

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Javier Castro Cantalejo

Bajo la dirección de los doctores:
Juan Antonio Tejada Cazorla
Daniel Gómez González

Madrid, 2007

- **ISBN: 978-84-669-3131-1**

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa I

**REPARTO DE HOLGURAS Y COSTES
EN UNA RED PERT**



Realizada por: Javier Castro Cantalejo.

Dirigida por: Juan Antonio Tejada Cazorla.
Daniel Gómez González.

Mis primeras palabras tienen que ser de gratitud a tantas personas que han hecho posible la culminación de este trabajo. En primer lugar, mi reconocimiento y mi profundo agradecimiento a los profesores Juan Tejada y Daniel Gómez por sus sabios consejos y la paciencia y dedicación que han demostrado permanentemente conmigo.

Igualmente debo agradecer el interés y el apoyo que el profesor Javier Montero me ha ofrecido durante todo este periodo.

También me gustaría expresar mi sincera gratitud a mis compañeros: Conrado, Enrique, Daniel, Rosa, Charo y Monica por lograr que tenga ganas de levantarme por las mañanas para ir a trabajar.

Pero por encima de cualquier persona, se lo debo agradecer a mi familia, formada por unos padres que harían cualquier cosa por la felicidad de sus hijos, por lo que les estaré eternamente agradecidos, y una hermana que no se cansa de estar a mi lado apoyándome.

Prólogo

La utilización de redes *PERT* para la representación y planificación de proyectos es la metodología más extendida y defendida de las existentes. En esta memoria se abordan, desde distintos puntos de vista, tres de los problemas más comunes asociados a la planificación de proyectos con redes *PERT*, como son:

- El problema del reparto de holguras existentes en una red *PERT* (problema *S PERT*) o, lo que es similar, la elaboración de un calendario para la ejecución del proyecto.
- El problema del reparto del beneficio que se pudiera generar en la ejecución de un proyecto, entre todas las actividades del proyecto (problema *A PERT*).
- El problema del reparto del coste por retraso que se pudiera generar en la ejecución de un proyecto, entre las actividades retrasadas (problema *C PERT*).

Para la correcta planificación de un proyecto es necesario la elaboración de un plan de trabajo exhaustivo, es decir, la determinación de un calendario sin holguras para cada una de las actividades. Por ejemplo, en la ejecución de una obra civil en España, es necesario presentar este calendario antes de comenzar la ejecución de la obra. Dado que hacer un reparto de holguras de una forma eficiente es equivalente a la realización de un calendario, la resolución del problema *S PERT* es de una gran utilidad en la planificación de proyectos.

Una vez planificado con exactitud el proyecto (primer problema que se aborda en esta memoria), se pasa a su ejecución, en la cual las actividades tendrán una duración asociada,

fruto de una gran cantidad de variables, como el dinero invertido en su realización, el desarrollo del proyecto en el momento de comienzo de la actividad o la propia variabilidad de la actividad. El administrador del proyecto debe determinar el grado de cumplimiento de cada actividad con el calendario asignado en la planificación (problemas *APERT* y *CPERT*), bien para imputar un coste (o un beneficio) a las actividades responsables del retraso (o adelanto) o bien, para decidir en futuros trabajos la asignación o no de determinados trabajos a determinadas firmas responsables de actividades en el pasado.

Se debe destacar la estrecha relación existente entre el problema de reparto de holguras y los problemas *APERT* y *CPERT* ya que, para la correcta imputación de costes (problemas *APERT* y *CPERT*), es necesario conocer la holgura de la que podía disponer cada actividad (resolución del problema *SPERT*). Esta memoria estudia la utilización de una solución del problema *SPERT* como punto de partida de los problemas *APERT* y *CPERT* y observa las ventajas que este método produce.

A lo largo de toda esta memoria se ha hecho hincapié en la importancia de la aplicabilidad en situaciones reales de cualquier solución presentada. Por este motivo, las reglas presentadas en esta memoria son definidas mediante algoritmos polinomiales o polinomiales en media, excepto para las reglas definidas en función del valor de Shapley, sobre las cuales se propone una aproximación polinomial con buenas propiedades y extrapolable al cálculo del valor de Shapley en otros problemas.

Fruto de esta ventaja computacional, se calcula el valor de las diferentes soluciones de las reglas presentadas para un caso real.

Esta memoria ha sido desarrollada como se indica a continuación:

En el capítulo 1 se introducen los conceptos necesarios de teoría de juegos y de reparto secuencial (así como la relación existente entre ellos), se presentan las redes *PERT* y los tres problemas estudiados: reparto de holguras en una red *PERT* (problema *SPERT*), reparto de coste y beneficios en una red *PERT* (problema *APERT*) y reparto de costes en una red

PERT (problema *CPERT*).

En los capítulos 2, 3 y 4, se realiza una revisión bibliográfica de las reglas existentes para los problemas *SPERT*, *APERT* y *CPERT*, respectivamente, y se introducen y analizan nuevos conceptos de solución para estos problemas, finalizando todos estos capítulos con un análisis comparativo entre todas las reglas definidas y las existentes en la literatura.

En el capítulo 5 se propone una aproximación para el cálculo del valor de Shapley basado en técnicas de muestreo. En particular, se presentan algoritmos con complejidad computacional polinómica que aproximan el valor de Shapley o cualquier semivalor con un error conocido y acotado para un nivel de confianza fijado.

En el capítulo 6 se estudian y analizan las diferentes reglas definidas en esta memoria para un caso real.

Esta memoria concluye, en el capítulo 7, con las conclusiones y futuras líneas de investigación.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos de teoría de juegos	2
1.2. Reparto Secuencial	5
1.3. Introducción al PERT	9
1.3.1. Antecedentes de las redes PERT	10
1.3.2. Visualización de una red PERT	12
1.3.3. Definiciones y conceptos en una red PERT	17
1.3.4. Red PERT aleatoria	22
1.4. Introducción al problema SPERT	27
1.4.1. Antecedentes del problema SPERT.	29
1.4.2. Modelo SPERT	31
1.5. Introducción al problema APERT	34
1.5.1. Antecedentes del problema APERT.	36
1.5.2. Modelo APERT	36

1.6. Introducción al problema CPERT	38
1.6.1. Antecedentes del problema CPERT	39
1.6.2. Modelo CPERT	40
2. Problema SPERT	42
2.1. Propiedades de una regla en el problema SPERT	42
2.2. Reglas basadas en un juego NTU	47
2.2.1. Juego SPERT NTU	48
2.2.2. Reglas en el problema SPERT basadas en teoría de juegos	51
2.3. Reglas basadas en el PCC	57
2.3.1. Definición del PCC	59
2.3.2. Propiedades del PCC	60
2.3.3. Reglas en el PCC	63
2.3.4. Aplicación al problema SPERT del PCC	67
2.3.5. Reglas para el problema SPERT basadas en el PCC	71
2.3.6. Cálculo de la regla Q^c aplicada al problema SPERT	76
2.4. Reglas basadas en el PCW	82
2.4.1. Definición del PCW	82
2.4.2. Propiedades del PCW	83
2.4.3. Reglas en el PCW	86
2.4.4. Aplicación al problema SPERT del PCW	96

2.4.5. Regla proporcional	98
2.4.6. Reglas en el problema SPERT basadas en el PCW	100
2.4.7. Cálculo de la regla Q^w aplicada al problema SPERT	103
2.5. Comparación	105
2.5.1. En función de las propiedades	106
2.5.2. En función de la complejidad	108
2.5.3. Mediante ejemplos significativos	108
3. Problema APERT	117
3.1. Propiedades de una regla en el problema APERT	118
3.2. Juegos cooperativos para el problema APERT	121
3.2.1. El juego de proyectos (Estévez-Fernández et al. (2005))	123
3.2.2. Un nuevo juego para el problema APERT	129
3.3. Reglas en una red PERT general	144
3.4. Reglas en una red PERT crítica	147
3.5. Comparación	150
3.5.1. En función de las propiedades	152
3.5.2. En función de la complejidad.	152
3.5.3. Mediante ejemplos significativos.	153
4. Problema CPERT	159
4.1. Propiedades de una regla en el problema CPERT	160

4.2. Reglas basadas en bancarrota	165
4.3. Reglas en dos pasos	172
4.3.1. Método basado en el retraso de los caminos	173
4.3.2. Método basado en el reparto secuencial	175
4.3.3. Método basado en el valor de Shapley	177
4.4. Reglas basadas en el CAW	179
4.4.1. Elección del vector de pesos	184
4.5. Comparación	190
4.5.1. En función de las propiedades	191
4.5.2. En función de la complejidad.	192
4.5.3. Mediante ejemplos significativos.	193
5. Estimación del valor de Shapley	199
5.1. Estimación de un semivalor	200
5.2. Algoritmos	204
5.3. Ejemplos	207
5.3.1. Juego de votación simétrico.	207
5.3.2. Juego de votación no simétrico.	208
5.3.3. Juego del aeropuerto.	211
5.3.4. Juego de los zapatos.	214
5.3.5. Juego del árbol de recubrimiento mínimo.	215

5.3.6. Juego APERT.	215
6. Estudio de un caso real	217
6.1. Presentación del proyecto.	217
6.2. Planificación del proyecto <i>PERT</i>	230
6.3. Problema SPERT	234
6.4. Problema APERT	239
6.5. Problema CPERT	244
7. Conclusiones y futuras líneas de investigación	250
7.1. Conclusiones	250
7.2. Futuras líneas de investigación	253
7.2.1. Restricción entera del problema SPERT	253
7.2.2. Comparación con los calendarios óptimos	253
7.2.3. Determinar las estrategias de las actividades	253
7.2.4. Determinar la mejor regla, teniendo en cuenta las estrategias de las actividades	254
7.2.5. Extender la definición del juego para cualquier función de costes o beneficios .	254
7.2.6. Definición de un juego en el problema CPERT	254
7.2.7. Uso de la regla SC en el problema APERT	254
7.2.8. Implementación de las reglas propuestas en situaciones reales	255

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se realiza una breve exposición de las metodologías usadas en esta memoria y de los problemas que se desean abordar. En particular, se comienza introduciendo los conceptos de teoría de juegos y de repartos secuenciales, así como la relación entre ellos; se continúa exponiendo la representación de una red *PERT*, y se finaliza enunciando los siguientes tres problemas:

- El problema del reparto entre las actividades de una red *PERT* de las holguras existentes, denotado por *SPERT*.
- El problema del reparto del beneficio o coste, asociado a un adelanto o retraso en la ejecución de una red *PERT*, entre todas las actividades del proyecto. Esto implica la existencia de actividades que reciben beneficio y otras a las que se les imputa coste. El problema se denota por *APERT*.
- El reparto de los costes asociados a un retraso en la ejecución de una red *PERT* entre las actividades retrasadas, por lo que solo existirán actividades a las que se les impute coste, denotado por *CPERT*.

Estos tres problemas, con diferentes aplicaciones prácticas, se han planteado en la literatura de forma independiente; en este trabajo se trata, además, de utilizar la solución del primero

para la resolución de los otros dos.

1.1. Conceptos de teoría de juegos

Un juego de valor n -personal en forma de función característica está definido por una 2-upla (N, v) , donde N es el conjunto de jugadores y v es una función real definida en los subconjuntos de N satisfaciendo $v(\emptyset) = 0$. El valor de $v(S)$ representa el beneficio que la coalición S puede asegurarse, independientemente del comportamiento de la coalición $N \setminus S$. Se denota por n al cardinal de $|N|$.

Un juego de valor (N, v) es superaditivo si:

$$v(T) + v(S) \leq v(S \cup T), \quad \forall S, T \subset N \text{ tal que } S \cap T = \emptyset.$$

Un juego de valor (N, v) es aditivo si:

$$v(T) + v(S) = v(S \cup T), \quad \forall S, T \subset N \text{ tal que } S \cap T = \emptyset.$$

Un juego de valor (N, v) es convexo si:

$$v(T) + v(S) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T), \quad \forall S, T \subset N.$$

Un jugador, $i \in N$, en un juego de valor (N, v) , es un pelele si:

$$v(T \cup \{i\}) = v(T) + v(\{i\}), \quad \forall T \subset N \setminus \{i\}.$$

Dos jugadores, $i, j \in N$, en un juego de valor (N, v) , son jugadores simétricos si:

$$v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\}), \quad \forall T \subset N \setminus \{i, j\}.$$

El corazón de un juego de valor (N, v) , es:

$$\text{Core}(v) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n / \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subset N \quad \text{y} \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

El valor de Shapley de un juego de valor (N, v) es:

$$\text{Sh}_i(N, v) = \sum_{T \subset N, i \in T} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})], \quad \forall i \in N.$$

Para definir el valor de Shapley ponderado (Weighted Shapley Value, Shapley (1957)[28]), se considera el vector de pesos $W = (w_1, \dots, w_n)$, donde $w_i > 0$ es el peso del jugador i , $i = 1, \dots, n$. Un orden es una función $O : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ que asigna un jugador $O(k)$ a cada posición k . Dado un orden O y un vector de pesos W , se define la probabilidad de O

$$P_w(O) = \prod_{k=1}^n (w_{O(k)} / \sum_{l=1}^k w_{O(l)}).$$

Se denota por $\text{Pre}^i(O)$ el conjunto de predecesores del jugador i en el orden O , $\text{Pre}^i(O) = \{O(1), \dots, O(k-1)\}$, si $i = O(k)$.

El valor de Shapley ponderado de un juego de valor (N, v) se define como:

$$\text{WSh}_i(v) = \sum_O P_w(O) (v(\text{Pre}^i(O) \cup i) - v(\text{Pre}^i(O))), \quad \forall i \in N$$

Un semivalor de un juego de valor (N, v) se define como:

$$\gamma_i^*(v) = \sum_{T \subset N, i \in T} P_t [v(T) - v(T \setminus \{i\})] \quad \forall i \in N,$$

$$\text{donde: } \sum_{s=1}^n \binom{n-1}{s-1} P_s = 1, \quad P_s \geq 0 \quad y \quad 1 \leq s \leq n.$$

El valor de Shapley es el valor de Shapley ponderado cuando $w_i = w_j, \forall i, j \in N$, y es un semivalor con $P_t = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$.

Un juego de coste n -personal en forma de función característica está definido por una 2-upla (N, c) , donde N es el conjunto de jugadores y c es una función real definida en los subconjuntos de N satisfaciendo $c(\emptyset) = 0$. El valor de $c(S)$ representa el coste que la coalición S se garantiza pagar como mucho, supuesto que los jugadores de $N \setminus S$ se comportan de la forma más negativa para la coalición S .

Un jugador, $i \in N$, en un juego de coste (N, c) , es un pelele si:

$$c(T \cup \{i\}) = c(T) + c(\{i\}), \quad \forall T \subset N \setminus \{i\}.$$

Dos jugadores, $i, j \in N$, en un juego de coste (N, c) , son jugadores simétricos si:

$$c(T \cup \{i\}) = c(T \cup \{j\}), \quad \forall T \subset N \setminus \{i, j\}.$$

El corazón de un juego de coste (N, c) , es:

$$\text{Core}(c) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n / \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \quad \forall S \subset N \quad y \quad \sum_{i \in N} x_i = c(N) \right\}.$$

El valor de Shapley de un juego de coste (N, c) es:

$$Sh_i(N, c) = \sum_{T \subset N, i \in T} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [c(T) - c(T \setminus \{i\})], \quad \forall i \in N.$$

El valor de Shapley ponderado de un juego de coste (N, c) se define como:

$$WSh_i(c) = \sum_O P_w(O) (c(Pre^i(O) \cup i) - c(Pre^i(O))), \quad \forall i \in N$$

Un semivalor de un juego de coste (N, c) se define como:

$$\gamma_i^*(c) = \sum_{T \subset N, i \in T} P_t [c(T) - c(T \setminus \{i\})] \quad \forall i \in N,$$

$$\text{donde: } \sum_{s=1}^n \binom{n-1}{s-1} P_s = 1, \quad P_s \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 \leq s \leq n.$$

1.2. Reparto Secuencial

El reparto secuencial (ver Moulin y Shenker (1992)[23]) se asocia a un problema de reparto de costes.

DEFINICIÓN 1.1 *Un problema de reparto de coste, viene dado por (N, q, C, α) , donde:*

- $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de agentes.
- $q = (q_1, \dots, q_n)$ es el vector de demandas de los agentes, donde $q_i > 0$ es la cantidad demandada de un bien determinado por el agente i , $i = 1, \dots, n$.
- $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, es la función de coste de producción del bien. Es una función no decreciente con $C(0) = 0$.

- $\alpha : \mathfrak{R}_+^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$, es una función de agregación que asigna para cada conjunto finito de agentes, con su correspondiente demanda $q \in \mathfrak{R}_+^n$, la demanda total $\alpha(q) \in \mathfrak{R}_+$ como la mínima cantidad de bien que es necesaria para satisfacer a todos los agentes de N , donde $\alpha(0, \dots, 0) = 0$.

Se denota por CA^n la clase de todos los problemas de reparto de costes con n agentes y por CA la clase de todos los problemas de reparto de costes. Una reparto factible para un problema CA^n es un vector $(x_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$ tal que $x_i \geq 0$, $\forall i \in N$ y $\sum_{i \in N} x_i = C(\alpha(q))$; el conjunto de repartos factibles es $F(N, q, C, \alpha)$. Una regla de reparto es una función f que asigna a cada problema $(N, q, C, \alpha) \in CA$ una solución factible, $f(N, q, C, \alpha) \in F(N, q, C, \alpha)$. Se asumirá que los agentes están ordenados de tal forma que $q_1 \leq \dots \leq q_n$.

DEFINICIÓN 1.2 (Tijs y Koster (1998)[30]) Dado $(N, q, C, \alpha) \in CA$, la regla de reparto secuencial (Serial Cost Sharing allocation rule) viene dada por:

$$\xi_i^s(N, q, C, \alpha) = \sum_{k=1}^i \frac{C(\alpha(q^k)) - C(\alpha(q^{k-1}))}{n+1-k}, \forall i = 1, \dots, n,$$

donde $q_1 \leq \dots \leq q_n$, $q^k = (q_1, \dots, q_{k-1}, \underbrace{q_k, \dots, q_k}_{n-k+1 \text{ veces}})$ y $q^0 = (0, \dots, 0)$.

La regla de reparto secuencial está caracterizada por las siguientes propiedades (ver Tijs y Koster (1998)[30])

Igual tratamiento de los iguales (Equal Treatment of Equals (ETE)): $\forall (N, q, C, \alpha) \in CA$ y $\forall i, j \in N$, tal que $q_i = q_j$, se verifica que $f_i(N, q, C, \alpha) = f_j(N, q, C, \alpha)$.

Independencia de demandas mayores (Independence of Size of Larger Demands (ISLD)): Dado $(N, q, C, \alpha) \in CA$ y $(N, \tilde{q}, C, \alpha) \in CA$, tal que $q_i = \tilde{q}_i \forall i = 1, \dots, j$, se verifica que $f_i(N, q, C, \alpha) = f_i(N, \tilde{q}, C, \alpha)$, $\forall i = 1, \dots, j$.

En la literatura de las reglas de reparto, siempre se ha supuesto que los agentes son simétricos, es decir, reciben el mismo coste los agentes con igual demanda. En esta memoria

se generaliza el problema CA y la regla ξ^s de tal forma que también dependan de unos pesos asignados a los agentes.

DEFINICIÓN 1.3 *Un problema de reparto de costes ponderados viene dado por (N, q, C, α, W) , donde:*

- (N, q, C, α) es un problema CA .
- $W = (w_1, \dots, w_n)$ es el vector de pesos de los agentes, donde $w_i > 0$ es el peso asignado al agente i , $i = 1, \dots, n$.

Se denota por CAW^n la clase de todos los problemas de reparto de costes ponderados con n agentes y por CAW la clase de todos los problemas de reparto de costes ponderados. Un reparto factible para un problema CAW^n es el mismo que para el problema CA . Una regla de reparto es una función f que asigna a cada problema $(N, q, C, \alpha, W) \in CAW$ una solución factible, $f(N, q, C, \alpha, W) \in F(N, q, C, \alpha)$. Se asumirá que los agentes están ordenados de tal forma que $q_1 \leq \dots \leq q_n$.

DEFINICIÓN 1.4 *Dado $(N, q, C, \alpha, W) \in CAW$, el reparto secuencial ponderado (Weighted Serial Cost Sharing allocation rule), viene dado por:*

$$\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, W) = \sum_{k=1}^i \frac{w_i}{\sum_{j \in \{k, \dots, n\}} w_j} (C(\alpha(q^k)) - C(\alpha(q^{k-1}))), \forall i = 1, \dots, n,$$

donde $q_1 \leq \dots \leq q_n$, $q^k = (q_1, \dots, q_{k-1}, \underbrace{q_k, \dots, q_k}_{n-k+1 \text{ veces}})$ y $q^0 = (0, \dots, 0)$.

Para caracterizar la regla $\xi^{s,w}$, con la misma filosofía usada para la regla ξ^s , se introducen las siguientes dos propiedades.

Proporcional tratamiento a iguales (Proportional Treatment of Equals (PTE)):

$\forall (N, q, C, \alpha, W) \in CAW^n$ y $\forall i, j \in N$, tal que $q_i = q_j$, se verifica que $w_i f_j(N, q, C, \alpha, W) = w_j f_i(N, q, C, \alpha, W)$.

Independencias de demandas mayores (Independence of Size of Larger Demands (ISLD)): Dado $(N, q, C, \alpha, W) \in CAW$ y $(N, \tilde{q}, C, \alpha, W) \in CAW$, tal que $q_i = \tilde{q}_i \forall i = 1, \dots, j$, se verifica que $f_i(N, q, C, \alpha, W) = f_i(N, \tilde{q}, C, \alpha, W), \forall i = 1, \dots, j$

PROPOSICIÓN 1.1 *La regla $\xi^{s,w}$ es la única regla de reparto factible para el problema CAW que cumple las propiedades ISLD y PTE.*

DEMOSTRACIÓN La demostración sigue la misma línea de demostración utilizada en Tijs y Koster (1998)[30] para la caracterización de la regla de reparto ξ^s para el problema CA. □

Potters y Sudhölter (1999)[25] mostraron que la regla $\xi^{s,w}$ es el valor de Shapley ponderado y pertenece al corazón del juego de coste $c(S) = C(\max_{i \in S} q_i)$. Es decir, cuando la función de agregación es $\alpha(q) = \max_{i \in N} q_i$. En esta memoria se generaliza el resultado para cualquier función de agregación.

PROPOSICIÓN 1.2 *Para todo $(N, q, C, \alpha, W) \in CAW$, la regla $\xi^{s,w}$ es el valor de Shapley ponderado y pertenece al corazón del juego $c(S) = C(\alpha(q^{i_S}))$, donde $i_S = \max \{i, i \in S\}$.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $k \in N$, se define el juego de costes:

$$c^k(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } k, k+1, \dots, n \notin S \\ C(\alpha(q^k)) - C(\alpha(q^{k-1})) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $c(S) = \sum_{k=1}^n c^k(S)$.

En todos estos juegos $(c^k(S), \forall k = 1, \dots, n)$ los jugadores $1, \dots, k-1$ son peleles y los jugadores k, \dots, n son jugadores simétricos, entonces dado que el valor de Shapley ponderado no se altera ante jugadores peleles y tiene comportamiento proporcional ante jugadores simétri-

cos,

$$WSh_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ \frac{w_i}{\sum_{k \in \{k, \dots, n\}} w_k} (C(\alpha(q^k)) - C(\alpha(q^{k-1}))) & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

Dado que el valor de Shapley ponderado cumple aditividad, se tiene,

$$WSh_i = \sum_{k=1}^n WSh_i^k = \sum_{k=1}^i \frac{w_i}{\sum_{j \in \{k, \dots, n\}} w_j} (C(\alpha(q^k)) - C(\alpha(q^{k-1}))) = \xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, W).$$

Además, $\xi^{s,w}$ pertenece al corazón del juego:

$$\sum_{i \in S} \xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, W) \leq \sum_{i \in \{1, \dots, i_S\}} \xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, W) \leq C(\alpha(q^{i_S})).$$

□

Cuando $w_i = k, \forall i \in N$, se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 1.1 *La regla ξ^s es el valor de Shapley y pertenece al corazón del juego $c(S)$.*¹

1.3. Introducción al PERT

En la dirección de un proyecto de gran escala, que requiere coordinar numerosas actividades en toda la organización, se deben considerar una gran cantidad de detalles al planear cómo coordinar todas esas actividades con el fin de desarrollar una programación realista y facilitar después la supervisión del proyecto. Para ello, existen dos técnicas con una relación muy cercana: *PERT* (Program Evaluation and Review Technique) y *CPM* (Critical Path Method).

¹Moulin (1995)[22] y Albizuri et al. (2002) [1] estudian la relación entre otra regla secuencial y el valor de Shapley.

PERT y *CPM* se han aplicado en una gran variedad de proyectos. Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Construcción de una nueva planta.
2. Investigación y desarrollo de un nuevo producto.
3. Proyectos de exploración del espacio en la NASA.
4. Producción de películas.
5. Construcción de barcos.
6. Proyectos para el desarrollo de nuevos sistemas bélicos.
7. Localización de una instalación grande.
8. Mantenimiento de un reactor nuclear.
9. Realización de una campaña publicitaria.
10. Construcción de una autopista.

Las versiones originales de *PERT* y *CPM* tenían algunas diferencias, pero se han ido fusionado de modo gradual y en la actualidad no se las considera de forma independiente. Por lo tanto, es común que quienes las utilizan usen los dos nombres indistintamente, o que los combinen en un solo acrónimo, *PERT/CPM*. En este trabajo se usará el nombre de *PERT*.

1.3.1. Antecedentes de las redes PERT

El método *PERT* (Program Evaluation and Review Technique) y el método *CPM* (Critical Path Method) forman las dos técnicas pioneras en el campo de la moderna planificación y control de proyectos. Ambos tuvieron su aparición en 1958. Aunque surgieron de investigaciones independientes, en su esencia son iguales, existiendo sólo ligeras diferencias en sus aspectos formales.

El desarrollo del *PERT* se inició en 1957, cuando la Marina de los Estados Unidos se enfrentó al problema de coordinación y control que surgió en la realización del proyecto de construcción de submarinos atómicos armados con proyectiles Polaris (proyecto Polaris). En este proyecto, la Marina de los Estados Unidos debía mantener relación con 250 contratistas directos y con más de 9000 subcontratistas, además de un número elevado de agencias gubernamentales, lo que suponía la coordinación de una gran cantidad de recursos y actividades. Las técnicas existentes resultaban insuficientes, de hecho, prácticamente el único método existente en la época era el diagrama de barras de Gantt (Henry L. Gantt desarrolló su sistema de planificación también dentro del marco de las necesidades militares durante la Primera Guerra Mundial, con objeto de establecer racionalmente los programas de municionamiento).

Ante esta dificultad, la Marina de los Estados Unidos se planteó desarrollar una nueva técnica de programación y control de proyectos. De esta manera, bajo iniciativa del almirante W. F. Raborn, se constituyó en 1958 un equipo investigador formado por personal técnico de la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina, de la empresa de material aeronáutico Lockheed y de la empresa de Ingenieros Consultores Booz, Allen y Hamilton. El proyecto de investigación se designó con el nombre de *PERT* (Program Evaluation and Research Task). Cuando apareció el primer informe interno en la Marina sobre este proyecto, se le designó con el nuevo nombre de *Program Evaluation and Review Technique*, que corresponde a las mismas siglas y es el nombre que se le da en la actualidad. En septiembre de 1959, la revista *Operations Research* publicó, en el número de septiembre, un artículo realizado por D. C. Malcom, J. H. Roseboom, C. E. Clark y W. Fazar (miembros del equipo investigador patrocinado por la Marina). Este artículo constituyó el primer trabajo publicado sobre el método *PERT* (Malcom et al. (1959)[20]).

La aplicación del método *PERT* al proyecto Polaris fue un éxito, reduciendo en dos años la duración del proyecto que estaba estimada en cinco. Este éxito supuso su rápida difusión al campo industrial.

En cuanto al inicio del CPM, se debe a la empresa E. I. Du Pont, que quiso en 1957,

desarrollar un método que le permitiera controlar y programar los proyectos de mantenimiento de sus plantas de fabricación. Lo desarrollaron Morgan R. Walker, de la división de ingeniería de E. I. Du Pont, y James E. Kelly, que trabajaba en Remington Rand-Univac. La publicación de los resultados data de 1959 en un documento interno de la empresa (Kelley y Walter (1959)[16]).

Durante los años siguientes al nacimiento del *PERT* y *CPM*, surgieron una serie de métodos de programación y control de proyectos que ampliaron y perfeccionaron las técnicas originales. Bernard Roy creó el método dual del *PERT* o método de los potenciales (Roy (1960)[26]). Se debe citar la programación de proyectos con recursos limitados (Burgess y Killebrew (1962)[7] y Levy et al. (1962)[18]) y la aplicación de la simulación Monte Carlo (Metropolis y Ulam (1949)[21]) a las técnicas de programación y control de proyectos.

1.3.2. Visualización de una red PERT

Una red *PERT* representa el desarrollo del proyecto que se desea realizar. Esta red viene representada por un grafo dirigido valorado en los arcos. La información necesaria requerida para la representación es de tres tipos:

1. Información de la actividad: se desglosa el proyecto en sus actividades individuales (al nivel de detalle deseado).
2. Relaciones de precedencia: se identifican los predecesores inmediatos de cada actividad, (es posible conocer los sucesores inmediatos de cada actividad y a partir de ellos determinar los predecesores inmediatos).
3. Datos de tiempo: se estima la duración de cada actividad.

Con esta información se construye una red o grafo *PERT*, que es un grafo conexo, dirigido, sin ciclos, con un único vértice inicial y un único vértice final y con una valoración en cada uno de sus arcos.

En la literatura, existen dos tipos de redes o grafos *PERT* que modelizan un proyecto y contienen toda la información previamente descrita (1, 2, 3):

- Red o grafo de proyecto de **actividades en los arcos (AOA, activity on arc)** (Malcom et al. (1959)[20]), donde cada actividad está representada por un arco. Un nodo se usa para separar una actividad, de cada una de sus inmediatas predecesoras.
- Red o grafo de **actividades en los nodos (AON, activity on node)** (Roy (1960)[26]), donde cada actividad se representa por un nodo. Los arcos se usan sólo para mostrar las relaciones de precedencia entre las actividades. En particular, al nodo de cada actividad le llega un arco con el nodo de salida de cada actividad que la precede de forma inmediata

La versión original del *PERT* y del *CPM* usaban las redes AOA, por lo que se convirtieron en las usadas durante muchos años. Las redes AON gozan en la actualidad de la aprobación de una parte de la comunidad científica, por lo que no es fácil optar por ninguna de las dos. Se optará por las redes AOA, dado que los artículos referentes al tema en estudio así lo hacen, y esto permite la comparación directa. En lo sucesivo esta memoria se centrará en las redes AOA, y se eliminará el adjetivo AOA.

A continuación se introduce un ejemplo para ver la diferencia entre ambas redes.

EJEMPLO 1.1 *El ejemplo que aquí se expone ha sido extraído de Hillier y Lieberman (2001)[15].*

Una empresa desea construir una nueva planta; en la tabla 1.1 se muestra la lista de actividades que se deben realizar, junto con sus predecesoras y su duración.

Cuadro 1.1: Actividades del ejemplo 1.1

Actividad	Descripción de la actividad	Predecesores	Duración
A	Excavación	-	2
B	Colocar los cimientos	A	4
C	Levantar paredes	B	10
D	Colocar el techo	C	6
E	Instalar la plomera exterior	C	4
F	Instalar la plomera interior	E	5
G	Aplanados interiores	D	7
H	Pintura exterior	E,G	9
I	Instalar el cableado eléctrico	C	7
J	Aplanados exteriores	F,I	8
K	Colocar pisos	J	4
L	Pintura interior	J	5
M	Colocar accesorios exteriores	H	2
N	Colocar accesorios interiores	K,L	6

Las actividades predecesoras indicadas en la tabla son las actividades predecesoras inmediatas, es decir, son las actividades que deben terminarse no más tarde del tiempo de inicio de la actividad dada: si hay más de una, todas deben terminar antes del inicio de la actividad en cuestión. Por ejemplo, los primeros elementos de esa columna indican:

1. La excavación no requiere esperar la finalización de ninguna otra actividad.
2. La excavación debe terminar antes de comenzar la colocación de cimientos.
3. Los cimientos deben quedar colocados por completo antes de iniciar el levantamiento de paredes, etc.

Las duraciones de las actividades son estimaciones, no son tiempos exactos dado que están sujetos a variación aleatoria debida a la disposición del material, de la mano de obra necesaria, etc.

La representación gráfica con las dos opciones (AON y AOA) será:

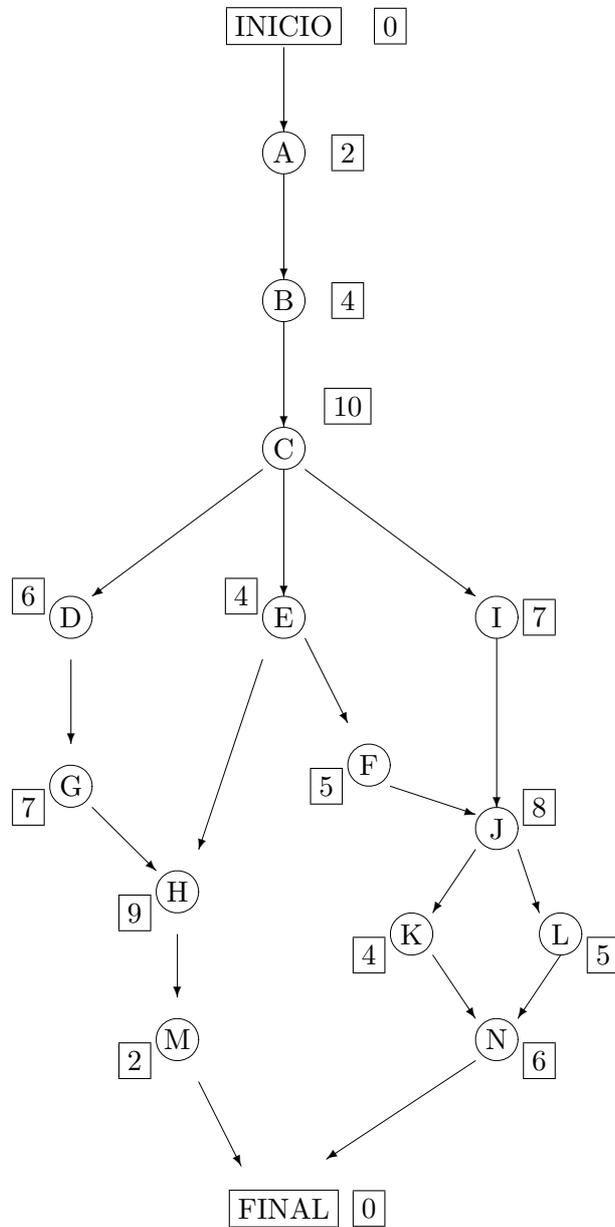


Figura 1.1: RED AON

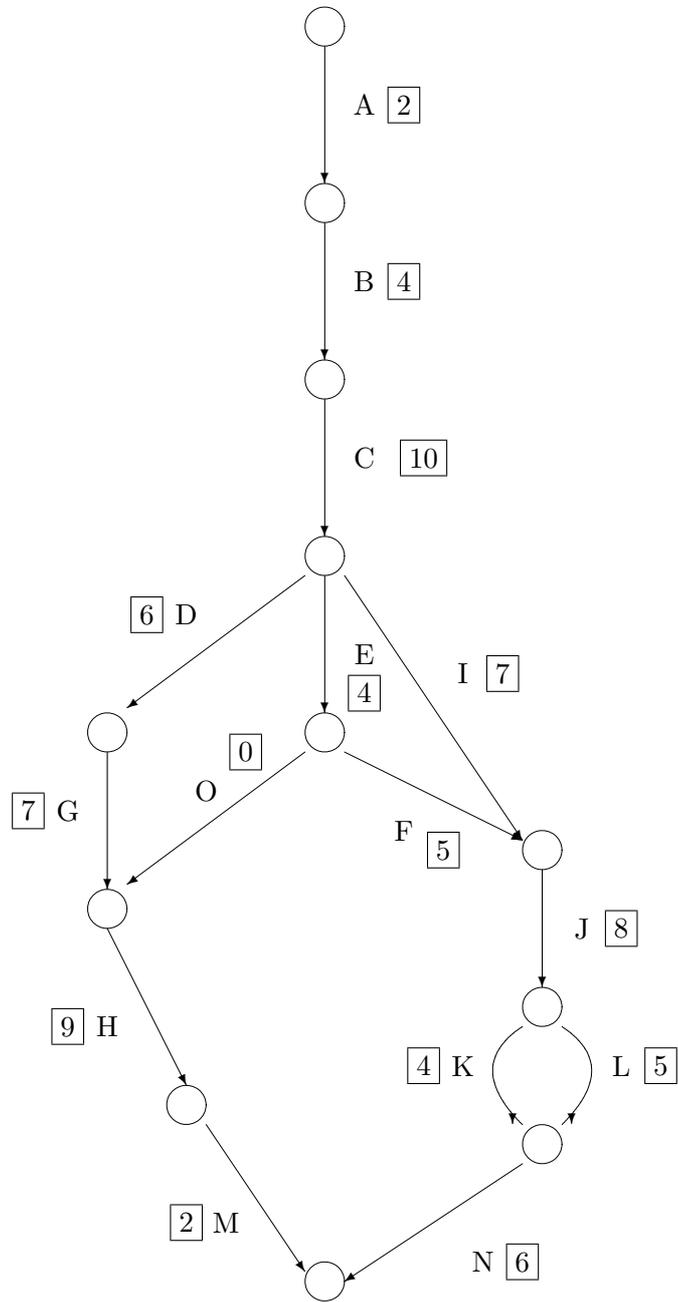


Figura 1.2: RED AOA

1.3.3. Definiciones y conceptos en una red PERT

Dado un conjunto finito N se denota por n o $|N|$ el cardinal de N y por $PA = \{\pi_1, \dots, \pi_p\}$ una colección de subconjuntos de N que cubren N ($\bigcup_{i=1}^p \pi_i = N$). Para todo $M \subset N$ y $M \neq \emptyset$, $PA|_M$ es la colección de subconjuntos inducidos por M en PA , i.e. $PA|_M = \{\pi \cap M / \pi \in PA, \pi \cap M \neq \emptyset\}$. Dados $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$ y $S \subset N$, se considera que $x|_S = (x_i)_{i \in S} \in \mathfrak{R}^s$.

Si $y = (y_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$, $x \geq y$ significa que $x_i \geq y_i, \forall i \in N$, $x > y$ significa que $x_i \geq y_i, \forall i \in N$ y $x \neq y$ y $x \gg y$ significa que $x_i > y_i, \forall i \in N$.

Dado $Y \subset \mathfrak{R}^n$, la frontera de Pareto de Y es definida como

$$PB(Y) = \{y \in Y / \forall x \in \mathfrak{R}^n \text{ tal que } x > y, \text{ se verifica } x \notin Y\},$$

y la frontera de Pareto débil de Y como

$$WPB(Y) = \{y \in Y / \forall x \in \mathfrak{R}^n \text{ tal que } x \gg y, \text{ se verifica } x \notin Y\}.$$

Un grafo dirigido es un par $G = (X, N)$ donde $X = \{x_1, \dots, x_u\}$ es un conjunto finito de nodos y $N = \{1, \dots, n\}$ es la colección de arcos. Un arco $i \in N$ tiene la forma $(x_{i,1}, x_{i,2})$, donde $x_{i,1}, x_{i,2} \in X$.

Un nodo fuente es un nodo $x_b \in X$ tal que no existe un arco $i \in N$ con $x_{i,2} = x_b$. Un nodo sumidero es un nodo $x_e \in X$ tal que no existe un arco $i \in N$ con $x_{i,1} = x_e$.

Un camino π entre x y x^* es una colección de arcos $\{i_1, \dots, i_p\}$ tal que $x_{i_1,1} = x, x_{i_p,2} = x^*$ y $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, x_{i_k,2} = x_{i_{k+1},1}$. Un ciclo es un camino entre el nodo x y él mismo.

Una red PERT, es una 2-upla $PE = (G, D)$ donde $G = (X, N)$, G es un grafo dirigido sin ciclos con un solo nodo fuente y un solo nodo sumidero, N es el conjunto de arcos representando el conjunto de actividades en el proyecto y D es el vector de duraciones,

siendo d_i la duración de la actividad i , i.e. : $D = (d_1, \dots, d_n)$. Se supone que $d_i \geq 0$ y si $d_i = 0$ entonces i es una actividad ficticia.

Una red *PERT* es bipartita en x si $\forall \pi \in PA, \exists i \in \pi$, tal que $x_{i,2} = x$ y $x \neq x_e$. Se denotará al nodo x como nodo bipartito.

La duración de un camino π , denotada por d_π , es la suma de las duraciones de las actividades de π , i.e. $d_\pi = \sum_{i \in \pi} d_i$. Se denota por $PA(x, x^*)$ el conjunto de todos los caminos entre x y x^* . Un camino completo π , es un camino entre x_b y x_e . Se denota por PA el conjunto de todos los caminos completos. Se dirá que dos actividades $i, j \in N$ son actividades simétricas posicionales si $i \in \pi \Leftrightarrow j \in \pi, \forall \pi \in PA$. Dos actividades $i, j \in N$ son actividades paralelas posicionales si $\forall \{\pi \in PA, i \in \pi\}, \exists \pi'$ tal que $j \in \pi'$ y $\pi = \pi' \setminus \{j\} \cup \{i\}$.

Dado un nodo $x \in X$, se define el conjunto las actividades predecesoras inmediatas de x como $PredIm(x) = \{i \in N, x_{i,2} = x\}$, el conjunto de las actividades sucesoras inmediatas de x como $SucIm(x) = \{i \in N, x_{i,1} = x\}$, el conjunto de las actividades predecesoras de x como $Pred(x) = \{i \in N, \exists \pi \in PA(x_{i,2}, x)\}$ y el conjunto de las actividades sucesoras de x como $Suc(x) = \{i \in N, \exists \pi \in PA(x, x_{i,1})\}$. Dada una actividad $i \in N$ se define el conjunto de las actividades predecesoras inmediatas de i como $PredImA(i) = \{j \in N, x_{j,2} = x_{i,1}\}$, el conjunto de las actividades sucesoras inmediatas de i como $SucImA(i) = \{j \in N, x_{j,1} = x_{i,2}\}$, el conjunto de las actividades predecesoras de i como $PredA(i) = \{j \in N, \exists \pi \in PA(x_{j,2}, x_{i,1})\}$ y el conjunto de las actividades sucesoras de i como $SucA(i) = \{j \in N, \exists \pi \in PA(x_{i,2}, x_{j,1})\}$.

Otra definición alternativa para una red *PERT* viene dada por una 3 - *upla* $PE = (N, PA, D)$, donde N, PA y D han sido definidos anteriormente.

El tiempo *PERT*, T , está definido como el tiempo mínimo que necesita el proyecto para ser finalizado, i.e. $T = \max_{\pi \in PA} d_\pi$. Dado un nodo $x \in X$, se define el tiempo más temprano de un nodo (earliest time, T_x^E), como el tiempo mínimo requerido para finalizar todas las actividades predecesoras del nodo x , i.e. $T_x^E = \max_{\pi \in PA(x_b, x)} d_\pi = \max_{\{i \in PredIm(x)\}} (T_{x_{i,1}}^E + d_i)$. Dado un

nodo $x \in X$, se define el *tiempo más tardío de un nodo* (latest time, T_x^L), como el tiempo máximo requerido para finalizar todas las actividades predecesoras del nodo x sin retrasar el proyecto, i.e. $T_x^L = T - \max_{\pi \in PA(x, x_e)} d_\pi = \min_{\{i \in SucIm(x)\}} (T_{x_{i,2}}^L - d_i)$.

Dado un camino completo $\pi \in PA$, se define la *holgura de π* , ps_π , como el tiempo máximo, añadido a d_π , que todas las actividades de π pueden usar sin retrasar el proyecto, i.e. $ps_\pi = T - d_\pi$. Si $ps_\pi = 0$ entonces π es un camino crítico. Se denota por $PS = (ps_1, \dots, ps_p)$, el vector de holgura de los caminos, siendo $p = |PA|$.

Dada una actividad $i \in N$, se define la *holgura de una actividad* (activity slack), as_i , como el tiempo máximo, añadido a d_i , que la actividad i puede usar sin retrasar el proyecto, i.e. $as_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} ps_\pi$. Si $as_i = 0$ entonces i es una actividad crítica. Se denota por $AS = (as_1, \dots, as_n)$ al vector de holguras de las actividades. Si un camino es crítico, todas sus actividades también lo son. Una red *PERT* es crítica cuando $as_i = 0, \forall i \in N$.

Dada una actividad $i \in N$, se define la *holgura condicional de una actividad* (safety slack), ss_i , como el tiempo máximo, añadido a d_i , que la actividad i puede usar sin modificar el tiempo más tardío de los restantes nodos, i.e. $ss_i = T_{x_{i,2}}^L - T_{x_{i,1}}^L - d_i$. Se denota por $SS = (ss_1, \dots, ss_n)$ al vector de holguras condicionales de las actividades.

Dado una actividad $i \in N$, se define la *holgura libre de una actividad* (free slack), fs_i , como el tiempo máximo, añadido a d_i , que la actividad i puede usar sin modificar el tiempo más temprano de los restantes nodos, i.e. $fs_i = T_{x_{i,2}}^E - T_{x_{i,1}}^E - d_i$. Se denota por $FS = (fs_1, \dots, fs_n)$ al vector de holguras libres de las actividades.

Dada una actividad $i \in N$, se define la *holgura independiente de una actividad* (independent slack), is_i , como el tiempo máximo, añadido a d_i , que la actividad i puede usar sin modificar los tiempos más temprano y más tardío de los restantes nodos, i.e. $is_i = \min\{ss_i, fs_i\}$. Se denota por $IS = (is_1, \dots, is_n)$ al vector de holguras independientes de las actividades.

A continuación se presentan los valores de los conceptos definidos aplicados al ejemplo

1.1.

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- $N = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\}$.
- $D = (2, 4, 10, 6, 4, 5, 7, 9, 7, 8, 4, 5, 2, 6, 0)$.
- $PA = \{(A, B, C, D, G, H, M); (A, B, C, E, O, H, M); (A, B, C, E, F, J, K, N); (A, B, C, E, F, J, L, N); (A, B, C, I, J, K, N); (A, B, C, I, J, L, N)\}$.
- $T = 44$.
- El camino (A, B, C, E, F, J, L, N) es crítico.
- Las actividades A, B, C, E, F, J, L, N son críticas.
- $PS_{\pi} = (4, 13, 1, 0, 3, 2)$.
- $T^E = (0, 2, 6, 16, 22, 20, 25, 29, 33, 38, 38, 44)$.
- $T^L = (0, 2, 6, 16, 26, 20, 25, 33, 33, 42, 38, 44)$.
- $AS = (0, 0, 0, 4, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 13)$.
- $FS = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 9)$.
- $SS = (0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 13)$.
- $IS = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 9)$.

La definición dada de AS , FS , SS e IS , permite a las actividades ficticias (una actividad ficticia es una actividad inexistente, únicamente creada para poder representar en la red las relaciones de preferencia), disponer en algún sentido de holgura. Por ese motivo se pasará a definir la holgura de la actividad, la holgura libre, la holgura condicional y la holgura independiente en cada camino sin influencia de actividades ficticias, conceptos en los que las actividades ficticias no disponen de ningún tipo de holgura. Si se nota por F el conjunto

de actividades ficticias, i.e. $F = \{i \in N, d_i = 0\}$ y por N^* el conjunto de actividades no ficticias, i.e. $N^* = N \setminus F$, la máxima holgura que una actividad no ficticia puede usar en un camino π , es fs_π . La máxima holgura que una actividad puede usar en un camino π sin restar holgura a las actividades posteriores del camino será la holgura libre de la actividad más la holgura libre de las actividades ficticias que le preceden inmediatamente en el camino; formalmente y sin pérdida de generalidad, dado $\pi \cap N^* = \{1, \dots, r\}$, el conjunto ordenado de actividades no ficticias en el camino π , i.e. $i \in \text{Suc}(x_{i-1,2})$ para todo $i = 2, \dots, r$

$$fs_i(\pi) = \begin{cases} fs_i & \text{si } i = 1 \\ fs_i + \sum_{\{k \in (\pi \cap F) / k \in \text{Pred}(x_{i,1}) \setminus \text{Pred}(x_{i-1,2})\}} fs_k & \text{si } i = 2, \dots, r \end{cases}$$

La máxima holgura que una actividad puede usar en un camino π sin quitar holgura a las actividades anteriores del camino será la holgura condicional de la actividad más la holgura condicional de las actividades ficticias que le suceden inmediatamente en el camino; formalmente:

$$ss_i(\pi) = \begin{cases} ss_i + \sum_{\{k \in (\pi \cap F) / k \in \text{Succ}(x_{i,2}) \setminus \text{Succ}(x_{i+1,1})\}} ss_k & \text{si } i = 1, \dots, r-1 \\ ss_r & \text{si } i = r \end{cases}$$

La máxima holgura que una actividad puede usar en un camino π sin quitar holgura a las actividades posteriores y anteriores del camino será el mínimo entre las dos holguras anteriores; formalmente $is_i(\pi) = \min\{ss_i(\pi), fs_i(\pi)\}$.

Una vez definida las holguras para cada camino, se pueden definir las holguras de cada actividad sin influencia de actividades ficticias como la mínima holgura en los caminos a los cuales pertenece, formalmente

$$as_i^* = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} as_i(\pi) = as_i; \quad fs_i^* = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} fs_i(\pi) \geq fs_i;$$

$$ss_i^* = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} ss_i(\pi) \geq ss_i; \quad is_i^* = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} is_i(\pi) \geq is_i.$$

En el ejemplo 1.1 y para el camino $\pi = (A, B, C, E, O, H, M)$, teniendo en cuenta que la actividad O es ficticia, se puede ver cómo la holgura libre de la actividad O , pasa a la actividad inmediatamente sucesora de ella en el camino π , la actividad H y la holgura condicionada de la actividad O , pasa a la actividad inmediatamente predecesora de ella en el camino π , la actividad E , concretamente:

- $as_A(\pi) = as_B(\pi) = as_C(\pi) = as_E(\pi) = as_H(\pi) = as_M(\pi) = 13.$
- $fs_A(\pi) = fs_B(\pi) = fs_C(\pi) = fs_E(\pi) = 0; fs_H(\pi) = 9; fs_M(\pi) = 4.$
- $ss_A(\pi) = ss_B(\pi) = ss_C(\pi) = ss_H(\pi) = ss_M(\pi) = 0; ss_E(\pi) = 13.$
- $is_A(\pi) = is_B(\pi) = is_C(\pi) = is_E(\pi) = is_H(\pi) = is_M(\pi) = 0.$
- $SS = SS^*; \quad FS = FS^*; \quad IS = IS^*.$

1.3.4. Red PERT aleatoria

Un supuesto que se encuentra implícito en la red *PERT* no aleatoria (la estudiada con anterioridad), es la hipótesis de certidumbre en cuanto a la duración de las actividades. En esta sección, se trata el caso más general en el que existe incertidumbre sobre las duraciones. Es decir, no se va a suponer que se conoce con exactitud las duraciones de las actividades, sino que se supondrá que estas duraciones son variables aleatorias de las que se conoce su función de densidad.

En este nuevo contexto, se modeliza una red *PERT* aleatoria como una *2-upla*, $PE = (G, D)$, donde $G = (X, N)$, G es un grafo dirigido sin ciclos, un solo nodo fuente y un solo nodo sumidero, N es el conjunto de arcos que representa el conjunto de actividades en el proyecto y D es el vector de duraciones, siendo D_i la variable aleatoria que representa la

duración de la actividad i , *i.e.* $D = (D_1, \dots, D_n)$. Se denota por μ_i la media de la variable aleatoria D_i , *i.e.* $\mu_i = E[D_i]$. Si no se expresa lo contrario, se asumirá que $d_i = \mu_i$.

La red *PERT* no aleatoria se puede considerar como una red *PERT* aleatoria con información incompleta, sólo se conoce la media de las variables aleatorias, o como una red sin variabilidad, donde todas las actividades son variables aleatorias degeneradas en d_i . En este contexto, dos actividades $i, j \in N$ son actividades simétricas si son actividades simétricas posicionales y $D_i = D_j$ y dos actividades $i, j \in N$ son actividades paralelas si son actividades paralelas posicionales y $D_i = D_j$.

En la práctica, resulta, asignar una función de densidad para cada actividad, por ello sólo se le pregunta al responsable del trabajo tres valoraciones de la duración de la actividad:

- **La duración más probable (m):** Es el tiempo normal en que la actividad puede llevarse a cabo, y cuyo resultado se obtiene frecuentemente, repitiendo la actividad muchas veces bajo las mismas circunstancias. Correspondería con la moda de una función de densidad.
- **La duración optimista (a):** Es el tiempo mínimo que se requiere para la terminación de la actividad en el mejor de los casos. Correspondería con el mínimo del soporte de la distribución.
- **La duración pesimista (b):** Es el tiempo máximo en que la actividad puede tener lugar en el peor de los casos, por ejemplo una avería de las máquinas; un corte de la corriente eléctrica; una enfermedad de parte del personal; retraso en suministros, etc. Sin embargo, no se debe estimar el tiempo pesimista incluyendo todos los contratiempos extremistas, pues en la vida normal no suelen suceder tales casos, por ejemplo, huelga general, epidemia, incendio, etc. Si se tienen en cuenta estos sucesos en los cálculos del tiempo pesimista, este será infinito. Correspondería con el máximo del soporte de la distribución.

Con estos tres parámetros se debe ajustar una función de densidad, las cuatro distribuciones

más usadas son:

1. Beta

La función de densidad $f(t)$ de una variable aleatoria t , que sigue una distribución de densidad tipo beta en el intervalo $[a, b]$, es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ K(t-a)^\alpha(b-t)^\varphi & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

donde K es una constante que depende de los valores que se den a la estimación optimista, a , pesimista, b y a los parámetros α y φ .

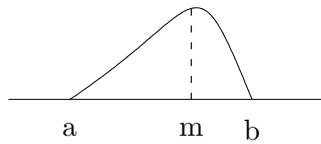


Figura 1.3: Función de densidad de una distribución beta.

Para un conjunto de valores de a , b , α y φ dados, la correspondiente curva de densidad beta adopta una forma parecida a la normal, aunque la distribución es asimétrica y el soporte está acotado.

De todas las curvas tipo beta, la más usada en la literatura, es la que tiene por desviación típica $(1/6)(b-a)$. Esta condición junto con los valores de a , b y m determinan de forma única la distribución beta seleccionada, siendo:

$$\begin{cases} \alpha = 2 + \sqrt{2}; \quad \varphi = 2 - \sqrt{2} & \text{si } m \geq \frac{a+b}{2} \\ \alpha = 2 - \sqrt{2}; \quad \varphi = 2 + \sqrt{2} & \text{si } m \leq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Lo que produce que:

$$\mu = E[D] = \frac{a + 4m + b}{6}; \quad Var[D] = \frac{(b - a)^2}{36}$$

Esta distribución fue utilizada inicialmente y es la más difundida en la literatura. Se notará por $\beta(a, m, b)$.

2. Uniforme

La función de densidad $f(t)$ de una variable aleatoria t , que sigue una distribución de densidad tipo uniforme en el intervalo $[a, b]$, es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



Figura 1.4: Función de densidad de una distribución uniforme.

Esta distribución queda definida de forma única por los valores de a y b . Lo que produce que:

$$\mu = E[D] = \frac{a + b}{2}; \quad Var[D] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Esta distribución se debe utilizar cuando el experto no es capaz de decidir el tiempo modal o expresa que este tiempo puede ser muy variable. Se notará por $U(a, b)$.

