

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra



**ESPACIOS MULTISECANTES A CURVAS PROYECTIVAS
LISAS**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Sonia González Pascual

Bajo la dirección de la doctora

Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro

Madrid, 2004

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Álgebra



Espacios Multisecantes a Curvas Proyectivas Lisas

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por **Sonia González Pascual**

Dirigida por **Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro**

Mayo de 2004

A mi familia

Quisiera dar las gracias a todas las personas que, de una forma u otra, han contribuido a mi formación académica y a que este trabajo se realice.

Agradezco muy especialmente a Raquel Mallavibarrena, por haberme dirigido este trabajo, así como por sus enseñanzas, orientaciones y su ayuda y su paciencia. Sin ella este trabajo no habría sido posible.

A Roberto Muñoz que me propuso el problema de las curvas osculantemente degeneradas desarrollado en el tercer capítulo. Y su ayuda y amistad, junto a Jesús Escribano, cuando empezaba mi doctorado.

A todos los miembros del Departamento de Álgebra, por haber contribuido a mi formación y por su ayuda y apoyo de todos estos años.

A José Ignacio Tello por su apoyo y amistad y por contribuir en la mejora del aspecto de este trabajo.

A mis compañeros de trabajo, en especial a Amelia y a José Ignacio Farrán que me mostró el programa DIA, con el que hice los dibujos que aparecen en este trabajo.

Finalmente doy las gracias a mi familia y amigos por su apoyo.

Índice general

Introducción	III
1. Resultados previos	1
1.1. Curvas	1
1.2. Definición de espacio osculador para curvas	4
1.3. Hiperosculación	6
2. Fórmulas de espacios multiseccantes para curvas	11
2.1. Introducción	11
2.2. Esquemas de Hilbert de puntos	13
2.3. Método de las bases de los grupos de Chow	16
2.4. Planos osculadores que vuelven a cortar	17
2.5. El método funcional	26
2.6. Espacios osculadores que vuelven a cortar	28
2.7. Fórmulas multiseccantes para curvas en \mathbb{P}^4	33
2.7.1. Planos sextiseccantes	34
2.7.2. Planos quintiseccantes	38
2.7.3. Planos cuatriseccantes	41
2.7.4. Otros	46
2.8. Fórmula cuatriseccante en \mathbb{P}^5 y \mathbb{P}^6	46
2.8.1. Planos cuatriseccantes en \mathbb{P}^5	46
2.8.2. Planos cuatriseccantes en \mathbb{P}^6	48

3. Validez de las fórmulas	51
3.1. Introducción	51
3.2. Curvas para las cuales las fórmulas dan cero o negativo	52
3.3. Curvas osculantemente degeneradas	56
3.3.1. Curvas de \mathbb{P}^{m+1} no m -osculantemente degeneradas	58
3.3.2. Degeneración 2-osculante en curvas de \mathbb{P}^N , $N \geq 4$	59
3.4. Cuatriscantes a una curva de \mathbb{P}^3	64
3.4.1. Sobre superficies regladas	64
3.4.2. Superficies de grado 2 y 3	65
3.4.3. Validez de la fórmula de rectas cuatriscantes	66
3.5. Rectas bitangentes a curvas de \mathbb{P}^3	75
3.5.1. Curvas de grado menor que siete	75
3.5.2. Curvas de grado siete	79
4. Puntos de inflexión	83
4.1. Introducción	83
4.2. Fibrados lineales de orden superior	85
4.3. Curvas sin puntos de inflexión	88
Bibliografía	93

Introducción

Esta memoria trata problemas clásicos de Geometría Algebraica sobre curvas proyectivas complejas lisas. Fundamentalmente nos ocuparemos de la obtención de fórmulas enumerativas de espacios lineales relacionados con la curva y el estudio del campo de validez de algunas de estas fórmulas. El objetivo es avanzar en el estudio de la geometría “especial” que pueden presentar las curvas proyectivas en función de sus invariantes, grado y género, y que tienen que ver con las intersecciones de la curva con distintos espacios lineales. Para ello utilizamos técnicas ya conocidas en el caso de rectas multiseccantes y las extendemos a planos y en algunos casos a espacios lineales cualesquiera.

Un problema clásico es obtener el número de rectas k -secantes a una variedad proyectiva. Para curvas existen cuatro fórmulas clásicas (ver [LB1]):

1. Rectas cuatriseccantes a una curva en \mathbb{P}^3 (Cayley 1863)

$$q(C) = \frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - \frac{1}{2}g(n-7) + 13 - g$$

2. Rectas triseccantes a una curva en \mathbb{P}^4 (Berzolari 1895)

$$\Theta(C) = \binom{n-2}{3} - g(n-4)$$

3. Rectas tangentes a una curva en \mathbb{P}^3 que vuelven a cortar a la curva (Salmon 1868)

$$t(C) = 2((n-2)(n-3) + g(n-6))$$

4. Rectas triseccantes a una curva en \mathbb{P}^3 que cortan a una recta fija (Cayley 1863)

$$k(C) = 2 \binom{n-1}{3} - g \binom{n-2}{1}$$

En esta memoria se obtienen fórmulas similares para planos k -secantes y en algunos casos se generalizan dichas fórmulas para m -espacios cualesquiera.

Muchos de los trabajos clásicos sobre geometría enumerativa se basaban en el *método funcional*, debido a Cayley ([Ca]) y utilizado por Berzolari y Severi entre otros. Se trata de suponer que la fórmula buscada depende sólo del grado y el género (o el número de puntos dobles aparentes) de la curva mediante un polinomio. Sin embargo este método no es justificado con rigor hasta el trabajo de Vassallo ([Va], publicado en 1994). Este trabajo nos proporciona una potente herramienta para el objetivo de esta memoria.

Otro de los inconvenientes que se presentan en diversos métodos de obtención de fórmulas enumerativas es el campo de validez, es decir, para qué curvas es válida la fórmula. Tanto los autores más antiguos como los trabajos más recientes plantean este problema. En algunos de estos trabajos más recientes se demuestran fórmulas enumerativas con otros métodos. Por ejemplo I. G. MacDonald (ver [Mc]) usa reiteradamente la relación de equivalencia de Severi para los puntos unidos de una correspondencia algebraica con valencia. De Jonquières (ver [ACGH]) estudia el caso de puntos con multiplicidades (Fórmula de De Jonquières). De los trabajos de autores más actuales también se pueden deducir fórmulas enumerativas, como en el caso de Tikhomirov que usa fibrados estándar en el esquema de Hilbert de puntos de una superficie para obtener fórmulas para superficies (ver [Ti]).

Le Barz demuestra en [LB1] y [LB2] la validez de las cuatro fórmulas clásicas anteriores para curvas lisas cualesquiera (siempre que el número de soluciones sea finito), por el método de las bases de los grupos de Chow de los esquemas de Hilbert de puntos de ciertas variedades proyectivas. Este método ha inspirado el desarrollo de esta memoria, si bien utilizaremos preferentemente el método funcional, como se ha señalado anteriormente, por su mayor eficacia en estos casos.

Otro objetivo es saber cuándo el número que obtenemos de la fórmula es de hecho el número buscado y no ocurre que hay infinitos espacios lineales que verifican la condición. En esta línea destacamos el trabajo de H. Kaji [Ka], del cual se puede deducir para qué curvas es válida la fórmula del número de rectas tangentes a una curva de \mathbb{P}^3 que vuelven a cortar a la curva en otro punto. Uno de los resultados importantes de nuestro trabajo es la generalización de su resultado para m -espacios osculadores a curvas de \mathbb{P}^{m+2} (ver [GM]). Estudiamos también, a efectos de la validez, el caso de la fórmula de rectas cuatriscantes a una curva de \mathbb{P}^3 .

También nos interesamos por saber cuándo el número de espacios k -secantes con la condición adecuada es cero en las distintas fórmulas. Y por las posibles rectas bitangentes a una curva de grado menor que 8. Para ello, nos basamos en el estudio realizado por R. H. Dye en [Dy] y mejoramos su resultado.

En el **primer capítulo** resumimos los resultados conocidos que consideramos más importantes en la clasificación de las curvas de \mathbb{P}^3 y que necesitamos en los capítulos siguientes. Definimos los espacios osculadores y el equivalente, para estos espacios, del concepto de punto singular en el caso de la tangencia.

En el **segundo capítulo** se obtienen fórmulas enumerativas para planos k -secantes a curvas en diversos espacios proyectivos, así como una generalización de la fórmula para el número de rectas tangentes a una curva que vuelven a cortarla. Para ello mostramos dos posibles métodos aunque ambos se basan en el esquema de Hilbert de puntos. Utilizamos además la variedad de puntos coplanarios, también definimos y utilizamos su generalización:

$$I_s^k(\mathbb{P}^N) = \{(\pi, \eta) \in \mathbb{G}(s, N) \times \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N, \eta \subset \pi\},$$

la variedad de incidencia de k -uplas contenidas en un s -espacio de \mathbb{P}^N , donde $\mathbb{G}(s, N)$ es la variedad Grassmanniana de s -espacios en \mathbb{P}^N .

El principal resultado que demostramos es el siguiente teorema (ver [GM]):

Teorema. Sea C una curva lisa de \mathbb{P}^{m+2} de grado n y con h puntos dobles aparentes, entonces el número de m -espacios osculadores de C que vuelven a cortar a la curva, para todo entero $m \geq 0$ es:

$$O_m(C) = \binom{m+1}{2} [n(n^2 - (m+6)n + (3m+7)) - h(m+1)(mn - (m+1)(m+2))]$$

y si C es irreducible de género g :

$$O_m(C) = (m+1)((n - (m+1)(n - (m+2))) + g(m \cdot n - (m+1)(m+2)))$$

Obtenemos además las siguientes fórmulas, utilizando el método de Vassallo y encontrando los ejemplos necesarios en cada caso:

- Número de planos que cortan a una curva $C \subset \mathbb{P}^4$ en 6 puntos.
- Número de planos que cortan a una curva $C \subset \mathbb{P}^4$ en 5 puntos y que cortan a una recta fija en un punto.
- Número de planos que cortan a una curva $C \subset \mathbb{P}^4$ en 4 puntos y que cortan a un plano fijo en una recta.
- Número de planos bitangentes a una curva $C \subset \mathbb{P}^4$.

- Número de planos que cortan a una curva $C \subset \mathbb{P}^5$ en 4 puntos y que cortan a un plano fijo en un punto.
- Número de planos que cortan a una curva $C \subset \mathbb{P}^6$ en 4 puntos.

En el **tercer capítulo** se estudia el campo de validez de las fórmulas enumerativas, es decir, para qué curvas la fórmula es válida, o lo que es lo mismo, para qué curvas el número de espacios multiseccantes buscado es finito.

Generalizamos el resultado de Kaji para rectas tangentes al caso de espacios osculadores (ver [GM]). Para ello extendemos primero su definición de curva tangencialmente degenerada.

Definición. Una curva C en \mathbb{P}^N es m -osculantemente degenerada si, para un punto general P de C , existe otro punto Q en C que pertenece al espacio osculador de orden m de C en P .

Además probamos los siguientes resultados:

Teorema. Sea C curva de grado n en \mathbb{P}^{m+1} . Son equivalentes:

- (a) C tiene grado menor o igual que $m + 1$.
- (b) C no es m -osculantemente degenerada.

Teorema. Sea C curva en \mathbb{P}^N , con $N \geq 4$. Si C es 2-osculantemente degenerada, entonces C está contenida en un \mathbb{P}^3 .

Conjeturamos además que esto es cierto para cualquier m , es decir, que si $N \geq 4$ y C es m -osculantemente degenerada, entonces C está contenida en un \mathbb{P}^{m+1} . Ya que es posible demostrarlo para cualquier m concreto. Pero la misma prueba para un m general no es posible, por las limitaciones que presenta el programa Maple en el cálculo de determinantes de orden indeterminado.

También estudiamos la validez de la fórmula del número de rectas cuatriseccantes de \mathbb{P}^3 para curvas de grado menor que 9, y obtenemos los resultados:

Teorema. El número de rectas cuatriseccantes a una curva de \mathbb{P}^3 de grado menor que 8 es infinito si y sólo si la curva está en \mathbb{P}^2 o en una superficie cuádrlica y es de la forma (a, b) siendo o a o b mayor que 3.

Proposición. Para curvas de grado 8, existe una única curva con infinitas cuatriseccantes, no contenida en una cuádrlica. Tiene género 5 y es la curva doble de una superficie reglada de grado 6 y género 2.

De este estudio obtenemos consecuencias geométricas interesantes. Así como el caso en que dichas cuatriseccantes son bitangentes. R. H. Dye en [Dy] comienza

un estudio de curvas para las cuales el número de rectas cuatrisecantes que son bitangentes es el máximo posible. Retomamos en el tercer capítulo este estudio y lo ampliamos hasta grado 7. El interés por estas curvas se debe a que sólo curvas muy especiales tienen rectas bitangentes, luego más especiales serán si todas sus cuatrisecantes, siendo un número finito, lo son.

Para algunas fórmulas se estudia cuándo el número indicado por la fórmula es efectivamente cero. Y se estudia, también el caso en que la fórmula tenga un resultado negativo ya que serán curvas para las que el número buscado es infinito (ya que si no se obtendría un número finito positivo en la fórmula).

En el **cuarto capítulo** se hace un estudio análogo al de existencia de curvas lisas en \mathbb{P}^3 dado un grado y un género para curvas sin puntos singulares de orden 2, es decir, se estudia para qué grados y géneros existen curvas sin puntos de inflexión. Se obtienen dichas curvas para grado menor que 7.

Se describe, también la relación entre los fibrados que dan la inmersión de curvas sin puntos de inflexión (k -regulares) y otros fibrados sobre curvas como k - muy amplios, k -jet amplios y k -generados. Estos otros conceptos están a su vez relacionados también con la no existencia de espacios $(k + 1)$ -secantes.

En los distintos capítulos, se dan ideas sobre perspectivas y continuaciones naturales del trabajo realizado. Así por ejemplo, se podrían buscar otras generalizaciones para las fórmulas del capítulo 2. También, en el capítulo 3, queda abierto el problema de la validez de muchas de las fórmulas enumerativas. En particular, la existencia, dado un grado y género, de curvas con infinitas rectas cuatrisecantes para grado mayor que 8. Y de entre las rectas cuatrisecantes, saber cuantas pueden ser bitangentes para grado mayor que 7. Finalmente, en el último capítulo, se comienza una investigación sobre los grados y géneros para los que existen curvas sin puntos de inflexión.

Capítulo 1

Resultados previos

1.1. Curvas

En este trabajo seguiremos la nomenclatura y la terminología usada en el libro *Algebraic Geometry* de R. Hartshorne ([H2]), trabajaremos así con esquemas, haces sobre ellos y fibrados (haces localmente libres) sobre el cuerpo de los números complejos. Utilizaremos, en general, la palabra *curva* para designar a un esquema completo, reducido, liso de dimensión uno sobre el cuerpo de los números complejos. La irreducibilidad se especificará en cada caso. Además toda curva se puede sumergir en un espacio proyectivo, es decir, que toda curva es proyectiva (ver pg 105 de [H2]).

Una *superficie* será un esquema reducido de dimensión 2 y en general una *variedad* será un esquema reducido de cualquier dimensión. La notación será fundamentalmente la que aparece en [H2].

Vemos a continuación algunos resultados sobre curvas que pueden ser encontrados en [H2] (pg 294-355).

Teorema 1.1.1 Teorema de Riemann-Roch

Sea D un divisor de una curva C de género g . Entonces

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

donde K es el divisor canónico de C , $\deg D$ representa el grado de D y

$$l(D) = \dim H^0(C, \mathcal{L}(D)),$$

análogamente $l(K - D) = \dim H^0(C, \mathcal{L}(K - D))$.

Si denotamos ω_C el haz canónico sobre C , se tiene que

$$\mathcal{L}(K - D) = \omega_C \otimes \mathcal{L}(D)^\vee$$

(siendo $\mathcal{L}(D)^\vee$ en dual de $\mathcal{L}(D)$) y por la dualidad de Serre

$$l(K - D) = \dim H^1(C, \mathcal{L}(D)).$$

Decimos que D es *especial* si $l(K - D) > 0$.

Un haz invertible \mathcal{L} sobre una curva C es muy amplio si es isomorfo a $\mathcal{O}_C(1)$ para alguna inmersión cerrada de C en un espacio proyectivo. Un divisor D es muy amplio si $\mathcal{L}(D)$ lo es. Si un divisor D sobre una curva C es muy amplio, entonces el sistema lineal completo $|D|$ determina una inmersión cerrada de C en \mathbb{P}^N y el grado de la imagen de C es el grado de D .

Un divisor D en una curva C de género g si tiene grado mayor o igual que $2g$, entonces $|D|$ no tiene puntos base y si el grado es mayor o igual que $2g + 1$, entonces D es muy amplio (no es el mejor resultado posible). Si $g = 0$, D es muy amplio si su grado es positivo. ([H2], pg. 308)

Para toda curva C existe un morfismo $C \rightarrow \mathbb{P}^3$ que es una inmersión cerrada (proyectando adecuadamente). Además toda curva es brracionalmente equivalente a una curva de \mathbb{P}^2 con a lo sumo nodos como singularidades. Esto se consigue proyectando desde un punto que no esté en la curva, ni en ninguna recta tangente, ni multisecante, ni en ninguna secante coplanaria con una tangente y ha de estar en un número finito de secantes. ([H2], pg. 310)

La proyección anterior existe, ya que si una curva está en \mathbb{P}^3 y toda recta que corta a la curva en dos puntos corta en más o para dos puntos cualesquiera de la curva sus rectas tangentes son coplanarias, entonces es una recta o la cónica si estamos sobre un cuerpo de característica 2 (ver [H2], pg. 313).

Dada una curva $C \rightarrow \mathbb{P}^N$ el grado de la curva es el número de puntos en que un hiperplano corta a la curva. Otro invariante de la curva es el número de puntos dobles aparentes, es decir, el número de puntos dobles de una proyección genérica de la curva sobre un plano. Si la curva está en \mathbb{P}^3 es el número de rectas secantes a la curva que pasan por un punto general. Este número se puede obtener para curvas irreducibles de grado n y género g como:

$$h = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - g.$$

Para curvas reducibles se puede calcular. Si consta de dos componentes irreducibles de invariantes (n_1, h_1) y (n_2, h_2) sus invariantes son: $(n_1 + n_2, h_1 + h_2 + n_1 n_2)$.

Para todo $n \geq 1$ existe una curva lisa plana de grado n y su género es

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Existe una curva de grado n y género g en \mathbb{P}^3 , cuya sección hiperplana D no es especial, si y sólo si o bien

- $g = 0$ y $n \geq 1$,
- $g = 1$ y $n \geq 3$ o bien
- $g \geq 2$ y $n \geq g + 3$.

Si C es una curva de \mathbb{P}^3 no plana cuya sección hiperplana D es especial, entonces $n \geq 6$ y $g \geq \frac{1}{2}n + 1$ y la única de grado 6 es la curva canónica de género 4.

Teorema 1.1.2 Cota de Castelnuovo

Sea C una curva de grado n y género g en \mathbb{P}^3 , no contenida en un plano. Entonces $n \geq 3$ y

$$g \leq \begin{cases} \frac{1}{4}n^2 - n + 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{4}(n^2 - 1) - n + 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Además, la igualdad se alcanza para todo $n \geq 3$ y toda curva para la cual se cumple la igualdad está contenida en una superficie cuádrica.

Todos estos resultados ayudan a la clasificación de curvas de \mathbb{P}^3 , aunque no son suficientes. En [H2] se prueba la existencia de curvas de grado n y género g que cumplen la desigualdad de Castelnuovo, hasta grado 7. Además se dice que para grado 9 y género 11 no existe curva en \mathbb{P}^3 a pesar de cumplir la desigualdad de Castelnuovo. La clasificación se completa, por ejemplo, en [H3] donde se da además una cota para el máximo género que puede tener una curva de grado n no contenida en una cuádrica:

$$G(n, 3) = \frac{1}{6}n(n-3) + 1 - \epsilon$$

donde ϵ es 0 ó $2/3$ según si n es congruente con 0 módulo 3 o no. En [H3] se resume la existencia de curvas con el siguiente teorema:

Teorema 1.1.3 Sea C una curva irreducible lisa de grado n y género g en \mathbb{P}^3 .

(a) Si C está contenida en un plano, entonces $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Para cada $n \geq 1$ existe dicha curva.

(b) Si C está contenida en una superficie cuádrlica irreducible, entonces existen $a, b \geq 0$ tal que $n = a + b$ y $g = (a-1)(b-1)$. Para cada $a, b > 0$ existen estas curvas.

(c) Si C no está contenida en un plano o en una superficie cuádrlica, entonces

$$0 \leq g \leq \frac{1}{6}n(n-3) + 1.$$

(d) Para todo $n > 0$ y g que satisfagan la desigualdad de (c), existe una curva irreducible lisa de grado n y género g en \mathbb{P}^3 .

Otros resultados interesantes sobre curvas que se pueden encontrar en [H3] son:

Proposición 1.1.4 Si $n > 0$ y g satisface:

$$n^{3/2}/\sqrt{3} - n + 1 < g \leq \frac{1}{6}n(n-3) + 1,$$

existe una curva irreducible lisa de grado n y género g en una superficie cúbica lisa en \mathbb{P}^3 .

Proposición 1.1.5 Si $n > 0$ y g satisface:

$$0 \leq g \leq \frac{1}{8}(n-1)^2,$$

existe una curva irreducible lisa de grado n y género g en una superficie cuártica (singular) en \mathbb{P}^3 .

Además el Teorema de Mori nos dice que existe en una superficie cuártica lisa si $g = \frac{1}{8}n^2 + 1$ o $g < \frac{1}{8}n^2$ y $(n, g) \neq (5, 3)$.

Para la existencia de curvas de $\mathbb{P}^4, \mathbb{P}^5, \dots$ se puede consultar el trabajo de C. Ciliberto [Ci].

1.2. Definición de espacio osculador para curvas

En esta sección resumiremos conceptos y resultados sobre espacios osculadores y que pueden ser encontrados en el artículo *Numerical Characters of a Curve in Projective N-Space* de R. Piene ([Pi2]). Utilizaremos notaciones análogas a las que Piene utiliza en dicho artículo.

Definición 1.2.1 Sea $C \subset \mathbb{P}^N$ una curva y $P \in C$ un punto. El espacio osculador m -ésimo (o m -espacio osculador) de C en P es el subespacio lineal de dimensión m de \mathbb{P}^N con mayor orden de contacto con C en P . Lo denotamos $Osc_C^m(P)$.

Si $t \in \mathcal{O}_{C,P}$ es un parámetro de uniformización, existe una parametrización de C en P :

$$x_i = a_i t^{l_i+i} + (\text{términos de mayor orden}),$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, con $0 = l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_N$, y $a_i \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces, $Osc_C^m(P)$ es el espacio definido por $X_{m+1} = X_{m+2} = \dots = X_N = 0$ y tiene orden de contacto $(l_{m+1} + m + 1)$ con C en P .

Obsérvese que para $m = 1$, $Osc_C^1(P) = T_P(C)$ es la recta tangente a C en P , además

$$T_P(C) \subseteq Osc_C^2(P) \subseteq Osc_C^3(P) \subseteq \dots \subseteq Osc_C^m(P) \dots$$

Sea C curva de \mathbb{P}^N , $\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ inmersión cerrada, $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$. Los espacios osculadores son las fibras proyectivas de un $(m+1)$ -fibrado en C , al que se le llama fibrado osculador de orden m , $Osc^m C$.

Sea $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^m(\mathcal{O}_C(1))$ el fibrado de partes principales (o jets) de orden m de $\mathcal{O}_C(1) = \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ (ver [Kl], capítulo 4). Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con sucesiones exactas y las aplicaciones verticales sobreyectivas por ser ϕ no ramificada:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \phi^* \omega_{\mathbb{P}^N}^1 \otimes \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & V_C = V \otimes \mathcal{O}_C & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \omega_C^1 \otimes \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & \mathcal{P}^1 & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) \rightarrow 0 \end{array}$$

Además la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow Sym^m \omega_C^1(1) \rightarrow \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{P}^{m-1} \rightarrow 0$$

Denotaremos $Osc^m C$ al fibrado proyectivo sobre C asociado a \mathcal{P}^m , con proyecciones

$$p^m : Osc^m C \rightarrow C,$$

para $m = 1$ denotamos TC . Sea C_m la sección de p^m asociada a la aplicación sobre $\mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{O}_C(1)$.

Llamamos q^m a la composición de la proyección $\mathbb{P}^N \times C \rightarrow \mathbb{P}^N$ con la inmersión cerrada $Osc^m C \rightarrow \mathbb{P}^N \times C$ y X^m a la imagen por q^m .

Intuitivamente, C_m es el conjunto de puntos de osculación de orden m de C en $Osc^m C$ y X^m es la unión de los espacios osculadores de orden m de C .

TC es el fibrado proyectivo tangente y X^1 la superficie tangencial de C . $Osc^m C$ es el fibrado proyectivo osculante de orden m y X^m la $(m + 1)$ -fold osculante o m -ésima desarrollable oscultriz de C .

Definición 1.2.2 *Dada una curva en \mathbb{P}^3 , se define su rango por el número de tangentes que cortan una recta dada. El número de planos osculadores que pasan por un punto dado es llamada la clase de la curva. En general, para una curva $C \subset \mathbb{P}^N$ se define su m -rango como el número r_m de m -espacios osculadores suyos que cortan a un $(N - m - 1)$ -espacio general.*

Se demuestra en [Pi2] que este número, r_m , es además el grado del fibrado osculador de orden m y el grado de la m -ésima desarrollable oscultriz de C . Observese que r_0 es el grado de la curva. En general no es fácil calcular el m -rango de una curva, aunque en la sección siguiente veremos que se conoce para algunos ejemplos sencillos.

1.3. Hiperosculación

Al igual que al estudiar la tangencia vemos la existencia de puntos singulares, al estudiar los espacios osculadores existen también puntos especiales, generalizamos pues aquí el concepto de punto singular. Las siguientes definiciones y resultados pueden ser encontrados en su mayoría en [H2] o [Pi2], si no, se dará argumentación o se indicará la referencia correspondiente.

Definición 1.3.1 *Dada $C \subset \mathbb{P}^N$ curva, diremos que $P \in C$ es un punto de inflexión de orden k , con $k \geq 2$, de C si las k primeras derivadas parciales de la parametrización son linealmente dependientes y las $k - 1$ primeras no. En ocasiones se les llama puntos singulares de orden k (ver [Po]). Los puntos que no son de inflexión se llaman puntos ordinarios.*

Si consideramos la parametrización de la sección anterior:

$$x_i = a_i t^{l_i+i} + (\text{términos de mayor orden}),$$

para $i = 0, 1, \dots, N$, con $0 = l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_N$, y $a_i \in \mathbb{C}^*$, en un punto de inflexión de orden k se cumple que $l_{k+1} > 0$ y si la consideramos en un punto ordinario se cumpliría que $l_N = 0$. Para $k = 1$ la condición $l_{k+1} > 0$ indica que P es un punto singular. Para $k = 2$ diremos simplemente que P es un *punto de inflexión*, si no hay posible confusión. Además, en este caso, P será un punto donde la tangente a la curva tiene orden de contacto mayor que 2 y se la llama *recta de inflexión*.

Una curva de \mathbb{P}^N no degenerada sólo puede tener un número finito de puntos de inflexión de orden k , para todo entero k que cumple $N > k \geq 2$. En efecto, estos puntos vienen dados por una condición cerrada:

$$\sum_{i=0}^k \alpha^i \frac{\partial^i f(t)}{\partial t^i} = 0$$

siendo $f = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ la función coordenada con respecto al parámetro local t para C en un punto P (con la parametrización anterior). Y los cerrados de una curva son uniones finitas de puntos, el vacío o el total. Pero el total no puede ser, ya que la única forma de que los vectores obtenidos con las k primeras derivadas, sean linealmente dependientes en **todos los puntos**, es que uno de dichos vectores sea nulo (ver la parametrización). Pero si eso sucediera x_i debería ser de grado menor que k para todo $i = 1, 2, \dots, N$, lo que no es posible dado que

$$x_i = a_i t^{l_i+i} + (\text{términos de mayor orden})$$

y $N > k \geq 2$. Sólo puede haber infinitos puntos de inflexión si la curva es degenerada o si el cuerpo sobre el que se trabaja no es de característica cero.

En característica positiva existen curvas donde todo punto es de inflexión, por ejemplo la curva cuártica plana lisa definida por $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ en un cuerpo de característica 3 (ver [H2] pg. 305).

El número de puntos de inflexión de orden 2 sólo puede ser obtenido en forma de fórmula si la curva está en \mathbb{P}^2 .

Proposición 1.3.2 *Dada $C \subset \mathbb{P}^2$ curva de grado $n \geq 2$, tiene $3n(n-2)$ puntos de inflexión contados propiamente, es decir, si $T_P C$ tiene orden de contacto r con C en P , entonces contamos P como punto de inflexión $(r-2)$ veces.*

Corolario 1.3.3 *La única curva de \mathbb{P}^2 sin puntos de inflexión es la cónica.*

Hartshorne en [H2] da las siguientes definiciones para curvas:

Definición 1.3.4 *Sea $C \subset \mathbb{P}^N$ curva con $N \geq 3$, no contenida en ningún \mathbb{P}^{N-1} . Para cada punto $P \in C$ llamamos hiperplano osculador en P , al hiperplano que pasa por P y tiene mayor orden de contacto con C en P (será al menos N).*

Este hiperplano es único (para curvas), ya que de hecho es el $(N-1)$ -espacio osculador de C en P .

