

TESIS



\* 5 3 0 9 5 4 5 4 0 0 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

**CONTRIBUCIÓN A LOS MÉTODOS DE SINTONÍA  
DE LOS CONTROLADORES BASADOS EN  
LÓGICA BORROSA**

Matilde Santos Peñas

Licenciada en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid

Presentada en la  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS  
de la  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
para la obtención del  
Grado de Doctor en Ciencias Físicas

*Madrid, 1994*

## AGRADECIMIENTOS

Es ésta la última parte a redactar de este trabajo de investigación, por tratarse de un capítulo que ha permanecido abierto hasta este momento, y quizás permanezca así esperando incluir en él a tantas personas sin cuyo apoyo, a veces desconocido, no se hubiera podido finalizar.

Es también el primero de hecho, porque en su comienzo intervinieron aquellos que contribuyeron a mi formación científica y universitaria. De entre ellos quiero hacer una mención especial a los que me ayudaron a cubrir la etapa de especialización en Cálculo Automático, que me orientó hacia este campo del Control.

Continuando en el tiempo, debo dejar constancia de una conversación con el actual Decano de la Facultad de Físicas de la UCM, el Dr. D. Francisco Tirado, que me abrió las puertas a estos estudios de doctorado, y me presentó al entonces Catedrático de Automática, Dr. D. Jaime Ruiz (d.e.p), mi primer director de Tesis, a quién va dirigido implícitamente este trabajo en un homenaje sincero.

La presente Memoria ha sido realizada en el Departamento de Informática y Automática de la Universidad Complutense de Madrid y en el mismo Departamento de la Universidad a Distancia (UNED), bajo la dirección del Prof. Dr. Don Sebastián Dormido Bencomo, Director del Departamento y Catedrático de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNED. A él quiero transmitir no sólo mi especial agradecimiento por su dirección y constante apoyo a lo largo de todas las etapas de este trabajo, sino también su acogida en unos momentos de desorientación profesional y su incondicional ánimo y confianza.

También deseo agradecer la ayuda que siempre he encontrado en todos mis compañeros del Departamento de Informática y Automática de la Universidad Complutense, tanto en el orden académico como personal, con los que siempre he podido contar a pesar de mi prolongada ausencia física.

Extiendo este agradecimiento a los que han trabajado conmigo en la Universidad a Distancia. Sin su ayuda, difícilmente hubiera podido desarrollar el trabajo realizado, tanto por sus acertados consejos o certeras críticas como por los medios que han puesto a mi alcance.

De ellos, un especial recuerdo a mis compañeros de despacho, con los que he convivido de una manera especial, sobre todo estos meses de mayor trabajo.

No quiero tampoco dejar de mencionar a las personas que me han facilitado en todo momento los trámites y papeleos, haciendo en muchos casos más de lo que les correspondía.

Finalmente, incluyo en estos agradecimientos a todas esas personas que quizás no tuvieron una relación profesional directa con este trabajo, pero que han sabido rodearme del ambiente necesario y darme el apoyo oportuno para que esta Memoria se pudiera llevar a cabo.

# ÍNDICE

## **CONTRIBUCIÓN A LOS MÉTODOS DE SINTONÍA DE LOS CONTROLADORES BASADOS EN LÓGICA BORROSA**

Agradecimientos	i
Índice	iii
Objetivos y estructura de la Tesis	viii
Nota sobre la Terminología	xi

### **1 LÓGICA BORROSA EN CONTROL DE PROCESOS**

1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 LÓGICA BORROSA	3
1.2.1 Justificación	4
1.3 LÓGICA BORROSA APLICADA AL CONTROL DE PROCESOS	6
1.3.1 ¿Cuándo pensar en Lógica Borrosa?	7
1.3.2 Aplicaciones de la Lógica Borrosa en Control	9
1.3.3 Algunas características del control basado en Lógica Borrosa	11
1.4 CONCLUSIONES	14

### **2 FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA BORROSA**

2.1 INTRODUCCIÓN	16
2.2 FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA BORROSA	17
2.2.1 Conjuntos borrosos	18
2.2.1.1 Operaciones	24
2.2.2 Relaciones borrosas	28
2.2.2.1 Relaciones ordinarias entre conjuntos borrosos	28
2.2.2.2 Relaciones borrosas entre conjuntos ordinarios	29
2.2.2.3 Relaciones borrosas entre conjuntos borrosos	30

2.2.2.4 <i>Composición de relaciones</i>	31
2.2.3 Sentencias borrosas: sintaxis y semántica	33
2.2.3.1 <i>Interpretación de la sentencia condicional</i>	34
2.2.3.2 <i>Aproximación lingüística</i>	37
2.2.4 Razonamiento borroso	37
2.2.4.1 <i>Mecanismos de Inferencia basados en la Regla Composicional de Inferencia</i>	39
2.3 CONCLUSIONES	42
<b>3 CONTROLADORES BORROSOS</b>	
3.1 INTRODUCCIÓN	44
3.2 CONTROLADORES BORROSOS	45
3.3 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN DE ENTRADA	47
3.3.1 Escalado	47
3.3.2 Estrategias de borrosificación	48
3.4 BASE DE CONOCIMIENTO	49
3.4.1 Base de datos	50
3.4.1.1 <i>Etiquetas lingüísticas</i>	50
3.4.1.2 <i>Funciones de Pertenencia (Partición borrosa)</i>	51
3.4.2 Base de reglas	52
3.5 MECANISMO DE INFERENCIA	55
3.6 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN DE SALIDA	57
3.6.1 Estrategias de desborrosificación	57
3.7 CONFIGURACIONES DE CONTROL BORROSO	59
3.7.1 Control borroso directo	59
3.7.2 Control borroso adaptativo	60
3.7.2.1 <i>Controladores borrosos auto-organizados</i>	60
3.7.2.2 <i>Controladores borrosos con autoaprendizaje</i>	62
3.7.3 Controladores basados en modelos borrosos	62
3.7.4 Controladores borrosos híbridos	63
3.8. CONCLUSIONES	63
<b>4 SINTONÍA DE CONTROLADORES BORROSOS</b>	
4.1 INTRODUCCIÓN	65
4.2 PARÁMETROS DE CONFIGURACIÓN Y AJUSTE DE UN CONTROLADOR BORROSO	66
4.2.1 Influencia de los parámetros de configuración	68

4.2.1.1 <i>Tratamiento de la información de entrada</i>	68
4.2.1.2 <i>Base de conocimiento</i>	69
4.2.1.3 <i>Mecanismo de inferencia</i>	71
4.2.1.4 <i>Tratamiento de la información de salida</i>	71
4.2.2 <i>Influencia de los parámetros de ajuste</i>	72
4.2.2.1 <i>Tratamiento de la información de entrada</i>	72
4.2.2.2 <i>Base de conocimiento</i>	72
4.3 <b>EFFECTOS DE LA VARIACIÓN DE LOS FACTORES DE ESCALA Y DE LAS REGLAS</b>	74
4.3.1 <i>Variación de los factores de escala</i>	74
4.3.2 <i>Variación de las reglas de control</i>	76
4.4 <b>REVISIÓN DE LOS MÉTODOS DE SINTONÍA</b>	76
4.4.1 <i>Métodos de ajuste de los factores de escala</i>	77
4.4.1.1 <i>Sintonía cualitativa</i>	79
4.4.1.2 <i>Sintonía cuantitativa</i>	80
4.4.2 <i>Métodos de ajuste de las reglas de control</i>	87
4.4.1.1 <i>Sintonía cualitativa</i>	89
4.4.1.2 <i>Sintonía cuantitativa</i>	90
4.4.3 <i>Ventajas e inconvenientes de los distintos métodos de sintonía</i>	94
4.5 <b>CONCLUSIONES</b>	97
<b>5 TÉCNICAS CLÁSICAS DE SINTONÍA</b>	
5.1 <b>INTRODUCCIÓN</b>	98
5.2 <b>ESTRATEGIAS DE CONTROL</b>	99
5.3 <b>MODELIZACIÓN</b>	102
5.3.1 <b>Modelos en el dominio temporal</b>	102
5.3.1.1 <i>Respuesta a un salto</i>	103
5.3.1.2 <i>Determinación de las áreas</i>	104
5.3.1.3 <i>Método del intervalo entre tiempos</i>	105
5.3.1.4 <i>Estimación de sistemas oscilatorios</i>	105
5.3.1.5 <i>Estimación de sistemas discretos</i>	106
5.3.2 <b>Modelos en el dominio de la frecuencia</b>	107
5.3.2.1 <i>Método de la oscilación mantenida</i>	108
5.3.2.2 <i>Método de correlación</i>	108
5.3.2.3 <i>Método del Relé</i>	109
5.3.3 <b>Conversión a modelos temporales de modelos en el dominio de la frecuencia</b>	124



7.3 SINTONÍA CUALITATIVA DE UN CONTROLADOR BORROSO PID	211
7.3.1 El problema de los parámetros iniciales	213
7.3.1.1 <i>Evaluación de los parámetros iniciales</i>	214
7.3.1.2 <i>Influencia del factor de escala GE</i>	217
7.3.1.3 <i>Influencia del factor de escala GR</i>	218
7.3.1.4 <i>Influencia del factor de escala de la salida GU</i>	220
7.3.2 El término derivativo	221
7.4 OTRAS CONFIGURACIONES DE CONTROL BORROSO	227
7.4.1 Controladores borrosos en cascada	227
7.4.1.1 <i>Autosintonía del lazo secundario</i>	229
7.4.1.2 <i>Autosintonía del lazo primario</i>	230
7.5 CONCLUSIONES	231
 <b>CONCLUSIONES</b>	
CONCLUSIONES	232
 <b>APÉNDICES</b>	
APÉNDICE A	
Operadores triangulares	236
APÉNDICE B	
Adquisición de conocimiento en sistemas borrosos	239
APÉNDICE C	
C.1 Condiciones de oscilación: análisis de la función descriptiva	242
C.2 Condición de ciclo límite para relés con histéresis	244
 <b>BIBLIOGRAFÍA</b>	
BIBLIOGRAFÍA	250



Por un lado, gran parte de la flexibilidad inherente a los controladores borrosos se debe a que cuentan con numerosos grados de libertad a la hora de especificar sus componentes, lo que permite un amplio margen de posibilidades en su comportamiento. Sin embargo, *esta sobreparametrización dificulta enormemente su sintonía*, ya que son parámetros críticos en la estabilidad y funcionamiento del sistema, y su influencia no siempre es bien conocida.

De hecho, uno de los problemas fundamentales, desde el punto de vista práctico, que se plantean a este tipo de reguladores es que *no existen procedimientos sistemáticos que permitan sintonizar el controlador borroso*.

*Por eso, nos ha parecido útil profundizar en su comportamiento para proponer métodos y criterios que faciliten su diseño y la sintonía de sus parámetros, de forma sistemática, agilizando así su puesta a punto, y evitando algunos problemas asociados que se pueden prever y resolver con un estudio detallado.*

Una de las razones que nos han movido a enfocar así este trabajo es la necesidad de contar con métodos de ayuda para orientar la elección inicial de los parámetros del controlador, incorporando el máximo conocimiento posible, y establecer una estrategia de ajuste fino de estos parámetros para un mejor funcionamiento del sistema de control. Otra razón es la conveniencia de contar con variadas técnicas de sintonía, métodos útiles y sistemáticos de ajuste para este tipo de reguladores que sean bien conocidos, lo que facilitaría su incursión en el mundo industrial.

Para ello, en el Capítulo 1 de esta Memoria se introduce la Lógica Borrosa en el contexto del Control de Procesos, analizando su viabilidad para aplicaciones con ciertas características que hacían dificultoso su tratamiento mediante otras técnicas.

En el Capítulo 2 se establecen los presupuestos de la Teoría de Conjuntos Borrosos, tanto matemáticos como lingüísticos, haciendo especial hincapié en los conceptos que tienen una relación más directa con su aplicación al Control. Una vez asentada esta base, se pasa a describir en el Capítulo 3 los Controladores Borrosos como elementos de control, estructurando y definiendo sus componentes básicos.

En el Capítulo 4 se estudia de forma sistemática la influencia de las distintas especificaciones de los componentes de los Controladores Borrosos y sus efectos sobre el

control. Se realiza una taxonomía de los métodos de sintonía propuestos en la literatura para el ajuste de sus parámetros, mostrando sus ventajas e inconvenientes, para que desempeñe una función de consulta y referencia.

Como nuestra propuesta se basa en la aplicación de las técnicas clásicas de sintonía a este nuevo tipo de controladores, en el Capítulo 5 se revisan someramente las distintas estrategias que se han venido aplicando durante las últimas décadas. En concreto, se ha ampliado el estudio del Método del Relé, desarrollando el caso asimétrico y sus características.

En el Capítulo 6 se aplican estas técnicas clásicas a diversos Controladores Borrosos, en orden de creciente complejidad. Para ello, se equiparan bajo ciertas condiciones a los reguladores convencionales. Esta especificación permite un completo desarrollo analítico de los mismos, bajo el que se puede argumentar de forma rigurosa la influencia de cada parámetro de sintonía sobre el control. Se han introducido entonces diversas propuestas de métodos de sintonía, explicando su aplicabilidad y las ventajas e inconvenientes que se pueden derivar de su aplicación. Se estudia también de forma cualitativa la repercusión de cada parámetro de ajuste.

La obtención de las ecuaciones no lineales que rigen el control permite obtener unos parámetros iniciales de sintonía para este tipo de reguladores, que se demuestran bastante generales y válidos, como se comprueba en el Capítulo 7, donde se ha incrementado la generalidad de los Controladores Borrosos incluyendo todos los términos que caracterizan a los reguladores convencionales. Por último, se plantea otro tipo de estructuras más complejas que se pueden realizar cuando a este tipo de controladores se les dota de la facilidad de autosintonía.

Los tres apéndices están dedicados a los operadores triangulares (Apéndice A), al problema de la adquisición del conocimiento en los sistemas borrosos (Apéndice B) y a un análisis detallado de la función descriptiva y condiciones de oscilación del Método del Relé (Apéndices C.1 y C.2).

Se han incluido finalmente las referencias consultadas durante la elaboración de esta Memoria.

## NOTA SOBRE LA TERMINOLOGÍA

A la hora de poner por escrito este trabajo de investigación se ha procurado hacerlo con la mayor corrección lingüística posible. Sin embargo, a los errores involuntarios que se hayan podido cometer hay que añadir la dificultad que presenta en algunos casos la traducción de términos acuñados en el argot científico que provienen de otros idiomas, pero que no se encuentran —¿todavía?— reconocidos como propios por la Real Academia de la Lengua.

Se ha procurado por lo tanto traducir todas aquellas palabras de las que existe una acepción reconocida en nuestro idioma, incluidos los operadores que pueden equipararse a una partícula unitiva.

Respecto a la traducción del término original, “fuzzy”, se ha convenido hacerlo por *borroso* cuando su contexto de uso sea un medio formal, y se suele utilizar *difuso* en un ámbito no formal. Así, por ejemplo, se ha uniformado la traducción de “fuzzy logic” por *lógica borrosa*.

Más problemático ha sido adoptar un criterio para la traducción de “fuzzification” y “defuzzification”, donde se entabla una pugna entre la corrección lingüística y el uso impuesto por la necesidad de discriminar significados. Para evitar posibles equívocos, se ha establecido la convención de traducir “fuzzification” por *borrosificación* y “defuzzification” por *desborrosificación*, a pesar de la dificultad que conlleva la utilización de estos términos.

Finalmente, remarcar que por *lógica borrosa* se entiende la lógica que estudia la relación de consecuencia en argumentos que incluyen enunciados vagos, y no cabe la posible confusión de atribuir borrosidad —en el sentido de carácter poco explícito o equívoco— a las fórmulas o reglas de esta lógica. El término *borroso* no tiene en este trabajo la acepción vulgar.

# CAPÍTULO 1

## **LÓGICA BORROSA EN CONTROL DE PROCESOS**

### **1.1 INTRODUCCIÓN**

La **Lógica** surge al tratar de identificar las formas del pensamiento humano, al intentar crear criterios para discernir en las discusiones filosóficas. Según la Academia de la Lengua, la **Lógica** es *“la disciplina que estudia la estructura, fundamento y uso de las expresiones del conocimiento humano”*. Es una ciencia que estudia las condiciones formales de validez de una inferencia y, en general, de una argumentación cualquiera. Se establece así una vía de formalización del razonamiento humano, muy importante para el análisis de argumentos.

El lenguaje que interesa a la lógica no es sólo el lenguaje natural u ordinario. Para constituirse ciencia debe tener la capacidad de realizar operaciones y cálculos, y por lo tanto requiere la confección de un lenguaje artificial que, contando con reglas explícitas, permita usar sus componentes para formar enunciados.

La suposición básica de la lógica llamada *“clásica”* es que toda proposición es verdadera o falsa; por eso se denomina también *“lógica de dos valores o bivalente”*. Este tipo de lógica conserva todo su lenguaje y sistema axiomático. Se incluyen dentro de ésta la *lógica de proposiciones*, donde las variables lógicas o proposiciones pueden asumir los

dos valores de la lógica clásica de verdad o falsedad, y análogamente la *lógica de predicados de primer orden*, que incluye cuantificadores.

Sin embargo, la existencia de dos únicos valores de verdad fue ya cuestionada por el mismo Aristóteles. En su tratado *Sobre la Interpretación*, discute la problemática del estado de verdad de sucesos futuros. Aristóteles mantuvo que proposiciones acerca de eventos futuros no son actualmente verdaderas ni falsas, sino que son potencialmente ambas; de ahí que el valor de verdad esté indeterminado por lo menos antes del evento.

Pero también se conocen proposiciones cuyo valor de verdad es incierto a pesar de que no son futuras (por ejemplo, la posición de una partícula según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg). Todo ello condujo a la definición de lógicas con más de dos valores de verdad, denominadas "*no clásicas*". En estas lógicas los conceptos de verdad, falsedad, contradicción, tautología, etc., se ven afectados por el abandono de la lógica bivalente y deben ser nuevamente definidos.

J. Lukasiewicz propuso en 1920 una lógica [Luk 20] con tres valores — *trivalente*— ante la incapacidad de asignar esos dos únicos valores absolutos a las sentencias; a comienzos de los años 30 [Luk 30] desarrolló una lógica *polivalente*, con un número infinito de valores. Estos se suelen tomar, por convenio, como los números reales en el intervalo  $[0,1]$ . Esta lógica se denomina *lógica estándar de Lukasiewicz*.

Desde entonces se han desarrollado distintas lógicas multivalentes o multivaluadas, que invalidan el anterior sistema axiomático, admitiendo más de dos valores semánticos [Kle 52].

Las *lógicas modales* permiten emplear expresiones como "es necesario que", "es posible que", etc. Su estudio fue emprendido por Aristóteles y desarrollado por muchos autores medievales, pero la formulación moderna de la lógica modal se debe a C. I. Lewis (1932). Lewis introdujo los operadores modales y la "implicación estricta" [Lew 32], sentando varios conjuntos de axiomas y reglas de inferencia que han dado origen a diversas lógicas modales.

Se desarrollaron también ampliaciones de la lógica de predicados de primer orden incluyendo la identidad, y más adelante con la *lógica de predicados de orden superior*, al permitir cuantificar los predicados y usarlos como argumentos.

La *lógica de clases* y la *lógica de relaciones* no añaden nuevos aspectos a la lógica de predicados, sino que representan otra forma de expresarla, con construcciones sintácticas más cercanas a la teoría de conjuntos.

Otras lógicas que se están estudiando actualmente son las denominadas *intuicionista*, *dinámica*, etc.

Una extensión de estas lógicas multivaluadas es la **Lógica Borrosa**, que utiliza la teoría de conjuntos borrosos para tratar de proporcionar fundamento al *razonamiento aproximado*. Su foco principal de atención es el lenguaje natural, donde el razonamiento con proposiciones imprecisas es bastante común.

## 1.2 LÓGICA BORROSA

La **Lógica Borrosa**, aunque se puede considerar como una extensión compleja de la lógica polivalente, va aún más allá que las lógicas con infinitos valores de verdad. Se trata no sólo de considerar que hay una infinidad de valores semánticos entre verdadero y falso, sino también de tener en cuenta que estos mismos valores de verdad, que quedan bien caracterizados por un número borroso, son imprecisos: todo es cuestión de grado. Es una *lógica de valores de verdad lingüísticos*, donde una proposición puede tener distintos grados de pertenencia a esos valores de verdad borrosos [Ara 93].

La **Teoría Borrosa** va indisolublemente unida al nombre de Lofti Zadeh, quien introdujo los conjuntos borrosos ("Fuzzy Sets") en 1965 [Zad 65], y poco después los algoritmos borrosos [Zad 68a] y la *lógica borrosa* [Zad 88], así como la *Teoría de la Posibilidad* [Zad 68b], [Zad 78] con la que se formaliza la idea de inferencia borrosa de una manera rigurosa. También desarrolla las primeras aplicaciones en el campo biológico [Zad 69] y otras posteriores a sistemas complejos y procesos de decisión [Zad 73a].

La lógica borrosa puede ser contemplada en contraposición a la lógica clásica (de dos valores). Esta última, precisa y categórica, establece que cualquier enunciado o proposición puede tomar un valor lógico verdadero o falso, si se habla de función de verdad; encendido o apagado, en funciones de conmutación; en definitiva, 0 ó 1. Sin embargo, la lógica borrosa es esencialmente *gradual*.

Entre otras características que diferencian a la lógica borrosa de la lógica tradicional cabe también destacar:

- a) como ya se ha comentado, el grado de verdad de una aseveración en la lógica bivalente toma un valor entre un conjunto finito de valores: verdadero o falso; en la lógica borrosa, el grado de verdad es un subconjunto, que se puede expresar como verdadero, muy verdadero, bastante falso, no muy falso, etc.
- b) en la lógica clásica los predicados son concretos, mientras que en la lógica borrosa pueden ser tanto nítidos como borrosos.
- c) la lógica polivalente —y la bivalente como caso particular— admite sólo dos cuantificadores, el universal “para todo” y el existencial “existe un ... tal que”. La lógica borrosa admite además una gran variedad de *cuantificadores borrosos*, como “muchos”, “pocos”, “la mayoría”, etc. Estos se pueden interpretar como números borrosos que dan una caracterización imprecisa del cardinal de un conjunto borroso o clásico. Desde esta perspectiva, un cuantificador borroso se puede considerar como un predicado borroso de segundo orden.
- d) a diferencia de la lógica de predicados de primer orden, la lógica borrosa incorpora una gran variedad de *modificadores* de predicados, como “muy”, “algo”, “no”, “casi”, etc. Asignando operaciones sobre conjuntos borrosos a cada uno de estos modificadores se consigue realizar cálculos con *variables lingüísticas*.
- e) este tipo de razonamiento aproximado admite distintas interpretaciones de las sentencias: “casi cierta”, “muy falsa”, “poco verdadera”, etc.

### 1.2.1 Justificación

El acercamiento al lenguaje natural hace que se desarrollen las lógicas del lenguaje ordinario; entre otras, la lógica borrosa. El lenguaje debe estudiarse tal y como aparece, en su inmediatez. Esta idea subyace en los primeros trabajos de Zadeh, que ve las deficiencias del lenguaje preciso en el área del control, lo que le lleva a enunciar su conocido *Principio de Incompatibilidad*: “a medida que la complejidad de un sistema aumenta, disminuye nuestra capacidad para hacer afirmaciones precisas, incluso significativas, sobre su comportamiento, hasta que se alcanza un umbral, más allá del cual precisión y relevancia son características casi mutuamente excluyentes” [Zad 73a].

Si se pretende analizar sistemas muy complejos como el hombre, las sociedades, etc., resulta imprescindible introducir en los modelos la imprecisión y la vaguedad. Sobre todo al tratar de formalizar las relaciones del hombre con su entorno, siempre se encuentran elementos imprecisos o borrosos, en particular en la actividad más típicamente humana: el lenguaje. Además, en estos sistemas complejos se da el hecho de que significación y precisión son, a partir de un límite, incompatibles. Esto quiere decir que resultados muy precisos suelen tener poco significado, y lo que interesa más bien son resultados cualitativos. Por ejemplo, es más claro decir “hace un día soleado”, que definirlo por “el tanto por ciento de nubosidad”, si bien este tipo de información sería más precisa.

Por otro lado, el hombre aprende bien una serie de tareas con información imprecisa, mientras que quizás no sería capaz de hacerlo en el mismo contexto con una información cuantitativa. Un ejemplo propuesto para ilustrar este principio es el aprendizaje de conducción de vehículos. Tradicionalmente, sólo unas cuantas indicaciones “vagas”: levante el pie un poco del acelerador, gire un poco a la derecha, apriete más el embrague, ... son suficientes para adquirir esta habilidad, mientras sería una labor ardua entender órdenes como: incline el pie con un ángulo de  $30^\circ$ , gire  $47^\circ$  a la derecha, etc. Existen, sin embargo, otros marcos donde la precisión es deseable y en algunos casos necesaria e imprescindible.

La lógica borrosa surge ante la necesidad de formalización del razonamiento con incertidumbre: intenta abordar problemas definidos en términos lingüísticos, y por tanto, imprecisos, donde los datos están expresados en los términos cualitativos que utilizarían los expertos humanos. Generalmente hacemos inferencias imprecisas; la lógica multivaluada no permite hacer ese tipo de inferencias con matices (difícil, muy difícil, ...), imposibles de abordar con la simple extensión del conjunto de valores de verdad. Ese tipo de inferencia imprecisa es el que pretende afrontar la lógica borrosa.

La lógica borrosa tiene a su favor que incluye como caso particular no sólo las lógicas bivalente y polivalente, sino también la teoría de probabilidades y la lógica probabilística. Cualquier sistema lógico puede hacerse borroso; el razonamiento exacto se contempla como un caso límite del razonamiento aproximado. Concretamente, en lógica borrosa se puede hablar del grado de verdad de una determinada sentencia o de la probabilidad que tiene la sentencia de ser verdadera.



La teoría de los conjuntos borrosos y las técnicas asociadas a ella se han empleado para resolver numerosos problemas reales, hasta entonces sin abordar por su complejidad o falta de información, lo que la ha consolidado como una potente estrategia.

### **1.3 LÓGICA BORROSA APLICADA AL CONTROL DE PROCESOS**

La aplicación de avanzadas tecnologías ha conducido al desarrollo de sofisticados sistemas de control en sectores tales como la industria espacial, plantas químicas, centrales nucleares y otras áreas industriales con entornos peligrosos o dañinos para la salud. El empleo de controles automáticos ha evitado la exposición y manipulación directa por los operarios de procesos. Obviamente, el comportamiento de estos sistemas tiene que alcanzar unos niveles muy altos de fiabilidad y robustez de funcionamiento. Muchas veces también es necesario que posean un cierto grado de *inteligencia* que les posibilite la toma de decisiones de manera automática.

Aunque la teoría de control convencional permite resolver muchos de los problemas que surgen en la implantación industrial de controladores robustos, en algunas situaciones es necesario disponer de mecanismos extras de monitorización y supervisión del comportamiento de estos controladores. La complejidad de los modernos sistemas de control aconseja, en ocasiones, el empleo de técnicas de inteligencia artificial para la implantación de los mecanismos de supervisión de procesos.

Por otro lado, para realizar la síntesis de un sistema de control, generalmente se requiere un conocimiento profundo del proceso a controlar. Cuando el proceso es demasiado complejo para dar una buena y completa descripción física de él, el diseño del controlador debe basarse en la intuición y en el conocimiento heurístico, ya que pretender ajustarse al camino convencional de modelización y control empobrece el conocimiento del mismo. Estos procesos difícilmente son controlados por otras técnicas basadas en aproximaciones drásticas que los simplifican, pero que no consiguen la eficiencia requerida.

Además, se ha demostrado que los operadores humanos son capaces de controlar este tipo de plantas complejas o mal definidas, y que en esa operación manual hay grandes diferencias en el funcionamiento y en el tiempo, según la experiencia y habilidad del operador que actúe. Surge entonces la conveniencia de hacer un sistema automático que imite las acciones de un operador experto, optimizando los resultados.

La necesidad de contar con estas alternativas de *Control Experto* aparece sobre todo en procesos industriales difíciles de modelar, procesos que reúnen alguna o varias de las siguientes características:

- a) Procesos difíciles de automatizar y que, convencionalmente, son controlados fácilmente por operadores humanos sin un profundo conocimiento de sus dinámicas.
- b) Dificil estimación de los parámetros que definen el proceso. No existe modelo matemático del proceso o existe, pero es demasiado complejo para ser evaluado lo suficientemente rápido para operar en tiempo real.
- c) Sistemas complejos, que presentan no linealidades con retardos considerables, de orden elevado, variantes con el tiempo, con un amplio rango de constantes de tiempo y características de ganancia asimétrica.
- d) Situaciones en las que resulta difícil la medición del valor de las variables a controlar (procesos biológicos, reacciones químicas complejas, etc.).
- e) Medidas no fiables (degradación de sensores, etc.), o funcionamiento bajo la influencia de fuertes ruidos no estacionarios (cuando los niveles de ruido ambiental son altos).
- f) Cambios en los parámetros de la planta y entornos variables como resultado de perturbaciones en la carga.

### **1.3.1 ¿Cuándo pensar en Lógica Borrosa?**

La primera fase de un proyecto de control es la realización de un análisis exhaustivo del problema y la definición de las especificaciones de funcionamiento. El tipo de información disponible acerca de la dinámica del proceso debe orientar al diseñador en la selección de la estrategia de control más adecuada.

Hay que destacar la importancia de lograr una definición completa del problema, que permita elegir la técnica de control conveniente antes de pasar a la fase de diseño. Se trata de especificar los requisitos del controlador respecto de la planta y respecto del operario o supervisor, es decir, el comportamiento externo del controlador.

De una primera toma de contacto con el problema de control, y conociendo el tipo de información de la que se dispone, el diseñador debe distinguir si se trata de un problema sencillo, de fácil solución mediante técnicas de control convencionales, o si será necesario utilizar alguna metodología alternativa.