3. Triangular

La función de densidad $f(t)$ de una variable aleatoria t , que sigue una distribución de densidad tipo triangular en el intervalo $[a, b]$, es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \frac{2}{(m-a)(b-a)}(t-a) & \text{si } a < t \leq m \\ \frac{2}{(m-b)(b-a)}(t-b) & \text{si } m < t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

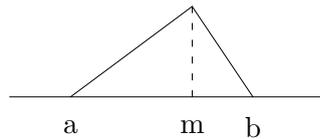


Figura 1.5: Función de densidad de una distribución triangular.

Dos casos extremos de esta distribución es cuando $a = m$, en cuyo caso se llamará triangular inferior y cuando $b = m$, en cuyo caso se llamará triangular superior.

Esta distribución queda definida de forma única por los valores de a , b y m . Lo que produce que:

$$\mu = E[D] = \frac{a + b + m}{3}; \quad \text{Var}[D] = \frac{a^2 + b^2 + m^2 - ab - am - bm}{18}$$

Esta distribución permite modelizar la duración de una actividad sin realizar hipótesis adicionales sobre la densidad de la distribución, a diferencia de lo realizado para la distribución beta. Se notará por $T(a, m, b)$.

4. Degenerada

La función de probabilidad $p(t)$ de una variable aleatoria t , que sigue una distribución degenerada, es:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta distribución queda definida cuando $a = b = m$. Lo que produce que:

$$\mu = E[D] = m; \quad Var[D] = 0$$

Esta distribución se debe utilizar cuando el experto indica que la duración no puede tener variabilidad, por ejemplo, el tiempo que legalmente debe pasar entre ciertas actividades. Se notará por $Deg(m)$.

Es posible plantear otras distribuciones de forma directa sin basarse en la estimación optimista, pesimista y modal, si bien resulta difícil de aplicar en casos reales, por la dificultad de conocer con exactitud la distribución de densidad correspondiente.

Por último, se debe notar que la variable aleatoria que se ha modelizado no estima la duración real de la actividad, sino la duración de la actividad en ausencia de situaciones excepcionales (tanto positivas como negativas), dado como se han definido los valores de a , b y m . En situaciones excepcionales cualquier planificación será errónea.

1.4. Introducción al problema SPERT

El problema *SPERT* (problema de reparto de holguras en una red *PERT*), consiste en repartir una cantidad de holgura adicional en cada camino, entre las actividades pertenecientes a él, de tal forma que, para todo camino, la duración final del mismo, no exceda la duración inicial que este tenía, d_π , más la holgura adicional determinada en la definición del problema.

Si la holgura adicional en cada camino es la holgura del camino, ps_π , entonces el problema se transforma en determinar la asignación de tiempos extras a cada actividad, sin aumentar el valor de finalización del proyecto representado en el correspondiente problema *PERT*.

A continuación se introduce un ejemplo para la mejor comprensión del problema.

EJEMPLO 1.2 *Este proyecto está compuesto por cuatro actividades A, B, C y D, donde las actividades A y B deben completarse antes de comenzar la actividad C, sin existir relación entre A y B. Por otro lado, no existe relación entre la actividad D y el resto de las actividades. La duración de cada actividad es 10, 8, 5 y 20 respectivamente.*

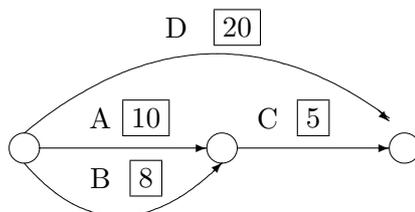


Figura 1.6:

*En este ejemplo sólo existe un camino crítico, formado por la actividad D. Luego la actividad D debe comenzar en el instante 0 y finalizar en $T = 20$. Para las otras actividades se tienen infinitas posibilidades de reparto de holguras, sin sobrepasar el tiempo *PERT* al finalizar el proyecto. Por ejemplo, si se desea que todos los caminos finalicen en el instante $T = 20$, la actividad C puede comenzar en $10+x$ y finalizar en 20 y A y B comenzar en 0 y finalizar en $10+x$, para todo $0 \leq x \leq 5$.*

Para establecer el momento preciso de comienzo y finalización de cada actividad, se debe determinar el tiempo extra o duración adicional, de cada una de las actividades; así, en este ejemplo, es equivalente a decir que el tiempo extra de las actividades A, B y C es x , $2+x$ y $5-x$ respectivamente, con lo que los tiempos asignados para su realización serían $10+x$, $10+x$ y $10-x$, respectivamente.

Se debe notar que, en el reparto, están altamente relacionados los resultados de las actividades que se comunican mediante alguno de los caminos ya que, la adjudicación de una

cantidad de holgura a una actividad, reduce la holgura de los caminos en los que participa y, por ello, puede reducir la adjudicación de holgura al resto de las actividades que están en esos caminos.

Bajo la asunción de dos condiciones, el problema planteado toma una gran relevancia, dado que bajo estas condiciones se está realizando un calendario sin holguras del proyecto. Dichas condiciones son que la holgura a repartir en cada camino sea la holgura del camino, ps_π , y que el reparto realizado pertenezca a la frontera de Pareto.

La necesidad de realizar un calendario sin holguras del proyecto, además de ser una obligación legal en muchas situaciones y de la comodidad de planificación que éste permite para las diversas actividades, su no realización produce una utilización sesgada de la holgura disponible, como se ve a continuación.

En la planificación de un proyecto donde no se ha elaborado calendario, la forma más habitual de actuar ha sido la de indicar la holgura de cada actividad, as_i , y con posterioridad, y siempre según el desarrollo del proyecto, ir moviendo esas holguras hacia los caminos en los que se estaban produciendo retrasos. Esta forma de proceder, lleva a que las primeras actividades no gocen de ningún margen teórico (ya que se intenta guardar la holgura para los posibles retrasos futuros) pero gran margen práctico (ya que un retraso a esas alturas aún es asumible), esta dicotomía lleva, en el caso de ausencia de intereses comunes entre las empresas que gestionan las actividades (cada actividad la realiza una empresa distinta), a una utilización sesgada de la holgura disponible según el momento en que se realice.

1.4.1. Antecedentes del problema SPERT.

En la literatura clásica sobre el *PERT*, la elaboración de un calendario se lleva a cabo para satisfacer una función objetivo o el cumplimiento de unas restricciones adicionales; por ejemplo, se busca un calendario que minimice el tiempo final esperado del proyecto, si la duraciones de las actividades son variables aleatorias mediante métodos Monte Carlo (Metropolis y Ulam (1949)[21]) o se busca un calendario de tal forma que, para todo instante

de tiempo, la suma de los recursos utilizados por las actividades que se están ejecutando en un instante de tiempo, no supere la cantidad de recurso asignado a ese instante de tiempo (Burgess y Killebrew (1962)[7] y Levy et al. (1962)[18]).

En Bergantiños y Sánchez (2002a) [2], se trata por primera vez la realización de un calendario como un problema de reparto. Para ello, utiliza la teoría de juegos (una técnica ampliamente usada para la realización de repartos) y, más concretamente, lo modeliza como un juego cooperativo donde los jugadores son las actividades, lo que se reparte son las holguras de los caminos y las normas del juego son que la duración de todos los caminos, incluyendo el tiempo extra que a cada actividad se le ha asignado en el juego, no supere la duración de T , ($\sum_{i \in \pi} (d_i + x_i) \leq T, \forall \pi \in PA$). Para el juego resultante proponen dos soluciones, una de las cuales establece un calendario sin holguras para el proyecto.

En Bergantiños y Sánchez (2002b) [3], se plantea el problema como un problema de bancarrota con restricciones, la petición en este problema son las holguras de las actividades, as_i , y las restricciones son que para todo camino $\sum_{i \in \pi} (d_i + x_i) \leq T$. Para este planteamiento, nuevamente se proponen dos soluciones, una de las cuales establece un calendario sin holguras para el proyecto.

En Shragowitz et al. (2003)[29] se define una regla polinomial para el problema *SPERT* de forma proporcional a unos pesos, si bien, en este caso, la regla no pertenece a la frontera de Pareto y por lo tanto no determina un calendario sin holguras.

Siguiendo el planteamiento de Bergantiños y Sánchez (2002b) [3], en Castro et al. (2007b)[10], se propone una regla proporcional a las duraciones que determina un calendario sin holgura y la compara con las soluciones existentes en la literatura.

La última referencia se debe a Castro et al. (2007d)[12] y en ella, se generaliza el problema y las reglas anteriores, incluyendo la definición de algoritmos polinomiales en media para el cálculo de las reglas definidas en este artículo, en Castro et al. (2007b)[10] y en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3].

1.4.2. Modelo SPERT

Una vez explicado el problema que se desea tratar, se pasa a la definición formal del mismo.

DEFINICIÓN 1.5 *Un problema SPERT esta dado por una 2-upla (PE, S) , donde:*

- PE , es una red PERT.
- $S = (S_1, \dots, S_p)$, es el vector de holguras de los caminos a repartir, es decir, la holgura que como máximo se desea repartir en cada camino.

Por defecto, $S = PS$, es decir, se desea repartir toda la holgura disponible en los caminos.

Un reparto factible para el problema $SPERT$ es un vector $(x_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$ tal que $x_i \geq 0$, $\forall i \in N$ y $\sum_{i \in \pi} x_i \leq S_\pi$, $\forall \pi \in PA$. El conjunto de repartos factibles se denomina $F(PE, S)$. Se define SPE^n como la clase de los problemas $SPERT$ con n actividades. Una regla es una función f que asigna a cada problema $(PE, S) \in SPE^n$ un reparto factible, i.e., $f(PE, S) \in F(PE, S)$.

Si se aplica al ejemplo 1.1, y recordando que en él

- $N = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\}$
- $PA = \{(A, B, C, D, G, H, M); (A, B, C, E, H, M); (A, B, C, E, F, J, K, N); (A, B, C, E, F, J, L, N); (A, B, C, I, J, K, N); (A, B, C, I, J, L, N)\}$
- $D = (2, 4, 10, 6, 4, 5, 7, 9, 7, 8, 4, 5, 2, 6)$
- $S = PS = (4, 13, 1, 0, 3, 2)$

La región factible, $F(PE, S)$, después de realizar algunas simplificaciones, es $x \in \mathfrak{R}^{14}$ tal que:

- $x_A, x_B, x_C, x_E, x_F, x_J, x_L, x_N = 0$,

- $0 \leq x_I \leq 2$,
- $0 \leq x_K \leq 1$,
- $0 \leq x_D, x_G, x_H, x_M \leq 4$ y
- $x_D + x_G + x_H + x_M \leq 4$.

Con lo que una solución factible es, por ejemplo

$$f(PE, S) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0).$$

Como se ha indicado en la introducción de esta sección, la realización de un reparto de las holguras de los caminos, ps_π , perteneciente a la frontera de Pareto de $F(PE, S)$, proporciona un calendario sin holguras para el proyecto. La creación del mismo, permite una independencia a priori entre las distintas actividades, dado que no es posible para ninguna actividad, aumentar su tiempo sin que alguna de las otras lo disminuya, y esto último, no va a pasar a priori, dado que todas las actividades desean el mayor tiempo posible para su ejecución.

Con este planteamiento, se minimiza en la red *PERT* la dependencia entre las actividades, dado que, si cada una cumple con su nuevo tiempo asignado, se termina en el plazo previsto y cualquier retraso produce un retraso al final del proyecto. Esta situación evita posibles especulaciones en la utilización de la holgura de los distintos caminos, especulaciones que pudieran llevar a un retraso no deseado en el proyecto.

En este trabajo se presta atención a dos aplicaciones concretas.

1. La elaboración de un calendario para las actividades del proyecto, sin holguras y permitiendo un mayor tiempo de ejecución que el inicialmente estimado en todos los casos donde sea posible. Este calendario se realiza dando los siguientes pasos.
 - Resolución del problema *SPERT* mediante algún método que garantice que la solución se encuentra en la frontera de Pareto. Se denota por x_i al valor resultante.

- Cálculo para cada actividad de las nuevas duraciones, $d_i^* = d_i + x_i$.
- Cálculo de los tiempos más tempranos de comienzo y finalización con las nuevas duraciones de cada una de las actividades (serán idénticos a los tiempos más tardíos de comienzo y finalización). Estos tiempos serán los del calendario.

En la tabla 1.2, se puede ver el calendario resultante de aplicar la solución $f(PE, S) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0)$ al ejemplo 1.1.

Cuadro 1.2: Calendario del ejemplo 1.1

Actividad	Descripción de la actividad	Inicio	Terminación
A	Excavación	0	2
B	Colocar los cimientos	2	6
C	Levantar paredes	6	16
D	Colocar el techo	16	23
E	Instalar la plomera exterior	16	20
F	Instalar la plomera interior	20	25
G	Aplanados interiores	23	31
H	Pintura exterior	31	41
I	Instalar el cableado eléctrico	16	25
J	Aplanados exteriores	25	33
K	Colocar pisos	33	38
L	Pintura interior	33	38
M	Colocar accesorios exteriores	41	44
N	Colocar accesorios interiores	38	44

2. La utilización del reparto realizado de la holgura existente, mediante el problema *SPERT*, para la asignación de beneficios o costes entre todas las actividades (problema *APERT*, sección 1.5) o, de forma más particular, el reparto de costes en el caso de que se retrasara el proyecto entre las actividades retrasadas (problema *CPERT*, sección 1.6). Con esta utilización se plantea utilizar la información que proporciona conocer la holgura asignada a cada actividad, como un posible dato a utilizar en los problemas que se tratan en el tercer y cuarto capítulo de este trabajo.

1.5. Introducción al problema APERT

El problema *APERT* (problema de reparto de adelantos en una red *PERT*) consiste en el reparto del beneficio (coste) generado por el adelanto (retraso) en el tiempo de finalización estimado de una red *PERT*; es decir, dada una red *PERT* y su ejecución, el problema consiste en asignar el pago a realizar o el beneficio a ingresar por cada una de las actividades de tal forma que su suma sea el beneficio (coste) generado en la red *PERT*.

El problema *APERT*, se plantea como un reparto de beneficios, por lo que valores positivos son pagos a las actividades y valores negativos son pagos de las actividades.

A continuación, se introduce un ejemplo para la mejor comprensión del problema.

EJEMPLO 1.3 *Sea una red PERT definida por, $N = \{A, B, C, D\}$, $PA = \{(A, B), (A, C), (D)\}$, $D = (3, 6, 5, 10)$. Los tiempos de inicio y finalización de cada actividad, en la ejecución de la red *PERT*, son $b = (0, 2, 2, 0)$ y $e = (2, 11, 9, 10)$ y la función de beneficio es $B(x) = x$, donde x es el adelanto final del proyecto. El problema consistirá en imputar un valor a las actividades de tal forma que la suma de esos valores sea -1 , dado que -1 es el beneficio generado en la red.*

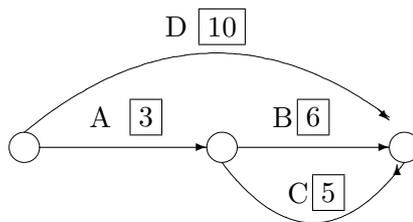


Figura 1.7: Red planeada

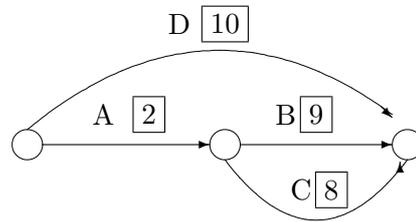


Figura 1.8: Red ejecutada

Una solución factible es, por ejemplo $(f_A, f_B, f_C, f_D) = (+1, -2, 0, 0)$.

La situación planteada se da en muchos problemas reales. Por ejemplo, si se desea construir una casa. Hay un constructor que subcontrata una serie de actividades a otras firmas (cimentación, albañilería, fontanería . . .). Además, este constructor vende la casa por anticipado y da una fecha de entrega a los compradores con la garantía de que, en caso de retraso, les pagará un alquiler durante el tiempo extra que dure la obra. En esta situación, cualquier retraso en la obra supone un aumento de costes, aumento que el constructor puede imputar, si así lo firma en contrato, a las firmas que hayan ocasionado el retraso en la entrega, beneficiando a las firmas que hayan evitado un retraso mayor.

Otros sectores donde se da esta situación de forma directa son:

- Construcción de obras públicas adjudicadas por concurso.
- Transporte de productos perecederos.
- Retrasos en transportes (como el caso del AVE que devolvía el dinero si llegaba con un retraso superior a 10 minutos o el de las compañías aéreas que deben pagar indemnización a los pasajeros cuando el vuelo se retrasa un determinado número de horas).

1.5.1. Antecedentes del problema APERT.

En Estévez-Fernández et al. (2005)[14] se introduce el problema modelándolo como un juego TU, definido en función de otros dos juegos TU: el primero para los casos en que todas las actividades se han retrasado y el segundo para los casos en que todas las actividades se han adelantado.

El segundo y último trabajo, se debe a Castro et al. (2007a)[9]. En él, se continúa modelizando el problema mediante la teoría de juegos, aunque con un juego TU diferente, sobre el que se estudian sus propiedades y se compara con el juego definido en Estévez-Fernández et al. (2005)[14]. En esta memoria, se estudian tres posibles conceptos de solución, indicando las diferencias en cuanto a las propiedades que existen entre ellos.

1.5.2. Modelo APERT

Los elementos necesarios para la definición del problema son los siguientes:

- Una red *PERT*.
- Los tiempos de inicio reales de cada una de las actividades $b_i \in \mathfrak{R}_+$, $\forall i \in N$.
- Los tiempos de finalización reales de cada una de las actividades $e_i \in \mathfrak{R}_+$, $\forall i \in N$.
- La función de beneficio asociada al adelanto del proyecto $B(x)$, donde x es el adelanto sobre el tiempo estimado de finalización. Si el proyecto se retrasa, x es negativo y $B(x) \leq 0$.

Los tiempos de inicio y fin, deben cumplir las siguientes condiciones:

- El tiempo de finalización de una actividad debe ser mayor que su tiempo de comienzo, $e_i \geq b_i$, $\forall i \in N$.

- Una actividad no puede comenzar hasta que finalicen todas las actividades que le preceden, $b_i \geq \max_{j \in \text{PreIm}A(i)} \{e_j\}$.

Una vez definidos los elementos necesarios, se pasa a definir formalmente el problema.

DEFINICIÓN 1.6 *Un problema APERT es una 4-upla (PE, b, e, B) , donde:*

- PE es una red PERT.
- $b = (b_1, \dots, b_n)$ es el vector de tiempos iniciales observados de las actividades, donde b_i es el tiempo de inicio realizado por la actividad i , $i = 1, \dots, n$.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ es el vector de tiempos finales observados de las actividades, donde e_i es el tiempo de finalización realizado por la actividad i , $i = 1, \dots, n$.
- $B : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, es una función de beneficios no decreciente, donde $B(0) = 0$.

A continuación, se definen algunos conceptos relativos a la realización del proyecto:

- La *duración observada para la actividad i* es, $d_i^0 = e_i - b_i$.
- La *duración observada de el camino π* es $d_\pi^0 = \max_{i \in \pi} e_i, \forall \pi \in PA$.
- El *tiempo de finalización observado* es $T^0 = \max_{\pi \in PA} d_\pi^0 = \max_{i \in N} e_i$.
- El *retraso (adelanto) observado de la actividad i* es $r_i = d_i^0 - d_i, \forall i \in N$
- El *vector de retrasos-adelantos observados* es $R = \{r_1, \dots, r_n\}$.
- El *retraso observado de la actividad i* es $r_i^+ = (r_i)_+ = \max\{0, r_i\}, \forall i \in N$.
- El *vector de retrasos observados* es $R^+ = \{r_1^+, \dots, r_n^+\}$.
- El *conjunto de actividades retrasadas* es $N^{**} = \{i \in N, r_i > 0\}$.
- La *holgura observada de el camino π* es $ps_\pi^0 = T^0 - d_\pi^0, \forall \pi \in PA$.
- La *holgura observada de la actividad i* es $as_i^0 = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} ps_\pi^0, \forall i \in N$.

Se denota por AP^n la clase de todos los problemas $APERT$ con n actividades y AP la clase de todos los problemas $CPERT$. Un reparto factible para un problema AP^n es un vector $(x_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$ tal que $\sum_{i \in N} x_i = B(T - T^0)$; el conjunto de repartos factibles es $F(PE, b, e, B)$. Una regla de reparto es una función f que asigna a cada problema $(PE, b, e, B) \in AP$ un reparto factible, $f(PE, b, e, B) \in F(PE, b, e, B)$.

1.6. Introducción al problema CPERT

El problema $CPERT$ (problema de reparto de costes en una red $PERT$) consiste en el reparto del coste generado por el retraso en el tiempo de finalización estimado de una red $PERT$; es decir, si se plantea una red $PERT$, se realiza su ejecución y, cuando finaliza ésta, se comprueba que se ha producido un retraso en su finalización (obviamente, esto se debe a que han existido algunas actividades que han tardado más de lo estimado en un principio), el problema consiste en adjudicar, a estas actividades que se han retrasado, el coste de este retraso final producido.

La situación planteada se da en las mismas circunstancias que las descritas en el problema $APERT$. Sin embargo, en este problema, el enfoque es distinto, al no permitir pagos entre actividades, es decir, el problema $CPERT$ se plantea como un reparto de costes, por lo que sólo hay valores positivos e indican pagos de las actividades, al contrario que sucedía en el problema $APERT$.

A continuación, se introduce un ejemplo para la mejor comprensión del problema.

EJEMPLO 1.4 *Dada una red $PERT$ definida por, $N = \{A, B, C, D\}$, $PA = \{(A, C), (B, C), D\}$, $D = (10, 8, 5, 20)$ y dados los tiempos de inicio y finalización de cada actividad, $b = (0, 0, 15, 0)$, $e = (15, 13, 23, 18)$, respectivamente, y suponiendo que la función de coste es la identidad, el problema consistiría en imputar el retraso de tres unidades (diferencia entre el tiempo de finalización observado y el estimado), entre las actividades que se han retrasado, i.e. $\{A, B, C\}$.*

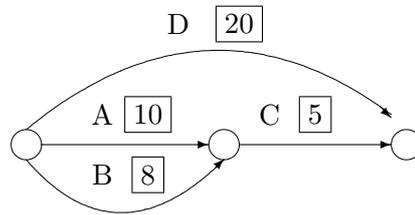


Figura 1.9: Red planeada

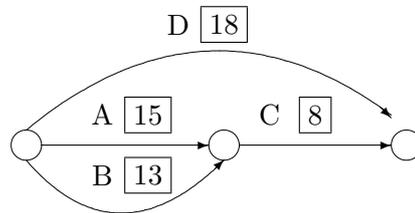


Figura 1.10: Red ejecutada

Una solución factible es, por ejemplo $(f_A, f_B, f_C) = (2, 0, 1)$.

Por último hay que indicar, que este planteamiento se puede ver como una particularización del problema *APERT*, dado que se restringe a los problemas en los que ha existido retraso y a las reglas que no asignan adelantos a ninguna actividad.

1.6.1. Antecedentes del problema CPERT

En la literatura se encuentran dos formas de afrontar el problema *CPERT*.

- **Reglas en dos pasos:** Se realiza un reparto del coste entre los distintos caminos que han superado el tiempo de finalización del proyecto y, con posterioridad, se reparte el coste asignado a cada camino entre las distintas actividades del camino. La forma de realizar estos dos repartos, es lo que diferencia los distintos métodos.

- **Reglas en un paso:** Se realiza un reparto del coste entre las distintas actividades que se han retrasado, sin realizar previamente un reparto entre los caminos.

Se encuentran tres reglas en dos pasos en la literatura. Brânzei et al. (2002) [6] utilizan en el primer paso la regla secuencial ponderada, usando la suma de los retrasos de las actividades del camino como peso, y el segundo paso se realiza repartiendo de forma proporcional a los retrasos. Bergantiños y Sánchez (2002c)[4] definen dos reglas en dos pasos. En la primera, ambos pasos se modelizan mediante una regla de tipo secuencial. En la segunda regla, ambos pasos se modelizan usando la teoría de juegos cooperativos y dando el valor de Shapley como solución.

Con respecto a las reglas en un paso, existen dos reglas en la literatura, Brânzei et al. (2002)[6] utilizan las diferentes reglas del problema de bancarrota, usando el retraso de cada actividad como petición. En este artículo, también se usan algunas reglas de la teoría de juegos como posibles repartos. Castro et al. (2006)[8], definen unas reglas basadas en el reparto secuencial.

1.6.2. Modelo CPERT

Los elementos necesarios para la definición del problema *CPERT* y las relaciones existente entre ellos, son los mismos que en el problema *APERT*, cambiando la función de beneficios por la función de costes, donde $C(x)$ es la función de costes asociada al proyecto, siendo x el retraso sobre el tiempo estimado de finalización.

DEFINICIÓN 1.7 *Un problema CPERT es una 4-upla (PE, b, e, C) , donde:*

- PE es una red PERT.
- $b = (b_1, \dots, b_n)$ es el vector de tiempos iniciales observados de las actividades, donde b_i es el tiempo de inicio realizado por la actividad i , $i = 1, \dots, n$.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ es el vector de tiempos finales observados de las actividades, donde e_i es el tiempo de finalización realizado por la actividad i , $i = 1, \dots, n$.

- $C : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$, es una función de costes no decreciente, donde $C(0) = 0$.

La notación introducida para el problema *APERT* seguirá siendo utilizada para el problema *CPERT*.

Se denota por CP^n la clase de todos los problemas *CPERT* con n actividades y CP la clase de todos los problemas *CPERT*. Un reparto factible para un problema CP^n es un vector $(x_i)_{i \in N} \in \mathfrak{R}^n$ tal que $x_i = 0$, $i \in N \setminus N^{**}$, $x_i \geq 0$, $\forall i \in N^{**}$ y $\sum_{i \in N} x_i = C((T^0 - T)_+)$; el conjunto de repartos factibles es $F(PE, b, e, C)$. Una regla de reparto es una función f que asigna a cada problema $(PE, b, e, C) \in CP$ un reparto factible, $f(PE, b, e, C) \in F(PE, b, e, C)$.

Capítulo 2

Problema SPERT

Una vez presentado el problema *SPERT* en la introducción, en este capítulo, se expondrán los distintos enfoques que aparecen en la literatura para abordar el problema *SPERT*. Por ello, este capítulo puede ser considerado una recopilación de los distintos enfoques y reglas que sobre este problema se han presentado hasta la actualidad.

Concretamente, se comienza con las propiedades de una regla en un problema *SPERT*; se continúa con las soluciones aportadas mediante la modelización del problema como un juego *NTU*; se sigue con las soluciones resultantes de la utilización del problema con restricciones y peticiones (*PCC*); se prosigue con las soluciones logradas mediante la utilización del problema con restricciones y pesos (*PCW*); y se finaliza con una completa comparativa entre todas las soluciones aportadas.

2.1. Propiedades de una regla en el problema SPERT

En esta sección, se definen algunas propiedades deseables de las soluciones factibles del problema *SPERT*. Estas propiedades fueron introducidas en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3].

La primera y segunda propiedad, requieren que la solución pertenezca a la frontera de

Pareto de la región factible o a la frontera de Pareto débil de la región factible, respectivamente.

Optimalidad de Pareto (PO): $\forall (PE, S) \in SPE^n$,

$$f(PE, S) \in PB(F(PE, S)).$$

Optimalidad de Pareto débil (WPO): $\forall (PE, S) \in SPE^n$,

$$f(PE, S) \in WPB(F(PE, S)).$$

La tercera propiedad requiere que los cambios de escala en la medida del tiempo produzcan el mismo cambio en la solución.

Proporcionalidad (PRO): $\forall \alpha > 0, \forall (PE, S) \in SPE^n$,

$$f_i(PE^*, \alpha S) = \alpha f_i(PE, S), \quad \forall i \in N$$

donde $PE^* = (N, PA, \alpha D)$

La cuarta propiedad requiere que cuando dos actividades sean simétricas en la red estas actividades reciban la misma holgura.

Simetría (SYM): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall i, j \in N$, actividades simétricas,

$$f_j(PE, S) = f_i(PE, S).$$

La quinta, sexta y séptima propiedad requieren que cuando dos actividades son simétricas posicionales en la red *PERT* entonces el ratio entre las soluciones factibles coincide con el ratio de sus duraciones, rangos y varianzas respectivamente.

Simetría proporcional respecto a las duraciones (PSYMD): $\forall (PE, S) \in SPE^n$
y $\forall i, j \in N$, actividades simétricas posicionales,

$$d_i f_j(PE, S) = d_j f_i(PE, S).$$

Simetría proporcional respecto a los rangos (PSYMR): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y
 $\forall i, j \in N$, actividades simétricas posicionales,

$$(b_i - a_i) f_j(PE, S) = (b_j - a_j) f_i(PE, S).$$

Simetría proporcional respecto a las varianzas (PSYMV): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y
 $\forall i, j \in N$, actividades simétricas posicionales,

$$Var(i) f_j(PE, S) = Var(j) f_i(PE, S).$$

La octava propiedad asume que el tiempo extra que una actividad debe recibir debe ser mayor que el obtenido en cualquiera de los caminos a los que pertenece.

Mínimo valor requerido por caminos (LS): $\forall (PE, S) \in SPE^n$,

$$f_i(PE, S) \geq \min_{\pi \in PA / i \in \pi} f_i(PE|_{\pi}, S_{\pi}), \quad \forall i \in N$$

donde $PE|_{\pi} = (\pi, \{\pi\}, D|_{\pi})$.

Se puede considerar también que una actividad puede subdividirse en varias subactividades (o lo contrario, varias subactividades pueden unirse en una), de tal forma que la suma de las variables aleatorias de las nuevas subactividades sea igual a la variable aleatoria de la actividad original. Formalmente: Dado un problema SPERT, (PE, S) se define el problema SPERT, (PE^*, S^*) donde:

1. $PE = (N, PA, S)$, $PE^* = (M, PA^*, D^*)$ y $M \subset N$.
2. Existe una sola actividad $k \in M$ tal que $D_k^* = D_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} D_j$ y $D_i^* = D_i$, $\forall i \in M \setminus \{k\}$.
3. $\forall \pi \in PA$, $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi$ ó $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset$.
4. $PA^* = PA|_M$ y $S^* = S|_{PA^*}$.

En esta situación, la siguiente propiedad requiere que el reparto del tiempo extra no pueda cambiar por subdivisiones o uniones.

No manipulabilidad por subdivisiones (NM): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall (PE^*, S^*) \in SPE^m$, definidos anteriormente

$$f_k(PE^*, S^*) = f_k(PE, S) + \sum_{j \in N \setminus M} f_j(PE, S).$$

La décima propiedad, requiere que la subdivisión de actividades no afecte al tiempo extra asignado al resto de las actividades.

No afectar a otras por subdivisión (NA): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall (PE^*, S^*) \in SPE^m$, definidos anteriormente,

$$f_i(PE^*, S^*) = f_i(PE, S), \quad \forall i \in M \setminus \{k\}.$$

Si se supone que a la duración de una actividad se le incrementa el tiempo propuesto como solución y, después, se recalcula la holgura del camino y esta actividad es eliminada del problema, entonces, la propiedad de consistencia requiere que la solución no cambie para el resto de las actividades.

Consistencia (CONS): $\forall (PE, S) \in SPE^n$, si $M \subset N$, $PE^*|_M = (M, PA|_M, D|_M)$ y

$(PE^*|_M, S^*|_M) \in SPE^m$, tal que $S_{\pi|_M}^* = S_{\pi} - \sum_{i \in (N \setminus M) \cap \pi} f_i(PE, S)$ donde $\pi|_M = \pi \cap M \neq \emptyset$,

$$f_k(PE^*|_M, S^*|_{P|_M}) = f_k(PE, S), \quad \forall k \in M.$$

La siguiente propiedad requiere que cuando la red *PERT* pueda ser dividida en dos redes *PERT* (la red *PERT* es bipartita) y se desea repartir la holgura de los caminos ($S = PS$), la solución para una actividad sólo depende de las actividades de la nueva red *PERT* subdividida a la que pertenece. Formalmente: Dado un problema *SPERT*, $(PE, S) \in SPERT^n$ se definen los subproblemas *SPERT*, $(PE^1, S^1) \in SPERT^{|Pred(x)|}$ y $(PE^2, S^2) \in SPERT^{|Suc(x)|}$, donde:

1. $PE = (N, PA, D)$ es una red *PERT* bipartita, siendo x el nodo bipartito.
2. $PE^1 = (Pred(x), PA(x_b, x), D|_{Pred(x)})$.
3. $PE^2 = (N - Pred(x), PA(x, x_e), D|_{N - Pred(x)})$.
4. $S^1 = PS^1, S^2 = PS^2$, donde PS^1 y PS^2 son los vectores de las holguras de los caminos en los *PERT*, PE^1 y PE^2 respectivamente.

Separabilidad (SE): Dado $(PE, S) \in SPERT^n$ y dos subproblemas $(PE^1, S^1) \in SPERT^{|Pred(x)|}$, $(PE^2, S^2) \in SPERT^{|Suc(x)|}$, definidos anteriormente

$$f_i(PE, S) = \begin{cases} f_i(PE^1, S^1) & \text{si } i \in Pred(x) \\ f_i(PE^2, S^2) & \text{si } i \in Suc(x) \end{cases}$$

La última propiedad requiere que cuando dos actividades son simétricas posicionalmente en la red, la probabilidad de excederse en el tiempo asignado después del reparto sea igual.

Conservación de la igualdad (CI): Dado $(PE, S) \in SPERT^n$ y $\forall i, j \in N$, activi-

dades simétricas posicionales,

$$P(D_i \geq d_i + f_i(PE, S)) = P(D_j \geq d_j + f_j(PE, S)).$$

2.2. Reglas basadas en un juego NTU

El primer enfoque que se dio al problema del reparto de holguras en una red *PERT*, fue mediante la teoría de juegos cooperativos en Bergantiños y Sánchez (2002a)[2].

En esta sección se define el juego, la regla juego-teórica del valor de compromiso y una iteración de ella, como posibles soluciones al problema *SPERT*. Para ambas reglas se estudia las propiedades que satisface.

El juego definido es un juego *NTU* (Non-Transferable Utility). Un juego sin transferencia de utilidad, o simplemente un juego *NTU*, es un par (N, V) donde N es un conjunto finito de jugadores y, $\forall T \subset N$ y $T \neq \emptyset$, $V(T) \subset \mathfrak{R}^{|T|}$ satisface:

- $\forall i \in N$, $V(\{i\}) = \{x \in \mathfrak{R}, x \leq V(i)\}$, donde $V(i) \in \mathfrak{R}$;
- $\forall T \subset N$ y $T \neq \emptyset$, $V(T)$ es no vacío, cerrado, convexo y completo ($Y \subset \mathfrak{R}^n$ es completo si $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$ tal que $y \in Y$ y $x \leq y$, entonces $x \in Y$)
- $\forall T \subset N$ y $T \neq \emptyset$ $V_0(T) = \{x \in V(T), x \geq (V(i))_{i \in \mathfrak{R}}\}$ es acotado.

Se debe definir un juego *NTU*, puesto que no todas las soluciones factibles reparten la misma cantidad de holgura entre las actividades, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1 Dado una red *PERT* donde, $N = \{A, B, C, D\}$, $PA = \{(A, B), (A, C), (D)\}$ y $D = (1, 1, 1, 4)$

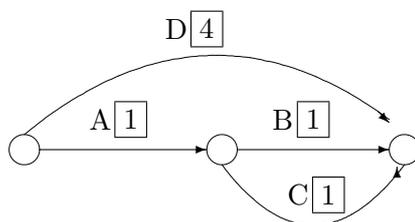


Figura 2.1: Red del ejemplo 2.1

Se puede comprobar que las soluciones $(2, 0, 0, 0)$ y $(0, 2, 2, 0)$ pertenecen ambas a la frontera de Pareto, sin embargo, la primera reparte dos unidades de tiempo y la segunda reparte cuatro unidades de tiempo.

2.2.1. Juego SPERT NTU

En Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] asocian un juego cooperativo pesimista al problema SPERT. En él, se trata de reflejar el tiempo extra mínimo que se le asigna a un conjunto de actividades sin que se retrase el proyecto PERT original. Para ello, la función característica de un conjunto de actividades será el tiempo extra que estas actividades pueden emplear, en el peor de los casos.

Dado un problema SPERT $(PE, S) \in SPE^n$ y $T \subset N$ donde $T \neq \emptyset$, se define la holgura de la coalición T en el camino $\pi \in PA$ como

$$cs^B(T, \pi) = \begin{cases} \max_{x \in F(PE, S)} \sum_{i \in S \cap \pi} x_i & \text{si } T \cap \pi \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, se define la holgura de la coalición T en el camino π en un marco optimista, por lo que $cs^B(T, \pi)$ representa el tiempo extra máximo que las actividades $T \cap \pi$ puede usar sin retrasar el proyecto.

Usando este concepto, en Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] se define el juego SPERT

NTU correspondiente.

DEFINICIÓN 2.1 Dado un problema SPERT (PE, S) , se define el juego SPERT asociado como $(N, V_{(PE,S)})$, donde $\forall T \subset N, T \neq \emptyset, V_{(PE,S)}(T)$ es:

$$\text{comp} \left\{ x \in \mathfrak{R}^t, \left\{ \begin{array}{l} x_i \geq 0, \forall i \in T \\ \sum_{i \in T \cap \pi} x_i \leq S_\pi - cs^B(N \setminus T, \pi) \quad \forall \pi \in PA, T \cap \pi \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}.$$

donde $\text{comp}(Y) = \{x \in \mathfrak{R}^n / \exists y \in Y, x \leq y\}$.

Dado un camino π , $cs^B(N \setminus T, \pi)$ es el tiempo máximo libre con una visión optimista del que podrían disponer, sin retrasar el proyecto, las actividades pertenecientes a $N \setminus T$. Entonces, en el camino π , las actividades de T con una visión pesimista, pueden consumir el tiempo restante $S_\pi - cs^B(N \setminus T, \pi)$. Esto significa que $V_{(PE,S)}(T)$ representa el tiempo extra que las actividades de T pueden emplear, supuesto que las actividades de $N \setminus T$ emplean sus tiempos extras máximos.

También es posible expresar la función característica de forma alternativa, siendo $V(N) = \text{comp}\{F(PE, S)\}$ y si $T \subset N, T \neq N, T \neq \emptyset, V(T) = \text{comp}\{x \in \mathfrak{R}^t, \forall y \in V(N), (x, y)|_{(N \setminus T)} \in V(N)\}$.

Ninguna de estas dos formas permiten calcular el valor de $cs^B(N \setminus T, \pi)$ de una forma polinomial, por ello en esta memoria se introduce un nuevo concepto que permite definir de forma alternativa el valor de $cs^B(N \setminus T, \pi)$ si es el vector de holgura que se reparte es la holgura de los caminos, $S = PS$.

Se define $is^B(T, \pi)$ como la mínima holgura que las actividades de T pueden usar en el camino π . Dado $\pi \in PA$ y $S \subset N$,

$$is^B(S, \pi) = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in \pi_k^*} is^k(i)$$

Donde $is^k(i) = \min \{ \sum_{j=1}^i ss_j - \sum_{j=1}^{i-1} is^k(j), fs_i \}$ y $\{ \pi_1^*, \dots, \pi_m^* \}$ es el conjunto de subcaminos máximos inducidos por S en π , formalmente, se denota $\forall k = 1, \dots, m$ $\pi_k^* = \{1, \dots, n_k\}$, los subcaminos máximos que cumplen: $\cup_{k=1}^m \pi_k^* = S \cap \pi$ y $PredIm(x_{1,1}) \cap \pi \subset N \setminus S$ o $x_{1,1} = x_b$ y $SucIm(x_{n_k,2}) \cap \pi \subset N \setminus S$ o $x_{n_k,2} = x_e$.

PROPOSICIÓN 2.1 Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$ donde $S = PS$, $cs^B(N \setminus S, \pi) = ps_\pi - is^B(S, \pi)$.

DEMOSTRACIÓN Por un lado, por la definición de ss_i , no hay ningún reparto de holguras $y \in F(PE, S)$, tal que $\sum_{j \in Pre(x_{i,1}) \cap \pi} (d_j + y_j) \leq T_{x_{i,1}}^L \forall \pi \in PA$. Por otro lado, por la definición de fs_i , no hay ningún reparto $y \in F$, tal que $\sum_{j \in Suc(x_{i,2}) \cap \pi} (d_j + y_j) \geq T - T_{x_{i,2}}^E \forall \pi \in PA$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de $is^B(T, \pi)$ es trivial ver que $cs^B(N \setminus T, \pi) \leq ps_\pi - is^B(T, \pi)$.

Para probar la otra inecuación se verá que existe un vector perteneciente a $F(PE, S)$, tal que la suma de las actividades pertenecientes a $N \setminus T$ coincide con $ps_\pi - is^B(T, \pi)$. Siguiendo la notación de subcamino máximo descrita anteriormente, un vector que verifica las condiciones anteriores es: $y_i = \sum_{j \in \pi_k^*} (ss_j - is^k(j)) + ss_i$, si $\exists k = \{1, \dots, m\}$ tal que $i \in SucIm(x_{n_k,2}) \cap \pi$; $y_i = ss_i$, si $\nexists k = \{1, \dots, m\}$ tal que $i \in SucIm(x_{n_k,2}) \cap \pi$ e $i \in (N \setminus S) \cap \pi$ y 0 en otro caso.

El vector $y \in F(PE, S)$ dado que para todo $x \in X$ en π , la suma de $y_i + d_i$ en este camino es menor que el tiempo más tardío del correspondiente nodo (i.e $\sum_{i=1}^k (d_i + y_i) \leq T_{x_{k,2}}^L \forall k \in \pi$) e $y_i = 0$ si $i \in N \setminus \pi$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\sum_{i \in \pi} ss_i = ps_\pi \forall \pi \in PA$, se tiene, $\sum_{i \in N \setminus T} y_i = ps_\pi - is^B(T, \pi)$. \square

Se puede considerar el valor de $is^B(T, \pi)$ como una generalización de la holgura independiente de una actividad en el caso de que $S = PS$ dado que $\forall \pi \in PA$ $is^B(\{i\}, \pi) = is_i = V(\{i\})$.

COROLARIO 2.1 Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$ donde $S = PS$, $\forall T \subset N, T \neq$

$\emptyset, V_{(PE,S)}(T)$ se puede reescribir como

$$\text{comp} \left\{ x \in \mathfrak{R}^t \setminus \left\{ \begin{array}{l} x_i \geq 0, \forall i \in T \\ \sum_{i \in T \cap \pi} x_i \leq is^B(T, \pi) \forall \pi \in PA, T \cap \pi \neq \emptyset \end{array} \right\} \right\}.$$

Sobre las propiedades del juego, se puede decir que:

- Es superaditivo. Un juego (N, V) es superaditivo si $\forall T_1, T_2 \subset N, T_1, T_2 \neq \emptyset, T_1 \cap T_2 = \emptyset$ se tiene que $V(T_1) \times V(T_2) \subset V(T_1 \cup T_2)$
- Es monótono. Un juego (N, V) es monótono si dado $T_1, T_2 \subset N, T_1, T_2 \neq \emptyset, T_1 \subset T_2$ y $x \in V(T_1)$ existe $y \in V(T_2)$ tal que $y|_{T_1} \geq x$.
- Es convexo ordinal. Un juego (N, V) es convexo ordinal si $\forall T_1, T_2 \subset N, T_1, T_2 \neq \emptyset$, y $u \in \mathfrak{R}^n$ tal que $u|_{T_1} \in V(T_1)$ y $u|_{T_2} \in V(T_2)$, entonces $u|_{(T_1 \cup T_2)} \in V(T_1 \cup T_2)$ o $u|_{(T_1 \cap T_2)} \in V(T_1 \cap T_2)$.
- Su corazón fuerte coincide con la frontera de Pareto de $V(N)$, i.e. $SC(N, V_{PE,S}) = PB(V(N))$. El corazón fuerte de un juego (N, V) se define como: $SC(V) = \{x \in V(N), \forall T \subset N, T \neq \emptyset, x|_T \notin V(T) \setminus PB(V(T))\}$

2.2.2. Reglas en el problema SPERT basadas en teoría de juegos

Las reglas propuestas en Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] para solucionar el problema SPERT, están basadas en la regla juego-teórica conocida como el valor de compromiso.

En Borm et al.(1992)[5] se introdujo el valor de compromiso. La idea de esta solución se basa en encontrar un punto intermedio entre las aspiraciones máximas y mínimas de cada actividad. Para ello se define el valor superior e inferior del juego.

Dado $i \in N$, el valor utópico para el jugador i , $K_i(V)$, se define por $K_i(V) = \sup\{t \in \mathfrak{R}, \exists a \in \mathfrak{R}^{N \setminus \{i\}} \text{ tal que } (a, t) \in V(N), a \notin (V(N \setminus \{i\}) \setminus WPB(N \setminus \{i\})), \text{ y } a > (V(j))_{j \in N \setminus \{i\}}\}$.

El vector $K(V) = (K_i(V))_{i \in N}$ es el valor superior del juego.

Dado $i \in S$, se define $\varphi^V(S, i) = \sup\{t \in \mathfrak{R}, \exists a \in \mathfrak{R}^{S \setminus \{i\}} \text{ tal que } (a, t) \in V(S) \text{ y } a > (V(j))_{j \in S \setminus \{i\}}\}$. El valor mínimo para el jugador i , $k_i(V)$, es $k_i(V) = \max_{i \in S \subset N} \varphi^V(S, i)$. El vector $k(V) = (k_i(V))_{i \in N}$ es el valor inferior del juego.

El valor de compromiso, denotado por $\Upsilon(V)$, existe cuando $k_i(V) \leq K_i(V)$, $k(V) \in V(N)$ y $K(V) \notin V(N) \setminus WPB(V(N))$, y se define como el valor más cercano al valor máximo dentro del segmento que une $k(V)$ y $K(V)$ y que pertenezca a $V(N)$, más formalmente, $\Upsilon(V) = k(V) + \alpha_V(K(V) - k(V))$ donde $\alpha_V = \max\{\alpha \in [0, 1], k(V) + \alpha(K(V) - k(V)) \in V(N)\}$.

Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] prueban que el valor de compromiso para un juego SPERT NTU, (N, V) , puede ser expresado para todo $i \in N$ como:

$$\Upsilon_i(N, V) = k_i(V) + (K_i(V) - k_i(V)) \min_{\pi \in PA} \frac{S_\pi - \sum_{j \in \pi} k_j(V)}{\sum_{j \in \pi} (K_i(V) - k_j(V))} \quad \forall i \in N.$$

Si $S = PS$, entonces $K_i(V) = as_i$ y $k_i(V) = is_i \forall i \in N$, lo que supone que para el cálculo del valor de compromiso no es necesario conocer nada de la función característica, facilitando enormemente su computación, aunque el cálculo del mínimo sigue siendo en el peor de los casos de complejidad exponencial. Se debe recalcar que en la mayoría de los juegos NTU, el cálculo del valor de compromiso es mucho más complicado que en este caso.

En la mayoría de las situaciones se busca dentro de un conjunto de soluciones estables (el corazón, por ejemplo), una solución puntual que satisfaga todas las propiedades deseadas. En este caso el hecho de no satisfacer la optimalidad de Pareto, implica que no pertenece al corazón fuerte y, dado que este juego tiene siempre corazón fuerte no vacío, parece lógico que la solución puntual seleccionada pertenezca a él. Además se debe recordar que el hecho de que la solución no pertenezca a la frontera de Pareto, impide la creación de calendarios sin holguras y la utilización de la solución como apoyo en los problemas CPERT y APERT como se indicó en la introducción.

Se puede obtener una solución puntual en el corazón fuerte del juego y por lo tanto en la frontera de Pareto, ajustando el valor de compromiso mediante el siguiente camino. Se obtiene el valor de compromiso; algunas actividades no podrán obtener más holgura, pero otras actividades sí podrán. Entonces, se considera el problema restringido a las actividades con capacidad de obtener más holgura y, sobre este juego, se vuelve a calcular el valor de compromiso. En un número finito de pasos (no más que actividades) no existirán actividades que puedan recibir más holgura y, por lo tanto, se estará en la frontera de Pareto. Formalmente:

Algoritmo $((PE, S) \in SPE^n)$

Paso 1:

Dado el problema *SPERT* $(PE, S) \in SPE^n$ se define el juego (N^1, V^1) como el juego *SPERT NTU* asociado, donde:

$$N^1 = \{i \in N, \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi > 0\}.$$

Para todo $i \in N^1$ se calcula $\Upsilon_i(N^1, V^1)$.

Asumiendo que se conoce (PE, S^k) y $N^k, \forall k \leq t$.

Paso t+1:

Se define (PE, S^{t+1}) donde:

$$S_\pi^{t+1} = S_\pi^t - \sum_{i \in (\pi \cap N^t)} \Upsilon_i(N^t, V^t).$$

Sobre este nuevo problema *SPERT*, se define el juego (N^{t+1}, V^{t+1}) como el juego *SPERT NTU* asociado, donde:

$$N^{t+1} = \{i \in N^t, \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi^{t+1} > 0\}.$$

Para todo $i \in N^{t+1}$, se calcula su valor de compromiso, denotado por: $\Upsilon_i(N^{t+1}, V^{t+1})$.

Este proceso termina cuando existe un $T^f \geq 1$ en el cual $N^{|T^f|} \neq \emptyset$ y $N^{|T^f|+1} = \emptyset$.

Como el valor de compromiso es eficiente, se tiene $N^{t+1} \subsetneq N^t$, lo que supone que el proceso termina en un número finito de pasos.

Para todo $i \in N$, dado T_i el paso en el cual $i \in N^{T_i}$ e $i \notin N^{T_i+1}$, se define el valor de compromiso ajustado $\Gamma_i(N, V)$, como:

$$\Gamma_i(N, V) = \sum_{t=1}^{T_i} \Upsilon_i(N^t, V^t).$$

Una vez definidas las dos reglas encontradas desde el punto de vista del juego NTU , el valor de compromiso y el valor de compromiso ajustado, se pasa a la comprobación del cumplimiento o no de las distintas propiedades.

PROPOSICIÓN 2.2 Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$, el valor de compromiso del juego cumple las propiedades WPO, SYM, PRO y SE y no cumple las propiedades PO, PSYMD, PSYMR, PSYMV, LS, NM, NA, CONS y CI .

DEMOSTRACIÓN Es trivial el cumplimiento de WPO, SYM, SE y PRO y el incumplimiento de PO, PSYMD, PSYMR, PSYMV y CI. Para ver el incumplimiento de las otras cuatro propiedades, se presentan los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.2 Dado el problema SPERT $(PE, S) \in SPE^n$ donde, $PE = (N, PA, D)$, $N = \{A, B, C, D, E\}$, $PA = \{(A, B, C), (D, C), (E)\}$, $D = (1, 1, 10, 10, 30)$ y $S = (18, 10, 0)$ y los subproblemas SPERT generados por los dos primeros caminos completos $(PE_1, S_1) \in SPE^{|\pi_1|}$ y $(PE_2, S_2) \in SPE^{|\pi_2|}$ donde $PE_1 = (N_1, PA_1, D_1)$, $N_1 = \{A, B, C\}$, $PA_1 = \{(A, B, C)\}$, $D_1 = (1, 1, 10)$, $S_1 = (18)$, $PE_2 = (N_2, PA_2, D_2)$, $N_2 = \{D, C\}$, $PA_2 = \{(D, C)\}$, $D_2 = (10, 10)$, $S_2 = (10)$

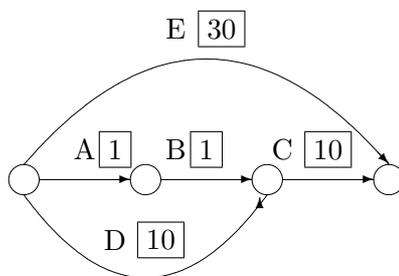


Figura 2.2: Red del ejemplo 2.2.

Se puede comprobar que $\Upsilon_C(PE, S) = 10\frac{18}{46}$, $\Upsilon_C(PE_1, S_1) = 18\frac{1}{3}$ y $\Upsilon_C(PE_2, S_2) = 10\frac{1}{2}$, incumpliendo la propiedad LS.

EJEMPLO 2.3 Dado el problema SPERT $(PE, S) \in SPE^n$ donde, $PE = (N, PA, D)$, $N = \{A, B, C, D\}$, $PA = \{(A, B, C), (D)\}$, $D = (1, 1, 1, 4)$ y $S = (1, 0)$ y el problema resultante

de la unión de las actividades A y B, $(PE^*, S^*) \in SPE^3$ donde $PE^* = (N^*, PA^*, D^*)$, $N^* = \{A, C, D\}$, $PA^* = \{(A, C), (D)\}$, $D^* = (2, 1, 4)$, $S^* = (1, 0)$,

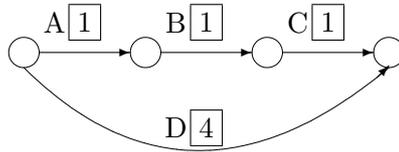


Figura 2.3: Red con subdivisión del ejemplo 2.3.

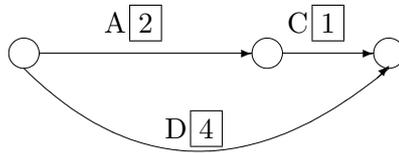


Figura 2.4: Red sin subdivisión del ejemplo 2.3.

Se puede comprobar que $\Upsilon_A(PE, S) = \Upsilon_B(PE, S) = \Upsilon_C(PE, S) = \frac{1}{3}$ y $\Upsilon_A(PE^*, S^*) = \Upsilon_C(PE^*, S^*) = \frac{1}{2}$, incumpliendo las propiedades NM y NA.

EJEMPLO 2.4 Dado el problema SPERT $(PE, S) \in SPE^n$ donde, $PE = (N, PA, D)$, $N = \{A, B, C, D\}$, $PA = \{(A, C), (B, C), (D)\}$, $D = (2, 4, 4, 10)$ y $S = (4, 2, 0)$ y el problema resultante de la eliminación de la actividad B, $(PE^*, S^*) \in SPE^3$ donde $PE^* = (N^*, PA^*, D^*)$, $N^* = \{A, C, D\}$, $PA^* = \{(A, C), (C), (D)\}$, $D^* = (2, 4, 10)$, $S^* = (4, 1, 0)$,

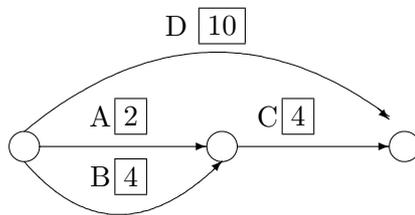
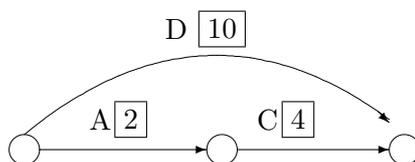


Figura 2.5: Red con actividad B del ejemplo 2.4.


 Figura 2.6: Red sin actividad B del ejemplo 2.4.

Se puede comprobar que $\Upsilon_A(PE, S) = 2 + 1$ y $\Upsilon_A(PE^*, S^*) = 3 + 0,5$, incumpliendo la propiedad *CONS*.

□

PROPOSICIÓN 2.3 Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$, el valor de compromiso ajustado del juego cumple las propiedades *WPO*, *PO*, *PRO*, *SYM* y *SE* y no cumple las propiedades *PSYMD*, *PSYMR*, *PSYMV*, *LS*, *NM*, *NA*, *CONS* y *CI*.