Definición 1.3.5 *En las condiciones anteriores, si un hiperplano H tiene orden de contacto al menos $N+1$ con C en P , se dice que H es un hiperplano hiperosculador y P es un punto de hiperosculación. En la parametrización se cumpliría que $l_{m+1} > 0$ para algún m .*

Por la definición de orden de contacto, $P \in C$ es un punto de hiperosculación si y sólo si existe k entero con $N \geq k \geq 2$, tal que P es un punto de inflexión de orden k .

También se llama *espacio hiperosculador* en un punto a un espacio que contiene al punto y este punto es de inflexión, es decir, si es un espacio de dimensión r que tiene orden de contacto mayor que $r+1$.

Observación 1.3.6 *No debe confundirse con la definición de hiperplano (o r -espacio) tangente en un punto de una curva, que es cualquier hiperplano (o r -espacio) que contiene a la recta tangente. En general un hiperplano osculador k -ésimo en un punto es cualquier hiperplano que contiene al espacio osculador k -ésimo en dicho punto.*

Ejemplos 1.3.7 *Para los siguiente ejemplos conocemos la hiperosculación:*

1. *La curva racional normal de grado N en \mathbb{P}^N . Esta curva sólo tiene puntos ordinarios, ya que todo punto tiene una parametrización de la forma*

$$(1, t, t^2, \dots, t^N).$$

2. *Una curva elíptica de grado $n \geq 3$ linealmente normal. Por Riemann-Roch, cada punto de esta curva tiene una parametrización que satisface:*

$$l_i = 0, i = 0, \dots, N-1; l_N \leq 1.$$

Luego la curva no es singular hasta grado $N-1$.

Existe una fórmula para el número de puntos de hiperosculación de una curva, que generaliza la fórmula vista para curvas de \mathbb{P}^2 que calcula los puntos de inflexión (ver [H2]).

Proposición 1.3.8 *Sea $C \subset \mathbb{P}^N$, con $N \geq 3$, curva no contenida en ningún \mathbb{P}^{N-1} , de grado n y género g , entonces C tiene $N(N+1)(g-1) + (N+1)n$ puntos de hiperosculación.*

Corolario 1.3.9 *La única curva de \mathbb{P}^N sin puntos de hiperosculación es la curva racional normal de grado N .*

Existen caracteres numéricos para medir el número de espacios de hiperosculación, si bien puede ser difícil calcularlos (ver [Pi2]).

Definición 1.3.10 *Si consideramos $\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, $P \in C$ y una parametrización en P como en la sección anterior, el entero $l_{m+1} - l_m$ es llamado el m -ésimo índice de estacionamiento de la curva C en P y se define el m -ésimo índice de estacionamiento de ϕ como*

$$k_m = \sum_{P \in C} (l_{m+1} - l_m)$$

Si $\phi(C)$ no es singular de orden $m - 1$, k_m es el número (contado propiamente) de m -espacios hiperosculadores, por tanto para una curva lisa k_1 es el número de puntos de inflexión de orden 2.

Para una curva C de género g , R. Piene demuestra en [Pi2] las siguientes fórmulas:

$$r_m = (m + 1)(r_0 + m(g - 1)) - \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)k_i$$

Para $m = 0, 1, \dots, N - 1$, y

$$\sum_{i=0}^{N-1} (N - i)k_i = (N + 1)(r_0 + N(g - 1)).$$

Se tiene la relación:

$$r_1 = r_0 + 2g - 2 - k_0$$

que para una curva plana es la fórmula clásica que da la clase de la curva en términos del grado, el género y el número de cúspides.

Ejemplos 1.3.11 *Vemos ejemplos para los que k_i es conocido para todo i .*

1. *La curva racional normal de grado n en \mathbb{P}^N . Como no tiene puntos de hiperosculación, $k_m = 0$ para todo m . Además r_0 es el grado de la curva, luego*

$$r_m = (m + 1)(n - m) = r_{N-m-1}$$

2. Una curva elíptica de grado $n \geq 3$ linealmente normal. Deducimos por el teorema de Riemann-Roch que $k_m = 0$, para $m = 0, \dots, N - 2$. Luego

$$r_m = (m + 1)n, \quad m = 0, \dots, N - 1$$

y $k_{N-1} = (N+1)n$, que son los hiperplanos hiperosculadores que tiene la curva.

Utilizaremos estos ejemplos en el segundo capítulo.

Capítulo 2

Fórmulas de espacios multisecantes para curvas

2.1. Introducción

Un problema clásico es obtener fórmulas enumerativas para el número de rectas k -secantes a una variedad. Para una curva lisa irreducible, hay cuatro fórmulas clásicas, tres fórmulas trisecantes y una cuatrisecante, dependiendo sólo del grado n y del género g :

1. Rectas cuatrisecantes a una curva en \mathbb{P}^3 (Cayley 1863)

$$q(C) = \frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - \frac{1}{2}g(n-7n+13-g)$$

2. Rectas trisecantes a una curva en \mathbb{P}^4 (Berzolari 1895)

$$\Theta(C) = \binom{n-2}{3} - g(n-4)$$

3. Rectas tangentes a una curva en \mathbb{P}^3 que vuelven a cortar a la curva (Salmon 1868)

$$t(C) = 2((n-2)(n-3) + g(n-6))$$

4. Rectas trisecantes a una curva en \mathbb{P}^3 que cortan a una recta fija (Cayley 1863)

$$k(C) = 2 \binom{n-1}{3} - g \binom{n-2}{1}$$

Estas fórmulas pueden expresarse en términos del grado y el número de puntos dobles aparentes h para curvas reducibles. Durante mucho tiempo las fórmulas fueron utilizadas sin explicar mucho su campo de validez. Muchos autores han dado diferentes demostraciones de estas fórmulas, pero se restringen implícita o explícitamente a una curva más o menos general. Sin embargo P. Le Barz en *Formules Multiséccantes pour les Courbes Gauches Quelconques* ([LB1]) demostró las fórmulas para una curva lisa “cualquiera” (veremos en el siguiente capítulo que sólo cuando el número de rectas en las condiciones mencionadas es finito).

Las fórmulas cuentan con multiplicidad, por ejemplo, para la fórmula de rectas cuatriseccantes en \mathbb{P}^3 . Si consideramos la intersección completa de una superficie cúbica lisa y una quíntica ($n = 15$, $g = 31$) obtenemos $q = 135$. Toda cuatriseccante a la curva debe estar contenida en la cúbica por cuestión de grados, la cual tiene 27 rectas. Pero como cada recta corta cinco veces a la quíntica, también a la curva, luego cada una cuenta cinco veces como cuatriseccante, lo que explica el 135. En general, una recta l -secante cuenta en las fórmulas $\binom{l}{k}$ veces como k -secante.

En este capítulo obtendremos una generalización de la fórmula de rectas tangentes a curvas que vuelven a cortar:

$$t(C) = 2((n - 2)(n - 3) + g(n - 6)),$$

si la curva es irreducible. Y $t(C) = (n(n^2 - 7n + 10) + 2h(n - 6))$, si la curva puede ser reducible. Calcularemos entonces una fórmula para el número de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a una curva de \mathbb{P}^{m+2} . También obtendremos otras fórmulas similares a las clásicas pero en el caso de planos multiseccantes.

Las generalizaciones de las fórmulas clásicas 1. y 2. fueron demostradas por Castelnuovo para la curva general (ver [Ta], pg. 70). Conjeturamos además la generalización de la fórmula clásica que resta (4.).

El método general que usaremos para obtener dichas fórmulas es demostrar primero que son polinomios de cierto grado en dos variables, que son dos invariantes de la curva: el grado y el número de puntos dobles. Después se obtienen ejemplos para calcular los coeficientes de los polinomios, resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales. Para resolver los sistemas utilizaremos el programa **Maple**.

Para el primer paso veremos dos métodos, emplearemos en uno un importante resultado demostrado por V. Vasallo en su artículo *Justification de la Méthode Fonctionnelle pour les Courbes Gauches* ([V]). Para el otro método este resultado no es necesario, se trata de cortar los ciclos adecuados en los grupos de Chow de los esquemas de Hilbert en que estemos trabajando.

En ambos métodos se obtiene la forma que tiene el polinomio que da la fórmula buscada cortando ciclos en los esquemas de Hilbert de puntos. El hecho de que estas

intersecciones tengan las dimensiones esperadas viene garantizado por el “Chow moving lemma” (ver [H2]). Este resultado asegura que si Y y Z son ciclos en X , variedad lisa, entonces existe un ciclo Z' , racionalmente equivalente a Z , tal que Y y Z' se intersecan propiamente. Además, si Z'' verifica la misma propiedad que Z' entonces $[Y] \cdot [Z'] = [Y] \cdot [Z'']$. Se puede ver, por ejemplo, la demostración de este lema debida a Roberts en [Ro]. X será la variedad $I_s^k(\mathbb{P}^N)$ adecuada en cada caso, que es lisa.

En el primer método necesitamos garantizar la transversalidad de las intersecciones, por tanto haremos los cálculos locales para algún caso. En el segundo método esto no es necesario, ya que no se calculan numéricamente intersecciones.

Para los ejemplos usaremos sobre todo curvas racionales y elípticas y curvas reducibles cuyas componentes son racionales y elípticas. Para obtener el número de puntos dobles usaremos la fórmula: $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - g$ para una curva irreducible de grado n y género g . Para las reducibles sumamos los puntos dobles de cada componente y sumamos además los puntos dobles que se formarían de las intersecciones de las componentes, es decir, los productos de los grados de las componentes.

2.2. Esquemas de Hilbert de puntos

El esquema de Hilbert juega un importante papel en la geometría enumerativa, ya que describe el comportamiento de los puntos de un esquema de modo más preciso que otros esquemas (producto o producto simétrico). Describiremos el esquema de Hilbert según hace R. Mallavibarrena en su artículo *Validité de la Formule Classique des Triséchantes Stationnaires* ([Ma]):

El esquema de Hilbert de \mathbb{P}^N es un esquema, $Hilb_{\mathbb{P}^N}$, que parametriza todos los subesquemas cerrados de \mathbb{P}^N . Su existencia es probada en [Gr]. Resumimos su construcción a continuación.

Para todo esquema X localmente noetheriano se define

$$\mathcal{Hilb}_{\mathbb{P}^N}(X) = \{\text{conjunto de subesquemas } Z \subset \mathbb{P}^N \times X, \text{ planos sobre } X\}$$

que es intuitivamente el conjunto de las familias de subesquemas de \mathbb{P}^N parametrizadas por X .

Esta definición da lugar a un funtor contravariante de la categoría de los esquemas X a la de conjuntos de subesquemas. El teorema fundamental de la existencia del esquema de Hilbert establece que existe un esquema localmente noetheriano $Hilb_{\mathbb{P}^N}$ y unos isomorfismos functoriales en X , uno para cada X , de forma que

$$\mathcal{Hilb}_{\mathbb{P}^N}(X) = \text{Hom}(X, Hilb_{\mathbb{P}^N}).$$

Esto es equivalente a la existencia de un subesquema cerrado

$$W \subset \mathbb{P}^N \times \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$$

plano sobre $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ que es “universal”, es decir, dado cualquier $Z \subset \mathbb{P}^N \times X$, plano sobre X , existe un único morfismo $f : X \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ tal que $Z = (1_{\mathbb{P}^N} \times f)^*(W)$.

Dado $Z \subset \mathbb{P}^N \times X$ plano sobre X , para todo $x \in X$, sea $Z_x \subset \mathbb{P}^N \times \text{Spec}\mathcal{K}(x)$, el esquema inducido sobre x . ($\mathcal{K}(x)$ es el cuerpo residual de x). Entonces cada Z_x tiene un polinomio de Hilbert $P_x(n) = \chi(\mathcal{O}_{Z_x}(n))$.

Por platitud, si X es conexo, todos los polinomios P_x son iguales. Por tanto podemos escribir

$$\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N} = \bigcup_{\text{polinomios } P(n)} \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$$

donde $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ y si $W \subset \mathbb{P}^N \times \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ es el esquema universal, entonces W_x tiene polinomio de Hilbert P si y sólo si $x \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$.

La versión fuerte del teorema fundamental de existencia establece que $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ es proyectivo sobre $\text{Spec}(Z)$. El esquema de Hilbert es un esquema propio (ver [H2]) y conexo (ver [H1]).

Los esquemas de Hilbert más utilizados son el esquema de Hilbert de curvas de un grado determinado y los de puntos que veremos a continuación siguiendo las notaciones empleadas por P. Le Barz en [LB1] y [LB2] (*Quelques calculs dans les variétés d'alignements*).

Se considera $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$, el esquema de Hilbert de los subesquemas de dimensión 0 y longitud k de \mathbb{P}^N , es decir, k -uplas de puntos de \mathbb{P}^N (ver [LB2]). Observamos que $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^k$.

En la introducción de [LB2] se especifica que el esquema $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$, es en general singular (para $N > 2$ y $k > 2$) y reducible, puede tener componentes de dimensión mayor o menor que kN . Por ello Le Barz trabaja con $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$, el abierto de $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ formado por las k -uplas ξ situadas sobre una curva lisa, o bien que verifican $\dim T_P \xi \leq 1$ para todo $P \in \text{Supp} \xi$. Son las k -uplas curvilíneas y este abierto no es singular y tiene dimensión kN (ver [LB2], introducción).

Si las k -uplas están contenidas en una variedad X , se parametrizan por $\text{Hilb}^k X$. En el caso de la curva C , se tiene que $\text{Hilb}^k C = \text{Hilb}_c^k C$, además $\text{Hilb}^k C$ es isomorfo a $\text{Sym}^k C$ (potencia simétrica k -ésima).

Por otro lado, Le Barz denota por $\text{Hilb}_{\neq}^k \mathbb{P}^N$ al abierto de k -uplas de puntos diferentes, son las k -uplas simples, este abierto es denso en $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$. Vassallo en [V] usa el esquema $\text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^N$, porque es cerrado, ya que es la clausura de $\text{Hilb}_{\neq}^k \mathbb{P}^N$,

las k -uplas simples. $Hilb_0^k \mathbb{P}^N$ puede ser singular o no, depende de su densidad en $Hilb^k \mathbb{P}^N$ y este esquema es denso si $Hilb^k \mathbb{P}^N$ es irreducible, lo que no se sabe en general (ver [I]).

Sin embargo sabemos (por la definición) que su dimensión es kN y que

$$Hilb_c^k \mathbb{P}^N \subset Hilb_0^k \mathbb{P}^N.$$

Luego para usar la teoría de Vassallo deberemos trabajar con $Hilb_0^k \mathbb{P}^N$, también utilizaremos $Hilb_c^k \mathbb{P}^N$ para evitar singularidades.

Le Barz define dentro de estos esquemas de Hilbert la variedad de alineamiento, que consiste en k -uplas que son subesquemas de una recta, es decir, están alineadas y la denota $Al^k \mathbb{P}^N$. Dicha variedad es lisa para cualquier valor de k y de dimensión $2N - 2 + k$.

Análogamente se pueden considerar k -uplas que sean subesquemas de un plano, es decir, coplanarias. Sin embargo la variedad de dichas k -uplas no es lisa en general, por lo que se define la variedad de incidencia (ver por ejemplo [Ma]):

$$Cop^k \mathbb{P}^N = \{(\pi, \eta) \in \mathbb{G}(2, N) \times Hilb_c^k \mathbb{P}^N, \eta \subset \pi\},$$

donde $\mathbb{G}(2, N)$ es la variedad Grassmanniana de planos en \mathbb{P}^N . Es una variedad lisa de dimensión $3N + 2(k - 3)$ y tenemos la proyección segunda

$$i : Cop^k \mathbb{P}^N \rightarrow Hilb_c^k \mathbb{P}^N$$

que lleva (π, η) a η . Además, la primera proyección

$$pr : Cop^k \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{G}(2, N)$$

es una fibración localmente trivial, las fibras de pr son $Hilb_c^k \mathbb{P}^2$, es decir, son lisas. Por tanto tenemos descomposiciones celulares de los grupos de Chow:

$$A^m(Cop^k \mathbb{P}^N) = \bigoplus_{q+r=m} pr^* A^q(\mathbb{G}(2, N)) \otimes A^r(Hilb_c^k \mathbb{P}^2).$$

Estas variedades pueden ser generalizadas, definimos pues las siguientes variedades:

Definición 2.2.1 *Denotamos:*

$$I_s^k(\mathbb{P}^N) = \{(\pi, \eta) \in \mathbb{G}(s, N) \times Hilb_c^k \mathbb{P}^N, \eta \subset \pi\},$$

la variedad de incidencia de k -uplas contenidas en un s -espacio de \mathbb{P}^N , donde $\mathbb{G}(s, N)$ es la variedad Grassmanniana de s -espacios en \mathbb{P}^N .

La proyección en la segunda coordenada es:

$$i : I_s^k(\mathbb{P}^N) \rightarrow \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$$

tal que, $i((\pi, \eta)) = \eta$. En ocasiones utilizaremos esta proyección compuesta con la inmersión de $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ en $\text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^N$.

Además, la proyección en la primera coordenada

$$pr : I_s^k(\mathbb{P}^N) \rightarrow \mathbb{G}(s, N)$$

es una fibración donde las fibras son $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^s$, es decir, son lisas. Por tanto la variedad de incidencia $I_s^k(\mathbb{P}^N)$ es lisa. Y por la proyección pr obtenemos su dimensión, que es $(s+1)N + s(k - (s+1))$. La variedad de alineamiento ($s = 1$) y la variedad de coplanarias ($s = 2$), son casos particulares.

Usamos el orden de un punto dentro de una k -upla de la forma siguiente:

Definición 2.2.2 Sea ξ una k -upla en $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ (o en $\text{Hilb}^k C$) y sea P un punto en $\text{Supp} \xi$. Decimos que P es un punto simple si el conjunto de puntos en ξ cuyo soporte es P tiene longitud uno. Y P es un punto de orden l si su longitud es l .

Denotaremos $A^r(X)$ al grupo de Chow de la variedad X . Si D es una subvariedad de dimensión r de una variedad X , denotaremos $[D]$ la clase de equivalencia racional del ciclo asociado a la clausura de D en $A^r(X)$.

2.3. Método de las bases de los grupos de Chow

Le Barz en [Lb2] y Mallavibarrena en [Ma], describen un método de obtención de fórmulas enumerativas, calculando bases de los grupos de Chow de $A^k \mathbb{P}^N$ y $\text{Cop}^k \mathbb{P}^N$, respectivamente. Le Barz obtiene las cuatro fórmulas clásicas enunciadas en la sección anterior. Mallavibarrena obtiene la fórmula clásica de las trisecantes estacionarias de curvas de \mathbb{P}^3 , es decir, rectas que cortan a la curva al menos en tres puntos de forma que para dos de ellos sus rectas tangentes son coplanarias.

Describimos a grandes rasgos la técnica empleada por Mallavibarrena, debido a que emplea la variedad de k -uplas coplanarias que es la que más nos interesa para obtener las fórmulas que buscamos:

Mallavibarrena considera en $\text{Cop}^5 \mathbb{P}^3$ una variedad W de quintupletes en un plano cuyo soporte son tres puntos distintos alineados. El grado del ciclo $[W] \cdot i^*[\text{Hilb}^5 C]$ es el número buscado. En este método se busca un sistema de

generadores de $A^3(Cop^5\mathbb{P}^3)$ y se cortan con $i^*[Hilb^5C] \in A^{10}(Cop^5\mathbb{P}^3)$ (la dimensión de $Cop^5\mathbb{P}^3$ es 13). Para obtener dichos generadores, se describen unas bases de $A^r(Hilb^5\mathbb{P}^2)$ y se utiliza el hecho de que:

$$\begin{aligned} A^3(Cop^5\mathbb{P}^3) &= pr^*A^0(\mathbb{P}^3) \otimes A^3(Hilb^5\mathbb{P}^2) \oplus pr^*A^1(\mathbb{P}^3) \otimes A^2(Hilb^5\mathbb{P}^2) \\ &\oplus pr^*A^2(\mathbb{P}^3) \otimes A^1(Hilb^5\mathbb{P}^2) \oplus pr^*A^3(\mathbb{P}^3) \otimes A^0(Hilb^5\mathbb{P}^2). \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene un polinomio en las indeterminadas n (grado de C) y h (puntos dobles aparentes de C) del que no se conocen los coeficientes. Entonces, dando un número suficiente de ejemplos para los cuales el número buscado es conocido, se obtiene la fórmula:

$$\xi = -5n^3 + 27n^2 - 34n + 2h(n^2 + 4n - 22 - 2h).$$

Sin embargo, este método se complica para grupos de Chow con bases muy grandes.

2.4. Planos osculadores que vuelven a cortar

Utilizamos la técnica de la sección anterior para obtener la fórmula para el número de planos osculadores a una curva que vuelven a cortar a dicha curva. Seguiremos las pautas descritas y las aplicaremos a nuestro caso.

Nuestro problema se complica por el hecho de que la curva está en \mathbb{P}^4 . Lo que haremos será proyectar a \mathbb{P}^3 . Para ello utilizaremos un resultado de Fulton-Mc Pheron, igual que hace Le Barz para la fórmula de rectas trisecantes a curvas de \mathbb{P}^4 . Definiremos primero los ciclos que debemos intersecar para obtener la fórmula:

Definición 2.4.1 *Llamamos $D \subset Cop^4(\mathbb{P}^4)$ a la subvariedad de cuatripletas formadas por un punto de orden tres y otro punto simple.*

Observamos que $dim D = 12$, ya que consiste en elegir un plano de \mathbb{P}^4 ($\binom{4}{2} = 6$), un punto del plano (2), dos direcciones en este plano (1+1) y otro punto del plano (2).

Sea $i : Cop^4\mathbb{P}^4 \rightarrow Hilb_c^4\mathbb{P}^4$ la proyección que lleva: $(p, \eta) \rightarrow \eta$, que es genéricamente inyectiva. $Hilb^4C \subset Hilb_c^4\mathbb{P}^4$ tiene dimensión 4. Probamos que $dim(i^*Hilb^4C) = 2$:

- Si $\dim(i^*Hilb^4C) = 4$ significaría que todo cuatriplete de C está en un plano, es decir, $C \subset \mathbb{P}^2$.
- Si $\dim(i^*Hilb^4C) = 3$ significaría que todo plano trisecante de C es cuatriseccante, lo que implicaría que $C \subset \mathbb{P}^2$. Lo vemos: Si $P \in C$ es un punto general, para todo $Q, R \in C$ existe π plano tal que $P, Q, R \in \pi$. Si proyectamos C desde P , $\Phi : C - P \rightarrow \mathbb{P}^3$, sería un morfismo birracional, cuya imagen es una curva C' de \mathbb{P}^3 . Vemos que toda recta secante de C' es trisecante. Para todo $Q', R' \in C'$ se tiene que $Q' = \Phi(Q), R' = \Phi(R)$, para ciertos $Q, R \in C$. Sea π el plano por P, Q, R , que al ser trisecante será cuatriseccante por hipótesis, es decir, cortará a C en otro punto S . Si r es la recta secante a la curva C' por Q' y R' , $r = \Phi(\pi)$. Entonces corta a C' al menos en $Q', R', S' = \Phi(S)$. Pero en \mathbb{P}^3 y característica cero no toda secante es trisecante (ver [H2]).
- Si $\dim(i^*Hilb^4C) \leq 1$, significaría que por cada punto general de C hay un número finito de planos cuatriseccantes. Si proyectamos C desde un punto cualquiera $P \in C$ a \mathbb{P}^3 , cada recta trisecante de \mathbb{P}^3 se levanta a \mathbb{P}^4 y con P forman un plano cuatriseccante. Como en \mathbb{P}^3 las curvas tienen un número infinito de rectas trisecantes, C tendría infinitos planos cuatriseccantes por P . Luego este caso no es posible.

Podemos considerar pues el 0-ciclo $D \cdot i^*Hilb^4C$ cuyo grado corresponde con el número de planos osculadores que vuelven a cortar a la curva C y que designaremos por $O_2(C)$. Por definición de D :

$$O_2(C) = \deg D \cdot i^*[Hilb^4C]$$

Para facilitar el cálculo de las intersecciones, proyectamos nuestra curva a otra $C' \subset \mathbb{P}^3$, desde un punto general, es decir, de forma que C y C' son isomorfas. El isomorfismo nos permite afirmar que $[Hilb^4C] \sim [Hilb^4C']$.

El diagrama que se forma, en el que se indican las dimensiones entre paréntesis, es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 (14) & Cop^4\mathbb{P}^4 & \xrightarrow{i} & Hilb_c^4\mathbb{P}^4 & (16) \\
 & \uparrow v & & \uparrow u & \\
 (11) & Cop^4\mathbb{P}^3 & \xrightarrow{w} & Hilb_c^4\mathbb{P}^3 & (12) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & Hilb^4C' & (4)
 \end{array}$$

Ahora tendríamos que cortar w^*Hilb^4C' , que tiene dimensión 3, y la variedad $D' \subset Cop^4\mathbb{P}^3$ de cuatripletos formados por un punto triple y otro simple, que tiene

dimensión: $\dim D' = \binom{3}{2} + 2 + 2 + 2 = 9$. Claramente la intersección es excedentaria. Usaremos por tanto el Teorema de Fulton-Mc Pherson (ver [F-M]):

Teorema 2.4.2 *Sea Y subvariedad lisa de la variedad lisa X . Sea A una variedad tal que existe $i : A \rightarrow X$ e $I = i^{-1}(Y)$.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \uparrow v & & \uparrow u \\ I & \xrightarrow{w} & Y \end{array}$$

Si I es localmente intersección completa en A y si

$$\dim I = \dim A + \dim Y - \dim X + r,$$

entonces para todo α ciclo de Y , el ciclo $i^*u_*\alpha$ en A es igual a $v_*(c_r \cdot w^*\alpha)$, donde c_r es cierto ciclo en $A^r(I)$.

Lo aplicamos a $[Hilb^4C']$ y $r = 1$, ya que según las dimensiones del diagrama 11 = 14 + 12 - 16 + r , por tanto:

$$\deg D \cdot i^*[Hilb^4C] = \deg D' \cdot c_1 \cdot w^*[Hilb^4C'],$$

siendo $c_1 \in A^1(Cop^4\mathbb{P}^3)$. Así pues, $D' \cdot c_1 \in A^3(Cop^4\mathbb{P}^3)$.

Debido a la descomposición celular:

$$\begin{aligned} A^3(Cop^4\mathbb{P}^3) &= pr^*A^0(\mathbb{G}(2, 3)) \otimes A^3(Hilb^4\mathbb{P}^2) \oplus pr^*A^1(\mathbb{G}(2, 3)) \otimes A^2(Hilb^4\mathbb{P}^2) \oplus \\ &\oplus pr^*A^2(\mathbb{G}(2, 3)) \otimes A^1(Hilb^4\mathbb{P}^2) \oplus pr^*A^3(\mathbb{G}(2, 3)) \otimes A^0(Hilb^4\mathbb{P}^2) \end{aligned}$$

podemos obtener bases de $A^3(Cop^4\mathbb{P}^3)$, a partir de las bases de $A^q(\mathbb{G}(2, 3))$ (para $q = 0, \dots, 3$) que son conocidas (ver [Ma]) y de $A^r(Hilb^4\mathbb{P}^2)$ (para $r = 0, \dots, 3$), que describiremos a continuación, siguiendo la notación de [Ma] y utilizando las bases que ahí se dan.

La notación será pues:

Una P o una Q mayúscula denotará un punto, una L mayúscula denotará una recta y una H un plano (también con subíndices o primas).

- (m) denota m puntos libres
- Si los puntos son fijos se denotan $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$
- Un punto como superíndice indica que los puntos están alineados con dicho punto y éste no está incluido

- Una recta como subíndice indica que los puntos están en dicha recta.
- El subíndice Al indica que los puntos están alineados.

Una base de $A^0(\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2)$ es:

$$a_{0,1}^4 = (4) \text{ (4 puntos libres).}$$

De $A^1(\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2)$ es:

$$a_{1,1}^4 = (1)_L \cup (3) \text{ (un punto en una recta fija } L \text{ y 3 libres)}$$

$$a_{1,2}^4 = (2)^P \cup (2) \text{ (2 puntos alineados con uno fijo } P \text{ y 2 libres).}$$

De $A^2(\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2)$ puede ser:

$$a_{2,1}^4 = \{P\} \cup (3)$$

$$a_{2,2}^4 = (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2} \cup (2)$$

$$a_{2,3}^4 = (2)^P \cup (1)_L \cup (1)$$

$$a_{2,4}^4 = (2)^P \cup (2)^P$$

$$a_{2,5}^4 = (2)_L \cup (2)$$

$$a_{2,6}^4 = (3)^P \cup (1)$$

Esta base es la que aparece en [Ma]. Pero nos interesa sustituir $a_{2,4}^4$, para facilitar los cálculos de intersecciones. Cambiaremos $(2)^P \cup (2)^P$ por $c_{2,4}^4 = (4)_{Al}$. Para ello comprobamos que es base cortando con una base de $A^6(\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2)$, que según [Ma] puede ser:

$$a_{6,1}^4 = \{P_1, P_2, P_3\} \cup (1)$$

$$a_{6,2}^4 = \{P_1, P_2\} \cup (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2}$$

$$a_{6,3}^4 = \{P_1\}_{L_1} \cup \{P_2\} \cup (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2}$$

$$a_{6,4}^4 = \{P_1\}_{L_1} \cup \{P_2\}_{L_2} \cup (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2}$$

$$a_{6,5}^4 = \{P_1, P_2\} \cup (2)_L$$

$$a_{6,6}^4 = \{P_1\}_L \cup \{P_2\} \cup (2)_L$$

La tabla de intersecciones sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la posición (i,j) de la matriz da la intersección de $a_{2,i}^4$ con $a_{6,j}^4$. Su determinante es 1, luego es base.