La selección de la técnica de control más adecuada no siempre es sencilla, y puede ser necesario avanzar más en el planteamiento del problema para tomar una decisión. Incluso en algunos casos puede llegarse a la necesidad de dar una “vuelta atrás” en el ciclo de desarrollo del controlador después de haber fracasado mediante técnicas de control convencionales.

Si el proceso de control es fácilmente modelizable mediante ecuaciones matemáticas lineales, una solución basada en técnicas directas de control es la alternativa más sencilla y de menor coste. El controlador PID clásico proporcionará una solución precisa y eficiente a problemas de control lineales y simples.

Una alternativa para el tratamiento de procesos de difícil modelado son los sistemas adaptativos [Ást 73]. En los últimos años se ha avanzado mucho en el desarrollo de esta teoría; sin embargo, es necesario disponer de un modelo matemático del sistema, y los requerimientos en lo que se refiere a estabilidad y tiempo de cálculo siguen siendo aún restrictivos en muchos casos.

Si, en cambio, el proceso tiene una dinámica poco conocida o es muy complejo, podría pensarse en la posibilidad de *modelizar la estrategia de control* en lugar del proceso a controlar.

Este modelo podría extraerse, por ejemplo, a partir de la experiencia que tienen los operarios en el control manual del proceso. El tipo de información que podrían aportar los expertos (información lingüística) no es cuantitativa, sino cualitativa; y no sólo es cualitativa la información, sino que en muchos casos el modo de razonamiento también es aproximado. No tiene sentido buscar la solución a un problema no perfectamente definido por medio de un planteamiento matemático muy exacto, cuando el ser humano razona empleando la inexactitud con información imprecisa.

El uso de sistemas expertos convencionales ha pretendido ser una solución en este sentido. El tratamiento de esta información imprecisa en los sistemas expertos basados en

reglas se ha hecho tradicionalmente bajo un enfoque probabilístico. En este tipo de modelos, se asocia un factor de certeza a cada hecho o regla. El factor de certeza en la conclusión se calcula empleando la teoría de probabilidad. Estos métodos proporcionan sugerencias para orientar la actuación.

La experiencia ha demostrado que la utilización de sistemas expertos en control de procesos puede ser muy eficaz [Åst 86]. La inteligencia artificial es, pues, una alternativa, o en ciertos casos, un complemento, a los algoritmos de control convencionales.

Una de las técnicas de sistemas expertos que más éxito está teniendo en su aplicación al control de procesos es el modelo posibilístico basado en la **teoría borrosa**. Un modelo basado en reglas borrosas difiere fundamentalmente de un modelo basado en reglas convencional en el hecho de que no se procesan simplemente símbolos, sino que se asigna un significado a cada término lingüístico mediante un conjunto borroso. Generan acciones borrosas, no sólo orientaciones.

Dentro de este contexto se incluyen los **Controladores basados en la Lógica Borrosa (CB)**, que proporcionan mecanismos que permiten convertir una estrategia lingüística en una estrategia automática.

El empleo de las lógicas borrosa y clásica es función directa del problema a resolver. La tecnología borrosa no sólo no es incompatible con los sistemas de control convencionales, sino que pueden *integrarse conjuntamente* para lograr controladores más robustos.

### **1.3.2 Aplicaciones de la Lógica Borrosa en Control**

La lógica borrosa (heurística) ha sido aplicada en distintas situaciones: control de procesos complejos [Zad 73a], modelización de procesos industriales [Tak 85], diagnóstico de fallos [Yas 85], programación matemática, procesamiento de imágenes, reconocimientos de patrones [Mam 75a], etc.

Dentro del área industrial, los controladores a menudo incorporan una considerable cantidad de lógica borrosa para tratar situaciones en las que no se comportan bien. Esta lógica heurística incluye, entre otras, las siguientes acciones:

- el paso de manual a automático del modo de control
- manejo de las condiciones de alarma del proceso
- combinación de controladores de diferente complejidad
- tratamiento de la saturación en los actuadores

También la sintonía de controladores para un determinado proceso es otro campo donde se utiliza la lógica heurística. Típicamente, un operador humano aplica un conjunto de reglas empíricas comúnmente aceptadas (por ejemplo, las técnicas de Ziegler-Nichols, u otro tipo de tablas que resumen esa experiencia) y ajusta el controlador monitorizando el comportamiento del proceso. Este comportamiento puede emularse mediante técnicas borrosas [Oll 89], [Tza 90], [Han 94].

Pero quizás el campo más importante donde la lógica borrosa juega un papel significativo es el control de sistemas industriales complejos. Su atractivo desde el punto de vista de la Teoría de Control de Procesos se debe a que esta técnica proporciona un método directo y claro de traducir el conocimiento cualitativo que se posee de la planta y de los procedimientos de control expresados mediante sentencias lingüísticas imprecisas, en algoritmos de ordenador.

La lógica borrosa como metodología de control simula el pensamiento humano, incorporando la imprecisión inherente a todos los sistemas físicos. La imprecisión que se modela con la lógica borrosa no hace referencia a errores en las medidas, ni a variables aleatorias o procesos estocásticos.

Se puede catalogar como *control organizado en reglas, cuyas acciones están diseñadas para parecerse a las acciones de un operador humano*. Es un método de representar fácilmente procesos analógicos en máquinas digitales.

El primer controlador borroso desarrollado por Mamdani [Mam 74] se aplicó al control de temperatura y presión en una máquina de vapor. Desde entonces, el control borroso ha experimentado una gran evolución, caracterizada por numerosos trabajos de índole tanto teórica como práctica. Algunos de los que destacan por sus contribuciones se resumen en la Tabla 1.1.

Autor	Año	Contribución	Referencias
Zadeh	1972	Bases del control borroso	[Zad 72]
Mamdani, Assilian	1974	Aplicación del primer Controlador Borroso	[Mam 74, 75]
Rutherford, Bloore	1976	Desarrollo del CB como tabla numérica de reglas	[Rut 76]
Macvicar-Whelan	1976	CB incremental que emula un PI clásico	[Mac 76]
Procyk, Mamdani	1979	Primer Controlador Borroso Auto-organizado	[Pro 79]
Braae, Rutherford	1979	Modelo lingüístico para obtener reglas de control	[Bra 79b]
Takagi, Sugeno	1985	Derivación analítica de las reglas de control	[Tak 85]
Yasunobu, Miyamoto	1985	Control Predictivo borroso	[Yas 85]
Togai, Chiu	1987	Primer Chip basado en lógica borrosa	[Tog 87]
Tang, Muljolland	1987	Técnicas de diseño de CB-PI	[Tan 87]
Yamakawa	1988	Microprocesadores borrosos	[Yam 88]
Watanabe	1990	CB implementados sobre circuitos VLSI	[Wat 90]
Kosko	1991	Controladores borrosos y Redes Neuronales	[Kos 91]

Tabla 1.1 - Contribuciones al Control de Procesos con Lógica Borrosa

El control borroso fue la primera aplicación de la lógica borrosa a la resolución de problemas reales. Desde entonces no ha dejado de crecer el número de aplicaciones prácticas, entre las que se encuentran actualmente las de control de calidad del agua, conducción automática de trenes, control de ascensores y grúas, aplicaciones en reactores nucleares, automóviles, máquinas, lavadoras, etc. Campos muy apropiados para este tipo de sistemas son también la medicina y el control de variables fisiológicas y biológicas, ya que estos procesos suelen ser poco conocidos, no se han conseguido todavía modelos matemáticos precisos y muchas de las variables son en sí mismas borrosas. Existen también desarrollos de dispositivos de hardware borroso, memorias borrosas y computadores borrosos.

### 1.3.3 Algunas características del control basado en Lógica Borrosa

Los controladores basados en el concepto de lógica borrosa presentan buen comportamiento en procesos industriales complejos, difíciles de controlar por métodos tradicionales, de los cuales el conocimiento no es preciso y que, sin embargo, son controlados con relativo éxito por operadores con experiencia. La razón del éxito es que estos controladores intentan sistematizar el razonamiento humano a través de reglas lingüísticas de control, y no es necesario un modelo preciso del sistema a controlar, no siempre fácil de obtener.

Otras características que se deducen de la estructura de los controladores borrosos se pueden utilizar para resolver u optimizar problemas que se presentan en el área del control.

- Los sistemas convencionales PID están diseñados para controlar una única salida en base a unas pocas entradas independientes, y exige un conocimiento detallado de todas las variables del sistema. Debido a esta independencia, añadir más entradas complica el método de control rápidamente y requiere recalcular todas las funciones de transferencia.

La modelización borrosa trabaja con relaciones de la salida con las entradas, conjuntando muchos parámetros. Esto se traduce en la inclusión de variables de orden más alto y resulta, por lo tanto, un sistema de control de orden más elevado, que a menudo proporciona una respuesta más precisa y estable. Añadir otra entrada a un sistema borroso requiere solamente la adición de otra variable borrosa y sus reglas asociadas. Los estados de control son descritos en términos imprecisos, que constituyen los estados de las variables.

- Complejos requerimientos pueden ser implementados de forma simple, con un mantenimiento fácil y de costo no elevado. Se desarrollan potentes capacidades de razonamiento con un pequeño número de reglas si las funciones de pertenencia han sido determinadas adecuadamente.

El método de estudiar la relación entre la entrada y la salida, definiendo las funciones de pertenencia y las reglas, depende del tipo de sistema. La aproximación más directa es estudiar un sistema controlado por un operador, ya que el ser humano piensa en términos de grados de pertenencia y usa espontáneamente variables lingüísticas. Son fáciles de construir —vienen definidos por algoritmos no matemáticos— y fáciles de comprobar. Esta simplicidad de implementación reduce la complejidad del diseño, lo que permite que problemas que eran insolubles puedan ahora ser solucionados.

- Se procesan un gran número de datos en un pequeño número de funciones de pertenencia, lo que reduce el número de valores que el controlador tiene que manejar para establecer una decisión. Como sólo unos pocos valores tienen que ser evaluados, sólo unas pocas reglas son necesarias y, en muchos casos, un controlador borroso puede obtener la misma salida más rápidamente.

- La lógica borrosa trata con variables observadas más que medidas. En modelización de sistemas, esto significa que los usuarios pueden evaluar indirectamente más variables que con un PID convencional. Permite contemplar situaciones excepcionales del estado del proceso, gracias a su forma de representar el conocimiento.
- Es un método rápido y efectivo de control en muchos sistemas. Además, la salida de un controlador borroso es suave y continua, ideal para controlar variables continuas y evitar cambios bruscos en el control. Resulta posible alcanzar con facilidad las especificaciones de tiempo y transitorio fijadas, y obtienen resultados comparables en precisión a los controladores analíticos.
- En control convencional, el esfuerzo de sintonía se realiza tanto en modificar el modelo del proceso como el controlador, mientras que en este modo de simulación del comportamiento del operador, el control es directo sobre el modelo del operador.
- El controlador borroso es poco sensible a cambios de los parámetros del sistema a controlar, por su no linealidad inherente. Presenta además un alto rechazo al ruido, sobre todo de alta frecuencia, debido al gran número de reglas y al efecto de promedio que realizan. Son más tolerantes a fallos en los sensores, y consiguen un buen control sobre un amplio rango de condiciones iniciales.
- Se considera un control disperso, ya que permite la coexistencia de controladores con lógicas distintas y su ejecución en paralelo.

También las ventajas de la lógica borrosa son en parte sus desventajas. Porque es un estimador no basado en modelo, es difícil desarrollar un método que pueda probar su estabilidad. Pero, a pesar de eso, la lógica borrosa puede resultar ventajosamente comparada con otras aproximaciones de control inteligente, y el control PID puede ser utilizado en conjunción con sistemas de control borroso para asegurar su estabilidad.

- Resulta imprescindible la presencia de un experto que suministre el conocimiento necesario para representar su funcionamiento. Esta fuente de información no siempre cubre las expectativas requeridas para el completo desarrollo del controlador. Es difícil representar perfectamente el conocimiento del experto y traducirlo correctamente en términos de reglas lingüísticas sin empobrecerlo y degradar la actuación real. El diseñador debe conocer a fondo la operación de la planta, para después especificar la estrategia de control en forma de reglas.



- Dado el carácter no lineal de estos controladores, una modificación de sus parámetros hace que puedan presentarse situaciones nuevas (puntos de equilibrio inestable, saturaciones, etc.), y obliga a una revisión de todo el conjunto de reglas para detectar la aparición de nuevas inconsistencias o tendencias hacia la inestabilidad.
- Es prácticamente inexistente una metodología completamente desarrollada que nos indique los pasos a seguir para el diseño del sistema de control borroso, aunque hay numerosos estudios proponiendo distintos métodos. Así como en los controladores analíticos se utiliza un criterio de comportamiento para diseñar el controlador, no hay un modo directo de utilizar un criterio de comportamiento para el control borroso. Tiene que ser construido y probado para determinar posteriormente su funcionamiento.
- Otro de los problemas fundamentales, desde el punto de vista práctico, que se plantean a este tipo de controladores es que no existen procedimientos sistemáticos que permitan calibrar el regulador. El método normalmente utilizado consiste en emplear técnicas directas de prueba y error en una fase previa de presintonía del controlador borroso al proceso, que suele ser generalmente costosa en tiempo.
- Además, un sistema de control borroso tiene un elevado número de parámetros, algunos de ellos redundantes, que están fuertemente interrelacionados. Esta sobreparametrización, aunque permite ampliar el rango de aplicación de los controladores y mejorar su funcionamiento, dificulta enormemente su sintonía.

#### **1.4 CONCLUSIONES**

*La Lógica Borrosa proporciona una metodología que permite diseñar, de forma sencilla, controladores no lineales, lo que amplía enormemente el campo de aplicación de los controladores basados en esta técnica a problemas hasta ahora no abordados por sus características de no linealidad, complejidad o falta de información.*

*Además, abre una vía directa de acercamiento entre los operarios o expertos de control de procesos y el elemento de control, que incorpora de una forma natural el conocimiento de éstos.*

Su desarrollo teórico aparece como extensión natural de otro tipo de lógicas, clásicas y no clásicas, ante la necesidad de trabajar con la información imprecisa que maneja el lenguaje natural. Si bien entronca con la lógica tradicional, se exponen en este trabajo algunas ventajas y diferencias respecto a ésta.

Son muy variadas las aplicaciones de la lógica borrosa. En el área del Control de Procesos está desempeñando un papel significativo, por lo que se resumen algunas de las contribuciones más relevantes en este sentido. Se muestra la conveniencia de aplicar técnicas avanzadas de control, entre las que se incluyen los sistemas expertos, y dentro de este contexto los **Controladores Borrosos**, ante las características de algunos procesos difícilmente controlados por técnicas tradicionales. La lógica borrosa puede darse conjuntamente con otras formas de control. *Se trata de utilizarla donde éstas no llegan, o incluso para mejorar y añadir potencialidades a los métodos tradicionales, o apoyarse en ellos.*

Las características del control que proporcionan estos controladores los perfila como una herramienta de control de probada eficacia, si bien presentan también algunas desventajas que son objeto de actuales investigaciones.

## CAPÍTULO 2

# ***FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA BORROSA***

### ***2.1 INTRODUCCIÓN***

Para el estudio de los Controladores Basados en la Lógica Borrosa CB (*Fuzzy Logic Controllers*), es necesario establecer unos presupuestos lógicos y matemáticos que permitan su desarrollo.

El objetivo de este capítulo es proporcionar una introducción a los conceptos y nociones fundamentales de la *Teoría de conjuntos borrosos*. Se presenta, en primer lugar, la idea de *conjunto borroso* introducida por Zadeh en su primeras contribuciones [Zad 65], resaltando sus propiedades, que en algunos casos se contraponen a la teoría clásica de conjuntos, para poner de manifiesto sus características.

Aparece la noción de *pertenencia parcial* de un objeto a una categoría dada. Los conjuntos borrosos son desarrollados en esta línea. A partir de las conectivas de la lógica bivalente, se revisan las *operaciones* sobre los conjuntos borrosos, realzando la diversidad significativa de sus definiciones. Se resumen las diferencias formales entre los conjuntos borrosos y los conjuntos tradicionales.

Se exponen también otros conceptos básicos para este estudio [Ara 93], [Ped 93]: las *relaciones borrosas* y sus propiedades esenciales, especificando como más significativa la composición de relaciones. Se comentan algunos aspectos de la *semántica* de las *sentencias borrosas* [Zad 73b]. Al tratar el *razonamiento aproximado*, se abre una vía al proceso de inferencia empleado por este tipo de controladores.

Se ha hecho especial hincapié en los conceptos que tienen una relación más directa con su aplicación al Control, procurando no oscurecerlos con complejas notaciones, ni ampliarlos innecesariamente. Queda así establecida una base sobre la que caracterizar los distintos elementos y el funcionamiento de un Controlador Borroso.

## 2.2 FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA BORROSA

La lógica borrosa parte de la reconstrucción del mismo pilar básico de las matemáticas: el concepto de conjunto. En la realidad se presentan situaciones, particularmente cuando intervienen consideraciones subjetivas, en las que resulta difícil determinar la pertenencia o no de un elemento a un conjunto. Por ejemplo:

- números naturales mucho mayores que 100,
- ríos largos,
- personas jóvenes,
- días soleados,
- párrafos difíciles, etc.

Tales conjuntos pueden recibir el calificativo de *borrosos* para indicar que no existe un criterio que determine exactamente un límite entre la pertenencia y no pertenencia al conjunto, como establece la teoría clásica. En sentido amplio, constituyen una clase cuyos bordes están definidos de forma vaga. *La transición entre la pertenencia y no pertenencia no es abrupta, sino gradual.*

No siempre es posible reducir completamente la vaguedad estableciendo un criterio de pertenencia, ni por acotación del universo de discurso; por ejemplo, para el primer caso de números naturales mucho mayores que 100, se podría establecer un límite de separabilidad en torno al 10.000, pero delimitarlo a números entre el 1 y el 100.000 ó entre 1 y 1.000.000 no reduce completamente la vaguedad (la pertenencia de cualquier elemento a ese conjunto sigue siendo vaga).

En otros casos, esa frontera estricta de pertenencia, que además es arbitraria y puede suponer pérdida de información, no se puede delimitar, como ocurre con el calificativo de dificultad.

Hay que reformular entonces el concepto básico de conjunto [Fer 87], admitiendo grados de pertenencia de los elementos a los conjuntos.

### 2.2.1 Conjuntos borrosos

En la teoría clásica de conjuntos, dado un elemento genérico  $x$  de un universo  $U$ , y un subconjunto ordinario (no borroso)  $A \subset U$ , sólo hay dos posibilidades:  $x \in A$  ó  $x \notin A$ .

Todo conjunto está perfectamente descrito por su llamada *función característica* o *función de pertenencia*. Puede definirse esta *función de pertenencia*  $\mu_A: U \rightarrow \{0,1\}$ , que representa al conjunto, tal que:

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ \mu_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.1a)$$

Sin embargo, como no siempre es posible hacer esta clara distinción entre los elementos que pertenecen y los que no pertenecen a un conjunto, el concepto de función de pertenencia puede generalizarse de manera que su valor varíe de forma continua en un intervalo, admitiendo la posibilidad de *pertenencia parcial* de un elemento a un conjunto. Cuanto mayor sea el valor de la función de pertenencia, mayor será el grado de pertenencia del elemento al conjunto en cuestión. No tiene un sentido probabilístico, sino más bien representa un grado de compatibilidad con un cierto predicado o un grado de posibilidad de que éste sea cierto. Es una función de distribución de posibilidades que intenta cuantificar la imprecisión.

La *función de pertenencia generalizada*  $\mu_A(x)$  toma sus valores en un conjunto  $L$ , llamado conjunto de pertenencia, y asocia a cada elemento  $x$  de  $U$  un número en ese conjunto,

$$\mu_A: U \rightarrow L \quad (2.1b)$$

Los elementos de  $L$  no tienen que ser necesariamente números; cualquier conjunto total o al menos parcialmente ordenado sería igualmente válido. El orden entre los elementos del conjunto está representado por los distintos grados de pertenencia que representan. En general,  $L$  es un retículo; los conjuntos borrosos definidos por esta función de pertenencia generalizada se conocen como *conjuntos borrosos de tipo  $L$* .

Ordinariamente se toma  $L = [0,1]$ , ya que el rango de valores reales entre 0 y 1 es el más comúnmente utilizado para representar valores de pertenencia.

**Definición:** Dado un *universo de discurso*  $U = \{x\}$  definido como un espacio de objetos (en el sentido clásico), un *subconjunto borroso*  $A$  de  $U$  es un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico  $x$  y su grado de pertenencia al conjunto:

$$A = \{(x | \mu_A(x)), \quad \forall x \in U\} \quad (2.2a)$$

Si  $U$  es un universo continuo, puede utilizarse la notación abreviada,

$$A = \int_U \mu_A(x) | x, \quad (2.2b)$$

y si  $U$  es discreto y finito,

$$A = \mu_A(x_1) | x_1 + \mu_A(x_2) | x_2 + \dots + \mu_A(x_n) | x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) | x_i \quad (2.2c)$$

La función de pertenencia puede definirse de forma numérica, mediante un vector (para universos discretos y finitos), o de forma funcional.

- a) **Definición numérica:** la función de pertenencia de un conjunto borroso es representada por un vector de números cuya dimensión depende del grado de discretización del universo de discurso. Es un vector formado por los grados de pertenencia al término lingüístico de cada uno de los puntos del universo discreto y finito,

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) | x_i, \quad \forall x \in \text{sop}(A) \quad (2.3a)$$

donde  $n$  es el número de valores del universo de discurso.

- b) *Definición funcional*: expresa la función de pertenencia de un conjunto borroso como una función, típicamente con forma de campana, triangular, trapezoidal, etc. Se utilizan en control borroso porque permiten su manipulación a través de la aritmética borrosa. La definición funcional puede adaptarse a cambios de algún parámetro. Por ejemplo,

$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{-(x - \mu_A(x))^2}{2\sigma_A^2}\right) \quad (2.3b)$$

La representación gráfica de una función de pertenencia es otra forma de representar los conjuntos borrosos, que resulta muy útil para compararlos y operar con ellos.

Para  $L = \{0,1\}$ ,  $A$  se reduce a un conjunto ordinario, de manera que la teoría clásica de conjuntos es un caso particular de la teoría de conjuntos borrosos, en los que la función de pertenencia toma exclusivamente valores 0 ó 1. Un conjunto borroso puede ser visto como la extensión o generalización del concepto de conjunto ordinario, ya que las funciones de pertenencia de éstos últimos sólo admiten pertenencia total o nula, mientras que los conjuntos borrosos admiten también pertenencia parcial.

*Ejemplos*: tomando como universo de discurso el conjunto de edades posibles de un ser humano,  $U = \{x \mid x \in [0,150]\}$ , pueden definirse de forma subjetiva los subconjuntos borrosos  $J$  (joven) y  $V$  (viejo) así (Figura 2.1):

$$J = \{(x \mid 1), 0 \leq x \leq 40; (x \mid (1 + (x - 40)^2 / 40)^{-1}), x > 40\}$$

$$V = \{(x \mid 0), 0 \leq x \leq 40; (x \mid (1 + 40 / (x - 40)^2)^{-1}), x > 40\}$$

o para un universo discreto y finito, por ejemplo  $U = \{\text{meses del año}\}$ , se pueden definir los subconjuntos borrosos  $F$  (frío) y  $C$  (calor) como (Tabla 2.1):

$$F = 1 \mid \text{enero} + 1 \mid \text{febrero} + 0.8 \mid \text{marzo} + 0.7 \mid \text{abril} + 0.5 \mid \text{mayo} + \dots$$

$$C = 0 \mid \text{enero} + 0 \mid \text{febrero} + 0.4 \mid \text{marzo} + 0.6 \mid \text{abril} + 0.6 \mid \text{mayo} + \dots$$

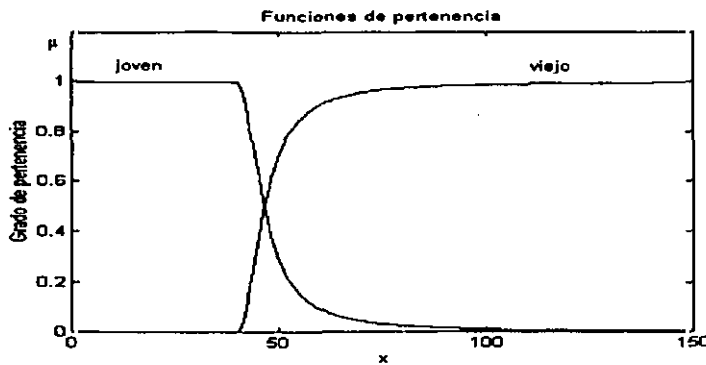


Figura 2.1 - Representación gráfica de los conjuntos borrosos J (joven) y V (viejo)

U	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sept	Oct.	Nov.	Dic.
Frío	1	1	0.8	0.7	0.5	0.4	0.2	0	0.3	0.5	0.8	1
Calor	0	0	0.4	0.6	0.6	0.8	1	1	0.7	0.4	0.1	0

Tabla 2.1 - Representación de los conjuntos borrosos F (frío) y C (calor)

Se han asignado unos valores semánticos a los conjuntos borrosos anteriores (joven, viejo, frío, ...) con lo que se les designa, que corresponden a sus *etiquetas lingüísticas*.

Definir una función de pertenencia con una expresión analítica no resta imprecisión a la información que representa, sino que facilita el operar con esos términos cuantitativos en vez de los lingüísticos. La imprecisión está incorporada en el conocimiento.

Se definen a continuación algunos conceptos que conviene tener presente para su posterior aplicación; otros términos de la lógica borrosa que no son empleados en este contexto de control pueden consultarse en la bibliografía [Ara 93], [Fer 87], [Ped 93].

- *Soporte de un conjunto borroso A*: es el conjunto (en sentido clásico) que contiene a todos los elementos  $x$  de  $U$  con función de pertenencia distinta de cero.

$$\text{sop}(A) = \{ x \mid \mu_A(x) > 0, \quad x \in U \} \tag{2.4}$$

En particular, el elemento  $x$  de  $U$  cuya  $\mu_A(x) = 0.5$  se suele llamar *punto de cruce* ("crossover").



- *Altura de un conjunto borroso A*: es el máximo valor que toma su función de pertenencia.

$$h(A) = \text{máx} (\mu_A(x)), \quad x \in U \quad (2.5)$$

- *Conjunto borroso normalizado*: un conjunto borroso está normalizado cuando al menos uno de sus elementos toma el máximo valor posible de la función de pertenencia, o lo que es lo mismo,  $h(A) = 1$ ,

$$\exists x \in U \mid \mu_A(x) = 1 \quad (2.6)$$

- *Corte- $\alpha$  de un conjunto borroso A*: es el conjunto representado como  $A_\alpha$ , que contiene todos los elementos  $x \in U$  que tienen un grado de pertenencia mayor o igual que cierto valor umbral  $\alpha$  especificado,

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, \quad x \in U\} \quad (2.7a)$$

Este umbral se denomina  $\alpha$ -corte, y puede estar definido en los intervalos:

$$\alpha \in [0,1) \quad \alpha\text{-corte débil}$$

$$\alpha \in (0,1] \quad \alpha\text{-corte fuerte}$$

Por el *Principio de Resolución*, un conjunto borroso A se puede descomponer en  $\alpha$ -cortes, y expresarlo como la unión de todos ellos.

$$A = \cup \alpha_i \cdot A_{\alpha_i} \quad (2.7b)$$

$$\mu_A(x) = \sup (\alpha_i \cdot \mu_{A_{\alpha_i}}(x)) \quad (2.7c)$$

- *Conjunto borroso unitario ("singleton")*: es un conjunto borroso cuyo soporte tiene un único elemento. Si A es un conjunto borroso y  $x_0$  el único elemento de su soporte, entonces  $\mu_A(x) = 0 \forall x \in U$ , excepto  $x = x_0$ ,  $\mu_A(x_0) = 1$ , y se representa:

$$A = \mu \mid x_0 \quad (2.8)$$

- *Número borroso*: es un conjunto borroso convexo y normalizado, definido sobre un universo continuo real  $\mathfrak{R}$ ,

$$\text{máx } (\mu_A(x)) = 1, \quad \forall x \in U \quad (\text{normalizado}) \quad (2.9a)$$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \text{mín } (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad (\text{convexo}) \quad (2.9b)$$

$$\forall x_1, x_2 \in U, \lambda \in [0, 1]$$

$$A = \int_{U \subset \mathfrak{R}} \mu_A(x) | x, \text{ con } A \text{ convexo y } h(A) = 1 \quad (2.9c)$$

Para normalizar un conjunto borroso se divide su función de pertenencia por el valor de su altura, para cada punto del universo de discurso.

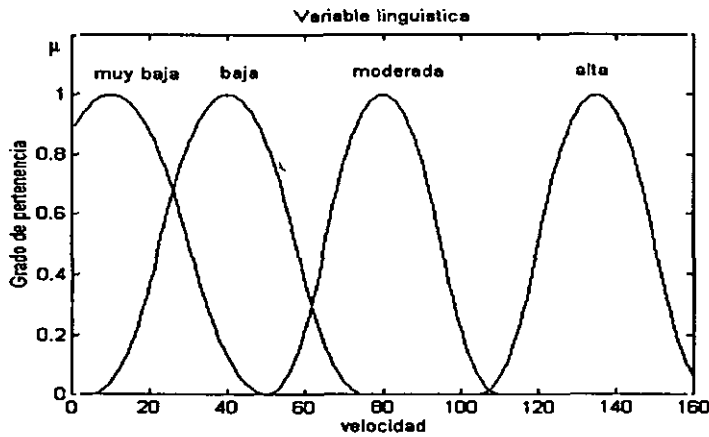
- *Cardinal de un conjunto borroso A* definido sobre un universo finito U es la suma de todos los grados de pertenencia de los elementos del universo, y se expresa de la forma:

$$\text{card}(A) = \sum \mu_A(x), \quad \forall x \in U \quad (2.10)$$

- *Variable lingüística [Zad 75]*: es una variable cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial reducido.