DEMOSTRACIÓN Es trivial el cumplimiento de *WPO*, *PO*, *PRO*, *SYM* y *SE* y el incumplimiento de *PSYMD*, *PSYMR*, *PSYMV* y *CI*. Para ver el incumplimiento de las otras cuatro propiedades, es suficiente observar que los ejemplos presentados anteriormente finalizan en una iteración, por lo que el valor ajustado y sin ajustar coinciden. □

2.3. Reglas basadas en el PCC

En esta sección, se introduce el problema con restricciones y peticiones (Problem with constrains and claims (*PCC*)) introducido en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]. Este problema se puede considerar más general que el problema *SPERT*, ya que todo problema *SPERT* puede ser modelizado como un *PCC*. Esta generalización se logra introduciendo en el problema las peticiones máximas de holgura que las actividades puedan tener.

El *PCC* también generaliza el problema de bancarrota para aquellas situaciones en las que existen varias cantidades a repartir y cada una de esas cantidades sólo se pueden repartir

entre un conjunto reducido de acreedores iniciales. En este trabajo se introduce el siguiente ejemplo en el que se puede comprender que el *PCC* es una generalización del problema de bancarrota.

EJEMPLO 2.5 *Se produce la bancarrota de una empresa dedicada al sector eléctrico, esta empresa tiene activos eléctricos por valor de 20 millones de euros. La empresa quebrada opera en España, Portugal y Francia, por motivos de sostenibilidad del mercado el estado español no permite nuevos activos eléctricos por valor superior a 8 millones, de igual forma, Portugal no permite nuevos activos eléctricos por valor superior a 5 millones y Francia a 15 millones. A la empresa 1 se le deben 5 millones y opera en España y Portugal, a la empresa 2 se le deben 10 millones y opera en Francia, a la empresa 3 se le deben 8 millones y opera en España y a la empresa 4 se le deben 5 millones y opera en Portugal y Francia. En la tabla 2.1 se muestra resumida la información dada con anterioridad.*

Cuadro 2.1: Datos del ejemplo 2.5

	España	Portugal	Francia	Cantidad
Empresa 1	*	*		5
Empresa 2			*	10
Empresa 3	*			8
Empresa 4		*	*	5
Restricciones	8	5	15	20

Como se puede comprobar la cantidad adeudada por la empresa, es mayor que las deudas que esta ha generado, además no es posible plantear un problema de bancarrota dado que la solución pudiera no cumplir las restricciones impuestas por los diversos países. Por ello, llamando x_i la cantidad percibida por el acreedor i y c_i la cantidad adeudada al acreedor i , la región factible del problema quedaría definida como:

- $0 \leq x_i \leq c_i \quad i = 1, \dots, 4.$
- $x_1 + x_3 \leq 8.$
- $x_1 + x_4 \leq 5.$
- $x_2 + x_4 \leq 15.$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20.$

2.3.1. Definición del PCC

En este problema, existen unos recursos que deben ser repartidos entre varios agentes (N), los cuales hacen peticiones (c). N es un conjunto finito de elementos y $c = (c_i)_{i \in N}$ es el vector de peticiones. Existen subconjuntos de agentes dados por P , cada $\pi \in P$ define cada uno de estos subconjuntos, tal que, para cada subconjunto $\pi \in P$, los agentes en π pueden recibir a lo sumo E_π . Formalmente:

DEFINICIÓN 2.2 *Un problema con restricciones y peticiones, es una 4-upla (N, P, c, E) , donde $0 \leq c \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq E \in \mathbb{R}^p$, y $N = \cup_{\pi \in P} \pi$. N es un conjunto de agentes, P es una colección con $p > 0$ subconjuntos que cubren N , c es un vector que especifica las peticiones de los agentes y E es un vector en el que cada elemento E_π es una cota superior para los recursos que pueden ser obtenidos por los agentes que pertenecen al subconjunto π .*

PCC^n denotará la clase de problemas PCC con un conjunto de N agentes, y PCC denota la clase de todos estos problemas.

Dado $(N, P, c, E) \in PCC^n$, se define la región factible de (N, P, c, E) como:

$$F(N, P, c, E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_i \leq c_i, \forall i \in N; \sum_{i \in \pi} x_i \leq E_\pi, \forall \pi \in P \right\}$$

Una regla de reparto es una función f que dado cualquier problema $(N, P, c, E) \in PCC^n$ da un valor que pertenece a la región factible; es decir, $f(N, P, c, E) \in F(N, P, c, E)$. Para todo $i \in N$, $f_i(N, P, c, E)$ representa la cantidad recibida por el agente i .

Un caso particular es cuando $P = \{N\}$, en tal caso el problema planteado es el de bancarrota. Otro caso particular es cuando P es una partición de N ($\pi \cap \pi' = \emptyset, \forall \pi \neq \pi'$); el PCC puede ser considerado, entonces, como una solución de varios problemas de bancarrota al mismo tiempo. Por este motivo, el PCC se puede considerar como la solución de varios problemas de bancarrota cuando hay elementos en las intersecciones.

En el ejemplo 2.5, el PCC resultante es:

- $N = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $P = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 2, 3, 4)\}$,
- $c = (5, 10, 8, 5)$ y
- $E = (8, 5, 15, 20)$.

2.3.2. Propiedades del PCC

Las propiedades de la reglas de reparto que a continuación se enuncian, son habituales de la literatura de los juegos de bancarrota. Estas propiedades fueron enunciadas en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3].

Las propiedades de optimalidad de Pareto y optimalidad de Pareto débil son bien conocidas.

Optimalidad de Pareto (PO): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$

$$f(N, P, c, E) \in PB(F(N, P, c, E)).$$

Optimalidad de Pareto débil (WPO): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$

$$f(N, P, c, E) \in WPB(F(N, P, c, E)).$$

La siguiente propiedad exige que cuando dos agentes tienen igual petición y participan en los mismos conjuntos, la cantidad obtenida por ambos debe ser igual.

Simetría (SYM): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$ y $\forall i, j \in N$ agentes simétricos posicionales tal

que $c_i = c_j$,

$$f_i(N, P, c, E) = f_j(N, P, c, E),$$

donde dos agentes son simétricos posicionales cuando $\forall \pi \in P, i \in \pi \iff j \in \pi$.

El *PCC* se puede considerar como un conjunto de problemas de bancarrota (uno por cada elemento de P) interrelacionados entre si, y por ello la cantidad asignada a cada agente debe ser mayor o igual que lo mínimo que obtuviera el agente en esos problemas de bancarrota.

Mínimo valor exigido por subconjuntos (LS): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$,

$$f_i(N, P, c, E) \geq \min_{\pi \in P, i \in \pi} f_i(\pi, \{\pi\}, c|_{\pi}, E_{\pi}), \quad \forall i \in N.$$

La propiedad de composición exige que la división del recurso entre los agentes, sea la misma que la que se obtiene si primero se divide una parte de ese recurso en función de unas peticiones iniciales y después se reparte el recurso restante en función de las peticiones no satisfechas en el paso anterior.

Composición (CU): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$ y $\forall E' \in \mathfrak{R}^{|P|}, 0 \leq E' \leq E$,

$$f_i(N, P, c, E) = f_i(N, P, c, E') + f_i(N, P, c - f(N, P, c, E'), E''), \quad \forall i \in N$$

donde $E''_{\pi} = E_{\pi} - \sum_{i \in \pi} f_i(N, P, c, E')$, $\forall \pi \in P$.

Se considera la situación en que un agente se divide en varios subagentes, de tal forma que la suma de las peticiones de los subagentes fuera igual a la petición del agente original. Formalmente: Dado un *PCC*, (N, P, c, E) se define el *PCC*, (M, P^*, c^*, E^*) donde:

1. $M \subset N$.
2. Existe un solo agente $k \in M$ tal que $c_k^* = c_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} c_j$ y $c_i^* = c_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.

3. $\forall \pi \in P, (\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi \text{ o } (\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset.$
4. $P^* = P|_M.$
5. $E^*_{(\pi \cap M)} = E_\pi, \forall \pi \in P.$

La siguiente propiedad se refiere a que la cantidad de recurso recibida por un agente debe ser igual aunque el agente se divida en varios subagentes en las condiciones anteriores (las condiciones pedidas en la división son las normales si se tiene en cuenta que se está trabajando con deudas).

No manipulabilidad por división respecto a las peticiones (NMC): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$ y $\forall (M, P^*, c^*, E^*) \in PCC^m$, definido como anteriormente se ha descrito,

$$f_k(M, P^*, c^*, E^*) = f_k(N, P, c, E) + \sum_{j \in N \setminus M} f_j(N, P, c, E)$$

La siguiente propiedad indica que los cambios realizados de la forma anteriormente descrita no influyen en el resto de los agentes.

No afectar a otros por división respecto de las peticiones (NAC): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$ y $\forall (M, D^*, c^*, E^*) \in PCC^m$, definido como anteriormente se ha descrito,

$$f_i(M, P^*, c^*, E^*) = f_i(N, P, c, E), \quad \forall i \in M \setminus \{k\}.$$

La consistencia exige que si algún agente se le da la cantidad de recurso que obtenía como solución y se le elimina adecuadamente del problema, la solución no varía para los demás.

Consistencia (CONS): $\forall (N, P, c, E) \in PCC^n$, si $M \subset N$, y $(M, P|_M, c|_M, E^*|_M) \in PCC^m$, donde $E^*_{\pi \cap M} = E_\pi - \sum_{i \in (N \setminus M) \cap \pi} f_i(N, P, c, E)$ y $\pi \cap M \neq \emptyset$,

$$f_k(N, P, c, E) = f_k(M, P|_M, c|_M, E^*|_M), \quad \forall k \in M.$$

PROPOSICIÓN 2.4 *La propiedades PO y CU son incompatibles.*

DEMOSTRACIÓN Ver Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]. □

2.3.3. Reglas en el PCC

Una vez definidas las propiedades asociadas a una regla en el *PCC*, en esta sección se introducen dos reglas para el *PCC* definidas en Bergantiños y Sánchez (2002b) [3], donde la segunda de ellas, se basa en la iteración de la primera. Estas dos reglas están basadas en el principio de proporcionalidad con respecto a las peticiones, es decir, si $P = \{N\}$ entonces el reparto que se debe realizar, es el reparto proporcional del problema de bancarrota. Por ello, las dos reglas aquí expuestas, son una generalización para el *PCC* de la regla proporcional en el problema de bancarrota. La primera regla se nota como regla proporcional a las peticiones (P^c) y la segunda regla se nota como regla proporcional a las peticiones extendida (Q^c).

Dado un $(N, P, c, E) \in PCC^n$, se define la regla proporcional a las peticiones (P^c) como:

$$P_i^c(N, P, c, E) = \lambda c_i, \forall i \in N.$$

Donde la constante λ se determina con las condiciones impuestas por la restricción, $\lambda = \max \{\lambda^* \in \mathfrak{R}, \lambda^* c \in F(N, P, c, E)\}$. Bajo esta condición se puede demostrar que:

$$\lambda = \begin{cases} \min_{\pi \in P} \frac{E_\pi}{\sum_{i \in \pi} c_i} & \text{si } c \notin F(N, P, c, E) \\ 1 & \text{si } c \in F(N, P, c, E) \end{cases}$$

La regla proporcional a las peticiones extendida, es la resultante de aplicar inicialmente la regla proporcional, posteriormente recalcular los recursos sobrantes y eliminar los agentes que no pueden recibir más recurso y sobre el nuevo problema, volver a aplicar la regla proporcional enunciada con anterioridad. El proceso continuará hasta que no quede recurso que repartir, o agente a quien repartírselo. Formalmente:

Algoritmo $((N, P, c, E) \in PCC^n)$

Paso 1:

Dado un $PCC (N, P, c, E) \in PCC^n$, se define (N^1, P^1, c^1, E^1)

como $N^1 = \{i \in N, c_i > 0 \text{ y } \min_{\pi \in P, i \in \pi} E_\pi > 0\}$,

$P^1 = P|_{N^1}$, $c^1 = c|_{N^1}$ y $E^1 = E|_{N^1}$.

Para todo $i \in N^1$ se calcula: $P_i^c(N^1, P^1, c^1, E^1) = \lambda^1 c_i$,

donde $\lambda^1 = \min \left\{ 1, \min_{\pi \in P^1} \frac{E_\pi^1}{\sum_{i \in \pi} c_i} \right\}$

Si se asume que (N^k, P^k, c^k, E^k) son conocidos $\forall k \leq t$:

Paso t+1:

Se define $(N^{t+1}, P^{t+1}, c^{t+1}, E^{t+1})$ como:

$$N^{t+1} = \{i \in N^t / \exists \epsilon > 0, (P_{N \setminus \{i\}}^c(N^t, P^t, c^t, E^t),$$

$$P_i^c(N^t, P^t, c^t, E^t) + \epsilon) \in F(N^t, P^t, c^t, E^t)\}$$

$$P^{t+1} = P^t|_{N^{t+1}}$$

$$c_i^{t+1} = c_i^t - P_i^c(N^t, P^t, c^t, E^t) \quad \forall i \in N^{t+1}$$

$$E_{\pi^{t+1}}^{t+1} = E_{\pi^t}^t - \sum_{i \in \pi^t} P_i^c(N^t, P^t, c^t, E^t), \quad \forall \pi^{t+1} \in P^{t+1},$$

donde $\pi^{t+1} = \pi^t|_{N^{t+1}}$.

Para todo $i \in N^{t+1}$ se calcula

$$P_i^c(N^{t+1}, P^{t+1}, c^{t+1}, E^{t+1}) = \lambda^{t+1} c_i.$$

Paso final: Cálculo de la solución

Se para en el paso $T^f \geq 1$, en el cual $N^{|T^f|} \neq \emptyset$ y $N^{|T^f|+1} = \emptyset$.

Para todo $i \in N$ se calcula

$$Q_i^c(N, P, c, E) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T_i} P_i^c(N^t, P^t, c^t, E^t) & \text{si } i \in N^1 \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus N^1 \end{cases}$$

donde, T_i ($1 \leq T_i \leq T$) verifica $i \in N^{T_i}$ y $i \notin N^{T_i+1}$.

Teniendo en cuenta que en el ejemplo 2.5, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 2, 3, 4)\}$, $c = (5, 10, 8, 5)$ y $E = (8, 5, 15, 20)$. El valor de (N^1, P^1, c^1, E^1) es:

$N^1 = N$, $P^1 = P$, $c^1 = c$ y $E^1 = E$. Entonces

$$\lambda^1 = \left\{ 1, \min \left\{ \frac{8}{13}, \frac{5}{10}, \frac{15}{15}, \frac{20}{28} \right\} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$P_i^c(N^1, P^1, c^1, E^1) = \frac{1}{2}c_i^1, \forall i \in N^1.$$

En el segundo paso el valor de (N^2, P^2, c^2, E^2) es:

$N^2 = \{2, 3\}$, $P^2 = \{(3), (2), (2, 3)\}$, $c = (5, 4)$ y $E = (0, 5, 7, 5, 5)$. Entonces

$$\lambda^2 = \left\{ 1, \min \left\{ \frac{0,5}{4}, \frac{7,5}{5}, \frac{5}{9} \right\} \right\} = \frac{1}{8}.$$

Luego

$$P_i^c(N^2, P^2, c^2, E^2) = \frac{1}{8}c_i^2, \forall i \in N^2.$$

En el tercero y último paso el valor de (N^3, P^3, c^3, E^3) es:

$N^3 = \{2\}$, $P^3 = \{(2), (2)\}$, $c = (3, 875)$ y $E = (6, 875, 3, 875)$. Entonces

$$\lambda^3 = \left\{ 1, \min \left\{ \frac{6,875}{3,875}, \frac{3,875}{3,875} \right\} \right\} = 1.$$

Luego

$$P_2^c(N^3, P^3, c^3, E^3) = c_2^3.$$

En conclusión, el reparto realizado es:

$$Q_1^c = 2,5, Q_2^c = 5 + 0,625 + 3,875 = 9,5, Q_3^c = 5 + 0,5 = 5,5, Q_4^c = 2,5$$

Existen otras reglas para este modelo (Lorenzo (2005) [17]) que no se considerarán por no ser de interés para su aplicación al problema *SPERT*, teniendo en cuenta el planteamiento introducido.

Por último se indican las propiedades que cumple cada una de las reglas y además en el caso de la regla proporcional a las peticiones extendida, Q^c , se presenta una caracterización.

PROPOSICIÓN 2.5 *La regla proporcional a las peticiones, P^c , satisface las propiedades WPO, SYM, CU, NMC y NAC y no cumple PO, LS y CONS.*

DEMOSTRACIÓN Ver Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]. □

PROPOSICIÓN 2.6 *La regla proporcional a las peticiones extendida, Q^c , satisface las propiedades PO, WPO, SYM, LS, NMC, NAC y CONS y no cumple CU. Además, es la única regla que satisface las propiedades PO, LS, NMC y CONS.*

DEMOSTRACIÓN Ver Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]. □

En resumen, se han definido dos reglas para el *PCC*, las propiedades que cumplen cada una, están expresadas la tabla 2.2 (los asteriscos indican que son las propiedades usadas para la caracterización).

Cuadro 2.2: Propiedades en el PCC.

	P^c	Q^c
<i>WPO</i>	SI	SI
<i>PO</i>	NO	SI*
<i>SYM</i>	SI	SI
<i>LS</i>	NO	SI*
<i>CU</i>	SI	NO
<i>NMC</i>	SI	SI*
<i>NAC</i>	SI	SI
<i>CONS</i>	NO	SI*

2.3.4. Aplicación al problema SPERT del PCC

En esta sección, se modeliza el problema *SPERT* como un *PCC*. Para llevar a cabo esta modelización, se observa que el recurso a repartir en un problema *SPERT* es S (la holgura que se reparte en cada camino), y los subconjuntos donde se reparte, serán los caminos completos del *PERT*. Entonces, considerando $E = S$ y $P = PA$ se tendrá un *PCC*, además si se define una petición para cada actividad.

La definición de la petición asociada a una actividad da lugar a diferentes reglas de reparto para el problema *SPERT*. El concepto de petición se puede plantear desde dos puntos de vista:

- Por un lado, si se atiende a la máxima holgura que una actividad puede recibir en la red, sin importar las características de la actividad (con lo que la petición depende únicamente de la pertenencia de la actividad a determinados caminos y la cantidad de holgura a repartir en esos caminos), entonces $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$. Con ese planteamiento se supone que el único impedimento que tiene una actividad para aumentar su petición, es la factibilidad de la petición realizada. Si la cantidad a repartir es la holgura de los caminos, $S = PS$, entonces la petición de una actividad es la holgura de la ac-

tividad, $c_i = as_i$. Esta propuesta de petición fue introducida en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3].

- Por otro lado, si se atiende a la máxima holgura que una actividad puede usar en la realidad, sin importar su situación en la red (con lo que la petición depende únicamente de las características de la variable aleatoria que modeliza la duración de la actividad), entonces $c_i = b_i - d_i$. Con este planteamiento, la petición depende del tiempo extra que necesita esa actividad para que la probabilidad de que el tiempo observado sea mayor que el tiempo estimado más la petición sea 0. Esta petición se introduce en esta memoria.

Se pueden definir otras peticiones, por ejemplo, $c_i = \min\{\min_{\pi \in P, i \in \pi} S_\pi, b_i - d_i\}$ o cualquier otra petición definida por un grupo de expertos en función de otros criterios, como la afinidad con la empresa que realiza la actividad, las condiciones de demora firmadas para cada empresa, el abaratamiento del proyecto o cualquier criterio de tipo económico o personal que pudiera existir en cada proyecto *PERT*.

El vector de peticiones de las actividades debe cumplir las dos propiedades siguientes.

La primera propiedad requiere que la petición de una actividad debe ser igual aunque la actividad se divida en varias subactividades. El incumplimiento de esta propiedad supone el incumplimiento de las propiedades *NM* y *NA* del problema *SPERT*, lo que supone, además, que la regla Q^c no quedaría caracterizada.

Aditividad (AD): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall (PE^*, S^*) \in SPE^m$, definidos en las propiedades *NM* y *NA* del problema *SPERT*,

$$c_k(PE^*, S^*) = c_k(PE, S) + \sum_{j \in N \setminus M} c_j(PE, S),$$

siendo k el elemento subdividido y donde $c_i(PE, S)$ es la petición asignada a la actividad i en el problema $(PE, S) \in SPE^n$ y $c_i(PE^*, S^*)$ es la petición asignada a la actividad i en

el problema $(PE^*, S^*) \in SPERT^m$.

La segunda propiedad requiere que la petición de una actividad degenerada, es decir, sin posible variabilidad, sea nula. El cumplimiento de esta propiedad es deseable si se considera que una variable degenerada jamás se retrasa (entendiendo por retraso la diferencia entre el tiempo asignado, d_i , y el tiempo ejecutado, d_i^0), por lo que no necesita recibir reparto alguno de holgura. Esta propiedad resuelve la asignación de petición a las variables ficticias, dado que estas variables al no existir en la realidad, siempre serán degeneradas.

No petición de variables degeneradas (NPD): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall i \in N$ tal que $Var(i) = 0$, $c_i(PE, S) = 0$.

La petición, $c_i = b_i - d_i$, cumple *AD*, si las variables subdivididas son independientes y si $\mu_i = d_i$, dado que b_i , máximo de la variable aleatoria y μ_i , media de la variable aleatoria cumplen aditividad. Cumple *NPD*, si $\mu_i = d_i$, dado que en variables degeneradas $\mu_i = b_i$. La petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ no cumple *AD* dado que la actividad original pertenecerá a los mismos caminos que las actividades resultantes de la subdivisión y como las holguras S_π son constantes en ambos problemas, las peticiones de todas las actividades subdivididas son las mismas que la de la actividad original sin subdividir. No cumple *NPD* dado que su cálculo sólo depende de la posición de la actividad en la red y no de las características de la variable aleatoria.

PROPOSICIÓN 2.7 *El rango o una ponderación del rango, son las únicas peticiones que cumplen IC ante las reglas P^c y Q^c , si todas las variables son uniformes, o si todas son triangulares con $m_i = a_i + k(b_i - a_i)$.*

DEMOSTRACIÓN

$$P(D_i \geq \mu_i + Q_i^c(N, P, c, E)) = P(D_j \geq \mu_j + Q_j^c(N, P, c, E)) \iff$$

$$P(D_i \geq \mu_i + \lambda_i c_i) = P(D_j \geq \mu_j + \lambda_j c_j)$$

Dado que las actividades son simétricas posicionales, $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ tanto en la regla P^c como en la regla Q^c . Si la función de distribución de D_i se nota por $F_{D_i}(t)$ entonces:

$$1 - F_{D_i}(\mu_i + \lambda c_i) = 1 - F_{D_j}(\mu_j + \lambda c_j) \Leftrightarrow F_{D_i}(\mu_i + \lambda c_i) = F_{D_j}(\mu_j + \lambda c_j)$$

- La función de distribución de una variable uniforme es:

$$F_{U(a,b)}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a < t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

Como $F_{U(a,b)}(t) = F_{U(0,1)}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$

$$F_{U(0,1)}\left(\frac{\mu_i + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i}\right) = F_{U(0,1)}\left(\frac{\mu_j + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j}\right) \Leftrightarrow \frac{\mu_i + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i} =$$

$$\frac{\mu_j + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j} \Leftrightarrow \frac{a_i + \frac{b_i - a_i}{2} + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i} = \frac{a_j + \frac{b_j - a_j}{2} + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j} \Leftrightarrow$$

$$\frac{c_i}{b_i - a_i} = \frac{c_j}{b_j - a_j}$$

- La función de distribución de una variable triangular con $m = a + k(b - a)$ es:

$$F_{T(a, a+k(b-a), b)}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{(t-a)^2}{k(b-a)^2} & a < t \leq a + k(b-a) \\ 1 - \frac{(b-t)^2}{(1-k)(b-a)^2} & a + k(b-a) < t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

Como $F_{T(a, a+k(b-a), b)}(t) = F_{T(0, k, 1)}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$

$$F_{T(0, k, 1)}\left(\frac{\mu_i + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i}\right) = F_{T(0, k, 1)}\left(\frac{\mu_j + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j}\right) \iff \frac{\mu_i + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i} =$$

$$\frac{\mu_j + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j} \iff \frac{a_i + \frac{(1+k)(b_i - a_i)}{3} + \lambda c_i - a_i}{b_i - a_i} = \frac{a_j + \frac{(1+k)(b_j - a_j)}{3} + \lambda c_j - a_j}{b_j - a_j} \iff$$

$$\frac{c_i}{b_i - a_i} = \frac{c_j}{b_j - a_j}$$

□

En distribuciones uniformes y triangulares con $m = a + k(b - a)$, la petición $c_i = b_i - d_i$, si se asume que $d_i = \mu_i$, una situación normal en redes PERT, $c_i = b_i - d_i$ es proporcional al rango.

- Uniforme: $c_i = b_i - \mu_i = b_i - \frac{b_i + a_i}{2} = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$.
- Triangulares con $m_i = a_i + k(b_i - a_i)$: $c_i = b_i - \mu_i = b_i - a_i - \frac{(1+k)(b_i - a_i)}{3} = \frac{2-k}{3}(b_i - a_i)$.

2.3.5. Reglas para el problema SPERT basadas en el PCC

En esta sección se estudian las propiedades asociadas a las cuatro reglas de reparto para el problema SPERT basadas en el PCC: P^c y Q^c combinadas con las peticiones $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ y $c_i = b_i - d_i$.

PROPOSICIÓN 2.8 *La regla P^c aplicada al problema SPERT con petición $c_i = \min_{\pi \in P, i \in \pi} S_\pi$, verifica las propiedades WPO, SYM, PRO y SE y no verifica en general las propiedades PO, PSYMD, PSYMR, PSYMV, LS, NM, NA, CONS y CI del problema SPERT.*

DEMOSTRACIÓN La regla P^c en el PCC no satisface PO , LS y $CONS$ y satisface WPO y SYM , lo que implica el cumplimiento de estas mismas propiedades en el problema $SPERT$.

Trivialmente, cumple PRO y SE y no cumple $PSYMD$, $PSYMR$, $PSYMV$ y CI , mientras que NM y NA no se satisfacen dado que las peticiones definidas no cumplen los requisitos de la definición de estas propiedades. \square

PROPOSICIÓN 2.9 La regla P^c aplicada al problema $SPERT$ con petición $c_i = b_i - d_i$, verifica las propiedades WPO si $P_i^c < c_i$, $\forall i \in N$, CI si $d_i = \mu_i$ y todas las actividades tienen distribución uniforme o triangular con $m = a + k(b - a)$, SYM , PRO , NM , NA , SE , y no verifica las propiedades PO , $PSYMD$, $PSYMR$, $PSYMV$, LS y $CONS$ del problema $SPERT$.

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior, notando que en este caso las peticiones sí satisfacen los requisitos de la definición de las propiedades NM y NA y satisfacen CI como se indicó en la proposición 2.7. \square

PROPOSICIÓN 2.10 La regla Q^c aplicada al problema $SPERT$ con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$, verifica las propiedades WPO , PO , SYM , PRO , $CONS$ y SE y no verifica las propiedades $PSYMD$, $PSYMR$, $PSYMV$, LS , NM , NA y CI del problema $SPERT$.

DEMOSTRACIÓN La regla Q^c en el PCC satisface WPO , PO , SYM y $CONS$, lo que implica el cumplimiento de estas mismas propiedades en el problema $SPERT$, si se tiene en cuenta que la región factible del PCC y del problema $SPERT$ es la misma, dado que la restricción referente a que la solución no exceda de c_i con $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ es redundante.

Trivialmente cumple PRO y SE y no cumple $PSYMD$, $PSYMR$, $PSYMV$ y CI , mientras que NM y NA no se satisfacen dado que las peticiones definidas no satisfacen los requisitos de la definición de estas propiedades y no satisface LS dado que las peticiones cambian en el $PERT$ restringido a un camino. \square

PROPOSICIÓN 2.11 *La regla Q^c aplicada al problema SPERT con petición $c_i = b_i - d_i$, verifica las propiedades WPO y PO si $Q_i^c < c_i$, $\forall i \in N$ y CI si $d_i = \mu_i$ y todas las actividades tienen distribución uniforme o triangulares con $m = a + k(b - a)$, SYM, PRO, LS, NM, NA, CONS, SE, y no verifica las propiedades PSYMD, PSYMR y PSYMV del problema SPERT.*

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior, notando que en este caso las peticiones sí cumplen los requisitos de la definición de las propiedades NM y NA, no cambian las peticiones en el PERT restringido a cada camino y satisfacen CI como se indica en la proposición 2.7. \square

OBSERVACIÓN 2.1 *En la regla Q^c con petición $c_i = b_i - d_i$, la petición usada en cada paso (resultante de la petición inicial menos lo asignado hasta ese paso) coincide con la petición definida a partir del problema SPERT definido en el paso correspondiente. Formalmente: Dado $(PE, S) \in SPE^n$ y el PCC asociado, (N, PA, c, S) , $\forall t = 1, \dots, T^f$ y $\forall i \in N^t$, $c_i(PE^t, S^t) = c_i^t$. Donde $c_i(PE^t, S^t)$ es la petición del problema SPERT, (PE^t, E^t) , siendo $PE^t = (N^t, PA|_{N^t}, D^t)$ y $d_i^t = d_i + \sum_{j=1}^{t-1} P_i^c(N^j, P^j, c^j, E^j)$. Esto es así dado que:*

$$c_i(PE^t, S^t) = b_i - d_i^t = b_i - d_i - \sum_{j=1}^{t-1} P^c(N^j, P^j, c^j, S^j) = c_i - \sum_{j=1}^{t-1} P^c(N^j, P^j, c^j, S^j) = c_i^t$$

Esto no sucede para la regla Q^c con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$, como se demuestra en el siguiente contraejemplo.

EJEMPLO 2.6 *Se considera el problema SPERT $(PE, S) \in SPERT^n$ tal que $N = \{A, B, C, D, E, F, G, H, O\}$; $PA = \{(E, A, B), (E, C, D, B), (E, F, G, H), (O)\}$, $D = (102, 100, 1, 1, 100, 100, 100, 62, 402)$ y $S = (100, 200, 40, 0)$*

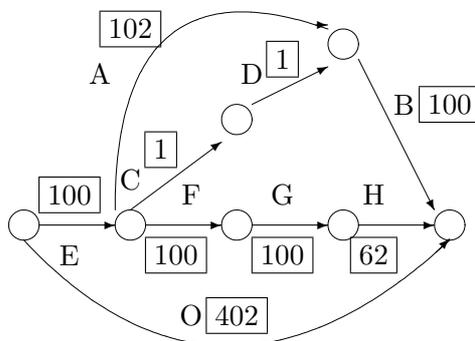


Figura 2.7: Red del ejemplo 2.6.

y el correspondiente PCC (N, P, c, E) donde $N = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, $PA = \{(E, A), (E, C, D, B), (E, F, G, H)\}$, $c = (100, 100, 200, 200, 40, 40, 40, 40)$ y $E = (100, 200, 40)$ siendo $c_i = \min_{\pi \in P, i \in \pi} S_\pi$

Entonces:

$$\lambda = \min \left\{ \frac{100}{240}, \frac{200}{540}, \frac{40}{160} \right\}$$

y la división de holgura en la primera iteración de la regla es

$$P_E^c = P_F^c = P_G^c = P_H^c = 10 ; P_A^c = P_B^c = 25 ; P_C^c = P_D^c = 50.$$

Luego

$$c_A^2 = c_B^2 = 100 - 25 = 75 ; c_C^2 = c_D^2 = 200 - 50 = 150.$$

Sin embargo, la holgura de los dos caminos resultantes es 40 (camino formado por (A, B)) y 65 (camino formado por (C, D, B)), luego la petición usada en el segundo paso (75 ó 150) no coincide con la resultante aplicando la fórmula inicial (40 ó 65).

OBSERVACIÓN 2.2 Dado que la regla Q^c para el PCC esta caracterizada, la regla Q^c aplicada al problema SPERT con petición $c_i = b_i - d_i$, estará caracterizada mediante las propiedades

PO, LS, NM y $CONS$, si $Q_i^c < c_i \forall i \in N$.

A continuación se resumen las conclusiones de esta sección. Si se nota:

- C_1 la regla P^c basada en el PCC con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ (Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]).
- C_2 la regla P^c basada en el PCC con petición $c_i = b_i - d_i$.
- C_3 la regla Q^c basada en el PCC con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ (Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]).
- C_4 la regla Q^c basada en el PCC con petición $c_i = b_i - d_i$.

La siguiente tabla muestra las propiedades que verifica dichas reglas.

Cuadro 2.3: Propiedades verificadas por las reglas

	C_1	C_2	C_3	C_4
WPO	✓	✓	✓	✓
PO			✓	✓
SYM	✓	✓	✓	✓
PSYMD				
PSYMR				
PSYMV				
PRO	✓	✓	✓	✓
LS				✓
NM		✓		✓
NA		✓		✓
CONS			✓	✓
SE	✓	✓	✓	✓
CI		✓		✓

2.3.6. Cálculo de la regla Q^c aplicada al problema *SPERT*

En esta sección, se presenta un algoritmo polinomial en media para el cálculo de la regla proporcional a las peticiones extendida, siempre que $P = PA$ y $E = S = PS$. Es decir, se presenta un algoritmo que resuelve el problema *SPERT* cuando la holgura a repartir es la holgura de los caminos mediante su modelización como un *PCC* y la posterior aplicación de la regla proporcional a las peticiones extendida.

Algoritmo PCCSPERT (G: PERT Graph)

Begin

k:=0

EndA:=0

Asignar una duración $d_i^0 \geq 0$ y una petición $c_i^0 \geq 0 \forall i \in N$ Encontrar el tiempo del camino crítico del PERT (G, D^0): T

While endA=0

Begin

Calcular la holgura de las actividades en el PERT (G, D^k): as_i

k:=k+1

Calcular $daux_i := \begin{cases} \frac{c_i^{k-1}}{as_i} & \text{si } as_i > 0 \\ 0 & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$ If $daux_i = 0 \forall i \in N$ then

EndA:=1

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G, $Daux$): π^*

EndStep:=0

While EndStep=0

Begin

Calcular $\lambda := \frac{T - \sum_{i \in \pi^*} d_i^{k-1}}{\sum_{\{i \in \pi^* | as_i > 0\}} c_i^{k-1}}$ Calcular $d_i^k := \begin{cases} d_i^{k-1} + \lambda c_i^{k-1} & \text{si } as_i > 0 \\ d_i^{k-1} & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$ Encontrar el tiempo del camino crítico en el PERT (G, D^k): T^0 If $T^0 = T$, then

Begin

EndStep:=1

Calcular $c_i^k := \begin{cases} \max\{(1 - \lambda)c_i^{k-1}, 0\} & \text{si } as_i > 0 \\ c_i^{k-1} & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$ Calcular $d_i^k := \begin{cases} d_i^{k-1} + \min\{1, \lambda\}c_i^{k-1} & \text{si } as_i > 0 \\ d_i^{k-1} & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$

End

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G, D^k): π^* Calcular $d_i^k := d_i^{k-1}$

End

End

End

End

El tiempo final es d_i^k y el tiempo extra es $d_i^k - d_i^0, \forall i \in N$

End

PROPOSICIÓN 2.12 *La solución obtenida mediante el algoritmo PCCSPERT coincide con la solución proporcionada por la regla Q^c en el PCC.*

DEMOSTRACIÓN En cada paso, cuando $T^0 = T$, se reparte una cantidad proporcional a las peticiones entre las actividades que pueden recibir más holgura, $as_i > 0$. Cuando $T^0 = T$, $\lambda = \text{máx}\{\lambda^* \in \mathfrak{R} / \lambda^* c^k \in F(N^k, P^k, c^k, E^k)\}$, el mismo valor que en la regla Q^c .

El algoritmo finaliza cuando $\forall i \in N, \text{dau}_i = 0 \Rightarrow \forall i \in N, as_i = 0$ ó $c_i^{T^f} = 0$, es decir, cuando no hay más actividades que puedan recibir holgura, lo mismo que sucede con la regla Q^c .

Teniendo en cuenta que se tiene el mismo reparto en cada paso, la misma forma de actualización y la misma condición de parada, se concluye que se obtiene la misma solución.

□

OBSERVACIÓN 2.3 *El cálculo de la regla proporcional a las peticiones P^c , es similar, pero finalizando en el primer paso del algoritmo.*

OBSERVACIÓN 2.4 *Con un algoritmo similar, es posible calcular el valor de compromiso y el valor de compromiso ajustado, definidos en la sección 2.2.2. A continuación se escribe el algoritmo para el valor de compromiso ajustado. El valor de compromiso, es similar, pero finalizando en el primer paso del algoritmo.*

Algoritmo NTUSPERT (G: PERT Graph)

Begin

k:=0

EndA:=0

Asignar una duración $d_i^0 \geq 0, \forall i \in N$ Encontrar el tiempo del camino crítico del PERT (G,D⁰): T

While endA=0

Begin

Encontrar la holgura y la holgura independiente de las actividades en el

PERT (G,D^k): as_i, is_i

k:=k+1

Calcular $daux_i := \begin{cases} 1 & \text{si } as_i - is_i > 0 \\ 0 & \text{si } as_i - is_i = 0 \end{cases}$ If $daux_i = 0, \forall i \in N$ then

Begin

EndA:=1

 $d_i^k := d_i^{k-1} + is_i$

End

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G,Daux): π^*

EndStep:=0

While EndStep=0

Begin

Calcular $\lambda := \frac{T - \sum_{i \in \pi^*} d_i^{k-1} - \sum_{i \in \pi^*} is_i}{\sum_{i \in \pi^*} (as_i - is_i)}$ Calcular $d_i^k := d_i^{k-1} + \lambda(as_i - is_i) + is_i$ Encontrar el tiempo del camino crítico en el PERT (G,D^k): T⁰If T⁰ = T then

EndStep:=1

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G,D^k): π^* Calcular $d_i^k := d_i^{k-1}$

End

End

End

End

El tiempo final es d_i^k y el tiempo extra es $d_i^k - d_i^0, \forall i \in N$

End

Obsérvese que el número de operaciones elementales de los dos algoritmos anteriores, *PCCSPERT* y *NTUSPERT*, es $mnO(PERT)$ siendo m =número de caminos, n =número de actividades y $O(PERT) \leq O(n^2)$. Así pues, la complejidad algorítmica para este caso tiene como cota superior $O(mn^3)$.

Es de este orden, dado que la instrucción *while* más interna a lo sumo realiza m iteraciones, la instrucción *while* más externa a lo sumo realiza n iteraciones (dado que en cada iteración al menos se satura una actividad), y el resto de las instrucciones son de orden inferior o igual a $O(PERT)$.

Para intentar minimizar el número de iteraciones en el segundo *while*, se parte como camino candidato del que maximiza $\sum_{i \in \pi} daux_i$, con lo que el camino seleccionado tendrá actividades con peticiones altas y holguras de las actividades bajas, lo que es un buen comienzo para que λ tome un valor bajo desde la primera iteración.

Llegados a este punto, sólo queda por demostrar que este algoritmo es polinomial en media. Para ello, se realiza una serie de pruebas computacionales. Estas pruebas se realizan para calcular el número de iteraciones medias del *while* interno de orden m . Como parámetros se usarán el número de nodos y la densidad del grafo, dado que estos dos parámetros determinan el número medio de actividades en el grafo. Para llevarlo a cabo, se generan redes *PERT* aleatorias, donde:

- El número de nodos esta representado en la variable *nodos*
- Las posiciones de la matriz de adyacencia ($A[i,j]$) que pueden ser distintas de 0 ($j > i$), serán 0 con probabilidad $(1-p)$ y 1 con probabilidad p . El número medio de arcos o actividades será $E[n] = \frac{nodos(nodos-1)}{2}p$.
- De los arcos existentes, el 10% serán actividades ficticias y el 90% seguirán una distribución con moda $\sim U[0, 100]$, mínimo $\sim U[0, moda]$ y máximo $\sim U[moda, 100]$.
- Por último, se generan las actividades necesarias para que el grafo sea conexo, estas actividades serán ficticias.

Fijado el número de nodos y la densidad del grafo, se calcula el número medio de iteraciones (Iter) del while interno, (bucle de orden m) en cada iteración del bucle externo, para 100 *PERT* aleatorios. Los resultados se presentan en la tabla 2.4.

Cuadro 2.4: Resultados computacionales

Nodos	p	E[n]	Iter	Nodos	p	E[n]	Iter
10	0.1	4.5	1.00	20	0.1	19	1.12
10	0.2	9	1.01	20	0.2	38	1.36
10	0.3	13.5	1.01	20	0.3	57	1.67
10	0.4	18	1.08	20	0.4	76	1.78
10	0.5	22.5	1.32	20	0.5	95	2.06
10	0.6	27	1.58	20	0.6	114	1.30
10	0.7	31.5	1.71	20	0.7	133	2.36
10	0.8	36	1.73	20	0.8	152	2.60
10	0.9	40.5	1.76	20	0.9	171	2.65
50	0.1	122.5	1.91	75	0.1	277.5	2.14
50	0.2	245	2.33	75	0.2	555	2.83
50	0.3	367.5	2.67	75	0.3	832.5	3.03
50	0.4	490	2.95	75	0.4	1110	3.29
50	0.5	612.5	2.99	75	0.5	1387.5	3.38
50	0.6	735	3.13	75	0.6	1665	3.44
50	0.7	857.5	3.21	75	0.7	1942.5	3.52
50	0.8	980	3.25	75	0.8	2220	3.56
50	0.9	1102.5	3.37	75	0.9	2497.5	3.57

Los resultados obtenidos, indican que el orden del bucle while interno es inferior a $\log(n)$, dado que $\log(E(n)) > \text{Iter}$ para todas las pruebas realizadas. Por ello se puede decir que el orden del algoritmo en media será inferior a $O(\log(n)n^3)$.

2.4. Reglas basadas en el PCW

En esta sección, se introduce el problema con restricciones y pesos (Problem with constraints and weights (*PCW*)). Este problema se puede considerar más general que el problema *SPERT*, dado que todo problema *SPERT* puede ser modelizado como un *PCW*.

La filosofía del *PCW* se basa en que las actividades no tienen una petición de recurso, lo que tienen es una importancia relativa en el reparto que se está produciendo. Esta diferencia en cuanto a la información inicial que se dispone de cada actividad, es la que debe determinar la utilización del *PCC* o el *PCW*. Pese a las diferencias indicadas anteriormente, el *PCW* es una generalización del *PCC*, dado que toda solución factible del *PCC* es solución factible del *PCW* como se verá en la siguiente sección.

2.4.1. Definición del PCW

En este problema, existen unos recursos que deben ser repartidos entre varios agentes (N), los cuales tienen unos pesos (W). N es un conjunto finito de elementos y $W = (w_i)_{i \in N}$ es el vector de pesos. Existen subconjuntos de agentes dados por P , cada $\pi \in P$ define cada uno de estos subconjuntos, tal que, para cada subconjunto $\pi \in P$, los agentes en π pueden recibir a lo sumo E_π . Formalmente:

DEFINICIÓN 2.3 *Un problema con restricciones y pesos, es una 4-upla (N, P, W, E) , donde $0 < W \in \mathbb{R}^n, 0 \leq E \in \mathbb{R}^p$, y $N = \cup_{\pi \in P} \pi$. N es un conjunto de agentes, P es una colección con $p > 0$ subconjuntos que cubren N , W es un vector que especifica los pesos de los agentes y E es un vector en el que cada elemento E_π es una cota superior para los recursos que pueden ser obtenidos por los agentes que pertenecen al subconjunto π .*

PCW^n denota la clase de problemas *PCW* con un conjunto de n agentes, y *PCW* denota la clase de todos estos problemas.

Dado $(N, P, W, E) \in PCW^n$, se define la región factible de (N, P, W, E) como.

$$F(N, P, W, E) = \{x \in \mathfrak{R}^n, x_i \geq 0, \forall i \in N; \sum_{i \in \pi} x_i \leq E_\pi, \forall \pi \in P\}$$

Una regla de reparto es una función f que dado cualquier problema $(N, P, W, E) \in PCW^n$ da un valor que pertenece a la región factible; es decir, $f(N, P, W, E) \in F(N, P, W, E)$. Para todo $i \in N$, $f_i(N, P, W, E)$ representa la cantidad recibida por el agente i .

Como se puede ver, si $c = W$, la región factible del *PCC* esta incluida en la región factible del *PCW*, dado que la única diferencia es la eliminación de que $x_i \leq c_i, \forall i \in N$ en la región factible del *PCW*.

2.4.2. Propiedades del PCW

Las propiedades que se exponen a continuación son consecuencia de la consideración de los pesos en las propiedades enunciadas en el *PCC*.

Optimalidad de Pareto (PO): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$,

$$f(N, P, W, E) \in PB(F(N, P, W, E)).$$

Optimalidad de Pareto débil (WPO): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$,

$$f(N, P, W, E) \in WPB(F(N, P, W, E)).$$

Proporcionalidad en los pesos (WPRO): $\forall \alpha > 0, \forall (N, P, W, E) \in PCW^n$,

$$f_i(N, P, \alpha W, E) = f_i(N, P, W, E), \quad \forall i \in N.$$

Proporcionalidad en el recurso (EPRO): $\forall \alpha > 0, \forall (N, P, W, E) \in PCW^n,$

$$f_i(N, P, W, \alpha E) = \alpha f_i(N, P, W, E), \quad \forall i \in N.$$

Simetría (SYM): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall i, j \in N$ agentes simétricos posicionales tal que $w_i = w_j,$

$$f_i(N, P, W, E) = f_j(N, P, W, E),$$

donde dos agentes son simétricos posicionales cuando $\forall \pi \in P, i \in \pi \iff j \in \pi.$

Variación con el peso (CW): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall (N, P, W^+, E) \in PCW^n$ tal que $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ y $W^+ = \{w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + \epsilon, w_{i+1}, \dots, w_n\}$ con $\epsilon > 0,$

$$f_i(N, P, W^+, E) \geq f_i(N, P, W, E).$$

Simetría proporcional respecto a los pesos (PSYMW): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall i, j \in N$ agentes simétricos posicionales,

$$w_i f_j(N, P, W, E) = w_j f_i(N, P, W, E).$$

Mínimo valor por subconjuntos (LS): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n,$

$$f_i(N, P, W, E) \geq \min_{\{\pi \in P, i \in \pi\}} f_i(\pi, \{\pi\}, W|_{\pi}, E_{\pi}), \quad \forall i \in N.$$

Composición (CU): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall E' \in \mathbb{R}^P, 0 \leq E' \leq E,$

$$f_i(N, P, W, E) = f_i(N, P, W, E') + f_i(N, P, W, E''), \quad \forall i \in N$$

donde $E''_{\pi} = E_{\pi} - \sum_{i \in \pi} f_i(N, P, W, E')$, $\forall \pi \in P$.

Se considera la situación en que un agente se divide en varios subagentes. Formalmente: Dado un PCW , (N, P, W, E) se define el PCW , (M, P^*, W^*, E^*) donde:

1. $M \subset N$.
2. Existe un solo agente $k \in M$ tal que $w_k^* = w_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} w_j$ y $w_i^* = w_i$, $\forall i \in M \setminus \{k\}$.
3. $\forall \pi \in P$, $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi$ o $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset$.
4. $P^* = P|_M$.
5. $E^*_{(\pi \cap M)} = E_{\pi}$, $\forall \pi \in P$.

No manipulabilidad por división respecto de los pesos (NMW): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall (M, P^*, W^*, E^*) \in PCW^m$, definidos como anteriormente se ha descrito

$$f_k(M, P^*, W^*, E^*) = f_k(N, P, W, E) + \sum_{j \in N \setminus M} f_j(N, P, W, E).$$

No afectar a otros por división respecto a los pesos (NAW): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$ y $\forall (M, P^*, W^*, E^*) \in PCW^m$, definidos como anteriormente se ha descrito,

$$f_i(M, P^*, W^*, E^*) = f_i(N, P, W, E), \quad \forall i \in M \setminus \{k\}.$$

Consistencia (CONS): $\forall (N, P, W, E) \in PCW^n$, si $M \subset N$ y $(M, P|_M, W|_M, E^*|_M) \in PCW^m$, tal que $E^*_{\pi|_M} = E_{\pi} - \sum_{i \in (N \setminus M) \cap \pi} f_i(N, P, W, E)$ donde $\pi|_M = \pi \cap M \neq \emptyset$,

$$f_k(M, P|_M, W|_M, E^*|_{P|_M}) = f_k(N, P, W, E), \quad \forall k \in M.$$

PROPOSICIÓN 2.13 *Las propiedades PO y CU son incompatibles.*

DEMOSTRACIÓN El ejemplo presentado en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3] en la demostración de la proposición 1 aplicado al *PCW* demuestra esta incompatibilidad. \square

2.4.3. Reglas en el PCW

En este apartado se definen dos reglas para el *PCW*, donde la segunda de ellas, se basa en la iteración de la primera, mientras sea posible. Estas dos reglas están basadas en el principio de proporcionalidad con respecto a los pesos, es decir, si $P = \{N\}$ entonces el reparto que se debe realizar es el reparto proporcional a los pesos. La primera regla se notará como regla proporcional a los pesos (P^w) y la segunda regla se notará como regla proporcional a los pesos extendida (Q^w).

Dado un $(N, P, W, E) \in PCW^n$, se define la regla proporcional a los pesos (P^w) como:

$$P_i(N, P, W, E) = \lambda w_i, \forall i \in N.$$

Donde la constante λ se determina con las condiciones impuestas por la restricción $\lambda = \max \{\lambda^* \in \mathfrak{R} \mid \lambda^* W \in F(N, P, W, E)\}$. Bajo estas condiciones se comprueba de forma similar a la realizada en el *PCC* que el valor de λ es:

$$\lambda = \min_{\pi \in P} \frac{E_\pi}{\sum_{i \in \pi} w_i}.$$

La regla proporcional a los pesos extendida, es la resultante de aplicar inicialmente la regla proporcional, posteriormente recalcular los recursos sobrantes y eliminar los agentes que no pueden recibir más recurso y sobre el nuevo problema, volver a aplicar la regla proporcional enunciada con anterioridad. El proceso continuará hasta que no quede recurso que repartir o agente al que repartírselo. Más formalmente:

Algoritmo $((N, P, W, E) \in PCW^n)$

Paso 1:

Dado un $PCW (N, P, W, E) \in PCW^n$, se define (N^1, P^1, W^1, E^1) como $N^1 = \{i \in N, w_i > 0 \text{ y } \min_{\pi \in P, i \in \pi} E_\pi > 0\}$,
 $P^1 = P|_{N^1}$, $W^1 = W|_{N^1}$ y $E^1 = E|_{N^1}$.

Para todo $i \in N^1$ se calcula: $P_i^w(N^1, P^1, W^1, E^1) = \lambda^1 w_i$,
 donde $\lambda^1 = \min_{\pi \in P^1} \frac{E_\pi^1}{\sum_{i \in \pi} w_i}$

Si se asume que (N^k, P^k, W^k, E^k) son conocidos $\forall k \leq t$:

Paso t+1:

Se define $(N^{t+1}, P^{t+1}, W^{t+1}, E^{t+1})$ como:

$$N^{t+1} = \{i \in N^t / \exists \epsilon > 0, (P_{N \setminus \{i\}}^w(N^t, P^t, W^t, E^t), P_i^w(N^t, P^t, W^t, E^t) + \epsilon) \in F(N^t, P^t, W^t, E^t)\}$$

$$P^{t+1} = P^t|_{N^{t+1}}$$

$$W^{t+1} = W^t|_{N^{t+1}}$$

$$E_{\pi^{t+1}}^{t+1} = E_{\pi^t}^t - \sum_{i \in \pi^t} P_i^w(N^t, P^t, W^t, E^t), \forall \pi^{t+1} \in P^{t+1},$$

donde $\pi^{t+1} = \pi^t|_{N^{t+1}}$.

Para todo $i \in N^{t+1}$ se calcula

$$P_i^w(N^{t+1}, P^{t+1}, W^{t+1}, E^{t+1}) = \lambda^{t+1} w_i.$$

Paso final: Cálculo de la solución

Se para en el paso $T^f \geq 1$, en el cual $N^{|T^f|} \neq \emptyset$ y $N^{|T^f|+1} = \emptyset$.

Para todo $i \in N$ se calcula

$$Q_i^w(N, P, W, E) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{T_i} P_i^w(N^t, P^t, W^t, E^t) & \text{si } i \in N^1 \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus N^1 \end{cases}$$

donde, T_i ($1 \leq T_i \leq T$) verifica $i \in N^{T_i}$ y $i \notin N^{T_i+1}$.

EJEMPLO 2.7 Dado un PCW tal que $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 2, 3, 4)\}$, $W = (5, 10, 8, 5)$ y $E = (8, 5, 15, 20)$. El valor de (N^1, P^1, W^1, E^1) es:

$N^1 = N$, $P^1 = P$, $W^1 = W$ y $E^1 = E$. Entonces

$$\lambda^1 = \min \left\{ \frac{8}{13}, \frac{5}{10}, \frac{15}{15}, \frac{20}{28} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$P_i^w(N^1, P^1, W^1, E^1) = \frac{1}{2}w_i^1, \forall i \in N^1.$$

En el segundo paso el valor de (N^2, P^2, W^2, E^2) es:

$N^2 = \{2, 3\}$, $P^2 = \{(3), (2), (2, 3)\}$, $W = (10, 8)$ y $E = (0, 5, 7, 5, 5)$. Entonces

$$\lambda^2 = \min \left\{ \frac{0,5}{8}, \frac{7,5}{10}, \frac{5}{18} \right\} = \frac{1}{16}.$$

Luego

$$P_i^w(N^2, P^2, W^2, E^2) = \frac{1}{16}w_i^2, \forall i \in N^2.$$

En el tercero y último paso el valor de (N^3, P^3, W^3, E^3) es:

$N^3 = \{2\}$, $P^2 = \{(2), (2)\}$, $c = (10)$ y $E = (6, 875, 3, 875)$. Entonces

$$\lambda^3 = \min \left\{ \frac{6,875}{10}, \frac{3,875}{10} \right\} = \frac{3,875}{10}.$$

Luego

$$P_2^w(N^3, P^3, W^3, E^3) = \frac{3,875}{10}w_2^3.$$

En conclusión, el reparto realizado es:

$$Q_1^c = 2,5, Q_2^c = 5 + 0,625 + 3,875 = 9,5, Q_3^c = 5 + 0,5 = 5,5, Q_4^c = 2,5$$

A continuación, se estudia la relación entre las reglas proporcionales a las peticiones en el *PCC* y las reglas proporcionales a los pesos en el *PCW*.

PROPOSICIÓN 2.14 Dado un *PCC*, $(N, P, c, E) \in PCC^m$,

$$Q_i^c(N, P, c, E) = \min \{Q_i^w(N, P, c, E), c_i\} \text{ y } P_i^c(N, P, c, E) = \min \{P_i^w(N, P, c, E), c_i\}.$$

DEMOSTRACIÓN Se nota por λ^t la constante en el paso t-ésimo para la regla Q^c y λ^{t*} la constante en el paso t-ésimo para la regla Q^w .

En el paso primero, N^1, P^1, E^1 y c^1 son iguales en ambos problemas y por lo tanto $\lambda^1 = \min \{1, \lambda^{1*}\}$. Si $\lambda^1 = 1$ entonces $\forall i \in N^1, P_i^c(N, P, c, E) = Q_i^c(N, P, c, E) = c_i$ y $Q_i^w(N, P, c, E) \geq P_i^w(N, P, c, E) \geq c_i$ con lo que queda demostrado. Si $\lambda^1 = \lambda^{1*}$ entonces $P_i^c(N^1, P^1, c^1, E^1) = P_i^w(N^1, P^1, c^1, E^1) \forall i \in N^1$.

En el paso segundo, dado que es la misma solución y la misma forma de actualización, N^2, P^2 , y E^2 son iguales en ambos problemas, entonces

$$\lambda^2 = \min \left\{ 1, \min_{\pi \in P^2} \left\{ \frac{E_\pi^2}{\sum_{i \in \pi} c_i^2} \right\} \right\} = \min \left\{ 1, \min_{\pi \in P^2} \left\{ \frac{E_\pi^2}{(1 - \lambda^1) \sum_{i \in \pi} c_i^1} \right\} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\lambda^{2*}}{(1 - \lambda^1)} \right\}.$$

Si $\lambda^2 = 1, \forall i \in N^2 P_i^c(N^2, P^2, c^2, E^2) = c_i^2 \Rightarrow Q_i^c(N, P, c, E) = c_i$ y $P_i^w(N^2, P^2, D^2, E^2) \geq c_i^2 \Rightarrow Q_i^w(N, P, c, E) \geq c_i$ con lo que queda demostrado.