Vemos alguna de estas intersecciones:

La independencia del representante de la clase viene garantizada por el ‘‘Chow moving lemma’’ (ver [H2]). Este resultado asegura que si Y y Z son ciclos en X , variedad lisa, entonces existe un ciclo Z' , racionalmente equivalente a Z , tal que Y y Z' se intersecan propiamente. Además, si Z'' verifica la misma propiedad que Z' entonces $[Y] \cdot [Z'] = [Y] \cdot [Z'']$. Se puede ver, por ejemplo, la demostración de este lema debida a Roberts en [Ro].

$a_{2,2}^4 \cdot a_{6,2}^4 = 2$: conjuntistamente como el primero consiste en dos puntos libres del plano y dos puntos libres cada uno el una recta fija del plano y el otro en dos puntos fijos y dos puntos libres cada uno en una recta fija. Las rectas se pueden considerar distintas por el lema de Chow. Luego los puntos fijos de uno han de ser los libres del otro y los puntos de las rectas han de estar en las intersecciones de las rectas de uno con las del otro. Para estos puntos hay dos opciones.

Para asegurarnos de que no hay multiplicidades tomamos coordenadas afines x, y . Supongamos que los puntos fijos del ciclo $a_{6,2}^4$ son $P_1 = (-1, 0)$ y $P_2 = (1, 1)$ y las rectas son: $L_1 : x + y = 0$ y $L_2 : 2x + y = 1$. Para el ciclo $a_{2,2}^4$ consideramos las rectas $L'_1 : x + 2y = 2$ y $L'_2 : 3x + y = 5$. Entonces una de las opciones en la intersección es el punto de $Hilb^4\mathbb{P}^2$ compuesto por los puntos: $P_1, P_2, L_1 \cap L'_1 = (-2, 2), L_2 \cap L'_2 = (4, -7)$. Este corresponde al ideal:

$$(x + 1, y) \cap (x - 1, y - 1) \cap (x + 2, y - 2) \cap (x - 4, y + 7)$$

y todos aquellos subesquemas de \mathbb{P}^2 pertenecientes a un entorno de este punto en $Hilb^4\mathbb{P}^2$ se expresan como:

$$(x + 1 + c_1, y + c_2) \cap (x - 1 + c_3, y - 1 + c_4) \cap (x + 2 + c_5, y - 2 + c_6) \cap (x - 4 + c_7, y + 7 + c_8)$$

siendo $c_i \in \mathbb{C}$. Luego en $\mathbb{C}[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8]$ obtenemos el ideal $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8)$ cuya longitud es uno.

Análogamente la otra opción: $P_1, P_2, L_1 \cap L'_2, L_2 \cap L'_1$ tiene multiplicidad 1 lo que justifica que la intersección $a_{2,2}^4 \cdot a_{6,2}^4$ sea efectivamente 2.

Por último, una base de $A^3(\text{Hilb}^4\mathbb{P}^2)$ es:

$$\begin{aligned}
a_{3,1}^4 &= \{P\} \cup (1)_L \cup (2) \\
a_{3,2}^4 &= \{P\} \cup (2)^Q \cup (1) \\
a_{3,3}^4 &= \{P\}_L \cup (1)_L \cup (2) \\
a_{3,4}^4 &= (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2} \cup (1)_{L_3} \cup (1) \\
a_{3,5}^4 &= (2)^P \cup (1)_{L_1} \cup (1)_{L_2} \\
a_{3,6}^4 &= (1)_{L_1} \cup (2)_{L_2} \cup (1) \\
a_{3,7}^4 &= (2)^P \cup (2)_L \\
a_{3,8}^4 &= (3)^P \cup (1)_L \\
a_{3,9}^4 &= (3)_L \cup (1) \\
a_{3,10}^4 &= (4)^P
\end{aligned}$$

Por tanto una base de $A^3(\text{Cop}^4\mathbb{P}^3)$ será $\{[b_{3,i}^4]\}_{i=1,\dots,19}$, donde:

1. $b_{3,1}^4 = \{\hat{L}\} \cup (1)_{\hat{H}} \cup (2)$
2. $b_{3,2}^4 = \{\hat{L}_1\} \cup (2)^{\hat{L}_2} \cup (1)$
3. $b_{3,3}^4 = \{\hat{L}\}_{\hat{H}} \cup (1)^{\hat{H}} \cup (2)$
4. $b_{3,4}^4 = (1)_{\hat{H}_1} \cup (1)_{\hat{H}_2} \cup (1)_{\hat{H}_3} \cup (1)$
5. $b_{3,5}^4 = (2)^{\hat{L}} \cup (1)_{\hat{H}_1} \cup (1)_{\hat{H}_2}$
6. $b_{3,6}^4 = (1)_{\hat{H}_1} \cup (2)_{\hat{H}_2} \cup (1)$
7. $b_{3,7}^4 = (2)^{\hat{L}} \cup (2)_{\hat{H}}$
8. $b_{3,8}^4 = (3)^{\hat{L}} \cup (1)_{\hat{H}}$
9. $b_{3,9}^4 = (3)_{\hat{H}} \cup (1)$
10. $b_{3,10}^4 = (4)^{\hat{L}}$
11. $b_{3,11}^4 = \{\hat{L}\} \cup (3) \in pr^{-1}(P')$

$$12. b_{3,12}^4 = (1)_{\hat{H}_1} \cup (1)_{\hat{H}_2} \cup (2) \in pr^{-1}(P')$$

$$13. b_{3,13}^4 = (2)^{\hat{L}} \cup (1)^{\hat{H}} \cup (1) \in pr^{-1}(P')$$

$$14. b_{3,14}^4 = (4)_{Al} \in pr^{-1}(P')$$

$$15. b_{3,15}^4 = (2)_{\hat{H}} \cup (2) \in pr^{-1}(P')$$

$$16. b_{3,16}^4 = (3)^{\hat{L}} \cup (1) \in pr^{-1}(P')$$

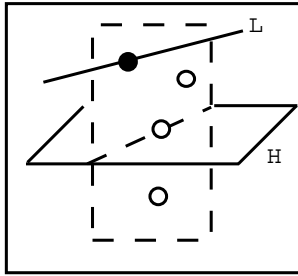
$$17. b_{3,17}^4 = (1)_{\hat{H}} \cup (3) \in pr^{-1}(L')$$

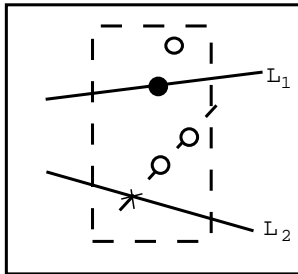
$$18. b_{3,18}^4 = (2)^{\hat{L}} \cup (2) \in pr^{-1}(L')$$

$$19. b_{3,19}^4 = (4) \in pr^{-1}(H')$$

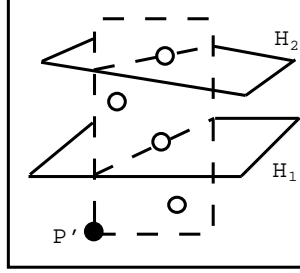
Siendo $pr : Cop^4\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ y \hat{L} y \hat{H} serán el punto y la recta, respectivamente, intersección de una recta L y un plano H genéricos con el plano correspondiente (donde están los puntos).

Vemos algunos dibujos heurísticos correspondientes a estos generadores, en los que un punto negro representa un punto fijo:

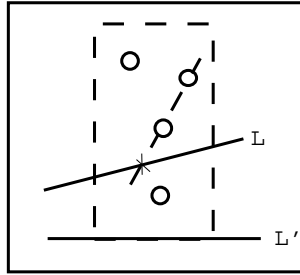


$$b_{3,1}^4$$


$$b_{3,2}^4$$



$$b_{3,12}^4$$



$$b_{3,18}^4$$

Por tanto $D' \cdot c_1$ será una combinación lineal de esta base, luego estudiaremos las intersecciones de estos ciclos con $w^*[Hilb^4 C']$. Vemos sólo algunas de estas intersecciones:

- Para $b_{3,1}^4, b_{3,2}^4, b_{3,3}^4, b_{3,11}^4$ la intersección es nula, ya que una curva y una recta en \mathbb{P}^3 no se cortan en general. Y con $b_{3,10}^4$, porque el número de rectas cuatriseccantes es finito, luego por lo general no cortan a una recta.
- Para $b_{3,4}^4$, hay que elegir un punto de cada uno de los tres planos. Para una curva de grado n , hay n puntos en la intersección de un plano y la curva. Se forma un plano que corta a la curva en otros $n - 3$ puntos, de ellos hay que elegir uno. Luego será: $n^3(n - 3)$.
- Para $b_{3,5}^4$, hay que elegir un punto de cada uno de los dos planos. Después para encontrar otros 2 puntos coplanarios con los anteriores, de forma que la recta que forman corte a L , contaremos el número de bisecantes de una curva que cortan 2 rectas dadas. Las 2 rectas forman complejos lineales, luego la superficie de bisecantes habrá que cortarla con una cuádrica. Como el grado de la superficie es: el número de bisecantes contenidas en un plano, más número de bisecantes que pasan por un punto, es $\binom{n}{2} + h$ (siendo h el número de nodos aparentes de la curva). El resultado es: $n^2 \cdot 2(\binom{n}{2} + h)$.

- Para $b_{3,8}^4$, será $n \cdot t(C')$, siendo $t(C')$ el número de trisecantes que cortan a una recta fija (ver [LB1] o [LB2]).
- Para $b_{3,14}^4$, será $q(C')$, que es el número de cuatriscantes a una curva (ver [LB1] o [LB2]).

Nuestra fórmula es una combinación lineal de todas las intersecciones y tras analizar todas ellas observamos que tienen la forma:

$$P_4(n) + h \cdot P_2(n) + h^2 \cdot P_0(n),$$

siendo $P_i(n)$ un polinomio de grado i en n . Es decir, nuestra fórmula tiene la forma:

$$O_2(C) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + h(f \cdot n^2 + i \cdot n + j) + k \cdot h^2$$

por tanto necesitamos 9 ejemplos para obtener los valores de a, \dots, k .

Para encontrar estos ejemplos, primero damos tres donde el número de planos osculadores que vuelven a cortar es cero, por el grado que tienen. Luego consideramos curvas reducibles, primero curvas compuestas por cónicas y luego por cuárticas. Usaremos los invariantes r_m de las curvas racionales estudiados por R. Piene en [Pi2] y definidos en (1.2.2). Nos interesa en este caso r_2 que es el número de planos osculadores que cortan un $(N-3)$ -espacio general dado (en este caso $N=4$) o el grado de la superficie desarrollable osculatriz X^m . Para la curva racional normal estos números son: $r_2 = (2+1)(n-2)$, es decir, para la cuártica racional normal es $r_2 = 6$:

- $O_2(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n=3, h=1$; $n=4, h=3$; $n=5, h=5$. Un plano osculador que vuelve a cortar sería un plano cuatriscante, que no puede tener la cúbica por el grado, ni la cuártica por ser la racional normal. La quintica elíptica no puede tener planos cuatriscantes en \mathbb{P}^4 ya que, como veremos, si la proyectamos a \mathbb{P}^3 no puede tener rectas cuatriscantes (ver la observación 2.6.4.).
- La cónica Q tiene por invariantes $n=2, h=0$, luego sustituyendo en la fórmula general obtenemos $O_2(Q) = (16a + 8b + 4c + 2d + e)$. Si consideramos ahora C como m cónicas, tal que el plano que contiene a una de ellas no corta a ninguna de las otras, entonces los posibles planos osculadores que vuelven a cortar son los de cada cónica, es decir, $O_2(C) = m(16a + 8b + 4c + 2d + e)$. Por otro lado los invariantes de C son: $n=2m, h=4\binom{m}{2}$, luego sustituyendo en la fórmula general e igualando las expresiones por grados obtenemos 5 ecuaciones.
- Si C consta de 2 cuárticas racionales disjuntas, sus invariantes son $n=8, h=22$. Los posibles planos osculadores que vuelven a cortar son los planos

osculadores de una que cortan a la otra, luego $O_2(C) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6$, donde el 4 es el grado de una curva y el 6 el de la variedad de planos osculadores r_2 de la otra. Análogamente para tres cuárticas racionales disjuntas sería $\binom{3}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 144$.

Con estos ejemplos podemos obtener los valores de a, b, \dots, k resolviendo el sistema, y así obtenemos la ecuación:

$$O_2(C) = 3n^3 - 24n^2 + 39n + h(-6n + 36)$$

$$O_2(C) = 3(n(n^2 - 8n + 13) - 2h(n - 6))$$

y para curvas irreducibles:

$$O_2(C) = 3((n - 3)(n - 4) + 2g(n - 6))$$

Observamos que la fórmula sólo es válida en \mathbb{P}^4 . Por ejemplo, la curva de grado 5 y género 0 en \mathbb{P}^5 no tiene osculadores que vuelven a cortar, ya que es la racional normal que no puede tener cuatro puntos en un mismo plano. Sin embargo, si la vemos en un \mathbb{P}^4 tendrá 6.

Si C es una curva no degenerada de grado n en \mathbb{P}^n con $n \geq 3$, no puede tener osculadores que vuelven a cortar, ya que si hubiera uno, podríamos elegir otros $n - 3$ puntos de la curva de forma que generen un hiperplano que corta a la curva en $n + 1$ puntos, lo que no es posible, ya que C tiene grado n . Análogamente, estas curvas no pueden tener puntos de inflexión de orden mayor que 2.

Si C es una curva no degenerada de grado n en \mathbb{P}^{n-1} con $n \geq 5$, no puede tener osculadores que vuelven a cortar. Si existiera un plano osculador que vuelve a cortar a la curva en el punto P , podemos definir un morfismo que asocia a cada punto de la curva, el hiperplano que genera con el $(n - 3)$ -espacio osculador a C en P . Obtenemos un morfismo birracional de C en \mathbb{P}^1 , pero por el teorema de Riemann-Roch, esta curva no puede ser racional. Análogamente, se prueba que estas curvas no pueden tener puntos de inflexión de orden mayor que 2.

2.5. El método funcional

V. Vassallo en [V] justifica el método funcional de Cayley, por el que se supone que toda fórmula k -secante para una curva C sólo depende del grado y del número de puntos dobles aparentes de la curva. Vassallo demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1 *Sea V una variedad completa lisa, sea $f : V \rightarrow \text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ un morfismo localmente intersección completa y $f^* : A(\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N) \hookrightarrow A(V)$ el morfismo asociado entre los grupos de Chow. Entonces, para todo ciclo a de dimensión $k(N - 1)$*

en V y para toda curva lisa C de grado n en \mathbb{P}^N con h puntos dobles aparentes, el grado del cero ciclo $a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]$ es de la forma:

$$\deg(a \cdot f^*[\text{Hilb}^k C]) = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{0 \leq i \leq k-2j} c_{ij} \binom{h}{j} \binom{n}{i},$$

donde $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ es la parte entera de $\frac{k}{2}$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ y $c_{00} = 0$.

Explicamos a grandes rasgos la demostración del teorema:

Primero se proyecta la curva de forma isomorfa a una curva C de \mathbb{P}^3 . Después se deforma C de manera plana a una curva C' de \mathbb{P}^2 de forma que $\text{Hilb}^k C$ y $\text{Hilb}^k C'$ sean racionalmente equivalentes, es decir, que tengamos la igualdad de ciclos:

$$[\text{Hilb}^k C] = [\text{Hilb}^k C'].$$

El esquema $\text{Hilb}^k C'$ es reducible pero podemos obtener sus componentes.

Después, se obtiene una proyección genérica \tilde{C} sobre un plano y se denotan M_j , $1 \leq j \leq h$ sus puntos dobles ordinarios. Luego existe un esquema relativo Γ de base \mathbb{C} , con la fibra Γ_1 igual a C' y $(\Gamma_0)_{red} = \tilde{C}$ ($(\Gamma_\lambda)_\lambda$ familia plana sobre \mathbb{C}). El esquema Γ_0 es la unión de \tilde{C} y los entornos infinitesimales de orden 1 en \mathbb{P}^3 de los puntos M_j de \tilde{C} . Si \mathfrak{M} es el ideal de M en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$, entonces el entorno infinitesimal de orden 1 de M está definido por \mathfrak{M}^2 en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$.

Como resultado se tiene la equivalencia racional:

$$[\text{Hilb}^k C] = [\text{Hilb}^k \Gamma_1] \sim [\text{Hilb}^k \Gamma_0]_k$$

en $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^3$, donde $[\cdot]_k$ designa la parte de dimensión k de un ciclo.

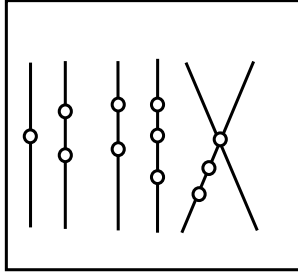
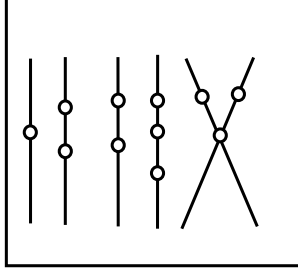
La parte más importante es dar una expresión de $[\text{Hilb}^k \Gamma_0]_k$ como combinación lineal de ciclos fijados que no dependen del grado ni del número de puntos dobles aparentes de la curva.

Vemos la definición de esos ciclos $C_{j,\sigma}^k$ donde $\sigma = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ consiste en $s(\sigma)$ puntos simples diferentes en $l(\sigma)$ rectas: s_1 veces un punto en una recta, s_2 veces dos puntos en una recta, etc.

Para construir $C_{j,\sigma}^k$ se eligen j puntos M_1, \dots, M_j en un plano π de \mathbb{P}^3 . Para cada punto M_i ($1 \leq i \leq j$) consideramos dos rectas D'_i y D''_i del plano π siendo $D'_i \cap D''_i = \{M_i\}$. Se dan además $l(\sigma)$ rectas del plano π que no pasen por ningún punto M_i .

Luego el ciclo $C_{j,\sigma}^k$ es la adherencia en $\text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^3$ de las k -uplas formadas por j dobletes con soporte en M_1, \dots, M_j respectivamente, $k - 2j - s(\sigma)$ puntos simples diferentes en las rectas D'_i y D''_i y lo que habíamos definido como σ .

Vemos un ejemplo: en la clase de $C_{1,(1,2,1)}^{12}$ se tiene que $l(\sigma) = 4$ y $s(\sigma) = 8$, dos representantes de esta clase son:



Se define además los polinomios $P_\sigma(m) = \binom{m}{s_1} \binom{m-s_1}{s_2} \binom{m-s_1-s_2}{s_3} \dots$ cuyo grado es $l(\sigma)$

Se demuestra además en [Va] que la clase de equivalencia racional de $C_{j,\sigma}^k$ en $Hilb_0^k \mathbb{P}^3$ no depende del plano π ni de la elección de los puntos M_i en π , ni de las rectas D'_i y D''_i ni de las otras $l(\sigma)$ rectas. Esto permite hablar de la clase de equivalencia $[C_{j,\sigma}^k]$, de notado en ocasiones $C_{j,\sigma}^k$ por abuso de notación.

Luego tenemos

$$[Hilb^k C'] = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) [C_{j,\sigma}^k]$$

y cortando los ciclos descritos con el ciclo a se obtiene el resultado.

Este resultado permite encontrar numerosas fórmulas k -secantes relativas a una curva, definiendo el ciclo a de forma adecuada. El teorema nos permite saber el grado máximo que pueden tener los polinomios que representan las fórmulas. Luego se pueden encontrar ejemplos para hallar los coeficientes de los polinomios y obtener finalmente las fórmulas. Aquí se darán algunas.

Sin embargo en este teorema, se exigen condiciones que no necesitamos imponer, por ello en nuestro trabajo utilizamos sólo una parte del resultado, usando las definiciones anteriores:

Teorema 2.5.2 *Para todo $k \geq 0$ existen ciclos $C_{j,\sigma}^k$ de $Hilb_0^k \mathbb{P}^3$ tales que para toda curva lisa C en \mathbb{P}^3 de grado n con h puntos dobles aparentes se tiene la igualdad de clases de equivalencia racional en $Hilb_0^k \mathbb{P}^3$:*

$$[Hilb^k C] = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) [C_{j,\sigma}^k]$$

Por otro lado, este método se complica si los polinomios tienen grados altos y para fórmulas más generales, por aumentar el número de ejemplos necesarios. Por ello en el siguiente caso utilizaremos simplificaciones del resultado general.

2.6. Espacios osculadores que vuelven a cortar

El trabajo de V. Vasallo [V] descrito en la sección anterior, nos permite generalizar el resultado de planos osculadores que vuelven a cortar a la curva. Pero no a partir del teorema que ahí se da, sino deduciendo a partir de su demostración simplificaciones para el caso concreto.

En este caso consideraremos una curva $C \subset \mathbb{P}^{m+2}$.

Definición 2.6.1 *Llamamos $D \subset I_m^{m+2}(\mathbb{P}^{m+2})$ a la subvariedad de $(m+2)$ -uplas que consisten en un punto de orden $m+1$ y un punto simple.*

Observamos que $\dim D = (m+2)(m+1)$, ya que elegimos un punto en \mathbb{P}^{m+2} , m direcciones, que determinan un m -espacio y otro punto del m -espacio.

Tenemos el morfismo

$$f : I_m^{m+2}(\mathbb{P}^{m+2}) \rightarrow Hilb_0^{m+2} \mathbb{P}^{m+2}$$

tal que: $(p, \eta) \rightarrow \eta$, que es la composición de la proyección en la segunda componente i y la inmersión

$$Hilb_c^k \mathbb{P}^N \subset Hilb_0^k \mathbb{P}^N.$$

Luego es genéricamente inyectiva. Además

$$Hilb^{m+2} C \subset Hilb_c^{m+2} \mathbb{P}^{m+2} \subset Hilb_0^{m+2} \mathbb{P}^{m+2}$$

tiene dimensión $m+2$. Y $\dim f^* Hilb^{m+2} C = m+2-2 = m$.

Podemos considerar el 0-ciclo $D \cdot f^* Hilb^{m+2} C$ cuyo grado es el número de espacios osculadores vuelven a cortar a la curva C , por la definición de D . Denotamos este número por $O_m(C)$:

$$O_m(C) = \deg D \cdot f^* [Hilb^{m+2} C].$$

Probamos la fórmula en el siguiente teorema:

Teorema 2.6.2 *Sea C una curva de \mathbb{P}^{m+2} de grado n y con h puntos dobles aparentes, entonces con las notaciones anteriores, para todo entero $m \geq 0$:*

$$O_m(C) = \binom{m+1}{2} [n(n^2 - (m+6)n + (3m+7)) - h(m+1)(mn - (m+1)(m+2))]$$

y si C es irreducible de género g :

$$O_m(C) = (m+1)[(n - (m+1))(n - (m+2)) + g(m \cdot n - (m+1)(m+2))]$$

Demostración.

Primero probamos que la fórmula es de la forma:

$$P_3(n) + h \cdot P_1(n),$$

donde $P_i(n)$ es un polinomio de grado i en n . Es decir, la fórmula es:

$$O_m(C) = a_1 \cdot n^3 + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n + a_4 + h(a_5 \cdot n + a_6)$$

Como ya hemos visto, Vasallo en [V] (teorema 5, pg. 292) prueba que:

Para todo $k \geq 0$ entero, existen ciclos $C_{j,\sigma}^k$ in $Hilb_0^k \mathbb{P}^3$, tal que para toda $C' \subset \mathbb{P}^3$ curva lisa de grado n y h puntos dobles aparentes, tenemos la siguiente igualdad entre las clases de equivalencia racional:

$$[Hilb^k C'] = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} \binom{h}{j} P_\sigma(n-2j) [C_{j,\sigma}^k]$$

donde $\sigma = (s_1, s_2, \dots)$ consiste en $s(\sigma)$ puntos simples diferentes en $l(\sigma)$ rectas: s_1 veces un punto en una recta, s_2 veces dos puntos en una recta, etc. $C_{j,\sigma}^k$ es un ciclo que consiste en σ , j puntos dobles, que son la intersección de las rectas: D'_i y D''_i y $k-2j-s(\sigma)$ puntos simples diferentes en las rectas D'_i y D''_i . Además

$$P_\sigma(m) = \binom{m}{s_1} \binom{m-s_1}{s_2} \dots$$

Para usar este resultado, proyectaremos genéricamente nuestra curva a otra $C' \subset \mathbb{P}^3$, desde un \mathbb{P}^{m-1} adecuado para que C y C' sean isomorfas (ya vimos que

esto era posible en el primer capítulo). La curva C' tiene por tanto grado n y h puntos dobles aparentes, al igual que C . Sea

$$\varphi : \text{Hilb}_0^{m+2}\mathbb{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_0^{m+2}\mathbb{P}^{m+2}$$

la inyección canónica y

$$\varphi_* : A(\text{Hilb}_0^{m+2}\mathbb{P}^3) \hookrightarrow A(\text{Hilb}_0^{m+2}\mathbb{P}^{m+2})$$

el morfismo asociado entre los grupos de Chow. Luego

$$[\text{Hilb}^{m+2}C] = \varphi_*[\text{Hilb}^{m+2}C']$$

(ver [H2], pg. 259). Entonces:

$$\deg(D \cdot f^*[\text{Hilb}^{m+2}C]) = \deg(D \cdot f^*\varphi_*[\text{Hilb}^{m+2}C']) = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} \binom{h}{j} R_{m+2-2j}(n)$$

donde

$$R_{m+2-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq m+2-2j} P_\sigma(n-2j) \deg(D \cdot f^*\varphi_*[C_{j,\sigma}^{m+2}].)$$

Para un ciclo general D , R_{m+2-2j} es un polinomio de grado $m+2-2j$ en n y necesitaríamos

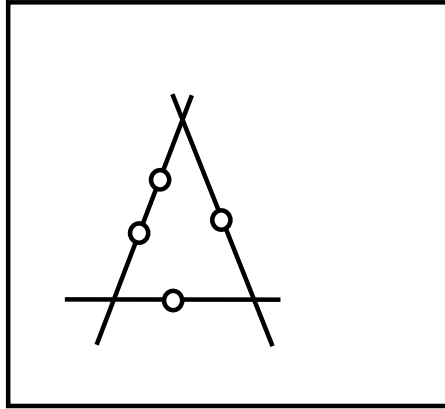
$$\sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} m+2-2j+1$$

ejemplos independientes para obtener el valor de los coeficientes. Luego, si queremos probar la fórmula para cualquier espacio osculador, necesitaríamos un número indeterminado de ejemplos. La dificultad estriba, no en obtener los ejemplos, si no en saber si los ejemplos son independientes.

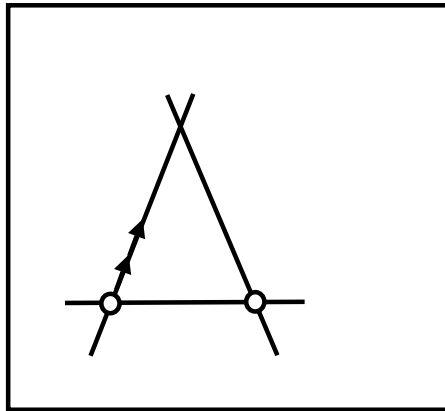
Sin embargo por la definición 2.6.1. del ciclo D , el número $l(\sigma)$ no puede ser mayor que 3, y $j \leq 1$. Esto es cierto, porque nuestro ciclo D está compuesto sólo por dos puntos, uno de ellos simple.

Vemos que efectivamente $l(\sigma) \leq 3$. Al estar D compuesto por dos puntos, es claro que pueden estar en una o dos rectas.

Vemos como puede ser $l(\sigma) = 3$ para el caso $m = 2$. El ciclo sería $C_{0,(2,1,1)}^4$. Las rectas en posición general en un plano se cortan dos a dos.



Las rectas son fijas pero los puntos se pueden elegir en un caso extremo:



Que correspondería con nuestro caso. No se puede dar nuestro caso en 4 rectas en posición general. Luego queda demostrado que la fórmula tiene la forma descrita.

Ahora, obtenemos la fórmula dando 6 ejemplos. Recordamos que por el método de las bases necesitábamos 9 (igual que si usamos el Teorema 2.5.1 de Vassallo) y sólo obteníamos la de planos osculadores.

Para encontrar estos ejemplos, primero consideramos tres curvas donde el número de espacios osculadores que vuelven a cortar es cero. Y luego tres curvas compuestas por curvas racionales, lo que es posible porque la curva puede ser reducible. Usaremos los invariantes r_m de las curvas racionales estudiados por R. Piene en [Pi2] y definidos en (1.2.2). Son el número de m -espacios osculadores que cortan un $(N - m - 1)$ -espacio general dado o el grado de la m -fold desarrollable osculatriz X^m . Para la curva racional normal estos números son: $r_m = (m + 1)(n - m)$.

- (1) La curva racional de grado $n = m + 1$, ($h = \frac{m(m-1)}{2}$), no tiene m -espacios osculadores que la vuelvan a cortar, por el grado.

- (2) El número es cero para $n = m + 2$, $h = \frac{(m+1)m}{2}$, al tratarse de la racional normal.
- (3) Y también para la curva elíptica con $n = m + 3$, $h = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - 1$. Ya que si existiera un m -espacio que corte a esta curva C en $m + 2$ puntos, podríamos definir un morfismo 1 a 1 que asocia a cada punto de C el hiperplano definido por el punto y dicho m -espacio, lo que da lugar a un morfismo birracional entre C y \mathbb{P}^1 , pero esto no es posible al ser C elíptica.
- (4) Si la curva consiste en 2 curvas racionales disjuntas de grado $m + 2$, sus invariantes son $n = 2(m + 2)$, $h = (m + 1)m + (m + 2)^2$. Los posibles m -espacios osculadores que vuelven a cortar son los m -espacios osculadores de una que cortan a la otra, luego $O_m(C) = (m+2)2(m+1) + (m+2)2(m+1)$, donde $m+2$ es el grado de una curva y $2(m+1)$ es el grado de la variedad de m -espacios osculadores r_m de la otra. Análogamente para r curvas racionales disjuntas $O_m(C) = 2\binom{r}{2}(m+2)2(m+1)$.
- (5) Para $r = 3$.
- (6) Para $r = 4$.

