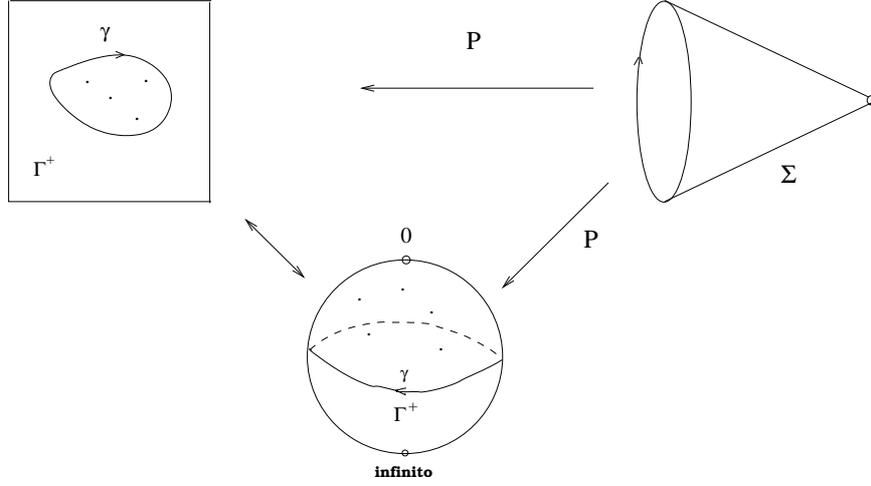


Figura 3.3: Final Σ en el infinito con respecto a P .

Definición 3.2.5. Si \mathcal{F}_X es una foliación P -completa, la holonomía global de \mathcal{F}_X en torno a $P^{-1}(\mathcal{Q})$ o la monodromía de P en torno a \mathcal{Q} es cualquier subgrupo de $\text{Aut}(\mathcal{S})$ de la forma $h^t(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}, t))$, con $t \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$.

Final en el infinito con respecto a P

Tomemos $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ un ciclo (camino cerrado cuya imagen es difeomorfa a un círculo) en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$. La región no acotada (resp. acotada) en \mathbb{C} determinada por $\gamma(I)$ se llama *exterior* (resp. *interior*) de γ y será designada por Γ^+ (resp. Γ^-). Diremos que γ rodea a \mathcal{Q} si $\mathcal{Q} \subset \Gamma^-$. La monodromía h_γ que define un tal γ se llama *monodromía en el infinito (de P con respecto a \mathcal{F}_X)*. Como se verá más tarde, la existencia de un final propio y transcendente en una hoja de \mathcal{F}_X tiene consecuencias sobre su geometría global, expresadas en términos de la propiedad de ser P -completa. La forma natural de construir una hoja de \mathcal{F}_X con este tipo de final es la siguiente: supongamos que la monodromía en el infinito tiene un punto p periódico de período $d \geq 1$. Entonces, la hoja \mathcal{L}_p de \mathcal{F}_X que pasa por p tiene un final

$$\Sigma = P^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Gamma^-) \cap \mathcal{L}_p$$

que es propio, y de tal forma que $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma^-$ define una cubierta finita de grado d sobre Γ^+ . Diremos que Σ está *en el infinito con respecto a P* (ver figura 3.3).

Observación 3.2.4. Si $\hat{\gamma}$ es un ciclo en \mathbb{C} que rodea a \mathcal{Q} y tal que $\Gamma^+ \subset \hat{\Gamma}^+$, como γ y $\hat{\gamma}$ son homótopos en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$, las monodromías h_γ y $h_{\hat{\gamma}}$ son conjugadas por un elemento de $\text{Aut}(\mathcal{S})$. Esto implica que $h_{\hat{\gamma}}$ tiene un punto periódico, de período d , y por construcción, $\hat{\Sigma} = P^{-1}(\mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}^-) \cap \mathcal{L}_p$ es un final de \mathcal{L}_p que contiene a Σ y

que está también en el infinito con respecto a P . Como estos dos finales Σ y $\hat{\Sigma}$ son parabólicos (es decir, con $r = 0$ según la observación 3.2.1), son biholomorfos a un disco perforado. Esta sencilla razón demuestra que Σ y $\hat{\Sigma}$ pueden considerarse como el mismo final de \mathcal{L} .

Resultados de M. Brunella

Podemos ahora enunciar los resultados principales de [Bru98].

Teorema 3.2.1. (Brunella, [Bru98]) *Sea \mathcal{F}_X una foliación en \mathbb{C}^2 definida por un campo polinómico X con una hoja \mathcal{L} que tiene un final propio y trascendente. Entonces existe un polinomio complejo $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, cuya fibra genérica es biholomorfa a \mathbb{C} o \mathbb{C}^* , tal que \mathcal{F}_X es P -completa. Además, el final Σ está en el infinito con respecto a P o (no excluyente) \mathcal{F}_X es conjugada de la foliación definida por un campo de vectores constante por un automorfismo holomorfo de \mathbb{C}^2 .*

Observación 3.2.5. La fibra genérica del polinomio P del teorema 3.2.1 es irreducible. Por tanto, P es primitivo en el sentido de Stein (ver teorema 1.5.4). Un hecho que utilizaremos repetidas veces a lo largo de esta memoria es el que la propiedad de que una foliación \mathcal{F}_X sea P -completa es invariante por cambios de coordenadas polinómicas: si una foliación \mathcal{F}_X es P -completa y Φ es un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 entonces $\Phi^*\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_{\Phi^*X}$ es $(P \circ \Phi)$ -completa.

Foliación P -completa con P de tipo \mathbb{C} . Sea \mathcal{F}_X una foliación P -completa con P un polinomio de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} . Sabemos que después de un automorfismo polinómico P se escribe como $P = x$ (ver teorema 1.5.2). Este hecho, como está indicado en [Bru98, pp. 1230], determina completamente \mathcal{F}_X .

Lema 3.2.1. *Toda foliación \mathcal{F}_X en \mathbb{C}^2 que es x -completa (siendo x una coordenada en \mathbb{C}^2) está generada por un campo de la forma*

$$a(x)\frac{\partial}{\partial x} + [b(x)y + c(x)]\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{con } a(x), b(x) \text{ y } c(x) \text{ en } \mathbb{C}[x].$$

Demostración. Supongamos que

$$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{C}[x, y].$$

De acuerdo con la definición 3.2.4, \mathcal{F}_X es transversal a todas las rectas $\{x = t\}$, con $t \notin \mathcal{Q}$. Por tanto, $A(x, y)$ es de la forma $a(x)$ y $\mathcal{Q} = \{x \mid a(x) = 0\}$. Además, para todo $t \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Q}$ existe un disco $\mathbb{D}_r(t)$ en \mathbb{C} de centro t y radio $r > 0$ tal que \mathcal{F}_X restringido a $\mathbb{D}_r(t) \times \mathbb{C}$ define una trivialización de la fibración vertical en $\mathbb{D}_r(t)$. Así, es posible definir un automorfismo analítico de $\mathbb{D}_r(t) \times \mathbb{C}$ que transforma las

hojas de \mathcal{F}_X en discos horizontales $\mathbb{D}_r(t) \times \{y\}$, preservando las rectas verticales. En particular, esto significa que X puede extenderse a una foliación de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que deja invariante la recta $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ (ver [Bru98, pp. 1230]). Tomando coordenadas $(x, v) = \phi(x, y) = (x, 1/y)$, el campo vectorial ϕ^*X está definido por

$$a(x) \frac{\partial}{\partial x} - v^2 B(x, 1/v) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Como $\{v = 0\}$ es invariante, B tiene que ser un polinomio de grado menor o igual a uno en la y , y X es como en (3.1). \square

Observación 3.2.6. El caso de un polinomio P con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* es más delicado porque *existen una cantidad infinita de polinomios con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* que no son equivalentes por un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2* (ver teorema 1.5.5), y por tanto, esencialmente distintos. En la siguiente sección daremos una forma explícita para este tipo de foliaciones.

Corolario 3.2.1. (Brunella, [Bru98]) *Sea \mathcal{F}_X una foliación en \mathbb{C}^2 , definida por un campo polinómico, que posee una hoja \mathcal{L} que es propia y de tipo topológico finito. Si todos los finales de \mathcal{L} son trascendentes entonces \mathcal{L} es isomorfa analíticamente a \mathbb{C} y \mathcal{F}_X es conjugada por un automorfismo holomorfo a la foliación definida por un campo de vectores constante.*

3.2.2. Teoría de Nevanlinna y aplicaciones

La Teoría de Nevanlinna es la teoría que estudia la distribución de los valores de una función meromorfa. Fue iniciada por los hermanos Frithiof y Rolf Nevanlinna en los años 20, y ha tenido un amplio desarrollo hasta el momento presente.

La función característica y la fórmula de Poisson-Jensen ([Hil76])

Explicamos ahora el punto de partida de la teoría de Nevanlinna: la *fórmula de Poisson-Jensen*, y su reformulación en términos de la *función característica*.

Supongamos que f es una función meromorfa en un disco $\overline{\mathbb{D}}_r$ cerrado de radio $r > 0$ y centro 0, que no tiene ni ceros ni polos en $z = 0$ ó $|z| = r$. Designaremos sus ceros por a_1, \dots, a_j , siendo $|a_\alpha| = \ell_\alpha$, y sus polos por b_1, \dots, b_k , siendo $|b_\beta| = p_\beta$, teniendo en cuenta sus multiplicidades. Para cada número complejo a en \mathbb{D}_r^* , introducimos la siguiente transformación de Möbius:

$$Q(z; a, r) = \frac{r(z - a)}{r^2 - \bar{a}z}.$$

Observamos que $Q(z; a, r)$ transforma la circunferencia $|z| = r$ en la circunferencia unitaria $|w| = 1$; y el interior (exterior) del primer círculo en el interior (exterior) del

segundo círculo. Queremos definir una función holomorfa H en $\overline{\mathbb{D}}_r$, tal que su módulo coincida con el de f sobre la circunferencia $|z| = r$. Utilizando las transformaciones de Möbius anteriores vemos que la siguiente función satisface las condiciones deseadas:

$$H(z) = f(z) \prod_{\alpha=1}^j [Q(z; a_\alpha, r)]^{-1} \prod_{\beta=1}^k Q(z; b_\beta, r). \quad (3.2)$$

Además, como $H(z)$ no toma los valores ∞ y 0 , podemos considerar una determinación del logaritmo y definir la función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}_r$ dada por $L(z) = \log H(z)$. Expresando L como suma de su parte real e imaginaria, es decir,

$$L(z) = \log |H(z)| + i \arg H(z),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \log H(z) &= -\overline{\log H(0)} + \frac{1}{\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\log |H(t)|}{t-z} dt \\ &= \overline{\log H(0)} + \frac{1}{\pi} \int_{|t|=r} \frac{\arg H(t)}{t-z} dt, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ya que sumando miembro a miembro las dos ecuaciones (3.3), y despejando $\log H(z)$, se obtiene la fórmula integral de Cauchy

$$\log H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\log |H(t)| + i \arg H(t)}{t-z} dt.$$

Debido a que $|H(z)| = |f(z)|$ en $|z| = r$, de (3.3) y (3.2), concluimos que

$$\begin{aligned} \log f(z) &= -\overline{\log H(0)} + \frac{1}{\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\log |f(t)|}{t-z} dt \\ &+ \sum_{\alpha=1}^j \log Q(z; a_\alpha, r) - \sum_{\beta=1}^k \log Q(z; b_\beta, r). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Igualando ahora las partes reales de ambos miembros de (3.4), tenemos la *fórmula de Poisson-Jensen* :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{\alpha=1}^j \log \frac{r}{\ell_\alpha} - \sum_{\beta=1}^k \log \frac{r}{p_\beta}. \quad (3.5)$$

Definimos ahora algunas funciones que nos permitirán reformular (3.5). Para cada número $t > 0$, notaremos el número $\max\{0, \log t\}$ por $\log^+ t$. Definimos entonces la *función de proximidad de f* como

$$r \in [0, \infty) \rightarrow m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.6)$$

Puesto que se verifica

$$\log |t| = \log^+ |t| - \log^+ \frac{1}{|t|}, \quad (3.7)$$

el miembro izquierdo de (3.5) es igual a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = m(r, f) - m(r, 1/f).$$

Para reescribir (3.5), primero definimos la función $n(s, f)$, cuyo valor en cada $s \geq 0$ es el número de veces, con multiplicidad, que la función f hace un polo en $\overline{\mathbb{D}}_s$. Ya que los b_1, \dots, b_k están tomados según su multiplicidad, *la función contadora*:

$$r \in [0, \infty) \rightarrow N(r, f) = \int_0^r n(s, f) \frac{ds}{s}, \quad (3.8)$$

se expresa integrando de forma explícita como

$$N(r, f) = \sum_{\beta=1}^k \log \frac{r}{p_\beta}.$$

De la misma forma se tiene que

$$N(r, 1/f) = \sum_{\beta=1}^j \log \frac{r}{\ell_\alpha},$$

y entonces (3.5) se puede escribir como

$$\log |f(0)| = m(r, 1/f) + N(r, 1/f) - m(r, f) - N(r, f). \quad (3.9)$$

Observación 3.2.7. Supongamos que el desarrollo de Laurent de f en el origen es $f(z) = a_m z^m + \dots$, con $m \in \mathbb{Z}$. Notaremos al primer coeficiente no nulo de esta serie por c_f . Hasta el momento, sólo hemos analizado el caso de una f meromorfa en $\overline{\mathbb{D}}_r$ tal que $f(0) \neq 0, \infty$. Observamos que en caso de que f tenga un cero o un polo en el origen, basta aplicar el estudio anterior a la función f/z^m para obtener una fórmula análoga a (3.9) (*ver [Lan87, pág. 162]*).

Ahora introducimos la función protagonista de esta teoría. Supongamos que f es meromorfa en todo \mathbb{C} . Entonces

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \quad (3.10)$$

está definida para todo $r > 0$, y se llama *función característica*. La función $T(r, f)$ es continua y creciente. Además,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f) = \infty,$$

a menos que f sea constante, en cuyo caso permanece acotada. *La función característica mide la afinidad de f al valor ∞* . Obtenemos entonces de (3.9) y de la observación 3.2.7 el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. (Fórmula de Poisson-Jensen). *Para toda función meromorfa f en \mathbb{C} se verifica que $T(r, 1/f) - T(r, f) = \log |c_f|$.*

Notaciones 3.2.1. Según la notación clásica de M. Landau, para dos funciones reales $A(r)$ y $B(r)$ positivas se dice que:

- $A(r)$ es *o-pequeña* de $B(r)$, y se escribe $A(r) = o(B(r))$, cuando $B(r)$ no es idénticamente cero y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{B(r)} = 0, \text{ y}$$

- $A(r)$ es *o-grande* de $B(r)$, y se escribe $A(r) = O(B(r))$, cuando existen un $r_0 \in \mathbb{R}$ y una constante c positiva tales que

$$A(r) \leq cB(r), \text{ para todo } r \geq r_0.$$

Observación 3.2.8. Como S. Lang en [Lan87], nosotros escribiremos o_{exc} y O_{exc} cuando las estimaciones de Landau sean *genéricas*, es decir, sean válidas fuera de un conjunto de medida de Lebesgue finita.

