UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACION

NUEVA METODOLOGIA DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE EN LA ASIGNATURA DE MATEMATICAS I DEL CURSO DE ORIENTACION UNIVERSITARIA

ISAIAS UÑA JUAREZ

Madrid, Mayo de 1.995

DIRECTOR:

DR. D. NARCISO GARCIA NIETO

DEPARTAMENTO DE METODOS DE INVESTIGACION Y DIAGNOSTICO EN EDUCACION

A Gregorio Escolano de Ojos Negros,

filósofo, maestro, y amigo.

In Memoriam.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo que presentamos es fruto de diferentes concurrencias de ayuda a la concreción de una idea inicial diseñada en el entonces Departamento de Fundamentos Biológicos de la Educación, de la Universidad Complutense de Madrid.

A ese Departamento y al actual, e interfacultativo, de Psicobiología, y en concreto a los profesores del mismo, orientadores generosos de mi tarea, quiero mostrar mi mayor gratitud.

La vinculación adecuada del proceso de investigación al Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico, de la Facultad de Educación, nos ha permitido desarrollar este proyecto bajo la dirección magistral y cariñosa del profesor Dr. D. Narciso García Nieto. A él quiero agradecer, muy expresamente, su solícita prontitud en atender mis parones obligados y las frecuentes dudas.

Deseo manifestar, en forma muy especial, mi agradecimiento al profesor Venancio Tomeo, practicante generoso de una vieja amistad, por dar como buena la idea inicial de donde partió este trabajo. Sus observaciones y estímulo me han acompañado en los momentos de mayor dificultad.

Las orientaciones en el tratamiento estadístico de los datos, recibidas desde el magisterio de los profesores D. Antonio Carrillo y D. José Miguel Solana, han sido de fundamental importancia. Quede para ellos mi permanente gratitud por su generosa aportación.

El tratamiento informático, diseño material, y correcciones múltiples, ha sido un trabajo adicional intenso, posibilitado gracias a la ayuda del amigo y compañero en las tareas docentes Antonio Zanón. Para él gracias por su inestimable colaboración.

A los profesores compañeros y amigos de la Unidad Docente de Matemáticas I, en la EUITI de la Universidad Politécnica de Madrid, quiero darles las gracias por la ayuda y comprensión mostrada en pro de la culminación de este proyecto.

A Maribel, mi mujer, y a mis hijos Agustín y Alejandra, el cariñoso agradecimiento por saber disculpar mi falta de atención hacia ellos a causa de este trabajo.

Y también, finalmente, gratitud a las personas que hayan recibido los inconvenientes de ésta, mi ocupación.

INDICE

INDICES DE FIGURAS, TABLAS Y GRAFICOS

FIGURAS

TABLAS

GRÁFICOS

Si nuestro conocimiento científico fuera perfecto, sería preciso que comprendiéramos lo que somos, lo que es el mundo y cuales son nuestras relaciones con el mismo. Pero nuestra comprensión de estas tres cosas es solo fragmentaria.

Bertrand Russell (1872–1970), ***El hombre y el medio.***

INTRODUCCION

Presentamos en este documento la exposición y el análisis estadístico del desarrollo temático de la *Teoría de los Determinantes*, sus propiedades y primeras aplicaciones en el marco de la asignatura de Matemáticas I del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U), siguiendo un nuevo método que denominamos *Axiomático-Inductivo*.

El documento consta de dos partes. En la primera, integrada por cuatro capítulos, se realiza, básicamente un repaso de las dos líneas metodológicas llamadas tradicionales y que se siguen en la exposición de la teoría de los determinantes.

El capítulo 1 pretende dar una visión histórica de los determinantes desde sus orígenes y en el propio ámbito de la evolución matemática.

En el capítulo 2 se trata de resaltar la importancia del concepto de determinate en el contexto del programa actual vigente de la asignatura de Matemáticas I del C.O.U. Para ello se presenta una colección de cuestiones muy concretas con su correspondiente resolución.

El capítulo 3 contiene el desarrollo expositivo de la teoría de los determinantes partiendo de las permutaciones simples. Por este procedimiento se ha impartido la materia a cuatro grupos de alumnos al realizar la experiencia. En las referencias a este método en el desarrollo posterior lo nombraremos como *Método Histórico*.

El capítulo 4, con el que finaliza esta primera parte, contiene el tratamiento de la teoría de los determinantes partiendo del concepto de forma multilineal al–ternada. En las referencias posteriores lo citaremos como *Método Multilineal.* En la materialización de la experiencia se ha explicado la teoría de los determinan–tes por este procedimiento a un total de cuatro grupos de alumnos.

La segunda parte contiene el estudio empírico de los datos obtenidos en la aplicación del nuevo método y de los tradicionales.

En el capítulo 5, y en su introducción, se expone una argumentación de las ra–zones que nos han impulsado a la propuesta de un nuevo método. Estas han estado motivadas, fundamentalmente, por la observación diaria del grado de aceptación y de los resultados logrados por parte de los alumnos en los años de explicación única por los métodos tradicionales. Se continúa, en este capítulo, desarrollando el que llamamos nuevo método o *Axiomático–Inductivo*. Se ha expuesto la teoría de los determinantes, siguiendo este nuevo método a cuatro grupos de alumnos. El úl–timo apartado de este capítulo está dedicado a enumerar los objetivos que preten–demos lograr del seguimiemto del nuevo método asi como a establecer las hipótesis de trabajo en el análisis de los resultados de su aplicación.

El capítulo 6 es una exposición del diseño y metodología de la investigación. Se describe el tipo de diseño seguido, se detalla el proceso de selección de la muestra y el procedimiento físico e instrumental seguido.

En el capítulo 7 se materializa el análisis estadístico de los datos. Comienza el capítulo estableciendo una descripción del diseño de experimentos, dentro del análisis estadístico, para centrarse en los diseños factoriales partiendo del análisis de la varianza.

La segunda parte de este capítulo está dedicada a la aplicación del diseño descrito anteriormente a los datos obtenidos de las calificaciones de la prueba sobre los determinantes por los alumnos participantes en la experimentación. Se ha establecido un diseño factorial de cuatro factores: *Método de enseñanza, Procedencia, Optativa* y *Repetidor.* Se exponen las razones por las cuales no se incluye el factor sexo, contrariamente a lo que en principio hubiésemos deseado. Se suple, parcialmente, esta ausencia estableciendo un diseño factorial entre método de enseñanza y sexo del alumno.

El capítulo termina con la aplicación de un test de homogeneidad de proporciones con el cual se detecta el estrato de alumnos en los que incide mas ostensiblemente la eficiencia del nuevo método.

En el capítulo 8 se enumeran los resultados de la experimentación, que nos muestran una mayor eficiencia del método *Axiomático–Inductivo* con relación a los métodos *Histórico* y *Multilineal.*

PRIMERA PARTE: MARCO TEORICO

Consideraciones históricas

Como argumenta Thomas Muir en su obra, posiblemente la más documentada sobre la evolución del concepto de determinante, *The Teory of Determinants in the Historical orden of Development*[1], el modo en que el material para una historia de la teoría de los determinantes ha sido acumulado es algo similar a lo observado en otros campos de la ciencia.

A mediados del siglo XVIII uno de los descubridores independientes de tan interesante idea, Cramer, fue lo suficientemente afortunado como para atraer la atención tanto de los matemáticos franceses como de los restantes y más avezados de los demás países europeos con dedicación matemática, hacia esta idea en la que trabajaron de una manera directa durante no menos de setenta años.

Durante el siglo XIX aparecieron multitud de artículos sobre este aspecto formal de las matemáticas, pues los determinantes con su aparición no representan una innovación matemática al estilo del Cálculo Diferencial e Integral o de la Geometría Analítica, ya que, al igual que las matrices, son novedades en el lenguaje matemático que han dado gran fluidez a procesos creativos, incluso muy dispares, dentro de la matemática pura y de las disciplinas que se apoyan en ella. En este sentido nos parece muy oportuna la cita de Laplace, que introduce Morris

1 Macmilland and Co., Limited, London. 1906.

Kline en su obra *El pensamiento matemático de la Antigüedad hasta nuestros días*: "Tanta es la ventaja de un lenguaje bien construido que su notación simplificada a menudo se convierte en fuente de teorías profundas".[2]

En contraposición, por ejemplo, con la derivada o con la misma integral que tienen un significado es sí mismas, los determinantes y las propias matrices son solamente formas nuevas del lenguaje matemático cuyos arquetipos corresponden a ideas que ya se conocían. Los determinantes transmiten, por tanto, esa idea con mayor fluidez. La creación matemática no se ha visto afectada de una manera decisiva con la llegada de estas herramientas que, sin embargo, han tenido una aceptación generalizada por su esquematismo y compacidad haciendo el discurso más estructurado, más directo, en definitiva más matemático en el sentido más puro del término. Es por todo ello por lo que el concepto de determinante y el de matriz, ahora inseparables, se nos muestran como herramientas imprescindibles en el desenvolvimiento de la matemática actual siendo, en este momento, tópicos permanen–

---

2 A propósito del lenguaje bien construido como máxima a que nos invita Laplace (1749–1827), distrae inoportuna, mi atención al escribir en este día cálido de agosto del 94 y finales de este segundo milenio en que la Posmodernidad es pura antigualla, la noticia solemne que transmitian los televisores vecinales, literalmente:

"Los tipos de interés han bajado quince décimas".

Matemáticamente ofendido decidí comprobar si tal desvarío aparecía en la prensa escrita. Al día siguiente comprobé en tres diarios madrileños de la máxima difusión, tan celosos defensores de nuestras esencias lingüísticas, que la noticia era reproducción literal de la difundida por la excelente cadena de televisión. No he observado ninguna réplica correctora en los días posteriores. De vivir Rey Pastor, brillante académico él, en su segura protesta hubiesen tenido los responsables de tales medios la oportunidad de comprobar lo que debe entenderse, y practicarse, como *lenguaje bien construido* cuya primera premisa debe ser no difundir el error, en este caso fruto de una ignorancia solo justificable en persona no escolarizada.

tes en toda programación cuyos contenidos contacten mínimamente con el álgebra lineal.

Un problema permanente en el quehacer matemático del hombre ha sido la resolución de ecuaciones el cual, de manera natural, nos lleva al planteo y estudio de los sistemas de ecuaciones. Los sistemas de ecuaciones llamados lineales son aquellos en que las indeterminadas o incógnitas son, como máximo, de primer grado.

Al encontrar la solución para sistemas de este tipo los matemáticos se encontraron con los determinantes.

Fue Leibniz (1646−1716) el primero, entre los matemáticos, en reconocer la fundamental importancia del algoritmo algebraico que constituyen los determinantes con el inicio del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Intuyó de una forma clara algunas de sus más notables aplicaciones. Estas inquietudes se las comunicó en una carta a L'Hôpital, manifestándole de una manera categórica que el perferccionamiento del Algebra ha de lograrse por la vía del cálculo combinatorio.

Es muy probable que la urgencia en atender aspectos centrales del Análisis Infinitesimal impidiesen que Leibniz se concentrara en el estudio e inmediato desarrollo de las ideas que poseía sobre los determinantes.

Como en el campo de la combinatoria los caminos estaban suficientemente allanados, otros matemáticos de primera línea centraron su atención en las sugerentes ideas adelantadas por Leibniz.

Tal es el caso de Gabriel Cramer (1704−1752). Fue este profesor de Matemáticas y Filosofía en Ginebra quien en 1750 descubre los determinantes en su sentido ri−

guroso siendo, por reconocimiento unánime de los matemáticos que le son contemporáneos, el verdadero iniciador de esta teoría. Confirma este reconocimiento la aparición en su obra *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques*, de la hoy llamada regla de Cramer para solucionar ecuaciones simultáneas de dos, tres y cuatro incógnitas por el método de los determinantes y que fuera, según se cree, adelantada por Maclaurin en 1729, si bien fue publicada póstumamente en su *Treatise of Algebra* en 1748. La reseña histórica de este trabajo es *Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes algébriques* (Pp. 59, 60, 656–659.) Genève, 1750.

Los trabajos desarrollados en este campo por los matemáticos de la posteridad, entre otros Laplace, Lagrange, Gauss, Cauchy..., parten de los principios establecidos por Cramer.

El término determinante, utilizado por Gauss para designar el discriminante de la forma cuadrática $Q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, aparecido en la obra de 1801 reseñada como *Disquisitiones Arithmeticae. Auctore D. Carolo Friderico Gauss*[3], lo aplicó Cauchy a estos entes matemáticos que habían aparecido con anterioridad en los trabajos de otros matemáticos en el siglo XVIII. Posteriormente, el mismo Cauchy sustituyó la palabra determinante por la expresión *fonctión alternée.*

Centrándonos en la génesis del concepto de determinante, ha de admitirse como principio unánime el que todos los matemáticos desde Leibniz, cuando querían obtener las soluciones generales de un sistema de ecuaciones con un número elevado de ellas —este número era considerado ya grande incluso para tres—, topaban con cálculos extensos, incómodos y propicios al error; era pues asunto de primera necesidad el diseñar un método o algoritmo algebraico que les permitiese obtener

[3] 167 pp. Lips. *Werke,* I. (1863), Göttingen.

las posibles soluciones, asunto éste de absoluta necesidad en diferentes campos del álgebra y de la geometría.

Antes de 1678 se inició ya el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, que en notación usual nosotros simbolizamos en la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

para describir un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas.

Leibniz, en 1693, utilizó un conjunto sistemático de índices para los coeficientes, que en el caso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con escritura

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

y donde los subíndices de los coeficientes indican: el primero el lugar de la ecuación y el segundo la incógnita a que corresponde, para proceder a determinar los presuntos valores que pueden tomar las incógnitas x_1 y x_2.

Estos presuntos valores —pueden no existir— resultan de realizar en el sistema el tratamiento algebraico siguiente:

Multiplicando la primera ecuación por a_{22} y la segunda por $-a_{12}$ se tiene

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

sumando, a continuación, las dos igualdades y agrupando en x_1 es

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

con lo cual resulta que es

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Multiplicando, a continuación, la primera ecuación por $-a_{11}$ y la segunda por a_{21}, se tiene

$$\begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1-a_{12}a_{21}x_2 = -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases}$$

y sumando estas igualdades, se obtiene

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

de donde al despejar x_2 resulta

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Las expresiones formales obtenidas para x_1 y x_2 originan valores concretos para estas indeterminadas solo en el caso de que el denominador común $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ sea distinto de cero.

La expresión $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, y que en la actualidad escribimos como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se llama determinante de segundo orden.

También el propio Leibniz, en un sistema de tres ecuaciones lineales y dos incógnitas, eliminó las dos incógnitas del sistema obteniendo un determinante, que hoy llamamos *resultante* del sistema. Cuando este resultante se anula se tiene garantizada la existencia de un solo valor para x y un solo valor para y verifi–

cando ambos a las tres ecuaciones. El proceso tiene una formulación algebraica del estilo siguiente:

Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y = a_{13} \\ a_{21}x+a_{22}y = a_{23} \\ a_{31}x+a_{32}y = a_{33} \end{cases}$$

vamos a eliminar las dos incógnitas x e y obteniendo lo que actualmente se llama el *resultante* del sistema, que Leibniz obtuvo en 1693 y que no es otra cosa mas que el determinante de la matriz A formada por los coefi- cientes y los términos independientes del sistema, es decir

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En efecto: Multiplicando la primera ecuación por a_{22} y la segunda por $-a_{12}$ y sumando se elimina la variable, obteniéndose:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\cdot x=a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}$$

y por tanto

$$x=\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Análogamente, multiplicando la primera ecuación por $-a_{21}$ y la segunda por a_{11}, se tiene

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot y=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}$$

de donde resulta que es

$$y=\frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Los presuntos valores de x e y, que se acaban de obtener, serán una solución del sistema cuando al ser sustituidos en la tercera ecuación, ésta se verifique idénticamente.

Sustituyendo, pues en la tercera ecuación se tiene:

$$a_{31}\cdot\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}+a_{32}\cdot\frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=a_{33}$$

y operando es

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{23}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{21}a_{32}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

lo cual equivale a escribir

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=0$$

es decir

$$det(\mathrm{A})=0$$

En definitiva hemos obtenido, como deseábamos, la anulación de la resultante. La anulación de la resultante, como condición para que tres ecuaciones simultáneas no homogéneas, con dos indeterminadas, admitan una solución común, expresa el resultado de eliminar las dos incógnitas de las tres ecuaciones. Los inicios de la teoría de los determinantes nos lleva a otro amplio y grave problema, el de la teoría de la eliminación, que se extiende a otros campos y direcciones si bien utilizará, sistemáticamente, los determinantes como herramienta de cálculo.

La regla de su nombre fue dada por Cramer para encontrar los coeficientes de una cónica general con ecuación normalizada del tipo

$$x^2+Axy+By^2+Cx+Dy+C=0$$

de la cual se conocen cinco puntos. Utilizó los determinantes con el criterio actual, es decir, como sumas de productos de elementos uno de cada fila y uno de cada columna, sin que haya dos o más de la misma fila o de la misma columna. A cada sumando le atribuía un signo partiendo de un orden fijado en los factores, el signo de cada uno de los demás es positivo si se llega a él con un número par de cambios en los factores; cuando el número de cambios es impar se le hace corresponder signo negativo. Un criterio sistemático para hacer corresponder el signo adecuado a cada término del desarrollo de un determinante fue aportado por Bezout en 1764 en su trabajo *Recherches sur le degré des équatios résultantes de l'évanouissment des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*[4]. También fue Bezout quien demostró la propiedad que diariamente maneja un estudiante del actual C. O. U.:

> *Es condición necesaria y suficiente para que en un sistema lineal homogéneo con* n *ecuaciones y de* n *incognitas tenga soluciones distintas de cero, que se anule su determinante.*

En realidad en ese momento no se hablaba de sistema sino de *un número* n *de ecuaciones simultáneas.*[5]

---

4 *Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences*, Ann. 1764 (pp. 288–338), pp. 291–295.

5 Bezout (1779): *Théorie Générale des Equations Algébriques*, §§ 195–223, pp. 171–187; §§ 252–270, pp. 208–223. Paris.

Vandermonde, aparte de aplicar los determinantes para estudiar ecuaciones lineales simultáneas, en su trabajo de 1771 *Mémoire sur l'élimination*[6], es quien comienza a estudiar los determinantes como entes matemáticos en sí mismos. En este sentido se le debe considerar como el verdadero iniciador de esta teoría. Descubrió algunas propiedades de los determinantes y adelantó la regla para desarrollar un determinante de tercer orden empleando menores complementarios de segundo orden. Este método fue generalizado por Laplace utilizando menores de un número genérico *h* de filas y los menores complementarios. Se conoce en la actualidad este procedimiento como *Regla de Laplace.*

La formulación de la teoría de los determinantes, en forma casi idéntica a como hoy la conocemos, se debe a Cauchy. El fue el primero que escribió un determinante de orden tres en la forma de cuadro actual

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

No obstante, las columnas o líneas verticales fueron aportadas más tarde, en 1841, por Cayley. Cauchy hizo un tratamiento sistemático de esta teoría demostrando muchas de sus propiedades o mejorando resultados previos, como es el caso de la regla de Laplace. Quizá el resultado más espectacular aportado por Cauchy sea la propiedad relativa a lo que entonces se denominó producto de determinantes. Lagrange demostró este resultado para determinantes de tercer orden considerando las filas como vértices de un tetraedro, (un vértice debía ser el origen). Esta interpretación geométrica le debió impedir, posiblemente, la generalización que no logró. La propiedad formulada con lenguaje actual —hemos

6 *Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences* (Paris), Ann. 1772, 2^e^ partie (pp. 516–532).

de indicar que los determinantes aparecieron antes que las matrices y es por ello por lo que en la versión de Cauchy se habla del producto de determinantes— establece que dadas las matrices $A=(a_{ij})\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ y $B=(b_{ij})\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ y siendo $C=(c_{ij})$ la matriz producto de A y B y, por tanto, con

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

se verifica que

$$det(C)=det(A\cdot B)=det(A)\cdot det(B)$$

(Los matemáticos del momento lo escribieron como $|a_{ij}|\cdot|b_{ij}|=|c_{ij}|$).

Los matemáticos de la época aplicaron los determinantes no solo a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, sino a una gran parte de las líneas de trabajo del momento, cuales fueron la teoría de la eliminación, los cambios de coordenadas, el estudio de las formas cuadráticas, (ya con la ayuda de las matrices), los cambios de variables en la integración múltiple, la búsqueda de expresiones canónicas,... o la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales. En todos estos procesos se encontraron determinantes especiales y nuevas fomas de calcularlos, estando las investigaciones motivadas unas por los nuevos descubrimientos y otras por las demandas de la física y los fenómenos naturales, principalmente por los movimientos en el sistema planetario.[7]

Los problemas geométricos, como la transformación de un conjunto en un sistema de ejes rectangulares en otro que tenga el mismo origen, hace presentes los determinantes, bien directamente, bien en la forma de eliminar incógnitas en un

[7] Laplace (1772): **Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde.** *Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences* (Paris), Ann. 1772, 2[e] partie (pp. 267–367) pp. 294–304. *OEuvres,* viii. pp. 365–406.

sistema de ecuaciones lineales. Se presentan también los determinantes en las sustituciones ortogonales que, pese a su importancia matemática y como observa Muir, no atrajo la atención de los matemáticos alemanes. Los tratados de mecánica, en el deseo de explicar los movimientos planetarios, son documentos en clave de Física–Matemática que se topan con los determinantes o necesitan de ellos para una justificación más razonada de sus argumentaciones o, en cualquier caso, una presentación más sintética.

Siguiendo la obra mencionada de Thomas Muir, reproducimos, por su interés, los científicos y las obras que, en el periodo fundamental para la consolidación de la teoría de los determinantes comprendido entre 1748 y 1840, colaboraron en mayor o menor medida.

1748. EULER. *Introductio in Analysin Infinitorum.* Tomi duo. Lausannae et Genevae (v. ii. *Appendix de Superficiebus*).

1770. EULER. **Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile.** *Novi Commentarii Acad. Petrop., XV. pp. 75–106*; *Commentationes Arith. Collectae, i. pp. 427–443.*

1772. LAPLACE. *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Hist. de l'Acad. Roy. des sciences* (Paris), 2e partie, pp. 267–376.

1773. LAGRANGE. **Nouvelle solutión du problème du mouvement de rotatión d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice.** *Nouv. mém. de l'Acad. Roy...* (Berlin), pp. 85–120.

1775. EULER. **Formulae generales pro traslatione quacunque corporum rigidorum.** *Novi Commentarii Acad. Ptrop., XX.* pp. 189–207.

1776 EULER. **Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.** *Novi Commentarii Acad. Ptrop., XX.* pp. 208–238.

1776. LEXELL. **Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum.** *Novi Commentarii Acad. Ptrop., XX.* pp. 239–270.

1784. MONGE. **Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes.** *Mém. de l'Acad. Roy. des sciences* (Paris). [pp. 85–117], p. 114.

1802. HACHETTE et POISSON. **Addition au mémoire précédent.** *Journ. de l'Éc. Polyt.*, cahier xi, pp. 170–172.

1806. CARNOT, L. N. *M. Sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace suivi d'un...* Paris, 1806.

1810. LACROIX, S. F. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* 2e édition, i. p. 533...

1811. LAGRANGE. *Mécanique analytique.* 2e édit., i. p. 267.

1818. GAUSS. **Determinatio attractionis...** *Commentationes Soc... Gottingensis, (Classis math.)* iv. pp. 21–48; *Werke,* iii. pp. 331–355.

1827. JACOBI. **Euleri formulae de transformatione coordinatarum.** *Crelle's Journal,* ii. pp. 188–189; *Gesammelte Werke,* vii. pp. 3–5.

1827. JACOBI. **Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung.** *Crelle's Journal,* ii. pp. 227–233; *Gesammelte Werke,* iii. pp. 45–53.

1827. JACOBI. **De singulari quadam duplicis integralis transformatione.** *Crelle's Journal,* ii. pp. 234–242; *Gesammelte Werke,* iii. pp. 55–66.

1828. CAUCHY. **Sur les centres, les plans principaux et les axes principaux des surfaces du second degré.** *Exercices de Math.*, iii. pp. 1–22; *OEuvres complètes,* 2e sér. viii. pp. 8–35.

1828. CAUCHY. **Discussion des lignes et des surfaces du second degré.** *Exercices de Math.*, iii. pp. 65–120; *OEuvres complètes,* 2e sér. viii. pp. 83–149.

1829. CHASLES. **Sur les propriétés des diamètres conjugués des hyperboloïdes.** *Corresp. Math. et Phys.*, v. pp. [137–157] 139–141.

1829. CLAUSEN. **Ueber die Bestimmung der Lage des Haupt–Umdrehungs–Axen eines Körpers.** *Crelle's Journal,* pp. 383–385; *Nouv. Annales de Math.*, v. pp. 81–83.

1829. CAUCHY. **Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes.** *Exercices de Math.*, iv. pp.140–160; *OEuvres complètes,* 2e sér. ix., pp. 172–195.

1831. JACOBI. **De transformatione integralis duplicis indefiniti... in forman simpliciorem...** *Crelle's Journal,* viii. pp. 253–279, 321–357; *Gesammelte Werke,* iii. pp. 91–158.

1832. GRUNERT. **Ueber die Verwandlung der Coordinaten im Raume.** *Crelle's Journal,* viii. pp. 153–159; *Nouv. Annales de Math.*, v. pp. 414–419.

1832. ENCKE. **Ableitung der Formeln von Monge für die Transformation der Coordinaten in Raume.** *Berliner Astron. Jahrbuch* (1832), pp. 305–310; *Corresp. Math. et Phys.*, vii. pp. 273–277.

1832. JACOBI. **De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia.** *Crell's Journal,* x. pp. 101–128; *Gesammelte Werke,* iii. pp. 159–189.

1833. JACOBI **De finis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis...** *Crell's Journal,* xii. pp. 1–69; *Gesammelte Werke,* iii. pp. 191–268.

1833. GRUNERT. *Supplemente zu Klügels Wörterbuch: Art. "Coordinaten".*

1835. JACOBI. **Observationes geometricae.** *Crell's Journal,* xv. pp. 309–312; *Gesammelte Werke,* vii. pp. 20–23.

1839. CATALAN. **Sur la transformation des variables dans les intégrales multiples.** *Mém. couronnés par l'Acad. de Bruxelles,* xiv. ii. pp. 1–47.

1839. REISS. **Sur les neuf angles que forment réciproquement deux systèmes d'axes rectangulaires.** *Correspond. Math. et Phys.,* xi. pp. 119–173.

1840. RODRIGUES. **Des lois géometriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace,...** *Journ. (de Liouville) de Math.,* v. pp. [380–440] 404–405.

En esta relación de trabajos son siete los más directamente relacionados con la teoría de los determinantes: dos de Jacobi en 1827, uno de Cauchy en 1829, tres de Jacobi entre 1831 y 1833 y uno de Catalan en 1839.

Por su invariable actualidad, vamos a mencionar el problema resuelto por Jacobi que permite encontrar la ecuación canónica de una superficie de segundo grado, cuando está escrita en su forma más general.

Jacobi, en su trabajo de 1827, *Ueber die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung*[8], plantea y resuelve, el problema de transformar una expresión de la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$$

donde x, y, z son las coordenadas de un punto referido a un sistema de coordenadas oblícuo, en una expresión de la forma

$$L\xi^2+M\eta^2+N\zeta^2$$

Esto implica que el asunto directamente buscado son los nueve coeficientes que dan cada una de las coordenadas originales en función de las nuevas.

El momento más espectacular, y a la vez curioso, lo representa el año 1812 que registra solo dos nombres como aportadores de resultados, en este caso definitivos, en la teoría de los determinantes. Nos estamos refiriendo a Binet y a Cauchy quienes con dos memorias de contenidos prácticamente idénticos, y presentadas incluso en la misma fecha, se adelantaron a resultados que de suyo deberían haber llegado años más tarde.

La memoria de Binet tiene la siguiente reseña: **Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques.** *Journ. de l'Éc. Polyt.*, ix. cah. 16, pp. 280–302,...

La de Cauchy, aparece como: **Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment.** *Journ. de l'Ec. Polyt.*, x. Cah. 17, pp. 29–112. *OEuvres* (2) i.

8 *Crelle's Journal*, ii. pp. 227–233; *Gesammelte Werke*, iii. pp. 45–53.

El fundamento de ambos trabajos es el mismo y a nosotros nos interesa resaltar que de ellos se tiene que un determinante es una suma de productos, cada uno de ellos con un signo obtenido con un criterio preestablecido.

Ambos son conocedores de sus trabajos manteniendo comunicación sobre los mismos, por lo cual la coincidencia en su presentación resulta menos sorprendente. Este intercambio de opiniones lo reseña T. Muir y es así de esclarecedor: Así habla Binet sobre el asunto que le ocupa:

Ayant eu dernièrement occasion de parler à M. Cauchy, ingénieur des ponts et chaussées, du théorème général que j'ai énoncé ci–dessus, il me dit être parvenu, dans des recherches analogues à celles de M. Gauss, à des théorèmes d'analyse qui devaient avoir rapport aux miens. Je m'en suis assuré, en jetant les yeux sur ces formules: mais j'ignore si elles ont la même généralité que les mennes: nous y sommes arrivés, je crois par des voies très–différentes.

Cauchy, por su parte, lo corrobora así:

J'avais rencontré l'été dernier, à Cherbourg, ou j'étais fixé par les travaux de mon état, ce théorème et quelques autres du même genre en cherchant à généraliser les formules de M. Gauss. M. Binet, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorèma qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de résultante *ce que j'avais appelé* déterminant.

Cauchy prologa su memoria con otra, titulada *Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme.*

Todo ello le permite introducir el concepto de determinante como una clase de funciones. Las que él denominó *fonctions symétriques alternées.* Primero lo hizo para funciones simétricas alternadas de segundo y tercer orden, generalizándolo acontinuación para orden *n* cualquiera.

Hemos de observar también que en esta memoria es donde aparece el teorema, ya mencionado, sobre el determinante del producto y que presentó así:

> *Lorqu'un système de quantités est déterminé symétrquement au moyen de deux autres systèmes, le déterminant du système résultant est toujours égal au produit des déterminants des deux systèmes composans.*

Para orgullo de la cultura francesa, en el periodo comprendido entre 1693 y 1812, son de esta nacionalidad los matemáticos que más brillantes aportaciones realizaron a la teoría de los determinantes. Los nombres de Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Monge, Binet y Cauchy, están ligados a las aportacionnes más notables, copando incluso el campo de trabajo sin dejar ninguna aportación de re– lieve a los investigadores contemporáneos de otras nacionalidades.

El año 1841, en cuanto al avance del estudio de los determinantes, presenta una situación paralela a la del año 1812. Los avances más notables corespondieron entonces a solo dos matemáticos, Binet y Cauchy. Ahora son también dos matemáti– cos los que aportan, exclusivamente, las monografías más meritorias: Cauchy y Ja– cobi. Es preciso observar que Cauchy, habiendo nacido quince años antes que Jaco– bi, sin embargo le sobrevivió en seis. Jacobi contribuye en 1841 con una monogra–

fía comparable a la de Cauchy de 1812, en tanto que la de Cauchy de 1841 tiene todas las espectativas de un matemático adelantado a su propio tiempo.

Las aportaciones de Cauchy en este año están reseñadas así:

Note sur la formation des fonctions alternées qui servent à résoudre le problème de l'élimination. *Comptes Rendus...* Paris, xii. pp. 414–426; *OEuvres complètes d'Augustin Cauchy,* 1re Sér., vi. pp. 87–90.

Note sur les diverses suites que l'on peut foprmer avec des termes donnés. *Exercices d'analyse et de phys. math.,* ii. pp. 145–150; *OEuvres complètes,* 2e Sér. xii.

Mémoire sur les fonctions aternées et sur les sommes alternées. *Exercices d'analyse et de phys. math.,* ii. pp. 151–159; *OEuvres complètes,* 2e Sér. xii.

Mémoire sur les sommes alternées, connues sous le nom de résultantes. *Exercices d'analyse et de phys. math.,* ii. pp. 160–176; *OEuvres complètes,* 2e Sér. xii.

Mémoire sur les fonctions différentielles alternées. *Exercices d'analyse et de phys. math.,* ii. pp. 176–187; *OEuvres complètes,* 2e Sér. xii.

Estos trabajos de Cauchy adentran la teoría de los determinantes en el campo del análisis combinatorio considerando la paridad de las permutaciones, la generación cíclica de otras a partir de una dada y, en definitiva, un criterio lógico de atribuir adecuadamente el signo que debe corresponder a cada término del desarrollo de un determinante.

Por otra parte, haciendo uso de la que hoy llamamos regla de Cramer, Cauchy nos muestra la manera de resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneos con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, mediante la consideración de ciertos determinantes:

Dadas las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z = \xi \\ a_2x+b_2y+c_2z = \eta \\ a_3x+b_3y+c_3z = \zeta \end{cases}$$

que permiten obtener las tres variables ξ, η, ζ en función de las otras tres x, y, z. Si existe solución para cada sistema anterior, se podrán expresar las tres variables x, y, z por medio de las ξ, η, ζ lo cual origina el nuevo sistema,

$$\begin{cases} x = \frac{A_1}{\Delta}\cdot\xi + \cdot\frac{A_2}{\Delta}\eta + \frac{A_3}{\Delta}\cdot\zeta \\ y = \frac{B_1}{\Delta}\cdot\xi + \frac{B_2}{\Delta}\cdot\eta + \frac{B_3}{\Delta}\cdot\zeta \\ z = \frac{C_1}{\Delta}\cdot\xi + \frac{C_2}{\Delta}\cdot\eta + \frac{C_3}{\Delta}\cdot\zeta \end{cases}$$

en el cual Δ es el llamado determinante del sistema original y A_1, B_1, C_1, A_2,... son los cofactores en Δ de a_1, b_1, c_1, a_2,... respectivamente. Multiplicando los determinantes de los dos sistemas se obtiene el determinante de las cantidades

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

lo cual fue generalizado con la siguiente afirmación:

Si n *variables* x_1, x_2,..., x_n, *étant liées à* n *autres variables* y_1, y_2,..., y_n, *par* n *équations linéaires, on suppose les unes exprimées en fonctions linéaires des autres, et réciproquement; les deux résultantes (determinants) formées avec les coefficients que renfermeront ces fonctions linéaires dans les deux hypothéses, offriront un produit équivalent à l'unité.*

La propiedad anterior es el adelanto del conocido resultado del algebra lineal moderna:

Todo endomorfismo f *en un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial n–dimensional* **E**, *cuya matriz asociada* M, *en una base* $\mathscr{B}$, *es regular, tiene asociado otro endomorfismo* f^{-1}, *llamado recíproco de f, cuya matriz asociada en la misma base B es, precisamente,* M^{-1}. *Además se verifica que la matriz asociada al endomorfismo composición* $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E$ *es* $M^{-1} \cdot M = I$ *(siendo* I *la matriz unidad de orden* n*). Como consecuencia es*

$$det(M^{-1} \cdot M) = det(M^{-1}) \cdot det(M) = det(I) = 1$$

Los resultados de Jacobi de 1841 aparecen reseñados como:

De formatione et propietatibus Determinantium. *Crelle's Journal*, xxii. pp. 285–318; *Werke*, iii. pp. 355–392.

Jacobi, que estaba al corriente de los trabajos de Cramer, Vandermonde, Bezout, Laplace, Gauss, y Binet tiene, sin embargo, en Cauchy su principal fuente de inspiración.

De todos los contemporáneos de Cauchy es Jacobi quien manifiesta una mayor evidencia de haber leido y asimilado la famosa memoria de 1812.

Es importante resaltar que, en cierto aspecto, la memoria de Jacobi no es más que la introducción a otras dos de mayor importancia, tratando ambas una clase especial de determinantes del tipo posteriormente asociado con su nombre. Una lleva por título *De determinantibus functionalibus.* Ocupa cuarenta y una páginas (319–359) en la memoria general. La otra, con el títtulo *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum*, trata de aquellos determinantes, primeramente considerados por Cauchy, en los cuales los miembros de un conjunto de índices representan potencias y a los cuales el nombre *alternants* fue el que se le asignó después. Esto ocupa doce páginas (360–371).

Las tres memorias agrupadas constituyen un excelente tratado del tema y son conocidas por su marcada influencia en propagar un mejor conocimiento del asunto entre los matemáticos. De este modo Jacobi ha pasado a la posteridad con el mérito, compartido con Cauchy, de ser el padre de la teoría de los determinantes. El manejo usual que hoy hacemos de los determinantes es el mismo que ellos establecieron salvo algunos matices de notación y, por supuesto, los logros propios de la teoria así como muchos determinantes especiales que pertenecen a su posteridad. Los determinantes llamados *jacobianos*, con todas sus notables aplicaciones, son actualmente tópicos imprescindibles dentro del Algebra Lineal y del Análisis Matemático.

En la mencionada memoria de Jacobi sobre los determinantes funcionales, considera n funciones $u_1,u_2,\ldots,u_n$ siendo cada una de ellas, a su vez, función de las n variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$, y se pregunta sobre la posibilidad de eliminar las variables x_i mediante la obtención de una ecuación que relacione a las u_i. Cuando no es posible obtener esta ecuación se dice que las funciones u_i son independientes. La conocida respuesta a la cuestión es que si se anula el ja–

cobiano de las u_i con relación a las x_i entonces se dice que las u_i son linealmente dependientes.

Establece también el teorema relativo al producto de los determinantes jacobianos y que dice:

Si $z_1,z_2,\ldots,z_n$ *son funciones de otras* n, $y_1,y_2,\ldots, y_n$, *y éstas lo son a su vez de las* $x_1,x_2,\ldots,x_n$, *entonces se verifica que el jacobiano de las funciones* z_i *respecto de las* x_i *es igual al producto del jacobiano de las funciones* z_i *respecto de las* y_i *por el jacobiano de las* y_i *respecto de las* x_i.

Además, Jacobi descubrió la fórmula para obtener la derivada de un determinante cuando cada uno de sus elementos son funciones de una variable. Si es $A=(a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donde $a_{ij}=a_{ij}(t)$ y siendo $det(A)=|A|$ y A_{ij} el menor complementario del elemento a_{ij}, se verifica que:

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}}=A_{ij} \qquad\qquad \frac{d|A|}{dt}=\sum_{i,j} A_{ij}\cdot\frac{da_{ij}}{dt}$$

Ya hemos mencionado anteriormente cómo los determinantes se presentan en campos ajenos al del álgebra. Un caso concreto es el de su utilización en el cambio de variable para el cálculo de una integral múltiple. Los primeros resultados, que son casos particulares, fueron descubiertos por Jacobi hacia 1832. El resultado general, tal y como se utiliza en el análisis actual, en el caso de la integral triple es:

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz$$

si se realiza el cambio de variables dado por

$$x=x(u,v,w) \quad , \quad y=y(u,v,w) \quad , \quad z=z(u,v,w)$$

la integral adopta la forma

$$\iiint g(u,v,w) \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix} dudvdw$$

donde

$$g(u,v,w)=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$$

El determinante funcional que aparece en la integral anterior es el llamado jacobiano de x,y,z respecto de u, v y w.

El resultado general corresponde a Eugene Charles Catalan (1814–1849) y que presentó en la memoria de 1839 de la cual ya hemos hecho mención.

Siguiendo a Cauchy y Jacobi hemos dejado resultados anteriores de notable importancia sin mencionar; tal es el caso de Heinrich Ferdinand Scherk quien en 1825 en su obra *Mathematische Abhandlungen* enriquece la teoría de los determinantes con nuevas propiedades. Entre ellas el valor de un determinante de una matriz triangular como producto de los elementos que están sobre la diagonal principal, que un determinante es nulo cuando tiene una fila que es combinación lineal de otras filas, la regla de multiplicar un determinante por un número, o las reglas para sumar dos determinantes que tienen una línea en común.

Los tratados previos de importancia sobre el tema, conocidos por Scherk, son los de Cramer y Bezout de 1764, los de Vandermonde y Bezout en 1779, los de Hindenburg y Rothe.

La parte esencial de la memoria presentada por Scherk en 1825, citada anteriormente, está dedicada a elaborar una extensa y detallada demostración de la regla de Cramer por el llamado método de inducción matemática. En la propia exposición demuestra ciertas propiedades de las llamadas entonces funciones de Cramer (más tarde determinantes) y que ya hemos indicado anteriormente.

El proceso seguido es el de partir de una ecuación con una incógnita, luego dos ecuaciones con dos incógnitas, tres ecuaciones con tres incógnitas, conectadas en forma de sucesión; de tal forma que la solución de cada caso se utiliza para obtener la del siguiente. De suponer resuelto, mediante la regla de Cramer, un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, demuestra la validez de la misma para el caso de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas.

Quien más empeño demostró por hacer una teoría propiamente dicha de los determinantes fue el singular y polifacético James Joseph Sylvester (1814–1897), dedicando a su estudio, de una forma más o menos directa, aproximadamente cincuenta años. La sociedad de la época fue muy injusta con este hombre, dotado de gran ingenio y con capacidad de encontrar aspectos matemáticos y aplicaciones en lugares insospechados antes, y a quien, por razones de ascendencia, se le impidió acceder con la prontitud que merecía al puesto de profesor, que apetecía, en la universidad de Cambridge. Esta circunstancia le obligó a realizar otras actividades hasta que fue nombrado, en 1876, profesor de Teoría de Invariantes, —por él mismo aportada a las matemáticas— en la universidad americana Johns Hopkins. Con Sylvester se inicia la investigación en matemática pura en los Estados Unidos y fundó para la divulgación de los descubrimientos el *American Journal of Mathematics*.

Con ganado prestigio ante los matemáticos de la época —era íntimo amigo de Cayley— regresó a Inglaterra en 1884 donde, en forma tardía, se reparó parcialmente la injusticia al ser nombrado profesor de la universidad de Oxford. Contaba setenta años y ocupó este puesto, con la brillantez que le era propia, hasta su muerte.

Se dice que Sylvester era un profesor de exposición apasionada suscitando estímulo en sus alumnos. Impregnaba de gran vivacidad a su discurso, impreso en términos de nueva matemática y con lenguaje brillante. Aportó nueva terminología al lenguaje matemático relacionando campos tan dispares como la teoría de invariantes y la mecánica. Tenía sorprendentes intuiciones sobre nuevas propiedades que en algunos casos eran incorrectas, pero la mayoría de ellas contribuyeron a ensanchar el campo de la matemática conocida.

Las aportaciones más notables de Sylvester a la teorría de los determinantes son las que contienen las siguientes memorias.

1839. **On Derivation of Coexistence: Part I. Being the theory of simultaneous simple homogeneous equations.** *Philosophical Magazine*, xvi. pp. 37–43; *Collected Math. Papers,* i. pp. 47–53.

1840. **A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree.** *Philosophical Magazine*, xvi. pp. 132–135; *Collected Math. Papers,* i. pp. 54–57.

1841. **Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations.** *Cambridge Math. Journ.*, ii. pp. 232–236; *Collected Math. Papers,* i. pp. 61–65.

En la memoria de 1840 plantea Sylvester el problema siguiente: a partir de las ecuaciones

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$$

se trata de establecer las reglas que nos permitan alcanzar tres diferentes objetivos:

(1) Una regla para eliminar la incógnita x.

(2) Una regla para encontrar la primera resultante de primer grado y que sea de la forma $Ax-B=0$.

(3) Una regla para encontrar la primera resultante de cualquier grado.

El primero de ellos conlleva el proceso conocido posteriormente con el nombre de método *dialítico* del que, por aportaciones anteriores de otros matemáticos como Bezout, solo se necesitaba ya una parte del mismo.

La descripción del método que permite llegar a la resultante de las dos ecuaciones, condición equivalente a que ambas ecuaciones tengan una raíz común, es la siguiente según Sylvester:

> Se forma la progresión a de coeficientes en m líneas (m es el grado de la segunda ecuación) y de forma análoga la progresión b de coeficientes en n líneas (n es el grado de la primera ecuación) del siguiente modo: Añadimos $m-1$ ceros a la derecha de los términos de la progresión a de coeficientes de la primera ecuación. (Esta es la primera fila de una disposición cuadrada que acabaremos obteniendo). La segunda fila se obtiene añadiendo $m-2$ ceros a la derecha y llevar uno a la izquierda. Se repite el

proceso hasta que todos los $m-1$ ceros son colocados a la izquierda no quedando ninguno a la derecha. Cada una de las m filas así formadas está escrita debajo de otra diferente.
Escribimos, ahora, n filas más con la progresión b de coeficientes de la segunda ecuación distribuyendo $n-1$ ceros entre la derecha y la izquierda.

Estas n filas debajo de las m obtenidas anteriormente repressentan una configuración cuadrada (hoy una matriz) con $m+n$ términos de profundidad (filas) y con $m+n$ términos de anchura (columnas).

La anulación del determinante obtenido es la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones tengan una raíz común.

Así, por ejemplo, para eliminar x de las ecuaciones

$$\begin{cases} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ \phantom{a_3x^3 + {}} b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$$

formaremos el determinante de orden 2+3

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Igualando a cero este determinante se tiene una ecuación en la que no aparece la incógnita x y que es la *resultante* de la eliminación.

Cauchy, en su memoria de 1840, *Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques*[9], demuestra que el método de Sylvester conduce a los mismos resultados que los métodos, ya conocidos, de Euler y Bezout.

Los determinantes despliegan toda su fuerza como operadores algebraicos cuando se alían con el concepto de matriz. Actualmente en cada proceso pertinente hablamos del determinante de una matriz. Las exposiciones docentes se realizan en ese sentido. Los determinantes son un apéndice de algo más general, en una visión más estructural del álgebra moderna, cual es la teoría de las matrices. Sin embargo, es preciso recordar que fueron los determinantes con su configuración plana en forma de cuadrado, quienes propiciaron la aparición de las matrices. En cierto modo las matrices se manejaban incluso antes de ser definidas como entes matemáticos en sí mismos.

[9] *Exercices d'analyse et de phys. math.*, i. pp. 385–422; o *OEuvres complétes*, 2^{e} Sér. xi.

Importancia de los Determinantes en la asignatura de Matemáticas I

En este apartado se presentan algunas cuestiones muy concretas, que pretenden mostrar la importancia operativa de los determinantes en nuestra asignatura.

1.– *Ecuación de una recta en el plano cuando se conocen dos puntos de la misma.*

Sea la recta r determinada por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dados por sus coordenadas en un sistema cartesiano de referencia con ejes rectangulares.

La ecuación de la recta, en forma continua, es $r \equiv \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Operando en la proporción se tiene $(x-x_1)\cdot(y_2-y_1)=(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)$, de donde resulta la igualdad $xy_1+x_2y+x_1y_2-xy_2-x_1y-x_2y_1=0$.

En virtud del desarrollo de un determinante de orden tres, la igualdad anterior se escribe con mayor comodidad en la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}=0$$

De esta manera y a modo de ejemplo, la ecuación de la recta que contiene a los puntos $P_1(3,-1)$ y $P_2(1,4)$ resulta inmediata de la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ y & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$$

obteniéndose la ecuación cartesiana o general $Ax+By+C=0$.

2.– *Determínese* m *para que los vectores* $\overline{u}=(m,-3,2)$; $\overline{v}=(2,3,m)$ y $\overline{w}=(4,6,-4)$ *generen, en el* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*, un subespacio vectorial de dimensión 1.*

Solución:

Sea $S=\mathscr{L}(\{\overline{u},\ \overline{v},\ \overline{w}\})$ el subespacio engendrado por los vectores dados.

$\text{Dim}(S)=1 \Leftrightarrow \text{rang}\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=1$, y por tanto todo menor M de orden igual o mayor que dos en la matriz A, formada por las coordenadas de los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$, y $\overline{w}$, tiene que ser cero.

Como es $A=\begin{pmatrix} m & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & m & -4 \end{pmatrix}$, tiene que ser $|A|=0$. Calculando:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & m & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & m & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & m & -2-m \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2-m)\cdot(3m+6) = -6\cdot(m+2)^2$$

se tiene que $|A|=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Con $m=-2$ la matriz A de los vectores dados es $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, en la que solo un vector es linealmente independiente, por ejemplo $\overline{v}=(2,\ 3,\ -2)$.

Conclusión: $\dim(S)=1 \Leftrightarrow m=-2$.

3.– *Calcular el rango de la matriz* $A=\begin{pmatrix} 0 & -a & -a & -a \\ a & 0 & -a & -a \\ a & a & 0 & -a \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}$, *según los diferentes valores reales de* a.

Solución:

Como A es una matriz cuadrada se calcula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -a & -a & -a \\ a & 0 & -a & -a \\ a & a & 0 & -a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix} =$$

sumando a la segunda columna la primera por -1 y a la tercera columna la segunda por -1

$$= \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 & -a \\ a & -a & -a & -a \\ a & 0 & -a & -a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la última fila

$$= -a\cdot \begin{vmatrix} -a & 0 & -a \\ -a & -a & -a \\ 0 & -a & -a \end{vmatrix} =$$

sumando a la tercera columna la segunda por -1

$$= -a\cdot \begin{vmatrix} -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la tercera columna

$$= (-a)\cdot(-a)\cdot \begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= a^4$$

Del cálculo de $|A|$, y de la propia configuración de A, se deduce que:

Si es $a \neq 0$ se tiene que $rg(A)=4$.

Si es $a=0$ se tiene que $rg(A)=0$.

A veces el método de los determinantes se combina con otros para obtener el rango de una matriz como muestra el siguiente ejemplo.

4.- *Calcúlese el rango de la matriz* $M=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, *según los valores reales de* α.

Solución:

Por observación de la matriz M se encuentra la relación, $3^{a}C=1^{a}C(-1)+2^{a}C(1)$ es decir que la tercera columna es combinación lineal de la primera y segunda independientemente del valor de α. Por esto podemos afirmar que $rg(M)=rg(M_1)$, siendo $M_1=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

Además, en la matriz M_1, se verifica que $3^{a}F=2^{a}F(1)+1^{a}F(-1)$, por lo que se tiene la igualdad $rg(M_1)=rg(M_2)$, siendo $M_2=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. En definitiva el rango de la matriz inicial M es el mismo que el de la matriz M_2, para todo valor de α. Considerando que $\det(A)=\alpha^2$ se tiene, en conclusión, que:

Si $\alpha \neq 0$ es $rg(M)=2$, y si $\alpha=0$ es $rg(M)=0$.

5.– *Demuéstrese que si* A *es una matriz antisimétrica de orden* n, *siendo* n *impar, se verifica que* $\det(A)=0$.

En efecto:

Si es A antisimétrica, entonces $A=-A^t=(-1)\cdot A^t$. Tomando determinantes en la igualdad anterior, se tiene:

$$|A|=|(-1)\cdot A^t|=(-1)^n\cdot|A^t|=(-1)\cdot|A|=-|A|$$

De la igualdad $|A|=-|A|$ se tiene que $2\cdot|A|=0$, y, en consecuencia, $|A|=0$.

6.– *Determínese, si es posible, un valor para* λ *tal que el vector* $\overline{u}=(1,2,\lambda)$ *pertenezca al subespacio vectorial, de* $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, *engendrado por los vectores* $\overline{v}=(1,1,1)$ *y* $\overline{w}=(2,1,-1)$.

Solución:

Sea **S** el subespacio que engendran $\overline{v}$ y $\overline{w}$. El vector $\overline{u}$ pertenece a **S** cuando existan dos números reales α y β verificando que $\overline{u}=\alpha\cdot\overline{v}+\beta\cdot\overline{w}$, y como $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son linealmente independientes debe ser $\text{rg}\left\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\right\}=2$. Esto equivale a afirmar que es:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}=2$$

y, como es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, tiene que ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando el determinante anterior haciendo, previamente, ceros en la primera columna sumando a la primera fila la segunda multiplicada por -1 y a la tercera fila también la segunda por -1, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & \alpha-2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera columna es $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 0$ de donde es $2-\alpha+2=0$ y, en consecuencia, $\alpha=4$.

La teoría del rango, utilizando determinantes, permite obtener las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial. Esto lo vamos a analizar con el siguiente ejemplo.

7.- *Hállense unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial* **S**, *que en el* $\mathbb{R}$*−espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$, *engendran los vectores* $\overline{u}=(1,2,-1)$ y $\overline{v}=(1,1,1)$.

Solución:

Todo vector $\overline{w}=(x,y,z) \in S$ ha de ser tal que $rg\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=2$, ya que los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son linealmente independientes y $\overline{w}$ tiene que ser combinación lineal de ellos.

La condición anterior equivale a decir que:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix}=2$$

y como es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, debe verificarse que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix}=0$$

Desarrollamos este determinante haciendo ceros en la segunda columna, y tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y-x \\ -1 & 1 & z-x \end{vmatrix}=0$$

y de donde se tiene $\begin{vmatrix} 1 & y-x \\ 2 & z-x \end{vmatrix}=0$. Operando resulta una sola ecuación implícita del subespacio $3x-2y-z=0$.

Es preciso recordar que el número mínimo de ecuaciones implícitas que tiene un subespacio vectorial viene dado por la diferencia entre la dimensión del espacio, que le contiene, y la propia dimensión del subespacio.

8.– *Estúdiese el sistema de ecuaciones siguiente según los valores de* a:

$$\begin{cases} x\cdot\cos a + y\cdot\operatorname{sen} a = 1 \\ x\cdot\operatorname{sen} a - y\cdot\cos a = 1 \end{cases}$$

Solución:

Considerando la matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{pmatrix}$ se verifica que $\det(M)=-(\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a)=-1$. Este sistema es de Cramer cualquiera que sea el valor de a. Una manera de obtener la solución, para cada valor de a, es aplicar la regla de Cramer, siendo:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} a \\ 1 & -\cos a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{vmatrix}} = \frac{-\cos a-\operatorname{sen} a}{-1} = \operatorname{sen} a+\cos a$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & 1 \\ -\cos a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{vmatrix}} = \frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{-1} = \operatorname{sen} a-\cos a$$

9.– *Estúdiese para qué valores de* a, b *y* c *es de tipo Cramer el sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Solución:

Como el determinante general del sistema es $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, el sistema nunca es de Cramer cualesquiera que sean los valores de a, b y c.

10.– *Hállense los valores de* a *para los cuales el sistema lineal homogéneo siguiente tiene soluciones diferentes de la trivial.*

$$\begin{cases} (a+1)\cdot x + y - 2z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

El determinante general es $\Delta = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a\cdot(2-a)$. Cuando sea $a=0$ ó $a=2$, el sistema, que es compatible por ser homogéneo, es indeterminado, con lo que presenta infinitas soluciones distintas de la solución nula.

11.– *En el espacio vectorial real de la geometría tridimensional* V^3, *considerada la base ortonormal* $\mathcal{B}=\left\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\right\}$, *el producto vectorial de los vectores* $\overline{x}=x_1\overline{u}_1+x_2\overline{u}_2+x_3\overline{u}_3$ *e* $\overline{y}=y_1\overline{u}_1+y_2\overline{u}_2+y_3\overline{u}_3$ *es un vector que se representa mediante el determinante simbólico* $\overline{x}\wedge\overline{y}=\begin{vmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, *con la obligación de ser desarrollado por los elementos de la primera fila.*

Si consideramos un tercer vector $\overline{z}=z_1\overline{u}_1+z_2\overline{u}_2+z_3\overline{u}_3$, el producto mixto de los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ también está dado por un determinante, siendo:

$$\overline{x}\cdot(\overline{y}\wedge\overline{z})=[\overline{x},\overline{y},\overline{z}]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Cuando dos vectores no son nulos y su producto vectorial es nulo significa que el determinante simbólico es nulo lo que significa que los vectores son de componentes proporcionales, lo que geométricamente significa que son paralelos.

A su vez si tres vectores son no nulos y su producto mixto es nulo, significa que en el determinante existe combinación lineal entre sus filas y en este caso los vectores son geométricamente coplanarios.

Como consecuencia de lo anterior se tiene:

12.– *Ecuación del plano cuando se conocen tres puntos, no alineados, del mismo.*

Sean $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$ tres puntos del espacio afín tri–dimensional A_3, dados por sus coordenadas en una referencia ortonormal y que forman triángulo.

La ecuación del plano que definen se obtiene considerando que un punto genérico del mismo $P(x,y,z)$, debe ser tal que los vectores **AP**, **AB** y **AC** han de ser co–planarios o de producto mixto nulo. Esta condición se escribe así:

$$[\mathbf{AP},\mathbf{AB},\mathbf{AC}]=\det(\mathbf{AP},\mathbf{AB},\mathbf{AC})=\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

La última igualdad es equivalente a la siguiente, que es de mas fácil recuerdo:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando este determinante se llega a una ecuación del tipo

$$Ax+By+Cz+D=0$$

que es la llamada ecuación implícita, o general, o cartesiana de dicho plano.

Ejemplo: Encuéntrese la ecuación del plano que definen los puntos $A(2,2,-2)$, $B(2,-2,2)$ y $C(-2,2,2)$.

Escribiendo para este caso la igualdad anterior, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Si en este determinante restamos la segunda fila a cada una de las demás tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-2 & y-2 & z+2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la primera columna se tiene esta otra igualdad:

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Prescindiendo del factor (-1), queda:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente si se desarrolla este determinante por los elementos de la primera fila se consigue la igualdad:

$$-16(x-2)-16(y-2)-16(z+2)=0$$

Simplificando en ella resulta la ecuación pedida del plano:

$$x+y+z-2=0$$

13.– *Dadas las rectas* r *y* s *en el espacio, que no son paralelas, para decidir si se cortan o se cruzan, se emplea un determinante procediendo del siguiente modo:*

Sean $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ dos puntos arbitrarios, uno en cada recta, y $\overline{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\overline{\mathbf{v}}=(v_1,v_2,v_3)$ vectores direccionales respectivos de r y s. Considerando el determinante de los vectores $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}}$ y **AB**, se tiene:

- Si $\det(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{v}},\mathbf{AB})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{vmatrix}=0$ los tres vectores son linealmente dependientes y, por tanto, las rectas se cortan.

- Si, por el contrario, es $\det(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{v}},\mathbf{AB})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{vmatrix}\neq 0$ entonces las rectas se cruzan.

Ejemplo: Decídase la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$$

Solución:

Las rectas no son paralelas pues dos vectores directores respectivos son $\overline{\mathbf{u}}=(1,-2,1)$ y $\overline{\mathbf{v}}=(2,1,3)$. Considerando punto $A(1,-2,0)$ en la recta r y el punto $B(2,-1,1)$ en la recta s, se tiene el vector $\mathbf{AB}=(1,1,1)$ con lo que es:

$$\det(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{v}},\mathbf{AB})=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3$$

Las rectas r y s se cruzan.

14.– *Dados los planos:*

$$\pi_1 \equiv ax+y+z=1 \ ; \ \pi_2 \equiv x+ay+z=1 \ ; \ \pi_3 \equiv x+y+az=1$$

Determínense los valores de a *para los cuales forman un triedro.*

Solución:

Como es:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)\cdot(a-1)^2$$

Para todo valor de a que sea distinto de -2 y distinto de 1, los planos tienen un único punto en común, pues el sistema formado por ellos resulta compatible determinado para esos valores.

15.– *Cálculo de la distancia entre dos rectas que se cruzan.*

Dadas las rectas r y s que se cruzan en el espacio tridimensional y considerando los puntos arbitrarios A, en r, y B, en s, y vectores direccionales respectivos $\overline{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{v}}$, la distancia entre las rectas dadas, teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores, está dada por la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|\det(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{v}},\mathbf{AB})|}{|\overline{\mathbf{u}} \wedge \overline{\mathbf{v}}|}$$

Ejemplo: Calcúlese la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

Solución:

A(0,1,0) es un punto de r y B(1,0,-1) es un punto de s.

El vector $\overline{\mathbf{u}}=(0,0,1)$ es direccional de r y el vector $\overline{\mathbf{v}}=(1,2,-2)$ es de la dirección de s.

Como $\det(\overline{u},\overline{v},\mathbf{AB})=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3$, es $|\det(\overline{u},\overline{v},\mathbf{AB})|=3$. Análogamente siendo:

$$\overline{u}\wedge\overline{v}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2\overline{i}+\overline{j}$$

es $|\overline{u}\wedge\overline{v}|=\sqrt{5}$. Teniendo en cuenta lo anterior resulta que $d(r,s)=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

16.– *La ecuación de la recta que es perpendicular a dos rectas que se cruzan se puede obtener como intersección de dos planos mediante dos determinantes.*

En efecto: Siendo r y s dos rectas que se cruzan, consideremos los vectores $\overline{v}_r$ y $\overline{v}_s$, direccionales respectivos de r y s, y dos puntos arbitrarios P_r, en r, y P_s, en s. Designando con X un punto genérico de la recta t perpendicular común, que se desea obtener, se tiene:

$$t \equiv \begin{cases} \det(\mathbf{P_rP},\overline{u}_r,\overline{u}_r\wedge\overline{u}_s) = 0 \\ \det(\mathbf{P_sP},\overline{u}_s,u_r\wedge\overline{u}_s) = 0 \end{cases}$$

17.– *Condición que deben cumplir cuatro puntos del espacio afín tridimensional, dados por sus coordenadas en un sistema de referencia, para que sean coplanarios.*

Los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$, no alineados, están en un mismo plano cuando es $\text{rang}\{\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}\}=2$. Por tanto debe ser $\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})=0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

La condición anterior es algebraicamente equivalente a esta otra de mas fácil recuerdo:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

18.– *Volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro.*

De la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores se tiene que el volumen del paralelepípedo u ortoedro cuyas aristas concurrentes en el vértice A son las definidas por los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ está dado por:

$$V = |\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})| = |\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}|$$

Consecuencia de ello es que, si un tetraedro tiene por vértices los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$, su volumen, que es la sexta parte del que tiene el paralelepípedo de aristas definidas por los vectores **AB**, **AC** y **AD**, está dado por:

$$V = |\det(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})| = \frac{1}{6} \cdot |\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}|$$

Aplicación: (Ejercicio propuesto en examen de acceso a la universidad).

Obténgase la ecuación del plano determinado por los puntos $A(0,2,-2)$, $B(3,2,1)$ *y* $C(2,3,2)$ *y calcúlese el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.*

Solución:

Si es $P(x,y,z)$ un punto genérico del plano pedido, la ecuación del mismo resulta de la condición:

$$\det(\mathbf{AP},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z+2 \\ 3-0 & 2-2 & 1-(-2) \\ 2-0 & 3-2 & 2-(-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante anterior se tiene:

$$-3x-6(y-2)+3(z+2)=0$$

Operando y simplificando resulta la ecuación del plano pedido:

$$x+2y-z-6=0$$

El plano hallado corta a los ejes coordenados en los puntos Q(6,0,0), R(0,3,0) y S(0,0,−6). El volumen del tetraedro OQRS pedido es:

$$V_{OQRS}=\frac{1}{6}\cdot|\det(OQ,OR,OS)|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|6\cdot3\cdot(-6)|=18$$

TEORÍA DE LOS DETERMINANTES MEDIANTE PERMUTACIONES

En este capítulo se expone la Teoría de los Determinantes *siguiendo el llamado* Método Histórico *o de las permutaciones, desarrollada en forma idéntica a la seguida en el aula ante los alumnos de cuatro grupos, del total de los doce, que participaron en la experimentación.*

Para establecer una definición de determinante con lectura cómoda para el estudiante de este nivel, es preciso recordar ciertas propiedades relativas a las permutaciones simples.

1.– Permutaciones simples

Por permutaciones simples de n elementos, $a_1a_2...a_n$, entenderemos todas las agrupaciones posibles de estos objetos, siendo distintas dos de estas agrupaciones cuando difieran en el orden de colocación de sus elementos. De este modo, 123, 132, 213, 231, 312, 321, son las permutaciones simples formadas a partir de los tres primeros números naturales. Las permutaciones son pues las variaciones simples de n objetos entrando todos ellos en cada colección. Por tanto el número de permutaciones simples de n elementos, que notaremos con $\mathfrak{P}_n$, es precisamente V_n^n con lo cual es:

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

De este modo existen $3!=6$ permutaciones simples con tres elementos. Con cuatro se tienen $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$, etc.

2.– *Permanencias e Inversiones*

Dada una permutación cualquiera, $a_1a_2...a_j...a_k...a_n$, de entre las $n!$ posibles con los elementos $a_1a_2...a_n$, se dice que dos de ellos, a_j y a_k, forman *sucesión* o *permanencia* cuando dentro de la permutación aparecen colocados en el orden natural que es el de la permutación principal o permutación básica. Si, por el contrario, aparecen en orden opuesto al natural se dice que forman una *inversión* dentro de la permutación.

3.– *Clase de una permutación*

Dada una permutación de las formadas por $a_1a_2...a_n$, se dice que es de *clase par*, o de primera clase, cuando el número de inversiones de la misma es un número par y se dice que es de *clase impar*, o de segunda clase, cuando presenta un número impar de inversiones.

4.– *Proposición*

La trasposición de dos elementos (intercambio en sus posiciones), en una permutación origina un número impar de inversiones.

En efecto: Sea la permutación $a_1a_2...a_j...a_k...a_n$ y supongamos que intercambiamos la posición de los elementos a_j y a_k, es decir, que realizamos una trasposición de los mismos. Realizado el intercambio la posición de los elementos que están situados a la izquierda de a_j y a la derecha de a_k permanecen inalterados. Cambia la posición de los elementos a_j y a_k con relación a los elementos comprendidos entre ellos, y la propia posición re–

lativa de a_j y a_k. Para precisar el número de inversiones originadas por el cambio de posición relativa de los elementos al originar la nueva permutación, procederemos del siguiente modo.

Supongamos que existen m elementos entre a_j y a_k en la permutación $a_1a_2...a_j...a_k...a_n$ y, de entre ellos, un número p están en el orden natural respecto de a_j y q forman inversión respecto de a_j, y que p_1 están en orden natural respecto de a_k y q_1 formando inversión con respecto a a_k. Es evidente que $p+q=p_1+q_1=m$. Como consecuencia de la trasposición se pasa de sucesión o permanencia a inversión, y recíprocamente. En forma más concreta, si el elemento a_j estaba en forma natural con relación a otro elemento intermedio antes de la trasposición, después de ésta los mismos elementos forman una inversión, y lo mismo ocurre con el elemento a_k. Por tanto el número total de inversiones de los elementos a_j y a_k con relación a los elementos intermedios es $p+p_1$ antes de la trasposición y $q+q_1$ después de la trasposición. El número de inversiones originadas por el intercambio de los dos elementos es

$$r=(p+p_1)-(q+q_1)$$

si $(p+p_1)>(q+q_1)$, y como $q=m-p$ y $q_1=m-p_1$, se tiene que

$$r=(p+p_1)-(m-p+m-p_1)=2(p+p_1-m)$$

de donde resulta que el número r es par. Ahora solo nos falta tener en cuenta la posición relativa de los elementos a_j y a_k entre sí. En el supuesto de que antes del intercambio su orden fuese el natural, después del cambio formarán inversión y viceversa. De este modo el número total de in–

versiones originadas por la trasposición de los dos elementos a_j y a_k es $r+1$ ó $r-1$, en todo caso un número impar.