Con estos ejemplos podemos determinar a_1, a_2, \dots, a_6 resolviendo el sistema, y de esta forma obtenemos la fórmula:

$$O_m(C) = \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m\right)n^3 + \left(-\frac{1}{2}m^3 - \frac{7}{2}m^2 - 3m\right)n^2 + \left(\frac{3}{2}m^3 + 5m^2 + \frac{7}{2}m\right)n + h(-(m+1)mn + m^3 + 4m^2 + 5m + 2)$$

Simplificando:

$$O_m(C) = \binom{m+1}{2} [n(n^2 - (m+6)n + (3m+7)) - h(m+1)(mn - (m+1)(m+2))]$$

y para curvas irreducibles:

$$O_m(C) = (m+1)[(n - (m+1))(n - (m+2)) + g(m \cdot n - (m+1)(m+2))]$$

□

Algunos casos eran conocidos: para $m = 0$ obtenemos el número de puntos dobles aparentes (h). Y para $m = 1$ el número de rectas tangentes que vuelven a cortar a la curva.

Observación 2.6.3 *En los casos $m = 1$ y $m = 2$ la fórmula no depende del género para $n = 6$, y las fórmulas son: $O_1(C) = 24$ y $O_2(C) = 18$. En general, esto sucede para*

$$n = \frac{(m+1)(m+2)}{m},$$

si es un número entero.

Observación 2.6.4 *Con el razonamiento visto en el ejemplo (3) de la demostración, hemos probado que una curva elíptica de grado $n = m+3$ en \mathbb{P}^{m+2} no puede tener m -espacios que la corten en $m+2$ puntos. Dicho resultado será empleado para obtener ejemplos en las demás demostraciones de fórmulas que haremos a continuación.*

2.7. Fórmulas multiseccantes para curvas en \mathbb{P}^4

Para curvas en \mathbb{P}^4 existe una fórmula clásica de rectas triseccantes:

$$\Theta(C) = \binom{n-2}{3} - g(n-4),$$

dada por Berzolari en 1895, donde n es el grado y g el género si la curva es irreducible. Y,

$$\Theta(C) = h(n-4) - \frac{n(n-2)(n-4)}{3},$$

donde n es el grado y h el número de puntos dobles aparentes, si la curva puede ser reducible. En \mathbb{P}^4 podemos obtener otras fórmulas para planos k -secantes, ya que viendo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (6+2k) & \text{Cop}^k \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^4 & (4k) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{Hilb}^k C' & (k) \end{array}$$

para que haya fórmula debe cumplirse: $6+2k+k \geq 4k$, luego $6 \geq k$. Por tanto, obtendremos fórmulas de planos sextiseccantes, quintiseccantes y cuatriseccantes.

Para ello cortaremos el $(6-k)$ -ciclo $f^*[\text{Hilb}^k C]$ con k -ciclos. Por la descomposición celular que vimos, podemos usar los ciclos de Schubert de la Grassmanniana de planos en \mathbb{P}^4 ($\mathbb{G}(2,4)$) para imponer condiciones. Describimos estos ciclos (ver por ejemplo [GH]).

Si tenemos los subespacios lineales $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \Lambda_3 \subsetneq \Lambda_4$ con $\dim \Lambda_i = i$, los ciclos de Schubert son:

$$\Omega(l_0, l_1, l_2) = \{\Lambda \in \mathbb{G}(2,4) \mid \dim(\Lambda \cap \Lambda_i) \geq i \text{ para } i = 0, 1, 2\}$$

Luego estos ciclos son

Dim. 6: Todo $\mathbb{G}(2, 4)$

Dim. 5: El conjunto de planos que cortan a Λ_1 en un punto.

Dim. 4: El conjunto de planos que cortan a Λ_2 en una recta, y el conjunto de planos que contienen a Λ_0 .

Dim. 3: El conjunto de planos que cortan a Λ_2 en una recta que contiene a Λ_0 , y el conjunto de planos contenidos en Λ_3 .

Dim. 2: El conjunto de planos que contienen a Λ_1 , y el conjunto de planos contenidos en Λ_3 que contienen a Λ_0 .

Dim. 1: El conjunto de planos contenidos en Λ_3 y que contienen a Λ_1 .

Dim. 0: Λ_2 .

2.7.1. Planos sextiseccantes

Para $k = 6$ tendremos el diagrama:

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cop}^6\mathbb{P}^4 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_c^6\mathbb{P}^4 & (24) \\ & & \uparrow & \\ & & \text{Hilb}^6C & (6) \end{array}$$

Puesto que $f^*[\text{Hilb}^6C]$ es un cero ciclo, buscaremos el número de planos sextiseccantes a una curva de \mathbb{P}^4 .

Definición 2.7.1 Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ curva, definimos el número de planos que cortan a la curva en 6 puntos, $s(C)$ (o $s(n, h)$ siendo n el grado y h el número de puntos dobles aparentes de C) como el grado del 0-ciclo $f^*[\text{Hilb}^6C]$.

Teorema 2.7.2 Fórmula para el número de planos sextiseccantes.

El número de planos que cortan a una curva C , con invariantes n el grado y h el número de puntos dobles aparentes, en 6 puntos viene dado por la fórmula:

$$s(C) = \frac{1}{144}n^6 - \frac{5}{48}n^5 - \frac{83}{144}n^4 + \frac{469}{48}n^3 - \frac{2407}{72}n^2 + \frac{103}{3}n +$$

$$h\left(\frac{-1}{24}n^4 + \frac{13}{12}n^3 - \frac{59}{24}n^2 + \frac{187}{12}n + \frac{127}{3}\right) + h^2\left(\frac{15}{2} - 2n\right) + \frac{1}{6}h^3$$

y para curvas irreducibles:

$$s(C) = \frac{1}{144}(n-3)(n-4)^2(n-5)^2(n-6) - \frac{1}{12}g(n^4 - 20n^3 + 152n^2 - 523n + 694) +$$

$$\frac{1}{4}g^2(n^2 - 11n + 3) - \frac{1}{6}g^3.$$

Demostración.

Proyectamos genéricamente nuestra curva a otra $C' \subset \mathbb{P}^3$, con C y C' isomorfas. La curva C' tiene grado n y h puntos dobles aparentes. Sea

$$\varphi : \text{Hilb}_0^6 \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_0^6 \mathbb{P}^4$$

la inyección canónica y

$$\varphi_* : A(\text{Hilb}_0^6 \mathbb{P}^3) \hookrightarrow A(\text{Hilb}_0^6 \mathbb{P}^4)$$

el morfismo asociado entre los grupos de Chow. Luego

$$[\text{Hilb}^6 C] = \varphi_*[\text{Hilb}^6 C']$$

(ver [H2], pag. 259). Análogamente al caso anterior, utilizando el resultado de Vassallo:

$$\deg(f^*[\text{Hilb}^6 C]) = \deg(f^* \varphi_*[\text{Hilb}^6 C']) = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{h}{j} R_{k-2j}(n)$$

donde

$$R_{k-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} P_\sigma(n-2j) \deg(f^* \varphi_* C_{j,\sigma}^k)$$

Por tanto, nuestra fórmula ($k = 6$) será de la forma:

$$s(C) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + i + h(j \cdot n^4 + k \cdot n^3 + l \cdot n^2 + o \cdot n + p) +$$

$$h^2(u \cdot n^2 + v \cdot n + w) + h^3 \cdot x$$

luego necesitamos 16 ejemplos para obtener los valores de $a, \dots, f, i, \dots, l, o, p, u, \dots, x$.

Vemos primero 8 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y otras 8 curvas reducibles para las que deducimos el número buscado:

- (1) $s(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n = 3, h = 1$; $n = 4, h = 3$; $n = 4, h = 2$; $n = 5, h = 6$; $n = 5, h = 5$; $n = 6, h = 10$; $n = 6, h = 9$; $n = 6, h = 8$, ya que si un plano cortara a alguna en seis puntos (en algunas esto ya es imposible) cogiendo otro punto de la curva fuera de ese plano, habría un \mathbb{P}^3 que las cortaría en 7 puntos, lo que no es posible, porque el grado que tienen es menor que 7.
- (2) Si consideramos C compuesta por 2 cónicas, tal que el plano que contiene a una de ellas no corta a la otra, no puede haber planos sextiseccantes que corten a las dos cónicas. Entonces $s(C) = 2s(2, 0) = 2(64a + 32b + 16c + 8d + 4e + 2f + i)$, sustituyendo en la fórmula el grado y los puntos dobles aparentes de C obtenemos otra ecuación.
- (3) Si consideramos 3 cónicas, tal que el plano que contiene a una de ellas no corta a las otras, ya hemos visto que no hay planos sextiseccantes que corten a dos de las cónicas. Sin embargo pueden existir que corten a las tres, como es el plano que pasa por los puntos de intersección de los planos que las contienen. Cualquier otro plano que corte al plano de una cónica, le ha de cortar en una recta que cortará a la cónica en dos puntos. Por tanto cualquier otro plano sextiseccante π tendría que cortar en dos puntos a cada cónica, por tanto π cortaría a cada plano de las cónicas en una recta, que se cortarían precisamente en los puntos anteriores, es decir, sólo hay ese plano. Luego $s(C) = 1 + 3s(2, 0)$.
- (4) Si C consta de una cónica y una cúbica racional o de una cónica y una cuártica racional, de forma que el plano de la cónica no corte a la otra curva, los únicos planos sextiseccantes serán los que pueda aportar la cónica $s(2, 0)$. Esto es debido a que la cúbica y la cuártica no pueden tener planos cuatriseccantes (por ser racionales normales), luego para que un plano fuera sextiseccante tendría que cortar a la cónica en al menos 3 puntos, lo que obliga a que sea el plano que contiene a la cónica, que no corta a las otras curvas. En ambos casos $s(C) = s(2, 0)$.
- (5) Si C consta de dos cúbicas racionales en \mathbb{P}^3 's distintos, los planos sextiseccantes habrán de cortar a cada cúbica en tres puntos (por el grado). Pero eso sólo es posible si el plano está en cada uno de los \mathbb{P}^3 's, es decir, sólo puede ser el plano intersección entre ellos, es decir, $s(C) = 1$.
- (6) Análogamente, si C consta de una cúbica y una cuártica racionales, los planos sextiseccantes cortarán en tres puntos a cada curva (ya vimos que no pueden cortar en más puntos), por tanto el plano estará en el \mathbb{P}^3 de la cúbica, que corta a la cuártica en cuatro puntos, por tanto tendrá 4 planos sextiseccantes (4 puntos cogidos de 3 en 3). Luego $s(C) = 4$.

- (7) Si C consta de dos cuárticas racionales, los planos sextiseccantes cortarán en tres puntos a cada curva. Por tanto obtendremos el número de planos sextiseccantes como el número de puntos de corte de las variedades de planos triseccantes de ambas. Para ello calculamos los bigrados de dichas variedades de dimensión 3 en la Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$. Como vimos al comienzo del capítulo 2.7. existen dos ciclos de Schubert de dimensión 3, por lo cual las variedades de planos triseccantes tienen bigrado. Además tienen codimensión 3 por lo que el bigrado se obtiene cortándolas con estos ciclos de Schubert. Luego calculamos el número de planos triseccantes a la cuártica contenidos en un \mathbb{P}^3 general de \mathbb{P}^4 y los que pasan por un punto P y que cortan en una recta a un plano π que contiene a P .

El primer número será 4 ya que un \mathbb{P}^3 general, corta a la cuártica en 4 puntos y cogiéndolos de tres en tres, obtenemos los cuatro planos triseccantes que hay en esas condiciones.

El segundo número lo obtenemos proyectando la curva desde P , por lo que los planos que buscamos pasan a ser rectas triseccantes que cortan a la recta imagen de π . Este número se calcula mediante la fórmula ya citada (ver 2.1.) de rectas triseccantes a una curva de \mathbb{P}^3 que cortan a una recta dada,

$$t(C) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} - g(n-2)$$

que en nuestro caso (para una cuártica racional, $n = 4$ y $g = 0$) es 2. Por tanto el número de sextiseccantes a C es $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$.

- (8) Si C consta de 4 cónicas, de forma que el plano que contiene a cada una no corta a las otras, los planos sextiseccantes podrán ser: que corten a una cónica (sería cuatro veces el número de sextiseccantes a una cónica), que corten a 3 cónicas en 2 puntos (sería las cuatro formas de elegir 3 cónicas por un plano sextiseccante que tienen tres cónicas) o que corten a dos cónicas en 2 puntos y a las otras dos en uno.

Para calcular este último número consideraremos a las cónicas de dos en dos, formando dos cuárticas, su número de planos sextiseccantes se calcula de forma análoga al caso anterior, obteniendo $4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 32$. Este número sólo cubre 4 de los seis casos, pero por simetría, todos los casos tendrán el mismo número de planos sextiseccantes, por tanto habrá ocho por caso y en total 48. El número total de planos sextiseccantes a C será: $s(8, 24) = 4s(2, 0) + 4 + 48$.

- (9) Si C consta de 5 cónicas, tendremos los mismos casos que antes y además planos que cortan a una cónica en 2 puntos y el resto en uno. Para calcular este último número consideramos las cónicas como una cuártica y una séxtica,

obtenemos los bigrados de las variedades de planos triseccantes como en casos anteriores y obtenemos: $4 \cdot 20 + 4 \cdot 28 = 192$. Pero esto incluye dos casos de los 5 últimos y 12 de los que cortan a 2 curvas en 2 puntos y a otras 2 en uno. Por tanto el número de planos sextiseccantes para cada caso de los últimos es $(192 - 12 \cdot 8)/2 = 48$. El resultado es $s(10, 40) = 5s(2, 0) + \binom{5}{3} \cdot 1 + \binom{5}{2} \binom{3}{2} \cdot 8 + 5 \cdot 48 = 5s(2, 0) + 10 + 240 + 240$

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado. □

Observación 2.7.3 *Esta fórmula corresponde con la fórmula clásica de rectas cuatriseccantes a curvas de \mathbb{P}^4 , para el caso de planos. Existe una generalización debida a Castelnuovo, para una curva general, es el número de m -planos $(2m + 2)$ -secantes a una curva de \mathbb{P}^{m+2} :*

$$s_{2m+2}^{m+2}(C) = \sum_{i=0}^{m+2} \frac{(-1)^i}{m+2-i} \binom{n-1-m-i}{m+1-i} \binom{n-2-m-i}{m+1-i} \binom{g}{i}$$

2.7.2. Planos quintiseccantes

Para $k = 5$, tenemos el diagrama:

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cop}^5 \mathbb{P}^4 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_c^5 \mathbb{P}^4 & (20) \\ & & \uparrow & \\ & & \text{Hilb}^5 C & (5) \end{array}$$

como $f^*[\text{Hilb}^5 C]$ tiene dimensión 1, necesitaremos cortar con un 1-ciclo de $\text{Cop}^5 \mathbb{P}^4$ para poder obtener una fórmula. Por una descomposición celular análoga a la que vimos en la sección anterior,

$$A^1(\text{Cop}^5 \mathbb{P}^4) = pr^* A^0(\mathbb{G}(2, 4)) \otimes A^1(\text{Hilb}^5 \mathbb{P}^2) \oplus pr^* A^1(\mathbb{G}(2, 4)) \otimes A^0(\text{Hilb}^5 \mathbb{P}^2).$$

Si consideramos 1-ciclos del segundo sumando tendríamos que imponer condiciones a los puntos. Por ello, vemos sólo los generadores del primer sumando, en este caso consideramos, por analogía con las fórmulas clásicas de rectas multiseccantes a curvas, el ciclo de Schubert y cinco puntos libres, es decir: planos quintiseccantes a la curva que cortan a una recta fija en un punto.

Definición 2.7.4 Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ curva, definimos el número de planos que cortan a la curva en 5 puntos y que cortan a una recta fija en un punto, $Q(C)$ (o $Q(n, h)$ siendo n, h los invariantes de C) como el grado del 0-ciclo $E \cdot f^*[Hilb^5 C]$, siendo E el 1-ciclo de $Cop^5 \mathbb{P}^4$ de las 5-uplas en un plano, cuyo plano corta a una recta fija en un punto.

Teorema 2.7.5 Fórmula para el número de planos quintiseccantes que cortan a una recta en un punto.

El número de planos que cortan a una curva C , con invariantes n y h , en cinco puntos y a una recta fija en un punto viene dado por la fórmula:

$$Q(C) = \frac{1}{6}(n-4)[3n(n-2)(n-3) - h(n^2 + 7n - 27) + 3h^2]$$

y para curvas irreducibles:

$$Q(C) = \frac{1}{24}(n-4)[(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) - 4g(2n^2 - 16n + 33) + 12g^2].$$

Demostración. Proyectamos genéricamente nuestra curva a otra $C' \subset \mathbb{P}^3$, con C y C' isomorfas. La curva C' tiene grado n y h puntos dobles aparentes. Sea

$$\varphi : Hilb_0^5 \mathbb{P}^3 \hookrightarrow Hilb_0^5 \mathbb{P}^4$$

la inyección canónica y

$$\varphi_* : A(Hilb_0^5 \mathbb{P}^3) \hookrightarrow A(Hilb_0^5 \mathbb{P}^4)$$

el morfismo asociado entre los grupos de Chow. Luego

$$[Hilb^5 C] = \varphi_*[Hilb^5 C'].$$

Análogamente al caso anterior:

$$\deg(E \cdot f^*[Hilb^5 C]) = \deg(E \cdot f^* \varphi_*[Hilb^5 C']) = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{h}{j} R_{k-2j}(n)$$

donde

$$R_{k-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} P_\sigma(n-2j) \deg(E \cdot f^* \varphi_* C_{j,\sigma}^k)$$

Por tanto, nuestra fórmula ($k = 5$) será de la forma:

$$Q(C) = a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f + h(i \cdot n^3 + j \cdot n^2 + k \cdot n + l) + h^2(o \cdot n + p)$$

luego necesitamos 12 ejemplos para obtener los valores de $a, \dots, f, i, \dots, l, o, p$.

Vemos primero 7 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y otras 5 curvas reducibles para las que deducimos el número buscado:

- (1) $Q(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n = 2, h = 0$; $n = 3, h = 1$; $n = 4, h = 4$; $n = 4, h = 3$; $n = 4, h = 2$; $n = 5, h = 6$; $n = 5, h = 5$ ya que si un plano cortara a alguna en cinco puntos (en algunas esto ya es imposible) cogiendo otro punto de la curva fuera de ese plano, habría un \mathbb{P}^3 que las cortaría en 6 puntos, lo que no es posible, por el grado que tienen. En el caso de la cónica podría pensarse en el plano que la contiene pero éste en general no cortará a la recta fija, lo mismo sucederá con dos cónicas de invariantes $n = 4, h = 4$.
- (2) Si C consta de una cónica y una cúbica racional, la única posibilidad es que el plano corte a la cónica en dos puntos y a la cúbica en tres (para ello el plano estará contenido en el \mathbb{P}^3 de la cúbica). El plano de la cónica y el \mathbb{P}^3 de la cúbica se cortarán en una recta, que corta a la cónica en dos puntos, y con el punto de intersección del \mathbb{P}^3 de la cúbica con la recta fija se forma el único plano quintiseccante que corta a dicha recta fija, es decir, $Q(5, 7) = 1$.
- (3) Si C consta de dos cúbicas racionales en \mathbb{P}^3 's distintos, los planos quintiseccantes habrán de cortar a una cúbica en tres puntos y a otra en dos (por el grado), pero eso sólo es posible si el plano está en uno de los \mathbb{P}^3 's, llamémosle Λ . La recta fija corta a cada \mathbb{P}^3 en un punto. Formamos planos con el punto de la recta fija que está en Λ y dos de los 3 puntos de la curva del otro \mathbb{P}^3 y del plano intersección entre los \mathbb{P}^3 's. Será pues: $Q(6, 11) = 2 \binom{3}{2} = 6$.
- (4) Si C consta de 3 cónicas en planos que se cortan en puntos que no están en las cónicas, los planos que buscamos deberán cortar a dos cónicas en dos puntos y a la otra en uno. Para calcular este número consideraremos dos cónicas formando una cuártica, cortaremos pues la variedad de planos triseccantes a una cuártica de invariantes $n = 4, h = 4$, cuyo bigrado era como vimos $(4, 4)$ con la variedad de planos biseccantes a una cónica que cortan a una recta fija.

Para calcular el bigrado de esta última variedad, vemos primero el número de planos biseccantes que cortan a una recta fija que están en un \mathbb{P}^3 . Éste corta a la cónica en dos puntos y a la recta en uno y eso nos da un único plano. Y después el número de planos que pasan por un punto y cortan a un plano que lo contiene en una recta. Proyectando la curva desde dicho punto el número buscado es el de rectas biseccantes que cortan a dos rectas fijas, que es

el grado de esta congruencia, que es $h + \binom{n}{2}$, en este caso $0 + 1 = 1$. Obtenemos $4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 8$ que corresponde con dos de los posibles casos, por simetría el número buscado será $Q(6, 12) = 3 \cdot 4 = 12$.

- (5) Análogamente, si C consta de una cúbica y una cuártica racionales, cortaremos la variedad de planos trisecantes a una cuártica de invariantes $n = 4$, $h = 3$, cuyo bigrado era como vimos $(4, 2)$ con la variedad de planos bisecantes a una cúbica que cortan a una recta fija. Como antes vemos el número de planos bisecantes que cortan a una recta fija que están en un \mathbb{P}^3 , éste corta a la cúbica en tres puntos y a la recta en uno y eso nos da $\binom{3}{2} = 3$ planos. Y el número de planos bisecantes que pasan por un punto y cortan a un plano que lo contiene en una recta. Proyectando la curva desde dicho punto, el número buscado es el de rectas bisecantes que cortan a dos rectas fijas, es decir, el grado de esta congruencia, que es $h + \binom{n}{2}$, en este caso $1 + \binom{3}{2} = 4$. Obtenemos por tanto $4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20$.

Además los planos que cortan en tres puntos a la cúbica y en dos a la cuártica han de estar en el \mathbb{P}^3 de la cúbica que corta a la cuártica en 4 puntos y a la recta fija en uno, con este y 2 de la cuártica obtenemos todos los posibles: $\binom{4}{2} = 6$. Luego el número buscado será $Q(6, 12) = 20 + 6 = 26$.

- (6) Si C consta de dos cuárticas racionales normales, como no pueden tener más de tres puntos en un plano, cortaremos la variedad de planos trisecantes a una cuártica ($n = 4$, $h = 3$), cuyo bigrado era como vimos $(4, 2)$ con la variedad de planos bisecantes a la otra cuártica que cortan a una recta fija.

Como antes vemos el número de planos bisecantes que cortan a una recta fija que están en un \mathbb{P}^3 , éste corta a la cuártica en 4 puntos y a la recta en uno y eso nos da $\binom{4}{2} = 6$ planos. Y el número de planos bisecantes que pasan por un punto y cortan a un plano que lo contiene en una recta. Proyectando la curva desde dicho punto, el número buscado es el de rectas bisecantes que cortan a dos rectas fijas, es decir, el grado de esta congruencia, que es $h + \binom{n}{2}$, en este caso $3 + \binom{4}{2} = 9$. Obtenemos por tanto $4 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 42$. Luego el número buscado será $Q(6, 12) = 2 \cdot 42 = 84$.

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado.

□

2.7.3. Planos cuatriseccantes

Para el caso de $k = 4$ tenemos el diagrama:

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cop}^4\mathbb{P}^4 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_c^4\mathbb{P}^4 & (16) \\ & & \uparrow & \\ & & \text{Hilb}^4C & (4) \end{array}$$

Como $f^*[\text{Hilb}^4C]$ tiene dimensión 3, deberemos cortar con un 3-ciclo. Sin imponer condiciones a los puntos y utilizando los ciclos de Schubert, podríamos estudiar los planos cuatriseccantes que cortan a un plano fijo en una recta, que veremos a continuación y los que contienen un punto fijo. Pero este segundo caso coincide con el número de rectas cuatriseccantes en \mathbb{P}^3 , sin más que proyectar desde el punto fijo. También vimos el caso particular de los planos osculadores que vuelven a cortar por analogía con las fórmulas clásicas. Y por similitud con la fórmula de las rectas bitangentes, estudiaremos el caso de los planos bitangentes.

Definición 2.7.6 Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ curva, definimos el número de planos que cortan a la curva en 4 puntos y que cortan a un plano fijo en una recta, $c^4(C)$ (o $c^4(n, h)$ siendo n, h los invariantes de C) como el grado del 0-ciclo $F \cdot f^*[\text{Hilb}^4C]$, siendo: F el 3-ciclo de $\text{Cop}^4\mathbb{P}^4$ de los cuatripletos en un plano que corta a un plano fijo en una recta.

Teorema 2.7.7 Fórmula para el número de planos cuatriseccantes que cortan a un plano en una recta.

El número de planos que cortan a una curva C de \mathbb{P}^4 , con invariantes n y h , en cuatro puntos y a un plano fijo en una recta viene dado por la fórmula:

$$c^4(C) = \frac{-1}{8}(n-2)(n-3)[n(n-1) - 4h]$$

y para curvas irreducibles:

$$c^4(C) = \frac{1}{8}(n-2)(n-3)[(n-1)(n-4) - 4g] = 3 \binom{n-1}{4} - g \binom{n-2}{2}.$$

Demostración.

Proyectamos genéricamente nuestra curva a otra $C' \subset \mathbb{P}^3$, con C y C' isomorfas. La curva C' tiene grado n y h puntos dobles aparentes. Sea

$$\varphi : \text{Hilb}_0^4\mathbb{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_0^4\mathbb{P}^4$$

la inyección canónica y

$$\varphi_* : A(\text{Hilb}_0^4 \mathbb{P}^3) \hookrightarrow A(\text{Hilb}_0^4 \mathbb{P}^4)$$

el morfismo asociado entre los grupos de Chow. Luego

$$[\text{Hilb}^4 C] = \varphi_*[\text{Hilb}^4 C'].$$

Análogamente al caso anterior:

$$\deg(F \cdot f^*[\text{Hilb}^4 C]) = \deg(F \cdot f^* \varphi_*[\text{Hilb}^4 C']) = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{h}{j} R_{k-2j}(n)$$

donde

$$R_{k-2j}(n) = \sum_{s(\sigma) \leq k-2j} P_\sigma(n-2j) \deg(F \cdot f^* \varphi_* C_{j,\sigma}^k)$$

Por tanto, nuestra fórmula ($k = 4$) será de la forma:

$$c^4(C) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + h(f \cdot n^2 + i \cdot n + j) + h^2 k.$$

luego necesitamos 9 ejemplos para obtener los valores de a, \dots, f, i, j, k .

Vemos primero 3 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y las otras 6 curvas reducibles las agrupamos en dos:

- (1) $c^4(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n = 2, h = 0$ (podría pensarse en el plano que la contiene pero éste en general no cortará al plano fijo en una recta); $n = 3, h = 1$ (no puede haber ningún plano que la corte en 4 puntos, por el grado); $n = 4, h = 3$ (por ser la racional normal no tiene cuatro puntos en un plano).
- (2) Si C consta de dos cónicas es un problema análogo al de planos sextiseccantes a tres cónicas, debido a que ha de cortar al plano fijo en una recta, por tanto ese número es uno: $c^4(4, 4) = 1$. Si consta de tres cónicas, será análogo al problema de los planos sextiseccantes a 4 cónicas $c^4(6, 12) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 27$. Si son cuatro,

$$c^4(8, 24) = \binom{4}{2} 1 + \binom{4}{1} \binom{3}{1} 8 + 48 = 150.$$

Y si son cinco,

$$c^4(10, 40) = \binom{5}{2} 1 + \binom{5}{2} \binom{3}{1} 8 + 5 \cdot 48 = 490.$$

- (3) Para obtener $c^4(C)$ siendo C una quintica ya sea racional o elíptica, podemos utilizar la fórmula para el número de planos sextiseccantes, aplicada a una curva compuesta por dos de estas curvas, que se podía calcular cortando por un lado las variedades de planos triseccantes y por otro la de planos cuatriseccantes con la de biseccantes. Para ello calcularíamos los bigrados, que son: el bigrado de la variedad de planos triseccantes es

$$\left(\binom{5}{3}, \frac{(5-1)(5-2)(5-3)}{3} - g(5-3) \right),$$

el de la variedad de planos biseccantes es $(\binom{5}{2}, h)$ y el de la de planos cuatriseccantes es

$$\left(\frac{1}{12}(5-2)(5-3)^2(5-4) - \frac{1}{2}g(5^2 - 7 \cdot 5 + 13 - g), c^4(5, h) \right),$$

siendo g y h los invariantes de las quinticas. Obtenemos por tanto $c^4(5, 6) = 3$ y $c^4(5, 5) = 0$ (para esta última ver también la observación 2.6.4).

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado.