Una variable lingüística está caracterizada por una quintupla  $(x, A(x), U, G, M)$  donde  $x$  es el nombre de la variable,  $A(x)$  es el conjunto de términos lingüísticos de  $x$ , es decir, el conjunto de valores lingüísticos de  $x$ , donde cada valor es un número borroso definido sobre U; G es una regla sintáctica para generar las sentencias correctas en A; y M es una regla semántica que permite asociar a cada valor su significado,  $M(x)$ , dado por un subconjunto borroso de U, de los términos de A.

*Ejemplo:* Si  $x$  es la variable lingüística *velocidad*, que puede tomar los valores  $A(\text{velocidad}) = \{\text{muy baja, baja, moderada, alta, muy alta, más o menos alta, ..., etc.}\}$ , cada término de  $A(\text{velocidad})$  está caracterizado por un conjunto borroso definido en el universo de discurso de la variable  $U = [0, 160]$ . Podrían ser los de la Figura 2.2.

Figura 2.2 - Representación de la variable lingüística *velocidad*

### 2.2.1.1 Operaciones

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos definidos sobre el mismo universo de discurso  $U$ , siendo  $\mu_A$  y  $\mu_B$  sus respectivas funciones de pertenencia, definidas sobre  $L = [0,1]$ . Y sea otro subconjunto borroso  $C = \{(x | \mu_C(x))\}$ .

**Definición:** Se definen las siguientes operaciones (Figura 2.3):

$$\text{Complementación: } A = \bar{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.11a)$$

$$\text{Intersección: } C = A \cap B \text{ si } \mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \forall x \in U \quad (2.11b)$$

$$\text{Unión: } C = A \cup B \text{ si } \mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \forall x \in U \quad (2.11c)$$

Pueden equipararse a la interpretación de los operadores lógicos “not”, “and” y “or” respectivamente.

Otras operaciones adicionales, cuyo resultado no es un conjunto borroso, son, entre otras:

$$\text{Producto: } C = A \cdot B \text{ si } \mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.11d)$$

$$\text{Potenciación: } C = A^B \text{ si } \mu_C(x) = \mu_A^B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.11e)$$

Se puede comprobar que las tres primeras incluyen, como casos particulares, a las definiciones clásicas en conjuntos ordinarios para  $L = \{0,1\}$ . Asimismo, todas las propiedades de estas operaciones en los conjuntos ordinarios (asociatividad, distributividad, etc.) se siguen cumpliendo, excepto dos muy importantes:

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset \quad (\text{no verifica el Principio de contradicción clásico})$$

$$A \cup \bar{A} \neq U \quad (\text{no verifica la Ley del tercio excluso clásica})$$

donde el conjunto borroso vacío  $\emptyset$  es aquel subconjunto borroso tal que:

$$\mu_{\emptyset}(x) = 0, \quad \forall x \in U \quad (2.12)$$

aunque sí se verifica la Ley de la doble negación:  $\overline{\bar{A}} = A$ , y las Leyes de Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Con las definiciones utilizadas para las operaciones, al no cumplir algunas de las propiedades de la lógica clásica, la lógica borrosa no será ni completa ni consistente, y los conjuntos borrosos con las operaciones básicas anteriormente definidas no pueden formar un álgebra de Boole.

Las funciones unión, intersección y complemento estándar definidas anteriormente (2.11), que corresponden a las propuestas por Zadeh, no son las únicas posibles generalizaciones de las operaciones homónimas entre conjuntos clásicos. Se pueden adoptar otras caracterizaciones, siempre y cuando verifiquen una serie de propiedades. Tanto la unión como la intersección borrosa requieren funciones no decrecientes, de forma que al aumentar uno de los conjuntos también aumente su unión e intersección; también deben ser conmutativas y distributivas, y deben ser continuas para asegurar que pequeños cambios en los conjuntos den lugar a cambios también pequeños en la unión o intersección. La diferencia entre ambas operaciones está en las condiciones en los límites, que deben admitir las operaciones entre conjuntos ordinarios como un caso particular.

Las funciones que verifican las propiedades citadas son las que corresponden a la clase de *conormas triangulares* (*t-conormas* o *s-normas*) para la unión, y a la de *normas triangulares* (*t-normas*) para la intersección, que se exponen en el Apéndice A [Ped 93].

La función clásica máximo es la más restrictiva de las funciones para la unión, aunque se emplean también la suma algebraica o la suma acotada; y la función clásica mínimo es la menos restrictiva de las funciones para la intersección, frente al producto o a la diferencia acotada.

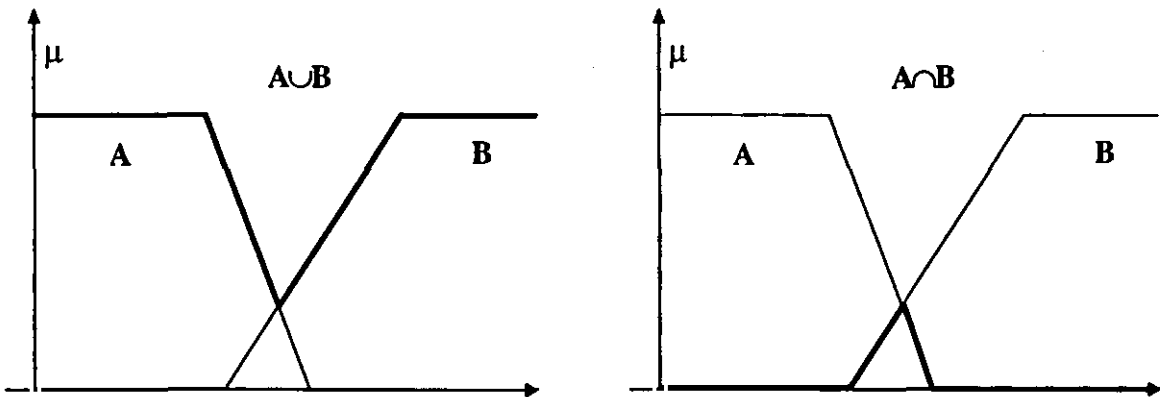
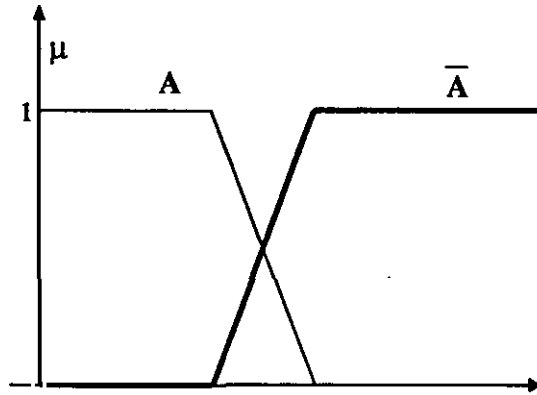


Figura 2.3 - Complemento (a), unión (b) e intersección (c) de conjuntos borrosos

### Operadores de modificación

Tienen gran importancia en el tratamiento de las variables lingüísticas. Corresponden a los modificadores lingüísticos —adverbios— que se utilizan con frecuencia en el lenguaje natural para especificar, junto con el predicado, una propiedad más concreta. Se modelan en la teoría de conjuntos borrosos mediante operaciones sobre la función de pertenencia asociada al predicado que se está modificando.

Entre las operaciones propuestas con este fin destacan las de *negación*, *concentración*, *dilatación* e *intensificación* (Figura 2.4).

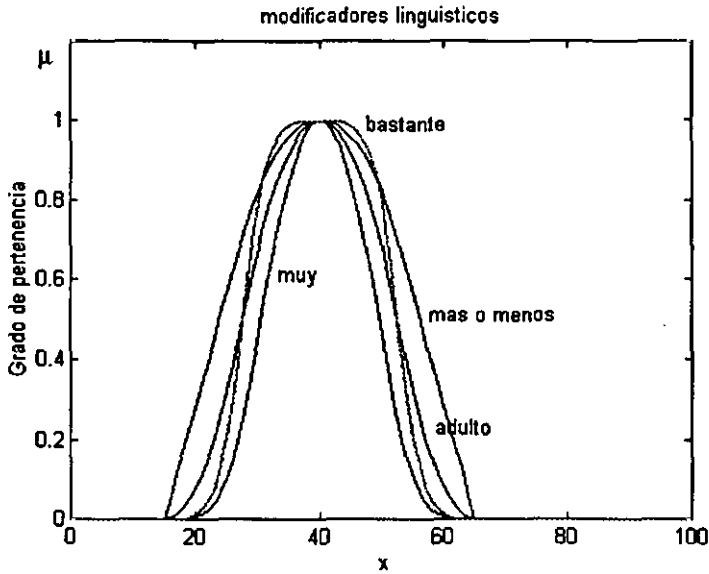


Figura 2.4 - Interpretación de algunos modificadores lingüísticos del conjunto borroso adulto

- *Operador negación* (NEG): es una operación unaria de resultado el complemento; es típico del término “no”.

$$\mu_{\text{NEG}}(x) = 1 - \mu(x) \quad (2.13a)$$

- *Operador concentración* (CON): es una operación unaria que, aplicada a un conjunto borroso A, resulta un subconjunto borroso de A tal que la reducción en los grados más altos de la función de pertenencia es mucho menor que la reducción en los grados más bajos de la función de pertenencia: el conjunto borroso se “concentra”. Correspondería al adverbio “muy”. Un operador común de concentración se define como:

$$\mu_{\text{CON}}(x) = \mu^2(x) \quad (2.13b)$$

- *Operador dilatación* (DIL): es una operación unaria de resultado opuesto al anterior; admite distintas caracterizaciones:

$$\mu_{\text{DIL}}(x) = \mu^{1/2}(x), \quad \text{ó} \quad \mu_{\text{DIL}}(x) = 2\mu(x) - \mu^2(x) \quad (2.13c)$$

Se le asocian los términos “algo” o “más o menos”.

- *Operador intensificación* (INT): es una operación unaria, que se suele utilizar en combinación con alguna otra operación para hacer más selectiva una propiedad, correspondiendo al adverbio “bastante”:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{INT}}(x) &= 2\mu^2(x), & \text{si } 0 \leq \mu(x) \leq 0.5 \\ &= 1 - 2(1 - \mu(x))^2, & \text{si } \mu(x) > 0.5 \end{aligned} \quad (2.13d)$$

## 2.2.2 Relaciones borrosas

Una relación clásica representa la presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre los elementos de dos o más conjuntos. Este concepto se puede generalizar asignando a cada grupo de elementos un número comprendido entre 0 y 1, que represente el grado de pertenencia a la relación, en este caso borrosa, de la misma forma que se hacía en los conjuntos borrosos. De esta forma, la relación borrosa incluirá como un caso particular a la relación clásica.

### 2.2.2.1 Relaciones ordinarias entre conjuntos borrosos

Se establecen las relaciones de *equivalencia* e *inclusión* entre subconjuntos borrosos de un universo (no borroso)  $U$ . Se trata, por tanto, de relaciones definidas sobre el conjunto de las partes (borrosas) de  $U$ ,  $P(U)$ .

**Definición:** Se definen las relaciones de *equivalencia* (A es igual a B) e *inclusión* (A está contenido en B, ó A es un subconjunto de B) entre dos subconjuntos borrosos A y B, con funciones de pertenencia  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  respectivamente, definidos sobre el mismo universo de discurso  $U$ , del siguiente modo:

$$\text{Igualdad: } A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.14a)$$

$$\text{Inclusión: } A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.14b)$$

Ahora bien, aunque las partes o subconjuntos sean borrosos, las relaciones  $R$  así definidas no son borrosas: dados dos subconjuntos borrosos  $A, B \subset U$ , o bien  $(A, B) \in R$ , o bien  $(A, B) \notin R$ ; concretamente, para las relaciones  $R$  de igualdad e inclusión definidas, o bien  $A = B$ , o bien  $A \neq B$ , y del mismo modo, o bien  $A \subset B$  o bien  $A \not\subset B$ .

### 2.2.2.2 Relaciones borrosas entre conjuntos ordinarios

**Definición:** Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos ordinarios, que en general tienen universos de discurso diferentes  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ , y sean  $x \in A$  e  $y \in B$  elementos genéricos de cada uno. Una *relación borrosa* entre  $A$  y  $B$  se define como un conjunto de pares ordenados  $(x,y)$ , cada uno con un determinado grado de pertenencia,  $\mu_R$ , a la relación  $R$ :

$$R = \{(x,y) \mid \mu_R(x,y), \quad x \in U, y \in V, 0 \leq \mu_R \leq 1\} \quad (2.15a)$$

$\mu_R$  indica así en qué grado o con qué intensidad los elementos  $x$ ,  $y$  están en la relación  $R$ .

Las relaciones así definidas son binarias; en este caso, la relación binaria borrosa se suele escribir también  $A R B$ . La relación  $R$  es realmente un subconjunto borroso del producto cartesiano de  $A$  y  $B$ ,

$$R \subset A \times B$$

En efecto, como  $A$  y  $B$  son conjuntos ordinarios, su producto cartesiano definido como  $A \times B$  consta de todos los pares ordenados  $(x,y)$ , y la relación borrosa le asocia un grado de pertenencia a cada uno.

La generalización a órdenes superiores (relaciones entre más de dos conjuntos) es inmediata. Una *relación borrosa  $n$ -aria* entre  $n$  conjuntos ordinarios,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  —no tienen por qué ser todos distintos— pertenecientes a los universos  $U_1, \dots, U_n$ , discretos o continuos, es un subconjunto borroso del producto cartesiano de todos ellos. Queda definida por una función de pertenencia que asigna a cada  $n$ -tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del producto cartesiano un grado de pertenencia a la relación  $R$ .

$$R \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$R = R_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\} \quad (2.15b)$$

o en forma matricial, mediante una matriz de pertenencia  $n$ -dimensional, cuyas entradas corresponden a las  $n$ -tuplas en el conjunto universal, y sus valores son el grado de pertenencia de la  $n$ -tupla correspondiente a la relación.



2.2.2.3 Relaciones borrosas entre conjuntos borrosos

Definición: Sean  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ , subconjuntos borrosos de universos  $U$  y  $V$  diferentes. Se define el *producto cartesiano*  $A \times B$  como el conjunto borroso de  $U \times V$ :

$$A \times B \equiv \{(x,y) \mid \text{mín} (\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in U, \forall y \in V\} \quad (2.16a)$$

Es decir, es el conjunto borroso obtenido asignando a cada pareja formada por un elemento de  $U$  y otro de  $V$ , el menor de sus grados de pertenencia al conjunto  $A$  y al conjunto  $B$  respectivamente. La operación es similar a como se ha definido la intersección, salvo que, como los universos son diferentes, el conjunto borroso resultante está formado por parejas. Si bien la expresión anterior del producto cartesiano (2.16a), propuesta por Mamdani, es la más utilizada, otra definición usual resulta de reemplazar la operación mínimo por el producto algebraico (Larsen, 2.16b), o por cualquier otra t-norma, como la utilizada por Zadeh (2.16c).

$$A \times B \equiv \{(x,y) \mid (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)), \forall x \in U, \forall y \in V\} \quad (2.16b)$$

$$A \times B \equiv \{(x,y) \mid \text{máx} [\text{mín} (\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x)], \forall x \in U, \forall y \in V\} \quad (2.16c)$$

Definición: Una *relación borrosa* entre dos conjuntos será cualquier subconjunto de su producto cartesiano  $A \times B$ .

$$A R B \subset A \times B$$

Como todo subconjunto debe satisfacer la relación de inclusión, el grado de pertenencia de cada par  $(x,y)$  a tal subconjunto debe ser por lo tanto igual o inferior a  $[\text{mín} (\mu_A(x), \mu_B(y))]$ .

La generalización al caso  $n$ -ario es también inmediata. Dados los subconjuntos borrosos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de universos  $U_1, \dots, U_n$ , se define el producto cartesiano de ellos  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  como un conjunto borroso en el espacio producto  $U_1 \times \dots \times U_n$ , que para cada una de las definiciones del producto cartesiano es:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \text{mín} (\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))\} \quad (2.17a)$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (\mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n}(x_n))\} \quad (2.17b)$$

#### 2.2.2.4 Composición de relaciones

Debido al carácter de conjunto borroso de las relaciones borrosas, las operaciones típicas de conjuntos borrosos (unión, intersección, complementación, etc.) se pueden aplicar a las relaciones borrosas, sin ninguna modificación respecto a sus definiciones.

La operación propia de las relaciones borrosas se denomina *composición*. En general, la *composición de relaciones* puede ser expresada como una composición “máx-\*”, donde “\*” es cualquier operador de la clase de las normas triangulares; los más usuales son el mínimo, producto algebraico, producto drástico o producto acotado. El operador es elegido según la aplicación específica. En aplicaciones a control se utilizan los dos primeros más frecuentemente por ventajas computacionales.

**Definición:** Dados tres conjuntos borrosos A, B, y C de universos U, V, y Z, una relación binaria  $R_1$  entre A y B:

$$R_1(A,B) = A R_1 B = \{(x,y) \mid \mu_{R_1}(x,y)\}$$

y otra relación binaria  $R_2$  entre B y C:

$$R_2(B,C) = B R_2 C = \{(y,z) \mid \mu_{R_2}(y,z)\}$$

se define la *relación binaria compuesta* R de  $R_1$  y  $R_2$ , denotada por  $R = R_1 \circ R_2$ , como una relación borrosa que asigna a cada pareja  $(x,z)$  del producto cartesiano  $U \times Z$  el grado de relación que resulta de la siguiente operación:

$$R = R_1(A,B) \circ R_2(B,C) \tag{2.18}$$

$$R = \{(x,z) \mid \mu_R(x,z) = \mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \max_y (\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)), \forall x \in U, y \in V, z \in Z\}$$

El caso más habitual, donde el operador “\*” se define como el mínimo, se denomina *producto máx-mín*,

$$R(A,C) = A (R_1 \circ R_2) C = \{(x,z) \mid \max_y [\min (\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z))]\} \tag{2.19}$$

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son finitos,  $R_1$  y  $R_2$  pueden escribirse en forma matricial, y comprobar que la matriz correspondiente a  $R_1 \circ R_2$  se calcula como el “producto máx-mín” de las matrices  $R_1$  y  $R_2$ . El producto máx-mín de dos matrices es el producto ordinario de matrices, pero sustituyendo la operación suma por la operación máximo y el producto por el mínimo.

Un caso particular de la composición de relaciones, utilizado en la *inferencia borrosa* y empleado también en la *lógica de relaciones*, tiene lugar entre una relación y un conjunto borroso.

Dados los universos  $U$ ,  $V$ , un conjunto borroso  $A$  definido sobre el universo  $U$  y la relación binaria  $R$  entre elementos de los conjuntos  $B$  y  $C$  de universos  $U$  y  $V$  respectivamente, se define la *relación unaria compuesta*  $P$  sobre  $V$  del conjunto borroso  $A$  con la relación  $R$  como el siguiente conjunto borroso:

$$P = A \circ R (B,C) = \{y \mid \mu_{A \circ R}(y), \forall x \in U, y \in V, A \subset U, P \subset V\} \quad (2.20a)$$

$$\mu_{A \circ R}(y) = \max_x [\mu_A(x) * \mu_R(x,y)] \quad (2.20b)$$

Estas definiciones pueden parecer a primera vista arbitrarias, y hasta cierto punto lo son. No obstante, su elección se ha hecho teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- a) que sean consistentes con las definiciones paralelas de la teoría de conjuntos ordinarios; es decir, que ésta pueda considerarse como un caso particular de la teoría de conjuntos borrosos.
- b) que los modelos basado en la teoría reflejen razonablemente bien la realidad.
- c) que los cálculos que se derivan de la utilización de los modelos sean sencillos y, por lo tanto, se ejecuten con rapidez; en particular, las operaciones de selección de máximo o mínimo requieren mucho menos tiempo que las de suma o producto.

Se puede prescindir, a partir de ahora, de la notación en negrita para los elementos borrosos, suponiendo todos los conjuntos y relaciones borrosas si no se dice lo contrario (y, de todos modos, un conjunto ordinario es un caso particular de conjunto borroso, y una relación ordinaria lo es de una relación borrosa).

### 2.2.3 Sentencias borrosas: Sintaxis y Semántica

La lógica borrosa tiene el mismo aspecto *sintáctico* que la lógica de predicados. Es decir, como la forma de las sentencias de una y otra son las mismas, valen las mismas reglas de formación. Sin embargo, no constituye como ella un sistema axiomático, ya que no permite, a partir de unos axiomas, derivar otras sentencias válidas.

La *semántica* de la lógica borrosa se basa en el concepto de vaguedad formalizado en la teoría de conjuntos borrosos. Pretende interpretar las sentencias, para lo que se tiene que poder hallar su significado: es decir, calcular un subconjunto borroso que corresponde a la interpretación “verdadera” de tal sentencia.

Las sentencias se obtienen enlazando predicados, y normalmente manejan palabras cuyos significados son conjuntos borrosos de universos diferentes. La interpretación consiste en conocer la de cada una de las variables, para lo que hay que definir un conjunto de valores semánticos, con un mínimo de dos elementos.

El conjunto de valores semánticos en la lógica borrosa no es el conjunto de puntos en el intervalo  $[0,1]$ , sino un conjunto de subconjuntos borrosos de ese conjunto. Aunque tradicionalmente el conjunto de valores semánticos es de dos elementos ( $\{\text{verdadero, falso}\}$ ,  $\{1,0\}$ ), desde el punto de vista general no se impone ninguna restricción al número máximo de elementos, ni siquiera que sea finito.

Esos subconjuntos borrosos no son todos los posibles, y se denominan valores de verdad lingüísticos. Por ejemplo,

$V = \{\text{verdadero, falso, no verdadero, no falso, bastante verdadero, poco verdadero, muy verdadero, más o menos verdadero, más bien falso, etc.}\}$

En el caso de la lógica borrosa, la interpretación de una sentencia tendrá como resultado un grado de verdad dentro del intervalo  $[0,1]$ , pero a su vez este grado de verdad puede estar referido a una interpretación verdadera de la sentencia, o falsa, o muy verdadera o muy falsa ...

Para cada predicado, se definirá el subconjunto correspondiente a “verdadero” (por eso se dice que los valores de verdad en lógica borrosa son “locales”). Este subconjunto es

el significado del predicado. Definido este subconjunto, los correspondientes a los otros valores de verdad lingüísticos pueden calcularse en función de él definiendo previamente unos convenios para “falso” y para las partículas lingüísticas “muy”, “bastante”, etc., que se denominan modificadores.

### 2.2.3.1 Interpretación de la sentencia condicional

La interpretación en lógica borrosa está muy ligada al modelo de semántica del lenguaje natural, usando conjuntos borrosos. Es dependiente no sólo del predicado o predicados que la forman, sino también de los elementos (sujetos) a los que se aplica.

Una proposición o premisa en lógica borrosa es una aserción sobre el valor de una variable lingüística. En general, una premisa contiene una o más cláusulas, y cada cláusula es una proposición de la forma “atributo de objeto es valor”: “atributo de objeto” es una variable lingüística, y “valor” uno de sus posibles valores lingüísticos.

En este modelo semántico, el significado de una palabra se considera igual a un conjunto, perfecta o no perfectamente determinado, formado por elementos de un universo  $U$ . Este universo puede contener todos los posibles elementos (independientes del contexto) o sólo los elementos relacionados con el contexto.

Todo predicado monádico representa una propiedad. Se puede definir el significado de un predicado monádico como el conjunto borroso formado por todas las relaciones semánticas del predicado correspondiente con los elementos del universo.

Dado un predicado monádico al que se ha asociado un conjunto borroso  $A$ , que representa su significado, a la interpretación verdadera de una sentencia simple de la forma  $A(x)$ , donde  $x$  es un elemento del universo  $U$ , se le asigna el valor de verdad  $\mu_A(x)$ , es decir, el grado de pertenencia del elemento  $x$  al conjunto borroso  $A$ . La notación matemática que resume la interpretación de sentencias simples con predicados monádicos es:

$$I(A(x)) = \mu_A(x) = \alpha \quad (2.21)$$

donde  $\alpha$  es el *grado de verdad* de una sentencia, con valores comprendidos en el intervalo  $[0,1]$ .

Para poder interpretar una sentencia simple con un sujeto  $x$  que no pertenece al universo  $U$  sobre el que se ha definido el predicado, es necesario efectuar primero una correspondencia entre ese sujeto y algún elemento del universo de discurso. Es lo que se denomina paso a *forma canónica*.

Todo predicado  $n$ -ario representa una relación. Se puede definir el significado de un predicado  $n$ -ario como la relación borrosa formada por todas las relaciones semánticas del predicado correspondiente con las tuplas formadas por los elementos de los distintos universos. La notación matemática correspondiente a la interpretación de sentencias simples con predicados diádicos sería:

$$I(R(x,y)) = \mu_R(x,y) = \alpha \quad (2.22)$$

Como a cada predicado se le asocia un conjunto borroso o una relación borrosa, a la conjunción y a la disyunción de predicados se puede asociar también un conjunto borroso o una relación borrosa, obtenida por la operación entre los conjuntos borrosos y las relaciones borrosas asociados a cada predicado. Para las conectivas básicas disyunción y conjunción se utilizan los mismos símbolos que la lógica clásica.

Así como la interpretación de sentencias simples son grados de pertenencia a un conjunto borrosos o a una relación borrosa, la interpretación de sentencias compuestas se hará utilizando reglas básicas que se traducen en operaciones sobre funciones de pertenencia.

En el cálculo proposicional clásico, la proposición “si  $A$  entonces  $B$ ”, donde  $A$  y  $B$  son variables proposicionales, se escribe  $(A \rightarrow B)$ , y está definida como  $A \rightarrow B = \bar{A} \cup B$ . Una extensión de este concepto da lugar al concepto más general de *sentencia condicional borrosa*, donde ahora  $A$  y  $B$  son conjuntos borrosos, y el conectivo  $(\rightarrow)$  puede interpretarse como una relación borrosa entre las variables asociadas a  $A$  y  $B$ .

Existen diversas interpretaciones de la sentencia incondicional borrosa. Como interpretación más usual de  $A \rightarrow B$ , se puede tomar la de una relación borrosa entre las interpretaciones de  $A$  y  $B$ . En particular, como el propio producto cartesiano,

$$I(A(x) \rightarrow B(y)) = I(A) \times I(B) \quad (2.23a)$$

Pero a esta función de implicación  $A \rightarrow B$  se le han dado tantas definiciones como caracterizaciones del producto cartesiano entre conjuntos borrosos; las más conocidas se deben a Zadeh (2.16c), Mamdani (2.16a) y Larsen (2.16b), y entre ellas las dos últimas son las más utilizadas en el área de control.

En concreto, siempre que no se indique lo contrario, se utilizará como regla condicional la definición de Mamdani, que coincide con la interpretación de la conjunción considerando los predicados independientes.

$$I(A(x) \rightarrow B(y)) = \{(x,y) \mid \min(\mu_A(x), \mu_B(y))\}, \quad \forall x \in U, y \in V \quad (2.23b)$$

Otra interpretación de la sentencia incondicional  $A \rightarrow B$  es considerarla un caso particular de la *sentencia incondicional ampliada* “si A entonces B, si noA entonces C”, es decir, “ $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$ ”, donde C coincide con su universo.

$$I((A(x) \rightarrow B(y)) \vee \overline{(A(x) \rightarrow C(z))}) = (I(A(x)) \times I(B(y))) \cup \overline{(I(A(x)) \times I(C(z))}) \quad (2.23c)$$

Cuando A, B y C son sentencias ordinarias con interpretaciones binarias, el cálculo de proposiciones clásico permite interpretar la sentencia como verdadera o falsa. Pero cuando A, B y C son sentencias borrosas, cada una tendrá un significado, y se trata de calcular el significado de la sentencia global.

El resultado para la *regla condicional ampliada* se puede obtener aplicando alguna de las definiciones anteriores, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} \underline{I((A(x) \rightarrow B(y)) \wedge (\neg A(x) \rightarrow C(z)))} &= \max\left[ \underline{I(A(x) \rightarrow B(y)) \cup \overline{(I(A(x)) \rightarrow I(C(z))}} \right] = \\ &= \max\left[ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), \min(1 - \mu_A(x), \mu_C(z)) \right] \end{aligned}$$

$$\forall x \in U, y \in V, z \in V, A \subset U, B \subset V \quad (2.24)$$

Los modificadores “no”, “muy”, etc. también tienen su correspondiente regla de interpretación, que debe ser aplicada (sección 2.1.1).

### 2.2.3.2 Aproximación lingüística

Una vez interpretada una sentencia u obtenida una inferencia se tiene un subconjunto borroso de un cierto universo, pero lo que se debería obtener sería una sentencia. Es preciso asignar a cada subconjunto borroso una aproximación lingüística, que es otro subconjunto borroso que corresponde al significado de una sentencia.

Es un problema que todavía se encuentra sin resolver, aunque existen propuestas concretas para encontrar la expresión lingüística cuyo significado sea el del conjunto borroso inferido de un razonamiento previo. Esta dificultad no se presenta en la lógica clásica ya que la transcripción lingüística de una conclusión es inmediata.

### 2.2.4 Razonamiento borroso

La lógica borrosa proporciona también un mecanismo apropiado de inferencia [Sob 93]. Este mecanismo se basa en expresar las premisas y las conclusiones en forma canónica. La forma canónica es una representación para poner en evidencia que cada premisa o proposición es una restricción sobre una variable, y que la conclusión es una restricción calculada como propagación de restricciones. De esta forma, *el proceso de razonamiento borroso se reduce a la solución de un sistema no lineal de ecuaciones, y por lo tanto es programable en un computador.*

El mecanismo de inferencia utilizado en control borroso es generalmente más simple que los usados en un sistema típico de control experto. En controladores borrosos, el consecuente de una regla no es aplicado al antecedente de otra; es decir, *el mecanismo de inferencia de un controlador borroso utiliza habitualmente una estrategia de encadenamiento hacia adelante de un único nivel.* Existe alguna posibilidad de realizar encadenamiento de reglas mediante variables intermedias, para lo que las reglas deben definirse convenientemente ordenadas.