Si $\lambda^2 = \frac{\lambda^{2*}}{(1 - \lambda^1)}$, se tiene que,

$$P_i^c(N^2, P^2, c^2, E^2) = \frac{\lambda^{2*}}{(1 - \lambda^1)} c_i^2 = \frac{\lambda^{2*}}{(1 - \lambda^1)} (1 - \lambda^1) c_i^1 = \lambda^{2*} c_i^1 = \lambda^{2*} w_i = P_i^w(N^2, P^2, W^2, E^2).$$

Siguiendo el proceso, si existen algún $t = 3, \dots, T_i$ con $\lambda^t = 1$ la proposición es probada teniendo en cuenta que para todo $k = 1, \dots, t - 1$, $P_i^c(N^k, P^k, c^k, E^k) = P_i^w(N^k, P^k, c^k, E^k)$. En otro caso ($\lambda^t < 1 \forall t = 1, \dots, T_i$), se puede probar que para cualquier $k = 1, \dots, T_i$, $P_i^c(N^k, P^k, c^k, E^k) = P_i^w(N^k, P^k, c^k, E^k)$ y entonces, teniendo en cuenta la definición de Q^c y Q^w , $Q_i^c(N, P, c, E) = Q_i^w(N, P, c, E)$, lo cual implica que $Q_i^c(N, P, c, E) = \min\{Q_i^w(N, P, c, E), c_i\}$. \square

COROLARIO 2.2 Si $c_i > \min_{\{\pi \in P, i \in \pi\}} S_\pi, \forall i \in N$, entonces $Q^c(N, P, c, E) = Q^w(N, P, c, E)$.

Por último, se indica las propiedades que cumple cada una de las reglas y además, en el caso de la regla proporcional a los pesos extendida, Q^w , se presentan dos caracterizaciones.

PROPOSICIÓN 2.15 La regla proporcional a los pesos, P^w , satisface las propiedades *WPO*, *SYM*, *PSYMW*, *WPRO*, *EPRO*, *CW*, *CU*, *NMW* y *NAW* y no cumple *PO*, *LS* y *CONS*.

DEMOSTRACIÓN

- Claramente se cumplen las propiedades *WPO*, *SYM*, *PSYMW*, *WPRO*, *EPRO*, *CW*, *NMW* y *NAW* y no se cumple *LS* y *PO*.
- P^w satisface *CU*. Dado un $PCW(N, P, W, E) \in PCW^n$, donde $P^w(N, P, W, E) = \lambda W$ y $P^w(N, P, W, E') = \lambda' W$, $P^w(N, P, W, E'') = \lambda'' W$ y $E''_\pi = E_\pi - \lambda' \sum_{i \in \pi} w_i, \forall \pi \in P$, se sabe que

$$\sum_{i \in \pi} (P_i^w(N, P, W, E') + P_i^w(N, P, W, E'')) \leq E_\pi, \forall \pi \in P.$$

Existe un subcamino en el problema (N, P, W, E) que se notará por π^* tal que,

$\sum_{i \in \pi^*} P_i^w(N, P, W, E) = E_{\pi^*}$, entonces:

$$\sum_{i \in \pi^*} (P_i^*(N, P, W, E') + P_i^w(N, P, W, E'')) \leq \sum_{i \in \pi^*} P_i^w(N, P, W, E)$$

$$\iff \sum_{i \in \pi^*} (\lambda' + \lambda'')w_i \leq \sum_{i \in \pi^*} \lambda w_i \iff \lambda' + \lambda'' \leq \lambda.$$

Además existe un subconjunto en el problema (N, P, W, E'') , que se notará por π^{**} tal

que $\sum_{i \in \pi^{**}} P_i^w(N, P, W, E'') = E_{\pi^{**}}$, entonces

$$\sum_{i \in \pi^{**}} (P_i^w(N, P, W, E') + P_i^w(N, P, W, E'')) = E_{\pi^{**}}$$

$$\iff \sum_{i \in \pi^{**}} (\lambda' + \lambda'')w_i = E_{\pi^{**}} \iff \lambda' + \lambda'' \geq \lambda.$$

Entonces $\lambda = \lambda' + \lambda''$ lo que implica que cumple CU.

- El ejemplo presentado en Bergantiños y Sánchez (2002b)[3] en la demostración de la proposición 3 aplicado al PCW demuestra el incumplimiento de $CONS$.

□

PROPOSICIÓN 2.16 *La regla proporcional a los pesos extendida, Q^w , satisface las propiedades PO , WPO , SYM , $PSYMW$, $WPRO$, $EPRO$, CW , LS , NMW , NAW y $CONS$ no cumple CU .*

DEMOSTRACIÓN

- Claramente cumple WPO , PO , $WPRO$, $EPRO$ y $PSYMW$.

- Dado que las propiedades CU y PO son incompatibles esta regla no cumple CU .
- Q^w satisface CW . Se define λ^1 como el mínimo en el primer paso del problema (N, P, W, E) . Cuando se resuelve el problema (N, P, W^+, E) el mínimo en el primer paso coincide con el mínimo definido o uno generado por un subcamino al que pertenece i , es decir, λ^1 ó $\{\lambda, \lambda = \min_{\pi \in P, i \in \pi} \frac{E_\pi}{\sum_{i \in P} w_i}\}$.
 - Si el mínimo es λ ($\lambda \leq \lambda^1$) $\Rightarrow T_i^+ = 1$. Si el camino π^1 es donde se alcanza el mínimo, entonces $Q_j^w(N, P, W^+, E) = \lambda w_j \forall j \neq i \in \pi^1$ dado que $\lambda \leq \lambda^1 \Rightarrow Q_j^w(N, P, W^+, E) \leq Q_j^w(N, P, W, E) \forall j \neq i \in \pi^1$. Como $\sum_{j \in \pi^1} Q_j^w(N, P, W^+, E) = E_{\pi^1} \geq \sum_{j \in \pi^1} Q_j^w(N, P, W, E) \Rightarrow Q_i^w(N, P, W^+, E) \geq Q_i^w(N, P, W, E)$.
 - Si el mínimo es λ^1 , la propiedad $CONS$ puede ser aplicada en ambos problemas (eliminando las actividades $N^1 \setminus N^2$) y luego repetir el proceso anterior con los nuevos problemas. Este proceso se repetirá hasta que el mínimo se alcance en un subconjunto al que pertenezca i .
- Satisface $CONS$. Se demostrará por reducción al absurdo. Se supone que no cumple $CONS$, entonces existe un problema $(N, P, W, E) \in PCW^n$, existe $M \subset N$ y existe $k \in M$ tal que:

$$Q_k^w(N, P, W, E) \neq Q_k^w(N, P|_M, W|_M, E|_{P|_M}).$$

Entonces por la propiedad $WPRO$ y siendo α un número suficientemente grande:

$$Q_k^w(N, P, W, E) = Q_k^w(N, P, \alpha W, E) \text{ y}$$

$$Q_k^w(N, P|_M, W|_M, E|_{P|_M}) = Q_k^w(N, P|_M, \alpha W|_M, E|_{P|_M}),$$

lo que implica que:

$$Q_k^w(N, P, \alpha W, E) \neq Q_k^w(N, P|_M, \alpha W|_M, E|_{P|_M}).$$

Además por el corolario 2.2:

$$Q_k^w(N, P, \alpha W, E) = Q_k^c(N, P, \alpha W, E) \text{ y}$$

$$Q_k^w(N, P|_M, \alpha W|_M, E|_{P|_M}) = Q_k^c(N, P|_M, \alpha W|_M, E|_{P|_M}),$$

lo que implica que:

$$Q_k^c(N, P, \alpha W, E) \neq Q_k^c(N, P|_M, \alpha W|_M, E|_{P|_M}).$$

Lo que es una contradicción puesto que la regla Q^c cumple CONS.

- Con argumentos similares a la demostración de CONS se prueban las propiedades *SYM*, *LS*, *NMW* y *NAW*.

□

PROPOSICIÓN 2.17 *La regla proporcional a los pesos, Q^w , es la única regla que cumple las propiedades PO, LS, NMW y CONS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración se realiza repitiendo los pasos hechos en la demostración de unicidad de Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]. La principal diferencia es que en este caso, cuando $M = N^2$ y $T_i^M = 1$, $\lambda^* = \lambda^1 + \lambda^2$.

Efectivamente,

- Primero, se verá que $\lambda^* \geq \lambda^1 + \lambda^2$. Se sabe que $\forall \pi^2 \in P^2$,

$$\sum_{j \in \pi^2} \lambda^2 w_j = \sum_{j \in \pi \cap N^2} \lambda^2 w_j \leq S_{\pi^2}^2 = S_\pi - \lambda^1 \sum_{j \in \pi} w_j.$$

Entonces por CONS,

$$\sum_{j \in \pi \cap N^2} (\lambda^2 + \lambda^1) w_j \leq S_\pi - \lambda^1 \sum_{j \in \pi \cap (N^1 \setminus N^2)} w_j = S_{\pi|_M}^*,$$

y como $\pi|_M = \pi \cap M = \pi \cap N^2$,

$$(\lambda^2 + \lambda^1) \leq \min_{\pi|_M \in P|_M} \frac{S_{\pi|_M}^*}{\sum_{j \in \pi|_M} w_j} = \lambda^*.$$

- En segundo lugar, se mostrará que $\lambda^* \leq \lambda^1 + \lambda^2$. Se sabe que $\forall \pi|_M = \pi \cap M = \pi \cap N^2$,

$$\sum_{j \in \pi|_M} \lambda^* w_j = \sum_{j \in \pi \cap N^2} \lambda^* w_j \leq S_{\pi|_M}^* = S_\pi - \lambda^1 \sum_{j \in (\pi \cap (N^1 \setminus N^2))} w_j.$$

Entonces por CONS,

$$\sum_{j \in \pi \cap N^2} (\lambda^* - \lambda^1) w_j \leq S_\pi - \lambda^1 \sum_{j \in \pi} w_j = S_{\pi^2}^2$$

y como $\pi^2 = \pi \cap N^2$,

$$(\lambda^* - \lambda^1) \leq \min_{\pi^2 \in P^2} \frac{S_{\pi^2}^2}{\sum_{j \in \pi^2} w_j} = \lambda^2 \iff \lambda^* \leq (\lambda^1 + \lambda^2).$$

Entonces $\lambda^* = (\lambda^1 + \lambda^2)$.

□

PROPOSICIÓN 2.18 *La regla proporcional a los pesos, es la única regla que cumple las propiedades PO, LS, PSYMW y CONS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es inmediata teniendo en cuenta que PSYMW y NMW son equivalentes cuando sólo hay un camino y PO se cumple. \square

OBSERVACIÓN 2.5 *Los métodos usados para la definición de la regla Q^w , parten de la definición de un valor constante de λ para todas las actividades, es posible explorar lo que sucede si se calcula λ en cada paso de forma individual para cada actividad, como indica la siguiente expresión:*

$$\lambda_i^t = \min_{\pi \in P^t, i \in \pi} \frac{E_\pi^t}{\sum_{j \in \pi} w_j}.$$

En el ejemplo 2.8 se muestra como la regla resultante incumpliría consistencia.

EJEMPLO 2.8 *Dado un PCW (N, P, W, E) donde $N = \{A, B, C, D, E, F\}$, $P = \{\{F\}, \{D, E\}, \{A, C, E\}, \{A, B\}\}$, $D = W = (10, 20, 1, 10, 15, 40)$ y $S = (0, 15, 14, 10)$.*

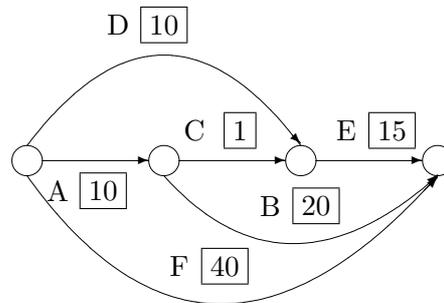


Figura 2.8: Red del ejemplo 2.8

La solución final resulta:

$$f_A = \frac{10}{3}, \quad f_B = \frac{20}{3}, \quad f_C = \frac{794}{390}, \quad f_D = \frac{828}{130} \quad y \quad f_E = \frac{1122}{130}$$

Si se elimina A , el nuevo problema es:

$N = \{B, C, D, E, F\}$, $P = \{(F), (D, E), (C, E), (B)\}$, $D = W = (20, 1, 10, 15, 40)$ y $S = (0, 15, \frac{32}{3}, \frac{20}{3})$ y la solución final es:

$$f_B = \frac{20}{3}, \quad f_C = \frac{5}{3}, \quad f_D = 6 \quad y \quad f_E = 9$$

En resumen, se han definido dos reglas para el PCW, las propiedades que cumplen cada una están expresadas en la siguiente tabla (los asteriscos indican que son las propiedades usadas para alguna de las dos caracterizaciones).

Cuadro 2.5: Propiedades en el PCW

	P^w	Q^w
WPO	SI	SI
PO	NO	SI*
SYM	SI	SI
WPRO	SI	SI
EPRO	SI	SI
PSYMW	SI	SI*
CW	SI	SI
LS	NO	SI*
CU	SI	NO
NMW	SI	SI*
NAW	SI	SI
CONS	NO	SI*

2.4.4. Aplicación al problema SPERT del PCW

En esta sección, se modeliza el problema SPERT como un PCW. En primer lugar se debe notar que el recurso a repartir en un problema SPERT es la holgura que se reparte en cada camino, S , y los subconjuntos donde se reparte serán los caminos completos del PERT,

PA . Luego, considerando $E = S$ y $P = PA$ se tendrá un PCW si se define un peso para cada actividad.

El vector de pesos de las actividades, siguiendo los planteamientos presentados para las peticiones y teniendo en cuenta la relación existente entre los problemas, debe cumplir las siguientes dos propiedades.

La primera propiedad requiere que el peso de una actividad debe ser igual aunque la actividad se divida en varias subactividades. El incumplimiento de esta propiedad supone el incumplimiento de las propiedades NM y NA del problema $SPERT$, lo que supone que la regla Q^w no queda caracterizada.

Aditividad (AD): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall (PE^*, S^*) \in SPE^m$, definidos en las propiedades NM y NA del problema $SPERT$,

$$w_k(PE^*, S^*) = w_k(PE, S) + \sum_{j \in N \setminus M} w_j(PE, S),$$

siendo k el elemento subdividido y donde $w_i(PE, S)$ es el peso asignado a la actividad i en el problema $(PE, S) \in SPERT^n$ y $w_i(PE^*, S^*)$ es el peso asignado a la actividad i en el problema $(PE^*, S^*) \in SPERT^m$.

La segunda propiedad requiere que el peso de una actividad degenerada, es decir, sin posible variabilidad, sea nula. El cumplimiento de esta propiedad es deseable si se considera que una variable degenerada jamás se retrasa, por lo que no necesita recibir reparto alguno de holgura. Esta propiedad resuelve la asignación del peso a las variables ficticias, dado que estas variables al no existir en la realidad, siempre serán degeneradas.

No petición de variables degeneradas (NPD): $\forall (PE, S) \in SPE^n$ y $\forall i \in N$ tal que $Var(i) = 0$, $w_i(PE, S) = 0$.

Algunos pesos que cumplen la propiedad AD si las variables subdivididas son indepen-

dientes son, la media, el rango, la varianza, el máximo y el mínimo. De los pesos indicados anteriormente, sólo el rango y la varianza cumplen la propiedad *NPD*. Además estos dos pesos tienen un comportamiento estrictamente creciente con la dispersión, lo que puede ser deseable si se está realizando un reparto para evitar un retraso final en el proyecto.

PROPOSICIÓN 2.19 *El rango o una ponderación del rango, son los únicos pesos que cumplen IC ante las reglas P^w y Q^w si todas las variables son uniformes o todas son triangulares con $m = a + k(b - a)$.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es similar a la demostración de la proposición 2.7, teniendo en cuenta que $Q_i^w(N, P, W, E) = \lambda w_i$ y $Q_j^w(N, P, W, E) = \lambda w_j$. \square

En esta memoria se ha decidido el uso del peso, $w_i = b_i - a_i$, si existe información sobre la variabilidad de la actividad, en detrimento de la elección $w_i = Var(i)$. Si no existe información sobre la variabilidad, esta memoria recomienda el uso del peso $w_i = d_i$ que cumple la propiedad *AD*.

2.4.5. Regla proporcional

Antes de comenzar a estudiar las reglas derivadas del *PCW*, se debe presentar la primera regla que realizó un reparto proporcional a unos pesos. En Shragowitz et al. (2003)[29], se introduce una regla proporcional a unos pesos en un único paso con el mismo planteamiento que las reglas que en la siguiente sección se estudian.

DEFINICIÓN 2.4 *Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$ y un vector de pesos $W > 0$, se define la regla de reparto $PW(PE, S, W)$ como:*

$$PW_i(PE, S, W) = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} \left\{ S_\pi \frac{w_i}{\sum_{j \in \pi} w_j} \right\}, \quad \forall i \in N.$$

Si $S = PS$ y $w_i = d_i$, $\forall i \in N$ entonces

$$PW_i(PE, S, W) = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} \left\{ S_\pi \frac{d_i}{\sum_{j \in \pi} d_j} \right\} =$$

$$\min_{\pi \in PA, i \in \pi} \left\{ \left(T - \sum_{j \in \pi} d_j \right) \frac{d_i}{\sum_{j \in \pi} d_j} \right\} = \left(\frac{T}{T - as_i} - 1 \right) d_i = \left(\frac{as_i}{T - as_i} \right) d_i.$$

Siendo en este último caso una regla polinomial, dado que el cálculo de T y as_i , $\forall i \in N$, son calculables en tiempo polinomial.

Esta regla que introduce repartos proporcionales a un peso, presenta la ventaja, en el caso de que los pesos sean duraciones y la holgura a repartir la holgura de los caminos, de ser calculable en tiempo polinomial. Sin embargo, no presenta buen comportamiento ante las distintas propiedades, por ese motivo en este trabajo se definirán reglas con mejores propiedades y con un cálculo computacional bueno.

PROPOSICIÓN 2.20 Dado un problema SPERT, $(PE, S) \in SPE^n$, y un vector $W > 0$, la regla $PW(PE, S, W)$ cumple las propiedades de WPO, SYM, PRO, LS, SE, NM y NA si los pesos son aditivos y PSYMD o PSYMR o PSYMV si los pesos son las duraciones, los rangos o las varianzas respectivamente y no cumple PO, CONS y CI.

DEMOSTRACIÓN Claramente cumple las propiedades de WPO, SYM, PRO, SE, LS, NM y NA si los pesos son aditivos y PSYMD, PSYMR o PSYMV si los pesos son las duraciones, los rangos o las varianzas respectivamente y no cumple PO y CI.

Para ver el incumplimiento de CONS se presenta el ejemplo 2.9.

EJEMPLO 2.9 Dado el problema SPERT $(PE, S) \in SPE^n$ donde, $PE = (N, PA, D)$, $N = \{A, B, C\}$, $PA = \{(A, C), (B, C)\}$, $W = D = (2, 4, 2)$ y $S = (2, 0)$ y el problema resultante de la eliminación de la actividad C, $(PE^*, S^*) \in SPE^2$ donde $PE^* = (N^*, PA^*, D^*)$, $N^* = \{A, B\}$, $PA^* = \{(A), (B)\}$, $W^* = D^* = (2, 4)$, $S^* = (2, 0)$, se puede comprobar que $PW_A(PE, S) = 1$ y $PW_A(PE^*, S^*) = 2$, incumpliendo la propiedad CONS.

□

2.4.6. Reglas en el problema SPERT basadas en el PCW

En esta sección se estudian las propiedades asociadas a las seis reglas de reparto para el problema *SPERT* basadas en el *PCW*: P^w y Q^w combinadas con los pesos $w_i = d_i$, $w_i = Var(i)$ y $w_i = b_i - a_i$.

PROPOSICIÓN 2.21 *La regla P^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = d_i$, verifica las propiedades WPO si $d_i > 0$, $\forall i \in N$, SYM, PRO, PSYMD, NM, NA y SE y no verifica las propiedades PO, LS, PSYMR, PSYMV, CONS y CI del problema SPERT.*

DEMOSTRACIÓN La regla P^w en el *PCW* no satisface PO, LS y CONS y satisface WPO y SYM, lo que implica el cumplimiento de estas mismas propiedades en el problema *SPERT*.

Trivialmente se cumple PSYMD, PRO y SE y no se cumple PSYMR, PSYMV y CI, mientras que NM y NA se satisface dado que los pesos definidos cumplen los requisitos de la definición de estas propiedades. □

PROPOSICIÓN 2.22 *La regla P^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = Var(i)$, verifica las propiedades WPO si $Var(i) > 0$, $\forall i \in N$, SYM, PRO, PSYMV, NM, NA y SE y no verifica las propiedades PO, LS, PSYMD, PSYMR, CONS y CI del problema SPERT.*

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior. □

PROPOSICIÓN 2.23 *La regla P^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = b_i - a_i$, verifica las propiedades WPO si $b_i - a_i > 0 \forall i \in N$, CI si son variables aleatorias uniformes o triangulares con $m = a + k(b - a)$, SYM, PRO, PSYMR, NM, NA y SE y no verifica las propiedades PO, LS, PSYMD, PSYMV y CONS del problema SPERT.*

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior, teniendo en cuenta que satisfacen *CI* como se indicó en la proposición 2.19. \square

PROPOSICIÓN 2.24 La regla Q^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = d_i$, verifica las propiedades *PO* y *WPO* si $d_i > 0, \forall i \in N$, *SYM*, *PRO*, *PSYMD*, *NM*, *NA*, *LS*, *CONS* y *SE* y no verifica las propiedades *PSYMV*, *PSYMR* y *CI* del problema SPERT.

DEMOSTRACIÓN La regla Q^w en el PCW satisface *WPO*, *PO*, *SYM*, *PRO*, *LS* y *CONS*, lo que implica el cumplimiento de estas mismas propiedades en el problema SPERT bajo las condiciones indicadas.

Trivialmente cumple *PSYMD* y *SE* y no cumple *PSYMV*, *PSYMR* y *CI*, mientras que *NM* y *NA* se satisfacen dado que los pesos definidos satisfacen los requisitos de la definición de estas propiedades. \square

PROPOSICIÓN 2.25 La regla Q^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = \text{Var}(i)$, verifica las propiedades *WPO* y *PO* si $\text{Var}(i) > 0, \forall i \in N$, *SYM*, *PRO*, *PSYMV*, *NM*, *NA*, *LS*, *CONS* y *SE* y no verifica las propiedades *PSYMD*, *PSYMR* y *CI* del problema SPERT.

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior. \square

PROPOSICIÓN 2.26 La regla Q^w aplicada al problema SPERT con pesos $w_i = b_i - a_i$, verifica las propiedades *WPO* y *PO* si $b_i - a_i > 0, \forall i \in N$, *CI* si son variables aleatorias uniformes o triangulares con $m = a + k(b - a)$, *SYM*, *PRO*, *PSYMR*, *NM*, *NA*, *LS*, *CONS* y *SE* y no verifica las propiedades *PSYMD* y *PSYMV* del problema SPERT.

DEMOSTRACIÓN Similar a la anterior, teniendo en cuenta que satisfacen *CI* como se indicó en la proposición 2.19. \square

OBSERVACIÓN 2.6 En el caso de que el peso sea la duración de la actividad, da lo mismo usar el valor de λ definido, con duraciones constantes, o el valor de λ que a continuación se

expresa, duraciones no constantes.

$$\lambda^t = \min_{\pi \in P^t} \frac{S_{\pi}^t}{\sum_{i \in \pi} (d_i + \sum_{j=1}^{t-1} P_i^w(N^j, P^j, W^j, S^j))}.$$

OBSERVACIÓN 2.7 Dado que la regla Q^w para el PCW esta caracterizada, la regla Q^w aplicada al problema SPERT con peso $w_i = d_i$ o $w_i = b_i - a_i$ o $w_i = Var(i)$, estarán caracterizadas mediante las propiedades PO, LS, NM y CONS, si $w_i > 0 \forall i \in N$.

A continuación se resumen las conclusiones de esta sección. Si se nota:

- W_1 la regla PW con peso $w_i = d_i$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_2 la regla PW con peso $w_i = b_i - a_i$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_3 la regla PW con peso $w_i = Var(i)$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_4 la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = d_i$.
- W_5 la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = b_i - a_i$.
- W_6 la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = Var(i)$.
- W_7 la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = d_i$.
- W_8 la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = b_i - a_i$.
- W_9 la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = Var(i)$.

Cuadro 2.6: Cumplimiento de propiedades

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
WPO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PO							✓	✓	✓
SYM	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PSYMD	✓			✓			✓		
PSYMR		✓			✓			✓	
PSYMV			✓			✓			✓
PRO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
LS	✓	✓	✓				✓	✓	✓
NM	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
NA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CONS							✓	✓	✓
SE	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CI		✓			✓			✓	

2.4.7. Cálculo de la regla Q^w aplicada al problema SPERT

En esta sección, se presenta un algoritmo polinomial en media para el cálculo de la regla proporcional a los pesos extendida siempre que $P = PA$ y $E = S = PS$. En otras palabras, el algoritmo soluciona el problema SPERT cuando la holgura a repartir es la holgura de los caminos mediante su modelización como un PCW y la posterior aplicación de la regla proporcional a los pesos extendida.

Algoritmo PCWSPERT (G: PERT Graph)

Begin

k:=0

EndA:=0

Asignar una duración $d_i^0 \geq 0$ y un peso $w_i \geq 0$, $\forall i \in N$ Encontrar el tiempo del camino crítico del PERT (G, D^0): T

While endA=0

Begin

Encontrar la holgura de las actividades en el PERT (G, D^k): as_i

k:=k+1

Calcular $daux_i := \begin{cases} \frac{w_i}{as_i} & \text{si } as_i > 0 \\ 0 & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$ If $daux_i = 0$, $\forall i \in N$ then

EndA:=1

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G, $Daux$): π^*

EndStep:=0

While EndStep=0

Begin

Calcular $\lambda := \frac{T - \sum_{i \in \pi^*} d_i^{k-1}}{\sum_{\{i \in \pi^* | as_i > 0\}} w_i}$ Calcular $d_i^k := \begin{cases} d_i^{k-1} + \lambda w_i & \text{si } as_i > 0 \\ d_i^{k-1} & \text{si } as_i = 0 \end{cases}$ Encontrar el tiempo del camino crítico en el PERT (G, D^k): T^0 If $T^0 = T$ then

EndStep:=1

Else

Begin

Encontrar un camino crítico en el PERT (G, D^k): π^* Calcular $d_i^k := d_i^{k-1}$

End

End

End

End

El tiempo final es d_i^k y el tiempo extra es $d_i^k - d_i^0$, $\forall i \in N$

End

PROPOSICIÓN 2.27 *La solución obtenida mediante el algoritmo PCWSPERT coincide con la proporcionada por la regla Q^w en el PCW.*

DEMOSTRACIÓN Similar a la demostración de la proposición 2.12. □

OBSERVACIÓN 2.8 *El cálculo de la regla proporcional a los pesos P^w , será similar, finalizando en el primer paso del algoritmo.*

OBSERVACIÓN 2.9 *Dado la relación existente entre las reglas Q^c y Q^w es posible utilizar cualquiera de los dos algoritmos para encontrar la solución con cualquiera de las reglas. Por este mismo motivo, la complejidad del algoritmo descrito es la misma que la del algoritmo PCCSPERT.*

2.5. Comparación

En esta sección se presenta desde distintos puntos de vista la comparación de las reglas presentadas a lo largo de este capítulo. Los tres enfoques realizados son:

- En función de las propiedades.
- En función de la complejidad.
- Mediante ejemplos significativos.

La notación usada es:

- G_1 para la regla obtenida calculando el valor de compromiso (Bergantiños y Sánchez (2002a)[2]).
- G_2 para la regla obtenida calculando el valor de compromiso extendido (Bergantiños y Sánchez (2002a)[2]).

- C_1 para la regla P^c basada en el PCC con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ (Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]).
- C_2 para la regla P^c basada en el PCC con petición $c_i = b_i - d_i$.
- C_3 para la regla Q^c basada en el PCC con petición $c_i = \min_{\pi \in PA, i \in \pi} S_\pi$ (Bergantiños y Sánchez (2002b)[3]).
- C_4 para la regla Q^c basada en el PCC con petición $c_i = b_i - d_i$.
- W_1 para la regla PW con peso $w_i = d_i$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_2 para la regla PW con peso $w_i = b_i - a_i$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_3 para la regla PW con peso $w_i = Var(i)$ (Shragowitz et al. (2003)[29]).
- W_4 para la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = d_i$.
- W_5 para la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = b_i - a_i$.
- W_6 para la regla P^w basada en el PCW con peso $w_i = Var(i)$.
- W_7 para la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = d_i$.
- W_8 para la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = b_i - a_i$.
- W_9 para la regla Q^w basada en el PCW con peso $w_i = Var(i)$.

En función de esta comparativa se concluye que las reglas C_4 y W_8 son las más deseables si se dispone de datos sobre la variable aleatoria referida a la duración de la actividad y en caso contrario la regla W_7 .

2.5.1. En función de las propiedades

Con anterioridad, proposiciones 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 y 2.26, se ha estudiado el cumplimiento o incumplimiento de cada una de las propiedades

para cada una de las reglas, con lo que esta sección se limitará a resumir en las tablas 2.7 y 2.8 toda esa información.

Cuadro 2.7: Cumplimiento de propiedades

	G_1	C_1	C_2	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
WPO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PO									
SYM	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PSYMD				✓			✓		
PSYMR					✓			✓	
PSYMV						✓			✓
PRO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
LS				✓	✓	✓			
NM			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
NA			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CONS									
SE	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CI			✓		✓			✓	

Cuadro 2.8: Cumplimiento de propiedades

	G_2	C_3	C_4	W_7	W_8	W_9
WPO	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PO	✓	✓	✓	✓	✓	✓
SYM	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PSYMD				✓		
PSYMR					✓	
PSYMV						✓
PRO	✓	✓	✓	✓	✓	✓
LS			✓	✓	✓	✓
NM			✓	✓	✓	✓
NA			✓	✓	✓	✓
CONS		✓	✓	✓	✓	✓
SE	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CI			✓		✓	

El incumplimiento de la propiedad de PO , implica que el problema $SPERT$ no ha sido resuelto en el sentido estricto, dado que no se ha repartido toda la holgura indicada. Además, el incumplimiento de PO implica la imposibilidad de crear un calendario cuando $S = PS$, lo que a su vez ocasiona que no sea posible la utilización de esa regla para solucionar los problemas $APERT$ y $CPERT$. El incumplimiento de NM y NA supone que situaciones reales totalmente similares den soluciones distintas únicamente por la modelización realizada.

2.5.2. En función de la complejidad

En referencia a la complejidad de las reglas presentadas, se puede destacar que todas ellas son computables en situaciones reales con un gran número de actividades, dado que todas las reglas definidas son calculables en un tiempo polinomial en media y en el caso de la regla W_1 polinomial en el peor de los casos, por lo tanto, desde el punto de vista computacional no existe motivo para decantarse por ninguna de las reglas.

2.5.3. Mediante ejemplos significativos

En esta sección se presentan diversos ejemplos ilustrativos que muestran las irregularidades en determinadas situaciones reales generadas por la utilización de alguna de las reglas.

Ineficiencia

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas reparten el total de la holgura disponible, por lo que el problema no queda resuelto dado que hay holgura sin repartir.

EJEMPLO 2.10 Dado el problema $SPERT (PE, S) \in SPE^n$ donde $N = \{A, B, C, D, E, F, G\}$; $A \sim \beta(0, 1, 2)$, $B \sim \beta(0, 1, 2)$, $C \sim \beta(0, 1, 2)$, $D \sim \beta(0, 2, 4)$, $E \sim \beta(0, 2, 4)$, $F \sim \beta(5, 6, 7)$, $G \sim \beta(5, 10, 15)$, $PA = \{\{A, B, C, G\}, \{D, E, G\}, \{F, G\}\}$; $D = (1, 1, 1, 2, 2, 6, 10)$ y $S = (3, 2, 0)$, se muestra en la tabla 2.9 que las reglas $G_1, C_1, C_2, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5$ y W_6 no reparten toda la holgura (no cumple PO). Además las reglas W_1, W_2 y W_3 no reparten toda la holgura en ninguno de los dos caminos con holgura.

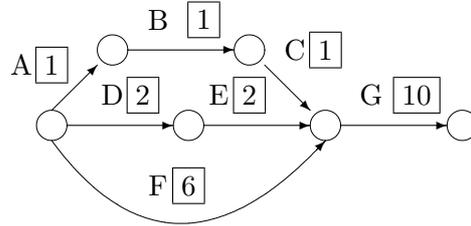


Figura 2.9: Red del ejemplo 2.10

Cuadro 2.9: Reparto en el ejemplo 2.10

	$G_1; C_1$	W_1	W_2	W_3	$C_2; W_4; W_5; W_6$	$G_2; C_3; C_4; W_7; W_8; W_9$
f_A	1	3/13	6/16	3/28	1/2	1
f_B	1	3/13	6/16	3/28	1/2	1
f_C	1	3/13	6/16	3/28	1/2	1
f_D	2/3	4/14	8/18	8/33	1	1
f_E	2/3	4/14	8/18	8/33	1	1
f_F	0	0	0	0	0	0
f_G	0	0	0	0	0	0

Irrelevancia de las duraciones

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la duración de las actividades.

EJEMPLO 2.11 Dado el problema $SPERT (PE, S) \in SPE^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 1, 2)$, $B \sim \beta(999, 1000, 1001)$, $C \sim \beta(1100, 1101, 1102)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (1, 1000, 1101)$ y $S = (100, 0)$, se muestra en la tabla 2.10 que las diferencias en las duraciones no son consideradas por las reglas $G_1, G_2, C_1, C_2, C_3, C_4, W_2, W_3, W_5, W_6, W_8$ y W_9 .

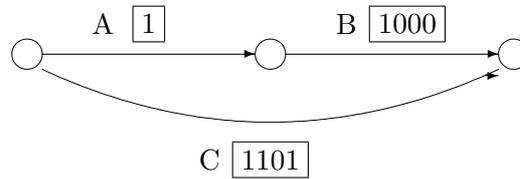


Figura 2.10: Red del ejemplo 2.11

Cuadro 2.10: Reparto del ejemplo 2.11

	$G_1; G_2; C_1; C_2; C_3; C_4; W_2; W_3; W_5; W_6; W_8; W_9$	$W_1; W_4; W_7$
f_A	50	100/101
f_B	50	10000/101
f_C	0	0

Comportamiento ante la dispersión.

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la dispersión de la duración de las actividades y otras que sí lo consideran no lo realizan de una forma adecuada.

EJEMPLO 2.12 Dado el problema $SPERT (PE, S) \in SPE^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 100, 200)$, $B \sim \beta(50, 100, 150)$, $C \sim \beta(300, 350, 400)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (100, 100, 350)$ y $S = (150, 0)$, se muestra en la tabla 2.11 que las reglas $G_1, G_2, C_1, C_3, W_1, W_4$ y W_7 no consideran en su solución la dispersión de la duración de las actividades, lo que produce que la actividad B reciba 75 unidades, 25 más de lo que se puede retrasar y la actividad A reciba 75 unidades, 25 menos de lo que se puede retrasar. También se muestra que las reglas W_6 y W_9 pese a considerar la dispersión, lo realizan de una forma excesiva, puesto que la actividad B reciba 37.5 unidades, 12.5 menos de lo que se puede retrasar y la actividad A reciba 112.5 unidades, 12.5 más de lo que se puede retrasar. Esto se produce por el incumplimiento de la propiedad IC por parte de estas reglas.

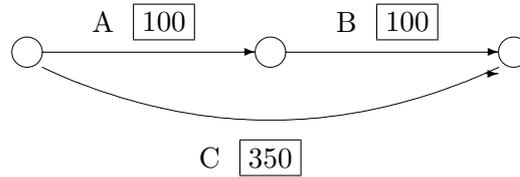


Figura 2.11: Red del ejemplo 2.12

Cuadro 2.11: Reparto del ejemplo 2.12

	$G_1; G_2; C_1; C_3; W_1; W_4; W_7$	$C_2; C_4; W_2; W_5; W_8$	$W_6; W_9$
f_A	75	100	112.5
f_B	75	50	37.5
f_C	0	0	0

Variación producida por subdivisión.

El siguiente ejemplo muestra que no todas las reglas son irrelevantes bajo subdivisión de actividades cuando la variable original es el resultado de la suma de las variables aleatorias de las subactividades generadas.

EJEMPLO 2.13 Dado el problema $SPERT (PE, S) \in SPE^n$ donde $N = \{A, B, C, D\}$; $A \sim \beta(1,5, 2, 2,5)$, $B \sim \beta(1,5, 2, 2,5)$, $C \sim \beta(1,5, 2, 2,5)$, $D \sim \beta(3, 5, 7)$, $PA = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{D\}\}$; $D = (2, 2, 2, 5)$ y $S = (1, 1, 0)$, y el resultante de considerar la división de la actividad C en r actividades C_1, \dots, C_r , tal que C_1, \dots, C_r son variables aleatorias independientes y $C = \sum_{j=1}^r C_j$, las tablas 2.12, 2.13 y 2.14, muestran que las reglas G_1, G_2, C_1 y C_3 no son robustas frente a estrategias de subdivisión (estas reglas no cumplen NM y NA). Para estas reglas, dos modelos similares para el mismo problema $SPERT$ producen resultados muy diferentes.

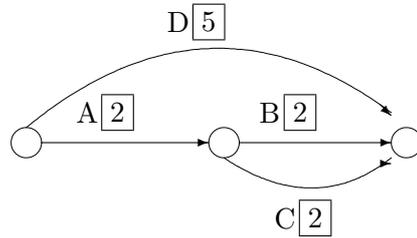


Figura 2.12: Red del ejemplo 2.13

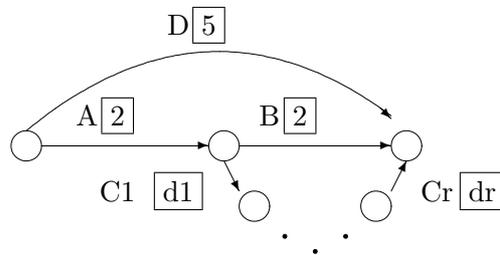


Figura 2.13: Red del ejemplo 2.13 con subdivisiones

Cuadro 2.12: Reparto en el ejemplo 2.13

	$G_1; G_2; C_1; C_2; C_3; C_4; W_1; W_2; W_3; W_4; W_5; W_6; W_7; W_8; W_9$
f_A	1/2
f_B	1/2
f_C	1/2
f_D	0

Cuadro 2.13: Reparto en el ejemplo 2.13 con subdivisiones

	$G_1; C_1$	$G_2; C_3$	$C_2; C_4; W_1; W_2; W_3; W_4;$ $W_5; W_6; W_7; W_8; W_9$
f_A	$1/r+1$	$1/r+1$	$1/2$
f_B	$1/r+1$	$1-(1/r+1)$	$1/2$
$f_{C_1} + \dots + f_{C_r}$	$1-(1/r+1)$	$1-(1/r+1)$	$1/2$
f_D	0	0	0

Cuadro 2.14: Reparto en el ejemplo 2.13 con subdivisiones en el límite

	$G_1; C_1$	$G_2; C_3$	$C_2; C_4; W_1; W_2; W_3; W_4;$ $W_5; W_6; W_7; W_8; W_9$
f_A	0	0	$1/2$
f_B	0	1	$1/2$
$f_{C_1} + \dots + f_{C_r} + \dots$	1	1	$1/2$
f_D	0	0	0

Inestabilidad de las soluciones.

El último ejemplo ilustra que no todas las soluciones son estables, menores cambios introducidos en el problema causan importantes cambios en las soluciones.

EJEMPLO 2.14 El proyecto consiste en pintar la pared de una casa. Se tienen 90 horas para finalizar la tarea. Hay dos actividades que realizar, la primera, raspado de la pared, denotado por A , y la segunda, pintado de la pared, denotado por B . La distribución de la duración de las dos actividades es $\beta(15, 30, 45)$. El problema SPERT es, $N = \{A, B, O\}$; $A \sim \beta(15, 30, 45)$, $B \sim \beta(15, 30, 45)$, $O \sim \beta(90, 90, 90)$, $PA = \{\{A, B\}, \{O\}\}$; $D = (30, 30, 90)$ y $S = (30, 0)$ (primer caso del ejemplo 2.14).

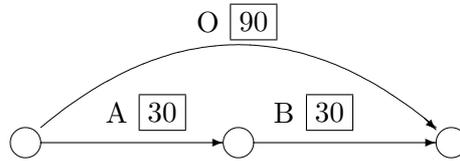


Figura 2.14: Red del primer caso del ejemplo 2.14

Cuadro 2.15: Reparto en el primer caso del ejemplo 2.14

	$G_1; G_2; C_1; C_2; C_3; C_4; W_1; W_2; W_3; W_4; W_5; W_6; W_7; W_8; W_9$
f_A	15
f_B	15
f_C	0

Después, se dan cuenta de que hay dos actividades adicionales, obtener la pintura (C) y mezclar la pintura (D) que se deben realizar antes de comenzar a pintar la pared. La distribución de la duración de las dos nuevas actividades es $\beta(0,5, 1, 1,5)$. El problema *SPERT* es, $N = \{A, B, C, D, O\}$; $A \sim \beta(15, 30, 45)$, $B \sim \beta(15, 30, 45)$, $C \sim \beta(0,5, 1, 1,5)$, $D \sim \beta(0,5, 1, 1,5)$, $O \sim \beta(90, 90, 90)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C, D, B\}\{O\}\}$; $D = (30, 30, 1, 1, 90)$ y $S = (30, 58, 0)$ (segundo caso del ejemplo 2.14).

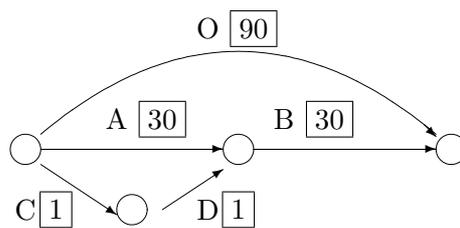


Figura 2.15: Red del segundo caso del ejemplo 2.14

Finalmente, si se decide que no es necesario recoger los escombros antes de pintar, si no que se puede realizar mientras se pinta. Entonces el correspondiente problema *SPERT* será, $N = \{A, B, C, D, E, O\}$; $A \sim \beta(15, 30, 45)$, $B \sim \beta(15, 30, 45)$, $C \sim \beta(0,5, 1, 1,5)$, $D \sim \beta(0,5, 1, 1,5)$, $E \sim \beta(0,5, 1, 1,5)$, $O \sim \beta(90, 90, 90)$, $P = \{\{A, B\}, \{A, E\}, \{C, D, B\}, \{C, D, E\}, \{O\}\}$; $D = (30, 30, 1, 1, 1, 90)$; $S = (30, 59, 58, 87, 0)$ (cuarto caso del ejemplo 2.14).

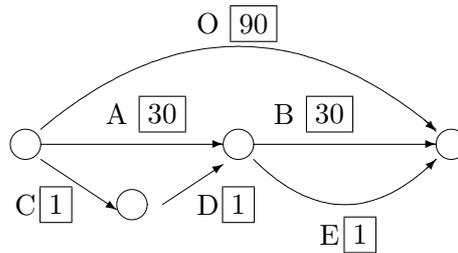


Figura 2.17: Red del cuarto caso del ejemplo 2.14

Cuadro 2.18: Reparto en el cuarto caso del ejemplo 2.14

	$G_1; C_1$	$G_2; C_2$	$W_1; W_3$	W_2	$W_4; W_5; W_6; C_2$	$W_7; W_8; W_9; C_4$
f_A	11.92	18.08	15	15	15	15
f_B	11.92	11.92	15	15	15	15
f_C	23.02	23.02	1.81	2.15	0.5	21.5
f_D	23.02	23.02	1.81	2.15	0.5	21.5
f_E	23.44	40.92	1.90	2.27	0.5	44
f_O	0	0	0	0	0	0

Si se comparan los repartos realizados en situaciones bastante similares en las tablas 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18, se puede concluir que las reglas G_1 , G_2 , C_1 y C_3 son inestables.

Capítulo 3

Problema APERT

Otro problema que surge de forma natural en planificación de proyectos es el reparto de costes y beneficios en los casos en los que el proyecto se haya retrasado o adelantado. En este capítulo se analizarán y estudiarán diferentes reglas para obtener soluciones al problema aquí planteado.

Este trabajo se centra en el reparto del adelanto (retraso) generado después de una ejecución de un problema *PERT*, es decir, se reparte el adelanto (retraso) del proyecto y no el beneficio o coste que este genera. Por ello, a lo largo de este capítulo se supone siempre que la función de beneficios es la identidad, es decir, $B(x) = x, \forall x \in \mathfrak{R}$.

Este caso particular tiene un interés especial por dos motivos:

1. Las funciones de beneficios (costes) escalares (una función de beneficios escalar es aquella que se calcula multiplicando el adelanto por una constante) son comunes en la vida real, por ejemplo, en obra civil, se multa con un dinero por cada día de retraso sobre la fecha pactada, sin importar el número de días de retraso.
2. Al repartir en realidad el adelanto (retraso) del proyecto, es posible comparar a lo largo del tiempo, la evolución de las distintas actividades en el caso de que el proyecto *PERT* se repita. Dado que el adelanto (retraso) de una actividad es comparable en distintos

instantes temporales, lo que no tiene porque suceder con las funciones de beneficios (o costes).

El reparto de beneficios (costes) se realiza entre las actividades no ficticias, dado que las ficticias no son en realidad actividades, puesto que se crean únicamente con el fin de poder representar gráficamente el proyecto, y por lo tanto, no tienen capacidad de adelanto (retraso) en su ejecución.

La teoría de juegos cooperativa plantea multitud de posibilidades para encontrar repartos eficientes y estables entre las actividades, por ese motivo, esta teoría es la utilizada en este capítulo.

En los juegos aquí definidos, se realizan dos suposiciones más. En primer lugar, la no existencia de ventanas de tiempo (i.e. las actividades deben empezar cuando sus predecesoras terminan, $b_i = \max_{i \in \text{PredIm}(x_{i,1})} e_i$) y en segundo lugar, la red es estática (i.e. los juegos que se presentan, sólo tienen en cuenta si las actividades pertenecen a un camino, sin considerar el orden en el camino).

Este capítulo comienza con la definición de las propiedades en un problema APERT. Se continua con la definición de las propiedades deseables en un juego definido para resolver el problema APERT. Se sigue con la definición de un juego para resolver el problema APERT presentado en Estévez-Fernández et al. (2005)[14]. Para solucionar ciertos problemas que presenta este juego, se define un nuevo juego. Sobre este juego se definen algunos posibles repartos para el problema APERT. Se finaliza el capítulo con una sección comparativa de los distintos repartos realizados.

3.1. Propiedades de una regla en el problema APERT

En esta sección, se definen algunas propiedades de los repartos factibles del problema APERT.

La primera propiedad requiere que las actividades que se han retrasado más de la holgura máxima en todos sus caminos, $\max_{\{\pi \in PA, i \in \pi\}} ps_\pi$, sean penalizadas en el reparto.

Uso de la holgura de los caminos (UPS): Dado $(PE, b, e, B) \in AP^n$ e $i \in N$ tal que $r_i > \max_{\{\pi \in PA, i \in \pi\}} ps_\pi$, entonces $f_i(PE, b, e, B) < 0$.

Las siguientes dos propiedades establecen el comportamiento de la regla para actividades simétricas y paralelas existentes en la red.

Igualdad de actividades simétricas (BSA): Dado $(PE, b, e, B) \in AP^n$ e $i, j \in N$ actividades simétricas tal que $d_i^0 = d_j^0$, entonces $f_i(PE, b, e, B) = f_j(PE, b, e, B)$.

Igualdad de actividades paralelas (BPA): Dado $(PE, b, e, B) \in AP^n$ e $i, j \in N$ actividades paralelas tal que $d_i^0 = d_j^0$, entonces $f_i(PE, b, e, B) = f_j(PE, b, e, B)$.

La cuarta propiedad, estudia el uso que una actividad puede hacer de su holgura independiente.

Uso de la holgura independiente (UIS): Dado $(PE, b, e, B) \in AP^n$ e $i \in N$ tal que $r_i \leq is_i$, entonces $f_i(PE, b, e, B) \geq 0$.

La quinta propiedad requiere que, cuando la red *PERT* es bipartita, la solución para una actividad sólo dependa de las actividades de la nueva red *PERT* subdividida a la que pertenece. Formalmente: Dado un problema *APERT*, $(PE, b, e, B) \in AP^n$, se define los subproblemas *APERT*, $(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, B) \in AP^{|Pred(x)|}$ y $(PE^2, b|_{Suc(x)} - T_x^E, e|_{Suc(x)} - T_x^E, B) \in AP^{|Suc(x)|}$ donde

1. $PE = (N, PA, D)$ es una red *PERT* bipartita, siendo x el nodo bipartito.
2. $PE^1 = (Pred(x), PA(x_b, x), D|_{Pred(x)})$.
3. $PE^2 = (N \setminus Pred(x), PA(x, x_e), D|_{N \setminus Pred(x)})$.
4. $R^1 = R|_{Pred(x)}$ y $R^2 = R|_{N \setminus Pred(x)}$.

Separabilidad (SE): Dado $(PE, b, e, B) \in AP^n$ tal que $B(x) = x, \forall x \in \mathfrak{R}$ y dos subproblemas $(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, B) \in AP^{|Pred(x)|}$, $(PE^2, b|_{Suc(x) - T_x^E}, e|_{Suc(x) - T_x^E}, B) \in AP^{|Suc(x)|}$, definidos como anteriormente se ha descrito, entonces

$$f_i(PE, b, e, B) = \begin{cases} f_i(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, B) & \text{si } i \in Pred(x) \\ f_i(PE^2, b|_{Suc(x) - T_x^E}, e|_{Suc(x) - T_x^E}, B) & \text{si } i \in Suc(x) \end{cases}$$

Esta propiedad sólo se podrá exigir si la función de beneficios es escalar ($B(x) = \lambda x \forall x \in \mathfrak{R}$), dado que, en otro caso, no se puede garantizar que la suma de los beneficios de los adelantos en los subproblemas, sea la misma que en el problema original.

Las dos últimas propiedades estudian el comportamiento de la solución ante la subdivisión de una de las actividades en varias subactividades. Formalmente: Dado un problema APERT $(PE, b, e, B) \in AP^n$ se define el problema APERT, $(PE^*, b^*, e^*, B) \in AP^m$ donde:

1. $PE = (N, PA, S)$, $PE^* = (M, PA^*, D^*)$ y $M \subset N$.
2. Existe una sola actividad $k \in M$ tal que $D_k^* = D_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} D_j$ y $D_i^* = D_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.
3. $\forall \pi \in PA, (\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi$ ó $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset$.
4. $PA^* = PA|_M$ y $S^* = S|_{PA^*}$.
5. $r_k^* = r_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} r_j$ y $r_i^* = r_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.

No manipulación por subdivisión (NMS): Dados dos problemas APERT, $(PE, b, e, B) \in AP^n$ y $(PE^*, b^*, e^*, B) \in AP^m$, definidos como anteriormente se ha descrito, entonces

$$f_k(PE^*, b^*, e^*, B) = f_k(PE, b, e, B) + \sum_{j \in N \setminus M} f_j(PE, b, e, B).$$

No afectar a otras por subdivisión (NAS): Dados dos problemas APERT, $(PE, b, e,$

$B) \in AP^n$ y $(PE^*, b^*, e^*, B) \in AP^m$, definidos como anteriormente se ha descrito, entonces

$$f_i(PE^*, b^*, e^*, B) = f_i(PE, b, e, B), \quad \forall i \in M \setminus \{k\}.$$

3.2. Juegos cooperativos para el problema APERT

Como se ha dicho anteriormente, un problema *APERT* consiste en repartir el beneficio del adelanto o el coste del retraso entre las distintas actividades. Estas actividades interactúan entre ellas, lo que indica una capacidad de cooperación. Además, el reparto resultante debe ser considerado justo y estable por parte de las actividades involucradas en el proyecto, dado que en otro caso, pudieran no aceptarlo si tienen capacidad legal para ello, o no participar en futuros proyectos si consideran que el reparto no atiende a sus intereses.

La teoría de juegos es una buena herramienta para la búsqueda de soluciones justas y estables (Owen (1995)[24]). Por este motivo, en esta memoria se han utilizado conceptos juego-teóricos para afrontar el problema *APERT*.

A continuación, se introduce en esta memoria, una colección de propiedades deseables en un juego que modele un problema *APERT*. La primera propiedad requiere que cuando el retraso de una actividad es menor que la holgura independiente, la contribución marginal de esa actividad es positiva en cualquier coalición. Como consecuencia trivial, esta actividad no será penalizada en el reparto final.

Uso de la holgura independiente (UIS): Dado un juego de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$, si $r_k \leq is_k$ entonces:

$$v_{(PE,R)}(S \cup \{k\}) \geq v_{(PE,R)}(S), \quad \forall S \subset N \setminus \{k\}.$$

La segunda propiedad requiere que cuando la red *PERT* se pueda dividir en dos redes

PERT, el juego original sea la suma de los dos subjuegos. Formalmente: Dado el juego de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$ se definen los dos subjuegos de proyectos $(N^1, v_{(PE^1,R^1)}^1)$ y $(N^2, v_{(PE^2,R^2)}^2)$ donde:

1. $N = N^1 \cup N^2, N^1 \cap N^2 = \emptyset$.
2. $PE = (N, PA, D)$ es una red *PERT* bipartita, siendo x el nodo bipartito.
3. $PE^1 = (Pred(x), PA(x_b, x), D|_{Pred(x)})$.
4. $PE^2 = (N \setminus Pred(x), PA(x, x_e), D|_{N \setminus Pred(x)})$.
5. $R^1 = R|_{Pred(x)}$ y $R^2 = R|_{N \setminus Pred(x)}$.

Separabilidad (SE): Dado un juego de proyecto $(N, v_{(PE,R)})$ y dos subjuegos de proyectos $(N^1, v_{(PE^1,R^1)}^1)$ y $(N^2, v_{(PE^2,R^2)}^2)$, definidos como anteriormente se ha descrito

$$v^1(S) + v^2(T) = v(S \cup T), \forall S \subset N^1 \text{ y } \forall T \subset N^2.$$

La tercera y cuarta propiedad establecen que el juego no cambia cuando una actividad se divide en varias subactividades. Formalmente: Dado un problema *APERT*, (PE, R) se define el problema *APERT*, (PE^*, R^*) , donde:

1. $PE = (N, PA, D), PE^* = (M, PA^*, D^*)$ y $M \subset N$.
2. Existe sólo una actividad $k \in M$ tal que $D_k^* = D_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} D_j$ y $D_i^* = D_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.
3. $\forall \pi \in PA (\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi$ o $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset$.
4. $PA^* = PA|_M$.
5. $r_k^* = r_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} r_j$ y $r_i^* = r_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.

No manipulabilidad por subdivisión (NMS): Dados dos juegos de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$ y $(M, v_{(PE^*,R^*)})$, definidos como anteriormente se ha descrito,

$$v_{(PE^*,R^*)}(S \cup \{k\}) = v_{(PE,R)}(S \cup \{k\} \cup \{N \setminus M\}), \quad \forall S \subset M \setminus \{k\}.$$

No afectar a otras por subdivisión (NAS): Dados dos juegos de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$ y $(M, v_{(PE^*,R^*)})$, definidos como anteriormente se ha descrito,

$$v_{(PE^*,R^*)}(S) = v_{(PE,R)}(S) \quad \forall S \subset M \setminus \{k\}.$$

La quinta y sexta propiedad muestran el comportamiento de las actividades simétricas y paralelas en el juego.