□

Conjetura 2.7.8 *Por la similitud de nuestra fórmula:*

$$3 \binom{n-1}{4} - g \binom{n-2}{2},$$

con la fórmula de rectas triseccantes, a curvas de \mathbb{P}^3 , que cortan a una recta:

$$2 \binom{n-1}{3} - g \binom{n-2}{1},$$

se observa una posible regla de recurrencia. Daría la fórmula general para el número de m -espacios $(m+2)$ -secantes a una curva de \mathbb{P}^{m+2} , que cortan a un m -espacio en un $(m-1)$ -espacio:

$$(m+1) \binom{n-1}{m+2} - g \binom{n-2}{m}.$$

Se cumpliría incluso para $m = 0$, que sería el número de puntos dobles en \mathbb{P}^2 :

$$h = 1 \binom{n-1}{2} - g \binom{n-2}{0}.$$

Definición 2.7.9 Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ curva, definimos el número de planos bitangentes a la curva, $b(C)$ (o $b(n, h)$ siendo n, h los invariantes de C) como el grado del 0-ciclo $G \cdot f^*[\text{Hilb}^4 C]$, siendo: G el 3-ciclo de $\text{Cop}^4 \mathbb{P}^4$ de los cuatripletos en un plano que constan de dos puntos dobles.

Teorema 2.7.10 Fórmula para el número de planos bitangentes.

El número de planos bitangentes a una curva C , con invariantes n y h , viene dado por la fórmula:

$$b(C) = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2 - 12n + 23) + 2h(5n - 11) - 2h^2$$

y para curvas irreducibles:

$$b(C) = (n-2)(n-3)(n-4) + 2g(n^2 - 8n + 13) - 2g^2.$$

Demostración. Análogamente al caso anterior con el ciclo G , nuestra fórmula será de la forma:

$$b(C) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + h(f \cdot n^2 + i \cdot n + j) + h^2 k.$$

por tanto necesitamos 9 ejemplos para obtener los valores de a, \dots, f, i, j, k .

Vemos primero 3 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y otra curva reducible. Las otras 5 condiciones las obtendremos por medio de curvas formadas a partir de cónicas:

- (1) $b(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n = 3, h = 1$ (no puede haber ningún plano que la corte en 4 puntos, por el grado); $n = 4, h = 3$ (por ser la racional normal no tiene cuatro puntos en un plano); $n = 5, h = 5$ (ver la observación 2.6.4).
- (2) Si C consta de dos cónicas aparte del plano que contiene a cada una, un plano bitangente contiene una tangente de cada, las rectas tangentes a cada cónica se cortarían en un punto, luego deberá ser el de intersección de los planos que las contienen, por ese punto cada cónica tiene dos tangentes, por ello

$$b(4, 4) = 2b(2, 0) + \binom{2}{1} \binom{2}{1}.$$

Si consta de tres cónicas, análogamente de dos en dos

$$b(6, 12) = 3b(2, 0) + \binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1}.$$

De hecho para n cónicas,

$$b(2n, 4 \binom{n}{2}) = nb(2, 0) + \binom{n}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1}.$$

Esta igualdad nos proporciona 5 ecuaciones, igualando los coeficientes por grados.

- (3) Si C consta de una cónica C_1 y una cúbica racional C_2 , aparte del plano que contiene a la cónica, otro bitangente será tangente a la cónica y a la cúbica. Por tanto las rectas tangentes a cada curva se cortarían. El plano de la cónica y el \mathbb{P}^3 de la cúbica se cortan en una recta. Como ya vimos dada una curva $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ su m -rango r_m es el número de m -espacios osculadores que cortan a un $(N - m - 1)$ -subespacio general fijado de \mathbb{P}^N (ver la definición 1.2.2). Para curvas racionales este número es: $r_m = (m + 1)(N - m)$. Si denotamos $r_1(C_i)$ al 1-rango de la curva C_i , con $i = 1, 2$, obtenemos

$$c(5, 7) = b(2, 0) + r_1(C_1) \cdot r_1(C_2) = b(2, 0) + 2 \cdot 4.$$

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado. □

2.7.4. Otros

Las posibles fórmulas para planos trisecantes serían:

- Planos trisecantes que cortan un plano fijo en una recta que contiene un punto fijo: pero, proyectando la curva desde ese punto fijo, esto equivaldría al número de rectas trisecantes en \mathbb{P}^3 que cortan a una recta en un punto.
- Planos trisecantes contenidos en un 3-plano fijo: pero todo 3-plano corta a una curva de \mathbb{P}^4 en su grado n , luego este número sería $\binom{n}{3}$.

Las posibles fórmulas para planos bisecantes serían:

- Planos bisecantes que contiene una recta fija: pero, proyectando la curva desde esa recta fija, esto equivaldría al número de puntos dobles aparentes.
- Planos bisecantes contenidos en un 3-plano fijo y que contienen un punto fijo: pero, proyectando la curva desde ese punto fijo, esto equivaldría al número de rectas bisecantes contenidas en un plano fijo, dicho plano corta a la curva de \mathbb{P}^3 en su grado n , luego este número sería $\binom{n}{2}$.

2.8. Fórmula cuatrisecante en \mathbb{P}^5 y \mathbb{P}^6

2.8.1. Planos cuatrisecantes en \mathbb{P}^5

En \mathbb{P}^5 podríamos obtener otras fórmulas para planos k -secantes, ya que viendo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (9 + 2k) & \text{Cop}^k \mathbb{P}^5 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^5 & (5k) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{Hilb}^k C' & (k) \end{array}$$

Para que haya fórmula debe cumplirse: $9 + 2k + k \geq 5k$, luego $9 \geq 2k$ y $k = 4$. Habría que cortar con un 1-ciclo. Sin imponer condiciones a los puntos y utilizando el ciclo de Schubert, calcularemos el número de planos cuatrisecantes que corten a un plano fijo en un punto.

Definición 2.8.1 Sea $C \subset \mathbb{P}^5$ curva, definimos el número de planos que cortan a la curva en 4 puntos y que cortan a un plano fijo en un punto, $c^5(C)$ (o $c^5(n, h)$ siendo n, h los invariantes de C) como el grado del 0-ciclo $H \cdot f^*[\text{Hilb}^4 C]$, siendo H el 1-ciclo de $\text{Cop}^4 \mathbb{P}^5$, de los cuatripletos en un plano que corta a un plano fijo en un punto y

$$\begin{array}{ccc} (17) & \text{Cop}^4 \mathbb{P}^5 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_c^4 \mathbb{P}^5 & (20) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{Hilb}^4 C & (4) \end{array}$$

Teorema 2.8.2 Fórmula para el número de planos cuatrisecantes a una curva de \mathbb{P}^5 que corta a un plano fijo en un punto.

El número de planos que cortan a una curva C de \mathbb{P}^5 , con invariantes n y h , en cuatro puntos y que cortan a un plano fijo en un punto, viene dado por la fórmula:

$$c^5(C) = (n - 2) \left(\frac{5}{4} n^3 - \frac{25}{2} n^2 + \frac{153}{4} n - 30 \right) - \frac{1}{2} h (n^2 - 16n + 31) + \frac{1}{2} h^2$$

y para curvas irreducibles:

$$c^5(C) = \frac{1}{8} (n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) - \frac{1}{2} g (2n^2 - 16n + 31) + \frac{1}{2} g^2.$$

Demostración. Como en los casos anteriores, nuestra fórmula será de la forma:

$$c^5(C) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + h(f \cdot n^2 + i \cdot n + j) + h^2 k.$$

por tanto necesitamos 9 ejemplos para obtener los valores de a, \dots, f, i, j, k .

Vemos primero 6 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y otras 3 curvas reducibles para las que deducimos el número buscado:

- (1) $c^5(C)$ es cero para curvas de invariantes: $n = 2, h = 0$ (podría pensarse en el plano que la contiene pero éste en general no cortará al plano fijo); $n = 3, h = 1$ (no puede haber ningún plano que la corte en 4 puntos, por el grado); $n = 4, h = 3$ (por ser la racional normal no tiene cuatro puntos en un plano); $n = 5, h = 6$ (análogamente); $n = 5, h = 5$ (la quintica elíptica como ya vimos no puede tener planos cuatrisecantes, observación 2.6.4); $n = 6, h = 9$ (la séxtica elíptica no puede tener planos cuatrisecantes, ya que tendría espacios de dimensión 3 quintisecantes lo que no es posible por la observación 2.6.4).
- (2) Si C consta de dos cónicas de tal forma que los planos que las contienen no se corten, (los invariantes son $n = 4, h = 4$), como por lo general dos planos en \mathbb{P}^5 no se cortan, los planos que contienen a las cónicas no cortarán al plano dado y al no cortarse tampoco entre ellos no hay posibilidad de planos cuatrisecantes que cortan al plano fijo en un punto.
- (3) Si C consta de una cónica y una cúbica, cada una por separado no tienen planos cuatrisecantes que cortan a un plano fijo. No puede haber un plano trisecante a una y cortar a la otra, ya que estaría contenido (al no tener rectas trisecantes) en el plano de la cónica o el \mathbb{P}^3 de la cúbica que se cortan en un punto P que en general no estará en las curvas. Deberá cortar a cada curva en dos puntos que dan lugar a rectas que se han de cortar en P . La cúbica sólo tiene una bisecante por un punto fijo (h) que con el plano de la cónica generan un \mathbb{P}^3 . Éste corta al plano fijo en un punto que define con la bisecante a la cúbica el único plano en las condiciones requeridas, entonces: $c^5(5, 7) = 1$.
- (4) Con los ejemplos vistos hasta ahora, aunque la fórmula aún dependa de algún parámetro, sustituyendo para la cuártica elíptica de \mathbb{P}^3 , obtenemos que $c^5(4, 2) = 1$. Entonces, análogamente al caso anterior, si C consta de una cónica y una cuártica elíptica de un \mathbb{P}^3 , los planos bisecantes a cada curva que cortan al plano fijo en un punto, son dos (el h de la cuártica). Además como en el caso anterior no puede haber un plano trisecante a una y cortar a la otra, ya que la cuártica elíptica tampoco tiene rectas trisecantes por ser intersección completa de dos cuádricas irreducibles (una lisa y un cono), una recta trisecante tendría que estar contenida en las cuádricas. Entonces: $c^5(6, 10) = 1 + 2$.

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado.

□

Observación 2.8.3 *Una posible generalización de esta fórmula sería la obtención del número de m -espacios $(m + 2)$ -secantes a una curva de \mathbb{P}^{2m+1} que cortan a un*

m-espacio en un punto. Para intentar obtener esta generalización buscamos una relación entre las fórmulas conocidas, que son los casos $m = 1$ y $m = 2$. Sin embargo, estas relaciones parecen no cumplirse si tratamos de obtener la fórmula para $m = 3$, a la vista de los ejemplos que conocemos. Estos ejemplos son, por otro lado, insuficientes para obtener dicha fórmula. Queda pues abierto este problema.

2.8.2. Planos cuatriseccantes en \mathbb{P}^6

En \mathbb{P}^6 tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (12 + 2k) & \text{Cop}^k \mathbb{P}^6 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_0^k \mathbb{P}^6 & (6k) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{Hilb}^k C' & (k) \end{array}$$

Para que haya fórmula debe cumplirse: $12 + 2k + k \geq 6k$, luego $12 \geq 3k$ y $k = 4$. Obtendremos, por tanto, la fórmula para el número de planos cuatriseccantes para una curva en \mathbb{P}^6 .

Definición 2.8.4 Sea $C \subset \mathbb{P}^6$ curva, definimos el número de planos que cortan a la curva en 4 puntos, $c^6(C)$ (o $c^6(n, h)$ siendo n, h los invariantes de C) como el grado del 0-ciclo $f^*[\text{Hilb}^4 C]$, siendo

$$\begin{array}{ccc} (20) & \text{Cop}^4 \mathbb{P}^6 & \xrightarrow{f} & \text{Hilb}_c^4 \mathbb{P}^6 & (24) \\ & & & \uparrow & \\ & & & \text{Hilb}^4 C & (4) \end{array}$$

Teorema 2.8.5 Fórmula para el número de planos cuatriseccantes a una curva de \mathbb{P}^6 .

El número de planos que cortan a una curva C de \mathbb{P}^6 , con invariantes n y h , en cuatro puntos viene dado por la fórmula:

$$c^6(C) = \frac{-1}{12}n(n-4)(n^2 - 20n + 39) - \frac{1}{2}h(8n - 29) + \frac{1}{2}h^2$$

y para curvas irreducibles:

$$c^6(C) = \frac{1}{24}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) - \frac{1}{2}g(n^2 - 11n + 31) + \frac{1}{2}g^2.$$

Demostración. Como en los casos anteriores, nuestra fórmula será de la forma:

$$c^6(C) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + h(f \cdot n^2 + i \cdot n + j) + h^2k.$$

Necesitaremos, pues, 9 ejemplos para obtener los valores de a, \dots, f, i, j, k .

Vemos primero 4 curvas irreducibles para las cuales el número buscado es cero y otras 5 curvas reducibles para las que deducimos el número buscado:

- (1) $c^6(C)$ es cero para curvas racionales normales: $n = 3, h = 1$; $n = 4, h = 3$; $n = 5, h = 6$; $n = 6, h = 10$, por la propiedad de las curvas racionales normales en las que no puede haber cuatro puntos en un plano (no estarían en posición general).
- (2) Si C consta de dos cónicas será: $c^6(4, 4) = 2c^6(2, 0)$, ya que si hubiera otro plano, cortaría a cada cónica en dos puntos y las rectas que dan lugar se cortarían en un punto común a los planos en los que están contenidas, pero dos planos en \mathbb{P}^6 no se cortan por lo general.
- (3) Si C consta de una cónica y una cúbica racional el plano de la cónica y el \mathbb{P}^3 de la cúbica, en general, no se cortarán, luego no puede haber ningún plano que corte a ambas curvas, luego $c^6(5, 7) = c^6(2, 0)$.
- (4) Si C consta de dos cúbicas racionales en \mathbb{P}^3 's distintos, los planos cuatrisecantes habrán de cortar en dos puntos a cada cúbica, ya que si cortara a una cúbica en tres puntos, el plano estaría en su \mathbb{P}^3 que corta al otro en un punto que en general no estará en la otra cúbica. los dos puntos de cada cúbica generarán rectas que se cortan en el punto común a los \mathbb{P}^3 's. Como el número de rectas bisecantes a una cúbica racional, que pasan por un punto fijo es $h = 1$, entonces $c^6(6, 11) = \binom{1}{1} \binom{1}{1} = 1$.
- (5) Por un razonamiento análogo, si C consta de una cuártica elíptica y una cúbica racional, será

$$c^6(7, 12) = \binom{2}{1} \binom{1}{1} + c^6(4, 2).$$

Y si consta de dos cuárticas elípticas, será:

$$c^6(8, 20) = \binom{2}{1} \binom{2}{1} + 2c^6(4, 2).$$

Con estos ejemplos podemos obtener los valores desconocidos resolviendo el sistema, y así obtenemos la fórmula del enunciado.

□

Observación 2.8.6 *Esta fórmula corresponde con la fórmula clásica de rectas trise-cantes a curvas de \mathbb{P}^4 , para el caso de planos. También existe una generalización*

debida a Castelnuovo, para una curva general, es el número de m -planos $(m+2)$ -secantes a una curva de \mathbb{P}^{2m+2} :

$$s_{m+2}^{2m+2}(C) = \sum_{i=0} (-1)^i \binom{n-1-m-2i}{m+2-2i} \binom{g}{i}$$

Capítulo 3

Validez de las fórmulas

3.1. Introducción

Las fórmulas clásicas fueron demostradas para una curva más o menos general, así como muchas fórmulas dadas posteriormente por diversos autores. Le Barz prueba entre otras las cuatro fórmulas clásicas vistas en el segundo capítulo, de rectas multiseccantes, para cualquier curva lisa. Pero estas fórmulas para el número de multiseccantes son válidas sólo si este número es finito. Lo mismo sucede con las fórmulas aquí probadas, son válidas para cualquier curva siempre que el número buscado sea finito en cuyo caso el número corresponde con el de la fórmula.

Por ejemplo, existen curvas con infinitas rectas cuatriseccantes en \mathbb{P}^3 pero que al sustituir el grado y el género en la fórmula da un número positivo: una curva, contenida en una superficie cuádrlica, de tipo $(2, 4)$, tiene grado 6 y género 3. Toda una familia de rectas de la cuádrlica corta en 4 puntos a la curva y sin embargo al sustituir en la fórmula de rectas cuatriseccantes da 0.

Por otro lado, aunque la fórmula sólo depende del grado y del género, pueden existir dos curvas que tengan igual grado y género y que para una el número sea finito y para la otra no. Por ejemplo, en el caso anterior de grado 6 y género 3, hemos visto que si la curva está en una superficie cuádrlica tiene infinitas cuatriseccantes, pero no todas están en cuádrlicas y veremos que estas no pueden tener infinitas cuatriseccantes, luego por la fórmula tienen cero.

El número obtenido en la fórmula puede ser negativo. Por ejemplo una curva de tipo $(4, 4)$ en una superficie cuádrlica lisa, al sustituir en la fórmula de rectas cuatriseccantes obtenemos $q = -4$. Esta curva tiene infinitas cuatriseccantes, además el -4 nos indica que esta curva no puede ser “deformada” a una curva con un número finito de cuatriseccantes. En efecto, para grado $n = 8$ y género $g = 9$, la curva es

necesariamente intersección completa de una cuádrica y una cuártica, luego toda curva de grado 8 y género 9 tiene infinitas cuatriseccantes.

Lo que las fórmulas aseguran es que si el número buscado es finito, entonces corresponde con el número obtenido en la fórmula. Si el número es finito, en la fórmula ha de dar un entero positivo o nulo. Por tanto si da un valor negativo el número debe ser infinito. Analizamos pues para qué valores de n y g nuestras fórmulas dan un valor negativo. También estamos interesados en saber para que valores da cero, aunque en ese caso no se puede asegurar que el número buscado sea cero a no ser que se conozca la curva. La no existencia de multiseccantes ha sido estudiada desde distintas perspectivas. Una de ellas corresponde con el estudio de fibrados de orden superior definidos en la sección segunda del cuarto capítulo.

Si una fórmula está definida para curvas en \mathbb{P}^N , por lo general, salvo quizá unos pocos casos, si una curva está contenida en un \mathbb{P}^{N-1} , es decir, es degenerada, el número buscado será infinito.

Resolveremos, para el caso de espacios osculadores a una curva que vuelven a cortar a dicha curva, el problema de validez. Haremos un estudio para el caso de rectas cuatriseccantes. A continuación vemos dónde las fórmulas dan negativo (en ese caso el número real es infinito) y dónde cero (pudiendo ser o no el número real).

3.2. Curvas para las cuales las fórmulas dan cero o negativo

Vemos primero las rectas multiseccantes:

1. Para el número de rectas cuatriseccantes en \mathbb{P}^3

G. Martens prueba en su artículo “Über den Clifford-Index algebraischer Kurven” ([Mr]) que las curvas de \mathbb{P}^3 sin rectas cuatriseccantes están o en una cuádrica o en dos cúbicas. Estas son las curvas de grados y géneros: $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 4)$ en cuádricas y $(5, 1)$, $(6, 3)$, $(7, 5)$ y $(9, 10)$ en dos cúbicas irreducibles. Aunque la fórmula da cero para otros grados y géneros pero el número real es infinito (o es plana o está en una cuádrica con grado mayor que 7, lo veremos en la siguiente sección).

La fórmula da negativo si

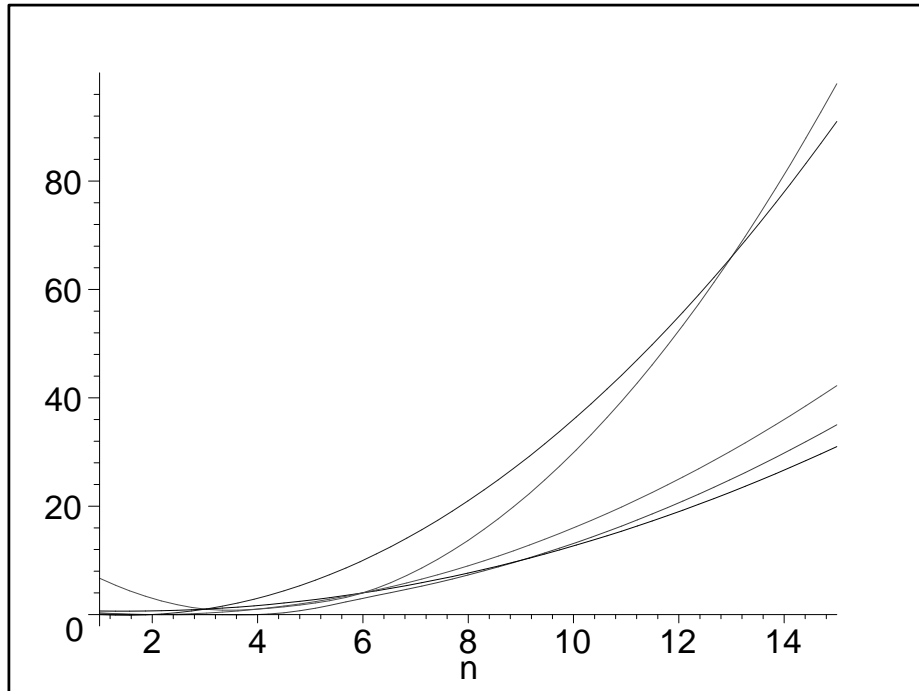
$$g < \frac{6(n^2 - 7n + 13) + \sqrt{36(n^2 - 7n + 13)^2 - 24(n - 3)^2(n - 2)(n - 4)}}{12}$$

y si

$$g > \frac{6(n^2 - 7n + 13) - \sqrt{36(n^2 - 7n + 13)^2 - 24(n-3)^2(n-2)(n-4)}}{12}$$

lo cual sólo sucede para curvas planas de grados mayores que 13 y curvas en cuádricas con grados mayores que 7 (por el máximo género de una curva que no está en una cuádrica $G(n, 3)$, ver [H3]).

Las siguientes curvas representan por orden de arriba a abajo de la parte derecha: $g = \frac{6(n^2-7n+13)+\sqrt{36(n^2-7n+13)^2-24(n-3)^2(n-2)(n-4)}}{12}$, curvas planas, cota de Castelnuovo, $g = \frac{6(n^2-7n+13)-\sqrt{36(n^2-7n+13)^2-24(n-3)^2(n-2)(n-4)}}{12}$ y $G(n, 3)$



2. Para el número de rectas trisecantes en \mathbb{P}^4

G. Martens prueba en [Mr] que las curvas de \mathbb{P}^4 sin rectas trisecantes son las curvas de grados y géneros: $(4, 0)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$ y la curva canónica de género 5 no trigonal $((8, 5))$. Aparte de las degeneradas $(2, 0)$ y $(3, 0)$. La fórmula también da cero para todas las de grado 4 (aparte de la racional son degeneradas con infinitas trisecantes) y en cada grado existe un género para el que da cero, pero a partir de grado 9 son curvas en \mathbb{P}^3 con infinitas trisecantes.

La fórmula es negativa si $n > 4$ y $g > \frac{(n-2)(n-3)}{6}$, lo cual sólo sucede para curvas en \mathbb{P}^3 .

3. Para el número de rectas trisecantes que cortan a una recta en \mathbb{P}^3

La fórmula es cero para $n = 2$ ó $g = \frac{(n-1)(n-3)}{3}$, para $n > 5$ el género supera la cota de Castelnuovo (Teorema 1.1.2). Obtenemos pues las curvas de grados y géneros: $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 1)$ para las cuales el número de trisecantes que cortan una recta es efectivamente cero.

La fórmula sólo es negativa para las curvas planas de grado mayor que 2 ($g > \frac{(n-1)(n-3)}{3}$).

Vemos ahora los planos multiseccantes:

1. Para el número de planos cuatriseccantes en \mathbb{P}^6

La fórmula es cero para las curvas de grados y géneros: $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ (curva plana), $(5, 0)$, $(5, 1)$, $(6, 0)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, $(7, 2)$, $(8, 2)$, $(8, 5)$, $(9, 3)$, $(9, 10)$ (no existe, ver capítulo 1), $(12, 7)$, $(97, 804)$. La fórmula no se anula para ningún otro grado menor de 3000 (hemos usado un procedimiento en Maple, pero no permite concluir si hay más, ya que se bloquea). Para grados menores que 7 (salvo la plana) de hecho es cero por el grado. Para la elíptica de grado 7 también es cero ya que no puede tener ningún \mathbb{P}^4 sextiseccante (2.6.4.). Además a partir de grado 97 (incluido) son curvas degeneradas, es decir, en algún \mathbb{P}^5

La fórmula es negativa si

$$g < \frac{(n^2 - 11n + 31) + \sqrt{(n^2 - 11n + 31)^2 - 1/3(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}}{2}$$

y si

$$g > \frac{(n^2 - 11n + 31) + \sqrt{(n^2 - 11n + 31)^2 - 1/3(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}}{2}$$

2. Para el número de planos cuatriseccantes que cortan a un plano en una recta en \mathbb{P}^4

La fórmula es cero para las curvas de grados y géneros: $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 1)$ y a partir de 5, para cada grado n , $g = \frac{(n-1)(n-4)}{4}$ siendo $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Pero para grado mayor que 5 son curvas de \mathbb{P}^3 donde el número es infinito.

La fórmula es negativa si $g > \frac{(n-1)(n-4)}{4}$. Son curvas de \mathbb{P}^3 donde el número es infinito.

Vemos por último los espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva:

- Observando la fórmula, vemos que, para curvas irreducibles, el número de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva es cero sólo para los ejemplos (1), (2), (3) descritos en la demostración la fórmula, es decir: la curva racional de grado $m + 1$ ($h = \frac{m(m-1)}{2}$), la curva racional normal de grado $m + 2$ ($h = \frac{(m+1)m}{2}$) y la curva elíptica de grado $n = m + 3$ con $h = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - 1$ puntos dobles aparentes.

Si igualamos a cero la fórmula obtenemos

$$g = -\frac{(n - (m + 1))(n - (m + 2))}{mn - (m + 1)(m + 2)}$$

y para $n > m + 3$, g da negativo. En el caso $m = 1$, obtenemos además la curva de grado 5 y género 6, pero ese número es en realidad infinito porque es una curva plana.

- Vemos cuando obtenemos en la fórmula un número negativo:

En el caso $m = 1$, obtenemos para $n < 6$ que

$$\frac{(n - 2)(n - 3)}{6 - n} < g$$

y esto sucede sólo para dos curvas planas ($n = 3$, $g = 1$ and $n = 4$, $g = 3$) para las cuales el número de rectas tangentes que vuelven a cortar a la curva es infinito. Para $n = 6$ da 24 para cualquier género. Para $n > 6$ obtenemos que

$$-\frac{(n - 2)(n - 3)}{n - 6} > g$$

valores negativos que no se pueden obtener ni con curvas reducibles.

En el caso $m = 2$, obtenemos para $n < 6$ que

$$\frac{(n - 3)(n - 4)}{2(6 - n)} < g$$

y esto sucede sólo para algunas curvas en \mathbb{P}^3 ($n = 3$, $g > 0$; $n = 4$, $g > 0$; $n = 5$, $g > 1$) para las cuales el número de planos osculadores que vuelven a cortar a la curva es infinito. Para $n = 6$ da 18 para cualquier género. Para $n > 6$ obtenemos que

$$-\frac{(n - 3)(n - 4)}{2(6 - n)} > g$$

valores negativos que no se pueden obtener ni con curvas reducibles.

Para el caso general tenemos para $n < \frac{(m+1)(m+2)}{m}$ que

$$\frac{(n - (m + 1))(n - (m + 2))}{(m + 1)(m + 2) - mn} < g$$

que sucederá para algunas curvas de \mathbb{P}^{m+1} . Para $n = \frac{(m+1)(m+2)}{m}$ (si es un número entero) da $(m + 1)(n - (m + 1))(n - (m + 2))$ para cualquier género. Para $n > \frac{(m+1)(m+2)}{m}$ obtenemos que

$$-\frac{(n - (m + 1))(n - (m + 2))}{mn - (m + 1)(m + 2)} > g.$$

3.3. Curvas osculantemente degeneradas

En el artículo *On the tangentially degenerate curves* ([Ka]), Hajime Kaji demuestra que si una curva en \mathbb{P}^3 no está contenida en un plano, entonces tiene sólo un número finito de puntos cuya tangente corta a la curva de nuevo, es decir, la curva no es tangencialmente degenerada. Aquí generalizamos el resultado y la demostración de Kaji a espacios osculadores a curvas. Gracias al uso de Maple simplificamos la demostración dada por Kaji, en la que usa propiedades de ciertos polinomios.

Definición 3.3.1 *Una curva C en \mathbb{P}^N es m -osculantemente degenerada si, para un punto general P de C , existe otro punto Q en C que pertenece al espacio osculador de orden m de C en P .*

Para espacios osculadores de orden arbitrario m en \mathbb{P}^{m+1} es claro, por cuestión de grados, que todas las curvas, salvo la racional normal, son m -osculantemente degeneradas. Además probaremos que para C curva de \mathbb{P}^N con $N \geq m + 2$, si es osculantemente degenerada, entonces C está contenida en un \mathbb{P}^{m+1} .

Sea C curva de \mathbb{P}^N , $\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ inmersión cerrada, $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$. En esta sección necesitaremos imponer que C sea irreducible, ya que si no el resultado principal no sería cierto. Probamos que las únicas curvas de \mathbb{P}^N con $N \geq m + 2$, que tienen un número infinito de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva son las curvas contenidas en un \mathbb{P}^{m+1} . Pero una curva no contenida en un \mathbb{P}^{m+1} con una componente en un \mathbb{P}^{m+1} cuyo grado es mayor que $m + 1$, tiene un número infinito de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva.