Enunciamos algunas propiedades básicas de la función característica:

Teorema 3.2.3. *Sean f y g dos funciones meromorfas en \mathbb{C} . Se cumple que:*

- i) $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$,
- ii) $T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$, y
- iii) $T(r, kf) = T(r, f) + O(1)$ para $k \in \mathbb{C}^*$.
- iv) $T(r, f^d) = dT(r, f)$ para $d \in \mathbb{N}^*$.

Demostración. Para *i*), *ii*) y *iv*) ver [Tsu59, Teorema V.2], *iii*) es consecuencia inmediata de la definición de función característica. \square

La estimación más importante que utilizaremos viene dada en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. (Derivación logarítmica [Lan87, p. 169]). *Sea f una función meromorfa en \mathbb{C} y no constante, entonces se verifica que*

$$m(r, f'/f) = o_{exc}(T(r, f)).$$

Observación 3.2.9. Cuando f es una función entera y sin ceros, como la función f'/f no tiene polos, entonces $N(r, f'/f) \equiv 0$, y por tanto

$$T(r, f'/f) = m(r, f'/f) = o_{exc}(T(r, f)).$$

Funciones enteras ligadas por una relación lineal. Sobre un Teorema de Andersén-Borel ([And00])

Recordemos que el Teorema de Picard nos dice que cada función entera no constante de una variable compleja toma todos los valores excepto a lo más uno de ellos. Dicho teorema es equivalente al siguiente enunciado: si dos funciones enteras y sin ceros f_1 y f_2 satisfacen una relación lineal del tipo $f_1 + f_2 = 1$, estas funciones son necesariamente constantes. El problema de ver cómo están ligadas una familia finita $\{f_1, \dots, f_n\}$ de funciones enteras y sin ceros que satisfacen una relación lineal homogénea del tipo $f_1 + \dots + f_n = 0$, se remonta al estudio hecho por M. Borel en [Bor87], quien generalizó el Teorema de Picard con su resultado:

Teorema 3.2.5. (Borel, [Bor87]) *Se consideran n funciones f_1, \dots, f_n enteras sin ceros que satisfacen la relación*

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0.$$

Sea la relación de equivalencia en $\{1, \dots, n\}$ dada por $i \sim j$ si existe una constante c (necesariamente distinta de cero) tal que $f_i = cf_j$, y sea S el conjunto de clases de equivalencia. Entonces

$$\sum_{i \in S} f_i = 0.$$

Si $n \leq 2$ entonces hay una única clase de equivalencia.

E. Andersén interpreta este resultado de M. Borel de la forma siguiente.

Teorema 3.2.6. (Andersén, [And00]). *Sean f, f_1, \dots, f_n funciones enteras de una variable compleja que satisfacen*

$$\sum_i f_i = f.$$

Si f_1, \dots, f_n no tienen ceros, entonces se verifica uno de los dos casos:

1. $T(r, f_i) = O_{exc}(T(r, f) + 1)$ para todo i .
2. Existe algún $I \subset \{1, \dots, n\}$ tal que $\sum_{i \in I} f_i = 0$.

3.3. Foliación P -completa con P de tipo \mathbb{C}^*

Para una foliación \mathcal{F}_X que es P -completa con P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} , según se ha visto en el lema 3.2.1 y como está indicado en [Bru98], es el hecho de que P esté determinado de forma única salvo un automorfismo polinómico el que nos permite saber cómo es \mathcal{F}_X . Sin embargo, cuando P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* , nada se dice en [Bru98] acerca de la forma explícita que ha de tener \mathcal{F}_X . Como indicábamos en la observación 3.2.6, la razón de que este caso sea más delicado de tratar es la existencia de infinitos polinomios con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* no equivalentes por un automorfismo polinómico. En esta sección hemos desarrollado una forma normal en términos de los polinomios de Saito–Suzuki para una foliación de este tipo, que nos permitirá formular explícitamente el teorema 3.2.1 sobre las foliaciones con una hoja con un final propio transcendente.

Forma normal

Consideremos una foliación \mathcal{F}_X que es P -completa con P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* . Como el polinomio sabemos que es primitivo y de tipo \mathbb{C}^* (ver proposición 1.5.1), podemos aplicar el teorema 1.5.5 y suponer que P se escribe como

$$P = x^m(x^\ell y + p(x))^n, \quad (3.11)$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado $\leq \ell - 1$ con término independiente $p(0) \neq 0$ si $\ell > 0$, ó $p(x) \equiv 0$ si $\ell = 0$.

Observación 3.3.1. Para todo $k \neq 0$, la fibra de P sobre k es una curva algebraica irreducible y, por tanto, conexa. Sin embargo, la fibra de P sobre 0, que llamaremos *fibra singular de P* , está formada por dos componentes. Una siempre es biholomorfa a \mathbb{C} (la recta $\{x = 0\}$), y la otra biholomorfa a \mathbb{C}^* si $\ell > 0$ (la curva $\{x^\ell y + p(x) = 0\}$), o a \mathbb{C} si $\ell = 0$ (la recta $\{y = 0\}$). P no define una fibración trivial alrededor del 0, ya que en caso contrario todas las fibras de P en un entorno de 0 no serían conexas, lo que contradice lo dicho anteriormente. Así, 0 es un valor crítico de P . De hecho, 0 es el único valor crítico de P : para cada punto (x, y) de $\mathbb{C}^2 \setminus P^{-1}(0)$, la 1-forma $dP(x, y)$, que viene dada por

$$x^{m-1}(x^\ell y + p(x))^{n-1} \cdot \{[(m + n\ell)x^\ell y + mp(x) + nxp'(x)]dx + nx^{\ell+1}dy\}$$

nunca se anula.

Tomemos la aplicación racional H de $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ a $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$ definida por

$$H : \begin{cases} x = u^n \\ y = u^{-(n\ell+m)}[v - u^m p(u^n)]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Proposición 3.3.1. *Sea \mathcal{F}_X una foliación P -completa con P como en (3.11). Entonces, la foliación levantada $H^*\mathcal{F}_X$ por la aplicación racional H definida como en (3.12) está generada por un campo vectorial de la forma*

$$a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + c(v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad \text{con } a(v), c(v) \in \mathbb{C}[v]. \quad (3.13)$$

Antes de demostrar esta proposición, explicaremos por qué hemos elegido este cambio H . Si designamos a la línea horizontal $\mathbb{C} \times \{v\}$ por L_v , H está definida de acuerdo a las dos siguientes relaciones polinómicas:

$$x = u^n \quad \text{y} \quad x^\ell y + p(x) = \frac{v}{u^m},$$

para que la imagen inversa por H de una fibra $P^{-1}(k)$ cualquiera de P sobre un valor $k \neq 0$ venga dada por la familia de n rectas horizontales perforadas:

$$L_{\xi_{1k}} \setminus \{(0, \xi_{1k})\}, \dots, L_{\xi_{nk}} \setminus \{(0, \xi_{nk})\},$$

donde ξ_{jk} , para $j = 1, \dots, n$, son las raíces n -ésimas de k (ver figura 3.4). Por otra parte, como $DH_{(u,v)}$ es un isomorfismo lineal para todo $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ podemos definir el campo vectorial holomorfo H^*X en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ resultado de levantar X por H , es decir,

$$H^*X(u, v) = DH_{H(u,v)}^{-1}(X(H(u, v))).$$

Este campo visto como campo racional en \mathbb{C}^2 tiene a lo más un cero o un polo de codimensión uno en la recta $\{u = 0\}$. Si eliminamos este posible polo o cero multiplicando H^*X por la potencia entera s de u conveniente, obtenemos un campo vectorial polinómico con singularidades aisladas de la forma

$$u^s \cdot H^*X, \quad \text{con } s \in \mathbb{Z},$$

que genera la foliación $H^*\mathcal{F}_X$. De esta manera podemos preguntarnos cómo se comporta $H^*\mathcal{F}_X$ con respecto a la foliación horizontal.

Demostración de la proposición 3.3.1. Definamos el conjunto finito de valores

$$\mathcal{Q}_v = \{t \in \mathbb{C} \mid t^n \in \mathcal{Q}\},$$

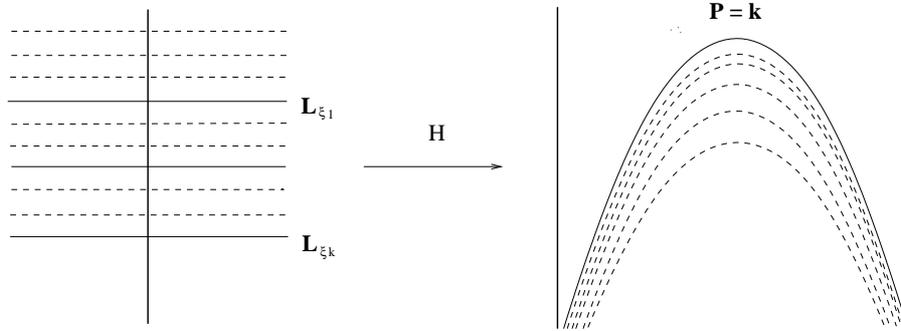


Figura 3.4: Cambio racional H .

donde \mathcal{Q} es el conjunto asociado a P en la definición de foliación P -completa (ver definición 3.2.4). Después del lema 3.2.1, es suficiente probar que $H^*\mathcal{F}_X$ es una foliación v -completa (con respecto a \mathcal{Q}_v) que deja invariante el eje de coordenadas $\{u = 0\}$.

Dado $t \notin \mathcal{Q}_v$, ya que 0 está siempre en \mathcal{Q} (ver observación 3.3.1) y como para todo $k \neq 0$ existe siempre un disco $\mathbb{D}_r(k)$ de centro k y radio $r > 0$ suficientemente pequeño para que la imagen inversa de $K = P^{-1}(\mathbb{D}_r(k))$ por H conste de n cilindros disjuntos

$$C_{jk} := (u \times \mathbb{D}_{r'}(\xi_{jk})) \setminus \{u = 0\} \quad \text{para } r' = \sqrt[n]{r} \text{ y } j = 1, \dots, n,$$

podemos asumir que t es una raíz n -ésima de k , digamos ξ_{1k} . Por otra parte, utilizando que \mathcal{F}_X es P -completa, supondremos que para ese mismo $\mathbb{D}_r(k)$ existe un biholomorfismo

$$\varphi : K \longrightarrow \mathbb{D}_r(k) \times P^{-1}(k),$$

que transforma las hojas de la foliación \mathcal{F}_X en discos horizontales $\mathbb{D}_r(k) \times \{p\}$, con $p \in P^{-1}(k)$, y que lleva la fibración $P : K \rightarrow \mathbb{D}_r(k)$ en la fibración vertical. Identificamos así K y $\mathbb{D}_r(k) \times P^{-1}(k)$. Al ser H submersión, la aplicación

$$H : H^{-1}(\mathbb{D}_r(k) \times \{p\}) \longrightarrow \mathbb{D}_r(k) \times \{p\}$$

es una cubierta finita para cualquier $p \in P^{-1}(k)$. De ahí que su restricción a cada componente conexa \mathcal{C} de $H^{-1}(\mathbb{D}_r(k) \times \{p\})$ defina un biholomorfismo del conjunto \mathcal{C} en $\mathbb{D}_r(k) \times \{p\}$. Concluimos que cada uno de los cilindros C_{jk} está foliado por discos que están contenidos en las hojas de $H^*\mathcal{F}_X$ y cortan transversalmente a cada recta horizontal L_v en un único punto (ver figura 3.5).

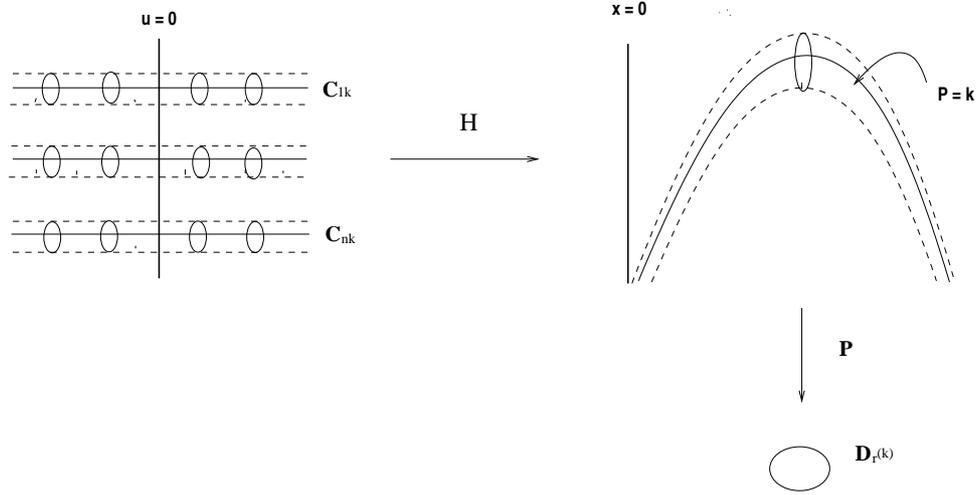


Figura 3.5: Sección de los cilindros C_{jk} .

Construimos ahora un automorfismo S de C_{1k} que transforma las hojas de $H^*\mathcal{F}_X$ en discos verticales $\{u\} \times \mathbb{D}_{r'}(t)$, preservando las rectas horizontales. Tomemos la aplicación $h(u, v)$ que a cada punto (u, v) asocia $h_\gamma(u)$, donde h_γ es la holonomía a lo largo de un camino $\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}_{r'}(t)$ que conecta v con ξ_{1k} (ver observación 3.3.1). Basta definir S como el inverso de $S^{-1}(u, v) = (h(u, v), v)$, para obtener el automorfismo deseado.

El siguiente paso es definir un automorfismo de $C_{1k} \cup (\{0\} \times \mathbb{D}_{r'}(t))$ con las mismas propiedades que tiene S con respecto a $H^*\mathcal{F}_X$ y L_v en C_{1k} , y tal que, además, deje fijo el disco $\{0\} \times \mathbb{D}_{r'}(t)$. Para ello, observamos que si restringimos S a cada L_v , con $v \in \mathbb{D}_{r'}(t)$, tenemos un automorfismo S_v de $L_v \setminus \{(0, v)\} = \mathbb{C}^* \times \{v\}$. Por el Teorema Grande de Picard, S_v puede extenderse a un automorfismo de $\mathbb{CP}^1 \times \{v\}$ de una de las dos únicas maneras posibles: como $(a_v u^\alpha, v)$, con $\alpha = 1$ ó -1 , y $a_v \in \mathbb{C}^*$. Por otra parte, al ser S holomorfo, la asignación

$$\mathbb{D}_{r'}(t) \ni v \mapsto S_v \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^1 \times \{v\}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$$

define una familia continua de automorfismos de \mathbb{CP}^1 . Pero como la condición de tener cero o polo en un punto es cerrada en $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$, por continuidad, concluimos que $\alpha \equiv 1$ ó -1 para todo $v \in \mathbb{D}_{r'}(t)$, y por tanto, S es de la forma

$$S(u, v) = (a(v)u^\alpha, v),$$

para la función $a(v) = a_v$ holomorfa en $\mathbb{D}_{r'}(t)$ y $\alpha = 1$ ó -1 . Esto demuestra que S extiende como automorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{D}_{r'}(t)$.

- Si $\alpha = 1$, S es el automorfismo que estábamos buscando, es decir, envía las hojas de $H^*\mathcal{F}_X$ en discos verticales $\{u\} \times \mathbb{D}_{r'}(t)$ preservando las rectas horizontales, y fija $\{0\} \times \mathbb{D}_{r'}(t)$.
- Si $\alpha = -1$, basta tomar $S(1/u, v)$.