Comportamiento de las actividades simétricas (BSA): Dado un juego de proyecto $(N, v_{(PE,R)})$ e $i, j \in N$ actividades simétricas tal que $d_i^0 = d_j^0$, entonces los jugadores $i, j \in N$ son jugadores simétricos en el juego.

Comportamiento de las actividades paralelas (BPA): Dado un juego de proyecto $(N, v_{(PE,R)})$ e $i, j \in N$ actividades paralelas tal que $d_i^0 = d_j^0$, entonces los jugadores $i, j \in N$ son jugadores simétricos en el juego.

En la proximas secciones se introducen dos posibles juegos para este problema que son comparados en función de las cinco propiedades definidas en esta sección.

3.2.1. El juego de proyectos (Estévez-Fernández et al. (2005))

En esta sección, se presenta el juego definido en Estévez-Fernández et al.(2005)[14]. La definición de este juego se realiza mediante otros dos juegos. El primero de ellos se utiliza cuando las actividades de la coalición se pueden garantizar un pago positivo, por lo que se

modeliza mediante un juego de valor (donde sólo se reparten adelantos). El segundo de ellos se utiliza cuando las actividades de la coalición no se pueden garantizar un pago positivo, por lo que se modeliza mediante un juego de costes (donde sólo se reparten retrasos). Formalmente:

DEFINICIÓN 3.1 *El juego $(N^*, u_{(PE,R)}(S))$ para el problema APERT es:*

$$u(S) = \begin{cases} -c(S) & \text{si } T^*(S) \geq T \\ v(S) & \text{si } T^*(S) < T \end{cases}$$

donde $T^*(S)$ es el tiempo del PERT (N, PA, D^*) , siendo

$$d_i^* = \begin{cases} d_i & \text{si } i \in N \setminus S \text{ y } d_i^0 \leq d_i \\ d_i^0 & \text{si } i \in S \text{ o } d_i^0 > d_i \end{cases}$$

Para la definición del juego de adelantos, se introducen los siguientes conceptos:

- El adelanto de una actividad es

$$e_i = \text{máx}\{-r_i, 0\}$$

- La holgura restante después de la ejecución en un camino π es

$$rps_\pi = ps_\pi - \sum_{i \in \pi \cap N^*} r_i^+, \quad \forall \pi \in PA.$$

- El conjunto de los caminos que no se adelantan en la ejecución son

$$J_1 = \{\pi \in PA, rps_\pi \leq 0\}.$$

- Recursivamente se define,

$$J_k = \left\{ \pi^* \in \left(PA \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} J_l \right), rps_{\pi^*} \leq rps_{\pi} \forall \pi \in \left(PA \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} J_l \right) \right\}.$$

J_k contiene los caminos cuya holgura restante es la menor, excluyendo los caminos pertenecientes a J_1, \dots, J_{k-1} .

- Se define la holgura remanente de J_k , $\forall k = \{1, \dots, g\}$ y las actividades pertenecientes a J_k , $\forall k = \{1, \dots, g\}$,

$$rps(J_1) = 0; \quad rps(J_k) = rps_{\pi} \quad \forall \pi \in J_k; \quad N(J_k) = \{i \in N^*, \exists \pi \in J_k, i \in \pi\};$$

- El nivel de adelanto que los caminos de J_k pueden obtener es

$$F^k = \begin{cases} rps(J_{k+1}) - rps(J_k) & \text{si } 1 \leq k < g \\ T - T^0 - rps(J_g) & \text{si } k = g \end{cases}$$

- Por último se define la parte del nivel de adelanto, F^k , que las actividades de S no pueden disponer,

$$w^k(S) = \min \left\{ \sum_{i \in (\bigcup_{l=1}^k N(J_l)) \setminus S} e_i - \sum_{l=1}^{k-1} w^l(S), F^k \right\} \quad \forall S \subset N^*.$$

Con todo ello, el valor del juego de adelantos, es la parte de cada uno de los valores de F_k , que la coalición S puede garantizarse disponer. Formalmente

$$v(S) = \sum_{k=1}^g (F^k - w^k(S)) \quad \forall S \subset N^*.$$

El juego de costes, indica que una coalición S debe responder, en cualquiera de los caminos a los que alguna de sus actividades pertenece, de la diferencia entre sus retrasos y sus adelantos o del retraso de ese camino, sin que el valor del juego pueda tomar un valor negativo. Formalmente: teniendo en cuenta que los caminos a los que pertenece alguno de los elementos de S se nota por $PA|_S = \{\pi \in PA / \exists i \in S, i \in \pi\}$,

$$c(S) = \left(\max_{\pi \in PA|_S} \left\{ \min \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} (r_i^+ - e_i), \sum_{i \in \pi \cap N^*} (r_i^+ - e_i - ps_\pi) \right\} \right\} \right)_+$$

Para una posible comparación con las soluciones que en este capítulo se proponen del problema APERT, a continuación, se demuestran algunas de las propiedades que verifica el juego propuesto en Estévez-Fernández et al.(2005)[14].

PROPOSICIÓN 3.1 *El juego definido en Estévez-Fernández et al. (2005)[14] satisface las propiedades BPA y BSA pero no verifica las propiedades UIS, NMS, NAS y SE.*

DEMOSTRACIÓN

- Claramente cumple las propiedades BPA y BSA.
- A continuación se muestra un ejemplo en el que la propiedad UIS no se verifica.

EJEMPLO 3.1 *Dado el juego $(N, u_{(PE,R)})$, donde $N = \{A, B\}$; $PA = \{(A), (B)\}$; $D = (2, 1)$; $R = (0, 1)$ se puede ver que $u(B) = -1 < u(\emptyset) = 0$.*

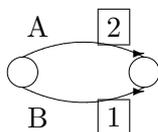


Figura 3.1: Red del ejemplo 3.1.

- No NMS y NAS.

EJEMPLO 3.2 Dado los juegos $(N, u_{(PE,R)})$ y $(M, u_{(PE^*,R^*)})$, donde $N = \{A, A', B, C\}$; $PA = \{(A, A', B, C)\}$; $D = (1, 1, 1, 3)$; $R = (-1, 1, 2, -2)$; $M = \{A, B, C\}$; $PA^* = \{(A, B, C)\}$; $D^* = (2, 1, 3)$; $R^* = (0, 2, -2)$; se puede ver que $u_{(PE^*,R^*)}(B, C) = 0 \neq u_{(PE,R)}(B, C) = -1$ y $u_{(PE^*,R^*)}(A) = 0 \neq u_{(PE,R)}(A) + u_{(PE,R)}(A') = -1$.

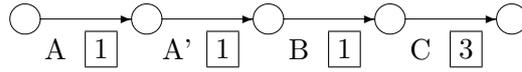


Figura 3.2: Primera red del ejemplo 3.1.

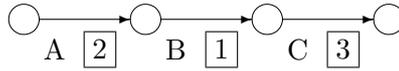


Figura 3.3: Segunda red del ejemplo 3.1.

- No SE.

EJEMPLO 3.3 Dado el juego $(N, u_{(PE,R)})$, donde $N = \{A, B\}$; $PA = \{(A, B)\}$; $D = (2, 2)$; $R = (-1, 2)$ se puede ver que $u_{(PE^1,R^1)}^1(A) = 1 \neq u_{(PE,R)}(A) = 0$ donde $PE^1 = (\{A\}, \{(A)\}, (2))$ y $R^1 = (1)$.

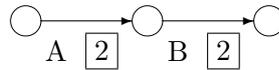


Figura 3.4: Red del ejemplo 3.3.

□

PROPOSICIÓN 3.2 El juego definido en Estévez-Fernández et al. (2005)[14] es superaditivo y tiene corazón no vacío.

DEMOSTRACIÓN En Estévez-Fernández et al. (2005)[14] se prueba que el juego tiene corazón no vacío.

Teniendo en cuenta que el juego $c(S)$ es trivialmente superaditivo y el juego $v(S)$ es convexo (ver Estévez-Fernández et al. (2005)[14]) y por lo tanto superaditivo, para demostrar que el juego $u(S)$ es superaditivo, se distinguen tres casos:

1. Si $T^*(S) \geq T$ y $T^*(P) \geq T$. En este caso, si $T^*(S \cup P) < T$ queda demostrado, dado que $u(S) \leq 0$, $u(P) \leq 0$ y $u(S \cup P) \geq 0$. Si por el contrario $T^*(S \cup P) \geq T$ queda demostrado dado que el juego $c(S)$ es superaditivo y $u(S) = -c(S)$, $u(P) = -c(P)$ y $u(S \cup P) = -c(S \cup P)$.
2. Si $T^*(S) < T$ y $T^*(P) < T$. En este caso, obligatoriamente $T^*(S \cup P) < T$, con lo que queda demostrado, dado que el juego $v(S)$ es superaditivo y $u(S) = v(S)$, $u(P) = v(P)$ y $u(S \cup P) = v(S \cup P)$.
3. Si $T^*(S) \geq T$ y $T^*(P) < T$. En este caso, obligatoriamente $T^*(S \cup P) < T$, luego si $v(S \cup P) \geq v(P)$ queda demostrado. Para demostrarlo, usando la definición del juego $v(S)$, es suficiente probar que $w^k(S \cup P) \leq w^k(P) \forall k = 1, \dots, g$, efectivamente

$$\sum_{i \in N(J_1) \setminus P} e_i \geq \sum_{i \in N(J_1) \setminus (S \cup P)} e_i \Rightarrow w^1(S \cup P) \leq w^1(P).$$

$$w^2(S \cup P) = \min \left\{ \sum_{i \in (N(J_1) \cup N(J_2)) \setminus (S \cup P)} e_i - w^1(S \cup P), F^2 \right\}$$

$$\leq \min \left\{ \sum_{i \in (N(J_1) \cup N(J_2)) \setminus (S \cup P)} e_i - w^1(P), F^2 \right\}$$

$$\leq \min \left\{ \sum_{i \in (N(J_1) \cup N(J_2)) \setminus P} e_i - w^1(P), F^2 \right\} = w^2(P).$$

Siguiendo el mismo razonamiento se concluye que $w^k(S \cup P) \leq w^k(P) \forall k = 1, \dots, g$.

□

Pese a que el juego tiene buenas propiedades a conservar, como el cumplimiento de las propiedades *BPA* y *BSA*, la superaditividad y la existencia de corazón no vacío, el incumplimiento por parte del juego de las propiedades *UIS*, *NMS*, *NAS* y *SE*, llevan a intentar definir otro juego que manteniendo las buenas propiedades que este juego tenía, cumpla las propiedades *UIS*, *NMS*, *NAS* y *SE*.

3.2.2. Un nuevo juego para el problema APERT

En esta sección se define otro juego cooperativo para el problema *APERT*. En este juego, la función característica para un conjunto de actividades representa el adelanto (o retraso) que estas actividades inducen en el proyecto, al igual que en el juego anterior. En este sentido, cualquier regla de reparto para este juego puede ser interpretada como una medida de la influencia en el adelanto (o retraso) del proyecto.

Dado un problema *SPERT*, en Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] se define la holgura de una coalición en un camino π ($cs^B(S, \pi)$, sección 2.2.1). Es importante hacer notar que el concepto de máximo retraso presentado en Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] está definido para un subconjunto de actividades, incluyendo las actividades ficticias. Teniendo en cuenta que el propósito de este trabajo es el reparto del adelanto (o retraso) entre las actividades no ficticias (en otro caso se imputaría coste o beneficio a actividades ficticias), es necesario redefinir este concepto para el caso en el cual los jugadores son sólo las actividades no ficticias. En este nuevo marco, dado una coalición $S \subset N^*$ y un camino π , la máxima holgura que la coalición S puede usar en el camino π (desde un punto de vista optimista), es la holgura

máxima que esa coalición puede usar en el sentido de Bergantiños y Sánchez (2002a)[2] más la holgura del camino π asociada a las actividades ficticias. Formalmente:

Dado un problema *PERT* $(PE, S) \in SPE^n$ y $S \subset N^*$, $S \neq \emptyset$

$$cs(S, \pi) = \begin{cases} cs^B(S, \pi) + (ps_\pi - cs^B(N^*, \pi)) & \text{si } S \cap \pi \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede observar que las actividades de S pueden coger más tiempo extra en esta nueva situación, i.e. $cs(S, \pi) \geq cs^B(S, \pi)$. A continuación se define el tipo de redes *PERT* en el cual estos dos conceptos se igualan. Este tipo de redes son aquellas que no tienen influencia de sus actividades ficticias.

DEFINICIÓN 3.2 Una red *PERT* sin influencia de actividades ficticias es aquella red *PERT* tal que $\forall S \subset N^*$ y $\forall \pi \in PA$, $cs^B(S, \pi) = cs(S, \pi)$.

Teniendo en cuenta que $v(S)$ representa el tiempo que el proyecto se adelanta (o retrasa) debido a las actividades de S , para la definición de $v(\{i\})$ se deben distinguir dos casos:

- Si $\forall \pi \in PA$, $i \in \pi$, es decir la actividad pertenece a todos los caminos de la red *PERT*, el adelanto o retraso de esa actividad se refleja en la duración final del proyecto, por lo que teniendo en cuenta que la holgura de la que dispone una actividad es siempre superior a is_i (es igual si es una red sin influencia de actividades ficticias), $v(\{i\}) \geq -r_i + is_i$.
- Si $\exists \pi \in PA$, $i \notin \pi$, es decir la actividad no pertenece a todos los caminos de la red *PERT*, el adelanto de esa actividad no tiene porque reflejarse en la duración final del proyecto, dado que la duración del proyecto pudiera depender de alguno de los caminos a los cuales esa actividad no pertenece. Sin embargo, el retraso de la actividad si supondrá un retraso en la duración de alguno de los caminos, lo que puede inducir un retraso en la duración final del proyecto. Por todo ello y teniendo en cuenta que la

holgura de la que dispone una actividad es siempre superior a is_i (es igual si es una red sin influencia de actividades ficticias), $v(\{i\}) \geq \min\{-r_i + is_i, 0\}$.

Con todo ello, dado que el planteamiento para la definición del juego es pesimista, lo que supone que el mínimo en todos los caminos representa el peor caso posible para la actividad i , y la consideración de la holgura que la actividad i puede usar cuando existen actividades ficticias en un camino π es $ps_\pi - cs(N^* \setminus \{i\}, \pi)$, el valor de $v(\{i\})$ resulta:

$$v(\{i\}) = \min_{\pi \in PA} \{-r_i \delta_{i\pi} + ps_\pi - cs(N^* \setminus \{i\}, \pi)\},$$

donde $\delta_{i\pi}$ toma valor 1, si $i \in \pi$ y 0, en otro caso.

En un caso general, dado S con $|S| > 1$ y un camino π , se supondrá que las actividades pertenecientes a $N^* \setminus S$ emplean su máxima holgura en el camino π en el sentido descrito anteriormente, i.e. $cs(N^* \setminus S, \pi)$. Si sólo se tiene en cuenta el camino π , las actividades de S pueden emplear como mucho $ps_\pi - cs(N^* \setminus S, \pi)$ que representa la generalización natural de la holgura independiente dada para un jugador. En conclusión, el adelanto inducido por S en el camino π es $\sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + (ps_\pi - cs(N^* \setminus S, \pi))$. Teniendo en cuenta nuevamente el planteamiento pesimista para la definición del juego, el mínimo en todos los caminos representa el peor caso posible para el conjunto de actividades de S . Formalmente:

DEFINICIÓN 3.3 *Dado un problema APERT (PE, e, b, B) con $B(x) = x, \forall x \in \mathfrak{R}$, se define el juego de proyecto TU asociado como $(N^*, v_{(PE,R)})$, donde $N^* = \{1, \dots, n^*\}$,*

$$v_{(PE,R)}(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + (ps_\pi - cs(N^* \setminus S, \pi)) \right\} \quad \forall S \subset N^*, \quad S \neq \emptyset.$$

El valor de la coalición, $v_{(PE,R)}(S)$, puede ser interpretado como el máximo adelanto (o retraso) que estas actividades inducen en el proyecto, una vez añadido el tiempo extra que las actividades en S pueden emplear teniendo en cuenta que las actividades restantes emplean

su máximo tiempo extra. Cuando no exista ambigüedad respecto al juego, se notará por v en vez de $v_{(PE,R)}$.

Al igual que $cs^B(S, \pi)$ tiene en cuenta las actividades ficticias, el valor de $is^B(S, \pi)$, definido en el capítulo anterior para expresar de forma alternativa el valor de $cs^B(S, \pi)$, también las tiene en cuenta. Por ello, se debe redefinir la mínima holgura que las actividades de S pueden usar en el camino π sin influencia de actividades ficticias. Formalmente: Dado un problema *PERT* $(PE, S) \in SPE^n$ y $S \subset N^*$, $S \neq \emptyset$,

$$is(S, \pi) = \begin{cases} is^B(S \cup F, \pi) - is^B(F, \pi) & \text{si } S \cap \pi \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que el cálculo del adelanto inducido por S en el camino π , necesario para computar el valor de $v(S)$, es no polinomial si se realiza mediante la definición 3.3, dado que el computo es en función de $cs(S, \pi)$ y la complejidad según su definición es no polinomial. La siguiente proposición muestra una definición alternativa del juego, de tal forma que el cálculo del adelanto inducido por S en el camino π es computable en tiempo polinomial. Esto es así, dado que $is(S, \pi)$ se define en función de $is^B(S \cap F, \pi)$ y $is^B(F, \pi)$, valores computables en tiempo polinomial.

PROPOSICIÓN 3.3 Dado el juego de proyecto TU , $(N^*, v_{(PE,R)})$,

$$v_{(PE,R)}(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + is(S, \pi) \right\}, \quad \forall S \subset N^*$$

DEMOSTRACIÓN Es suficiente probar que $cs(N^* \setminus S, \pi) = ps_\pi - is(S, \pi)$

- Si $S \cap \pi = \emptyset$ eso implica que $cs^B(N^* \setminus S, \pi) = cs^B(N^*, \pi)$ y que $is(S, \pi) = 0$

entonces

$$cs(N^* \setminus S, \pi) = cs^B(N^* \setminus S, \pi) + (ps_\pi - cs^B(N^*, \pi)) = ps_\pi - is(S, \pi).$$

- Si $S \cap \pi = \emptyset$ y dado que $cs^B(N \setminus S, \pi) = ps_\pi - is^B(S, \pi)$ entonces

$$cs(N^* \setminus S, \pi) = cs^B(N^* \setminus S, \pi) + (ps_\pi - cs^B(N^*, \pi)) =$$

$$ps_\pi - is^B(S \cup F, \pi) + (ps_\pi - (ps_\pi - is^B(F, \pi))) = ps_\pi - is^B(S \cup F, \pi) + is^B(F, \pi)$$

$$= ps_\pi - (is^B(S \cup F, \pi) - is^B(F, \pi)) = ps_\pi - is(S, \pi).$$

□

OBSERVACIÓN 3.1 *Un caso especial para el juego aquí definido es aquella situación en la que todos los jugadores (actividades no ficticias en la red PERT) son críticos (este caso es especialmente relevante cuando la holgura de las actividades ha sido previamente repartida como se describe en el capítulo 2). En esta situación, el juego puede ser expresado como:*

$$v_{(PE,R)}(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \delta_{S,\pi} ps_\pi \right\}.$$

Donde $\delta_{S,\pi} = 1$ si, $N^* \cap \pi \subset S$ y 0, en otro caso.

En esta situación, para cualquier coalición S , se puede calcular, en tiempo polinomial, el valor de $v(S)$, $\forall S \subset N^*$, mediante el algoritmo *VAPERT*. Este algoritmo usa otro algoritmo definido en este trabajo que se pasa a exponer a continuación.

El algoritmo que se introduce, permite calcular el tiempo de finalización de una red *PERT*

sujeto a una condición. Más concretamente, calcula la duración máxima de un camino de entre los caminos que cumplen que alguna de sus actividades pertenezcan a un conjunto de actividades dadas. Formalmente:

$$\text{Dado } H \subset N, \quad T(H) = \max_{\pi \in PA, \pi \cap H \neq \emptyset} d_\pi$$

Para la definición del algoritmo se introduce las siguientes definiciones:

- δ_i indica si la actividad i pertenece o no a H . Formalmente:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in H \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $\delta_x^{sinconf}$ indica si existe algún camino entre el nodo inicial y el nodo x , tal que no cumpla la condición, es decir, que no pase por ninguna actividad perteneciente a H . Formalmente:

$$\delta_x^{sinconf} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in PreIm(x), \delta_{x_{i,1}}^{sinconf}(1 - \delta_i) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- δ_x^{conf} indica si existe algún camino entre el nodo inicial y el nodo x , tal que cumpla la condición, es decir, que pase por alguna actividad perteneciente a H . Formalmente:

$$\delta_x^{conf} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in PreIm(x), \delta_{x_{i,1}}^{conf} = 1 \quad \text{ó} \quad \delta_{x_{i,1}}^{sinconf} \delta_i = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $T_x^{sinconf}$ indica la duración máxima de los caminos entre el nodo inicial y el nodo x , de entre los que cumplen que ninguna actividad del camino perteneciente a H . Si no

existe dicho camino toma valor 0. Formalmente:

$$T_x^{sinconf} = \max_{i \in PredIm(x)} \left\{ \delta_{x_i,1}^{sinconf} (1 - \delta_i) (T_{x_i,1}^{sinconf} + d_i) \right\}.$$

- T_x^{conf} indica la duración máxima de los caminos entre el nodo inicial y el nodo x , de entre los que cumplen que alguna actividad del camino perteneciente a H . Si no existe dicho camino toma valor 0. Formalmente:

$$T_x^{conf} = \max_{i \in PredIm(x)} \left\{ \delta_{x_i,1}^{conf} (T_{x_i,1}^{conf} + d_i) , \delta_{x_i,1}^{sinconf} \delta_i (T_{x_i,1}^{sinconf} + d_i) \right\}.$$

Con todos estos conceptos, se pasa a definir el algoritmo, a verificar que calcula lo deseado y a presentar un ejemplo del mismo.

Algoritmo PERT2 (G : Grafo PERT; $H \subset N^*$)

Begin

Asignar $\delta_{x_b}^{conf} := 0$; $\delta_{x_b}^{sinconf} := 1$; $T_{x_b}^{conf} := 0$ y $T_{x_b}^{sinconf} := 0$.

Mientras $\exists x \in X$ tal que x no este valorado

Begin

$\forall x \in X$ tal que $\forall i \in PredIm(x)$, $x_{i,1}$ este valorado

Begin

$$\delta_x^{sinconf} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in PredIm(x) , \delta_{x_{i,1}}^{sinconf}(1 - \delta_i) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\delta_x^{conf} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists i \in PredIm(x) , \delta_{x_{i,1}}^{conf} = 1 \quad \text{ó} \quad \delta_{x_{i,1}}^{sinconf} \delta_i = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$T_x^{sinconf} = \max_{i \in PredIm(x)} \left\{ \delta_{x_{i,1}}^{sinconf} (1 - \delta_i) (T_{x_{i,1}}^{sinconf} + d_i) \right\}.$$

$$T_x^{conf} = \max_{i \in PredIm(x)} \left\{ \delta_{x_{i,1}}^{conf} (T_{x_{i,1}}^{conf} + d_i) , \delta_{x_{i,1}}^{sinconf} \delta_i (T_{x_{i,1}}^{sinconf} + d_i) \right\}.$$

End

End

End

PROPOSICIÓN 3.4 El valor de $T_{x_e}^{conf} = \max_{\pi \in PA , \pi \cap H \neq \emptyset} d_\pi$.

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa teniendo en cuenta las definiciones de $\delta_{x_b}^{conf}$, $\delta_{x_b}^{sinconf}$, $T_{x_b}^{conf}$ y $T_{x_b}^{sinconf}$ y que x_e es el único nodo final de la red PERT. \square

EJEMPLO 3.4 Dado el proyecto PERT, $PE = (N, PA, D)$, donde $N = \{A, B, C, D, E, F\}$;

$PA = \{(A, B, F), (A, C, F), (D, E, F)\}$; $D = (2, 2, 4, 2, 3, 2)$, encontrar el camino de máxima duración al que pertenece alguna de las siguientes actividades $H = \{B, D, E\}$.

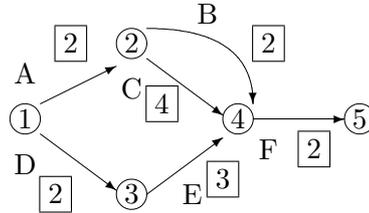


Figura 3.5: Red del ejemplo 3.4.

El valor buscado es T_5^{conf} . En esta situación, $\delta_A = \delta_C = \delta_F = 0$ y $\delta_B = \delta_D = \delta_E = 1$ con lo que:

- $\delta_1^{conf} = 0$; $\delta_1^{sinconf} = 1$; $T_1^{conf} = 0$; $T_1^{sinconf} = 0$;
- $\delta_2^{conf} = 0$; $\delta_2^{sinconf} = 1$; $T_2^{conf} = 0$; $T_2^{sinconf} = \text{máx}\{0 + 2\} = 2$;
- $\delta_3^{conf} = 1$; $\delta_3^{sinconf} = 0$; $T_3^{conf} = \text{máx}\{0 + 2\} = 2$; $T_3^{sinconf} = 0$;
- $\delta_4^{conf} = 1$; $\delta_4^{sinconf} = 1$; $T_4^{conf} = \text{máx}\{2 + 2, 2 + 3\} = 5$; $T_4^{sinconf} = \text{máx}\{2 + 4\} = 6$;
- $\delta_5^{conf} = 1$; $\delta_5^{sinconf} = 1$; $T_5^{conf} = \text{máx}\{5 + 2\} = 7$; $T_5^{sinconf} = \text{máx}\{6 + 2\} = 8$;

Una vez introducido el algoritmo *PERT2*, se presenta el algoritmo para el cálculo del valor del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ cuando la red es crítica.

Algoritmo VAPERT (G : Grafo PERT; $S \subset N^*$)

Begin

Asignar una duración $d_i > 0$ tal que $\forall i \in N^*$, $as_i = 0$

Calcular el tiempo del camino crítico en el PERT (G, D^*) ,

donde $d_i^* = -M$ si $i \in N^* \setminus S$, $d_i^* = 0$ si $i \in F$, $d_i^* = d_i + r_i$ si $i \in S$
y M es un valor suficientemente grande: T^*

Calcular el tiempo del camino crítico en el PERT (G, R^*) ,

donde $r_i^* = r_i$ si $i \in S$ y $r_i^* = 0$ en otro caso, con la condición de
que pase por alguna de las actividades de $N^* \setminus S$: C^*

$$v(S) = \min\{T - T^*, -C^*\}$$

End

PROPOSICIÓN 3.5 *El valor obtenido mediante el algoritmo VAPERT calcula el valor del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ para la coalición S .*

DEMOSTRACIÓN Teniendo en cuenta que $-C^* = \min_{\pi \in PA, \pi \cap (N^* \setminus S) \neq \emptyset} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i \right\}$, se distinguen dos casos:

- Si T^* depende del valor de M , implica que no existe camino tal que $N^* \cap \pi \subset S$, dado que se busca el camino de mayor duración y $-M$ es un número suficientemente pequeño. En esta situación $\delta_{S,\pi} = 0 \quad \forall \pi \in PA$ y $T - T^*$ es un número suficientemente grande, con lo que:

$$v(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i \right\} = -C^*$$

- Si T^* no depende del valor de M , implica que existe algún camino tal que $N^* \cap \pi \subset S$. En esta situación $T - T^* = \min_{\pi \in PA, N^* \cap \pi \subset S} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + ps_\pi \right\}$, es decir el mínimo entre

todos los caminos en los que $\delta_{S,\pi} = 1$, con lo que:

$$v(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \delta_{S,\pi} p s_\pi \right\} = \min_{\pi \in PA} \left\{ \min_{\pi \cap (N^* \setminus S) = \emptyset} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + p s_\pi \right\} \right\},$$

$$\min_{\pi \in PA, \pi \cap (N^* \setminus S) \neq \emptyset} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i \right\} = \min\{T - T^*, -C^*\}.$$

□

Una vez definido el juego y el caso especial en que la red *PERT* es crítica, se debe estudiar el cumplimiento de las propiedades en el juego general.

PROPOSICIÓN 3.6 *El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ es superaditivo.*

DEMOSTRACIÓN Dados $S, T \subset N$ tal que $S \cap T = \emptyset$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \Leftrightarrow \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap (S \cup T)} -r_i + i s(S \cup T, \pi) \right\} \geq$$

$$\min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + i s(S, \pi) \right\} + \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap T} -r_i + i s(T, \pi) \right\}.$$

Si lo cumple para todo $\pi \in PA$, queda demostrado. Efectivamente $\forall \pi \in PA$ es cierto que $i s(A \cup B, \pi) \geq i s(A, \pi) + i s(B, \pi)$ cuando $B \cap A = \emptyset$, entonces

$$\sum_{i \in \pi \cap (S \cup T)} -r_i + i s(S \cup T, \pi) \geq \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + i s(S, \pi) + \sum_{i \in \pi \cap T} -r_i + i s(T, \pi).$$

□

PROPOSICIÓN 3.7 *El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ tiene corazón no vacío.*

DEMOSTRACIÓN Se probará que el vector y^1 definido como:

$$y_i^1 = \begin{cases} -r_i + ss_i(\pi) & \text{si } i \in \pi \cap N^* \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo π cualquier camino crítico en el PERT (G, D^0) , pertenece al corazón.

- Por un lado, si $N^* \cap \pi \subset S$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in \pi} ss_i(\pi) = ps_\pi$

$$v(S) \leq \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + is(S, \pi) = \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + ps_\pi = \sum_{i \in \pi \cap S} y_i^1 = \sum_{i \in S} y_i^1.$$

- Por el otro lado si $N^* \cap \pi \not\subset S$

$$v(S) \leq \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + is(S, \pi) = \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + is^B(S \cup F, \pi) - is^B(F, \pi)$$

$$\leq \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \sum_{i \in \pi \cap S} ss_i(\pi) = \sum_{i \in \pi \cap S} y_i^1 = \sum_{i \in S} y_i^1$$

Además el reparto es eficiente

$$\sum_{i \in N^*} y_i^1 = \sum_{i \in \pi \cap N^*} y_i^1 = \sum_{i \in \pi} (-r_i + ss_i) = T - T^0.$$

De una forma similar se puede probar que el vector

$$y_i^2 = \begin{cases} -r_i + fs_i(\pi) & \text{si } i \in \pi \cap N^* \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo π cualquier camino crítico en el $PERT(G, R)$, pertenece al corazón. □

PROPOSICIÓN 3.8 *El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ satisface la propiedad UIS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa. □

PROPOSICIÓN 3.9 *El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ satisface la propiedad SE si el $PERT$ es sin influencia de actividades ficticias.*

DEMOSTRACIÓN Para todo $\pi \in PA$, π puede ser expresado como $\{\pi_1, \pi_2\}$, π_1, π_2 siendo caminos de $PA(x_b, x)$ y $PA(x, x_e)$ respectivamente. Entonces, dados $S \subset N^1$, $T \subset N^2$ y teniendo en cuenta que el $PERT$ es sin influencia de actividades ficticias

$$\sum_{j \in \pi \cap (S \cup T)} -r_j + is(S \cup T, \pi) = \sum_{j \in \pi_1 \cap S} -r_j + is(S, \pi_1) + \sum_{j \in \pi_2 \cap T} -r_j + is(T, \pi_2). \quad (3.1)$$

Siendo π el camino en el cual el mínimo para la coalición $S \cup T$ es alcanzada, entonces siguiendo la ecuación 3.1, se prueba que $v(S \cup T) \geq v^1(S) + v^2(T)$.

Dados π_1, π_2 los caminos en los cuales el mínimo de las coaliciones S y T son alcanzadas respectivamente, entonces por la ecuación 3.1 se demuestra que $v(S \cup T) \leq v^1(S) + v^2(T)$.

□

COROLARIO 3.1 *Sea $i \in N^*$ un jugador tal que $\forall \pi \in PA, i \in \pi$, entonces el jugador i es pelele en el juego $(N^*, v_{(PE,R)})$, si el $PERT$ es sin influencia de actividades ficticias.*

COROLARIO 3.2 *Si $PA = \{\pi\}$, entonces el juego $(N^*, v_{(PE,R)})$ es aditivo.*

En el siguiente ejemplo se muestra una situación en la que la propiedad SE no se cumple por ser una red $PERT$ con influencia de actividades ficticias..

EJEMPLO 3.5 Dado el juego de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$, donde $N = \{A, B, C, D, E, F\}$; $PA = \{(A, C, F), (D, B, C, F), (D, E, F)\}$; $D = (3, 0, 1, 1, 3, 2)$ y $R = \{0, 0, 4, 4, 0, 2\}$ y teniendo en cuenta que la actividad B es ficticia, se tiene

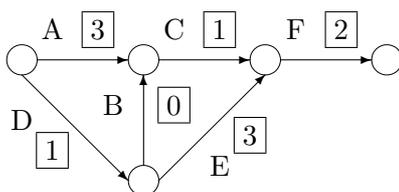


Figura 3.6: Red del ejemplo 3.8.

En el juego global, las actividades D , C y F disponen de 2 unidades de holgura que sólo pueden usar de forma conjunta en el camino (D, B, C, F) , sin embargo, en el subjuego $N^1 = \{A, B, C, D, E\}$; $P^1 = \{(A, C), (D, B, C), (D, E)\}$; $D^1 = (3, 0, 1, 1, 3)$ y $R^1 = \{0, 0, 4, 4, 0\}$, el uso de las dos unidades de holgura pasa solamente a las actividades D y C , eliminando de su posible uso a la actividad F .

PROPOSICIÓN 3.10 El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ satisface la propiedad BSA.

DEMOSTRACIÓN Dadas las actividades simétricas $i, j \in N^*$, se supone sin pérdida de generalidad que $i \in Pred(x_{j,1})$, es suficiente con demostrar que $cs^B(N^* \setminus (S \cup \{i\}), \pi) = cs^B(N^* \setminus (S \cup \{j\}), \pi) \forall S \subset N^* \setminus \{i, j\}$ y $\forall \pi \in PA$.

Sea $y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_{|N|})$ el camino en el cual el máximo para la coalición $N^* \setminus (S \cup \{i\})$ es alcanzada en el cálculo de $cs^B(N \setminus (S \cup \{i\}), \pi)$, entonces existe un vector $y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_i, \dots, y_{|N|})$, obtenido reemplazando las posiciones i y j , pertenece a $F(PE, PS)$ porque i y j son actividades simétricas. Teniendo en cuenta esto, se tiene que $cs^B(N^* \setminus (S \cup \{i\}), \pi) \leq cs^B(N^* \setminus (S \cup \{j\}), \pi) \forall S \subset (N^* \setminus \{i, j\})$ y $\forall \pi \in PA$.

De una forma similar, comenzando con el camino en el cual el máximo para la coalición $N^* \setminus (S \cup \{j\})$ se alcanza, se tiene que $cs^B(N^* \setminus (S \cup \{i\}), \pi) \geq cs^B(N^* \setminus (S \cup \{j\}), \pi) \forall S \subset (N^* \setminus \{i, j\})$ y $\forall \pi \in PA$. \square

OBSERVACIÓN 3.2 *Teniendo en cuenta que $\{k\} \cup \{N^* \setminus M^*\}$ son actividades simétricas posicionales en la red PERT y la proposición 3.10, el juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ satisface las propiedades NMS y NAS.*

PROPOSICIÓN 3.11 *El juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ satisface la propiedad BPA.*

DEMOSTRACIÓN Sea $i, j \in N^*$ dos actividades paralelas en la red PERT, entonces $is(S \cup \{i\}, \pi) = is(S \cup \{j\}, \pi') \forall S \subset N^* \setminus \{i, j\}$ donde $\pi' = \{\pi \setminus \{i\} \cup \{j\}\}$. Sea π el camino en el cual el mínimo de la coalición $S \cup \{i\}$ es alcanzada, entonces:

- Si $i \notin \pi$ y $j \notin \pi$, entonces: $v(S \cup \{i\}) = \sum_{k \in \pi \cap (S \cup \{i\})} -r_k + is(S \cup \{i\}, \pi) = \sum_{k \in \pi \cap (S \cup \{j\})} -r_k + is(S \cup \{j\}, \pi) \geq v(S \cup \{j\})$.
- Si $i \in \pi \Rightarrow j \notin \pi$, sea π' el camino completo obtenido como $\pi' = \{\pi \setminus \{i\} \cup \{j\}\}$, entonces: $v(S \cup \{i\}) = \sum_{k \in \pi \cap (S \cup \{i\})} -r_k + is(S \cup \{i\}, \pi) = \sum_{k \in \pi' \cap (S \cup \{j\})} -r_k + is(S \cup \{j\}, \pi') \geq v(S \cup \{j\})$.
- If $j \in \pi \Rightarrow i \notin \pi$, sea π' el camino completo obtenido como $\pi' = \{\pi \setminus \{j\} \cup \{i\}\}$, entonces: $v(S \cup \{i\}) = \sum_{k \in \pi \cap (S \cup \{i\})} -r_k + is(S \cup \{i\}, \pi) = \sum_{k \in \pi' \cap (S \cup \{j\})} -r_k + is(S \cup \{j\}, \pi') \geq v(S \cup \{j\})$.

La otra inecuación puede ser probada de una forma similar tomando el camino en el cual el mínimo de la coalición $S \cup \{j\}$ es alcanzado. \square

Así pues, en esta sección se ha definido un juego, para el problema APERT, que es superaditivo, tiene corazón no vacío, cumple las propiedades BSA, BPA, SE, NMS, NAS y UIS y es computable en tiempo polinomial el adelanto inducido por S en el camino π . Si todas las actividades no ficticias son críticas, es computable en tiempo polinomial el valor de $v(S)$.

3.3. Reglas en una red PERT general

Una vez analizadas una serie de propiedades para el juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ que representa el adelanto que las actividades de S pueden garantizar en el proyecto, en esta sección se definen y estudian reglas de reparto para el problema *APERT*.

Los conceptos de solución en la teoría de juegos cooperativos pueden ser unipuntuales y conjuntistas. Dentro de los unipuntuales, en este trabajo se ha utilizado el valor de Shapley por sus diversas propiedades. Dentro de las conjuntistas se han encontrado dos soluciones que pertenecen al corazón del juego.

En esta sección se analizan las bondades de estas tres posibles reglas de reparto para el juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ y para el problema *APERT*. Formalmente se definen las siguientes tres reglas:

1. El valor de Shapley del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$,

$$Sh_i(N^*, v) = \sum_{T \subset N, i \in T} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus \{i\})], \quad \forall i \in N^*.$$

2. El vector f^1 que pertenece al corazón y se obtiene repartiendo el adelanto (retraso) entre las actividades no ficticias críticas en la ejecución del proyecto, considerando que la primera actividad que puede disponer de la holgura, es la actividad que dispone de ella.

$$f_i^1 = \sum_{\pi \in PA_{crit}} \frac{\delta_{i\pi}}{|PA_{crit}|} (-r_i + ss_i(\pi)), \quad \forall i \in N^*.$$

Donde $PA_{crit} = \{\pi \in PA, \sum_{j \in \pi} d_j^0 = T^0\}$ y $\delta_{i,\pi}$ es 1, si $i \in \pi$ y 0, en otro caso.

3. El vector f^2 que pertenece al corazón y se obtiene repartiendo el adelanto (retraso) entre las actividades no ficticias críticas en la ejecución del proyecto, considerando que

la última actividad que puede disponer de la holgura, es la actividad que dispone de ella.

$$f_i^2 = \sum_{\pi \in PA_{crit}} \frac{\delta_{i\pi}}{|PA_{crit}|} (-r_i + fs_i(\pi)), \quad \forall i \in N^*.$$

Una vez definidas las soluciones propuestas, se pasa al estudio de las distintas propiedades del problema APERT.

PROPOSICIÓN 3.12 *El valor de Shapley del juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$, cumple las propiedades BSA, BPA, UIS, UPS y SE cuando la red PERT es independiente de actividades ficticias, no cumple las propiedades NMS y NAS y no pertenece al corazón del juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$.*

DEMOSTRACIÓN

- Las propiedades BSA, BPA, UIS y SE cuando la red PERT es independiente de actividades ficticias, son directas teniendo en cuenta las propiedades con idénticos nombres definidas para el juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$ y en el caso de la propiedad de separabilidad la propiedad de aditividad del valor de Shapley.
- Para probar la propiedad UPS es suficiente probar que $\forall S \subset N^* \setminus \{i\}, v(S \cup \{i\}) - v(S) < 0$. Sea π el camino donde se alcanza el mínimo para la coalición S ,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq \sum_{j \in \pi \cap (S \cup \{i\})} -r_j + is(S \cup \{i\}, \pi) - \sum_{j \in \pi \cap S} -r_j + is(S, \pi)$$

$$= -r_i + is(S \cup \{i\}, \pi) - is(S, \pi) \leq -r_i + is(S \cup \{i\}, \pi) \leq -r_i + ps_\pi$$

$$< - \max_{\pi \in PA, i \in \pi} ps_\pi + ps_\pi \leq 0.$$

- En el ejemplo 3.10 se observa el incumplimiento de las propiedades *NMS* y *NAS*.
- La no pertenencia al corazón se puede ver en el ejemplo 3.10 con subdivisión, dado que en este ejemplo

$$v_{(PE,R)}(A, B) = -1 > Sh_A(N, v_{(PE,R)}) + Sh_B(N, v_{(PE,R)}) = -\frac{7}{6}.$$

□

PROPOSICIÓN 3.13 *Las reglas f^1 y f^2 cumplen las propiedades BPA, UIS, NMS, NAS y SE, no cumple las propiedades BSA y UPS y pertenecen al corazón del juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$.*

DEMOSTRACIÓN

- Si *UIS*: Es directo teniendo en cuenta que $\forall \pi \in PA$ y $\forall i \in N^*$, $\min\{ss_i(\pi), fs_i(\pi)\} \geq is_i$.
- Si *BPA*: Es directo teniendo en cuenta que, si $i, j \in N^*$ son actividades paralelas, $\forall \pi \in PA$, $ss_i(\pi) = ss_j(\pi)$ y $fs_i(\pi) = fs_j(\pi)$.
- Si *NMS* y *NAS*: Es directo teniendo en cuenta que, $\forall \pi \in PA$, $ss_k(\pi) = ss_k(\pi^*) + \sum_{j \in N \setminus M} ss_j(\pi^*)$, $fs_k(\pi) = fs_k(\pi^*) + \sum_{j \in N \setminus M} fs_j(\pi^*)$ siendo $\pi = \pi^*|_M$ y $\forall i \in M \setminus \{k\}$, $ss_i(\pi) = ss_i(\pi^*)$ y $fs_i(\pi) = fs_i(\pi^*)$.
- Si *SE*: Es directo teniendo en cuenta que, $\forall \pi \in PA$ y $\forall i \in \pi$, $ss_i(\pi) = ss_i(\pi^1)$ si $i \in \pi^1$, $ss_i(\pi) = ss_i(\pi^2)$ si $i \in \pi^2$, $fs_i(\pi) = fs_i(\pi^1)$ si $i \in \pi^1$ y $fs_i(\pi) = fs_i(\pi^2)$ si $i \in \pi^2$ donde $\pi = \pi^1 \cup \pi^2$.
- No *BSA*:

EJEMPLO 3.6 *Dado el siguiente problema APERT (PE, b, e, B) , donde $N = \{A, B, C\}$; $PA = \{(A, B), (C)\}$; $D = (1, 1, 3)$; $R = (1, 1, 0)$ y $B(x) = x$, se puede ver que las actividades A y B son simétricas y sin embargo $f_A^1 = 0$, $f_B^1 = -1$, $f_A^2 = -1$ y $f_B^2 = 0$.*

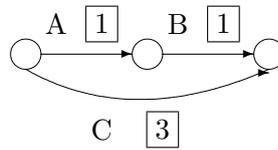


Figura 3.7: Red del ejemplo 3.6.

- No *UPS*:

EJEMPLO 3.7 Dado el siguiente problema APERT (PE, b, e, B) , donde $N = \{A, B\}$; $PA = \{(A), (B)\}$; $D = (2, 2)$; $R = (1, 2)$ y $B(x) = x$, se puede ver que $-1 < -\max_{\pi \in PA} \sum_{A \in \pi} ps_{\pi} = 0$ y que $f_A^1 = f_A^2 = 0$.

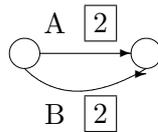


Figura 3.8: Red del ejemplo 3.7.

- La pertenencia al corazón es consecuencia directa de la demostración de la proposición 3.7.

□

3.4. Reglas en una red PERT crítica

Una mención especial se merecen las redes *PERT* críticas (una red *PERT* es crítica cuando $\forall i \in N^*, as_i = 0$). Toda red puede ser transformarla en una red *PERT* crítica, añadiendo a la duración estimada el resultado obtenido después de aplicar sobre la red, una

regla que cumpla la propiedad *PO* en el problema *SPERT* donde se reparte en cada camino la holgura del camino en la red *PERT*, $S = PS$.

En esta subclase de problemas *APERT*, se pueden usar las reglas definidas en la sección anterior y presentan las mismas virtudes y defectos. No obstante, es posible encontrar una regla únicamente aplicable a esta clase de redes que mejora en algún aspecto las reglas anteriores.

Esta regla que se denota por f^3 , pertenece al corazón del juego, pero a diferencia de f^1 y f^2 si puede cumple la propiedad *BSA*, por lo que el investigador no debe decidir si es la primera o la última actividad la que puede disponer de la holgura.

DEFINICIÓN 3.4 Dado un problema *APERT* (PE, b, e, B) donde $B(x) = x$, $b_i = \max_{j \in \text{PredIm}(x_{i,1})} e_j$ y *PE* es una red *PERT* crítica

$$f_i^3 = \sum_{\pi \in PA_{crit}} \frac{\delta_{i\pi}}{|PA_{crit}|} (-r_i + s_i(\pi)),$$

para todo $i \in N^*$, donde $PA_{crit} = \{\pi \in PA, \sum_{j \in \pi} d_j^0 = T^0\}$, $\delta_{i,\pi}$ es 1, si $i \in \pi$ y 0, en otro caso y $s_i(\pi) = w_i(\pi)ps_\pi$ tal que $w_i(\pi) \geq 0 \forall i \in N^*, \forall \pi \in PA_{crit}$ y $\sum_{i \in \pi \cap N^*} w_i(\pi) = 1, \forall \pi \in PA_{crit}$.

Esta regla reparte el adelanto (retraso) entre las actividades no ficticias críticas en la ejecución del proyecto, repartiendo la posible holgura del camino (holgura que sólo podía ser usada por las actividades ficticias) en función de unos pesos determinados con anterioridad.

Si estos pesos cumplen aditividad en el sentido de las propiedades *NMS* y *NAS* y son tal que $w_i(\pi) = w_j(\pi), \forall \pi \in PA_{crit}$, si i y j son actividades simétricas o paralelas, entonces la regla presenta buenas propiedades.

PROPOSICIÓN 3.14 La regla f^3 aplicado sobre redes *PERT* críticas cumple *UIS*, *NMS* y *NAS* si los pesos son aditivos, *SE* si la red *PERT* es independiente de actividades ficticias,

BSA y BPA si $\forall \pi \in PA_{crit}$, $w_i(\pi) = w_j(\pi)$, si i y j son actividades simétricas o paralelas, no cumple *UPS* y pertenece al corazón del juego de proyectos $(N^*, v_{(PE,R)})$.

DEMOSTRACIÓN

- Con argumentos similares a los usados en la proposición 3.13 cumple las propiedades *UIS*, *NMS* y *NAS* si los pesos son aditivos, *BSA* y *BPA* si $\forall \pi \in PA_{crit}$, $w_i(\pi) = w_j(\pi)$, si i y j son actividades simétricas o paralelas y no cumple *UPS*.
- Si la red *PERT* es independiente de actividades ficticias, $ps_\pi = 0$, $\forall \pi \in PA_{crit}$, lo que implica el cumplimiento de *SE*.
- Para ver la pertenencia al corazón, se debe tener en cuenta que en redes *PERT* críticas

$$v_{(PE,R)}(S) = \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \delta_{S,\pi} ps_\pi \right\}.$$

Se puede ver que $\forall \pi \in PA_{crit}$

$$\sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \sum_{i \in \pi \cap S} s_i(\pi) \geq \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \delta_{S,\pi} ps_\pi \geq \min_{\pi \in PA} \left\{ \sum_{i \in \pi \cap S} -r_i + \delta_{S,\pi} ps_\pi \right\} = v(S).$$

Entonces

$$\sum_{\pi \in PA_{crit}} \frac{\delta_{i\pi}}{|PA_{crit}|} \sum_{i \in \pi \cap S} (-r_i + s_i(\pi)) \geq v(S) \Rightarrow \sum_{i \in S} f_i^3 \geq v(S).$$

Evidentemente, la regla f^3 es eficiente.

□

Siguiendo la metodología expresada en el capítulo dos de este trabajo, los pesos que en este trabajo se recomiendan son, $w_i^1(\pi) = \frac{d_i}{\sum_{j \in \pi} d_j}$ si no se dispone de información sobre la

variabilidad de la red o $w_i^2(\pi) = \frac{b_i - a_i}{\sum_{j \in \pi} b_j - a_j}$ si se dispone de información.

Por todo lo expuesto en esta sección, una forma natural de proceder para el reparto del adelanto (retraso) en una red *PERT* es el siguiente:

1. Se calcula la solución del problema *SPERT* con $S = PS$, con una regla que cumpla la propiedad *PO*, (x_i) .
2. Se supone que una actividad dispone de su duración estimada en un principio más la holgura asignada en el problema *SPERT*, luego la nueva duración estimada para cada actividad es $d_i + x_i$.
3. Se calcula la solución del problema *APERT* con las nuevas duraciones (lo que implica que el *PERT* es crítico) con alguna regla definida cuando la red *PERT* es crítica.

Esta forma de proceder, le permite al investigador definir de forma libre la cantidad de holgura que cada actividad dispone a la hora de enfrentar el reparto del adelanto o retraso que se produzca en la red *PERT*.

3.5. Comparación

En esta sección se presenta desde distintos puntos de vista la comparación de las reglas presentadas a lo largo de este capítulo. No se presentan las posibles soluciones derivadas del juego de Estévez-Fernández et al., dado que al no cumplir este juego las propiedades *UIS*, *NMS*, *NAS* y *SE* es fácil verificar que las soluciones que del juego se derivan incumplirán estas mismas propiedades. Los tres enfoques realizados son:

- En función de las propiedades.
- En función de la complejidad.
- Mediante ejemplos significativos.

La notación usada es:

- Sh para el valor de Shapley del juego original.
- Sh^d para el valor de Shapley del juego resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- Sh^r para el valor de Shapley del juego resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
- f^1 para la regla f^1 del problema original.
- $f^{1,d}$ para la regla f^1 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- $f^{1,r}$ para la regla f^1 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
- f^2 para la regla f^2 del problema original.
- $f^{2,d}$ para la regla f^2 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- $f^{2,r}$ para la regla f^2 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
- $f^{3,d}$ para la regla f^3 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- $f^{3,r}$ para la regla f^3 del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.

En función de esta comparativa se concluye que se debe primero convertir el *PERT* en crítico (por lo visto en el capítulo anterior usando Q^w con $w_i = d_i$ o $w_i = b_i - a_i$ o Q^c con $c_i = b_i - d_i$) y posteriormente aplicar el valor de Shapley si se desea una solución que cumpla *UPS* o f^3 si

se desea una solución que no se altere ante las subdivisiones. Notar que el reparto realizado por la regla Q^w con $w_i = b_i - a_i$ es el mismo que resulta de aplicar la regla Q^c con $c_i = b_i - d_i$ en todos los ejemplos que se verán a continuación.

3.5.1. En función de las propiedades

Con anterioridad, en las proposiciones 3.12, 3.13 y 3.14, se ha estudiado el cumplimiento o incumplimiento de cada una de las propiedades para cada una de las reglas, con lo que esta sección se limita a resumir en la tabla 3.1, toda esa información.

Cuadro 3.1: Cumplimiento de propiedades

	$Sh; Sh^d; Sh^r$	$f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}$	$f^{3,d}; f^{3,r}$
BSA	✓		✓
BPA	✓	✓	✓
UIS	✓	✓	✓
UPS	✓		
SE	✓	✓	✓
NMS		✓	✓
NAS		✓	✓
Core		✓	✓

3.5.2. En función de la complejidad.

El cálculo del valor de Shapley es de complejidad exponencial, dado que la suma a realizar es en los subconjuntos de las actividades (que son 2^n). Además, para un problema general, se deben enumerar los caminos para poder calcular el mínimo, lo que es nuevamente de complejidad exponencial. Se debe destacar que en el caso de ser una red *PERT* crítica, esta necesidad de explicitar todos los caminos, se elimina con la utilización del algoritmo *VAPERT*. En general, se puede decir que el valor de Shapley tiene una complejidad de cálculo muy alta.

La complejidad en el cálculo de las soluciones f^1 , f^2 y f^3 radica en la enumeración de los caminos críticos en el *PERT* ejecutado. Si bien esta enumeración es en el peor de los casos de complejidad exponencial, en media la complejidad es notablemente inferior, no muchos caminos tienen exactamente la misma duración. Por ello, se puede decir que las reglas f^1 , f^2 y f^3 tienen una complejidad de cálculo no elevada.

3.5.3. Mediante ejemplos significativos.

En esta sección se presentan diversos ejemplos ilustrativos que muestran las irregularidades en determinadas situaciones reales generadas por la utilización de alguna de las reglas. En todos los ejemplos se supone que $B(x) = x \forall x \in \mathfrak{R}$ y que $b_i = \max_{\{j \in PredIm(x_{i,1})\}} e_j$.

Irrelevancia de las duraciones

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la duración de las actividades.

EJEMPLO 3.8 Dado el problema *APERT* $(PE, e, b, B) \in AP^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 1, 2)$, $B \sim \beta(999, 1000, 1001)$, $C \sim \beta(11000, 1101, 1102)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (1, 1000, 1101)$ y $R = (1, 100, 0)$, se muestra en la tabla 3.2 que las diferencias en las duraciones sólo son consideradas por las reglas Sh^d , $f^{1,d}$, $f^{2,d}$ y $f^{3,d}$.

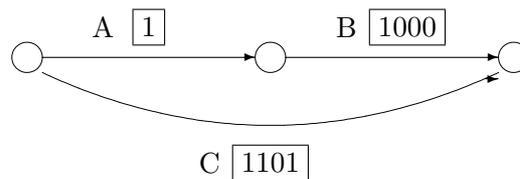


Figura 3.9: Red del ejemplo 3.8.

Cuadro 3.2: Reparto del ejemplo 3.8.

	$Sh; f^{1,r}; f^{2,r}; f^{3,r}$	$Sh^d; f^{1,d}; f^{2,d}; f^{3,d}$	Sh^r	f^1	f^2
f_A	49	-0.9	24.5	99	-1
f_B	-50	-0.1	-25.5	-100	0
f_C	0	0	0	0	0

Comportamiento ante la dispersión.

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la dispersión de la duración de las actividades.

EJEMPLO 3.9 Dado el problema APERT $(PE, e, b, B) \in AP^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 100, 200)$, $B \sim \beta(50, 100, 150)$, $C \sim \beta(300, 350, 400)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (100, 100, 350)$ y $R = (100, 50, 0)$, se muestra en la tabla 3.3 que sólo las reglas $Sh^r, f^{1,r}, f^{2,r}, f^{3,r}$ consideran en su solución la dispersión de la duración de las actividades, lo que produce que ambas actividades puedan disponer de la máxima holgura que pueden necesitar teniendo en cuenta su distribución y por lo tanto no sean penalizadas ninguna de las dos.