Los espacios osculadores $Osc_C^m(P)$ son las fibras de un $(m + 1)$ -fibrado proyectivo en C , que llamaremos el *fibrado osculador de orden m* : $Osc^m C$. Sea $\mathcal{P}^m =$

$\mathcal{P}^m(\mathcal{O}_C(1))$ el fibrado de partes principales de orden m de $\mathcal{O}_C(1) = \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ (ver [Kl], capítulo 4). Tenemos los siguientes diagramas conmutativos y sucesiones exactas (las aplicaciones verticales son sobreyectivas por ser ϕ no ramificada):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \phi^*\omega_{\mathbb{P}^N}^1 \otimes \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & V_C = V \otimes \mathcal{O}_C & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \omega_C^1 \otimes \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & \mathcal{P}^1 & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & \text{Sym}^m \omega_C^1(1) & \rightarrow & \mathcal{P}^m & \rightarrow & \mathcal{P}^{m-1} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$\text{Osc}^m C$ es el fibrado proyectivo sobre C asociado a \mathcal{P}^m , con proyecciones

$$p^m : \text{Osc}^m C \rightarrow C,$$

para $m = 1$ denotamos TC . Sea C_m la sección de p^m asociada a la aplicación sobre $\mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{O}_C(1)$.

Llamamos q^m a la composición de la proyección $\mathbb{P}^N \times C \rightarrow \mathbb{P}^N$ y la inmersión cerrada $\text{Osc}^m C \rightarrow \mathbb{P}^N \times C$ y X^m la imagen por q^m . Intuitivamente, C_m es el conjunto de puntos de osculación de orden m de C en $\text{Osc}^m C$ y X^m es la unión de los espacios osculadores de orden m de C .

TC es el fibrado proyectivo tangente y X^1 la superficie tangencial de C . $\text{Osc}^m C$ es el fibrado proyectivo osculante de orden m y X^m la $(m+1)$ -fold osculante de C .

Obtenemos los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \hookrightarrow & TC & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \times C \\ & \searrow & \swarrow \searrow & & \downarrow \\ & & C & \hookrightarrow & X^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^N \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C_m & \hookrightarrow & \text{Osc}^m C & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \times C \\ & \searrow & p^m \swarrow \searrow q^m & & \downarrow \\ & & C & \hookrightarrow & X^m \hookrightarrow \mathbb{P}^N \end{array}$$

Siendo $p^m : \text{Osc}^m C \rightarrow C$ y $q^m : \text{Osc}^m C \rightarrow X^m$.

Lema 3.3.2 *Se puede escribir*

$$(q^m)^*C = rC_m + D$$

para cierto $r \geq m+1$ y D ciclo de codimensión m en $\text{Osc}^m C$. Este ciclo es efectivo y no contiene la componente C_m .

Demostración. Como el morfismo $q^m : \text{Osc}^m C \rightarrow X^m$ es ramificado a lo largo de C_m , el ciclo $(q^m)^* C - (m+1)C_m$ es efectivo. \square

Por la definición de m -osculantemente degenerada, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.3.3 *Sea C curva en \mathbb{P}^N . Son equivalentes:*

- (a) C es m -osculantemente degenerada.
- (b) El ciclo D en $\text{Osc}^m C$ es no vacío.

(los puntos de D corresponden con los puntos de la intersección de C con m -espacios osculadores, que no son puntos de osculación)

Observación 3.3.4 *Sea \mathcal{L} fibrado lineal de C , tenemos la sucesión exacta:*

$$0 \rightarrow \text{Sym}^2 \omega_C^1 \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}^2(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{P}^1(\mathcal{L}) \rightarrow 0$$

Siendo $\mathcal{P}^1(\mathcal{L})$ y $\mathcal{P}^2(\mathcal{L})$ los fibrados de partes principales de \mathcal{L} de primer y segundo orden. La única extensión no trivial de \mathcal{L} por $\text{Sym}^2 \omega_C^1 \otimes \mathcal{L}$ es $\mathcal{P}^2(\mathcal{L})$.

3.3.1. Curvas de \mathbb{P}^{m+1} no m -osculantemente degeneradas

Sea C curva de grado n en \mathbb{P}^{m+1} . Con la notación anterior, vemos que la $(m+1)$ -fold osculante X^m de C es igual al espacio proyectivo \mathbb{P}^{m+1} . Si C no es m -osculantemente degenerada, entonces para el punto general $P \in C$, el espacio osculador $\text{Osc}_C^m(P)$ de C en P no corta a C de nuevo. Luego por el teorema de Bezout la multiplicidad de intersección del hiperplano $\text{Osc}_C^m(P)$ con C en P es igual a n , y viceversa si la multiplicidad de intersección de $\text{Osc}_C^m(P)$ con C en un punto general P de C es n , entonces C no es m -osculantemente degenerada. Luego podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 3.3.5 *Sea C curva de grado n en \mathbb{P}^{m+1} . Son equivalentes:*

- (a) C tiene grado menor o igual que $m+1$.
- (b) C no es m -osculantemente degenerada.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b). Es obvio por el grado.

(b) \Rightarrow (a). Para el punto general P , $Osc_C^m(P)$ es un hiperplano y tienen con C orden de contacto el grado de la curva. Por tanto si el grado fuera mayor que $m + 1$ habría infinitos puntos de hiperosculación, lo que no es posible en característica cero. \square

Observación 3.3.6 *Este resultado es válido para una curva singular, porque el número de singularidades en característica cero es finito y el número de posibles espacios osculadores en los puntos singulares es finito.*

Observación 3.3.7 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$, variedad algebraica de dimensión $r > 1$. Podemos definir el m -espacio osculador $Osc_X^m(P)$ como el espacio lineal de dimensión $\binom{m}{r}$ de \mathbb{P}^N con mayor orden de contacto con X en P . Y decimos que X es osculantemente degenerada de orden m si el número de puntos de X cuyo espacio osculador de orden m corta a X en otro punto es infinito. Si $N = \binom{r+m}{r}$, X será m -osculantemente degenerada si y sólo si su grado es mayor que $m + 1$.*

3.3.2. Degeneración 2-osculante en curvas de \mathbb{P}^N , $N \geq 4$

En esta sección, consideramos degeneración osculante, para planos osculadores. Podemos además hacer algo similar para m -espacios osculadores, para un m particular. El resultado más importante de esta sección es el teorema siguiente:

Teorema 3.3.8 *Sea C curva en \mathbb{P}^N , con $N \geq 4$. Si C es osculantemente degenerada de orden 2, entonces C está contenida en un \mathbb{P}^3 .*

Para la demostración de este teorema, probamos primero el siguiente lema:

Lema 3.3.9 *Sea C curva en \mathbb{P}^N y TC el fibrado tangente de C considerado como un subfibrado de Osc^2C . Si C es 2-osculantemente degenerada, entonces TC corta al ciclo D de Osc^2C .*

Demostración. Supongamos que TC y D son disjuntos y que D es irreducible (si no podemos hacer el mismo razonamiento para cada componente). Sea D_1 la normalización de D . Haciendo una extensión base: $\pi : D_1 \rightarrow D \rightarrow C$ (donde el segundo morfismo es p^2), obtenemos una sección de D del pull back de Osc^2C a un fibrado de D_1 . Considerando el pull back de TC también, obtenemos un morfismo

sobreyectivo $\pi^*\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{L} \oplus \pi^*\mathcal{P}^1$, donde \mathcal{L} es el fibrado correspondiente a la sección. Entonces $\mathcal{P}^2 \rightarrow \pi_*\mathcal{L} \oplus \mathcal{P}^1$ es sobreyectiva y al ser estos fibrados del mismo rango y TC y D disjuntos es un isomorfismo, como consecuencia $\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^1$ tiene una inversa. Esto significa que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Sym}^2\omega_C^1(1) \rightarrow \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^1 \rightarrow 0$$

es escindida. Pero entonces, por la demostración de la proposición 3.21. en [Po] (pag. 200) la sucesión

$$0 \rightarrow \omega_C^1 \otimes \mathcal{O}_C(1) \rightarrow \mathcal{P}^1 \rightarrow \mathcal{O}_C(1) \rightarrow 0$$

sería escindida también y por el corolario 1.18. de [Ka] obtenemos una contradicción. \square

Demostración del teorema.

Como se ha visto TC corta al ciclo D , por el lema, luego existirán, en un entorno, dos polinomios con una raíz común. Pero si suponemos que $C \subset \mathbb{P}^N$, con $N \geq 4$, esos polinomios no tendrán ninguna raíz común y llegamos a una contradicción:

Denotamos por $p^2 : \text{Osc}^2C \rightarrow C$, la proyección y C_2 la sección de p^2 asociada al morfismo sobre $\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{O}_C(1)$. Así C_2 es el conjunto de puntos de C en Osc^2C , considerado como puntos de osculación de orden 2 de C . Podemos identificar C_2 y C_1 debido a que TC es un subfibrado de Osc^2C , luego podemos considerar que D corte a TC en C_2 o no. Vemos primero el caso de que D y TC se cortan en C_2 :

Sea D_0 una componente de D que corta a C_2 y $n : D_1 \rightarrow D_0$ la normalización de D_0 , entonces existe $y \in D_1$ tal que $n(y) \in C_2 \cap D_0$. Si denotamos $p_2 = p^2 \circ n$, $q_2 = q^2 \circ n$ y $x = p_2(y) = q_2(y) \in C$. Sea $t \in \mathcal{O}_{C,x}$ parámetro local en x y $u \in \mathcal{O}_{D_1,y}$ parámetro local en y .

En un entorno de x , $\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ viene definida por (x_1, x_2, \dots, x_N) , con x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ funciones racionales en $\mathcal{O}_{C,x}$. Entonces p_2 está definida por

$$(p_2^*x_1, p_2^*x_2, \dots, p_2^*x_N)$$

y q_2 por

$$(q_2^*x_1, q_2^*x_2, \dots, q_2^*x_N),$$

siendo $p_2^*x_i$ y $q_2^*x_i$ racionales en $\mathcal{O}_{D_1,y}$ con $i = 1, 2, \dots, N$.

Para todo $y' \in D_1$, $q_2(y') \in \text{Osc}_C^2 p_2(y')$ por definición, en particular para y . Además el plano osculador estará determinado por la recta tangente y la recta que une el punto de osculación con el otro punto de corte del osculador con la curva.

Por tanto, el rango de la siguiente matriz será menor que 3:

$$A = \begin{pmatrix} q_2^*x_1 - p_2^*x_1 & \dots & q_2^*x_N - p_2^*x_N \\ p_2^*\dot{x}_1 & \dots & p_2^*\dot{x}_N \\ p_2^*\ddot{x}_1 & \dots & p_2^*\ddot{x}_N \end{pmatrix}$$

Donde

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

y

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$$

en $\mathcal{O}_{C,x}$. Dicho de otro modo si el osculador vuelve a cortar, los menores de orden 3 de la matriz anterior son cero.

Consideramos

$$x_i = t^{a_i} + (\text{términos de mayor grado})$$

en $\mathcal{O}_{C,x}$ con

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq a_5 \leq \dots \leq a_N \leq \infty, (t^\infty = 0)$$

Siendo $1 = a_1$ por ser ϕ no ramificada y los $<$ porque $C \subset \mathbb{P}^N$, con $N \geq 4$.

Podemos escribir: $p_2^*t = u^d + \dots$ con $d \geq 1$ y $q_2^*t = c'u^e + \dots$ con $e \geq 1$, $c' \in \mathbb{C}^*$. Se tiene que $d \leq e$, ya que si suponemos lo contrario y consideramos el menor de A formado con las tres primeras columnas y consideramos los términos de menor grado obtenemos dos términos:

$$c'^{a_3} a_2 (a_2 - 1) u^{a_3 e + d(a_2 - 2)} \text{ y } c'^{a_2} a_3 (a_3 - 1) u^{a_2 e + d(a_3 - 2)}$$

que serán no nulos y uno de ellos será el de menor grado, ya que si ambos son de igual grado, es decir,

$$a_3 e + d(a_2 - 2) = a_2 e + d(a_3 - 2),$$

entonces $(a_2 - a_3)(e - d) = 0$ pero $a_2 < a_3$ y hemos supuesto que $e < d$, por tanto ha de ser $d \leq e$.

Así podemos escribir: $q_2^*t = cu^d + \dots$ con $c \in \mathbb{C}$. Luego, desarrollando el menor formado con las tres primeras columnas, el coeficiente del término de menor grado es:

$$a_2 a_3 (a_3 - a_2) (c - 1) - a_3 (a_3 - 1) (c^{a_2} - 1) + a_2 (a_2 - 1) (c^{a_3} - 1).$$

El cual habrá de ser nulo y también lo que queda de dividirlo entre $(c - 1)$, ya que $c = 1$ es una raíz irrelevante para $p_2^*t = q_2^*t$, es decir:

$$a_2 a_3 (a_3 - a_2) - a_3 (a_3 - 1) (c^{a_2 - 1} + c^{a_2 - 2} \dots + 1) + a_2 (a_2 - 1) (c^{a_3 - 1} + c^{a_3 - 2} \dots + 1) = 0.$$

Análogamente si desarrollamos el menor formado con las columnas primera, segunda y cuarta, obtenemos:

$$a_2 a_4 (a_4 - a_2) - a_4 (a_4 - 1) (c^{a_2-1} + c^{a_2-2} \dots + 1) + a_2 (a_2 - 1) (c^{a_4-1} + c^{a_4-2} \dots + 1) = 0.$$

Así los polinomios anteriores tendrían una raíz común en c . Pero se demuestra con ayuda del programa Maple V que esto no puede ser:

Definimos los polinomios con el procedimiento siguiente:

```
p:=proc(x,a,b)
-----
  b*(1-b)*sum(x ^ k,'k'=0..a-1)+a*(a-1)*sum(x ^ k,'k'=0..b-1)+a*b*(b-a)
-----
end;
```

Donde a será a_2 y b o bien a_3 o bien a_4 , en cada caso. Resolvemos las ecuaciones anteriores, con otro procedimiento:

```
S:=proc(a,b)
-----
  solve(p(x,a,b),x)
-----
end;
```

Y con el comando `intersect` obtendríamos las soluciones comunes:

`S(a,b) intersect S(a,c);`

Siendo $a=a_2$ $b=a_3$ $c=a_4$. Se comprueba que la solución es el vacío, es decir, que esos dos polinomios no pueden tener raíces comunes y por tanto llegamos a una contradicción que viene de suponer que $a_3 < a_4$.

El segundo caso es que D no corta a TC en C_2 , estaríamos en el caso de tangentes que vuelven a cortar. Consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} TC & \hookrightarrow & Osc^2 C & & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow q' & \searrow & \\ C & \hookrightarrow & X & \hookrightarrow & X^2 \end{array}$$

Siendo $q' : Osc^2 C \rightarrow X$ el morfismo que hace corresponder a cada plano osculador la recta tangente correspondiente. El resto de morfismos son conocidos.

Sea ahora D_0 una componente de D que corta a TC y $n : D_1 \rightarrow D_0$ su normalización, entonces existe $y \in D_1$ tal que $n(y) \in TC \cup D_0$. por tanto, si denotamos $p_1 = p^2 \circ n$ y $q_1 = q' \circ n$, $x = p_1(y) = q_1(y) \in C$. Sea $t \in \mathcal{O}_{C,x}$ parámetro local en x y $u \in \mathcal{O}_{D_1,y}$ parámetro local en y . Como antes.

En un entorno de x , $\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ viene definida por (x_1, x_2, \dots, x_N) , con x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ funciones racionales en $\mathcal{O}_{C,x}$. Entonces p_1 está definida por

$$(p_1^* x_1, p_1^* x_2, \dots, p_1^* x_N)$$

y q_1 por

$$(q_1^*x_1, q_1^*x_2, \dots, q_1^*x_N),$$

siendo $p_1^*x_i$ y $q_1^*x_i$ racionales en $\mathcal{O}_{D_1, y}$ con $i = 1, 2, \dots, N$.

Para todo $y' \in D_0$, $q_1(y') \in \text{Osc}_C^2 p_1(y')$ por definición, en particular para y . Además la recta tangente estará determinada por la recta que une el punto de tangencia con el otro punto de corte de la tangente con la curva. Por tanto,

$$p_1^*x_i(q_1^*x_j - p_1^*x_j) = p_1^*x_j(q_1^*x_i - p_1^*x_i)$$

Si como antes consideramos

$$x_i = t^{a_i} + (\text{términos de mayor grado}).$$

Podemos escribir: $p_1^*t = u^d + \dots$ con $d \geq 1$ y $q_1^*t = c'u^e + \dots$ con $e \geq 1, c' \in \mathbb{C}^*$. Y por un razonamiento análogo al del caso anterior, se tiene que $d \leq e$. Así podemos escribir: $q_1^*t = cu^d + \dots$ con $c \in \mathbb{C}$. El coeficiente del término de menor grado nos da las relaciones:

$$a_1(c^{a_2} - 1) = a_2(c^{a_1} - 1)$$

y

$$a_1(c^{a_3} - 1) = a_3(c^{a_1} - 1).$$

Por ser $c = 1$ una raíz irrelevante para $p_1^*t = q_1^*t$:

$$c^{a_2-2} + 2c^{a_2-3} \dots + (a_2 - 1) = 0$$

$$c^{a_3-2} + 2c^{a_3-3} \dots + (a_3 - 1) = 0.$$

Así los polinomios anteriores tendrían una raíz común en c . Pero se demuestra con ayuda del programa MapleV que esto no puede ser y por tanto llegamos a una contradicción que viene de suponer que $a_3 < a_4$.

Como consecuencia, la curva C está contenida en cierto \mathbb{P}^3 .

□

Conjetura 3.3.10 *Este resultado es válido para el número de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a una curva de \mathbb{P}^N , con $N \geq m + 2$, para un m en particular. Sólo hay que considerar la intersección de D con $\text{Osc}^{m-1}C$ en $\text{Osc}^m C$, luego la intersección de D con $\text{Osc}^{m-2}C \subset \text{Osc}^{m-1}C$, y así sucesivamente. Pero la prueba con un m indeterminado presenta problemas de cálculo de determinantes de orden indefinido, que MapleV no puede resolver. Sin embargo, conjeturamos que el número de m -espacios osculadores a una curva de \mathbb{P}^N , con $N \geq m + 2$, que vuelven a cortar a dicha curva es finito.*

Observación 3.3.11 *Las únicas curvas reducibles con un número infinito de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva son: las curvas con una componente en un \mathbb{P}^{m+1} y las curvas con una componente contenida en la m -ésima desarrollable oscultriz de otra componente de la curva. El resto de curvas reducibles tienen un número finito de m -espacios osculadores que vuelven a cortar a la curva, porque cada componente tiene un número finito y cortan a la m -ésima desarrollable oscultriz de las otras componentes en un número finito de puntos (por las dimensiones).*

3.4. Cuatrisecantes a una curva de \mathbb{P}^3

3.4.1. Sobre superficies regladas

Consideraremos las superficies regladas, según la definición clásica, es decir, una superficie formada por un sistema infinito de dimensión uno de rectas (llamadas generadores). Así lo define Edge en *The Theory of Ruled Surfaces* ([Ed]), donde se encuentran la mayor parte de los resultados de superficies regladas que veremos a continuación. Observamos que en esta definición se incluyen los conos.

Toda curva de \mathbb{P}^3 está en alguna superficie reglada. Si la curva tiene infinitas trisecantes, la variedad de rectas trisecantes será una superficie reglada que la contiene. Y si tiene infinitas cuatrisecantes, la variedad de cuatrisecantes será una componente de la anterior. Algunas propiedades de las superficies regladas nos pueden ayudar en el estudio de las rectas multiseccantes a curvas (ver [Ed]). Toda curva de la superficie corta a cada generador en un número fijo de puntos.

1. En una superficie reglada de grado d en \mathbb{P}^3 , todo generador es cortado por otros $d - 2$. Hay en la superficie una curva doble que corta a cada generador en $d - 2$ puntos. Esta curva es el lugar de puntos de intersección de pares de generadores (pg. 8).
2. El género de una superficie reglada es el género de la sección hiperplana (pg. 8).
3. Una directriz es una curva de la superficie reglada que es cortada por los generadores en un punto (pg. 37).
4. En una superficie reglada S de grado d y género p en \mathbb{P}^r , si hay una curva simple de grado n que corta a cada generador en k puntos, entonces su género es: $g = (n - 1)(k - 1) + pk - 1/2dk(k - 1)$ (pg. 15).

5. La curva doble (puntos por los que pasan 2 generadores) de una superficie reglada S de grado d y género p , tiene grado: $n = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - p$ y género $g = \frac{1}{2}(d-5)(d+2p-2) + 1$. Hay que tener en cuenta que dicha curva puede ser reducible (pg. 28).
6. Dos curvas simples de grados m y m' en S que corten a los generadores en k y k' puntos respectivamente se cortan en $mk' + m'k - nkk'$ puntos (pg. 311).
7. Dada una superficie reglada en \mathbb{P}^3 existen, en general, un número finito de puntos triples (puntos por los que pasan 3 generadores, luego han de estar contenidos en la curva doble) y consecuentemente de planos tritangentes, es decir, planos contienen tres generadores. Si el grado de la superficie es d y su género p existe una fórmula enumerativa para dichos números coincidentes y es:

$$\frac{1}{6}(d-2)(d-3)(d-4) - p(d-4)$$

Observamos que coincide con el número de rectas trisecantes a una curva de \mathbb{P}^4 . Hay que tener en cuenta que si el número es infinito existirá una curva triple contenida en la curva doble (pg. 30,31).

8. Existen dos tipos de variedades regladas de grado 3 (aparte de los conos). Una de ellas tiene dos rectas R y R' que cortan a todos los generadores, es decir, son directrices. Por cada punto de R pasan dos generadores que están en un plano que contiene a R' y todo plano que contiene a R' contiene dos generadores que se cortan en un punto de R . El otro tipo tiene una directriz R que es a su vez un generador, por cada punto de R pasa un generador distinto de R y cada plano que contiene a R contiene un generador distinto de R (pg. 32,33).

3.4.2. Superficies de grado 2 y 3

Para una curva C contenida en una superficie cuádrica Q , saber las rectas multiseccantes (que la cortan en 3 o más puntos) que tiene C es tan sencillo como saber de qué tipo es, o su grado y género. Esto se debe a que si C es de tipo (a, b) (tendrá grado $n = a + b$ y género $g = (a-1)(b-1)$, dados n y g si existen a y b , es decir, si la curva está en una cuádrica, son únicos) significa que de las dos familias de rectas de Q una corta a C en a puntos y la otra en b . Como además toda multiseccante de C ha de estar contenida en Q (por ser Q de grado 2), las dos familias de Q son las únicas posibles multiseccantes de C . Por ello C sólo puede tener 0 rectas k -secantes, si a y b son menores que k , ó infinitas, en caso contrario.

Dado un grado y un género podemos saber si existen curvas en una cuádrica, pero a menudo con el mismo grado y género puede haber curvas que estén y curvas

que no estén en cuádricas. Sin embargo sabemos que el máximo género que puede tener una curva de grado n no contenida en una cuádrica es:

$$G(n, 3) = \frac{1}{6}n(n - 3) + 1 - \epsilon$$

donde ϵ es 0 ó $2/3$ si n es congruente con 0 módulo 3 o no, respectivamente (ver [H3]). Es decir, que si el género está entre este valor y la cota de Castelnuovo todas las curvas para el grado y género dados están en una cuádrica.

Sea C una curva contenida en una superficie cúbica S . Las rectas k -secantes de C con $k > 3$ estarán contenidas en S . Luego C sólo puede tener infinitas rectas k -secantes si S es reglada, ya que las no regladas sólo tienen un número finito de rectas.

Las superficies cúbicas pueden ser lisas, con singularidades aisladas o regladas, en las que se puede incluir (o no) los conos cúbicos. Sobre las regladas ya hablamos en el apartado anterior, vamos a analizar las superficies cúbicas con singularidades aisladas.

Existen 21 tipos de superficies cúbicas con singularidades aisladas, que fueron clasificadas por Cayley (ver [Ca]) según el número de puntos dobles de cada tipo que tuviera. Henderson en [He] da una descripción detallada de los 21 tipos. También resulta interesante cómo Roberts en [Ro] obtiene algunos tipos explotando un plano en 6 puntos en diversas posiciones.

3.4.3. Validez de la fórmula de rectas cuatrisecantes

En este trabajo se demuestra que el número de planos osculadores que vuelven a cortar es finito para toda curva no degenerada de \mathbb{P}^4 . Pero si tratamos de ver la finitud para los otros casos, estudiados en el capítulo 2, enseguida observamos que no es cierto. Además no es fácil saber para qué curvas el número buscado es finito, ya que los posibles fibrados que tendríamos que emplear serían los fibrados secantes, pero estos sólo nos proporcionarían otra forma de llegar a las fórmulas que ya han sido obtenidas. Esto es debido a la imposibilidad de distinguir entre sí los puntos de corte en un espacio k -secante. Sin embargo, en este capítulo hemos hecho un estudio para el caso de rectas cuatrisecantes a curvas de \mathbb{P}^3 y demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1 *El número de rectas cuatrisecantes a una curva de \mathbb{P}^3 de grado menor que 8 es infinito si y sólo si la curva está en \mathbb{P}^2 o en una superficie cuádrica y es de la forma (a, b) siendo $0 < a$ o $b > 3$.*

Dye hace una demostración hasta grado 6 (ver [Dy] pg.72). Sin embargo aquí haremos una demostración por separado para remarcar algunas cuestiones geométricas interesantes.

En esta sección las curvas estarán en \mathbb{P}^3 , no contenidas en \mathbb{P}^2 , ya que en \mathbb{P}^2 sólo las de grado menor que 4 tienen un número finito de cuatrisecante.

Además consideraremos las superficies regladas, según la definición clásica, es decir, una superficie formada por un sistema simple infinito de rectas (esta definición incluye los conos). Así lo define Edge en [Ed], donde se encuentran la mayor parte de los resultados de superficies regladas que aquí se usan (ver sección 3.4.1.). La variedad de rectas trisecantes a una curva (con infinitas rectas trisecantes) será pues una superficie reglada, análogamente lo será la variedad de rectas cuatrisecantes a curvas con infinitas cuatrisecantes.

Observación 3.4.2 *Por lo visto en 3.4.2. todas las curvas de grado mayor que 6 contenidas en una cuádrica tienen infinitas cuatrisecantes, ya que si C es de tipo (a, b) o bien a o bien b o ambos serán al menos 4. Además observamos que si a y b son menores que 4 el número de rectas cuatrisecantes a C es 0 y son: la cónica $(1, 1)$, la cúbica racional normal $(1, 2)$, la cuártica racional $(1, 3)$, la cuártica elíptica $(2, 2)$, quíntica de género 2 $(2, 3)$ y la séxtica de género 4 $(3, 3)$. Esto ya se vió en la sección anterior (3.1.).*

Proposición 3.4.3 *El teorema es cierto para grado menor que 6. De hecho tienen menos de 3 rectas cuatrisecantes.*

Demostración.

Sea C una curva de \mathbb{P}^3 de grado menor que 6. C no puede tener dos rectas cuatrisecantes coplanarias, ya que generarían un plano que cortaría a C en 8 puntos, lo que es imposible por tener grado menor que 6. Por tanto si C tiene más de dos rectas cuatrisecantes r , s y l al no ser coplanarias dos a dos generan una superficie cuádrica lisa Q que corta a C en 12 puntos. Pero al ser el grado de C menor que 6 esto sólo puede suceder si $C \subset Q$. Por la observación anterior queda demostrado este resultado.

□

Si una curva C está contenida en una cuádrica y es de tipo (a, b) , tiene infinitas rectas trisecantes (respectivamente cuatrisecantes) si o a o b es mayor que 2 (respectivamente 3). En cuyo caso la variedad de rectas trisecantes (respectivamente cuatrisecantes) será la propia cuádrica contada quizá varias veces. El grado de la

variedad de trisecantes de una curva de grado n y género g es

$$2\binom{n-1}{3} - g(n-2),$$

luego si C es por ejemplo de tipo $(3, 3)$ la variedad de rectas trisecantes es la cuádrica contada 2 veces, el grado es $2\binom{5}{3} - 4(6-2) = 4$. Si la curva es de tipo $(2, 4)$ la variedad de trisecantes estará contada $\binom{4}{3} = 4$ veces ya que una cuatriscante cuenta como 4 trisecantes y el grado da $2\binom{5}{3} - 3(6-2) = 8$. En general, si C es de tipo (a, b) con a o b mayor que 2 la variedad de trisecantes será la cuádrica contada $(\binom{a}{3} + \binom{b}{3})$ -veces y el grado de la variedad es

$$2\binom{a+b-1}{3} - (a-1)(b-1)(a+b-2) = 2\left(\binom{a}{3} + \binom{b}{3}\right)$$

Observación 3.4.4 *Si una curva C está contenida en una superficie cúbica lisa o con singularidades aisladas tendrá un número finito de cuatriscantes, ya que toda recta cuatriscante a la curva tendría que estar contenida en la cúbica que sólo tiene un número finito de rectas.*

Proposición 3.4.5 *Sea C curva con infinitas cuatriscantes, si C está en una cúbica irreducible sólo está en una y ha de ser reglada.*

Demostración.

Si C tiene infinitas cuatriscantes, podemos considerar la variedad de rectas cuatriscantes que será una superficie con infinitas rectas. Por tanto si C está contenida en una superficie cúbica irreducible ha de contener a las rectas cuatriscantes, por lo que la cúbica será reglada que es la única con infinitas rectas. Luego la cúbica ha de ser la variedad de cuatriscantes, entonces es única.

□

Proposición 3.4.6 *Sea C una curva de grado n y género g , no contenida en ninguna superficie cuádrica. Si se cumple la desigualdad:*

$$h^1(\mathcal{O}_C(3)) < 18 - 3n + g,$$

entonces C tiene un número finito de cuatriscantes.

Demostración.