Hemos probado que $H^*\mathcal{F}_X$ verifica la propiedad 2) de la definición 3.2.4 y deja invariante $\{u = 0\}$. Claramente $H^*\mathcal{F}_X$ es transversal en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ a $v = t$ con $t \notin \mathcal{Q}_v$. De ahí que también 1) de la definición 3.2.4 se verifique, y la proposición quede demostrada.

Ejemplos explícitos de foliaciones P -completas con un polinomio P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^*

Tomemos un polinomio $P = x^m(x^\ell y + p(x))$ en la forma (3.11) con $m \in \mathbb{N}^*$ y $n = 1$. Como para este caso la aplicación (3.12) es un biholomorfismo de $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$, dado el campo

$$Y = a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + b(v) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{donde } a(v), b(v) \in \mathbb{C}[v],$$

podemos calcular el campo racional H_*Y . Eliminando el polo o cero de codimensión uno de H_*Y a lo largo de $\{x = 0\}$, obtenemos un campo holomorfo X , y un argumento análogo al hecho en la demostración de la proposición anterior prueba que, ya que \mathcal{F}_Y es v -completa, \mathcal{F}_X es P -completa. Explícitamente, \mathcal{F}_X está definida por el campo $x^s \cdot H_*Y$, donde H_*Y viene dado por

$$\begin{aligned} H_*Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\ell x^m p(x) - x^{m+1} p'(x) - (m + \ell)t}{x^{m+\ell+1}} & \frac{1}{x^{m+\ell}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(t)x \\ b(t) \end{pmatrix} = \\ &= xa(t) \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ \frac{-x^m[(m + \ell)x^\ell y + xp'(x) + mp(x)]a(t) + b(t)}{x^{m+\ell}} \right\} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

donde $t = P = x^m(x^\ell y + p(x))$ y s es el orden de H_*Y a lo largo de $\{x = 0\}$.

Reformulación del Teorema de Brunella

La proposición 3.3.1 junto con el lema 3.2.1 implican que el teorema 3.2.1 puede enunciarse del siguiente modo:

Teorema 3.3.1. *Consideremos una foliación \mathcal{F}_X en \mathbb{C}^2 definida por un campo vectorial polinómico X tal que una de sus hojas \mathcal{L} posee un final propio y trascendente. Entonces, salvo un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 , existen las dos únicas siguientes posibilidades para \mathcal{F}_X :*

a) *que esté definida por*

$$X = a(x) \frac{\partial}{\partial x} + [b(x)y + c(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x)$, $b(x)$ y $c(x) \in \mathbb{C}[x]$, o bien que

b) *para una aplicación racional H definida como (3.12) la foliación levantada $H^*\mathcal{F}_X$ esté generada por un campo de la forma*

$$a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + c(v) \frac{\partial}{\partial v},$$

con $a(v)$, $c(v) \in \mathbb{C}[v]$.

3.4. Trayectorias trascendentes

En esta sección nos ocuparemos de la demostración de los dos resultados principales de este capítulo (teoremas 3.1.1 y 3.1.2). Sea X un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 , entonces

Lema 3.4.1. *Si C_z es una trayectoria trascendente sobre la que X es completo, existe un final de C_z que es trascendente y propio.*

Demostración. Como X es completo en C_z , tenemos que C_z es biholomorfa a \mathbb{C} o a \mathbb{C}^* (ver proposición 1.6.1). Si C_z es de tipo \mathbb{C} , es suficiente tomar un disco \mathbb{D}_r en C_z y definir el final propio como $C_z \setminus \mathbb{D}_r$. Cuando C_z es de tipo \mathbb{C}^* , esta trayectoria tiene dos finales propios: $C_z \setminus \mathbb{D}_r$ y $\overline{\mathbb{D}}_r \setminus \{0\}$, y como C_z es trascendente, uno de los dos ha de ser trascendente: en caso contrario, por el Teorema de Chow, C_z sería algebraica, lo que contradice nuestra hipótesis. \square

Proposición 3.4.1. *Sea C_z una trayectoria trascendente sobre la que X es completo. Si \mathcal{F}_X es P -completa con P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} , existen un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 , polinomios $b(x)$, $c(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, y $N \in \{0, 1\}$ tales que*

$$X = \lambda x^N \frac{\partial}{\partial x} + [b(x)y + c(x)] \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.14)$$

En particular, X es completo.

Demostración. Sabemos que X es como (3.1) después de un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 (ver lema 3.2.1). Además, el conjunto \mathcal{Q} ($= \mathcal{T}_x$) definido como

$$\{k \in \mathbb{C} \mid x = k \text{ es invariante por } \mathcal{F}_X\}$$

coincide en este caso con el conjunto de ceros $\{a(x) = 0\}$ (ver observación 3.2.3). Por tanto, si \mathcal{Q} tuviese más de un punto, tomando la solución $\Phi^{-1} \circ \varphi_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de Φ^*X , la función entera $P \circ \varphi_z$ no tomaría al menos dos valores (los valores de \mathcal{Q}), y por el Teorema de Picard sería constante, lo que es una contradicción. Por tanto, o bien \mathcal{Q} se reduce a un único punto, que podemos asumir que es el 0, o es vacío. De ahí que $a(x) = \lambda x^N$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $N \in \mathbb{N}$. Finalmente, ya que Φ^*X es completo sobre $\Phi^{-1}(C_z)$, N es 0 ó 1 (ver proposición 1.6.3). Veamos que X es completo. El sistema de ecuaciones que define X viene dado por

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x^N(t) \\ y'(t) = b(x(t))y(t) + c(x(t)). \end{cases} \quad (3.15)$$

Fijado cualquier (x, y) en \mathbb{C}^2 , calculamos la solución local de X por este punto integrando (3.15). De la primera ecuación obtenemos que

$$x(t) = \begin{cases} \lambda t + x, & \text{si } N = 0, \\ x e^{\lambda t} & \text{si } N = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Sustituyendo el valor de $x(t)$ obtenido en (3.16) en la segunda ecuación de (3.15) resulta una ecuación que puede resolverse por *cuadraturas*, es decir, por integración explícita. Tomando $y = uv$, esta ecuación se reescribe como

$$(uv)' = uv' + u'v = b(x(t))uv + c(x(t)).$$

Si imponemos que $v' = b(x(t))v$, tenemos que

$$v(t) = e^{\int b(x(s))ds} \quad \text{y} \quad u'v = c(x(t)).$$

Por tanto,

$$u(t) = \mu + \int c(x(z)) e^{-[\int b(x(s))ds]} dz, \quad \text{con } \mu \in \mathbb{C},$$

y el flujo de X está definido por

$$\varphi(t, x, y) = \left(x(t), \left\{ y + \int^t c(x(z)) e^{-[\int^z b(x(s))ds]} dz \right\} e^{\int^t b(x(s))ds} \right). \quad (3.17)$$

De esta manera, tenemos que X es completo. □

3.4.1. Trayectorias biholomorfas a \mathbb{C}^*

Demostración del Teorema 3.1.1.

Después del Lemma 3.4.1, supondremos que $\Sigma = C_z \setminus \mathbb{D}_r$ es un final transcendente de C_z , que es propio. El teorema 3.2.1 implica entonces que existe un polinomio P con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} o a \mathbb{C}^* tal que la foliación \mathcal{F}_X es P -completa.

Si P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} , X está definido por (3.14) como consecuencia de la proposición 3.4.1. Si N fuese 0, el flujo de X estaría definido por (3.17) con $x(t) = \lambda t + x$, es decir,

$$\varphi(t, x, y) = \left(\lambda t + x, \left\{ y + \int^t c(z+x) e^{-[\int^z b(s+x) ds]} dz \right\} e^{\int^t b(s+x) ds} \right). \quad (3.18)$$

Y como $x(t)$ no es periódica, todas las trayectorias de X serían biholomorfas a \mathbb{C} , lo que es imposible. De ahí que $N = 1$ y que X sea como en *i.1*) del teorema 3.1.1.

Supongamos que P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* . De ahora en adelante, asumiremos que P es de la forma (3.11), es decir, P se escribe como

$$P = x^m(x^\ell y + p(x))^n,$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ un polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado $\leq \ell - 1$ con término independiente $p(0) \neq 0$ si $\ell > 0$, ó $p(x) \equiv 0$ si $\ell = 0$. Analizamos su conjunto \mathcal{Q} en el siguiente lema.

Lema 3.4.2. *Existe $s \in \mathbb{C}$ tal que P restringido a C_z define una cubierta finita ramificada sobre $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Además, $\mathcal{Q} = \{0, s\}$.*

Demostración. Recordemos de la observación 3.3.1 los dos siguientes hechos:

1. el valor 0, que está en \mathcal{Q} , es el único valor crítico de P , y
2. cada fibra de P sobre un valor distinto de 0 tiene sólo una componente conexa.

De esta forma, si existe un valor distinto de 0 que está en \mathcal{Q} , la correspondiente fibra debe ser invariante por \mathcal{F}_X (ver observación 3.2.3). Como estamos suponiendo que C_z es biholomorfa a \mathbb{C}^* , \mathcal{F}_X no puede ser conjugada por un automorfismo holomorfo a la foliación definida por un campo de vectores constante. Luego, por el teorema 3.2.1 el final Σ debe estar en el infinito con respecto a P , y de esta manera, existe un ciclo γ en \mathbb{C} que rodea a \mathcal{Q} tal que P restringido a Σ es una cubierta sobre Γ^+ . Por otra parte, como sabemos que el otro final $\overline{\mathbb{D}}_r \setminus \{0\}$ de C_z debe ser algebraico (ver corolario 3.2.1), P restringido a C_z define una cubierta finita ramificada sobre $P(C_z)$. En particular, tenemos que C_z corta a cada fibra de P en un número finito de puntos.

Además, al ser $P \circ \varphi_z$ función entera, su imagen $P \circ \varphi_z(\mathbb{C}) = P(C_z)$ es entonces igual a \mathbb{C} ó $\mathbb{C} \setminus \{s\}$, con $s \in \mathbb{C}$, aplicando el Teorema de Picard. Estudiemos estos dos casos.

- Si $P(C_z) = \mathbb{C}$, tenemos que $\mathcal{Q} = \{0\}$. Por la observación 3.2.4 vemos que

$$P : C_z \setminus P^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

es una cubierta holomorfa. Además, $P^{-1}(0) \cap C_z$ es un conjunto no vacío de puntos que contiene los posibles puntos de ramificación de $P : C_z \rightarrow \mathbb{C}$. Sin embargo, ya que C_z es biholomorfa a \mathbb{C}^* e interseca a la fibra $P^{-1}(0)$ en al menos un punto, el conjunto $C_z \setminus P^{-1}(0)$ es hiperbólico (es decir, su recubridor universal es un disco \mathbb{D}) y no puede cubrir a \mathbb{C}^* , contradicción. Concluimos entonces que $P(C_z) = \mathbb{C} \setminus \{s\}$ para algún $s \in \mathbb{C}$.

- Sea $P(C_z) = \mathbb{C} \setminus \{s\}$ para $s \in \mathbb{C}$. Existen dos posibilidades:

- cuando s es 0, entonces $C_z \cap P^{-1}(k) \neq \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{C}^*$, y $\mathcal{Q} = \{0\}$.
- Si por el contrario s es distinto de 0, $C_z \cap P^{-1}(k) \neq \emptyset$ para cada $k \neq s$, y por tanto $\mathcal{Q} \subset \{0, s\}$. Ahora, si s no perteneciese a \mathcal{Q} existiría un ciclo $\bar{\gamma}$ que rodea a \mathcal{Q} verificando $s \in \bar{\Gamma}^+$. Pero esto implicaría que P restringido a C_z toma el valor s (ver observación 3.2.4). De ahí que $\mathcal{Q} = \{0, s\}$.

□

Analicemos las dos posibilidades que se desprenden del lema 3.4.2.

- Caso $\mathcal{Q} = \{0\}$. Tenemos que $P(C_z) = \mathbb{C}^*$ y

$$C_z \subset \mathbb{C}^2 \setminus P^{-1}(0) = \mathbb{C}^2 \setminus (\{x = 0\} \cup \{x^\ell y + p(x) = 0\}).$$

Consideremos ahora la siguiente aplicación polinómica de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 :

$$R : \begin{cases} u = x \\ v = x^\ell y + p(x). \end{cases} \quad (3.19)$$

Esta aplicación define un automorfismo de $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$, cuya inversa viene dada por

$$R^{-1} : \begin{cases} x = u \\ y = u^{-\ell} [v - p(u)]. \end{cases}$$

Este cambio de coordenadas *racional*, nos permite definir el campo holomorfo R_*X en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$. Resaltemos el hecho de que R_*X como campo racional en \mathbb{C}^2 presenta a lo más un polo a lo largo de la recta $\{u = 0\}$. Por otra parte, como la trayectoria

$R(C_z)$ está contenida en $\mathbb{C}^2 \setminus \{uv = 0\}$, R_*X es completo sobre $R(C_z)$. Tomemos A y B polinomios de Laurent en $\mathbb{C}[u, v, u^{-1}, v^{-1}]$ tales que

$$R_*X = uA \frac{\partial}{\partial u} + vB \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.20)$$

y escribamos explícitamente sus componentes como

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(\alpha, \beta) \in I} A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \\ B &= \sum_{(\alpha, \beta) \in J} B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sea \mathcal{H} el grupo multiplicativo generado por el conjunto de monomios de A y B que aparecen en (3.21), es decir,

$$\mathcal{H} = \langle u^\alpha v^\beta \mid (\alpha, \beta) \in I \cup J \rangle.$$

El grupo \mathcal{H} es isomorfo al retículo aditivo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por los pares $(\alpha, \beta) \in I \cup J$ que aparecen en (3.21) mediante el monomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ u^\alpha v^\beta &\mapsto (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Proposición 3.4.2. *El retículo \mathcal{H} tiene rango uno.*

Demostración. Obviamente el rango de \mathcal{H} es ≤ 2 . Descartemos primero que el rango de \mathcal{H} sea cero. Si esto ocurriese, implicaría que A y B son constantes, y por tanto, (3.20) se expresaría como

$$R_*X = \lambda u \frac{\partial}{\partial u} + \mu v \frac{\partial}{\partial v}, \quad \text{para } \lambda \text{ y } \mu \text{ en } \mathbb{C}.$$

Dada $F = u^{-\mu} v^\lambda$, se verifica que

$$dF = \frac{F}{uv} (\lambda u dv - \mu du).$$

Por tanto, $R_*X(F) = 0$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{uv = 0\}$, y se obtiene así que F es una primera integral holomorfa multivaluada de R_*X . Existe en este caso un nivel de F que contiene a $R(C_z)$. Por tanto, como por hipótesis C_z es propia, $R(C_z)$ es propia y $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}^*$ (ver lema 3.4.7). Pero esto implica que C_z es algebraica, y por tanto, una contradicción, pues estamos suponiendo que C_z es trascendente.