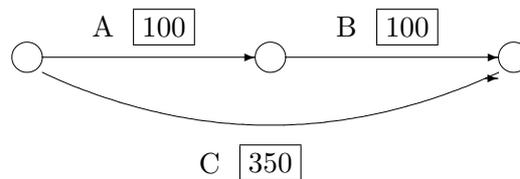


Figura 3.10: Red del ejemplo 3.9.

Cuadro 3.3: Reparto del ejemplo 3.9.

	$Sh; f^{1,d}; f^{2,d}; f^{3,d}$	Sh^d	f^1	f^2	$Sh^r; f^{1,r}; f^{2,r}; f^{3,r}$
f_A	-25	-12.5	50	-100	0
f_B	25	12.5	-50	100	0
f_C	0	0	0	0	0

Variación producida por subdivisión.

En este ejemplo se muestra que no todas las reglas son irrelevantes bajo subdivisión de actividades cuando la variable original es el resultado de la suma de las variables aleatorias de las subactividades generadas.

EJEMPLO 3.10 Dado los juegos de proyectos $(N, v_{(PE,R)})$ y $(M, v_{(PE^*,R^*)})$, donde $N = \{A, B, B'\}$; $PA = \{(A); (B, B')\}$; $D = (2, 1, 1)$; $R = (1, 1, 2)$; $M = \{A, B\}$; $PA^* = \{(A)(B)\}$; $D^* = (2, 2)$; $R^* = (1, 3)$; se puede ver en las tablas 3.4 y 3.5 que el valor de Shapley no es estable ante subdivisiones. Esto se debe a que considera que al estar más dividido el enemigo (el resto de las actividades) su poder de negociación es mayor y por lo tanto su resultado mejora. El resto de las reglas son inalterables ante subdivisiones.

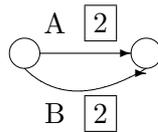


Figura 3.11: Red del ejemplo 3.10 sin subdivisiones.

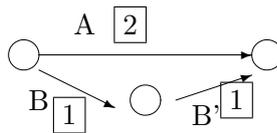


Figura 3.12: Red del ejemplo 3.10 con subdivisiones.

Cuadro 3.4: Reparto en el ejemplo 3.10 sin subdivisiones

	$Sh; Sh^d; Sh^r; f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}; f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	-1/2
f_B	-5/2

Cuadro 3.5: Reparto en el ejemplo 3.10 con subdivisiones

	$Sh; Sh^d; Sh^r$	$f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}; f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	-1/3	-1/2
$f_B + f_{B'}$	-8/3	-5/2

Inestabilidad de las soluciones.

El siguiente ejemplo ilustra que no todas las soluciones son estables, menores cambios introducidos en el problema causan importantes cambios en las soluciones.

EJEMPLO 3.11 Dado el problema APERT $(PE, e, b, B) \in AP^n$ donde $N = \{(A), (B)\}$; $A \sim \beta(0, 2, 4)$, $B \sim \beta(0, 2, 4)$, $PA = \{\{A, B\}\}$; $D = (2, 2)$ y $R = (1, 1)$, la solución de todas las reglas es igual, sin embargo con sólo variar levemente el vector de retrasos $R^* = (1, (1+\epsilon))$ todas las soluciones menos Sh , Sh^d y Sh^r varían notablemente, como se puede ver en las tablas 3.6 y 3.7.

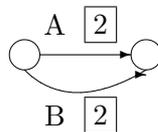


Figura 3.13: Red del ejemplo 3.11.

Cuadro 3.6: Reparto en el ejemplo 3.11.

	$Sh; Sh^d; Sh^r; f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}; f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	-0.5
f_B	-0.5

Cuadro 3.7: Reparto en el ejemplo 3.11 con la variación

	$Sh; Sh^d; Sh^r$	$f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}; f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	-0.5	0
f_B	$-0,5 - \epsilon$	$-1 - \epsilon$

Utilización de la holgura no asignada.

Este ejemplo ilustra como se usa la holgura no asignada a ninguna actividad en un PERT crítico.

EJEMPLO 3.12 Dado el problema APERT $(PE, e, b, B) \in AP^n$ donde $N = \{A, B, C, D, E\}$; $PA = \{(A, C), (D, B, C), (D, E)\}$; $D = (3, 0, 1, 1, 3)$ y $R = \{0, 0, 4, 4, 0\}$ y como se ve en la tabla 3.8, las reglas $f^1, f^{1,d}, f^{1,r}, f^2, f^{2,d}$ y $f^{2,r}$ usan la holgura que sólo puede ser usada por las actividades ficticias de una forma partidista. Las reglas $Sh, Sh^d, Sh^r, f^{3,d}$ y $f^{3,r}$ la usan de forma equitativa, entre las actividades del camino al que pertenecen.

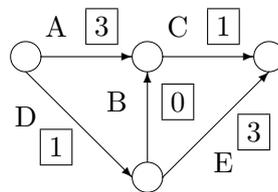


Figura 3.14: Red del ejemplo 3.12.

Cuadro 3.8: Reparto del ejemplo 3.12.

	$Sh; Sh^d; Sh^r$	$f^1; f^{1,d}; f^{1,r}$	$f^2; f^{2,d}; f^{2,r}$	$f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	0	0	0	0
f_C	-3	-4	-2	-3
f_D	-3	-2	-4	-3
f_E	0	0	0	0

Irrelevancia del número de caminos

Este ejemplo ilustra que las reglas definidas pertenecientes al corazón tienen una gran dependencia del número de caminos.

EJEMPLO 3.13 Dado el problema APERT $(PE, e, b, B) \in AP^n$ donde $N = \{A, B1, \dots, B18\}$ $A \sim \beta(5, 6, 7)$, $B_i \sim \beta(0, 1, 2)$, PA definidos en la red, $D = (6, 1, \dots, 1)$ y $R = (6, 1, \dots, 1)$, la solución de las reglas que enumeran los caminos tienen una alta dependencia de ello, como se muestra en la tabla 3.9 , así en este ejemplo, cada actividad B_i tiene una culpabilidad 40 veces superior a la culpabilidad de la actividad A . Esto se debe a que cada actividad B_i pertenece a 729 caminos y la actividad A sólo a un camino.

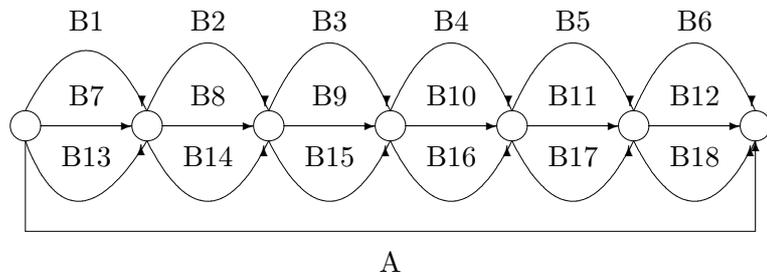


Figura 3.15: Red del ejemplo 3.13.

Cuadro 3.9: Reparto en el ejemplo 3.13.

	$Sh; Sh^d; Sh^r$	$f^1; f^{1,d}; f^{1,r}; f^2; f^{2,d}; f^{2,r}; f^{3,d}; f^{3,r}$
f_A	-1.5	$-6/730 = -0.00816$
f_{B_i}	-0.25	$-(6 \cdot 729)/(730 \cdot 18) = -0.33288$

Capítulo 4

Problema CPERT

Como se ha visto en la introducción, el problema *CPERT* se define como una 4-upla (PE, e, b, C) siendo *PE* la red *PERT*, *e* el vector de tiempos de inicio en la ejecución, *b* el vector de tiempos de finalización en la ejecución y *C* la función de costes asociada al retraso del proyecto y consiste en el reparto del coste generado después de una ejecución de un problema *PERT*. Es decir, las actividades sólo se reparten costes, nunca beneficios.

En este capítulo, se exponen los distintos planteamientos para abordar el problema *CPERT*. A diferencia de lo sucedido en el problema *APERT*, se estudian las soluciones para cualquier función de costes, aunque manteniendo las suposiciones sobre las ventanas de tiempo (i.e. las actividades deben empezar cuando sus predecesoras terminan, $b_i = \max_{i \in \text{PredIm}(x_{i,1})} e_i$) y sobre el hecho de que la red es estática.

El reparto de costes se realiza entre las actividades retrasadas (i.e. $d_i^0 > d_i$). Eso implica que las actividades ficticias y las actividades no retrasadas, no deben formar parte del conjunto de agentes sobre los que se realiza el reparto.

El problema *CPERT* se aborda desde distintas metodologías de reparto.

- La teoría de bancarrota, basada en la creación de unas peticiones por parte de las actividades y en función de ellas realizar el reparto.

- El reparto en dos pasos, basada en el reparto del coste generado entre los caminos retrasados y con posterioridad, repartir este coste asignado a cada camino, entre las actividades retrasadas que forman parte de él.
- La teoría del reparto secuencial (Serial Cost Sharing), basada en el reparto de una forma secuencial del coste entre las actividades que lo han generado.

Este capítulo comienza con la definición de las propiedades en un problema *CPERT*. Se continua con la definición de las reglas basadas en el problema de bancarrota. Posteriormente, se definen tres reglas ad hoc expuestas en la literatura, caracterizadas por ser reglas en dos pasos. Se sigue con las reglas resultantes de la utilización de la metodología secuencial. Y finaliza con una comparativa entre todas las reglas presentadas.

4.1. Propiedades de una regla en el problema *CPERT*

En esta sección, se definen algunas propiedades de los repartos factibles del problema *CPERT*.

La primera propiedad requiere que las actividades que se han retrasado, sean penalizadas en el reparto.

Actividad retrasada, actividad penalizada (DAPA): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i \in N$ tal que $r_i^+ > 0$ y $T^0 > T$, entonces $f_i(PE, b, e, C) > 0$.

La segunda propiedad requiere que las actividades que no pertenecen a ningún camino retrasado no sean penalizadas.

Independencia de caminos no retrasados (INP): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i \in N$ tal que $d_\pi^0 \leq T$, $\forall \pi \in PA|_i$ donde $PA|_i = \{\pi \in PA, i \in \pi\}$, entonces $f_i(PE, b, e, C) = 0$.

La tercera propiedad requiere que dos actividades con igual comportamiento en cuanto a sus duraciones y en cuanto a las duraciones de sus caminos, sean tratadas de forma similar

en el reparto, sin importar el número de caminos a los que pertenezcan.

Independencia del número de caminos (IPN): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i, j \in N$ tal que $D_i = D_j$, $d_i^0 = d_j^0$ y $T_i^0 = T_j^0$ donde $T_k^0 = \max_{\{\pi \in PA, k \in \pi\}} d_{\pi}^0$, entonces $f_i(PE, b, e, C) = f_j(PE, b, e, C)$.

La cuarta y quinta propiedades estudian el comportamiento de las actividades simétricas y paralelas existentes en la red.

Igualdad de actividades simétricas (BSA): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i, j \in N$, actividades simétricas tales que $d_i^0 = d_j^0$, entonces $f_i(PE, b, e, C) = f_j(PE, b, e, C)$.

Igualdad de actividades paralelas (BPA): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i, j \in N$, actividades paralelas tales que $d_i^0 = d_j^0$, entonces $f_i(PE, b, e, C) = f_j(PE, b, e, C)$.

La sexta propiedad estudia el uso que una actividad puede hacer de su holgura independiente.

Uso de la holgura independiente (UIS): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ e $i \in N$ tal que $r_i^+ \leq is_i$, entonces $f_i(PE, b, e, C) = 0$.

La séptima propiedad, delimita el castigo máximo en problemas donde la función de costes es la identidad.

Máximo retraso (DM): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ tal que $C(x) = x, \forall x \in \mathfrak{R}$, entonces $f_i(PE, b, e, C) \leq r_i^+, \forall i \in N^{**}$.

OBSERVACIÓN 4.1 Dada la definición del juego para el problema CPERT de Brânzei et al. (2002)[6]

$$c_{(PE,R)}(S) = \min \left\{ \sum_{i \in S} r_i^+, T^0 - T \right\}, \quad \forall S \subset N^{**}$$

y teniendo en cuenta que el corazón de este juego es igual al conjunto de imputaciones,

$$I(c) = \left\{ x \in \mathfrak{R}_+^n, x_i \leq c(\{i\}), \forall i \in N \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i = T^0 - T \right\} \text{ y que}$$

$$\forall S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \leq \min \left\{ \sum_{i \in S} r_i, T^0 - T \right\} \leq \sum_{i \in S} \min \{r_i, T^0 - T\} \leq \sum_{i \in S} c(\{i\})$$

se comprueba que la propiedad DM es equivalente a la pertenencia de la solución al corazón del juego definido.

La octava propiedad requiere que cuando la red *PERT* pueda ser dividida en dos redes *PERT*, es decir, la red *PERT* es bipartita, la solución para una actividad sólo dependa de las actividades de la nueva red *PERT* subdividida a la que pertenece. Formalmente: Dado un problema *CPERT*, $(PE, b, e, C) \in CP^n$, se definen los subproblemas *CPERT*, $(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, C) \in CP^{|Pred(x)|}$ y $(PE^2, b|_{Suc(x)} - T_x^E, e|_{Suc(x)} - T_x^E, C) \in CP^{|Suc(x)|}$ donde

1. $PE = (N, PA, D)$ es una red *PERT* bipartita, siendo x el nodo bipartito.
2. $PE^1 = (Pred(x), PA(x_b, x), D|_{Pred(x)})$.
3. $PE^2 = (N - Pred(x), PA(x, x_e), D|_{N - Pred(x)})$.
4. $R^1 = R|_{Pred(x)}$ y $R^2 = R|_{N \setminus Pred(x)}$.

Separabilidad (SE): Dado $(PE, b, e, C) \in CP^n$ tal que $C(x) = x, \forall x \in \mathfrak{R}$ y dos subproblemas $(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, C) \in CP^{|Pred(x)|}$ y $(PE^2, b|_{Suc(x)} - T_x^E, e|_{Suc(x)} - T_x^E, C) \in CP^{|Suc(x)|}$, definidos como anteriormente se ha descrito, se verifica que

$$f_i(PE, b, e, C) = \begin{cases} f_i(PE^1, b|_{Pred(x)}, e|_{Pred(x)}, C) & \text{si } i \in Pred(x) \\ f_i(PE^2, b|_{Suc(x)} - T_x^E, e|_{Suc(x)} - T_x^E, C) & \text{si } i \in Suc(x) \end{cases}$$

Esta propiedad sólo se podrá exigir si la función de costes es escalar ($C(x) = \lambda x, \forall x \in \mathfrak{R}$), dado que, en otro caso, no se puede garantizar que la suma de los costes de los retrasos en los subproblemas sea la misma que en el problema original.

Las dos últimas propiedades estudian el comportamiento de la solución ante la subdivisión de una de las actividades en varias subactividades. Formalmente: Dado un problema CPERT, $(PE, b, e, C) \in CP^n$, se define el problema CPERT, $(PE^*, b^*, e^*, C) \in CP^m$, donde:

1. $PE = (N, PA, S)$, $PE^* = (M, PA^*, D^*)$ y $M \subset N$.
2. Existe una sola actividad $k \in M$ tal que $D_k^* = D_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} D_j$ y $D_i^* = D_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.
3. $\forall \pi \in PA, (\{k\} \cup (N \setminus M)) \subset \pi$ ó $(\{k\} \cup (N \setminus M)) \cap \pi = \emptyset$.
4. $PA^* = PA|_M$ y $S^* = S|_{PA^*}$.
5. $r_k^* = r_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} r_j$ y $r_i^* = r_i, \forall i \in M \setminus \{k\}$.
6. $r_k^{*+} = r_k^+ + \sum_{j \in (N \setminus M)} r_j^+$ y $r_i^{*+} = r_i^+, \forall i \in M \setminus \{k\}$.

No manipulación por subdivisión (NMS): Dados dos problemas CPERT, $(PE, b, e, C) \in CP^n$ y $(PE^*, b^*, e^*, C) \in CP^m$, definidos como anteriormente se ha descrito, se verifica que

$$f_k(PE^*, b^*, e^*, C) = f_k(PE, b, e, C) + \sum_{j \in N \setminus M} f_j(PE, b, e, C).$$

No afectar a otras por subdivisión (NAS): Dados dos problemas CPERT, $(PE, b, e, C) \in CP^n$ y $(PE^*, b^*, e^*, C) \in CP^m$, definidos como anteriormente se ha descrito, se verifica que

$$f_i(PE^*, b^*, e^*, C) = f_i(PE, b, e, C), \quad \forall i \in M \setminus \{k\}.$$

OBSERVACIÓN 4.2 Las propiedades DAPA e INP, DAPA y UIS y SE e INP son incompatibles entre ellas.

Para comprobar estas incompatibilidades se presentan los siguientes ejemplos:

- DAPA e INP y DAPA y UIS.

EJEMPLO 4.1 Dado el problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, donde $N = \{A, B\}$; $PA = \{\{A\}, \{B\}\}$; $D = (100, 1)$ y $R = (1, 1)$, la propiedad DAPA indica que la regla debe imputar coste a la actividad B por tener un retraso y haberse retrasado el proyecto y la propiedad INP indica que la regla no debe imputar coste a la actividad B por no pertenecer a ningún camino retrasado. Por otro lado, la propiedad UIS también indica que la regla no debe imputar coste a la actividad B porque su holgura independiente es mayor que su retraso.

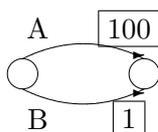


Figura 4.1: Red del ejemplo 4.1.

Si la red PERT es crítica entonces las propiedades DAPA y UIS no son incompatibles.

- INP y SE.

EJEMPLO 4.2 Dado el problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, donde $N = \{A, B, C\}$; $PA = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$; $D = (2, 2, 2)$; $R = (1, 1, 1)$ y $C(x) = x$, la propiedad INP indica que la regla debe imputar el mismo beneficio a las tres actividades, por lo que el reparto será de $-2/3$ para cada actividad y la propiedad SE indica que la regla debe imputar a la actividad A el coste que ella genera, es decir -1 .

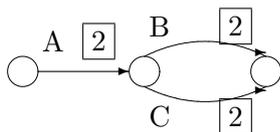


Figura 4.2: Red del ejemplo 4.2.

4.2. Reglas basadas en bancarrota

Se comienza describiendo el problema de bancarrota y las soluciones más usadas en este problema.

Un problema de bancarrota es el par (E, c) donde E es el bien a repartir y $c = (c_i)_{i \in N}$, donde c_i es la petición del agente i , con $0 < E \leq \sum_{i=1}^n c_i$. Este problema consiste en dividir el bien E entre los agentes.

En la literatura de este problema las soluciones más habituales son :

1. **Regla proporcional (PROP):** En esta regla se divide el bien existente de forma proporcional a las peticiones realizadas, formalmente

$$PROP_i(E, c) = \left(\frac{c_i E}{\sum_{i=1}^n c_i} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. **Regla proporcional truncada (TPROP):** En esta regla se divide el bien de forma proporcional a $c_i^T = \min\{c_i, E\}$, es decir se considera que toda petición por encima del valor del bien, se debe considerar de igual forma, independientemente de la diferencia que exista con este, formalmente

$$TPROP_i(E, c) = \left(\frac{c_i^T E}{\sum_{i=1}^n c_i^T} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

También se puede expresar como $PROP_i(E, c^T)$.

3. **Regla de reducción constante igual (CER):** En esta regla se elimina una cantidad de cada una de las peticiones hasta que es posible satisfacer lo resultante, formalmente

$$CER_i(E, c) = \max\{c_i - \beta, 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donde β es el único número real tal que $\sum_{i=1}^n CER_i(E, c) = E$.

4. **Regla de reducción constante igual truncada (TCER):** En esta regla se elimina una cantidad de cada una de las peticiones truncadas ($c_i^T = \min\{c_i, E\}$) hasta que es posible satisfacer lo resultante, formalmente

$$TCER_i(E, c) = \max\{c_i^T - \beta, 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donde β es el único número real tal que $\sum_{i=1}^n TCER_i(E, c) = E$. También se puede expresar como $CER_i(E, c^T)$.

5. **Regla de contribución constante igual (CEC):** En esta regla se da una cantidad hasta las peticiones, mientras sea posible, formalmente

$$CEC_i(E, c) = \min\{c_i, \alpha\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donde α es el único número real tal que $\sum_{i=1}^n CEC_i(E, c) = E$. En este caso no se define el truncamiento dado que $CEC(E, c) = CEC(E, c^T)$.

Para poder usar las reglas del problema de bancarrota para solucionar el problema CPERT, se debe identificar los valores de E y $c_i \forall i \in N^{**} = \{i \in N^* , d_i^0 > d_i\}$. En Bránzei et al. (2002)[6], se define el reparto en un problema CPERT cuando existe además un calendario asociado a la red. El valor de E en este artículo es $E = C(T^0 - T)$ y el valor de la petición es,

$$c_i = \left(\left(e_i - \min_{j \in \text{Suc}(x_{i,2})} b_j^c \right) - \left(\max_{j \in \text{Pred}(x_{i,1})} e_j - b_i^c \right)_+ \right)_+.$$

Donde $b_i^c \forall i \in N$ es el tiempo de comienzo previsto en el calendario dado como dato del problema.

La determinación del valor de E es claro, es la cantidad que hay que repartir en el problema CPERT. Por ello, la definición de la petición asociada a una actividad da lugar a diferentes reglas de reparto para el problema CPERT. La petición definida en Brânzei et al. (2002)[6], no se puede usar debido a la utilización de un calendario para su definición. En este trabajo se introducen dos posibles peticiones:

- Si no se considera la posible holgura que pueda disponer una actividad, el retraso de una actividad se debe definir como:

$$c_i = (d_i^0 - d_i)_+ = r_i^+.$$

- Si se considera la posible holgura que pueda disponer una actividad, el retraso de una actividad se debe definir como:

$$c_i = (d_i^0 - d_i - x_i)_+ = (r_i^+ - x_i)_+.$$

Donde x_i es la holgura asignada a la actividad i , mediante una regla que cumpla PO, en el problema SPERT con $S = PS$.

Una vez definidas las posibles peticiones, se está en condiciones de aplicar cualquiera de las cinco reglas del problema de bancarrota. A continuación se presenta un ejemplo y las propiedades de las diez reglas definidas.

EJEMPLO 4.3 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B, C, D, E\}$; $A \sim \beta(1, 4, 7)$, $B \sim \beta(2, 4, 6)$, $C \sim \beta(1, 2, 3)$, $D \sim Deg(2)$, $E \sim Deg(10)$ $PA = \{\{A, B\}, \{A, C, D\}\{E\}\}$, $D = (4, 4, 2, 2, 10)$, $R = (2, 1, 1, 0, 0)$ y $C(x) = x$, se calculan las soluciones de las reglas descritas.

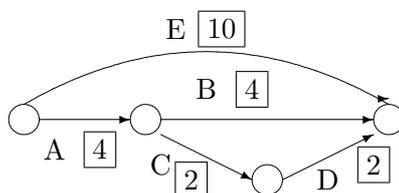


Figura 4.3: Red del ejemplo 4.3.

En este problema las actividades retrasadas son $\{A, B, C\}$, que son las que forman parte del problema y la cantidad de recurso a repartir es $E = C(1) = 1$.

- Si $c_i = r_i^+$, entonces $c = (2, 1, 1)$. Las soluciones para las distintas reglas se muestran en la tabla 4.1.
- Si $c_i = (r_i^+ + x_i)_+$ y x_i es el resultado de aplicar la regla Q^w al problema SPERT con $S = PS$ y $w_i = b_i - a_i$, $x = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$, entonces $c = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Las soluciones para las distintas reglas se muestran en la tabla 4.2.
- Si $c_i = (r_i^+ + x_i)_+$, y x_i es el resultado de aplicar la regla Q^w al problema SPERT con $S = PS$ y $w_i = d_i$, $x = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, entonces $c = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Las soluciones para las distintas reglas se muestran en la tabla 4.3.

Cuadro 4.1: Solución del primer caso del ejemplo 4.3

	$Prop$	$Tprop$	Cer	$Tcec$	$Cer;Tcer$
f_A	1/2	1/3	1	1/3	1/3
f_B	1/4	1/3	0	1/3	1/3
f_C	1/4	1/3	0	1/3	1/3

Cuadro 4.2: Solución del segundo caso del ejemplo 4.3

	<i>Prop</i>	<i>Tprop</i>	<i>Cer</i>	<i>Tcec</i>	<i>Cer;Tcer</i>
f_A	4/6	4/6	11/15	11/15	3/5
f_B	1/6	1/6	2/15	2/15	1/5
f_C	1/6	1/6	2/15	2/15	1/5

Cuadro 4.3: Solución del tercer caso del ejemplo 4.3

	<i>Prop</i>	<i>Tprop</i>	<i>Cer</i>	<i>Tcec</i>	<i>Cer;Tcer</i>
f_A	2/3	2/3	3/4	3/4	1/2
f_B	0	0	0	0	0
f_C	1/3	1/3	1/4	1/4	1/2

PROPOSICIÓN 4.1 *El cumplimiento de las propiedades en las distintas reglas es:*

1. *La regla PROP aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = r_i^+ \forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades DAPA, IPN, BSA, BPA, UPS, MD, NMS y NAS y no cumple las propiedades INP, UIS y SE.*
2. *La regla TPROP aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = r_i^+ \forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades DAPA, IPN, BSA, BPA, UPS y MD y no cumple las propiedades INP, UIS, SE, NMS y NAS.*
3. *Las reglas CER y TCER aplicadas al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = r_i^+ \forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades IPN, BSA, BPA y MD y no cumple las propiedades DAPA, INP, UIS, SE, UPS, NMS y NAS.*
4. *La regla CEC aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = r_i^+ \forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades DAPA, IPN, BSA, BPA, UPS y MD y no cumple las propiedades INP, UIS, SE, NMS y NAS.*
5. *La regla PROP aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = (r_i^+ - x_i)_+, \forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades UPS, MD, BSA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BSA, BPA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BPA, UIS si la regla de reparto del problema SPERT cumple PO y*

NMS y NAS si la regla de reparto del problema SPERT cumple NMS y NAS y no cumple las propiedades DAPA, IPN, INP y SE.

6. *La regla TPROP aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = (r_i^+ - x_i)_+$, $\forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades UPS, MD, BSA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BSA, BPA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BPA y UIS si la regla de reparto del problema SPERT cumple PO y no cumple las propiedades DAPA, INP, IPN, NMS, NAS y SE.*
7. *Las reglas CER y TCER aplicadas al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = (r_i^+ - x_i)_+$ $\forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades MD, BSA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BSA, BPA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BPA y UIS si la regla de reparto del problema SPERT cumple PO y no cumple las propiedades DAPA, INP, IPN, SE, UPS, NMS y NAS*
8. *La regla CEC aplicada al problema $(PE, e, b, C) \in CP^n$ con $E = C(T^0 - T)$ y $c_i = (r_i^+ - x_i)_+$ $\forall i \in N^{**}$, cumple las propiedades UPS, MD, BSA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BSA, BPA si la regla de reparto del problema SPERT cumple BPA y UIS si la regla de reparto del problema SPERT cumple PO y no cumple las propiedades DAPA, INP, IPN, SE, NMS y NAS*

DEMOSTRACIÓN

- Todas las reglas menos las derivadas de CER y TCER cumplen la propiedad DAPA si $c_i = r_i^+$ dado que a demandas positivas le dan un reparto positivo. Para la otra petición no se puede garantizar su cumplimiento puesto que dependiendo del valor de x_i la demanda puede no existir.
- Ninguna cumple la propiedad INP dado que pertenecer sólo a caminos sin retraso no garantiza que la petición sea 0.
- Las reglas con $c_i = r_i^+$ cumplen IPN puesto que las demandas en las condiciones de la propiedad IPN son iguales. Las reglas con demanda $c_i = (r_i^+ + x_i)_+$ no cumplen IPN puesto que los valores de x_i pueden hacer que las peticiones sean distintas.
- Todas cumplen las propiedades BSA y BPA puesto que para estas actividades la demanda definida es la misma en las circunstancias pedidas.

- Todas las reglas incumplen la propiedad *UIS* si $c_i = r_i^+$ dado que no se considera la holgura independiente de la actividad. Para la petición $c_i = (r_i^+ + x_i)_+$ si se puede garantizar dado que si la regla de reparto de holgura cumple *PO*, $x_i \geq is_i$.
- Todas las reglas menos las derivadas de *CER* y *TCER* cumplen la propiedad *UPS* dado que la petición en cualquier caso es positiva si $r_i^+ > \max_{\pi \in PA, i \in \pi} ps_\pi$.
- Ninguna cumple la propiedad *SE* dado que no se considera la estructura de la red para su definición.
- De Frutos (1999)[13] demuestra que la regla *PROP* es la única regla que cumple no manipulabilidad en el problema de bancarrota, por ello las reglas derivadas de *PROP* cumplen las propiedades *NMS* y *NAS* y el resto de las reglas no.
- Todas ellas cumplen la propiedad *MD* dado que la petición siempre es menor que r_i^+ .

□

OBSERVACIÓN 4.3 *Es posible pensar que una actividad con una gran holgura, deba recibir una penalización mayor que una actividad con menor holgura o sin ella, si el retraso, una vez eliminada esta holgura, en ambas actividades es el mismo. Se puede determinar si tiene mucha o poca holgura en función del ratio con su duración o su rango. Por ello se puede redefinir las peticiones como:*

$$c_i = \left(\min \left\{ (r_i^+ - x_i) \left(1 - \lambda \frac{x_i}{d_i} \right), (r_i^+ - x_i) \right\} \right)_+,$$

donde $\lambda \geq 0$, o

$$c_i = \left(\min \left\{ (r_i^+ - x_i) \left(1 - \lambda \frac{x_i}{b_i - a_i} \right), (r_i^+ - x_i) \right\} \right)_+.$$

Si $\lambda = 0$, se tiene el caso anterior.

En la tabla 4.4 se presenta las propiedades que satisface cada una de las reglas definidas. El subíndice 1 indica que la petición es $c_i = r_i^+$ y el subíndice 2 que la petición es $c_i = (r_i^+ - x_i)_+$.

Cuadro 4.4: Cumplimiento de propiedades

	$Prop_1$	$Prop_2$	$Tprop_1$	$Tprop_2$	Cer_1 $Tcer_1$	Cer_2 $Tcer_2$	Cec_1	Cec_2
DAPA	✓		✓				✓	
INP								
IPN	✓		✓		✓		✓	
BSA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
BPA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
UIS		✓		✓		✓		✓
UPS	✓	✓	✓	✓			✓	✓
SE								
NMS	✓	✓						
NAS	✓	✓						
MD	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

A la vista de las propiedades satisfechas y de la filosofía utilizada para afrontar el problema *SPERT* (una filosofía proporcional) las reglas seleccionadas dentro de las reglas de ban-carrota, son las derivadas de la regla proporcional.

4.3. Reglas en dos pasos

En esta sección se definen las tres reglas en dos pasos existentes en la literatura. Antes de comenzar con la definición de estas reglas, se debe recordar que una regla en dos pasos es aquella regla que reparte el coste del retraso entre los caminos retrasados y con posterioridad reparte el coste asignado a cada camino entre las actividades que lo forman y se hayan retrasado.

Con este planteamiento, la única diferencia entre las distintas reglas de reparto en dos

pasos está en la determinación de la regla de reparto cuando los agentes son los caminos y la regla de reparto cuando los agentes son las actividades retrasadas de cada camino. A continuación, se pasa a definir los tres métodos existentes.

4.3.1. Método basado en el retraso de los caminos

En Brânzei et al. (2002)[6] se define un método para el reparto de costes en un problema CPERT bajo la existencia de un calendario. Este calendario se usa para la definición del retraso de una actividad. Para el cálculo del retraso de una actividad, teniendo en cuenta que el problema que aquí se aborda no dispone de esta información adicional, una forma natural de redefinir la regla presentada en Brânzei et al. (2002)[6] se logra usando como retrasos el retraso directo, r_i^+ , y mimetizando el resto de la regla de reparto. Formalmente

Se denota por $R_\pi = \sum_{i \in \pi} r_i^+$ y por $PA|_R$ el conjunto de todos los caminos retrasados (i.e. $PA|_R = \{\pi \in PA, d_\pi^0 > T\}$).

Sean $t_1, \dots, t_q \in (T, T^0]$ los distintos tiempos de finalización de los caminos relevantes (aquellos que se retrasan). Se considera los intervalos $I_j = [t_{j-1}, t_j], j = 1, \dots, q$, donde $t_0 = T$, el tiempo estimado de finalización del proyecto PERT, y $t_q = T^0$, el tiempo observado de finalización del proyecto PERT, y se calcula el correspondiente coste del retraso, $C(t_j - T) - C(t_{j-1} - T)$. Se define los caminos del intervalo I_j como $PA(I_j) = \{\pi \in PA, d_\pi^0 \geq t_j\}$.

Paso 1: Dividir el coste entre los caminos

1. Se buscan los caminos $\pi \in PA|_R$ para cada intervalo I_j . El coste producido como consecuencia del retraso del intervalo I_j , $C(t_j - T) - C(t_{j-1} - T)$, se divide entre los caminos correspondientes, $PA(I_j)$, de forma proporcional a los pesos R_π .
2. En cada camino se agrega, mediante la suma, los costes obtenidos de los diferentes intervalos de tiempo I_j .

Paso 2: Dividir el coste de cada camino entre las actividades

1. Para cada camino $\pi \in PA|_R$, se divide lo resultante en el paso anterior entre las actividades que lo integran de forma proporcional al valor de r_i^+ (también es posible hacerlo en función del cociente $\frac{r_i^+}{d_i}$, esto parece necesario cuando las actividades tienen duraciones muy distintas).
2. En cada actividad se agrega, mediante la suma, los costes provenientes de distintos caminos.

Este método busca la justicia en ambos repartos en función del principio de proporcionalidad, en el primer paso en función de R_π (con lo que importa el retraso generado por las actividades en el camino, sin considerar la posible holgura del camino o los posibles adelantos de otras actividades del camino) y en el segundo paso en función de r_i^+ o $\frac{r_i^+}{d_i}$ según si se desea considerar los retrasos absolutos o los relativos. A continuación se introduce un ejemplo y las propiedades que cumple la regla definida.

EJEMPLO 4.4 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B, C, D\}$; $A \sim \beta(2, 3, 4)$, $B \sim \beta(2, 6, 10)$, $C \sim \beta(2, 5, 8)$, $D \sim Deg(10)$, $PA = \{\pi_1 = \{A, B\}, \pi_2 = \{A, C\}, \pi_3\{D\}\}$, $D = (3, 6, 5, 10)$, $R = (1, 3, 2, 0)$ y $C(x) = x$,

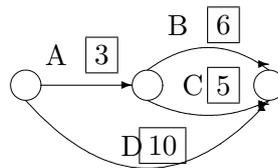


Figura 4.4: Red del ejemplo 4.4.

En el primer paso:

$$f_{\pi_1} = \frac{4}{7}1 + 2 = \frac{18}{7} \quad y \quad f_{\pi_2} = \frac{3}{7}1 = \frac{3}{7}$$

En el segundo paso:

- En el reparto en el camino π_1 ,

$$f_A = \frac{1}{4} \frac{18}{7} = \frac{9}{14} \quad y \quad f_B = \frac{3}{4} \frac{18}{7} = \frac{27}{14}$$

- En el reparto en el camino π_2 ,

$$f_A = \frac{1}{3} \frac{3}{7} = \frac{1}{7} \quad y \quad f_C = \frac{2}{3} \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

PROPOSICIÓN 4.2 *La regla de reparto en dos pasos basado en el retraso de los caminos cumple INP, BSA, BPA y NMS y NAS si el segundo paso es proporcional a r_i^+ y no cumple DAPA, IPN, UIS, UPS, MD y SE.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa teniendo en cuenta los argumentos introducidos para la demostración de la proposición 4.1. □

4.3.2. Método basado en el reparto secuencial

En Bergantiños y Sánchez (2002c)[4], se introducen los otros dos métodos en dos pasos. El primero de estos dos métodos reparte, en primer lugar, el coste entre los caminos usando la regla secuencial donde los agentes son los caminos retrasados. En segundo lugar, divide el coste asignado a cada camino en el primer paso, nuevamente mediante la regla secuencial. En esta ocasión, los agentes para el problema *SCS* definido para un camino, son las actividades retrasadas en dicho camino.

Paso 1: Dividir el coste entre los caminos

1. Se divide mediante la regla serial el coste entre los caminos, donde $N = PA|_R = \{\pi_1, \dots, \pi_p\}$; $q_{\pi_j} = \sum_{i \in \pi_j} (d_i + r_i) - T$ y $\alpha = \max_{i \in N} q_i$.

Paso 2: Dividir el coste de cada camino entre las actividades

1. Dado un camino $\pi_j \in PA|_R$, se usa nuevamente la filosofía secuencial, siendo el coste para un conjunto de actividades de ese camino, $S \subset \pi_j$, el reparto que en el primer paso hubiera tenido si todas las actividades del camino se retrasan a lo sumo $\max_{i \in S} r_i^+$, es decir

$$\xi_i = \sum_{k=1}^i \frac{c^j(k) - c^j(k-1)}{n_j + 1 - k} \quad \forall i \in N^j = \{i \in \pi_j, r_i > 0\},$$

tal que

$$r_1 \leq \dots \leq r_{n_j}, \quad c^j(k) = \xi^s(PA|_R, q^*(k), C, \alpha), \quad \alpha = \max_{i \in N} q_i,$$

$$q^*(k) = (q_{\pi_1}, \dots, q_{\pi_{j-1}}, q_{\pi_j}^*, q_{\pi_{j+1}}, \dots, q_{\pi_{n_j}}) \quad y \quad q_{\pi_j}^* = \left(\sum_{i \in \pi_j} (d_i + \min\{r_i, r_k\}) \right)_+.$$

2. En cada actividad se agrega mediante la suma, el valor obtenido en todos los caminos a los que pertenece.

Este método busca la justicia en ambos repartos en función del principio de secuenciación. A continuación se introduce un ejemplo y las propiedades que cumple la regla definida.

EJEMPLO 4.5 Dado el problema CPERT definido en el ejemplo 4.4, en el primer paso:

$$f_{\pi_1} = \frac{5}{2} \quad y \quad f_{\pi_2} = \frac{1}{2}$$

En el segundo paso:

- En el reparto en el camino π_1 ,

$$f_A = \frac{1}{4} \quad y \quad f_B = \frac{9}{4}$$

- En el reparto en el camino π_2 ,

$$f_A = 0 \quad y \quad f_C = \frac{1}{2}$$

PROPOSICIÓN 4.3 *La regla de reparto en dos pasos basado en el reparto secuencial cumple INP, BSA y BPA y no cumple DAPA, IPN, UIS, UPS, MD, SE, NMS y NAS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa para todas las propiedades excepto el incumplimiento de las propiedades MD, NMS y NAS. Este incumplimiento se puede ver en el ejemplo 4.10. \square

4.3.3. Método basado en el valor de Shapley

El segundo método introducido en Bergantiños y Sánchez (2002c)[4] reparte, en primer lugar, el coste entre los caminos usando el valor de Shapley para un juego cuyos jugadores son los caminos retrasados. En segundo lugar, divide el coste asignado a cada camino en el primer paso, nuevamente mediante el valor de Shapley. En esta ocasión, los jugadores en el juego definido para un camino, son las actividades retrasadas en dicho camino.

Paso 1: Dividir el coste entre los caminos

1. Se define el juego $(PA|_R, c(S))$ donde $\forall S \subset PA|_R, c(S) = C(\max_{\pi_j \in S} d_{\pi_j}^0 - T)$.
2. Se divide mediante el valor de Shapley en el juego de caminos retrasados anteriormente definido.

Paso 2: Dividir el coste de cada camino entre las actividades

1. Dado un camino $\pi_j \in PA|_R$, se usa nuevamente el valor de Shapley, siendo el coste para una coalición de jugadores de π_j , el valor de Shapley que en el primer paso hubiera tenido si todas las actividades del camino se retrasan a lo sumo $\max_{i \in S} r_i^+$, es decir

$$\xi_i = Sh_i(N^j, c^j(T)) \quad \forall i \in N^j = \{i \in \pi_j, r_i > 0\},$$

tal que $c^j(T) = Sh_{\pi_j}(PA|_R, c_T^j(S))$, $\forall T \subset N^j$ y

$$c_T^j(S) = C \left(\max_{\pi_j \in S} \left\{ d_{\pi_1}^0, \dots, d_{\pi_{j-1}}^0, d_{\pi_j}^0 - \sum_{k \in N^j \setminus T} r_k, d_{\pi_{j+1}}^0, \dots, d_{\pi_{n_j}}^0 \right\} - T \right)_+,$$

para todo $S \subset PA|_R$.

2. En cada actividad se agrega mediante la suma, el valor obtenido en todos los caminos a los que pertenece.

Este método busca la justicia en ambos repartos en función de la teoría de juegos, concretamente en función del valor de Shapley. A continuación se introduce un ejemplo y las propiedades que cumple la regla definida.

EJEMPLO 4.6 Dado el problema CPERT definido en el ejemplo 4.4, en el primer paso:

$$f_{\pi_1} = \frac{5}{2} \quad y \quad f_{\pi_2} = \frac{1}{2}$$

En el segundo paso:

- En el reparto en el camino π_1 ,

$$f_A = \frac{1}{2} \quad y \quad f_B = 2$$

- En el reparto en el camino π_2 ,

$$f_A = \frac{1}{4} \quad y \quad f_C = \frac{1}{4}$$

PROPOSICIÓN 4.4 *La regla de reparto en dos pasos basado en el valor de Shapley cumple INP, BSA y BPA y no cumple DAPA, IPN, UIS, UPS, MD, SE, NMS y NAS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa para todas las propiedades excepto el incumplimiento de las propiedades *MD*, *NMS* y *NAS*. Este incumplimiento se ve en el ejemplo 4.10. □

OBSERVACIÓN 4.4 *En función del corolario 1.1, que establece la relación entre la regla secuencial y el valor de Shapley, el primer paso de las dos reglas definidas en Bergantiños y Sánchez (2002c)[4] es el mismo.*

4.4. Reglas basadas en el CAW

En esta sección se aborda el problema *CPERT* mediante la metodología del reparto secuencial. Más concretamente, mediante la modelización del problema *CPERT* como un problema *CAW* y la posterior utilización de la regla secuencial ponderada, $\xi^{s,w}$.

En esta sección se comienza modelizando el problema *CPERT* como un problema *CAW*. Se continúa verificando las propiedades en el problema *CPERT* de la regla secuencial ponderada en función de unos pesos, $\xi^{s,w}$. Finalmente se determinan dos pesos con buenas propiedades.

Para poder aplicar la regla secuencial ponderada, $\xi^{s,w}$, primero es necesario modelizar el problema *CPERT* como un problema *CAW*. En esta modelización, los agentes son las actividades retrasadas, las peticiones de cada agente son el retraso máximo de alguno de los caminos a los que pertenece, la función de costes es la del problema *CPERT* y la función de agregación es el máximo. Formalmente:

Para todo $(PE, e, b, C) \in CP$ se define el problema $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW$, donde:

- $N = N^* = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de actividades retrasadas de la red PERT.
- $q = (q_1, \dots, q_n)$ es el vector de demanda, donde la demanda de la actividad i es el retraso máximo en los caminos en los cuales la actividad i está presente.

$$q_i = \text{máx} \left\{ 0, \text{máx}_{\pi \in PA, i \in \pi} d_{\pi}^0 - T \right\}$$

- C es la función de costes en el problema CPERT.
- $\alpha(q) = \text{máx}_{i \in N} q_i$.
- $w = (w_1, \dots, w_n) > 0$ es el vector de pesos.

Se puede ver que la selección del vector w , determina las propiedades de la regla secuencial ponderada, $\xi^{s,w}$.

A continuación se presentan las propiedades de la regla $\xi^{s,w}$ en función del peso definido.

PROPOSICIÓN 4.5 *Dados los problemas CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$ y $(PE^*, e^*, b^*, C) \in CP^m$ definidos bajo subdivisión, modelizados como dos problemas CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$ y $(M, q^*, C, \alpha, w^*) \in CAW^m$, si $w_k^* = w_k + \sum_{j \in (N \setminus M)} w_j$ y $w_i^* = w_i$, $\forall i \in M \setminus \{k\}$, entonces la regla $\xi^{s,w}$ cumple las propiedades NMS y NAS.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa porque $\forall j \in \{k\} \cup (N \setminus M)$, $q_j = q_k^*$ y $\forall j \in M$, $q_j = q_j^*$. □

PROPOSICIÓN 4.6 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como el problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, si $\frac{w_i}{\sum_{j \in \{h^i, \dots, n\}} w_j} \leq \frac{r_i}{q_i}$, $\forall i \in N^*$ donde $N^* = \{i \in N, q_i > 0\}$ y $h^i = \text{mín} \{j \in N, q_j = q_i\}$, entonces la regla $\xi^{s,w}$ cumple la propiedad DM.*

DEMOSTRACIÓN

$$\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, w) = \sum_{k=1}^i \frac{w_i}{\sum_{j \in \{k, \dots, n\}} w_j} (q_k - q_{k-1}) \leq$$

$$\frac{w_i}{\sum_{j \in \{h^i, \dots, n\}} w_j} \sum_{k=1}^i (q_k - q_{k-1}) = \frac{w_i}{\sum_{j \in \{h^i, \dots, n\}} w_j} q_i \leq \frac{r_i}{q_i} q_i \leq r_i$$

□

Por la proposición 1.2, se muestra que para cualquier problema CAW, la regla $\xi^{s,w}$ pertenece al corazón del juego asociado. En el siguiente corolario se traslada este resultado al caso de los problemas CPERT.

COROLARIO 4.1 Dado $(PE, e, b, C) \in CP^N$ un problema CPERT modelizado como el problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, la regla $\xi^{s,w}$ es el valor de Shapley ponderado y pertenece al corazón del juego de costes:

$$c(S) = \max \left\{ 0, \max_{\pi \in PA|_S} d_\pi^0 - T \right\}, \forall S \subset N.$$

Donde $PA|_S = \{\pi \in PA, S \cap \pi \neq \emptyset\}$

En redes paralelas, las reglas en dos pasos tienen una interpretación directa, dado que en este tipo de redes no existe interacción entre los caminos. La regla definida anteriormente, se puede interpretar como una regla en dos pasos cuando la red es paralela. Formalmente:

DEFINICIÓN 4.1 Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, se define la regla en dos pasos donde:

1. El primer paso es la regla de reparto ξ^s para el problema CA, $(N, q, C, \alpha) \in CAW^n$ donde $N = \{\pi \in PA, d_\pi^0 > T\}$, $q_i = d_i^0 - T$, $\forall i \in N$ y $\alpha(q) = \max_{i \in N} q_i$. Con esto se asigna el coste entre los caminos retrasados.

2. En el segundo paso, el reparto de coste entre las actividades retrasadas pertenecientes al camino, se realiza de forma proporcional a w_i .

PROPOSICIÓN 4.7 Dado un problema CPERT paralelo, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como un problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, si $\sum_{i \in \pi} w_i = 1, \forall \pi \in PA$ entonces la regla $\xi_i^{s,w}$ es la regla en dos pasos definida anteriormente.

DEMOSTRACIÓN Se consideran los caminos ordenados π_1, \dots, π_p tal que $d_{\pi_k}^0 \leq d_{\pi_{k+1}}^0, \forall k \in \{1, \dots, p-1\}$ y $1, \dots, u_1$ las actividades pertenecientes a π_1, u_1+1, \dots, u_2 las actividades pertenecientes a $\pi_2, \dots, u_{p-1}+1, \dots, u_p$ las actividades pertenecientes a π_p . Entonces:

$$\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, w) = \sum_{k=1}^i \frac{w_i}{\sum_{j \in \{k, \dots, n\}} w_j} (C(q_k) - C(q_{k-1})). \quad (4.1)$$

Se sabe que $C(q_1) = \dots = C(q_{u_1}); \dots; C(q_{u_{p-1}+1}) = \dots = C(q_{u_p})$; entonces, si se asume que $i \in \pi_l$ y se denota $u_0 = 0, q_{u_0} = 0$ y $d_{\pi_0}^0 = T$, siguiendo la fórmula (4.1):

$$\sum_{k=1}^l \frac{w_i}{\sum_{j \in \{u_{k-1}+1, \dots, u_p\}} w_j} (C(q_{u_k}) - C(q_{u_{k-1}})). \quad (4.2)$$

Como la red CPERT es paralela, $\sum_{j \in \pi} w_j = 1, \forall \pi \in PA$ entonces

$$\sum_{j \in \{u_{k-1}+1, \dots, u_p\}} w_j = p + 1 - k.$$

Sustituyendo en la fórmula (4.2), se obtiene la solución en dos pasos descrita anteriormente.

$$\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, w) = \sum_{k=1}^l \frac{w_i}{p + 1 - k} (C(d_{\pi_k}^0 - T) - C(d_{\pi_{k-1}}^0 - T))$$

$$= w_i \sum_{k=1}^l \frac{C(d_{\pi_k}^0 - T) - C(d_{\pi_{k-1}}^0 - T)}{p + 1 - k} = \frac{w_i}{\sum_{j \in \pi \in PA|_i} w_j} \sum_{k=1}^l \frac{C(d_{\pi_k}^0 - T) - C(d_{\pi_{k-1}}^0 - T)}{p + 1 - k}.$$

□

Otra de las ventajas de esta regla, es su forma de cálculo. El siguiente algoritmo, muestra una forma eficiente de calcular la regla secuencial ponderada descrita.

Algoritmo WSCSCPRT $((G, D), e, C)$

Begin

Encontrar el tiempo del camino crítico (T) en la red PERT (G, D) .

Encontrar el tiempo del camino crítico (T^0) y la holgura de las actividades, as^0 , en la red PERT (G, D^0) .

Calcular $q_i = \begin{cases} 0 & \text{if } T^0 - T - as_i^0 \leq 0 \\ T^0 - T - as_i & \text{si } T^0 - T - as_i^0 > 0 \end{cases}$

Ordenar las actividades tal que $(q_{(1)}, \dots, q_{(n)})$

Calcular $w_i, \forall i \in N$.

Calcular $\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, w) = \sum_{k=1}^i \frac{w_i}{\sum_{j \in \{k, \dots, n\}} w_j} (C(q_k) - C(q_{k-1}))$.

End

La complejidad del algoritmo anterior es $O(n^2 + C_w)$, siendo C_w la complejidad de cómputo de w . Por supuesto, si w es computable en tiempo polinomial, entonces el algoritmo es polinomial. El valor de q_i es el calculado por el algoritmo anterior:

$$q_i = \max\{0, \max_{\pi \in PA|_i} d_{\pi}^0 - T\} = \max\{0, T^0 - T^0 + \max_{\pi \in PA|_i} d_{\pi}^0 - T\}$$

$$= \max\{0, T^0 - \min_{\pi \in PA|_i} S_{\pi}^0 - T\} = \max\{0, T^0 - as_i^0 - T\}$$

A lo largo de esta sección, se han analizado las diferentes propiedades para la regla $\xi_i^{s,w}(N, q, C, \alpha, w)$ del problema CAW modelizado desde un problema CPERT para cualquier vector de pesos w .

4.4.1. Elección del vector de pesos

En esta sección, se propone dos vectores de pesos que puede ser interpretado como la influencia de las actividades en el retraso total del proyecto. En este caso particular, se considera que la influencia en el coste de cada actividad sólo tiene en cuenta el vector de retrasos r . Entonces se asume que la influencia (w) sólo depende del vector de retrasos R . Para esta situación, este vector de pesos puede ser caracterizado en problemas CPERT en redes paralelas.

PROPOSICIÓN 4.8 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, , C) \in CP^n$ en una red paralela modelizado como el problema CAW $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$. El único vector w que depende sólo del vector de retrasos r y cumple las condiciones de las proposiciones 4.5, 4.7 es:*

$$w_i^r = \frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j} \quad \text{donde } \{\pi\} = PA|_i.$$

DEMOSTRACIÓN Dado $(PE, e, b, C) \in CP^n$ un problema CPERT en una red paralela modelizado como el problema CAW $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$. Para cada camino $\pi \in PA$ se considera el problema de bancarrota (N^π, c, E) , donde $N^\pi = \pi$, $c_i = r_i \forall i \in \pi$ y $E = 1$ ($E = 1$, por la condición de la proposición 4.7). En De Frutos (1999)[13] se prueba que la única regla para un problema de bancarrota (N, c, E) que cumple la propiedad NM es la regla proporcional, i.e. $\frac{c_i}{\sum_{j \in N} c_j}$.

Siguiendo este resultado y teniendo en cuenta que w^r es una solución del problema de bancarrota (N^π, c, E) que cumple la propiedad NM (por la condición de la proposición 4.5), la proposición queda demostrada. \square

Una extensión natural para el peso w^r para un problema CPERT general es

$$w_i^r = \max_{\pi \in PA'_i} \left\{ \frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j} \right\}.$$

Siendo PA'_i el conjunto de caminos en los que la actividad i esta presente y tiene máximo retraso, i.e. $PA'_i = \{\pi \in PA|_i, d_\pi^0 = \max_{\pi' \in PA|_i} d_{\pi'}^0\}$.

Los pesos w_i^r pueden ser vistos como el impacto causado por el retraso de la actividad i en sus caminos de máximo retraso. Se consideran los caminos con máximo retraso, porque el coste de la red PERT depende sólo de estos caminos. En el caso en el cual más de un camino tenga máximo retraso, se tomará el camino con mayor peso.

La siguiente propiedad estudia como el vector de pesos w , previamente definido, cumple las condiciones de las proposiciones 4.5, 4.6 y 4.7.

PROPOSICIÓN 4.9 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como el problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w^r) \in CAW^n$ cumple las condiciones de las proposiciones 4.5, 4.6 y 4.7.*

DEMOSTRACIÓN Las demostraciones de que w cumple las condiciones 4.5 y 4.7 es directa.

Para ver $\frac{w_i^r}{\sum_{j \in \{h^i, \dots, n\}} w_j^r} \leq \frac{r_i}{q_i}, \forall i \in N^0$, se demuestran primero las siguientes dos inecuaciones:

- Se denota, $PA' = \{\pi \in PA, d_\pi^0 = T^0\}$ y $PA'' = \{\pi \in PA', \sum_{j \in \pi} r_j = \max_{\pi' \in PA'} \sum_{j \in \pi'} r_j\}$.

$$\forall \pi \in PA'', \sum_{i \in \pi} w_i^r = \sum_{i \in \pi} \frac{r_i}{\max_{\pi' \in PA'_i} \sum_{j \in \pi'} r_j} = \sum_{i \in \pi} \frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j} = 1$$

entonces $\sum_{j \in \{h, \dots, n\}} w_j^r \geq 1$, donde $h = \min \{j \in N, q_j = T^0\}$.

- Además, $\forall \pi \in PA$ tal que $d_\pi^0 - T \geq 0$, $\sum_{j \in \pi} r_j \geq d_\pi^0 - T$.

Uniendo las dos inecuaciones anteriores se tiene:

$$\frac{w_i^r}{\sum_{j \in \{h^i, \dots, n\}} w_j^r} \leq \frac{w_i^r}{\sum_{j \in \{h, \dots, n\}} w_j^r} \leq w_i^r = \frac{r_i}{\min_{\pi \in PA_i} \sum_{j \in \pi} r_j} \leq \frac{r_i}{q_i}.$$

□

OBSERVACIÓN 4.5 Si el peso es w^r , el segundo paso de la regla en dos pasos en redes PERT paralelas, es proporcional a r_i . Este segundo paso es usado en la regla en dos pasos definida en Brânzei et al. (2002)[6].