Existen diversas clasificaciones de las reglas de inferencia borrosas [Zad 92]; las reglas más elementales corresponden al *razonamiento categórico*, aquél en que las premisas no contienen cuantificadores borrosos. Otras pertenecen al *razonamiento disposicional*, donde una o más premisas pueden contener, explícita o implícitamente, el cuantificador borroso “normalmente”. Una disposición es una proposición predominantemente cierta, pero no siempre cierta. Otras reglas corresponden al



*razonamiento silogístico*, donde las premisas contienen cualquier cuantificador borroso. Y el *razonamiento cualitativo* permite modelar el problema mediante un conjunto de relaciones borrosas del tipo “si *condiciones* entonces *acciones*”. Es el que soporta la mayoría de las aplicaciones al control de procesos.

Aunque todas las reglas de inferencia borrosa constituyen la base del *Razonamiento Aproximado*, en lógica borrosa hay dos importantes reglas borrosas de inferencia de implicación, pertenecientes al razonamiento categórico, denominadas el “Modus Tollens Generalizado” (GMT) y el “Modus Ponens Generalizado” (GMP).

El GMT avala el siguiente razonamiento:

premisa 1:	y es B'
premisa 2:	si x es A entonces y es B
conclusión:	x es A'

donde A, A', B, B' son conjuntos borrosos asociados a los valores lingüísticos de las variables x e y, en lugar de conjuntos clásicos.

El GMP se formula:

premisa 1:	x es A'
premisa 2:	si x es A entonces y es B
conclusión:	y es B'

Cuando  $A = A'$  y  $B = B'$  el GMP se reduce al “Modus Ponens”, y el GMT se reduce al “Modus Tollens” para  $B' = \neg B$  y  $A' = \neg A$ . El GMP es cercano al encadenamiento hacia delante, y muy útil en control; el GMT es muy cercano al encadenamiento hacia atrás, usado sobre todo en sistemas expertos.

Una característica importante del GMP que no posee el “Modus Ponens” de la lógica bivalente es que el antecedente  $A(x)$  no tiene necesariamente que coincidir con la premisa  $A'(x)$ .

La deducción de conclusiones a partir de un conjunto de premisas se realiza aplicando las reglas de inferencia en lógica borrosa. El GMP se puede considerar como un caso particular de la regla de composición, siendo  $R = A \times B$  la relación borrosa generada por el condicional en el universo  $U \times V$ .

La conclusión  $B'$  se obtiene de la *Regla Composicional de Inferencia* (RCI) sugerida por Zadeh. Esta *Regla Composicional de Inferencia* se puede definir de la siguiente manera. Para el razonamiento anterior, aplicando el GMP, si  $R$  es una relación binaria borrosa entre las variables  $x$  e  $y$  de  $U$  y  $V$  respectivamente, y  $A'$  es un subconjunto borroso de  $U$ , el subconjunto borroso  $B'$  inducido en  $V$  por  $A'$  viene dado por la composición,

$$R = (A(x) \rightarrow B(y))$$

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \times B) \tag{2.25}$$

Tomando  $A'$  como una relación unaria y “ $\circ$ ” como la composición máx-\* definida antes (2.18), la conclusión se obtiene por la ecuación:

$$\mu_{A' \circ (A \times B)}(y) = \text{máx} [(\mu_{A'}(x) * \mu_{A \times B}(y))] \tag{2.26}$$

que según las distintas interpretaciones del producto cartesiano  $A \times B$  y de la composición de relaciones “\*” puede adoptar distintas expresiones.

#### 2.2.4.1 Mecanismos de Inferencia basados en la Regla Composicional de Inferencia

Aplicando la Regla Composicional de Inferencia RCI (2.26) a un conjunto de reglas  $R$  descrito por reglas de control de la forma:

$$R = \cup R_i$$

$$R_i: \text{si } x \text{ es } A_i \text{ y } y \text{ es } B_i \text{ entonces } z \text{ es } C_i$$

si los valores de las entradas para una regla son  $x = A'$ ,  $y = B'$ , la conclusión borrosa inducida  $C'$  se obtiene:

$$C' = (A', B') \circ R(A, B \rightarrow C)$$

$$C' = (A', B') \circ \cup R_i = (A', B') \circ \cup (A_i \text{ y } B_i \rightarrow C_i) \quad (2.27)$$

como las operaciones composición y unión son conmutativas [Lee 90a],

$$C' = \cup C_i' \quad (2.28)$$

donde la unión se interpreta como cualquier t-conorma (en este caso, se ha optado por adoptar el operador *máximo*). Definiendo “ $\circ$ ” como la composición *máx-\** (2.18), en términos de funciones de pertenencia se tiene,

$$\mu_{C'} = \text{máx} (\mu_{C_i'})$$

$$\mu_{C'} = \text{máx} [(A', B') * \mu_{R_i}] \quad (2.29)$$

Al aplicar el modo GMP a cada regla, se obtienen los coeficientes  $\alpha_i^A$  y  $\alpha_i^B$  para cada entrada. Si se interpreta la conectiva y (“and”) como el *mínimo*, la contribución final de cada regla será:

$$\alpha_i = \text{mín} (\alpha_i^A, \alpha_i^B) \quad (2.30a)$$

$$\alpha_i^A = \text{máx}_x (\mu_A * \mu_{A'}) \quad (2.30b)$$

$$\alpha_i^B = \text{máx}_y (\mu_B * \mu_{B'}) \quad (2.30c)$$

donde  $\alpha_i^A$  y  $\alpha_i^B$  se calculan según se interprete el operador \* de la composición.

Cuanto más se aproxime  $A'$  a  $A_i$ , mayor será el valor de  $\alpha_i^A$ , y cuanto más se acerque  $B'$  a  $B_i$  mayor será el valor de  $\alpha_i^B$ . Conceptualmente se puede interpretar que  $\alpha_i^A$  y  $\alpha_i^B$  son factores de peso que dan una medida de la contribución de cada regla al resultado final.

*Mecanismo de inferencia basado en la RCI máx-mín*

Aplicando la regla composicional de inferencia al conjunto de reglas de control para dos entradas  $x$ ,  $y$  con valores  $A'$ ,  $B'$ , definiendo “\*” como el operador mínimo, y utilizando la función de implicación de Mamdani [Mam 74], se verifica:

$$\mu_{C_i'} = \text{mín} (\alpha_i, C_i) = \text{mín} (\alpha_i, \mu_{C_i}) \quad (2.31a)$$

$$\alpha_i^A = \text{máx}_x [\text{mín} (\mu_{A_i'}(x), \mu_{A_i}(x))] \quad (2.31b)$$

$$\alpha_i^B = \text{máx}_y [\text{mín} (\mu_{B_i'}(y), \mu_{B_i}(y))] \quad (2.31c)$$

*Mecanismo de inferencia basado en la RCI máx-prod*

Aplicando al conjunto de reglas de control la regla composicional de inferencia máx-\*, al utilizar la función de implicación de Larsen [Lar 80] para cada regla de control se verifica,

$$\mu_{C_i'} = \alpha_i \cdot C_i = \alpha_i \cdot \mu_{C_i} \quad (2.32a)$$

$$\alpha_i^A = \text{máx}_x (\mu_{A_i'}(x) \cdot \mu_{A_i}(x)) \quad (2.32b)$$

$$\alpha_i^B = \text{máx}_y (\mu_{B_i'}(y) \cdot \mu_{B_i}(y)) \quad (2.32c)$$

Ambos mecanismos son de uso habitual en aplicaciones de la lógica borrosa al control y generan un razonamiento intuitivamente correcto, que además da lugar a algoritmos simples.

*Mecanismo de inferencia de Sugeno*

Este mecanismo de inferencia utiliza reglas definidas como,

$$R_i: \text{ si } x \text{ es } A_i \text{ y } y \text{ es } B_i \text{ entonces } z_i = f_i(x,y).$$

para dos entradas  $x$ ,  $y$ , con valores  $A'$  y  $B'$ ; la contribución de la  $i$ -ésima regla a la acción de control es  $\omega_i \cdot y_i$ , donde:

$$\omega_i = A_i(A') \cdot B_i(B'), \quad (2.33)$$

y la acción de control resultante de las  $n$  reglas se obtiene de un promedio ponderado de los  $z_i$ ,

$$C^o = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \quad (2.34)$$

Este mecanismo de inferencia fue utilizado por Sugeno en el control de la dirección de un coche [Sug 85]. En esta aplicación los consecuentes de las reglas se definieron como una combinación lineal de las variables de entrada. Hay que destacar que la acción de control que se genera con este algoritmo es un valor concreto, por lo que no es necesario un conversor de información borrosa a escalar en la fase final.

### 3 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha tratado de los *Fundamentos de la Lógica Borrosa*, con vistas a su aplicación al *Control de Procesos*.

Se han definido algunos de los conceptos básicos empleados en el razonamiento aproximado. Muchos de ellos son generalizaciones de la teoría clásica de conjuntos, y se han procurado mantener como tales para que esta analogía facilitara su comprensión. Otros son únicamente aplicables a los conjuntos borrosos.

Tras el estudio de los *conjuntos borrosos* como pilar básico de esta teoría, se ha pasado a ver las *operaciones y relaciones* que se pueden realizar y establecer entre ellos, así como sus propiedades. A continuación, a partir de la definición de variable lingüística, se propone un *modelo semántico* para la interpretación de las sentencias borrosas, y se plantea el tema aún abierto de la aproximación lingüística.

Por último, y asentada esta base, se exponen las reglas del razonamiento aproximado, para establecer una vía de obtención de conclusiones mediante la *Regla Composicional de Inferencia*.

Esta generalización de la teoría de conjuntos lleva a abrirse a nuevos conceptos, y permite hacer frente a la incertidumbre y la complejidad que existen en muchos sistemas desde una nueva perspectiva.

## CAPÍTULO 3

# ***CONTROLADORES BORROSOS***

### ***3.1 INTRODUCCIÓN***

El propósito de un controlador es alcanzar o mantener un proceso en un estado determinado, mediante la monitorización de un conjunto de variables y la selección de las acciones de control adecuadas.

El problema del diseño de sistemas de control se suele reducir a la elección de un determinado tipo de controlador y al ajuste de sus parámetros, de tal forma que se verifiquen ciertas especificaciones dadas para el proceso a controlar.

Un sistema de control realimentado es aquél que tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida del sistema  $y$  y la consigna de referencia  $r$ , comparando ambas y utilizando la diferencia como parámetro de control. Los elementos del proceso a controlar constituyen el sistema controlado. El controlador es el encargado de mantener el punto de consigna de la salida ante posibles perturbaciones externas o cambios en la referencia, mediante su acción  $u$ .

El diagrama de bloques clásico de un sistema de control se muestra en la Figura 3.1.

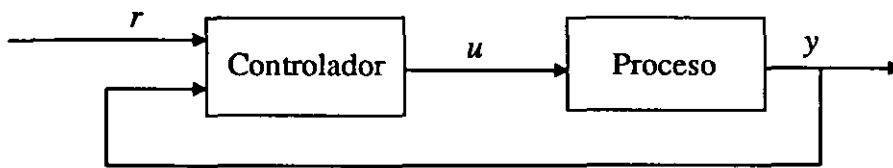


Figura 3.1 - Diagrama de un sistema de control

La obtención del algoritmo de control puede abordarse desde distintas perspectivas, bien bajo un enfoque convencional, o utilizando técnicas de *Inteligencia Artificial*. Esta alternativa se ha demostrado muy eficaz, sobre todo cuando se trata de procesos complejos y difíciles de modelar. Dentro de esta última perspectiva se encuadran los **Controladores Borrosos**.

### 3.2 CONTROLADORES BORROSOS

*El diseño de un Controlador basado en Lógica Borrosa CB se basa en la descripción lingüística de la estrategia de control utilizada por un operario o experto en el control manual del proceso.* Por esta razón, también se denominan **Controladores Lingüísticos**. Se trata de describir el conjunto de reglas que modelan la estrategia de control —más que el proceso en sí— con toda la imprecisión que poseen los lenguajes naturales, y a partir de esas reglas generar acciones de control.

*Un regulador borroso se compone internamente de una base o conjunto de reglas lingüísticas de control, que tienen como antecedentes los valores posibles de las variables de entrada, y que concluyen la acción de control a efectuar, en términos también lingüísticos.*

La configuración básica de un controlador borroso directo se indica en la Figura 3.2. En esta estructura caben algunas variantes [Bra 79a], pero siempre se puede organizar en cuatro componentes principales [Lee 90a]:

- a) Tratamiento de la información de entrada: incluye tanto la determinación de las variables de entrada como su medida, posterior escalado y conversión de información concreta en borrosa (*borrosificación*).



- b) Base de conocimiento: almacena la caracterización de los términos lingüísticos utilizados en las reglas (*base de datos* o de conjuntos borrosos), y la *base de reglas* que especifica los objetivos de control.
- c) Método de inferencia: evalúa la base de reglas en función del valor de las variables de entrada al controlador.
- d) Tratamiento de la información de salida: incluye la determinación de las variables de salida y el método empleado para obtener el valor determinista de la salida del CB (*desborrosificación*).

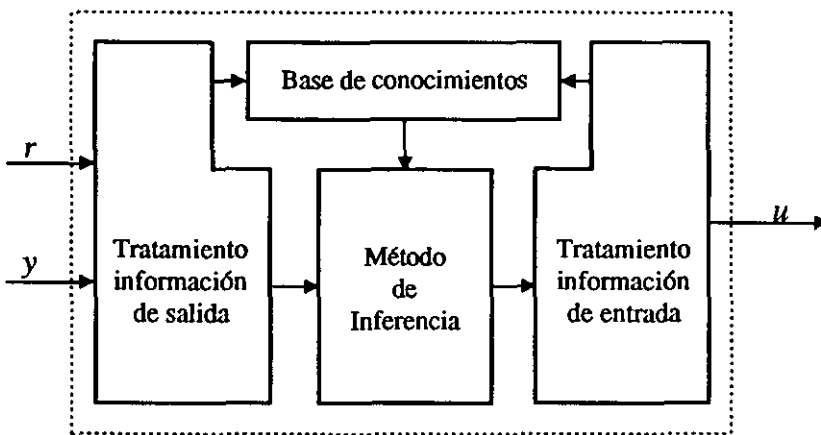


Figura 3.2 - Elementos de un Controlador Borroso

Tanto a) como d) se pueden agrupar en *convertidores de información* concreta-borrosa, en uno u otro sentido; pero como se emplean algoritmos distintos para estas correspondencias, se exponen por separado.

De cada uno de estos elementos se van a desarrollar aquellos aspectos que permiten una aportación significativa al problema de la sintonía de los controladores borrosos.

### 3.3 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN DE ENTRADA

En algunas de las aplicaciones del *Razonamiento Aproximado*, premisas y conclusiones se representan simbólicamente y, por lo tanto, sus correspondientes funciones de pertenencia no requieren tratamiento significativo adicional.

En el caso del control de procesos, los datos observados son en general valores concretos, resultados de una medida. Sin embargo, el controlador trabaja con información borrosa, por lo que se hace necesaria la presencia de un operador de conversión de información entre el controlador y el entorno. La estrategia de borrosificación incorpora la vaguedad e imprecisión del lenguaje natural.

Para obtener, a partir de los valores deterministas medidos de las variables de entrada, sus valores borrosos equivalentes, se deben realizar las siguientes tareas:

- a) *Medida* de las variables de entrada del controlador, una vez determinadas en el dominio de la aplicación, mediante los sensores adecuados a su naturaleza y rango de variación.
- b) *Escalado* de las mismas, que transfiera su rango de valores a los correspondientes universos de discurso.
- c) *Borrosificación*, es decir, conversión de los datos concretos a valores lingüísticos, que pueden ser considerados como etiquetas de conjuntos borrosos.

#### 3.3.1 Escalado

En ocasiones es necesario realizar un escalado, que lleve el rango de variación de las variables medidas al rango de variación de los universos de discurso asociados a cada variable; es decir, que transfiera los datos de entrada al conjunto de valores particulares que pueden tomar las variables que intervienen en el predicado de las reglas.

Este escalado puede ser uniforme, no uniforme [Abd 91] o incorporar ambos modos. Habitualmente se trabaja con universos normalizados en el intervalo  $[-1,1]$ . Luego, dependiendo de la naturaleza de los datos observados, se aplican diversos tipos de estrategias de conversión.

### 3.3.2 Estrategias de borrosificación

El conversor de información es un operador que tiene el efecto de transformar datos concretos ( $x_0$ ) en valores borrosos, asignándoles un grado de pertenencia a un conjunto borroso A,

$$\mu_A(x) = \text{fuz}(x_0) = A(x_0) \quad (3.1)$$

Realiza una función similar a la de un conversor analógico/digital (A/D) de datos. Se emplean distintos algoritmos o estrategias de borrosificación de las variables de entrada.

3.2 a) Mamdani [Mam 74] introduce operadores de borrosificación abruptos, al considerar que las variables de entrada están adecuadamente medidas. Esta estrategia, la más sencilla, consiste en interpretar el valor medido,  $x_0$ , como un conjunto borroso A cuya función de pertenencia  $\mu_A(x)$  se define tal que vale 1 en el valor medido, y 0 en el resto de los elementos del universo de discurso; es decir, asigna un conjunto borroso unitario dentro de un cierto universo de discurso al valor concreto,

$$\text{fuz}(x_0) = \begin{cases} \mu_A(x) = 1 & \text{si } x = x_0 \\ \mu_A(x) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

Este operador representa una manera natural de definir una función de pertenencia sin aumentar la difuminación de la medida, ya que, básicamente, un conjunto borroso unitario es un valor preciso. Esta estrategia es ampliamente utilizada en aplicaciones a control por su simplicidad.

3.2 b) Si se trata con universos discretos, esta función introduce un error de aproximación igual a la distancia del valor medido  $x_0$  al punto del universo más próximo al mismo. Para tener en cuenta la discretización, se puede definir otro operador de conversión que se basa en la conservación del centro de gravedad de la medida.

Consiste en que, si el valor medido  $x_0$  pertenece al intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , se define una función de pertenencia que vale 0 en todos los puntos del universo excepto en los extremos del intervalo. En el extremo más próximo a la medida se define como 1, y en el otro extremo del intervalo toma un valor tal que el centro de gravedad de la función coincide con el valor medido. Con este operador se consigue una variación continua de los centros de gravedad de las funciones de pertenencia, aunque los universos sean discretos [Cam 92].

- 3.2 c) Si los datos observados son perturbados por ruido aleatorio, el operador de borrosificación convierte los datos probabilísticos en números borrosos, es decir, en datos (posibilísticos) borrosos. De esta forma, se refuerza la eficiencia computacional porque los números borrosos son mucho más fáciles de manipular que las variables aleatorias. En algunas aplicaciones, se elige un triángulo isósceles como función de borrosificación [Gra 88], [Bra 79b], [Mur 85]. El vértice de este triángulo corresponde al valor principal del conjunto de datos, mientras la base es dos veces la desviación estándar del conjunto de datos.
- 3.2 d) En otros casos, algunas observaciones relativas al comportamiento de estos sistemas son precisas, mientras otras son medibles sólo en sentido estadístico, y algunas, denominadas “híbridas”, requieren ambos modos, probabilístico y posibilístico, de caracterización. La estrategia en este caso utiliza el concepto de “número híbrido”, que envuelve tanto incertidumbre (números borrosos) como aleatoriedad (números aleatorios).

### 3.4 BASE DE CONOCIMIENTO

En este núcleo se almacena el conocimiento del controlador. Consta de:

- a) Una *base de datos* con las definiciones utilizadas en las reglas lingüísticas (*base de conjuntos borrosos*).
- b) La *base de reglas* lingüísticas que caracteriza los objetivos de control.

### 3.4.1 Base de datos

Los datos almacenados en la *base de conjuntos borrosos* dan significado a los términos lingüísticos. En ella se encuentran las funciones de pertenencia correspondientes a los términos lingüísticos o conjuntos borrosos primarios que intervienen en el enunciado de las reglas de control. La definición de cada término está encabezada por una “*etiqueta*” o identificador de conjunto borroso, seguido del valor de la función de pertenencia en cada punto del universo.

#### 3.4.1.1 Etiquetas lingüísticas (*Partición borrosa*)

Se denominan *etiquetas lingüísticas* los valores semánticos correspondientes a un predicado. Estas etiquetas se deben corresponder en gran medida con el lenguaje natural. Habitualmente se toman entre 2 y 9 términos, ya que menos no definen bien el problema, y más se salen fuera de los límites que sería capaz de discernir una persona. Se entiende por *granularidad* la capacidad de discernir entre dos términos lingüísticos.

Una variable lingüística en el antecedente de una regla borrosa de control forma el espacio de entrada con respecto a cierto universo de discurso, mientras que en el consecuente de la regla forma el espacio de salida borroso. Una *partición borrosa* determina cuántos términos o etiquetas existen asociados a una variable lingüística. Es equivalente a encontrar el número de conjuntos borrosos primarios, lo que determina la granularidad del control obtenido con el controlador borroso; es un compromiso entre flexibilidad y simplicidad.

El conjunto de términos primarios usualmente tiene un significado. Los valores correspondientes a cada etiqueta deben estar ordenados, en sentido creciente, de acuerdo con el significado lingüístico de las mismas. Las dos etiquetas extremas suelen tener funciones de pertenencia unidad o cero desde un punto definido del universo de discurso hacia  $\pm \infty$ , para truncar aquellos valores de las variables de entrada que no pertenezcan al universo de discurso.

Para generar este conjunto de valores lingüísticos adecuados al problema que se representa hay que elegir la variable apropiada. La variable escogida debe ser “verdad”, y se elige la especificación de la variable más habitual (*verdad, alto, abierto, cercano, etc.*). Acto seguido se fija su antónimo, “falso”, y el resto de especificaciones se consiguen

añadiéndole al término primitivo o base y al antónimo las restricciones que proporcionan las cercas semánticas: palabras como “muy”, “ligeramente”, “bastante”, “poco”, etc., que constriñen el significado de la palabra a la que van asociadas. Cada uno de esos elementos, caracterizado por un subconjunto borroso, debe representar el significado de cualquier variable que contenga las mismas especificaciones.

*Discretizar* un universo continuo consiste en dividirlo en un número finito de intervalos, denominado *nivel de cuantificación*, y asignarle a cada uno de ellos un valor normalizado. La cuantificación previa de los universos de discurso exigen un cierto conocimiento del proceso, y debe proporcionar una aproximación adecuada sin excesivo gasto de memoria.

### 3.4.1.2 Funciones de Pertenencia

Cada término lingüístico corresponde a un subconjunto borroso que lleva asociada una *función de pertenencia*. Ésta representa el grado de asociación de un valor numérico con ese término lingüístico; generalmente está comprendido entre 0 y 1. Denotan, por intervalos según su forma, la ascendencia, la pertenencia absoluta o decadencia en la pertenencia.

Para definir los conjuntos borrosos se emplea tanto una definición numérica como funcional (2.3), dependiendo de si el universo de discurso es discreto o continuo. Se suelen delimitar de forma subjetiva, si bien actualmente existen trabajos que introducen métodos experimentales para su caracterización. Su distribución puede ser no uniforme, pero debe cubrir todo el universo de discurso (con un cierto grado de *completitud*), para que no queden zonas muertas entre ellas, lo que ocasionaría acciones de control irregulares (sección 4.2).

Las funciones de pertenencia vienen definidas según su forma por su media o centro y amplitud; suelen ser básicamente del tipo de las denominadas “L-R-Flat fuzzy numbers”, denotando que poseen tres partes (izquierda, derecha y central), las cuales incluyen como particularización las trapezoidales (rectangulares, triangulares, etc.). Las exponenciales (distribución normal) y polinómicas, muestran también un comportamiento adecuado. Las únicas restricciones en este sentido son las propiedades de normalización y convexidad de las funciones (2.9).

### 3.4.2 Base de reglas

La *base de reglas* es un conjunto de reglas o protocolo de control que describe la acción a realizar en función del estado del sistema. Proporcionan una forma adecuada de expresar la política de control y el conocimiento del proceso. Las reglas de los sistemas de control borroso tienen la misma apariencia que las que se utilizan en los sistemas expertos, pero generan actuaciones que se realizan obligatoriamente. Alternativamente, pueden emplearse otras formas para representar el conocimiento, como tablas de decisión o funciones de distribución de relaciones borrosas.

Las reglas que constituyen la base de un controlador borroso son del tipo:

*si antecedente entonces consecuente,*

donde el *antecedente* es un conjunto de condiciones que se deben satisfacer en el dominio de la aplicación, y el *consecuente* es el conjunto de acciones de control que se derivan del antecedente.

La estructura de las reglas de control dependerá del número de entradas y salidas del sistema. Sea, por ejemplo, un sistema MISO de dos entradas; la base de reglas es de la forma,

$$\begin{aligned}
 R_1: & \text{ si } x \text{ es } A_1 \text{ y } y \text{ es } B_1 \text{ entonces } z \text{ es } C_1, \\
 R_2: & \text{ si } x \text{ es } A_2 \text{ y } y \text{ es } B_2 \text{ entonces } z \text{ es } C_2, \\
 & \dots \\
 R_n: & \text{ si } x \text{ es } A_n \text{ y } y \text{ es } B_n \text{ entonces } z \text{ es } C_n,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $x$  e  $y$  son variables lingüísticas que representan las variables de entrada del controlador, y  $z$  es la variable lingüística que representa la acción de control.  $A_i$ ,  $B_i$ , y  $C_i$  son valores de las variables lingüísticas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en los universos de discurso  $U$ ,  $V$  y  $Z$  respectivamente, con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Este tipo de reglas evalúa el estado de un proceso en un instante  $t$ , y calcula la acción de control en ese instante.

Los antecedentes y los consecuentes de estas reglas del tipo “si  $x$  es  $A_i$  y  $y$  es  $B_i$  entonces  $z$  es  $C_i$ ” están asociados a términos lingüísticos (conceptos borrosos), por lo que estas reglas se denominan *sentencias condicionales borrosas* y se interpretan como una *relación borrosa*  $R_i$  entre  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , definida de la forma:

$$R_i = (A_i \text{ y } B_i) \rightarrow C_i \quad (3.4a)$$

$$\mu_{R_i}(x, y, z) = [\mu_{A_i}(x) \text{ y } \mu_{B_i}(y)] \rightarrow \mu_{C_i}(z) \quad (3.4b)$$

donde “ $A_i$  y  $B_i$ ” es un conjunto borroso  $A_i \times B_i$  en  $U \times V$ . La función implicación “ $\rightarrow$ ” puede ser interpretada de distintas maneras (capítulo 2, apartado 2.2.3.1).

En algunas aplicaciones [Sug 85] se ha interpretado el consecuente de forma más general, como una función de las variables de entrada:

$$R_i: \text{ si } x \text{ es } A_1 \text{ y } y \text{ es } B_1 \text{ entonces } z_i = f(x,y) \quad (3.5)$$

Si se considera el conjunto de reglas de control —cada una representa una relación borrosa— existe entre ellas una relación implícita, usualmente interpretada mediante el conectivo de sentencias “also” (también). Se puede pensar que la dinámica del sistema está representada por una única relación borrosa, combinación de las relaciones borrosas, definida normalmente como el operador unión borroso,

$$R = \text{ también } (R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n) = \cup (R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n) = R_1 \cup R_2 \dots \cup R_n \quad (3.6)$$

Esta conectiva (unión) admite como interpretación cualquier conorma triangular (Apéndice A).

El conjunto de reglas se determina para cada aplicación, en función del peso y valor que se quiera establecer para cada configuración de entrada. Es necesaria la presencia de un experto que describa el comportamiento del controlador, para representarlo mediante las reglas. Además, la base de reglas debe cumplir unos requisitos que garanticen su buen funcionamiento [Lee 90b]:

- \* *Complejidad*: esta propiedad de completitud se refiere tanto a la base de conjuntos primarios como a la base de reglas.

Para asegurar la completitud, es necesario que la unión de todos los soportes de los conjuntos borrosos primarios cubra todo el universo de discurso, de forma que cada punto tenga un grado de pertenencia mayor que un umbral  $\alpha$  con respecto de algún conjunto. Normalmente se elige  $\alpha$  como el valor del punto de cruce,  $\alpha = 0.5$ .



Intuitivamente, un controlador borroso deberá ser capaz de inferir la acción de control adecuada para cualquier estado del proceso; luego deben existir reglas para cualquier combinación posible de las entradas del controlador. La completitud se incorpora a la base de reglas a través de la experiencia y conocimiento del diseñador. Cuando en alguna situación no se dispara ninguna regla con un grado suficiente de pertenencia, se deben incluir reglas adicionales.

- \* **Consistencia:** las reglas deben producir acciones consistentes; es decir, no pueden producir distintas salidas para las mismas entradas. Para evitar este problema cuando se han añadido reglas, se puede establecer una jerarquía entre ellas, dando mayor prioridad a la más específica.
- \* **Interacción:** equivale a evaluar el peso propio que tiene una regla entre las restantes. Se puede calcular analizando los distintos caminos que conducirían a la misma acción, para calibrar el efecto de la eliminación de cada regla. Es un problema complejo, todavía poco estudiado.
- \* **Robustez del controlador:** es una medida de su reacción frente a perturbaciones en las entradas. Para medirla, existen métodos matemáticos basados en introducir perturbaciones aleatorias en las señales de entrada  $x$ , lo que da lugar a grados de pertenencia  $A_i$  aleatorios, y observar los efectos sobre una determinada relación.

Estas reglas, que expresan las relaciones cruzadas existentes entre las variables del proceso y las variables de control, se enuncian a partir del conocimiento cualitativo adquirido por diversas fuentes. Se suelen distinguir tres fuentes, no mutuamente excluyentes, para obtener las reglas de control borroso:

- a) **Experiencia y conocimiento suministrado por el experto en control.** Consiste en la verbalización de la experiencia diaria sobre la planta, expresada de forma lingüística. Queda formalizada, por ejemplo, en el manual de operación del proceso, que registra las acciones de control del operador humano. También se puede obtener por observaciones visuales del modo de operar, análisis de datos digitalizados de las variables de interés, cuestionarios, etc.

La obtención del conocimiento es una parte crítica en el desarrollo de este tipo de sistemas de control, ya que no siempre la información suministrada por el operario o experto es completa y consistente, y es difícil estandarizar una guía de

adquisición del conocimiento que se pueda emplear en áreas tan diversas como a las que se aplican estos controladores. Además, a menudo no resulta fácil la conversión de esta información a términos y reglas borrosos sin empobrecer el conocimiento: al definir el diseñador los elementos del controlador no siempre queda bien reflejada la actuación real.