Supongamos que el rango de \mathcal{H} es dos y lleguemos a una contradicción. Tomemos la trayectoria $R(C_z)$ de R_*X , que asumiremos parametrizada por $\mathbb{C} \ni t \rightarrow (u(t), v(t))$, y consideremos las funciones siguientes

$$\begin{aligned}
P(u(t), v(t)) &= u'(t)/u(t) = \sum_{(\alpha, \beta) \in I} A_{\alpha\beta} u^\alpha(t) v^\beta(t), \\
Q(u(t), v(t)) &= v'(t)/v(t) = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} B_{\alpha\beta} u^\alpha(t) v^\beta(t)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $R(C_z)$ está contenida en $\mathbb{C}^2 \setminus \{uv = 0\} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, cada función (entera) $u^\alpha(t)v^\beta(t)$ no tiene ceros. Además, podemos elegir siempre un $t_0 \in \mathbb{C}$ de tal forma que el correspondiente punto $(u_0, v_0) := (u(t_0), v(t_0))$ en C_z verifique

$$\begin{aligned}
\sum_{(\alpha, \beta) \in I'} A_{\alpha\beta} u_0^\alpha v_0^\beta &\neq 0 \quad y \\
\sum_{(\alpha, \beta) \in J'} B_{\alpha\beta} u_0^\alpha v_0^\beta &\neq 0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

para todos los subconjuntos no vacíos $I' \subset I$ y $J' \subset J$. En caso contrario, $R(C_z)$ estaría contenida en las curvas algebraicas definidas por las correspondientes ecuaciones (3.23) una vez eliminado el polo. Lo que contradiría la no algebraicidad de $R(C_z)$. Por tanto, utilizando el teorema 3.2.6 con las funciones $u_i = A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$ (resp. $u_i = B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$) y $f = A$ (resp. $f = B$), y como el caso 2 de este teorema no se presenta por (3.23), obtenemos las estimaciones

$$\begin{aligned}
T(r, A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) &= O_{exc}(T(r, u'/u) + 1) \\
&= O_{exc}(T(r, u'/u)) + O(1) \quad \text{para } (\alpha, \beta) \in I, \text{ y} \\
T(r, B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) &= O_{exc}(T(r, v'/v) + 1) \\
&= O_{exc}(T(r, v'/v)) + O(1) \quad \text{para } (\alpha, \beta) \in J.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Lema 3.4.3. *Para las funciones $u^\alpha v^\beta$ anteriores se verifican las siguientes estimaciones:*

$$\begin{aligned}
T(r, u^\alpha v^\beta) &= o_{exc}(T(r, u)) + O(1) \quad \text{si } (\alpha, \beta) \in I, \text{ y} \\
T(r, u^\alpha v^\beta) &= o_{exc}(T(r, v)) + O(1) \quad \text{si } (\alpha, \beta) \in J.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Demostración. De acuerdo con el teorema 3.2.4 y la propiedad *iii*) del teorema 3.2.3, las ecuaciones (3.24) se reescriben como

$$\begin{aligned}
T(r, A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) &= T(r, u^\alpha v^\beta) + O(1) \\
&= o_{exc}(T(r, u)) + O(1) \quad \text{para cada } (\alpha, \beta) \in I, \text{ y} \\
T(r, B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta) &= T(r, u^\alpha v^\beta) + O(1) \\
&= o_{exc}(T(r, v)) + O(1) \quad \text{para cada } (\alpha, \beta) \in J.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Tomamos funciones C, C', D, D', F, F' tales que C, C', F, F' son $O(1)$, y D, D' son $o_{exc}(T(r, u))$. Si sustituimos C, D, F y C', D', F' en la primera y segunda ecuación de (3.26), respectivamente, despejando $T(r, u^\alpha v^\beta)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} T(r, u^\alpha v^\beta) &= D + F - C \quad \text{si } (\alpha, \beta) \in I, \text{ y} \\ T(r, u^\alpha v^\beta) &= D' + F' - C' \quad \text{si } (\alpha, \beta) \in J \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como $(F - C) = O(1)$ y $(F' - C') = O(1)$, de (3.27) se deduce (3.25). \square

Observación 3.4.1. Si definimos la función

$$T(r) = \max \{T(r, u); T(r, v)\},$$

las estimaciones (3.25) del lema anterior implican

$$T(r, u^\alpha v^\beta) = o_{exc}(T(r)) + O(1) \quad \text{para } (\alpha, \beta) \in A \cup B. \quad (3.28)$$

Tomemos un elemento $u^\alpha v^\beta$ de $\mathcal{H} \setminus \{0\}$. Por definición, $u^\alpha v^\beta$ puede escribirse como

$$u^\alpha v^\beta = (u^{\alpha_1} v^{\beta_1}) \cdots (u^{\alpha_k} v^{\beta_k}),$$

con $k > 0$, y donde los $u^{\alpha_i} v^{\beta_i}$ son tales que (α_i, β_i) ó $(-\alpha_i, -\beta_i)$ pertenecen a $A \cup B$ para $1 \leq i \leq k$. Podemos reordenar entonces el conjunto

$$\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_k, \beta_k)\}$$

para que los h primeros y los inversos de los $k - h$ restantes estén en $A \cup B$. Por tanto, de la propiedad *i*) del teorema 3.2.3 y del teorema 3.2.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} T(r, u^\alpha v^\beta) &\leq T(r, u^{\alpha_1} v^{\beta_1}) + \cdots + T(r, u^{\alpha_k} v^{\beta_k}) \\ &\leq T(r, u^{\alpha_1} v^{\beta_1}) + \cdots + T(r, u^{\alpha_h} v^{\beta_h}) + \\ &\quad + T(r, u^{-\alpha_{h+1}} v^{-\beta_{h+1}}) + \cdots + T(r, u^{-\alpha_k} v^{-\beta_k}) + O(1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aplicando ahora la estimación (3.28) a la desigualdad (3.29) resulta que

$$T(r, u^\alpha v^\beta) = o_{exc}(T(r)) + O(1) \quad \text{para todo } u^\alpha v^\beta \in \mathcal{H}. \quad (3.30)$$

Por otra parte, como por hipótesis el rango de \mathcal{H} es dos, existen d_1 y d_2 en \mathbb{Z}^* tales que u^{d_1} y v^{d_2} pertenecen a \mathcal{H} . Aplicando el teorema 3.2.2 (si d_1 ó d_2 son menores que cero), la propiedad *iv*) del teorema 3.2.3 y (3.30) se cumple que

$$T(r, u) = o_{exc}(T(r)) + O(1) \quad \text{y} \quad T(r, v) = o_{exc}(T(r)) + O(1). \quad (3.31)$$

Por consiguiente,

$$T(r) = o_{exc}(T(r)) + O(1). \quad (3.32)$$

Pero esta estimación (3.32) implica que $T(r)$ es constante. De no ser así, podríamos escribir $T(r) = A + B$ con funciones $A = o_{exc}(T(r))$ y $B = O(1)$, obteniendo la siguiente contradicción

$$1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{T(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(A + B)}{T(r)} = 0.$$

Luego $T(r)$ es constante. Finalmente, si $T(r)$ es constante, $u(t)$ y $v(t)$ también lo son. Contradicción, y el rango de \mathcal{H} es uno. \square

Lema 3.4.4. *Existen polinomios f_1 y f_2 en $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, al menos uno de ellos no constante, y existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que las ecuaciones (3.21) se reescriben como*

$$A = f_1(u^p v^q) \quad \text{y} \quad B = f_2(u^p v^q). \quad (3.33)$$

Demostración. Fijemos un $u^p v^q \in \mathcal{H}$. Todos los puntos de \mathcal{H} están en una recta de la forma $\{py - qx = 0\}$ con p y q en \mathbb{Z} (ver proposición 3.4.2). Podemos suponer además que p y q son primos entre sí. Por tanto, si $u^\alpha v^\beta \in \mathcal{H}$, como $p\beta - q\alpha = 0$, necesariamente existe un $\delta \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha = \delta p$ y el lema se demuestra una vez que vemos

$$u^\alpha v^\beta = u^\alpha v^{\frac{\alpha q}{p}} = \left(uv^{\frac{q}{p}}\right)^\alpha = \left(uv^{\frac{q}{p}}\right)^{\delta p} = (u^p v^q)^\delta.$$

\square

Lema 3.4.5. *Existe un $k \in \mathbb{C}^*$ tal que $p f_1(w) + q f_2(w) = k$, con $w = u^p v^q$ como en (3.33).*

Demostración. Dada la trayectoria $t \rightarrow (u(t), v(t))$, se cumple que

$$w[p f_1(w) + q f_2(w)] = u^p v^q \left(p \frac{u'}{u} + q \frac{v'}{v} \right) = w'.$$

Por tanto, como $w(t) = u(t)^p v(t)^q$ es una solución entera del campo completo en \mathbb{C} dado por

$$w [p f_1(w) + q f_2(w)] \frac{\partial}{\partial w},$$

necesariamente $p f_1(w) + q f_2(w) \equiv k$, con $k \in \mathbb{C}$. Por último, $k \neq 0$, pues en caso contrario $w' = 0$ y entonces $R(C_z)$ es algebraica. \square

Supondremos que existen números complejos α, β tales que $\alpha p - \beta q \in \mathbb{C}^*$ y un $f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ (sin término independiente) que verifica

$$f_1(u^p v^q) = q f(u^p v^q) + \alpha \quad \text{y} \quad f_2(u^p v^q) = -p f(u^p v^q) - \beta.$$

Luego (3.20) se escribe como

$$R_*X = u[qf(u^p v^q) + \alpha] \frac{\partial}{\partial u} - v[pf(u^p v^q) + \beta] \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.34)$$

Distinguimos dos casos según la expresión del cambio de coordenadas racional R (ver (3.19)):

- Caso $\ell = 0$. Entonces R es la identidad. De acuerdo con (3.34), como X es holomorfo y tiene ceros aislados en \mathbb{C}^2 podemos tomar $m = p$, $n = q$ en \mathbb{N} , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, y $f(z)$ un polinomio en $z \cdot \mathbb{C}[z]$ de forma que

$$X = x[nf(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[mf(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.35)$$

Nótese además que si m ó n fuese cero, un cambio lineal en \mathbb{C}^2 nos transformaría X en un campo de la forma *i.1)* del teorema 3.1.1. Podemos suponer que m y n están en \mathbb{N}^* . Consideremos la 1-forma ω dual de X :

$$\omega = i_X(dx \wedge dy) = x[nf(x^m y^n) + \alpha] dy + y[mf(x^m y^n) + \beta] dx.$$

Si $f(z) = zg(z)$ y $h(z) = \int_{z_0}^z g(s)ds$, para

$$F = yx^{\beta/\alpha} e^{(1/\alpha) \cdot h(x^m y^n)}$$

se verifica que

$$d(\log F) = \frac{dF}{F} = \frac{\omega}{xy}.$$

Se concluye entonces que $X(F) = 0$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 0\}$, y por tanto, F es una primera integral holomorfa multivaluada de X . Así, C_z está contenida en un nivel de F , pero como por hipótesis esta trayectoria es propia, tenemos que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$ (ver lema 3.4.7).

- Caso $\ell > 0$. Obtenemos X empujando (3.34) mediante R , es decir, X es igual a

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{\ell x^{\ell-1} y + p'(x)}{x^\ell} & \frac{1}{x^\ell} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} x[qf(x^p(x^\ell y + p(x))^q) + \alpha] \\ -(x^\ell y + p(x))[pf(x^p(x^\ell y + p(x))^q) + \beta] \end{array} \right) \quad (3.36)$$

Como X es holomorfo, podemos tomar $p, q \in \mathbb{N}^*$, un polinomio $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$ y $\beta = 0$. Por tanto, para $m = p$, $n = q$, $S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n)$ y $T = \ell x^\ell y + xp'(x)$, (3.36) está definido por

$$x[nS + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ -\frac{[nT + m(x^\ell y + p(x))]S + \alpha T}{x^\ell} \right\} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.37)$$

Ya que X no puede ser racional, una simple inspección de la segunda componente de (3.37) nos asegura que x^ℓ debe dividir a $[n xp'(x) - mp(x)]S + \alpha xp'(x)$. Al igual que antes sabemos que

$$F \circ R = (x^\ell y + p(x))e^{(1/\alpha)h(x^m(x^\ell y + p(x))^n)}$$

es una primera integral holomorfa multivaluada de X y $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Lema 3.4.6. *Los campos X como i.1), i.2) ó i.3) del teorema 3.1.1 son completos.*

Demostración. Si X es como i.1) ya sabemos que es completo (ver proposición 3.4.1). El flujo de un campo X como i.2) se obtiene integrando el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)[n f(x(t)^m y(t)^n) + \alpha] \\ \frac{dy}{dt} = -y(t)[m f(x(t)^m y(t)^n) + \beta]. \end{cases} \quad (3.38)$$

Tomando $w = x^m y^n$, cada solución de (3.38) por (x, y) define una solución de la ecuación $w' = \nu w$ en \mathbb{C} con la condición inicial $w(0) = x^m y^n$, donde $\nu = \alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$. Por tanto,

$$w(t) = w(0) e^{\nu t}, \quad (3.39)$$

y el flujo de X está definido en \mathbb{C}^2 por

$$\varphi(t, x, y) = \left(x e^{\int^t \{\alpha + n f[x^m y^n e^{\nu s}]\} ds}, y e^{-\int^t \{\beta + m f[x^m y^n e^{\nu s}]\} ds} \right). \quad (3.40)$$

De ahí que X sea completo.

Por otra parte, un X como i.3) tiene por flujo en $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$ el conjugado por

$$R^{-1} = (u, u^{-\ell}(v - p(u))) = (x, y)$$

del flujo del campo

$$u[n f(u^m v^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial u} - v[m f(u^m v^n)] \frac{\partial}{\partial v},$$

es decir,

$$\varphi(t, x, y) = R^{-1} \circ \left(u e^{\int^t \{\alpha + n f[u^m v^n e^{\nu s}]\} ds}, v e^{-\int^t \{m f[u^m v^n e^{\nu s}]\} ds} \right). \quad (3.41)$$

Observemos ahora la segunda componente de X . Al desarrollar explícitamente el polinomio

$$S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n),$$

vemos que no tiene términos constantes (ya que f no tiene término independiente), y los términos en los que aparece la variable y son del tipo $x^k y^h$, con $k \geq \ell + 1$ y $h > 0$. Por eso, si restringimos X a $\{x = 0\}$, obtenemos el campo

$$\alpha \ell y \frac{\partial}{\partial y},$$

que es completo por la proposición 1.6.3. Hemos demostrado entonces que como φ está definido en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$ y X sobre $\{x = 0\}$ es completo, φ extiende a \mathbb{C}^2 y X es completo. \square

Lema 3.4.7. *Si un campo X de la forma (3.35) tiene una trayectoria C_z (propia) trascendente y biholomorfa a \mathbb{C}^* , entonces todas las trayectorias de X son propias y $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$.*

Demostración. Sabemos que todo campo X de la forma (3.35) es completo (véase demostración lema 3.4.6). Como C_z es biholomorfa a \mathbb{C}^* , la solución que esta trayectoria define es periódica y se escribe, para cierta condición inicial, como (3.40). Pero, de acuerdo con (3.39), se sigue entonces que todas las demás soluciones de X son periódicas. Hemos demostrado que todas las trayectorias de X son de tipo \mathbb{C}^* , y por tanto, propias (ver teorema 1.6.1). Ahora basta aplicar la clasificación de M. Suzuki de los campos vectoriales holomorfos completos con todas sus trayectorias propias (ver [Suz77, Théorème 4]) para obtener que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$. \square

Hasta aquí hemos probado que si C_z es de tipo \mathbb{C}^* y $\mathcal{Q} = \{0\}$ (caso *a*)), X deja invariante la recta $\{x = 0\}$, y es como en los casos *i.1*), *i.2*) ó *i.3*) del teorema 3.1.1.

b) Caso $\mathcal{Q} = \{0, s\}$. Recordamos que P está definido por (3.11). Además, sabemos que en este caso la fibra $P^{-1}(s)$ es invariante por \mathcal{F}_X .