Para todo problema CPERT, el peso w^r puede ser calculado en tiempo polinomial. Más concretamente, la complejidad en el peor de los casos es $O(n^3)$. Así pues, la complejidad del cálculo de la regla $\xi^{s,w}$ aplicada al problema CPERT es $O(n^3)$, siendo n el número de las actividades de la red PERT. Para calcular w_i^r primero se debe asignar el camino, entre los que i pertenece, en el cual recibe el mayor retraso, y luego determinar el camino con menor suma de retrasos. El siguiente algoritmo calcula w^r .

Algoritmo Pesos $((G, D), e, C)$

Begin

Do para todo $i \in N$.

Begin

Encontrar la holgura de las actividades, $as^{0,i}$, en el $PERT(G, D^{0,i})$

donde $D^{0,i} = (d_1^0, \dots, d_{i-1}^0, M, d_{i+1}^0, \dots, d_n^0)$ y M grande

Encontrar el tiempo del camino crítico, $T^{0,i}$, en el $PERT(G|_{A^i}, -R^+|_{A^i})$

donde: $A^i = \{k \in N, as_k^{0,i} = 0\}$ y $G|_{A^i}$ es el subgrafo

restringido a las subconjunto de actividades A^i .

Calcular $w_i^r = \frac{r_i}{-T^{0,i}}$.

End

End

En la siguiente observación se presenta una familia más general de pesos que cumplen las condiciones pedidas en las proposiciones 4.5, 4.6 y 4.7.

OBSERVACIÓN 4.6 Dado $(PE, e, b, C) \in CP^m$ un problema CPERT modelizado como el problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w^\lambda) \in CAW^n$ donde $w_i^\lambda = \lambda w_i^r + (1 - \lambda) w_i^{r'}$, $\lambda \in [0, 1]$, $w_i^r = \max_{\pi \in PA'|_i} \frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j}$ y $w_i^{r'} = \min_{\pi \in PA'|_i} \frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j}$, cumple las condiciones de las proposiciones 4.5, 4.6 y 4.7.

EJEMPLO 4.7 $N = \{A, B, C\}$; $P = \{\{A, B\}; \{A, C\}\}$; $d = (5, 5, 10)$; $R^1 = (1, 4, 1)$; $R^2 = (1, 6, 1)$.

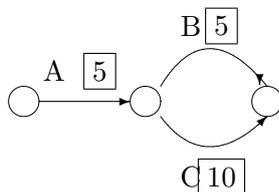


Figura 4.5: Red del ejemplo 4.7.

La actividad A , si se toma $R = R^1$, hay sólo un camino de máximo retraso, $PA'|_A = \{A, C\}$. En este caso, el peso de A es $0,5$. Por otro lado, si se toma $R = R^2$, hay dos caminos con máximo retraso, $PA'|_A = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$ con $\frac{r_i}{\sum_{j \in \pi} r_j}$ igual a $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente. Como se ha visto en el observación anterior, el peso de la actividad A puede pertenecer a $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right]$.

La observación anterior da una posible familia de pesos deseables dependiendo del valor de λ . Aunque esta propiedad enriquece el modelo desde un punto de vista matemático, el enfoque de este trabajo propone que el peso de una actividad (que representa el impacto causado por el retraso en el camino de máximo retraso al cual pertenece) no debe decrecer porque la actividad pertenezca a varios caminos de máximo retraso. Teniendo en cuenta esto, el único peso de la familia que cumple esta condición es el máximo, que se alcanza con $\lambda = 1$.

A continuación se introducen las propiedades de las reglas definidas para el problema CPERT.

PROPOSICIÓN 4.10 Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como un problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, con peso $w = w^r$, la regla $\xi^{s,w}$ cumple las propiedades INP, IPN, BSA, BPA, MD, NMS, NAS, UPS si $N^* = N^{**}$ y no cumple las propiedades DAPA, UIS y SE.

DEMOSTRACIÓN A la vista de lo indicado en las proposiciones 4.5, 4.6 y 4.9, las demostraciones son directas. □

Para cumplir la propiedad *UIS*, se puede repartir la holgura aplicando una solución del problema *SPERT* que cumpla la propiedad *PO*, creando una red *PERT* crítica.

PROPOSICIÓN 4.11 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como un problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, con peso $w = w^r$, la regla $\xi^{s,w}$ aplicada sobre redes PERT críticas, cumple las propiedades INP, IPN, BSA, BPA, UIS, MD, UPS si $N^* = N^{**}$ y NMS y NAS si la regla de reparto cumple estas mismas propiedades y no cumple las propiedades DAPA y SE.*

DEMOSTRACIÓN La demostración es directa teniendo en cuenta la proposición 4.10. \square

OBSERVACIÓN 4.7 *Se puede definir otro peso que cumpla las condiciones de las proposiciones 4.5 y 4.6 y sea interpretable como una regla en dos pasos en redes paralelas. Este peso permite que sólo las actividades críticas en la ejecución del proyecto sean penalizadas. Formalmente:*

$$w_i = w_i^s = \begin{cases} w_i^r & \text{si } PA'_i \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A continuación se introduce la regla en dos pasos que da la misma solución que la regla $\xi^{s,w}$ con el peso definido.

DEFINICIÓN 4.2 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, se define la siguiente regla en dos pasos*

1. *El primer paso asigna valor 0 a los caminos no críticos en la ejecución, i.e. $\pi \in PA \setminus PA'$, y valor $\frac{1}{|PA'|}C(T^0 - T)$ a los caminos de PA' .*
2. *En el segundo paso, el reparto de coste entre las actividades retrasadas pertenecientes al camino, se realiza de forma proporcional a r_i^+ .*

PROPOSICIÓN 4.12 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como un problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, con peso $w = w^s$, la regla $\xi^{s,w}$ cumple las propiedades INP, IPN, BSA, BPA, MD, NMS, NAS y no cumple las propiedades DAPA, UIS, UPS y SE.*

DEMOSTRACIÓN Es directa teniendo en cuenta la proposición 4.10. □

Para cumplir la propiedad *UIS*, se puede repartir la holgura aplicando una solución del problema *SPERT* que cumpla la propiedad *PO*, creando una red *PERT* crítica.

PROPOSICIÓN 4.13 *Dado un problema CPERT, $(PE, e, b, C) \in CP^n$, modelizado como un problema CAW, $(N, q, C, \alpha, w) \in CAW^n$, con peso $w = w^r$, la regla $\xi^{s,w}$ aplicada sobre redes PERT críticas, cumple las propiedades INP, IPN, BSA, BPA, UIS, MD y NMS y NAS si la regla de reparto cumple estas mismas propiedades y no cumple las propiedades UPS, DAPA y SE.*

DEMOSTRACIÓN Es directa teniendo en cuenta la proposición 4.11. □

4.5. Comparación

En esta sección se presenta desde distintos puntos de vista la comparación de las reglas presentadas a lo largo de este capítulo. Los tres enfoques realizados son:

- En función de las propiedades.
- En función de la complejidad.
- Mediante ejemplos significativos.

La notación usada es:

- P para la regla proporcional del problema de bancarrota (Brânzei et al. (2002)[6]).
- P^d para la regla proporcional del problema de bancarrota resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$ (Brânzei et al. (2002)[6]).
- P^r para la regla proporcional del problema de bancarrota resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$ (Brânzei et al. (2002)[6]).

- $R2$ para la regla en dos pasos basada en los retrasos (Brânzei et al. (2002)[6]).
- $S2$ para la regla en dos pasos basada en el reparto secuencial (Bergantiños y Sánchez (2002c)[4]).
- $Sh2$ para la regla en dos pasos basada en el valor de Shapley para el juego $(N^{**}, c_{(PE,R)}(S))$ (Bergantiños y Sánchez (2002c)[4]).
- SC^1 para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^r$ aplicada al problema original.
- SC^{1d} para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^r$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- SC^{1r} para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^r$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
- SC^2 para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^s$ aplicada al problema original.
- SC^{2d} para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^s$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
- SC^{2r} para la regla $\xi^{s,w}$ con $w = w^s$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.

4.5.1. En función de las propiedades

Con anterioridad, en las proposiciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 se han estudiado las diversas propiedades para cada una de las reglas, con lo que esta sección se limitará a resumir en la tabla 4.5, toda esa información.

Cuadro 4.5: Cumplimiento de propiedades

	P	P^d, P^r	$R2$	$S2, Sh2$	SC^1	SC^{1d}, SC^{1r}	SC^2	SC^{2d}, SC^{2r}
DAPA	✓							
INP			✓	✓	✓	✓	✓	✓
IPN	✓	✓			✓	✓	✓	✓
BSA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
BPA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
UIS		✓				✓		✓
UPS	✓	✓			✓	✓		
SE								
NMS	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
NAS	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
MD	✓	✓			✓	✓	✓	✓

Se pueden extraer varias conclusiones:

- Las reglas en dos pasos no cumplen la propiedad MD y por lo tanto pueden imputar un coste superior a su retraso en problemas cuya función de coste es la identidad.
- Sólo las reglas en las que se ha realizado un reparto previo de la holgura cumplen la propiedad UIS .
- las reglas SC^d y SC^r son las únicas presentadas que cumplen UIS , UPS , NMS y NAS .
- La elección entre las reglas SC^1 , SC^{1d} y SC^{1r} o SC^2 , SC^{2d} y SC^{2r} se debe realizar en función de la conveniencia o no del cumplimiento de la propiedad UPS .

4.5.2. En función de la complejidad.

La complejidad de las distintas reglas es:

- La regla P , SC^1 y SC^2 son computables en tiempo polinomial en el peor de los casos.

- Las reglas P^d , P^r , SC^{1d} , SC^{1r} , SC^{2d} y SC^{2r} , son calculables en tiempo polinomial en media, dado que el reparto de la holgura mediante la regla Q^w con peso d_i o $b_i - a_i$ tiene esa complejidad.
- Las reglas en dos pasos $R2$, $S2$ y $Sh2$ son computables en el peor de los casos en tiempo exponencial, dado que es necesario enumerar todos los caminos retrasados en el $PERT$ ejecutado.

Por último, se debe hacer notar que toda regla que no cumpla la propiedad IPN , tendrá una complejidad elevada, dado que al depender del número de caminos es muy probable que sea necesario en algún momento de su cálculo, realizar la enumeración de ciertos caminos.

4.5.3. Mediante ejemplos significativos.

En esta sección se presentan diversos ejemplos ilustrativos que muestran las irregularidades en determinadas situaciones reales generadas por la utilización de alguna de las reglas. En todos los ejemplos se supone que $C(x) = x \forall x \in \mathfrak{R}$ y que $b_i = \max_{\{j \in PredIm(x_{i,1})\}} e_j$.

Irrelevancia de las duraciones

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la duración de las actividades.

EJEMPLO 4.8 Dado el problema $CPERT (PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 1, 2)$, $B \sim \beta(999, 1000, 1001)$, $C \sim \beta(11000, 1101, 1102)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (1, 1000, 1101)$ y $R = (1, 100, 0)$, se muestra en la tabla 4.6 que las diferencias en las duraciones sólo son consideradas por las reglas P^d , SC^{1d} y SC^{2d} .

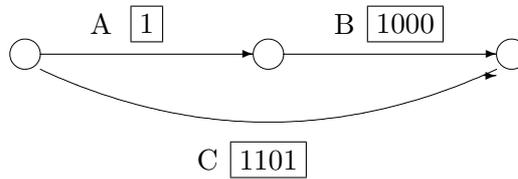


Figura 4.6: Red del ejemplo 4.8.

Cuadro 4.6: Reparto del ejemplo 4.8.

	$P; R2; SC^1; SC^2$	$P^d; SC^{1d}; SC^{2d}$	$P^r; S2; SC^{1r}; SC^{2r}$	$Sh2$
f_A	0.01	0.9	0	0.5
f_B	0.99	0.1	1	0.5
f_C	0	0	0	0

Comportamiento ante la dispersión.

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran la dispersión de las actividades.

EJEMPLO 4.9 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B, C\}$; $A \sim \beta(0, 100, 200)$, $B \sim \beta(50, 100, 150)$, $C \sim \beta(300, 350, 400)$, $PA = \{\{A, B\}, \{C\}\}$; $D = (100, 100, 350)$ y $R = (100, 100, 0)$, se muestra en la tabla 4.7 que sólo las reglas P^r , SC^{1r} y SC^{2r} consideran en su solución la dispersión de la duración de las actividades.

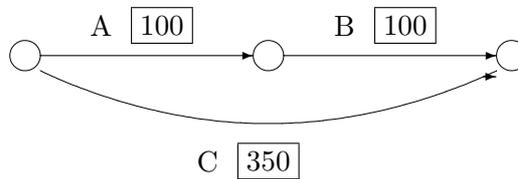


Figura 4.7: Red del ejemplo 4.9.

Cuadro 4.7: Reparto del ejemplo 4.9.

	$P; P^d; R2; S2; Sh2; SC^1; SC^{1d}; SC^2; SC^{2d}$	$P^r; SC^{1r}; SC^{2r}$
f_A	25	0
f_B	25	50
f_C	0	0

Variación producida por subdivisión.

Este ejemplo ilustra que no todas las reglas consideran las subdivisiones de las actividades.

EJEMPLO 4.10 Dado los problemas CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B, C, D\}$; $PA = \{\{A, B, C\}, \{A, D\}\}$; $D = (2, 1, 1, 2)$ y $R = (2, 2, 4, 2)$, y $(PE^*, e^*, b^*, C) \in CP^m$ donde $M = \{A, B, D\}$; $PA^* = \{\{A, B\}, \{A, D\}\}$; $D^* = (2, 2, 2)$ y $R^* = (2, 6, 2)$ se muestra en las tablas 4.8 y 4.9 que las reglas S2 y Sh2 varían ante las subdivisiones. Esta situación puede llevar a que redes similares en la realidad, tengan soluciones distintas, únicamente por el planteamiento realizado.

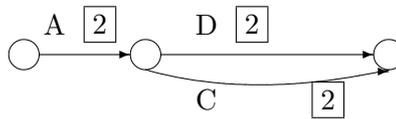


Figura 4.8: Red del ejemplo 4.10 sin subdivisiones

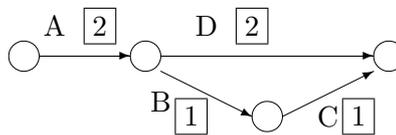


Figura 4.9: Red del ejemplo 4.10 con subdivisiones

Cuadro 4.8: Reparto en el ejemplo 4.10 sin subdivisiones

	$P; P^d; P^r$	$R2$	$S2$	$Sh2$	$SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$	$SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}$
f_A	16/11	32/13	5/2	2	2	8/7+24/23
f_C	48/11	48/13	4	9/2	6	15/7+45/23
f_D	24/11	24/13	3/2	3/2	0	12/7

Cuadro 4.9: Reparto en el ejemplo 4.10 con subdivisiones

	$P; P^d; P^r$	$R2$	$S2$	$Sh2$	$SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$	$SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}$
f_A	16/11	32/13	13/6	29/12	2	8/7+24/23
f_B	16/11	16/13	7/6	17/12	2	5/7+15/23
f_C	32/11	32/13	19/6	32/12	4	10/7+30/23
f_D	24/11	24/13	9/6	18/12	0	12/7

Inestabilidad de las soluciones.

Los siguientes ejemplos ilustran que no todas las soluciones son estables, menores cambios introducidos en el problema causan importantes cambios en las soluciones.

EJEMPLO 4.11 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B\}$; $A \sim \beta(0, 2, 4)$, $B \sim \beta(0, 2, 4)$, $PA = \{\{A\}, \{B\}\}$; $D = (2, 2)$ y $R = (1, 1)$, la solución de todas las reglas es igual, como se puede ver en la tabla 4.10, sin embargo con sólo variar levemente el vector de retrasos $R^* = (1, (1 + \epsilon))$ las reglas SC^2 , SC^{2d} y SC^{2r} varían notablemente.

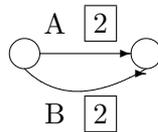


Figura 4.10: Red del ejemplo 4.11.

Cuadro 4.10: Reparto en el ejemplo 4.11 sin variación.

	$P; P^d; P^r; R2; S2; Sh2; SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}; SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$
f_A	0.5
f_B	0.5

Cuadro 4.11: Reparto en el ejemplo 4.11 con variación

	$P; P^d; P^r; R2; S2; Sh2; SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}$	$SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$
f_A	0.5	0
f_B	$0,5 + \epsilon$	$1 + \epsilon$

EJEMPLO 4.12 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B\}$; $A \sim \beta(101, 100, 102)$, $B \sim \beta(0, 1, 2)$, $PA = \{\{A\}, \{B\}\}$; $D = (100, 1)$ y $R = (99, 99)$, en la tabla 4.12 se presenta la solución de las distintas reglas, sin embargo con sólo variar levemente el vector de retrasos $R^* = (99, (99 + \epsilon))$ la regla R2 varía notablemente. Notar que con el primer vector de retrasos la única regla que imputa coste a la actividad B es la proporcional, esto se debe al cumplimiento de la propiedad DAPA.

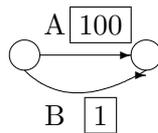


Figura 4.11: Red del ejemplo 4.12.

Cuadro 4.12: Reparto en el ejemplo 4.12.

	P	$P^d; P^r; R2; S2; Sh2; SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}; SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$
f_A	$99/2$	99
f_B	$99/2$	0

Cuadro 4.13: Reparto en el ejemplo 4.12 con la variación

	$P; R2$	$P^d; P^r$	$S2; Sh2; SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}$	$SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$
f_A	$99*99/198+\epsilon$	$99*99/99+\epsilon$	$99-\epsilon/2$	99
f_B	$99*(99+\epsilon)/198+\epsilon$	$99 * \epsilon/99+\epsilon$	$\epsilon/2$	0

Irrelevancia del número de caminos

El siguiente ejemplo ilustra que las reglas $R2$, $S2$ y $Sh2$ tienen una gran dependencia del número de caminos.

EJEMPLO 4.13 Dado el problema CPERT $(PE, e, b, C) \in CP^n$ donde $N = \{A, B1, \dots, B18\}$ $A \sim \beta(5, 6, 7)$, $B_i \sim \beta(0, 1, 2)$, PA definidos en la red $D = (6, 1, \dots, 1)$ y $R = (6, 1, \dots, 1)$, la solución de las reglas que enumeran los caminos tienen una alta dependencia de ello, como se muestra en la tabla 4.14. Esto se debe a que cada actividad B_i pertenece a 729 caminos y la actividad A sólo a un camino.

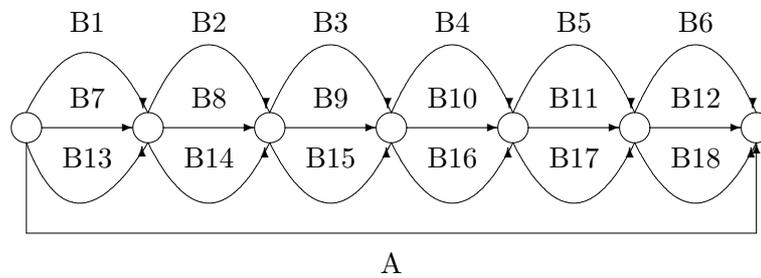


Figura 4.12: Red del ejemplo 4.13.

Cuadro 4.14: Reparto en el ejemplo 4.13.

	$P; P^d; P^r; SC^1; SC^{1d}; SC^{1r}; SC^2; SC^{2d}; SC^{2r}$	$R2; S2; Sh2$
f_A	1.5	$6/730=0.00816$
f_{B_i}	0.25	$(6*729)/(730*18)=0.33288$

Capítulo 5

Estimación del valor de Shapley

Algunas de las soluciones propuestas para resolver el problema *APERT*, Sh^d , Sh^r y Sh^c , están basadas en el cálculo del valor de Shapley del correspondiente juego asociado. El cálculo exacto del valor de Shapley tiene una complejidad exponencial (Shapley (1953)[27]), dado que hay que calcular la contribución marginal de un jugador en todas las subcoaliciones de N . Por este motivo, para la implementación de estas soluciones en un caso real, donde el cálculo exacto es inviable, es necesario crear una aproximación al valor exacto que sea computable en tiempo polinomial y ofrezca una cota para el error de la aproximación realizada.

El muestreo estadístico permite obtener estimaciones de parámetros poblacionales mediante el estudio de los valores de una muestra de esa población. Con este tipo de aproximaciones, se puede aproximar el valor de Shapley y cualquier semivalor (Castro et al. (2007c)[11]).

Este capítulo comienza con la exposición de los fundamentos teóricos de dicha aproximación. A continuación, se presentan los algoritmos para el cálculo de esta aproximación, tanto para el valor de Shapley como para cualquier semivalor. Por último, se presentan seis ejemplos donde se aplican los algoritmos anteriormente descritos y se estudia la velocidad de convergencia y el error cometido en ellos.

5.1. Estimación de un semivalor

Se define un semivalor, para un jugador i , como una combinación lineal convexa de las contribuciones marginales de ese jugador en los distintos subconjuntos de $N \setminus \{i\}$, es decir:

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} P_s (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Donde $\forall i \in N$,

$$\sum_{s=1}^n \binom{n-1}{s-1} P_s = 1, \quad P_s \geq 0 \quad y \quad 1 \leq s \leq n.$$

El problema del cálculo del semivalor tiene complejidad exponencial dado que el sumatorio se debe realizar $\forall S \subset N \setminus \{i\}$. Por ello, se estimará el semivalor, para cada jugador i , mediante muestreo aleatorio de las subcoaliciones contenidas en $N \setminus \{i\}$. Formalmente:

- Se define la población $M^i = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ como el conjunto de los subconjuntos de $N \setminus \{i\}$ siendo $m = 2^{n-1}$.
- El valor de la variable aleatoria en estudio, X^i , es la contribución marginal del jugador i en cada $S \subset N \setminus \{i\}$ (i.e. $x^i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$).
- El muestreo utilizado es un muestreo aleatorio con reposición, con probabilidad de selección del elemento k -ésimo de la población (S_k) igual a $P_{|S_k|}$, de tamaño muestral n . Se denota por $(S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*)$ la muestra seleccionada.
- El parámetro a estudiar es el semivalor, $\theta_i = \psi_i(v)$.
- El estimador es la media muestral, $\hat{\theta}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^i(S_k^*)$.

En lo sucesivo se nota al elemento k -ésimo de la población (S_k) por su índice k y a $P_{|S_k|}$ por P_k .

PROPOSICIÓN 5.1 *En un muestreo aleatorio con reposición con probabilidad de selección del elemento k -ésimo de la población igual a P_k , el estimador $\hat{\theta}_i$ es insesgado de $\psi_i(v)$.*

DEMOSTRACIÓN Se define $\forall k \in M^i$, e_k como 1, si k pertenece a la muestra y 0, en otro caso.

$$E[\hat{\theta}_i] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^i(S_k^*)\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m x^i(k) E[e_k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m x^i(k) n P_k = \sum_{k=1}^m x^i(k) P_k = \psi_i(v).$$

□

PROPOSICIÓN 5.2 *En un muestreo aleatorio con reposición con probabilidad de selección del elemento k -ésimo de la población igual a P_k la varianza de $\hat{\theta}_i$ es:*

$$Var[\hat{\theta}_i] = \frac{\sigma_{\hat{\theta}_i}^2}{n} \quad \text{donde} \quad \sigma_{\hat{\theta}_i}^2 = \sum_{k=1}^m (x^i(k) - \theta_i)^2 P_k \quad \text{y} \quad \theta_i = \psi_i(v).$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} Var[\hat{\theta}_i] &= Var\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^i(S_k^*)\right] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m x^i(k) e_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^m Var\left[\frac{1}{n} x^i(k) e_k\right] + \sum_{k \neq j} Cov\left[\frac{1}{n} x^i(j) e_j, \frac{1}{n} x^i(k) e_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{(x^i(k))^2}{(n)^2} Var[e_k] + \sum_{k \neq j} \frac{x^i(j) x^i(k)}{(n)^2} Cov[e_j, e_k] = \\ &\sum_{k=1}^m \frac{(x^i(k))^2}{(n)^2} n P_k (1 - P_k) + \sum_{k \neq j} \frac{x^i(j) x^i(k)}{(n)^2} (-n P_j P_k) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Además

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=1}^m x^i(j)P_j \right)^2 &= \sum_{j=1}^m (x^i(j)P_j)^2 + \sum_{j \neq k}^m x^i(j)P_j x^i(k)P_k \Rightarrow \\
 - \sum_{j \neq k}^m x^i(j)P_j x^i(k)P_k &= \sum_{j=1}^m (x^i(j)P_j)^2 - \left(\sum_{j=1}^m x^i(j)P_j \right)^2 \\
 &= \sum_{j=1}^m (x^i(j)P_j)^2 - \theta_i^2
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera

$$\begin{aligned}
 Var[\hat{\theta}_i] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (x^i(k))^2 P_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (x^i(k)P_k)^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (x^i(k)P_k)^2 - \frac{\theta_i^2}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^m (x^i(k))^2 P_k - \theta_i^2 \right]
 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m (x^i(k) - \theta_i)^2 P_k &= \sum_{k=1}^m (x^i(k))^2 P_k - 2\theta_i \sum_{k=1}^m x^i(k)P_k + \theta_i^2 \sum_{k=1}^m P_k = \\
 \sum_{k=1}^m (x^i(k))^2 P_k - 2\theta_i \theta_i + 2\theta_i^2 &= \sum_{k=1}^m (x^i(k))^2 P_k - \theta_i^2
 \end{aligned}$$

entonces

$$Var[\hat{\theta}_i] = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^m (x^i(k) - \theta_i)^2 P_k \right] = \frac{\sigma_{\hat{\theta}_i}^2}{n}.$$

□

COROLARIO 5.1 *En un muestreo aleatorio con reposición con probabilidad de selección del elemento k -ésimo de la población igual a P_k , el estimador $\hat{\theta}_i$ es consistente para $\psi_i(v)$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_i - \psi_i(v)| > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$.*

COROLARIO 5.2 *Si un jugador i es pelele, entonces $\hat{\theta}_i = \psi_i(v)$ para cualquier tamaño muestral.*

DEMOSTRACIÓN Directa teniendo en cuenta que la variable aleatoria X^i es degenerada.

□

A continuación se estudia el error cometido mediante esta estimación

Se puede suponer sin pérdida de generalidad un n muy alto, dado que la estimación definida va a ser utilizada en juegos en los que el cálculo de $v(S)$ es polinomial $\forall S \subset N$, y por lo tanto, la utilización de un valor alto de n no supone un gasto computacional importante. Teniendo en cuenta esto, el teorema central del límite y las proposiciones 5.1 y 5.2, se establece que

$$\hat{\theta}_i \sim N(E[\hat{\theta}_i], Var[\hat{\theta}_i]) = N(\psi_i(v), \frac{\sigma_{\hat{\theta}_i}^2}{n}).$$

Entonces el tamaño muestral necesario para que la $P\left(|\hat{\theta}_i - \theta_i| \leq e\right) \geq 1 - \alpha$ es, $n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma_{\hat{\theta}_i}^2}{e^2}$, donde $Z_{\alpha/2}$ es el valor tal que $P(Z \geq Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, siendo $Z \sim N(0, 1)$. Es decir, si se toma un valor de n mayor o igual a $\frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma_{\hat{\theta}_i}^2}{e^2}$, entonces el error cometido en la estimación es menor que e con una probabilidad superior a $1 - \alpha$.

Teniendo en cuenta que el valor de $\sigma_{\theta_i}^2$ es desconocido, se acotará su valor para determinar una cota del tamaño muestral. Si se define $x_{max}^i = \max_{S \subset N \setminus \{i\}} x^i(S)$ y $x_{min}^i = \min_{S \subset N \setminus \{i\}} x^i(S)$ entonces

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \sum_{k=1}^m (x^i(k) - \theta_i)^2 P_k \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4}.$$

Es posible que el cálculo de x_{max}^i y x_{min}^i no pueda realizarse en tiempo polinomial, lo que impide a efectos prácticos calcularlos. En estas situaciones, se puede encontrar una cota más general. Se define $v_{max} = \max_{S \subset N} v(S)$ y $v_{min} = \min_{S \subset N} v(S)$, entonces si el juego es superaditivo $(x_{max}^i - x_{min}^i) \leq (v_{max} - v_{min})$ y si el juego no lo es $(x_{max}^i - x_{min}^i) \leq 2(v_{max} - v_{min})$.

5.2. Algoritmos

El cálculo de $\hat{\theta}_i$ es computable en tiempo polinomial si la selección de un subconjunto de $N \setminus \{i\}$ en las condiciones descritas y el cálculo de $v(S)$ para cualquier S , son computables en tiempo polinomial. Si v_{max} y v_{min} son calculables en tiempo polinomial es posible determinar una cota superior para el error que se está cometiendo con una probabilidad determinada. El algoritmo para el cálculo de cualquier semivalor es:

Algoritmo AproxSemivalor

Begin

Para todo $i \in N$ hacer

Begin

Determinar n

Cont:= 0 y $\hat{\theta}_i := 0$

Mientras Cont < n

Begin

Obtener un $S \subset N \setminus \{i\}$ de tal forma que la probabilidad de selección del elemento S sea P_S .

Calcular $x^i(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S)$

$\hat{\theta}_i := \hat{\theta}_i + x^i(S)$

Cont:=Cont +1

End

$\hat{\theta}_i = \frac{\hat{\theta}_i}{n}$

End

End

OBSERVACIÓN 5.1 *la selección de un elemento de M^i , se puede realizar en tiempo polinoimial, para cualquier semivalor, sin más que seleccionar, con probabilidades $\binom{n-1}{s-1} P_s$, el cardinal de la coalición y posteriormente seleccionar, con probabilidades iguales, un subconjunto del tamaño seleccionado.*

Aunque para el valor de Shapley $E \left[\sum_{k=1}^{|N|} \hat{\theta}_i \right] = v(N)$, no se puede garantizar que $\sum_{k=1}^{|N|} \hat{\theta}_i = v(N)$.

Por ello, se plantea un algoritmo que garantice esta igualdad para el valor de Shapley, mediante la definición del valor de Shapley como la media de las contribuciones marginales en todos los posibles ordenes. Formalmente:

- Se define la población $M = \{O_1, \dots, O_m\}$ como el conjunto de las ordenaciones de los N jugadores, donde $m = n!$.

- El valor de la variable aleatoria en estudio, X^i , es la contribución marginal del jugador i en cada orden (i.e. $x^i(O) = v(Pre^i(O) \cup \{i\}) - v(Pre^i(O))$).
- El muestreo utilizado es un muestreo aleatorio con reposición, con probabilidad de selección del elemento O_i de la población igual a $\frac{1}{n!}$ de tamaño muestral n .
- El parámetro a estudiar es el valor de Shapley, $\theta_i = Sh_i(v)$.
- El estimador es la media muestral, $\hat{\theta}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^i(O_k)$.

Algoritmo AproxShapley

```

Begin
  Determinar  $n$ 
  Cont:= 0 y  $\hat{\theta}_i := 0 \forall i \in N$ .
  Mientras Cont <  $n$ 
    Begin
      Obtener un orden ( $O$ ) de los jugadores de tal forma que
        todos los órdenes tengan igual probabilidad.
      Para todo  $i \in N$  hacer
        Begin
          Calcular  $Pre^i(O)$ 
          Calcular  $x^i(O) := v(Pre^i(O) \cup \{i\}) - v(Pre^i(O))$ 
           $\hat{\theta}_i := \hat{\theta}_i + x^i(O)$ 
        End
      Cont:=Cont +1
    End
  End
   $\hat{\theta}_i = \frac{\hat{\theta}_i}{n} \forall i \in N$ .
End
    
```

OBSERVACIÓN 5.2 *El algoritmo anterior es eficiente dado que en cada iteración se reparten entre los jugadores de un orden, a cada uno el valor de su contribución marginal, el valor de $v(N)$.*

OBSERVACIÓN 5.3 *Es posible calcular el valor de Shapley ponderado con pesos w , sin más que obtener en el algoritmo anterior las ordenaciones con probabilidad,*

$$P_w(O) = \prod_{k=1}^n (w_{O(k)} / \sum_{l=1}^k w_{O(l)}).$$

5.3. Ejemplos

En esta sección se muestran varios ejemplos que ilustran la utilidad del método descrito para el cálculo del valor de Shapley.

5.3.1. Juego de votación simétrico.

Sea el juego (N, v) donde $N = \{1, \dots, 1000\}$ y $\forall S \subset N$,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| > 500, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor de Shapley de este juego es 0,001 para cada jugador, dado que son jugadores simétricos. En la tabla 5.1, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 1000 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{1}{4}$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.1: Errores del juego de votación simétrico

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	0.004	0.001	0.00034	0.000106	0.000036	0.000011
e_{med}	0.000684	0.000252	0.000083	0.000026	0.000008	0.000003
$e_{teórico}$	0.0475	0.015	0.00475	0.0015	0.000475	0.00015

5.3.2. Juego de votación no simétrico.

Sea el juego (N, v) definido en Owen (1995)[24] para la elección del presidente de Estados Unidos, donde $N = \{1, \dots, 51\}$ y $\forall S \subset N$,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i \in S} w_i > \frac{\sum_{j \in N} w_j}{2}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $w = \{w_1, \dots, w_{51}\} = \{45, 41, 27, 26, 26, 25, 21, 17, 17, 14, 13, 13, 12, 12, 12, 11, \underbrace{10, \dots, 10}_{4 \text{ veces}}, \underbrace{9, \dots, 9}_{4 \text{ veces}}, 8, 8, \underbrace{7, \dots, 7}_{4 \text{ veces}}, \underbrace{6, \dots, 6}_{4 \text{ veces}}, 5, \underbrace{4, \dots, 4}_{9 \text{ veces}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{7 \text{ veces}}\}$.

El valor de Shapley de este juego y la aproximación mediante la extensión multilineal de Owen, se calculan en Owen (1995)[24] y se puede ver en las tablas 5.2 y 5.3, junto con el valor de la aproximación presentada en este trabajo con $n = 10^8$.

Cuadro 5.2: Comparación con el valor de Shapley en el juego de votación no simétrico

Jugador	Shapley	Multilineal	Muestreo
1	0.08831	0.08852	0.088257
2	0.07973	0.07976	0.079723
3	0.05096	0.05113	0.050952
4	0.04898	0.04915	0.048959
5	0.04898	0.04915	0.048976
6	0.04700	0.04716	0.047010
7	0.03917	0.03928	0.039199
8	0.03147	0.03157	0.031455
9	0.03147	0.03157	0.031420
10	0.02577	0.02586	0.025759
11	0.02388	0.02396	0.023847
12	0.02388	0.02396	0.023859
13	0.02200	0.02207	0.022037
14	0.02200	0.02207	0.021991
15	0.02200	0.02207	0.022018
16	0.02013	0.02019	0.020128
17	0.01827	0.01833	0.018281
18	0.01827	0.01833	0.018278
19	0.01827	0.01833	0.018277
20	0.01827	0.01833	0.018262
21	0.01641	0.01647	0.016452
22	0.01641	0.01647	0.016417
23	0.01641	0.01647	0.016424
24	0.01641	0.01647	0.016401
25	0.01456	0.01461	0.014572
26	0.01456	0.01461	0.014577
27	0.01272	0.01276	0.012716
28	0.01272	0.01276	0.012716
29	0.01272	0.01276	0.012703
30	0.01272	0.01276	0.012736

Cuadro 5.3: Comparación con el valor de Shapley en el juego de votación no simétrico

Jugador	Shapley	Multilineal	Muestreo
31	0.01088	0.01092	0.010905
32	0.01088	0.01092	0.010901
33	0.01088	0.01092	0.010871
34	0.01088	0.01092	0.010888
35	0.009053	0.009078	0.0090567
36	0.007230	0.007243	0.0072156
37	0.007230	0.007243	0.0072248
38	0.007230	0.007243	0.0072389
39	0.007230	0.007243	0.0072208
40	0.007230	0.007243	0.0072332
41	0.007230	0.007243	0.0072324
42	0.007230	0.007243	0.0072160
43	0.007230	0.007243	0.0072478
44	0.007230	0.007243	0.0072206
45	0.005412	0.005431	0.0054173
46	0.005412	0.005431	0.0054107
47	0.005412	0.005431	0.0054221
48	0.005412	0.005431	0.0054045
49	0.005412	0.005431	0.0054231
50	0.005412	0.005431	0.0054140
51	0.005412	0.005431	0.0054084

En la tabla 5.4, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 51 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{1}{4}$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.4: Errores del juego de votación no simétrico

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	0.00883	0.004495	0.000969	0.000283	0.000115	0.000053
e_{med}	0.003104	0.001073	0.000321	0.000082	0.00003	0.000014
$e_{teórico}$	0.0475	0.015	0.00475	0.0015	0.000475	0.00015

Hay que notar que con tamaños de n superiores o iguales a 10^7 , la aproximación realizada mediante muestreo estadístico mejora la aproximación multilinear de Owen dado que los errores e_{max} y e_{med} de la extensión multilinear son 0,00021 y 0,000057 respectivamente.

5.3.3. Juego del aeropuerto.

Sea el juego (N, c) donde $N = \{1, \dots, 100\}$ y $\forall S \subset N$,

$$c(S) = \max_{i \in S} c_i,$$

Donde $c = \{c_1, \dots, c_{100}\} = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{8 \text{ veces}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{12 \text{ veces}}, \underbrace{3, \dots, 3}_{6 \text{ veces}}, \underbrace{4, \dots, 4}_{14 \text{ veces}}, \underbrace{5, \dots, 5}_{8 \text{ veces}}, \underbrace{6, \dots, 6}_{9 \text{ veces}}, \underbrace{7, \dots, 7}_{13 \text{ veces}}, \underbrace{8, \dots, 8}_{10 \text{ veces}}, \underbrace{9, \dots, 9}_{10 \text{ veces}}, \underbrace{10, \dots, 10}_{10 \text{ veces}}\}$.

El valor de Shapley de este juego según el corolario 1.1, es el valor resultante de aplicar la regla secuencial. En las tablas 5.5 y 5.6 se muestra el valor de Shapley y el obtenido mediante la estimación realizada por el método descrito con $n = 10^8$.

Cuadro 5.5: Comparación con el valor de Shapley en el juego del aeropuerto

Jug.	Shapley	Muestreo	Jug.	Shapley	Muestreo
1	0.01	0.01000240	26	0.033369565	0.03336215
2	0.01	0.01002122	27	0.046883079	0.04681264
3	0.01	0.00999404	28	0.046883079	0.04693904
4	0.01	0.01001061	29	0.046883079	0.04686664
5	0.01	0.00998937	30	0.046883079	0.04683868
6	0.01	0.01000476	31	0.046883079	0.04688131
7	0.01	0.01000974	32	0.046883079	0.04694949
8	0.01	0.00998920	33	0.046883079	0.04686780
9	0.020869565	0.02086825	34	0.046883079	0.04687685
10	0.020869565	0.02086269	35	0.046883079	0.04681076
11	0.020869565	0.02085620	36	0.046883079	0.04693215
12	0.020869565	0.02087864	37	0.046883079	0.04683531
13	0.020869565	0.02089870	38	0.046883079	0.04687293
14	0.020869565	0.02086929	39	0.046883079	0.04688354
15	0.020869565	0.02089350	40	0.046883079	0.04686851
16	0.020869565	0.02087001	41	0.063549745	0.06363301
17	0.020869565	0.02086078	42	0.063549745	0.06354695
18	0.020869565	0.02085292	43	0.063549745	0.06358871
19	0.020869565	0.02085290	44	0.063549745	0.06351779
20	0.020869565	0.02087947	45	0.063549745	0.06346493
21	0.033369565	0.03335218	46	0.063549745	0.06350608
22	0.033369565	0.03335009	47	0.063549745	0.06354124
23	0.033369565	0.03339154	48	0.063549745	0.06356064
24	0.033369565	0.03329275	49	0.082780515	0.08280608
25	0.033369565	0.03338934	50	0.082780515	0.08276462

Cuadro 5.6: Comparación con el valor de Shapley en el juego del aeropuerto

Jug.	Shapley	Muestreo	Jug.	Shapley	Muestreo
51	0.082780515	0.08284313	76	0.139369662	0.13940729
52	0.082780515	0.08268617	77	0.139369662	0.13934942
53	0.082780515	0.08276607	78	0.139369662	0.13951629
54	0.082780515	0.08285130	79	0.139369662	0.13936278
55	0.082780515	0.08290920	80	0.139369662	0.13935631
56	0.082780515	0.08279981	81	0.189369662	0.18945158
57	0.082780515	0.08277814	82	0.189369662	0.18946746
58	0.106036329	0.10594986	83	0.189369662	0.18939991
59	0.106036329	0.10600076	84	0.189369662	0.18936684
60	0.106036329	0.10592028	85	0.189369662	0.18945528
61	0.106036329	0.10605632	86	0.189369662	0.18939632
62	0.106036329	0.10598094	87	0.189369662	0.18929814
63	0.106036329	0.10627204	88	0.189369662	0.18936075
64	0.106036329	0.10611809	89	0.189369662	0.18925926
65	0.106036329	0.10614854	90	0.189369662	0.18938667
66	0.106036329	0.10605967	91	0.289369662	0.28941387
67	0.106036329	0.10604222	92	0.289369662	0.28922169
68	0.106036329	0.10618083	93	0.289369662	0.28929850
69	0.106036329	0.10598174	94	0.289369662	0.28949639
70	0.106036329	0.10612261	95	0.289369662	0.28946205
71	0.139369662	0.13937247	96	0.289369662	0.28920360
72	0.139369662	0.13923064	97	0.289369662	0.28943995
73	0.139369662	0.13934868	98	0.289369662	0.28930091
74	0.139369662	0.13927767	99	0.289369662	0.28926759
75	0.139369662	0.13934098	100	0.289369662	0.28925455

En la tabla 5.7, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 100 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{10^2}{4} = 25$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.7: Errores del juego del aeropuerto

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	0.06663	0.03726	0.00621	0.00191	0.00064	0.00024
e_{med}	0.01441	0.00535	0.00121	0.00048	0.00015	0.00005
$e_{teórico}$	0.31	0.098	0.031	0.0098	0.0031	0.00098

5.3.4. Juego de los zapatos.

Sea el juego (N, v) donde $N = \{1, \dots, 100\}$ y $\forall S \subset N$,

$$v(S) = \min\{|S_{izq}|, |S_{der}|\},$$

Donde $|S_{izq}|$ es el número de zapatos del pie izquierdo, siendo los primeros 50 jugadores poseedores de un zapato del pie izquierdo y $|S_{der}|$ es el número de zapatos del pie derecho, siendo los últimos 50 jugadores poseedores de un zapato del pie derecho.

El valor de Shapley de este juego por simetría es: $Sh_i = \frac{1}{2} \quad \forall i \in N$. En la tabla 5.8, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 100 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{1}{4}$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.8: Errores del juego de los zapatos

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	0.046	0.01285	0.00285	0.001265	0.000355	0.0001255
e_{med}	0.01095	0.00385	0.00095	0.00031	0.000115	0.000035
$e_{teórico}$	0.031	0.0098	0.0031	0.00098	0.00031	0.000098

5.3.5. Juego del árbol de recubrimiento mínimo.

Sea el juego de coste (N, c) y un grafo valorado $G = (N \cup \{0\}, A)$, donde $N = \{1, \dots, 100\}$, la valoración del arco (i, j) es

$$C_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j + 1) \text{ o } (i = j - 1) \text{ o } (i = 1 \text{ y } j = 100) \text{ o } (j = 1 \text{ e } i = 100) \\ 101 & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $\forall S \subset N$, $c(S) = \text{Árbol de recubrimiento mínimo del grafo } G|_{S \cup \{0\}}$, donde $G|_{S \cup \{0\}}$ es el grafo restringido a los jugadores de S y al nodo fuente.

El valor de Shapley de este juego por simetría del grafo es: $Sh_i = 2$, $\forall i \in N$. En la tabla 5.9, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 100 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{(100 - (-98))^2}{4} = 9801$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.9: Errores del juego del árbol de recubrimiento

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	7	1.7	0.625	0.2024	0.079	0.0214
e_{med}	2.454	0.5982	0.1864	0.0624	0.024	0.0066
$e_{teórico}$	6.14	1.96	0.614	0.196	0.0614	0.0196

5.3.6. Juego APERT.

Sea el juego $(N, v_{(PE,R)})$ definido en la sección 3.1.2 donde $(PE, e, b, B) \in AP^n$, $N = \{A, B1, \dots, B18\}$, $A \sim \beta(5, 6, 7)$, $B_i \sim \beta(0, 1, 2)$, PA el conjunto de caminos completos definidos en la red, $D = (6, 1, \dots, 1)$, $R = (6, 1, \dots, 1)$ y $B(x) = x \quad \forall x \in \mathfrak{R}$.

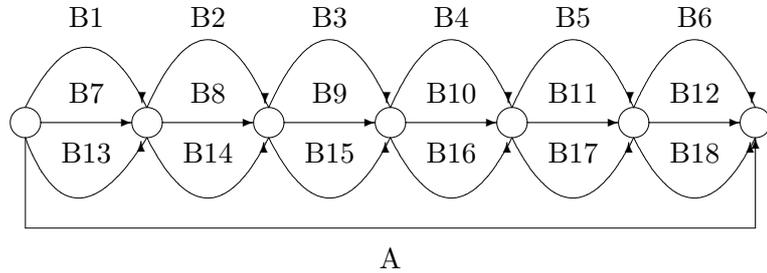


Figura 5.1: Red del ejemplo.

El valor de Shapley de este juego por simetría es: $Sh_i = -0,5$ si i es una de las actividades $B_j \forall j = 1, \dots, 18$ y $Sh_i = -1,5$ si $i = A$. En la tabla 5.10, se puede observar el error máximo cometido para cualquiera de los 19 jugadores, el error medio y el error teórico que se puede garantizar para un $\alpha = 0,01$ teniendo en cuenta que $\sigma_{\theta_i}^2 \leq \frac{(x_{max}^i - x_{min}^i)^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9$, en función del número de elementos muestreados.

Cuadro 5.10: Errores del juego APERT

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
e_{max}	0.057	0.01002	0.003852	0.000564	0.000576	0.000096
e_{med}	0.01158	0.00336	0.001152	0.000276	0.000144	0.00003
$e_{teórico}$	0.2736	0.0864	0.02736	0.00864	0.0027336	0.000864

Capítulo 6

Estudio de un caso real

En este capítulo se presenta un problema *PERT* real, al que se le aplican las soluciones que en esta memoria se han defendido.

El problema que se propone (López (1997)[19]), es la rehabilitación y saneamiento de las instalaciones del cortijo del Centro de Investigación y Desarrollo Agrario de Córdoba.

Dicho proyecto se elaboró por encargo de la Dirección General de Investigación y Extensión Agraria de la Consejería de Agricultura y Pesca de la Junta de Andalucía.

6.1. Presentación del proyecto.

Se comenzará enumerando las actividades que componen el proyecto. En las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se desglosan las actividades a realizar así como la descripción de las mismas.

Cuadro 6.1: Desglose del proyecto

n°	Nombre	Descripción
1	T1	Desbroce y limpieza de vegetación en la zona posterior de edificaciones
2	T2	Rebaje de una franja de 10 m de anchura en la zona posterior a fin de disminuir humedades
3	T3	Explanación y perfilado de las áreas anteriores
4	T4	Perfilado y tratamiento del suelo con estabilizador químico en la zona delantera de edificaciones
5	T5	Excavación de zanjas
6	D1	Demolición de la caseta de transformación, con transporte de escombros a vertedero
7	D2	Demolición de silo forrajero metálico y demolición de su base, con transporte de escombros a vertedero
8	D3A	Demolición y transporte a fábrica de mampostería y de ladrillo para abertura de nuevos huecos de puertas y ventanas en naves del edificio A.
9	D3C	Demolición y transporte a fábrica de mampostería y de ladrillo para abertura de nuevos huecos de puertas y ventanas en naves del edificio C.
10	D4A	Demolición de algunos tabiques divisorios para lograr mayor funcionalidad en naves del edificio A.
11	D4B	Demolición de algunos tabiques divisorios para lograr mayor funcionalidad en naves del edificio B.
12	D4C	Demolición de algunos tabiques divisorios para lograr mayor funcionalidad en naves del edificio C.
13	D5A	Desmontaje de las cubiertas de teja árabe y demolición del tablero de rasillón del edificio A, incluido transporte a vertedero.
14	D5B	Desmontaje de las cubiertas de teja árabe y demolición del tablero de rasillón del edificio B, incluido transporte a vertedero.
15	D5C	Desmontaje de las cubiertas de teja árabe y demolición del tablero de rasillón del edificio C, incluido transporte a vertedero.
16	D6A	Desmontaje de las cubiertas de placa ondulada de fibrocemento del edificio A.
17	D6B	Desmontaje de las cubiertas de placa ondulada de fibrocemento del edificio B.
18	D7A	Demolición de falsos techos de escayola en el edificio A.
19	D7C	Demolición de falsos techos de escayola en el edificio C.
20	D8B	Limpieza y saneamiento del sótano del local de mejora vegetal en el edificio B.
21	H1A	Reparación y saneamiento de soleras y Acerados de adoquín en el edificio A.
22	H1B	Reparación y saneamiento de soleras y Acerados de adoquín en el edificio B.
23	H2A	Reparación y saneamiento de soleras de hormigón en el edificio A.
24	H2B	Reparación y saneamiento de soleras de hormigón en el edificio B.
25	H2C	Reparación y saneamiento de soleras de hormigón en el edificio C.
26	H3A	Reparación y saneamiento de solerías de losetas, terrazos y baldosas del edificio A.

Cuadro 6.2: Desglose del proyecto

<i>n</i> ^o	Nombre	Descripción
27	H3B	Reparación y saneamiento de solerías de losetas, terrazos y baldosas del edificio B.
28	H4A	Saneamiento del revestimiento de paramentos verticales de azulejos y de zócalos de losetas en el edificio A.
29	H4C	Saneamiento del revestimiento de paramentos verticales de azulejos y de zócalos de losetas en el edificio C.
30	H5A	Picado y saneamiento de paramentos verticales con enfoscado y enlucido, tanto en el interior como en el exterior en el edificio A.
31	H5B	Picado y saneamiento de paramentos verticales con enfoscado y enlucido, tanto en el interior como en el exterior en el edificio B.
32	H5C	Picado y saneamiento de paramentos verticales con enfoscado y enlucido, tanto en el interior como en el exterior en el edificio C.
33	H6A	Construcción de tabiques divisorios de medio pie de espesor para boxes de partos, lazareto y boxes de toros en el edificio A.
34	H6B	Construcción de tabiques divisorios de medio pie de espesor para boxes de partos, lazareto y boxes de toros en el edificio B.
35	H7A	Construcción de tabiques de panderete con rasilla y mortero para aseos y servicios nuevos en el edificio A.
36	H7B	Construcción de tabiques de panderete con rasilla y mortero para aseos y servicios nuevos en el edificio B.
37	H8A	Construcción de servicios y cuartos de baño en el edificio A.
38	H8B	Construcción de servicios y cuartos de baño en el edificio B.
39	H9B	Solera de hormigón con armadura de mallazo y tratamiento superficial de cuarzo para nave taller del edificio B.
40	H10A	Solería de terrazo para servicios y aseos del edificio A.
41	H10B	Solería de terrazo para servicios y aseos del edificio B.
42	H11B	Saneamiento de forjados del edificio B.
43	H12A	Relleno con mampostería y ladrillo para cerramiento de huecos en el edificio A.
44	H12C	Relleno con mampostería y ladrillo para cerramiento de huecos en el edificio C.
45	H13A	Refuerzo de esquinas de huecos de puertas para anclaje de marcos en naves del edificio A.
46	H13B	Refuerzo de esquinas de huecos de puertas para anclaje de marcos en naves del edificio B.
47	H13C	Refuerzo de esquinas de huecos de puertas para anclaje de marcos en naves del edificio C.
48	H14	Encalado general de paramentos exteriores e interiores con dos manos de cal.
49	H15B	Restauración y saneamiento de entrada principal y escalera del edificio B.
50	H16	Restauración y saneamiento de alberca y aljibes existentes.
51	H17A	Solera de hormigón para patio de recreo en el edificio A.

Cuadro 6.3: Desglose del proyecto

n°	Nombre	Descripción
52	H18A	Comedero cubierto para vacuno de recría en el edificio A.
53	H19A	Instalación de vigas cargadero en el edificio A.
54	H19C	Instalación de vigas cargadero en el edificio C.
55	C1A	Limpieza y restauración de las cerchas de la cubierta en el edificio A.
56	C1B	Limpieza y restauración de las cerchas de la cubierta en el edificio B.
57	C1C	Limpieza y restauración de las cerchas de la cubierta en el edificio C.
58	C2A	Instalación de nueva cubierta con tablero de hormigón armado y teja de hormigón coloreado en el edificio A.
59	C2B	Instalación de nueva cubierta con tablero de hormigón armado y teja de hormigón coloreado en el edificio B.
60	C2C	Instalación de nueva cubierta con tablero de hormigón armado y teja de hormigón coloreado en el edificio C.
61	C3A	Instalación de falso techo con placa de laminado continuo en local de mejora vegetal del edificio A.
62	C4A	Instalación de falso techo de escayola en viviendas y naves transversales del edificio A.
63	C4B	Instalación de falso techo de escayola en viviendas y naves transversales del edificio B.
64	C5A	Reparación y saneamiento de los canalones y bajantes del edificio A.
65	C5B	Reparación y saneamiento de los canalones y bajantes del edificio B.
66	C5C	Reparación y saneamiento de los canalones y bajantes del edificio C.
67	S1	Instalación de sistemas de drenaje en zona posterior de edificaciones y su conexión con el colector general.
68	S2C	Instalación de saneamientos en el edificio C.
69	S3A	Reparación e instalación de saneamientos en el edificio A.
70	P1A	Reparación, saneamiento y refuerzo de ventanas, puertas y portones en el edificio A.
71	P1B	Reparación, saneamiento y refuerzo de ventanas, puertas y portones en el edificio B.
72	P1C	Reparación, saneamiento y refuerzo de ventanas, puertas y portones en el edificio C.
73	P2A	Instalación de nuevas puertas y ventanas para nuevos huecos y para aquellos casos en que no sea posible la reparación de las existentes en el edificio A.
74	P2B	Instalación de nuevas puertas y ventanas para nuevos huecos y para aquellos casos en que no sea posible la reparación de las existentes en el edificio B.
75	P2C	Instalación de nuevas puertas y ventanas para nuevos huecos y para aquellos casos en que no sea posible la reparación de las existentes en el edificio C.
76	P3C	Modificación de la entrada de los patios del edificio C, a fin de conseguir mayor amplitud y funcionalidad.

Cuadro 6.4: Desglose del proyecto

n°	Nombre	Descripción
77	P4	Instalación de nueva cerca en los laterales este, oeste y norte del recinto.
78	P5A	Instalación de portón en patio de recreo en el edificio A.
79	F1A	Instalación de servicios y aseos para vaqueros en el edificio A.
80	F1B	Instalación de servicios y aseos para operarios en el edificio B.
81	F2A	Abastecimiento de agua para todas las naves del edificio A.
82	F2B	Abastecimiento de agua para todas las naves del edificio B.
83	F2C	Abastecimiento de agua para todas las naves del edificio C.
84	E1	Preparación para la realización de las actividades T4 y H14

Para una mejor visualización de la red *PERT* se dividen las actividades en cuatro grupos, las actividades del edificio A, las del edificio B, las del edificio C y las obras exteriores. En las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 se presenta para cada actividad, su tiempo modal, máximo, mínimo y estimado, la duración real observada y el retraso de la actividad en su ejecución, así como sus actividades predecesoras inmediatas. En las figuras 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se muestra la red *PERT* del proyecto.