Consecuencias de ello son:

a) Escritas las $n!$ permutaciones que pueden obtenerse con los elementos $a_1 a_2 \ldots a_j \ldots a_k \ldots a_n$ y transponiendo dos elementos, por ejemplo a_j y a_k, en cada una de ellas, entonces todas cambian de clase; y como una vez que se han transpuesto dichos elementos en todas las permutaciones volvemos a obtener el total de las permutaciones, se tiene:

- Si antes de transponer dos elementos cualesquiera a_j y a_k en las $n!$ permutaciones consideramos las que existen de clase par, de las cuales habrá un número p, y las de clase impar, que serán un número q, una vez transpuestos los dos elementos aparecerán q de la clase par y p de la clase impar. Como están las $n!$ permutaciones iniciales resulta que $q=p$ y, por tanto, el número de permutaciones de la primera clase, o clase par, es el mismo que el de permutaciones de segunda clase, o clase impar.

b) Cualquier permutación puede obtenerse de la permutación principal, o básica, por trasposiciones. Como consecuencia de la proposición se tiene que la clase par, o primera clase, es la formada por aquellas permutaciones obtenidas de la permutación principal mediante un número par de trasposiciones, mientras que la segunda clase, o clase impar, es la formada por aquellas permutaciones obtenidas de la permutación principal mediante un número impar de trasposiciones.

c) La paridad del número de trasposiciones necesarias para pasar de una permutación a otra es independiente del camino seguido. Se presentan cuatro posibi–

lidades, pasar de una permutación par a otra par, de una par a otra impar, de una impar a otra par, y, finalmente, de permutación impar a permutación impar.

Considerando uno de los casos, por ejemplo pasar de la permutación $a_1a_2...a_n$, permutación de clase par, mediante un cierto número de trasposiciones a la permutación $b_1b_2...b_n$, de clase impar, probemos que es necesario realizar un número impar de trasposiciones.

En efecto: cada trasposición efectuada origina un número impar de inversiones. Si de la primera permutación, $a_1a_2...a_n$, pudiésemos pasar a la segunda mediante un número par de trasposiciones, el número de inversiones ganadas, o perdidas, sería la suma algebraica de un número par de números impares, que es par, y como hemos partido de una permutación par, al final se obtendría una permutación par. En consecuencia nunca podremos pasar de una permutación de orden par a otra de orden impar mediante un número par de trasposiciones. Por tanto para pasar de una permutación de orden par a otra de orden impar es preciso realizar un número impar de trasposiciones pues, en este caso, el número de inversiones ganadas o perdidas es igual a la suma algebraica de un número impar de cantidades impares, que es impar, y al partir de una permutación par y sumarle o restarle un número impar al número par de inversiones que presenta, se obtiene un número impar de ellas. De todo lo anterior queda probado que es posible pasar de una premutación par a otra impar mediante un número impar de trasposiciones.

5.– Definición de Determinante

Siendo $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y cuyos n^2 elementos pertenecen a un cuerpo dado $\mathbb{K}$ (usualmente en este curso es el cuerpo $\mathbb{R}$, de los números reales), se llama determinante a la aplicación

$$| \ | : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que a cada matriz

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

le asocia el escalar de $\mathbb{K}$ dado por

$$det(A)=|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)\in \mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad \text{(I)}$$

donde $\mathfrak{P}_n$ representa las $n!$ permutaciones simples de los elementos 1,2,...,n. La expresión $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ representa a cada una de dichas permutaciones. Con $\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)$ se indica el *índice* de la permutación $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ que viene dado por el número de inversiones que tiene esta permutación respecto a la permutación principal $(12...n)$. En la expresión (I) el índice de fila de cada elemento es fijo, siendo variable el de columna. De forma análoga tendríamos el mismo valor de $|A|$ si se considera fijo el índice de columna y siendo variable el de fila para tener

$$|A| = \sum_{(i_1 i_2 \ldots i_n) \in \mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$$

La definición (I) expresa que el determinante de la matriz A es un elemento de $\mathbb{K}$ que se obtiene como la suma de $n!$ productos de elementos de la propia matriz A. Cada sumando es un producto de n factores, uno y solo uno de cada fila, y uno y solo uno de cada columna. Cada sumando está precedido de un signo, positivo cuando el índice de la permutación de columna es de paridad coincidente con el de filas, y negativo cuando esta paridad es distinta. De este modo a la mitad de los téminos del desarrollo les corresponderá signo positivo y a la otra mitad signo negativo. Obtengamos, para aclarar mejor lo expuesto, el determinante de una matriz en los casos más sencillos, de orden dos y orden tres, de acuerdo con la definición de determinante dada.

Siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de A está definido por

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2) \in P_2} (-1)^{\sigma(j_1 j_2)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2}$$

y como $(j_1 j_2) \in \{(12),(21)\}$ siendo $\sigma(12)=0$ y $\sigma(21)=1$, resulta

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

En el caso de orden tres, es decir si es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

es, según la definición,

En el caso de orden tres, es decir si es $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

es, según la definición,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)\in P_3}(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{nj_3}$$

y siendo

$$(j_1j_2j_3)\in\left\{(123),(132),(213),(231),(312),(321)\right\}$$

como los índices respectivos para cada una de las permutaciones son

$$\sigma(123)=0;\ \sigma(132)=1;\ \sigma(213)=1;\ \sigma(231)=2;\ \sigma(312)=2;\ \sigma(321)=3;$$

resulta que

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

El resultado anterior se recuerda con gran facilidad mediante la regla de Sarrus que agrupa por una parte los términos positivos, y por otra los términos negativos del desarrollo en la forma siguiente

No existen reglas de este estilo abreviado para el cálculo de los determinantes de orden superior a tres.

El cálculo de un determinante de orden cuatro siguiendo la definición (I) es ya bastante incómodo pues consta de $4!=24$ sumandos, cada uno de ellos de cuatro factores, la mitad de ellos positivos, y la otra mitad negativos. Para matrices de orden superior el cálculo de su determinante, de acuerdo con la definición, parece pues poco recomendable. Parece, pues, muy deseable que existan formas más rápidas de obtener este número asociado a cada matriz cuadrada. Tales métodos existen, pero es preciso conocer ciertas propiedades de los determinantes que, convenientemente utilizadas, nos van a permitir simplificar el proceso de cálculo de una forma considerable.

6.– Propiedades de los Determinantes

1.– Si $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la matriz nula entonces $|A|=0$.

Esta propiedad es evidente pues, al ser todos los elementos de la matriz A iguales a cero, cada término del desarrollo del determinante, cada sumando, es nulo al ser un producto de n factores nulos.

2.– Si $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que una de sus líneas, fila o columna, está toda ella formada por ceros, entonces $|A|=0$.

La propiedad resulta inmediata pues en cada uno de los sumandos del desarrollo aparece el factor cero por la propia definición de determinante.

3.– La matriz identidad $I_n\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ verifica que $|I_n|=1$.

Como es $I_n=(\delta_{ij})$, con $\delta_{ii}=1$ y $\delta_{ij}=0$ para $i\neq j$, se tiene que $|I_n|=\delta_{11}\cdot\delta_{22}\cdot\ldots\cdot\delta_{nn}=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=1$, pues los restantes sumandos son nulos al aparecer en ellos el factor cero.

4.– Siendo $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se verifica que $|A^t|=|A|$, es decir, una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante.

En efecto: siendo $A=(a_{ij})$ es $A^t=(\alpha_{ij})$, con $\alpha_{ij}=a_{ji}$, y por tanto, utilizando la definición de determinante, se tiene que:

$$|A^t| = \sum_{(j_1j_2..j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2..j_n)}\alpha_{1j_1}\cdot\alpha_{2j_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{nj_n} =$$

$$\sum_{(j_1j_2..j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2..j_n)}a_{j_11}\cdot a_{j_22}\cdot\ldots\cdot a_{j_nn} = |A|$$

(El valor de $|A|$ en la igualdad anterior ha resultado realizando su desarrollo dejando fijo el índice de fila en cada producto y permutando los índices de columna).

5.− Dada $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y siendo $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz obtenida de A por intercambio de dos lineas paralelas, se verifica que $|B|=-|A|$.

Consecuencia: Si en una matriz se realiza un número par de intercambios de lineas paralelas, se obtiene otra con determinante del mismo valor. Y si el número de intercambios es impar, la matriz resultante tiene determinante de valor opuesto al de la matriz inicial.

Para demostrar la propiedad enunciada consideremos una matriz $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots\ldots\ldots & a_{hn} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots\ldots\ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y sea

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz obtenida de A por intercambio de las filas de lugar h y k. Si son $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ se tiene que en la matriz B es $b_{hj}=a_{kj}$, $j=1,2,\ldots,n$. En estas condiciones el determinante de B es:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{(j_1j_2\ldots j_h\ldots j_k\ldots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\ldots j_h\ldots j_k\ldots j_n)} b_{1j_1}\cdot b_{2j_2}\cdot\ldots\cdot b_{hj_h}\cdot\ldots\cdot b_{kj_k}\cdot\ldots\cdot b_{nj_n}= \\
&= \sum_{(j_1j_2\ldots j_h\ldots j_k\ldots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\ldots j_h\ldots j_k\ldots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{hj_h}\cdot\ldots\cdot a_{kj_k}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}= \\
&= -\sum_{(j_1j_2\ldots j_k\ldots j_h\ldots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\ldots j_k\ldots j_h\ldots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{j_k}\cdot\ldots\cdot a_{hj_h}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}= \\
&= -|A|
\end{aligned}$$

(El paso de la permutación $(12\ldots h\ldots k\ldots n)$ a la permutación $(12\ldots h\ldots k\ldots n)$ origina paridad contraria entre las permutaciones de fila y de columna, por lo que cada sumando tiene signo contrario al idéntico en la otra expresión).

6.– Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que en ella existen dos líneas paralelas iguales, entonces es $|A|=0$.

En efecto: sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y consideremos la matriz B obtenida de A intercambiando las filas que son iguales. Por una parte, siendo $|A|=\Delta$, ha de ser $|B|=-\Delta$ en virtud de la propiedad *5*, dado que B proviene de A por intercambio de dos líneas paralelas. Por otra parte, al ser B=A, ha de ser $|A|=|B|$ o bien $\Delta=-\Delta$, es decir: $|A|=-|A|$, de donde $2\cdot|A|=0$, y en consecuencia, $|A|=0$.

7.– Dada $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matriz $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenida de A multiplicando los elementos de una cualquiera de sus lineas por una constante real arbitraria k, verifica que $|B|=k\cdot|A|$.

En efecto: siendo

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \cdots\cdots & k\cdot a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

resulta que

$$|B| = \sum_{(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot k\cdot a_{ij_i}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} =$$

$$= k\cdot \sum_{(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{ij_i}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} =$$

$$= k\cdot|A|$$

La propiedad anterior se puede enunciar también así: *Para multiplicar un determinante por un número, basta con multiplicar los elementos de una sola y cualquiera de sus líneas por ese número.*

Consecuencia: Si se multiplican todos los elementos de la matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ por un número k, la matriz B obtenida es tal que $|B| = k^n \cdot |A|$.

8. – Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que en ella existen dos líneas paralelas proporcionales entonces $|A| = 0$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la anterior ya que si es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ k \cdot a_{h1} & k \cdot a_{h2} & \cdots\cdots & k \cdot a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se verifica que

$$|A| = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

9. – Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que en una de sus líneas cada elemento es una suma de dos sumandos, se verifica que su determinante es igual a la suma de los determinantes de dos matrices en las cuales las líneas que no son de sumandos permanecen inalteradas; en la línea de sumandos, y en la primera matriz, aparecen los primeros sumandos; en la segunda matriz, y en esa misma línea, los segundos sumandos de la matriz inicial. Es decir

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots\cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots\cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se verifica que $|A|=|A_1|+|A_2|$.

(La propiedad es generalizable para tres, cuatro y, en general, para un número finito de sumandos en una linea arbitraria).

Demostración:

$$|A| = \sum_{(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{ij_i}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} +$$

$$+ \sum_{(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)\in\mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a'_{ij_i}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} =$$

$$= |A_1|+|A_2|$$

10. – Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que una de sus lineas es combinación lineal de otras paralelas a ella, verifica que su determinante es nulo.

En efecto, sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha a_{h1}+\beta a_{k1} & \alpha a_{h2}+\beta a_{k2} & \cdots\cdots & \alpha a_{hn}+\beta a_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si calculamos su determinante se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \alpha a_{h1} & \alpha a_{h2} & \cdots\cdots & \alpha a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \beta a_{k1} & \beta a_{k2} & \cdots\cdots & \beta a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

11. – Dada $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, y siendo $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz obtenida de A sumando a una cualquiera de sus lineas una combinación de otras líneas paralelas a ella, se verifica que $|B| = |A|$.

Demostración:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{p1}+\alpha a_{h1}+\beta a_{k1} & a_{p2}+\alpha a_{h2}+\beta a_{k2} & \cdots & a_{pn}+\alpha a_{hn}+\beta a_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El determinante de B se puede escribir como suma de tres determinantes al ser cada elemento de la fila de lugar p una suma de tres sumandos, es decir

$$
|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots\cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +
$$

$$
+\alpha\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +\beta\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
= |A| +\alpha\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +\beta\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
= |A| +\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=|A|
$$

(Los determinantes que en la expresión anterior multiplican, respectivamen- te, a α y a β, son nulos por tener dos filas iguales).

Consecuencia: De la propiedad anterior se deduce que dada $A\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se puede obtener, a partir de ella, otra matriz $B\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en la cual todos los elementos de una linea, arbitrariamente elegida, son iguales a cero, excepto uno de ellos, a lo sumo, y de forma que $|B| = |A|$.

Vamos a tratar de concretar esta consecuencia por medio de una matriz cuadrada de orden cuatro.

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; para calcular su determinante por los ele– mentos de una de sus líneas –procedimiento que desarrollaremos oportuna– mente– vamos a tratar de encontrar otra matriz cuyo determinante sea de igual valor, teniendo en una línea la mayor cantidad posible de ceros. Como en A no existe ningún cero, en principio no existe preferencia en la elección de línea. Tampoco existe un factor común en los elementos de toda una línea. Como, por otra parte, y aparentemente, no se aprecia com– binación lineal entre líneas paralelas –en caso de darse ya sería $|A| = 0$– la búsqueda de la posible combinación lineal es más incómoda, en este caso, que el cálculo del propio determinante. Además, caso de no existir combinación lineal, habríamos realizado una tarea poco eficaz dado que no hemos obtenido el valor del determinante.

7.— *Desarrollo de un determinante por los elementos de una de sus líneas*

1.— *Definición de menor complementario y adjunto de un elemento*

Sea el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y consideremos el elemento a_{ij}. Se llama *menor complementario* del elemento a_{ij}, y se representa por D_{ij}, al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j del determinante dado.

Se llama *adjunto* del elemento a_{ij} al menor complementario de dicho elemento anteponiendo el signo $+$ ó $-$ según que la suma de subíndices, $i+j$, correspondiente al lugar del elemento sea par o impar; se representa por $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$. Si $i+j$ es par es $A_{ij}=D_{ij}$, y si $i+j$ es impar es $A_{ij}=-D_{ij}$.

El signo que debe anteponerse a cada menor complementario para obtener su correspondiente adjunto en el caso de $n=3$ resulta del siguiente diagrama

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Y para órdenes superiores a tres basta contar desde a_{11} en horizontal y vertical, comenzando por el signo $+$ y cambiando en cada paso.

2.- ***Proposición***

El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus repectivos adjuntos, es decir, si se considera la fila i es

$$|\mathrm{A}| = a_{i1}\cdot \mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\cdot \mathrm{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot \mathrm{A}_{in}$$

y si desarrollamos por la columna j es

$$|\mathrm{A}| = a_{1j}\cdot \mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\cdot \mathrm{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot \mathrm{A}_{nj}$$

Demostración:

En

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \ldots j_n) \in \mathfrak{P}_n} (-1)^{\sigma(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

existen $n!$ sumandos. En cada sumando aparece un factor de cada línea, por ejemplo de la primera fila. Sacando factor común estos elementos de la primera fila se tiene

$$|\mathrm{A}| = a_{11}\cdot\left(\sum(-1)^{\sigma}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\right) + a_{12}\cdot\left(\sum(-1)^{\sigma}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\right) +$$

$$+ \ldots + a_{1n}\cdot\left(\sum(-1)^{\sigma}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\right)$$

La última expresión tiene n sumandos, y cada uno de ellos, a su vez, consta de $n-1$ sumandos.

Comprobemos que cada uno de esos paréntesis es un adjunto de cierto elemento de la primera fila. El término

$$a_{1j}\cdot(\sum(-1)^{\sigma}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n})$$

contiene, en el paréntesis, todos los posibles productos de elementos que no están en la fila 1 ni en la columna j. Si indicamos con σ_j el índice de la permutación $j_2j_3\ldots j_n$, y es σ el número de inversiones de la permutación $j_1j_2j_3\ldots j_n$ cuando j_1 toma el valor j, al suprimir el primer elemento j_1 de la permutación, tendremos tantas inversiones menos las que formaba j_1 con todos los restantes elementos de la permutación, es decir $j-1$, y por tanto es $\sigma=\sigma_j+(j-1)$ de este hecho resulta que

$$\begin{aligned}
a_{1j}\cdot(\sum(-1)^{\sigma}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}) &= a_{1j}\cdot(\sum(-1)^{\sigma_j+(j-1)}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}) = \\
&= (-1)^{j-1}\cdot a_{1j}\cdot(\sum(-1)^{\sigma_j}\cdot a_{2j_2}\cdot a_{3j_3}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}) = \\
&= (-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot \mathrm{D}_{1j} = \\
&= a_{1j}\cdot \mathrm{A}_{1j}
\end{aligned}$$

El razonamiento que acabamos de realizar con la primera fila puede seguirse de manera idéntica con otra fila u otra columna cualesquiera.

Con esta proposición ya podemos calcular el determinante que, a modo de ejemplo, habíamos considerado en la consecuencia de la propiedad ***11***.

Para calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

procedemos del siguiente modo:

A la primera columna le sumamos la cuarta. A la segunda columna le sumamos también la cuarta, y a la tercera columna le sumamos la cuarta. De ello resulta que

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 19 \\ 2 & 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

desarrollando por la segunda fila es

$$|A| = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 8 & 7 & 19 \\ 2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 8 & 7 & 19 \\ 2 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

sumando, en el determinante obtenido, a la primera fila la segunda por (-1), y a la segunda fila la tercera también por (-1), se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

sumando a la primera columna la tercera multiplicada por (-2), es

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -30 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

desarrollando ahora por los elementos de la segunda fila se obtiene

$$|A| = (-1)^5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -30 & 7 \end{vmatrix} = -3\cdot(49+30) = -3\cdot 79 = -237$$

Como consecuencia de la proposición anterior resulta la siguiente.

3.– *Proposición*

En toda matriz $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se verifica que la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas por los adjuntos de los elementos de otra línea paralela, vale cero.

Demostración:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots\cdots\cdots & a_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en la cual las filas de lugar h y lugar k son idénticas. Al tener B dos filas iguales es $|B|=0$.

Por otra parte, desarrollando el determinante de B por los elementos de la fila de lugar k, se tiene que $|B|=a_{h1}\cdot A_{k1}+a_{h2}\cdot A_{k2}+\ldots+a_{hn}\cdot A_{kn}$.

Tenemos, por tanto, la igualdad $a_{h1}\cdot A_{k1}+a_{h2}\cdot A_{k2}+\ldots+a_{hn}\cdot A_{kn}=0$. Observando la matriz A podemos afirmar que, en ella, se verifica que la suma de los productos de los elementos de su fila de lugar h por los adjuntos de los elementos de la fila de lugar k vale cero.

De una forma análoga se puede establecer la propiedad correspondiente para columnas.

Observación: Las propiedades que se contemplan en las proposiciones *2* y *3* pueden enunciarse, a la vez, del siguiente modo:

En toda matriz $A=(a_{ij})\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *se verifica que*

$$a_{h1}\cdot A_{k1}+a_{h2}\cdot A_{k2}+\ldots+a_{hn}\cdot A_{kn}=\delta_{hk}\cdot|A|$$

(Enunciado para filas). Y también

$$a_{1h}\cdot A_{1k}+a_{2h}\cdot A_{2k}+\ldots+a_{nh}\cdot A_{nk}=\delta_{hk}\cdot|A|$$

(Enunciado para columnas). El símbolo δ_{hk} *es la llamada* delta de Kronecker *que tiene valor uno cuando* $h=k$ *y vale cero cuando* $h\neq k$.

8.– *Cálculo de la inversa de una matriz mediante adjuntos*

1.– *Proposición*

La matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *tiene inversa* $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si existe la matriz A^{-1}, inversa de A, verifica $A \cdot A^{-1} = I$ y por tanto es

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$$

con lo cual al ser $|A|$ y $|A^{-1}|$ elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ deben ser $|A| \neq 0$ y $|A^{-1}| \neq 0$.

$\Leftarrow$) Consideremos la matriz adjunta de A, $A^{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$; dividiendo todos sus elementos entre $|A|$ y trasponiendo, se tiene

$$\frac{A^{adj}}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots\dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots\dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots\dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Comprobemos que esta matriz es la inversa de la matriz A:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\
\frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{A_{nn}}{|A|}
\end{pmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{pmatrix}
\frac{a_{11}\cdot A_{11}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{11}\cdot A_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{a_{11}\cdot A_{n1}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{nn}}{|A|} \\
\frac{a_{21}\cdot A_{11}+\ldots+a_{2n}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{21}\cdot A_{21}+\ldots+a_{2n}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{a_{21}\cdot A_{n1}+\ldots+a_{2n}\cdot A_{nn}}{|A|} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{a_{n1}\cdot A_{11}+\ldots+a_{nn}\cdot A_{1n}}{|A|} & \frac{a_{n1}\cdot A_{21}+\ldots+a_{nn}\cdot A_{2n}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{a_{n1}\cdot A_{n1}+\ldots+a_{nn}\cdot A_{nn}}{|A|}
\end{pmatrix}
$$

En esta matriz los elementos de la diagonal principal todos tienen el valor $\frac{|A|}{|A|}=1$, ya que cada numerador es la suma de los productos de los elementos de cada fila por sus respectivos adjuntos. Los restantes elementos son nulos, ya que cada numerador es la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra paralela. En consecuencia dicha matriz es I.

El mismo resultado se obtiene efectuando el producto en orden contrario.

La demostración dada es constructiva, en el sentido de que nos da el método para calcular la matriz inversa de una matriz A.

Ejemplo:

Calcúlese, empleando los adjuntos, la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Demostremos que tal inversa existe comprobando que su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

Como la matriz adjunta es

$$A^{adj}=\begin{pmatrix} 14 & -12 & -2 \\ -6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

su traspuesta es

$$(A^{adj})^t=\begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -12 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Dividiendo, ahora, entre -8 todos sus elementos se tiene la matriz inversa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -7/4 & 3/4 & 1/4 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-3\\2&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7/4&3/4&1/4\\3/2&-1/2&0\\1/4&-1/4&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

9.– *Cálculo del rango de una matriz mediante determinantes*

***1.*–** Dada $A\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se llama *menor de orden* h al determinante de la submatriz de A resultante de suprimir $m-h$ filas y $n-h$ columnas en A.

Ejemplo:

En la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&0&-1&2\end{pmatrix}$, son menores de orden dos:

$$\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}6&7\\0&-1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}3&4\\7&8\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}5&8\\9&2\end{vmatrix}$$

Menores de orden tres son, entre otros, los siguientes:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\5&6&7\\9&0&-1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&3&4\\6&7&8\\0&-1&2\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&3&4\\5&7&8\\9&-1&2\end{vmatrix}$$

***2.*–** Se llama rango, por determinantes, de la matriz $A\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al orden del mayor (más grande) *menor* no nulo de A.

De este modo, al decir que una matriz tiene rango cinco estamos afirmando que en ella hay un menor de orden cinco que es distinto de cero, y que todos los menores de orden superior a cinco (caso de que existan) en ella son nulos.

En la matriz del apartado anterior existe un menor de orden tres distinto de cero pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

y como en la matriz A no existen menores de orden superior a tres es $rg_d(\mathrm{A})=3$.

3. – *Proposición*

Si una matriz cuadrada de orden $r+1$ tiene determinante nulo y el menor de orden r, formado por las r primeras filas y las r primeras columnas, es no nulo, entonces la fila de lugar $r+1$ es combinación lineal de las r primeras filas.

Demostración:

Sea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots\cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots\cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0$$

donde es

$$M_r=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2r} & a_{2s} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots\dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \dots\dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,s} \end{vmatrix}$$

son nulos para $s=1, 2,\dots, r$ ya que tienen dos columnas iguales; y para $s=r+1$ por hipótesis.

Desarrollando el determinante anterior por su última columna se tiene

$$a_{1s}\cdot A_1+a_{2s}\cdot A_2+\dots+a_{rs}\cdot A_r+a_{r+1,s}\cdot M_r=0$$

y como es $M_r\neq 0$ se obtiene

$$a_{r+1,s}=-a_{1s}\cdot\frac{A_1}{M_r}-a_{2s}\cdot\frac{A_2}{M_r}-\dots-a_{rs}\cdot\frac{A_r}{M_r}$$

y dando a s los valores 1, 2,..., r, $r+1$, queda:

$$a_{r+1,1} = -a_{11}\cdot\frac{A_1}{M_r}-a_{21}\cdot\frac{A_2}{M_r}-\ldots-a_{r1}\cdot\frac{A_r}{M_r}$$

$$a_{r+1,2} = -a_{12}\cdot\frac{A_1}{M_r}-a_{22}\cdot\frac{A_2}{M_r}-\ldots-a_{r2}\cdot\frac{A_r}{M_r}$$

....

$$a_{r+1,r+1} = -a_{1,r+1}\cdot\frac{A_1}{M_r}-a_{2,r+1}\cdot\frac{A_2}{M_r}-\ldots-a_{r,r+1}\cdot\frac{A_r}{M_r}$$

Estas $r+1$ igualdades equivalen a esta otra:

$$(a_{r+1,1},a_{r+1,2},\ldots,a_{r+1,r+1}) = \frac{-A_1}{M_r}\cdot(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1,r+1})+$$

$$+\frac{-A_1}{M_r}\cdot(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2,r+1})+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{-A_r}{M_r}\cdot(a_{r1},a_{r2},\ldots,a_{r,r+1})$$

lo cual nos indica que la fila $r+1$ es combinación lineal de las demás.

4.– Proposición

En toda matriz A se verifica que el rango por filas coincide con el rango por determinantes.

En forma abreviada esto se expresa así:

$$rg_f(A)=r \quad \Leftrightarrow \quad rg_d(A)=r$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Si es $rg_f(A)=r$, debe existir un menor de orden r, $M_r \neq 0$, pues si todos los menores de orden r fuesen nulos, al considerar los menores que se pueden formar con una determinada fila, esta fila sería combinación lineal de las $r-1$ anteriores y, considerando los menores formados con esas $r-1$ filas y cada una de las siguientes, al ser todos nulos, las otras filas también serían combinación lineal de éstas. En consecuencia solo habría $r-1$ filas linealmente independientes con lo cual no puede ser $rg_f(A)=r$.

Como $rg_f(A)=r$ solo existen r filas linealmente independientes y cualquier menor M_{r+1}, de orden $r+1$, tiene elementos de otra fila y otra columna y al existir combinación entre filas debe ser $M_{r+1}=0$.

$\Leftarrow$) Si es $rg_d(A)=r$, entonces existe un menor $M_r \neq 0$ y cualquier menor M_{r+1}, de orden $r+1$, debe ser nulo. En estas condiciones las r filas de las que forma parte M_r, son linealmente independientes (en caso contrario, serían nulos todos los M_r). De ello se deduce que $rg_f(A) \geq r$. Además, como todo menor de orden $r+1$ es nulo, siempre que se consideren $r+1$ filas de A una será combinación lineal de las otras. Es así que no hay $r+1$ filas linealmente independientes y, por tanto, $rg_f(A)=r$.

5.– *Cálculo del rango:* Método del orlado

Por aplicación de las propiedades anteriores podemos enunciar la siguiente proposición:

Si orlando un menor no nulo con los elementos de una fila y todas las columnas restantes todos los menores obtenidos son nulos, entonces dicha fila es combinación lineal de las otras.

Con el fin de hacer más inteligible la demostración la realizaremos en un caso particular.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

y supongamos que

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

la propiedad que vamos a demostrar es la que dice:

Si todos los menores de tercer orden formados a partir de M *con los elementos de la tercera fila y de las columnas tercera cuarta y quinta son cero, es decir si*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}=0 \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}=0,$$

entonces la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

En efecto: Como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}=0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}=0$$

tenemos cinco menores de tercer orden nulos. Si desarrollamos estos menores por los elementos de la última columna se tienen las igualdades

$$a_{11}\cdot A_{13}+a_{21}\cdot A_{23}+a_{31}\cdot A_{33} = 0$$
$$a_{12}\cdot A_{13}+a_{22}\cdot A_{23}+a_{32}\cdot A_{33} = 0$$
$$a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33} = 0$$
$$a_{14}\cdot A_{13}+a_{24}\cdot A_{23}+a_{34}\cdot A_{33} = 0$$
$$a_{15}\cdot A_{13}+a_{25}\cdot A_{23}+a_{35}\cdot A_{33} = 0$$

Además, como los cinco menores nulos que hemos considerado tienen idénticas las dos primeras columnas, en todos ellos los adjuntos de los elementos de la tercera columna son iguales. Por otra parte, al ser $A_{33}=M\neq 0$, se puede depejar su coeficiente en cada una de las igualdades anteriores. Si designamos $\lambda=-\dfrac{A_{13}}{A_{33}}$ y $\mu=-\dfrac{A_{23}}{A_{33}}$, resulta que

$$a_{31} = \lambda a_{11}+\mu a_{21}$$
$$a_{32} = \lambda a_{12}+\mu a_{22}$$
$$a_{33} = \lambda a_{13}+\mu a_{23}$$
$$a_{34} = \lambda a_{14}+\mu a_{24}$$
$$a_{35} = \lambda a_{15}+\mu a_{25}$$

Si escribimos las igualdades anteriores en la forma

$$(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34},a_{35})=\lambda(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15})+\mu(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24},a_{25})$$

resulta que la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, como se deseaba probar.

La forma práctica de calcular el rango de una matriz A es la siguiente:

1. – Se suprimen de la matriz A las líneas que sean nulas, proporcionales a otras y las que sean combinación lineal de otras, que se observen.

2. – Se elige un elemento no nulo en A, por lo que el rango es mayor o igual que uno. A continuación orlamos "este menor" con elementos de una fila y todas las columnas posibles hasta encontrar un menor no nulo. Si esto ocurre, el rango es, al menos, dos. Si todos fuesen nulos, la fila es combinación lineal y se suprime.

3. – Repetimos este proceso de orlado hasta encontrar un menor de orden r, $M_r \neq 0$ tal que todos los menores de orden $r+1$ sean $M_{r+1}=0$.

Ejemplo:

$$rg\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pues $F_4=(-2)$, F_2 y $C_5=0$.

Como es $-5 \neq 0$ orlamos con la segunda fila y como es

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

el rango es, como mínimo, dos. Orlando este menor, se tiene

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

por lo que la fila tercera es combinación lineal de las filas primera y segunda. En consecuencia el rango de la matriz es dos.

TEORÍA DE LOS DETERMINANTES A PARTIR DE LAS FORMAS MULTILINEALES ALTERNADAS

En este apartado se presenta la Teoría de los Determinantes *partiendo de las* formas multilineales, *tal y como ha sido impartida a cuatro grupos de entre los doce que han seguido la experiencia. Este procedimiento exige conocimientos previos de mayor alcance que el llamado* Método Histórico.

1. – Aplicaciones bilineales

El alumno del nivel que nos ocupa ha manejado ya dos herramientas matemáticas básicas, como son el producto escalar y el producto vectorial. En este momento, es preciso recordar, que un producto escalar en un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ es toda aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de vectores $\overline{\mathrm{x}}$, $\overline{\mathrm{y}}$ de $\mathbf{V}$ le asigna un número real, que indicaremos por $\langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}\rangle$, o bien como $\overline{\mathrm{x}}\cdot\overline{\mathrm{y}}$, y que tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\mathrm{x}}+\overline{\mathrm{x}}',\ \overline{\mathrm{y}}\rangle &= \langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}\rangle + \langle\overline{\mathrm{x}}',\ \overline{\mathrm{y}}\rangle \\
\langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}+\overline{\mathrm{y}}'\rangle &= \langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}\rangle + \langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}'\rangle \\
\langle\lambda\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}\rangle &= \langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \lambda\overline{\mathrm{y}}\rangle = \lambda\langle\overline{\mathrm{x}}\ ,\ \overline{\mathrm{y}}\rangle
\end{aligned}$$

y por cuya verificación decimos que el producto escalar es una aplicación bilineal de $\mathbf{V}$ en $\mathbb{R}$.

El término bilineal significa que esta aplicación es lineal en $\overline{\mathrm{x}}$, para cada $\overline{\mathrm{y}}$ fijo, y también, que es lineal en $\overline{\mathrm{y}}$ para cada $\overline{\mathrm{x}}$ fijo.

A su vez, el producto vectorial, en el espacio vectorial real **V** es la aplicación $\wedge : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ tal que algunas de sus propiedades son:

$$\begin{aligned}(\overline{x}+\overline{x}')\wedge\overline{y} &= (\overline{x}\wedge\overline{y}) + (\overline{x}'\wedge\overline{y})\\ \overline{x}\wedge(\overline{y}+\overline{y}') &= (\overline{x}\wedge\overline{y}) + (\overline{x}\wedge\overline{y}')\\ (\lambda\overline{x})\wedge\overline{y} &= \overline{x}\wedge(\lambda\overline{y}) + \lambda(\overline{x}\wedge\overline{y})\end{aligned}$$

y por la verificación de ellas decimos que el producto vectorial es una aplicación bilineal de **V** en **V**.

Este recuerdo de dos operadores usuales, de fundamental importancia en el álgebra lineal, nos permite establecer la definición general de aplicación bilineal.

2.– Definición de aplicación bilineal

Dados **E**, **F** y **G**, espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f : \mathbf{E}\times\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ se dice que es bilineal si verifica las siguientes propiedades:

1) $\forall\overline{x},\overline{x}'\in\mathbf{E},\ \forall\overline{y}\in\mathbf{F} : f(\overline{x}+\overline{x}',\ \overline{y})=f(\overline{x}\ ,\ \overline{y})+f(\overline{x}',\ \overline{y})$

2) $\forall\overline{x}\in\mathbf{E},\ \forall\overline{y},\overline{y}'\in\mathbf{F} : f(\overline{x}\ ,\ \overline{y}+\overline{y}')=f(\overline{x}\ ,\ \overline{y})+f(\overline{x}\ ,\ \overline{y}')$

3) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\overline{x}\in\mathbf{E},\ \forall\overline{y}\in\mathbf{F} : f(\lambda\overline{x}\ ,\ \overline{y})=f(\overline{x}\ ,\ \lambda\overline{y})=\lambda f(\overline{x}\ ,\ \overline{y})$

Estas propiedades nos indican que la aplicación f es lineal en $\overline{x}$ (primera componente) cuando la $\overline{y}$ (segunda componente) es fija. Y también es lineal en $\overline{y}$ cuando la $\overline{x}$ es fija, y por ello el nombre de bilineal.

3.– Proposición. (Definición equivalente de aplicación bilineal)

Dados los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$, la aplicación $f: \mathbf{E}\times\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ es bilineal si, y solamente si, se verifican las dos condiciones siguientes:

1') $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}'\in\mathbf{E},\ \forall\overline{\mathbf{y}}\in\mathbf{F} : f(\lambda\overline{\mathbf{x}}+\mu\overline{\mathbf{x}}',\ \overline{\mathbf{y}})=\lambda f(\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \overline{\mathbf{y}})+\mu f(\overline{\mathbf{x}}',\ \overline{\mathbf{y}})$

2') $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall\overline{\mathbf{x}}\in\mathbf{E},\ \forall\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{y}}'\in\mathbf{F} : f(\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \lambda\overline{\mathbf{y}}+\mu\overline{\mathbf{y}}')=\lambda f(\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \overline{\mathbf{y}})+\mu f(\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \overline{\mathbf{y}}')$

Es inmediato comprobar que esta definición es equivalente a la dada en 2.2.

4.– Definición de forma bilineal

Dados $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, toda aplicación bilineal $f: \mathbf{E}\times\mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una forma bilineal.

Según la definición dada, todo producto escalar en un espacio vectorial real $\mathbf{E}$ es una forma bilineal real. Además, todo producto escalar es conmutativo, es decir $\langle\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}\rangle=\langle\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}\rangle$, propiedad que no es necesaria para que una aplicación sea bilineal.

Cuando una forma bilineal f es tal que $f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=f(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}),\ \forall\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}$, entonces, se dice que es una forma bilineal simétrica. En consecuencia todo producto escalar es una forma bilineal simétrica.

5.– Definición de aplicación bilineal alternada

Siendo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, una aplicación bilineal $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ es alternada si $\forall\overline{\mathbf{x}}\in\mathbf{E}$ es $f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}})=\overline{\mathbf{0}}$.

Observación. – El producto vectorial en el espacio tridimensional real $\mathbf{V}^3$ es una aplicación bilineal alternada ya que $\forall \overline{x} \in \mathbf{V}^3$ se verifica que $\overline{x} \wedge \overline{x} = \overline{\mathbf{0}}$.

En cambio el producto escalar usual no lo es ya que $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = \overline{x} \cdot \overline{x} = \| \overline{x} \|^2$ y $\| \overline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{\mathbf{0}}$.

6. – Proposición

Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ es aplicación bilineal alternada, entonces, para todo par de vectores $\overline{x}, \overline{y}$ de $\mathbf{E}$ se verifica que $f(\overline{x}, \overline{y}) = -f(\overline{y}, \overline{x})$.

En efecto:

f alternada $\Rightarrow f(\overline{x} + \overline{y} \, , \, \overline{x} + \overline{y}) = \overline{\mathbf{0}}$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathrm{E}$. Como f es bilineal:

$$f(\overline{x} + \overline{y} \, , \, \overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}, \overline{x}) + f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{y}, \overline{x}) + f(\overline{y}, \overline{y}) = \overline{\mathbf{0}}$$

y, como $f(\overline{x}, \overline{x}) = f(\overline{y}, \overline{y}) = \overline{\mathbf{0}}$, se tiene que $f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{y}, \overline{x}) = \overline{\mathbf{0}}$ de donde resulta que $f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{y}, \overline{x})$.

7. – Observación

Si el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{Q}$ –cuerpo racional– ó $\mathbb{R}$ –cuerpo real– ó $\mathbb{C}$ –cuerpo complejo, es válida la proposición recíproca, es decir, si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y f es una aplicación bilineal $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ tal que $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{E}$ es $f(\overline{x}, \overline{y}) = -f(\overline{y}, \overline{x})$, entonces $f(\overline{x}, \overline{x}) = \overline{\mathbf{0}}$, es decir, f es alternada.

En efecto:

Si $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y es $f(\overline{x},\overline{y})=-f(\overline{y},\overline{x})$, $\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbf{E}$, haciendo $\overline{y}=\overline{x}$ resulta $f(\overline{x},\overline{x})=-f(\overline{x},\overline{x})$ y, por tanto, $2f(\overline{x},\overline{x})=\overline{0}$ y, en consecuencia, $f(\overline{x},\overline{x})=\overline{0}$ y f, por tanto, es alternada.

Nota. – En esta proposición se hace presente el concepto de característica de un cuerpo, siendo válida solamente en cuerpos de característica distinta de dos. No se mencionará a los alumnos por no ser acorde con el programa de la asignatura.

Con el fin de definir el determinante de segundo orden consideraremos las aplicaciones bilineales alternadas $f:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{F}$ siendo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, teniendo $\mathbf{E}$ dimensión dos. Todo ello queda establecido en la siguiente proposición.

8. – Proposición

Dados $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, siendo $dim(\mathbf{E})=2$, para cualquier base $\mathcal{B}=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2\}$ de $\mathbf{E}$ y para todo vector $\overline{v}$ de $\mathbf{F}$, existe una única aplicación bilineal alternada $f:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{F}$ tal que $f(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\overline{v}$.

Demostración:

Sean $\overline{x}$ e $\overline{y}$ vectores cualesquiera de $\mathbf{E}$. En la base $\mathcal{B}$ se expresarán como $\overline{x}=x_1\overline{u}_1+x_2\overline{u}_2$, $\overline{y}=y_1\overline{u}_1+y_2\overline{u}_2$.

a) Unicidad:

Supongamos que existe una aplicación bilineal alternada $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ cumpliendo las condiciones del enunciado de la proposición. Debe verificarse, por tanto que

$$f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_1)=f(\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_2)=0 \qquad \text{y} \qquad f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)=-f(\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_1)$$

y como f es bilineal se tiene

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) &= f(x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2\ ,\ y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2) = \\ &= x_1y_1f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_1)+x_1y_2f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)+x_2y_1f(\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_1)+x_2y_2f(\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_2) = \\ &= x_1y_2f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)-x_2y_1f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2) = \\ &= (x_1y_2-x_2y_1)\cdot f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2) \end{aligned}$$

Si f existe, al ser $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)=\overline{\mathbf{v}}$, se tiene que

$$f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=(x_1y_2-x_2y_1)\overline{\mathbf{v}}$$

y, por tanto, f es única.

b) Existencia:

La aplicación $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ definida por

$$f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=(x_1y_2-x_2y_1)\overline{\mathbf{v}}$$

siendo $\overline{\mathbf{x}}=x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2$ e $\overline{\mathbf{y}}=y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2$ y $\mathcal{B}=\left\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2\right\}$ la correspondiente base de $\mathbf{E}$ tal que $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)=\overline{\mathbf{v}}$, es bilineal y alternada.

En efecto

- Linealidad en la primera componente:

$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}',\overline{\mathbf{y}}\in\mathbf{E}$ es

$$f(\lambda\overline{\mathbf{x}}+\mu\overline{\mathbf{x}}',\ \overline{\mathbf{y}}) = \left[(\lambda x_1+\mu x_1')y_2-(\lambda x_2+\mu x_2')y_1\right]\overline{\mathbf{v}} =$$

$$= \left[(\lambda x_1+\mu x_1')y_2-(\lambda x_2+\mu x_2')y_1\right]\overline{\mathbf{v}} =$$

$$= \lambda(x_1y_2-x_2y_1)\overline{\mathbf{v}}+\mu(x_1'y_2-x_2'y_1)\overline{\mathbf{v}}=$$

$$= \lambda f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})+\mu f(\overline{\mathbf{x}}',\ \overline{\mathbf{y}})$$

- Análogamente resulta la linealidad en la segunda componente, verificándose, como es inmediato comprobar, que

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{y}}'\in\mathbf{E}\ \Rightarrow\ f(\overline{\mathbf{x}},\ \lambda\overline{\mathbf{y}}+\mu\overline{\mathbf{y}}')=\lambda f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})+\mu f(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{y}}')$$

- f es alternada, pues $\forall\overline{\mathbf{x}}\in\mathbf{E}$ es $f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}})=(x_1x_2-x_2x_1)\overline{\mathbf{v}}=0$, con lo cual queda probada la proposición.

9.– Definición de determinante de orden dos

Siendo $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión dos y elegida en él una base cualquiera $\mathcal{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2\}$, se considera el vector $\mathbf{1}$ del espacio vectorial $\mathbb{K}$, (como $\mathbb{K}$ es cuerpo es autoespacio vectorial) y, por la proposición anterior, existe una forma bilineal alternada, única f tal que $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)=\mathbf{1}$.

Considerados los vectores $\overline{\mathbf{x}}$ e $\overline{\mathbf{y}}$ de $\mathbf{E}$ tales que en la base $\mathcal{B}$ son

$$\overline{\mathbf{x}}=x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2 \qquad \overline{\mathbf{y}}=y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2$$

Para la forma f el escalar

$$f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=(x_1y_2-x_2y_1)\cdot 1=(x_1y_2-x_2y_1)$$

se llama *Determinante* de los vectores $\overline{\mathbf{x}}$ e $\overline{\mathbf{y}}$ respecto de la base $\mathcal{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2\}$. Lo indicaremos del siguiente modo:

$$D(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=det(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=x_1y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Análogamente, dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A, al de sus vectores columna, es decir

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

10.– Aplicaciones trilineales alternadas

Siendo **E** y **F** $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, una aplicación f: $\mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ se dice que es trilineal alternada si verifica las propiedades:

i) f es lineal en cada una de sus tres componentes.

ii) $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}})=\overline{\mathbf{0}}$ cuando coincidan dos vectores.

Dicho de otro modo, f es una aplicación trilineal alternada cuando al fijar uno de los tres vectores, resulta una aplicación bilineal alternada en los otros dos.

Como consecuencia de la definición dada se tienen las propiedades:

a) $f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ cambia de signo cuando se intercambian dos vectores, teniéndose, de ello, las siguientes igualdades:

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=f(\overline{y},\overline{z},\overline{x})=f(\overline{z},\overline{x},\overline{y})=-f(\overline{x},\overline{z},\overline{y})=-f(\overline{y},\overline{x},\overline{z})=-f(\overline{z},\overline{y},\overline{x})$$

b) Si uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos, entonces es $f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\overline{0}$.

En efecto: Supongamos que es $\overline{z}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{y}$, en este caso es

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=f(\overline{x}\ ,\ \overline{y}\ ,\ \lambda\overline{x}+\mu\overline{y})=\lambda f(\overline{x},\overline{y},\overline{x})+\mu f(\overline{x},\overline{y},\overline{y})=\overline{0}$$

c) $f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ permanece inalterado al sumar a uno de sus vectores cualquier combinación lineal de los otros dos.

Comprobación:

Si sumamos a $\overline{z}$ una combinación lineal de $\overline{x}$ E $\overline{y}$ resulta:

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=f(\overline{x}\ ,\ \overline{y}\ ,\ \overline{z}+\lambda\overline{x}+\mu\overline{y})=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})+f(\overline{x}\ ,\ \overline{y}\ ,\ \lambda\overline{x}+\mu\overline{y})=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$$

11.– Formas trilineales alternadas

Si **E** es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, toda aplicación trilineal alternada $f:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E}\longrightarrow\mathbb{K}$ se llama *forma trilineal alternada* en **E**.

Ejemplo de forma trilineal alternada:

Vamos aconsiderar el producto mixto de tres vectores en el espacio vectorial $\mathbf{V}^3$ de la geometría euclidiana.

Se llama *producto mixto* en $\mathbf{V}^3$ a la aplicación definida por

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) & \longmapsto & (\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}})\cdot\overline{\mathbf{z}} = [\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}] \end{array}$$

Este producto mixto definido es nulo en cada uno de los casos siguientes:

(a) Cuando es nulo alguno de los vectores $\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}$.

(b) Cuando los vectores $\overline{\mathbf{x}}$ e $\overline{\mathbf{y}}$ son linealmente dependientes o colineales.

(c) Cuando los vectores $\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}$ son no nulos y ortogonales.

Consecuencia de las propiedades anteriores es la siguiente:

Tres vectores en el $\mathbf{V}^3$ *son coplanarios si, y solamente si, su producto mixto es cero.*

Interpretación geométrica

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores en $\mathbf{V}^3$ *coincide con el volumen del paralelepípedo, u ortoedro, construido con los tres vectores como aristas concurrentes en un vértice.*

Valor del producto mixto

Sea $\mathcal{B}=\left\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3\right\}$ una base ortonormal en $\mathbf{V}^3$ y consideremos los vectores $\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}$ cuyas expresiones en dicha base son

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}} &= x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2+x_3\overline{\mathbf{u}}_3 \\ \overline{\mathbf{y}} &= y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2+y_3\overline{\mathbf{u}}_3 \\ \overline{\mathbf{z}} &= z_1\overline{\mathbf{u}}_1+z_2\overline{\mathbf{u}}_2+z_3\overline{\mathbf{u}}_3 \end{aligned}$$

Como es

$$\overline{\mathbf{x}}\wedge\overline{\mathbf{y}}=(x_2y_3-x_3y_2)\overline{\mathbf{u}}_1+(x_3y_1-x_1y_3)\overline{\mathbf{u}}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\overline{\mathbf{u}}_3$$

se tiene que el producto escalar $(\overline{\mathbf{x}}\wedge\overline{\mathbf{y}}).\overline{\mathbf{z}}$ es

$$(\overline{\mathbf{x}}\wedge\overline{\mathbf{y}})\cdot\overline{\mathbf{z}}=(x_2y_3-x_3y_2)z_1+(x_3y_1-x_1y_3)z_2+(x_1y_2-x_2y_1)z_3$$

Usualmente, la expresión anterior presenta mayor comodidad operativa, cuando adopta la forma:

$$(\overline{\mathbf{x}}\wedge\overline{\mathbf{y}})\cdot\overline{\mathbf{z}}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2$$

Propiedades del producto mixto

a) El producto mixto es lineal en cada uno de sus factores. Es decir:

$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ y $\forall\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}',\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{y}}',\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}}'\in\mathbf{V}^3$ se verifica:

$$[\lambda\overline{\mathbf{x}}+\mu\overline{\mathbf{x}}'\ ,\ \overline{\mathbf{y}}\ ,\ \overline{\mathbf{z}}]=\lambda[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}]+\mu[\overline{\mathbf{x}}',\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}]$$

$$[\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \lambda\overline{\mathbf{y}}+\mu\overline{\mathbf{y}}'\ ,\ \overline{\mathbf{z}}]=\lambda[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}]+\mu[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}',\overline{\mathbf{z}}]$$

$$[\overline{\mathbf{x}}\ ,\ \overline{\mathbf{y}}\ ,\ \lambda\overline{\mathbf{z}}+\mu\overline{\mathbf{z}}']=\lambda[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}]+\mu[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}']$$

b) El producto mixto cambia de signo al intercambiar dos cualesquiera de sus factores. La propiedad se expresa con las siguientes igualdades.

$$[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}]=-[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}}]=[\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{x}}]=-[\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}}]=[\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}]=-[\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}]$$

c) Como consecuencia de ***a*** y ***b*** se tiene: $\forall \overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}^3$

$$\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}} \cdot \overline{\mathbf{z}} = (\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}}) \cdot \overline{\mathbf{z}} = [\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}] = [\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{x}}] = (\overline{\mathbf{y}} \wedge \overline{\mathbf{z}}) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot (\overline{\mathbf{y}} \wedge \overline{\mathbf{z}}) = \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \wedge \overline{\mathbf{z}}$$

Si observamos los términos extremos de la igualdad se tiene la importante y *despreocupada* relación: $\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}} \cdot \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \wedge \overline{\mathbf{z}}$.

La interpretación coloquial de esta propiedad es: *En el producto mixto se pueden intercambiar los signos del producto escalar y del producto vectorial, sin alterar su valor.*

Conclusión: El producto mixto, que acabamos de analizar, cumple, entre otras propiedades, las requeridas para considerarlo una forma trilineal aternada en el $\mathbb{R}$−espacio vectorial $\mathbf{V}^3$.

12.– Aplicaciones trilineales alternadas en un espacio vectorial tridimensional

1.– Proposición

Dados $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ $\mathbb{K}$−espacios vectoriales, siendo $dim(\mathbf{E})=3$. Para toda base $\mathscr{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3\}$ de $\mathbf{E}$ y todo vector $\overline{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{F}$, existe una única aplicación trilineal alternada $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ tal que

$$f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3)=\overline{\mathbf{v}}$$

Demostración:

a) Unicidad

Dada $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, aplicación trilineal alternada, cumpliendo las condiciones del enunciado, probemos que es única.

Sean

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}} &= x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2+x_3\overline{\mathbf{u}}_3 \\ \overline{\mathbf{y}} &= y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2+y_3\overline{\mathbf{u}}_3 \\ \overline{\mathbf{z}} &= z_1\overline{\mathbf{u}}_1+z_2\overline{\mathbf{u}}_2+z_3\overline{\mathbf{u}}_3 \end{aligned}$$

vectores cualesquiera de **E** expresados en la base $\mathcal{B}$. Escritos en la forma

$$\overline{\mathbf{x}}=\sum_{i=1}^{3} x_i\overline{\mathbf{u}}_i \qquad \overline{\mathbf{y}}=\sum_{j=1}^{3} y_j\overline{\mathbf{u}}_j \qquad \overline{\mathbf{z}}=\sum_{k=1}^{3} z_k\overline{\mathbf{u}}_k;$$

y al ser f trilineal, se tiene

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) &= f\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\overline{\mathbf{u}}_i\,,\ \sum_{j=1}^{3} y_j\overline{\mathbf{u}}_j\,,\ \sum_{k=1}^{3} z_k\overline{\mathbf{u}}_k\Big) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} x_iy_jz_kf(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{u}}_j,\overline{\mathbf{u}}_k) \end{aligned}$$

tomando los índices i,j,k valores arbitrarios en el conjunto $\{1,2,3\}$ con lo que la suma tiene, en principio, un total de sumandos igual a $3^3=27=\mathrm{VR}_3^3$ (número de variaciones ternarias, con repetición, de tres elementos). Pero, al ser f alternada, es $f(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{u}}_j,\overline{\mathbf{u}}_k)=\overline{\mathbf{0}}$ cuando dos subíndices coinciden en valor. Como máximo, serán diferentes de cero aquellos sumandos en los que los índices i,j,k tomen, en cada caso, valores diferentes, lo cual ocurre en tantos casos como $\mathrm{V}_3^3=\mathrm{P}_3=3!=6$. Los $27-6$ sumandos restantes son nulos. Vamos a calcular $f(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{u}}_j,\overline{\mathbf{u}}_k)$ en los seis casos dichos. Las imágenes de estas ternas resultan a partir de $\overline{\mathbf{v}}$, pues al ser f alternada se tiene:

$$f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3)=f(\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3,\overline{\mathbf{u}}_1)=f(\overline{\mathbf{u}}_3,\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2)=\overline{\mathbf{v}}$$

$$f(\overline{u}_1,\overline{u}_3,\overline{u}_2)=f(\overline{u}_2,\overline{u}_1,\overline{u}_3)=f(\overline{u}_3,\overline{u}_2,\overline{u}_1)=-\overline{v}$$

Se han recorrido las seis permutaciones posibles del conjunto $\{1,2,3\}$. En las permutaciones pares o circulares, que son la mitad, es $f(\overline{u}_i,\overline{u}_j,\overline{u}_k)=\overline{v}$, y en las impares es $f(\overline{u}_i,\overline{u}_j,\overline{u}_k)=-\overline{v}$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se conoce la imagen de f en todo caso resultando ser

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2-x_3y_2z_1)\cdot\overline{v}$$

y, como las coordenadas delos vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}$ son únicas en la base considerada, también lo es la imagen de f quedando probada la unicidad de la aplicación trilineal alternada f, cuya existencia se había supuesto.

b) Existencia

Siendo **E** y **F** $\mathbb{K}$−espacios vectoriales con $dim(\mathbf{E})=3$ la aplicación $f:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{F}$ definida por

$$f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1)\cdot\overline{v}$$

siendo

$$\begin{aligned}\overline{x} &= x_1\overline{u}_1+x_2\overline{u}_2+x_3\overline{u}_3\\ \overline{y} &= y_1\overline{u}_1+y_2\overline{u}_2+y_3\overline{u}_3\\ \overline{z} &= z_1\overline{u}_1+z_2\overline{u}_2+z_3\overline{u}_3\end{aligned}$$

respecto de la base $\mathcal{B}=\left\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\right\}$ de **E** es trilineal y alternada.

En efecto. En cuanto a la linealidad, probemos que f es lineal en $\overline{x}$ cuando se suponen fijos $\overline{y}$ y $\overline{z}$.

Como en cada sumando de la expresión que define f interviene una sola coordenada del vector $\overline{\mathbf{x}}$ y el vector $\lambda\overline{\mathbf{x}}$ tiene por coordenadas en la misma base $(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$ se verifica que:

$$f(\lambda\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})=\lambda f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})$$

Además, como las coordenadas del vector $\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}'$, en la base $\mathscr{B}$, son $(x_1+x_1' , x_2+x_2' , x_3+x_3')$ cuando son (x_1,x_2,x_3) y (x_1',x_2',x_3'), respectivamente, las coordenadas de $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{x}}'$ en la misma base $\mathscr{B}$, se tiene que

$$f(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}', \overline{\mathbf{y}} , \overline{\mathbf{z}})=f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})+f(\overline{\mathbf{x}}',\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})$$

con lo que queda probada la linealidad en $\overline{\mathbf{x}}$.

De forma análoga se probaría la linealidad en $\overline{\mathbf{y}}$ y en $\overline{\mathbf{z}}$.

Un caso particular de aplicaciones trilineales alternadas de orden tres, son los determinantes de tercer orden.

13.– Determinantes de tercer orden

Como consecuencia de la proposición *12.1* podemos establecer la que enunciamos seguidamente:

1.– Proposición

Si es $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial tridimensional y siendo $\mathscr{B}=\left\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3\right\}$ y $\mathscr{B}'=\{1\}$ bases respectivas para $\mathbf{E}$ y $\mathbb{K}$, existe una forma multilineal alternada única $f: \mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3)=1$.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}} &= x_1\overline{\mathbf{u}}_1+x_2\overline{\mathbf{u}}_2+x_3\overline{\mathbf{u}}_3\\ \text{Si}\quad \overline{\mathbf{y}} &= y_1\overline{\mathbf{u}}_1+y_2\overline{\mathbf{u}}_2+y_3\overline{\mathbf{u}}_3\\ \overline{\mathbf{z}} &= z_1\overline{\mathbf{u}}_1+z_2\overline{\mathbf{u}}_2+z_3\overline{\mathbf{u}}_3\end{aligned}$$

son vectores arbitrarios de **E** referidos a la base $\mathcal{B}$, para la forma f dada a $f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})$ se le llama *determinante* de los vectores $\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}$ respecto de la base $\mathcal{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\overline{\mathbf{u}}_3\}$, y se simboliza como

$$D(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})=det(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Por los resultados de la proposición ***12.1*** el valor del determinante anterior está dado por

$$\begin{aligned}D(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) &= det(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) =\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} =\\ &= x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1\end{aligned}$$

Existe un método práctico para obtener la expresión polinómica del desarrollo del determinante de orden tres, que es la conocida regla de Sarrus: *Los sumandos con signo positivo son productos de elementos de la diagonal principal de la correspondiente matriz, o bien, de un segmento paralelo a ella, mientras que los negativos resultan con criterio análogo, pero con relación a la diagonal secundaria.*

Los estudiantes reciben con entusiasmo el poco esfuerzo que precisa esta regla para su asimilación. El profesor les hace ver la escasa eficacia de la misma al no ser válida para determinantes de orden superior. Existen otros métodos que permiten calcular determinantes de cualquier orden con lo cual esta regla cae prácticamente en desuso.

Como consecuencia de lo anterior podemos definir el determinante de una matriz cuadrada de orden tres con elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$, habida cuenta de que las líneas de la misma son vectores de un espacio vectorial de dimensión tres, del siguiente modo: Dada

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$$

se llama *determinante* de A, y se indica como *det*(A) o bien por $|A|$, al escalar

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Observación: Dada $A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ y considerando la matriz traspuesta de A, que indicaremos con A^t, se verifica que $det(A)=det(A^t)$.

Consecuencia de esta obsevación es que toda propiedad relativa a los determinates, que sea válida para filas, lo es también, para columnas.

2.– Propiedades de los determinantes de orden tres

Como consecuencia de las propiedades relativas a las aplicaciones trilineales alternadas, se tienen las correspondientes a los determinantes de orden tres.

(i) Si es $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, entonces $\forall \kappa \in \mathbb{K}$, la matriz

$B=\begin{pmatrix} \kappa a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \kappa a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \kappa a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ es tal que $|B| = \kappa |A|$.

Esta propiedad se puede enunciar así: *Para multiplicar un determinante por un número, basta con multiplicar los elementos de una cualquiera de sus líneas por dicho número.*

(ii) Para la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, se verifica:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propiedad que podemos recordar así:

Si en una matriz cuadrada los elementos de una línea son sumas, su determinante se puede escribir como suma de tantos determinantes como sumandos existen en dicha línea.

(iii) Dada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ y considerando la matriz

$$B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$$

obtenida de A por intercambio de las columnas primera y segunda, se verifica que $|B| = -|A|$.

En lenguaje coloquial se puede enunciar esta propiedad diciendo: *Si en una matriz cuadrada se itercambian dos de sus líneas paralelas, se obtiene otra cuyo determinante es opuesto al de la primera.*

(iv) La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11}+\mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21}+\mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31}+\mu a_{32} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ es tal que $|A| = 0$.

De forma general esta propiedad dice: *Si en una matriz cuadrada una de sus líneas es combinación lineal de otras paralelas, entonces su determinante es nulo.*

(v) Si es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, y se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11}+\mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21}+\mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda a_{31}+\mu a_{32} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$$

se verifica que $|B| = |A|$.

Demostración:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda a_{11}+\mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda a_{21}+\mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda a_{31}+\mu a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11}+\mu a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21}+\mu a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31}+\mu a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| + 0 = |A|$$

Esta propiedad tiene el siguiente significado: *Si en una matriz cuadrada se suma a una de sus líneas cualquier combinación lineal de otras paralelas a ella, se obtiene otra matriz, cuyo determinante tiene el mismo valor que el de la matriz inicial.*

También se puede enunciar diciendo que un determinante no altera su valor por sumar a una cualquiera de sus líneas una combinación lineal de otras líneas paralelas a ella.

Como consecuencia inmediata de esta propiedad es posible conseguir que en una línea cualquiera de un determinante todos sus elementos salvo uno, a lo sumo, sean nulos sin alterar el valor del determinante. Este resultado es muy útil a la hora de desarrollar un determinante por los elementos de una de sus líneas, pues origina un proceso recurrente por el cual todo determinante de un cierto orden es igual al producto de un número por otro determinante de orden una unidad menor que el determinante inicial.

3.- *Desarrollo de un determinante de tercer orden por los elementos de una de sus líneas*

Dada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, sabemos que

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Si en el desarrollo anterior consideramos, por ejemplo, los elementos de la tercera columna y agrupamos con relación a ellos, se tiene

$$|A| = a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})+a_{23}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Los factores respectivos de a_{13}, a_{23} y a_{33}, expresados por A_{13}, A_{23} y A_{33} se llaman *adjuntos* o cofactores de dichos elementos. Cada uno de ellos es un determinante de orden dos, precedido de un signo, que es positivo si la suma de los subíndices de fila y columna del lugar correspondiente es par, y negativo si es impar.

La propiedad es válida para cualquier línea, pues basta con agrupar, en la expresión que da el valor del determinate, respecto de los elementos de esa línea. En este sentido, si hubiésemcs agrupado, por ejemplo, por los elementos de la primera columna, obtendríamos el mismo valor del determinante, ahora en la forma

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

La propiedad que acabamos de comprobar puede enunciarse así: *El valor del determinante de una matriz cuadrada de orden tres es igual a la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas por sus respectivos adjuntos.*

Una consecuencia, inmediata de la propiedad anterior es la siguiente:

La suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera, en una matriz cuadrada, por los adjuntos de otra paralela, tiene valor cero.

La generalización de los conceptos de forma bilineal, forma trilineal, y sus propiedades, nos va a permitir definir los determinantes de orden n, y establecer sus propiedades.

14. – Determinantes de orden n

1. – Aplicaciones multilineales

1. – Definición

Dados **E** y **F** $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y siendo p un número natural $(p \geq 2)$, la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbf{E}^p &\longrightarrow \mathbf{F} \\ (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p) &\longmapsto f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p) \end{aligned}$$

se dice que es *p-lineal* si es lineal en cada uno de los p vectores componentes $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p$.

2.- *Propiedades*

(i) Para cualesquiera escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ en $\mathbb{K}$, se verifica:

$$f(\lambda_1\overline{x}_1,\lambda_2\overline{x}_2,\dots,\lambda_p\overline{x}_p)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_p\cdot f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p)$$

En efecto:

Como f es lineal en $\overline{x}_1$ se tiene

$$f(\lambda_1\overline{x}_1,\lambda_2\overline{x}_2,\dots,\lambda_p\overline{x}_p)=\lambda_1\cdot f(\overline{x}_1,\lambda_2\overline{x}_2,\dots,\lambda_p\overline{x}_p)$$

Procediendo por inducción sobre p, supuesto que

$$f(\lambda_1\overline{x}_1,\lambda_2\overline{x}_2,\dots,\lambda_p\overline{x}_p)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{p-1}\cdot f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_{p-1},\lambda_p\overline{x}_p)$$

y teniendo en cuenta la linealidad de f en $\overline{x}_p$, se tiene que

$$f(\lambda_1\overline{x}_1,\lambda_2\overline{x}_2,\dots,\lambda_p\overline{x}_p)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{p-1}\lambda_p\cdot f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p)$$

En el supuesto de que cada uno de los vectores $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p$ sea combinación lineal de los n vectores $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\dots,\overline{v}_n$, es decir, cuando para todo $i=1,2,\dots,p$ $\overline{x}_i=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{v}_j$, de la linealidad de f respecto del primer vector $\overline{x}_1$ resulta

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\overline{v}_j,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot f(\overline{v}_j,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_p)$$

Por la linealidad de f respecto de $\overline{\mathbf{x}}_2$ se tiene

$$f(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p)=f(\overline{\mathbf{v}}_j,\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\overline{\mathbf{v}}_k,\overline{\mathbf{x}}_3,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p)=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\cdot f(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_k,\overline{\mathbf{x}}_3,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p)$$

y, sustituyendo en la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{x}}_3,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p) &= f(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\overline{\mathbf{v}}_j,\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\overline{\mathbf{v}}_k,\overline{\mathbf{x}}_3,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p)= \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} a_{1j}\cdot a_{2k}\cdot f(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_k,\overline{\mathbf{x}}_3,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_p) \end{aligned}$$

En esta suma existen $n\cdot n=n^2$ sumandos ya que j y k toman valores de 1 a n, independientemente uno del otro, pudiendo ser iguales o distintos.

Razonando por inducción sobre p, supongamos que

$$\begin{aligned} & f(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\overline{\mathbf{v}}_{j_1},\sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}\overline{\mathbf{v}}_{j_2},\ldots,\sum_{j_{p-1}=1}^{n} a_{p-1j_{p-1}}\overline{\mathbf{v}}_{j_{p-1}},\overline{\mathbf{x}}_p)= \\ &= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_{p-1}=1}^{n} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{p-1j_{p-1}}\cdot f(\overline{\mathbf{v}}_{j_1},\overline{\mathbf{v}}_{j_2},\ldots,\overline{\mathbf{v}}_{j_{p-1}},\overline{\mathbf{x}}_p) \end{aligned}$$

Esta suma tiene una cantidad de sumandos igual a n^{p-1}, ya que cada uno de los índices, $j_1,j_2,\ldots,j_{p-1}$, toma valores de 1 a n.

Como f es lineal en $\overline{\mathbf{x}}_p$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{v}}_{j_1},\overline{\mathbf{v}}_{j_2},\ldots,\overline{\mathbf{v}}_{j_{p-1}},\overline{\mathbf{x}}_p) &= f(\overline{\mathbf{v}}_{j_1},\overline{\mathbf{v}}_{j_2},\ldots,\overline{\mathbf{v}}_{j_{p-1}},\sum_{j_p=1}^{n} a_{pj_p}\overline{\mathbf{v}}_{j_p})= \\ &= \sum_{j_p=1}^{n} a_{pj_p}\cdot f(\overline{\mathbf{v}}_{j_1},\overline{\mathbf{v}}_{j_2},\ldots,\overline{\mathbf{v}}_{j_p}) \end{aligned}$$

y, por la hipótesis de inducción, se tiene la propiedad (ii).

(ii) Si $f: E^p \longrightarrow F$ es una aplicación p−lineal, entonces

$$f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\overline{v}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}\overline{v}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_p=1}^{n} a_{pj_p}\overline{v}_{j_p}\right)=$$

$$= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_p=1}^{n} a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{pj_p}\cdot f(\overline{v}_{j_1},\overline{v}_{j_2},\ldots,\overline{v}_{j_p})$$

donde la suma se extiende a n^p sumandos, ya que cada uno de los índices, $j_1,j_2,\ldots,j_{p-1}$, toma valores de 1 a n independientemente de los demás.

2.− Aplicaciones multilineales alternadas

Siendo **E** y **F** $\mathbb{K}$−espacios vectoriales, una aplicación p−lineal $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ se dice que es *alternada* si $f(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_p)=\overline{\mathbf{0}}$ cuando $\overline{v}_i=\overline{v}_j$ para $i\neq j$.