Proposición 3.4.3. *La trayectoria C_z interseca a todas las componentes simplemente conexas de la fibra singular de P .*

Demostración. Supongamos que C_z no corta a una componente simplemente conexa de la fibra singular de P . Podemos suponer que esta componente es $\{x = 0\}$ (ver observación 3.3.1).

Lema 3.4.8. *La aplicación H definida por (3.12) que nos da la forma normal $H^* \mathcal{F}_X$ de \mathcal{F}_X (ver proposición 3.3.1) verifica que $n = 1$.*

Demostración. Consideremos la unión disjunta $\mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_k$ de trayectorias de $H^* X$ dadas por $H^{-1}(C_z)$. Como $C_z \cap \{x = 0\} = \emptyset$, primero veremos que $H^* X$ es completo

en cada \mathcal{L}_i . Para ello, tomemos la parametrización $\varphi_z(t) = (x(t), y(t))$ de C_z . Ya que podemos escribir $x(t) = e^{g(t)}$, para g una función entera, cada \mathcal{L}_i es de la forma

$$\begin{cases} u(t) = \xi_j e^{g(t)/n} \\ v(t) = \xi_j^m e^{mg(t)/n} [x(t)^\ell y(t) + p(x(t))], \text{ con } \xi_j = e^{2j\pi\sqrt{-1}/n}, j \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Por tanto, $(u'(t), v'(t)) = H^*X(u(t), v(t))$. Cada \mathcal{L}_i es una curva entera que evita a lo más una recta horizontal, pero como las n rectas

$$(P \circ H)^{-1}(s) = \{v = \sqrt[n]{s} e^{2j\pi\sqrt{-1}/n}\}, \text{ con } j \in \{0, \dots, n-1\}$$

son invariantes por $H^*\mathcal{F}_X$, y por tanto disjuntas con \mathcal{L}_i , tenemos que $n = 1$. \square

La foliación $H^*\mathcal{F}_X$ es v -completa y deja invariante la recta $\{u = 0\}$. Por otra parte, $\{v = s\}$ es la única recta horizontal invariante por $H^*\mathcal{F}_X$. Podemos asumir entonces que $H^*\mathcal{F}_X$ está generada por un campo vectorial Y de la forma

$$a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda(v-s)^r \frac{\partial}{\partial v},$$

donde $a(v) \in \mathbb{C}[v]$ verifica $a(s) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $r > 0$.

Lema 3.4.9. *Existen $a(v) \in \mathbb{C}[v]$, con $a(s) \neq 0$, y $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que*

$$H^*X = a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda(v-s) \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.42)$$

Demostración. Salvo una traslación, podemos suponer

$$Y = \hat{a}(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda v^r \frac{\partial}{\partial v}, \text{ con } \hat{a}(v) = a(v+s).$$

Sabemos que $H^*X = u^k Y$, para $k \in \mathbb{Z}$. Demostremos que $k = 0$ y $r = 1$. Escribamos

$$H^*X = uA \frac{\partial}{\partial u} + vB \frac{\partial}{\partial v}$$

para A y B polinomios de Laurent definidos por $A = \hat{a}(v)u^k$ y $B = \lambda u^k v^{r-1}$. Tomemos la trayectoria de H^*X definida por $H^{-1}(C_z)$. Como esta trayectoria está contenida en $\mathbb{C}^2 \setminus \{uv = 0\}$, podemos aplicar los lemas 3.4.2 y 3.4.5, para concluir que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ (no iguales a cero al mismo tiempo) y $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$p \hat{a}(v)u^k + q \lambda u^k v^{r-1} \equiv \varepsilon.$$

Sin embargo, utilizando que $\hat{a}(0) \neq 0$ (observemos que $q \neq 0$), esto es sólo posible cuando $k = 0$ y $r = 1$. \square

Por tanto, como

$$X = H_* \left\{ a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda(v-s) \frac{\partial}{\partial v} \right\},$$

podemos calcular explícitamente X , que es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{lu^m p(u) - u^{m+1} p'(u) - (m+\ell)v}{u^{m+\ell+1}} & \frac{1}{u^{m+\ell}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(v)u \\ \lambda(v-s) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

donde $u = x$ y $v = x^m(x^\ell y + p(x))$. Si observamos la segunda componente de (3.43) vemos que es de la forma

$$-\frac{\lambda s x - x^2 U(x, y)}{x^{m+\ell+1}}, \quad \text{con } U \in \mathbb{C}[x, y].$$

Pero como $m + \ell + 1 > 1$, esta componente no es un polinomio, lo que es una contradicción. Así obtenemos que C_z corta a todas las componentes simplemente conexas de la fibra singular de P . \square

Lema 3.4.10. *No existen rectas invariantes por X .*

Demostración. Toda recta \mathcal{L} que es invariante por X , o es una componente de la fibra singular de P , o es transversal a toda fibra de P distinta de la fibra singular. En el primer caso, por lo que hemos visto en la proposición 3.4.3, \mathcal{L} debe intersectar a C_z , lo que es contradictorio, ya que diferentes trayectorias de X no tienen puntos en común. En el segundo caso $P : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{s\}$ define una cubierta ramificada de grado finito (*ver* lema 3.4.2), lo que es contradictorio, pues al ser \mathcal{L} de tipo \mathbb{C} , una tal cubierta tiene que estar definida por un polinomio, que obviamente toma todos los valores (teorema fundamental del álgebra). \square

Aplicando la proposición 3.3.1 a X , vemos que H^*X puede escribirse como *ii*) del enunciado del teorema 3.1.1. Luego la demostración de este teorema queda terminada.

3.4.2. Trayectorias biholomorfas a \mathbb{C}

Demostración del Teorema 3.1.2. De acuerdo con el corolario 3.2.1 existe un automorfismo analítico Φ de \mathbb{C}^2 tal que Φ^*X es de la forma

$$f(x, y) \frac{\partial}{\partial x},$$

siendo f una función holomorfa nunca nula (pues a priori sabemos que X tiene a lo más singularidades aisladas). En particular, todas las trayectorias de X son biholomorfas a \mathbb{C} . Queremos probar que f es una función de una variable y , y que, por tanto, Φ^*X (o, equivalentemente X) es un campo completo.

Sean Σ , P , Q como al inicio de la demostración del teorema 3.1.1. Si P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} , sabemos que X es completo (ver proposición 3.4.1), y así Φ^*X ha de ser de la forma $f(y)\frac{\partial}{\partial x}$.

Si P es un polinomio con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* , supondremos que está escrito en la forma (3.11). Destacamos el siguiente hecho:

Lema 3.4.11. (Brunella, [Bru98, p.1245]) *La fibra singular de P tiene una componente transversal a \mathcal{F}_X , que corta a C_z , y otra que es invariante por \mathcal{F}_X . Todas las demás fibras de P son transversales a \mathcal{F}_X .*

Consideremos la aplicación racional H definida en (3.12), entonces:

Lema 3.4.12. *Existen $a(v) \in \mathbb{C}[v]$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tales que*

$$H^*X = a(v)u\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.44)$$

Demostración. Como todas las trayectorias de X son biholomorfas a \mathbb{C} , de acuerdo con el lema 3.4.11, sabemos que la componente de la fibra singular de P que es invariante por \mathcal{F}_X es la recta $\{x = 0\}$. Si ahora aplicamos la proposición 3.3.1, vemos que H^*X es de la forma

$$u^k \cdot \left\{ a(v)u\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\frac{\partial}{\partial v} \right\}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Demostremos que $k = 1$. Ya que toda trayectoria \mathcal{L}_i de H^*X que está contenida en $H^{-1}(C_z)$ interseca a cada recta horizontal en un único punto, la correspondiente solución entera $\psi : t \rightarrow (u(t), v(t))$ verifica que $v(t)$ es inyectiva, obteniéndose entonces que

$$v(t) = \beta t + \gamma \quad \text{con } \beta \in \mathbb{C}^* \text{ y } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Si consideramos la proyección π de \mathbb{C}^2 sobre el eje v , podemos proyectar la restricción del campo vectorial H^*X sobre \mathcal{L}_i a un campo vectorial en $\{u = 0\} \simeq \mathbb{C}$ que es completo y no singular. Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} (\pi \circ \psi)_* \frac{\partial}{\partial t} &= \pi_* \left[u^k(t) \cdot \left\{ a(v(t))u(t)\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\frac{\partial}{\partial v} \right\} \right] (v) \\ &= (\pi \circ \psi)'(0) = \beta \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned}$$

y de esta forma

$$\lambda u^k \left(\frac{v - \gamma}{\beta} \right) \frac{\partial}{\partial v} = \beta \frac{\partial}{\partial v}.$$

De lo cual se deduce que $u^k(t) \equiv \beta/\lambda$, y en consecuencia $k = 0$, ya que $u(t)$ no puede ser constante. \square

Por último, como H^*X es completo (ver proposición 3.4.1), $H_*(H^*X) = X$ es completo en $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$. Pero esto implica Φ^*X es de la forma $f(y) \frac{\partial}{\partial x}$.

3.4.3. Comentarios finales del teorema 3.1.1.

Breve esquema de su demostración. Tras aplicar el teorema 3.2.1 y saber que existe un polinomio P con fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} o a \mathbb{C}^* tal que \mathcal{F}_X es P -completa (ver definición 3.2.4), los dos casos de este teorema aparecen al analizar como se comporta la trayectoria C_z con respecto a P . Lo primero que vemos es que uno puede considerar P , después de un automorfismo polinómico, o igual a x si P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} (ver teorema 1.5.2), o igual a $x^m(x^\ell y + p(x))^n$ en la forma (3.11) si P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* (ver teorema 1.5.5). Cuando P es igual a x , C_z evita a lo más una fibra y el campo X es como en *i.1*). Sin embargo, cuando P tiene fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* puede ocurrir que o bien C_z evite a las componentes simplemente conexas de la fibra de P sobre cero, y entonces X es como *i.2*), *i.3*), o en caso contrario, que la trayectoria C_z interseque a todas las componentes simplemente conexas de P y el campo X sea como *ii*).

Sobre los casos *i*). Por otra parte, vemos que todos los campos de *i*) son completos, su flujo (global) transforma las fibras de P en fibras de P , y están incluidos en la clasificación de campos completos polinómicos dada por Brunella en [Bru04]. Destacamos también que los campos de *i.3*) están relacionados con los de *i.2*) en el sentido siguiente: fijada la aplicación birregular

$$R(x, y) = (x, x^\ell y + p(x)),$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq \ell (> 0)$ con término independiente distinto de cero, todo campo de *i.3*) es de la forma R_*Y , para un campo polinómico Y degenerado (con singularidades no aisladas) en la forma *i.2*), pero con $\beta = 0$, es decir, para Y igual a

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n)] \frac{\partial}{\partial y},$$

con $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, y $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$.

Reformulación. Como los campos vectoriales X de *i.2*) y *i.3*) pueden reescribirse en función de la aplicación racional H definida por (3.12), podemos reformular el

teorema 3.1.1 teniendo en cuenta para la foliación \mathcal{F}_X la propiedad de ser P -completa en vez de la existencia de una recta invariante.

Teorema 3.4.1. (Reformulación del teorema 3.1.1) *Consideremos una trayectoria trascendente C_z de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 con ceros aislados, que es biholomorfa a \mathbb{C}^* . Si X es completo en C_z , salvo un automorfismo polinómico del plano, tenemos los dos siguientes casos:*

a) *Existe un polinomio P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C} tal que la foliación \mathcal{F}_X es P -completa, y entonces X es igual a*

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

b) *Existe un polinomio P de fibra genérica biholomorfa a \mathbb{C}^* tal que la foliación \mathcal{F}_X es P -completa, y para la aplicación racional H dada por (3.12) (ver sección 1.3) tenemos las dos siguientes posibilidades para H^*X .*

b.1)

$$H^*X = [f(v^n) + \alpha/n]u \frac{\partial}{\partial u} + [\alpha m/n - \beta]v \frac{\partial}{\partial v},$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$, y donde $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$ si $\ell = 0$ ó $\beta = 0$ si $\ell > 0$.

b.2)

$$H^*X = u^k \cdot \left\{ a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda v^t (v^n - s)^r \frac{\partial}{\partial v} \right\}$$

donde $a(v) \in \mathbb{C}[v]$, $t \in \mathbb{N}$, $n, r \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, y $s, \lambda \in \mathbb{C}^*$,

3.5. Aplicaciones

En esta sección estudiamos algunas aplicaciones de nuestros resultados principales.

3.5.1. Trayectorias trascendentes singulares

Discutiremos ahora una aplicación que fue la motivación inicial de nuestro estudio. Una propiedad característica de un campo vectorial polinómico con singularidades aisladas es que una cualquiera de sus trayectorias trascendentes lo determina, salvo multiplicación por un escalar. Precisemos esta propiedad.

Proposición 3.5.1. *Sea C_z una trayectoria trascendente de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 con a lo más singularidades aisladas. Si Y es un campo vectorial polinómico distinto de X que es tangente a C_z , entonces $X = \lambda Y$ para un $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Demostración. El lugar geométrico de los puntos de \mathbb{C}^2 donde X e Y son colineales es la variedad algebraica de codimensión ≥ 1 definida por el conjunto de ceros dado por el determinante de la matriz cuyas entradas son las componentes de ambos campos. Como esta variedad debe contener a los puntos de \overline{C}_z , que como conjunto es no algebraico, esto sólo es posible si existe un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $X = \lambda Y$. \square

Sea X un campo polinómico en \mathbb{C}^2 . Consideremos una trayectoria C_z trascendente de X . Motivados por la propiedad anterior nos hacemos la siguiente pregunta:

Pregunta 1. *¿ Si X es completo sobre C_z , es X completo?*

Estudiaremos esta pregunta para el siguiente tipo de trayectorias.

Definición 3.5.1. *Consideremos una trayectoria trascendente C_z de un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 . Decimos que C_z , o equivalentemente, que la correspondiente solución $\varphi_z : \Omega_z \rightarrow C_z$ es singular, si la clausura \overline{C}_z en \mathbb{C}^2 contiene ceros de X .*

Observación 3.5.1. Recordamos que $\overline{C}_z \setminus C_z$ está formado por los puntos que además de estar en \overline{C}_z son ceros de X (ver proposición 3.1.1). Es importante destacar que el que C_z sea singular no implica que la curva analítica \overline{C}_z sea singular (aunque el recíproco es siempre cierto). Si X es completo sobre una trayectoria singular C_z , como \mathbb{C}^2 es una variedad de Stein, $\overline{C}_z \setminus C_z$ es un único cero de X . Además, en este caso C_z es de tipo \mathbb{C}^* .

Corolario 3.5.1. *Consideremos una trayectoria C_z trascendente y singular de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 . Si X es completo sobre C_z , entonces X es completo. Además, salvo un automorfismo polinómico, tenemos que X es uno de los siguientes campos:*

1)

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x], \lambda \in \mathbb{C}^*$ y $a(0) \neq 0$.

2)

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y},$$

con $m, n \in \mathbb{N}^*, f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z], \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^-$ y $\alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$.