- b) *En base a un modelo borroso del proceso.* La descripción lingüística de las características de la dinámica del proceso a controlar puede ser vista como un modelo borroso del proceso. Este método es más fiable, en el sentido de que se parte de una estructura (modelo borroso del proceso) cuyo tratamiento se puede abordar metodológicamente con más rigor. Sin embargo, no está suficientemente desarrollado.
- c) *En base al aprendizaje.* Aquí existen dos niveles: el de la base de reglas, y el de las “meta-reglas”, que crean y modifican reglas de la base hasta conseguir un comportamiento adecuado. Un ejemplo de aplicación de este método lo constituyen los controladores auto-organizados.

Dada la relevancia de este problema, se expone en el **Apéndice B** una digresión sobre el tema de la *adquisición del conocimiento en Sistemas Expertos*.

### 3.5 MECANISMO DE INFERENCIA

Es el núcleo del sistema borroso. Tiene la capacidad de simular el razonamiento humano, utilizando el proceso de inferencia de la lógica borrosa. Teniendo en cuenta que los sistemas de control deben actuar en tiempo real, los métodos de inferencia conviene que sean sencillos y rápidos.

El método de inferencia borrosa para control es distinto del método de inferencia con proposiciones borrosas. Una diferencia es que las proposiciones toman valores borrosos, mientras que los valores actuales de las entradas al controlador son valores numéricos.

La obtención de conclusiones a partir de los datos de entrada y de las reglas de control se realiza aplicando los distintos mecanismos de inferencia borrosa (capítulo 2, apartado 2.2.4.1), dando lugar a una tabla adicional o matriz de inferencia que representa

el peso o masa que tendrá cada una de las reglas en la conclusión final. A partir de la matriz de inferencia, resulta posible hacer una selección de las reglas que se van a aplicar, optando por alguna estrategia.

Existen varios mecanismos de inferencia [Lee 90b]; los más populares son los que emplean la *Regla Composicional de Inferencia RCI* máx-\* propuesta por Zadeh [Zad 73a], y el empleado para el tipo de reglas descrito por Sugeno [Sug 85]. Según se interpreten la sentencia incondicional borrosa de implicación, “ $A \rightarrow B$ ”, y las conectivas se tienen distintas posibilidades.

Las reglas de control borroso están relacionadas por los conceptos de implicación borrosa y la regla composicional de inferencia. Para inferir la salida  $z$  de los estados del proceso  $x$ ,  $y$ , dada la relación borrosa de las reglas  $R$ , se aplica la regla composicional de inferencia máx-\*, denotada por  $\circ$ ,

$$z = y \circ (x \circ R) \quad (3.7)$$

Para el sistema anterior, si las entradas  $x$ ,  $e$  y toman los valores  $(A', B')$ , definida la relación total  $R$ , el valor de la acción de control  $C'$  se deduce aplicando la regla composicional de inferencia,

$$R = \cup (A' \times B' \times C') \quad (3.8)$$

$$C' = (A', B') \circ R \quad (3.9)$$

El proceso de inferencia es, en general, lento. Por eso, desde las primeras aplicaciones de la lógica borrosa se ha apreciado un interés notable por la búsqueda de algoritmos más eficientes [Gar 93].

Uno de los resultados más significativos lo introdujo Mamdani, debido a su simple y eficaz operador de borrosificación (3.2). La introducción por Mamdani de la discretización en la función de pertenencia se debe a requerimientos en el procesado de la inferencia. De ese modo, se obtiene una representación matricial de la relación (la *Matriz de Relación MR*), en vez de un mapa continuo (la *relación borrosa R*), que define el protocolo de control. La matriz de relación es, de hecho, una discretización de la relación borrosa definida por el conjunto de reglas. Sin embargo, su mayor interés radica en que representa una versión precompilada de las reglas, lo que desde un punto de vista práctico reduce considerablemente los esfuerzos de control.

Como desventaja, estas representaciones discretizadas introducen comportamientos dinámicos no deseados en el bucle de control.

### 3.6 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN DE SALIDA

El resultado de la aplicación de la Regla de Composición produce un subconjunto borroso. Esta representación de la variable actuación en forma borrosa no es apta, en la mayoría de los casos, para su aplicación directa como variable de control. Es necesario obtener una conclusión numérica final, para lo que hay que realizar dos tareas:

- a) *escalado*, que transforma los universos de discurso en rangos de variables de actuación sobre el proceso.
- b) la *desborrosificación*, que obtiene una acción de control no borrosa a partir del resultado de una inferencia borrosa.

#### 3.6.1 Estrategias de desborrosificación

El operador que realiza esta operación, obteniendo un número concreto  $z_0$  de la salida borrosa  $z$ , se puede representar por:

$$z_0 = \text{defuz}(z) \quad (3.10)$$

Es similar a la función que realiza un conversor digital/analógico (D/A) de datos. Para obtenerlo existen varios métodos; los más utilizados son:

- 6.1 a) *Desborrosificación lineal*: calcula las contribuciones de todas las etiquetas según el grado de pertenencia a cada una. Es decir,

$$z_0 = \sum_{i=1}^n \mu_C(z_i) \cdot z_i \quad (3.11)$$

donde  $z_i$  son las medias o centros de cada etiqueta, y  $n$  es el número de etiquetas.

6.1 b) *Criterio del máximo*: toma como conclusión el máximo de la curva suma de todas las anteriores. Da como resultado el punto del universo de discurso de la acción de control para el cual la función de pertenencia toma su valor máximo,

$$z_0 \text{ tal que } \mu_C(z_0) = \max (\mu_C(z)), \quad \forall z \in Z \quad (3.12)$$

6.1 c) *Promedio de máximos*: cuando la función de pertenencia correspondiente a la acción de control,  $\mu_C(z)$ , presenta más de un máximo, se genera como acción de control concreta el promedio de los máximos. Si el universo es discreto,

$$z_0 \text{ tal que } z_0 = \Sigma z_i / M \quad (3.13)$$

$z_i$  son los elementos de  $Z$  donde la función de pertenencia  $\mu_C(z_i)$  toma su máximo valor, y  $M$  es el número de máximos con el mismo valor.

6.1 d) *Centro de gravedad* del área de la curva suma (o punto que deja el mismo área a ambos lados del mismo). Es el más utilizado. Genera como acción de control el centro de gravedad de la función de pertenencia  $\mu_C(z)$  de la acción de control. Para un universo discreto de  $n$  elementos, el centro de gravedad se calcula como:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_C(z_i) \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n \mu_C(z_i)} \quad (3.14)$$

siendo  $z_i$  la media y  $\mu_C(z_i)$  la masa de la función de pertenencia asociada a cada etiqueta lingüística de la variable de salida, y  $n$  el número de reglas. Además, es un método robusto frente a variaciones en los parámetros de las funciones de pertenencia.

Por último, hay que recordar que el valor concreto dado por cualquiera de las estrategias de conversión citadas es un valor en el universo de definición de la función de pertenencia. Es necesario, por tanto, realizar un escalado para llevar el rango de variación de las variables de salida a su rango de variación real.

### 3.7 CONFIGURACIONES DE CONTROL BORROSO

Atendiendo al modo de operar de los controladores borrosos, pueden distinguirse las siguientes configuraciones de control [Gar 93]:

#### 3.7.1 Control borroso directo

Es la estructura más frecuente en aplicaciones industriales, y sobre la que se va a aplicar el estudio de la sintonía de los controladores borrosos desarrollado en este trabajo.

Se acopla al modelo clásico de control directo, y como él, admite las variantes que se resumen en la Tabla 3.1.

Por lo general, las características del controlador se establecen según la naturaleza de las variables de entrada y salida utilizadas. En la mayoría de las aplicaciones se utilizan variables como el error ( $e$ ), la derivada o variación del error ( $ce$ ) y la integral o suma de errores ( $s$ ). En algunos casos, con la formulación incremental, se trabaja con la derivada segunda o aceleración del error ( $ac$ ). Como variables de salida se emplean la acción de control ( $u$ ) y la derivada o el incremento de control ( $\Delta u$ ).

Los tipos más comunes de controladores directos se resumen en:

Tipo	Acción	Función	Incremental
P	Proporcional	$u = f(e)$	$\Delta u = f(ce)$
I	Integral	$u = f(s)$	$\Delta u = f(e)$
PI	Proporcional-Integral	$u = f(e, s)$	$\Delta u = f(ce, e)$
PD	Proporcional-Derivativo	$u = f(e, ce)$	$\Delta u = f(ce, ac)$
PID	Proporcional-Integral-Derivativo	$u = f(e, s, ce)$	$\Delta u = f(ce, e, ac)$

Tabla 3.1 - Estructuras de control borroso directo

También se utilizan con frecuencia representaciones equivalentes a leyes de realimentación no-lineal del estado.

$$u = f(x)$$

En el caso de que el sistema borroso no se dedique al control directo sino a la supervisión, el esquema anterior sigue siendo válido, salvo que el proceso ya no representa una planta aislada sino la planta con un controlador convencional, algunos de cuyos parámetros se ajustan desde el sistema borroso, en base a las informaciones recibidas sobre el funcionamiento del proceso. Este esquema está resultando de gran utilidad en numerosas aplicaciones.

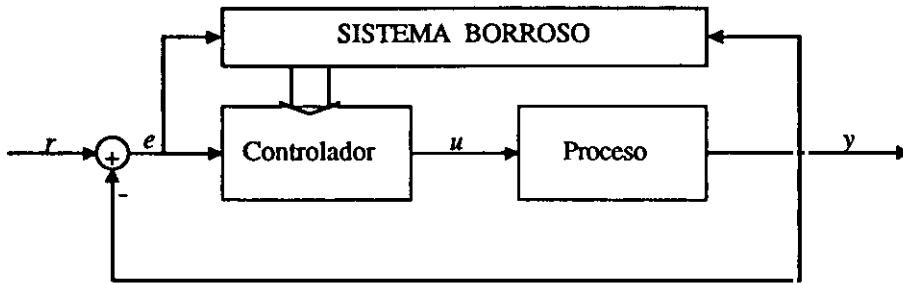


Figura 3.3 - Control borroso aplicado a la supervisión

### 3.7.2 Control borroso adaptativo

Se clasifican así aquellos sistemas de control basados en lógica borrosa que son capaces de modificar sus parámetros (reglas, factores de escala, ...) como respuesta ante variaciones en la señal de entrada, en el proceso, etc., de acuerdo con algún criterio de evaluación.

#### 3.7.2.1 Controladores borrosos auto-organizados

Un controlador borroso auto-organizado (*Self-Organizing Controller: S.O.C.*) es un sistema borroso adaptativo capaz de modificar automáticamente, y sin intervención manual, su base de conocimientos, como resultado de evaluar la desviación de la salida del proceso con respecto a unos determinados criterios prefijados. El control auto-organizado establece las oportunas modificaciones en la base de reglas, reemplazando algunas o eliminando aquellas que no se utilizan.

Introducidos por Procyk y Mamdani en 1979 [Pro 79], los S.O.C. se están mostrando de especial interés en multitud de aplicaciones. Los enfoques seguidos para el desarrollo de estos reguladores se han basado en criterios de evaluación local; es decir, están orientados a acciones de control individuales.

Los elementos que constituyen el S.O.C. son los siguientes (Figura 3.4):

- 1) El controlador lingüístico, formado por el conjunto de reglas de control, el mecanismo de inferencia, y los operadores de borrosificación y desborrosificación.
- 2) El algoritmo modificador de reglas.
- 3) El evaluador de características, constituido por una tabla de decisión que, en función del error, devuelve una indicación sobre la corrección requerida respecto a una respuesta ideal.
- 4) El modelo de referencia.

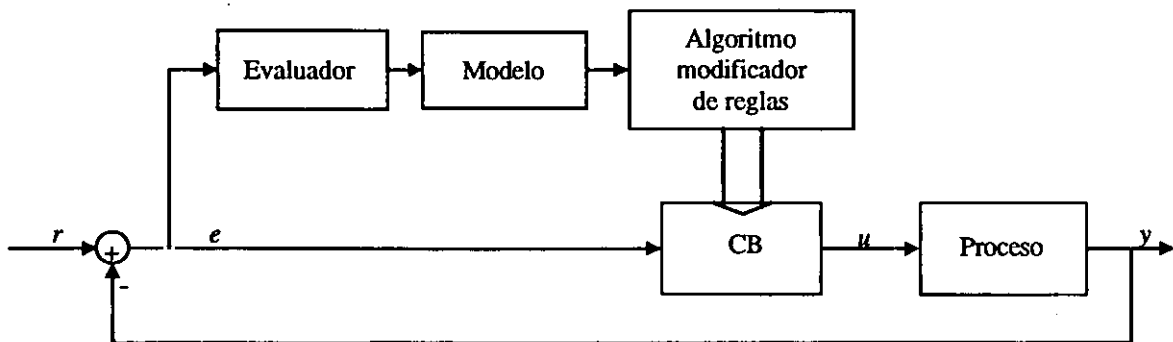


Figura 3.4 - Controlador Borroso Auto-organizado

Hay que señalar que, en realidad, este mecanismo no modifica las reglas ya adquiridas, sino que incluye nuevas reglas en el protocolo.

Los planteamientos utilizados en los S.O.C. generan una serie de problemas adicionales, cuya solución apenas se ha tratado; entre otros, el problema de la convergencia del algoritmo modificador de reglas, la generación en exceso de nuevas reglas de control, la falta de optimización del protocolo lingüístico, etc.

Aún cuando el número de desarrollos de los S.O.C. no es hoy demasiado significativo, la investigación sobre controladores borrosos auto-organizados presenta un notable interés teórico y práctico; es en aplicaciones en robótica donde más desarrollos se han realizado.



### 3.7.2.2 Controladores borrosos con autoaprendizaje

Partiendo de las similitudes entre los controladores borrosos y los autómatas con capacidad de aprendizaje se están desarrollando este tipo de controladores. En su mayor parte responden a procedimientos y técnicas de aprendizaje del tipo del gradiente descendente.

Generalmente se aplican a controladores borrosos con una base de reglas del tipo de las descritas por Sugeno, en las que el consecuente se expresa como una función analítica de las entradas, con factores o pesos modificables. También se ha aplicado esta estrategia operando sobre los parámetros que definen los conjuntos borrosos primarios de las variables.

En el capítulo 4 se exponen algunos ejemplos al enumerar los distintos métodos de sintonía.

### 3.7.3 Controladores basados en modelos borrosos

Otra alternativa de gran interés son los controladores basados en modelos borrosos del proceso a controlar. Estas técnicas tienen sus orígenes en trabajos sobre identificación de sistemas borrosos y su aplicación al modelado de sistemas [Tak 85].

La aplicación de las técnicas de modelado requieren una serie de simplificaciones sobre los parámetros relativos a antecedentes y consecuentes. Por ejemplo, emplean reglas en las que los consecuentes están descritos por combinaciones lineales de las entradas o se siguen simplificaciones similares.

Básicamente, los sistemas de control basados en modelos borrosos actúan como modeladores de la dinámica inversa del proceso. Este modelo puede ser realizado fuera de línea, o realizarse en tiempo real mediante un proceso de autoaprendizaje.

Sobre esta configuración se ha establecido un esquema de control predictivo, dando lugar a los denominados *controladores borrosos predictivos*.

### **3.7.4 Controladores borrosos híbridos**

Se denominan así aquellos sistemas de control formados por dos controladores interconectados, de los cuales uno es convencional (por ejemplo, PID), y otro es borroso. El primero se encarga básicamente del control, garantizando un comportamiento estable.

El controlador borroso actúa en paralelo, introduciendo el componente heurístico en el proceso. Usualmente sus acciones se orientan a la mejora de ciertas características, como reducción de oscilaciones, mejoras del tiempo de establecimiento, etc.

Cabe señalar que estrategias de este tipo son muy adecuadas desde una visión puramente industrial; al disponer de un control clásico, el técnico de proceso se siente apoyado por su propia experiencia con controladores convencionales, y a su vez, se adapta a los nuevos planteamientos introducidos por el controlador borroso.

## **3.8. CONCLUSIONES**

En este capítulo se han introducido los **Controladores Borrosos**, presentando sus elementos básicos. Para ello se ha estructurado el diseño en cuatro fases, en las que convergen la mayoría de los estudios realizados sobre el tema.

En las fases de conversión de información concreta-borrosa, tanto en uno como en otro sentido, se han expuesto las distintas estrategias que se están aplicando habitualmente en control. Al tratar los elementos que componen la base de datos se ha especificado su forma y métodos de obtención, dejando el tema abierto para estudiar su influencia sobre el funcionamiento del controlador y para aplicar sobre ellos los métodos de sintonía.

También se han enunciado los métodos de inferencia con los que se obtiene la salida del sistema borroso, haciendo hincapié en los que requieren un menor costo computacional, por lo que resulta ventajosa su aplicación.

Con esto queda planteado un amplio abanico de posibilidades para llevar a cabo el diseño de este tipo de controladores, lo que complica enormemente su análisis, haciendo inabordable un estudio detallado de todos los casos posibles.

Se va a particularizar, a partir de ahora, la estructura del controlador borroso, para poder obtener conclusiones. Este planteamiento no resta generalidad a la aplicación de este tipo de controladores, como se comprueba al ver las distintas configuraciones de control con las que se está trabajando actualmente, de las que se ha expuesto una breve panorámica.

## CAPÍTULO 4

# *SINTONÍA DE CONTROLADORES BORROSOS*

### **4.1 INTRODUCCIÓN**

El problema del diseño de sistemas de control se suele reducir a la **elección** de un determinado controlador y al **ajuste de sus parámetros**, de tal forma que se verifiquen ciertas especificaciones dadas para el proceso a controlar. *Uno de los problemas fundamentales, desde el punto de vista práctico, que se plantean a este tipo de reguladores es que no existen procedimientos sistemáticos que permitan sintonizar el controlador borroso.* En la práctica, el método normalmente utilizado consiste en emplear técnicas directas de prueba y error (“*trial and error*”) en una fase previa de presintonía del controlador borroso al proceso, generalmente costosa en tiempo.

Además, un sistema borroso tiene un *elevado número de parámetros*, algunos de ellos redundantes. Esta sobreparametrización dificulta enormemente su sintonía, ya que son parámetros críticos en la estabilidad y funcionamiento del sistema. Así como en un regulador PID convencional sólo se establece la sintonía de tres parámetros, directamente relacionados con las especificaciones de la respuesta del sistema, en el caso borroso se puede actuar sobre cualquiera de sus elementos, pero no con consecuencias directas, porque no está clara la relación implícita que existe entre esos parámetros y la variación en la respuesta [Tag 87].

Por otro lado, la selección de unos parámetros iniciales, previa a la fase de ajuste, se viene haciendo de forma heurística, tras numerosos experimentos, lo que retarda la convergencia de las distintas estrategias.

En la literatura especializada no existen métodos generales de ajuste; se han propuesto algunos, válidos cuando las especificaciones del sistema cubren, con la adecuada precisión, el espacio de estados, y cuando el sistema borroso se ajusta a unos ejemplos de comportamiento dados por los expertos. Cuando el controlador borroso se diseña para trabajar en lazo cerrado con un proceso mal definido, estos métodos se van degradando, ya que a menudo los expertos no son capaces de dar ejemplos significativos que permitan realizar la sintonía de un controlador en casos difíciles. Además, en muchos procesos reales, la sintonía en línea (“*on-line*”) del controlador es muy cara desde el punto de vista económico y de consumo de tiempo, o físicamente imposible.

De ahí la necesidad de contar con métodos de ayuda, tanto para orientar la elección inicial de los parámetros del controlador, incorporando el máximo conocimiento posible, como para establecer una estrategia de ajuste fino de estos parámetros para un mejor funcionamiento del sistema de control.

#### **4.2 PARÁMETROS DE CONFIGURACIÓN Y AJUSTE DE UN CONTROLADOR BORROSO**

La configuración de un regulador borroso se lleva a cabo dando forma o valores adecuados a los determinados parámetros que intervienen en él. En cada uno de sus componentes (Figura 3.2), descritos en el capítulo 3, apartado 3.2, intervienen una serie de elementos que influyen significativamente tanto en el funcionamiento como en la robustez y estabilidad del controlador [Bra 78]. Cada uno de ellos, a su vez, admite una cierta variedad de especificaciones.

El estudio de todas las combinaciones posibles sería una tarea inabordable, por lo que el acercamiento al problema de la sintonía se realiza partiendo de una estructura inicial prefijada.

Esta determinación previa va acotando las especificaciones, ya que debido a las fuertes relaciones que existen entre los componentes del controlador borroso, no se puede tratar cada elemento por separado, ni computar independientemente su influencia sobre el

control. Además, no existe una única combinación que optimice el sistema de control. Por ello, se han agrupado en dos categorías los elementos del CB:

*1. Parámetros de configuración:*

Aquellos que, una vez fijados en una fase previa de selección, *no conviene* variar durante la aplicación. Sin embargo, como su especificación afecta al comportamiento del controlador, es necesario hacer un estudio de su influencia en el dominio de trabajo, para hacer una elección adecuada. A esta categoría pertenecen, por ejemplo:

- Número y determinación de las variables de entrada y de salida. Incorporar múltiples entradas y salidas (MIMO) no varía su estructura general, pero sí aumenta la complejidad.
- Número y especificación de los términos lingüísticos asociados a cada variable (partición de los espacios de entrada y salida). Esto determina la dimensión de la tabla de reglas.
- Discretización/normalización de los universos de discurso.
- Método de inferencia aplicado para obtener la conclusión.
- Estrategias de borrosificación y de desborrosificación empleadas.

*2. Parámetros de ajuste:*

Aquellos que pueden tomar distintos valores iniciales para calibrar una misma estructura o se pueden variar en línea, con el fin de obtener unas especificaciones deseadas. Se pueden considerar, entre otros:

- Factores de escala o ganancias de las variables de entrada y de salida.
- Forma, media o centro, amplitud, etc., de las funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos, tanto para variables de entrada como de salida.
- Base de reglas.

En primer lugar deberán fijarse los parámetros de configuración, analizando previamente las ventajas de cada especificación, para optar por los más eficientes para la aplicación.

Después, hay que dar un valor inicial adecuado a los parámetros de ajuste, obteniéndolo mediante algún procedimiento de sintonía que tenga en cuenta la máxima información posible.

#### **4.2.1 Influencia de los parámetros de configuración**

Como ya se ha dicho, es difícil particularizar su influencia sin determinar la estructura de los demás componentes del sistema borroso. Sin embargo, algunas especificaciones se van imponiendo por la generalización de su uso o simplicidad. Aunque en el capítulo anterior se ha enunciado la función de cada uno, se especifica ahora su repercusión sobre la salida que se obtiene. Se van a estudiar atendiendo a los distintos componentes de un controlador borroso.

##### **4.2.1.1 Tratamiento de la información de entrada**

- La *determinación las variables* de trabajo se realiza según el dominio de la aplicación y la estructura del controlador; por ejemplo, la acción de control resultante puede ser incremental o absoluta, y la configuración del controlador tipo PI, PID, etc.
- Los distintos algoritmos o *estrategias de borrosificación* que se emplean para convertir la información concreta en valores borrosos dependen de la información de entrada que reciba el CB (capítulo 3, 3.3.2).

Aunque prima un criterio de simplicidad a la hora de la elección de una u otra, hay que tener en cuenta los errores de aproximación que se producen en algunas estrategias, cuando éstos son significativos. Sin embargo, dada la robustez implícita del regulador, se tiende a utilizar aquellas que reducen el tiempo de computación.

#### 4.2.1.2 Base de conocimiento

Aunque incluye conceptos con parámetros ajustables, conviene seleccionar previamente algunos de los elementos de la base de datos. Estos conceptos, utilizados para caracterizar las reglas borrosas de control, son definidos subjetivamente, basándose en la experiencia y el juicio del ingeniero de control. Pero un conocimiento general de su influencia facilita su correcta elección, esencial para el éxito de la aplicación.

- *Partición borrosa de los espacios de entrada y salida:* el problema de la decisión del número de conjuntos borrosos primarios o básicos determina la granularidad o finura del control borroso que se puede obtener. La partición del espacio entrada/salida no es determinística y no tiene una única solución. Usualmente se requiere un procedimiento de prueba para encontrar el tamaño óptimo de la partición.

Su influencia va indisolublemente unida a la especificación de las funciones de pertenencia. Partiendo de que debe cubrir totalmente los universos de discurso correspondientes, con un cierto grado de completitud (capítulo 3, 3.4.2), se le asocia la mayor o menor resolución del control que se obtiene, según se empleen muchos o pocos términos respectivamente. En la práctica, es común encontrar desde 2 hasta 9 términos, pero lo más frecuente es utilizar 3, 5 ó 7. Para la variable de salida se utilizan generalmente mayor número de etiquetas que para las variables de entrada.

También es determinante en la dimensionalidad de la tabla de reglas, dado que la cardinalidad del conjunto de términos en un espacio de entrada borroso determina el número de reglas de control borroso que pueden ser construidas, con lo que esto conlleva de consumo o ahorro de memoria y tiempo computacional. Por ejemplo, para un sistema MISO con dos entradas ( $e$ ,  $ce$ ) y una salida, con  $N_e$  y  $N_{ce}$  representando el número de conjuntos primarios para  $e$  y para  $ce$  respectivamente, el máximo número de reglas borrosas es el producto de las cardinalidades de ambas variables:  $N_e \times N_{ce}$ .

En la siguiente tabla (Tabla 4.1) se muestra la variación del número de reglas con la partición de entrada, tomando para cada una de las variables el mismo número de términos lingüísticos  $N$ .



		<i>Número de variables de entrada al controlador</i>			
		2	3	4	5
N	2	4	8	16	32
	3	9	27	108	324
	4	16	64	256	1024

Tabla. 4.1 - Número de reglas

- **Normalización:** La normalización de un universo continuo requiere un conocimiento *a priori* del espacio de entrada/salida, ya que para normalizarlo a un intervalo de valores, generalmente,  $[-1,1]$ , se requiere su previa discretización. Un conjunto de términos primarios podría ser, por ejemplo, simétrico. Si no es el caso, o se usa un universo no normalizado, los términos pueden ser asimétricos o estar desigualmente distribuidos en el universo.

- **Cuantificación de los universos de discurso:** La representación del conocimiento impreciso con conjuntos borrosos trajo el problema de cuantificar esa información para su procesamiento en computadores digitales. Esta representación depende de la naturaleza del universo de discurso, que puede ser discreto o continuo. Si el universo es continuo, se puede discretizar y normalizar.

La cuantificación discretiza un universo de discurso en cierto número de segmentos (*niveles de cuantificación*). La elección de los niveles de cuantificación refleja un conocimiento previo del proceso y de las especificaciones, porque tiene una influencia esencial en la resolución de la estrategia de control. Por ejemplo, podría buscarse una solución fina para errores pequeños, consiguiendo una precisión mayor con más niveles de cuantificación, y sería suficiente una resolución menor para errores grandes, utilizando pocos niveles en torno a esa banda del error. Sin embargo existen ciertas restricciones, como que la discretización máxima que se admite es de 32 elementos.

En general, debido a la discretización, el control borroso es menos sensible a desviaciones en los valores de las variables de estado del proceso, pero produce otros efectos no deseables como oscilaciones, error estacionario, ciclos límites, etc. Cuando se utiliza una discretización trapezoidal [Oll 89] el tiempo de ejecución aumenta, pero el efecto de la discretización disminuye, mejorando la respuesta; particularmente cuando se consideran el error estacionario y los ciclos límites que se producen con la realización rectangular clásica.

Algunos de estos efectos vienen comentados en [Brr 93], [Agu 93], [Lee 90a], [Rut 76] y [Vil 93].

#### 4.2.1.3 Mecanismo de inferencia

- Hay diversos *mecanismos de inferencia* que proporcionan un razonamiento correcto [Lee 90b]. El sistema de inferencia depende, una vez fijada la conectiva u operador conjunción y la interpretación de la sentencia incondicional, de la función de implicación utilizada. En [Miz 88] y [Cár 93] se estudian hasta nueve posibilidades, basándose en otras tantas funciones de implicación. Los más populares en control [Miz 91] son la composición *máx-mín*, que utiliza la función de Mamdani [Mam 74] como función de implicación, y *máx-prod*, que utiliza la función de Larsen [Lar 80]. Son, además, los que vienen incorporados en la mayoría de las herramientas software desarrolladas para control borroso.

Su influencia es compleja, y no está desligada de la selección de otros componentes del CB; en la práctica, la elección de uno u otro contribuye, sobre todo, a simplificar cálculos y hacerlo más eficiente, ya que es un proceso en general lento. Se aconseja consultar diversos estudios antes de seleccionar un mecanismo de inferencia ([Miz 82], [Kis 85], [Li 89], y sus referencias).

#### 4.2.1.4 Tratamiento de la información de salida

- Existen distintos *métodos de desborrosificación* y, desafortunadamente, no existe un procedimiento sistemático para elegir una estrategia de conversión determinada, puesto que está influenciada en gran medida por el modo de razonamiento utilizado; los más comúnmente empleados son: *desborrosificación lineal*, *promedio de máximos* (“*Mean-of-Maxima*”: MOM), y *centro de gravedad* (“*Center-of-Area*”: COA) (capítulo 2, 2.6.1).

Aunque no existe una solución única, entre otras cosas porque no hay un criterio de bondad para el controlador borroso absolutamente preciso, el más utilizado es el *centro de gravedad*, por ser el que tiene en cuenta más información, sobre todo en combinación con el mecanismo de inferencia del mínimo. El MOM es el que consigue en media mejores

resultados, independientemente de la función de implicación. Tanto uno como otro presentan resultados similares cuando la función de pertenencia de los conjuntos borrosos es simétrica, lo que demuestra su dependencia de los otros factores. En algunos estudios han sido comparados con profundidad: [Bra 78], [Lak 85], [Cár 93], [Miz 91], [Zha 91].