También podemos decir que la aplicación p−lineal $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ es alternada si es bilineal alternada para todo par $\overline{v}_i,\overline{v}_j$ de componentes distintas, permaneciendo fijas las $p-2$ componentes restantes.

1.− Propiedades

(i) Si $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ es una aplicación p−lineal alternada, entonces

$$f(\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_j,\ldots,\overline{v}_i,\ldots,\overline{v}_p)=-f(\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_i,\ldots,\overline{v}_j,\ldots,\overline{v}_p)$$

siendo $\overline{v}_i\neq\overline{v}_j$.

La propiedad se puede enunciar, también, diciendo: *Si en una aplicación p−lineal alternada* $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ *se intercambian dos de los* p *vectores componentes* $\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p$, *entonces cambia de signo de* $f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p)$.

La demostración es inmediata, pues, si son $\overline{\mathbf{v}}_i$ y $\overline{\mathbf{v}}_j$, con $i<j$, los vectores que se intercambian, basta considerar la aplicación h, definida por $h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_j)=f(\overline{\mathbf{v}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_i,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_j,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p)$. Como f es alternada, h también lo es con lo cual $h(\overline{\mathbf{v}}_i+\overline{\mathbf{v}}_j\ ,\ \overline{\mathbf{v}}_i+\overline{\mathbf{v}}_j)=\overline{\mathbf{0}}$.

Además, h es bilineal, por ser f p$-$lineal, y podemos escribir

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{0}} &= h(\overline{\mathbf{v}}_i+\overline{\mathbf{v}}_j\ ,\ \overline{\mathbf{v}}_i+\overline{\mathbf{v}}_j) = \\ &= h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)+h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_j)+h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_i)+h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_j) = \\ &= h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_j)+h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_i) \qquad \text{(pues } h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)=h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_j)=\overline{\mathbf{0}})\end{aligned}$$

De la igualdad $h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_j)+h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_i)=\overline{\mathbf{0}}$ se tiene que $h(\overline{\mathbf{v}}_j,\overline{\mathbf{v}}_i)=-h(\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{v}}_j)$. Finalmente, teniendo en cuenta la definición de la aplicación h, se *concluye que*

$$f(\overline{\mathbf{v}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_j,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_i,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p)=-f(\overline{\mathbf{v}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_i,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_j,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p)$$

(ii) Si $f:\mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ es una aplicación p$-$lineal alternada y π es una permutación del conjunto $\{1,2,\ldots,p\}$, cuya signatura es $\sigma(\pi)$, entonces

$$f(\overline{\mathbf{v}}_{\pi(1)},\overline{\mathbf{v}}_{\pi(2)},\ldots,\overline{\mathbf{v}}_{\pi(p)})=\sigma(\pi)\cdot f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_p)$$

Demostración:

Se sabe que toda permutación $\pi\in\mathfrak{P}_p$ se puede expresar como composición de trasposiciones: $\pi=t_q\circ t_{q-1}\circ\ldots\circ t_2\circ t_1$, siendo q el número de trasposiciones que presenta π. Además la signatura $\sigma(\pi)$ de esta permutación es $\sigma(\pi)=(-1)^q$.

En virtud de la propiedad anterior, para toda trasposición $\tau \in \mathfrak{P}_q$ realizada entre los subíndices de los vectores $\overline{v}_i$, se origina en f un cambio de signo y, en consecuencia, aplicando sucesivamente las trasposiciones $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ en que se descompone π, se realizan q cambios de signo, teniéndose, en consecuencia:

$$f(\overline{v}_{\pi(1)}, \overline{v}_{\pi(2)}, \ldots, \overline{v}_{\pi(p)}) = (-1)^q \cdot f(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p) = \sigma(\pi) \cdot f(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p)$$

(iii) Si $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ es una aplicación p−lineal alternada, y siendo $\mathbf{M} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p\}$ un sistema de vectores linealmente dependientes, en $\mathbf{E}$, entonces $f(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p) = \overline{\mathbf{0}}$.

Demostración:

Si es $\mathbf{M}$ un sistema ligado existe, al menos, un vector $\overline{v}_i \in \mathbf{M}$ que es combinación lineal de los restantes vectores de $\mathbf{M}$. Supongamos que sea $\overline{v}_1$ el vector que es dependiente de los restantes. (Si fuese otro se razonaría de manera análoga). En estas condiciones existen los escalares $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ tales que $\overline{v}_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \overline{v}_i$ y, por tanto, es

$$f(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p) = f(\sum_{i=2}^{p} \lambda_i \overline{v}_i, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \cdot f(\overline{v}_i, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p) = \overline{\mathbf{0}}$$

pues f es alternada y actúa sobre p vectores, entre los cuales siempre existen dos que son iguales.

(iv) Si $\mathbf{E}$ es un $\mathbb{K}$−espacio vectorial finitamente engendrado, siendo $dim(\mathbf{E}) < p$, entonces para todo $\mathbb{K}$−espacio vectorial $\mathbf{F}$ se verifica que toda aplicación p−lineal alternada $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ es nula.

En efecto:

Como es $dim(\mathbf{E})<p$, todo conjunto con p vectores, $\left\{\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p\right\}$, en $\mathbf{E}$ es un sistema ligado y, por la propiedad anterior, es $f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p)=\overline{\mathbf{0}}$. Por tanto f es la aplicación nula, es decir $f\equiv 0$.

(v) Dados $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$, $\mathbb{K}$−espacios vectoriales, y $f:\mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ una aplicación p−lineal alternada, y si p vectores dados, $\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p$, en $\mathbf{E}$ son todos ellos combinación lineal de los vectores $\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\dots,\overline{\mathbf{u}}_p$, lo cual se expresa como $\overline{\mathbf{v}}_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\overline{\mathbf{u}}_j$ $(1\le i\le p)$, entonces

$$f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p)=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_p}\sigma(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}\cdot f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\dots,\overline{\mathbf{u}}_p)$$

donde el sumatorio se extiende al total de las $p!$ permutaciones π de $\mathfrak{P}_p$ realizadas con los elementos del conjunto $\{1,2,\dots,p\}$.

Demostración:

Como es $\overline{\mathbf{v}}_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\overline{\mathbf{u}}_j$ $(1\le i\le p)$, por la linealidad de f en cada componente es

$$f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p)=\sum a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{pj_p}\cdot f(\overline{\mathbf{u}}_{j_1},\overline{\mathbf{u}}_{j_2},\dots,\overline{\mathbf{u}}_{j_p})$$

donde la suma se extiende a las p^p variaciones con repetición, de orden p con p elementos dados, y que recorre el sistema $\left\{j_1,j_2,\dots,j_p\right\}$, al tomar cada j_k un valor arbitrario de entre los elementos del conjunto $\{1,2,\dots,p\}$.

Pero, al ser f alternada, en cuanto que dos de estos índices, j_i y j_k, tomen los mismos valores en una variación es $f(\overline{\mathbf{u}}_{j_1},\overline{\mathbf{u}}_{j_2},\dots,\overline{\mathbf{u}}_{j_p})=\overline{\mathbf{0}}$.

Por tanto, solo se deben considerar los casos en que el sistema de p índices, $j_1,j_2,\dots,j_p$, tome valores todos ellos distintos, lo cual solo ocurre cuando $\{j_1,j_2,\dots,j_p\}$ toma valores sobre las $p!$ permutaciones del conjunto $\{1,2,\dots,p\}$ pues, en los $p^p-p!$ casos restantes, la aplicación f es nula.

Este sistema de índices, todos diferentes, lo escribiremos en la forma $\{\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(p)\}$ y π debe tomar todos los valores del conjunto $\mathfrak{P}_p$ de las $p!$ permutaciones de los elementos del conjunto $\{1,2,\dots,p\}$.

Solo nos interesa, en definitiva, conocer $f(\overline{\mathbf{u}}_{\pi(1)},\overline{\mathbf{u}}_{\pi(2)},\dots,\overline{\mathbf{u}}_{\pi(p)})$. Pero, por la propiedad ***(ii)***, es

$$f(\overline{\mathbf{u}}_{\pi(1)},\overline{\mathbf{u}}_{\pi(2)},\dots,\overline{\mathbf{u}}_{\pi(p)})=\sigma(\pi)\cdot f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\dots,\overline{\mathbf{u}}_p)$$

y donde $\sigma(\pi)$ es la signatura de la permutación π.

En definitiva tenemos, al sustituir, el resultado esperado:

$$f(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\dots,\overline{\mathbf{v}}_p)=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_p}\sigma(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}\cdot f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\dots,\overline{\mathbf{u}}_p)$$

Como consecuencia de las propiedades anteriores, en el caso de que sea **E** un $\mathbb{K}$−espacio vectorial de dimensión p y **F** un $\mathbb{K}$−espacio vectorial de dimensión arbitraria, por analogía con las aplicaciones trilineales, se puede establecer el siguiente teorema fundamental:

2.- Teorema

Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $dim(\mathbf{E})=p$, con $\mathscr{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_p\}$ una base cualquiera de $\mathbf{E}$, entonces para todo vector $\overline{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{F}$ existe una única aplicación p-lineal alternada $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbf{F}$ tal que $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_p)=\overline{\mathbf{v}}$.

(La demostración es análoga a la expuesta en el caso de las aplicaciones trilineales. Omitiremos su exposición a los alumnos por tener ya la idea de la misma y dado que la formalización de ella tiene una notación incómoda).

Con todo lo expuesto anteriormente estamos ya en condiciones de introducir la definición general de determinante, de acuerdo con la teoría de las formas multilineales alternadas.

15.- Definición de forma p-lineal alternada

Si es $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión p, una aplicación p-lineal alternada $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbb{K}$ se llama forma p-lineal alternada.

Además, en virtud del teorema fundamental anterior, considerando una base arbitraria $\mathscr{B}=\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_p\}$ de $\mathbf{E}$ y tomando como vector en $\mathbb{K}$ el 1, existe una única forma p-lineal alternada $f: \mathbf{E}^p \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_p)=1$.

16. – Definición de determinante de p vectores

Siendo $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión p, se llama determinante de los p vectores $\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{p}$, en la base $\mathscr{B}=\left\{\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{p}\right\}$, a la imagen $D(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{p})$ en $\mathbb{K}$ mediante la forma p–lineal alternada, única, $D:\mathbf{E}^\mathrm{p}\longrightarrow\mathbb{K}$ tal que $D(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{u}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{p})=1$.

Si es $\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{i}=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}} a_{ij}\overline{\mathbf{u}}_\mathrm{j}$, $(1\leq i\leq p)$, entonces el determinante de los vectores $\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{p}$, es

$$D(\overline{\mathbf{v}}_1,\overline{\mathbf{v}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}_\mathrm{p})=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_\mathrm{p}}\sigma(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}$$

Consecuencia de la definición de determinante y del teorema anterior es la propiedad:

1. – Caracterizacón de las formas p–lineales alternadas

Toda forma p–lineal alternada $f:\mathbf{E}^\mathrm{p}\longrightarrow\mathbb{K}$ es de la forma $\kappa\cdot D$, con $\kappa\in\mathbb{K}$.

(Evidente).

2. – Determinante de una matriz de $\mathscr{M}_\mathrm{p}(\mathbb{K})$

Siendo A una matriz cuadrada de orden p, cuyos elementos pertenecen a un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots\cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de A, y se simboliza por $D(\mathrm{A})$ ó $det(\mathrm{A})$ ó $|\mathrm{A}|$

ó $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots\cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$, al escalar de $\mathbb{K}$ definido por

$$det(\mathrm{A})=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_p} \sigma(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}$$

3.– *Propiedades de los determinantes*

(i) Si $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ se verifica que $det(\mathrm{A}^t)=det(\mathrm{A})$.

En efecto:

Sean $\mathrm{A}=(a_{ij})$ y $\mathrm{A}^t=(a'_{ij})$, verificando que $a'_{ij}=a_{ji}$. Por la definición de determinante es

$$det(\mathrm{A}^t)=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_p} \sigma(\pi)\cdot a'_{1\pi(1)}\cdot a'_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a'_{p\pi(p)}$$

y dado que $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo podemos ordenar la permutación de fila de forma que $\{\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(p)\}$ tenga el orden natural $\{1,2,\ldots,p\}$. Esta reordenación se consigue mediante la permutación $\rho=\pi^{-1}$ con el siguiente criterio:

Si para todo $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ es $\pi(i)=k$, entonces es $\rho(k)=i$ y, por tanto, $a'_{i\pi(i)}=a'_{\rho(k)k}=a_{k\rho(k)}$, de lo cual, habida cuenta que

$\sigma(\pi)=\sigma(\pi^{-1})$, resulta que el término genérico del desarrollo de *det*(A) está dado por

$$\sigma(\rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdot a_{2\rho(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\rho(p)}$$

Además, sumar cuando π recorre $\mathfrak{P}_p$ equivale a sumar cuando $\pi^{-1}=\rho$ recorre $\mathfrak{P}_p$, teniéndose, finalmente, que

$$det(A^t)=\sum_{\rho\in\mathfrak{P}_p}\sigma(\rho)\cdot a_{1\rho(1)}\cdot a_{2\rho(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\rho(p)}=det(A)$$

Consecuencia de esta propiedad es la

(ii) *Toda propiedad referida a las filas de un determinante es válida, también, para columnas.* (Filas y columnas quedan englobadas en el término genérico de líneas).

Al ser la función determinante p−lineal alternada, por las propiedades de estas aplicaciones, son evidentes, ahora, estas otras propiedades de los determinantes.

(iii) El determinante de una matriz cambia de signo al intercambiar en él dos líneas paralelas.

(iv) Si en una matriz cuadrada existen dos líneas paralelas iguales, entonces su determinante es nulo.

(v) Si en una matriz cuadrada una de sus líneas está formada por elementos que son sumas de dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes.

(vi) Si A es una matriz cuadrada y B es la matriz obtenida de A al multiplicar los elementos de una cualquiera de sus líneas por un número κ, entonces es $det(\mathrm{B}) = \kappa \cdot det(\mathrm{A})$.

(vii) Si en una matriz cuadrada A una de sus líneas es combinación lineal de otras paralelas, se verifica que $det(\mathrm{A}) = 0$.

(viii) Dada A, matriz cuadrada, y siendo B la matriz obtenida de A al sumar a una de sus líneas cualquier combinación lineal de otras paralelas a ella, se verifica que $det(\mathrm{B}) = det(\mathrm{A})$.

(ix) Siendo A una matriz cuadrada, es posible obtener a partir de ella otra matriz B en la que todos los elementos de una linea cualquiera, prefijada, salvo uno de ellos a lo sumo, son iguales a cero, verificando que $det(\mathrm{B}) = det(\mathrm{A})$.

(x) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden se verifica que $det(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = det(\mathrm{A}) \cdot det(\mathrm{B})$.

La demostración de esta importante propiedad no se sigue directamente de las propiedades de las aplicaciones p−lineales alternadas. No se realiza, ordinariamente, una demostración de la misma para alumnos del nivel que nos ocupa, pues la demostración usual más sencilla exige considerar la matriz asociada a un endomorfismo y la matriz asociada a la composición de dos endomorfismos en un mismo espacio vectorial.

La idea general de la demostración es que un endomorfismo en el $\mathbb{K}$−espacio vectorial **E**, compuesto con la aplicación determinante de

E^p en $\mathbb{K}$, origina una aplicación p−lineal alternada y, de las propiedades de la misma, se sigue la propiedad.

4.− *Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea*

Vamos a establecer un método para cacular un determinante por los elementos de una columna y que, por las propiedades de las formas multilineales alternadas, es válido también para una fila.

Siendo $A=(a_{ij})\in M_p(\mathbb{K})$, sabemos que

$$det(A)=\sum_{\pi\in\mathfrak{P}_p}\sigma(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdot a_{2\pi(2)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}$$

Si es E un $\mathbb{K}$−espacio vectorial referido a la base $\mathscr{B}=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_p\}$ y considerando los p vectores

$$\overline{v}_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\overline{u}_j \qquad (1\leq i\leq p)$$

se tiene que con relación a la base elegida es $det(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_p)=det(A)$.

Además, para cada $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ es *det* una forma lineal en $\overline{v}_i$, y si para este índice i se sustituye $\overline{v}_i$ por su expresión en función de la base, $\overline{v}_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\overline{u}_j$, se tiene

$$det(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_{i-1}\,,\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\overline{u}_j\,,\overline{v}_{i+1},\ldots,\overline{v}_p)=$$

$$=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\cdot det(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_{i-1},\overline{u}_j,\overline{v}_{i+1},\ldots,\overline{v}_p)$$

Hacemos $A_{ij}=det(\overline{v}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_{i-1},\overline{u}_j,\overline{v}_{i+1},...,\overline{v}_p)$, que es, precisamente, el determinante de la matriz que se deduce de A sustituyendo el vector columna $\overline{v}_i$ de lugar i por el vector $\overline{u}_j$ de la base que ocupa el lugar j. Dicho de otro modo, es el determinante de la matriz obtenida de A al sustituir la columna i por una columna, toda ella de ceros, salvo el elemento de la fila j que se sustituye por 1.

Con la introducción de los determinantes A_{ij} tenemos que

$$det(A)=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\cdot A_{ij}=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\ldots+a_{ip}\cdot A_{ip}$$

y por tanto podemos afirmar que el determinante de A se ha desarrollado por los elementos de su i−ésima columna.

Para todo i y todo j en el conjunto $\{1,2,...,p\}$ el determinante A_{ij} se llama cofactor, complemento algebraico o adjunto del elemento a_{ij}.

Cálculo práctico de los cofactores

a) Calculemos, en primer lugar, A_{11}.

Por definición, $A_{11}=det(\overline{u}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_p)$ es el determinante de la matriz obtenida de A al sustituir los elementos de la primera columna por ceros salvo el a_{11}, en cuyo lugar se pone 1. Por lo tanto, para obtener A_{11} basta con sustituir en la suma que da $det(A)$ los $a_{1\pi(1)}$ por cero si $\pi(1)\neq 1$, y por uno si $\pi(1)=1$, con lo cual es

$$A_{11}=\sum \sigma(\pi)\cdot a_{2\pi(2)}\cdot a_{3\pi(3)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi(p)}$$

estando la suma extendida a las permutaciones π del conjunto $\{1,2,...,p\}$ que dejan invariante el elemento 1, o bien, a todas las permutaciones $\pi' \in \mathfrak{P}_{p-1}$ del conjunto $\{2,3,\ldots,p\}$. Como además, en todas estas permutaciones es $\sigma(p)=\sigma(p')$, resulta que

$$A_{11}=\sum_{\pi' \in \mathfrak{P}_{p-1}} \sigma(\pi')\cdot a_{2\pi'(2)}\cdot a_{3\pi'(3)}\cdot\ldots\cdot a_{p\pi'(p)}$$

Vamos a designar con D_{11} al determinante de la matriz obtenida de A al suprimir la primera columna y la primera fila. En este caso es $A_{11}=D_{11}$.

b) Cálculo de cualquier A_{ij}.

Denotaremos con D_{ij} el determinante de la matriz que resulta de A al suprimir en ella la columna de lugar i y la fila de lugar j. Vamos a comprobar que $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$.

En efecto:

Sabemos que $A_{ij}=det(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_{i-1},\overline{u}_j,\overline{v}_{i+1},\ldots,\overline{v}_p)$. Si llevamos el vector $\overline{u}_j$, que ocupa el lugar i, al primer lugar permutándole sucesivamente con los vectores que le anteceden, hemos de realizar $i-1$ cambios de signo, y como *det* es una función alternada, se tiene que

$$A_{ij}=(-1)^{i-1}\cdot det(\overline{u}_j,\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_{i-1},,\overline{v}_{i+1},\ldots,\overline{v}_p)$$

Llevando, ahora, la fila j al primer lugar por permutación sucesiva con las filas que la preceden tendremos que realizar $j-1$

cambios de filas y que al ser alternada la función determinante resulta

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot det(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{v}}'_1,\overline{\mathbf{v}}'_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}'_{i-1},\overline{\mathbf{v}}'_{i+1},\ldots,\overline{\mathbf{v}}'_p)$$

Donde $\overline{\mathbf{v}}'_1,\overline{\mathbf{v}}'_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}'_p$ son los nuevos vectores columna.

Si en la expresión anterior aplicamos el resultado conocido del cálculo de A_{11}, se tiene que es

$$det(\overline{\mathbf{u}}_1,\overline{\mathbf{v}}'_1,\overline{\mathbf{v}}'_2,\ldots,\overline{\mathbf{v}}'_{i-1},\overline{\mathbf{v}}'_{i+1},\ldots,\overline{\mathbf{v}}'_p)=D_{ij}$$

y, en consecuencia, resulta que $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$.

El proceso anterior tiene como finalidad establecer la siguiente proposición:

1.— Proposición

Si es $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_p$ y designamos con D_{ij} al determinante de la matriz obtenida de A al suprimir la columna i y la fila j, se verifica que

$$det(A)=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot D_{ij}$$

o bien

$$det(A)=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\cdot A_{ij}$$

Este resultado se conoce como el desarrollo del determinante de A por los elementos de la i–ésima columna. Como cada propiedad de columna tiene una correspondiente de fila, se tiene, análogamente, que

$$det(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot D_{ij}=\sum_{i=1}^{p}a_{ij}\mathrm{A}_{ij}$$

y se llama desarrollo del determinante de A por los elementos de la fila j.

Veamos, ahora, algunas aplicaciones sencillas de la proposición anterior.

(a) El desarrollo del determinante de la matriz

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \\ t & t' & t'' & t''' \end{pmatrix}$$

por los elementos de su segunda columna es

$$det(\mathrm{A})=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \\ t & t' & t'' & t''' \end{vmatrix}=$$

$$=-x'\begin{vmatrix} y & y'' & y''' \\ z & z'' & z''' \\ t & t'' & t''' \end{vmatrix}+y'\begin{vmatrix} x & x'' & x''' \\ z & z'' & z''' \\ t & t'' & t''' \end{vmatrix}-z'\begin{vmatrix} x & x'' & x''' \\ y & y'' & y''' \\ t & t'' & t''' \end{vmatrix}+t'\begin{vmatrix} x & x'' & x''' \\ y & y'' & y''' \\ z & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

En cada uno de los determinantes de orden tres que han resultado, podríamos a su vez, aplicar de nuevo la propiedad desarrollándolos por una cualquiera de sus líneas.

(b) El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

En efecto:

Siendo D una matriz diagonal de orden p, obtengamos su determinante:

$$det(\mathrm{D})=\begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Efectuando el desarrollo por los elementos de la primera columna, es

$$det(\mathrm{D})=d_{11}\cdot\begin{vmatrix} d_{22} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & d_{33} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

y, razonando por inducción sobre p, en el supuesto de que

$$det(\mathrm{D})=d_{11}\cdot d_{22}\cdot\ldots\cdot d_{p-2,p-2}\cdot\begin{vmatrix} d_{p-1,p-1} & 0 \\ 0 & d_{pp} \end{vmatrix}$$

se obtiene que

$$det(\mathrm{D})=d_{11}\cdot d_{22}\cdot\ldots\cdot d_{pp}$$

(c) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

En efecto:

Sea T una matriz triangular superior de orden p y calculemos

$$det(\mathrm{T})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots\dots & a_{p1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & \dots\dots & a_{p2} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots\dots & a_{p3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna, se tiene

$$det(\mathrm{T})=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & \dots\dots & a_{p2} \\ 0 & a_{33} & \dots\dots & a_{p3} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

y razonando por inducción sobre p, en el supuesto de ser

$$det(\mathrm{T})=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{p-2,p-2}\cdot\begin{vmatrix} a_{p-1,p-1} & a_{p,p-1} \\ 0 & a_{pp} \end{vmatrix}$$

se obtiene, finalmente, que $det(\mathrm{T})=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{pp}$.

(d) En el resultado anterior se basa el llamado *método de reducción* para el cálculo de un determinante, el cual consiste en realizar transformaciones en la matriz dada hasta obtener otra triangular sin alterar el valor del determinante inicial.

Ejemplo:

Calcular el valor del determinante $\Delta=\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$.

Sumando a la primera fila todas las demás, el determinante no altera su valor, quedando

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4a+b & 4a+b & 4a+b & 4a+b \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

Sacando el factor $4a+b$ de la primera fila obtenemos

$$\Delta=(4a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

Si, ahora se le suma a cada columna la primera, multiplicada previamente por (-1), se obtiene

$$\Delta=(4a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

En la última expresión aparece como factor el determinante de una matriz triangular, con lo cual es, finalmente,

$$\Delta=(4a+b)\cdot(1\cdot b\cdot b\cdot b)=(4a+b)\cdot b^3$$

17. – Cálculo de la inversa de una matriz mediante determinantes

1. – Comatriz o matriz adjunta de una dada

Dada la matriz $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, se considera la matriz $B=(b_{ij})\in\mathscr{M}_p$, siendo $b_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$, y donde D_{ij} es el determinante de la matriz de orden $p-1$, obtenida de A al suprimir en ella la columna i y la fila j.

La matriz B^t, traspuesta de B, se llama *comatriz* o matriz adjunta de A. La indicaremos por A^{adj}.

Ejemplo:

Para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, cada uno de los b_{ij} de la matriz B son:

$$b_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad b_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-(-1)=1$$

$$b_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1 \qquad b_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$$

$$b_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad b_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$b_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2 \qquad b_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$b_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

De este modo es $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y, por tanto,

$$A^{adj}=B^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. – ***Proposición***

Para toda matriz $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ se verifica $A^{adj} \cdot A = A \cdot A^{adj} = det(A) \cdot I_p$. (Donde I_p es la matriz unidad en $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$).

En efecto:

Sea $A=(a_{ij})$. Considerando la matriz $B=(b_{ij})$, siendo $b_{ij}=(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, es $B^t=(b'_{ji})$ con $b'_{ji}=b_{ij}$.

Teniendo en cuenta la definición del producto de matrices es $B^t \cdot A = C = (c_{ik})$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} b'_{jk} a_{ij}$, es decir,

$$
\begin{aligned}
c_{ik} &= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{kj} = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{k+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{kj} = \\
&= \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot A_{kj} = \delta_{ik} \cdot det(A) = \begin{cases} det(A) & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}
\end{aligned}
$$

(En virtud del desarrollo de un determinante por los elementos de una línea). En consecuencia es $A^{adj} \cdot A = det(A) \cdot I_p$.

3. – ***Definición***

La matriz $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ se dice que es *inversible o regular* cuando existe una matriz $A^{-1} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ verificando $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_p$. (La matriz I_p es la matriz unidad de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$).

4. – ***Proposición***

La matriz $A \in M_p(\mathbb{K})$ es inversible si, y solamente si, $det(A) \neq 0$.

Demostración:

a) Si A es inversible, entonces existe la matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Tomando determinantes en la igualdad anterior, se tiene

$$det(A.A^{-1}) = det(A).\ det(A^{-1}) = det(I) = 1$$

Con lo cual $det(A) \neq 0$, (además se tiene, en este caso, que $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$).

b) Recíprocamente, si $det(A) \neq 0$, al ser $A^{adj} \cdot A = det(A) \cdot I$, se tiene que $\frac{A^{adj}}{det(A)} \cdot A = I$, con lo cual A es inversible siendo su inversa $A^{-1} = \frac{A^{adj}}{det(A)}$.

Ejemplo:

Calculemos, ahora la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

En el apartado 17.1 se ha obtenido la matriz adjunta de A:

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hemos de calcular, ahora, el determinante de A:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

(Se ha sumado a la segunda columna la primera y, a continuación, se ha desarrollado por los elementos de la primera fila).

Entrando con estos resultados en la expresión $A^{-1}=\dfrac{A^{adj}}{det(A)}$ se obtiene:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1}=I$.

En este lugar nos ha parecido muy oportuno considerar las propiedades más relevantes de las matrices inversibles, su estructura y otros métodos de cálculo diferentes al que aquí hemos expuesto siguiendo la teoría de los determinantes. El método de Gauss resulta imprescindible en los procesos numéricos del Algebra Lineal, que contemplará su formación matemática universitaria, futura e inminente. Hemos propuesto como ejercicio individual, la comprobación de estas propiedades, cuya corrección se realizó posteriormente en clase. La asimilación de las mismas debe ser un objetivo que lograr con el alumno. Hemos manifestado a nuestros alumnos la posibilidad de incluir alguna de estas cuestiones en la correspondiente prueba de evaluación. De este modo tratamos de atraer la atención de los estudiantes a estos aspectos algebraicos que serán fundamentales para sus cursos futuros.

SEGUNDA PARTE: ESTUDIO EMPIRICO

NUEVA METODOLOGÍA DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE

Introducción

En nuestros años de docencia en el Curso de Orientación Universitaria hemos asistido, en los Seminarios Docentes de la asignatura de Matemáticas, a debates muy vivos cuando se trataba de concretar la programación correspondiente a la asignatura de Matemáticas I del COU y, concretamente, al tratar de establecer la metodología que seguir para el desarrollo de la unidad temática relativa a los determinantes. De forma permanente aparecían defensores de cada método, argumentando todos las excelencias de la opción que, en cada caso, estaban dispuestos a seguir. La conclusión más frecuente era aquella que sugería a cada profesor que optase por el método que estimase más acomodado a las características del grupo y a las circunstancias de temporalidad y otras relativas al propio desarrollo del programa.

Como resultado de ello es que actualmente se siguen ambas tendencias, quizá con una mayor aceptación del primer método, al que usualmente se le denomina también método histórico.

Hemos podido comprobar un fuerte rechazo por parte del alumnado hacia ambos métodos, salvo en aquellos estudiantes con destacada motivación matemática. Las circunstancias académicas de los adolescentes preuniversitarios, en nuestra particular observación de los últimos quince años, evidencian un rechazo manifiesto al discurso largo y profundo, incluso siendo imprescindible en una exposición objetivamente acorde con los programas vigentes, como ocurre con la teoría de los determinantes que es un tópico obligado en el marco del Algebra Lineal. Además comprobamos, día tras día, que la mayor parte de nuestros alumnos apetecen de resultados rápidos, aspecto éste muy acorde con la edad, pero, si éstos no están fundamentados mediante el ejercicio de la razón, difícilmente podrán llevarlos con garantía de éxito a sus diferentes aplicaciones prácticas, lo cual avoca al estudiante a una muy difícil capacidad recreadora en su labor matemática próxima inmediata y a una práctica anulación de su posible labor investigadora en el futuro. La mera enumeración diaria de resultados sin argumentos razonados hace que, por la amplitud de la materia, su actitud hacia la misma sea de desafecto. A su vez, y lamentablemente, son ya abundantes los textos de la asignatura de Matemáticas I del Curso de Orientación Universitaria que propician estas circunstancias, reduciendo, pensamos en forma poco consecuente con el futuro académico del alumno, la teoría de los determinantes a reglas muy concretas que permiten al estudiante realizar, a lo sumo, cálculos con determinantes de orden dos y tres exclusivamente. De este modo se deja de lado toda generalización del concepto lo cual es contrario a la esencia misma del proceso matemático y sus aplicaciones futuras. Se observa, incluso, la circunstancia paradógica de que algunos textos que tratan el tema de una forma muy aceptable tienen escasa difusión.

Analizar las circunstancias descritas y muchas más en torno a la formación matemática integral de los adolescentes españoles en el momento actual, en la que pensamos existen muy serias lagunas, sería el punto de partida para un trabajo de alto interés socio-pedagógico del cual, como resultado más apetecible, esperaríamos el diagnóstico para remediar la manifiesta apatía que observamos en demasiados alumnos. Despachar esta preocupante situación con el permanente, inconcreto y socorrido *tópico del fracaso escolar*, nos parece muy poco operativo y sobre todo una forma excesivamente lacónica de explicar tan grave problema.

Nuestra formación matemática, por sí sola, no nos permite emprender tan ardua como necesaria tarea y de la cual, estamos seguros, no obtendríamos resultados de aceptable fiabilidad, pero debemos manifestar nuestra modesta contribución a pensar largo tiempo sobre estos problemas que, con seguridad, con nuestro quehacer diario, colaboramos a su misma permanencia.

En nuestra dedicación a la enseñanza universitaria en los últimos años hemos podido comprobar como el tema que nos ocupa, fundamental en la formación matemática superior por sus continuas aplicaciones, no ha sido asimilado en su correspondiente nivel por la gran mayoría de los alumnos en sus estudios preuniversitarios. Parece, pues, necesario pensar sobre la posibilidad de que el alumno asimile estos conocimientos con la mayor garantía, y, si es posible, evitándole esfuerzos innecesarios.

Existe un rechazo manifiesto hacia los dos métodos usuales de exponer la teoría de los determinantes en el momento actual tanto por parte del alumno como del profesor.

El profesor, en este caso, tiene que utilizar resultados desconocidos por el alumno en su formación anterior y otros que no le han sido probados. Por su parte el alumno debe aceptar como conocidos hechos que necesitarían un desarrollo con ritmo más pausado para su total asimilación y afecto hacia la materia. Concretamente, por la vía de las permutaciones, que fue el camino histórico, existe el inconveniente de utilizar resultados cuya justificación entraña mayor dificultad de asimilación para el alumno que las mismas propiedades del concepto que se pretende asimile. Por ejemplo, la alteración de la paridad en una permutación al intercambiar dos elementos cualesquiera de la misma, o el hecho de que la mitad de las permutaciones simples de n objetos sean pares y la otra mitad impares, etc.

Por otra parte, una insistencia en la prueba detallada de las propiedades previas al concepto que nos ocupa hace demasiado extensa y tediosa la exposición, llegando el alumno con mermado interés a su objetivo central, que es asimilar la idea matemática de determinante, sus propiedades, cálculo y aplicaciones de más notable interés en el marco del Algebra Lineal, que corresponde al programa de la asignatura.

El método de las formas multilineales es, en nuestra opinión, mucho menos aconsejable aún, ya que por este procedimiento necesitaríamos partir del concepto de forma bilineal, el cual, a su vez, precisaría conocer el significado matemático de la linealidad en el ámbito de los espacios vectoriales a través de las aplicaciones lineales. A continuación debería introducirse el concepto de forma multilineal y, como caso particular, el de forma multilineal alternada, a partir del cual se define la función determinante y sus propiedades de una manera bastante fluida. Nuestra experiencia nos demuestra que todos estos conceptos previos le resultan poco accesibles al alumno debido, principalmente, a su aspecto novedoso y a su propio manejo algebraico marcadamente distinto de las técnicas más puramente mecánicas que han posibilitado su formación matemática en el bachillerato. En resumen, los antecedentes exigen un mayor esfuerzo de asimilación que aquel que precisa el propio concepto que se quiere introducir.

Nosotros, por nuestra parte, proponemos un método diferente que hemos denominado *axiomático–inductivo* de más cómoda exposición, más sintético, con menor exigencia memorística y, en general, con mejor aceptación por parte de los alumnos de prueba, a quienes se les ha expuesto en contraposición con los dos procedimientos tradicionales.

Nuestra propuesta de un nuevo método y la esperanza de una más favorable acogida que los usuales se fundamenta, entre otras razones, en que el alumno está familiarizado con el manejo de los axiomas; conoce los números naturales a través de los cinco axiomas de Peano. Las estructuras básicas del álgebra, como grupos, anillos, cuerpos... le son muy familiares, y les han sido presentadas como determinados conjuntos en los que se definen una o más operaciones verificando determinadas propiedades o axiomas. Por otra parte, la mayoría de los alumnos tienen asimilado, de una forma aceptable, el concepto de probabilidad, que han estudiado en el curso primero de su bachillerato, y al cual llegaron mediante la definición axiomática de Kolmogorov. Por probabilidad, recuerdan los alumnos, se entiende la aplicación entre el espacio de sucesos asociado a un experimento aleatorio y el conjunto de los números reales no negativos, que verifica los tres axiomas siguientes:

i) La probabilidad de cada suceso es un número no negativo.

ii) La probabilidad del suceso seguro tiene valor uno.

iii) La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles coincide con la suma de las probabilidades de dichos sucesos.

Es preciso indicar, además, que el alumno conoce y usa con soltura el método de inducción matemática o de inducción completa para demostrar resultados algebraicos establecidos para los números naturales. Recuerda, con seguridad, el especial énfasis que mostró su profesor en la exposición de este método demostrativo, que posiblemente utilizase para probar la validez universal de la fórmula de la potencia n–ésima del binomio de Newton, suma de números pares, sumas de cuadrados, de cubos..., incluso toda aquella "sinfonía" de resultados con números combinatorios con los cuales, y para mejor recordarlo, diseñó Tartaglia su trián–

gulo mágico. En resumen, el estudiante está en posesión del segundo gran método de demostración matemática. El clásico método deductivo aportado por los griegos pierde vigencia en favor del método inductivo de origen anglosajón con el cual queda abierto el camino al mundo fascinante de los procesos estadísticos, de la teoría de la decisión y de la investigación operativa.

Por todo lo argumentado, consideramos más conveniente exponer a nuestros alumnos la teoría de los determinantes por el mencionado método axiomático–inductivo que a continuación presentamos.

Descripción de los contenidos y forma expositiva del nuevo método

Dada la matriz $A=(a_{ij})\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, designaremos sus columnas por $A_1,A_2,\ldots,A_n$, siendo cada una de ellas un vector del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}^n$, que estará representado por

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad j=1,2,\ldots,n$$

Utilizando las columnas se escribe la matriz en la forma $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$.

1.– Definición de determinante

Se llama determinante de orden n a la aplicación $det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ entre el conjunto de las matrices cuadradas de orden n y el conjunto $\mathbb{K}$, con su estructura de cuerpo, si verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1. (De linealidad).

En cada columna, y cualquiera que sea el vector $V\in\mathbb{K}^n$, ha de ser

$$det(\ldots,A_j+V,\ldots)=det(\ldots,A_j,\ldots)+det(\ldots,V,\ldots)$$

Axioma 2. (De linealidad).

Si se multiplican los elementos de una cualquiera de las columnas de la matriz A por un número κ, entonces su determinante queda multiplicado por κ, es decir:

$$det(\ldots,\kappa\cdot A_j,\ldots)=\kappa\cdot det(\ldots,A_j,\ldots)$$

Axioma 3. (De nulidad).

Si en la matriz existen dos columnas iguales, entonces el determinante tiene valor cero. Es decir, si $A_j=A_k$, para $j\neq k$, es $det(A_1,\ldots,A_n)=0$.

Axioma 4. (De identidad).

El determinante de la matriz identidad tiene valor uno. Es decir $det(I_1,\ldots,I_n)=1$.

Vamos a poner algún ejemplo que nos haga ver que la definición dada es consistente. Para manejarnos con mayor soltura establezcamos, previamente, algunas propiedades de la función determinante que hemos definido.

2.– *Proposición*

La aplicación determinante verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

1.– Si $A\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que una de sus columnas es el vector cero de $\mathbb{K}^n$ entonces su determinante tiene valor cero. Es decir, si $A_j=0$ entonces $det(A_1,\ldots,A_n)=0$.

2. – Al intercambiar dos columnas cualesquiera en una matriz se verifica que su determinante cambia de signo. La propiedad enunciada la escribiremos así:

$$det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots) = -det(\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots)$$

3. – El determinante de una matriz conserva su valor cuando a una de sus columnas se le suma otra multiplicada por un número. Es decir:

$$det(\ldots,A_j+\lambda\cdot A_k,\ldots,A_k,\ldots)=det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)$$

4. – Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es tal que sus columnas son vectores linealmente dependientes en $\mathbb{K}^n$, entonces es $det(A)=0$.

Demostración:

La propiedad *1* resulta ser inmediata a partir del axioma *2* con solo tomar $\kappa=0$.

Para demostrar la propiedad *2* se considera la matriz $(\ldots,A_j+A_k,\ldots,A_j+A_k,\ldots)$ que, al tener dos columnas iguales, por el axioma *3* tiene determinante nulo. De la igualdad

$$0 = det(\ldots,A_j+A_k,\ldots,A_j+A_k,\ldots)= \qquad \textbf{axioma 1}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_j+A_k,\ldots)+det(\ldots,A_k,\ldots,A_j+A_k,\ldots)= \qquad \textbf{axioma 1}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_j,\ldots)+det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)+det(\ldots,A_k,\ldots,A_j+A_k,\ldots)= \qquad \textbf{axioma 1}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_j,\ldots)+det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)+det(\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots)+det(\ldots,A_k,\ldots,A_k,\ldots)$$

Como por el axioma *3* los sumandos primero y cuarto son nulos, se tiene

$$0 = det(\ldots,A_j+A_k,\ldots,A_j+A_k,\ldots)=$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)+det(\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots)$$

de donde resulta que $det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)=-det(\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots)$.

Para demostrar la propiedad *3* se considera la matriz obtenida de A sumando a la columna j la columna k multiplicada por λ y, a continuación, calculamos el determinante de la matriz obtenida:

$$det(\ldots,A_j+\lambda A_k,\ldots,A_k,\ldots) = \qquad \textbf{axioma 1}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)+det(\ldots,\lambda\cdot A_k,\ldots,A_k,\ldots) = \qquad \textbf{axioma 2}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)+\lambda\cdot det(\ldots,A_k,\ldots,A_k,\ldots) = \qquad \textbf{axioma 3}$$

$$= det(\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots)$$

Demostración de *4*: Si las columnas de A son linealmente dependientes, una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las restantes. No perdemos generalidad si suponemos que es A_1 combinación lineal de las demás. Si esto ocurre, entonces existen $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ escalares en $\mathbb{K}$, tales que

$$A_1=\lambda_2\cdot A_2+\lambda_3\cdot A_3+\ldots+\lambda_n\cdot A_n=\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\cdot A_k$$

de este modo es

$$det(A_1,A_2,\ldots,A_n) = det(\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\cdot A_k,A_2,\ldots,A_n)= \qquad \textbf{axiomas 1 y 2 sucesivamente}$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\lambda_k\cdot det(A_k,A_2,\ldots,A_n)$$

Pero, en virtud del axioma *3*, al ser $det(A_k,A_2,\ldots,A_n)$ nulo para $k=2,3,\ldots,n$, se tiene, en definitiva, que $det(A_1,A_2,\ldots,A_n)=0$.

Establecidas, y probadas estas cuatro propiedades, pongamos ejemplos sencillos de determinantes, que nos van a garantizar la consistencia de la definición dada, y comprobemos su unicidad.

Ejemplo 1

La aplicación $det : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

es un determinante de orden dos.

La comprobación es un sencillo ejercicio que los alumnos aceptan de buen grado y ellos mismos desarrollan la tarea de comprobar la verificación de los cuatro axiomas definitorios, con la ayuda del profesor cuando ha surgido alguna pequeña dificultad. Nosotros no la expondremos aquí. Nos parece más interesante probar la unicidad de la definición. Para ello demostremos que éste es el único ejemplo de determinante de orden dos que existe.

En efecto, dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sus vectores columna $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ son expresables, como combinación lineal de los vectores integrantes de la base canónica I_1,I_2, del siguiente modo:

$$A_1 = a_{11}I_1 + a_{21}I_2 \qquad A_2 = a_{12}I_1 + a_{22}I_2$$

Sea D otra aplicación determinante de orden dos, es decir una aplicación definida en el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos con valores reales, verificando los cuatro axiomas definitorios. En estas condiciones

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = D(A_1,A_2)=$$

$$= D(a_{11}\cdot I_1+a_{21}\cdot I_2\ ,\ A_2)= \qquad \textbf{axioma 1}$$

$$= D(a_{11}\cdot I_1\ ,\ A_2)+D(a_{21}\cdot I_2\ ,\ A_2)= \qquad \textbf{axioma 2}$$

$$= a_{11}\cdot D(I_1,A_2)+a_{21}\cdot D(I_2,A_2)= \qquad \textbf{modo análogo con } \mathbf{A_2}$$

$$= a_{11}\cdot a_{12}\cdot D(I_1,I_1)+a_{11}\cdot a_{22}\cdot D(I_1,I_2)+$$

$$+a_{21}\cdot a_{12}\cdot D(I_2,I_1)+a_{21}\cdot a_{22}\cdot D(I_2,I_2)= \qquad \textbf{axioma 3 y propiadad 2}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot D(I_1,I_2)-a_{21}\cdot a_{12}\cdot D(I_1,I_2)= \qquad \textbf{axioma 4}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}=$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

con lo cual se tiene que $D=det$.

Ejemplo 2

La aplicación $det : \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

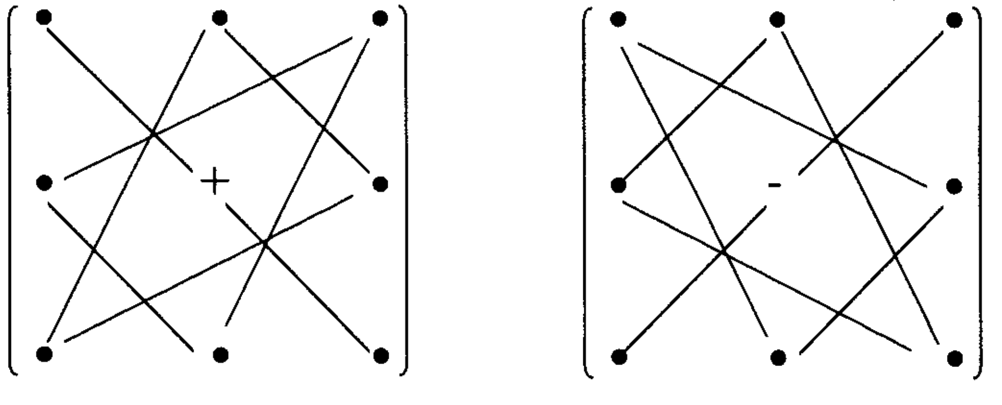
$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

es un determinante de orden tres.

La comprobación de que esta aplicación verifica los cuatro axiomas definitorios de determinante y que es la única aplicación determinante de orden tres es un ejercicio que se ha propuesto a los alumnos. Hemos podido comprobar que más de la mitad de los alumnos han desarrollado esta pequeña prueba con destreza aceptable. Para aquellos alumnos que tenían dificultades se les mostró el paralelismo con el caso de determinante de segundo orden con lo que han sido muy escasos los estudiantes que no culminaron su terea. Omitimos aquí el desarrollo de estas comprobaciones.

Con lo dicho anteriormente tenemos garantizada la existencia de la aplicación determinante para los casos de segundo y tercer orden, así como su unicidad.

El valor o desarrollo de un determinante de orden tres se recuerda con facilidad mediante una configuración conocida como regla de Sarrus. Reglas de este tipo no se conocen para determinantes de orden superior a tres.



Necesitamos definir determinante de orden n y probar su unicidad para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.– Existencia y unicidad de la aplicación determinante

En este proceso vamos a utilizar el método de inducción completa, también llamado de inducción matemática, para demostrar la existencia y unicidad de la aplicación determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ para cualquier orden n.

En los casos $n=2$ y $n=3$ está probada la existencia y unicidad de la aplicación determinante. Vamos a aceptar que para $n=1$ es $det(a_{11})=a_{11}$. De este modo tenemos ya establecida la existencia y unicidad de la aplicación determinante para los tres primeros valores de n.

Supongamos que se tiene la existencia y unicidad del determinante de orden $n-1$. Si es A una matriz de orden n vamos a poder definir su determinante por medio de matrices de orden $n-1$ obtenidas a partir de los elementos de una cualquiera de las lineas de A.

1.– Definición de menor complementario

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se llama menor complementario del elemento a_{ij} en la matriz A, y se designa por $det_{ij}(A_1,...,A_n)$, al determinante de orden $n-1$ de la matriz obtenida de A al suprimir de ella su fila i y su columna j.

Cuando es notoria la columna suprimida, designaremos el menor complementario del elemento a_{ij} por $det_i(...,A_{j-1},A_{j+1},...)$.

2.— Proposición

En el supuesto de darse la existencia y unicidad del determinante de orden $n-1$, la aplicación $det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$det(A_1,\ldots,A_n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot det_{1j}(A_1,\ldots,A_n)$$

es un determinante de orden n, y por tanto el único.

Demostración:

Verificación del axioma 1

Dada $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, se considera la matriz $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenida de A sumando a la columna k el vector $V\in\mathbb{K}^n$, es decir, $B=(A_1,\ldots,A_k+V,\ldots,A_n)$. En estas condiciones

$$det(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\cdot b_{1j}\cdot det_{1j}(B_1,\ldots,B_n)$$

en esta suma, cuando $j\neq k$, es

$$det_{1j}(B_1,\ldots,B_n)=det_{1j}(\ldots,A_k+V,\ldots)=det_{1j}(\ldots,A_k,\ldots)+det_{1j}(\ldots,V,\ldots)$$

y $b_{1j}=a_{1j}$. Cuando $j=k$, es

$$det_{1j}(B_1,\ldots,B_n)=det_{1j}(\ldots,A_k+V,\ldots)=det_{1j}(\ldots,A_k,\ldots)+det_{1j}(\ldots,V,\ldots)$$

y $b_{ij}=a_{1j}+v_{1j}$. En consecuencia, todos los sumandos con $j\neq k$ se descomponen en dos

$$a_{1j}\cdot det_{1j}(\ldots,A_k,\ldots)+a_{1j}\cdot det_{1j}(\ldots,V,\ldots)$$

y el sumando $j=k$ en otros dos

$$a_{1j}\cdot det_{1j}(\ldots,\mathrm{A_k},\ldots)+v_{1j}\cdot det_{1j}(\ldots,\mathrm{V},\ldots)$$

Los primeros sumandos forman $det(\mathrm{A_1},\ldots,\mathrm{A_k},\ldots,\mathrm{A_n})$, en tanto que los segundos forman $det(\mathrm{A_1},\ldots,\mathrm{V},\ldots,\mathrm{A_n})$; en definitiva se tiene que

$$det(\mathrm{B})=det(\mathrm{A_1},\ldots,\mathrm{A_k},\ldots,\mathrm{A_n})+det(\mathrm{A_1},\ldots,\mathrm{V},\ldots,\mathrm{A_n})$$

Se tiene, por tanto, la verificación del axioma *1*.

Verificación del axioma 2

Dada $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, multipliquemos su columna de lugar k por el escalar $\lambda\in\mathbb{K}$ y llamemos B a la matriz resultante, es decir $\mathrm{B}=(\mathrm{A_1},\ldots,\lambda\cdot\mathrm{A_k},\ldots,\mathrm{A_n})$.

$$det(\mathrm{B})=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}(-1)^{1+\mathrm{j}}\cdot b_{1j}\cdot det_{1j}(\mathrm{B_1},\ldots,\mathrm{B_n})$$

en esta suma, si $j\neq k$,

$$det_{1j}(\mathrm{B_1},\ldots,\mathrm{B_n})=det_{1j}(\ldots,\lambda\cdot\mathrm{A_k},\ldots)=\lambda\cdot det_{1j}(\ldots,\mathrm{A_k},\ldots)$$

y $b_{1j}=a_{1j}$; en la misma suma, si $j=k$,

$$det_{1j}(\mathrm{B_1},\ldots,\mathrm{B_n})=det_{1j}(\ldots,\lambda\cdot\mathrm{A_k},\ldots)=det_{1j}(\ldots,\mathrm{A_k},\ldots)$$

y $b_{1j}=\lambda\cdot a_{1j}$. Por tanto, en todo caso es

$$det(\mathrm{B})=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}(-1)^{1+\mathrm{j}}\cdot\lambda\cdot a_{1j}\cdot det_{1j}(\mathrm{A_1},\ldots,\mathrm{A_n})=\lambda\cdot det(\mathrm{A})$$

Verificación del axioma 3

Sea dada la matriz $A=(\ldots,A_{p-1},A_p,A_{p+1},\ldots,A_{q-1},A_q,A_{q+1},\ldots)$ en la cual las columnas A_p y A_q son iguales, es decir $a_{ip}=a_{iq}$ para cada $i=1,2,\ldots,n$. De acuerdo con la definición, es

$$det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot det_{1j}(A_1,\ldots,A_p,\ldots,A_q,\ldots,A_n)$$

y, en esta suma, si $j\neq p$ y $j\neq q$, el sumando correspondiente es

$$det_{1j}(A_1,\ldots,A_p,\ldots,A_q,\ldots,A_n)=0$$

por tener dos columnas iguales y, de este modo, la suma anterior se reduce a la suma cuando $j=p$ y $j=q$, con lo cual es

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+p}\cdot a_{1p}\cdot det_1(\ldots,A_{p-1},A_{p+1},\ldots,A_{q-1},A_p,A_{q+1},\ldots)+ \\ &\quad +(-1)^{1+q}\cdot a_{1p}\cdot det_1(\ldots,A_{p-1},A_p,A_{p+1},\ldots,A_{q-1},A_{q+1},\ldots) \end{aligned}$$

e, intercambiando $q-1-p$ veces sucesivas la columna A_p con las siguientes, resulta

$$\begin{aligned} & det_1(\ldots,A_{p-1},A_p,A_{p+1},\ldots,A_{q-1},A_{q+1},\ldots)= \\ &\qquad =(-1)^{q-1-p}\cdot det_1(\ldots,A_{p-1},A_{p+1},\ldots,A_{q-1},A_p,A_{q+1},\ldots) \end{aligned}$$

por tanto

$$det(A) =$$

$$= (-1)^{1+p}\cdot a_{1p}\cdot det_{1p}(A_1,\ldots,A_n)+(-1)^{1+q}\cdot(-1)^{q-p-1}\cdot a_{1p}\cdot det_{1p}(A_1,\ldots,A_n) =$$

$$= \left[(-1)^{1+p}+(-1)^{1+2q-p-1}\right]\cdot a_{1p}\cdot det_{1p}(A_1,\ldots,A_n) =$$

$$= 0\cdot a_{1p}\cdot det_{1p}(A_1,\ldots A_n) = 0$$

Verificación del axioma 4

Sea $I=(e_{ij})\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz identidad. Como es $e_{ij}=0$ si $i\neq j$ y $e_{ii}=1$, se tiene

$$det(I)= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\cdot e_{1j}\cdot det_{1j}(I_1,\ldots,I_n)= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\cdot e_{1j}=(-1)^{1+1}\cdot e_{11}=1$$

La proposición *3.2* confirma la existencia y unicidad del determinante de orden n. Incluso nos aporta un método importante para el cáculo de dicho determinante consistente en el desarrollo del mismo por los menores complementarios de los elementos de la primera fila. A continuación estableceremos una proposición que generaliza el resultado anterior al obtener el desarrollo del determinante por los elementos de una fila cualquiera.

4.– Proposición

La aplicación $det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$det(A_1,\ldots,A_n)= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot det_{ij}(A_1,\ldots,A_n)$$

para cada $i=2,3,\ldots,n$ es un determinante de orden n.

La demostración de esta proposición es la misma que la de la proposición *3.2* y se obtiene de ella con solo cambiar el subíndice 1 por el i, sin pérdida de generalidad. Por su inmediated no escribimos la demostración.

5. — Proposición

Dada $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, todos los desarrollos por fila de su determinante coinciden.

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la unicidad del determinante probada en las proposiciónes *3.2* y *4*.

Expuesto lo que antecede, hemos propuesto a nuestros alumnos varios ejercicios de los dos tipos siguientes.

a) Calcular varios determinantes de orden superior a tres. Hemos preferido, para evitar cálculos demasiado laboriosos, que sean de orden cuatro, desarrollándolos en cada caso por dos filas distintas.

b) Obtener el valor de varios determinantes de orden cuatro reduciéndolos, sucesivamente, al cálculo de determinantes de orden inferior.

6. — Proposición

Siendo $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, se tiene que

$$det(A_1,\ldots,A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det_{ij}(A_1,\ldots,A_n)$$

para cada $j=1,2,\ldots,n$.

En efecto

Cada columna A_j de la matriz A puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base canónica en la forma

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot I_i$$

De este modo podemos escribir el determinante de A como

$$\begin{aligned}
det(A_1,\ldots,A_n) &= det(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_n) = \\
&= det(A_1,\ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot I_i ,\ldots,A_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot det(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n)
\end{aligned}$$

por la proposición **4**, aplicada a la fila i, se tiene

$$det(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot det_{ik}(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n)$$

que, en esta suma, si $k=j$ es $a_{ik}=a_{ij}=1$ y, por tanto,

$$(-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot det_{ik}(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n) = (-1)^{i+j} \cdot det_{ij}(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n)$$

y si $k \neq j$

$$det_{ik}(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n) = 0$$

ya que en la matriz existe una columna de ceros. Entonces resulta que

$$\begin{aligned}
det(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n) &= (-1)^{i+j} \cdot det_{ij}(A_1,\ldots,I_i,\ldots,A_n) = \\
&= (-1)^{i+j} \cdot det_{ij}(A_1,\ldots\ldots,A_n)
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$det(A_1,\ldots,A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det_{ij}(A_1,\ldots,A_n)$$

La proposición demostrada nos proporciona otro método para calcular los determinantes de orden n, que consiste en obtener el desarrollo del determinante por los menores complementarios de los elementos de la columna j, $j=1,2,\ldots,n$.

Hemos considerado muy conveniente proponer, en este momento, ejercicios de cálculo de determinantes, desarrollándolos por una cualquiera de sus columnas y comprobar los resultados, desarrollándolos por filas.

7.– Proposición

Toda matriz cuadrada A, de orden n, verifica que $det(A^t)=det(A)$.

En efecto:

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})=A^t$ y, por tanto, $b_{ij}=a_{ji}$. Vamos a realizar la demostración por inducción sobre n.

Para $n=1$ y $n=2$ la proposición se verifica, siendo inmediata su comprobación Supongamos la proposición válida para $n-1$. En estas condiciones por la proposición ***4***, se tiene

$$det(A^t)=det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot det_{ij}(B_1,\ldots,B_n) = \qquad \textbf{hipótesis de inducción}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot det_{ji}(A_1,\ldots,A_n) = \qquad \textbf{definición de } b_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ji} \cdot det_{ji}(A_1,\dots,A_n) = \qquad \textbf{proposición } 4$$

$$= det(A)$$

La proposición demostrada pone de manifiesto que toda propiedad de los determinantes, relativa a las columnas, tiene otra con idéntico enunciado para filas.

8. – Proposición

Si es A una matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en la que $A^1, A^2, \dots, A^n$ designan sus filas, entonces:

1. Al multiplicar una sola, y cualquiera, de sus filas por un escalar arbitrario κ el determinante de la matriz queda multiplicado por κ.

2. Cualquiera que sea el lugar i de fila y para cada vector $\overline{v}$ de $\mathbb{K}^n$, se verifica que

$$det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^h + \overline{v} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^h \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ \overline{v} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

3. El determinante de la matriz se anula cuando existen dos filas iguales.

4. La matriz identidad tiene determinante de valor uno.

Esta proposición es consecuencia inmediata de la proposición *7* y de los axiomas definitorios de columna.

La proposición *7* nos permite afirmar que todo determinante de orden n verifica para filas los cuatro axiomas definitorios de columna. Como consecuencia de ello resulta inmediata la verificación de la siguiente proposición.

9.– Proposición

1. Si alguna fila de la matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es el vector cero de $\mathbb{K}^n$ entonces es $det(A)=0$.

2. El intercambio de dos filas cualesquiera en la matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ origina un cambio de signo en su determinante.

3. Si en la matriz $A \in \mathscr{M}_n$ existen dos filas iguales entonces $det(A)=0$.

4. Si en la matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ existen dos filas proporcionales entonces $det(A)=0$.

5. El determinante de la matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ permanece inalterado cuando a una de sus filas se le suma cualquier combinación lineal de otras.

10.– Determinante del producto de dos matrices

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n y sea $A \cdot B$ su matriz producto. Designando con $(A \cdot B)_j$ la columna j de la matriz producto $A \cdot B$, se observa que $(A\cdot B)_j = A\cdot B_j$. Es decir, que la columna j de la matriz producto $A\cdot B$ es igual al producto de la matriz A por la columna j de la matriz B.

1.– Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se verifica que $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$.

Demostración:

Sea la aplicación $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\phi(X) = \phi(X_1,\dots,X_n) = det(X\cdot B_1,\dots,X\cdot B_n) \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Como es $X\cdot B_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\cdot X_i$, para cada $j=1,2,\dots,n$, se tiene que

$$\phi(X_1,\dots,X_n) = det\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}\cdot X_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} b_{i2}\cdot X_i\ ,\dots,\ \sum_{i=1}^{n} b_{in}\cdot X_i\right) \overset{\substack{\textbf{axiomas}\\ \textit{1, 2, 3}\text{ y }\textit{4}}}{=}$$

$$= k\cdot det(X_1,\dots,X_n)$$

siendo k una constante que depende, exclusivamente, de los elementos b_{ij} de la matriz B. Si ahora consideramos que es $X=I$, se tiene

$$\phi(I_1,\dots,I_n) = det(I\cdot B_1,\dots,I\cdot B_n) = k\cdot det(I_1,\dots,I_n) = k$$

y al ser

$$(I\cdot B_1,\dots,I\cdot B_n) = (B_1,\dots,B_n)$$

se tiene que es $k = det(B_1,\dots,B_n)$. De este modo para $X=A$ se tiene que

$$\phi(A_1,\dots,A_n) = det(A\cdot B_1,\dots,A\cdot B_n) = det(B_1,\dots,B_n)\cdot det(A_1,\dots,A_n)$$

con lo cual es

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

La comodidad de la demostración dada sería motivo suficiente para seguir el método axiomático inductivo y no los métodos tradicionales en los que resulta muy complicada y, en todo caso, no acorde con el nivel de los alumnos.

11. – Adjuntos

1. – Definición

Siendo A una matriz cuadrada de orden n y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos, se define *adjunto* del elemento a_{ij}, que se designará por A_{ij}, al número dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det_{ij}(A_1, \ldots, A_n)$$

Teniendo en cuenta esta definición, los desarrollos respectivos, por columnas y filas, de $det(A)$ están dados por

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

j índice fijo mientras i varía, $j = 1, 2, \ldots, n$, y

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

i índice fijo mientras j varía, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. – Proposición

Siendo A una matriz cuadrada de orden n, se verifica que la suma de los productos de los elementos de una de sus filas por los adjuntos de lo elementos de otra fila cualquiera vale cero. Es decir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{kj}=0$$

En efecto:

Consideremos la matriz B obtenida de A al sustituir los elementos de la fila k por los correspondientes de la fila i. De este modo la matriz B tiene dos filas iguales con lo que es $det(B)=0$.

Si ahora desarrollamos el determinante de B por los elementos de la fila k se tiene

$$det(B)=0=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{kj}$$

Consecuencia inmediata de esta proposición es la siguiente:

3. – Proposición

En toda matriz $A\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se verifica que la suma de los productos de los elementos de una de sus columnas por los adjuntos de otra columna cualquiera vale cero.

12. – Matriz adjunta

1. – Definición

Siendo $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama matriz adjunta de A a la matriz que se obtiene de A al sustituir cada elemento por su adjunto. La simbolizaremos por $A^{adj}=(A_{ij})$.

2. – Proposición

Si es $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se verifica $A\cdot(A_{ij})^t=(det A)\cdot I$.

Demostración:

Representemos la matriz producto $A\cdot(A_{ij})$ mediante (c_{kr}). Por la definición del producto de matrices es

$$c_{kr}=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{rj}$$

y, teniendo en cuenta la definición ***11.1***, relativa al desarrollo de un determinante por los elementos de una fila, y la proposición ***11.2***, es

$$c_{kr}=\begin{cases} det(A) & \text{si } r=k \\ 0 & \text{si } r\neq k \end{cases}$$

con lo cual resulta que (c_{ks}) es la matriz diagonal $det(A)\cdot I$.

13. – Matriz inversa

1. – Definición

Dada $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es la inversa de A si se verifica que $A \cdot B = B \cdot A = I$ siendo I la matriz unidad en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Cuando esta matriz B existe se representa con A^{-1}.

2. – Propiedades de la matriz inversa de una dada

1. – Si la matriz A tiene inversa ésta es única.

2. – Si la matriz A tiene inversa también la tiene su traspuesta A^t siendo $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

3. – Si la matriz A tiene inversa A^{-1} ésta también la tiene siendo $(A^{-1})^{-1} = A$.

4. – Si la matriz A tiene inversa también la tiene su potencia n–ésima A^n, con $n \in \mathbb{N}$, siendo $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

5. – Si las matrices A y B tienen inversa también la tiene la matriz $A \cdot B$, siendo $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3. – Definición

Una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es *regular* si $det(A) \neq 0$. Si es $det(A) = 0$ entonces la matriz se dice que es *singular*.

4. – ***Observación***

En $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices regulares constituye un grupo multiplicativo (no conmutativo). Cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$, y es $n=3$, este grupo es el llamado *Grupo Lineal*, de gran importancia en las transformaciones del espacio afín tridimensional.

5. – ***Proposición***

Es condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tenga inversa que A sea regular.

Demostración:

***a)* La condición es necesaria.**

Si existe la matriz inversa A^{-1} es $A \cdot A^{-1} = I$, y teniendo en cuenta la proposicion ***10.1***, es $det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$, con lo cual es $det(A) \neq 0$ y A es regular. Además, de la igualdad anterior se deduce que

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

***b)* La condición es suficiente.**

Si la matriz A es regular se tiene que $det(A) \neq 0$ y, de la proposición ***12.2***, se tiene que

$$A \cdot \frac{1}{det(A)} \cdot (A_{ij})^t = I$$

Aplicando trasposición de matrices en la igualdad anterior se tiene

$$\frac{1}{det(A)} \cdot (A_{ij}) \cdot A^t = I$$

Por otra parte, es de comprobación inmediata la igualdad

$$(A_{ij})\cdot A^t=(A_{ij})^t\cdot A=I$$

con lo cual también se da la igualdad

$$\frac{1}{det(A)}\cdot(A_{ij})^t\cdot A=I$$

En consecuencia se tiene que $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot(A_{ij})$.

La expresión anterior es una fórmula cuyo seguimiento nos permite calcular la matriz inversa de una matriz regular.

14. – Determinantes y rango de una matriz

1. – Definición

Dada la matriz $A\in\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se llama *submatriz* de A a toda matriz B resultante de A al suprimir en ella cierto número de filas y un determinado número de columnas.

2. – Definición

Dada la matriz $A\in\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y siendo B una submatriz cuadrada de orden h en A, al determinante de B se le llama *menor de orden* h *en* A.

3. – ***Definición***

Dada la matriz $A\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y siendo $h\in\mathbb{N}$, con $h\leq \min\{m,n\}$, el menor M de orden h en A, formado por las h primeras filas y las h primeras columnas de A, se llama *menor principal de orden* h *en* A.

4. – ***Definición***

Se llama *rango o característica* de una matriz $A\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al orden máximo de los menores no nulos existentes en A.

Así, por ejemplo, si una matriz tiene rango igual a cuatro significa que en ella existe al menos un menor de orden cuatro distinto de cero, y que los menores de orden superior a cuatro en A son inexistentes o bien son nulos.

5. – ***Proposición***

Sea la matriz $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El número de vectores, entre las columnas $A_1,A_2,\ldots,A_n$ de A, que son linealmente independientes coincide con el rango de A.

En efecto:

Sea r el número de vectores linealmente independientes que existen entre las columnas de la matriz A. No resta generalidad el suponer que las columnas linealmente independientes son $A_1,A_2,\ldots,A_r$. (Si fuesen otras r distintas razonaríamos en forma análoga). En estas condiciones, el subespacio vectorial engendrado por los n vectores columna $A_1,A_2,\ldots,A_n$ es de dimensión r siendo $\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$ una de sus bases.

Probemos, ahora, dos cosas.

a) El rango de A *es menor o igual que* r.

Sea M un menor de orden s en A, con $s>r$. Las s columnas del menor M son linealmente dependientes, pues son más vectores que la dimensión del subespacio que los contiene, por tanto una de las columnas de M, al menos, es combinación lineal de las restantes y, por tanto, el menor M es nulo.

b) El rango de A *es mayor o igual que* r.