3)

$$x[nS + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ -\frac{[nT + m(x^\ell y + p(x))]S + \alpha T}{x^\ell} \right\} \frac{\partial}{\partial y},$$

para $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $< \ell$ tal que $p(0) \neq 0$, $T = \ell x^\ell y + xp'(x)$, $S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n)$ con $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, y donde

$$[n xp'(x) + mp(x)]S + \alpha xp'(x) \in x^\ell \cdot \mathbb{C}[x, y].$$

Demostración. Demostramos primero que cuando C_z es una trayectoria singular el caso *ii*) del teorema 3.1.1 (esto es, que no existe ninguna recta invariante por X) no puede ocurrir. Si este caso se presentara, salvo un automorfismo polinómico de \mathbb{C}^2 , el cero $\{p\} = \overline{C}_z \setminus C_z$ de X estaría contenido en la fibra regular $P^{-1}(s)$ de P (ver demostración del lema 3.4.2). Por otra parte, para la submersión H de $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$ definida por (3.12), como $p \notin \{x = 0\}$, cada punto de $H^{-1}(p)$ es un cero de H^*X contenido en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$. De hecho todos los ceros de H^*X en $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ son aislados. Pero, como sabemos que H^*X es de la forma:

$$u^k \cdot \left\{ a(v)u \frac{\partial}{\partial u} + b(v) \frac{\partial}{\partial v} \right\},$$

por la proposición 3.3.1, sus únicos ceros están sobre la recta $\{u = 0\}$, lo que es contradictorio. Esto demuestra que tan sólo *i*) del teorema 3.1.1 tiene lugar. Las restricciones: $a(0) \neq 0$ en el caso *i.1*) y $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^-$ en el caso *i.2*) son consecuencia inmediata del hecho de que C_z es singular, y que por tanto el cero p de X esté contenido en \overline{C}_z . \square

Si resolvemos las ecuaciones que aparecen en el corolario anterior como se vio en (3.17), (3.40) y (3.41), podemos clasificar las soluciones enteras singulares de un campo vectorial polinómico.

Corolario 3.5.2. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una inmersión holomorfa y no inyectiva de \mathbb{C} en \mathbb{C}^2 cuya imagen está contenida en una curva transcendente. Si f define una solución singular de un campo vectorial polinómico, existe un automorfismo polinómico φ de \mathbb{C}^2 tal que $\varphi \circ f$ es una de las siguientes curvas:*

a)

$$\left(\alpha e^{\lambda t}, \left\{ \beta + \int^t b(\alpha e^{\lambda z}) e^{-\int^z a(\alpha e^{\lambda s}) ds} dz \right\} e^{\int^t a(\alpha e^{\lambda s}) ds} \right)$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[z]$, $\lambda, \alpha, a(0) \in \mathbb{C}^*$ y $\beta \in \mathbb{C}$.

b)

$$\left(\lambda e^{\int^t \{\alpha + n f[\lambda^m \mu^n e^{\nu s}]\} ds}, \mu e^{-\int^t \{\beta + m f[\lambda^m \mu^n e^{\nu s}]\} ds} \right)$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\nu = \alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$ y $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^-$, y siendo $f(z)$ un polinomio en $z \cdot \mathbb{C}[z]$.

c)

$$G \left(\lambda e^{\int^t \{\alpha + n f[\lambda^m \mu^n e^{\nu s}]\} ds}, \mu e^{-\int^t \{m f[\lambda^m \mu^n e^{\nu s}]\} ds} \right)$$

donde $m, n, \in \mathbb{N}^*$, $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{C}^*$, $\nu = \alpha m$, $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[x]$, y G es la aplicación definida por $(x, x^{-\ell}[y - p(x)])$, con $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $< \ell \in \mathbb{N}^*$ y $p(0) \neq 0$.

Observación 3.5.2. Para una trayectoria no singular C_z de X de tipo \mathbb{C} , el teorema 3.1.2 da una respuesta afirmativa a la pregunta 1. Si C_z es de tipo \mathbb{C}^* , sin embargo, todo lo que podemos decir es que si existe una recta invariante por X (lo cual sucede como hemos visto cuando C_z es singular) la respuesta a la pregunta 1 es también afirmativa. Por eso proponemos la siguiente conjetura.

Conjetura 1. Si X es un campo vectorial polinómico en \mathbb{C}^2 que es completo sobre una trayectoria trascendente C_z , X es completo.

3.5.2. Un resultado de tipo Lin-Zaidenberg

Un resultado importante en la teoría de curvas algebraicas del plano afín es el Teorema de Lin-Zaidenberg, [ZL83] (ver teorema 1.5.3). Para una curva algebraica plana, irreducible y singular, dicho resultado nos dice que si esta curva es simplemente conexa, entonces es de la forma

$$\{x^k - ay^\ell = 0\}, \quad \text{con } (k, \ell) = 1 \quad \text{y } a \in \mathbb{C}^*,$$

después de un automorfismo polinómico. Del teorema 3.1.1 concluimos:

Corolario 3.5.3. Sea \mathcal{C} una curva trascendente e irreducible en \mathbb{C}^2 que es singular y simplemente conexa. Supongamos que existe una solución entera singular de un campo vectorial polinómico en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ que está contenida en \mathcal{C} . Entonces, después de un automorfismo polinómico, \mathcal{C} es de la forma $\mathcal{C} = \{y^\alpha x^\beta e^{h(x^m y^n)} = a\}$, con $a \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $h(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}^*$ y $\alpha m - \beta n \in \mathbb{C}^*$.

Capítulo 4

Campos con un cero que no es de tipo Poincaré-Dulac

En este capítulo demostramos que un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 completo, con singularidades aisladas, tiene como máximo un cero. Utilizando este hecho y algunos resultados del capítulo anterior clasificamos todos los campos vectoriales polinómicos completos con un cero que no es de tipo Poincaré-Dulac.

4.1. Introducción

Consideremos un campo vectorial holomorfo X en una variedad analítica compleja M con un cero en $p \in M$. Recordemos que el orden de X en p es el orden del primer jet no nulo de X en p , o, equivalentemente, el grado más pequeño de los monomios que aparecen en el desarrollo de Taylor de X entorno a p . Al estudiar el flujo de X , podemos hacernos la siguiente pregunta: el hecho de que X sea completo, ¿impone alguna restricción sobre el orden de X en p ? La respuesta a esta pregunta fue dada por Julio C. Rebelo.

Teorema 4.1.1. (Rebelo, [Reb96]) *Sea M una a variedad analítica compleja de dimensión dos. Si X es un campo vectorial holomorfo completo en M con un cero p en algún punto $p \in M$, entonces el orden de X en p es a lo más dos.*

Este resultado ha sido generalizado para campos que son \mathbb{R}^+ completos:

Teorema 4.1.2. (Ahern-Rosay, [AR99]) *Sea M una a variedad analítica compleja de dimensión dos. Si X es un campo vectorial holomorfo \mathbb{R}^+ completo en M con un cero en algún punto $p \in M$, entonces el orden de X en p es a lo más dos. Si el orden de X en p es dos entonces existe una esfera de Riemann inmersa Σ en M tal que $p \in \Sigma$ y X es tangente a Σ .*

Cuando M es una variedad de Stein entonces el Teorema de Rebelo se enuncia:

Teorema 4.1.3. *Sea M una variedad de Stein de dimensión dos. Si X es un campo vectorial holomorfo completo en M , con un cero en algún punto $p \in M$, entonces el orden de X en p es uno.*

Una vez visto que los ceros de un campo vectorial holomorfo X en una variedad de Stein M de dimensión dos tienen orden uno, es natural preguntarse cuántos pueden ser en número. Por ejemplo, ¿existen ejemplos de campos completos con dos ceros? La respuesta es que sí, según vemos a continuación.

Ejemplo 4. (Ahern–Rosay, [AR99, p.219]) Consideremos

$$M = \{(z, w, \rho) \in \mathbb{C}^3 : \rho^2 = (1 - zw)\},$$

y el campo de vectorial en \mathbb{C}^3 definido por

$$Z = z \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial w}.$$

Es fácil comprobar que M es una variedad de Stein y que Z es tangente a M . Como el flujo φ de Z está definido por

$$\varphi(t, z, w, \rho) = (e^t z, e^{-t} w, \rho)$$

y deja invariante a M en \mathbb{C}^3 , la restricción de Z a M define un campo completo, que vemos tiene dos ceros aislados, a saber: $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.

Sin embargo, cuando $M = \mathbb{C}^2$ no sabemos lo que sucede. Los únicos campos vectoriales holomorfos completos en \mathbb{C}^2 que se conocen son los de [Suz77]. Como hemos visto en la introducción, M. Suzuki recoge en su lista dos tipos de campos completos: 1) los que tienen flujo algebraico, y 2) los que tienen todas sus trayectorias propias. Se observa que ninguno de estos campos tiene más de un cero. Por eso, en [Ro99] y [AR99] se ha propuesto la siguiente pregunta:

Pregunta 2. Si X es un campo vectorial holomorfo completo en \mathbb{C}^2 , ¿tiene X como mucho un cero?

4.2. Número de ceros de un campo completo

Recordemos que los campos vectoriales polinómicos que estamos estudiando en esta memoria tienen a lo más singularidades aisladas. En esta sección probaremos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *Un campo vectorial polinómico completo X en \mathbb{C}^2 tiene como mucho un cero.*

Campos vectoriales polinómicos completos con primera integral racional.

Recordamos que X tiene una primera integral racional, si existe una función racional no constante $H = F/G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que es constante a lo largo de sus trayectorias. La función H se llama primera integral racional de X . En este caso, las trayectorias de X están contenidas en las curvas de la forma $\lambda F + \mu G = 0$, con λ y μ en \mathbb{C} .

Proposición 4.2.1. *Supongamos que X tiene primera integral racional. Entonces, existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 tal que,*

i) *si X no es singular,*

$$\Phi^* X = \lambda \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

ii) *Si X es singular,*

$$\Phi^* X = \lambda \left(mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \text{donde } m, n \in \mathbb{Z}^* \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Demostración. Sea $H = F/G$ una primera integral racional de X , que supondremos es primitiva (ver teorema 1.5.4). Además, podemos tomar H de forma que F y G sean dos polinomios irreducibles. Como X es completo, y \mathbb{C}^2 es de Stein, existe un subconjunto $E \subset \mathbb{C}^2$ de capacidad cero que es invariante por el flujo de X y tal que todas las trayectorias de X en $\mathbb{C}^2 \setminus E$ son o bien de tipo \mathbb{C} , o bien de tipo \mathbb{C}^* (ver proposición 1.6.2). Por tanto, H es de tipo \mathbb{C} o \mathbb{C}^* . Estudiemos estos dos casos.

• Si H es de tipo \mathbb{C} , como todas las curvas

$$\{\lambda F + \mu G = 0\} \setminus \{F = G = 0\}$$

son no singulares y biholomorfas a \mathbb{C} , tenemos que

$$\{F = G = 0\} = \emptyset.$$

Podemos suponer entonces que H es un polinomio, y por el teorema 1.5.2 existe un automorfismo φ de \mathbb{C}^2 tal que $H \circ \varphi = y$. Esto significa que el campo horizontal $\frac{\partial}{\partial x}$ dual de $d(H \circ \varphi)$ define la misma foliación que $\varphi^* X$. De ahí que

$$\varphi^* X = \lambda \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

• Cuando H es de tipo \mathbb{C}^* , de acuerdo con el teorema 1.5.5, después de un automorfismo polinómico φ de \mathbb{C}^2 , para una función h de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de grado uno, $H \circ \varphi = h \circ G$, con G como en (3.11). Estudiamos dos casos:

1. Caso $\ell = 0$. Entonces $G = x^m y^n$, con m y n en \mathbb{Z}^* . Eliminando el conjunto de ceros o polos de dimensión uno de dG , el campo $mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y}$ dual de ésta, define la misma foliación que $\varphi^* X$. Por tanto,

$$\varphi^* X = \lambda \left(mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

2. Veamos ahora que el caso $\ell > 0$ no se puede dar. Cuando $\ell > 0$, entonces $G = x^m (x^\ell y + p(x))^n$, con $m, n \in \mathbb{Z}^*$, $p(x)$ un polinomio de grado $\leq \ell - 1$ con $p(0) \neq 0$. Eliminando el conjunto de ceros de dimensión uno de dG , obtenemos la 1-forma

$$\frac{x^{m-1} (x^\ell y + p(x))^{n-1}}{x^{2am} (x^\ell y + p(x))^{2bn}} h'(G) dG, \text{ donde } \begin{cases} a = 0 & \text{si } m > 0, \\ a = 1 & \text{si } m < 0, \\ b = 0 & \text{si } n > 0, \\ b = 1 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. El campo dual de esta forma define la misma foliación que $\varphi^* X$. Así, $\varphi^* X$ viene dado explícitamente como

$$\alpha x^{\ell+1} \frac{\partial}{\partial x} + [\beta x^\ell y + \gamma p(x) + \delta x p'(x)] \frac{\partial}{\partial y}, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ y } \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Tomemos la trayectoria de $\varphi^* X$ dada por la curva

$$L = \{x^\ell y + p(x) = 0\}.$$

Si Σ es la rama en el punto $p = [0 : 1 : 0]$ definida por la clausura proyectiva de L en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, esta Σ define una trayectoria en el infinito que viene parametrizada por $\gamma(t) = (t, -\tilde{p}(1, t))$, donde $\tilde{p}(x, z)$ es la homogeneización de $p(x)$. Como

$$\text{ind}_p(\mathcal{F}_{\varphi^* X}, \Sigma) = \text{ord}_0(-\alpha t) = 1,$$

y el orden de contacto σ de Σ con L_∞ es igual a uno, obtenemos que

$$\text{ind}_p(\mathcal{F}_{\varphi^* X}, \Sigma) - \sigma \ell < 1.$$

Esto significa que X no es completo en L (ver proposición 2.1.4). Contradicción, y ℓ no puede ser > 0 .

□

Curvas invariantes de un campo completo por un cero.