#### **4.2.2 Influencia de los parámetros de ajuste**

Se definen, en este apartado, los parámetros que se van a considerar ajustables una vez determinada la estructura general del controlador borroso. Sin embargo, también en ellos se da una fase previa de configuración, en la que se establece su forma, valor inicial, etc., si bien luego se estudian los efectos de su variación.

##### **4.2.2.1 Tratamiento de la información de entrada**

- *Factores de escala* son constantes reales que multiplican los valores de una variable, modificando los límites de su rango de variación.

Son importantes como parámetros de ajuste porque al variarlos se consigue ajustar la acción de control, dentro de ciertos límites, sin necesidad de cambiar la definición de las reglas o de los términos lingüísticos.

El carácter no lineal de los controladores borrosos hace que una variación de los factores de escala modifique su no linealidad [Yin 90], pudiendo presentarse situaciones nuevas; por eso se aconseja realizar las simulaciones necesarias para detectar esas situaciones.

##### **4.2.2.2 Base de conocimiento**

- Las *Funciones de pertenencia* representan el grado de asociación de un valor numérico a un conjunto borroso. La elección de los grados de pertenencia está basada en un criterio subjetivo de decisión.

Su forma varía, incluso para la misma variable lingüística, haciéndolas más estrechas donde se requiere una mayor precisión, y aumentando su amplitud donde se

busca una acción más suave y con menor resolución (dando mayor grado de pertenencia a cualquier valor numérico). Deben ser lo suficientemente anchas para reducir la sensibilidad al ruido cuando los datos medidos están perturbados.

Su influencia está muy unida a la de la partición del espacio de las variables. Las pendientes de las funciones de pertenencia son menos importantes que las zonas de intersección entre ellas, que es lo que determina las características de la transición entre dos funciones [Mat 93a].

Conviene matizar que, una vez elegida su forma mediante métodos subjetivos u otras estrategias de determinación, aunque ésta no varía, sí pueden cambiar sus características (centro, amplitud, etc.). De hecho, éste resultado que varía el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto borroso, es equivalente a variar los factores de escala que modifican ese valor de entrada.

La especificación de las funciones de pertenencia afecta al funcionamiento y robustez del controlador [Lak 85], [Tor 93].

- La *Base de reglas* tiene una influencia decisiva en la acción de control, puesto que define el comportamiento del sistema borroso.

Para acortar el tiempo de ejecución del controlador se puede definir previamente, al margen del proceso de control —fuera de línea— una tabla de reglas, describiendo la salida del controlador a partir de todas las posibles combinaciones de las señales de entrada.

En vez de variar las reglas se pueden utilizar dos tablas: una inicial y otra de control fino, con mayor escala de resolución y acciones proporcionales a esa escala. De esta forma, un error que pudiera parecer pequeño con la tabla inicial, con esta última sería mayor y el regulador seguiría actuando, en vez de detenerse por haber alcanzado ya la zona muerta (donde no se genera acción de control ante entradas inferiores a un límite). Este efecto se denomina “*efecto zoom*” [Ped 93], y conlleva implícito el concepto de jerarquía entre unas reglas más específicas que son invocadas por otras más generales o meta-reglas [Sug 85]. Equivale a ampliar la partición de la variable correspondiente en esa banda en la que se requiere mayor resolución. Es perfectamente posible disponer de una sola tabla para ambos casos, y variar únicamente los factores de escala que modifican las variables de entrada y salida.

Al modificar las reglas debe tomarse la precaución de mantener las condiciones de consistencia y estabilidad requeridas, ya que pueden perderse en el grado necesario al variarlas. También hay que tener en cuenta que una redundancia de éstas —habitualmente su modificación se traduce en añadir reglas adicionales— provoca un mayor consumo de memoria y tiempo computacional. Por último, el problema de la convergencia del conjunto de reglas está aún poco resuelto de forma general.

### **4.3 EFECTOS DE LA VARIACIÓN DE LOS FACTORES DE ESCALA Y DE LAS REGLAS**

Se consideran, para la posterior aplicación de los métodos de sintonía, los efectos de la variación de los *factores de escala* o *ganancias* de las variables —que afectan a las fases de conversión de información concreta-borrosa en uno u otro sentido— así como la variación de *las reglas de control*. Estas consecuencias son la que se persiguen, de una forma más o menos directa, en cualquier método de ajuste.

#### **4.3.1 Variación de los factores de escala**

Los efectos generales de variar los factores de escala, que ponderan tanto las variables de entrada como de salida, pueden resumirse en:

1. Aumentar las ganancias de las variables de entrada supone reducir los universos de discurso de éstas, ya que se comprimen los centros de sus etiquetas lingüísticas [Jim 91]; esto se traduce en una mayor consideración de valores pequeños de entrada, a los que se les asocia un grado de pertenencia mayor.

Sus consecuencias en control son directas: la acción de control es más precisa y brusca, porque el controlador resulta más selectivo con las reglas que aplica. Esto permite un control más fino, al aumentar la resolución sobre todo en la banda cercana al estado estacionario. Como consecuencia, la respuesta del sistema es más rápida y oscilatoria, pudiendo reducir el error permanente. Mejora, pues, el transitorio al disminuir el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento, pero aumenta el riesgo de inestabilidad al aumentar la sobreelongación.

Sin embargo, se pierde información para valores altos de los errores, y por lo tanto, el controlador es menos sensible durante el tiempo de subida, aunque sea más sensible en la banda de la señal de referencia [Pro 79]. Esto aumenta la zona de saturación del controlador, que concluye la misma salida para distintos valores de entrada.

El número de reglas debe ser mayor al aumentar estos factores, porque la convergencia se hace más difícil de conseguir.

2. Disminuirlas produce los efectos contrarios; al aumentar la amplitud de las funciones de pertenencia, éstas son más planas, por lo que cualquier valor numérico de entrada aumentará su grado de pertenencia a todas las etiquetas lingüísticas. Por lo tanto, todas las reglas tendrán más peso. Se consigue un control más suave, que produce una respuesta más lenta y con menor sobreelongación.

Para valores bajos de estos factores, la respuesta se empobrece porque la banda de tolerancia en torno a la señal de referencia es muy ancha, y admite errores estacionarios considerables y oscilaciones.

3. La variación de la ganancia de la salida está aún poco estudiada [Buc 89], [Sha 88], [Tan 93], puesto que la dependencia del funcionamiento del sistema respecto a este parámetro es compleja. Aunque para los casos estudiados en los siguientes capítulos la salida es proporcional a este factor de escala, depende del método de desborrosificación empleado. Es el factor más desestabilizante; influye significativamente en la convergencia.

Su aumento —realizar una compensación por ganancia—, mejora el control en cuanto que hace más rápida la respuesta, pero también puede hacer al sistema menos estable, ya que aumenta la sobreelongación.

Decrementarlo ayuda a eliminar la inestabilidad inicial [Bra 79a] que se suele producir al realimentar el sistema. Valores bajos de este parámetro producen tiempos de subida lentos y empobrecen la respuesta [Pro 79].

### **4.3.2 Variación de las reglas de control**

En algunos casos es difícil obtener las reglas borrosas de control adecuadas, especialmente cuando se trata de procesos con dinámica complicada. Las reglas iniciales pueden entonces no ser las más apropiadas. Por eso, algunos CB incorporan un algoritmo de adaptabilidad que cambia las reglas en base al estado actual del proceso.

Dada su influencia sobre el funcionamiento del regulador, su cambio debe mantenerse dentro de unos límites, de forma que no sea brusco, para no destruir la convergencia y que no haga peligrar la estabilidad del controlador. Para ello es necesaria una adecuada estructura de la tabla de reglas: dimensión, consistencia, completitud, etc. La base de reglas tiene una influencia directa y notoria sobre la rapidez de procesamiento —junto con el método de inferencia utilizado— y sobre la dimensionalidad del problema.

## **4.4 REVISIÓN DE LOS MÉTODOS DE SINTONÍA**

Se va a realizar una taxonomía de los procedimientos de sintonía propuestos en la literatura de control. Para ello, se ha establecido una primera clasificación atendiendo al método empleado:

- a) **SINTONÍA CUALITATIVA:** modifica el comportamiento del controlador en función de la experiencia del usuario y los resultados obtenidos. Se basa en el conocimiento intuitivo del operador sobre cómo influye la variación de los parámetros del controlador en la respuesta del sistema. Se lleva a cabo manualmente o mediante reglas.
  
- b) **SINTONÍA ANALÍTICA:** basada en el modelo tanto del proceso como del controlador; establece una relación matemática entre los parámetros del regulador y las especificaciones deseadas para el comportamiento del sistema.

Esta metodología es buena para un primer ajuste, para casos sencillos, abordables analíticamente, en los que se pueden calcular los parámetros iniciales por distintos procedimientos.

- c) **SINTONÍA HÍBRIDA:** consiste en aplicar, en fases distintas, los dos métodos anteriores. La sintonía de un controlador borroso no se puede basar exclusivamente en unos datos analíticos, ya que hay acciones de control que no conviene aceptar aunque sean resultado de esos métodos, porque no están de acuerdo con nuestro conocimiento del proceso. Pero, por otro lado, una sintonía exclusivamente heurística puede resultar demasiado tediosa y requerir excesivo tiempo para la búsqueda de unos parámetros adecuados.

Por lo tanto, se establece con esta sintonía híbrida una posible técnica de supervisión: se mejoran cualitativamente los parámetros obtenidos por métodos analíticos, permitiendo un ajuste más fino.

Atendiendo a esta clasificación de tipos de sintonía, se catalogan las distintas estrategias de ajuste estudiadas, que se han aplicado tanto a los factores de escala o ganancias de las variables como a las reglas (Figura 4.1).

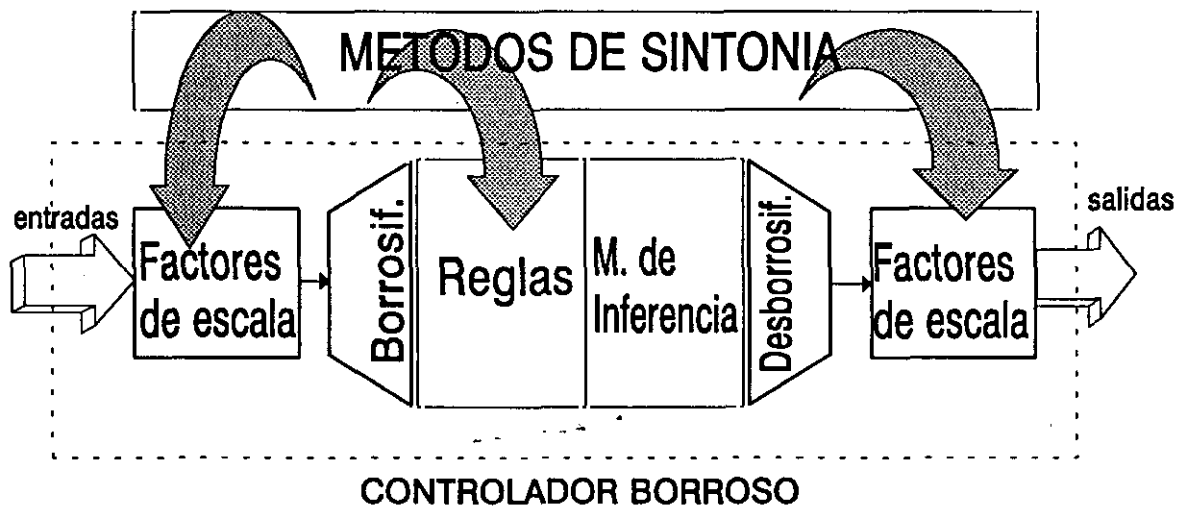


Figura 4.1 - Algoritmos de sintonía aplicados a los controladores borrosos

#### 4.4.1 Métodos de ajuste de los factores de escala

Las variaciones de los factores de escala, descritas en el apartado 3.2, con sus consiguientes efectos, pueden conseguirse mediante métodos cualitativos o analíticos de sintonía, tal como se ha resumido en la Tabla 4.2 después de estudiar las distintas estrategias consideradas.



Tabla 4.2 - SINTONÍA DE LOS FACTORES DE ESCALA DE UN CB

<b>Método: SINTONÍA CUALITATIVA</b>	
<b>Criterio:</b>	<b>Basado en:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- especificaciones de la respuesta temporal (velocidad de respuesta, sobrelongación, tiempo de subida, etc.)</li> <li>- especificaciones de la respuesta en frecuencia (margen de fase, margen de ganancia, frecuencia de cruce, etc.).</li> <li>- ajuste de los dominios de las variables elegidas como entradas del controlador</li> <li>- eliminación de la inestabilidad inicial que se puede formar al realimentar el sistema</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- efectos de la variación de los factores de escala sobre la respuesta del sistema [Jim 91], [Sha 88], [Kin 77], [Pro 79]</li> <li>- reformular las características de la respuesta en frecuencia como especificaciones temporales, y variar las ganancias [Tan 93]</li> <li>- análisis cualitativo del comportamiento del error en el plano de fases de las entradas (error vs. suma del error) [Bra 79a]</li> <li>- efectos de la variación de las ganancias sobre la respuesta [Sha 88], [Tan 93], [Bra 79a]</li> </ul>

<b>Método: SINTONÍA ANALÍTICA</b>	
<b>Criterio:</b>	<b>Basado en:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- especificaciones de la respuesta temporal (velocidad de respuesta, sobrelongación, tiempo de subida, etc.)</li> <li>- ajuste de las funciones de pertenencia (varían su centro, pendiente, valor de pico, etc.) para alcanzar alguna especificación de la respuesta en el dominio temporal</li> <li>- equiparación a un sistema de ganancia variable [Pal 93]</li> <li>- optimización de las funciones de pertenencia</li> <li>- ajuste borroso de las ganancias buscando objetivos borrosos de la respuesta temporal</li> <li>- especificaciones borrosas de la respuesta temporal (sobrelongación, velocidad, etc.)</li> <li>- amortiguamiento de la respuesta obtenida mediante sintonía cualitativa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- expresión analítica de las ganancias en base a funciones del error [Bar 90], [Cip 93], [Sha 88], [Bat 91], [Pen 90] o técnicas clásicas de sintonía [Dor 93], [San 94], [Hay 91]</li> <li>- análisis del gradiente descendente de la variación de los picos de las funciones de pertenencia [Zhe 91], de otra función objetivo [Nom 91], u otra función del error [Bat 91], [Mat 93],[Mat 92]</li> <li>- funciones de correlación que miden la dependencia estadística entrada-salida del CB</li> <li>- algoritmo de optimización [Ath 93]</li> <li>- evaluación de la respuesta (sobrelongación, tiempo de subida, etc.) como entradas al sistema borroso [Car 94], [Mae 92], [Liu 94]</li> <li>- considerar el diseño del CB óptimo como un problema de decisión clásico [Buc 91]</li> <li>- compensación por adelanto de fase [Tan 93]</li> </ul>

En general, estas ganancias se denominan  $GE$ ,  $GR$ ,  $GS$ , ... para las variables de entrada error ( $e$ ), cambio en el error  $ce$  ("rate"), integral o suma del error ( $s$ ); y  $GU$  cuando modifica la variable de salida correspondiente a la acción de control (absoluta  $u$  o su variación  $\Delta u$ ).

#### **4.4.1.1 Sintonía cualitativa**

La variación cualitativa de los factores de escala busca mejorar el comportamiento del controlador, basándose en los efectos de los cambios de las ganancias sobre la respuesta del sistema (sección 3.1). El experto aplica su conocimiento heurístico y su experiencia sobre la influencia de estos parámetros para conseguir unas especificaciones deseadas.

##### Métodos:

- \* Estas *especificaciones* —de forma análoga a los controladores convencionales—, suelen venir definidas *en el dominio temporal*; se pretende alcanzar unos valores deseados de sobrelongación, velocidad de respuesta, tiempo de subida, etc., aumentando o disminuyendo las ganancias de las variables del controlador borroso. Aunque no siempre se consiguen alcanzar estos requerimientos con la precisión buscada, mejoran el control [Jim 91], [Ped 93], [Kin 77]. El conocimiento de algunas de las características del proceso a controlar (retardos, constante de tiempo dominante, etc.) sirve para ayudar en la selección inicial [Vil 93], [Dor 93], [San 94].
- \* Se establece un criterio de sintonía análogo al anterior cuando las especificaciones vienen dadas en el *dominio de la frecuencia*, sin más que reformular los requerimientos de margen de fase, margen de ganancia, frecuencia de cruce, etc., en términos de especificaciones temporales [Tan 93]
- \* Uno de los efectos que se persigue al variar las ganancias —concretamente disminuyendo el factor que modifica la variable de salida del controlador— es *eliminar la inestabilidad* que se produce inicialmente al realimentar el sistema con el controlador borroso, que generalmente adopta forma de ciclo límite [Sha 88], [Tan 93], [Bra 79a].

\* El dominio estimado inicialmente para las variables de entrada puede no ser adecuado. Las trayectorias del sistema en lazo cerrado en el espacio “e x s” (error vs. suma del error), se utilizan entonces para evaluar y actualizar este dominio [Bra 79a]. Esto se realiza mediante los factores de escala de esas variables de entrada  $GE$  y  $GS$ , para circunscribir sus dominios adecuadamente (Figura 4.2).

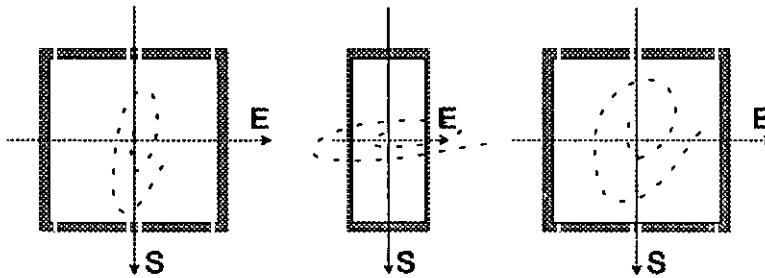


Figura 4.2 - Ajuste del dominio de entrada

#### 4.4.1.2 Sintonía cuantitativa

Los factores de escala de las variables se expresan en algunos casos como funciones, lineales o no lineales, del error [Yin 90], [Bat 91], [Sha 88]:

$$GR = gr(e, ce, X) \quad GE = ge(e, ce, X) \quad (4.1)$$

donde  $X$  es un vector de parámetros que depende del método empleado:  $X = GU, L, \rho$ , etc., para  $L$  = centro de las etiquetas definidas para las variables,  $\rho$  = criterio de decisión, etc. Se ajustan así analíticamente las ganancias para conseguir unas especificaciones de la respuesta del sistema, generalmente dadas en el dominio temporal.

#### Métodos:

\* En algunos casos sencillos, esto permite aplicar técnicas clásicas de sintonía a los parámetros de un controlador borroso [Dor 93], [San 94]:

$$X = (GU, L, Ki, Kp)$$

$$\frac{GR = \frac{Kp(2L-f)}{0.5L.GU}}{GE = \frac{Ki(2L-f)}{0.5L.GU}} \quad (4.2)$$

$$f = \text{máx} (GE \cdot |e(t)|, GR \cdot |ce(t)|) \leq L \quad (4.3)$$

para  $K_p$ ,  $K_i$  ganancias proporcional e integral, respectivamente, de un regulador PI, y  $L$  el extremo del universo de discurso de las variables.

\* En [Hay 91] el ajuste de los factores de escala se basa en las reglas de sintonía de un controlador convencional PI. Los factores de escala se calculan a partir de los parámetros de un modelo de primer orden del proceso: la ganancia  $K$ , la constante de tiempo  $\tau$  y el retardo  $\tau_0$ ; y el valor del máximo cambio de la señal de referencia  $r_{\text{max}}$ . El modelo estimado es obtenido a partir de la respuesta del sistema a una entrada escalón.

$$X = (r_{\text{max}}, K, \tau, \tau_0),$$

$$GE = \frac{1}{r_{\text{max}}} \quad GR = \frac{0.5(\tau + \tau_0)}{r_{\text{max}}} \quad GU = \frac{0.9r_{\text{max}}}{K(\tau + \tau_0)} \quad (4.4)$$

\* [Bar 90] establece una razón  $\rho$  entre dos errores consecutivos, que sirve como criterio de decisión para acelerar o frenar la respuesta del controlador, aumentando o disminuyendo los factores de escala cuando esa relación cumple unas condiciones umbrales ( $\alpha$  y  $\beta$ ), elegidas mediante métodos de prueba y error.

$$X = (\rho, \alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} \text{si } |\rho| > \alpha, \quad GE &= GE \pm \Delta i \\ \text{si } \rho^2 > \beta, \quad GR &= GR \pm \Delta i \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $\rho = e(k+1)/e(k)$ ;  $\Delta i$  = acción de desplazar una unidad, a la derecha o a la izquierda, un elemento en el universo de discurso discreto.

Este procedimiento se aplica hasta que el valor de  $\rho^2$  pertenece al volumen abarcado por la relación  $R = e(k)/e(0)$ ; la elección de  $\rho$  es arbitraria, pero tiene un efecto amortiguador que mejora la estabilidad relativa. Como sólo toma valores altos en los cambios bruscos de referencia no se realiza una sintonía continua, por lo que las ganancias no siempre convergen a valores fijos.

\* Este método ha sido posteriormente modificado [Cip 93], variando tanto la razón de cambio ( $\rho = e(k)/e_0$ ,  $e_0$ : primer error distinto de cero), como el criterio de variación de las ganancias, para forzar la convergencia de éstas:

$$X = (\rho, \alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} \text{si } |\rho| > \alpha, \quad GE &= GE \pm 2\Delta i \\ \text{si } \rho^2 > \beta, \quad GR &= GR \pm 2\Delta i \end{aligned} \quad (4.6)$$

\* Las funciones de pertenencia de la variable de salida del controlador se ajustan como respuesta al funcionamiento, pasado o futuro, del sistema de control [Bat 91]. Un modelo lineal del proceso es identificado en línea, y se utiliza para predecir el comportamiento futuro del controlador. Si la modelización del proceso es irrealizable, se utiliza entonces un índice relacionado con el comportamiento del controlador en el pasado para hacer los ajustes.

$$\Delta C_{\max} = f\{e_{\max} \text{ ó } e(t+1/t)\} \quad (4.7a)$$

$$GU = 1/C_{\max} \quad (4.7b)$$

$e_{\max}$ : máximo error absoluto medido dentro de una ventana de observación del pasado;

$e(t+1/t)$ : predictor de un paso del error de la salida del proceso;

$f$ : relación funcional que se considera como un parámetro de ajuste a definir por el usuario.

\* Otro método de ajuste del factor de escala de la salida es el propuesto en [Pen 90], donde define tanto las ganancias de las variables de entrada como de salida independientemente, pero cada una en función del error y del cambio en el error. Para calcular el factor del control, fija las de las entradas, y a partir de unas constantes  $K_1$  y  $K_2$  predefinidas halla  $GU$ :

$$GU = K_1 \cdot |e| + K_2$$

\* Al aplicar una variación cualitativa, aunque se mejora el control en algunos aspectos, también se producen otros efectos no deseados, como por ejemplo aumentar las oscilaciones al disminuir el tiempo de respuesta (incrementando las ganancias de las entradas). Para paliar estos efectos, se aplica una compensación de fase al sistema, que mejora sus características de amortiguamiento [Tan 93]. Basándose en la estrecha relación

existente entre las características temporales y en el *dominio de la frecuencia*, es posible seleccionar la respuesta temporal deseada para el sistema: sobreelongación  $ov$  y tiempo de pico  $tp$ , y reformular estas especificaciones en los valores deseados de margen de fase  $\theta_{0m}$  y frecuencia de cruce  $\omega_{CG}$ . Entonces, aplicando una transformación  $T$  de coordenadas (4.8b), se realiza una compensación efectiva por adelanto de fase que permite calcular los parámetros  $a^*$  y  $b^*$  de un nuevo controlador con el que se obtienen los requerimientos pedidos:

$$G_c(s) = (a^* + b^*s)/s \quad (4.8a)$$

$$T(\theta_c, \omega_{CG}) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_c) & \frac{-\sin(-\theta_c)}{\omega_{CG}} \\ \omega_{CG} \cdot \sin(-\theta_c) & \cos(-\theta_c) \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

$$[a^* \ b^*] = [a \ b] \cdot T(\theta_c, \omega_{CG}) \quad (4.8c)$$

$$\theta_c = \theta_{0m} - \theta_m \quad (4.8d)$$

siendo  $\theta_m$  el margen de fase real de la función de transferencia en lazo abierto.

\* Otro método [Pal 93], poco empleado en la práctica, se basa en asumir que en el caso estacionario, una optimización del ajuste de los factores de escala encuentra cierta dependencia estadística entre la entrada y la salida. Una medida de la intensidad de esta dependencia es la función de correlación y el coeficiente de correlación.

Para señales de entrada gaussianas, un CB dado puede ser virtualmente reemplazado por una ganancia variable que depende de la función de transferencia no lineal característica del controlador borroso. Esta ganancia depende de la amplitud  $e_0$  (para entradas sinusoidales) o de la varianza  $\sigma_e^2$  (para ruido) de la entrada del controlador, y se obtiene mediante las funciones de correlación halladas; concretamente, la ganancia variable  $K(\sigma_e)$  se calcula con la función de correlación cruzada  $R_{e,u}(\sigma_e^2)$  y el valor esperado  $E$  según la expresión:

$$K(\sigma_e) = R_{e,u}(\sigma_e) / \sigma_e^2 \quad (4.9a)$$

$$R_{e,u}(\sigma_e) = E\{(e(t) - E[e(t)])(u(t) - E[u(t)])\} \quad (4.9b)$$

\* Se puede considerar el diseño de un controlador borroso óptimo como un problema de decisión clásico [Buc 89], donde los objetivos equivalen a las restricciones en un problema de optimización. Los objetivos borrosos son conseguir un tiempo de subida “corto”, mantener la sobrelongación “pequeña” y alcanzar un tiempo de asentamiento “bajo”.

\* Otro algoritmo adaptativo [Mat 93b] ajusta las ganancias del controlador  $GE$  y  $GR$  buscando minimizar  $e_o$ , la diferencia entre la salida del sistema y la salida  $y_m$  de un modelo de referencia. Para garantizar la convergencia del comportamiento dinámico del sistema realimentado se utiliza el teorema de estabilidad de Lyapunov. La función de Lyapunov elegida es:

$$V(t) = e'_o{}^2(t) + K.e_o{}^2(t) + \lambda ce.\phi ce^2 + \lambda e.\phi e^2 \quad (4.10a)$$

Las reglas finales de ajuste (4.10b) y el modelo borroso de control (4.10c) son:

$$GE(t) = - e(t). e'_o / \lambda e \quad GR(t) = - ce(t). e'_o / \lambda ce \quad (4.10b)$$

$$\Delta u(e, ce) = GE.(e - \beta e) + GR.(ce - \beta ce) + c_o \quad (4.10c)$$

representan  $\beta e$ ,  $\beta ce$  los centros de los términos borrosos correspondientes a las entradas.

Por último, cabe destacar la posibilidad de establecer un *ajuste borroso* en línea de los factores de escala, evaluando los resultados del control [Mae 92], [Buc 91], [Liu 94], o las entradas borrosas [Car 94]. Los objetivos de esta evaluación deben definirse como las entradas al sistema borroso, cuya salida es el factor de escala buscado o la variación de los factores de escala que debe aplicarse a sus valores anteriores (Figura 4.3). Estas técnicas están dando lugar a numerosos trabajos de autosintonía.

\* En [Car 94] los factores de escala  $GE$  y  $GR$  se actualizan solamente si las reglas borrosas activadas corresponden a la fase del estado estacionario. Las reglas de  $GR$  se actualizan en función del tiempo de subida de la respuesta de la planta a un salto, y  $GE$  se modifica con el fin de reducir la variable normalizada del error, sin disminuir la precisión. Las reglas tienen la forma:

$$R_i: \text{ si } e \text{ es } A_i \text{ y } ce \text{ es } B_i \text{ entonces } GE \text{ es } C_i \quad (4.11a)$$

$$R_i: \text{ si } e \text{ es } A_i \text{ y } ce \text{ es } B_i \text{ entonces } GR \text{ es } C_i \quad (4.11b)$$

<i>GE</i>	<i>ce</i>							
	<i>e</i>	NG	NM	NP	Z	PP	PM	PG
NG		Z	Z	Z	NM	Z	Z	Z
NM		PM	PP	Z	Z	Z	PP	PM
NP		PG	PM	Z	Z	Z	PM	PG
Z		PG	PG	PP	Z	PP	PG	PG
PP		PG	PM	Z	Z	Z	PP	PM
PM		PM	PP	Z	Z	Z	PP	PM
PG		Z	Z	Z	NM	Z	Z	Z

Figura 4.3 - Ejemplo de ajuste borroso de los factores de escala (*GE*).

La nomenclatura corresponde a las etiquetas Positivo (P), Cero (Z) o Negativo (N), con los calificativos Grande (G), Mediano (M) o Pequeño (P)

\* En otros trabajos, los objetivos de la evaluación son la sobrelongación, el tiempo de subida y la amplitud [Mae 92], [Liu 94]. La actualización de las ganancias se realiza mediante reglas que, por ejemplo, son para cada objetivo de la forma:

$$R_i: \text{si } e_{ov} \text{ es } A_i \text{ entonces } \Delta a_i \text{ es } C_i \quad (4.12a)$$

$$a_i = a_i + f(\Delta a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.12b)$$

$$GE = 1/a_1, \quad GR = 1/a_2, \quad \dots, \quad GU = 1/a_n \quad (4.12c)$$

donde  $e_{ov} = ov$  (valor real) -  $ov^*$  (valor objetivo) de la sobrelongación.

Algunos métodos analíticos modifican las funciones de pertenencia, desplazando sus picos o centros en vez de variar los factores de escala con los mismos efectos. Su variación puede basarse en una función del error [Mae 91], [Mat 92], [Mat 93b] o en el análisis del gradiente descendente de la variación de estos valores [Zhe 93], [Nom 91].