Sea $s<r$. Entre los menores de orden s que en la matriz A pueden obtenerse a partir de los r vectores $A_1,A_2,\ldots,A_r$ debe existir al menos uno distinto de cero (obviamente algún menor de orden uno) ya que los vectores $A_1,A_2,\ldots,A_r$ son un sistema libre. Consideremos, pues, que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

Suponiendo que es nulo todo menor de orden superior a s se tendría que para cada $t=s+1,s+2,\ldots,n$ el menor de orden $s+1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} & a_{sr} \\ a_{t1} & \ldots & a_{ts} & a_{tr} \end{vmatrix} = 0$$

De ser nulo el menor anterior, y en virtud de la proposición ***11.2***, podemos escribir:

$$a_{11}\cdot \mathrm{A_{t1}}+\ldots+a_{1s}\cdot \mathrm{A_{ts}}+a_{1r}\cdot \mathrm{A_{tr}}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{s1}\cdot \mathrm{A_{t1}}+\ldots+a_{ss}\cdot \mathrm{A_{ts}}+a_{s}\cdot{}_{r}\mathrm{A_{tr}}=0$$

Desarrollando el menor, nulo, anterior por los elementos de la útima fila, se tiene:

$$a_{t1}\cdot \mathrm{A_{t1}}+\ldots+a_{ts}\cdot \mathrm{A_{ts}}+a_{tr}\cdot \mathrm{A_{tr}}=0 \qquad (t=s+1,s+2,\ldots,n)$$

Las igualdades anteriores, se pueden escribir en la forma

$$\mathrm{A_{t1}}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{n1} \end{pmatrix}+\ldots+\mathrm{A_{ts}}\begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}+\mathrm{A_{tr}}\begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}=\overline{\mathbf{0}} \qquad \text{(I)}$$

y, al ser $\mathrm{A_{tr}}=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix}\neq 0$, la igualdad (I) nos dice que los vectores $\mathrm{A_1,A_2,\ldots,A_r}$ son linealmente dependientes, lo cual es contradictorio con la hipótesis. Hemos de admitir, por tanto, que existe, al menos, un menor no nulo de orden igual o mayor que r.

Por los apartados ***a)*** y ***b)*** queda demostrado que el rango de la matriz A coincide con el número de vectores columna linealmente independientes que tiene la propia matriz A.

6.– Proposición

En toda matriz $\mathrm{A}\in \mathscr{M}_{\mathrm{m\times n}}(\mathbb{K})$ se verifica que el número de vectores linealmente independientes que hay entre sus filas coincide con el rango de A.

Esta proposiciór resulta inmediata siguiedo el mismo proceso que en la anterior, teniendo en cuenta la proposición ***6***.

Como consecuencia de las proposiciones ***14.5*** y ***14.6***, resultan las siguientes:

7.— Proposición

En una matriz $A \in \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ un vector columna es linealmente dependiente de los restantes si, y solamente si, el rango de A coincide con el de la submatriz resultante de A al suprimir dicha columna.

8.— Proposición

En una matriz $A \in \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ un vector fila es linealmente dependiente de los restantes si, y solamente si, el rango de A coincide con el de la submatriz resultante de A al suprimir dicha fila.

9.— Proposición

La matriz $A \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$ es regular si, y solo si, todos sus vectores columna son linealmente independientes.

10.— Proposición

La matriz $A \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$ es regular si, y solo si, todos sus vectores fila son linealmente independientes.

11.— Proposición

Toda familia con n vectores de un $\mathbb{K}$−espacio vectorial de dimensión n forman una base del mismo si, y solamente si, considerados como vectores columna de una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ésta es regular.

12.— Proposición

Toda familia con n vectores de un $\mathbb{K}$−espacio vectorial de dimensión n forman una base del mismo si, y solamente si, considerados como vectores fila de una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ésta es regular.

15.— Orlados

1.— Definición

Dado un menor de orden h en una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entenderemos por *orlar* este menor el formar otro menor, de orden $h+1$, en la matriz A añadiendo a la submatriz que lo define los elementos de una fila y una columna que no formen parte del menor inicial.

2.— Proposición

Si en una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe un menor de orden h no nulo y todo orlado con los elementos de una columna fija y las restantes $m-h$ filas , es nulo, entonces esta columna es linealmente dependiente de las h que forman parte del menor no nulo.

3.— Proposición

Si en una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe un menor de orden h no nulo y todo orlado con los elementos de una fila fija y las restantes $n-h$ columnas es nulo, entonces esta fila es linealmente dependiente de las h que forman parte del menor no nulo.

Omitimos incluir aquí la demostración de cada una de estas propiedades pues es la misma que la dada dentro de la teoría de los determinantes mediante el método de las permutaciones y de este modo se han desarrollado para los alumnos que han seguido el método axiomático inductivo.

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El desarrollo de los distintos métodos, en cuanto a tiempo de exposición, satisfacción del profesor y apreciación directa de la aceptación por parte del del alumnado, nos predispone a esperar unos mejores resultados en su calificación media, de la correspondiente prueba sobre los determinantes para aquellos grupos de alumnos que han seguido la exposición de la teoría de los determinantes según el método axiomático inductivo. Es por ello por lo que con esta parte del trabajo nos proponemos lograr los siguientes objetivos.

1.– Objetivo fundamental

Verificar que el método axiomático inductivo es más eficiente que el método histórico y que el método multilineal.

2.– Otros objetivos

1.– Detectar la existencia de interdependencia entre los factores procedencia del alumno (de centro público o privado), carácter de la asignatura (obligatoria u optativa), tipificación académica del alumno (novel o repetidor) y sexo, con el método seguido en la exposición de la teoría de los determinantes.

Dicho más técnicamente, detectar la existencia de interacciones de segundo orden.

2. – Determinar la existencia de otro tipo de interaciones para las distintas combinaciones de los factores como las siguientes.

- Procedencia – Optativa (interacción de segundo orden)
- Método – Repetidor – Optativa (interacción de tercer orden), o bien la única posible de cuarto orden en nuestro diseño:
- Método – Procedencia – Optativa – Repetidor.

3. – Supuesto logrado el objetivo básico de confirmar que los alumnos que han seguido el método axiomático inductivo han obtenido calificación media superior a la de los grupos que siguieron los otros dos métodos, se trata de determinar en qué estrato de alumnos –en los de calificaciones más bajas, en los de supenso alto o es en los alumnos aprobados, o en los más brillantes– en los que más ha repercutido este método en la mejoría de sus calificaciones.

Establecidos los objetivos hemos de definir las hipótesis de trabajo.

3. – ***Hipótesis de trabajo de las cuales hemos partido al realizar este estudio:***

1. – No existe diferencia entre las medias de las calificaciones para los distintos niveles de cada factor.

Ejemplos:

1. – No existe diferencia entre la media de las calificaciones de los alumnos que proceden de un centro público y la de los que provienen de un centro privado.

2. – No existe diferencia entre la media de las calificaciones de los alumnos que han seguido el metodo histórico y la de los alumnos que lo han hecho con el método multilineal o con los que lo hicieron siguiendo el método axiomático inductivo.

2. – No existe diferencia entre las medias de las calificaciones para las posibles combinaciones de los factores.

Ejemplos:

1. – No existe diferencia entre las medias de las calificaciones del conjunto de los alumnos noveles que proceden de centro privado y del conjunto de alumnos noveles provenientes de centro público.

2. – No existe diferencia entre las medias de las calificaciones del conjunto de alumnos repetidores que proceden de centro privado y del conjunto de alumnos repetidores que provienen de centro público.

Diseño y metodología de la investigación

INTRODUCCIÓN

Siguiendo las consideraciones, ya argumentadas, respecto de nuestra posición crítica en cuanto al seguimiento de los métodos tradicionales para impartir la docencia correspondiente a la materia de los determinantes en la asignatura de Matemáticas I del Curso de Orientación Universitaria, habida cuenta de cual es situación en cuanto a la media de rendimientos en matemáticas en el momento actual, solamente cabrían dos líneas metodológicas.

Una consistente en tratar los determinantes desde una consideración meramente calculista enumerando el mínimo de reglas o guías de cálculo sin fundamento demostrativo y en consecuencia ajenas a un mínimo rigor. Un tratamiento de este estilo priva al discente de la posibilidad de detectar las relaciones para un conocimiento de este tema desde la parte mas amplia del álgebra y de sus relaciones con la geometría en que se encuentra dentro de la globalidad de la asignatura.

Esta es la forma de tratar el tema en una parte importante de los textos de Matemáticas I en los que el tratamiento de los determinantes prácticamente se reduce a los casos bi y tridimensional. El cálculo de los determinantes se hace siguiendo la nemotécnica regla de Sarrus y las propiedades de los mismos son meras comprobaciones en determinantes de tercer orden.

Otra alternativa, aceptando el hecho de que los tiempos del rigor y la fundamentación formal no son, precisamente, los actuales, se nos presenta como aquella que, sin abandonar la argumentación razonada nos permitiese llevar a nuestros alumnos, de una forma mas fluida, al concepto de determinante y sus propiedades. todo ello, claro está, desde la mayor generalidad posible para que su conocimiento del tema, una vez asimilado, sea de visión global y conociendo su utilidad tanto particular como en relación con los temas afines.

Esta segunda vía, que a nosotros nos parece la adecuada, pensamos es imposible de adoptar, en este nivel de enseñanza intermedia, utilizando los dos métodos tradicionales. Por ello hemos dedicado algún tiempo a pensar en la posibilidad de diseñar esta forma deseable de enseñar el tema.

El atrayente libro de Serge Lang, Algebra Lineal, publicado por la editorial Fondo Educativo Interamericano en 1974, nos dió la clave. En su capítulo VII apunta una definición axiomática si bien no desarrolla toda la teoría desde la definición dada. Nosotros partimos de una axiomática distinta y todas las propiedades son demostradas utilizando los axiomas y el método de inducción matemática. Por ello le denominamos axiomático inductivo. Matemáticamente se nos presentaba coherente y su ligera carga algebraica nos hizo pensar en él como muy adecuado para enseñar los determinantes a nuestros alumnos de COU. Este método es mas directo que los dos tradicionales y las propiedades se comprueban con mayor comodidad. La propiedad relativa al determinante del producto de dos matrices tiene una demostración, prácticamente inabordable para la mayor parte de los alumnos de COU según nuestra experiencia particular. La demostración de esta misma propiedad es un sencillo ejercicio en el nuevo método, que la mayoría de los alumnos observamos asimilan y reproducen con facilidad.

A la validez matemática y satisfacción personal por el método como alternativa frente a los dos tradicionales deberá seguirse su mayor eficiencia con relación a ellos.

Esta mayor eficiencia quedará contrastada cuando sea utilizado experimentalmente en el aula en forma y condiciones aleatoriamente idénticas y simultánea a los otros dos y, posteriormente, los resultados de su aplicación sometidos a un estudio estadístico científicamente correcto. Si nuestras *favorables* sospechas se confirman por medio del estudio estadístico, podremos asegurar que, en verdad, en la experimentación realizada nuestro método es, en efecto, mas eficiente que los métodos histórico y multilineal.

TIPO DE DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En nuestro estudio se va a seguir un diseño factorial de cuatro factores.

Uno de los factores se denomina *Método de enseñanza* y tiene tres niveles. Los tres restantes, que designaremos como *Procedencia*, *Optativa*, y *Repetidor* son cada uno de ellos con dos niveles.

Este diseño se establece sobre una variable respuesta: *Calificación numérica obtenida por el alumno en la prueba realizada sobre la teoría de los determinantes.*

DESCRIPCIÓN Y SELECCIÓN DE LA MUESTRA

1. – La muestra está constituida por 408 alumnos del Curso de Orientación Universitaria del centro Instituto Vox de Madrid.

2. – Estos alumnos han estado escolarizados en dicho centro a lo largo de seis cursos académicos, de 1985/86 a 1990/91.

3. – Provienen de doce grupos, a razón de dos por curso escolar.

4. – Todos ellos han cursado la asignatura de Matemáticas I.

5. – Seis del total de los doce grupos han cursado esta asignatura bajo la cualificación de *materia obligatoria*, en su rama, y los otro seis como *materia optativa.*

6. – Las edades de los alumnos integrantes de la muestra se concentran en el itervalo 17, 18 años con alguna excepción poco numerosa que sobrepasa los 20 años.

7. – El número de mujeres con relación a los hombres se sitúa en torno a la proporción 2/1.

8. – El número 408 resulta de la clasificación de la totalidad de alumnos que han cursado la asignatura de Matemáticas I, a partir de la cualificación académica individual, de acuerdo con los cuatro factores del diseño, lo que origina 24 grupos homogéneos de entre 18 y 25 alumnos. Para realizar un diseño equilibrado por muestreo aleatorio simple se han obtenido 17 alumnos en cada grupo.

9.– Uno de estos grupos, por ejemplo, sería el de aquellos alumnos que en la explicación de los determinantes siguieron el método multilineal, proceden de centro público, tienen la asignatura de Matemáticas I como obligatoria y son estudiantes de COU por primera vez.

10.–El producto de los 24 grupos por el número de alumnos de cada grupo, 17 es el número 408 de individuos de la muestra.

PROCEDIMIENTO MATERIAL E INSTRUMENTACIÓN

El desarrollo de la realización física de la experimentación hasta el momento de disponer de datos, en nuestro caso la tabla de análisis de la varianza, a partir de la cual el análisis estadístico de estos datos nos va a permitir establecer conclusiones con soporte de fiabilidad medida en términos de probabilidad, ha seguido los siguientes pasos.

1. – La experimentación de nuestro método se ha llevado a cabo en el centro Instituto Vox de Madrid, y en su sección de COU, a lo largo de los seis cursos escolares que comprende el periodo 1985/86 a 1990/91.

2. – En el proceso experimental han participado doce grupos, a razón de dos por curso escolar. Uno de estos dos grupos, de cada año, lo integran siempre alumnos de la denominada opción A o Científico–Técnica, y el otro es siempre de alumnos de la opción B o Bio–Sanitaria. Cada curso escolar de los seis que dura la experiencia se explican los determinantes por dos métodos diferentes, uno en cada grupo. Para que el proceso fuese totalmente aleatorio, en cuanto a la asignación de método a grupo se ordenaron los doce previsibles grupos en la forma ABABABABABAB. Al mismo tiempo se introdujeron tres bolas en una urna teniendo cada una el nombre de uno de los tres métodos. Seguidamente se extrajeron en forma sucesiva las bolas de una en una. En la extracción resultó que la primera bola extraida fue la del método multilineal; la segunda extraida fue la del método histórico, siendo la tercera la del método axiomático inductivo. El orden de extracción es el de explica–

ción de cada uno de los métodos. El primer año de la experiencia, curso 1985/86 se explicaron los determinantes por el método multilineal a los alumnos del grupo A y por el método histórico o de las permutaciones al grupo B. En el curso siguiente 1986/87 se utilizó el método axiomático inductivo para explicar los determinantes a los alumnos del grupo A y el multilineal para la explicación en el grupo B, continuando el proceso con el mismo ciclo hasta el curso 1990/91.

Con el proceso descrito, al final de los seis años se tiene que de los doce grupos cuatro han seguido el método multilineal, cuatro el método histórico y otros cuatro el axiomático inductivo.

3.– La explicación de la teoría de los determinantes, aparte de los ejercicios ordinarios que la exposición aconseja en cada momento, y en cada uno de los métodos, se complementa con una colección de ejercicios de ayuda, que el alumno debe intentar resolver por su cuenta. Posteriormente serán resueltos en clase por el profesor en forma detallada. Un modelo de esta colección se incluye como Anexo I. Una condición imprescindible es que estas colecciones sean de idéntico formato y dificultad.

4.– Siguiendo el curso su desarrollo normal, y transcurridos ocho días desde la finalización del tema de los determinantes, los alumnos de ambos grupos de cada curso escolar realizarán en forma conjunta y simultánea una prueba escrita de examen sobre determinantes. La prueba consistirá en resolver durante un tiempo máximo de dos horas cinco cuestiones, cada una de ellas con dos apartados. La calificación de cada cuestión será de un máximo de dos puntos. No se tendrán en cuenta apreciaciones de calificación en cada cues–

ción inferiores a un cuarto de punto. Las calificaciones globales de la prueba se redondean por exceso en un cuarto de punto.

5.– Las calificaciones de la prueba sobre los determinantes, realizada cada uno de los seis años, se anota en la ficha académica personal del alumno.

Al finalizar los seis cursos académicos de la experimentación, y con las calificaciones de los doce grupos en la prueba sobre los determinantes, disponemos de un banco de datos a partir de los cuales se inicia el tratamiento estadístico en la forma que se expone en el capítulo siguiente. (Véase obtención de datos).

6.– Sobre la totalidad de los alumnos de los doce grupos de la experimentación, y considerando su situación concreta de acuerdo con los cuatro factores del diseño: método seguido en el aprendizaje de los determinantes, procedencia, optativa y repetidor, a partir de su ficha personal, se ha obtenido una clasificación de la totalidad de los alumnos en 24 grupos. En cada uno de los grupos están aquellos alumnos que han seguido el mismo método, tienen igual procedencia, el mismo factor obligatoria u optativa para la asignatura y el mismo factor repetidor o novel.

El número 24 de los grupos resulta de la totalidad de elecciones posibles de cuatro niveles uno de cada factor, resultando $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

7.– A partir de las fichas personales de los alumnos se establece otra clasificación de la totalidad de los alumnos participantes en la experimentación según los factores método de enseñanza y sexo.

El factor sexo no se ha incluido en el diseño principal pues entonces se tendrían 48 grupos de la totalidad. El diseño podría resultar desbalanceado por la escasa representatividad de algunos grupos originando resultados de menor fiabilidad.

8.– De los 408 alumnos distribuidos en 24 grupos de 17 alumnos cada uno se ha considerado la correspondiente calificación en la prueba realizada sobre los determinantes obteniéndose la matriz de datos que aparece como Anexo III . A partir de ella se elabora la tabla de análisis de la varianza y sobre ella se realiza el análisis estadístico que nos permitirá aceptar o rechazar las hipótesis sacando las conclusiones pertinentes.

9.– Como el factor sexo no se ha incluido en el diseño principal, haremos un estudio aparte mediante la elaboración de un diseño factorial de dos factores, en este caso el factor método de enseñanza y sexo del alumno. Con este diseño detectaremos si el factor sexo origina variaciones significativas en las calificaciones de la prueba o su interacción con el factor método de enseñanza seguido.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS

FUNDAMENTO TEÓRICO

INTRODUCCION AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Sir Ronald A. Fisher (1890–1965) fue el primero en el uso de los métodos estadísticos en el Diseño de Experimentos, desarrolló y aplicó por primera vez el Análisis de la Varianza como herramienta básica para el análisis estadístico en esta importante rama de la Inferencia Estadística. Aunque él fue el primero, muchos otros han contribuido de manera significativa al desarrollo de esta herramienta de apoyo a la investigación, entre ellos, F. Yates, G.E.P. Box, R.C. Bose, O. Kempthorne, W.G. Cochran y otros.

Los diseños experimentales se aplicaron inicialmente en las áreas de la agricultura y las ciencias biológicas. Como consecuencia de ello gran parte de la terminología, así como la mayoría de los ejemplos que encontramos en las diferentes publicaciones provienen de estos antecedentes.

A partir de 1930 se introduce en la industria textil de Gran Bretaña y, después de la segunda guerra mundial, empieza a abarcar las industrias químicas y de transformación americanas. En la actualidad su utilización es frecuente en prácticamente toda la industria, así como en medicina, biología, las ciencias sociales y de la educación.

El diseño experimental es un medio de importancia crítica en la ingeniería para mejorar el rendimiento de un proceso de manufactura, también se emplea en el desarrollo de nuevos procesos. La aplicación del diseño experimental en una fase temprana del proceso puede mejorar el rendimiento del mismo, al conseguir una menor variabilidad, un mejor ajuste a los requerimientos impuestos, así como menor tiempo y costos en el desarrollo.

También en el diseño técnico tiene un cometido importante el diseño experimental, en lo referente al desarrollo de nuevos productos o mejora de otros ya existentes. Algunas aplicaciones del diseño experimental en el diseño técnico son la evaluación y comparación de configuraciones de diseño básico, evaluación de materiales alternativos y selección de parámetros de diseño, de modo que el producto funcione bien en gran número de situaciones o circunstancias.

Uno de los diseños que recientemente ha tenido una gran difusión, por su impacto social, ha sido el realizado por el doctor Elkin Patarroyo, médico colombiano descubridor de una vacuna sintética contra la malaria. Para contrastar su efectividad se siguió un proceso de vacunación de diferentes personas, comprobándose una manifiesta protección contra la enfermedad en comparación con el resto de la población.

Podemos afirmar, de forma general, que los investigadores realizan sus experimentos virtualmente en todos los campos del saber. La finalidad de su trabajo radica en descubrir algo acerca de un proceso global o de un sistema particular.

El problema que aborda el Diseño de Experimentos es analizar sobre un conjunto de *individuos o unidades experimentales*, y ello medido en una variable cuantitativa de interés o variable respuesta, el efecto de un conjunto de variables de entrada cualitativas o cuantitativas, si bién éstas serán tratadas como cualitativas, llamadas factores, que inciden con diferentes niveles, impuestos o seleccionados por el investigador. Se llama tratamiento al par factor–nivel.

El proceso puede esquematizarse mediante la figura 1, en la que observamos que *las unidades experimentales, o individuos, transforman los tratamientos de entrada en una salida con una o varias respuestas observables.*

Alguna de las variables del proceso, $X_1,X_2,...,X_p$, son controlables, mientras que otras, $Z_1,Z_2,...,Z_q$, no controlables aunque pueden suponerse controlables para los fines de la prueba.

Entre los objetivos del experimento pueden incluirse:

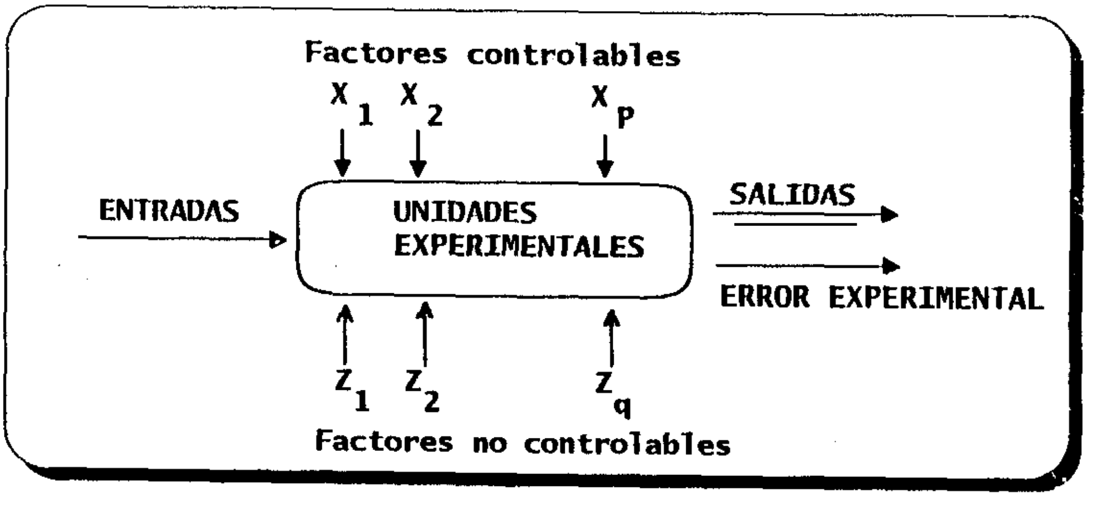
1. – Determinar qué variables tienen mayor influencia en la respuesta Y.

2. – Analizar qué nivel o niveles proporcionan la mejor respuesta de Y.

3. – Determinar, así mismo, qué niveles conducen a una menor variabilidad de Y.

Lo que buscamos principalmente con el Diseño de Experimentos es desarrollar o depurar un proceso para mejorar su rendimiento.

FIGURA 1: Diseño de experimentos



Nosotros hemos realizado una aplicación en el campo de la enseñanza. Concretamente aplicaremos un diseño experimental con el objetivo de verificar la eficacia del método axiomático–inductivo en la introducción del concepto de determinante, sus propiedades y principales aplicaciones en el marco de la asignatura de Matemáticas I, del Curso de Orientación Universitaria.

Para que un experimento se realice de una manera eficiente es necesario emplear en su desarrollo métodos científicos. El Diseño de Experimentos es un método de abordar el desarrollo de un experimento que permite obtener datos apropiados y que pueden ser analizados mediante modelos estadísticos con objeto de obtener conclusiones válidas y objetivas. La metodología que desarrolla la Estadística es el único enfoque objetivo para analizar un problema que contenga datos sujetos a errores experimentales.

Este proceso se desarrolla en dos fases: la primera el diseño del experimento y la segunda el análisis estadístico de los datos. Ambas están estrechamente relacionadas, ya que el método de análisis depende del diseño empleado.

Nosotros nos centraremos exclusivamente en el diseño factorial, que ha sido el utilizado para el desarrollo de este análisis. Buscamos la existencia de alguna diferencia entre los tratamientos, estimar la misma y si esta diferencia es debida a la influencia de los distintos tratamientos o al error experimental ya que, al tratarse de una estimación, la dificultad surge debido a la variabilidad, que es lógica, en los datos experimentales. La contribución de la Estadística al esclarecimiento de esta incógnita, es la aportación de la técnica llamada contraste de hipótesis, que es una regla para decidir si se acepta o rechaza la hipótesis inicial de igualdad del efecto de los tratamientos en la variable respuesta, conforme al examen de los datos.

Esta hipótesis de igualdad en el efecto de los tratamientos se denomina hipótesis nula; el investigador propone, en función del riesgo que supone un rechazo de la misma cuando resulte ser cierta, un α llamado nivel de significación, siendo $1-\alpha$ el grado de confianza o seguridad con que va a aceptarla cuando sea cierta. Están en juego dos tipos de errores:

- Error α o tipo I, que es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando sea cierta.

- Error β o tipo II, que es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando es falsa; este error β es desconocido y no controlable[10], pero será tanto menor cuanto mayor sea α.

Fijado α el experimentador dispone de un nivel de confianza, normalmente elevado: 90% ó 95%, en que la elección de la hipótesis nula como cierta es correcta, no se descartan niveles de confianza más elevados, cuando el rechazo de dicha hipótesis traiga como consecuencias costes o riesgos elevados.

Como resumen podemos decir que la variación de los resultados es típica en la rama de la experimentación, de aquí la dificultad de obtener conclusiones válidas para toda la población a partir de una muestra de ella. Las teorías estadísticas de estimación y de contraste de hipótesis proponen soluciones a este problema en forma de aseveraciones definidas que tienen una probabilidad conocida y controlable de ser correctas. Estas afirmaciones son lo suficientemente específicas para utilizarse en decidir qué acción puede tomarse basándose en los resultados.

1.– Fases del Diseño de Experimentos

Un diseño experimental exige, en primer lugar, concretar con la mayor claridad posible cuál es el objeto de nuestro estudio, conocer adecuadamente la realidad

---

[10] Por el investigador que trabaja sobre muestras, por lo que desconoce el verdadero valor de los parámetros poblacionales.

del problema objeto del trabajo y el contexto del mismo, disponer de un método adecuado para la obtención de datos y tener una idea del método a seguir para realizar un análisis de los mismos.

Esquemáticamente el proceso puedese describir así:

1. – **Comprensión y planteamiento del problema.** Debemos desarrollar todas las ideas sobre los objetivos del experimento, será necesario recabar la máxima información sobre los elementos que lo conforman. Es evidente que un planteamiento claro del problema contribuirá a su mejor conocimiento y, por supuesto, a abordar mejor la solución del mismo.

2. – **Elección de factores y niveles.** Es el experimentador el que debe decidir qué factores deben incluirse en la realización del experimento, los intervalos de variación y los niveles sobre los cuales se realizará el experimento. También debemos saber cómo vamos a mantener esos niveles y el proceso de medida. Cuando el objetivo es determinar qué factores producen diferencias significativas lo más aconsejable es mantener bajo el número de niveles; lo usual es emplear dos.

3. – **Selección de la variable respuesta.** Al seleccionar la respuesta o variable dependiente debemos estar seguros de que dicha variable nos va a proporcionar una información realmente útil para el estudio que debemos realizar. El error de una medición también es un factor importante, si la fiabilidad de la medida es imprecisa podemos esperar que el experimento solo detecte efectos relativamente grandes de los factores; en ese caso deben hacerse repeticiones.

4. – **Elección del diseño experimental.** Para elegir el diseño es necesario considerar el tamaño muestral, seleccionar un orden para los ensayos experimentales, y determinar si existe efecto significativo entre bloques u otras restricciones de aleatorización.

5. – **Realización del experimento.** Es muy importante comprobar el desarrollo del experimento, para tener la seguridad de que todo se realiza según el esquema prefijado. *Se ha de tener presente, en todo momento, que cualquier error en* su realización puede anular la validez del experimento.

6. – **Análisis de los datos.** Se utilizarán métodos estadísticos para analizar los datos, de modo que los resultados y conclusiones sean objetivas y no apreciativas. Los métodos estadísticos, aplicados adecuadamente, permitirán llegar a conclusiones válidas con un alto grado de fiabilidad. La gran ventaja de los métodos estadísticos es que aportan objetividad al proceso de toma de decisiones.

7. – **Conclusiones y recomendaciones.** Una vez que hemos analizado los datos, debemos extraer conclusiones prácticas de los resultados y recomendar una decisión determinada.

Durante todo este proceso es necesario tener presente que la experimentación es parte importante en el proceso de aprendizaje, en el cual formulamos tentativamente hipótesis acerca de un sistema, realizamos experimentos en base a esas hipótesis y, con los resultados obtenidos, formulamos nuevas hipótesis.

2.- *Métodos para incrementar la exactitud de los experimentos*

Hay dos fuentes de errores experimentales; una es la variabilidad inherente al material experimental sobre el que estamos aplicando los tratamientos, estas diferencias, de mayor o menor significación, contribuyen a formar los errores experimentales; otra fuente de errores es la falta de uniformidad en la conducción física del experimento, la deficiencia en poder uniformizar la técnica experimental.

La presencia de los errores experimentales no debe preocupar al experimentador que, con un diseño adecuado, ha de conseguir minimizarlos al objeto de evitar que dichos errores, fruto de la variabilidad inherente a las unidades experimentales y a la medida, enmascare las diferencias en las variable respuesta que queremos analizar.

Estos métodos podemos clasificarlos en aquellos que aumentan la magnitud del experimento, bien sea por medio de las repeticiones, o bien, por la adición de tratamientos en los que intentan refinar la técnica experimental, o en los que se puede manejar el material experimental de tal manera que se reduzcan los efectos de la variabilidad, esto lo podemos conseguir por medio de una selección rigurosa y cuidadosa del material, tomando medidas que nos aporten más información respecto al material, o por un agrupamiento hábil de las unidades experimentales.

Para aclarar que estos errores no suponen equivocaciones, recordaremos los conceptos exactitud y precisión, a los que en ocasiones se les ha asignado el mismo significado. La exactitud nos indica la cercanía del valor obtenido al valor verdadero, mientras que la precisión, va ligada a la repetición del experimento, indicándonos la agrupación de los resultados. Es evidente que puede existir una medición con un gran sesgo pero con los datos muy agrupados, diríamos que es de alta precisión y de baja exactitud. Cuando hablemos de la diferencia entre dos tratamientos, nos referiremos a la diferencia verdadera tal como fue registrada por el dispositivo de medición que se usó.

Cualquiera que sea la fuente de los errores experimentales, la repetición del experimento va disminuyendo constantemente el error asociado a la diferencia entre los resultados medios de los tratamientos, siempre que nos aseguremos que un tratamiento no está siendo favorecido, esto hará que los errores que afecten a cualquier tratamiento tiendan a anularse cuando el número de repeticiones aumenta.

La justificación de que el aumento del número de repeticiones minimiza el error experimental, la proporciona el parámetro varianza del error que se obtiene mediante la esperanza matemática del cuadrado del error que afecta a la observación de una unidad experimental, su raiz cuadrada se llama error estandar por unidad. Si σ^2 es la varianza del error por unidad y hay n repeticiones, la varianza del error de la diferencia de los tratamientos es $\frac{2\sigma^2}{n}$ y, por tanto, el error estándar será su raiz cuadrada.

Otro método que permite aumentar la precisión es el refinamiento en las técnicas empleadas por el experimentador, lo que se asegura con la uniformidad en la aplicación de los tratamientos, ejercitando suficiente control sobre las influencias externas, llevando a cabo medidas convenientes y no sesgadas de los efectos de los tratamientos y previniendo errores importantes de los que ningún tipo de experimentación está enteramente libre.

En resumen, hay numerosos métodos disponibles para aumentar la exactitud de un experimento. Se puede llegar al mismo fin por varios caminos diferentes. El método adoptado deberá ser aquel para el cual la norma de aproximación deseada se pueda lograr con el mínimo gasto de recursos y tiempo.

Una de las mejores reglas de trabajo a la hora de usar el diseño de experimentos es usar el más simple que satisfaga las necesidades de la ocasión; esto no implica que los diseños complicados no deban ser usados, se ha demostrado su eficacia principalmente en los campos de la investigación donde parece no haber ningún otro método igualmente viable para lograr los mismos resultados.

EXPERIMENTOS CON UN SOLO FACTOR. ANALISIS DE LA VARIANZA

1.- Generalidades

Antes de introducir los diseños factoriales debemos comenzar explicando el proceso estadístico en el que se basan los mismos, el Análisis de la Varianza.

Es una técnica de la Inferencia Estadística propuesta en 1923 por Fisher quien, desde el año 1919 hasta el 1933 en el centro experimental de Rothamsted en Inglanterra, efectuó importantes contribuciones al estudio del coeficiente de correlación y al Diseño de Experimentos. En su honor Snedecor dió el nombre de F a su distribución.

Si por un primer análisis de resultados observamos una diferencia entre lo efectos producidos en la variable respuesta por diferentes niveles de un mismo factor, no podemos, a simple vista de los mismos, saber si esa diferencia es debida a la propia variabilidad de la variable o es debida a que el efecto producido por los diferentes niveles realmente mejora o empeora unos resultados finales.

Se trata de comparar y estimar con un cierto nivel de confianza el efecto que producen los valores de una variable independiente (factor), controlada por el investigador, sobre las unidades experimentales homogéneas de r muestras en relación con otra variable dependiente, también denominada variable respuesta.

La variable factor puede ser cuantitativa o cualitativa, aunque a efectos del modelo la primera se trata como cualitativa, para unos valores dados que denominamos niveles, sus niveles podrán venir especificados o ser elegidos de entre muchos posibles.

2.— *Planteamiento del Problema*

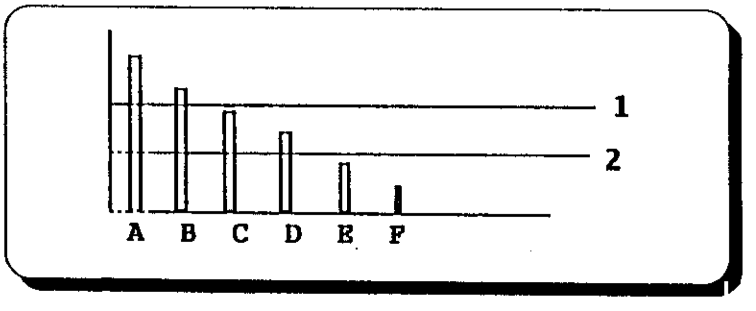
Supongamos que queremos comparar el efecto de r tratamientos o niveles de un factor único. La tabla que sigue contiene los diferentes tratamientos con sus observaciones, totales y promedios. Lo normal es que tengamos n observaciones por tratamiento.

Tabla 1: Tratamientos

Tratamiento (nivel)	Observaciones	Totales	Medias
1	$y_{11}\ y_{12} \cdots y_{1n}$	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	$y_{21}\ y_{22} \cdots y_{2n}$	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
...	....	...	...
r	$y_{r1}\ y_{r2} \cdots y_{rn}$	$y_{r.}$	$\bar{y}_{r.}$
		$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

Como ya se indicó la variabilidad se debe a dos causas; la correspondiente a los distintos efectos de los tratamientos (cuya medida es nuestro objetivo) y las debidas al error experimental que trataremos de minimizar con un diseño adecuado.

FIGURA 2: Efectos del error experimental



En la figura 2 el eje de ordenadas representa el tamaño de los efectos, representados en las abcisas. Si reducimos de 1 a 2 el error experimental podremos poner de manifiesto los efectos de los tratamientos C y D, antes enmascarados por el error.

Este es, por tanto el, objetivo de un buen diseño, disminuir el error experimental, lo que descansa en tres principios, aleatorización, repetición y homogeneidad.

La aleatorización establece que los factores no controlables por el experimentador, y que pueden influir sobre los resultados, se asignen al azar mediante un procedimiento objetivo que asegure la aleatoriedad, como es el uso de tablas de números aleatorios. Con esto conseguimos prevenir la existencia de sesgos, evitar la dependencia entre observaciones y confirmar la validez de los procedimientos estadísticos más comunes.

El principio de repetición nos determina el número N de individuos sobre los que realizaremos el experimento. Por el teorema central del límite sabemos que las distribuciones de medias muestrales de tamaño N tiene por varianza $\frac{\sigma^2}{N}$, entonces, para poder poner de manifiesto la diferencia existente entre los diferentes tratamientos, conviene minimizar este cociente, lo que podemos lograr por dos caminos:

- Disminuir σ^2, lo conseguiremos con la homogeneidad de los individuos.
- Aumentar N, se pretende el mayor tamaño muestral posible compatible con las posibilidades económicas, tiempo, etc.

El último principio es el de homogeneidad del material experimental. Si el experimentador conoce la homogeneidad de la respuesta de los individuos es posible llevar a cabo este experimento, donde la medida del efecto de un factor la conseguimos manteniendo fijo cada nivel durante el experimento. En caso de no existir la homogeneidad evitaremos el efecto producido por la heterogeneidad de la muestra considerándola una más de las variables no controlables y aleatorizando su aparición en el experimento.

Definimos el siguiente modelo estadístico lineal:

$$y_{ij}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij} \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad j=1,2,\ldots,n$$

donde μ es un parámetro común a todos los tratamientos, es la media del total de los datos, τ_i es un parámetro único para el i-ésimo tratamiento y ε_{ij} es la componente aleatoria del error.

Los objetivos del Análisis de la Varianza son: comparar más de dos medias muestrales pertenecientes a otras tantas distribuciones normales de la misma varianza, analizar la influencia que los distintos tratamientos tienen en la media de la variable respuesta en r poblaciones, por otra parte, estimar por intervalos dichas medias o diferencias de medias y, por último, el estudio de los componentes de la varianza.

3.– *Condiciones de validez*

Planteadas las hipótesis nulas de igualdad de los efectos de los tratamientos y alternativa de diferencia entre ellos, procede verificar las condiciones de validez que permitan la realización de un contraste parámetrico, más potente que los no paramétricos, a los que habría de recurrirse en el caso de no cumplimiento de alguna o algunas.

Estas condiciones para la distribución de los errores son:

1.– ***Homogeneidad.*** Los errores son variables aleatorias independientes de media 0, para garantizarla, los valores y_{ij} han de estar todos tomados en las mismas condiciones.

2.– ***Homocedasticidad*** o igualdad entre las varianzas de los tratamientos en las r muestras. Esto implica que las causas de variabilidad no atribuidas a los diferentes tratamientos han de permanecer constantes durante la realización del experimento.

3.– ***Independencia en el error experimental*** que está garantizada si se da entre las medias $\overline{y}_{i\cdot}$; uno de los objetivos del Diseño de Experimentos es garantizar esta independencia.

4.– ***Normalidad.*** Si el experimento está bien diseñado, el teorema central del límite debe garantizarla, ya que en los errores experimentales influirán gran cantidad de causas independientes y ninguna de ellas muy relevante frente a las demás.

Debemos diferenciar entre modelos de efectos fijos y de efectos aleatorios. Denominaremos fijos aquellos en que los niveles del factor constituyen la población total de niveles y de efectos aleatorios si el experimentador los elige en una población mayor de niveles. En nuestro trabajo desarrollaremos exclusivamente los modelos de efectos fijos.

Sea $y_{..}$ la suma total de las diferentes observaciones, sea $y_{i.}$ la suma total de observaciones realizadas en el nivel i−ésimo del factor en estudio. Y denominaremos como $\overline{y}_{..}$ e $\overline{y}_{i.}$ a sus respectivas medias:

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \overline{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N}$$

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad \overline{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{N}$$

siendo N el número total de observaciones y n el número de observaciones del i−ésimo tratamiento.

Las hipótesis que planteamos implican la igualdad o desigualdad entre las medias de los diferentes tratamientos:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$$

$$H_1 : \quad \mu_i \neq \mu_j \quad \text{para, al menos, un par}$$

También podriamos plantear la hipótesis nula como la igualdad a cero de los efectos de los diferentes tratamientos:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0$$

$$H_1 : \quad \tau_i \neq \tau_j \quad \text{para, al menos, un par}$$

4.− Descomposición de la suma de cuadrados

El Análisis de la Varianza se explica al descomponer la variabilidad total de los datos en sus diferentes partes. La suma de cuadrados total corregida:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{y}_{..})^2$$

la usaremos como medida de la variabilidad total de los datos.

Si dividimos la suma de cuadrados entre sus grados de libertad $N-1$ obtendremos la varianza muestral de Y, es por lo que podremos utilizar a SS_T como una medida de variabilidad. La SS_T podemos también anotarla:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}-\overline{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} [(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})+(y_{ij}-\overline{y}_{i.})]^2 =$$

$$= n\cdot \sum_{i=1}^{r} (\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}-\overline{y}_{i})^2$$

El término del producto cruzado es 0. El primer sumando es la variación intergrupos debida a los niveles del factor, como vemos, es la diferencia entre las medias de cada tratamiento y la media general. La varización entre tratamientos la denominaremos suma de cuadrados debida a los tratamientos $SS_{TRATAMIENTOS}$.

El segundo sumando representa la variación dentro de los grupos o variación debida al error experimental. Se denomina suma de cuadrados debida al error SS_E. Por lo tanto, la suma de cuadrados total podemos expresarla como:

$$SS_T=SS_{TRATAMIENTOS}+SS_E$$

Los $N-1$ grados de libertad que tiene la suma de cuadrados total se reparten de la siguiente forma: La $SS_{TRATAMIENTOS}$ tendrá $r-1$ grados de libertad, siendo r el número de niveles. Como existen n réplicas en cada uno de los tratamientos tendremos $n-1$ grados de libertad para la SS_E por cada uno de los tratamientos, lo que nos da un total $r\cdot(n-1)$ o, lo que es lo mismo, $N-r$.

La varianza muestral del i-ésimo tratamiento es:

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(y_{ij}-\overline{y}_{i.})^2}{n-1} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

La varianza poblacional la podemos estimar mediante una media ponderada de las varianzas muestrales utilizando como pesos los grados de libertad de cada muestra:

$$\frac{(n-1)S_1^2+(n-1)S_2^2+\ldots+(n-1)S_r^2}{(n-1)+(n-1)+\ldots+(n-1)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n}(y_{ij}-y_{i.})^2}{\sum\limits_{i=1}^{r}(n-1)}=\frac{SS_E}{(N-r)}$$

Como podemos ver, la suma de cuadrados debida al error dividido entre sus grados de libertad, $\frac{SS_E}{(N-r)}$, es una estimación de la varianza común de cada uno de los tratamientos bajo la hipótesis de igualdad de medias.

Utilizando el mismo razonamiento, si no exiten diferencias entre las medias de los tratamientos, podemos usar la varianza de las medias de los tratamientos con respecto a la media general para estimar la varianza:

$$\frac{SS_{TRATAMIENTOS}}{r-1}=\frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2}{r-1}$$

Realizaremos un razonamiento intuitivo para demostrar lo anteriormente expuesto. Una estimación para $\frac{\sigma^2}{n}$, la varianza de las medias de los tratamientos, es $\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2}{r-1}$, por tanto $\frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2}{r-1}$ debe estimar σ^2 si las medias de los tratamientos son iguales.

Como hemos visto, podemos estimar σ^2 por dos caminos, si no existe diferencia entre las medias de los tratamientos, los resultados obtenidos por uno u otro camino deben ser muy parecidos, si esto no es así, podremos sospechar que es debido a las diferencias entre las medias de los tratamientos.

Ahora hemos de buscar la forma de realizar una prueba formal de la hipótesis de igualdad de medias de los tratamientos. Como presuponemos que los ε_{ij} son independientes y están normalmente distribuidos con media 0 y varianza σ^2, las observaciones y_{ij} también son independientes y se hallan normalmente distribuidos con media $\mu+\tau_i$ y varianza σ^2. Es posible demostrar que el cociente $\frac{SS_T}{\sigma^2}$ tiene una distribución Ji−cuadrado con $N-1$ grados de libertad porque SS_T es una suma de cuadrados de variables aleatorias normalmente distribuidas.

Lo mismo ocurre con $\frac{SS_E}{\sigma^2}$, que sigue una Ji−cuadrado con $N-r$ grados de libertad y, si la hipótesis nula planteada sobre la igualdad de los efectos de los tratamientos es verdadera, también seguirá una Ji−cuadrado con $r-1$ grados de libertad el cociente $\frac{SS_{TRATAMIENTOS}}{\sigma^2}$. Ahora bien, estas tres sumas de cuadrados no son independientes, la primera, SS_T, es la suma de las otras dos. Para intentar establecer la independencia entre SS_E y $SS_{TRATAMIENTOS}$ recurriremos al teorema de COCHRAN.

El teorema de Cochran dice: *Sean* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ *variables aleatorias independientes normalmente distribuidas* $N(0,1)$ *y* $Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ *formas cuadráticas de las* X_i, *siendo* n_j *la característica de* Q_j. *Supongamos, además, que sea* $\sum_{j=1}^{k} Q_j = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. *Entonces:*

1: Si es $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ **[1]**, *cada* Q_j *tiene una distribución* χ^2 *con* n_j *grados de libertad y las* Q_j *son independientes.*

2: Si cada Q_j *sigue una* χ^2 *con* n_j *grados de libertad, las* Q_j *son independientes y se verifica* **[1]**.

3: Si las Q_j *son independientes, cada* Q_j *sigue* χ^2 *con* n_j *grados de libertad y se verifica* **[1]**.

Siguiendo este teorema, la suma de cuadrados debida a los tratamientos y la debida al error cumplirían el teorema si su varianza fuese uno, por lo tanto, si lo dividimos por σ^2, implicará que $\frac{SS_E}{\sigma^2}$ y $\frac{SS_{TRATAMIENTOS}}{\sigma^2}$ sean variables aleatorias independientes con distribución Ji−cuadrado. Por lo tanto, si la hipótesis nula de igualdad de medias de los tratamientos es verdadera, el cociente entre ambas variables seguirá una distribución F de Snedecor con $r-1$ y $N-r$ grados de libertad.

$$F_0 = \frac{\frac{SS_{TRATAMIENTOS}}{r-1}}{\frac{SS_E}{N-r}} = \frac{MS_{TRATAMIENTOS}}{MS_E}$$

La media de cuadrados debida al error, MS_E, es un estimador insesgado de σ^2. Si la hipótesis nula es verdadera, la media de cuadrados debida a los tratamientos, $MS_{TRATAMIENTOS}$, también será un estimador insesgado de σ^2, en cambio, si la hipótesis es falsa, el valor esperado de $MS_{TRATAMIENTOS}$ es mayor que el valor de σ^2. Si esto ocurre, el valor del numerador será superior al denominador, debe rechazarse H_0 si el valor de tal estadístico de contraste es demasiado grande, es decir, rechazamos H_0 si $F_0 > F_{\alpha,r-1,N-r}$.

Podemos simplificar y facilitar el cálculo de las sumas de cuadrados:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{\overline{y}_{..}^2}{N}$$

$$SS_{TRATAMIENTOS} = \sum_{i=1}^{r} y_{i.}^2 - \frac{\overline{y}_{..}^2}{N}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{TRATAMIENTOS}$$

En la siguiente tabla resumimos el procedimiento.

Tabla 2: Análisis de la varianza 1

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media de Cuadrados	F_0
Entre tratamientos	$SS_{TRAT.}$	$r-1$	$MS_{TRAT.}$	$\frac{MS_{TRAT.}}{MS_E}$
Error (dentro)	SS_E	$N-r$	MS_E	
Total	SS_T	$N-1$		

5.– Estimación de los parámetros del modelo

Vamos a buscar estimadores del modelo lineal $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$.

Si para estimar los parámetros utilizamos el método de los mínimos cuadrados, no es necesario suponer la hipótesis de normalidad de los errores.

Construimos una ecuación con la suma de los cuadrados de los errores:

$$M=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\mu-\tau_i)^2$$

Ahora debemos escoger los valores de μ y de τ_i que minimicen M. Las soluciones las obtendremos como resultado de las $r+1$ ecuaciones formadas al derivar M respecto a μ y respecto a los diferentes τ_i:

$$\frac{\partial M}{\partial \mu}=0 \qquad \frac{\partial M}{\partial \tau_i}=0 \qquad i=1,2,\ldots,r$$

Al igualar las derivadas a 0:

$$-2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\hat{\mu}-\hat{\tau}_i)=0 \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$-2\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\hat{\mu}-\hat{\tau}_i)=0 \qquad i=1,2,\ldots,r$$

Si simplificamos tendremos $r+1$ ecuaciones con $r+1$ incógnitas que se denominan *ecuaciones normales de mínimos cuadrados:*

$$\begin{aligned}
N\cdot\mu+n\cdot\tau_1+n\cdot\tau_2+\ldots+n\cdot\tau_r &= y_{..}\\
N\cdot\mu+n\cdot\tau_1 &= y_{1.}\\
N\cdot\mu+n\cdot\tau_2 &= y_{2.}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
N\cdot\mu+n\cdot\tau_r &= y_{r.}
\end{aligned}$$

La primera ecuación es combinación lineal del resto de ecuaciones, por lo que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Para poder soslayar esta dificultad podemos recurrir a varios métodos diferentes, pero como desde el principio definimos como nulo el sumatorio de los efectos de los tratamientos, éste será el que utilicemos para poder obtener una solución $\sum_{i=1}^{r}\hat{\tau}_i=0$. Usando esta restricción obtenemos las siguientes soluciones:

$$\hat{\mu}=\overline{y}_{..} \qquad \hat{\tau}_i=\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

De todas formas no es importante el valor de las estimaciones de τ_i, sino de las diferencias entre las medias de los tratamientos.

Para definir un intervalo de confianza para el estimador μ_j podríamos utilizar $\mu_i=\mu+\tau_i$.

Un estimador puntual para la media del i−ésimo tratamiento podría ser $\hat{\mu}_i=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i=\overline{y}_i$.

Ahora bien, el suponer que los errores están normalmente distribuidos, implica que $\overline{y}_i$ es una Normal de media μ_i y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, por lo que el intervalo de confianza podría ser:

$$\left[\overline{y}_{i.}\pm t_{\alpha/2,N-r}\cdot\sqrt{\frac{MS_E}{n}}\right]$$

El intervalo se confianza para la diferencia de medias de dos tratamientos a un nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\%$ sería:

$$\left[\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{j.}\pm t_{\alpha/2,N-r}\cdot\sqrt{\frac{MS_E}{n}}\right]$$

6.– Comprobación de la validez del modelo

Ya hemos mencionado las condiciones de validez de la distribución de errores. Si las suposiciones realizadas sobre los mismos son ciertas, el procedimiento de Análisis de la Varianza constituye una prueba paramétrica para las hipótesis de igualdad de medias de diferentes tratamientos. No siempre dichas condiciones de homogeneidad, homocedasticidad, independencia y normalidad se cumplen con exactitud, por lo que no parece lógico, toda vez que el análisis de la varianza depende de estos supuestos, iniciar el estudio sin haber comprobado con anterioridad que se cumplen estas condiciones.

Definiremos el residuo del tratamiento *i* de la observacion *j*: $e_{ij}=y_{ij}-\hat{y}_{ij}$. Como el valor estimado será $\hat{y}_{ij}=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i=\overline{y}_{..}+(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})=\overline{y}_i$ resulta $e_{ij}=y_{ij}-\overline{y}_i$.

Si el modelo es adecuado los residuos deben seguir una distribución Normal. Existen varios métodos gráficos y numéricos para verificar esta condición:

- Una primera aproximación podemos tenerla representando los valores en la recta real para observar su agrupamiento en las proximidades de la media y su simetría, o bién mediante un histograma de los residuos; si la suposición de normalidad es cierta debe ser semejante al de una Normal de media 0 y varianza σ^2. Este procedimiento es válido para muestras de gran tamaño, en muestras de pequeño tamaño pueden existir diferencias entre ambos histogramas que no tienen por qué representar la ausencia de normalidad de los residuos. Si las desviaciones son grandes, se hace necesario un estudio más profundo.

- También podemos utilizar una gráfica de probabilidad Normal de los residuos en la que se representa la función de distribución de los residuos. Si la distribución de los errores es una Normal, al representarlos en esta forma conseguiremos una línea recta.

Además de estos métodos gráficos disponemos de algunos numéricos más potentes para verificar este requisito. Están entre ellos:

- El test de D'Agostino, muy útil en muestras pequeñas, consiste en disponer en orden creciente los datos y comparar el estadístico de contraste:

$$D_{EXP}=\frac{\sum_{i=1}^{n} i\cdot y_i-\frac{(n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i}{2}}{\sqrt{n\left[n\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]\right]}}$$

con una D_α teórica tabulada por este autor.

- El contraste de la χ^2 se apoya en la comparación de las frecuencias absolutas observadas en la muestra y esperadas bajo el supuesto de normalidad mediante el estadístico:

$$\chi^2_{EXP}=\sum_{i=1}^{k}\frac{|O_i-E_i|^2}{E_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{O_i^2}{E_i}-n$$

siendo k el número de intervalos, que no debe ser inferior a 10, requiriéndose que ningún valor esperado, E_i, sea menor que la unidad y no más de un 20% de ellos menores o igules a 5. Lo comparamos con una χ^2_α con $k-p-1$ grados de libertad, siendo p el número de parámetros estimados en la muestra.

- El test de Kolmogorov−Smirnov es aplicable a muestras grandes y preferible al de la χ^2 por ser más potente, no requerir valores mínimos para las observaciones y ser de cálculo más breve. La realización exige establecer intervalos y calcular las frecuencias relativas acumuladas tanto teóricas, F_t, como experimentales, F_e. Se calcula el valor absoluto de las diferencias de las frecuencias para cada intervalo $|F_t-F_e|$, el estadístico de contraste es el valor $D=\text{máx}|F_t-F_e|$. Fijado el nivel de significación se compara con una D_α teórica tabulada por estos mismos autores.

  En general, pequeñas desviaciones de la normalidad no tienen mucha importancia en el análisis de la varianza de efectos fijos.

  La prueba de la F se ve poco afectada ante las pequeñas desviaciones de la normalidad, la falta de normalidad hace que tanto el nivel de significación como la potencia difieran ligeramente de los valores que se indican, siendo en realidad una de menor potencia. Los modelos de efectos aleatorios se ven más afectados por la falta de normalidad.

Un buen diseño debe garantizar la homogeneidad, los datos o medidas deben ser tomados en las mismas condiciones.

Un defecto que comunmente suele aparecer en este tipo de análisis es la existencia de algún residuo que sea mucho mayor que los demás. A este residuo se le denomina inusitado u obsevación extrema. La presencia de uno o varios de estos residuos inusitados puede producir graves distorsiones en el análisis de la varianza por lo cual, cuando se produce algún error de este tipo, debe investigarse, porque normalmente son errores en los cálculos de obtención de los mismos, o bién en la transcripción de los datos. Si no ha sido debido a ninguna de estas causas, debemos revisar las circunstancias de la experimentación. No se puede descartar o rechazar una observación de este tipo, a no ser que exista una base estadística para hacerlo. Como posible solución se puede realizar un estudio incluyendo dichas observaciones extremas y otro sin incluir dichas observaciones.

Existen varios procedimientos para detectar estas observaciones extremas. Uno de ellos es el estudio de los residuos estandarizados, estos deben seguir una Normal $(0,1)$, el 95% de los valores estandarizados deben encontrarse entre $\pm 1'96$ y prácticamente todos entre ± 3.

Para verificar la independencia de forma aproximada puede realizarse una gráfica situando los errores en el orden del tiempo en el que fueron obtenidos, cuya observación nos puede detectar la existencia de rachas, zonas en que los residuos son positivos o negativos, esto nos dará a entender que los residuos no son independientes. Una forma más rigurosa de verificar la independencia es la realización del test de rachas que consiste en comparar el valor experimental, T_{EXP}, que definiremos a continuación, y una Normal.

$$T_{EXP} = \frac{|R_{EXP} - E(R)| - 0'5}{\sqrt{V(R)}}$$

siendo:

R_{EXP} = Número de rachas o de secuencias de valores positivos o negativos de los residuos.

$$E(R) = \frac{2N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}$$

$$V(R) = 2N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{2N_1 \cdot N_2 - N_1 - N_2}{(N_1 + N_2)^2 \cdot (N_1 + N_2 - 1)}$$

N_1 Número de errores con valor positivo.

N_2 Número de errores con valor negativo.

Disponemos también del test de coeficiente de correlación serial que consiste en calcular el estadístico de contraste:

$$R_S=\frac{(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}\cdot y_i-\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} y_i}{\sqrt{\left[(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}\right)^2\right]\cdot\left[(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)^2\right]}}$$

con los y_i en el orden en el que han sido tomados. A contrastar el valor:

$$\frac{(n-1)\cdot R_s+1}{\sqrt{n+2}}$$

con un valor teórico tabulado de una Normal (0,1).

La condición de homocedasticidad o igualdad en las varianzas de los diferentes tratamientos, se verifica planteando las hipótesis:

$$H_0\ :\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_r^2$$

$$H_1\quad \text{al menos una diferente}$$

El test de comparación más comunmente usado es el test de Bartlett que explicamos a continuación.

Si $s_1^2,s_2^2,\ldots,s_r^2$ son las varianzas muestrales de los diferentes tratamientos, cada una con sus respectivos grados de libertad, que denominamos $f_1,f_2,\ldots,f_r$, el valor experimental lo obtendremos:

a) Si los grados de libertad son los mismos:

$$\chi_{EXP}^2=\frac{f\cdot\left(r\cdot lns^2-\sum_{i=1}^{r} lns_i^2\right)}{C}$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{s_i^2}{r} \quad ; \quad f=f_1=\ldots=f_r \quad ; \quad C=1+\frac{r+1}{3rf}$$

b) Si los grados de libertad son diferentes:

$$\chi^2_{EXP}=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i\cdot lns^2-\sum_{i=1}^{r} f_i\cdot lns_i^2}{C}$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i\cdot s_i^2}{\sum_{i=1}^{r} f_i} \quad ; \quad C=1+\frac{\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{f_i}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{r} f_i}}{3\cdot(r-1)}$$

Si las varianzas son iguales será $\chi^2_{EXP}<\chi^2_{\alpha}$ con $r-1$ grados de libertad. Si esta desigualdad no se cumple, significa que no existe igualdad entre las varianzas de los diferentes tratamientos; si esto ocurre, se puede solucionar realizando transformaciones en los datos para poder estabilizar la varianza.

7.– Tranformaciones de las observaciones

La finalidad de las transformaciones es corregir el no cumplimiento de alguna de las condiciones de validez del análisis o test a aplicar.

Ostle asegura que *el uso de una transformación para corregir una deficiencia particular ayudará, en general, con respecto a otra deficiencia.*

La posibilidad de realizar una transformación de los datos deberemos tenerla siempre presente pues, a menudo, no hay nada que recomiende hacer el análisis en la misma métrica en que vienen los datos del problema.

Consideremos un ejemplo en el que se puede apreciar la *naturalidad* de las transformaciones: Un investigador, que estudia unas pruebas atléticas, puede medir el tiempo t en segundos que un atleta tarda en recorrer una distancia de 1000m., pero igual podría haber considerado la velocidad media $\frac{1000}{t}$ en metros por segundo, efectuando en este caso una transformación *fuerte*: $t \longmapsto \frac{1}{t}$.

Si los datos varían en un intervalo lo suficientemente amplio, $\frac{Y_{MAX}}{Y_{MIN}} > 3$, las hipótesis sobre el método utilizado pueden cumplirse más limpiamente en una métrica determinada, que no tiene porque ser precisamente la inicial.

Después del análisis, los resultados deben ser transformados otra vez a la métrica original y expuestos en la escala en que sean más comprensibles. Si los datos están distribuidos en un intervalo de amplitud pequeña, $\frac{Y_{MAX}}{Y_{MIN}} < 3$, los efectos de las transformaciones apenas se notarán.

Para poder realizar una transformación necesitamos una serie de condiciones mínimas; en primer lugar debe ser continua en el intervalo en el cual la aplicamos con la intención de que los intervalos se transformen en intervalos y no se produzcan cortes o vacios en la distribución transformada y, en segundo lugar, debe ser derivable en el intervalo abierto que recoge los datos que vamos a transformar, pudiendo no serlo en los extremos del mismo, con el fin de garantizar una transformación sin cambios bruscos. Por último, la función transformación ha de ser monótona, con el fin de poder efectuar la transformación inversa para poder devolver los resultados a su métrica original.

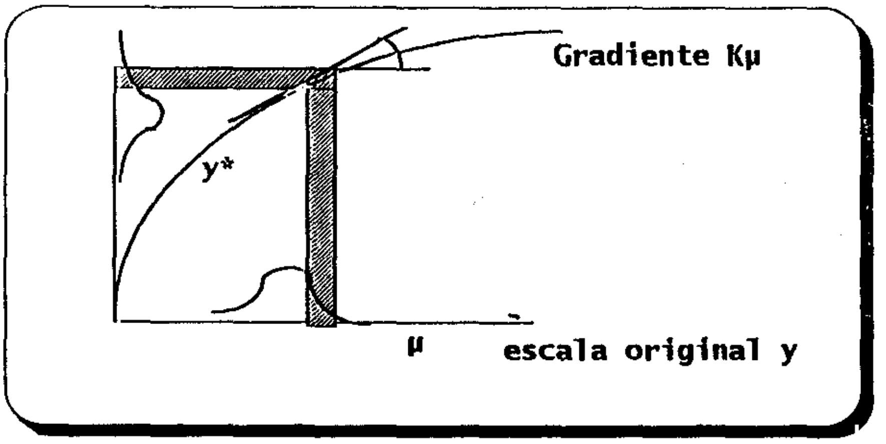
Supongamos que no se cumple la condición de homocedasticidad y que, además, la desviación típica σ_y es proporcional a alguna potencia de la media de y: σ proporcional a μ^α.

Deseamos realizar una transformación de y que produzca una varianza constante. Se supone que la transformación es una potencia de los datos originales: $y^* = y^\lambda$. Entonces:

$$\sigma_y \simeq K_\mu \qquad \sigma_y \text{ proporcional a } K_\mu \cdot \mu^\lambda$$

donde K_μ es el gradiente de la curva y^* en función de la curva y que depende de la media μ.

FIGURA 3: Transformación de las observaciones



Pero el gradiente K_μ es proporcional a $\mu^{\lambda-1}$ ya que la derivada de y^* respecto a y es igual a $\lambda \cdot y^{\lambda-1}$, luego σ_y es proporcional a $\mu^{\lambda-1} \cdot \mu^\alpha$ o, lo que es lo mismo, $\mu^{\lambda+\alpha-1}$.

Si elegimos un λ de forma que $\lambda+\alpha-1=0$, $\lambda=1-\alpha$, entonces resultará que σ_y no dependerá de μ.

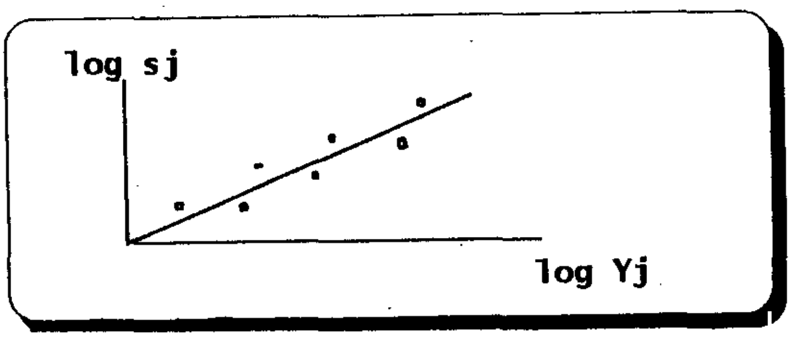
La siguiente tabla nos muestra un resumen de las transformaciones más comunes. Debemos apreciar que $\lambda=0$ implica una transformación logarítmica.

Tabla 3: Transformaciones para estabilizar las varianzas

Relación entre σ_y y μ	α	$\lambda=1-\alpha$	**Transformación**	**Comentario**
$\lambda\sigma_y\alpha$ *constante*	0	1	*Ninguna*	
$\sigma_y\alpha\mu^{1/2}$	$1/2$	1/2	*Raíz cuadrada*	*Datos de Poisson*
$\sigma_y\alpha\mu$	1	0	*Logarítmica*	
$\sigma_y\alpha\mu^{3/2}$	$3/2$	$-1/2$	*Recíproca raíz cuadrada*	
$\sigma_y\alpha\mu^2$	2	-1	*Recíproca*	

En algunos casos podemos determinar empíricamente el valor de α. Supongamos que para el conjunto j del experimento se verifica que $\sigma_j \cdot \alpha \cdot \mu_j^{\alpha}$, entonces tendremos que $log\sigma_j = cte + \alpha \cdot log\mu_j$, por lo tanto la gráfica de $log\sigma_j$ en función del $log\mu_j$ será una recta con pendiente α.

FIGURA 4: Estimación empírica de α



En la práctica no conocemos los valores de σ_j y μ, pero sí podemos estimarlos mediante s_j e $\overline{y}_j$. Si hacemos el diagrama de puntos $(log y_j, log s_j)$, podremos trazar una recta que se ajuste a la nube de puntos.

8. — Análisis detallado

1. — Comparación de medias de tratamientos individuales

Supongamos que al efectuar un análisis en un modelo de efectos fijos rechazamos la hipótesis nula. Esto nos indica que existe al menos una de las medias diferente al resto, pero no nos especifica cual de ellas es diferente. Si esto ocurre es conveniente realizar comparaciones entre las medias de los distintos tratamientos para localizar cual o cuales medias son diferentes al resto.

Existen varios métodos para realizar las comparaciones entre las medias, normalmente se denominan métodos de comparación múltiple. Dependiendo del problema, el experimentador debe decantarse por la elección de uno u otro método. A continuación vamos a ver los métodos más comunes.

2. — Comparación gráfica de medias

No es difícil desarrollar un procedimiento gráfico para comparar las diferentes medias. Supongamos que el factor tiene r niveles por lo cual tendremos las r medias de los respectivos tratamientos. Si conocemos σ sabemos la desviación media de cada uno de los diferentes tratamientos, si el diseño es equilibrado será $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si las medias de los tratamientos fuesen iguales el conjunto de medias se comportarían como una distribución normal de media $\overline{y}_{..}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

Podemos representar una distribución normal y colocar las medias de los diferentes tratamientos en uno de sus ejes. Si las medias no son iguales habrá ciertos valores que se *salgan* o que no parezca que pertenecen a dicha distribución.

Como no conocemos la varianza, emplearemos la media de cuadrados debida al error como estimador de la misma, y utilizaremos una T de Student en lugar de una Normal para efectuar la comparación. Esta es una técnica un poco burda, pero en todo caso es eficaz en muchos problemas de comparaciones múltiples.

3.– Contrastes del análisis detallado

Este método es más riguroso que el anterior. Supongamos que las medias del nivel i y del nivel j son iguales, o bién que el efecto producido por los niveles i y j son similares a los f y k.