Si C tuviera infinitas cuatriscantes y no estuviera en ninguna superficie cuádrica, entonces por la proposición anterior $h^0(I(3)) \leq 1$, siendo I el ideal de la curva. Pero si consideramos la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

tenemos que:

$$h^0(I(3)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) - h^0(\mathcal{O}_C(3)) + h^1(I(3)),$$

y usando el teorema de Riemann-Roch:

$$h^0(I(3)) \geq 20 - (3n + 1 - g + h^1(\mathcal{O}_C(3)))$$

lo cual contradice el hecho de que $h^1(\mathcal{O}_C(3)) < 18 - 3n + g$. Luego C no puede tener infinitas cuatriscantes si no está en una cuádrica.

□

Observación 3.4.7 *Si $\mathcal{O}_C(3)$ es no especial (se cumple, por ejemplo, si $\mathcal{O}_C(1)$ no lo es o si $3n > 2g - 2$) tendríamos que, si se cumple la desigualdad $g > 3n - 18$ y C no está en una cuádrica, tiene un número finito de cuatriscantes, ya que estaríamos en las condiciones del enunciado anterior.*

Si seguimos el estudio por grados, vimos que para grado menor que 6 o estaban en superficies cuádricas o tenían a lo sumo 3 cuatriscantes. Vemos lo que sucede para el caso $n = 6$.

Proposición 3.4.8 *El teorema es cierto para grado 6.*

Demostración. Para grado 6, existen curvas de géneros 0, 1, 2, 3, 4. La fórmula para las rectas cuatriscantes nos da para estas curvas 6, 3, 1, 0, 0 respectivamente. Si el género está entre 0 y 3 $\mathcal{O}_C(1)$ es no especial (ver [H2]).

Todas las de género 4 son intersección completa de una cuádrica y una cúbica lisa, luego no tienen cuatriscantes.

Para géneros 1 y 2, las curvas no están en cuádricas, ya que no satisfacen las fórmulas y como $h^0(I(3)) \geq 2$, por la proposición 3.4.5 tendrán un número finito de cuatriscantes (3 y 1 respectivamente).

Para géneros 0 y 3, las que estén en una cuádrica lisa ((1, 5) y (2, 4) respectivamente) tendrán infinitas cuatriscantes.

Si no están en una cuádrica para género 3 $h^0(I(3)) \geq 4$, luego no tiene cuatriscantes. Para género 0, $h^0(I(3)) \geq 1$, es decir, está al menos en una cúbica irreducible. Para que C tuviera infinitas cuatriscantes la cúbica (debe ser sólo

una) ha de ser reglada. Por otro lado dos rectas cuatrisecantes de C no pueden cortarse (por cuestión de grados). La cúbica no puede ser un cono, ya que todas las rectas del cono pasan por un punto. Las otras cúbicas regladas tienen una recta doble y por un punto general de esta recta pasan dos generatrices y todas las generatrices cortan en el mismo número de puntos a las curvas de la cúbica. Luego si la curva tiene infinitas cuatrisecantes, todas las generatrices lo son, lo que no es posible por no poder cortarse con otras. \square

Observación 3.4.9 *Dos curvas pueden ser isomorfas y no tener el mismo número de rectas cuatrisecantes, pero sólo en el caso en que una tenga infinitas. Por ejemplo, para la curva racional de grado 6 en \mathbb{P}^3 si está en una cuádrica es de tipo (1,5) y tiene infinitas cuatrisecantes (de hecho tiene infinitas quintisecantes), si no no tiene cuatrisecantes.*

Observación 3.4.10 *Para toda curva de grado menor que 8 que no esté en una cuádrica, si tuviera infinitas rectas cuatrisecantes, éstas formarían una superficie reglada de grado r , pero entonces todo generador de la superficie es una cuatrisecante de C y como cada generador corta a otros $r - 2$ generadores, para $r > 2$ existirían planos que cortan a C en 8 puntos lo que no es posible por el grado de C .*

Análogamente, para curvas de grado menor que 6 que no estén en una cuádrica no pueden tener infinitas trisecantes. Y las curvas de grado menor que 10 no pueden tener infinitas rectas quintisecantes y así sucesivamente.

Proposición 3.4.11 *El teorema es cierto para grado 7.*

Demostración. Para grado 7, existen curvas de géneros 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La fórmula para las rectas cuatrisecantes nos da para estas curvas 20, 14, 9, 5, 2, 0 y -1 respectivamente. Todas las de género 6 están en una cuádrica y son de tipo (3,4), luego tienen infinitas cuatrisecantes. Para el resto de géneros $\mathcal{O}_C(3)$ es no especial, luego $h^0(I(3)) \geq -2, -1, 0, 1, 2, 3$ respectivamente. Para género 0 y 4 pueden estar en una cuádrica, éstas son de tipo (1,6) y (2,5) respectivamente por lo que tienen infinitas cuatrisecantes.

Las de género 4 que no están en cuádricas y las de género 5, al tener $h^0(I(3)) \geq 2$, tienen un número finito de cuatrisecantes (2 y 0 respectivamente). Para género 3, por un razonamiento análogo al de la curva de grado 6 y género 0 tendrá 5 cuatrisecantes. El resto de casos se justifican con la observación anterior. \square

Las rectas cuatrisecantes de una curva pueden darnos información sobre la superficie cúbica en la que pueden estar, vemos un resultado inspirado en el trabajo de R. H. Dye (ver [Dy], pg. 91).

Proposición 3.4.12 *Sea C una curva de grado $n < 8$. Si C tiene 6 o más cuatrisecantes no puede estar en una superficie cúbica irreducible que sea singular.*

Demostración. Supongamos que C está en una superficie cúbica irreducible singular S . Por cuestión de grados C no puede tener dos cuatrisecantes coplanarias, es decir, que se corten. Luego S no puede ser un cono. Si S es reglada, como tiene a lo más dos rectas que no son generadores, si C tiene 6 cuatrisecantes, todas las generatrices tendrían que serlo. Pero por un punto general de la recta doble de S pasan dos generatrices lo que no es posible. Si S es una cúbica con singularidades aisladas, contiene un número finito de rectas. Sean $l_i, i = 1, 2, \dots, 6$, seis cuatrisecantes de C , cualquier recta que corte a cuatro de ellas estará contenida en S y cuatro de ellas siempre tienen una transversal común. Además por una recta de S pasan como mucho cinco planos cuya intersección residual con S es una cónica reducible, luego no puede haber una recta transversal a las 6. Por tanto S tendrá como mínimo 11 rectas. Sólo 5 de los 21 tipos de superficies cúbicas con singularidades aisladas tienen 11 o más rectas, pero en ninguno de los casos tienen 6 rectas que no se corten dos a dos [He]. \square

Corolario 3.4.13 *Sea C una curva de grado $n < 8$. Si C tiene más de 6 cuatrisecantes no puede estar en una superficie cúbica irreducible.*

Demostración. Ya hemos visto que no pueden estar en una cúbica singular, pero tampoco pueden estar en una lisa ya que en ésta el máximo número de rectas que no se cortan dos a dos es 6. \square

Las curvas de grado menor que 8 con 6 cuatrisecantes (grado 6 y género 2), sólo pueden estar en cúbicas lisas y de hecho están en una cúbica lisa. Las que tienen 5 cuatrisecantes (grado 7 y género 3), sólo pueden estar en la cúbica lisa o en la cúbica singular de 21 rectas, ya que son las únicas cúbicas irreducibles que poseen cinco rectas que no se cortan (aparte de las regladas que ya descartamos).

Proposición 3.4.14 *Una curva de grado menor que 12 con infinitas cuatrisecantes no puede estar en una cúbica irreducible.*

Demostración. Sea n el grado de C . Ya se ha visto para grado menor que 8, así que lo vemos para curvas de grado entre 8 y 11. Como hemos visto si una curva C está en una superficie cúbica S , todas las rectas cuatrisecantes a la curva estarán contenidas en S , por lo tanto si C tiene infinitas cuatrisecantes S ha de ser reglada y será la variedad de cuatrisecantes.

Para grados 8 y 9 por la observación 3.4.11. no pueden ser quintisecantes, luego S resta al grado de la superficie de trisecantes $3 \cdot 4 = 12$. Para grados 10 y 11, podrían

tener infinitas quintisecantes pero no sextisecantes, entonces S sería la variedad de quintisecantes y restaría $3 \cdot \binom{5}{3} = 30$. En cualquiera de los casos, por los grados de las variedades de trisecantes, C estará en otra superficie reglada S' de grado al menos 4 (no puede estar en otra cúbica) cuyos generadores cortan a C en 3 puntos.

La intersección residual de las dos superficies S y S' será una curva C' de grado al menos 1. C no puede ser una componente de C' ya que sería una curva doble en S , lo cual no es posible por tener C grado mayor que 7. Pero todo generador de S' corta a S en tres puntos (ya que el grado de S es 3), entonces son los puntos de corte con C y no podrían cortar a C' . Luego C' debe estar compuesta por generadores de S' , y al cortar a C en tres puntos y no cuatro no pueden ser generadores de S . Pero las únicas rectas que tiene una cúbica reglada que no son generadores son las directrices (una doble R y otra simple R') para un tipo de cúbica y para el otro una de las directrices es a su vez un generador. Por ello el grado de C' no puede superar 3.

- Para el caso $n = 8$ y S' de cualquier grado ó el caso $n = 9, 10, 11$ siendo el grado de S' mayor que 4, C' tiene al menos grado 4, luego no es posible.
- El otro caso es $n = 9, 10, 11$ y S' de grado 4. Los planos cortan a S en una recta doble y un generador o dos generadores y una directriz o una directriz y una cónica.
 - Para $n = 9$, el grado de C' es 3, luego $C' = 2R + R'$. Pero entonces como existe un plano que contiene dos generadores y una directriz de S (trisecante a C en este caso), cortaría a C en $4 + 4 + 3 = 11$ puntos lo que no es posible.
 - Para $n = 10$, el grado de C' es 2. Existe un plano que contiene a R y una cónica de S . Este plano debe cortar a C en 10 puntos. Como R corta a C en tres puntos, la cónica la cortará en 7. Por la teoría de superficies regladas (ver 3.4.1 (6)), para C $k = 4$, $m = 10$ y para la cónica $k' \geq 1$, $m' = 2$, éstas se cortan en $10k' + 8 - 12k' = 8 - 2k'$ puntos, pero esto vale como mucho 6.
 - Análogamente, para $n = 11$ la cónica cortaría a C en 8 puntos pero por la teoría de superficies regladas se cortarían en $8 - k'$, que vale como mucho 7.

□

Corolario 3.4.15 *Para grado 8 y género mayor que 5, las curvas tampoco pueden tener infinitas cuatriseccantes a no ser las que están en superficies cuádricas.*

Demostración. Para géneros 9 y 8 las curvas están en cuádricas, son de tipo (4, 4) y (3, 5), luego tienen infinitas cuatrisecantes. Para género 7, no están en cuádricas y sí en dos cúbicas por tanto tiene un número finito de rectas cuatrisecantes, una en concreto (intersección residual de las cúbicas). Para género 6, no están en cuádricas y sí en una cúbica, por tanto por la proposición anterior se tiene el resultado. \square

Además para las curvas de grado menor que 12, si tienen infinitas cuatrisecantes, la variedad de cuatrisecantes sólo puede ser una superficie reglada (los generadores serán las rectas cuatrisecantes) sin planos tritangentes. Ya que estos planos contienen a tres generadores y cortarían a la curva en 12 ó más puntos. La fórmula (3.4.1. (7)) para el número de planos tritangentes, siempre que sea finito, a una superficie de grado d y género p es:

$$\frac{1}{6}(d-2)(d-3)(d-4) - p(d-4),$$

este número corresponde también con el número de puntos triples de la superficie, si es finito.

Proposición 3.4.16 *Para curvas de grado 8, existe una única curva con infinitas cuatrisecantes, no contenida en una cuádrica. Tiene género 5 y es la curva doble de una superficie reglada de grado 6 y género 2.*

Demostración.

Sólo falta ver lo que sucede para curvas de grado 8 y géneros menores que 6: Suponemos que una curva, no contenida en superficies ni cuádricas ni cúbicas (estos casos ya se han visto), de grado 8, para los géneros 0, 1, 2, 3, 4 y 5, tiene infinitas cuatrisecantes. Aplicamos, a nuestro caso, los siguientes resultados (ver la sección 3.4.1.) vistos para una curva de grado n y género g :

- (1) La variedad de rectas cuatrisecantes de C , que llamaremos X , está contenida en la variedad de rectas trisecantes de C , que llamaremos Y . Como ya vimos, cada cuatrisecante “cuenta” como 4 trisecantes, luego el grado de X no puede exceder la cuarta parte del grado de Y . Y no es, en principio, irreducible.
- (2) La variedad Y tiene grado:

$$2 \binom{n-1}{3} - g(n-2)$$

(es el número de rectas trisecantes que cortan a una recta). Para la curva de grado 8 y género 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 el grado de Y será 70, 64, 58, 52, 46 ó 40

respectivamente. Luego X tendrá como máximo grados: 17, 16, 14, 13, 11 ó 10, respectivamente. Estos valores no se pueden alcanzar, para los géneros 0, 2 y 4 porque habría otra componente de Y de grado 2 y hemos descartado este caso. Los otros grados se descartan usando el punto (6).

- (3) En una variedad reglada una curva es simple, doble, triple o de multiplicidad s , según el número de generadores (rectas trisecantes en el caso de Y) que pasan por un punto de la curva. El número de rectas trisecantes a una curva que pasan por un punto de la curva es:

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} - g.$$

Una cuatrisecante cuenta en la fórmula como 3 trisecantes que pasan por un punto de la curva (fijado un punto es $\binom{3}{2}$).

- (4) Una curva simple en una superficie reglada de grado d y género p , cuyos generadores cortan a la curva en k puntos, cumple:

$$g = (n-1)(k-1) + pk - 1/2dk(k-1).$$

Esta fórmula nos podría proporcionar ejemplos de curvas con infinitas cuatrisecantes (haciendo $k = 4$), sin embargo no podemos garantizar que dicha curva sea lisa.

- (5) La curva doble de una superficie reglada de grado d y género p , tiene grado: $n = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - p$ y género $g = \frac{1}{2}(d-5)(d+2p-2) + 1$. Y los generadores de la superficie la cortan en $n-2$ puntos. Hay que tener en cuenta que dicha curva puede ser reducible. Los puntos singulares de estas curvas vienen dados por los puntos triples de la superficie.
- (6) Para grado 8, cualquier componente de Y es una superficie reglada que no puede tener planos tritangentes, ya que cortaría a C en al menos 9 puntos. Luego si tiene grado d y género p se tiene que:

$$\frac{1}{6}(d-2)(d-3)(d-4) - p(d-4) = 0.$$

Se observa que si d es congruente con 1 módulo 3, siempre tienen planos tritangentes.

Por (2) y (6), los únicos grados y géneros para X sin puntos triples son: $d = 4, p = 0, 1$; $d = 5, p = 1$; $d = 6, p = 2$; $d = 8, p = 5$; $d = 9, p = 7$; $d = 11, p = 12$; $d = 12, p = 15$; $d = 14, p = 22$ y $d = 15, p = 26$. Sus curvas dobles

tienen grados respectivos 3, 2; 5; 8; 16; 21; 33; 40; 56 y 65. Luego para que una curva de grado 8 sea doble $\deg X \geq 6$. Como X no puede tener puntos triples no puede tener curva triple. Tampoco Y .

Si C es simple en X por (4), (6) y (7), sólo pueden ser las curvas de géneros 1 y 3, y X es una superficie cuártica elíptica y una de grado 11 y género 12 respectivamente. Por (1) y (2) existirá en Y otra componente de rectas trisecantes de grados: 8, para la de género 3, que no puede ser ya que por cada punto de C aún deben pasar 9 trisecantes. Y 48, para la de género 1, que ha de ser reducible ya que si no tendría puntos triples. En este caso C no puede ser simple en ninguna de las componentes por (4) con $k = 3$. Tampoco puede ser doble, ya que no hay combinaciones posibles para cumplirse todas las condiciones exigidas.

Si C es doble en X por (5) puede ser de género 5 y $d = 6$, $p = 2$. La otra componente de Y tendrá grado 16 y ha de ser reducible por (6). C podría ser simple en cada componente de Y aparte de X (habría 4) de grado 4 y género 1 y no contradice ningún apartado. De hecho esta curva existe ya que Edge en [Ed], página 8, confirma que existe en una superficie de grado n una curva doble que corta a cada generador en $n - 2$ puntos y en las páginas 250 y 310 las describe y clasifica.

Para otros géneros, si suponemos que C es doble en X , al intentar repartir el resto de rectas trisecantes por un punto y el grado de las otras posibles componentes de Y , no se pueden dar todas las condiciones exigidas.

□

Con este mismo argumento se podría pensar que la curva de grado 9 y género 4 que puede ser la curva doble de una superficie reglada de grado 6 y género 2 es otro ejemplo, pero esta superficie tiene puntos triples, lo que hace que la curva doble no sea lisa (por la definición de la curva doble).

3.5. Rectas bitangentes a curvas de \mathbb{P}^3

3.5.1. Curvas de grado menor que siete

R. H. Dye en su artículo *Space sextic curves with six bitangents and some geometry of the diagonal cubic surface* se pregunta para qué curvas alguna de sus rectas cuatrisesecantes (o todas) que tienen son bitangentes, es decir, que sus cuatro intersecciones con la curva son dos pares coincidentes. El interés viene de que sólo curvas excepcionales poseen bitangentes. Dye hace el siguiente estudio:

Las curvas cúbicas y cuárticas de \mathbb{P}^3 no tienen rectas cuatrisesecantes y la única quintica con un número positivo de rectas cuatrisesecantes es la de género 0 que por la

fórmula tiene 1. Esta recta puede ser una bitangente: si consideramos una quintica racional en \mathbb{P}^5 y el sólido que generan dos rectas tangentes a la curva que no se cortan, proyectamos desde una recta general del sólido y las dos tangentes se proyectan a una recta que será bitangente.

Para curvas séxticas Dye prueba el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1 *Una curva séxtica irreducible con al menos 6 bitangentes distintas tiene exactamente 6 bitangentes y es o bien*

(i) *una curva de tipo (2, 4) en una cuádrica*

o bien

(ii) *una séxtica racional lisa en una superficie cúbica lisa y las bitangentes corresponden con la mitad de una double-six de dicha superficie.*

La idea de la demostración es:

Para una curva de tipo (a, b) , con $a \leq b$, en una cuádrica hay, contando con multiplicidad, $2a(b-1)$ puntos R donde el generador de la familia de b -secantes que pasa por R tiene multiplicidad de intersección mayor que 1 con la curva en R (ver [Dy] pg 10). Para $(1, 5)$ ese número es 8, por tanto la curva puede tener a lo sumo 4 bitangentes. Para $(2, 4)$ el número da 12, luego tendrá a lo más 6 bitangentes. Se verifica que estas curvas existen:

Sea Q cuádrica lisa parametrizada por $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\lambda\mu, \lambda, \mu, 1)$ y sea

$$F(\lambda, \mu) = \lambda^4 + \lambda^3\mu^2 - \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{64}\mu^2.$$

Entonces $F(\lambda, \mu) = 0$ corresponde con una séxtica de Q de tipo $(2, 4)$ (grados en λ y en μ).

Suponiendo que $\mu^6 = 1$ y teniendo $\alpha \neq \beta$ por

$$2(\alpha + \beta) = -\mu^2, \quad 8\alpha\beta = -\mu^4$$

se tiene que

$$F(\lambda, \mu) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2$$

Luego el generador correspondiente con ese μ es bitangente a la curva. Las 6 posibilidades para μ dan las seis bitangentes buscadas.

La curva séxtica de género 0 tiene, según la fórmula, 6 cuatriscantes, estas pueden ser todas bitangentes. Para probar esto Dye estudia la estructura de la cúbica lisa y obtiene la curva explotando el plano en 6 puntos:

Un pentaedro de planos, no cuatro de ellos concurrentes, tiene 10 aristas y 10 vértices. Cada vértice está en 3 aristas y cada vértice común a tres caras es opuesto a la arista común a las otras dos caras. La unión de un vértice con otro vértice de la arista opuesta es una diagonal. Luego hay 15 diagonales y una única superficie cúbica lisa S que las contiene. S tiene otras 12 rectas que forman una double-six, que es:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array}$$

donde cada recta no se corta con las otras seis rectas de su misma fila o columna, pero corta a las otras 5 rectas.

El plano tangente a S en un vértice contiene a las tres diagonales que pasan por dicho vértice.

Si consideramos la representación plana estándar de una superficie cúbica como las curvas cúbicas que pasan por seis puntos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ del plano π , que no están en una cónica, entonces el entorno de A_i corresponde con los puntos de la recta a_i y la cónica \mathcal{B}_i que pasa por todos los puntos A_j distintos de A_i corresponde con b_i . Existe una cónica que tiene orden de contacto 2 con cada \mathcal{B}_i .

Dada una curva de grado n en un plano π que contiene los puntos base $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ como puntos con multiplicidades respectivas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ corresponde con una curva irreducible en S de grado

$$3n - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6$$

con la posibilidad de que $\lambda_i = 0$.

Por tanto si tomamos la cónica con orden de contacto 2 con cada \mathcal{B}_i (dicha cónica existe, ver [Dy]), corresponde con una curva séxtica de S que tiene a b_i por bitangentes. Es la séxtica racional.

Vemos lo que sucede con el resto de séxticas:

Las demás séxticas de géneros 4 y 3 no tienen cuatriscantes, como ya vimos en la sección anterior, luego no tendrán bitangentes.

La séxtica de género 2 en \mathbb{P}^3 , tiene una única recta cuatriscante (no puede tener por tanto rectas quintiscantes). Esta recta puede ser una bitangente. Para encontrar esta curva consideramos la séxtica de género 2 inmersa en \mathbb{P}^4 , de forma no degenerada. Esta curva tiene planos bitangentes ya que sustituyendo en la fórmula vista en el teorema 2.7.10. nos da 20.

Podemos proyectar desde un punto de uno de esos planos de forma isomorfa, ya que la variedad secante y la variedad tangente no pueden contener planos, ya que son irreducibles y ellas no pueden ser un plano porque la curva sería plana. Luego proyectando adecuadamente desde un punto de uno de estos planos, obtenemos una curva lisa de grado 6 y género 2 en \mathbb{P}^3 con una recta bitangente.

Los planos bitangentes que aparecen en la fórmula no pueden ser quintisecantes, porque proyectando de forma isomorfa desde un punto de ese plano, obtenemos una curva de grado 6 y género 2 en \mathbb{P}^3 que sólo puede tener una recta cuatrisecante. Luego han de ser distintos. Si proyectamos la curva de \mathbb{P}^4 desde el punto de intersección de dos planos bitangentes obtendremos una curva en \mathbb{P}^3 con dos rectas bitangentes, luego no puede ser isomorfa a la curva lisa de grado 6 y género 2 de \mathbb{P}^3 que sólo tiene una recta cuatrisecante. Luego los puntos de intersección de los planos han de ser:

- Puntos de la curva
- Puntos en alguna recta secante a la curva.
- Puntos en alguna recta tangente a la curva.

La primera opción no es posible ya que obtendríamos una curva de grado 5 y género 2, que como vimos no tiene rectas cuatrisecantes.

La séxtica elíptica tiene 3 cuatrisecantes, se puede ver que al menos una puede ser bitangente, por un método análogo al de la quintica racional. Para obtener una séxtica elíptica en \mathbb{P}^3 con 3 bitangente se podría utilizar un método análogo al que se usa con la racional. Es decir, consideramos una cúbica elíptica plana lisa con orden de contacto 2 con tres de las cónicas \mathcal{B}_i y que contiene tres de los puntos A_i con multiplicidad 1.

Corresponde con una curva séxtica de S que tiene las tres b_i correspondientes por bitangentes. Es la séxtica elíptica. El problema está en comprobar que existe una cúbica plana en estas condiciones.

La séxtica racional contenida en una cuádrica es de tipo $(1, 5)$, luego tiene infinitas rectas quintisecantes. Como vimos puede tener a lo sumo $1 \cdot (5 - 1) = 4$ rectas bitangentes. Tal curva existe. Se puede demostrar por un procedimiento análogo al que usa Dye para la curva de tipo $(2, 4)$. En este caso

$$F(\lambda, \mu) = \lambda^5 + (1 + 2i)\lambda^4\mu^2 - (1 + 2i)\lambda + (1 + i)\mu^2.$$

Entonces $F(\lambda, \mu) = 0$ corresponde con una séxtica de Q de tipo $(1, 5)$ (grados en λ y en μ).

Suponiendo que $\mu^4 = 1$ y definiendo α , β y γ por

$$(\alpha + \beta) = -(1 + i)\mu, \quad \alpha\beta = \mu^2 \quad \gamma = \mu$$

siendo α , β y γ distintos entre sí. Se tiene que

$$F(\lambda, \mu) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2(\lambda - \gamma)$$

luego el generador correspondiente con ese μ es bitangente a la curva. Las 4 posibilidades para μ dan las bitangentes buscadas.

3.5.2. Curvas de grado siete

Vemos ahora lo que sucede para las curvas de grado 7:

Como hemos visto en la sección anterior, existen curvas en \mathbb{P}^3 de grado 7 y géneros 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La fórmula para las rectas cuatriscantes nos da para estas curvas 20, 14, 9, 5, 2, 0 y -1 respectivamente. Hemos visto que este número sólo es infinito para las curvas contenidas en una cuádrica: todas las de género 6 están en una cuádrica y son de tipo (3, 4), luego tienen infinitas cuatriscantes y para géneros 0 y 4 pueden estar en una cuádrica, siendo de tipo (1, 6) y (2, 5) respectivamente, por lo que tienen infinitas cuatriscantes. Para géneros 3, 4, 5 $\mathcal{O}_C(3)$ es no especial y $h^0(I(3)) \geq 1, 2, 3$ respectivamente, luego podemos asegurar que están en una cúbica (irreducible si no están en cuádricas).

Hemos visto que la curva de grado 7 y género 3 no puede estar en cuádricas y que sí está en al menos una cúbica, luego estará en una cúbica irreducible.

Vimos que las cuatriscantes de una curva de grado 7 no se pueden cortar 2 a 2. Luego estudiando las superficies cúbicas que existen (ver [R]), observamos que sólo hay dos tipos que contienen 5 rectas que no se cortan 2 a 2. Éstas son la lisa que tiene hasta 6 rectas no coplanarias 2 a 2 y la cúbica de 21 rectas.

Sea S la cúbica lisa, con la notación de la sección anterior, si definieramos en π una curva cuártica lisa φ de género 3 que contenga 5 de los puntos A_i , entonces obtenemos en \mathbb{P}^3 una curva lisa de grado: $3 \cdot 4 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 7$ y género 3 que tiene a b_i por bitangentes.

Si tomamos la cuártica con orden de contacto 2 con cinco de las cónicas \mathcal{B}_i , corresponde con una curva séptica de S que tiene a las cinco b_i correspondientes por bitangentes. El problema está en comprobar que existe una cuártica plana en estas condiciones.

Observación 3.5.2 *Las curvas de grado 7 y géneros 0, 1 y 2 no pueden estar en*

superficies cúbicas, ya que no hay ninguna con más de 6 rectas que no se cortan entre sí.

Proposición 3.5.3 *Existen curvas de grado 7 contenidas en superficies cuádricas con el número máximo de rectas bitangentes posibles.*

Demostración. Para una curva de tipo (a, b) , con $a \leq b$, en una cuádrlica hay, contando con multiplicidad, $2a(b-1)$ puntos R donde el generador de la familia de b -secantes que pasa por R tiene multiplicidad de intersección mayor que 1 con la curva en R (ver [Dy] pg 10). Luego tendrán a lo más $a(b-1)$ bitangentes. Para $(1, 6)$ ese número es 10, por tanto la curva puede tener a lo sumo 5 bitangentes. Para $(2, 5)$ ese número es 16, por tanto la curva puede tener a lo sumo 8 bitangentes. Para $(3, 4)$ el número da 18, luego tendrá a lo más 9 bitangentes. Se verifica que estas curvas existen:

Sea Q cuádrlica lisa parametrizada por $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\lambda\mu, \lambda, \mu, 1)$ y sea

$$F(\lambda, \mu) = \lambda^4 + \lambda^3\mu^3 - \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{64}\mu^3.$$

Entonces $F(\lambda, \mu) = 0$ corresponde con una séptica de Q de tipo $(3, 4)$ (grados en λ y en μ).

Suponiendo que $\mu^9 = 1$ y definiendo $\alpha \neq \beta$ por

$$2(\alpha + \beta) = -\mu^3, \quad 8\alpha\beta = -\mu^6$$

se tiene que

$$F(\lambda, \mu) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2$$

luego el generador correspondiente con ese μ es bitangente a la curva. Las 9 posibilidades para μ dan las bitangentes buscadas.

Análogamente si

$$F(\lambda, \mu) = \lambda^5 + (1 + 2i)\lambda^4\mu^2 - (1 + 2i)\lambda + (1 + i)\mu^2.$$

Entonces $F(\lambda, \mu) = 0$ corresponde con una séptica de Q de tipo $(2, 5)$ (grados en λ y en μ).

Suponiendo que $\mu^8 = 1$ y definiendo α, β y γ por

$$(\alpha + \beta) = -(1 + i)\mu^2, \quad \alpha\beta = \mu^4 \quad \gamma = \mu^2$$

siendo α , β y γ distintos entre sí. Se tiene que

$$F(\lambda, \mu) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2(\lambda - \gamma)$$

luego el generador correspondiente con ese μ es bitangente a la curva. Las 8 posibilidades para μ dan las bitangentes buscadas.

Por un procedimiento análogo podemos obtener una curva de Q de grado 7 y género 0, es decir, de tipo $(1, 6)$, con el máximo de bitangentes, 5 en este caso.

□

Observamos que para el caso de la curva de tipo $(1, 6)$ en una cuádrica, podría tener también rectas tritangentes. Por el número de puntos múltiples que puede tener, podría tener a lo sumo 3 tritangentes. Sin embargo por el método anterior no es posible encontrar ningún ejemplo.