\* Zheng [Zhe 93] analiza el gradiente de la diferencia total para cada valor de pico  $p_{ik}$  de las funciones de pertenencia de las variables de entrada (Figura 4.4). Para sintonizar el CB, es necesario disponer de un grupo de datos de entrenamiento (pares de entradas relevantes  $x_i$  / salidas deseadas  $u_n^*$ ), y deben ser suficientes para representar perfecta e



íntegramente el comportamiento de un operador experto. Esta información se utiliza para informar al usuario de qué valores de pico conviene desplazar para mejorar la diferencia total de forma más efectiva, e indica la dirección del ajuste. Este gradiente es definido como la derivada parcial:

$$dif_n = u_n - u_n^* \tag{4.13a}$$

$$\frac{\partial \sum_n |dif_n|}{\partial p_{ik}} = \sum_n \frac{\partial |dif_n|}{\partial p_{ik}} = \sum_n \text{sgn}(dif_n) \cdot \frac{\partial u_n}{\partial p_{ik}} \tag{4.13b}$$

$u_n$  es la salida del controlador borroso para el grupo  $n$ ésimo de datos de entrenamiento.

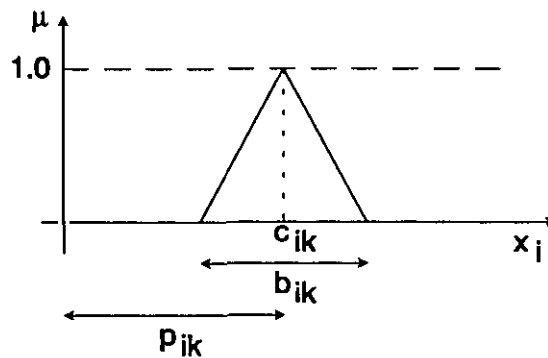


Figura 4.4 - Parámetros de una función de pertenencia

\* En [Nom 91] se consideran funciones de pertenencia triangulares para los antecedentes de las reglas, y se ajustan mediante el método descendente. El método descendente busca un vector  $z$  que minimice una función objetivo  $E(z)$ . Este vector  $z$  es un vector  $n$ -dimensional de los parámetros de ajuste ( $c_{ik}$ : centro de la función de pertenencia  $k$  de la entrada  $i$ ,  $a_{ik}$ : amplitud, etc.) (Figura 4.4). La regla de aprendizaje se expresa:

$$z_i(t+1) = z_i(t) - K \frac{\partial E(z)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n \tag{4.14}$$

donde  $t$  es el número de iteraciones para el aprendizaje y  $K$  es una constante. Aquí la función objetivo se ha definido como  $E = (y - y^*)^2 / 2$ , para  $y^*$  la salida deseada. Particularizando las reglas de aprendizaje para cada parámetro de  $z$ , serán:

$$c_{ik}(t+1) = c_{ik}(t) - K_c \frac{\partial E}{\partial c_{ik}} \quad (4.15)$$

\* Otro método —[Mat 92]— determina los parámetros de las funciones triangulares de pertenencia para que el CB simule a su equivalente PID. El controlador borroso lineal es diseñado eligiendo:

$$K = \frac{c_e}{\beta_e}, \quad \frac{K.T}{T_i} = \frac{c_s}{\beta_s}, \quad \frac{K.Td}{T} = \frac{c_{ce}}{\beta_{ce}} \quad (4.16)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo;  $K$ ,  $T_i$  y  $T_d$  los parámetros de sintonía del PID, y  $c_i$ ,  $\beta_i$  ( $i =$  cambio en el error  $ce$ , error  $e$ , suma del error  $s$ ) los puntos de saturación asociados a cada variable.

\* También se resuelve la optimización de las funciones de pertenencia por el método *simplex* [Ath 93] o cualquier otro método de optimización:

$$\text{Maximizar } J = -\int_0^T e^2(t).dt + \phi(y, u, t) \quad (4.17)$$

#### 4.4.2 Métodos de ajuste de las reglas de control

Las reglas del controlador se expresan en forma lingüística —CB tipo Mamdani, (3.4)— o definiendo los consecuentes como funciones analíticas de las variables del sistema —CB tipo Sugeno, (3.5)—. Para su modificación existen diversos criterios, no sólo en cuanto a las condiciones por las que se propone una variación, sino también sobre qué reglas modificar: todas, las relevantes, las que se han disparado la última vez, etc. Si se actúa sobre la tabla de reglas directamente, resulta más conveniente modificar sólo aquellas reglas que se han disparado.

La variación de las reglas no tiene consecuencias generales; debe particularizarse para cada representación y dominio de aplicación. Por lo tanto, los métodos que modifican las reglas son bastante específicos, aunque se han procurado exponer y resumir en la Tabla 4.3 algunos de ellos.

Tabla 4.3 - SINTONÍA DE LAS REGLAS DE CONTROL DE UN CB

<b>Método: SINTONÍA CUALITATIVA</b>	
<b>Criterio:</b>	<b>Basado en:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- seguimiento de la trayectoria del sistema en lazo cerrado en el plano de fases del dominio de entrada [Kin 77], o en el plano de fases del espacio lingüístico [Bra 79a]</li> <li>- evaluación de la consistencia y completitud, para detectar y evitar secciones multivaluadas o no especificadas [Ass 74], [Mam 74]</li> <li>- delimitar la respuesta del sistema a un salto a una banda predeterminada [Mam 75a]</li> <li>- analizar el comportamiento cualitativo del CB en el plano de fases del error para mejorar su comportamiento global [Fou 93]</li> <li>- optimización del conjunto de reglas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- efectos sobre el control de la variación de los consecuentes de las reglas relevantes mediante técnicas de prueba y error.</li> <li>- variación cualitativa de las reglas al variar sus consecuentes de forma gradual</li> <li>- determinación de las reglas de forma heurística.</li> <li>- considerar el CB como un controlador cualitativo para conseguir ciertas especificaciones de la respuesta</li> <li>- algoritmos genéticos [Her 93] para el ajuste</li> </ul>

<b>Método: SINTONÍA ANALÍTICA</b>	
<b>Criterio:</b>	<b>Basado en:</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- especificaciones de la respuesta (tiempo de subida, sobreelongación, etc.) [Sha 88]</li> <li>- evaluación de la salida del sistema para minimizar una función de coste</li> <li>- estimación paramétrica de los parámetros iniciales de las reglas, fuera del lazo de control, para minimizar una función de coste, optimizar un índice de comportamiento (función del error) o reducir errores globales</li> <li>- evaluación de la respuesta para modificar las reglas más relacionadas con el estado actual</li> <li>- ajuste de los parámetros de los subsistemas lineales para garantizar su estabilidad</li> <li>- evaluación del error de la salida del proceso</li> <li>- optimización de un índice de comportamiento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- reemplazar y eliminar reglas en base a una función del error</li> <li>- autoaprendizaje del ajuste de los parámetros óptimos de las funciones que representan las reglas mediante redes neuronales [Lee 91]</li> <li>- algoritmos de regulación de los consecuentes [Qia 92], [He 93]; métodos de regresión lineal [Mat 92]; gradiente descendente [Gué 93], [Nom 91], [Gra 88], [Tak 85]; "mapping" [Smi 91]; modelo del proceso [Bos 93]</li> <li>- ajuste borroso de parámetros de los consecuentes de las reglas [Mae 92], [Hay 91]</li> <li>- obtener un sistema borroso estable total a partir de subcontroladores lineales [Tan 92]</li> <li>- SOC [Pro 79]</li> <li>- control borroso adaptativo basado en un modelo borroso del proceso [Agu 93]</li> </ul>

#### 4.4.2.1 Sintonía cualitativa

La selección para mejorar de forma cualitativa las reglas se basa en el conocimiento intuitivo que tiene el operador del comportamiento en lazo cerrado del sistema. Estos cambios, hechos en las reglas en cada etapa, son los cambios esperados para alcanzar la respuesta deseada del sistema y los objetivos de control. El control borroso adaptativo es capaz de modificar directamente las variables borrosas; por ejemplo, puede variar su valor de *pequeño a muy pequeño*.

##### Métodos:

- \* El ajuste cualitativo de las reglas ha sido tratado en [Ass 74] y [Mam 74], examinando cada instante de muestreo la condición de entrada lingüística y la salida borrosa inducida. Así se detectan secciones multivaluadas —distintas acciones para la misma entrada—, o no especificadas, y se intenta mejorar el comportamiento del control en lazo cerrado redefiniendo gradualmente de forma heurística las reglas; pero no se sugiere ninguna metodología para hacerlo.
- \* Un intento de sistematizar un algoritmo que ajuste las reglas, de forma que la respuesta del sistema a un salto en la entrada permanezca dentro de una banda prescrita (“prescriptive fuzzy band”) se describe en [Mam 75a]. Este método es eficiente en los casos considerados, pero añade problemas de convergencia.
- \* Los controladores borrosos pueden considerarse controladores cualitativos, y como tales analizar su comportamiento en el plano de fases del error. Así, es posible generar un conjunto de reglas del CB que produzcan el comportamiento cualitativo global deseado [Fou 93].
- \* Otro método cualitativo, denominado “scale mapping”, se desarrolla en [Kin 77]. Varía las reglas relevantes en base al seguimiento de la trayectoria en lazo cerrado del sistema a lo largo del dominio de entrada del controlador borroso, en un área del plano de fases del error  $e$  frente al cambio en el error  $ce$  ( $e$  vs.  $ce$ ). La principal ventaja de este método es que permite la actualización global, asumiendo la simetría del sistema respecto al cero y la monotonía del sistema.



El objetivo de esta modificación es un ajuste fino o calibrar el controlador borroso. La variación de las reglas puede entonces obtenerse por distintos métodos.

Métodos:

\* Procyk y Mamdani proponen el primer controlador borroso auto-organizado (“Self-Organizing Controller”, SOC), aplicado con buenos resultados en diversos ámbitos. Se define como “un controlador borroso adaptativo que es capaz de aprender cómo controlar satisfactoriamente una amplia variedad de procesos” [Pro 79]. Se trata de un CB capaz de desarrollar y mejorar sus reglas de decisión lingüísticas, expresadas cuantitativamente, y su estructura de forma automática, usando la teoría de conjuntos borrosos, como resultado de evaluar las desviaciones de la salida, hasta que converja a una determinada calidad. Sus características de funcionamiento y configuración (Figura 3.4) se han expuesto en el capítulo 3, sección 3.7.2.1.

Los principales problemas que presenta son la aparición de fenómenos cíclicos en la respuesta de control, con el riesgo consiguiente de inestabilidad, y un gran tiempo de asentamiento.

\* Para conseguir que la respuesta de la planta corresponda a una óptima, predefinida para el proceso, [Sha 88] propone un algoritmo que reemplaza reglas y elimina aquellas que no se utilizan, según un criterio establecido en función del error. Determina la correcta actuación del controlador  $u(e,ce)$  a partir de los datos de las entradas, y modifica la tabla de decisión borrosa  $T(e,ce)$  para ahorrar tiempo computacional y memoria. El número de cambios de las reglas de control debe converger a cero para que el algoritmo funcione.

\* [Tan 92] obtiene un sistema borroso global a partir de sub-controladores borrosos lineales, y determina los parámetros de las reglas del controlador borroso para que garantice la estabilidad de los subsistemas lineales en el sistema final. Así se puede aplicar la teoría de sistemas lineales (lugar de las raíces, diagrama de Bode o asignación de polos y ceros) para hallar los parámetros.

\* Existen diversas estrategias de sintonía que ajustan los parámetros basándose en la optimización de algún criterio. En [Nom 91] se asume que tanto los antecedentes como los consecuentes son números reales, y por lo tanto se pueden optimizar simultáneamente. Como en el caso de los antecedentes, las reglas de aprendizaje para el consecuente se

basan en el gradiente descendente (4.14) y (4.15). También utilizan el método descendente los trabajos de [Gué 93] y [Gra 88], así como [Tak 85], que define el índice de comportamiento del controlador borroso como una función de los errores de la salida, es decir, de la diferencia entre los datos de salida del sistema original y del modelo. Ese mismo índice se optimiza en [Agu 93] de forma adaptativa, añadiendo una identificación en línea que permite hallar un modelo borroso del proceso, en el que se basa el ajuste.

De forma similar pero fuera del lazo, [Bos 93] sustituye el proceso real por un modelo matemático, capaz de reproducir su comportamiento, aunque sea crudamente. Es posible entonces sintonizar los parámetros de las funciones de pertenencia de las reglas borrosas, para forzar la salida del sistema en lazo cerrado a una especificación.

\* En [Qia 92] se propone un algoritmo que actúa en línea, modificando las expresiones de las reglas borrosas con un factor  $\alpha$ : un número real que toma valores de 0 a 1. Genera la señal de control como una combinación convexa de las entradas borrosas del controlador (4.19), que es ajustada automáticamente en respuesta a las distintas situaciones de control:

$$u = f(e, ce) = \alpha \cdot e + (1 - \alpha) \cdot ce \quad (4.19)$$

La ecuación general de actualización del factor, cuando  $p$  es la versión desborrosificada de  $P$ , un conjunto de reglas borrosas para la sintonía, y  $K$  es una constante, es:

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) + K \cdot p \quad (4.20)$$

Sin un mecanismo adicional, esta expresión no garantiza que  $\alpha$  se mantenga dentro de su rango, permitiendo una posible acción de control mal definida. Es más, la fijación del segundo conjunto de reglas  $P$  es en muchos casos una tarea difícil, puesto que no está claramente relacionada con la experiencia. Por eso, los nuevos esquema propuestos en [He 93] son:

a) Basándose en una relación borrosa:

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) + K \cdot p(t) \cdot (1 - \alpha(t)), \quad \alpha(t) > 0.5 \quad (4.21a)$$

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) + K \cdot p(t) \cdot \alpha(t), \quad \alpha(t) \leq 0.5 \quad (4.21b)$$

b) Basándose en una ecuación en diferencias no lineal:

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) + K.f(e(t), ce(t)) \quad (4.21c)$$

\* Cabe destacar en [Smi 91] el empleo de técnicas de “mapping”. Utiliza una herramienta computacional, denominada “cell-to-cell mapping”, para evaluar el comportamiento de sistemas no lineales. Los parámetros son identificados con una aplicación novedosa del algoritmo LMS de Widrow-Hoff, un algoritmo basado en el gradiente descendente que minimiza el error cuadrático medio (MSE) entre la salida actual y la deseada del sistema, actualizando recursivamente los parámetros.

\* Un método sistemático de sintonía para un controlador borroso multivariable, aplicado a procesos estables desconocidos, es propuesto en [Vil 93]. Se basa en la ganancia estática  $K = G(0)$ , y en el conocimiento aproximado de las constantes de tiempo del proceso y de sus retardos. La señal de control  $u$  en el estado estacionario se calcula a partir del valor final deseado de las medidas, si existe la inversa, mediante la ecuación:

$$u = K^{-1}y(\infty) \quad (4.22a)$$

Los parámetros de las funciones de pertenencia de los consecuentes se calculan:

$$P = K^{-1}[A] \quad (4.22b)$$

donde  $A$  es una matriz seleccionada de forma que su columna  $i$  estima el cambio de la señal de referencia, y su  $i$ -elemento indica la función de pertenencia de la salida dominante.

\* Algunos estudios actuales han propuesto el autoaprendizaje del ajuste de los parámetros —de las funciones que definen los consecuentes— mediante redes neuronales [Lee 91].

\* Se aplica también el razonamiento borroso para ajustar los consecuentes de las reglas de control, usando unos criterios de evaluación del rendimiento [Mae 92]. A partir de la respuesta deseada, se estima el grado de la respuesta del controlador buscado en cada instante de muestreo, y se ajustan los consecuentes aplicando una tabla de reglas a los antecedentes ( $e$  y  $ce$ ). Este método de aprendizaje en tiempo real modifica aquellas reglas,



usadas en el pasado, que son las más probablemente relacionadas con el estado actual de control.

El consecuente de las reglas de control está definido por un número real  $c_i$ , típicamente el valor real del centro de una etiqueta, que son ajustados en cada instante de muestreo:

$$R_i: \text{ si } e \text{ es } A_i \text{ y } ce \text{ es } B_i \text{ entonces } \Delta c_i \text{ es } C_i \quad (4.23a)$$

$$c_i = c_i + f(\Delta c_i) \cdot w_i \quad (4.23b)$$

donde  $w_i$  es el grado de adaptación de la regla  $i$  en ese instante de muestreo.

\* También [Hay 91] utiliza este tipo de ajuste, usando como criterio el tiempo de subida y el valor de sobrelongación. Se crean dos tablas de reglas de sintonía, donde la salida es el incremento del consecuente  $u$  para cada criterio. La forma de las reglas es:

$$R_i: \text{ si } \textit{sobrelongación} \text{ es } A_i \text{ entonces } \Delta u \text{ es } C_i \quad (4.24a)$$

$$u = u \pm \Delta u \quad (4.24b)$$

#### 4.4.3 Ventajas e inconvenientes de los distintos métodos de sintonía

Aunque al enunciarlos se han ido exponiendo y razonando algunas de las ventajas e inconvenientes de los distintos métodos, se resumen de forma sistemática, en las siguientes páginas, los aspectos más significativos en uno y otro sentido de los procedimientos generales de sintonía, deducidos de los métodos referenciados, para que su estudio facilite la elección de las técnicas más convenientes.

### *Ventajas / Desventajas de la SINTONÍA CUALITATIVA*

- + son métodos directos y sencillos de aplicar.
- + influencia directa e inmediata del cambio de los parámetros en la variación del control, y por lo tanto de la respuesta.
- + mejoran el tratamiento de entradas con ruido al trabajar habitualmente en el espacio lingüístico (son menos sensibles a perturbaciones) [Bra 79a].
- + permiten paliar problemas de inconsistencia o falta de completitud en el conjunto de reglas, evitando acciones irregulares de control [Ass 74], [Mam 74].
- + aplican el conocimiento del experto, su experiencia en el control.
- + pueden ahorrar tiempo y memoria eliminando reglas, evitando redundancias.
- + consiguen alcanzar las especificaciones deseadas.
- + ayudan a eliminar la inestabilidad inicial en el lazo cerrado [Bra 79a], [Tan 93].
- + en general, consiguen mejorar el control de forma global.

- tienen una significativa influencia en la estabilidad del regulador.
- las restricciones en el control no permiten aumentar los factores de escala lo que a veces se requeriría para alcanzar las especificaciones con la precisión deseada.
- aumentar o disminuir mucho las ganancias puede provocar una acción de control demasiado lenta, hasta anularse en el límite, o acciones irregulares [Jim 91].
- en algunos procesos, pueden no encontrarse los valores necesarios para satisfacer la precisión del estado estacionario [Sha 88].
- no existe una relación clara para un caso general entre los factores de escala o parámetros de las reglas del controlador borroso, y las características de la respuesta temporal o en frecuencia del sistema [Tan 93], [Bra 79a].
- la inicialización de los factores de escala o la base de reglas de partida suele realizarse subjetivamente, o por métodos de prueba y error [Vil 93], [Bar 90], ....
- son métodos tediosos y muy costosos en tiempo.
- dependen del dominio de aplicación, por lo que no existe un procedimiento general; según el sistema de trabajo los efectos son más influyentes [Ass 74].
- la variación de las ganancias de las entradas provoca frecuentes cambios en la tabla de reglas, lo que empeora la convergencia de éstas [Bar 90], [Mam 75a] y puede provocar oscilaciones en torno al punto de consigna [Sha 88].
- se producen otros efectos no deseados (oscilaciones, redundancia, etc.).

---

***Ventajas / Desventajas de la SINTONÍA CUANTITATIVA***

---

- + permiten sistematizar técnicas de sintonía asistidas por ordenador.
  - + suponen un ahorro de tiempo computacional y memoria.
  - + aumentan la velocidad de cálculo y la eficiencia.
  - + en algunos casos, es posible establecer una sintonía en línea en tiempo real.
  - + ayudan a evitar las oscilaciones que pueden resultar de realimentar el proceso.
  - + mejoran el control.
- 
- los algoritmos son en general complejos [Sha 88], [Cip 93].
  - algunos de los métodos presuponen una información cuantitativa bastante completa, suficiente para representar el conocimiento del experto perfecta e íntegramente [He 93], [Bat 91], [Bos 93], [Vil 93].
  - los valores iniciales (parámetros de ajuste de las reglas, umbrales de los criterios, factores de escala) se suelen generar de forma subjetiva, por métodos de prueba y error o mediante reglas heurísticas [Mae 92], [Bar 90], [Cip 93]
  - la convergencia de los algoritmos que implementan el ajuste depende fuertemente de otros parámetros que se fijan para el controlador borroso.
  - son estrategias no generales, definidas para superficies de control particularizadas para casos concretos [Pal 93], [Bos 93]. Dependen de la aplicación (dominio, variables de entrada, modelo, etc.) y de la representación del conocimiento.
  - aparecen algunos de los problemas contemplados en el ajuste cualitativo: empeoramiento de la convergencia de las reglas, redundancia de éstas, influencia de otros factores, etc.[Sha 88].
  - es habitual la aparición de fenómenos cíclicos en la respuesta de control, lo que produce inestabilidad en el control y un gran tiempo de asentamiento.
  - influencia en la estabilidad y robustez del controlador, poco estudiadas todavía.
  - no siempre se alcanzan las expectativas iniciales, ya que la sintonía a veces no permite variar las ganancias lo necesario para conseguirlas.
  - en algunos casos no se produce una sintonía continua de las ganancias (sólo se actualizan sus funciones para ciertas condiciones), con lo que éstas pueden no converger a valores fijos.

#### 4.5 CONCLUSIONES

Como se ha visto en los capítulos anteriores, *gran parte de la flexibilidad inherente a los controladores borrosos se debe a que cuentan con numerosos grados de libertad a la hora de especificar sus componentes*. Aunque esta sobreparametrización complica su análisis, permite un amplio margen de posibilidades en su comportamiento.

Por otro lado, esto ha dado lugar a distintas propuestas de sintonía, puesto que son muy variados los elementos en los que centrar el ajuste. Por eso se ha considerado conveniente delimitar, en primer lugar y en lo posible, la influencia de algunas de estas especificaciones, para luego, desde una estructura general pero determinada, abordar el problema de la sintonía de los parámetros.

Al revisar los diversos métodos de ajuste referenciados en la literatura de control, la primera conclusión que salta a la vista es la falta de un procedimiento sistemático de sintonía para este tipo de controladores; tarea que parece inabordable, ya que para cada aplicación se parte de una configuración seguramente distinta del regulador. Las técnicas propuestas son válidas en situaciones específicas, por lo que la resolución general del problema sigue aún abierta.

Sin embargo, es patente la utilidad de una taxonomía como la realizada, que cumpla una función de consulta y referencia para saber *a priori* las consecuencias de una determinada elección, o incluso, si para una aplicación real se parte de una configuración ya fijada, que permita seleccionar el método que parezca más apropiado para el ajuste de sus parámetros.

Es de destacar el esfuerzo que se está realizando en este tema, lo que avala la importancia del control borroso. La sintonía es un aspecto que conlleva grandes mejoras, puesto que permite seleccionar algunos de los parámetros del regulador con criterios de eficiencia, estabilidad, etc.

# CAPÍTULO 5

## *TÉCNICAS CLÁSICAS DE SINTONÍA*

### *5.1 INTRODUCCIÓN*

El diseño de un controlador exige un profundo conocimiento de los requerimientos del sistema a controlar y de las características del regulador, para asegurar la conveniencia de aplicar un método u otro de control en cada aplicación determinada. Esta tarea no es fácil puesto que a menudo las especificaciones fijadas se encuentran interrelacionadas entre sí, y no siempre es posible conseguir los resultados con la precisión esperada.

En la mayoría de los procesos industriales, los controladores convencionales dan unos resultados aceptables para los requerimientos de la aplicación. Junto con su robustez y simplicidad inherentes, esto ha contribuido a que se hayan consolidado como herramientas muy útiles, y que no hayan sido desplazados por otros modernos algoritmos de control. Sin embargo, sí se han podido beneficiar de los grandes avances que se han producido en los últimos años en la teoría de sistemas, en la electrónica y en la informática, lo que les ha dotado de facilidades tanto de funcionamiento como de ajuste.

Su ininterrumpido desarrollo está motivado fundamentalmente por dos razones: la primera, porque este tipo de regulador es sencillo, rápido, fácil de realizar y, usualmente, fácil de sintonizar; la segunda, porque su estructura clásica es bien conocida y aceptada en

el mundo industrial, lo que ha permitido que los operarios de planta tengan un conocimiento bastante generalizado de lo que significa el comportamiento de los diferentes parámetros del regulador, desde el punto de vista de su sintonía con el proceso, y se encuentren cómodos en ese entorno.

Esto ha hecho que se desarrollen un amplio abanico de técnicas de sintonía, de demostrada eficacia. Por lo tanto, a la hora de plantear un estudio de la sintonía de cualquier otro método de control, conviene partir de lo que se ha venido desarrollando durante las últimas décadas, que ha sido avalado por innumerables aplicaciones reales.

Además, si se trabaja con sistemas que incorporan experiencia y conocimiento, como es el caso de los controladores borrosos, parece lógico revisar la experiencia y conocimiento que hay sobre el tema hasta el momento actual, aunque sea para otro tipo de controladores, y estudiar su aplicabilidad.

Por último, se aplican al PID en particular ya que es el elemento de control más utilizado, y para el que se han desarrollado la mayoría de las técnicas.

## **5.2 ESTRATEGIAS DE CONTROL**

Los controladores están actualmente en una fase interesante de desarrollo, donde características como autosintonía, ayudas al operario, flexibilidad de configuración, etc., son necesariamente añadidas a los sistemas de control. Entre las distintas razones de este desarrollo está el avance de la microelectrónica, que abarata los microprocesadores cuyo poder computacional esta continuamente creciendo. Otra razón es la presión de los usuarios y aplicaciones, y una tercera es el crecimiento de la experiencia en el uso de control avanzado.

La denominación de *técnicas adaptativas* se usa para cubrir distintas estrategias de control: desde la autosintonía a la ganancia programada y adaptación [Åst 93]. Aunque las investigaciones en técnicas adaptativas se han focalizado casi exclusivamente en esta última, la experiencia muestra que la autosintonía y la ganancia programada tienen también un interés muy amplio en el mundo industrial.

Se comentan a continuación las características generales de cada una de estas estrategias, para guiar la elección de la más conveniente en el control de un proceso.

### *Autosintonía*

Sintonía automática o autosintonía es la estrategia por la cual el controlador es sintonizado automáticamente a petición del usuario. Típicamente, el usuario pulsará un botón o enviará una orden al controlador.

La sintonía automática también puede ejecutarse usando un equipo externo. Estos elementos están conectados al lazo de control solamente durante la fase de ajuste. Cuando la fase de sintonía se termina, el sistema de calibración sugiere unos parámetros del controlador.

Sin embargo, estos elementos requieren bastante información en orden a dar una apropiada sugerencia de parámetros. Esta información incluye la estructura del controlador (serie o paralelo) [Mor 90a], el periodo de muestreo, las constantes del filtro, y las unidades de los distintos parámetros del controlador (apartado 5.4).

### *Ganancia Programada*

Por ganancia programada se entiende un sistema en el que los parámetros del controlador cambian dependiendo de unas variables auxiliares medidas, con las que se relacionan las variaciones en la respuesta. La variable programada puedes ser, por ejemplo, la señal de control o una señal externa. Por razones históricas, la palabra ganancia programada se utiliza incluso cuando son el tiempo derivativo o el tiempo integral los que cambian.

La ganancia programada es un método efectivo para controlar sistemas cuyas dinámicas cambian con las condiciones de operación; de todas formas, no ha sido muy usada por el esfuerzo que requiere implementarla. Cuando se combina con la autosintonía, se facilita su realización.

### *Control Adaptativo*

Control adaptativo es el de un controlador cuyos parámetros están continuamente ajustándose para acomodarse a los cambios en la dinámica del proceso y a las perturbaciones. En algunos casos se incluye en este apartado la ganancia programada.

Para la elección de una de estas estrategias, el primer paso a considerar es el funcionamiento del controlador. Si los requerimientos son modestos, se puede utilizar un controlador con parámetros constantes y sintonía clásica. Con una demanda más exigente cabe considerar otras soluciones, como por ejemplo la autosintonía.

Si la dinámica del proceso o la naturaleza de las perturbaciones varían, es útil compensar estos cambios modificando el controlador. Cuando se pueden predecir las variaciones en la señal medida, la ganancia programada es simple de aplicar y da un funcionamiento superior y más robusto que la adaptación continua. Ejemplos típicos de estas variaciones son las causadas por no linealidades en el lazo de control. La autosintonía puede ser una buena ayuda para configurar la ganancia programada.

Los casos donde las variaciones en la dinámica del procesos no son predecibles, no son controlables por un sistema de ganancia programada, y deben ser tratados con adaptación. Ejemplos característicos son los debidos a perturbaciones no medibles. También la autosintonía se utiliza para inicializar el controlador adaptativo, y se denomina a este proceso de ajuste del controlador *sintonía inicial* o *presintonía*.

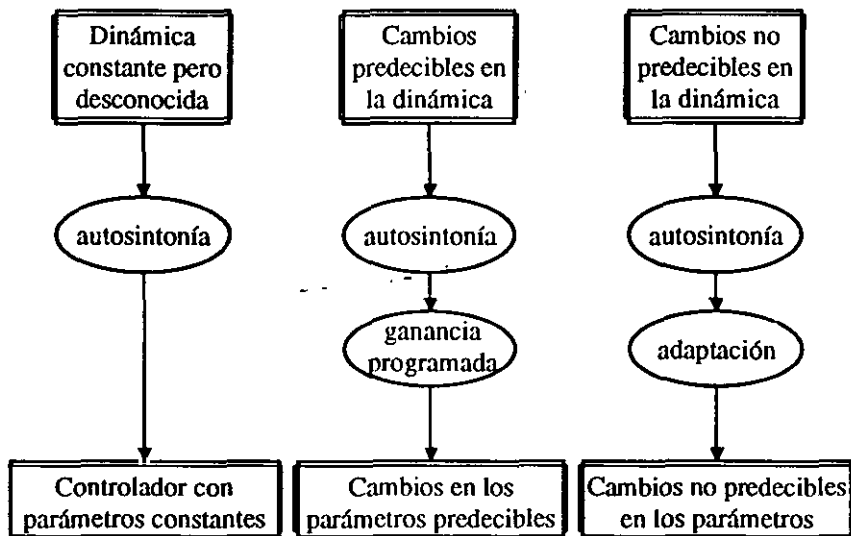


Figura 5.1 - Estrategias de control

El control “feedforward” merece una mención, ya que es un método muy potente para tratar con perturbaciones medibles. El uso de este tipo de control requiere buenos



modelos de la dinámica del proceso, y es difícil de sintonizar automáticamente a petición del usuario, ya que el operador a menudo no puede manipular las perturbaciones usadas en este tipo de control. La adaptación es lo más conveniente en este modo de control.