Las hipótesis planteadas son, en el primer caso, $\mu_i = \mu_j$, y en el segundo sería $H_0 : \mu_i + \mu_j = \mu_f + \mu_k$. En cualquiera de los dos casos implica una combinación lineal apropiada de los totales de los tratamientos $y_{i.} - y_{j.} = 0$ ó $y_{i.} + y_{j.} = y_{f.} + y_{k.}$.

En general, podemos afirmar que cualquier comparación de medias lleva unida una combinación de los totales de sus tratamientos, que lo podemos expresar de la siguiente manera: $C = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot y_i$, Teniendo en cuenta que la suma de los diferentes c_i tiene que ser igual a 0. A estas combinaciones las conocemos con el nombre de contrastes. Definimos como suma de cuadrados de un contraste:

$$SS_C = \frac{\left[\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot y_i \right]^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{r} c_i}$$

Para probar el contraste lo comparamos con la suma de cuadrados debida al error. El estadístico resultante sigue una distribución F de Snedecor con 1 y $N-r$ grados de libertad.

1.– Método de Scheffé para todos los contrastes

Hay muchas ocasiones en que no se sabe a priori cuales son los contrastes que se quieren realizar, por esto Scheffé propone un método para poder comparar cualquier contraste, o los posibles contrastes.

Supongamos que hemos resuelto realizar m contrastes de las medias de los tratamientos:

$$\Gamma_u = c_{1u}\mu_1 + c_{2u}\mu_2 + \ldots + c_{ru}\mu_r \qquad u = 1,2,\ldots,m$$

El contraste correspondiente usando las medias de los tratamientos es:

$$C_u = c_{1u}\bar{y}_{1.} + c_{2u}\bar{y}_{2.} + \ldots c_{ru}\bar{y}_{r.} \qquad u = 1,2,\ldots,m$$

El error estandar de este contraste es:

$$S_{C_u} = \sqrt{MS_E \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{c_{iu}^2}{n_i}}$$

El valor crítico con el que compararemos el valor obtenido será:

$$S_{\alpha,u} = S_{C_u}\sqrt{(r-1)\cdot F_{\alpha,r-1,N-r}}$$

Para probar la hipótesis nula planteada, que Γ_u es igual a 0, comparamos el valor C_u con el valor crítico obtenido T. Si $|C_u| > S_{\alpha,u}$ la hipótesis nula debe ser rechazada.

4. – Comparación por parejas de medias de los tratamientos

Existen cuatro métodos para realizar estas comparaciones.

1. – **Método LSD** (mínima diferencia significativa)

Es el método más comunmente utilizado, también se denomina test de Student para comparación de medias de variables normales.

Deseamos probar la $H_0 : \mu_i = \mu_j$ para toda $i \neq j$. La t_0 será :

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}}{\sqrt{MS_E \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

La hipótesis se acepta si t_0 es menor que una $t_{\alpha/2, N-r}$. Por lo tanto si en la ecuación de t_0 sustituimos t_0 por el valor de $t_{\alpha/2, N-r}$, despejando la diferencia de medias, tendremos la diferencia mínima significativa:

$$LSD = t_{\alpha/2, N-r} \cdot \sqrt{MS_E \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

si el diseño no fuese equilibrado. En el caso de serlo, todas las muestras del mismo tamño:

$$LSD = t_{\alpha/2, N-r} \cdot \sqrt{\frac{2MS_E}{n}}$$

Para comparar dos medias, simplemente comparamos la diferencia en valor absoluto existente entre ambas con el LSD, si esta diferencia es superior al LSD podemos considerar diferentes las medias poblacionales de los dos tratamientos al nivel de significación α.

2.- La prueba de intervalos múltiples de Duncan

Esta prueba fue desarrollada por Duncan en el año 1955.

Si el diseño es equilibrado, se disponen en orden ascendente las diferentes medias de los tratamientos y se determina la varianza de cada uno de los tratamientos $S_i^2 = \frac{2MS_E}{n}$.

Si, por el contrario, no es equilibrado, deberemos remplazar n por su media armónica $n_{ar} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i}}$.

Duncan construyó una tabla en la cual se obtienen los valores $r, \alpha, (p,f)$, para $p=2,3,\ldots,r$ donde α es el nivel de significación y f los grados de libertad del error. Los intervalos los transformamos en un conjunto de $r-1$ mínimos intervalos significativos calculando $R_p = r_\alpha(p,f)S_i$.

Posteriormente comparamos las diferencias observadas entre las medias, empezando por el mayor valor contra el menor, comparando esta diferencia con el intervalo mínimo significativo R_r. Después entre el mayor valor y el segundo más pequeño y lo comparamos con R_{r-1}. El proceso continúa hasta haber comparado todos los posibles pares. Si la diferencia existente entre dos medias es superior a su intervalo correspondiente, podremos afirmar que las dos medias en cuestión son significativamente diferentes.

3.— *Test de Newman—Keuls*

Esta prueba fue desarrollada por Newman en el año 1939, posteriormente Keuls, en el año 1959, le da un nuevo enfoque, de aquí el nombre de la misma.

El procedimiento es muy similar al desarrollado por Duncan, la diferencia entre ambos métodos estriba en que las diferencias críticas son calculadas de maneras diferentes.

Se calcula un conjunto de valores críticos K_p, en donde $q_\alpha(p,f)$ es el punto de mayor porcentaje de tamaño a del intervalo *stundentizado* para muestras de tamaño p y f grados de libertad del error:

$$K_p = q_\alpha(p,f) S_i \qquad p=2,3,\ldots,r$$

El rango *studentizado* se calcula mediante $q = \dfrac{\bar{y}_{MAX} - \bar{y}_{MIN}}{\sqrt{\dfrac{MS_E}{n}}}$.

Los valores $\bar{y}_{MAX}$ e $\bar{y}_{MIN}$ corresponden a la máxima y mínima media muestral respectivamente en el grupo total de muestras. Con los valores de la tabla de puntos porcentuales de la estadística de amplitud studentizada se calculan los K_p de la misma manera que se realizaba en la prueba de Duncan.

La prueba de Newman—Keuls es menos eficaz que la de intervalos de Duncan porque detecta peor la posible diferencia de medias.

4.— Contraste de Tukey

Tukey en 1953 propone un nuevo procedimiento de comparación múltiple basado también en intervalos. Tukey establece que dos medias son significativamente diferentes si el valor absoluto de sus diferencias muestrales es superior a:

$$T_\alpha = q_\alpha(r,f)S\overline{y}_{i.}$$

Los valores de q y f los encontramos en las tablas que desarrolló el mismo Tukey. La prueba de Tukey tiene un nivel de error tipo I de α para todas las comparaciones por pares. Es más conservadora, un nivel error tipo I menor que las dos pruebas anteriores de Newman–Keuls y Duncan. Esta prueba tiene menos poder de discriminación que las anteriores.

Al plantear***nos*** qué método puede ser el que más se adapte a nuestro experimento, no hay una regla fija que nos permita determinar cuál es la mejor forma de comparar las medias de los tratamientos. Cramer y Swanson en 1973 realizaron unos estudios en Montercalo en los que analizaron estos métodos y otros aquí no mencionados. Llegaron a la conclusión que el método de mínimas diferencias significativas es un método muy eficiente para detectar diferencias entre medias, si el análisis de la varianza ha sido significativo al 95% de confianza. También destacaron el método de intervalos múltiples de Duncan. Ambos métodos son los más difundidos en la mayoría de los paquetes de programas estadísticos para ordenador.

5.— Comparación de tratamientos con un control

Hay ocasiones en que uno de los niveles de un factor actúa como nivel patrón, o de referencia, lo denominaremos control, por lo que ya no es necesario realizar las $\frac{r(r-1)}{2}$ posibles comparaciones, únicamente será necesario realizar la comparación del tratamiento control con el resto, es decir, deberemos realizar $r-1$ comparaciones.

Existen varios procedimientos; uno de los más conocidos es el método desarrollado por Dunnett (1964): denominemos al tratamiento control. Nuestras hipótesis serán:

$$H_0 : \mu_i = \mu_r$$

$$H_1 : \text{al menos una diferente } i=1,2,\ldots,r-1$$

Para cada par se calculan las diferencias entre las medias muestrales, se rechaza la hipótesis nula con un error α si:

$$|\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{r.}| > D_\alpha(r-1,f)\sqrt{MS_E \cdot \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_r}\right)}$$

si el diseño no es equilibrado, y la siguiente condición si lo es:

$$|\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{r.}| > D_\alpha(r-1,f)\sqrt{\frac{2 \cdot MS_E}{n}}$$

siendo la constante $D_\alpha(r-1,f)$ el valor correspondiente de la tabla de Dunnett.

6.– Estimación por intervalos de confianza

En este modelo suponemos que los resultados finales que el experimentador desea aportar aparecen en términos de intervalos de confianza y que está dispuesto a especificar de antemano la amplitud de los mismos.

Imaginemos que estamos realizando un experimento y deseamos un intervalo de confianza del 95%, que la diferencia entre dos tratamientos es un valor dado y que tenemos una desviación estándar calculada inicialmente.

La precisión del intervalo es $\pm t_{\alpha/2,N-r} \cdot \sqrt{\frac{2MS_E}{n}}$.

El nivel de significación propuesto se aplica sólo a un intervalo de confianza. Puede usarse el mismo método si el experimentador, de antemano, establece un conjunto de intervalos de confianza sobre los cuales se hará una afirmación conjunta.

9.– Métodos no paramétricos en el análisis de la varianza

El test de la F es muy robusto ante el no cumplimiento estricto de las condiciones de validez, no obstante hay veces en que las desviaciones son muy fuertes, en particular en el campo de la investigación pedagógica que es nuestro caso, psicológica, social, etc.

En estos casos no existe otro recurso para comparar el efecto de varios tratamientos que recurrir a tests no paramétricos, según las condiciones no satisfechas. Los más usuales son:

- El test de Kruskal–Wallis si falla la normalidad y la homocedasticidad.
- El de Cochran si fallan la normalidad, homocedasticidad e independencia.
- Y el test de Welch si falla la homocedasticidad.

1.– Test de Kruskal–Wallis

Lo usamos para probar la hipótesis de igualdad de r tratamientos, contra la hipótesis de que al menos uno de ellos es diferente.

Tenemos r muestras independientes de tamaños n_i de una variable aleatoria cuantitativa. Las mezclamos todas como si fuesen una única muestra de tamaño $\sum_{i=1}^{r} n_i = N$ elementos, que ordenamos de menor a mayor, y asignamos rangos del modo habitual y teniendo en cuenta los empates si los hubiere, calculamos la suma de los rangos de cada muestra R_i y comprobamos que:

$$\sum_{i=1}^{r} R_i = \frac{N\cdot(N+1)}{2}$$

El test no será valido si $r=3$ y algún n_i es menor o igual a 5.

La cantidad experimental para la realización del contraste, si llamamos t_i al número de empates del grupo i, y denominamos $T_i=(t_i-1)\cdot t_i\cdot(t_i+1)$, será:

$$W = \frac{\dfrac{12}{N(N+1)}\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)}{C} \qquad C = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} T_i}{(N-1)\cdot N\cdot(N+1)}$$

La cantidad teórica es una Ji$-$cuadrado con $a-1$ grados de libertad.

2.– Test de Welch

No precisa que el modelo sea equilibrado. Dadas r muestras se calcula el estadístico de contraste:

$$V^2 = \frac{\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} w_i\cdot(\overline{y}_{i.}-\overline{y}_{..})^2}{r-1}}{1+\dfrac{2\cdot(r-2)}{r^2-1}\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{f_i}\cdot\left[1-\frac{w_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} w_i}\right]}$$

con $f_i = n_i - 1$; $w_i = \frac{n_i}{S_i^2}$, se compara con una F de Snedecor con (υ_1, υ_2) grados de libertad:

$$\upsilon_1 = r-1 \qquad \text{y} \qquad \upsilon_2 = \left[\frac{3}{r^2-1} \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{f_i} \cdot \left(1 - \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i} \right)^2 \right]^{-1}$$

DISEÑOS FACTORIALES

1. — Introducción a los diseños factoriales

Muchos experimentos se llevan a cabo para estudiar los efectos producidos por dos o más factores, puede demostrarse que, en general, los diseños factoriales son los más eficientes para este tipo de experimentos. Por diseño factorial entendemos aquel en el que se investiga todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores en cada ensayo completo o réplica del experimento. Imaginemos que tenemos un factor A con r niveles y un factor B con s niveles, cada réplica del experimento contiene todas las $r \cdot s$ combinaciones de los tratamientos. A menudo se dice que los factores están cruzados cuando estos se analizan en un diseño factorial.

Definiremos el efecto de un factor como la modificación en la respuesta producida por un cambio en el nivel del factor. Con frecuencia se conoce como efecto principal, porque se refiere a los factores de interés primordial del experimento.

En algunos experimentos puede encontrarse que las diferencias entre los niveles de un factor no es la misma en todos los niveles de los otros factores, cuando esto ocurre existe una interacción entre los factores.

Hay que hacer notar que, cuando el valor de una interacción es grande, los efectos principales, es decir, los producidos por cada uno de los factores, pueden tener poco sentido práctico. Cuando los efectos de una interacción son muy significativos, el experimentador debe examinar los niveles del factor manteniendo fijos los niveles de los otros factores.

Las ventajas de los diseños factoriales pueden ilustrarse fácilmente. Supongamos que tenemos dos factores, A y B, cada uno de los cuales tiene dos niveles, los niveles los vamos a representar por A_1, A_2, B_1 y B_2. La información acerca de ambos factores podemos obtenerla modificando el nivel de un solo factor. El efecto de variar el factor A está dada por $A_2B_1 - A_1B_2$. Ya que existe el error experimental es conveniente realizar por lo menos dos observaciones de cada combinación de los tratamientos empleados (tabla 4), lo cual requiere un total de seis observaciones.

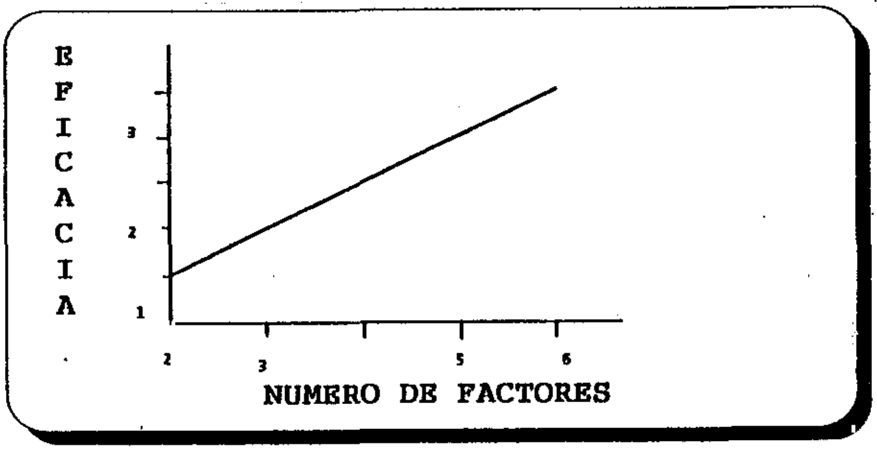
Tabla 4: Diseños factoriales

		FACTOR B	
		B_1	B_2
FACTOR A	A_1	$A_1 - B_1$	$A_1 - B_2$
	A_2	$A_2 - B_1$	

Si se hubiese realizado un experimento factorial, se habría recurrido a la combinación de tratamientos A_2B_2. De esta manera con sólo cuatro observaciones podrían calcularse dos estimaciones del efecto A; $A_2B_1 - A_2B_1$ y $A_2B_2 - A_1B_2$. De forma similar pueden hacerse las estimaciones del efecto B. Podrían promediarse para producir efectos principales, promedio que tiene la misma precisión que los experimentos de un factor, pero requieren tan sólo cuatro observaciones, y podría decirse que la eficacia relativa del diseño factorial para el experimento de un factor a la vez es de $\frac{6}{4} = 1'5$.

Esta eficacia relativa va aumentando con el número de factores, lo podemos ver en la figura 5.

FIGURA 5: Eficacia del diseño y número de factores



Imaginemos que en el primer diseño nos indica que A_1B_2 y A_2B_1 dan mejor respuesta que A_1B_1, una conclusión lógica sería que A_2B_2 es aún mejor, sin embargo, si existe interacción, al realizar esta afirmación incurrimos en un gravísimo error.

En resumen, podemos afirmar que los diseños factoriales poseen algunas ventajas: son más eficientes que los experimentos de un factor, es más, los diseños factoriales son necesarios cuando alguna interacción puede estar presente, con el propósito de evitar extraer conclusiones erróneas o engañosas. Los diseños factoriales nos permiten experimentar los efectos de un factor en los diversos niveles de los otros factores, dándonos soluciones que son válidas sobre la extensión de las condiciones experimentales.

A continuación haremos una descripción del diseño factorial de dos factores para después exponer el caso general.

2.– *Diseño factorial de dos factores*

Los casos más sencillos en el diseño factorial implican la existencia de únicamente dos factores. Partimos de un factor A con r niveles y un factor B con s niveles, por lo tanto tendremos $r{\cdot}s$ tratamientos diferentes.

Los datos observados pueden ser expresados como aparece la tabla 5. Cada columna expresa los diferentes niveles del factor B y cada fila los del factor A. En cada casilla tenemos los datos correspondiente a cada tratamiento, el modo en el que se deben tomar las $r{\cdot}s{\cdot}n$ observaciones debe ser completamente aleatorizado.

Tabla 5: Tratamientos de dos factores

		FACTOR B			
		1	**2**	...	s
FACTOR A	**1**	$y_{111},y_{112},\ldots,y_{11n}$	$y_{122},y_{122},\ldots,y_{12n}$	...	$y_{1s1},y_{1s2},\ldots,y_{1sn}$
	2	$y_{211},y_{212},\ldots,y_{21n}$	$y_{221},y_{222},\ldots,y_{22n}$	...	$y_{2s1},y_{2s2},\ldots,y_{2sn}$
	⋮	....	....	...	....
	r	$y_{r11},y_{r12},\ldots,y_{r1n}$	$y_{r21},y_{r22},\ldots,y_{r2n}$	...	$y_{rs1},y_{rs2},\ldots,y_{rsn}$

El modelo estadístico lineal mediante el cual podemos describir las observaciones será:

$$y_{ijk}=\mu+\tau_i+\beta_j+(\tau\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,r \\ j=1,2,\ldots,s \\ k=1,2,\ldots,n \end{array}$$

donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto del i–ésimo nivel del factor A, β_j es el efecto del j–ésimo nivel de factor B, $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción producida por el nivel i–ésimo del factor A y el nivel j–ésimo del factor B, ε_{ijk} es el componente del error aletorio.

Debemos suponer que ambos factores son fijos, que los efectos de los tratamientos se definen como desviaciones de la media general, esto implica que $\sum_{i=1}^{r}\tau_i=0$ y $\sum_{j=1}^{s}\beta_j=0$; también suponemos que los efectos de la interacción son fijos y que su suma es 0: $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\tau\beta)_{ij}=0$, y hay un total de $r{\cdot}s{\cdot}n$ observaciones, que es el número de veces que se realiza el experimento.

Nuestro interés radica en probar la hipótesis de igualdad de los efectos producidos por los diferentes niveles de cada uno de los factores, por un lado:

$$\begin{array}{l} H_0 : \tau_1=\tau_2=\ldots\tau_r \\ H_1 : \text{al menos una } \tau_i\neq\tau_j \end{array}$$

y del otro:

$$\begin{array}{l} H_0 : \beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_s \\ H_1 : \text{al menos una } \beta_i\neq\beta_j \end{array}$$

También nos interesa saber si los tratamientos interaccionan, luego debemos probar:

$H_0 : (\tau\beta)_{ij}$ iguales para todo i,j

H_1 : al menos una $(\tau\beta)_{ij}$ distinta de las demás

Vamos a ver cómo podemos probar estas hipótesis por medio del análisis de la varianza.

Antes de comenzar definiremos una serie de términos. Definiremos como $y_{i..}$ a la suma total de las observaciones bajo el i-ésimo nivel del factor A, como $y_{.j.}$ a la suma total de las observaciones bajo el j-ésimo nivel del factor B, $y_{ij.}$ a la suma total de las observaciones de la celda ij, por último designaremos con $y_{...}$ a la suma total de las observaciones.

También definiremos $\bar{y}_{i..}$, $\bar{y}_{.j.}$, $\bar{y}_{ij.}$ y $\bar{y}_{...}$ como las medias de los diferentes niveles de A y B, de las distintas interacciones y la media total:

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{s \cdot n} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{r \cdot n} \qquad j=1,2,\ldots,s$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{n} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,r \\ j=1,2,\ldots,s \end{array}$$

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{r \cdot s \cdot n} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

La suma total de cuadrados corregida podemos expresarla de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{...})^2 =$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}\left[(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})+(\overline{y}_{.j.}-\overline{y}_{...})+(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.}+\overline{y}_{...})-(y_{ij.}-y_{ijk})\right]^2 =$$

$$= s\cdot n\cdot\sum_{i=1}^{r}(\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{...})^2+r\cdot n\cdot\sum_{j=1}^{s}(\overline{y}_{.j.}-\overline{y}_{...})^2+n\cdot\sum_{i=i}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\overline{y}_{ij.}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.}+\overline{y}_{...})^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})^2$$

Esto es así ya que los seis productos cruzados del segundo miembro de la ecuación son iguales a cero.

El proceso algebraico ha consistido en descomponer la suma cuadrática de los errores en varias sumas cuadráticas: una es la suma de cuadrados debida al factor A (SS_A), otra es la suma de cuadrados debida al factor B (SS_B). Está, también, la suma de cuadrados debida a la interacción de los factores A y B (SS_{AB}), y, finalmente, la suma de cuadrados debida al error (SS_E). En consecuencia se tiene la igualdad

$$SS_T=SS_A+SS_B+SS_{AB}+SS_E$$

Tabla 6: Grados de libertad con dos factores

EFECTO	GRADOS DE LIBERTAD
A	$r-1$
B	$s-1$
INTERACCIÓN AB	$(r-1)\cdot(s-1)$
ERROR	$r\cdot s\cdot(n-1)$
TOTAL	$r\cdot s\cdot n-1$

Los grados de libertad asociados a cada una de las diferentes sumas de cuadrados son los reflejados en la tabla 6.

La descomposición efectuada sobre los $r \cdot s \cdot n - 1$ grados de libertad podemos justificarla de la siguiente manera: los efectos principales producidos por los factores A y B tienen r y s niveles respectivamente, por lo cual tendran $(r-1)$ y $(s-1)$ grados de libertad. Los grados de libertad de la interacción corresponden a los grados de libertad de cada celda, $r \cdot s - 1$, menos los grados de libertad de sus respectivos factores, en resumen será:

$$(r \cdot s-1)-(r-1)-(s-1)=(r-1)\cdot(s-1)$$

Dentro de cada uno de los $r \cdot s$ diferentes celdas tenemos n observaciones, por lo tanto, tendremos $n-1$ grados de libertad por celda, lo cual implica un total $r \cdot s(n-1)$ grados de libertad del error. Se cumple que los grados de libertad debidos al total, $r \cdot s \cdot n-1$, es igual a la suma de los grados de libertad debidos a los tratamientos, a la interacción y al error.

Cada una de las sumas de cuadrados dividida entre sus grados de libertad produce una media de cuadrados. Los valores esperados de dichas medias de cuadrados serán:

$$E(MS_A)=E\left(\frac{SS_A}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{s \cdot n \sum_{i=1}^{r} \tau_i^2}{r-1}$$

$$E(MS_B)=E\left(\frac{SS_B}{s-1}\right)=\sigma^2+\frac{r \cdot n \sum_{i=1}^{r} \beta_j^2}{s-1}$$

$$E(MS_{AB})=E\left(\frac{SS_{AB}}{(r-1)(s-1)}\right)=\sigma^2+\frac{n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\tau\beta)_{ij}^2}{(r-1)(s-1)}$$

$$E(MS_E)=E\left(\frac{SS_E}{r\cdot s\cdot(n-1)}\right)=\sigma^2$$

Si las hipótesis nulas, que recordemos consistían en la igualdad tanto entre los niveles de los factores como entre los diferentes tratamientos, se cumplen, se verificará que MS_A, MS_B, MS_{AB} y MS_E son estimadores insesgados de σ^2. Ahora bien, si MS_A fuera mayor que MS_E, entonces existiría una diferencia entre los distintos niveles del factor A, si fuese MS_B el que fuera mayor que la suma de cuadrados debida al error, sería entre los niveles del factor B entre los que existiesen diferencias, de forma similar ocurriría con la interacción.

Para probar la influencia de los efectos principales, los factores, así como su interacción, simplemente debemos dividir las medias de los cuadrados correspondientes entre las medias de cuadrados del error.

Si el modelo es el considerado inicialmente, $y_{ijk}=\mu+\tau_i+\beta_j+(\tau\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$, es el modelo adecuado y los términos del error ε_{ijk} son independientes con distribuciones normales de media cero y varianza constante σ^2, entonces las razones de las medias de los cuadrados producidas por el cociente de las medias de cuadrados con las media de cuadrados del error, $\frac{MS_A}{MS_E}$, $\frac{MS_B}{MS_E}$ y $\frac{MS_{AB}}{MS_E}$, tienen distribuciones F cada una con sus respectivos grados de libertad en el numerador, $r-1$, $s-1$ y $(r-1)\cdot(s-1)$, y $r\cdot s\cdot(n-1)$ en el denominador. Las regiones críticas corresponden al extremo superior de la distribución de la F. La prueba se presenta en la tabla de análisis de la varianza 7.

Tabla 7: Análisis de la varianza II

Fuente de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Media de cuadrados**	$\mathbf{F_0}$
TRATAMIENTO A	SS_A	$r-1$	$MS_A=\frac{SS_A}{r-1}$	$F_0=\frac{MS_A}{MS_E}$
TRATAMIENTO B	SS_B	$s-1$	$MS_B=\frac{SS_B}{s-1}$	$F_0=\frac{MS_B}{MS_E}$
INTERACCIÓN	SS_{AB}	$(r-1)\cdot(s-1)$	$MS_{AB}=\frac{SS_{AB}}{(r-1)\cdot(s-1)}$	$F_0=\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
ERROR	SS_E	$r\cdot s\cdot(n-1)$	$MS_E=\frac{SS_E}{r\cdot s\cdot(n-1)}$	
TOTAL	SS_T	$r\cdot s\cdot n-1$		

Las sumas de cuadrados es posible obtenerlas mediante las siguientes expresiones más operativas:

$$SS_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2-\frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_A=\sum_{i=1}^{r} y_{i..}^2-\frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_B=\sum_{j=1}^{s} y_{.j.}^2-\frac{y_{...}^2}{N}$$

Para obtener la suma de cuadrados debida a los tratamientos, primero calcularemos la suma de cuadrados entre los totales de los $r{\cdot}s$ tratamientos, que la llamaremos suma de cuadrados debido a los subtotales:

$$SS_{SUBTOTALES}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} y_{ij.}^2-\frac{y_{...}^2}{N}$$

Esta suma de cuadrados contiene también a la suma de cuadrados debidos a los factores SS_A y SS_B, por lo tanto SS_{AB} será:

$$SS_{AB}=SS_{SUBTOTALES}-SS_A-SS_B$$

La suma de los cuadrados del error se podrá calcular por la diferencia:

$$SS_E=SS_T-SS_{SUBTOTALES}$$

1.– Comparaciones múltiples

Si el análisis efectuado nos lleva a concluir que existen diferencias entre los efectos de los factores, es necesario realizar comparaciones entre las medias de las filas o columnas para encontrar las diferencias específicas, para ello debe recurrirse a los mismos métodos expuestos en el análisis de un sólo factor.

2.– Comprobación de la idoneidad del modelo

Al igual que se explicó en el análisis de un sólo factor, debe comprobarse la idoneidad del modelo para poder extraer conclusiones del análisis de la varianza. La mejor herramienta de la que disponemos para verificar la idoneidad de nuestro modelo es el estudio de los residuos.

Los residuos los calcularemos restando de cada observación su valor ajustado, que es la media de su tratamiento. El estudio de los residuos es el mismo que el explicado en el análisis de la varianza de un sólo factor.

3.– *Estimación de los parámetros del modelo*

Una forma de estimar los parámetros es la aplicación del método de mínimos cuadrados. Debemos estimar $1+r+s+r\cdot s$ parámetros, luego tendremos el mismo número de ecuaciones normales.

$$\mu : \quad r\cdot s\cdot n\cdot\hat{\mu}+s\cdot n\cdot\sum_{i=1}^{r}\hat{\tau}_i+r\cdot n\cdot\sum_{j=1}^{s}\hat{\beta}_j+n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\tau\beta)_{ij} = y_{...} \tag{1}$$

$$\tau_i : \quad s\cdot n\cdot\hat{\mu}+s\cdot n\cdot\hat{\tau}_i+n\cdot\sum_{j=1}^{s}\hat{\beta}_j+n\cdot\sum_{j=1}^{s}(\tau\beta)_{ij} = y_{i..} \tag{2}$$

$$\beta_j\mu : \quad r\cdot n\cdot\hat{\mu}+n\cdot\sum_{i=1}^{r}\hat{\tau}_i+r\cdot n\cdot\hat{\beta}_j+n\cdot\sum_{i=1}^{r}(\tau\beta)_{ij} = y_{.j.} \tag{3}$$

$$(\tau\beta)_{ij} : \quad n\cdot\hat{\mu}+n\cdot\hat{\tau}_i+n\cdot\hat{\beta}_j+n\cdot(\tau\beta)_{ij} = y_{ij.} \tag{4}$$

A la derecha de cada ecuación normal, hemos colocado su parámetro correpondiente.

La suma de las r ecuaciones normales de la ecuación (2), nos da la ecuación (1), al igual que si sumamos las s posibles de la (3) obtenemos la (1). Si sumamos respecto a i la ecuación (4) obtenemos la ecuación (2) y si lo hacemos respecto a j obtenemos la ecuación (3).

Por lo tanto, el sistema no tendrá una solución única. Para poder resolver el sistema necesitamos más restricciones. Las restricciones que emplearemos serán:

$$\sum_{i=1}^{r} \hat{\tau}_i = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \hat{\beta}_j = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{r} (\hat{\tau\beta})_{ij} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,s \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{s} (\hat{\tau\beta})_{ij} = 0 \qquad i=1,2,\ldots,r \tag{8}$$

Las ecuaciones **(5)** y **(6)**, nos proporcionan una restricción cada una, y de las ecuaciones **(7)** y **(8)**, obtenemos $r+s-1$ restricciones independientes.

Si resolvemos el sistema obtenemos las siguientes soluciones:

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{...}$$

$$\hat{\tau}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

$$\hat{\beta}_j = \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...} \qquad j=1,2,\ldots,s$$

$$(\hat{\tau\beta}) = \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...} \qquad i=1,2,\ldots,r \qquad j=1,2,\ldots,s$$

Los efectos debidos a los niveles del factor A se estiman mediante la diferencia de la media de cada nivel con la media general, igual ocurre con el factor B, y el factor de la ij−ésima interacción lo estimamos restando a su media la media del factor A en el nivel i, la media del factor B en el j−ésimo nivel y añadiéndole la media general.

El valor esperado de una observación lo podemos obtener despejando los resultados obtenidos en el modelo:

$$\hat{y}_{ijk}=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i+\hat{\beta}_j+(\hat{\tau}\hat{\beta})_{ij}$$

Sustituyendo por los valores obtenidos:

$$\bar{y}_{...}+(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})=\bar{y}_{ij.}$$

En algunas ocasiones puede resultar conveniente llevar a cabo el análisis de la varianza sin tener en cuenta la interacción entre los niveles de los diferentes factores. Cuando así lo realicemos utilizaremos el modelo:

$$y_{ijk}=\mu+\tau_i+\beta_j+\varepsilon_{ijk}$$

No conviene utilizar este modelo a no ser que tengamos la certeza de la no existencia de interacciones significativas, pues podríamos obtener unos resultados que nos condujeran a conclusiones erróneas.

3.– Diseño factorial general

Los resultados y conclusiones extraídas del estudio del diseño factorial de dos factores, pueden hacerse extensivos al diseño factorial general en el que existan varios factores, A, B, C, etc., tal que cada uno de ellos tenga r, s, t, etc., niveles respectivamente.

Si tenemos n réplicas del experimento completo, tendremos un total de $r \cdot s \cdot t \cdot n=N$ observaciones diferentes. El número de réplicas mínimo que podemos emplear es de dos si queremos introducir en el modelo todas las interacciones posibles.

En el modelo de efectos fijos, que es el que hemos estado estudiando, aquellos estadísticos de contraste que prueban tanto los efectos principales como los efectos debido a las distintas interacciones, los podemos construir dividiendo la media de cuadrados de ese efecto, o de esa interacción correspondiente, entre la media de los cuadrados del error. Todas las pruebas de la F corresponden a pruebas unilaterales del extremo superior.

En cuanto a los grados de libertad, los de los efectos principales serán igual al número de niveles de ese factor menos uno, y el de las interacciones al producto del número de niveles menos uno de todos los factores que formen parte de dicha interacción.

Consideremos un diseño de tres factores, A, B y C, cada uno de los cuales tiene r, s y t niveles respectivamente. El modelo del análisis de la varianza sería:

$$y_{ijkl}=\mu+\tau_i+\beta_j+\gamma_k+(\tau\beta)_{ij}+(\tau\gamma)_{ik}+(\beta\gamma)_{jk}+(\tau\beta\gamma)_{ijk}+\varepsilon_{ijkl}$$

La tabla 8 de análisis de la varianza representa un modelo de efectos fijos de tres factores con r, s y t niveles respectivamente. Las pruebas F para probar los efectos principales, así como las interacciones, se deducen inmediatamente a partir de los valores esperados de la media de los cuadrados.

Tabla 8: Análisis de la varianza III

Fuente de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Media de cuadrados**	**Valor esperado de la media de cuadrados**	F_0
A	SS_A	$r-1$	MS_A	$\sigma^2+\frac{s\cdot t\cdot n\cdot \sum \tau_i^2}{r-1}$	$F_0=\frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	$s-1$	MS_B	$\sigma^2+\frac{r\cdot t\cdot n\cdot \sum \beta_j^2}{s-1}$	$F_0=\frac{MS_B}{MS_E}$
C	SS_C	$t-1$	MS_C	$\sigma^2+\frac{r\cdot s\cdot n\cdot \sum \gamma_k^2}{t-1}$	$F_0=\frac{MS_C}{MS_E}$
AB	SS_{AB}	$(r-1)\cdot(s-1)$	MS_{AB}	$\sigma^2+\frac{c\cdot n\cdot \sum\sum (\tau\beta)_{ij}^2}{(r-1)\cdot(s-1)}$	$F_0=\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
AC	SS_{AC}	$(r-1)\cdot(t-1)$	MS_{AC}	$\sigma^2+\frac{b\cdot n\cdot \sum\sum (\tau\gamma)_{ik}^2}{(r-1)\cdot(t-1)}$	$F_0=\frac{MS_{AC}}{MS_E}$
BC	SS_{BC}	$(s-1)\cdot(t-1)$	MS_{BC}	$\sigma^2+\frac{a\cdot n\cdot \sum\sum (\beta\gamma)_{jk}^2}{(s-1)\cdot(t-1)}$	$F_0=\frac{MS_{BC}}{MS_E}$
ABC	SS_{ABC}	$(r-1)\cdot(s-1)\cdot(t-1)$	MS_{ABC}	$\sigma^2+\frac{n\cdot \sum\sum\sum (\tau\beta\gamma)_{ij}^2}{(r-1)\cdot(s-1)\cdot(t-1)}$	$F_0=\frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	SS_E	$r\cdot s\cdot t\cdot(n-1)$	MS_E	σ^2	
Total	SS_T	$r\cdot s\cdot t\cdot n-1$			

Para calcular las sumas de cuadrados podemos emplear las formulas que ha continuación se exponen. El procedimiento es similar al seguido en el diseño de dos factores.

La suma total de cuadrados será:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{r \cdot s \cdot t \cdot n} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$$

La suma de los efectos principales se calcula por medio de los totales de cada uno de los factores:

$$SS_A = \sum_{i=1}^{r} \frac{y_{i...}^2}{s \cdot t \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N} \qquad SS_B = \sum_{j=1}^{s} \frac{y_{.j..}^2}{r \cdot t \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N} \qquad SS_C = \sum_{k=1}^{t} \frac{y_{..k.}^2}{r \cdot s \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N}$$

Para poder calcular las sumas de cuadrados de las interacciones de dos factores recurriremos a los totales de las combinaciones de dos en dos o, de otra forma, sumaremos los valores de las celdas $A \times B$, $A \times C$ y $B \times C$. La estrategia más conveniente, para poder calcular estas cantidades con mayor facilidad, consiste en desglosar la tabla de datos original en tres tablas de datos, teniendo en cuenta en cada una de ellas la acción de dos factores, sin tener en cuenta el tercero, con el fin de calcular los totales. Las sumas de cuadrados serán:

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{y_{ij..}^2}{t \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N} - SS_A - SS_B = SS_{SUBTOTALES(AB)} - SS_A - SS_B$$

$$SS_{AC} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{t} \frac{y_{i.k.}^2}{s \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N} - SS_A - SS_C = SS_{SUBTOTALES(AC)} - SS_A - SS_C$$

$$SS_{BC} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \frac{y_{.jk.}^2}{r \cdot n} - \frac{y_{....}^2}{N} - SS_B - SS_C = SS_{SUBTOTALES(BC)} - SS_B - SS_C$$

La suma de cuadrados de la interacción de los tres factores la determinamos usando los totales de las celdas en todos los sentidos.

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \frac{y_{ijk.}^2}{n} - \frac{y_{....}^2}{N} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} =$$

$$= SS_{SUBTOTALES(ABC)} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC}$$

Por último, la suma de cuadrados debida al error la calcularemos por la diferencia entre la suma de cuadrados total y la suma de cuadrados debida a los subtotales ABC.

$$SS_E = SS_T - SS_{SUBTOTALES(ABC)}$$

Los métodos para la comparación de medias y las condiciones de validez del modelo son los mismos que han sido expuestos en el análisis de la varianza con anterioridad.

1.— Diseños desequilibrados

Hasta ahora hemos analizado el diseño factorial como un diseño equilibrado, pero existen ocasiones en las que no es posible equilibrar los datos, es decir, no tenemos el mismo número de observaciones en cada una de las celdas. Este tipo de problemas aparece en ocasiones porque, si bien el experimentador elabora y realiza un diseño equilibrado, surgen problemas y se pierden algunas observaciones, con lo cual, lo transformamos en un diseño desequilibrado.

En otras ocasiones se realiza un diseño desequilibrado porque algunas de las diferentes combinaciones entre los tratamientos son de alto coste económico o de difícil realización. Cuando los experimentos son de tipo sociológico, psicológico..., en general, ubicados en el ámbito de la estadística de las ciencias sociológicas, como es nuestro caso que se centra en un aspecto concreto de la formación matemática intermedia, puede ocurrir que el número de individuos perteneciente al nivel de algún factor sea muy superior al de los otros niveles, y sea necesario desbalancearlo para poder tener una muestra más representativa en las diferentes celdas, ya que la precisión perdida por el hecho de no ser equilibrado es inferior si reducimos drásticamente el número de réplicas.

La propiedad de ortogonalidad de los efectos principales y de las interacciones presentes en el diseño factorial equilibrado no se cumplen en el caso en que sea desequilibrado, por lo tanto, no podemos aplicar las técnicas normales del análisis de la varianza.

El no poder aplicar el análisis de la varianza, hace que el diseño factorial no equilibrado sea más difícil de llevar a cabo que el equilibrado. Lo veremos en un diseño de dos factores de efectos fijos siendo sencilla su generalización.

Supondremos que el número de observaciones de la celda ij−ésima será $n_{ij.}$, denominaremos $n_{i.}$ al número de observaciones de la i−ésima fila que corresponde al número de observaciones del i−ésimo nivel del factor A. De igual forma denominaremos $n_{.j}$ al número de observaciones de la j−ésima columna, que corresponde a las observaciones existentes en el nivel j−ésimo del factor B. Y será N el número total de observaciones.

2.− *Datos proporcionales*

Cuando los datos son proporcionales, aunque el diseño no sea equilibrado la dificultad que representa su resolución no es muy grande. Diremos que los datos son proporcionales, cuando se cumpla la siguiente ecuación:

$$n_{ij}=\frac{n_{i.}\cdot n_{.j}}{N}$$

Si esto ocurre, podemos realizar un análisis de la varianza únicamente con algunas modificaciones en las fórmulas utilizadas para calcular la suma de cuadrados:

$$SS_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk}^2-\frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_A=\sum_{i=1}^{r}\frac{y_{i..}^2}{n_i}-\frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_B=\sum_{j=1}^{s}\frac{y_{.j.}^2}{n_i}-\frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_{AB}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}-\frac{y_{...}^2}{N}-SS_A-SS_B$$

$$SS_E=SS_T-SS_A-SS_B-SS_{AB}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk}^2-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

3. – Métodos aproximados

En algunas ocasiones los datos no están muy desequilibrados, podemos entonces usar una serie de métodos aproximados que nos transformen el problema en uno equilibrado. En la realidad, hay que ver cuándo los datos no están muy desbalanceados para poder utilizar los métodos que exponemos a continuación.

1.– Estimación de observaciones faltantes

Cuando el número de valores que faltan es pequeño podemos estimarlos, con lo que podremos equilibrar el diseño.

2.– Eliminación de datos

En ocasiones será más sencillo eliminar algún dato que estimar una serie de ellos. Imaginemos un diseño de tres factores con dos niveles cada uno en el que existen un total de 81 observaciones, repartidas diez en siete de las ocho celdas y once en la otra celda. Es de suponer que facilitaremos el trabajo, y tendremos menos error, si desechamos uno de los datos de la celda que posse once observaciones que si estimamos siete valores para las restantes,lo cual supondría que cerca del 8% de los datos han sido estimados.

La observación que se elimine debe ser elegida al azar. Otra solución es retirar una y realizar el análisis; una vez efectuado recuperaramos ese resultado y obtenemos una observación diferente, a continuación repetiremos el análisis de la varianza. Lo normal es que no existan diferencias que comprometan los resultados obtenidos. Si ocurriese, puede ser debido a que una de las observaciones eliminadas corresponda a un residuo aleatorio alejado, o a un error a la hora de obtener o anotar los datos.

3.– Método de los promedios **no ponderados**

Este método fué introducido por Yates en el año 1934. Considera la media de las observaciones de cada celda como un sólo dato independiente del número de observaciones de cada una de las celdas, y realiza un diseño factorial equilibrado para obtener la suma de cuadrados de los diferentes factores principales, así como las interacciones. La media de cuadrados debida al error será:

$$MS_E = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{t} \frac{(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}{N - r \cdot s}$$

Usaremos la media de cuadrados debida al error para así poder estimar σ^2, la varianza de las observaciones individuales. Sin embargo, la media de cuadrados del error utilizada en el análisis de la varianza debe estimar la varianza de la media de las celdas $y_{ij.}$ porque el análisis se ha realizado sobre la medias de las celdas y la varianza de la media de la ij−ésima celda será $\frac{\sigma^2}{n_{ij}}$.

$$\bar{V}(\bar{y}_{ij.}) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\sigma^2}{n_{ij}}}{r \cdot s} = \frac{\sigma^2}{r \cdot s} \cdot \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{n_{ij}}$$

Si denominamos MS_E al valor anteriormente obtenido y utilizamos como estimador de σ a MS_E tenemos:

$$MS_E' = \frac{MS_E}{r \cdot s} \cdot \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{n_{ij}}$$

Esta es la fórmula que utilizaremos para obtener la media de cuadrados debida al error en el análisis de la varianza, con $n - r \cdot s$ grados de libertad.

La ventaja de este método es la simplicidad de los cálculos. Un inconveniente se presenta cuando las n_{ij} son muy diferentes. En este caso, el método pierde efectividad, pudiendo aportar conclusiones erróneas.

4.– Método exacto

En aquellas situaciones en que los métodos de aproximación no son apropiados, casos con celdas vacías o n_{ij} muy diferentes, el experimentador debe usar el método exacto. Para desarrollar las sumas de cuadrados, con el fin de probar los efectos principales y las interacciones, se representa el modelo de análisis de la varianza mediante un modelo de regresión. Se ajusta el modelo a los datos y se utiliza la técnica de la prueba de significación de regresión general.

Existen diferentes formas de llevar a cabo este método y cada uno de ellos puede darnos resultados diferentes para la suma de cuadrados. Además las hipótesis que se prueban no siempre son análogas a las del caso equilibrado, y los resultados no siempre pueden interpretarse fácilmente.

MATERIALIZACIÓN DEL DISEÑO Y RESULTADOS

OBTENCION DE LOS DATOS

El experimento se ha realizado con el alumnado de C.O.U. del instituto VOX situado en la Gran Vía de Madrid.

En dicho instituto, y a lo largo de seis cursos académicos, se ha explicado, siguiendo tres métodos diferentes, el concepto matemático de determinante, sus propiedades y aplicaciones más notables. Estos métodos son los que hemos designado como: el método histórico, llamado también de las permutaciones, el método de las formas multilineales, y el método axiomático–inductivo. En cada curso escolar se han seguido dos de los métodos indicados, cada uno de ellos en un solo grupo, de acuerdo con la correspondiente programación, y siempre dentro de los contenidos que contempla el programa oficial vigente de la asignatura de Matemáticas I, del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.).

Uno de los C.O.U.s de cada año corresponde a la opción denominada A, o rama Científica, cuyos alumnos cursan la asignatura de Matemáticas I con el carácter de materia obligatoria. El otro grupo, del mismo año, lo constituyen alumnos de la opción B o Bio–Sanitaria en la que se cursa la misma asignatura, como materia optativa dentro de la opción.

El número de métodos existente es de tres y el número de *opciones* son dos, obligatoria y optativa, para obtener un equilibrio en los datos necesitamos que el número de C.O.U.s que reciban cada uno de los diferentes métodos sea el mismo, es decir cuatro, pero además es necesario que de esos cuatro dos sean de la op–

ción A y dos de la opción B. Para asignar el método que ibamos a emplear en cada uno de los C.O.U.s para explicar los determinantes, de forma que cumpliera con la condición arriba indicada, lograr el equilibrio de los datos, y con la de aleatoriedad necesaria en el diseño de experimentos, realizamos el siguiente procedimiento: Colocamos en una urna tres bolas en cada una de las cuales figuraba el nombre de uno de los métodos empleados, procedimos a extraer una de las bolas, se extrajo la correspondiente al método de formas multilineales, a continuación se extrajo la del método histórico y por último la del método axiomático inductivo. Este es el orden que se utilizó para la explicación de los métodos, el primer año se explico al C.O.U. con la opción A el metodo multilineal y al C.O.U. con la opción B el histórico, el segundo año se explicó el método axiomático inductivo a la opción A e iniciamos de nuevo el ciclo, es decir, a la opción B le fueron explicados los determinantes por el método multilineal, y así se continuó hasta completar el periodo de seis años, con lo que conseguimos que, de los doce C.O.U.s, cuatro recibieran el método multilineal, cuatro el histórico y cuatro el axiomático–inductivo, y, dentro de los cuatro C.O.U.s, de cada método dos fueron de la opción A y dos de la B.

El número total de alumnos fue de 493, aproximadamente unos 40 alumnos por clase, los que nos *sirvieron* como *material* para la realización de este experimento. El instituto VOX es un centro en el que no se imparte B.U.P., con lo cual la procedencia de sus alumnos es muy diversa, también cabe destacar el gran número de alumnos que ya ha cursado C.O.U. en otros centros, más el número de repetidores del propio centro, que hace que el número de alumnos que ya han realizado C.O.U. con anterioridad sea muy elevado, superior al 40%.

La variable utilizada para verificar la eficacia de los diferentes métodos ha sido la calificación obtenida en una prueba teórico–práctica propuesta a los alumnos sobre determinantes, sus propiedades y primeras aplicaciones, realizada ocho días después de finalizar la exposición teórica y habiendo sido atendidas las correspondientes aclaraciones a las dudas surgidas y desarrollados los ejercicios propuestos para asimilar los conceptos o mejorar estrategias. Este examen se ha diseñado con cinco cuestiones con idéntica puntuación máxima de dos puntos y una duración no superior a dos horas. Las variaciones en la calificación inferiores a un cuarto de punto se desprecian.

Junto con el diferente método de enseñanza utilizado hemos estudiado otros factores dentro del diseño principal. Estos factores son, por una parte, el factor denominado procedencia, en él hemos clasificado a los alumnos según provengan de un centro privado o de un centro estatal, otro factor ha sido la optativa, entendiendo por optativa si están cursando la opción A o la opción B anteriormente mencionadas y, por último, si son o no repetidores.

El primer factor, que es el método de enseñanza utilizado, tiene tres niveles, denominamos uno al método de formas multilineales, dos al método histórico y tres al método axiomático inductivo. El segundo factor es la procedencia, como ya hemos mencionado, consta de dos niveles, que hemos denominado cero si proviene de centro privado y uno si su procedencia es de un centro público. El tercero, también con dos niveles, es el denominado optativa; designaremos con cero a la opción B y con uno a la opción A. Y, por último, el factor cuatro, que designamos como repetidor, reseñando con cero al alumno que ya ha realizado C.O.U. en alguna otra ocasión y con uno al que lo realiza por primera vez.

Si combinamos los diferentes niveles de nuestros cuatro factores tenemos 24 posibles grupos *diferentes*, llamaremos grupo al conjunto de individuos con las mismas características, es decir, con los mismos valores en todos los factores.

Con la totalidad de los alumnos que han cursado C.O.U. estos años comprobamos sus fichas de ingreso y los clasificamos en grupos; por ejemplo, todos los alumnos a los cuales se les había explicado los determinantes por el método tradicional, que pertenecían a la opción A de C.O.U., que realizaron B.U.P. en un centro público y que era la primera vez que cursaban los estudios de C.O.U., sería un grupo de los 24. Dentro de cada grupo tenemos entre 18 y 25 alumnos.

Como la idea era realizar un diseño equilibrado o balanceado por muestreo aleatorio simple, obtuvimos un muestra de 17 individuos de cada grupo, con el fin de poder realizar este tipo de diseño. Si multiplicamos 17 por el número total de grupos, tenemos que el tamaño de nuestra muestra es de 408 alumnos.

Tratamos de detectar, si existe, alguna diferencia estadísticamente significativa tanto en los efectos principales de los factores mencionados, como en la interacción entre ellos.

También hemos estudiado el factor sexo, pero no ha sido introducido en el diseño principal. Ha sido objeto de un diseño posterior junto con la variable métodos de enseñanza. La razón de no hacerlo obedece a dos causas: por una parte, el hecho de introducir un nuevo factor hubiera reducido el número de alumnos dentro de cada grupo, lo cual podría habernos llevado a posibles conclusiones erróneas, principalmente en las interacciones, debido a la poca representatividad de la muestra y, en segundo lugar, el número de alumnas es prácticamente el doble que el de alumnos, con lo cual, para poder balancear el diseño, el número de individuos dentro de cada grupo hubiese sido muy pequeño, restándole fiabilidad a los resultados.

Con la distribución de factores y la correspondiente valoración de los respectivos niveles, así como con las calificaciones resultantes de la prueba hemos construido una matriz de datos en la que cada fila es un indivduo y cada columna una variable diferente, con esta matriz iniciamos el análisis de la varianza con cuatro factores, *método de enseñanza*, *procedencia*, *optatividad* y *repetidor* y una variable respuesta que es la calificación de la prueba sobre la teoría de los determinantes.

DISEÑO PRINCIPAL

Aunque en el apartado anterior ya hemos adelantado una idea del modelo que vamos a seguir, lo precisaremos con más detalle.

Tabla 9: Parámetros estadísticos de la variable respuesta

VARIABLE	**Calificación numérica de la prueba de 0 a 10 puntos**
TAMAÑO MUESTRAL	408
MEDIA	5'50042
MEDIANA	5'5
MODA	5
MEDIA GEOMÉTRICA	4'97425
VARIANZA	4'52525
DESVIACIÓN TÍPICA	2'12726
ERROR ESTÁNDAR	0'105315
MÍNIMO	0'5
MÁXIMO	10
RANGO O RECORRIDO	9'5
QUARTIL INFERIOR	4
QUARTIL SUPERIOR	7
RANGO INTERQUARTILES	3
SIMETRÍA	−0'074372
SIMETRÍA ESTANDARIZADA	−0'613287
CURTOSIS	−0'549939
CURTOSIS ESTANDARIZADA	−2'26746
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	38'6746
SUMA	2244'17

Vamos a realizar un diseño factorial de cuatro factores, en el cual uno de los factores constará de tres niveles y los otros tres factores de dos. Los factores son el método de enseñanza, con tres niveles ya definidos, la procedencia con dos, la optativa y el repetidor ambos también con dos niveles. La variable respuesta es la calificación numérica realizada al concluir la materia relativa a la teoría de los determinantes.

Una vez definido el diseño vamos a dar una serie de parámetros estadísticos de la variable respuesta que es la calificación de los alumnos en la correspondiente prueba.

1.– Verificación de las condiciones de validez

Antes de realizar el análisis de la varianza del modelo diseñado debemos proceder a comprobar que los errores, definiendo como errores la diferencia existente entre el valor observado y la media de cada grupo, cumplen con las propiedades de homogeneidad, homocedasticidad, independencia y normalidad. Para ello llevaremos a cabo un estudio en el que aplicaremos diversos tests para verificar que los residuos cumplen las condiciones de validez que nos permitan realizar el análisis de la varianza.

En la tabla 10 reflejamos los principales parámetros estadísticos de la variable, que hemos denominado errores o residuos.

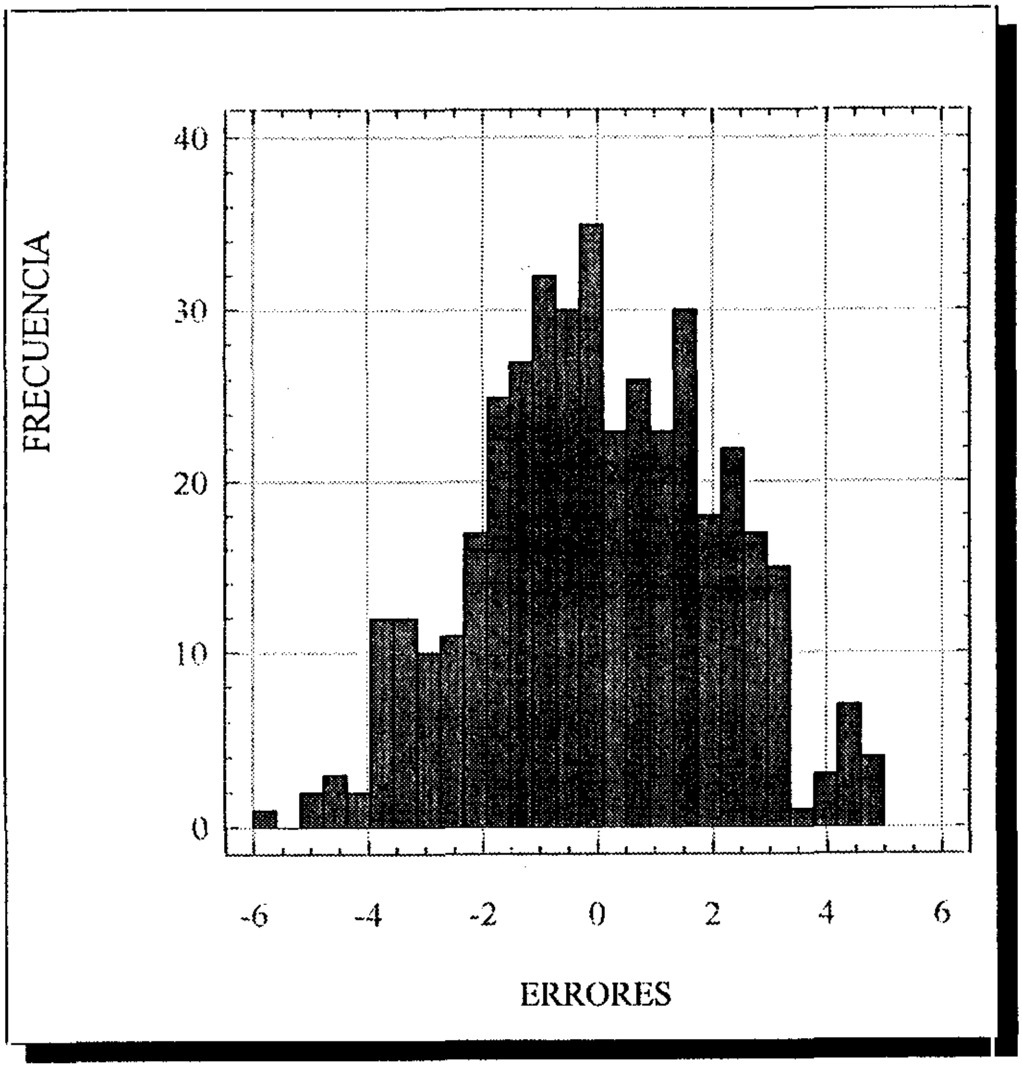
En el gráfico 1 se representa un histograma de frecuencias absolutas, en él vemos como está distribuida la variable errores.

Tabla 10: Parámetros estadísticos de la variable errores o residuos

VARIABLE	ERRORES
TAMAÑO MUESTRAL	408
MEDIA	1'02835 E−13
MEDIANA	−0'0735294
MODA	−1'10588
MEDIA GEOMÉTRICA	
VARIANZA	4'52525
DESVIACIÓN TÍPICA	2'12726
ERROR ESTÁNDAR	0'102073
MÍNIMO	−5'87647
MÁXIMO	4'98824
RANGO	10'8647
QUARTIL INFERIOR	−1'42353
QUARTIL SUPERIOR	1'49706
RANGO INTERQUARTILES	2'92059
SIMETRÍA	−0'0356004
SIMETRÍA ESTANDARIZADA	−0'293569
CURTOSIS	−0'381423
CURTOSIS ESTANDARIZADA	−1'57265
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	2'00493 E−15
SUMA	−4'19567

GRÁFICO 1: HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS

(70431001)



El histograma divide la distribución de los errores en intervalos. La altura de cada uno de ellos nos indica el número de errores o residuos que hay dentro del mismo.

1.– Homogeneidad

En primer lugar debemos demostrar la homogeneidad de la muestra. Si la muestra es homogénea la media de los errores debe ser 0. Planteamos un test para verificar si el valor que nos da la media, que es de 1'02835 E−13, puede ser considerado 0. El intervalo de variación para la media a un nivel de confianza del 95% es (−0'2007,0'2007).

Las hipótesis planteadas son que la distribución de los errores tiene de media 0, como hipótesis nula, o distinta de 0, como hipótesis alternativa, con un $\alpha=0'05$: $\begin{array}{l} H_0 : \mu=0 \\ H_1 : \mu\neq 0 \end{array}$.

Para realizar el contraste utilizaremos el siguiente estadístico: $T_{EXP}=\dfrac{|\bar{y}-\mu|}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$,

obteniéndose: $T_{EXP}=1'00747$ E−12.

Lo comparamos con una T con 407 grados de libertad, lo que nos da un nivel de significación de 1 que la media es 0. Con este resultado podemos afirmar que la media de los residuos es igual a 0, con una garantía casi absoluta.

La homogeneidad de los residuos está garantizada por la propia muestra. No podemos considerar a los individuos como homogéneos comparándolos uno a uno como es evidente, ahora bién, durante los años en que se ha desarrollado el experimento el plan de estudios no ha cambiado y el Instituto sigue encontrándose en el mismo lugar, por lo que podemos afirmar que el conjunto de alumnos sigue siendo el mismo y, en consecuencia, considerar homogéneos los grupos de alumnos.

Realizamos, también, un test de rechazo de observaciones erróneas para comprobar la posible existencia de algún error en la toma de los datos o algún valor inusitado. Para realizarlo colocamos la muestra ordenando las calificaciones en orden ascendente o descendente.

La homogeneidad explicada dentro de los grupos, unido a la demostración de que la media de los residuos es 0, garantiza la homogeneidad de los residuos.

2.– Homocedasticidad

Para verificar la homocedasticidad aplicamos el test de Barlett que nos pueda confirmar la hipótesis de igualdad entre las varianzas de los diferentes grupos; así mismo, por medio de gráficos, analizaremos la varianza de los niveles de los diferentes factores.

El test de Barlett contrasta la hipótesis de igualdad entre las varianzas de los diferentes grupos frente al hecho de que al menos una de ellas sea diferente. Para ello utiliza un estadístico de contraste a comparar con una $\chi^2_{TEORICA}$ con tantos grados de libertad como número de varianzas compara menos 1.

La media de las varianzas de los distintos grupos es de 4'240470. El valor de la χ^2_{EXP} y la teórica para un α=0'05 serán:

$$\chi^2_{EXP} = 24'30177$$
$$\chi^2_{TEORICA,\alpha=0'05,23G.L.} = 32'007$$

Al ser la $\chi^2_{EXP} < \chi^2_{TEORICA}$ aceptamos la hipótesis nula. Esta afirma que las varianzas de los distintos grupos son iguales.

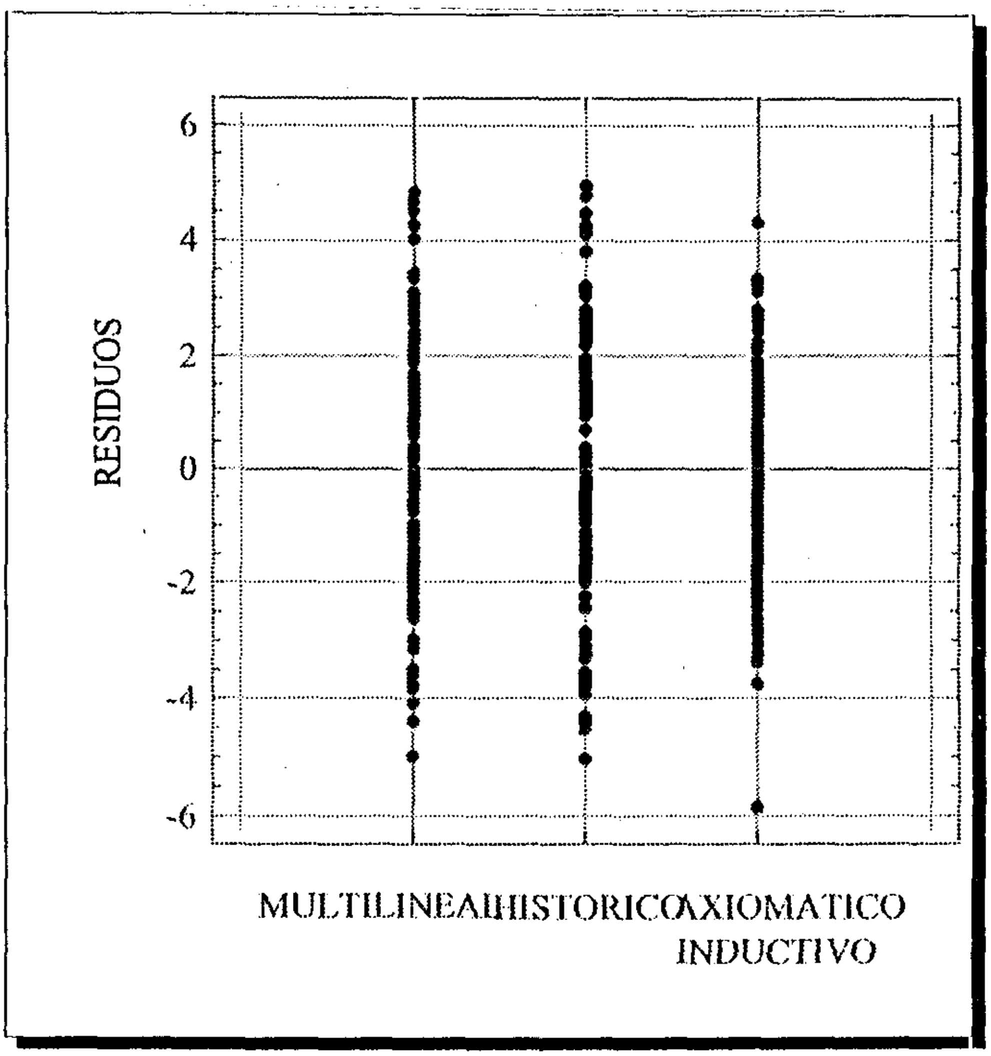
En los gráficos del 2 al 5 vemos como se distribuyen los residuos de las calificaciones en los niveles de los diferentes factores; se puede apreciar que son muy similares, únicamente se observa que en el factor denominado método de enseñanza existe una concentración de los datos algo más acusada en el nivel número tres, correspondiente al método axiomático–inductivo, que en los otros dos métodos.

El gráfico número 6 nos muestra cómo están distribuidos los errores dentro de cada uno de los grupos según el valor de la media de la calificación del examen. No se aprecia una distribución de los residuos diferente según el valor de su media.

El gráfico número 7 nos muestra los valores de las varianzas dentro de los diferentes grupos. La numeración de los diferentes grupos se ha hecho desde el número 1 hasta el 24, siguiendo el mismo orden que el establecido en la matriz de datos. El primer grupo corresponde a los niveles 1, 0, 0, y 0 de los factores en estudio y así sucesivamente, hasta el último que corresponde a los niveles 3, 1, 1 y 1.

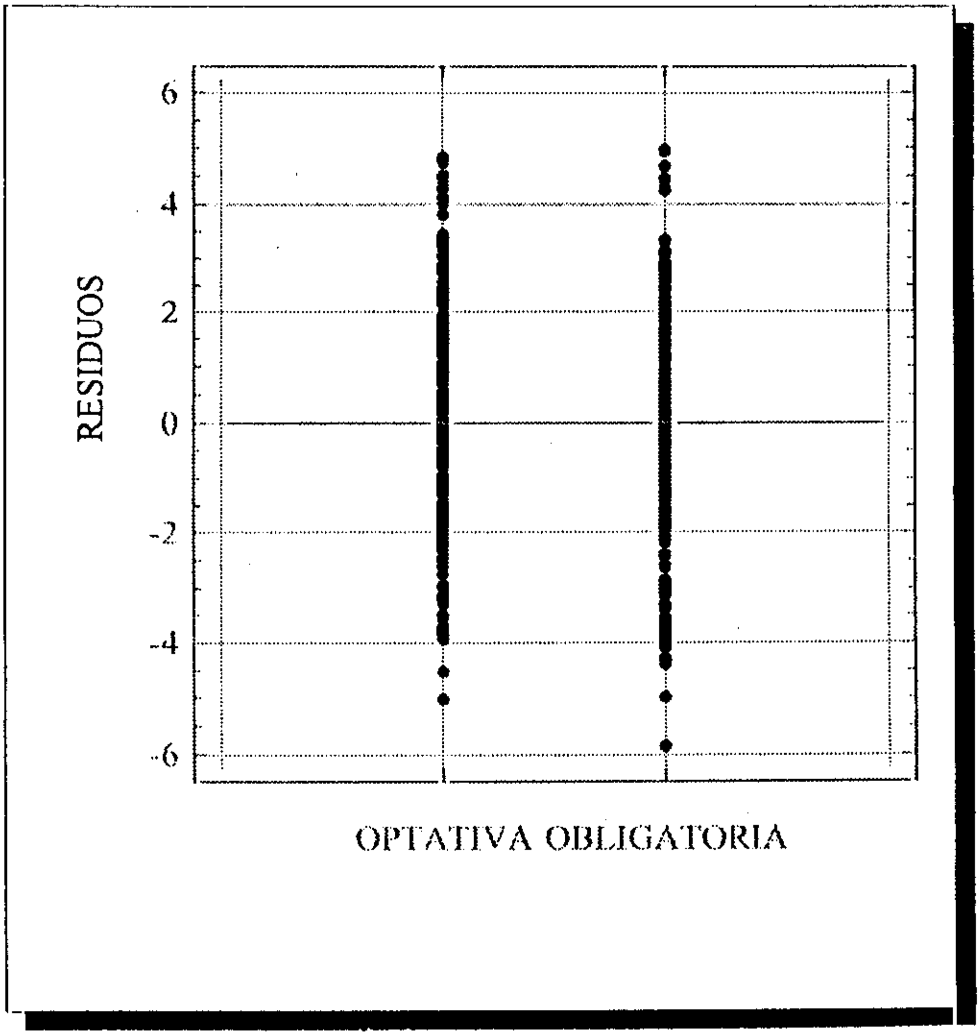
Las varianzas del número 17 al 24 corresponden a los grupos del nivel tres del factor métodos de enseñanza. Como ya señalamos, su cocentración es mayor y podemos ver que sus varianzas son algo menores que en los otros niveles de su factor aunque, como ya hemos verificado con el test de Barlett, no son significativamente diferentes ya que se cumple la condición de homocedasticidad.