Capítulo 4

Puntos de inflexión

4.1. Introducción

En [H2] se proyectan curvas para obtener curvas isomorfas en un espacio proyectivo menor, así se consigue que toda curva pueda ser inmersa en \mathbb{P}^3 . Vemos ahora lo que sucede con los espacios osculadores al proyectar.

Proposición 4.1.1 Sean $C \subset \mathbb{P}^N$ curva, $O \notin C$ y $f : C \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ la proyección desde O . Si $O \notin \text{Sec}C \cup \text{Tan}C$, entonces para todo punto $P \in C$

$$\dim \text{Osc}_C^k(P) = \dim \text{Osc}_{f(C)}^k(f(P))$$

si y sólo si

$$O \notin \text{Osc}_C^k(P).$$

Demostración. Puesto que $\text{Osc}_C^k(P)$ es un espacio lineal, conservará la dimensión al proyectar desde un punto siempre que no pase por el centro de proyección. Además, la proyección de dicho espacio es el espacio osculador k -ésimo de la imagen de la curva, $f(C)$ en $f(P)$, como se puede comprobar sin más que dar coordenadas locales adecuadas. \square

Proposición 4.1.2 Si $C \subset \mathbb{P}^N$ es una curva, con $N \geq 4$, entonces existe un punto $O \notin \text{Sec}C \cup \text{Tan}C$, tal que al proyectar C desde O se conserva la dimensión de los espacios osculadores de orden 2.

Demostración. $\text{Sec}C \cup \text{Tan}C$ viene dado al menos localmente, como vimos, por la imagen de $(C \times C) \times \mathbb{P}^1$ en \mathbb{P}^N y

$$\text{Osc}^2C = \bigcup_{P \in C} \text{Osc}_C^2(P)$$

viene dado por la imagen de $C \times \mathbb{P}^2$ en \mathbb{P}^N que lleva (P, t) al punto t en el osculador segundo de C en P . Luego ambas tienen dimensión menor o igual que 3 y como $N \geq 4$, $\text{Sec}C \cup \text{Tan}C \cup \text{Osc}^2C \neq \mathbb{P}^N$, luego existe O que no pertenece a esa unión y así por 1.3.1. al proyectar desde O se conservan los espacios osculadores segundos. \square

Observación 4.1.3 *La unión $\text{Sec}C \cup \text{Tan}C \cup \text{Osc}^2C$ no es redundante, es decir, no puede ser que $\text{Osc}^2C \subset \text{Sec}C \cup \text{Tan}C$, ya que un plano corta a la curva en un número finito de puntos, luego contiene un número finito de tangentes y secantes, en particular cada espacio osculador segundo lo cumple.*

Corolario 4.1.4 *Toda curva puede sumergirse en \mathbb{P}^3 conservando la dimensión de sus espacios osculadores segundos (se conserva el número de puntos de inflexión).*

Para clasificar las curvas según sus puntos de inflexión, es muy útil proyectar hasta \mathbb{P}^3 desde centros suficientemente generales. Observamos que la clasificación no puede hacerse salvo isomorfismo, ya que dos curvas pueden ser isomorfas y sin embargo que una tenga puntos de inflexión y la otra no:

Si consideramos una curva sin puntos de inflexión en \mathbb{P}^4 , por ejemplo la racional normal de grado 4 y proyectamos desde un punto que no esté ni en su variedad secante ni en su tangente, obtenemos otra curva isomorfa en \mathbb{P}^3 , pero:

- Si el punto de proyección no está en ningún espacio osculador segundo a la curva inicial, la nueva curva no tendrá puntos de inflexión (pero sí tendrá puntos de hiperosculación, ya que la única que no tiene es la racional normal de grado 3 y no es imagen de ninguna proyección isomorfa).
- Si el punto de proyección está en algún espacio osculador segundo, obtenemos otra curva en \mathbb{P}^3 isomorfa, pero con puntos de inflexión.

Es decir, el número de puntos de inflexión no depende sólo del grado y género de la curva. Sólo si ésta está en su espacio adecuado, es decir, no es proyectada de ninguna curva.

Observamos que el ejemplo anterior no es tan sorprendente si se tiene en cuenta que el concepto de isomorfismo sólo incluye información sobre puntos y vectores tangentes.

Un problema que se plantea es la clasificación de curvas en \mathbb{P}^3 con y sin puntos de inflexión dado el grado y el género. Problema análogo al de la clasificación de curvas de \mathbb{P}^3 , es decir, curvas lisas, del que hablamos en el primer capítulo y tratado en [H2] y [H3].

4.2. Fibrados lineales de orden superior

Los fibrados lineales sobre curvas en \mathbb{P}^N que dan lugar a inmersiones cerradas, es decir, fibrados muy amplios, han sido muy estudiados y sus propiedades son muy conocidas, sin embargo éstos no aportan información acerca de multiseccantes, multitangencias, hiperosculación u otros fenómenos. En los últimos años han aparecido en la literatura ciertos fibrados que refinan el concepto de fibrado muy amplio y dan lugar a inmersiones cerradas que son llamadas de orden superior (ver por ejemplo [BS1], [BS2], [BS3], [LM], [Pi2]). En este apartado veremos dichas inmersiones: son las que vienen dadas por fibrados *k-muy amplios*, *k-generados*, *k-jet amplios* y los más relacionados con las inflexiones que son los *k-regulares*. Definimos estos fibrados a continuación.

Vemos primero la definición de *k-muy amplio* y algunas propiedades:

Definición 4.2.1 *Dada C curva inmersa en \mathbb{P}^N por L , fibrado lineal, decimos que L es k -muy amplio, para $k \geq 0$, si para todo $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ subesquema 0-dimensional en C con longitud $(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}) \leq k + 1$, la restricción*

$$\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$$

es sobreyectiva.

L es 0-muy amplio si y sólo si L es generado por sus secciones globales y L es 1-muy amplio si y sólo si L es muy amplio.

Dada una curva C y un fibrado lineal k -muy amplio L sobre C , se tiene que $h^0(L) \geq k + 1$. Se demuestra tomando como \mathcal{T} , $k + 1$ puntos distintos de C . Como $\text{longitud}(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}) = k + 1$ y $\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ es sobreyectiva, se tiene el resultado.

Si L es k -muy amplio, entonces es en particular $(k - 1)$ -muy amplio.

Además, si C está inmersa por L , $k + 1$ puntos cualesquiera estarán en posición general lo que implica que C no tiene $(k - 1)$ -espacios $(k + 1)$ -secantes. Por tanto los fibrados lineales 2-muy amplios dan inmersiones de curvas sin rectas trisecantes. En \mathbb{P}^3 no hay muchos ejemplos (ver por ejemplo [BS2]):

Ejemplo 4.2.2 *Si $k = 2$, $h^0(L) = 4$ y C es linealmente normal, por la observación anterior, sólo hay dos curvas que pueden estar inmersas por un fibrado 2-muy amplio, son la curva de género 0 y grado 3 (la racional normal en \mathbb{P}^3 , el fibrado es además 3-muy amplio) y la de género 1 y grado 4 (de hecho es 2-muy amplia).*

En \mathbb{P}^4 , las curvas que pueden estar inmersas por un fibrado 2-muy amplio son las que vimos en la sección 3.2. que no tienen rectas trisecantes, es decir, las curvas

de grados y géneros: $(4, 0)$ (el fibrado puede ser 4-muy amplio), $(5, 1)$ (por la observación 2.6.4. el fibrado podría ser 3-muy amplio), $(6, 2)$ (por las fórmulas de planos cuatrisesecantes el fibrado no puede ser 3-muy amplio) y la curva canónica de género 5 no trigonal $((8, 5))$. Sólo la racional puede estar inmersa por un fibrado 3-muy amplio y de hecho es 4-muy amplio (ver [BS2]).

Definimos a continuación los fibrados k -generados y enunciamos algunas propiedades:

Definición 4.2.3 *Dada C curva inmersa en \mathbb{P}^N por L , fibrado lineal, decimos que L es k -generado, con $k \geq 0$, si para $z_1, z_2, \dots, z_t \in C$ puntos distintos cualesquiera y para k_1, k_2, \dots, k_t enteros positivos de forma que $\sum_{i=1}^t k_i = k + 1$, se tiene que*

$$\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$$

es sobreyectiva, donde $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$ es el subsquema 0-dimensional definido por el haz de ideales $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$, donde $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}\mathcal{O}_{C, z_i}$ está generado por $y_i^{k_i}$ en k_i , con y_i coordenada local de C en z_i .

L es 0-generado si y sólo si L es generado por sus secciones globales y L es 1-generado si y sólo si L es muy amplio.

Enunciamos sin demostración la siguiente proposición sobre fibrados lineales k -generados. Las demostraciones se pueden encontrar en [BS1].

Proposición 4.2.4 *Sea L fibrado lineal sobre una curva C de género g . Entonces:*

- (1) L es k -generado si $\deg L \geq 2g + k$.
- (2) Si $\deg L = 2g + k - 1$, L es k -generado si y sólo si $h^0(L - \mathcal{K}_C) = 0$.
- (3) Si L es k -generado y $h^1(L) \neq 0$, entonces \mathcal{K}_C es k -generado y $g \geq 2k + 1$.
- (4) Si L es k -generado, $g \geq 0$, $d = \deg L$, entonces $d \geq k + 2$. Si además $d \leq 2g$, entonces $d \geq 2k + 2$, y $d = k + 2$ si $d = 2g$ o $L \equiv \mathcal{K}_C$ ($k = 1, g = 3$).

Definimos ahora los fibrados k -jet amplios y enunciamos algunas propiedades:

Definición 4.2.5 *Dada C curva inmersa en \mathbb{P}^N por L , fibrado lineal, decimos que L es k -jet amplio, con $k \geq 0$, si para todo $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset C$ y para k_1, k_2, \dots, k_r enteros positivos de forma que $\sum_{i=1}^r k_i = k + 1$, la aplicación de evaluación:*

$$C \times \Gamma(L) \rightarrow L / (L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \mathfrak{m}_{x_2}^{k_2} \otimes \dots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r})$$

es sobreyectiva, o equivalentemente

$$\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L / \otimes_{i=1}^r \mathfrak{m}_{x_i}^{k_i}) \simeq \otimes_{i=1}^r \Gamma(L / \mathfrak{m}_{x_i}^{k_i})$$

Donde \mathfrak{m}_{x_i} es el ideal maximal en x_i .

L es 0-jet amplio si y sólo si L es generado por sus secciones globales y L es 1-jet amplio si y sólo si L es muy amplio.

Lema 4.2.6 *Dados L_1 y L_2 fibrados lineales sobre la curva C . Si L_1 es a -jet amplio y L_2 es b -jet amplio, entonces $L_1 \otimes L_2$ es $(a + b)$ -jet amplio.*

Este lema muestra cómo es posible construir fibrados k -jet amplios, tensorizando k fibrados muy amplios. Y es demostrado en [BS3].

Por último el concepto más relacionado con la osculación es el de fibrado k -regular:

Definición 4.2.7 *Dada C curva, un fibrado lineal L en C es k -regular, con $k \geq 2$, si L es muy amplio y para todo punto $x \in C$, la aplicación de evaluación:*

$$\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L \otimes \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x^{k+1})$$

es sobreyectiva, donde \mathfrak{m}_x es el ideal maximal en x . (ver [LM] y [Pi2])

Geométricamente significa que C , inmersa por L y $\Gamma(L)$ tiene en cada punto el segundo espacio osculador de dimensión máxima, por tanto no tiene inflexiones de orden 2.

Las inmersiones que proporcionan todos estos fibrados sí miden los fenómenos de multiseccancia, hiperosculación,... sin embargo no es sencillo ver si un fibrado es o no k -muy amplio, por ejemplo.

El concepto más fuerte es el de k -jet amplio ya que engloba los conceptos de k -muy amplio y k -regular:

Lema 4.2.8 *Si un fibrado lineal es k -jet amplio, en particular es k -muy amplio. También un fibrado k -muy amplio es k -generado. Además para $k = 2$, son equivalentes 2-jet amplio, 2-generado y 2-muy amplio, para curvas.*

Para su demostración ver [BS2],[BS3].

De las definiciones se deduce que todo fibrado k -jet amplio con $k \geq 2$, es k -regular. Sin embargo, los conceptos de k -muy amplio y k -generado no implican, en general, el de k -regular. Aunque para $k = 2$, sí por el lema anterior. Por otro lado, 2-regular no es equivalente a 2-jet amplio, 2-muy amplio y 2-generado, como veremos en la siguiente sección con un contraejemplo.

El concepto menos estudiado es el de k -regular, de él nos ocuparemos para $k = 2$, es decir, curvas inmersas en un espacio proyectivo por todas las secciones de un fibrado 2-regular. A estas curvas las llamaremos *curvas 2-regulares*. Por la observación

anterior la mayoría de los resultados de este apartado son aplicables a fibrados 2-regulares.

Observación 4.2.9 *Una curva 2-regular no tiene puntos de inflexión de orden 2. Si la inmersión de C no se realiza con todas las secciones del fibrado, puede tener o no puntos de inflexión, como veremos. Además una curva inmersa por todas las secciones de un fibrado que no tiene puntos de inflexión de orden 2 es 2-regular.*

4.3. Curvas sin puntos de inflexión

Hasta ahora podemos afirmar que **existen** curvas de grado n y género g sin puntos de inflexión de orden 2 para $d \geq 2g+2$, ya que existirían fibrados k -generados que darían la inmersión. Y para $g = 2$ y $d = 5$ y para $g = 3$ y $d = 6$, que veremos con otras técnicas geométricas en el estudio por grados y que nos permiten además encontrar contraejemplos que demuestran que 2-regular no es equivalente a 2-jet amplio, 2-muy amplio y 2-generado. Además la mayoría de las curvas contenidas en una superficie de grado 2 no tienen puntos de inflexión de orden 2.

Si nos restringimos a las curvas de \mathbb{P}^3 linealmente normales, es decir, que no son la imagen de una proyección, para las cuales 2-regular equivale a no tener puntos de inflexión. Por los teoremas de Riemann-Roch y Castelnuovo (ver Teoremas 1.1.1 y 1.1.2) en el caso $h^0(L) = 4$, obtenemos:

$$h^1(L) = g - d + 3 \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - 2d + 4, & \text{si } d \text{ es par} \\ \frac{1}{4}(d^2 - 1) - 2d + 4, & \text{si } d \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así si fijamos el grado, para grados bajos:

$d = 3$ Entonces $g = 0$ que como vimos es 2-regular.

$d = 4$ Entonces $g = 1$ es la cuártica elíptica que es 2-muy amplia, por tanto es 2-regular.

$d = 5$ Entonces $g = 2$, en general es 2-regular. Esta curva está en una única superficie cuádrada Q y existen tanto en cuádradas lisas como en singulares (ver [H2] pg. 355). Además como la Función de Hilbert de la curva coincide con su Polinomio de Hilbert para $m \geq d - 2 = 3$, será $5m - 2 + 1$ (ver [Ha] pg. 167), luego esta curva está en superficies cúbicas.

Suponemos primero que Q es una cuádrada lisa, entonces $Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ con $e \in |\mathcal{O}(0,1)|$ y $f \in |\mathcal{O}(1,0)|$ generatrices de las dos reglas. Se tiene que

$C \in |\mathcal{O}(2, 3)|$. Como C tiene género 2, es hiperelíptica y por tanto tiene una única g_2^1 y no puede ser intersección completa.

Supongamos que C no es 2-regular, entonces existe $P \in C$ tal que $\text{Osc}_C^2(P) = l$ recta o equivalentemente existe $\{\pi_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ haz de planos por l que corta a C en divisores de la forma: $3P + P_{1t} + P_{2t}$, luego $|P_{1t} + P_{2t}|$ es la g_2^1 de C . Vemos que esto no sucede en general:

Al ser l una recta con orden de contacto mayor que 2, toda $h \in I(C)$ tiene una raíz triple común en l . $I(C)$ está generado por la cuádrlica y dos cúbicas (véase [Ha], pg. 111). Dada F , una de las cúbicas y dada $\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ la inmersión de Segre definida en coordenadas afines por $(t, s) \rightarrow (t, s, ts)$, Q es la imagen. Además si $h := \phi^*F$ será un polinomio de grado 3 en cada indeterminada s y t . Si $l \equiv \{s = s_0\}$ y $P = (t_0, s_0)$, entonces t_0 es una raíz triple de $h(t, s_0) = 0$, es decir, en $P = (t_0, s_0)$:

$$h = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0.$$

Lo que no sucede para un h general de $I(C)$.

Ejemplos. Las curvas $C \subset Q$ de tipo (2,3) (como en nuestro caso) vienen dadas por:

$$C = \left\{ [z]/rg \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & G(z) \\ z_2 & z_3 & H(z) \end{pmatrix} \leq 1 \right\}$$

con G y H polinomios homogéneos de grado 2 y $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ coordenadas en \mathbb{P}^3 (ver [Ha], pg. 111). Luego C viene dado por:

$$F_1(z) = z_0z_3 - z_1z_2 = 0$$

$$F_2(z) = z_0H(z) - z_2G(z) = 0$$

$$F_3(z) = z_1H(z) - z_3G(z) = 0$$

Observamos que $F_1 \cap F_2$ consiste en la curva y una recta y $F_1 \cap F_3$ consiste en la curva y otra recta. Si consideramos la parametrización de $Q \equiv \{F_1 = 0\}$ de la inmersión de Segre: $\phi : (t, s) \rightarrow (t, s, ts)$, es decir, $z_0 = 1, z_1 = t, z_2 = s, z_3 = ts$ y $f_i = \phi^*F_i, i = 2, 3$, observamos que $f_3 = tf_2$. Basta con ver lo que pasa con f_2 . Consideramos en general:

$$H(z) = az_0^2 + bz_0z_1 + cz_0z_2 + dz_0z_3 + ez_1^2 + fz_1z_2 + gz_1z_3 + hz_2^2 + iz_2z_3 + jz_3^2$$

$$G(z) = a'z_0^2 + b'z_0z_1 + c'z_0z_2 + d'z_0z_3 + e'z_1^2 + f'z_1z_2 + g'z_1z_3 + h'z_2^2 + i'z_2z_3 + j'z_3^2$$

Como $F_2(z) = z_0H(z) - z_2G(z)$, sustituyendo $z_0 = 1, z_1 = t, z_2 = s, z_3 = ts$:

$$f_2(t, s) = a + bt + ct^2 + ((c - a') + (d + f - c')t + (g - e')t^2)s + ((h - c') + (i - d' - g')t + (j - g')t^2)s^2 + (-h' - i't - j't^2)s^3 = A(t)s^3 + B(t)s^2 + C(t)s + D(t).$$

Entonces,

$$\frac{\partial f_2}{\partial s} = 3A(t)s^2 + 2B(t)s + C(t),$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial s^2} = 6A(t)s + 2B(t).$$

Fijado $t = t_0$, s_0 es raíz triple si

$$s_0 = \frac{-B(t_0)}{3A(t_0)},$$

$$3A(t_0) \left(\frac{-B(t_0)}{3A(t_0)} \right)^2 + 2B(t_0) \left(\frac{-B(t_0)}{3A(t_0)} \right) + C(t_0) = 0$$

y

$$A(t_0) \left(\frac{-B(t_0)}{3A(t_0)} \right)^3 + B(t_0) \left(\frac{-B(t_0)}{3A(t_0)} \right)^2 + C(t_0) \left(\frac{-B(t_0)}{3A(t_0)} \right) + D(t_0) = 0$$

puesto que son condiciones cerradas no se dan en general.

Vemos a continuación en el ejemplo (1) una curva no 2-regular en estas condiciones y en el (2) una 2-regular, que es el contraejemplo visto de una curva 2-regular que no es 2-jet amplia, equivalentemente 2-muy amplia y 2-expandida:

(1) Consideramos:

$$H(z) = 2z_0^2 - z_0z_1 + z_0z_2 + z_0z_3 - z_1^2 + z_1z_3 + 2z_2z_3$$

$$G(z) = z_0^2 + z_0z_1 + z_0z_2 + z_0z_3 + z_1^2 - z_2z_3.$$

Entonces, C viene dada por:

$$F_1(z) = z_0z_3 - z_1z_2$$

$$F_2(z) = 2z_0^3 - z_0^2z_1 + z_0^2z_3 - z_0z_1^2 + z_0z_1z_3 + 2z_0z_2z_3$$

$$- z_0z_1z_2 - z_0z_2^2 - z_0z_2z_3 - z_1^2z_2 - z_2^2z_3$$

$$F_3(z) = 2z_0^2z_1 - z_0z_1^2 + z_0z_1z_2 + z_0z_1z_3 - z_1^3 + z_1^2z_3$$

$$+ 2z_1z_2z_3 - z_0^2z_3 - z_0z_1z_3 - z_0z_2z_3 - z_0z_3^2 - z_1^2z_3 + z_2z_3^2$$

con $z_0 = 1, z_1 = t, z_2 = s, z_3 = ts$:

$$f_2(t, s) = 2 - t - t^2 + (-1 + t)s^2 + ts^3$$

si fijamos $t = 1$:

$$f_2(1, s) = f_3(1, s) = s^3$$

luego existe un punto triple en $(1, 0)$, es decir, C tiene un punto de inflexión en $[1 : 1 : 0 : 0]$.

(2) Si consideramos:

$$\begin{aligned} H(z) &= z_0^2 + z_0z_1 + z_1^2 \\ G(z) &= z_2^2 + z_2z_3 + z_3^2. \end{aligned}$$

Entonces, C viene dada por:

$$F_1(z) = z_0z_3 - z_1z_2$$

$$F_2(z) = z_0^3 + z_0^2z_1 + z_0z_1^2 - z_2^3 - z_2^2z_3 - z_2z_3^2$$

$$F_3(z) = z_0^2z_1 + z_0z_1^2 + z_1^3 - z_2^2z_3 - z_2z_3^2 - z_3^3$$

Consideramos las distintas parametrizaciones de $Q \equiv \{F_1 = 0\}$:

Para $(1, t, s, ts)$ se tiene $f_3(t, s) = tf_2(t, s)$ y

$$f_2(t, s) = (1 + t + t^2)(1 - s^3)$$

luego no hay raíces triples. Para el resto de parametrizaciones: $(t, 1, st, s)$, $(s, st, 1, t)$, $(st, s, t, 1)$, siempre queda $f_i = tf_j$ para $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$, además $f_j = (1 + t + t^2)(1 - s^3)$, no tiene puntos de inflexión, luego es 2-regular. Sin embargo no es 2-muy amplia por la proposición 2.2.4.(6) y el lema 2.2.9..

Si Q es un cono, el razonamiento es similar: por el polinomio de Hilbert la curva está en superficies cúbicas. Puesto que $C \subset Q$, si suponemos que C no es 2-regular, entonces existe $P \in C$ tal que $Osc_C^2(P) = l$ recta ($C \cdot l = 3P + \dots$), entonces $l \subset Q$. Si parametrizamos Q con $\alpha(t) + s\beta(t)$, entonces $l \equiv t = t_0$. Si consideramos una cúbica $F \in I(C)$ y $h := \phi^*F$, siendo ϕ la inmersión de Q en \mathbb{P}^3 , entonces $h(t_0, s)$ tiene una raíz triple en $P = (t_0, s_0)$, es decir:

$$h = \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} = 0$$

en $P = (t_0, s_0)$. Pero esto no se da en general, luego en condiciones generales C es 2-regular.

$d = 6$ Entonces $g = 3$ ó 4 . Por un razonamiento análogo al caso anterior en general no tienen puntos de inflexión.

Se puede hacer otro tipo de razonamientos para curvas hiperelípticas especiales de grado $d \geq 6$. Si suponemos que tiene un punto de inflexión, es decir, que existe una recta que corta a X con multiplicidad 3 y consideramos los planos que la contienen dan lugar a una g_{d-3}^1 . Al ser una curva especial hiperelíptica ha de ser la g_2^1 más $d-5$ puntos fijos, es decir, que la recta mencionada debe cortar a la curva $d-2$ veces. Si la curva tiene un número finito de cuatrisecantes (ver el tercer capítulo), se pueden estudiar utilizando la fórmula que da el número de las cuatrisecantes de la curva (ver el segundo capítulo) y así si este es suficientemente pequeño no podría ser.

Se plantean pues dos problemas: existe para cada grado y género una curva de \mathbb{P}^3 sin puntos de inflexión? y aparte de las curvas de grado 3 y 4 y géneros 0 y 1 respectivamente existe algún grado y género para los cuales todas las curvas linealmente normales carezcan de puntos de inflexión?

Bibliografía

- [ACGH] Arbarello, E.; Cornalba, M.; Griffiths, Ph.; Harris, J. *Geometry of Algebraic Curves*; Springer-Verlag, New York, 1977; Volume I.
- [BS1] Beltrametti, M. C. ; Sommese A. J. On k -spannedness for projective surfaces 1988, L'Aquila Proceedings: Hyperplane sections. Lecture Notes in Math. 1417. Springer-Verlag, **1990**, 24-51.
- [BS2] Beltrametti, M. C. ; Sommese A. J. On the preservation of k -very ampleness under adjunction, Math. Zeitschrift. 212. Springer-Verlag, **1993**, 257-283.
- [BS3] Beltrametti, M. C. ; Sommese A. J. On k -jet ampleness, Collection: Complex analysis and geometry. Univ. Se. Math.. Plenum, New York, **1993**, 355-376.
- [Ca] Cayley, A., On the skew surfaces, otherwise scrolls, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **1863**, 153, 553-483; Collected Mathematical Papers, Vol. 5, 168-220.
- [Ci] Ciliberto, C. On the Degree and Genus of Smooth Curves in a Projective Space, Advances in Mathematics **1990**, 81, 198-248.
- [Dy] Dye, R. H. Space sextic curves with six bitangents, and some Geometry of the diagonal cubic surface, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **1997**, 40, 85-97.
- [Ed] Edge, W. L. *The Theory of Ruled Surfaces*; Cambridge University Press, 1931.
- [FM] Fulton, W.; MacPherson, R. Intersection cycles on an algebraic variety, Real and Complex singularities, Oslo **1976**, 179-197.
- [GH] Griffiths, Ph.; Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry*; Wiley Interscience, Jhon Wiley & Sons, 1978.
- [GM] González, S.; Mallavibarrena, R. Osculating Degeneration of Curves, Communications in Algebra **2003**, 31 (8), 3829-3846.

- [Gr] Grothendieck, A. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert, Sem. Bourbaki 221 **1960/61**.
- [H1] Hartshorne, R. Connectedness of the Hilbert scheme, Publ. Math. IHES 52. Springer Verlag **1977 (1983)**.
- [H2] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*; Graduate Texts in Mathematics 52; Springer: Berlin, 1977.
- [H3] Hartshorne, R. On the classification of algebraic space curves, II *Algebraic Geometry*; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics n 46, AMS, part 2 **1987**; 145-164.
- [Ha] Harris, J. *Algebraic geometry*; Graduate Texts in Mathematics 133; Springer-Verlag: New York, 1992.
- [He] Henderson, A. *The Twenty-seven lines upon the Cubic Surface*; Cambridge university Press, 1911.
- [I] Iarrobino, A. Hilbert scheme of points: Overview of Last Ten Years *Algebraic Geometry*; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics n 46, AMS, part 2 **1987**; 297-320.
- [Ka] Kaji, H. On the Tangentially Degenerate Curves, J. London Math. Soc. **1986**, 33 (2), 430-440.
- [Kl] Kleiman, S. L. The enumerative theory of singularities, *Real and complex singularities*; Sijthoff and Noordhoff: Oslo, **1976**; 287-396.
- [LB1] Le Barz, P. Formules Multiséchantes pour les Courbes Gauches Quelconques. *Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry*; Prog. in Maths n 24: Birkhäuser, **1982**; 165-197.
- [LB2] Le Barz, P. Quelques calculs dans les variétés d'alignements, Advances in Mathematics **1987**, 64 (2), 87-117.
- [LM] Lanteri, A.; Mallavibarrena, R. Higher order dual varieties of projective surfaces, Archiv der Mathematik, **2000**, 75 (1), 75-80.
- [M] MAPLE V Copiright (c) 1981-1990 por la Universidad de Waterloo.
- [Ma] Mallavibarrena, R. Validité de la Formule Classique des Triséchantes Stationnaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **1986**, 303, 799-802.
- [Mc] Macdonald, I. G. Some enumerative formulae for algebraic curves, Proceedings of the Cambridge philosophical Society **1958**, 54 (4), 399-416.

-
- [Mr] Martens, G. Über den Clifford-Index algebraischer kurven, *J. Reine Angew. Math. (Crelle's J.)* **1982**, *336*, 83-90.
- [Pi1] Piene, R. Numerical Characters of a Curve in Projective N-Space, *Real and Complex singularities*; Sijthoff and Noordhoff: Oslo, **1976**; 475-495.
- [Pi2] Piene, R. A note on higher order dual varieties, with application to scrolls, *Proceedings of symposia in Pure Mathematics*, **1983**, *40*, 335-342.
- [Po] Pohl, W. F. Differential Geometry of Higher Order, *Topology* **1962**, *1*, 169-211.
- [R] Roberts, L. G. Lines in singular cubics, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics* **1970**, it 76 (IV), 89-96.
- [Ro] Roberts, J. Chow's moving lemma, in *Algebraic Geometry*, Oslo **1970**. Wolters-Noordhoff (1972), 89-96.
- [Ta] Tanturri, A. Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebraica,
- [Ti] Tikhomirov, A. S. Standard Bundles on a Hilbert Scheme of Points on a Surface, **1993**.
- [V] Vassallo, V. Justification de la Méthode Fonctionnelle pour les Courbes Gauches, *Acta Math.* **1994**, *172*, 257-297.