Proposición 4.2.2. *Dado un cero p de un campo vectorial holomorfo completo X en \mathbb{C}^2 , existe una trayectoria singular C_z de X de tipo \mathbb{C}^* tal que su clausura \overline{C}_z en \mathbb{C}^2 es una curva analítica que pasa por p , siendo $\{p\} = \overline{C}_z \setminus C_z$. Además, si X es polinómico y Σ es la única rama de \overline{C}_z en p , existen dos posibilidades: 1) C_z es algebraica con $\overline{C}_z \setminus \Sigma$ su final algebraico, ó 2) C_z es transcendente con $\overline{C}_z \setminus \Sigma$ su final transcendente.*

Demostración. Por un cero p de un campo vectorial holomorfo X siempre existe una separatriz Σ de X por p de acuerdo con el teorema 1.3.1. Fijado un $z \in \Sigma$ y la correspondiente C_z , el conjunto $C_z \cup \{p\}$ está dotado de una estructura natural de superficie de Riemann (construcción análoga a la realizada en la sección 2.1 para una trayectoria en el infinito). Por ser X en C_z completo y \mathbb{C}^2 una variedad de Stein, C_z es de tipo \mathbb{C}^* . Y, como su clausura \overline{C}_z en \mathbb{C}^2 es una curva analítica que verifica $\overline{C}_z \setminus C_z = \{p\}$ (ver teorema 1.6.1), C_z es singular. Además, si X es polinómico, puesto que $i : C_z \setminus \Sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ es propia, la proposición 2.1.1 implica que $C_z \setminus \Sigma$ es un final propio de C_z tal que

$$\lim(C_z \setminus \Sigma) \cap L_\infty \neq \emptyset.$$

Cuando este final no es transcendente sabemos que C_z define una separatriz de \mathcal{F}_X por un punto $r = \lim(C_z \setminus \Sigma) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$ (ver corolario 3.2.1). Por tanto,

$$\lim(C_z) = \lim(C_z \setminus \Sigma) = r,$$

y C_z es algebraica. □

Proposición 4.2.3. *Sea p un cero no dicrítico de un campo vectorial polinómico X en \mathbb{C}^2 . Si Γ es una curva algebraica invariante por X que pasa por p , y X sobre $\Gamma \setminus \{p\}$ es completo, existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 tal que $\Phi(\Gamma)$ es una recta.*

Demostración. Como X en $\Gamma \setminus \{p\}$ es completo, si identificamos Γ con la superficie de Riemann dada por $C_z \cup \{p\}$, al ser \mathbb{C}^2 una variedad de Stein, la trayectoria C_z que define $\Gamma \setminus \{p\}$ es de tipo \mathbb{C}^* . La restricción de X a $\Gamma \setminus \{p\}$ corresponde, salvo un automorfismo, al campo $\lambda z \frac{\partial}{\partial z}$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ según la proposición 1.6.3. Luego, la única rama Σ de la curva Γ en p satisface $\text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) = 1$ (ver proposición 1.3.2), y, en particular, como X en C_z extiende a p como un cero de orden uno, la parte lineal DX_p de X en p es distinta de cero. Designemos por λ y μ a sus autovalores. Probaremos que para todo los posibles valores de λ y μ la curva Γ es lisa en p .

1. Si $\lambda = \mu = 0$, después de un cambio lineal de coordenadas, podemos asumir que

$$DX_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que Γ es singular en p y lleguemos a una contradicción. Como Γ es biholomorfa a \mathbb{C} , por el teorema 1.5.3, existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 tal que

$$\Phi(\Gamma) = \{x^k - ay^\ell = 0\}, \quad \text{con } (k, \ell) = 1, a \in \mathbb{C}^*.$$

Como Γ es singular, podemos además suponer que k ó ℓ es distinto de uno. Designemos a $\Phi(\Gamma)$ por Γ' , y tomemos la parametrización $\gamma(t) = (\varepsilon t^\ell, t^k)$, con $\varepsilon^k = a$, de la rama $\Sigma' = \Phi(\Sigma)$ de Γ' en $p' = \Phi(p)$. Ya que

$$D(\Phi_*X)_{p'} = D\Phi_p \cdot DX_p \cdot D\Phi_{p'}^{-1},$$

escribiendo

$$D\Phi_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

obtenemos que

$$D(\Phi_*X)_{p'} = \alpha \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha = (ad - bc)^{-1} \in \mathbb{C}^*.$$

De esta manera, el campo Φ_*X en $\Gamma' \cup \{p'\}$ se expresa entorno a p' como

$$\gamma^*(\Phi_*X) = \Delta(t) \frac{\partial}{\partial t},$$

con $\Delta(t)$ igual a

$$\frac{\alpha b(d\varepsilon t^\ell - bt^k) + P(\varepsilon t^\ell, t^k)}{\varepsilon \ell t^{\ell-1}} = \frac{\alpha d(d\varepsilon t^\ell - bt^k) + Q(\varepsilon t^\ell, t^k)}{k t^{k-1}}, \quad (4.1)$$

donde P y Q son dos polinomios que tienen orden ≥ 2 en p .

Analicemos (4.1). Aplicando la proposición 1.3.2 vemos que $\text{ind}_p(\mathcal{F}_X, \Sigma) = 1$ implica $\text{ind}_{p'}(\mathcal{F}_{\Phi_*X}, \Sigma') = 1$. Concluimos que $\gamma^*(\Phi_*X)$ tiene un cero de orden 1 y los órdenes de los dos numeradores de (4.1) son ℓ y k , respectivamente.

- Si $bd \neq 0$, tenemos que $k > \ell$. En caso contrario, ya que $\ell \geq k$ (recordemos que k ó ℓ es distinto de uno), el término $-ab^2t^k$ en el numerador del primer miembro de (4.1) debería cancelarse con uno de los términos de $P(\varepsilon t^\ell, t^k)$, y, necesariamente, $k = j\ell$ con $j \geq 2$, contradiciendo que $(k, \ell) = 1$. Pero $k > \ell$ implica que $\alpha d^2\varepsilon t^\ell$ se cancela con uno de los términos de $Q(\varepsilon t^\ell, t^k)$, y, así, $\ell = jk$ con $j \geq 2$. Por tanto, una contradicción, y este caso es imposible.
- Si $bd = 0$, entonces, o el $\text{ord}_0(P(\varepsilon t^\ell, t^k)) = \ell$, o el $\text{ord}_0(Q(\varepsilon t^\ell, t^k)) = k$. En el primer caso, $\ell = jk$, con $j \geq 2$. En el segundo $k = j\ell$, con $j \geq 2$. Contradicción de nuevo con $(k, \ell) = 1$ y, por tanto, imposible.

2. Si $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}^+$, como p es no dicrítico, p es de tipo Poincaré–Dulac, y por tanto, Γ es lisa en p (ver proposición 1.3.1).
3. Cuando $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$, o $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$, Γ es lisa en p (ver proposición 1.3.1).

Una vez visto que Γ es lisa, si aplicamos el teorema 1.5.2, sabemos que existe un automorfismo polinómico Φ de \mathbb{C}^2 que transforma la curva Γ en la recta $\Phi(\Gamma)$. \square

Observación 4.2.1. Para el caso dicrítico la proposición 4.2.3 es falsa. Tomemos un campo completo de la forma

$$X = \lambda \left(mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y} \right), \text{ donde } m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

con primera integral racional $H = x^m y^{-n}$. El campo X tiene un único cero en $p = (0, 0)$, que es dicrítico. Además, todas las curvas $H = c$, con $c \in \mathbb{C}^*$, son invariantes por X y singulares en p .

Demostración del Teorema 4.2.1. Supongamos que p_1 y p_2 son dos ceros distintos de X . Sabemos por la proposición 4.2.2 que existen dos curvas analíticas invariantes de X por p_1 y p_2 , que llamaremos Γ_1 y Γ_2 , respectivamente. Dichas curvas son distintas y no se cortan en ningún punto, pues la restricción de X a cada una de ellas define un campo completo sobre una superficie de Riemann que no es biholomorfa a \mathbb{CP}^1 (son curvas afines en \mathbb{C}^2) con un único cero (ver proposición 1.6.3).

Analicemos primero el caso en que p_i es no dicrítico y Γ_i es algebraica para cada $i \in \{1, 2\}$. Podemos asumir, por ejemplo, que Γ_1 es una recta (ver proposición 4.2.3). Llamemos L_{p_1} y C_2 a las clausuras proyectivas de Γ_1 y Γ_2 , respectivamente. Tomemos el único punto r donde L_{p_1} y C_2 se cortan, que sabemos está en L_∞ ya que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Veamos ahora que C_2 es una recta. Argumentando por reducción al absurdo, si C_2 no fuese una recta, esta curva, que sabemos es tangente a L_{p_1} en r , tendría que ser también tangente en este punto a la recta del infinito L_∞ . De no serlo, tomando la curva desingularizada Z_2 de C_2 (ver capítulo 1) y su correspondiente resolución

$$\pi^n : Z_2 \longrightarrow C_2,$$

el campo completo X en $\Gamma_2 \setminus \{p_2\}$ podría levantarse por π^n a un campo holomorfo completo $(\pi^n)^* X$ sobre la superficie de Riemann Z_2 con al menos tres ceros, a saber: p_2 y al menos dos puntos distintos en L_∞ donde intersecan L_∞ y C_2 , lo que contradice el que X fuese completo sobre Γ_2 (ver proposición 1.6.3). Por tanto, L_{p_1} y L_∞ son tangentes a C_2 en r . Pero, esto implica que C_2 tiene dos ramas en r , lo que es imposible pues $\Gamma_2 \setminus \{p_2\}$ es biholomorfa a \mathbb{C}^* . Hemos probado que Γ_1 y Γ_2 son dos rectas que no se cortan, y de esta manera puedan considerarse como dos rectas paralelas de ecuaciones

$$\Gamma_1 = \{x = a\} \text{ y } \Gamma_2 = \{x = b\}, \text{ con } a, b \in \mathbb{C},$$

después de un automorfismo lineal de \mathbb{C}^2 . Por cada punto $z = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ que no esté en esas dos rectas, la trayectoria C_z de X por z , dada como la imagen de la solución $\varphi_z : \mathbb{C} \rightarrow C_z$, define al proyectarse sobre el eje $\{y = 0\}$ una aplicación entera que no toma al menos los valores a y b . Por el Teorema de Picard vemos que C_z está contenida en una recta paralela a Γ_1 y a Γ_2 , y así

$$X = \lambda \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Contradicción, porque estamos suponiendo que X tiene al menos dos ceros.

Los casos que nos quedan por estudiar son: 1) cuando alguno de los puntos p_i es dicrítico, y 2) cuando alguna de las curvas Γ_i no es algebraica. En el primer caso, si ninguna de las trayectorias de X por el cero dicrítico fuese transcendente, tendríamos una cantidad infinita de curvas algebraicas invariantes de X . Pero, por el Teorema de Darboux, X tendría primera integral racional, y de acuerdo con la proposición 4.2.1 esto significaría que X tiene a lo más un cero, lo cual no es posible. Así, tanto 1) como 2) implican la existencia de una trayectoria transcendente singular C_z de X sobre la que el campo X es completo. Sabemos, finalmente, que estos campos tienen como mucho un cero (*ver* corolario 3.5.1), de ahí que este caso tampoco sea posible.

4.3. Ceros que no son de tipo Poincaré–Dulac

Consideramos en esta sección un campo vectorial polinómico completo X en \mathbb{C}^2 con un cero p que no es de tipo Poincaré–Dulac (*ver* definición en proposición 1.3.1). El resultado principal es el siguiente:

Teorema 4.3.1. *Sea X un campo vectorial polinómico completo en \mathbb{C}^2 . Si p es un cero de X que no es de tipo Poincaré–Dulac entonces, salvo un automorfismo polinómico, X es uno de los siguientes:*

1)

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + [a(x)y + b(x)] \frac{\partial}{\partial y},$$

donde $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]$, $a(0) \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

2)

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y}$$

para $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ y $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

3)

$$x[nS + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} + \left\{ -\frac{[nT + m(x^\ell y + p(x))]S + \alpha T}{x^\ell} \right\} \frac{\partial}{\partial y}$$

para $m, n, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $< \ell$ tal que $p(0) \neq 0$, $T = \ell x^\ell y + xp'(x)$, $S = f(x^m(x^\ell y + p(x))^n)$ con $f(z) \in z \cdot \mathbb{C}[z]$, y donde

$$[n xp'(x) + m p(x)]S + \alpha xp'(x) \in x^\ell \cdot \mathbb{C}[x, y].$$

Demostración. Vemos primero que p es el único cero de X en \mathbb{C}^2 por el teorema 4.2.1. Supondremos que tiene coordenadas $p = (0, 0)$. Además, sabemos que la parte lineal DX_p de X en p es distinta de cero (ver teorema 4.1.3). Es más, designando a los autovalores de DX_p por λ y μ podemos utilizar el siguiente hecho:

Lema 4.3.1. (Rebelo, [Reb00, p.760]) *Los autovalores λ y μ son distintos de cero.*

Este lema implica que p no puede ser un silla-nodo. Existen dos posibilidades de acuerdo con la proposición 1.3.1.

- $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}^+$. Al no ser p de tipo Poincaré–Dulac, p es dicrítico. Entonces, o existe una trayectoria transcendente singular C_z de X tal que $\overline{C_z} \setminus C_z = \{p\}$ (ver teorema 1.6.1), o en caso contrario X tiene una primera integral racional por el Teorema de Darboux. En ambos casos sabemos cómo son los campos por el corolario 3.5.1 y el teorema 4.2.1.
- $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$. Las dos únicas separatrices por p son lisas y transversales en p y definen dos trayectorias singulares de X . Si al menos una de ellas es transcendente, es consecuencia del corolario 3.5.1 cómo es X . Si ninguna de ellas lo es, su clausura en \mathbb{C}^2 viene definida por dos curvas lisas

$$\Gamma_1 = \{R = 0\} \text{ y } \Gamma_2 = \{S = 0\}, \text{ donde } R, S \in \mathbb{C}[x, y],$$

que pasan por p . Consideremos

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{R \cdot S = 0\},$$

que topológicamente corresponde a dos copias de \mathbb{C} unidas por el punto p . Como esta curva es reducible y simplemente conexa, podemos suponer aplicando el teorema 1.5.3 que después de un automorfismo polinómico su ecuación es la de dos rectas

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{xy = 0\}.$$

Ya que X es completo y deja a la curva $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ invariante, su restricción a $(\mathbb{C}^*)^2$ define un campo completo. Podemos ahora utilizar la clasificación de campos racionales completos en $(\mathbb{C}^*)^2$ de Erik Andersén para el caso particular de campos polinómicos con singularidades aisladas obteniendo:

Corolario 4.3.1. (Andersén, [And00, Corollary 2]) *Todos los campos vectoriales polinómicos completos en $(\mathbb{C}^*)^2$ son de la forma:*

$$x[n f(x^m y^n) + \alpha] \frac{\partial}{\partial x} - y[m f(x^m y^n) + \beta] \frac{\partial}{\partial y},$$

para $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ y $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

□

Capítulo 5

Campos de vectores holomorfos y condición jacobiana

Tomemos una aplicación $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polinómica, es decir, una aplicación de la forma

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (F_1(z_1, \dots, z_n), \dots, F_n(z_1, \dots, z_n))$$

donde cada F_i es un polinomio de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Designemos por $\det(JF)$ el determinante de la matriz Jacobiana de F

$$JF = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si F es invertible, $\det(JF)$ es una función polinómica que nunca se anula y, por tanto, constante. Podemos preguntarnos si el recíproco de este hecho se verifica.

Pregunta 3. ¿Una aplicación $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polinómica tal que $\det(JF) \in \mathbb{C}^*$ es invertible?

Cuando n es igual a uno es conocido (y elemental) que la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Sin embargo, para n mayor que dos, se desconoce si todavía sigue siéndolo. Esta sencilla pregunta ha dado lugar a la famosa *Conjetura Jacobiana*, que recientemente aparece como problema número 16 de una lista elaborada por S. Smale [Sma00] con los 18 problemas o retos matemáticos más importantes aún sin resolver.

Conjetura Jacobiana: *Si $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica tal que $\det(JF) \in \mathbb{C}^*$, entonces F es invertible (es decir, F tiene una inversa que también es polinómica).*

La Conjetura Jacobiana aparece por primera vez formulada como pregunta en la literatura matemática en el trabajo de O. H. Keller [Kel39] para polinomios en dos

variables con coeficientes enteros. Desde entonces, muchos matemáticos han intentado probarla (sin éxito), relacionando este problema con otras partes de las matemáticas como puede verse en [BCW82] y [vdE00]. Nuestro propósito en este capítulo será dar una reformulación de este famoso problema y destacar la conexión que hay entre la Conjetura Jacobiana y los campos completos.