GRÁFICO 2: DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS SEGÚN EL MÉTODO DE ENSEÑANZA



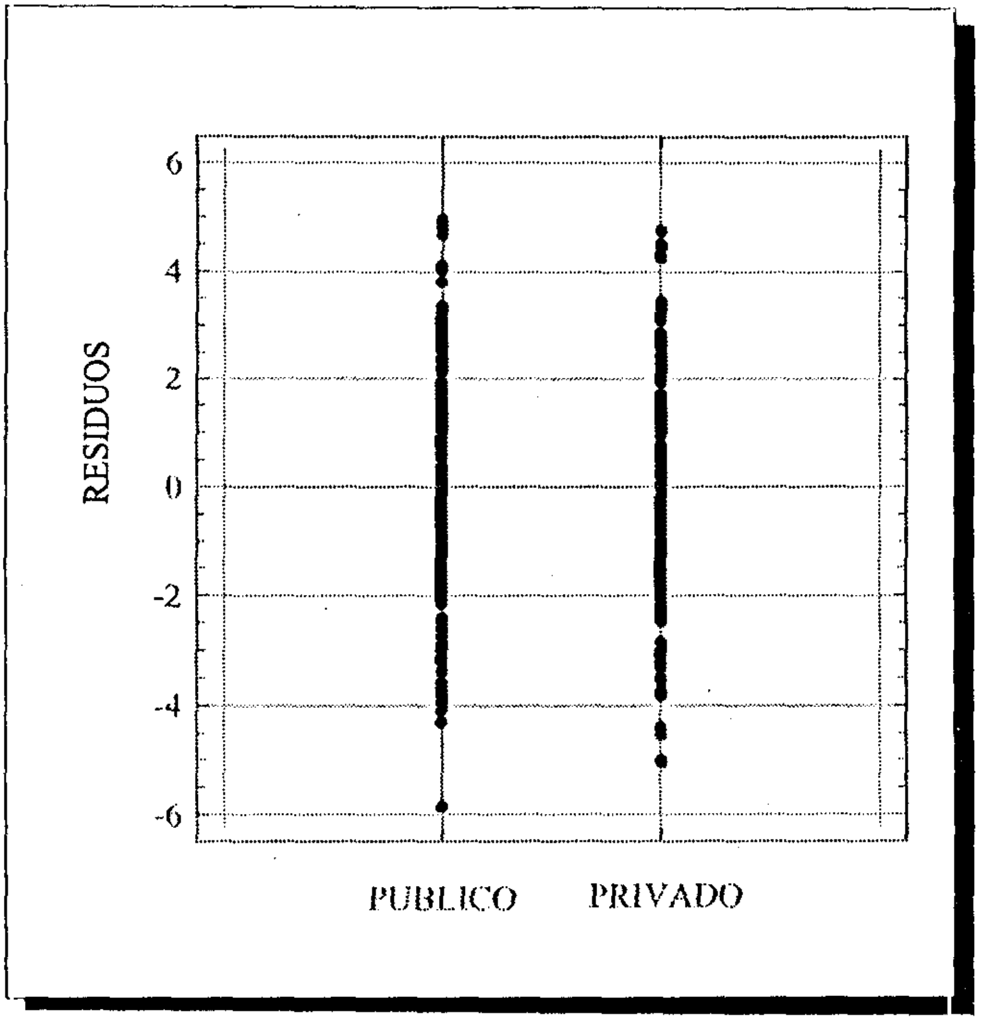
Cada punto representa la diferencia entre la calificación de un alumno y la media de su tratamiento. Los alumnos que han seguido el método axiomático inductivo presentan una *concentración* alrededor de su media algo superior a la que se observa en los otros dos métodos.

GRÁFICO 3: DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS SEGÚN LA OPTATIVAVIDAD



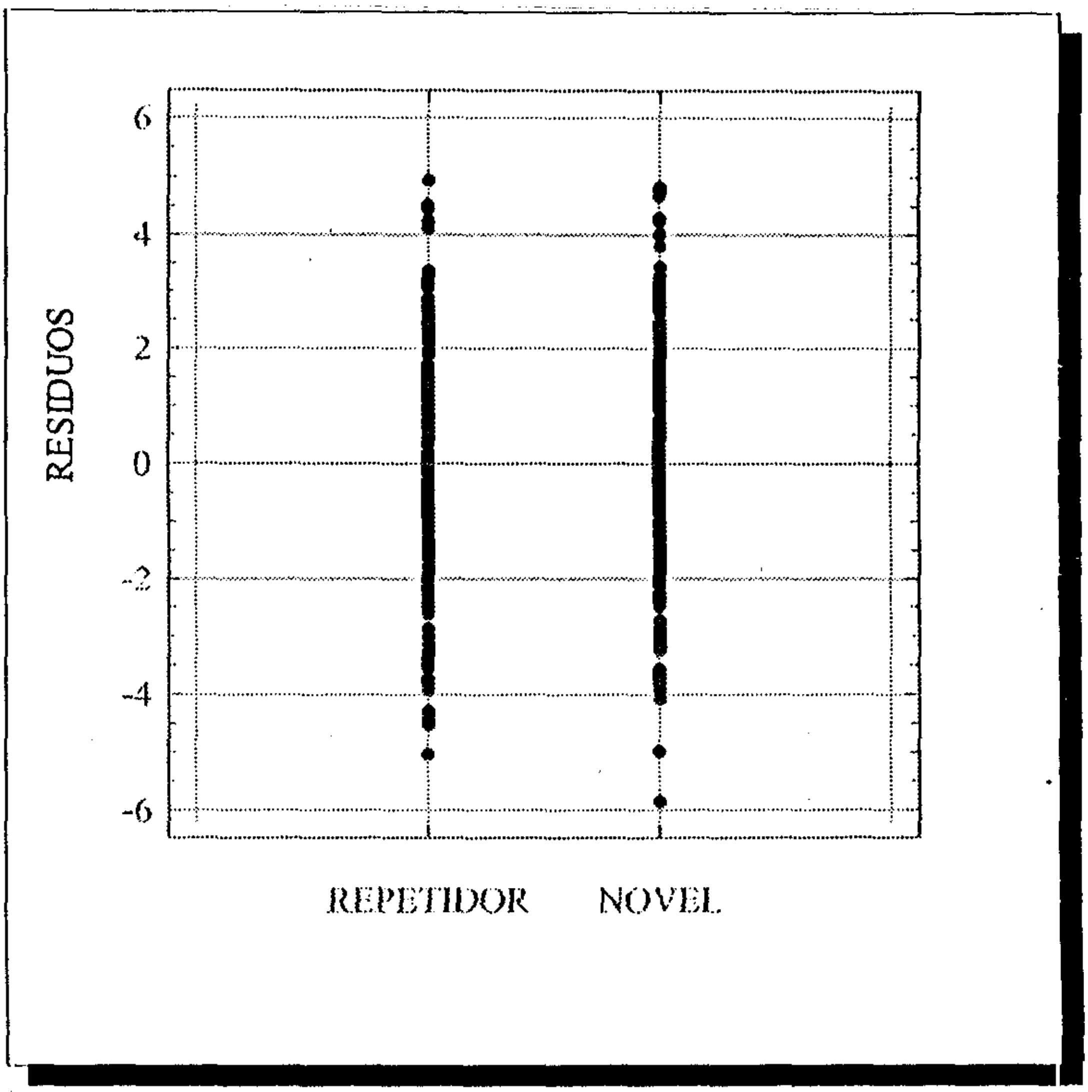
Al igual que en el gráfico anterior, reflejamos la diferencia entre la calificación del alumno y la media del tratamiento del factor, en este caso la optativa. No se aprecia una diferencia importante entre los niveles de este factor.

GRÁFICO 4: DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS SEGÚN LA PROCEDENCIA



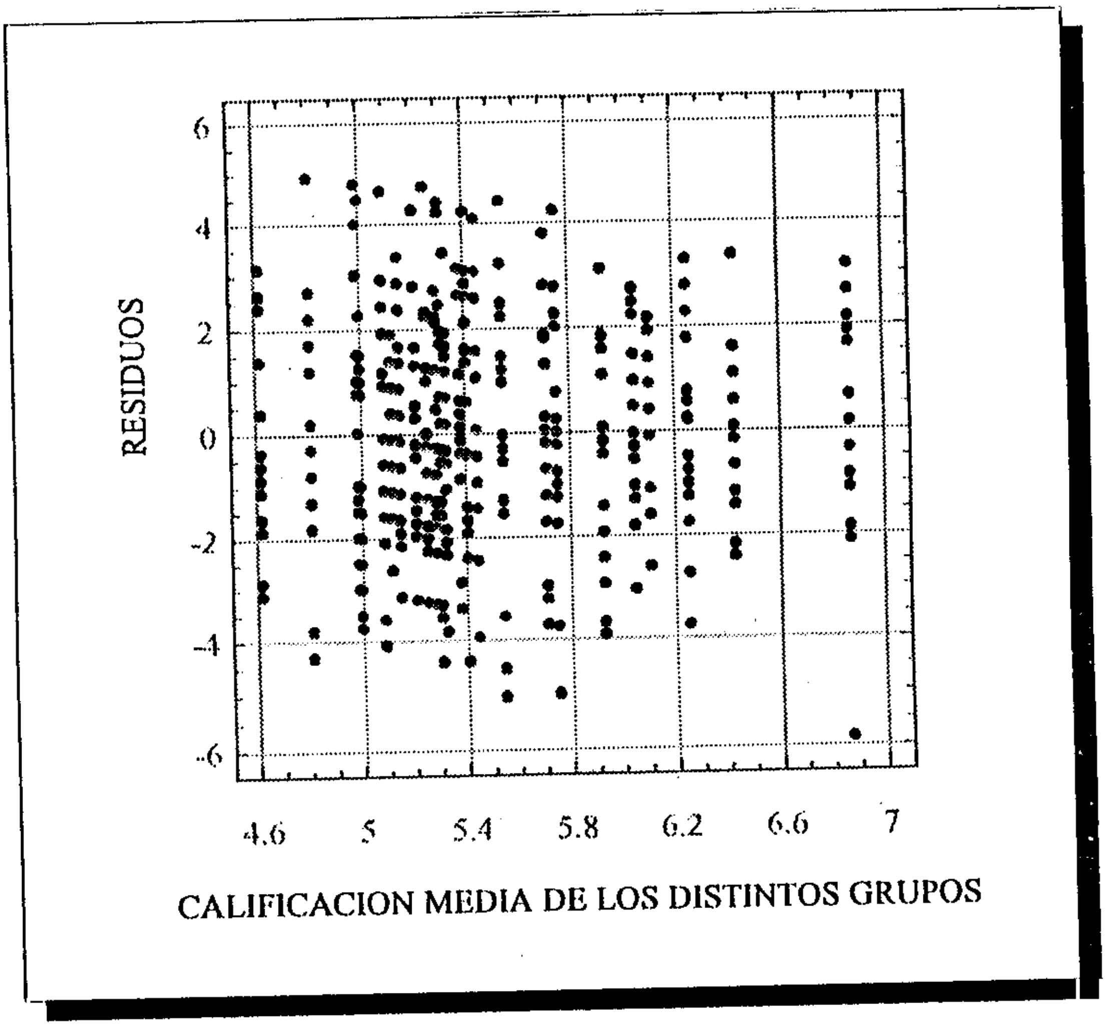
Tampoco en los niveles del factor procedencia, centro público y privado, apreciamos diferencia en la distribución de sus errores.

GRAFICO 5: DISTRIBUCIÓN DE LOS RESIDUOS SEGÚN EL ALUMNO SEA REPETIDOR O NO



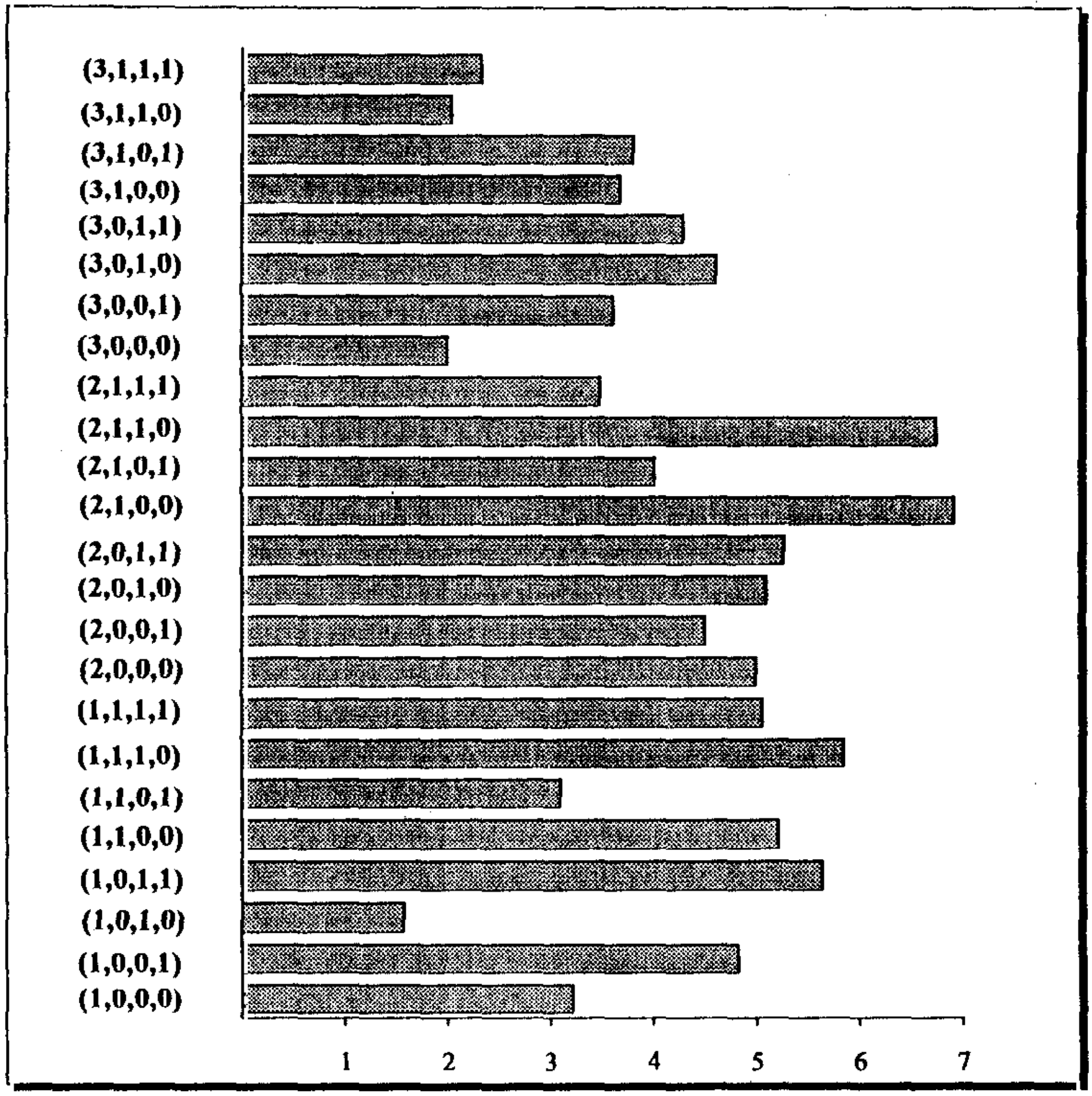
Repetidor y novel son los niveles del factor repetidor, tampoco apreciamos una diferencia entre la distribución de sus errores.

GRÁFICO 6: RESIDUOS POR GRUPOS



En el gráfico se representan por grupos, es decir, por las posibles combinaciones entre los niveles de los factores, los errores de cada uno de ellos. Cada grupo está situado según la calificación media del mismo. Los últimos grupos son los correspondientes al método axiomático inductivo y, como se observa, son los que presentan una calificación media más favorable. En ellos se aprecia una mayor concentración de los errores.

GRÁFICO 7: COMPARACIÓN DE LAS VARIANZAS DE LOS DIFERENTES GRUPOS



Cada barra nos indica el valor de la varianza en los distintos grupos. Se aprecia que los grupos que han seguido el método axiomático inductivo, (3,·,·,·), tienen en general una varianza algo menor. Esto corrobora la apreciación realizada en los gráficos anteriores.

3. – *Independencia*

Para verificar la independencia de los datos recurrimos al test de las rachas.

Comprobaremos que los signos, positivo o negativo, de los residuos son aleatorios y no están influenciados por el resultado anterior. Del mismo modo estudiaremos una gráfica de los residuos que nos demuestre que no sigue ningún patrón.

Para realizar el test de rachas necesitamos calcular varios parámetros:

Tabla 11: Test de rachas

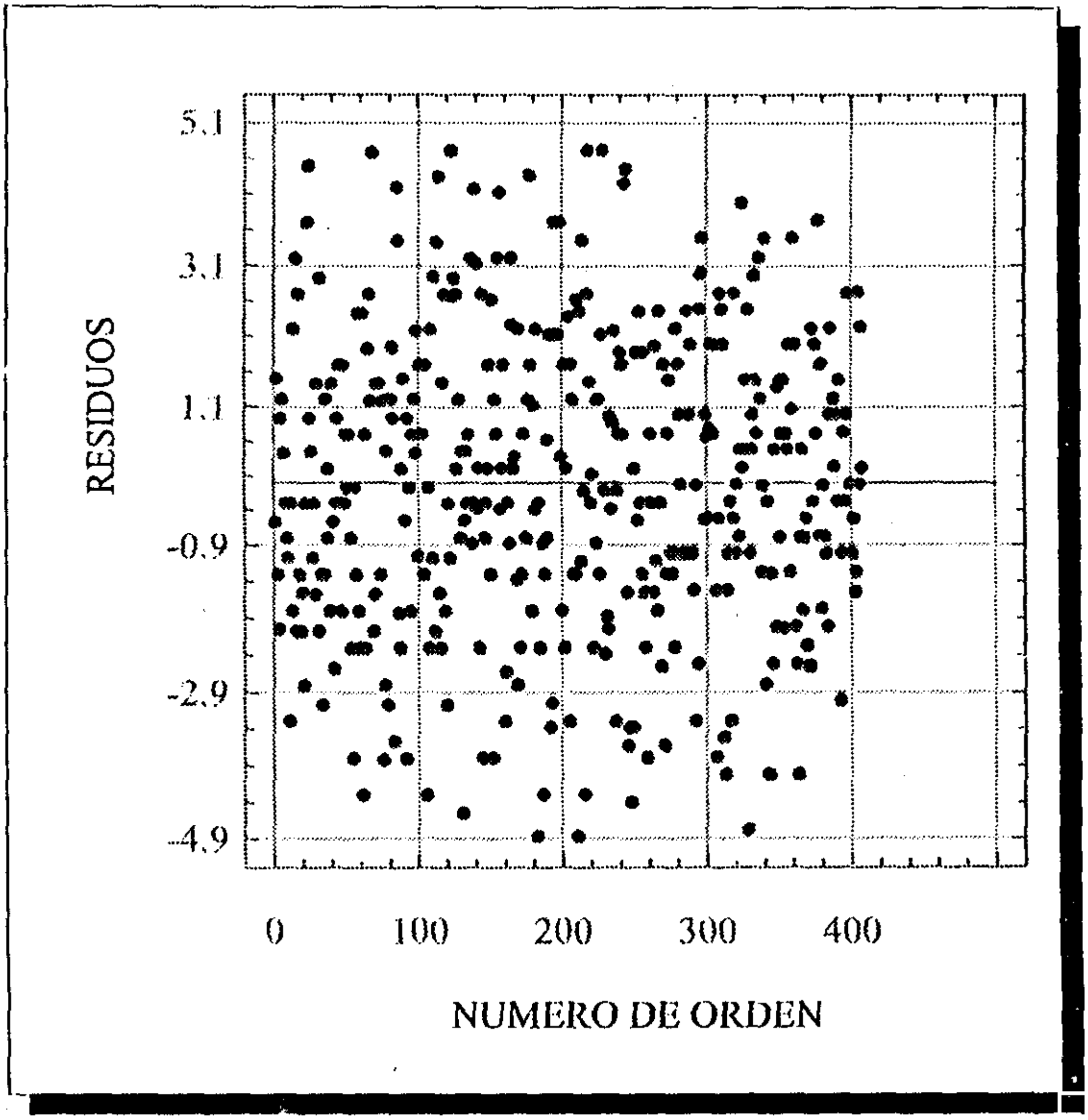
Número de errores positivos	N_1	200
Número de errores negativos	N_2	208
Número de secuencias de igual signo	R_{EXP}	213
E(R)	$\dfrac{2N_1 \cdot N_2}{N_1+N_2}+1$	203'92156
V(R)	$\dfrac{2N_1 \cdot N_2 \cdot (2N_1 \cdot N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1+N_2)^2 \cdot (N_1+N_2-1)}$	101'67096
t_{EXP}	$\dfrac{\lvert R_{EXP}-E(R)\rvert - 0'5}{\sqrt{V(R)}}$	0'857844

Se contrasta con una normal. El nivel de significación aproximado para la t_{EXP} calculada es 0'80, luego debe aceptarse la aleatoriedad de la muestra.

El gráfico número 8 nos muestra como se distribuyen los errores. En el eje de las abscisas tenemos el orden de aparición de los mismos y en el de las ordenadas el valor de cada uno de ellos. Se observa que no siguen ningún patrón, ya que estan aleatoriamente distribuidos, no existiendo zonas de concentración a lo largo del eje de abcisas.

Con este estudio podemos garantizar la independencia de los errores.

GRÁFICO 8: RESIDUOS DE LA CALIFICACIÓN DE LA PRUEBA SOBRE DETERMINANTES



En el gráfico se representan los residuos o errores según el orden de aparición en la obtención de los mismos. Buscamos la no existencia de algún patrón, para así poder garantizar la aleatoriedad de los mismos. No se aprecia ningún patrón. En consecuencia, el gráfico muestra la aleatoriedad de los residuos.

4.– Normalidad

Para verificar la hipótesis de normalidad de la muestra hemos recurrido a la aplicación de diversas pruebas, el test de la χ^2. Las hemos aplicado en dos ocasiones con intervalos diferentes, el test de Kolmogorov–Smirnov, un gráfico de probabilidad de normalidad (gráfico 11) y dos histogramas de barras colgadas (gráficos 9 y 10), con el mismo número de intervalos que los utilizados en los test de la χ^2.

1.– 1er Test de la χ^2

En primer lugar tomamos 10 intervalos para realizar este test que, como ya sabemos, compara la frecuencia observada en un intervalo con la esperada si fuese una normal. El estadístico de contraste es el sumatorio de la diferencia al cuadrado entre el valor esperado y el observado, partido por el valor esperado.

Tabla 12: Primer test de la χ^2

LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	FRECUENCIA OBSERVADA	FRECUENCIA ESPERADA	χ^2
$-\infty$	−3'800	13	13	0'00792
−3'800	−2'700	29	26	0'47869
−2'700	−1'600	49	50	0'04258
−1'600	−0'500	75	76	0'00497
−0'500	0'600	83	86	0'09128
0'600	1'700	72	74	0'04043
1'700	2'800	54	48	0'75572
2'800	3'900	20	24	0'56140
3'900	∞	13	12	0'09345

Realizado con nuestra muestra se obtuvieron los datos de la tabla 12[11]:

Con estos valores la χ^2=2'07643 con 6 grados de libertad. Esto supone un nivel de significación del 0'912536.

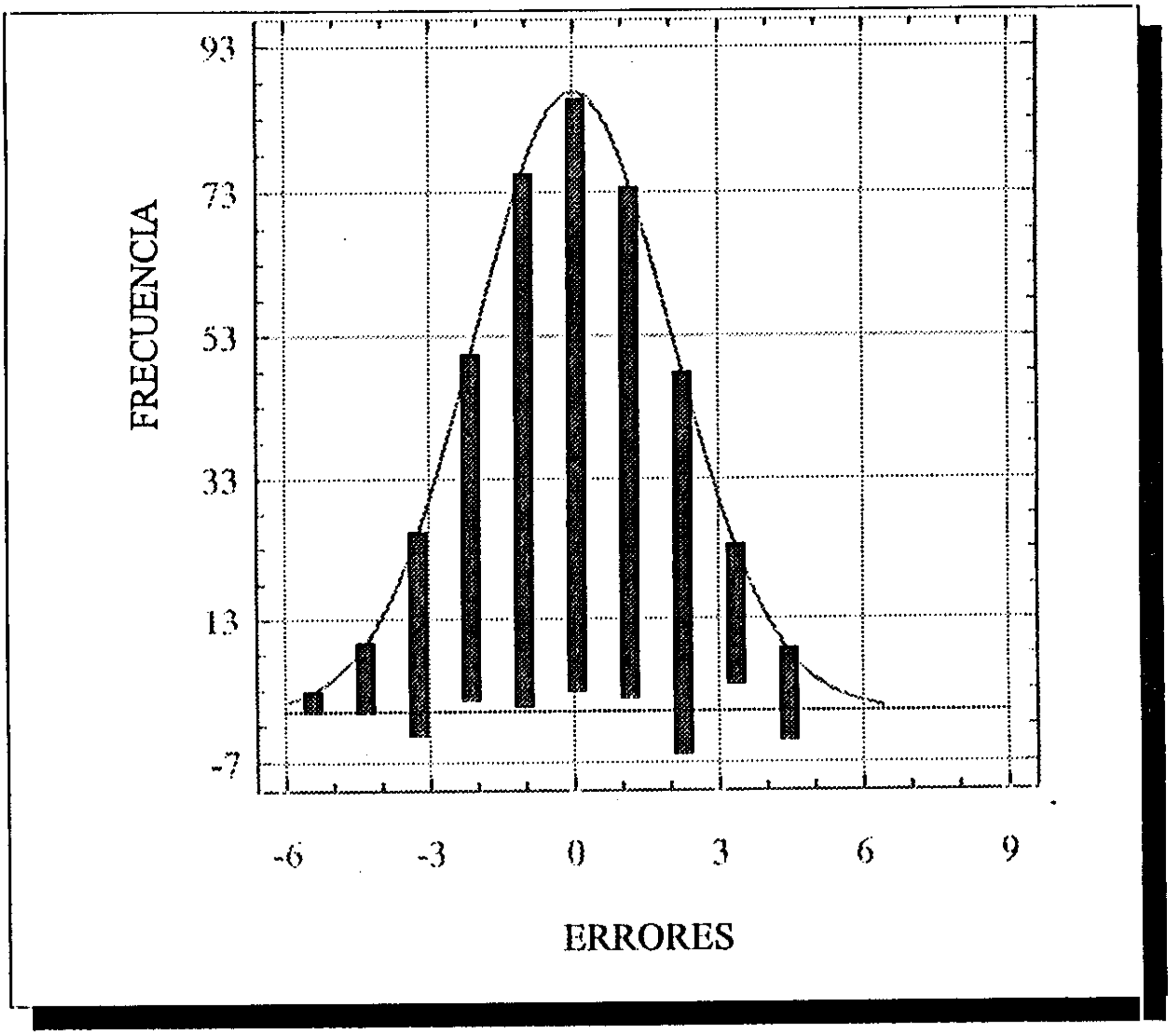
Este es un nivel de significación altísimo, debemos de tener en cuenta que lo normal es aceptar la hipótesis de normalidad con valores superiores 0'05. El nivel de significación es 18 veces superior al que hubiese sido necesario para entrar en niveles digamos de duda, esto nos da idea de la bondad del ajuste de la distribución de los errores.

Si observamos el gráfico número 9 vemos cómo se ajusta el histograma de barras colgadas a la curva de normalidad, lo que nos demuestra gráficamente los resultados obtenidos con el test de la χ^2.

Este test es más potente si el número de intervalos es mayor, siempre que cumpla unas condiciones mínimas, por lo cual, decidimos realizar otro test pero ahora con 33 intervalos.

11 El hecho de que se formen 10 intervalos y aparezcan 9 es debido a que el paquete estadístico utilizado agrupa algunos valores de la cola de la distribución.

GRÁFICO 9: HISTOGRAMA DE BARRAS COLGADAS (PARA 10 INTERVALOS)



Cada barra representa un intervalo de valores de los errores y la altura de la misma nos muestra la frecuencia con la que aparecen. La curva representa una normal de media 0 y desviación típica la de los errores. Cada barra nace en la curva normal, si alcanza justamente la linea inferior indica que el valor observado y el esperado si fuese una normal sería el mismo. Buscamos la bondad del ajuste siendo mejor cuanto más se aproxime cada barra a la linea inferior. En nuestro caso se consigue un buen ajuste.

2.– 2º Test de la χ^2

Los datos obtenidos son:

Tabla 13: Segundo test de la χ^2

LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR	FRECUENCIA OBSERVADA	FRECUENCIA ESPERADA	χ^2
$-\infty$	−4'3333	6	7'3	0'21780
−4'3333	−3'6667	11	8'1	1'02863
−3'6667	−3'3333	7	6'2	0'09201
−3'3333	−3'0000	11	8'1	1'03641
−3'0000	−2'6667	7	10'2	1'02825
−2'6667	−2'3333	11	12'6	0'20867
−2'3333	−2'0000	11	15'2	1'13741
−2'0000	−1'6667	21	17'7	0'60799
−1'6667	−1'3333	19	20'2	0'06967
−1'3333	−1'0000	31	22'4	3'29670
−1'0000	−0'6667	19	24'2	1'12853
−0'6667	−0'3333	26	25'5	0'00879
−0'3333	0'0000	28	26'2	0'12353
−0'0000	0'3333	25	26'2	0'05526
0'3333	0'6666	22	25'2	0'48716
0'6667	1'0000	16	24'2	2'79489
1'0000	1'3333	20	22'4	0'25827
1'3333	1'6667	26	20'2	1'67464
1'6667	2'0000	18	17'7	0'00449
2'000	2'3333	16	15'2	0'47545
2'3333	2'6667	15	12'6	0'44762
2'6667	3'0000	12	10'2	0'30034
3'0000	3'3333	13	8'1	2'96072
3'3333	3'6667	3	6'2	1'68395
3'6667	4'3333	7	8'1	0'15230
4'3333	∞	7	7'3	0'00912

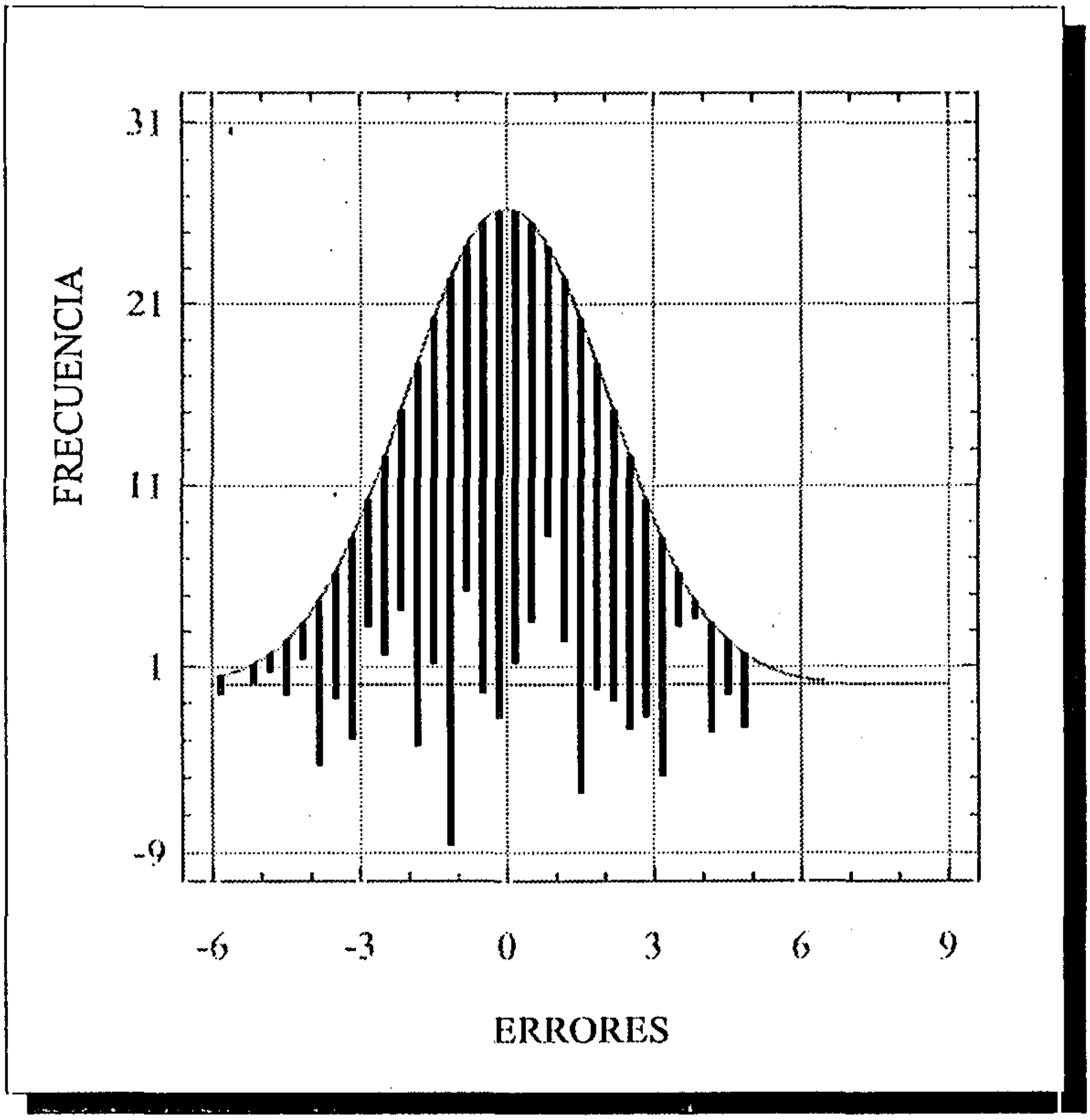
En este test hemos dividido la muestra en 33 intervalos[12], las condiciones de validez anteriormente mencionadas son: que no exista ningún intervalo con 0 observaciones y que no exista un 20% de ellos con un número de observaciones inferior a 5.

En nuestro caso sólo un intervalo tiene un número de observaciones inferior a 5. Los resultados obtenidos con estos valores son: χ^2=20'8607 con 23 grados de libertad. Esto supone un nivel de significación del 0'5899596.

Como vemos el nivel de significación es menor que en el anterior test. Aunque ha disminuido, sigue siendo muy elevado. Además la robustez del mismo ha aumentado con lo que seguimos obteniendo unos niveles de significación para la hipótesis de normalidad muy elevados.

12 El hecho de que se forman 33 intervalos y aparezcan 26 es debido a que el paquete estadístico utilizado agrupa los valores de la cola de la distribución.

GRÁFICO 10: HISTOGRAMA DE BARRAS COLGADAS (PARA 33 INTERVALOS)



Es similar al gráfico anterior. En este caso se ha aumentado el número de intervalos. La bondad del ajuste es algo peor que en el anterior, pero sigue siendo excelente.

3.– Test de Kolmogorov–Smirnov

Al igual que los tests anteriores comparaban diferencias entre los valores observados y los esperados, éste también compara las diferencia de las frecuencias relativas acumuladas, siendo su estadístico de contraste la máxima diferencia en valor absoluto entre la frecuencia acumulada observada y esperada.

El test de Kolmogorov–Smirnov es más potente que el de la χ^2 pues emplea un mayor número de intervalos y estos no necesitan cumplir las condiciones de validez que exige el test de la χ^2.

El valor del estadístico de Kolmogorov–Smirnov es 0'0344118, lo que da un nivel de significación de 0'719403, como se desprende de la propia tabla por ellos creada. El nivel de significación tiene, de nuevo, un valor muy elevado por lo que debemos aceptar la normalidad de los errores.

4.– Estudio de la gráfica de probabilidad a una Normal

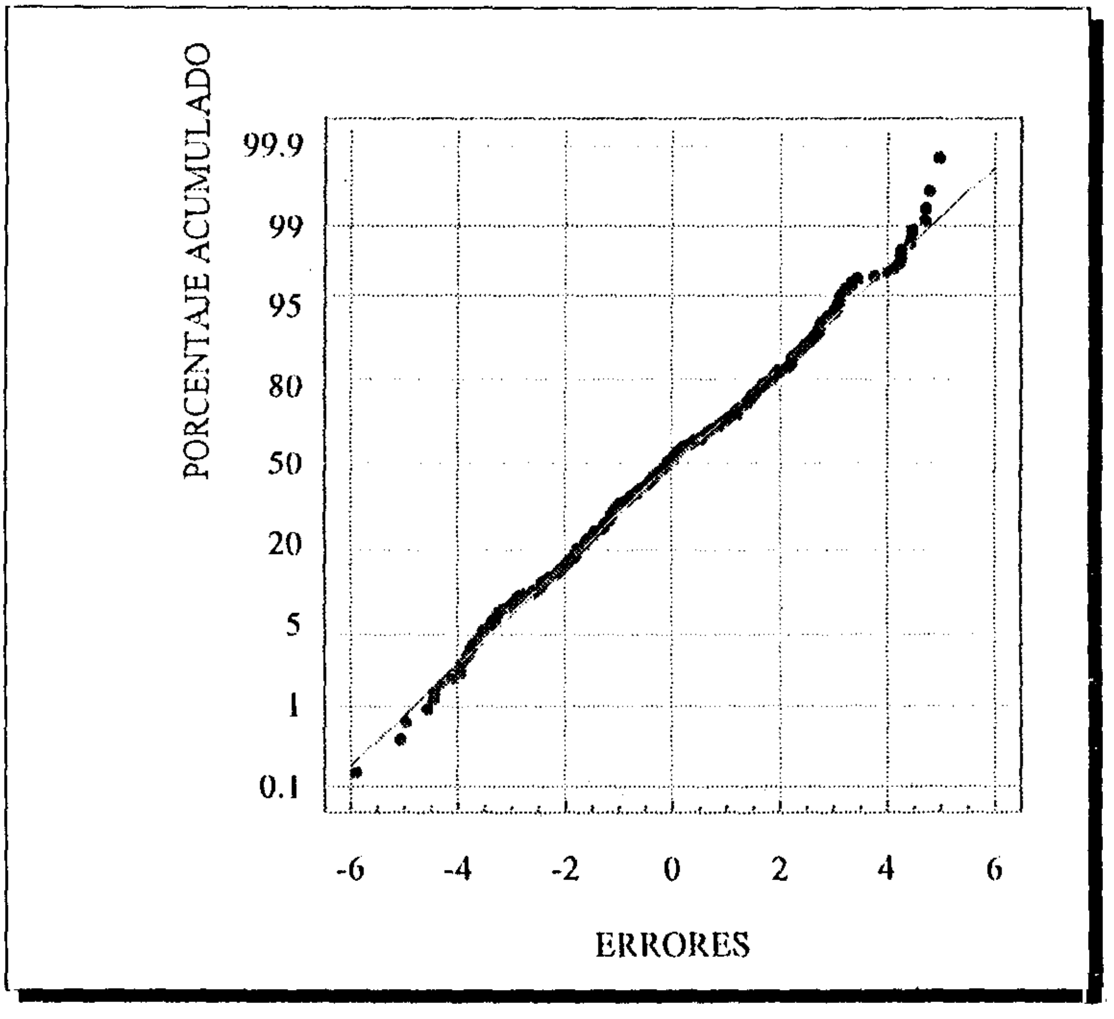
Como ya se ha explicado en la introducción teórica, esta gráfica representa la distribución acumulada de los residuos, representando la distribución normal mediante una recta.

En el gráfico número 11 apreciamos como exite un excelente ajuste, la representación de los residuos sigue una recta que se ajusta a la normal.

Con los test realizados y la gráfica podemos afirmar que la distribución de los residuos se ajusta a una normal de media 0 y desviación 2'06177.

En resumen, después de las diferentes comprobaciones vemos que los residuos cumplen con las condiciones de validez exigidas para poder realizar el *análisis factorial, con total garantía de que los resultados obtenidos en el análisis de la varianza no podrán llevarnos a conclusiones erróneas por el hecho de que los residuos no cumplan con las condiciones de validez exigidas en esta clase de diseño de experimentos.*

GRÁFICO 11: PROBABILIDAD DE LA NORMALIDAD DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ERRORES O RESIDUOS



En este gráfico la linea recta representa el valor de la frecuencia acumulada, en porcentaje, de una normal. Los puntos representan la distribución de los residuos. Cuanto más se aproximan los puntos a la linea que representa la normal, mejor es el ajuste de nuestra distribución. En nuestro caso vemos que el ajuste es prácticamente perfecto hasta los valores cercanos al 99% lo que significa un excelente ajuste y, por tanto, se verifica la hipótesis de normalidad de los residuos.

ANALISIS FACTORIAL

Comprobado que los errores cumplen las condiciones que exige el análisis factorial, vamos a comenzar el desarrollo del mismo. Para ello hemos de realizar previamente el análisis de la varianza; comenzamos elaborando la tabla correspondiente (tabla 14).

La calificación numérica de la prueba referida a los determinantes es la variable respuesta sobre la que analizaremos los cuatro factores considerados en este diseño.

Como vemos, la tabla consta de seis columnas, la primera muestra la fuente de variación, la siguiente la suma de cuadrados, los grados de libertad, la media de cuadrados, valor resultante del cociente de las dos anteriores, la quinta nos da el valor del estadístico de la F calculada y la última el nivel de significación correspondiente a dicho estadístico.

Se sabe que la F experimental de valor próximo a cero va unida a un alto nivel de significación, lo que significa que la hipótesis de igualdad, entre los niveles de dichas fuente de variación, debe ser aceptada. Por el contrario, un valor alto significa que rechazamos la hipótesis de igualdad, entre los efectos de los tratamientos o de las interacciones.

El gráfico 12, es un diagrama de barras que nos marca los niveles de significación según la fuente de variación. Solamente el efecto producido por el factor método de enseñanza podemos afirmar que sea un efecto significativo, es decir, se producen unos resultados diferentes dependiendo de que el alumno haya recibido la explicación de determinantes por el método multilineal, histórico o axiomático–inductivo.

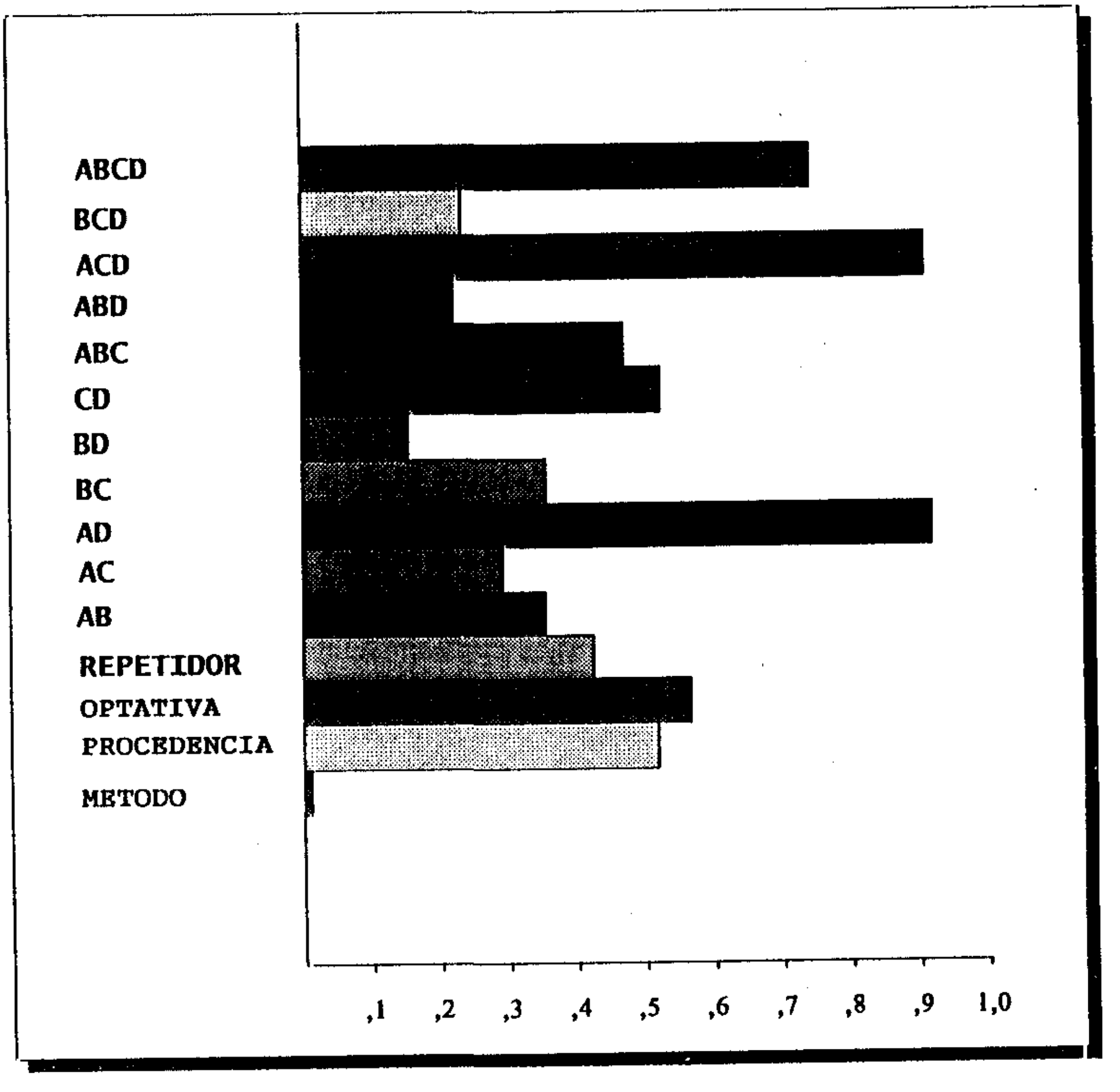
Tabla 14: Análisis de la varianza IV

FUENTE DE VARIACIóN	Suma de cuadrados	G.L.	Media de cuadrados	F–RATIO	Nivel de significación
EFECTOS PRINCIPALES					
A : MÉTODO	41'305943	2	20'652972	4'591279	0'0107
B : PROCEDENCIA	1'953267	1	1'953267	0'434223	0'5174
C : OPTATIVIDAD	1'540453	1	1'540453	0'342452	0'565
D : REPETIDOR	2'997306	1	2'997306	0'666319	0'4236
INTERACCIONES					
AB	9'351129	2	4'675565	1'039406	0'3547
AC	11'133796	2	5'566898	1'237555	0'2912
AD	0'768473	2	0'384237	0'085418	0'9181
BC	4'014267	1	4'014267	0'892396	0'3555
BD	9'129071	1	9'129071	2'029447	0'1551
CD	1'903767	1	1'903767	0'423219	0'5227
ABC	6'807335	2	3'403668	0'756656	0'4699
ABD	13'584355	2	6'792178	1'509942	0'2222
ACD	0'855571	2	0'427786	0'095099	0'9093
BCD	6'407541	1	6'407541	1'424435	0'2334
ABCD	2'676649	2	1'338325	0'297518	0'7428
RESIDUAL	1727'3489	384	4'498304		
TOTAL (CORREGIDO)	1841'7778	407			

El nivel de significación producido en esta fuente de variación es de 0'0107. Si tenemos en cuenta que rechazamos las hipótesis de igualdad con unos niveles del orden del 0'05, comprobamos que tenemos un alto nivel de confianza a la hora de rechazar la hipótesis de igualdad. Podemos afirmar con un valor cercano al 99%

de confianza que el efecto producido por los diferentes métodos de enseñanza aplicados para explicar los determinantes es distinto en cada caso.

GRÁFICO 12: COMPARACIÓN DE LOS NIVELES DE SIGNIFICACIÓN



El nivel de significación es una medida del grado de confianza de la hipótesis nula de igualdad de medias entre los distintos niveles de los factores y las interacciones. Solamente el factor método de enseñanza tiene un nivel lo suficientemente bajo como para considerarlo significativo a la hora de rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias.

1.– *Estimación de los parámetros*

Para calcular los parámetros del modelo emplearemos las medias de los tratamientos e interacciones.

Tabla 15: Medias de los tratamientos e interacciones I

NIVEL		NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
MEDIA TOTAL		408	5'500417	0'105001	5'395416	5'605418
A : MÉTODO						
MULTILINEAL	1	136	5'228309	0'181867	5'046441	5'410176
HISTÓRICO	2	136	5'326103	0'181867	5'144236	5'50797
AXIOMÁTICO INDUCTIVO	3	136	5'946838	0'181867	5'764971	6'128706
B : PROCEDENCIA						
PÚBLICO	0	204	5'569608	0'148494	5'421114	5'718102
PRIVADO	1	204	5'431226	0'148494	5'282731	5'57972
C : OPTATIVIDAD						
OPTATIVA	0	204	5'438971	0'148494	5'290477	5'587465
OBLIGATORIA	1	204	5'561863	0'148494	5'413369	5'710357
D : REPETIDOR						
REPETIDOR	0	204	5'414706	0'148494	5'266212	5'5632
NOVEL	1	204	5'586128	0'148494	5'437634	5'734622
AB						
	10	68	5'086025	0'257199	4'828826	5'343224
	11	68	5'370588	0'257199	5'113389	5'627788
	20	68	5'472059	0'257199	5'214859	5'729258

Tabla 15: Continuación

NIVEL		NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
	21	68	5'180142	0'257199	4'922942	5'437341
	30	68	6'150735	0'257199	5'893536	6'407934
	31	68	5'742941	0'257199	5'485742	6'00014
AC						
	10	68	5'116177	0'257199	4'858978	5'373376
	11	68	5'340441	0'257199	5'083242	5'59764
	20	68	5'4875	0'257199	5'230301	5'744699
	21	68	5'164706	0'257199	4'907507	5'421905
	30	68	5'713235	0'257199	5'456036	5'970434
	31	68	6'180441	0'257199	5'923242	6'43764
AD						
	10	68	5'168382	0'257199	4'911183	5'425581
	11	68	5'288235	0'257199	5'031036	5'545434
	20	68	5'275735	0'257199	5'018536	5'532934
	21	68	5'376471	0'257199	5'119272	5'63367
	30	68	5'8	0'257199	5'542801	6'057199
	31	68	6'093677	0'257199	5'836478	6'350876
BC						
	00	102	5'607353	0'210002	5'397351	5'817355
	01	102	5'531863	0'210002	5'321861	5'741865
	10	102	5'270588	0'210002	5'060586	5'48059
	11	102	5'591863	0'210002	5'381861	5'801865
BD						
	00	102	5'334314	0'210002	5'124312	5'544316

Tabla 15: Continuación

NIVEL	NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
01	102	5'804902	0'210002	5'5949	6'014904
10	102	5'495098	0'210002	5'285096	5'7051
11	102	5'367353	0'210002	5'157351	5'577355
CD					
00	102	5'421569	0'210002	5'211567	5'631571
01	102	5'456373	0'210002	5'246371	5'666375
10	102	5'407843	0'210002	5'197841	5'617845
11	102	5'715882	0'210002	5'50588	5'925884
ABC					
100	34	5'073529	0'363735	4'709794	5'437264
101	34	5'105882	0'363735	4'742147	5'469617
110	34	5'176471	0'363735	4'812736	5'540206
111	34	5'591176	0'363735	5'227441	5'954911
200	34	5'582353	0'363735	5'218618	5'946088
201	34	5'373529	0'363735	5'009794	5'737264
210	34	5'414706	0'363735	5'050971	5'778441
211	34	4'985294	0'363735	4'621559	5'349029
300	34	6'182353	0'363735	5'818618	6'546088
301	34	6'132353	0'363735	5'768618	6'496088
310	34	5'261765	0'363735	4'89803	5'6255
311	34	6'252941	0'363735	5'889206	6'616676
ABD					
100	34	5'135294	0'363735	4'771559	5'499029
101	34	5'044118	0'363735	4'680383	5'407853

Tabla 15: Continuación

NIVEL	NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
110	34	5'214706	0'363735	4'850971	5'578441
111	34	5'552941	0'363735	5'189206	5'916676
200	34	5'129412	0'363735	4'765677	5'493147
201	34	5'826471	0'363735	5'462736	6'190206
210	34	5'444118	0'363735	5'080383	5'807853
211	34	4'955882	0'363735	4'592147	5'319617
300	34	5'747059	0'363735	5'383324	6'110794
301	34	6'567647	0'363735	6'203912	6'931382
310	34	5'870558	0'363735	5'506823	6'234293
311	34	5'644118	0'363735	5'280383	6'007853
ACD					
100	34	5'082353	0'363735	4'718618	5'446088
101	34	5'167647	0'363735	4'803912	5'531382
110	34	5'267647	0'363735	4'903912	5'631382
111	34	5'429412	0'363735	5'065677	5'793147
200	34	5'502941	0'363735	5'139206	5'866676
201	34	5'494118	0'363735	5'130383	5'857853
210	34	5'070588	0'363735	4'706853	5'434323
211	34	5'288235	0'363735	4'9245	5'65197
300	34	5'7	0'363735	5'336265	6'063735
301	34	5'744118	0'363735	5'380383	6'107853
310	34	5'917647	0'363735	5'553912	6'281382
311	34	6'467647	0'363735	6'103912	6'831382

Tabla 15: Continuación

NIVEL	NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
BCD					
000	51	5'568627	0'296987	5'27164	5'865614
001	51	5'656863	0'296987	5'359876	5'95385
010	51	5'105882	0'296987	4'808895	5'402869
011	51	5'968627	0'296987	5'67164	6'265614
100	51	5'288235	0'296987	4'991248	5'585222
101	51	5'280392	0'296987	4'983405	5'577379
110	51	5'731373	0'296987	5'434386	6'02836
111	51	5'488235	0'296987	5'191248	5'785222
ABCD					
1000	17	5'152941	0'5144	4'638541	5'667341
1001	17	4'994118	0'5144	4'479718	5'508518
1010	17	5'117647	0'5144	4'603247	5'632047
1011	17	5'094118	0'5144	4'579718	5'608518
1100	17	5'011765	0'5144	4'497365	5'526165
1101	17	5'341176	0'5144	4'826776	5'855576
1110	17	5'417647	0'5144	4'903247	5'932047
1111	17	5'764706	0'5144	5'250306	6'279106
2000	17	5'447059	0'5144	4'932659	5'961459
2001	17	5'717647	0'5144	5'203247	6'232047
2010	17	4'814177	0'5144	4'299777	5'328577
2011	17	5'935294	0'5144	5'420894	6'449694
2100	17	5'558824	0'5144	5'044424	6'073224
2101	17	5'270588	0'5144	4'756188	5'784988

Tabla 15: Continuación

NIVEL	NUM	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
2110	17	5'329412	0'5144	4'815012	5'843812
2111	17	4'641176	0'5144	4'126776	5'155576
3000	17	6'105882	0'5144	5'591482	6'620282
3001	17	6'258824	0'5144	5'744424	6'773224
3010	17	5'388235	0'5144	4'873835	5'902635
3011	17	6'876471	0'5144	6'362071	7'390871
3100	17	5'294118	0'5144	4'779718	5'808518
3101	17	5'229412	0'5144	4'715012	5'743812
3110	17	6'447059	0'5144	5'932659	6'961459
3111	17	6'058824	0'5144	5'544424	6'573224

Calcularemos los parámetros según los datos de la tabla 15.

Los efectos de los valores calculados, tanto de los efectos principales como de las interacciones, aparecen en la tabla 16.

El gráfico número 13, que aparece a continuación, nos muestra el valor de los parámetros de los efectos principales, resaltando la influencia de cada factor en la media. El gráfico es de tipo pastel: en él consideramos el parámetro de uno solo de los niveles, el que toma valor positivo, en aquellos factores que solamente poseen dos niveles, ya que el valor de los parámetros es el mismo con signo cambiado. Se aprecia cómo el nivel tres del factor método de enseñanza, que corresponde al método axiomático inductivo, es el que tiene mayor valor.

1.– Cálculo de los efectos de los factores e interacciones

Tabla 16: Efectos de los factores e interacciones

	Media general	5’500417	
	Nivel 1 Factor A	−0’272108	
	Nivel 2 Factor A	−0’174314	
	Nivel 3 Factor A	0’446215	
	Nivel 0 Factor B	0’069191	
	Nivel 1 Factor B	−0’069191	
	Nivel 0 Factor C	−0’061446	
	Nivel 1 Factor C	0’061446	
	Nivel 0 Factor D	−0’084711	
	Nivel 1 Factor D	0’085711	
Interacciones	AB	AC	AD
(1,0)	−0’211471	−0’050686	0’025784
(1,1)	0’211471	0’050736	−0’025784
(2,0)	0’767648	0’222793	0’035343
(2,1)	−0’76765	−0’222793	−0’035343
(3,0)	0’134706	0’017216	−0’061127
(3,1)	−0’134706	0’265293	0’147892
Interacciones	BC	BD	CD
(0,0)	0’099191	−0’149583	0’683088
(0,1)	−0’99141	0’149583	−0’068309
(1,0)	−0’99191	0’149583	−0’682591
(1,1)	0’099241	−0’149583	0’683589
Interacciones	ABC	ABD	ACD
(1,0,0)	0’000441	0’180343	−0’422061

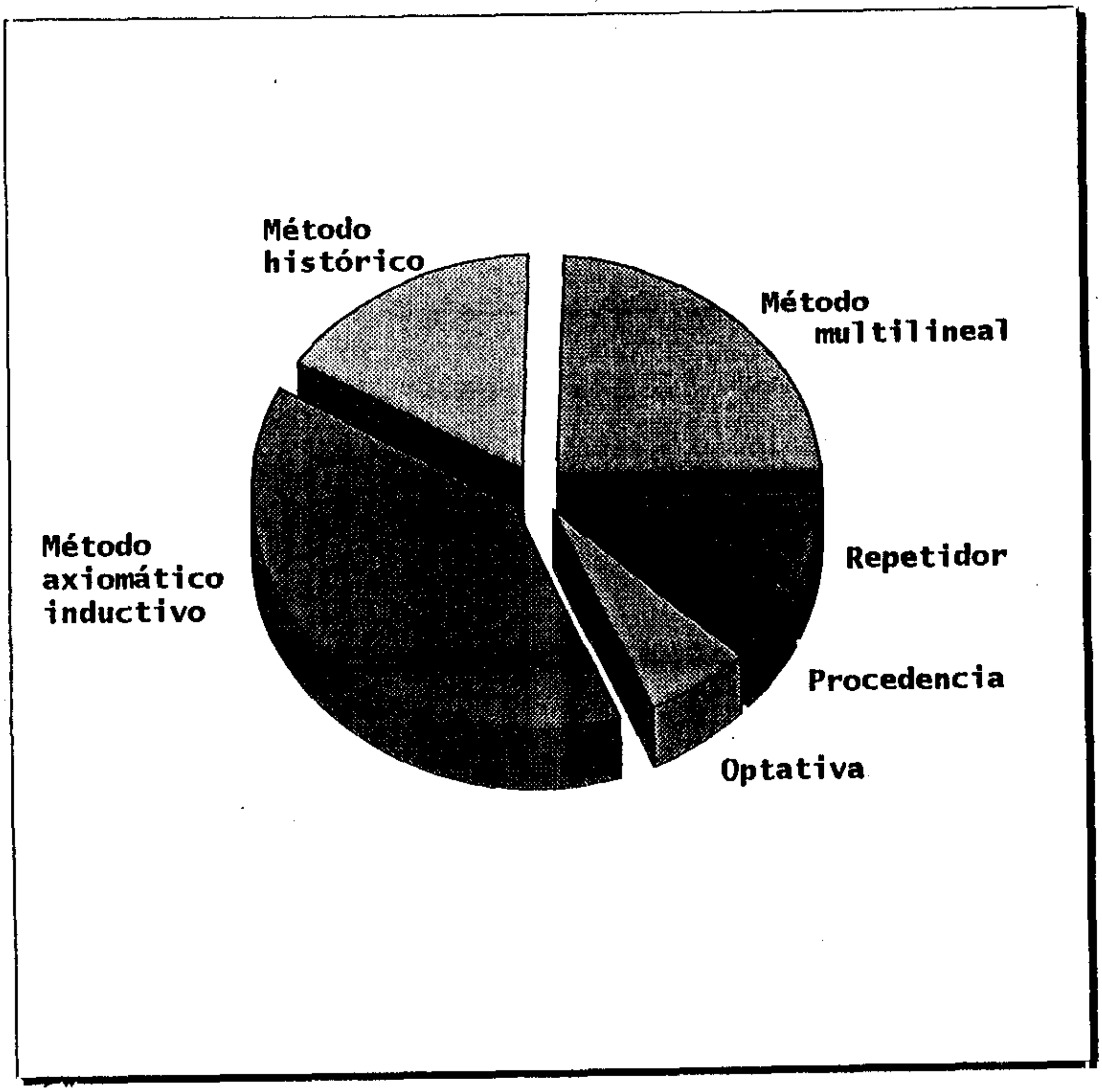
Tabla 16: Continuación

Interacciones	ABC	ABD	ACD
(1,0,1)	0'006862	−0'251422	0'011274
(1,1,0)	0'017206	−0'245539	0'103971
(1,1,1)	0'009215	0'270099	−0'039315
(2,0,0)	−0'150294	−0'142696	−0'002501
(2,0,1)	0'162009	0'154461	−0'240209
(2,1,0)	0'172353	0'164755	0'073088
(2,1,1)	−0'132697	0'005538	0'004803
(3,0,0)	0'166029	−0'107255	0'065229
(3,0,1)	−0'152844	−0'10147	−0'096227
(3,1,0)	−0'148382	0'124902	0'000882
(3,1,1)	0'177156	−0'096078	0'072009
	Interacciones	BCD	
	(0,0,0)	0'12826	
	(0,0,1)	−0'117475	
	(0,1,0)	−0'122427	
	(0,1,1)	0'133112	
	(1,0,0)	−0'114534	
	(1,0,1)	0'141986	
	(1,1,0)	0'192476	
	(1,1,1)	−0'108114	
Interacciones	ABCD	**Interacciones**	ABCD
(1,0,0,0)	−0'124216	(2,1,0,0)	−0'071127
(1,0,0,1)	0'884314	(2,1,0,1)	−0'018088
(1,1,1,0)	0'097795	(2,1,1,0)	0'019999
(1,0,1,1)	−0'132009	(2,1,1,1)	−0'084901

Tabla 16: Continuación

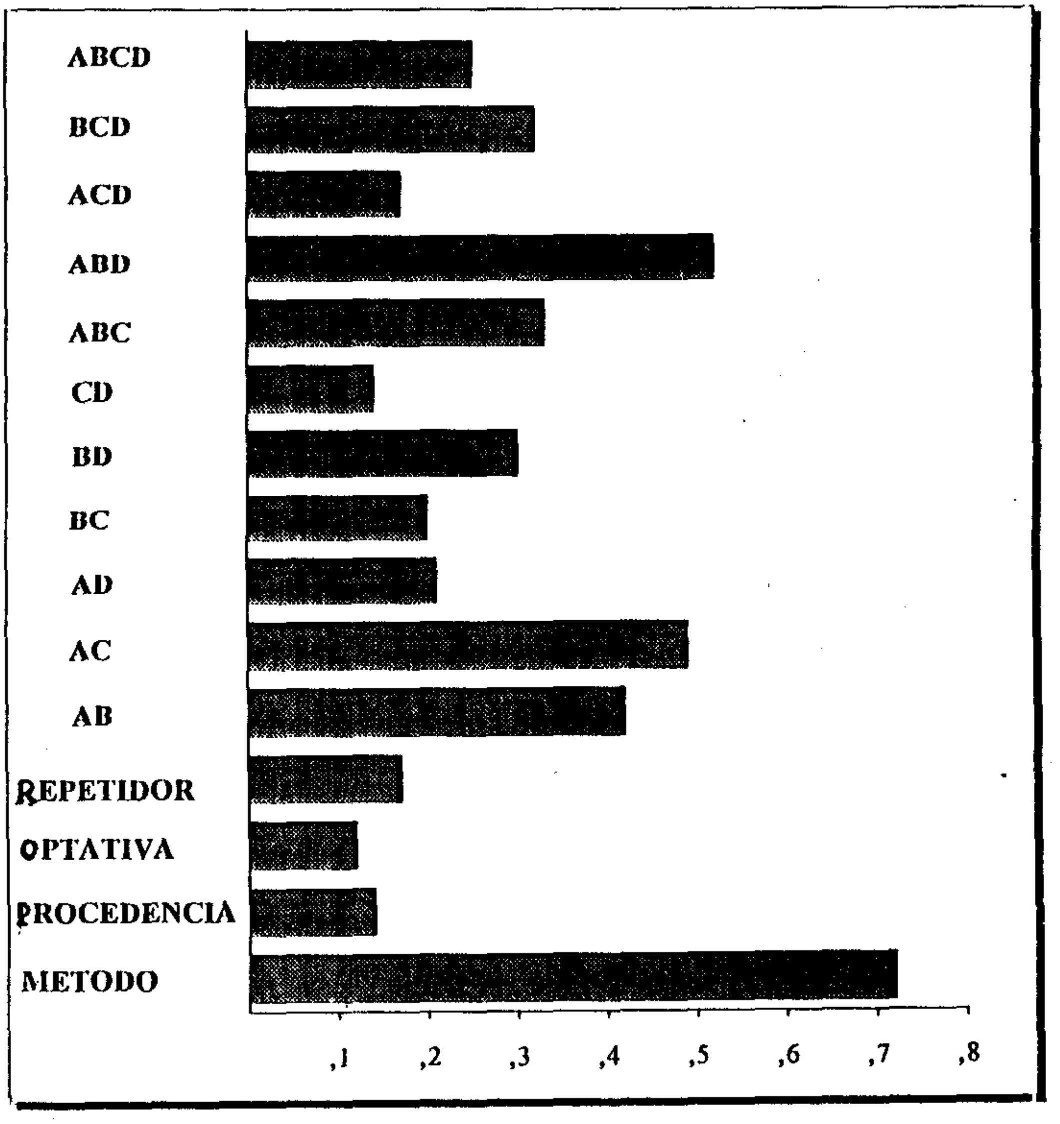
Interacciones	ABCD	**Interacciones**	ABCD
(1,1,0,0)	0'079608	(3,0,0,0)	0'065343
(1,1,0,1)	−0'151177	(3,0,0,1)	−0'10701
(1,1,1,0)	−0'148676	(3,1,1,0)	−0'102058
(1,1,1,1)	0'070246	(3,0,1,1)	0'053727
(2,0,0,0)	0'013284	(3,1,0,0)	−0'114363
(2,0,0,1)	−0'057892	(3,1,0,1)	0'040441
(2,1,1,0)	−0'05294	(3,1,1,0)	0'03853
(2,0,1,1)	0'00108	(3,1,1,1)	−0'127548

GRÁFICO 13: VALOR DE LOS EFECTOS DE LOS FACTORES



El efecto principal es la *influencia* que tiene cada uno de los niveles de los factores sobre la media de su grupo. El método de enseñanza es el factor que más influye en dicho valor y, dentro de éstos, el axiomático-inductivo.