Cuadro 6.5: Actividades del edificio A

Actividad	a_i	m_i	b_i	d_i	d_i^0	r_i	Predecesoras
D3A	1	1	1	1	1	0	-
D4A	0	0	6	1	4	3	D3A
D5A	0	3	6	3	0	-3	-
D6A	1	2	3	2	1	-1	D5A
D7A	1	1	7	2	3	1	D6A
C1A	0	4	8	4	5	1	D7A
C2A	8	17	20	16	18	2	C1A
C3A	1	3	5	3	4	1	C2A
C4A	3	4	5	4	4	0	C2A
C5A	3	3	3	3	3	0	C2A
P1A	1	3	5	3	3	0	-
P2A	1	1	1	1	1	0	P1A,D3A
P5A	1	1	1	1	1	0	H18A
H1A	4	5	12	6	9	3	D4A,S3A,F2A
H2A	0	1	20	4	8	4	D4A,S3A,F2A
H3A	0	0	6	1	3	2	D4A,F2A
H4A	7	7	7	7	7	0	H1A,H2A,H3A,H10A
H5A	0	0	18	3	0	-3	H1A,H2A,H3A,H10A
H6A	1	5	15	6	2	-4	H1A,H2A,H3A,H10A
H7A	1	1	7	2	3	1	H1A,H2A,H3A,H10A
H8A	0	1	8	2	5	3	H4A,H5A,H6A,H7A,H12A
H10A	0	1	2	1	2	1	D4A
H12A	4	4	4	4	4	0	H1A,H2A,H3A,H10A
H13A	0	2	4	2	3	1	H1A,H2A,H3A,H10A
H17A	2	2	8	3	6	3	-
H18A	0	6	6	5	1	-4	H17A
H19A	0	2	4	2	3	1	-
F1A	0	0	6	1	2	1	H8A
F2A	1	2	9	3	1	-2	D4A
S3A	2	3	4	3	2	-1	-

Cuadro 6.6: Actividades del edificio B

Actividad	a_i	m_i	b_i	d_i	d_i^0	r_i	Predecesoras
D4B	0	0	6	1	1	0	-
D5B	3	4	11	5	8	3	-
D6B	0	0	6	1	5	4	D5B
D8B	0	0	6	1	1	0	-
C1B	0	2	10	3	9	6	D6B
C2B	6	7	50	14	15	1	C1B
C4B	3	3	15	5	7	2	C2B
C5B	2	3	4	3	2	-1	C2B
H1B	0	1	20	4	1	-3	D4B,F2B
H2B	1	2	9	3	7	4	D4B,F2B
H3B	2	3	10	4	5	1	D4B,F2B
H5B	7	7	13	8	12	4	H1B,H2B,H3B,H9B,H10B
H6B	0	3	24	6	18	12	H1B,H2B,H3B,H9B,H10B
H7B	0	0	18	3	15	12	H1B,H2B,H3B,H9B,H10B
H8B	1	1	25	5	21	16	H5B,H6B,H7B
H9B	0	2	22	5	3	-2	D4B
H10B	3	4	11	5	5	0	D4B
H11B	2	4	6	4	3	-1	D5B
H13B	1	1	7	2	6	4	H1B,H2B,H3B,H9B,H10B
H15B	2	2	2	2	2	0	D4B
F1B	1	1	13	3	5	2	H8B
F2B	2	3	10	4	3	-1	D4B
P1B	3	4	5	4	4	0	-
P2B	3	3	15	5	13	8	P1B

Cuadro 6.7: Actividades del edificio C

Actividad	a_i	m_i	b_i	d_i	d_i^0	r_i	Predecesoras
D3C	1	1	1	1	1	0	-
D4C	2	2	8	3	8	5	D3C
D5C	2	4	24	7	19	12	-
D7C	0	3	6	3	6	3	D5C
H2C	5	5	5	5	5	0	S2C,D4C,F2C
H4C	0	1	2	1	0	-1	H2C
H5C	4	6	8	6	8	2	H2C
H12C	2	2	2	2	2	0	H2C
H13C	0	1	2	1	1	0	H2C
H19C	0	2	10	3	4	1	D3C
C1C	0	0	18	3	3	0	D7C
C2C	7	13	19	13	18	5	C1C
C5C	0	0	18	3	7	4	C2C
S2C	4	4	16	6	8	2	-
P1C	0	0	12	2	11	9	-
P2C	0	1	2	1	2	1	P1C
P3C	1	1	1	1	1	0	-
F2C	0	1	2	1	1	0	D4C

Cuadro 6.8: Actividades de las obras exteriores

Actividad	a_i	m_i	b_i	d_i	d_i^0	r_i	Predecesoras
T1	1	1	1	1	1	0	D1
T2	3	4	5	4	3	-1	T1
T3	2	4	6	4	3	-1	T2,H16
T4	6	6	18	8	18	10	H14
T5	2	2	2	2	2	0	T3
D1	0	0	12	2	0	-2	-
D2	0	1	8	2	3	1	T2,H16
H14	7	10	37	14	15	1	Todas menos T4
H16	0	2	10	3	9	6	T1
S1	3	3	15	5	10	5	T5
P4	2	2	26	6	11	5	T3
E1	10	12	14	12	14	2	Actividades del edificio A

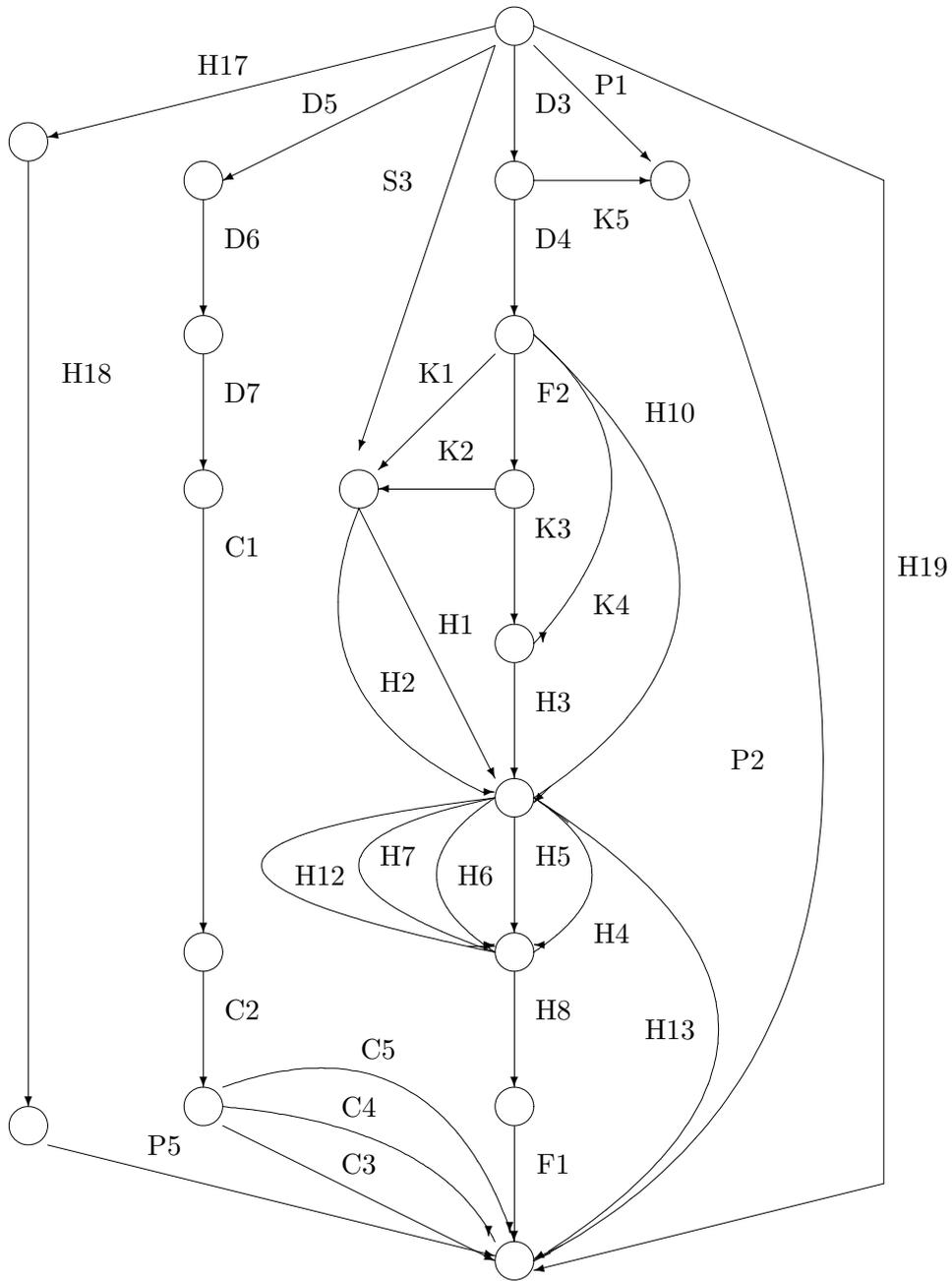


Figura 6.1: Red del edificio A

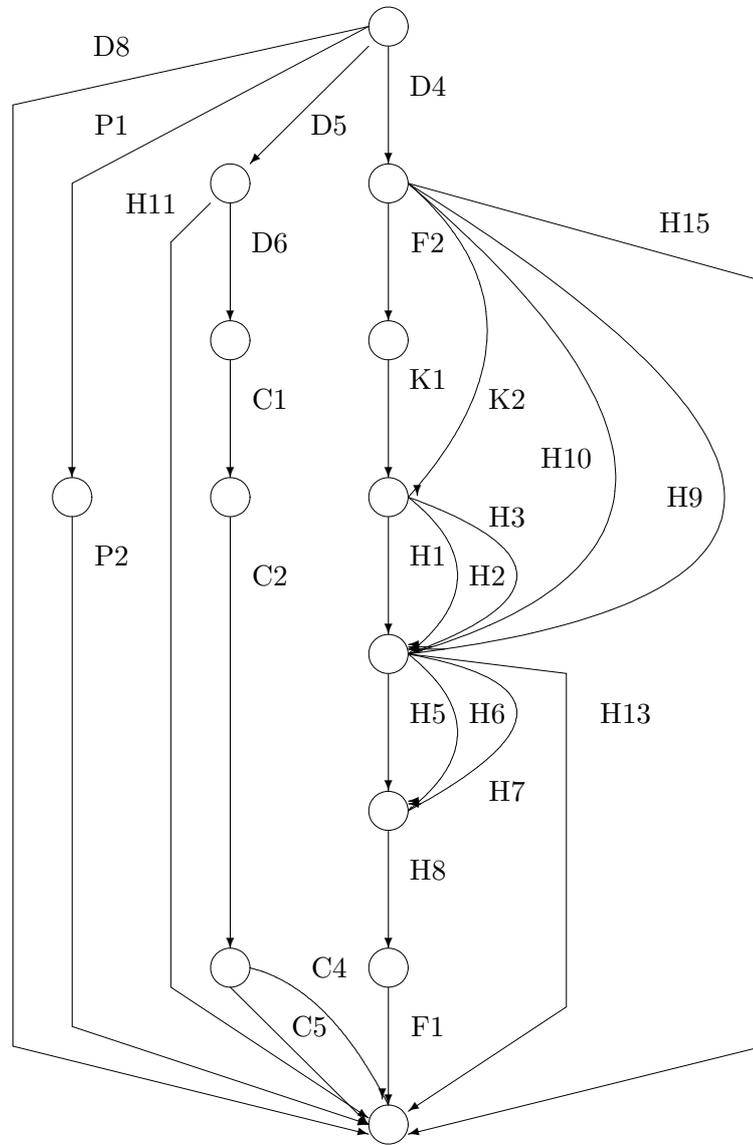


Figura 6.2: Red del edificio B

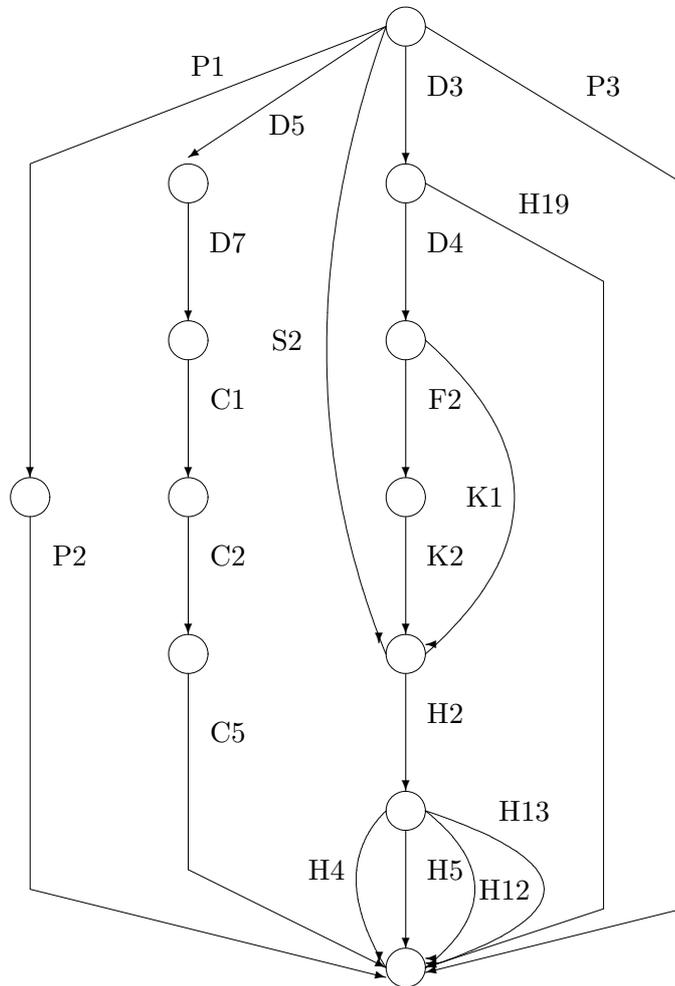


Figura 6.3: Red del edificio C

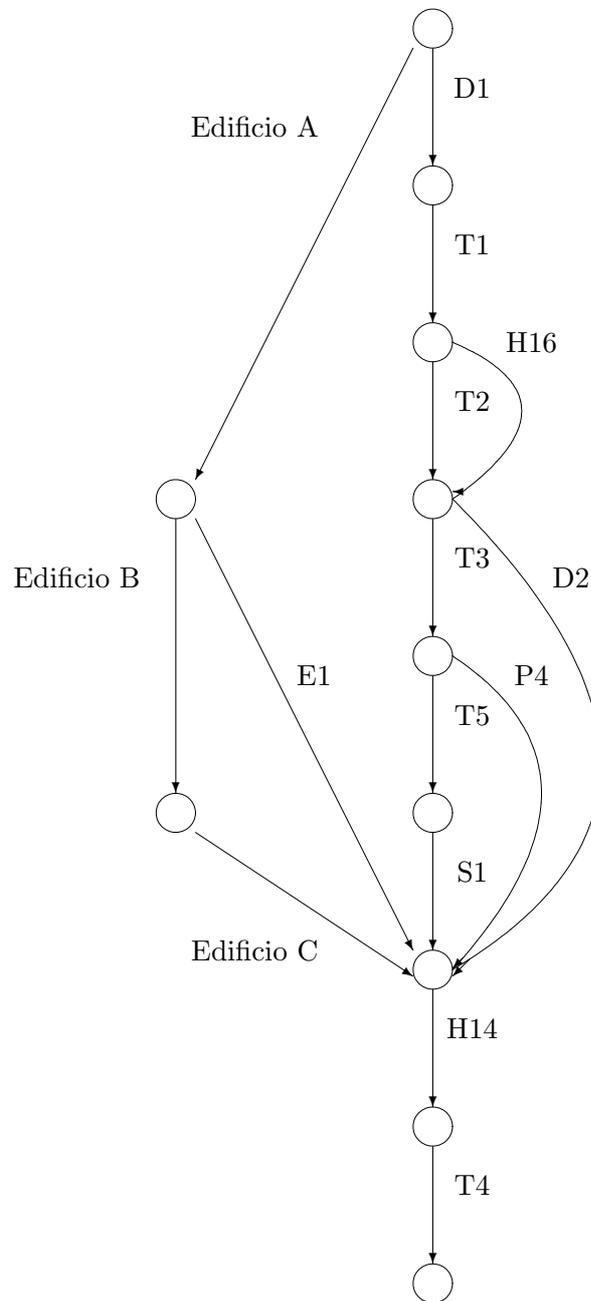


Figura 6.4: Red global del proyecto

6.2. Planificación del proyecto *PERT*

Una vez presentada la red *PERT* se pasa a determinar los valores más habituales en la realización de un proyecto *PERT*. Concretamente en las tablas 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12 se calcula:

- Los tiempos más temprano de comienzo de cada actividad (el tiempo más temprano de comienzo de una actividad es el tiempo más temprano de su nodo origen).
- Los tiempos más tardíos de finalización de cada actividad (el tiempo más tardío de finalización de una actividad es el tiempo más tardío de su nodo fin).
- La holgura de una actividad, as_i .
- La holgura libre de una actividad, fs_i .
- La holgura condicional de una actividad, ss_i .
- La holgura independiente de una actividad, is_i .

Cuadro 6.9: Tiempos de las actividades del edificio A

Actividad	T_i^e	T_i^l	as_i	fs_i	ss_i	is_i
D3A	0	1	10	0	10	0
D4A	1	12	10	0	0	0
D5A	0	3	0	0	0	0
D6A	3	5	0	0	0	0
D7A	5	7	0	0	0	0
C1A	7	11	0	0	0	0
C2A	11	27	0	0	0	0
C3A	27	31	1	1	1	1
C4A	27	31	0	0	0	0
C5A	27	31	1	1	1	1
P1A	0	30	27	0	27	0
P2A	3	31	27	27	0	0
P5A	8	31	22	22	0	0
H1A	5	21	10	0	0	0
H2A	5	21	12	2	2	2
H3A	5	21	15	5	0	0
H4A	11	28	10	0	0	0
H5A	11	28	14	4	4	4
H6A	11	28	11	1	1	1
H7A	11	28	15	5	5	5
H8A	18	30	10	0	0	0
H10A	2	21	18	8	8	8
H12A	11	28	13	3	3	3
H13A	11	31	18	18	8	8
H17A	0	25	22	0	22	0
H18A	3	30	22	0	0	0
H19A	0	31	29	29	29	29
F1A	20	31	10	10	0	0
F2A	2	15	10	0	0	0
S3A	0	15	12	2	12	2

Cuadro 6.10: Tiempos de las actividades del edificio B

Actividad	T_i^e	T_i^l	as_i	fs_i	ss_i	is_i
D4B	31	35	3	0	3	0
D5B	31	36	0	0	0	0
D6B	36	37	0	0	0	0
D8B	31	59	27	27	27	27
C1B	37	40	0	0	0	0
C2B	40	54	0	0	0	0
C4B	54	59	0	0	0	0
C5B	54	59	1	1	1	1
H1B	36	43	3	0	0	0
H2B	36	43	4	1	1	1
H3B	36	43	3	0	0	0
H5B	40	51	3	0	0	0
H6B	40	51	5	2	2	2
H7B	40	51	8	5	5	5
H8B	48	56	3	0	0	0
H9B	32	43	6	3	3	3
H10B	32	43	6	3	3	3
H11B	36	59	19	19	19	19
H13B	40	59	17	17	14	14
H15B	32	59	25	25	22	22
F1B	53	59	3	3	0	0
F2B	32	39	3	0	0	0
P1B	31	54	19	0	19	0
P2B	35	59	19	0	19	0

Cuadro 6.11: Tiempos de las actividades del edificio C

Actividad	T_i^e	T_i^l	as_i	fs_i	ss_i	is_i
D3C	59	73	13	0	13	0
D4C	60	76	13	0	0	0
D5C	59	66	0	0	0	0
D7C	66	69	0	0	0	0
H2C	65	82	12	0	0	0
H4C	70	88	17	17	5	5
H5C	70	88	12	12	0	0
H12C	70	88	16	16	4	4
H13C	70	88	17	17	5	5
H19C	60	88	15	15	12	12
C1C	69	72	0	0	0	0
C2C	72	85	0	0	0	0
C5C	85	88	0	0	0	0
S2C	59	77	12	0	12	0
P1C	59	87	26	0	26	0
P2C	61	88	26	26	0	0
P3C	59	88	27	27	27	27
F2C	63	77	13	0	0	0

Cuadro 6.12: Tiempo de las actividades de las obras exteriores

Actividad	T_i^e	T_i^l	as_i	fs_i	ss_i	is_i
T1	2	73	70	0	0	0
T2	3	77	70	0	0	0
T3	7	81	70	0	0	0
T4	102	110	0	0	0	0
T5	11	83	70	0	0	0
D1	0	72	70	0	70	0
D2	7	88	79	79	9	9
H14	88	102	0	0	0	0
H16	3	77	71	1	1	1
S1	13	88	70	70	0	0
P4	11	88	76	76	6	6
E1	31	88	46	46	46	46

6.3. Problema SPERT

En las tablas 6.13, 6.14, 6.15 y 6.16 se presenta la solución para las siguientes reglas defendidas en esta memoria para el problema *SPERT* con $P = PS$.

1. La regla Q^w , W_8 , basada en el *PCW* con peso $w_i = b_i - a_i$.
2. La regla Q^w , W_7 , basada en el *PCW* con peso $w_i = d_i$.
3. La regla Q^c , C_4 , basada en el *PCC* con petición $c_i = b_i - d_i$.

Los valores b_i y e_i representan el tiempo de inicio y fin de la actividad i -ésima en el calendario resultante de la aplicación de las reglas definidas y x_i representa el tiempo extra asignado a la actividad i -ésima por dichas reglas. El superíndice 1 representa la regla W_7 ; el superíndice 2 representa la regla W_8 ; el superíndice 3 representa la regla C_4 .

En los resultados presentados en las tabla 6.13, 6.14, 6.15 y 6.16, el rango del tiempo asignado a cada actividad en el calendario correspondiente, $b_i^1 - e_i^1$, $b_i^2 - e_i^2$ y $b_i^3 - e_i^3$, no siempre coincide con el tiempo extra asignado a la actividad, x_i , más la duración estimada de la actividad, d_i . Esto se debe a dos circunstancias:

1. Si la actividad tiene peso o petición con valor 0, la holgura que se la asigne será 0, independientemente de que quede holgura por repartir que solo ella pueda utilizar. Esto sucede en las actividades $H4A$, $H12A$, $H15B$, $H12C$ y $P3C$ en las reglas W_8 y C_4 .
2. Igualmente, aunque quede holgura por repartir que solo ella pueda utilizar, en la regla C_4 , si ya se le ha asignado a una actividad el tiempo extra equivalente al valor de su petición, no se la puede dar más tiempo extra. Esto sucede en las actividades $P1A$, $H3A$, $H7A$, $H10A$, $H13A$, $H17A$, $H18A$, $H19A$, $S3A$, $D8B$, $C5B$, $H11B$, $H13B$, $P2B$, $D4C$, $H4C$, $H13C$, $H19C$, $P1C$, $P2C$, $F2C$, $T2$, $T3$, $D1$, $D2$, $H16$, $S1$, $P4$ y $E1$.

Cuadro 6.13: Calendario de las actividades del edificio A

Actividad	$[b_i^1, e_i^1]$	x_i^1	$[b_i^2, e_i^2]$	x_i^2	$[b_i^3, e_i^3]$	x_i^3
D3A	[0,1]	0	[0,1.5]	0.5	[0,1]	0
D4A	[1,3.2]	1.2	[1.5,3]	0.5	[1,3.4]	1.4
D5A	[0,3]	0	[0,3]	0	[0,3]	0
D6A	[3,5]	0	[3,5]	0	[3,5]	0
D7A	[5,7]	0	[5,7]	0	[5,7]	0
C1A	[7,11]	0	[7,11]	0	[7,11]	0
C2A	[11,27]	0	[11,27]	0	[11,27]	0
C3A	[27,31]	1	[27,31]	1	[27,31]	1
C4A	[27,31]	0	[27,31]	0	[27,31]	0
C5A	[27,31]	0	[27,31]	1	[27,31]	0
P1A	[0,30]	27	[0,23.3]	20.3	[0,30]	2
P2A	[30,31]	0	[23.3,31]	6.7	[30,31]	0
P5A	[30,31]	0	[27.5,31]	2.5	[30,31]	0
H1A	[7.9,16.1]	2.2	[7.4,16.3]	2.9	[8.1,16.5]	2.4
H2A	[7.9,16.1]	4.2	[7.4,16.3]	4.9	[8.1,16.5]	4.4
H3A	[7.9,16.1]	7.2	[7.4,16.3]	7.9	[8.1,16.5]	5
H4A	[16.1,25]	0	[16.3,26.5]	3.2	[16.5,25]	0
H5A	[16.1,25]	5.9	[16.3,26.5]	7.2	[16.5,25]	5.5
H6A	[16.1,25]	2.9	[16.3,26.5]	4.2	[16.5,25]	2.5
H7A	[16.1,25]	6.9	[16.3,26.5]	8.2	[16.5,25]	5
H8A	[25,28.7]	1.7	[26.5,29.5]	1	[25,28.7]	1.7
H10A	[3.2,16.1]	11.9	[3,16.3]	12.3	[3.4,16.5]	1
H12A	[16.1,25]	0	[16.3,26.5]	6.2	[16.5,25]	0
H13A	[16.1,31]	12.9	[16.3,31]	12.7	[16.5,31]	2
H17A	[0,14]	11	[0,10.3]	7.3	[0,21.3]	5
H18A	[14,30]	11	[10.3,27.5]	12.2	[21.3,30]	1
H19A	[0,31]	29	[0,31]	29	[0,31]	2
F1A	[28.7,31]	1.3	[29.5,31]	0.5	[28.7,31]	1.4
F2A	[3.2,7.9]	1.7	[3,7.4]	1.4	[3.4,8.1]	1.7
S3A	[0,7.9]	4.9	[0,7.4]	4.4	[0,8.1]	1

Cuadro 6.14: Calendario de las actividades del edificio B

Actividad	$[b_i^1, e_i^1]$	x_i^1	$[b_i^2, e_i^2]$	x_i^2	$[b_i^3, e_i^3]$	x_i^3
D4B	[31,32.2]	0.2	[31,32.1]	0.1	[31,32.2]	0.2
D5B	[31,36]	0	[31,36]	0	[31,36]	0
D6B	[36,37]	0	[36,37]	0	[36,37]	0
D8B	[31,59]	27	[31,59]	27	[31,59]	5
C1B	[37,40]	0	[37,40]	0	[37,40]	0
C2B	[40,54]	0	[40,54]	0	[40,54]	0
C4B	[54,59]	0	[54,59]	0	[54,59]	0
C5B	[54,59]	2	[54,59]	2	[54,59]	1
H1B	[36.5,41.3]	0.8	[36.6,41.1]	0.5	[36.5,41.3]	0.8
H2B	[36.5,41.3]	1.8	[36.6,41.1]	1.5	[36.5,41.3]	1.8
H3B	[36.5,41.3]	0.8	[36.6,41.1]	0.5	[36.5,41.3]	0.8
H5B	[41.3,49.5]	0.2	[41.1,50.1]	1	[41.3,50.5]	0.2
H6B	[41.3,49.5]	2.2	[41.1,50.1]	3	[41.3,50.5]	2.2
H7B	[41.3,49.5]	5.2	[41.1,50.1]	6	[41.3,50.5]	5.2
H8B	[49.5,55.4]	0.9	[50.1,55.7]	0.6	[50.5,56.5]	1
H9B	[32.2,41.3]	4.1	[32.1,41.1]	4	[32.2,41.3]	4.1
H10B	[32.2,41.3]	4.1	[32.1,41.1]	4	[32.2,41.3]	4.1
H11B	[36,59]	19	[36,59]	19	[36,59]	2
H13B	[41.3,59]	15.7	[41.1,59]	15.9	[41.3,59]	5
H15B	[32.2,59]	0	[32.1,59]	24.9	[32.2,59]	0
F1B	[55.4,59]	0.6	[55.7,59]	0.3	[56.5,59]	0.5
F2B	[32.2,36.5]	0.3	[32.1,36.6]	0.5	[32.2,36.5]	0.3
P1B	[31,37.7]	2.7	[31,43.4]	8.4	[31,36.7]	1.7
P2B	[37.7,59]	16.3	[43.4,59]	10.6	[36.7,59]	10

Cuadro 6.15: Calendario de las actividades del edificio C

Actividad	$[b_i^1, e_i^1]$	x_i^1	$[b_i^2, e_i^2]$	x_i^2	$[b_i^3, e_i^3]$	x_i^3
D3C	[59,60]	0	[59,61]	1	[59,60]	0
D4C	[60,70.5]	7.5	[61,67.2]	3.1	[60,72.2]	5
D5C	[59,66]	0	[59,66]	0	[59,66]	0
D7C	[66,69]	0	[66,69]	0	[66,69]	0
H2C	[74,79]	0	[69.2,77.8]	3.6	[75,80]	0
H4C	[79,88]	8	[77.8,88]	9.2	[80,88]	1
H5C	[79,88]	3	[77.8,88]	4.2	[80,88]	2
H12C	[79,88]	0	[77.8,88]	8.2	[80,88]	0
H13C	[79,88]	8	[77.8,88]	9.2	[80,88]	1
H19C	[60,88]	25	[61,88]	24	[60,88]	7
C1C	[69,72]	0	[69,72]	0	[69,72]	0
C2C	[72,85]	0	[72,85]	0	[72,85]	0
C5C	[85,88]	0	[85,88]	0	[85,88]	0
S2C	[59,74]	9	[59,69.2]	4.2	[59,75]	10
P1C	[59,83.3]	22.3	[59,78.3]	17.3	[59,84.6]	10
P2C	[83.3,88]	3.7	[78.3,88]	8.7	[84.6,88]	1
P3C	[59,88]	0	[59,88]	28	[59,88]	0
F2C	[70.5,74]	2.5	[67.2,69.2]	1	[72.2,75]	1

Cuadro 6.16: Calendario de las actividades de las obras exteriores

Actividad	$[b_i^1, e_i^1]$	x_i^1	$[b_i^2, e_i^2]$	x_i^2	$[b_i^3, e_i^3]$	x_i^3
T1	[19.3,20.3]	0	[9.8,14.7]	3.9	[20.5,21.5]	0
T2	[20.3,37.7]	13.4	[14.7,34.2]	15.5	[21.5,37.4]	1
T3	[37.7,47.4]	5.8	[34.2,53.8]	15.6	[37.4,45.1]	2
T4	[102,110]	0	[102,110]	0	[102,110]	0
T5	[47.4,49.4]	0	[53.8,63.6]	7.8	[45.1,47.1]	0
D1	[0,19.3]	17.3	[0,9.8]	7.8	[0,20.5]	10
D2	[37.7,88]	48.3	[34.2,88]	51.8	[37.4,88]	6
H14	[88,102]	0	[88,102]	0	[88,102]	0
H16	[20.3,37.7]	14.4	[14.7,34.2]	16.5	[21.5,37.4]	7
S1	[49.4,88]	33.6	[63.6,88]	19.4	[47.1,88]	10
P4	[47.4,88]	34.6	[53.8,88]	28.2	[45.1,88]	20
E1	[31,88]	45	[31,88]	45	[31,88]	2

6.4. Problema APERT

Como se desprende de las duraciones observadas presentadas en las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8, existe un retraso en la ejecución del proyecto de 62 unidades. Por lo que, asumiendo la función de costes identidad, se deben repartir entre las actividades -62 unidades. En las tablas 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20 se presenta la solución para las siguientes reglas defendidas en esta memoria para el problema *APERT*.

1. El valor de Shapley, Sh^r , del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
2. El valor de Shapley, Sh^d , del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
3. El valor de Shapley, Sh^c , del juego $(N^*, v_{(PE,R)}(S))$ resultante de repartir la holgura con la regla Q^c con petición $c_i = b_i - d_i$.

4. La regla $f^{3,r}$ del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
5. La regla $f^{3,d}$ del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
6. La regla $f^{3,c}$ del problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^c con petición $c_i = b_i - d_i$.

Las aproximaciones para el cálculo del valor de Shapley se han realizado para cometer un error absoluto inferior a 0.00001.

Cuadro 6.17: Reparto en el *APERTE* de las actividades del edificio A

Actividad	Sh_i^r	Sh_i^d	Sh_i^c	$f_i^{3,r}$	$f_i^{3,d}$	$f_i^{3,c}$
D3A	0.136552	0.1025967	0.119334	0	0	0
D4A	-0.771219	-1.3698148	-0.651525	0	0	0
D5A	0.162198	0.1688879	0.170309	3	3	3
D6A	0.158863	0.1663529	0.166945	1	1	1
D7A	-0.441493	-0.3787125	-0.514830	-1	-1	-1
C1A	-0.441086	-0.3781427	-0.514957	-1	-1	-1
C2A	-1.019070	-0.8602457	-1.137633	-2	-2	-2
C3A	0.163421	0.1691384	0.171674	0	0	0
C4A	0.158866	0.1654609	0.167062	0	0	0
C5A	0.158586	0.1647987	0.166571	0	0	0
P1A	0.034450	0.0355371	0.033998	0	0	0
P2A	0.033906	0.0349625	0.033461	0	0	0
P5A	0.033210	0.0346878	0.032775	0	0	0
H1A	-0.282409	0.0200886	-0.153410	0	0	0
H2A	0.104973	0.1019506	0.097612	0	0	0
H3A	0.103492	0.1003504	0.096265	0	0	0
H4A	0.133168	0.3850788	0.116408	0	0	0
H5A	0.134073	0.3879728	0.117091	0	0	0
H6A	0.137001	0.391811	0.119701	0	0	0
H7A	0.132301	0.3842790	0.115655	0	0	0
H8A	-0.524122	-1.1772568	-0.488956	0	0	0
H10A	0.104869	0.1014213	0.097538	0	0	0
H12A	0.135890	0.3880037	0.118764	0	0	0
H13A	0.105310	0.1139708	0.097436	0	0	0
H17A	0.034650	0.0357535	0.034195	0	0	0
H18A	0.033618	0.0346878	0.033177	0	0	0
H19A	0.033506	0.0344713	0.033067	0	0	0
F1A	0.214615	-0.2296611	0.229296	0	0	0
F2A	0.134852	0.1012909	0.117818	0	0	0
S3A	0.074417	0.0997874	0.065003	0	0	0

Cuadro 6.18: Reparto en el *APERTE* de las actividades del edificio B

Actividad	Sh_i^r	Sh_i^d	Sh_i^c	$f_i^{3,r}$	$f_i^{3,d}$	$f_i^{3,c}$
D4B	0.318060	0.2428360	0.326449	0.2	0.1	0.2
D5B	-0.839152	-0.8545585	-0.838701	0	0	0
D6B	-1.127157	-1.1592467	-1.126731	0	0	0
D8B	0	0	0	0	0	0
C1B	-1.687598	-1.7398210	-1.687259	0	0	0
C2B	-0.271329	-0.2762789	-0.270803	0	0	0
C4B	-0.547952	-0.5570510	-0.547565	0	0	0
C5B	0.000697	0.0008695	0.000778	0	0	0
H1B	0.073503	0.0701564	0.073021	0	0	0
H2B	-1.560104	-1.6803504	-1.561413	-2.2	-2.5	-2.2
H3B	-0.003153	-0.1209064	-0.009232	0	0	0
H5B	-0.847855	-0.6757945	-0.846650	0	0	0
H6B	-4.761238	-4.5240929	-4.759769	-9.8	-9	-9.8
H7B	-2.068345	-1.8628536	-2.066996	0	0	0
H8B	-13.236686	-13.5007537	-13.215871	-15.1	-15.4	-15
H9B	0.072498	0.0692280	0.072035	0	0	0
H10B	0.072249	0.0690902	0.071788	0	0	0
H11B	0	0	0	0	0	0
H13B	0	0	0	0	0	0
H15B	0	0	0	0	0	0
F1B	-1.079325	-1.1586650	-1.065689	-1.4	-1.7	-1.5
F2B	0.162864	0.1652662	0.168392	1.3	1.5	1.3
P1B	0	0	0	0	0	0
P2B	0	0	0	0	0	0

Cuadro 6.19: Reparto en el *APERT* de las actividades del edificio C

Actividad	Sh_i^r	Sh_i^d	Sh_i^c	$f_i^{3,r}$	$f_i^{3,d}$	$f_i^{3,c}$
D3C	0	0.0225281	0	0	0	0
D4C	0	-0.2846152	0	0	0	0
D5C	-11.832675	-11.7790914	-11.826759	-12	-12	-12
D7C	-2.834257	-2.7821998	-2.828314	-3	-3	-3
H2C	0	0.0518813	0	0	0	0
H4C	0	0.0011656	0	0	0	0
H5C	0	0.0010110	0	0	0	0
H12C	0	0.0010871	0	0	0	0
H13C	0	0.0012406	0	0	0	0
H19C	0	0	0	0	0	0
C1C	0.164637	0.1666540	0.170685	0	0	0
C2C	-4.833645	-4.7813249	-4.827641	-5	-5	-5
C5C	-3.836190	-3.7832114	-3.830223	-4	-4	-4
S2C	0	0	0	0	0	0
P1C	0	0	0	0	0	0
P2C	0	0	0	0	0	0
P3C	0	0	0	0	0	0
F2C	0	0	0	0	0	0

Cuadro 6.20: Reparto en el *APERT* de las actividades de las obras exteriores

Actividad	Sh_i^r	Sh_i^d	Sh_i^c	$f_i^{3,r}$	$f_i^{3,d}$	$f_i^{3,c}$
T1	0	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0	0
T3	0	0	0	0	0	0
T4	-9.835676	-9.8334700	-9.829866	-10	-10	-10
T5	0	0	0	0	0	0
D1	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	0	0	0
H14	-0.839560	-0.8377029	-0.833509	-1	-1	-1
H16	0	0	0	0	0	0
S1	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	0	0	0
E1	0	0	0	0	0	0

6.5. Problema CPERT

Como se desprende de las duraciones observadas presentadas en las tablas 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8, existe un retraso en la ejecución del proyecto de 62 unidades. Por lo que, asumiendo la función de costes identidad, se deben repartir entre las actividades retrasadas 62 unidades. En las tablas 6.21, 6.22, 6.23 y 6.24 se presenta la solución para las siguientes reglas defendidas en esta memoria para el problema *CPERT*.

1. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{1r} , con $w = w^r$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.
2. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{1d} , con $w = w^r$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
3. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{1c} , con $w = w^r$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^c con petición $c_i = b_i - d_i$.
4. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{2r} , con $w = w^s$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura

con la regla Q^w con peso $w_i = b_i - a_i$.

5. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{2d} , con $w = w^s$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^w con peso $w_i = d_i$.
6. La regla $\xi^{s,w}$, SC^{2c} , con $w = w^s$ aplicada al problema resultante de repartir la holgura con la regla Q^c con petición $c_i = b_i - d_i$.

Cuadro 6.21: Reparto en el *CPERT* de las actividades del edificio A

Actividad	SC_i^{1r}	SC_i^{1d}	SC_i^{1c}	SC_i^{2r}	SC_i^{2d}	SC_i^{2c}
D3A	0	0	0	0	0	0
D4A	1.097851	1.415083	0.986764	0	0	0
D5A	0	0	0	0	0	0
D6A	0	0	0	0	0	0
D7A	0.638601	0.629949	0.641789	0.917160	0.917160	0.918519
C1A	0.638601	0.629949	0.641789	0.917160	0.917160	0.918519
C2A	1.277201	1.259899	1.283578	1.834320	1.834320	1.837037
C3A	0	0	0	0	0	0
C4A	0	0	0	0	0	0
C5A	0	0	0	0	0	0
P1A	0	0	0	0	0	0
P2A	0	0	0	0	0	0
P5A	0	0	0	0	0	0
H1A	0.487934	0.056603	0.370037	0	0	0
H2A	0	0	0	0	0	0
H3A	0	0	0	0	0	0
H4A	0	0	0	0	0	0
H5A	0	0	0	0	0	0
H6A	0	0	0	0	0	0
H7A	0	0	0	0	0	0
H8A	0.792892	1.132066	0.801746	0	0	0
H10A	0	0	0	0	0	0
H12A	0	0	0	0	0	0
H13A	0	0	0	0	0	0
H17A	0	0	0	0	0	0
H18A	0	0	0	0	0	0
H19A	0	0	0	0	0	0
F1A	0	0.283017	0	0	0	0
F2A	0	0	0	0	0	0
S3A	0	0	0	0	0	0

Cuadro 6.22: Reparto en el problema *CPERT* de las actividades del edificio B

Actividad	SC_i^{1r}	SC_i^{1d}	SC_i^{1c}	SC_i^{2r}	SC_i^{2d}	SC_i^{2c}
D4B	0	1.129328	0	0	0	0
D5B	1.831726	1.799989	1.838105	0	0	0
D6B	2.442301	2.399986	2.450807	0	0	0
D8B	0	0	0	0	0	0
C1B	3.663451	3.599979	3.676210	0	0	0
C2B	0.610575	0.599996	0.612702	0	0	0
C4B	1.221150	1.199993	1.225403	0	0	0
C5B	0	0	0	0	0	0
H1B	0	0	0	0	0	0
H2B	1.404921	1.57484	1.411936	2.017751	2.292899	2.020741
H3B	0.125516	0.309334	0.126170	0	0	0
H5B	2.322814	1.806675	2.334902	0	0	0
H6B	6.258285	5.669545	6.289532	8.988166	8.254438	9.001481
H7B	4.234393	3.683367	4.256395	0	0	0
H8B	9.642868	9.701222	9.626835	13.849112	14.124260	13.777778
H9B	0	0	0	0	0	0
H10B	0	0	0	0	0	0
H11B	0	0	0	0	0	0
H13B	0	0	0	0	0	0
H15B	0	0	0	0	0	0
F1B	0.957901	1.070914	0.962684	1.375740	1.559172	1.377778
F2B	0	0	0	0	0	0
P1B	0	0	0	0	0	0
P2B	0	0	0	0	0	0

Cuadro 6.23: Reparto en el *CPERT* de las actividades del edificio C

Actividad	SC_i^{1r}	SC_i^{1d}	SC_i^{1c}	SC_i^{2r}	SC_i^{2d}	SC_i^{2c}
D3C	0	0	0	0	0	0
D4C	0	0	0	0	0	0
D5C	7.663207	7.559393	7.701468	11.005917	11.005917	11.022222
D7C	1.915802	1.889848	1.925367	2.751479	2.751479	2.755556
H2C	0	0	0	0	0	0
H4C	0	0	0	0	0	0
H5C	0	0	0	0	0	0
H12C	0	0	0	0	0	0
H13C	0	0	0	0	0	0
H19C	0	0	0	0	0	0
C1C	0	0	0	0	0	0
C2C	3.193003	3.149747	3.208945	4.585799	4.585799	4.592593
C5C	2.554402	2.519798	2.567156	3.668639	3.668639	3.674074
S2C	0	0	0	0	0	0
P1C	0	0	0	0	0	0
P2C	0	0	0	0	0	0
P3C	0	0	0	0	0	0
F2C	0	0	0	0	0	0

Cuadro 6.24: Reparto en el *CPERT* de las actividades de las obras exteriores

Actividad	SC_i^{1r}	SC_i^{1d}	SC_i^{1c}	SC_i^{2r}	SC_i^{2d}	SC_i^{2c}
T1	0	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0	0
T3	0	0	0	0	0	0
T4	6.386005	6.299495	6.417890	9.171598	9.17160	9.185185
T5	0	0	0	0	0	0
D1	0	0	0	0	0	0
D2	0	0	0	0	0	0
H14	0.638601	0.629949	0.641789	0.917160	0.917160	0.918519
H16	0	0	0	0	0	0
S1	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	0	0	0
E1	0	0	0	0	0	0

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

7.1. Conclusiones

Las redes *PERT* permiten planificar y estructurar la realización de un trabajo complejo. La modelización clásica de una red *PERT* deja abierta ciertas cuestiones que en esta memoria se abordan.

El primer problema que se aborda es el reparto de la holgura existente en una red *PERT*, problema *S PERT* o, lo que es equivalente, la elaboración de un calendario. Se deben destacar cuatro aportaciones a este problema:

- En primer lugar, se ha presentado una metodología de cálculo, regla Q^w del *PCW*, que a diferencia de las habitualmente usadas, se presenta caracterizada mediante cuatro propiedades con gran presencia en otros problemas relacionados, como el problema de bancarrota.
- En segundo lugar, se han explicado las relaciones entre los problemas *PCC* y *PCW*, eliminando de esta forma la idea de que la elección de un peso o una petición sea un aspecto determinante para el reparto a realizar.

- En tercer lugar, se han definido y programado algoritmos para las reglas propuestas, logrando que reglas que en su definición original parecían intratables en problemas reales, puedan ser aplicadas en problemas grandes como demuestran las pruebas computacionales realizadas sobre redes *PERT* con hasta 2500 actividades.
- Finalmente, esta memoria aporta una completa comparativa de todas las reglas existentes para el problema *SPERT*, permitiendo al usuario que se forme una opinión sobre las ventajas e inconvenientes de cada regla.

El segundo problema que se aborda es el reparto de costes y beneficios generados por el retraso o adelanto del proyecto entre todas las actividades del mismo (*APERT*). Se deben destacar tres aportaciones a este problema:

- En primer lugar, se ha definido un nuevo juego cooperativo con distinto enfoque al juego existente en la literatura para este problema, mejorando a dicho juego en algunas propiedades.
- En segundo lugar, se han abordado soluciones tanto desde el punto de vista de la justicia (valor de Shapley) como desde el de la estabilidad de la solución (valores pertenecientes al corazón). Estas soluciones se han planteado sobre el problema original y sobre el problema resultante de resolver como paso previo un problema *SPERT*. Para todas ellas se han observado las propiedades, definidas en función de una red *PERT*, que cumplen. Se concluye que las reglas en las que se resuelve como paso previo un problema *SPERT*, presentan mejores propiedades. Esta conclusión es novedosa para este problema y muy útil para afrontar posibles definiciones futuras de reglas para el problema *APERT*.
- Finalmente y al igual que para el problema *SPERT*, se aporta una completa comparativa de todas las reglas existentes a el problema *APERT*.

El tercer y último problema que se aborda, es el reparto del coste generado en un proyecto *PERT* retrasado entre las actividades retrasadas (*CPERT*). Se deben destacar dos aportaciones para este problema:

- En primer lugar, se ha abordado el problema mediante una nueva metodología, la metodología secuencial. Con este planteamiento se ha logrado una solución interpretable, con buenas propiedades y computable en tiempo polinomial.
- Finalmente y al igual que para los otros dos problemas, se aporta una completa comparativa de todas las reglas existentes para el problema *CPERT*.

Algo común a destacar en los tres problemas abordados es la inmediata aplicabilidad de las reglas presentadas, como se demuestra en esta memoria al presentar la resolución de un caso real.

Además de los avances que sobre los problemas referentes a redes *PERT* que se han puesto de manifiesto, se deben recalcar dos aportaciones que trascienden el ámbito de las redes *PERT*.

- La primera de ellas, trata sobre la relación existente entre la metodología secuencial y la teoría de juegos. Más concretamente, en este trabajo se muestra que todo reparto secuencial se puede interpretar como el valor de Shapley de un juego. Esta relación permite, por un lado, calcular de forma polinomial (dado que la regla secuencial es de cálculo polinomial) el valor de Shapley en determinados juegos y por otro lado, dar una doble interpretación al valor resultante aplicando la regla secuencial o el valor de Shapley en estas situaciones.
- La segunda de ellas, aborda el problema de aproximar el valor de Shapley para cualquier juego. En determinados juegos con estructura particular es posible calcularlo de forma exacta, pero en general su cálculo es exponencial. Por ello, en esta memoria se ha diseñado una aproximación del valor de Shapley que es calculable en tiempo polinomial siempre que dada una coalición, el valor de $v(S)$ sea calculable en tiempo polinomial. Esta aproximación permite conocer una cota del error que se está cometiendo y se ha verificado mediante pruebas computacionales su buen funcionamiento. Por último, destacar que esta metodología para aproximar el valor de Shapley es extrapolable al

cálculo de cualquier semivalor, conservando las mismas buenas propiedades.

7.2. Futuras líneas de investigación

7.2.1. Restricción entera del problema SPERT

En el problema *SPERT* presentado, se considera que el tiempo se puede repartir como una variable continua. En determinadas circunstancias este reparto no es directamente aplicable, dado que la holgura repartida a una actividad deba ser un número entero. Por ejemplo, si la unidad de tiempo es el día laboral y en el contrato de la actividad se debe reflejar el número de días que tiene para su ejecución.

7.2.2. Comparación con los calendarios óptimos

En la planificación de proyectos, existen diversas funciones objetivo que de alguna forma se tratan de optimizar para determinar un calendario. Sería interesante relacionar estos problemas multiobjetivos para determinar el peso que tienen las diferentes actividades de un proyecto en la regla Q^w , que se presenta en el capítulo 2.

7.2.3. Determinar las estrategias de las actividades

En los problemas *APERT* y *CPERT* este trabajo se centra en determinar distintas reglas de reparto. El siguiente paso a realizar es determinar la estrategia óptima de cada actividad, dado una regla de reparto concreta, para un juego donde las estrategias de cada actividad son las posibles duraciones de la misma, teniendo en cuenta que existe una función de costes para cada actividad en función de la duración de la misma. Teniendo en cuenta el planteamiento desde la teoría de juegos que se realiza en este trabajo, se podría calcular los equilibrios de Nash bajo una regla de reparto cuando se conoce el coste de una duración determinada para cada actividad.

7.2.4. Determinar la mejor regla, teniendo en cuenta las estrategias de las actividades

Al igual que sucedía en la sección anterior, este trabajo aborda la calidad de una regla en función de las propiedades que esta cumple. Se puede plantear que el objetivo del que determina la regla de reparto (planificador del proyecto) sea la de determinar una regla que tenga un equilibrio de Nash que no suponga retraso en la ejecución del proyecto. Es decir, se podría determinar aquellas reglas que tienen como equilibrios de Nash estrategias que producen un adelanto o un no retraso del proyecto.

7.2.5. Extender la definición del juego para cualquier función de costes o beneficios

En este trabajo se define el juego cooperativo para el problema *APERT* en aquellas situaciones en que la función de costes o beneficios es escalar. Pese a ser una función muy usada en problemas reales, es deseable lograr extrapolar la función característica definida en esta situación particular a cualquier función de costes o beneficios.

7.2.6. Definición de un juego en el problema CPERT

En este trabajo se define el juego cooperativo para el problema *APERT*. Teniendo en cuenta que el problema *APERT* se puede considerar un generalización del problema *CPERT*, sería deseable extender la definición del juego al problema *CPERT*.

7.2.7. Uso de la regla SC en el problema APERT

La utilización de la metodología secuencial en el problema *CPERT* permite definir una familia de reglas con gran interpretabilidad y cálculo polinomial, lo que permite su implantación en situaciones reales con gran número de actividades. Teniendo en cuenta que el problema *CPERT* se puede considerar un caso particular del problema *APERT*, sería deseable exten-

der la regla *SC* al problema *APERT*.

7.2.8. Implementación de las reglas propuestas en situaciones reales

Se considera una labor ineludible en el futuro, la divulgación, implementación y análisis de las reglas definidas en empresas que deban solucionar problemas del tipo de los abordados en este trabajo.

Referencias

- [1] Albizuri, MJ.; JC. Santos y JM. Zarzuelo (2002). On the serial cost sharing rule, *International Journal of Game Theory*, Vol 31, Pag 437-446.
- [2] Bergantiños G. y E. Sánchez (2002a). NTU PERT games, *Operations Research Letters*, Vol 30, Pag 130-140.
- [3] Bergantiños G. y E. Sánchez (2002b). The proportional rule for problems with constraints and claims, *Mathematical Social Sciences*, Vol 43, Pag 225-249.
- [4] Bergantiños, G. y E. Sánchez (2002c). How to distribute Costs Associated with a Delayed Project, *Annals of Operations Research*, Vol 109, Pag 159-174.
- [5] Borm, P.; H. Keiding; R.P. Mclean; S. Oortwijn y S. Tijs (1992). The compromise value for NTU games, *Internal. J. Game Theory*, Vol 21, Pag 175-189.
- [6] Brânzei, R.; G. Ferrari; V. Fragnelli y S. Tijs (2002). Two approaches to the Problem of Sharing Delay Costs in Joint Projects, *Annals of Operations Research*, Vol 109, Pag 359-374.
- [7] Burgess, A.R. y J.B. Killebrew (1962). Variation in activity level on a cyclic arrow diagram, *Journal of Industrial Engineering*, Vol 13, Pag 76-83.
- [8] Castro, J.; D. Gómez y J. Tejada (2006). A polynomial rule for the problem of sharing delay costs in PERT networks, *Computers and Operation Research*, in press, doi:10.1016/j.cor.2006.11.003.

-
- [9] Castro, J.; D. Gómez y J. Tejada (2007a). A project game for PERT networks, *Operation Research Letters*, in press, doi:10.1016/j.orl.2007.01.003.
- [10] Castro, J.; D. Gómez y J. Tejada (2007b). The use of proportional rule applied to durations for slack distribution in a PERT network, *European Journal of Operation research*, in press.
- [11] Castro, J.; D. Gómez y J. Tejada (2007c). On the polynomial calculation of the Shapley value base on sampling design, Technical report.
- [12] Castro, J.; D. Gómez y J. Tejada (2007d). An average-case polynomial algorithm to schedule PERT networks, Thechnical report.
- [13] De Frutos, M.A. (1999). Coalitional manipulation in a bankruptcy problem, *Rev. Econ. Design*, Vol 4, Pag 255-272.
- [14] Estévez-Fernandez, A.; P. Born y H. Hamers (2005). Project games, *Center Discussion Paper Series*, Tilburg University.
- [15] Hillier, F.S. y G.J. Lieberman (2001). Investigación de operaciones, *Mc Graw Hill*, 7 edición.
- [16] Kelley, J.E. y M.R. Walter (1959). Critical-Path Planning and Scheduling, *Proceedings of the Easter Joint Computer Conference*, Pag 160-173.
- [17] Lorenzo L. (2005). On cost spanning tree and PERT problems, *Tesis doctoral*, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Vigo, Spain.
- [18] Levy, F.K.; G.L. Thompson y J.D. Wiest (1962). Multi-Ship, Multi-Shop, Workload Smoothing Program, *Naval Research logistics Quarterly*, Vol 9, Pag 37-44.
- [19] López C.R. (1997). Técnicas de programación y control de proyectos, *Pirámida*, 5 edición.

-
- [20] Malcom, D.C.; J.H. Roseboom; C.E. Clark y W. Fazar (1957). Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, *Operation Research*, Vol 7, Pag 646-670.
- [21] Metropolis, N. y S. Ulam (1949). The monte Carlo Method, *Journal of American Statistics Association*, Vol 44, Pag 335-341.
- [22] Moulin, H. (1995). On additive Methods to Share Joint Costs, *Japanese Economic Review* Vol 46, Pag 303-332.
- [23] Moulin, H. y S. Shenker (1992). Serial Cost sharing, *Econometrica* Vol 60, Pag 1009-1037.
- [24] Owen G. (1995). Game Theory, *Academic press*, 3 edición.
- [25] Potters, J. y P. Sudhölter (1999). Airport problems and consistent allocation rules, *Mathematical Social Sciences* Vol 38, Pag 83-102.
- [26] Roy, B. (1960). Contribution de la Théorie des Graphes á l'étude des Problèmes d'ordonnancement, Actas del Congreso de la International Federation of Operations Research Society.
- [27] Shapley, L.S. (1953). A value for n-person games, *Ann. Math. Studies*, Vol 28, Pag 307-317.
- [28] Shapley, L.S. A Value for n-Person Games, in Contributions to the Theory of Games II (Annals of Mathematics Studies 28) (1957), *H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton University Press*, Pag 307-317.
- [29] Shragowitz, E.; H. Youseff y B. Lu (2003). Iterative Converging Algorithms for Computing Bounds on Durations of Activities in Pert and Pert-Like Models, *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol 7, Pag 5-22.
- [30] Tijs, S. y M. Koster (1998). General aggregation of demand and cost sharing methods, *Annals of Operations Research* Vol 84, Pag 137-164.