Para realizar nuestra caracterización de la Conjetura Jacobiana recordamos el siguiente resultado:

Teorema 5.0.2. (Białynicki-Birula, Rosenlicht, [BBR62]) *Si $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica inyectiva, entonces F es sobreyectiva y su inversa también es polinómica (es decir, F es un automorfismo polinómico).*

Por tanto, la Conjetura Jacobiana es equivalente a: “si $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica con $\det(JF) \in \mathbb{C}^*$, F es inyectiva”.

Campos vectoriales y Conjetura Jacobiana. Nuestro objetivo ahora es estudiar la Conjetura Jacobiana en términos de campos de vectores. De ahora en adelante, $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ será una aplicación polinómica que satisface la *condición jacobiana*, es decir, con $\det(JF) \in \mathbb{C}^*$. Siguiendo la idea de P. Nousiainen y M. E. Sweedler (ver [NS83]), podemos asociar siempre a una tal F la n -upla de campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^n , que designaremos por $\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}$, siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial F_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial F_n} \end{pmatrix} := ((JF)^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Puesto que, por definición, cada campo $\frac{\partial}{\partial F_i}$ es la i -ésima columna de $(JF)^{-1}$, se verifica que

$$DF_j \left(\frac{\partial}{\partial F_i} \right) = DF_j \cdot \frac{\partial}{\partial F_i} = \delta_{ij}. \quad (5.2)$$

Observación 5.0.1. De (5.2) deducimos directamente que cada campo $\frac{\partial}{\partial F_i}$ es no singular y tiene por trayectorias las curvas

$$L_i = \bigcap_{j \neq i} \{F_j = \lambda_j\}, \quad \text{con } \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

Proposición 5.0.1. (Nousiainen-Sweedler, [NS83]) *Los campos $\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}$ forman una base sobre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ del espacio $\mathfrak{N}_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$ de campos de vectores polinómicos en \mathbb{C}^n que es conmutativa, es decir, tal que $[\frac{\partial}{\partial F_i}, \frac{\partial}{\partial F_j}] = 0$, para todo i, j .*

De hecho, las propiedades de la proposición 5.0.1 caracterizan las n -uplas de campos $(\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n})$ que provienen de una aplicación polinómica F verificando la condición jacobiana.

Proposición 5.0.2. (Nowicki, [Now86]) Si los campos X_1, \dots, X_n forman una base sobre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ del espacio $\mathfrak{N}_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$ de campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^n que es conmutativa, existe una aplicación polinómica $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ satisfaciendo la condición jacobiana tal que $X_i = \frac{\partial}{\partial F_i}$ para todo i .

Campos vectoriales completos y condición Jacobiana. Destaquemos que, según (5.2), cada hoja L_i está equipada con una 1-forma holomorfa que vale uno a lo largo de $\frac{\partial}{\partial F_i}$, es decir, tal que

$$DF_i|_{L_i} \left(\frac{\partial}{\partial F_i} \right) \equiv 1. \quad (5.3)$$

Una tal 1-forma se llama *diferencial de tiempos*. Cuando $\frac{\partial}{\partial F_i}$ es completo coincide con la diferencial de tiempos definida localmente por su flujo, es decir, la integral de $DF_i|_{L_i}$ a lo largo de un camino $\gamma : I \rightarrow L_i$ contenido en una carta local de L_i representa el tiempo complejo (salvo períodos) requerido por el flujo de $\frac{\partial}{\partial F_i}$ para ir de un extremo a otro de γ (ver [Reb96]).

Teorema 5.0.3. Si $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación polinómica que verifica la condición jacobiana, F es inyectiva si y sólo si los campos $\frac{\partial}{\partial F_i}$ definidos como en (5.1) son completos.

Demostración. Supongamos primero que F es inyectiva. Sabemos entonces que F es biyectiva y, por tanto, un automorfismo de \mathbb{C}^n (ver teorema 5.0.2). Si para cada i escribimos $F_i(z_1, \dots, z_n) = w_i$, como los campos coordenados $\frac{\partial}{\partial w_i}$ son completos, los $\frac{\partial}{\partial F_i} = F^* \frac{\partial}{\partial w_i}$ también lo son. Estudiemos el recíproco. Supongamos que los campos $\frac{\partial}{\partial F_i}$ son completos. Si F no es inyectiva, existen dos puntos $p, q \in \mathbb{C}^n$ distintos tales que $F(p) = F(q) = \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Por tanto, hay n hojas

$$L_i = \bigcap_{j \neq i} \{F_j = \alpha_j\},$$

una de cada campo $\frac{\partial}{\partial F_i}$, que intersecan en al menos dos puntos p y q distintos.

Fijemos una trayectoria L_i y consideremos la solución entera $\varphi_z : \mathbb{C} \rightarrow L_i$ que la parametriza para un $z \in L_i$ ya que $\frac{\partial}{\partial F_i}$ es completo. Sean t_0 y t_1 los valores de \mathbb{C} que satisfacen $\varphi_z(t_0) = p$ y $\varphi_z(t_1) = q$. Si tomamos un camino $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable e inyectivo en \mathbb{C} que conecta t_0 con t_1 , es decir, tal que $\gamma(0) = t_0$, $\gamma(1) = t_1$ y $\gamma'(s) \neq 0$, levantando la 1-forma $DF_i|_{L_i}$ por φ_z , obtenemos la 1-forma holomorfa en \mathbb{C} definida por

$$\varphi_z^*(DF_i|_{L_i}) = D(F_i \circ \varphi_z)(t).$$

Al ser $\varphi_z^*(DF_i|_{L_i})$ exacta, un cálculo obvio prueba que su integral a lo largo de γ es

igual a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \varphi_z^*(DF_i|_{L_i}) &= \int_{\gamma} D(F_i \circ \varphi_z)(t) dt \\
&= \int_0^1 D(F_i \circ \varphi_z)(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \\
&= \int_0^1 (F \circ \varphi_z \circ \gamma)'(s) ds \\
&= F(q) - F(p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pero, por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \varphi_z^*(DF_i|_{L_i}) &= \int_{\gamma} DF_i(\varphi_z(t)) \cdot \varphi'_z(t) dt \\
&= \int_0^1 DF_i(\varphi_z(\gamma(s))) \cdot \varphi'_z(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \\
&= \int_0^1 \left\{ DF_i \left(\frac{\partial}{\partial F_i} \right)_{|(\varphi_z \circ \gamma)(s)} \right\} \cdot \gamma'(s) ds \\
&= \int_0^1 \gamma'(s) ds \quad (\text{por (5.3)}) \\
&= q - p \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Como (5.4) y (5.5) son contradictorias, necesariamente F es inyectiva. \square

Reformulación de la Conjetura Jacobiana. El teorema 5.0.3 nos permite dar una versión equivalente de la Conjetura Jacobiana.

Proposición 5.0.3. *La Conjetura Jacobiana es verdadera si y sólo si cada base X_1, \dots, X_n sobre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ del espacio $\aleph_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$ de campos vectoriales polinómicos en \mathbb{C}^n que es conmutativa, es completa, es decir, tal que X_i es completo para todo i .*

Demostración. Supongamos que la Conjetura Jacobiana es verdadera. Si X_1, \dots, X_n es una base conmutativa de $\aleph_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$, sabemos que existe una aplicación polinómica $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ que verifica la condición jacobiana y tal que $X_i = \frac{\partial}{\partial F_i}$ (ver proposición 5.0.2). Por tanto, F es un automorfismo polinómico y por el teorema 5.0.3 la base X_1, \dots, X_n es completa.

Recíprocamente, si cada base conmutativa X_1, \dots, X_n sobre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ del espacio $\aleph_{\text{pol}}(\mathbb{C}^n)$ es completa, cualquier aplicación polinómica $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ satisfaciendo la condición jacobiana, que sabemos define la base conmutativa de campos $\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}$ (ver en proposición 5.0.1), cumple que los campos $\frac{\partial}{\partial F_i}$ son completos. \square

Bibliografía

- [AM75] S. Abhyankar and T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.
- [AL92] E. Andersén and L. Lempert, *On the group of holomorphic automorphisms of \mathbb{C}^n* , Invent. Math. **110** (1992), no. 2, 371–388.
- [And90] E. Andersén, *Volume preserving automorphisms of \mathbb{C}^n* , Complex variables Theory appl. **14** (1990), no. 1-4, 223–235.
- [And00] E. Andersén, *Complete vector fields on $(\mathbb{C}^*)^n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 4, 1079–1085.
- [AR99] P. Ahern and J.-P. Rosay, *On Rebelo’s theorem on singularities of holomorphic flows*, Ark. Mat. **37** (1999), no. 2, 211–220.
- [Arn80] V.-I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, “Mir”, Moscow, 1980.
- [BBR62] A. Białyński-Birula and M. Rosenlicht, *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 200–203.
- [BCW82] H. Bass, Edwin H. C., and D. Wright, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 2, 287–330.
- [BF95] G. Buzzard and J.-E. Fornæss, *Complete holomorphic vector fields and time-1 maps*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), no. 4, 1175–1182.
- [Bor87] M. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. **20** (1887), 357–396.
- [Bro83] S. A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces*, Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 167–178.

- [Bru98] M. Brunella, *Sur les courbes intégrales propres des champs de vecteurs polynomiaux*, *Topology* **37** (1998), no. 6, 1229–1246.
- [Bru04] ———, *Complete polynomial vector fields on the complex plane*, *Topology* **43** (2004), no. 2, 433–445.
- [Bus03] A. Bustinduy, *Zeroes of complete polynomial vector fields*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 12, 3767–3775.
- [Bus] ———, *On the entire solutions of a polynomial vector field on \mathbb{C}^2* , aparecerá en *Indiana Univ. Math. J.*
- [CLN85] C. Camacho and A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
- [CNS84] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 1, 143–174.
- [CS82] C. Camacho and P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 3, 579–595.
- [CS] D. Cerveau and B. Scardua, *Complete polynomial vector fields in two complex variables*, Preprint Univ. Rennes I, May 2002.
- [FaKr80] H.-M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [F96] J.-E. Fornæss, *Dynamics in several complex variables*, Regional Conference Series in Mathematics AMS, 87, 1996.
- [FG94] J.-E. Fornæss and S. Grellier, *Exploding orbits of holomorphic Hamiltonians and of complex contact structures*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **319** (1994), no. 6, 553–557.
- [FG96] ———, *Exploding orbits of Hamiltonian and contact structures*, *Complex analysis and geometry (Trento, 1993)*, Dekker, New York, 1996, pp. 155–171.
- [FG96b] ———, *Exploding orbits of holomorphic structures*, *Math. Z.* **223** (1996), no. 3, 521–533.
- [For95] F. Forstnerič, *Limits of complete holomorphic vector fields*, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 4, 401–414.
- [For96] ———, *Actions of $(\mathbf{R}, +)$ and $(\mathbf{C}, +)$ on complex manifolds*, *Math. Z.* **223** (1996), no. 1, 123–153.

- [ForRo93] F. Forstnerič and J.-P. Rosay, *Approximation of biholomorphic mappings by automorphisms of \mathbb{C}^2* , *Invent. Math.* **112** (1993), no. 2, 323–349.
- [GMOB89] X. Gómez-Mont and L. Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, *Aportaciones Matemáticas no. 3*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1989.
- [Hil76] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1976, Pure and Applied Mathematics.
- [Kel39] O.-H. Keller, *Ganze cremona-transformationen*, *Monatsh. Math. Phys.* **47** (1939), 299–306.
- [Lan87] S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [LMnR00] J.-L. López and J. Muciño Raymundo, *On the problem of deciding whether a holomorphic vector field is complete*, *Complex analysis and related topics* (Cuernavaca, 1996), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 171–195.
- [LNS97] A. Lins Neto and B. Scárdua, *Folheações algébricas complexas*, 21^o Colóquio Brasileiro de Matemática. [21nd Brazilian Mathematics Colloquium], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1997.
- [McQ] M. McQuillan, *Noncommutative mori theory*, Preprint IHES , 2001.
- [MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 4, 469–523.
- [Nis62] T. Nishino, *Sur les ensembles pseudoconcaves*, *J. Math. Kyoto Univ.* **1** (1961/1962), 225–245.
- [Nis68] ———, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. I*, *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), 49–100.
- [Nis69] ———, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. II. Fonctions entières qui se réduisent à celles d’une variable*, *J. Math. Kyoto Univ.* **9** (1969), 221–274.
- [Nis70] ———, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. III. Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières*, *J. Math. Kyoto Univ.* **10** (1970), 245–271.

- [Nis73] ———, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. IV. Types de surfaces premières*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 217–272.
- [Nis75] ———, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. V. Fonctions qui se réduisent aux polynômes*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), no. 3, 527–553.
- [Now86] A. Nowicki, *Commutative bases of derivations in polynomial and power series rings*, J. Pure Appl. Algebra **40** (1986), no. 3, 275–279.
- [NS83] P. Nousiainen and M. E. Sweedler, *Automorphisms of polynomial and power series rings*, J. Pure Appl. Algebra **29** (1983), no. 1, 93–97.
- [Reb96] J.-C. Rebelo, *Singularités des flots holomorphes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), no. 2, 411–428.
- [Reb00] ———, *Réalisation de germes de feuilletages holomorphes par des champs semi-complets en dimension 2*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **9** (2000), no. 4, 735–763.
- [Reb03] ———, *Complete algebraic vector fields on stein surfaces part 1*, J. Geom. Anal. **13** (2003), no. 4.
- [RoRd88] J.-P. Rosay and W. Rudin, *Holomorphic maps from \mathbb{C}^n to \mathbb{C}^n* , Trans. Amer. Math. Soc. **310**(1998), 47–86.
- [Ro99] J.-P. Rosay, *Automorphisms of \mathbb{C}^n , a survey of Andersén-Lempert theory and applications*, Complex geometric analysis in Pohang (1997), Contemp. Math., vol. 222, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 131–145.
- [Rud88] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, McGraw–Hill/Interamericana de España, España, 1988.
- [SaXi95] G. Saari and Z. Xia, *Off to infinity in finite time*, Notices of the AMS **42** (1995), no. 5, 538–546.
- [Sai72] H. Saitō, *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynomes. I*, Osaka J. Math. **9** (1972), 293–332.
- [Sei68] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$* , Amer. J. Math. **90** (1968), 248–269.
- [Sma00] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 271–294.

- [Smi97] J. Smillie, *Complex dynamics in several variables*, Flavors of geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, With notes by Gregory T. Buzzard, pp. 117–150.
- [Ste58] K. Stein, *Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen*, Math. Ann. **136** (1958), 1–8.
- [Suz74] M. Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2* , J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 241–257.
- [Suz77] ———, *Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 4, 517–546.
- [Suz78a] ———, *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes*, Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977), Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer, Berlin, 1978, pp. 53–79, 394. MR 80h:57038
- [Suz78b] ———, *Sur les opérations holomorphes de \mathbb{C} et de \mathbb{C}^* sur un espace de Stein*, Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977), Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer, Berlin, 1978, pp. 80–88, 394.
- [Tsu59] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1959.
- [vdE00] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [Za01] S. Zakeri, *Dynamics of singular holomorphic foliations on the complex projective plane*, Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology in Stony Brook (1998), Contemp. Math., vol. 269, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 179–233.
- [ZL83] M.-G. Zaïdenberg and V. Ya. Lin, *An irreducible, simply connected algebraic curve in \mathbb{C}^2 is equivalent to a quasihomogeneous curve*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **271** (1983), no. 5, 1048–1052.