GRÁFICO 14: DIFERENCIAS DE LOS EFECTOS DE LOS FACTORES E INTERACCIONES



Con este gráfico pretendemos hacer notar cuáles son los factores o interacciones que mayor influencia tienen en la media de su grupo. La pertenencia a uno u otro nivel puede ocasionar diferencias. Son los niveles del factor método los que más influencia tienen.

El gráfico 14 nos muestra los efectos de los parámetros de los factores e interacciones. Para resaltar mejor el efecto de un factor o una interacción, el valor empleado en el gráfico es la máxima diferencia entre el valor de dos parámetros del mismo factor o interacción.

Destacan especialmente los debidos al factor metodo de enseñanza y los de la interacción de tercer orden debida a los factores método de enseñanza, optativa y repetidor.

Podemos comprobar, en la tabla del análisis de la varianza, que las fuentes de variación con valores altos en la suma de cuadrados se corresponden con diferencias altas entre sus parámetros.

ANALISIS DETALLADO

Hasta este momento el estudio realizado nos confirma la existencia de un factor, método de enseñanza, en el cual existe una diferencia estadísticamente significativa en los efectos producidos por los distintos niveles de dicho factor, pero no sabemos cuál de los métodos es el que se puede considerar que establezca una diferencia significativa o si son los tres los que producen efectos diferentes.

1.– Comparación gráfica de medias

En el apartado anterior, ***Estimación de los parámetros***, presentamos la tabla de medias de los niveles de los factores e interacciones. Las últimas muestran los valores de las medias de los diferentes grupos de la interacción de cuarto orden. El gráfico número 15 es una representación de dichos valores. Del estudio del mismo vemos que son los grupos que recibieron las explicaciones de los determinantes por el método axiomático inductivo los que destacan sobre el resto.

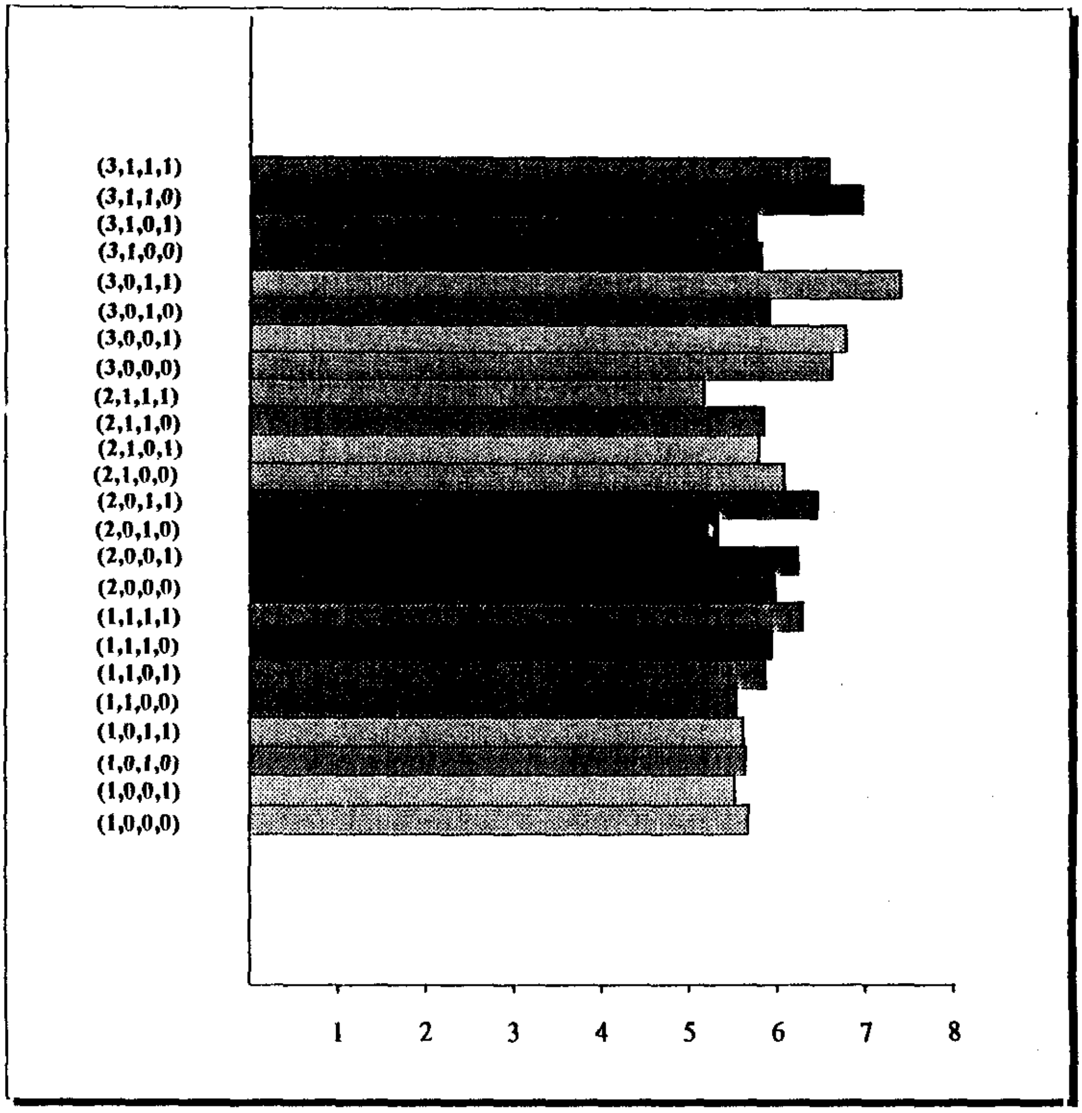
Los gráficos 16 al 19 nos muestran los valores de las medias de los niveles de los diferentes factores entre sí. Solamente cabe destacar las diferencias existentes en el factor método de enseñanza, en particular el correspondiente al nivel tres que es el axiomático–inductivo. En los otros factores vemos pequeñas diferencias. Los alumnos que cursan Matemáticas I como asignatura obligatoria obtienen mejores resultados que aquellos que la tienen como optativa. Los alumnos que proceden de centros públicos tienen una media ligeramente superior a los que proceden de centros privados. Y, finalmente, los alumnos que realizan C.O.U. por primera vez obtienen una ligera ventaja sobre los repetidores. Pero estas últimas diferencias son poco relevantes.

Los gráficos comprendidos entre los números 20 y 25 nos muestran las medias de las interacciones de nivel dos. Lo más reseñable es que en todas las interacciones en las que aparece el primer factor método de enseñanza, en su nivel tres presenta medias superiores a los otros dos niveles.

Si comparamos las gráficas con la tabla de la varianza, observamos que las mayores diferencias están relacionadas con valores altos en la suma de cuadrados.

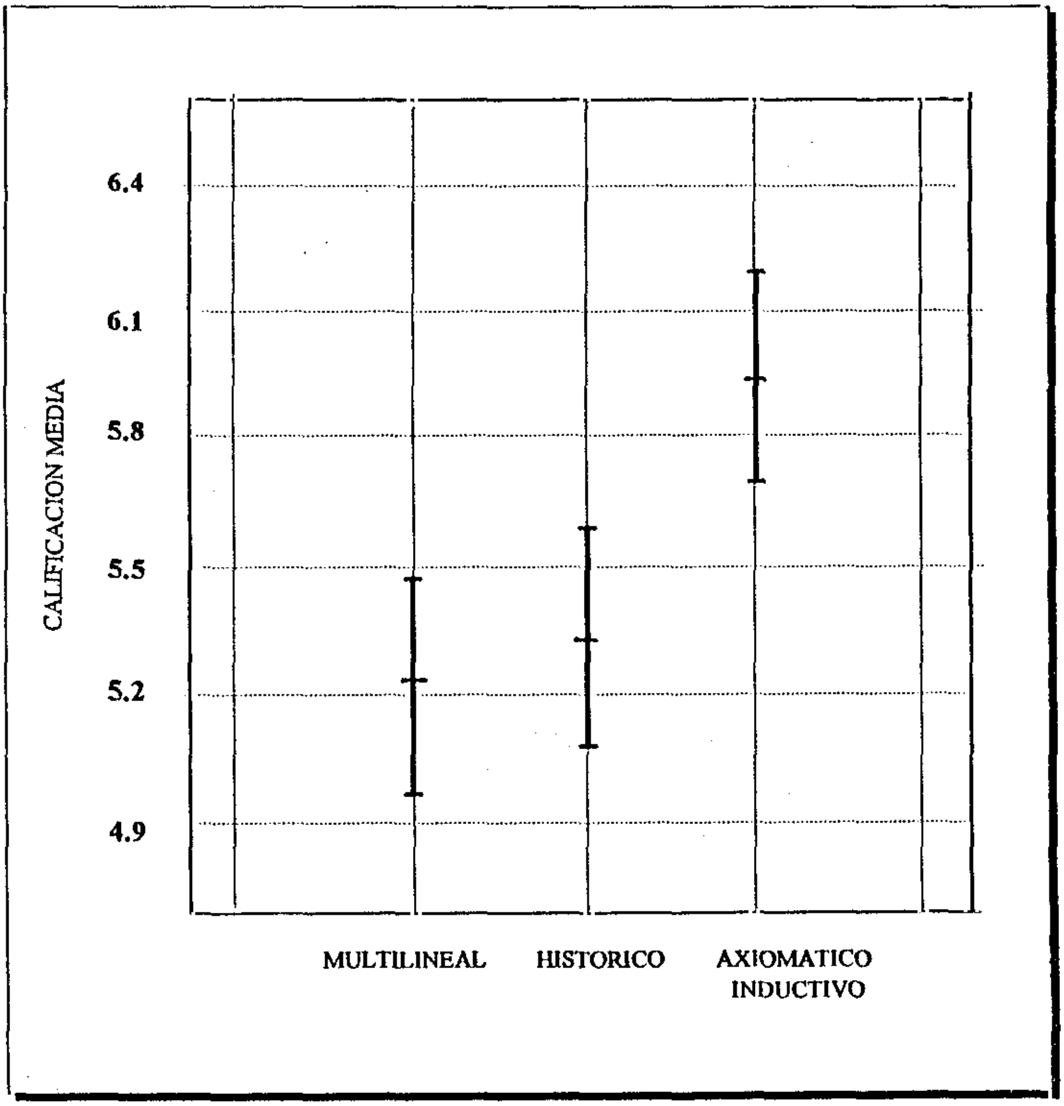
Ninguna de las interacciones alcanza valores que se puedan considerar estadísticamente significativas. Lo mismo ocurre con las interacciones de órdenes tres y cuatro.

GRÁFICO 15: COMPARACIÓN DE LAS MEDIAS DE LOS GRUPOS



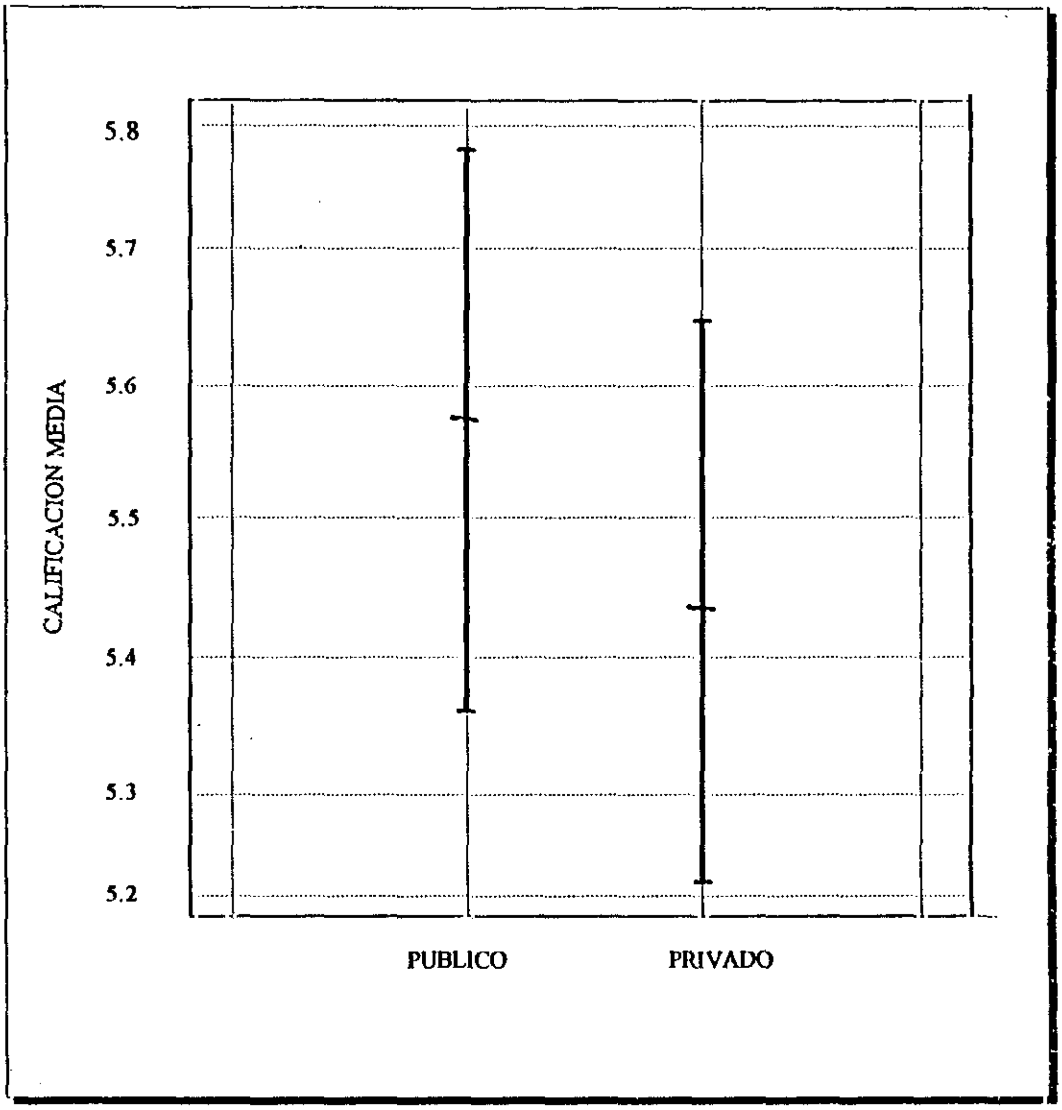
Cada una de las barras nos muestra la media del grupo que figura a su lado. Se aprecian unos valores superiores en las calificaciones medias de los alumnos que recibieron la explicación de los determinantes por el método axiómatico–inductivo.

GRÁFICO 16: INTERVALO AL 95% DE CONFIANZA DE LA CALIFICACIÓN MEDIA DEL EXAMEN SEGÚN EL MÉTODO DE ENSEÑANZA APLICADO



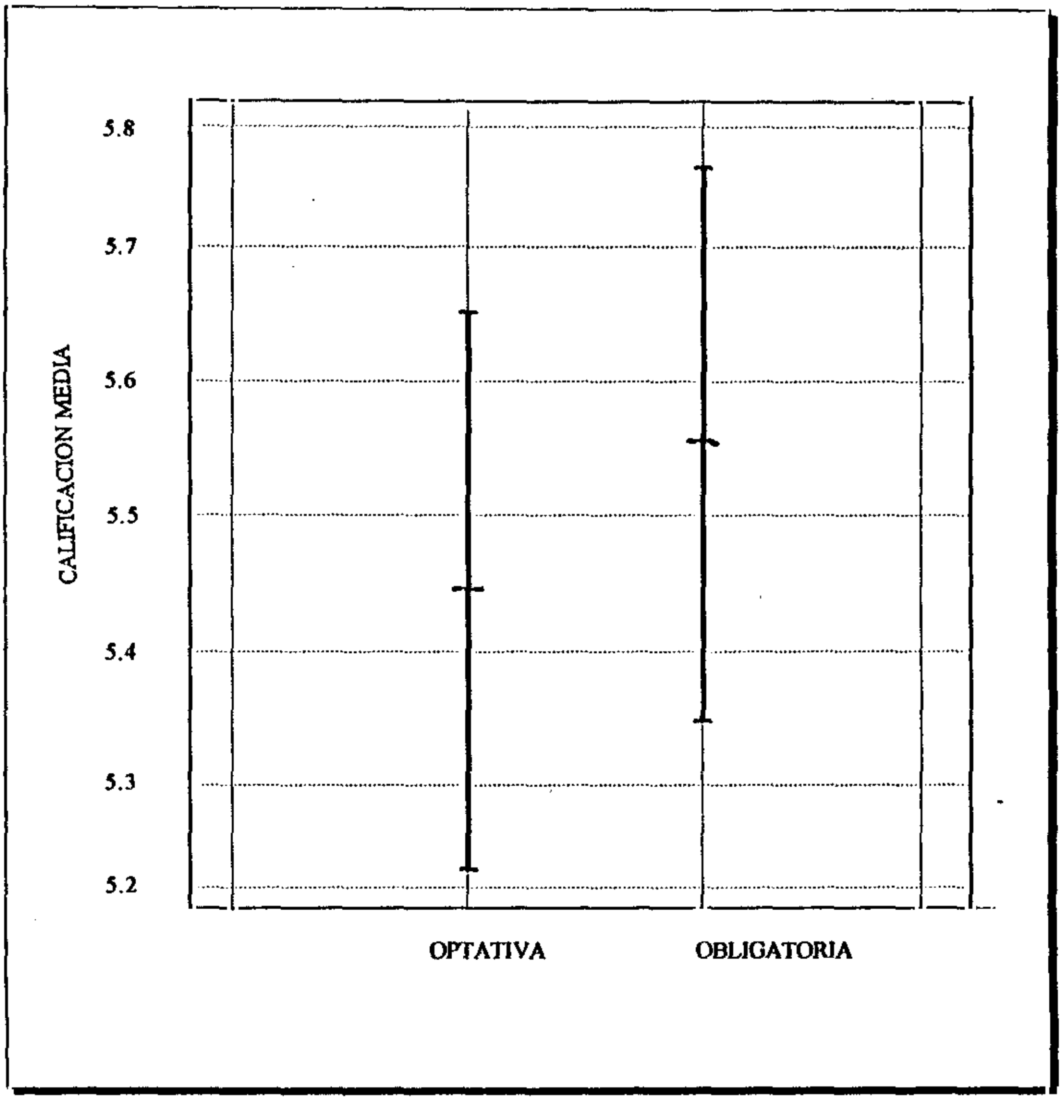
Cada trazo en línea más gruesa nos indica el intervalo, al 95% de confianza, de la media de los tres niveles del factor método de enseñanza. El método axiomático–inductivo presenta una media superior a los otros dos.

GRÁFICO 17: INTERVALO AL 95% DE CONFIANZA DE LA CALIFICACIÓN MEDIA DEL EXAMEN SEGÚN LA PROCEDENCIA DEL ESTUDIANTE



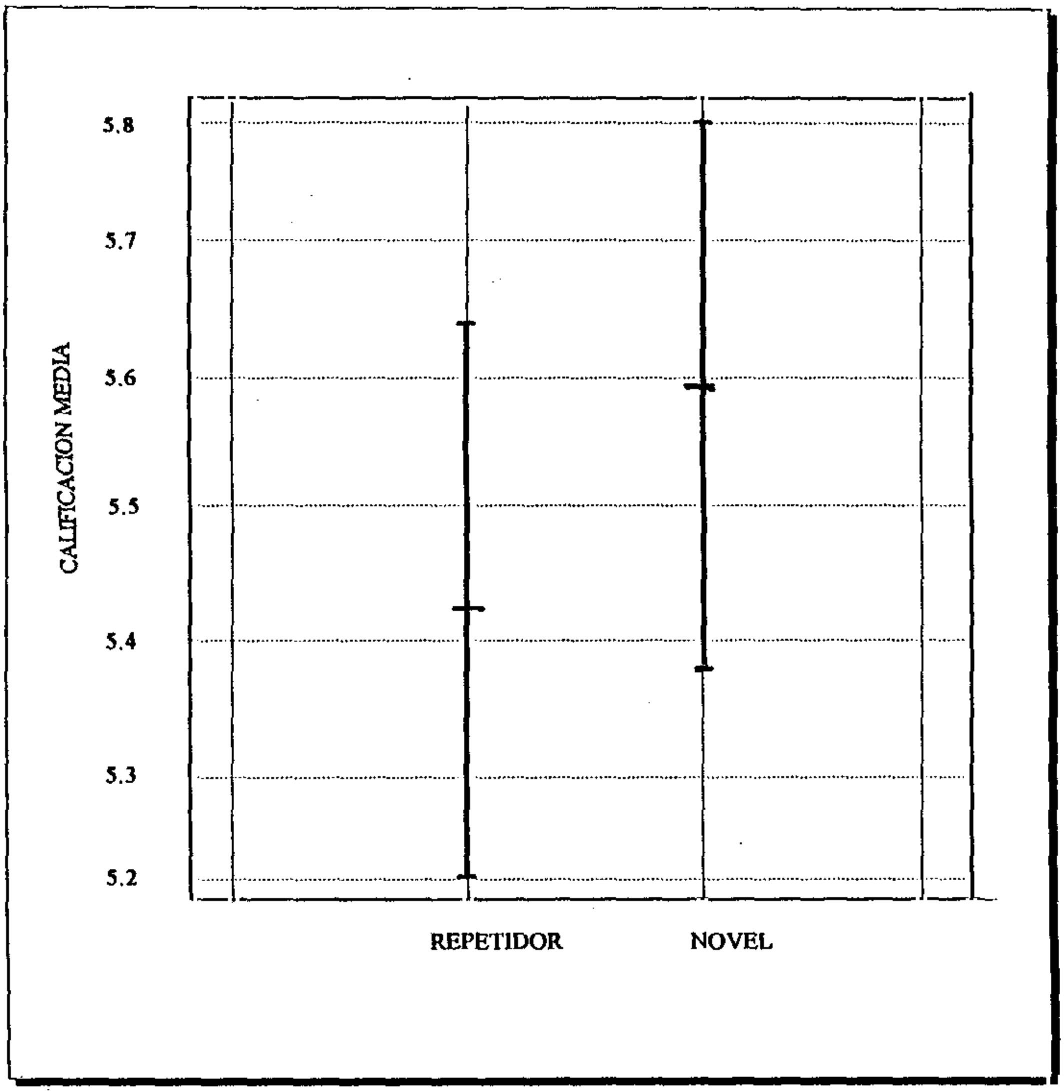
Fueron los alumnos que cursaron los estudios de B.U.P. en centros públicos los que obtuvieron una media más elevada con respecto a los que lo cursaron en centros privados.

GRÁFICO 18: INTERVALO AL 95% DE CONFIANZA DE LA CALIFICACIÓN MEDIA DEL EXAMEN SEGÚN LA OPTATIVIDAD



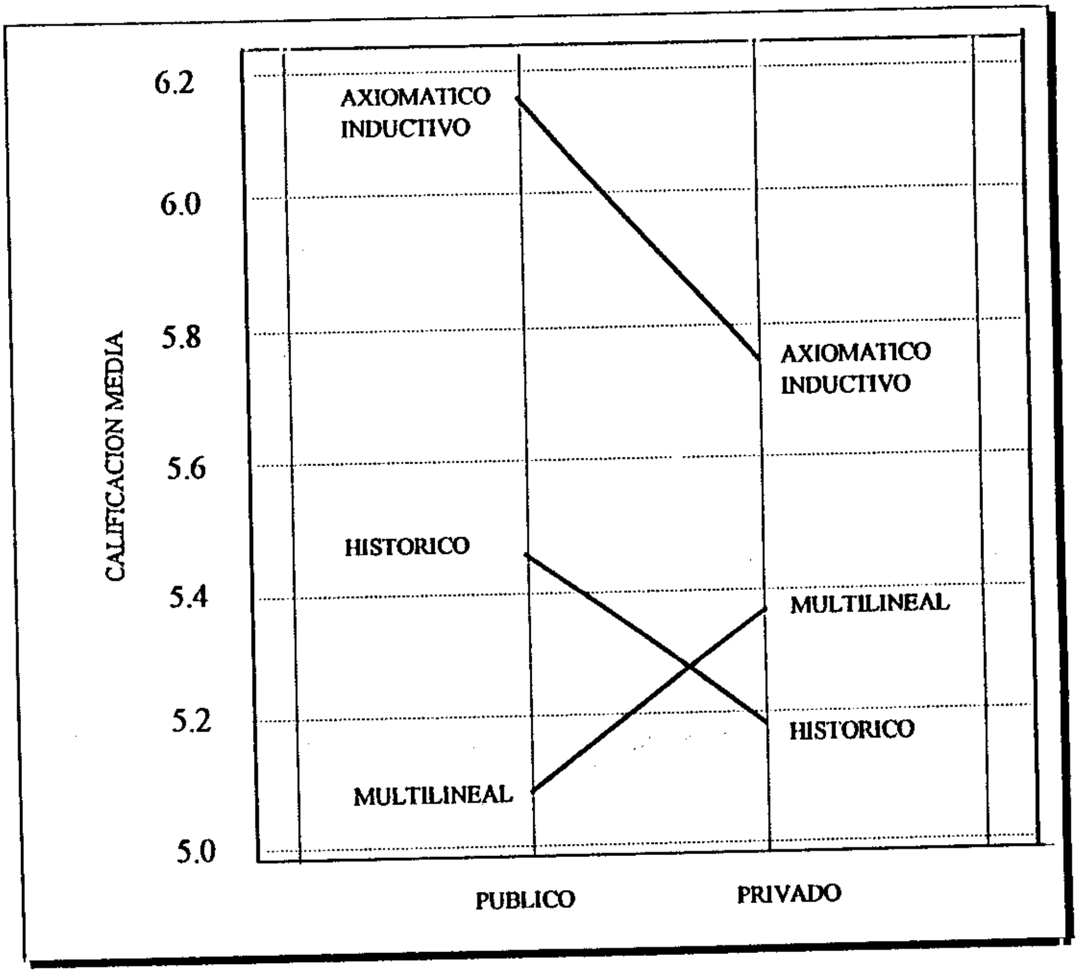
En el caso del factor optativa son los alumnos que cursan la asignatura de Matemáticas I como obligatoria los que obtienen una calificación media superior.

GRÁFICO 19: INTERVALO AL 95% DE CONFIANZA DE LA CALIFICACIÓN MEDIA DEL EXAMEN SEGÚN EL ESTUDIANTE SEA REPETIDOR O NO



Los alumnos que acceden por primera vez al Curso de Orientación Universitaria, obtienen una calificación media, en la prueba teórico–práctica sobre los determinantes, superior a la de los alumnos repetidores.

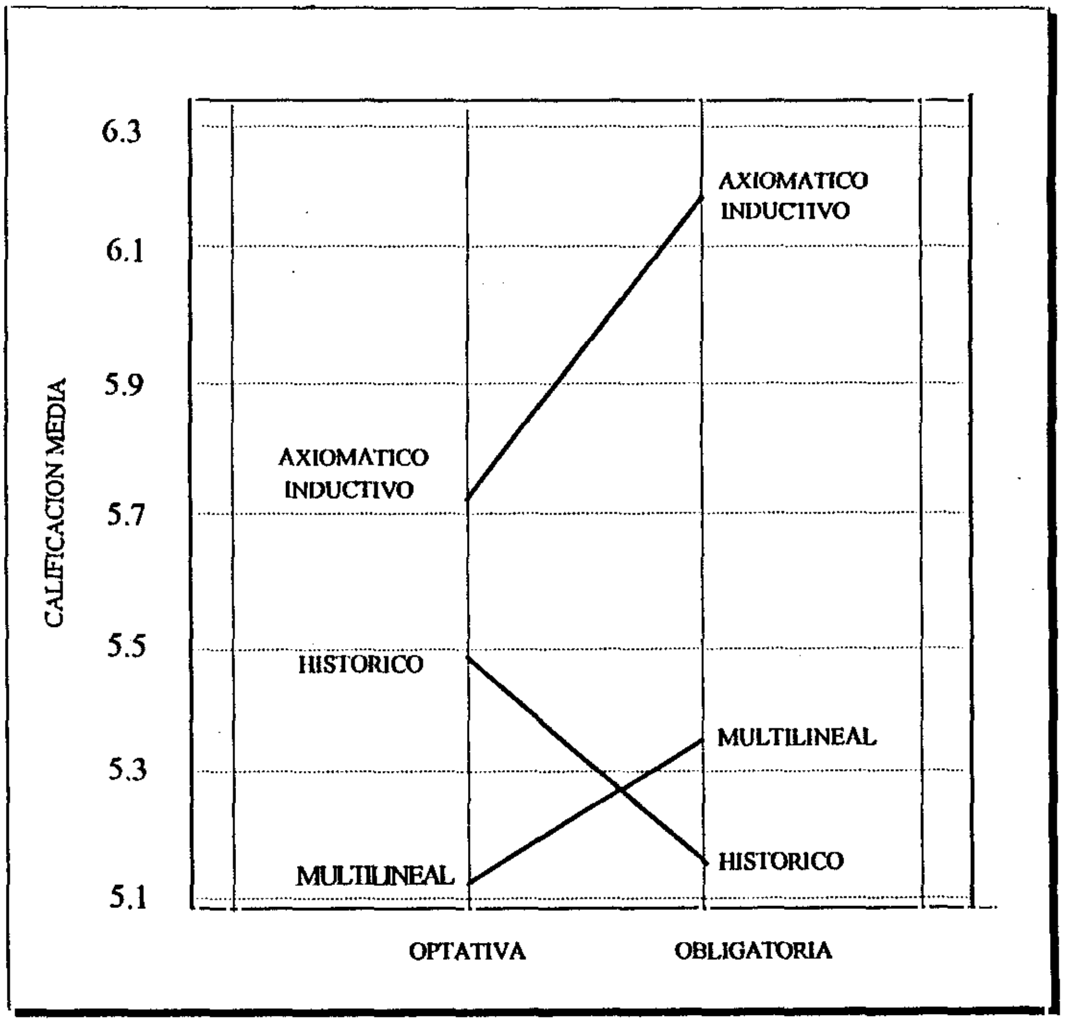
GRÁFICO 20: INTERACCIÓN ENTRE EL MÉTODO DE ENSEÑANZA APLICADO Y LA PROCEDENCIA DEL ESTUDIANTE



Las interacciones entre el método de enseñanza y la procedencia del alumnado, son las posibles combinaciones entre los diferentes niveles de ambos factores. La combinación de los métodos multilineal e histórico con la procedencia produce valores dispares, mientras que los alumnos que provienen de centros públicos obtienen mejor resultado con el método histórico, los que provienen de centros privados lo logran con el multilineal. Lo que sí parece evidente es que los mejores resultados se logran con el método axiomático—inductivo.

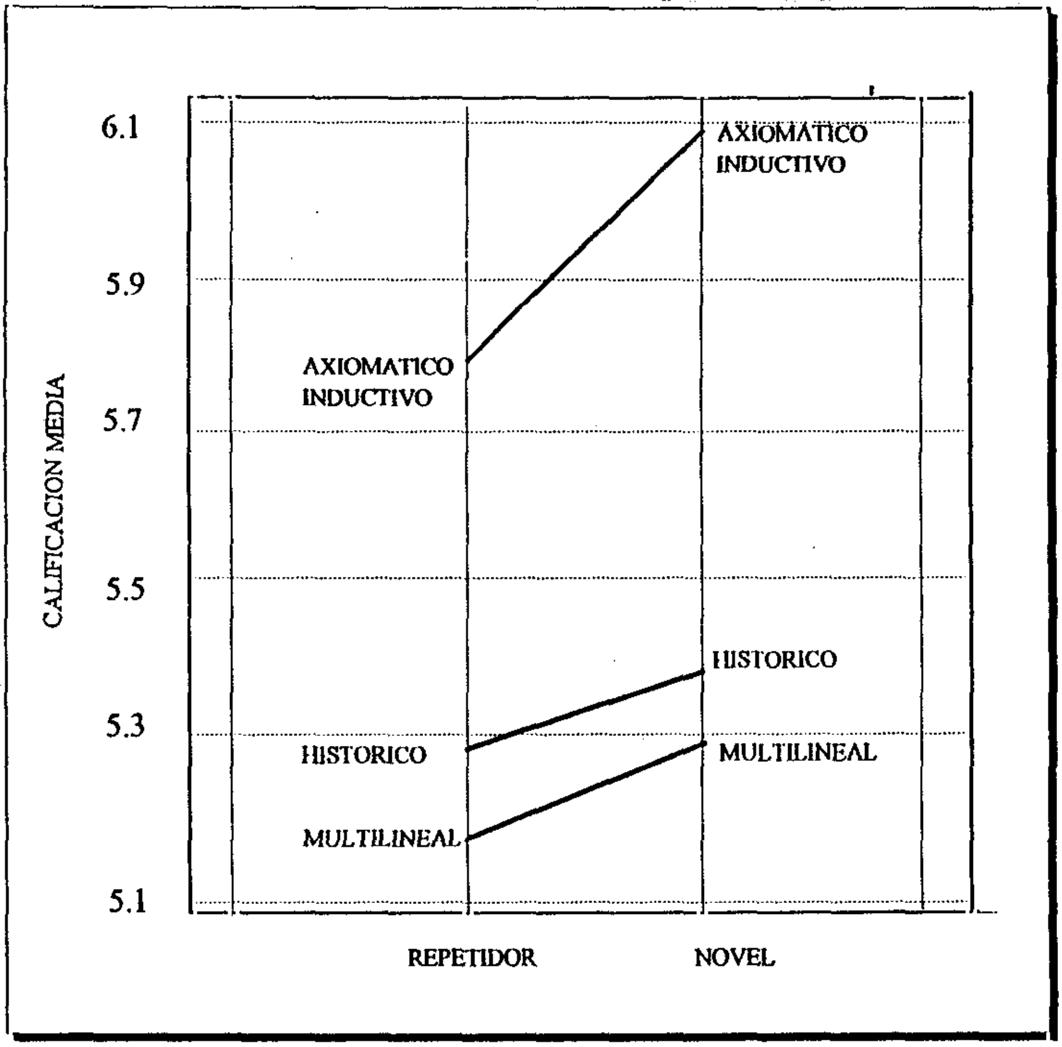
GRÁFICO 21: INTERACCIÓN ENTRE EL MÉTODO DE ENSEÑANZA

APLICADO Y LA OPTATIVIDAD



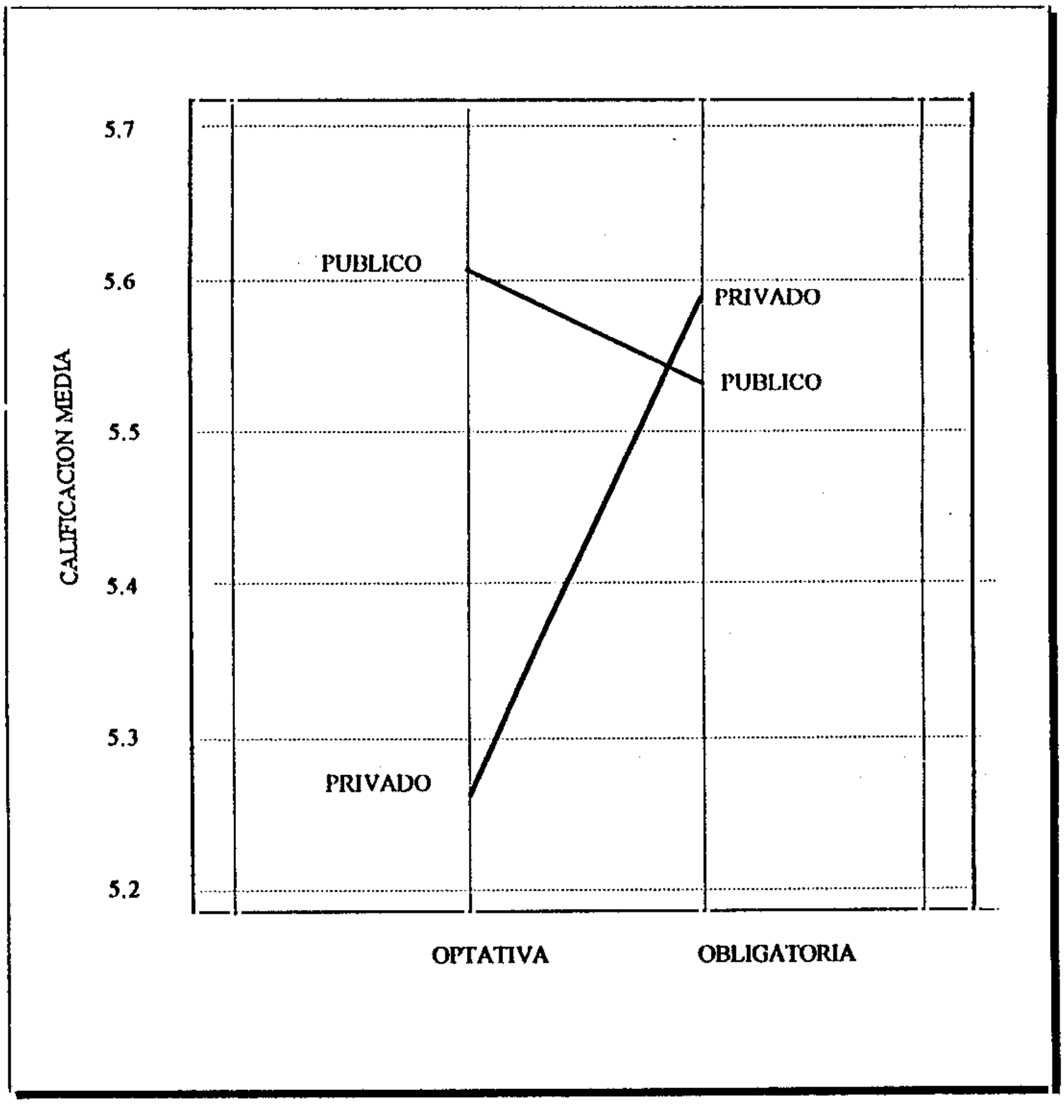
Ocurre algo similar a la interacción anterior. Los alumnos que tienen la asignatura de Matemáticas I como optativa obtienen mejores resultados con el método histórico, y los que la tienen obligatoria con el multilineal. En ambos casos, sin embargo, los mejores resultados corresponden a los alumnos que han seguido el método axiomático–inductivo.

GRÁFICO 22: INTERACCIÓN ENTRE EL MÉTODO DE ENSEÑANZA APLICADO Y SI EL ALUMNO ES REPETIDOR O NO



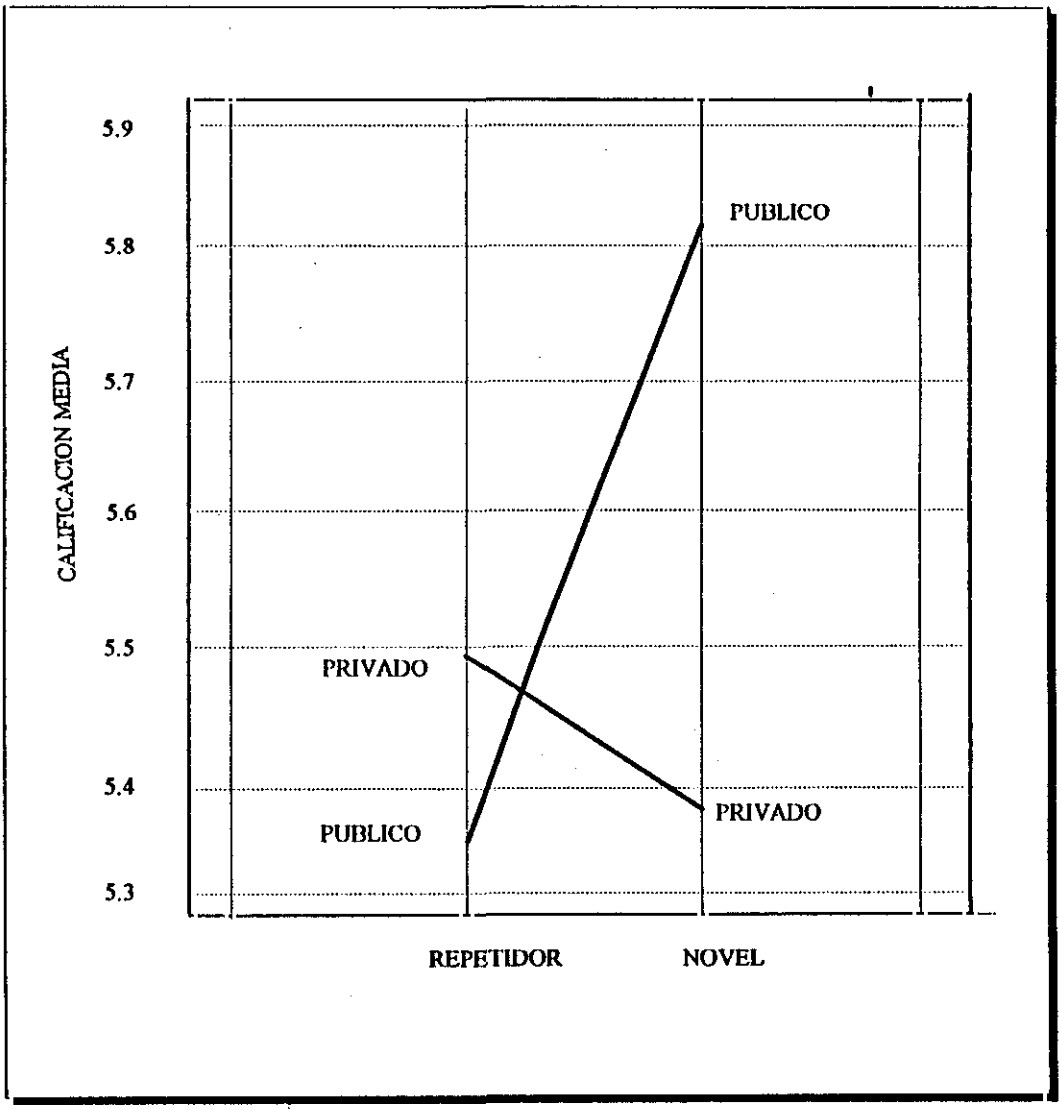
En esta interacción no se producen valores cruzados. Se observa que son siempre los alumnos noveles los que obtienen unos resultados superiores a su compañeros repetidores. Cuando esto ocurre el nivel de significación de esta interacción es muy alto.

GRÁFICO 23: INTERACCIÓN ENTRE LA PROCEDENCIA DEL ALUMNO Y LA OPTATIVIDAD



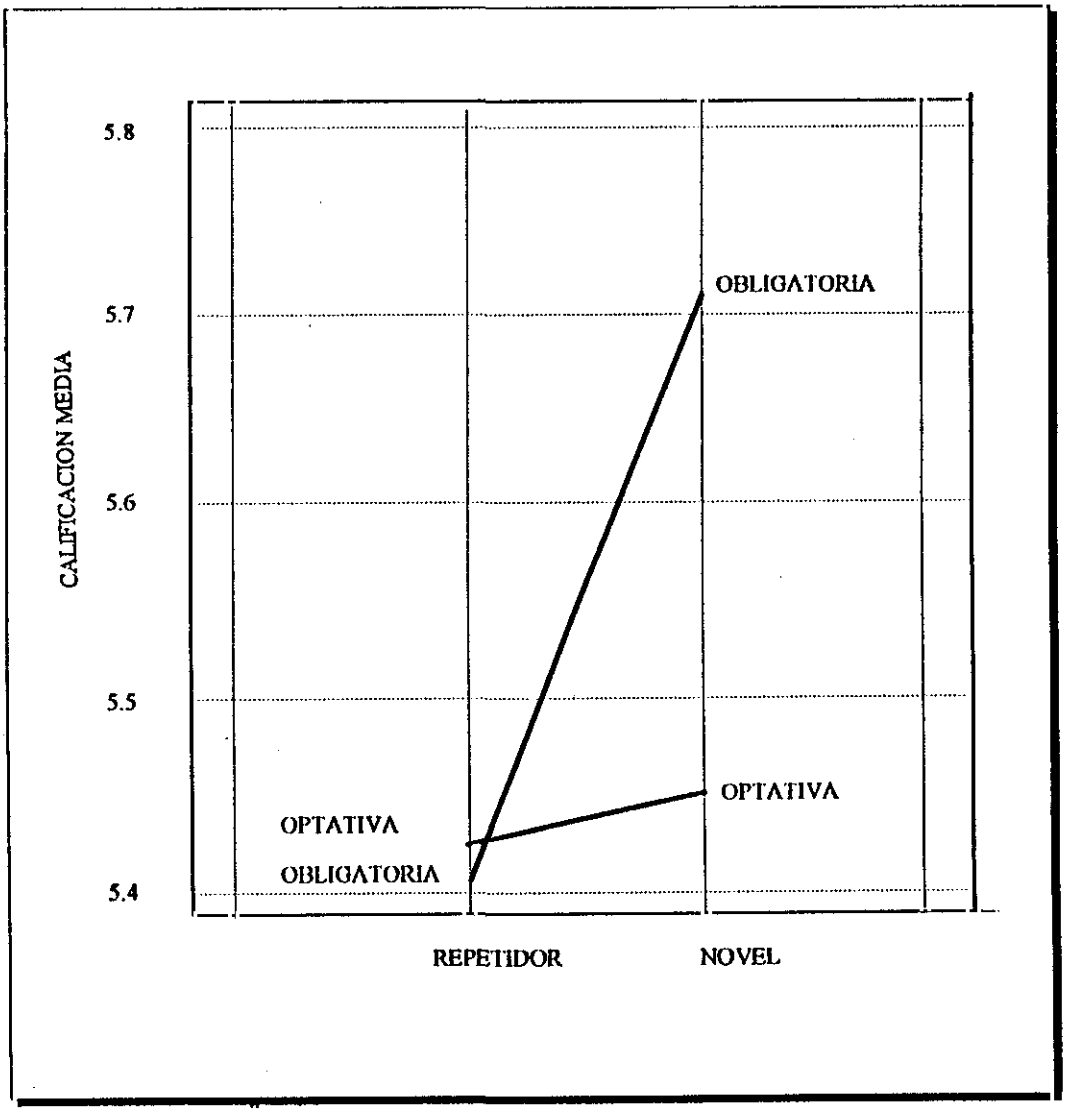
De nuevo se cruzan, lo cual nos dará un nivel de significación no muy elevado. Los alumnos que cursaron sus estudios de B.U.P. en un centro privado y tienen la opción B, es decir las Matemáticas I como optativa, obtienen una calificación media muy baja, en comparación con las otras tres posibles combinaciones.

GRÁFICO 24: INTERACCIÓN ENTRE LA PROCEDENCIA DEL ALUMNO Y SI EL ALUMNO ES REPETIDOR O NO



Podemos destacar que la calificación media conseguida por los alumnos que realizan el C.O.U. por primera vez y que proceden de centros públicos que es manifiestamente superior a la de sus compañeros que estudiaron en centros privados y a los que, procediendo de centros públicos, han sido repetidores.

GRÁFICO 25: INTERACCIÓN ENTRE LA OPTATIVIDAD Y SI EL ALUMNO ES REPETIDOR O NO

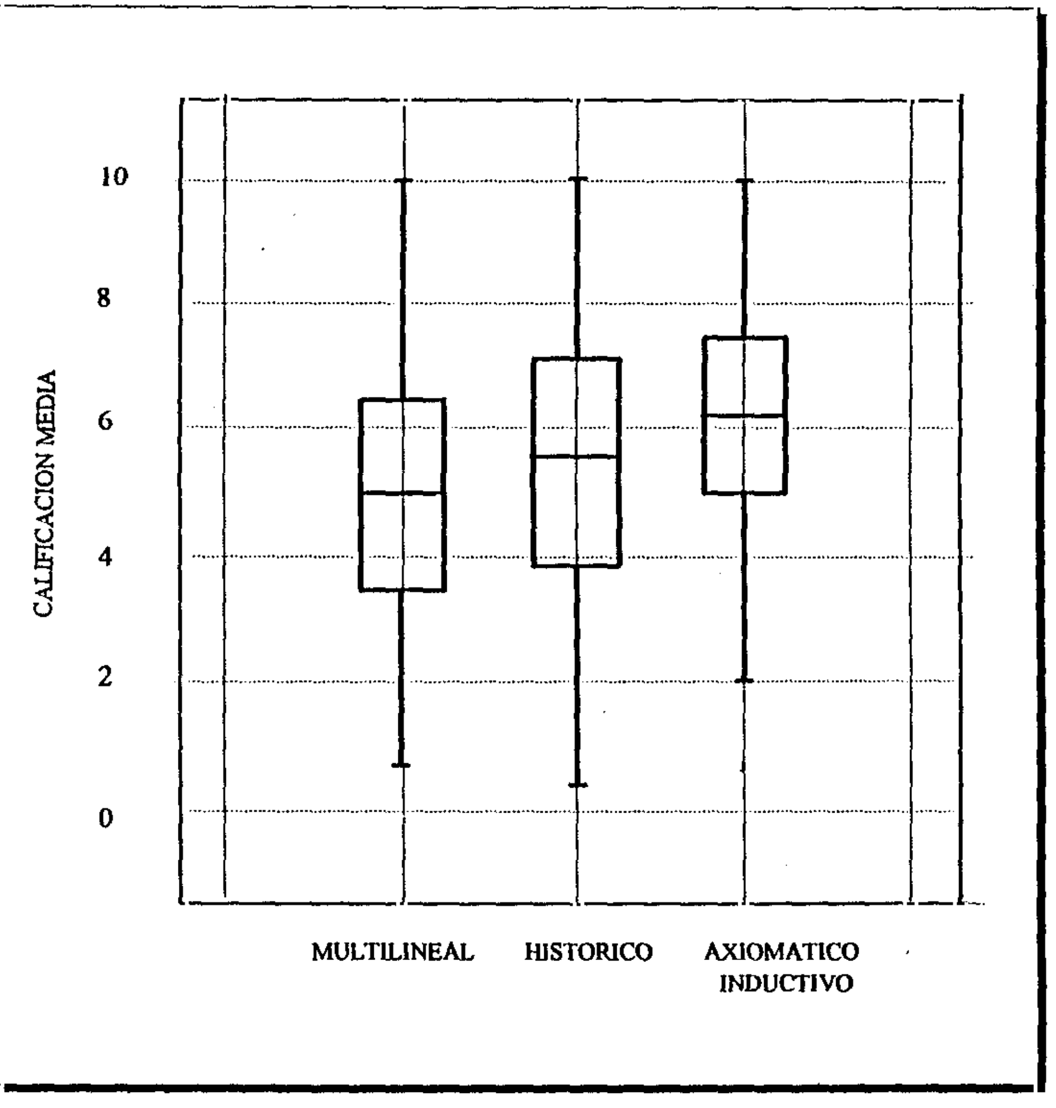


Destaca la calificación media de los estudiantes que tienen las Matemáticas I como asignatura obligatoria y es la primera vez que cursan C.O.U.

Los gráficos 26 al 29 presentan unos diagramas de caja, denominados Box–Whisker. En ellos aparece el rango de las calificaciones de la prueba sobre la teoría de los determinantes según los factores y divididos por niveles dentro de cada factor. Este rango está dividido en cuartiles por medio de un rectángulo. El mismo nos indica donde se encuentra concentrado el 50% de la población entre el cuartil superior y el inferior.

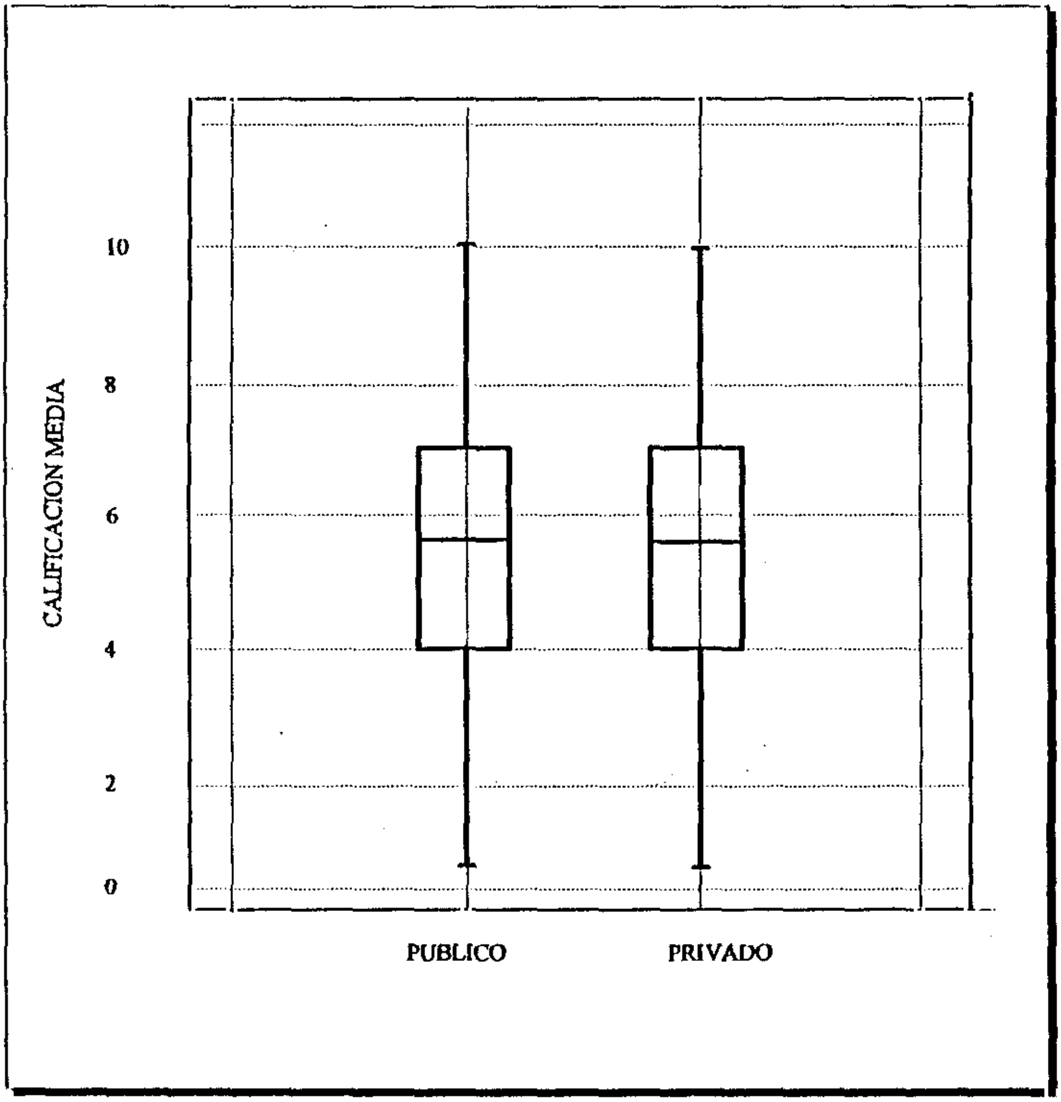
En todos los factores el rango es muy similar. Varía algo la concentración de los datos en la zona entre los cuartiles mencionados, destacando una mayor concentración de los datos en el nivel tres del factor método de enseñanza. Su rectángulo es más reducido que en los demás. Esto significa que los datos en estos cuartiles están más concentrados alrededor de la media.

GRÁFICO 26: DIAGRAMA DE CAJA PARA LOS NIVELES DEL FACTOR MÉTODO DE ENSEÑANZA



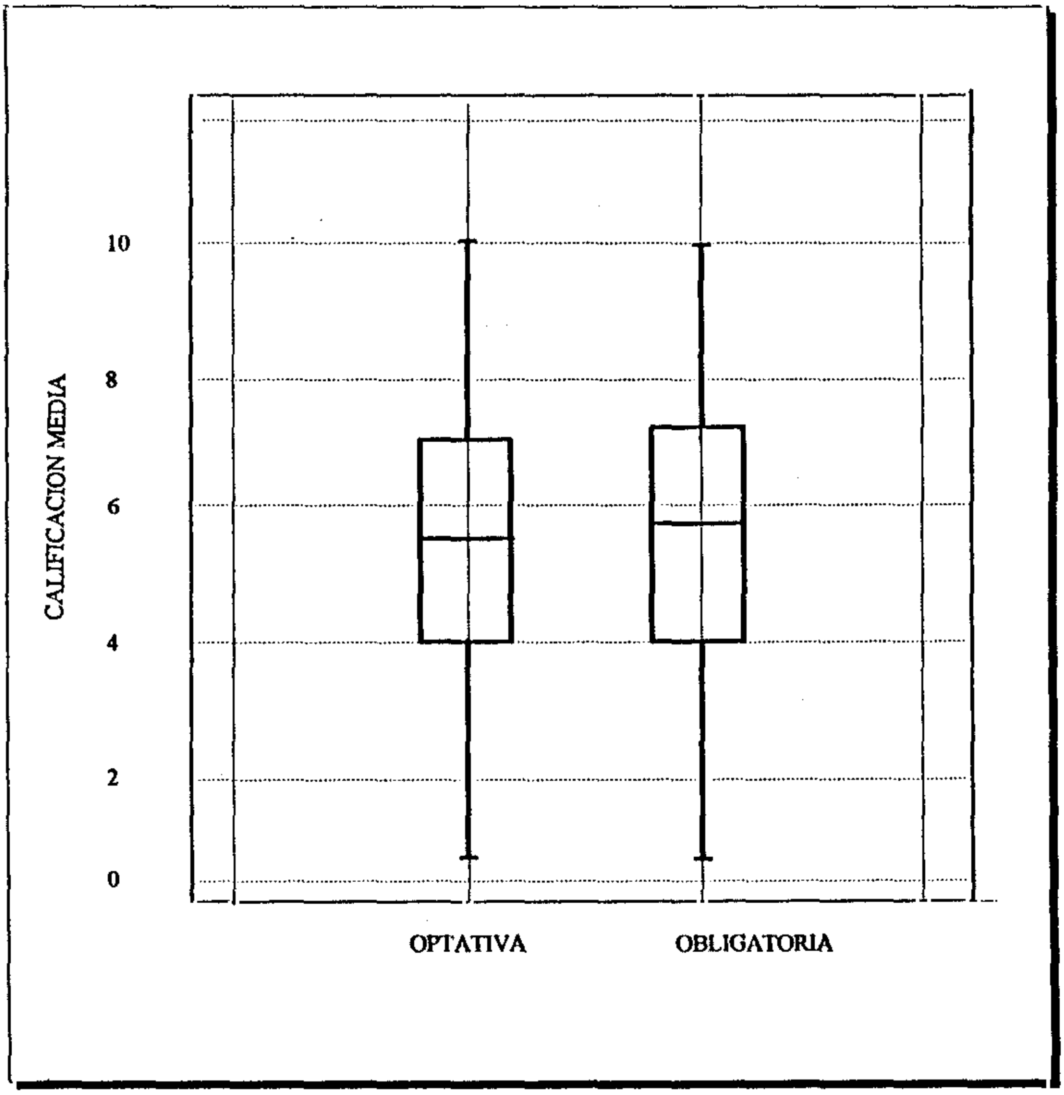
El rectángulo delimita el 50% de los datos. El extremo inferior y superior separan, respectivamente, el 25% de las obsevaciones (primer cuartil), y el superior el 75% (tercer cuartil). Un rectángulo más reducido, como el que corresponde a los datos del método axiomático–inductivo, indica una mayor concentración de los mismos en dicho intervalo.

GRÁFICO 27: DIAGRAMA DE CAJA PARA LOS NIVELES DEL FACTOR PROCEDENCIA DEL ALUMNO



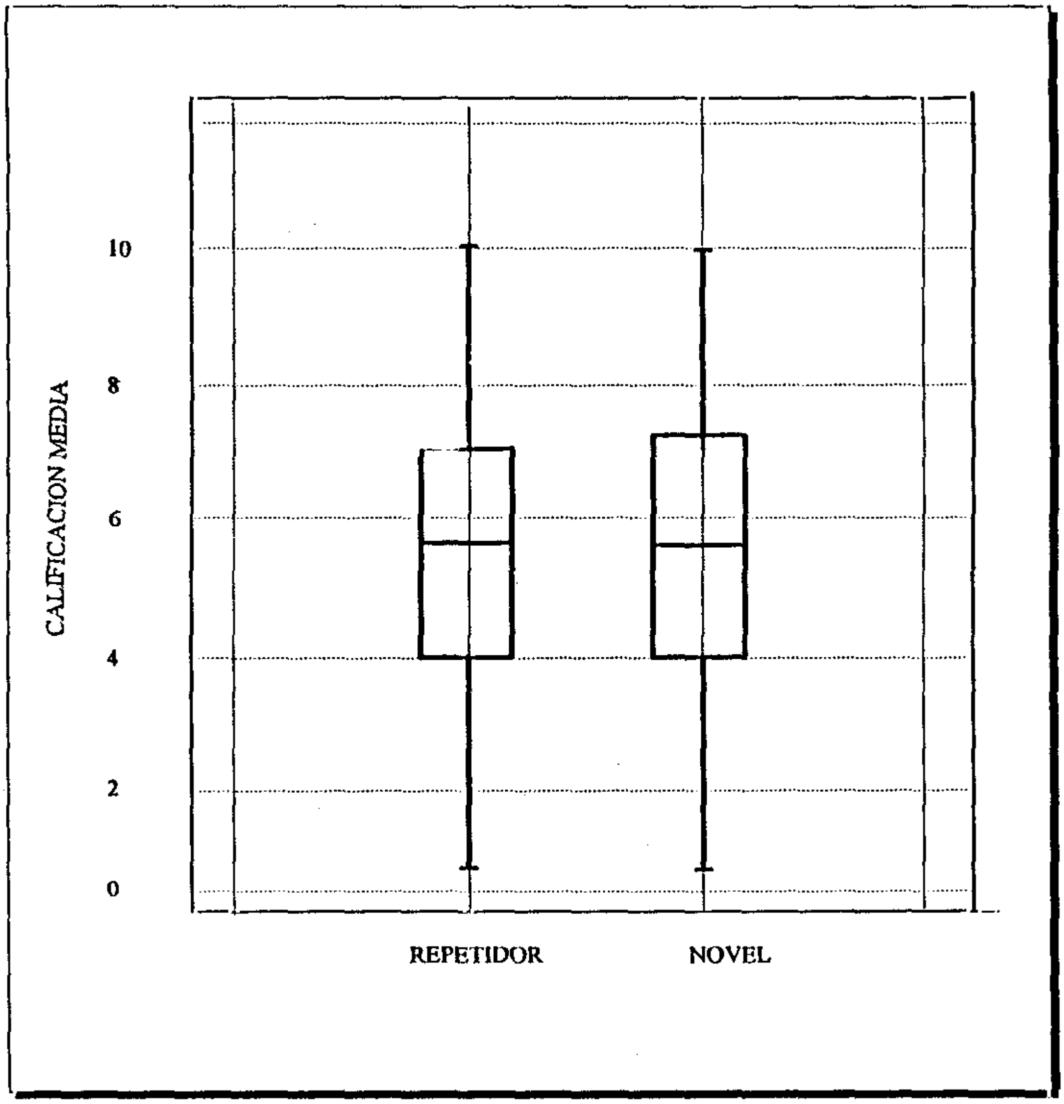
La distribución de las calificaciones de los alumnos según el factor procedencia es prácticamente idéntica en ambos niveles, público y privado.

GRÁFICO 28: DIAGRAMA DE CAJA PARA LOS NIVELES DEL FACTOR OPTATIVIDAD



Aunque el cuartil superior es algo mayor en el nivel obligatoria, no es en absoluto significativo por su escasa diferencia.

GRÁFICO 29: DIAGRAMA DE CAJA PARA LOS NIVELES DEL FACTOR REPETIDOR



No existen diferencias significativas entre los niveles del factor repetidor.

2.- *Contrastes del análisis detallado*

Por medio del contraste de hipótesis detectaremos cuál, o cuáles, son los niveles, de los diferentes factores, cuyas medias difieren de las de los restantes. Es decir, si existe algún nivel que marque una diferencia estadísticamente significativa. Este es siempre un procedimiento más fiable que el contraste gráfico de medias.

Para ello utilizaremos los métodos más conocidos, y que ya se han comentado. Estos son: el de Scheffe, LSD o mínima diferencia signnificativa, la prueba de intervalos múltiples de Duncan, la prueba de Newman-Kleus y la prueba de Tukey y Bonferroni. Con estos tests verificaremos si las diferencias apreciadas son o no estadísticamente significativas.

1.- *Test de Scheffe*

Para un nivel de confianza del 95%, el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza da como resultados:

Tablas 17A/B: Test de Scheffe I

Nivel	**Tamaño de la Muestra**	**Media**	**Grupos homogéneos**
Multilineal (1)	136	5'228309	X
Histórico (2)	136	5'326102	XX
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838	X

Contraste		**Diferencia**	**+/- Límite**
1 - 2		-0'097793	0'63203
1 - 3	*	-0'718529	0'63203
2 - 3		-0'620736	0'63203

Nota: El * marca, en lo sucesivo, una diferencia estadísticamente significativa.

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 18A/B: Test de Scheffe II

Nivel	**Tamaño de la Muestra**	**Media**	**Grupos homogéneos**
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		**Diferencia**	**+/− Límite**
0 − 1		−0'138382	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 19A/B: Test de Scheffe III

Nivel	**Tamaño de la Muestra**	**Media**	**Grupos homogéneos**
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		**Diferencia**	**+/− Límite**
0 − 1		−0'122892	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 20A/B: Test de Scheffe IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia	+/- Límite
0 - 1		-0'171422	0'41299

2.- *Test L.S.D. (Mínima Diferencia Significativa)*

Con el mismo nivel de confianza, 95%, el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza da como resultados:

Tablas 21A/B: Test L.S.D. I

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Multilineal (1)	136	5'228309	X
Histórico (2)	136	5'326102	X
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838	X

Contraste		Diferencia	+/- Límite
1 - 2		-0'097793	0'50581
1 - 3	*	-0'718529	0'50581
2 - 3	*	-0'620736	0'50581

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 22A/B: Test L.S.D. II

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'138382	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 23A/B: Test L.S.D. III

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'122892	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 24A/B: Test L.S.D. IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'171422	0'41299

3. – Test de Tukey

Al 95% de confianza el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza resulta:

Tablas 25A/B: Test de Tukey I

Nivel	**Tamaño de la Muestra**	**Media**	**Grupos homogéneos**		
Multilineal (1)	136	5'228309	X		
Histórico (2)	136	5'326102	X		
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838		X	

Contraste		**Diferencia**	**+/– Límite**
1 – 2		–0'097793	0'60513
1 – 3	*	–0'718529	0'60513
2 – 3	*	–0'620736	0'60513

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 26A/B: Test de Tukey II

Nivel	**Tamaño de la Muestra**	**Media**	**Grupos homogéneos**
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		**Diferencia**	**+/– Límite**
0 – 1		–0'138382	0'41289

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 27A/B: Test de Tukey III

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'122892	0'41289

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 28A/B: Test de Tukey IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'171422	0'41289

4.– Test de Newman–Keuls

Al 95% de confianza, se han obtenido, para el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza, los resultados:

Tablas 29A/B: Test de Newman–Keuls I

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos		
Multilineal (1)	136	5'228309	X		
Histórico (2)	136	5'326102	X		
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838		X	

Contraste		Diferencia
1 – 2		–0'097793
1 – 3	*	–0'718529
2 – 3	*	–0'620736

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 30A/B: Test de Newman–Keuls II

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'138382

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 31A/B: Test de Newman–Keuls III

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'122892

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 32A/B: Test de Newman–Keuls IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'171422

5.– Test de Duncan

Al 95% de confianza hemos obtenido en el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza:

Tablas 33A/B: Test de Duncan I

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Multilineal (1)	136	5'228309	X
Histórico (2)	136	5'326102	X
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838	X

Contraste		Diferencia
1 – 2		–0'097793
1 – 3	*	–0'718529
2 – 3	*	–0'620736

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 34A/B: Test de Duncan II

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'138382

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 35A/B: Test de Duncan III

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'122892

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 36A/B: Test de Duncan IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia
0 – 1		–0'171422

6.– Test de Bonferroni

Al 95% de confianza los resultados han sido en el contraste de medias de los niveles del factor método de enseñanza:

Tablas 37A/B: Test de Bonferroni I

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Multilineal (1)	136	5'228309	X
Histórico (2)	136	5'326102	X
Axiomático Inductivo (3)	136	5'946838	X

Contraste		Diferencia	+/– Límite
1 – 2		–0'097793	0'63855
1 – 3	*	–0'718529	0'63855
2 – 3	*	–0'620736	0'63855

El contraste de medias de los niveles del factor procedencia da:

Tablas 38A/B: Test de Bonferroni II

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Privado (1)	204	5'431226	X
Público (0)	204	5'569608	X

Contraste		Diferencia	+/– Límite
0 – 1		–0'138382	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor optativa da:

Tablas 39A/B: Test de Bonferroni III

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Optativa (0)	204	5'438971	X
Obligatoria (1)	204	5'561863	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'122892	0'41299

El contraste de medias de los niveles del factor repetidor da:

Tablas 40A/B: Test de Bonferroni IV

Nivel	Tamaño de la Muestra	Media	Grupos homogéneos
Repetidor (0)	204	5'414706	X
Novel (1)	204	5'586128	X

Contraste		Diferencia	+/− Límite
0 − 1		−0'171422	0'41299

Nota: Recuérdese que el * en las tablas anteriores marca una diferencia esta-dísticamente significativa.

En los diferentes tests aplicados únicamente encontramos diferencias estadísticamente significativas entre las medias del factor denominado método de enseñanza. En los demás factores las diferencias entre las medias están por debajo de los valores requeridos para ser significativas con un grado de confianza del 95%.

En el factor método de enseñanza, y en todos los contrastes realizados, encontramos que existen unas diferencias significativas entre el nivel 1, que corresponde al método multilineal, y el nivel 3, que corresponde al axiomático–inductivo. También en todos vemos que no existe ninguna diferencia significativa entre los niveles 1 y 2, (multilineal e histórico). Entre los niveles determinados por el método histórico y por el método axiomático inductivo, en todos los contrastes aparece una diferencia significativa, excepto cuando aplicamos la prueba de Scheffe. En dicha prueba se establece como límite para considerarla significativa, con un nivel de confianza del 95%, un valor de 0'63203, mientras que la diferencia real existente entre ambos métodos ha sido de 0'62074, lo que supone un valor muy próximo al requerido.

Con un grado de confianza del 95% podemos afirmar que las medias de los tratamienteos del factor método de enseñanza son distintas.

DISEÑO CON LOS FACTORES METODO Y SEXO

Como ya se indicó en el planteamiento inicial del problema, queríamos analizar el factor sexo pero, finalmente, no fue estudiado debido a que el tamaño de los grupos habría sido muy reducido y podría haber distorsionado los resultados.

En el estudio anterior encontramos que el factor método de enseñanza producía diferencias significativas. Realizaremos, ahora, un análisis factorial con estos dos factores únicamente para comprobar si el factor sexo, o la interacción de este factor con el método de enseñanza, produce alguna diferencia significativa.

En el tratamiento de este factor no profundizaremos tanto en el estudio de los errores y nos centraremos, principalmente, en el análisis de la varianza.

Designaremos por 0 al sexo masculino y por 1 al femenino.

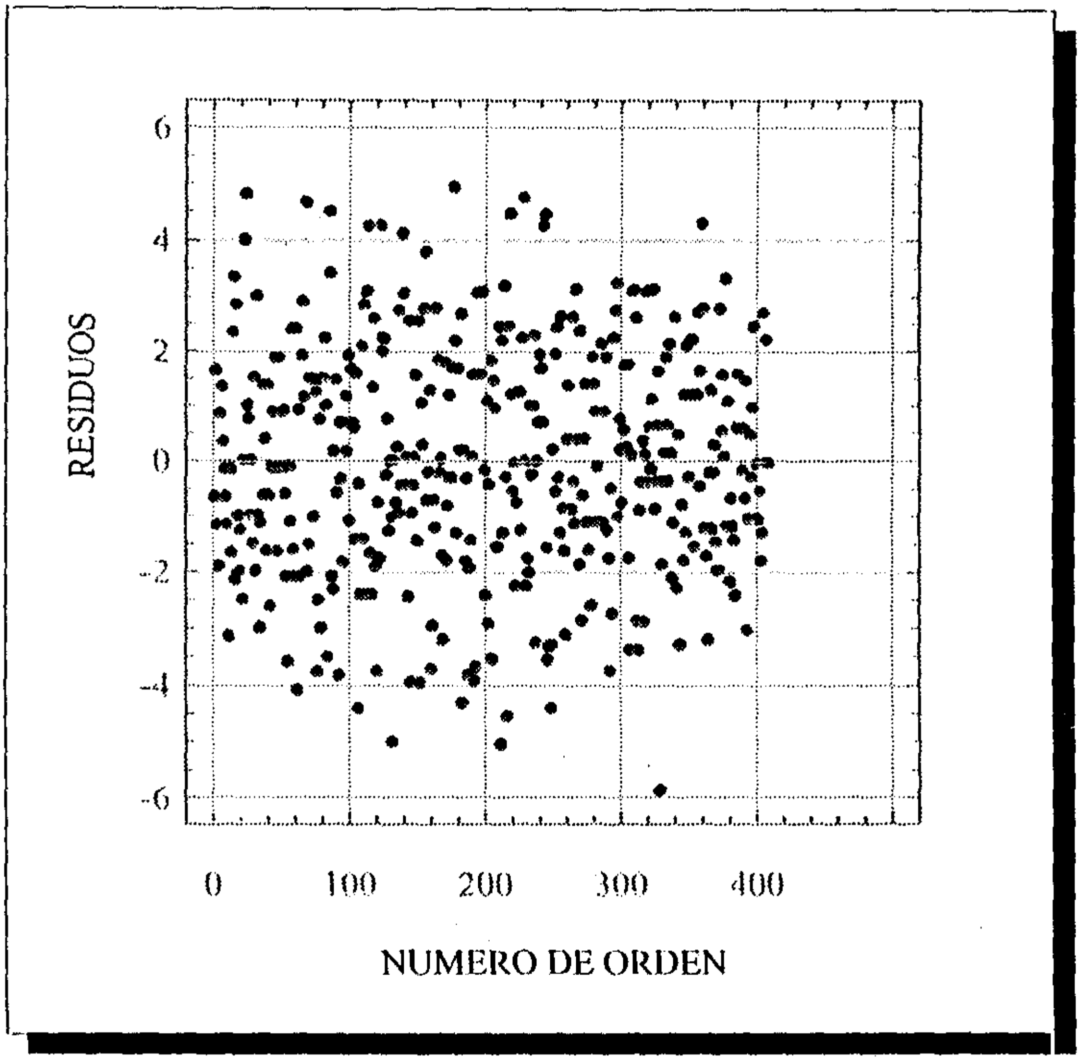
Tabla 41: Análisis de la varianza V

FUENTE DE VARIACIÓN	SUMA DE CUADRADOS	G.L.	MEDIA DE CUADRADOS	F-RATIO	NIVEL DE SIGNIFICACIÓN
Efectos Principales					
A : MÉTODO	34'114205	2	17'057103	3'815524	0'0228
B : SEXO	1'425225	1	1'425225	0'31881	0'5787
Interacción					
AB	1'918948	2	0'959474	0'214626	0'8069
RESIDUOS	1797'12	402	4'470448		
TOTAL	1841'778	407			

En los gráficos 30 y 31 comprobamos cómo los errores no siguen ningún patrón, ni en su distribución general ni en los grupos, estando distribuidos aleatoriamente.

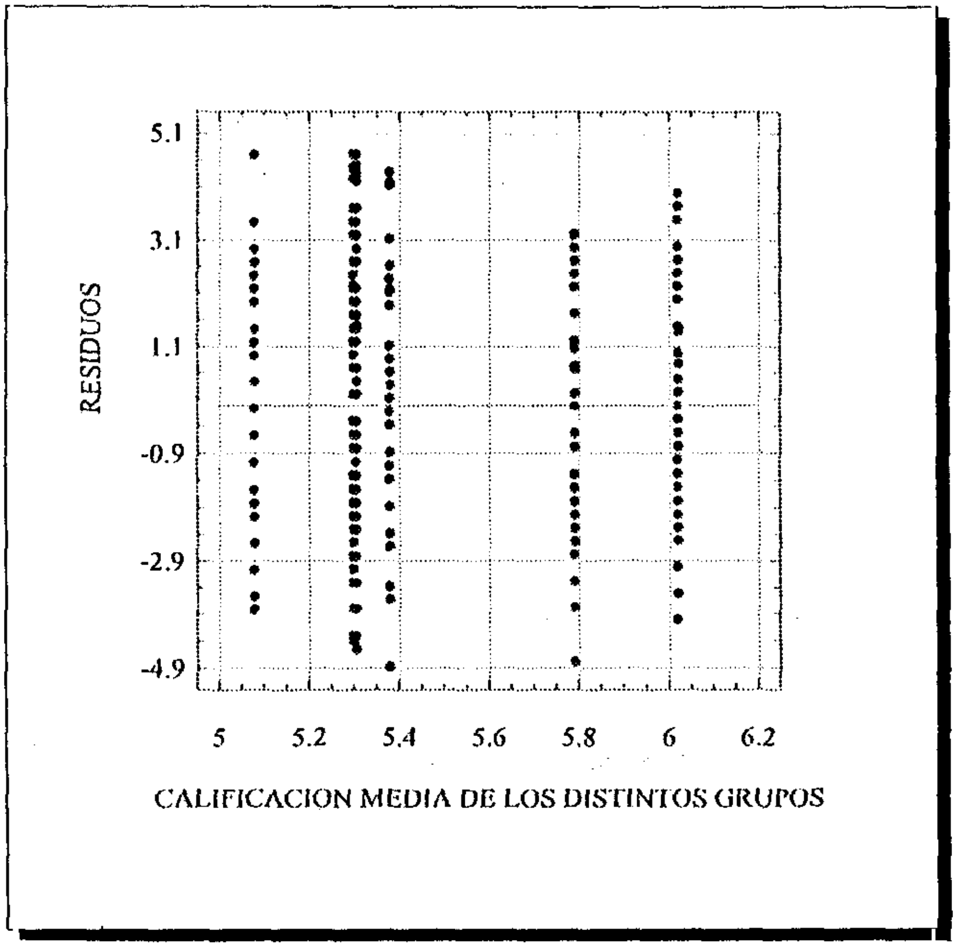
En la tabla del análisis de la varianza verificamos los resultados obtenidos anteriormente sobre el factor método de enseñanza, pero no vemos la existencia de un nivel de significación bajo en lo referente al factor sexo, ni su interacción con el factor método de enseñanza.

GRÁFICO 30: RESIDUOS ORIGINADOS POR LA INFLUENCIA DEL FACTOR SEXO



Cada punto representa la diferencia entre la calificación media de uno de los alumnos y la media del grupo al que pertenence, entendiendo como grupo la combinación de los diferentes niveles del factor sexo y el método de enseñanza. El no seguir ningún patrón garantiza la aleatoriedad de la muestra.

GRÁFICO 31: RESIDUOS DE LOS GRUPOS COMBINANDO LOS FACTORES MÉTODO DE ENSEÑANZA Y SEXO



Cada alineación de puntos marca los errores de una combinación sexo–método. Cada una se sitúa según la calificación media de su grupo.

En la siguiente tabla aparece la nota media, el número de casos, su error estandar y su intervalo al 95%.

Tabla 42: Medias de los tratamientos e interacciones II

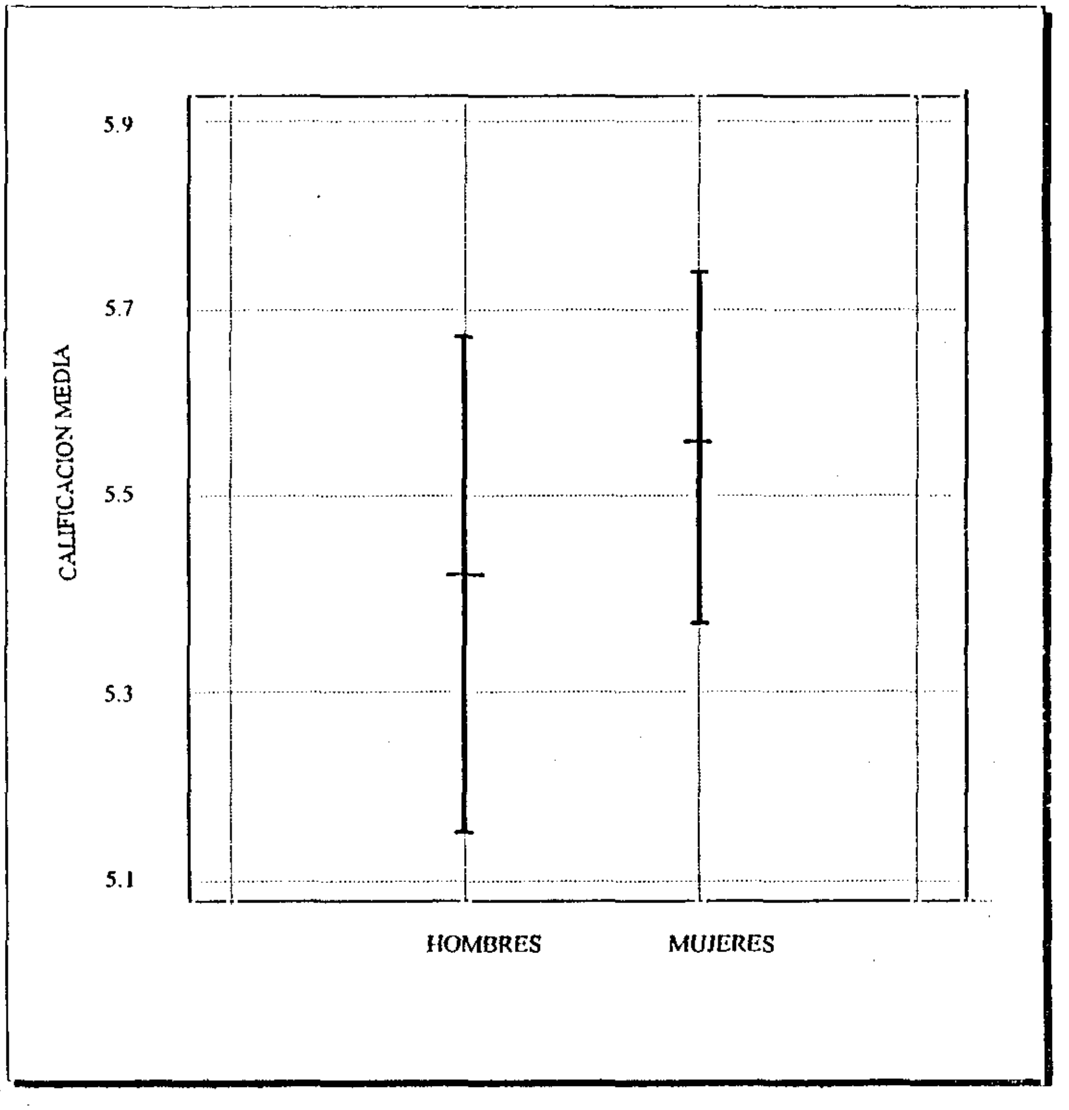
NIVEL	NÚMERO	MEDIA	ERROR ESTIMADO	INTERVALO AL 95%	
Media Total	408	5'479756	0'111057	5'3687	5'590813
A : MÉTODO					
1	136	5'193264	0'190621	5'002643	5'383886
2	136	5'339725	0'192658	5'147067	5'532384
3	136	5'90628	0'193774	5'712506	6'100053
B : SEXO					
0	136	5'41705	0'181371	5'235679	5'598422
1	272	5'542463	0'128213	5'41425	5'670676
AB					
10	47	5'079787	0'308409	4'771379	5'388196
11	89	5'306742	0'22412	5'082622	
20	45	5'38	0'315188	5'064812	
21	91	5'299451	0'221643	5'077807	5'521094
30	44	5'791364	0'318749	5'472614	6'110113
31	92	6'021196	0'220436	5'80076	

Los gráficos 32 y 33 representan la calificación media de la prueba sobre la teoría de los determinantes, correspondientes a los alumnos, hombres y mujeres, así como las interacciones con los distintos métodos de enseñaza empleados Se constata que las mujeres tienen una media superior a los hombres, pero la diferencia no se puede considerar significativa al 95% de confianza.

Al realizar un contraste de medias empleando el método de mínima diferencia significativa se obtiene que la diferencia en valor absoluto entre los dos niveles es de 0'12541 y el límite por el método arriba indicado, con un nivel de confianza del 95%, es de 0'43674, que está muy por encima del valor real obtenido. En consecuencia:

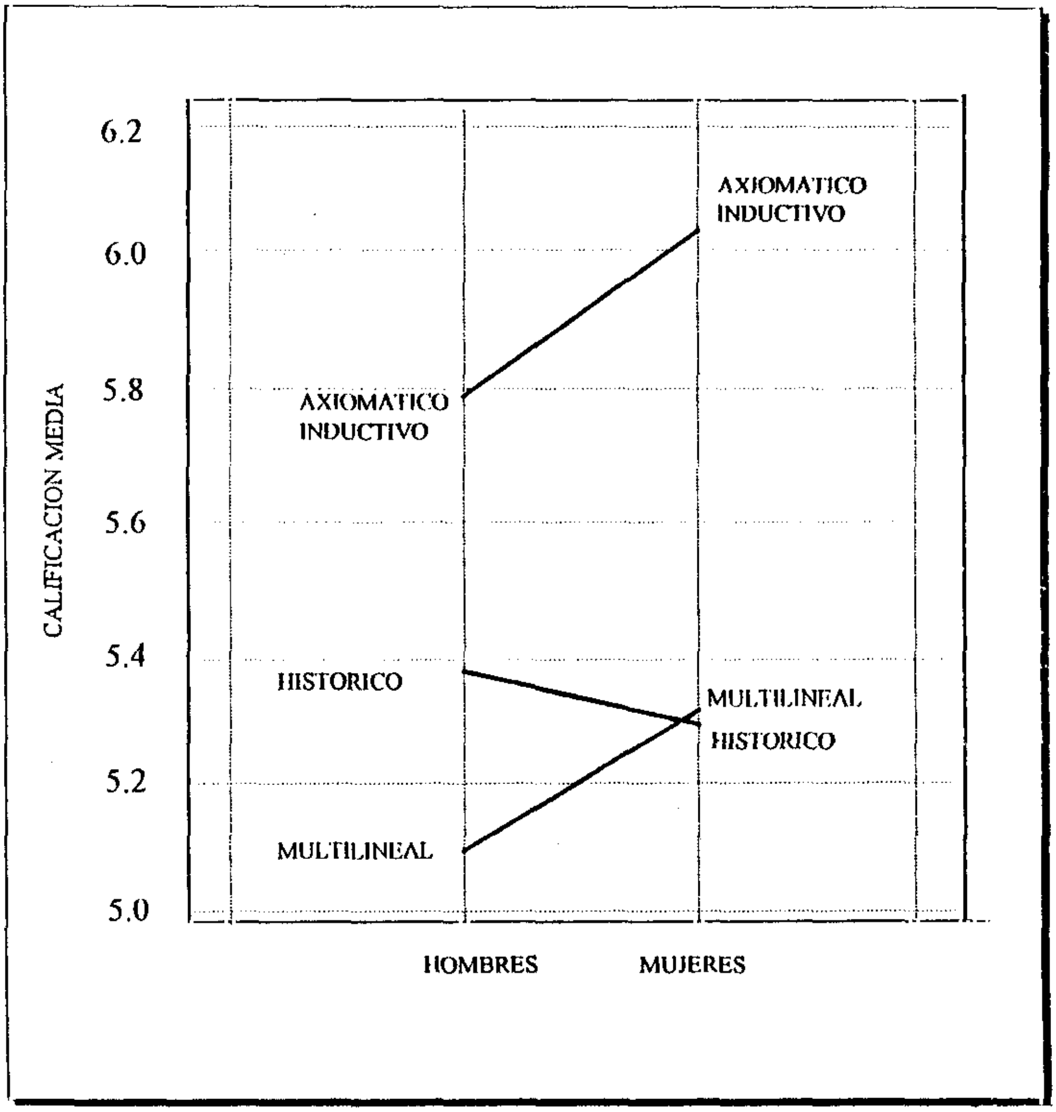
No se puede afirmar que el factor sexo, conduzca a diferencias estadísticamente significativas en las calificaciones del examen sobre la teoría de los determinantes, ni tampoco su interacción con el factor método de enseñanza.

GRÁFICO 32: INTERVALO AL 95% DE LA CALIFICACIÓN MEDIA SEGÚN EL SEXO DEL ALUMNO



La media de las calificaciones de las mujeres es algo superior a la de los hombres.

GRAFICO 33: INTERACCIÓN ENTRE EL MÉTODO DE ENSEÑANZA Y EL SEXO



Es con el método axiomático-inductivo con el que los alumnos de ambos sexos obtienen sus mejores calificaciones, estando muy equilibrados sus resultados para los otros dos métodos.

TEST DE HOMOGENEIDAD DE PROPORCIONES

Hasta este momento todo el estudio ha estado dirigido a comprobar si influían o no en las calificaciones de la prueba los diferentes factores. Una vez descubierto que es el método de enseñanza empleado el que puede influir en los resultados, vamos a buscar en qué grupo de jóvenes se produce dicha diferencia, es decir ¿son los *buenos* estudiantes los que hacen que aumente la media? o ¿son los estudiantes *medianos*?, ¿o los que obtienen los malos resultados? Para poder ver este punto recurrimos al conjunto existente de calificaciones. En ellas vamos a comprobar si las proporciones de insuficientes, suficientes, bienes, notables y sobresalientes con los tres métodos de explicación de la teoría de los determinantes, son las mismas.

Para poder realizarlo recurrimos a los llamados tests de homogeneidad de proporciones para variables cualitativas.

En la tabla 42 aparece indicado, en la parte superior de cada cuadro, el número de alumnos de cada uno de los diferentes métodos que han obtenido las respectivas calificaciones cuantitativas de insuficiente, suficiente, etc. Este valor se denomina valor observado. En la parte inferior de cada casilla está el número de alumnos que deberían existir si la proporción fuese igual en los tres métodos y que denominamos valor esperado.

A estos datos les aplicamos un test de homogeneidad. Buscamos, si existe, igualdad en dichas proporciones.

Tabla 43: Valores observados y esperados I

	INS	SUF	BIEN	NOT	SOB	Total
Método Multilineal	49 40	30 35'5	28 22	22 29'7	7 9	136
Método Histórico	46 40	34 35'5	15 22	30 29'7	11 9	136
Método Axiomático Inductivo	25 40	42 35'5	23 22	37 29'7	9 9	136
Total	120	106	66	89	27	408

El planteamiento realizado se estructura del siguiente modo:

1: Queremos conocer si los resultados obtenidos en la calificación de la prueba sobre determinantes por los alumnos que recibieron la explicación según los diferentes métodos, multilinial, histórico y axiomático–inductivo, están repartidos en la misma proporción.

2: H_0 : las proporciones son iguales
H_1 : las proporciones son diferentes

3: $\alpha=0'05$

4: Condiciones de validez: Si H_0 fuera cierta se tiene que cumplir que:

$$E_{ij}=T\cdot prob(F_i\cap C_j)=T\cdot\frac{F_i}{T}\cdot\frac{C_j}{T}=\frac{F_i\cdot C_j}{T}$$

donde: T=Total; F_i=Total de la fila i–ésima; C_j=Total de la columna j–ésima.

5: El estadístico de contraste:

$$\chi^2_{EXP}=\sum_i\sum_j\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}=\sum_i\sum_j\frac{O^2_{ij}}{E_{ij}}-T$$

es una medida entre el valor observado y el esperado.

Los grados de libertad son $(r-1)\cdot(s-1)$. Para la explicación de los grados de libertad tenemos un T fijo, luego tendriamos $r\cdot s-1$ grados de libertad; ahora bién, de los r valores fijos por las filas, como uno puede obtenerse del total, tenemos que restar $r-1$, e igual ocurre con las columnas, por lo tanto tenemos:

$$r\cdot s-1-(r-1)-(s-1)=(r-1)\cdot(s-1)$$

El estadístico que obtenemos en este caso es $\chi^2_{EXP}=19'2606$.

Si consultamos en las tablas, el valor de la Ji-cuadrado con 8 grados de libertad, para un nivel de significación del 0'05, es de 15'507. Se tiene, por tanto que: $\chi^2_{EXP}=19'2606>\chi^2_{0'05,8}=15'507$. Por lo tanto debemos rechazar la hipótesis nula.

No podemos considerar que las proporciones de insuficientes, suficientes, bienes, notables y sobresalientes sean las mismas para los tres métodos de enseñanza.

A continuación debemos buscar cuál o cuáles son los valores causantes de que se rechace la hipótesis nula. Para facilitar esta búsqueda pasamos los datos a porcentajes, en vez de utilizar los valores absolutos:

Tabla 44: Valores observados en porcentaje I

	INS	SUF	BIEN	NOT	SOB	Total
Método Multilineal	36'03	22'06	20'59	16'18	6'6	100%
Método Histórico	33'82	25	11'03	22'06	8'09	100%
Método Axiomático Inductivo	18'38	30'89	16'91	27'21	6'6	100%

La proporción del número de insuficientes en el método axiomático–inductivo está muy por debajo de las proporciones en los otros dos métodos. Para comprobar si éste puede ser el causante del rechazo de la hipótesis de igualdad de las proporciones, procedemos a comparar el método multilineal con el histórico, para ver si verifican la hipótesis de igualdad.

Planteamos el problema de la misma manera que el anterior; tomamos como hipótesis nula la igualdad de proporciones y, como alternativa, que son diferentes, con un nivel de significación del 0'05. La tabla nos queda de la siguiente forma:

Tabla 45: Valores observados y esperados II

	INS	SUF	BIEN	NOT	SOB	Total
Método Multilineal	49 47'5	30 32	28 21'5	22 26	7 9	136
Método Histórico	46 47'5	34 32	15 21'5	30 26	11 9	136
Total	95	64	43	52	18	272

$$\chi^2_{EXP}=\sum_i\sum_j \frac{O^2_{ij}}{E_{kj}}-T=278'39462-272=6'3946268$$

$$\chi^2_{EXP}=6'395<\chi^2_{0'05,4}=9'488$$

por lo que aceptamos la hipótesis de igualdad entre las proporciones de los métodos multilineal e histórico.

A continuación agrupamos ambas muestras para comparar este conjunto con los que recibieron la explicación por el método axiomático inductivo. La hipótesis nula considera la igualdad entre las proporciones con un nivel de significación del 0'05. La tabla será:

Tabla 46: Valores observados y esperados III

	INS	SUF	BIEN	NOT	SOB	Total
Métodos Multilineal e Histórico	95 80	64 70'7	43 44	52 59'4	18 18	272
Método Axiomático Inductivo	25 40	42 35'3	23 22	33 29'7	9 9	136
Total	120	106	66	89	27	408

$$\chi^2_{EXP}=\sum_i\sum_j \frac{O^2_{ij}}{E_{kj}}-T=421'02845-408=13'02845$$

$$\chi^2_{EXP}=13'02845>\chi^2_{0'05,4}=9'488$$

por lo tanto rechazamos la hipótesis nula, las porporciones no son iguales.

Para ver que es el conjunto, o conjuntos, de calificaciones lo que hace que las proporciones no sean iguales, formamos de nuevo una tabla de porcentajes para ver cuál, o cuáles, son las que más diferen:

Tabla 47: Valores observados en porcentaje II

	INS	SUF	BIEN	NOT	SOB
Métodos Multilineal e Histórico	34'9	23'5	15'8	19'1	6'6
Método Axiomático Inductivo	18'4	30'9	16'9	27'2	6'6

Son los insuficientes los que tienen un mayor *desajuste* en su proporción. Para verificar si son ellos los causantes del rechazo de igualdad de la hipótesis nula, realizamos un test de homogeneidad de proporciones en el cual retiramos los insuficientes, para ver si así se verifica la igualdad de las proporciones. La tabla queda de la siguiente manera:

Tabla 48: Valores observados y esperados IV

	SUF	BIEN	NOT	SOB	Total
Métodos Multilineal e Histórico	64 65'15	43 40'56	52 54'7	18 16'59	177
Método Axiomático Inductivo	42 40'85	23 25'44	37 34'3	9 10'4	111
Total	106	66	89	27	288

$$\chi^2_{EXP}=\sum_i\sum_j \frac{O^2_{ij}}{E_{kj}}-T=1'09759$$

$$\chi^2_{EXP}=1'09759<\chi^2_{0'05,3}=7.851$$

por lo que aceptamos la hipótesis nula de igualdad entre las proporciones.

Para verificar que el valor que produce el rechazo de la hipótesis es el número de insuficientes en el método axiomático–inductivo, formamos una última tabla en la cual agrupamos, por una parte, los alumnos que obtuvieron la calificación de aprobado frente aquellos que obtuvieron la calificación insuficiente, manteniendo agrupados los alumnos de los métodos multilineal e histórico frente al axiomático–inductivo. La hipótesis nula es de nuevo la de igualdad de las proporciones y el nivel de significación del 0'05. La tabla queda de la siguiente forma:

Tabla 49: Valores observados y esperados V

	INSUFICIENTES	APROBADOS	Total
Métodos Multilineal e Histórico	95 80	177 192	272
Método Axiomático Inductivo	25 40	111 96	136
Total	120	288	288

$$\chi^2_{EXP}=11'95312>\chi^2_{EXP}=3'841$$

que nos lleva a rechazar la hipótesis de igualdad de las proporciones.

Del anterior estudio se concluye *que son los alumnos que obtuvieron la calificación de insuficiente y que recibieron la explicación de determinantes por el método axiomático–inductivo los que ocasionan el rechazo de la hipótesis de igualdad de proporciones entre los diferentes métodos de enseñanza.*

CONCLUSIONES

1: Realizados los tests para verificar las condiciones de homogeneidad, homoceasticidad, independencia y normalidad, se ha comprobado, al 95% de confianza, que todas se cumplen.

2: Efectuado el análisis de la varianza, podemos afirmar, con un nivel de significación del 5%, que los factores procedencia, optatividad, repetidor y sexo, así como las interacciones entre la totalidad de los factores, no produce, al nivel de significación indicado, unas diferencias entre las medias de las calificaciones sobre la prueba teórico−práctica relativa a los determinantes, que podamos considerar representativas. Unicamente es el efecto producido por el factor denominado método de enseñanza el que ocasiona unas diferencias estadísticamente significativas.

3: Una vez efectuados los diferentes contraste de medias podemos afirmar, con un nivel de confianza 95%, que la nota media de los alumnos que recibieron la explicación de los determinantes por el método axiomático−inductivo es superior a aquellos que recibieron la explicación por el método histórico y el de formas multilineales.

4: Estudiada la homogeneidad de la muestra, podemos afimar, con un nivel de confianza del 95%, que la proporción de suspensos entre los alumnos que recibieron la explicación de los determinantes por el método axiomático−inductivo es inferior al resto de los alumnos.

Conclusiones en porcentajes

A) ***Porcentajes absolutos respecto de la media general***

- Método Multilineal: $-4'95\%$
- Método Histórico: $-3'17\%$
- Método Axiomático−Inductivo: $13'74\%$
- Diferencia entre Multilineal y Axiomático−Inductivo: $18'69\%$
- Diferencia entre Histórico y Axiomático−Inductivo: $18'69\%$

B) ***Porcentajes absolutos teniendo en cuenta los métodos dos a dos***

- $\overline{x}_i$ será la media de un método.
- $\% \equiv \dfrac{\overline{x}_i - \overline{x}_j}{\dfrac{\overline{x}_i + \overline{x}_j}{2}}$

- Multilineal y Axiomático−Inductivo: $-12'86\%$
- Histórico y Axiomático−Inductivo: $-11'01\%$

C) ***Tomando intervalos al 95%***

- Límite inferior = Máximo intervalo menor − Mínimo intervalo mayor ÷ Media.
- Límite inferior = Máximo intervalo mayor − Mínimo intervalo menor ÷ Media.

- Multilineal y Axiomático–Inductivo: $(6'35, 19'37)$

- Histórico y Axiomático–Inductivo: $(4'56, 17'47)$

BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A.D.; KOLMOGOROV, A.N., y LAURENTIEV, M.A. (1974):

La Matemática. Su contenido, métodos y significado (vol. 1 y 2). Alianza Editorial, Madrid.

AMÓN, J. (1986):

Estadística para Psicólogos (vol. 1 y 2). Pirámide, Madrid.

ANZOLA, M. y CARUNCHO, J (1978):

Problemas de Algebra. Bumar, Madrid.

ARNAIZ VELLANDO, G. (1978):

Introducción a la Estadística Teórica. Lex Nova, Valladolid.

BIGGE, M.L. y HUNT, M.P. (1974):

Bases Psicológicas de la educación. Trillas, México.

BOX, G.E.P.; HUNTER, W.G. & HUNTER, J.S. (1989):

Estadística para investigadores. Reverté, Barcelona.

BOYER, C.B. (1987):

Historia de la matemática. Alianza Editorial, Madrid.

BUJANDA, J. (1981):

Tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática. SM Ediciones, Madrid.

BURGOS, J. (1993):

Algebra Lineal. McGraw–Hill, Madrid.

C. MONTGOMERY DOUGLAS (1991):

Diseño y análisis de experimentos. Grupo Editorial Iberoamericana.

CRAMER, H. (1968):

Métodos Matemáticos de Estadística. Aguilar, Madrid.

DÍAZ HERNANDO, J.A.

Algebra Geometría Cálculo (vol 2). Tebar Flores, Madrid. (1986).

DIEUDONNE, J. (1971):

Algebra Lineal y Geometría Elemental. Selecciones Científicas, Madrid.

DIXON y MASSEY (1971):

Introducción al Análisis Estadístico. Ediciones del Castillo, Madrid.

GARRETT, H. (1983):

Estadística en Psicología y Educación. Ediciones Paidós, Barcelona–Buenos Aires.

G. COCHRAN WILLIAM & M. COX GERTRUDE (1978):

Diseños experimentales. Editorial Trillas, México.

GIL, D. y GUZMÁN, M. (1993):

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Editorial Popular, Madrid.

GIL PÉREZ, D. y PESSOA DE CARVALHO (1992):

Tendencias y Experiencias Innovadoras en la formación del profesorado de Ciencias. Enseñanza de la Ciencia y la Matemática. Iber Cima. Ministerio de Educación y Ciencia. OEI. Quinto Centenario, Madrid.

GLAESER, G. (1971):

Mathématiques pour l'élève professeur. Hermann, París.

GMURMAN, V.E. (1975):

Problemas de la teoría de las Probabilidades y de Estadística Matemática. Mir, Moscú.

GOLOVINA, L.I. (1983):

Algebra Lineal y algunas de sus aplicaciones. Mir, Moscú.

GONZÁLEZ, F. y VILLANOVA, J. (1988):

Curso Práctico de Matemáticas de COU. EDUNSA, Barcelona.

GUTIÉRREZ, LEACH, SARABIA, DE LA VILLA (1988):

Agebra. Egraf, Madrid.

KLINE, M. (1976):

El fracaso de la Matemática Moderna. Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1985):

Matemáticas. La pérdida de la certidumbre. Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1992):

El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (vol 2). Alianza Editorial, Madrid.

LANG, S. (1974):

Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano, Bogotá. Caracas. México.

LENTIN, A. y RIVAUD, J. (1973):

Algebra Moderna. Aguilar, Madrid.

LIPSCHUTZ, S. (1975):

Algebra lineal. McGraw–Hill, México.

LUZÁRRAGA, A. (1968):

Problemas resueltos de Algebra Lineal. Romargraf, Barcelona.

MARTÍN DÁVILA, M. (1991):

Diseño de experimentos y teoría de muestras (Vol. 2, Código 08. 08.) UNED.

MCGUIGAN, F.J. (1975):

Psicología Experimental. Enfoque Metodológico. Trillas, México.

MUIR, T. (1923):

The Theory of Determinants in the Historical Order of Development (vols. I, II, III, IV). Macmillan and Co. limited, London.

MUIR, T. & METZLER, W. (1960):

A Treatise on the Theory of Determinants. Dover Publications Inc., New York.

NORTES CHECA, A. y MARTÍNEZ ARTERO, M. (1978):

Psicopedagogía de las Matemáticas. H. S. R., Burgos.

PEÑA DANIEL (1989):

Modelos lineales y series temporales. Alianza Editorial, Madrid. (2ª edición).

PEÑA DANIEL (1989):

Estasdística. Modelos y métodos. Alianza Editorial, Madrid. (2ª edición).

PINILLA, J.L. (1971):

Lecciones de Algebra Lineal. Varicop, Madrid.

PISOT, C. y ZAMANSKY, M. (1970):

Algebra–Análisis. Montaner y Simon, Barcelona.

QUEYSANNE, M. (1975):

Algebra Básica. Vicens–Vives, Barcelona.

REY PASTOR, J. (1976):

Elementos de Análisis Algebraico. Biblioteca Matemática, Madrid.

REY PASTOR, J. y CASTRO BRZEZICK, A. (1959):

Elementos de Matemáticas. SAETA, Madrid.

RICHARDS, L. y LA CAVA, J. (1980):

Estadística en los negocios ¿por qué y cuándo? McGraw–Hill Latinoamericana, Bogotá.

RIVAUD, J. (1973):

Ejercicios de Algebra. Aguilar, Madrid.

RÍOS, S. (1970):

Métodos Estadísticos. Ediciones del Castillo, Madrid.

RÍOS, S. (1981):

Ejercicios de Estadística. Ediciones ICE, Madrid.

ROJO, A. (1972):

Algebra II. El Ateneo, Buenos Aires.

RUBIO, B. (1969):

Iniciación a la Matemática Superior. Alhambra, Madrid.

RUÍZ MAYA, L. (1992):

Métodos estadísticos de investigación. INE, Madrid.

RUÍZ MAYA, L. (1989):

Problemas de Estadística. Alfa Centauro, Madrid.

SCHWARTZ, J. (1969):

Introducción al Estudio de Matrices y Vectores. Ediciones del Castillo, Madrid.

SIEGEL, S. (1985):

Estadística no Paramétrica. Trillas, México.

SPIEGEL, R.M. (1974):

Teoría y Problemas de Estadística. McGraw-Hill, México.

STATISTICAL GRAPHICS CORPORATION (1992):

STATGRAPHICS, Statiscal Graphics System by Statistical Graphics Corporation, Versión 6. *Reference Manual.*

El software empleado para la realización de este estudio ha sido el paquete STATGRAPHICS 6.0.

TEBAR FLORES, E. (1974):

Problemas de Algebra Lineal. Tebar Flores, Madrid.

TITONE, R. (1981):

Metodología Didáctica. Ediciones Rialp. Madrid.

TOMEO, V. y UÑA, I. (1986):

Matemáticas I. COU–Selectividad. Modelos de problemas comentados. Editorial Popular, Madrid.

TOMEO, V. y UÑA, I. (1989):

Diez lecciones de Estadística Descriptiva. (Curso teórico–práctico). Alfa Centauro (A C). Madrid.

VILLA, A. DE LA (1994):

Problemas de Algebra con esquemas teóricos. CLAGSA, Madrid.

VIZMANOS, J.R. y ANZOLA, M. (1990):

Matemáticas I. Ediciones SM. Madrid.

WINER, B.J.; BROWN, D.R. & MICHELS, K.M. (1991):

Statiscal principles in experimental desing. McGraw Hill. (3ª edición).

ANEXO I

EJERCICIOS DE AYUDA A LAS TEORÍAS SOBRE DETERMINANTES

Vamos a proponer una colección de ejercicios con los que se pretende reforzar los conceptos y propiedades más notables tratados en la exposición de la teoría de los determinantes. Estos ejercicios serán los mismos para todos los alumnos aunque el método de aprendizaje de la teoría de los determinantes haya sido diferente.

Al ser propuestos en clase se ha añadido alguna sugerencia o indicación mínima en aquellas cuestiones que tienen alguna dificultad. Se ha solicitado la exposición de las soluciones a los alumnos que lo deseen animándoles cuando emprenden el buen camino, o haciéndoles ver el error en que pueden caer si plantean un proceso inadecuado. Hemos terminado dejando solucionadas todas las cuestiones y aclarando las dudas que nos han sido planteadas. Solo les queda ya el trabajo personal que debe terminar, lógicamente, con una satisfactoria asimilación de este importante concepto matemático que será herramienta imprescindible para su labor universitaria próxima. La consecución de nuestros objetivos es cosa que esperamos de los resultados de la correspondiente prueba de evaluación.

1: Calcúlense los siguientes determinantes haciendo el mayor número posible de ceros en una fila. Compruébese la validez de los resultados obtenidos haciendo ceros en una columna:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2: Demuéstrese, sin calcular su valor, que el determinante $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de tres.

3: Compruébese, sin efectuar sus desarrollos, que los determinantes siguientes son nulos

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

4: Calcúlese, indicando el proceso, el valor del determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \\ x & x & x & 2 \end{vmatrix}$$

5: Obténgase, en la forma más simplificada posible, el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

6: Hállese el valor de cada uno de los determinantes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

expresando el resultado en forma simplificada.

7: Calcúlense los determinantes de orden n

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots\dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots\dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots\dots & 1 & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

8: Sabiendo que el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{vmatrix}$ tiene valor 5, calcúlese, sin efectuar el desarrollo, el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2u & 2w & 2v \\ 2r & 2t & 2s \end{vmatrix}$.

Indíquese en forma detallada el proceso seguido.

9: Utilizando únicamente propiedades de los determinates, y sin calcular el valor de los dos que se escriben, demuéstrese la igualdad

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

10: Sean x, y, z números reales no nulos. Sin calcular los determinantes que intervienen, pruébese la igualdad

$$\begin{vmatrix} y\cdot z & x & x^2 \\ z\cdot x & y & y^2 \\ x\cdot y & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

11: Sin efectuar su desarrollo, demuéstrese que es nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ y+z & z+t & t+x & x+y \\ y+z+t & z+t+x & t+x+y & x+y+z \end{vmatrix}$$

12: Sin desarrollar el determinante, pruébese la igualdad

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 \\ a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ a+2 & a+3 & a+4 & a+5 \\ a+3 & a+4 & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = 0$$

13: Justifíquese la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(d-a)\cdot(c-b)\cdot(d-b)\cdot(d-c)$$

(Este es un determinante de Vandermonde).

14: Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio (13), calcúlese el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ log2 & log20 & log200 & log2000 \\ (log2)^2 & (log20)^2 & (log200)^2 & (log2000)^2 \\ (log2)^3 & (log20)^3 & (log200)^3 & (log2000)^3 \end{vmatrix}$$

15: Resuélvase la ecuación $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1+x \\ 2 & -x & -10 \\ 1 & x-3 & -5 \end{vmatrix} = 0$. Razónese el proceso seguido.

16: Obténgase, indicando el proceso, el valor del determinante de orden n

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & a & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & x^2 & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & a & x^2 & \ldots\ldots & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots\ldots & x^2 & a \\ a & a & a & \ldots\ldots & a & x^2 \end{vmatrix}$$

17: Hállense los valores de x que anulan el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$$

18: Sin efectuar el desarrollo, compruébese que es nulo el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{vmatrix}$$

19: Compruébese la igualdad

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 \\ y^2 & x^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 & x^2 \end{vmatrix}=(x^3+y^3)^2$$

20: Compruébese la identidad

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}=-2(a^3+b^3)$$

21: Resuélvase la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

22: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, obténgase det(A).

(Sugerencia: Considérese la matriz A^t y calcúlese $\det(A\cdot A^t)$).

23: Dadas A, B y C, matrices cuadradas de orden n, siendo $|A|\neq 0$, demuéstrese que si es $A\cdot B=A\cdot C$, entonces es $B=C$.

24: Obténgase, simplificado, el desarrollo del determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a\cdot b\cdot c & -a\cdot b & a^2 \\ -b^2\cdot c & 2b^2 & -a\cdot b \\ b^2\cdot c^2 & -b^2\cdot c & 3a\cdot b\cdot c \end{pmatrix}$$

25: Utilizando determinantes, decídase para qué valores de a y b tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ b & a+b \end{pmatrix}$. Determínese la matriz A^{-1}.

26: Con la ayuda de los determinantes, calcúlese el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$, y encuétrese los valores de ϑ para los cuales existe la matriz inversa de A. Calcúlese la matriz A^{-1}.

27: Empleando determinantes encuéntrese los valores de m para los cuales la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ tiene inversa. Obténgase, si existe, la matriz M^{-1} cuando es $m=2$.

28: Calcúlese el rango, por determinantes, de las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -8 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

29: Obténgase, utilizando determinantes, el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, según los diferentes valores de λ.

30: Mediante el empleo de determinantes, calcúlese el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, para los diferentes valores de a.

31: Empleando determinantes, decídase si existe algún valor de x para el cual sean linealmente dependientes los vectores $\overline{u}=(2,1,3,1)$, $\overline{v}=(1,0,1,0)$ y $\overline{w}=(3,x,0,1)$, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

32: Dados los vectores $\overline{u}=(2,1,-1)$ y $\overline{v}=(1,3,0)$. encuéntrese, mediante determinantes, todos los vectores $\overline{w}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, de forma que el conjunto $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ sea un sistema libre.

33: Aplicando determinantes estúdiese la dimensión del subespacio vectorial engendrado en $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ por los vectores $\overline{u}_1=(3,1,2,1)$, $\overline{u}_2=(1,1,4,a)$ y $\overline{u}_3=(5,b,0,c)$, según los diferentes valores de a, b y c.

ANEXO II

Modelo de prueba

1.– **a)** Defínase el determinante de orden n y aplíquese la definición dada al calculo del determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Siendo $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, compruébese la igualdad:

$$\det(A)=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

2.– Enúnciense, y demuéstrense, los casos en los que el determinante de una matriz $A\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, vale cero.

3.– **a)** Dedúzcase, en función de a, b y c, el valor del determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1+a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1+b & 1 & a \\ 1 & 1 & 1+c & a \end{vmatrix}$$

b) Compruébese, indicando el proceso, la validez de la igualdad:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x-1 & y-1 & z+1 & t+1 \\ x-1 & y+1 & z-1 & t+1 \\ x-1 & y+1 & z+1 & t-1 \end{vmatrix} =4\cdot(x+y+z+t)\cdot(y+z+t-1)$$

4.– Mediante la utilización de determinantes:

a) Hállese los valores de m para los cuales tiene inversa la matriz:

$$M=\begin{pmatrix} 3m & m & m \\ 0 & 3m & -m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

y obtégase, dicha inversa, en función de m.

b) Resuélvase la ecuación matricial $X \cdot A = B + C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.– Utilizando el concepto de determinante defínase rango de una matriz $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y calcúlese:

a) El rango de la matriz $M_1=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, según los diferentes valores de a y b.

b) El rango de la matriz $M_2=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, para los posibles valores de α, β y γ.

ANEXO III

CALIFICACIONES DE LA PRUEBA SOBRE DETERMINANTES

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
1	1	0	0	0	0	4'5	SUF
2	1	0	0	0	1	6'75	BIEN
3	1	0	0	0	1	4'0	INS
4	1	0	0	0	1	3'5	INS
5	1	0	0	0	0	6'0	BIEN
6	1	0	0	0	1	6'5	BIEN
7	1	0	0	0	0	5'5	SUF
8	1	0	0	0	1	5'0	SUF
9	1	0	0	0	1	4'5	SUF
10	1	0	0	0	0	4'0	INS
11	1	0	0	0	1	2'0	INS
12	1	0	0	0	1	5'0	SUF
13	1	0	0	0	1	3'5	INS
14	1	0	0	0	1	7'5	NOT
15	1	0	0	0	1	8'5	NOT
16	1	0	0	0	0	3'0	INS
17	1	0	0	0	1	8'0	NOT
18	1	0	0	1	1	4'0	INS
19	1	0	0	1	0	3'0	INS
20	1	0	0	1	1	3'75	INS
21	1	0	0	1	1	2'5	INS
22	1	0	0	1	1	5'0	SUF
23	1	0	0	1	1	9'0	SOB
24	1	0	0	1	1	9'8	SOB

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
25	1	0	0	1	0	6'0	BIEN
26	1	0	0	1	1	5'8	SUF
27	1	0	0	1	0	4'0	INS
28	1	0	0	1	1	5'0	SUF
29	1	0	0	1	0	3'5	INS
30	1	0	0	1	0	6'5	BIEN
31	1	0	0	1	0	3'0	INS
32	1	0	0	1	0	8'0	NOT
33	1	0	0	1	1	4'0	INS
34	1	0	0	1	0	2'0	INS
35	1	0	1	0	1	4'0	INS
36	1	0	1	0	1	6'5	BIEN
37	1	0	1	0	1	4'5	SUF
38	1	0	1	0	1	5'5	SUF
39	1	0	1	0	1	3'5	INS
40	1	0	1	0	0	6'5	BIEN
41	1	0	1	0	0	4'5	SUF
42	1	0	1	0	0	2'5	INS
43	1	0	1	0	1	5'0	SUF
44	1	0	1	0	0	6'0	BIEN
45	1	0	1	0	1	7'0	NOT
46	1	0	1	0	1	5'0	SUF
47	1	0	1	0	1	3'5	INS
48	1	0	1	0	1	7'0	NOT

N° de Orden	Método	Procedencia	Optativa	Repetidor	Sexo	Calificación	Código
49	1	0	1	0	1	5'0	SUF
50	1	0	1	0	1	6'0	BIEN
51	1	0	1	0	0	5'0	SUF
52	1	0	1	1	1	6'0	BIEN
53	1	0	1	1	1	4'5	SUF
54	1	0	1	1	1	3'0	INS
55	1	0	1	1	1	1'5	INS
56	1	0	1	1	0	5'0	SUF
57	1	0	1	1	1	4'0	INS
58	1	0	1	1	0	7'5	NOT
59	1	0	1	1	1	3'5	INS
60	1	0	1	1	1	3'0	INS
61	1	0	1	1	0	7'5	NOT
62	1	0	1	1	1	1'0	INS
63	1	0	1	1	1	6'0	BIEN
64	1	0	1	1	1	3'0	INS
65	1	0	1	1	0	7'0	NOT
66	1	0	1	1	1	8'0	NOT
67	1	0	1	1	0	6'3	BIEN
68	1	0	1	1	0	9'8	SOB
69	1	1	0	0	0	3'0	INS
70	1	1	0	0	0	3'5	INS
71	1	1	0	0	0	6'5	BIEN
72	1	1	0	0	0	6'5	BIEN

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
73	1	1	0	0	0	6'5	BIEN
74	1	1	0	0	1	4'0	INS
75	1	1	0	0	0	6'3	BIEN
76	1	1	0	0	0	1'3	INS
77	1	1	0	0	1	2'5	INS
78	1	1	0	0	1	5'8	SUF
79	1	1	0	0	0	2'0	INS
80	1	1	0	0	1	6'5	BIEN
81	1	1	0	0	1	6'5	BIEN
82	1	1	0	0	1	7'3	NOT
83	1	1	0	0	0	6'0	BIEN
84	1	1	0	0	0	1'5	INS
85	1	1	0	0	1	9'5	SOB
86	1	1	0	1	1	8'8	SOB
87	1	1	0	1	0	3'5	INS
88	1	1	0	1	1	3'0	INS
89	1	1	0	1	1	5'5	SUF
90	1	1	0	1	1	6'75	BIEN
91	1	1	0	1	1	4'8	SUF
92	1	1	0	1	1	1'5	INS
93	1	1	0	1	0	6'0	BIEN
94	1	1	0	1	0	5'0	SUF
95	1	1	0	1	1	3'5	INS
96	1	1	0	1	1	6'0	BIEN

Nº de Orden	Método	Procedencia	Optativa	Repetidor	Sexo	Calificación	Código
97	1	1	0	1	1	6'5	BIEN
98	1	1	0	1	0	5'5	SUF
99	1	1	0	1	0	7'3	NOT
100	1	1	0	1	1	4'3	INS
101	1	1	0	1	1	7'0	NOT
102	1	1	0	1	1	6'0	BIEN
103	1	1	1	0	1	6'0	BIEN
104	1	1	1	0	1	4'0	INS
105	1	1	1	0	1	7'0	NOT
106	1	1	1	0	1	1'0	INS
107	1	1	1	0	0	5'0	SUF
108	1	1	1	0	1	3'0	INS
109	1	1	1	0	1	7'5	NOT
110	1	1	1	0	0	4'0	INS
111	1	1	1	0	1	8'3	NOT
112	1	1	1	0	0	3'0	INS
113	1	1	1	0	0	8'5	NOT
114	1	1	1	0	1	9'75	SOB
115	1	1	1	0	1	3'75	INS
116	1	1	1	0	1	3'0	INS
117	1	1	1	0	1	6'75	BIEN
118	1	1	1	0	1	8'0	NOT
119	1	1	1	0	1	3'5	INS
120	1	1	1	1	0	2'0	INS

N° DE ORDEN	MÉTODO	PROCE- DENCIA	OPTA- TIVA	REPE- TIDOR	SEXO	CALIFI- CACIÓN	CÓDIGO
121	1	1	1	1	1	5'0	SUF
122	1	1	1	1	0	4'0	INS
123	1	1	1	1	1	10'0	SOB
124	1	1	1	1	0	7'8	NOT
125	1	1	1	1	0	8'0	NOT
126	1	1	1	1	1	8'0	NOT
127	1	1	1	1	1	5'5	SUF
128	1	1	1	1	1	6'5	BIEN
129	1	1	1	1	1	4'5	SUF
130	1	1	1	1	1	5'8	SUF
131	1	1	1	1	1	0'8	INS
132	1	1	1	1	1	4'8	SUF
133	1	1	1	1	1	5'8	SUF
134	1	1	1	1	1	5'0	SUF
135	1	1	1	1	1	6'0	BIEN
136	1	1	1	1	1	8'5	NOT
137	2	0	0	0	0	4'5	SUF
138	2	0	0	0	1	5'0	SUF
139	2	0	0	0	0	9'6	SOB
140	2	0	0	0	0	8'5	NOT
141	2	0	0	0	0	5'0	SUF
142	2	0	0	0	1	5'5	SUF
143	2	0	0	0	1	3'0	INS
144	2	0	0	0	1	8'0	NOT

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
145	2	0	0	0	1	1'5	INS
146	2	0	0	0	1	4'5	SUF
147	2	0	0	0	1	5'0	SUF
148	2	0	0	0	1	5'5	SUF
149	2	0	0	0	1	7'0	NOT
150	2	0	0	0	1	4'0	INS
151	2	0	0	0	0	8'0	NOT
152	2	0	0	0	1	1'5	INS
153	2	0	0	0	1	6'5	BIEN
154	2	0	0	1	1	6'0	BIEN
155	2	0	0	1	1	8'5	NOT
156	2	0	0	1	0	9'5	SOB
157	2	0	0	1	0	5'0	SUF
158	2	0	0	1	1	5'5	SUF
159	2	0	0	1	1	7'0	NOT
160	2	0	0	1	1	2'0	INS
161	2	0	0	1	0	2'8	INS
162	2	0	0	1	1	5'0	SUF
163	2	0	0	1	0	4'5	SUF
164	2	0	0	1	1	8'5	NOT
165	2	0	0	1	1	7'6	NOT
166	2	0	0	1	1	5'5	SUF
167	2	0	0	1	0	5'8	SUF
168	2	0	0	1	0	4'0	INS

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
169	2	0	0	1	1	2'5	INS
170	2	0	0	1	1	7'5	NOT
171	2	0	1	0	1	3'0	INS
172	2	0	1	0	1	4'0	INS
173	2	0	1	0	1	6'0	BIEN
174	2	0	1	0	1	4'5	SUF
175	2	0	1	0	1	4'5	SUF
176	2	0	1	0	1	6'5	BIEN
177	2	0	1	0	0	9'8	SOB
178	2	0	1	0	1	7'0	NOT
179	2	0	1	0	1	3'5	INS
180	2	0	1	0	0	6'5	BIEN
181	2	0	1	0	0	5'0	SUF
182	2	0	1	0	1	7'5	NOT
183	2	0	1	0	0	0'5	INS
184	2	0	1	0	1	5'0	SUF
185	2	0	1	0	1	3'0	INS
186	2	0	1	0	0	4'5	SUF
187	2	0	1	0	1	1'0	INS
188	2	0	1	1	1	4'0	INS
189	2	0	1	1	1	4'5	SUF
190	2	0	1	1	0	6'0	BIEN
191	2	0	1	1	0	7'5	NOT
192	2	0	1	1	0	2'0	INS

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
193	2	0	1	1	1	2'3	INS
194	2	0	1	1	1	9'0	SOB
195	2	0	1	1	0	7'5	NOT
196	2	0	1	1	1	9'0	SOB
197	2	0	1	1	0	7'5	NOT
198	2	0	1	1	1	9'0	SOB
199	2	0	1	1	0	5'8	SUF
200	2	0	1	1	1	3'5	INS
201	2	0	1	1	1	7'0	NOT
202	2	0	1	1	1	3'0	INS
203	2	0	1	1	1	5'5	SUF
204	2	0	1	1	0	7'8	NOT
205	2	1	0	0	1	2'0	INS
206	2	1	0	0	1	7'0	NOT
207	2	1	0	0	1	6'5	BIEN
208	2	1	0	0	1	4'0	INS
209	2	1	0	0	1	4'0	INS
210	2	1	0	0	0	8'0	NOT
211	2	1	0	0	0	0'5	INS
212	2	1	0	0	1	7'8	NOT
213	2	1	0	0	0	4'3	INS
214	2	1	0	0	1	8'8	SOB
215	2	1	0	0	0	5'3	SUF
216	2	1	0	0	1	1'0	INS

Nº de Orden	Método	Procedencia	Optativa	Repetidor	Sexo	Calificación	Código
217	2	1	0	0	1	8'0	NOT
218	2	1	0	0	1	10'0	SOB
219	2	1	0	0	1	6'75	BIEN
220	2	1	0	0	1	5'0	SUF
221	2	1	0	0	0	5'5	SUF
222	2	1	0	1	1	3'0	INS
223	2	1	0	1	0	4'5	SUF
224	2	1	0	1	1	6'5	BIEN
225	2	1	0	1	1	6'5	BIEN
226	2	1	0	1	1	4'0	INS
227	2	1	0	1	0	7'5	NOT
228	2	1	0	1	1	10'0	SOB
229	2	1	0	1	0	5'3	SUF
230	2	1	0	1	0	3'0	INS
231	2	1	0	1	0	3'5	INS
232	2	1	0	1	1	3'5	INS
233	2	1	0	1	1	6'3	BIEN
234	2	1	0	1	0	5'0	SUF
235	2	1	0	1	0	6'3	BIEN
236	2	1	0	1	0	7'6	NOT
237	2	1	0	1	1	2'0	INS
238	2	1	0	1	0	5'3	SUF
239	2	1	1	0	1	6'0	BIEN
240	2	1	1	0	0	7'3	NOT

N° DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
241	2	1	1	0	1	7'0	NOT
242	2	1	1	0	1	6'0	BIEN
243	2	1	1	0	1	9'6	SOB
244	2	1	1	0	1	9'8	SOB
245	2	1	1	0	1	3'8	INS
246	2	1	1	0	0	1'8	INS
247	2	1	1	0	0	2'0	INS
248	2	1	1	0	1	0'9	INS
249	2	1	1	0	0	2'0	INS
250	2	1	1	0	1	5'5	SUF
251	2	1	1	0	0	7'3	NOT
252	2	1	1	0	1	4'8	SUF
253	2	1	1	0	1	7'8	NOT
254	2	1	1	0	1	5'0	SUF
255	2	1	1	0	1	4'0	INS
256	2	1	1	1	0	7'3	NOT
257	2	1	1	1	1	3'8	INS
258	2	1	1	1	1	3'0	INS
259	2	1	1	1	1	1'5	INS
260	2	1	1	1	1	5'0	SUF
261	2	1	1	1	1	6'0	BIEN
262	2	1	1	1	1	5'0	SUF
263	2	1	1	1	1	3'8	INS
264	2	1	1	1	1	7'3	NOT

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
265	2	1	1	1	0	4'3	INS
266	2	1	1	1	1	3'5	INS
267	2	1	1	1	1	7'8	NOT
268	2	1	1	1	1	5'0	SUF
269	2	1	1	1	1	2'8	INS
270	2	1	1	1	1	7'0	NOT
271	2	1	1	1	0	1'8	INS
272	2	1	1	1	1	4'0	INS
273	3	0	0	0	0	6'5	BIEN
274	3	0	0	0	1	7'5	NOT
275	3	0	0	0	1	5'0	SUF
276	3	0	0	0	0	4'5	SUF
277	3	0	0	0	1	5'0	SUF
278	3	0	0	0	0	3'5	INS
279	3	0	0	0	0	8'0	NOT
280	3	0	0	0	0	7'5	NOT
281	3	0	0	0	1	7'0	NOT
282	3	0	0	0	1	6'0	BIEN
283	3	0	0	0	1	5'0	SUF
284	3	0	0	0	1	5'0	SUF
285	3	0	0	0	1	5'0	SUF
286	3	0	0	0	0	8'3	NOT
287	3	0	0	0	1	5'0	SUF
288	3	0	0	0	1	7'0	NOT

N° DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
289	3	0	0	0	1	8'0	NOT
290	3	0	0	1	1	5'0	SUF
291	3	0	0	1	1	4'5	SUF
292	3	0	0	1	0	2'5	INS
293	3	0	0	1	0	5'8	SUF
294	3	0	0	1	1	3'5	INS
295	3	0	0	1	1	8'5	NOT
296	3	0	0	1	1	9'0	SOB
297	3	0	0	1	1	9'5	SOB
298	3	0	0	1	0	5'3	SUF
299	3	0	0	1	1	7'0	NOT
300	3	0	0	1	0	6'5	BIEN
301	3	0	0	1	1	5'5	SUF
302	3	0	0	1	1	6'75	BIEN
303	3	0	0	1	1	8'0	NOT
304	3	0	0	1	0	6'5	BIEN
305	3	0	0	1	1	8'0	NOT
306	3	0	0	1	1	4'5	SUF
307	3	0	1	0	0	2'0	INS
308	3	0	1	0	1	5'5	SUF
309	3	0	1	0	0	8'5	NOT
310	3	0	1	0	1	8'5	NOT
311	3	0	1	0	1	8'0	NOT
312	3	0	1	0	1	2'5	INS

Nº de Orden	Método	Procedencia	Optativa	Repetidor	Sexo	Calificación	Código
313	3	0	1	0	1	2'0	INS
314	3	0	1	0	1	4'5	SUF
315	3	0	1	0	1	5'0	SUF
316	3	0	1	0	1	5'8	SUF
317	3	0	1	0	0	2'5	INS
318	3	0	1	0	1	5'5	SUF
319	3	0	1	0	0	8'5	NOT
320	3	0	1	0	1	5'0	SUF
321	3	0	1	0	1	6'0	BIEN
322	3	0	1	0	1	5'3	SUF
323	3	0	1	0	1	6'5	BIEN
324	3	0	1	1	1	10'0	SOB
325	3	0	1	1	0	6'0	BIEN
326	3	0	1	1	1	6'5	BIEN
327	3	0	1	1	1	7'5	NOT
328	3	0	1	1	1	8'5	NOT
329	3	0	1	1	0	1'0	INS
330	3	0	1	1	1	5'0	SUF
331	3	0	1	1	1	6'5	BIEN
332	3	0	1	1	1	7'0	NOT
333	3	0	1	1	0	8'8	SOB
334	3	0	1	1	1	7'5	NOT
335	3	0	1	1	0	6'5	BIEN
336	3	0	1	1	0	9'0	SOB

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
337	3	0	1	1	0	7'0	NOT
338	3	0	1	1	1	4'8	SUF
339	3	0	1	1	0	5'8	SUF
340	3	0	1	1	1	9'5	SOB
341	3	1	0	0	0	3'0	INS
342	3	1	0	0	1	5'8	SUF
343	3	1	0	0	1	2'0	INS
344	3	1	0	0	1	2'0	INS
345	3	1	0	0	0	4'5	SUF
346	3	1	0	0	1	3'5	INS
347	3	1	0	0	1	6'5	BIEN
348	3	1	0	0	1	4'0	INS
349	3	1	0	0	1	7'4	NOT
350	3	1	0	0	0	5'0	SUF
351	3	1	0	0	1	7'5	NOT
352	3	1	0	0	0	6'5	BIEN
353	3	1	0	0	1	7'5	NOT
354	3	1	0	0	0	3'8	INS
355	3	1	0	0	0	6'5	BIEN
356	3	1	0	0	1	6'5	BIEN
357	3	1	0	0	1	8'0	NOT
358	3	1	0	1	1	4'8	SUF
359	3	1	0	1	0	6'9	BIEN
360	3	1	0	1	1	9'5	SOB

N° DE ORDEN	MÉTODO	PROCE–DENCIA	OPTA–TIVA	REPE–TIDOR	SEXO	CALIFI–CACIÓN	CÓDIGO
361	3	1	0	1	1		NOT
362	3	1	0	1	1	4'0	INS
363	3	1	0	1	1	3'5	INS
364	3	1	0	1	1	2'0	INS
365	3	1	0	1	0	5'0	SUF
366	3	1	0	1	1	6'5	BIEN
367	3	1	0	1	0	4'0	INS
368	3	1	0	1	0	5'0	SUF
369	3	1	0	1	1	5'5	SUF
370	3	1	0	1	1	3'8	INS
371	3	1	0	1	0	3'5	INS
372	3	1	0	1	0	3'5	INS
373	3	1	0	1	0	8'0	NOT
374	3	1	0	1	1	5'8	SUF
375	3	1	1	0	1	8'0	NOT
376	3	1	1	0	0	6'5	BIEN
377	3	1	1	0	1	9'8	SOB
378	3	1	1	0	1	5'3	SUF
379	3	1	1	0	0	7'5	NOT
380	3	1	1	0	1	4'3	INS
381	3	1	1	0	0	5'8	SUF
382	3	1	1	0	1	5'3	SUF
383	3	1	1	0	1	5'0	SUF
384	3	1	1	0	1	4'0	INS

Nº DE ORDEN	MÉTODO	PROCE-DENCIA	OPTA-TIVA	REPE-TIDOR	SEXO	CALIFI-CACIÓN	CÓDIGO
385	3	1	1	0	1	7'0	NOT
386	3	1	1	0	0	8'0	NOT
387	3	1	1	0	1	7'0	NOT
388	3	1	1	0	0	7'0	NOT
389	3	1	1	0	1	6'3	BIEN
390	3	1	1	0	1	7'0	NOT
391	3	1	1	0	1	5'8	SUF
392	3	1	1	1	1	7'5	NOT
393	3	1	1	1	1	3'0	INS
394	3	1	1	1	1	5'0	SUF
395	3	1	1	1	0	6'5	BIEN
396	3	1	1	1	1	5'8	SUF
397	3	1	1	1	1	7'0	NOT
398	3	1	1	1	0	8'5	NOT
399	3	1	1	1	1	5'0	SUF
400	3	1	1	1	1	6'0	BIEN
401	3	1	1	1	1	5'0	SUF
402	3	1	1	1	1	5'5	SUF
403	3	1	1	1	0	4'3	INS
404	3	1	1	1	1	4'8	SUF
405	3	1	1	1	1	8'8	SOB
406	3	1	1	1	1	6'0	BIEN
407	3	1	1	1	1	8'3	NOT
408	3	1	1	1	0	6'0	BIEN