De este breve resumen de las técnicas adaptativas de control se concluye que la autosintonía es una característica altamente deseable y útil, como lo indica también la experiencia, lo que muestra la conveniencia de estudiar las distintas estrategias clásicas de sintonía que se vienen aplicando.

Existen diversas formas de llevar a cabo la sintonía de los controladores; se suelen clasificar en métodos directos e indirectos, según se basen en la respuesta del sistema o en un modelo de éste. Se van a exponer, por tanto, distintos modos de modelar un sistema, y a partir de ellos se enuncian luego los distintos métodos de sintonía.

### **5.3 MODELIZACIÓN**

*El modelo de un sistema es cualquier tipo de descripción abstracta que refleja convenientemente sus características relevantes.* La modelización puede tener distintos objetivos: desde la extracción de algunas propiedades simples de la respuesta transitoria hasta el desarrollo del tradicional modelo de control en términos de su función de transferencia o respuesta a un impulso. Estas características de los procesos se pueden estimar (observar) a partir de la respuesta del proceso a determinadas señales.

A continuación se van a describir, muy sucintamente, algunos de los modelos que se usan en control.

#### **5.3.1 Modelos en el dominio temporal**

La dinámica de un proceso puede determinarse de la respuesta de un sistema a una entrada impulso, escalón, rampa, o cualquier otra señal determinística. Para obtener la respuesta transitoria del proceso es suficiente cuando el sistema es lineal, no hay perturbaciones medibles y el sistema está en el equilibrio antes de excitarlo. Aunque estas condiciones son bastante restrictivas, el método de la respuesta temporal es suficiente para determinar modelos simples, en los que se suele basar el control PID.

Estas técnicas de estimación se basan en que la mayoría de los procesos industriales producen una respuesta monótona creciente estable a una entrada escalón, similar a la respuesta de un sistema de primer orden con retardo puro. Por lo tanto, se puede aceptar un modelo de este tipo, cuyas características típicas en el dominio temporal son la ganancia estática  $K$ , la constante de tiempo dominante  $T_p$  y el retardo aparente  $T_o$ .

$$Gm(s) = \frac{K}{1 + s.T_p} e^{-sT_o} \quad (5.1)$$

Existen diversas técnicas de estimación gráfica para estos modelos [Mor 92]. En todas ellas se supone la entrada un escalón unitario y condiciones iniciales nulas para la función de transferencia.

### 5.3.1.1 Respuesta a un salto

Las tres características definidas anteriormente se pueden determinar de la respuesta del proceso  $y(t)$  a un salto en la entrada, y son suficientes para obtener el modelo de primer orden con retardo dado por la ecuación (5.1).

Como se basa en pocos valores de la respuesta (Figura 5.2a), este método es bastante sensible a inexactitudes.

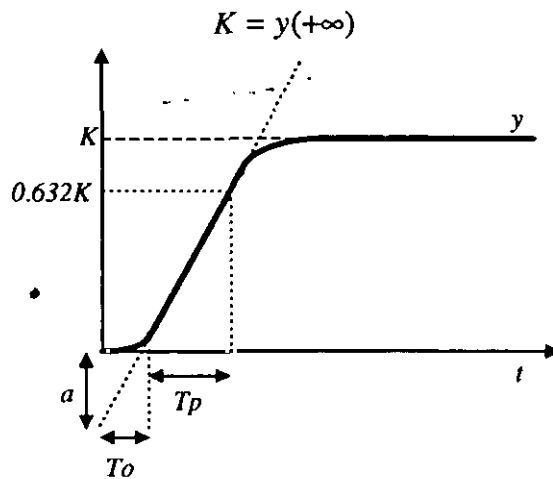


Figura 5.2a - Sistema estable con respuesta monótona creciente a un salto

Modelos de orden más alto pueden obtenerse también del método de la respuesta a un salto [Seb 89].

### 5.3.1.2 Determinación de las áreas

Se basa en la determinación de las áreas que quedan bajo la respuesta de un sistema estable a un salto, por lo que es menos sensible a perturbaciones a altas frecuencias. Primero se determina el valor de la ganancia  $K$  del sistema en estado estacionario, como en el caso anterior. Si  $A_0$  es el área comprendida entre la respuesta y la señal de referencia (Figura 5.2b), una medida del tiempo transcurrido hasta que el sistema alcanza el 63.2% de la referencia es:

$$A_0 = \int_0^{\infty} [y(+\infty) - y(t)] dt \quad (5.2a)$$

$$T_0 + T_p = \frac{A_0}{K} \quad (5.2b)$$

El área que queda bajo la respuesta del sistema hasta el instante  $T_0 + T_p$  se denomina  $A_1$ , y se puede calcular en función de ella la constante de tiempo aproximada  $T_p$ :

$$A_1 = \int_0^{T_0+T_p} y(t) \cdot dt \quad (5.2c)$$

$$T_p = \frac{A_1}{K} e^{-1} \quad (5.2d)$$

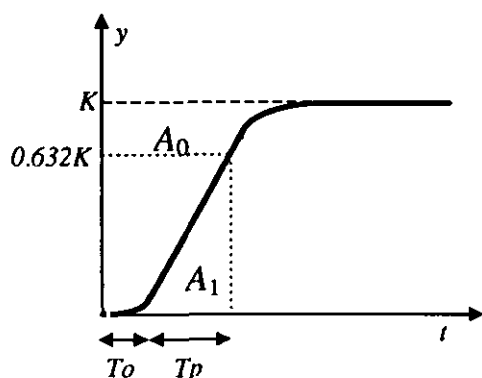


Figura 5.2b - Areas en una respuesta monótona creciente a un salto

Estas ecuaciones son casos especiales de un método general, con el que se determinan las características de la función de transferencia de un sistema a bajas frecuencias, denominado *Método de los Momentos* [Åst 88]. Puede ser aplicado también a otro tipo de entradas que no sean un salto.

### 5.3.1.3 Método del intervalo entre tiempos

Se basa en el conocimiento de los instantes de tiempo,  $t_1$  y  $t_2$ , en los que la respuesta del sistema alcanza el 28.3% y el 63.2% respectivamente del valor estacionario. Una vez obtenida la ganancia estacionaria  $K$  como el cociente observado entre la salida y el cambio provocado en la entrada, los otros parámetros del modelo se calculan:

$$T_p = 1.5(t_2 - t_1) \quad (5.3a)$$

$$T_o = t_2 - T_p \quad (5.3b)$$

Este método es bastante simple, y permite obtener una buena aproximación [Mor 92].

### 5.3.1.4 Estimación de sistemas oscilatorios

Sistemas con una respuesta oscilatoria pueden ser aproximados por un modelo de segundo orden de la forma:

$$G(s) = \frac{K \cdot w}{s^2 + 2\zeta s + w^2} \quad (5.4)$$

Los parámetros de este modelo son la ganancia estática  $K$ , la frecuencia natural  $w$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ . Se determinan de forma aproximada de su respuesta a un salto (Figura 5.3), midiendo primero el periodo de oscilación  $T_c$  y el amortiguamiento  $d$ , y calculando a partir de ellos los parámetros mediante las expresiones:

$$d = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad T_c = \frac{2\pi}{w\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.5)$$

de donde se despejan:

$$\zeta = \left(\sqrt{1 + (2\pi / \log d)^2}\right)^{-1} \quad (5.6a)$$

$$w = \frac{2\pi}{T_c\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.6b)$$

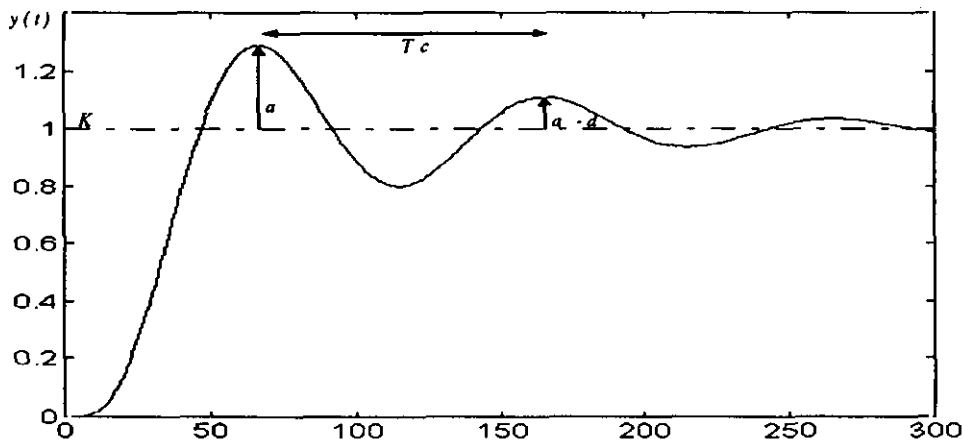


Figura 5.3 - Sistema con respuesta oscilatoria

### 5.3.1.5 Estimación de sistemas discretos

Un sistema se puede describir también por un modelo discreto [Åst 93], como el dado por la ecuación:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \quad (5.7)$$

Hay numerosos métodos para determinar los parámetros de este modelo; por ejemplo, el método de los mínimos cuadrados.

### 5.3.2 Modelos en el dominio de la frecuencia

Si a un sistema lineal estable, descrito por una función de transferencia  $G$ , se le introduce una entrada sinusoidal, la salida también es periódica. Su respuesta en frecuencia, denominada  $G(i\omega)$ , se representa como el número complejo:

$$G(i\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} \quad (5.8)$$

donde  $A(\omega) = |G(i\omega)|$  representa la amplitud de la función y  $\varphi(\omega) = \arg(G(i\omega))$  la fase.

Su representación en el plano complejo da una descripción completa del sistema, aunque sólo unos pocos puntos son relevantes.

Las características típicas de un sistema en el dominio de la frecuencia son el margen de ganancia, el margen de fase, la ganancia crítica, el periodo crítico, etc. Estas cantidades están relacionadas con propiedades de la curva de Nyquist de la función de transferencia (Figura 5.4).

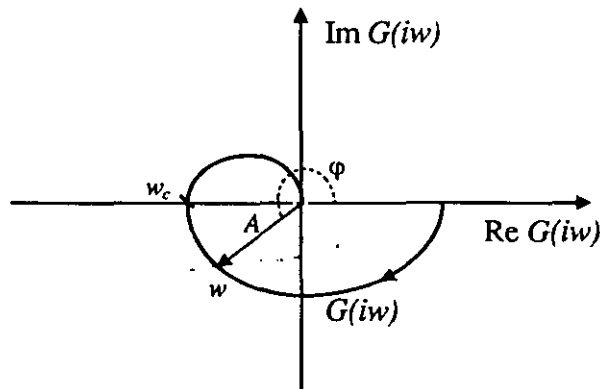


Figura 5.4 - Curva de Nyquist del sistema  $G$  y punto crítico

Existen varios métodos experimentales para la determinación indirecta de los puntos relevantes de la respuesta en frecuencia; concretamente, para determinar la ganancia crítica  $K_u$  y el periodo de oscilación mantenida  $T_u$ , definidos como la ganancia de un controlador proporcional a partir de la cual el sistema en lazo cerrado deja de ser

estable, y el periodo de la oscilación que se consigue con ese valor de ganancia. Este punto de la curva de frecuencia ( $\omega_c$ ) se denomina frecuencia crítica o de cruce, porque es la frecuencia a la cual  $G(i\omega)$  tiene una fase de  $-180^\circ$ , y es donde la curva de Nyquist corta el eje real negativo. El conocimiento de este punto crítico es lo único que necesitan algunos métodos de sintonía.

La mayoría de los métodos de sintonía se basan en la identificación de esos puntos de la respuesta en frecuencia del proceso —incluso solamente de la determinación de  $\omega_c$ —, que se obtienen generalmente mediante el método de la oscilación mantenida o forzando la oscilación de la variable controlada del proceso mediante un relé.

### 5.3.2.1 Método de la oscilación mantenida

Consiste en cerrar el lazo de control con un controlador proporcional, y variar la ganancia de éste hasta conseguir que el sistema oscile con amplitud constante para pequeños cambios bruscos en el punto de consigna.

$$\begin{aligned} \text{señal de control:} \quad u(t) &= -K_p y(t) \\ K_u \cdot G(i\omega_c) &= -1 \quad G(i\omega_c) = -\frac{1}{K_u} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Una vez conseguida esa ganancia  $K_u$ , se mide el periodo de la oscilación mantenida, que es  $T_u$ .

Fue propuesto por Ziegler y Nichols en 1942 [Zie 42]; como es un método de prueba y error puede requerir excesivo tiempo, y existe el peligro de inestabilizar el sistema, si bien da resultados precisos.

### 5.3.2.2 Método de correlación

En este método, una pequeña secuencia pseudo-aleatoria binaria (PRBS) se introduce como señal de prueba  $u(t)$ , y se obtiene la salida resultante del proceso  $y(t)$ . La correlación  $\phi_{uy}(\tau)$  entre  $u(t)$  e  $y(t)$  se utiliza para calcular la respuesta a un impulso del proceso  $g(\tau)$  como sigue [Han 91b]:

$$g(\tau) = \frac{1}{A^2 h} \left( \frac{N}{N+1} \right) \left( \phi_{uy}(\tau) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{uy}(k) \right) \quad (5.10)$$

donde  $A$  es la amplitud de la señal PRBS,  $h$  es el intervalo de muestreo, y  $N$  es el periodo de la señal. La respuesta al impulso medida se transforma numéricamente en su respuesta en frecuencia, de la cual se puede determinar la ganancia crítica, el periodo crítico, la ganancia estática y el retardo normalizado del proceso.

### 5.3.2.3 Método del Relé

Las características del sistema en el dominio de la frecuencia pueden ser determinadas de experimentos con una realimentación tipo Relé (*controlador todo-nada*), propuestos por Åström y Hägglund [Åst 84], y conocidos como el *Método del Relé*. Está representado en el siguiente esquema de control (Figura 5.5):

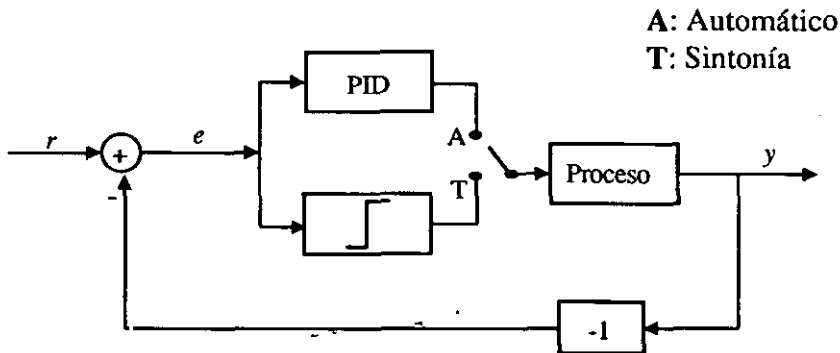


Figura 5.5 - Esquema de autosintonía utilizando el Método del Relé

Se basa en que, al introducir un relé en un lazo de control, en la mayoría de los procesos el relé produce una oscilación en forma de ciclo límite, con un periodo  $T_u$  cercano a la frecuencia crítica  $\omega_c$ , y un amplitud  $a$  que permite calcular la ganancia crítica  $K_u$ . Finalmente, los parámetros del PID se calculan de acuerdo con las especificaciones del control, por ejemplo, con un margen de fase deseado  $\Phi_m$ , o aplicando las fórmulas de Ziegler-Nichols, como se describe en los apartados 5.5.2.5 y 5.5.2.6.



Si la salida del relé se desarrolla en serie de Fourier, y suponiendo que el proceso atenúa los armónicos más altos, el primer armónico de la serie es  $4d/\pi$ , siendo  $d$  la amplitud del relé. Si  $a$  es la amplitud de la oscilación de la salida del proceso, entonces relacionando la entrada al proceso (salida del relé) con la salida:

$$G(i\omega_c) = G\left(i\frac{2\pi}{Tu}\right) = \frac{-\pi \cdot a}{4d} \quad \text{y} \quad Tu = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (5.11)$$

Se puede controlar la amplitud de la oscilación, puesto que es proporcional a la amplitud del relé, ajustando ésta, y fácilmente se calcula el punto crítico del proceso.

A partir del periodo  $Tu$  y amplitud de las oscilaciones, se pueden obtener también modelos de primer y segundo orden del proceso, como se expone en el apartado 5.3.3. Una estimación del retardo máximo se calcula a partir de la separación entre los instantes asociados a las conmutaciones del relé y los instantes en que la salida toma sus valores extremos. Analizando después la respuesta en lazo cerrado del proceso frente a un cambio en el punto de consigna, se puede obtener una estimación precisa de la ganancia estática, si el proceso no está perturbado.

Otra forma de determinar la dinámica del proceso con un relé es conectar otro elemento en serie con el proceso. Por ejemplo, un relé seguido de un integrador permite la obtención del punto donde el proceso tiene una fase de  $-90^\circ$ , y con un diferenciador, el de fase  $-270^\circ$ .

Este método da resultados aproximados, pero el tiempo empleado en la estimación suele ser generalmente menor que con otras técnicas similares.

El método de la función descriptiva se puede utilizar para saber si la función no lineal introducida en el lazo provocará o no una oscilación. Se expone un análisis detallado de esta función en el **Apéndice C.1**, así como de las condiciones de oscilación tanto para relés simétricos como asimétricos (**Apéndice C.2**).

Se amplía en los siguientes apartados esta técnica del relé, considerando el relé con histéresis y particularizando éste al caso asimétrico.

**Relé con histéresis**

Son varias las ventajas de usar un relé con histéresis (Figura 5.6), en lugar de un relé ideal. Con un relé ordinario, una pequeña cantidad de ruido puede hacer que el relé conmute. Introduciendo la histéresis, el ruido debe ser mayor que la anchura de la histéresis para hacer que el relé cambie.

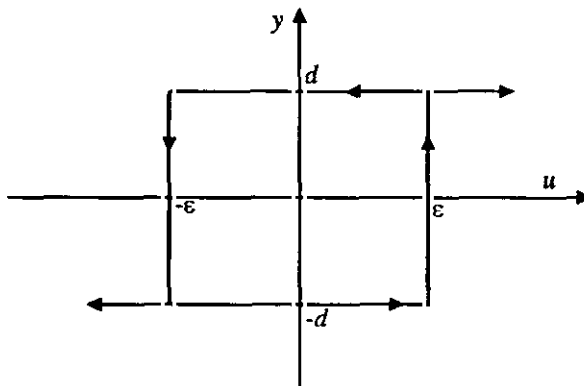


Figura 5.6 - Relé con histéresis  $R_s(d, \epsilon)$

Aplicando estrictamente la teoría, no todos los procesos pueden ser forzados a oscilar con un relé, porque su función descriptiva está sobre el eje real negativo o paralela a él en el tercer cuadrante, dependiendo de la presencia o ausencia de histéresis. Es decir, un relé sin histéresis solo se puede utilizar cuando  $G(i\omega)$  intersecciona en el eje real negativo, mientras que un relé con histéresis es aplicable si cruza el eje imaginario negativo. Cabe también la posibilidad de no usar relé-si la fase del proceso  $G(i\omega)$  es mayor que  $-\pi/2$  para toda frecuencia  $\omega$ . Por esta razón, algunos algoritmos añaden un integrador entre el relé y el proceso; en la práctica, ésto generalmente no es necesario ya que, de hecho, en cualquier implementación digital del controlador el mismo periodo de muestreo introduce un retardo de fase, y en las aplicaciones reales la variable del proceso  $y(t)$  se filtra para eliminar el ruido. Luego se puede asumir que todos los procesos, en los casos prácticos, oscilan con un controlador tipo relé.

Un análisis de la función descriptiva sirve para determinar las características del proceso y ver las oscilaciones obtenidas (Apéndice C.1). La función descriptiva del relé simétrico con histéresis es:

$$N(a) = \frac{4d}{\pi \cdot a} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2} - i \frac{\varepsilon}{a} \right) \quad (5.12)$$

donde  $d$  es la amplitud del relé,  $\varepsilon$  la histéresis del relé y  $a$  la amplitud de la señal de entrada. La negativa inversa de esta función descriptiva es una línea paralela al eje real (Figura 5.7). La oscilación corresponde al punto donde la función descriptiva negativa inversa cruza la curva de Nyquist del proceso, es decir, la ecuación (C1.3).

Se pueden obtener distintos puntos de Nyquist repitiendo el experimento para distintas relaciones entre  $d$  y  $\varepsilon$ . Es fácil controlar la amplitud del ciclo límite a un nivel deseado eligiendo convenientemente la amplitud del relé.

Si el relé tiene histéresis, el punto de la curva de Nyquist que se obtiene no es el punto crítico (Figura 5.7), sino otro punto de  $G(i\omega)$ , llamado A, de frecuencia  $\omega_a$ . El requerimiento de un margen de fase  $\Phi_m$  por ejemplo, conlleva que el diagrama de Nyquist del sistema en lazo cerrado  $G_c(i\omega)G(i\omega)$ , siendo  $G_c(s)$  la función de transferencia del controlador, debe cortar el círculo unitario en un punto B; entonces, el margen de fase requerido puede obtenerse resolviendo la ecuación compleja:

$$A \cdot G_c(i\omega_a) = B \quad (5.13)$$

que puede estar sujeta a restricciones, como calcular los parámetros del regulador que hagan coincidir ese punto A con B (apartado 5.5.2.6).

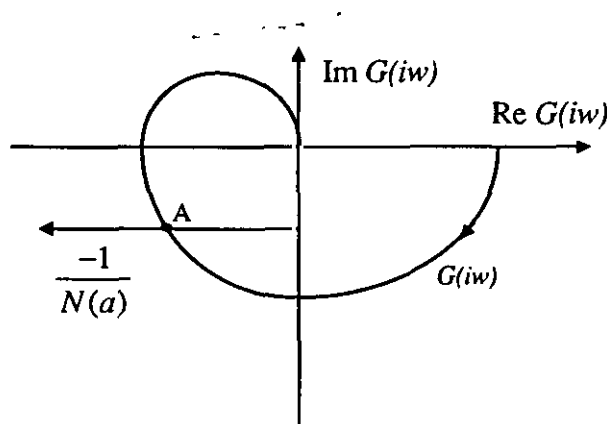


Figura 5.7 - Intersección de la función descriptiva de un relé con histéresis y la curva de Nyquist

También es posible introducir otro tipo de no linealidades en el lazo de control, u otros bloques lineales en serie con el proceso (integrador, etc.) para calcular los puntos del sistema con una determinada fase.

La amplitud del relé es inicialmente asignada a un 10% del rango de la salida, y se ajusta después —generalmente durante las dos primeras oscilaciones— para que de una oscilación aproximadamente de al menos del orden de tres veces el nivel de ruido sobre la salida para que tengan una amplitud significativa.

La histéresis del relé se determina automáticamente en base a medidas del ruido medible.

**Particularizaciones: el relé asimétrico**

Una vez estudiada la conveniencia de introducir o no la histéresis para cada caso, cabe la posibilidad de definir distintos tipos de relés con histéresis, en función de la posición del origen de los ejes en el rectángulo de la función característica del relé (Figura 5.6)

Se muestran a continuación, en las Figuras 5.8, tres tipos de relés asimétricos con sus correspondientes respuestas temporales.

*Relé Tipo 1:* mantiene el eje vertical en el centro del rectángulo y desplaza el eje horizontal hacia arriba o hacia abajo.

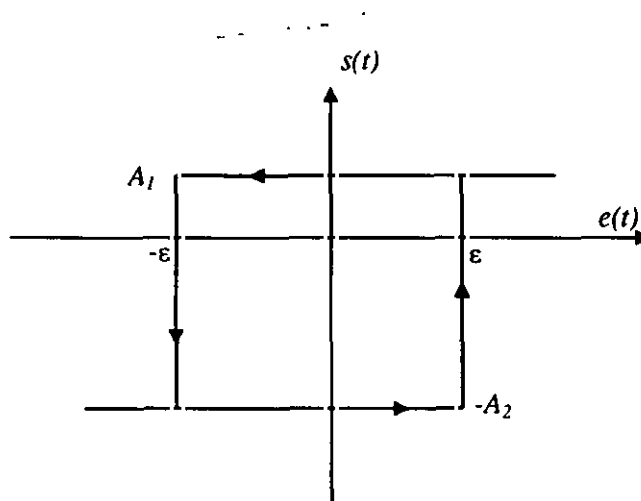


Figura 5.8a - Relé asimétrico Tipo 1

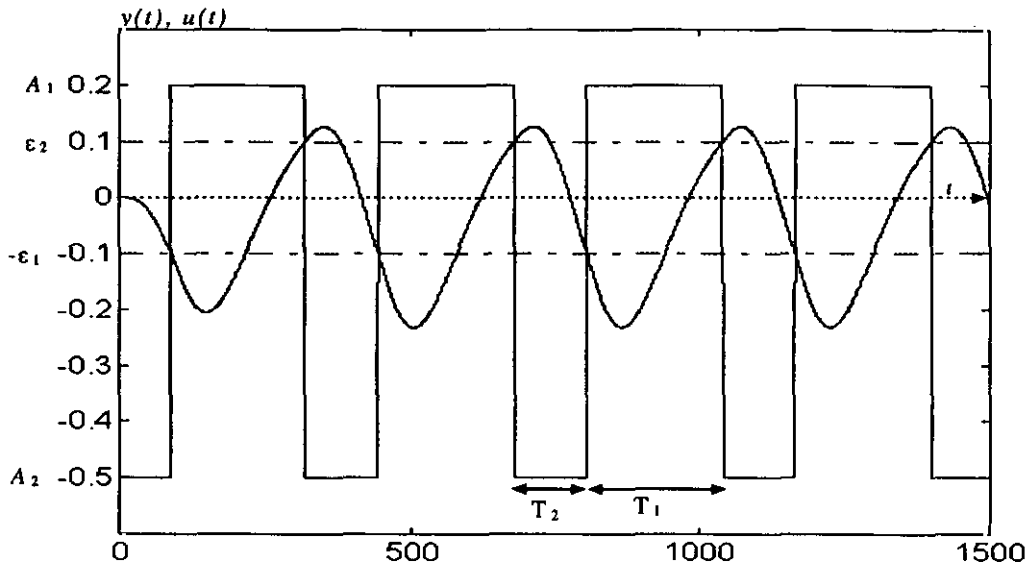


Figura 5.8b - Respuesta temporal con un Relé Tipo 1 ( $\epsilon_1=\epsilon_2=0.1$ ;  $A_1 = 0.2$ ;  $A_2 = -0.5$ )

*Relé Tipo 2:* desplaza en el mismo sentido los ejes horizontales y verticales del relé. Por lo tanto, tanto su amplitud como su histéresis son asimétricas.

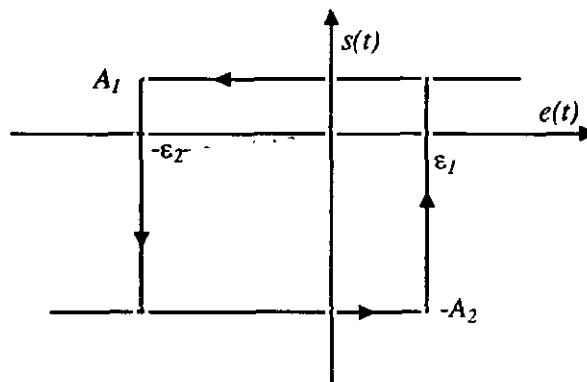


Figura 5.9a - Relé asimétrico Tipo 2

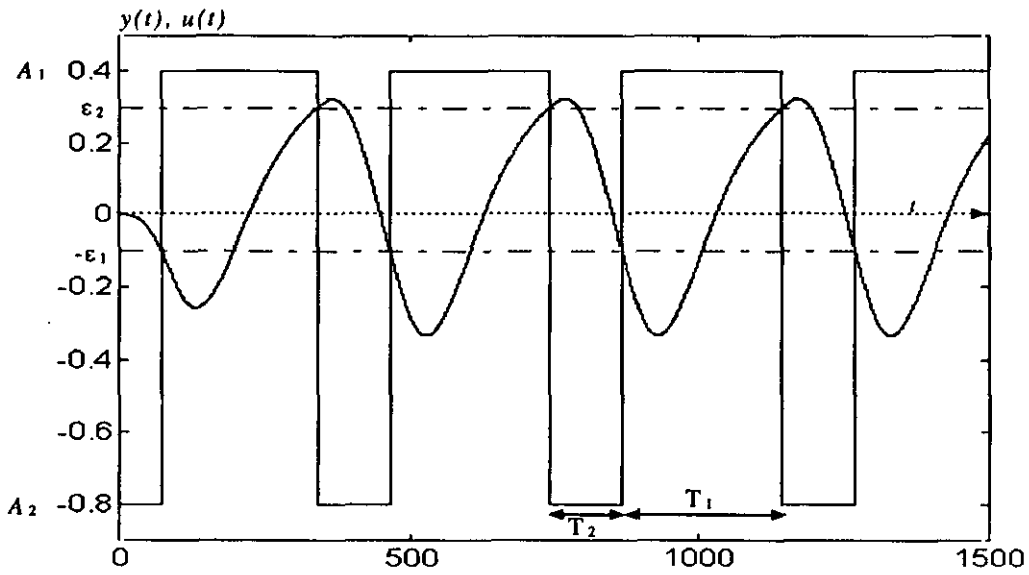


Figura 5.9b - Respuesta temporal con un Relé Tipo 2 ( $\epsilon_1 = 0.1$ ;  $\epsilon_2 = -0.3$ ;  $A_1 = 0.4$ ;  $A_2 = -0.8$ )

Relé Tipo 3: desplaza en sentido contrario los ejes horizontales y verticales del relé.

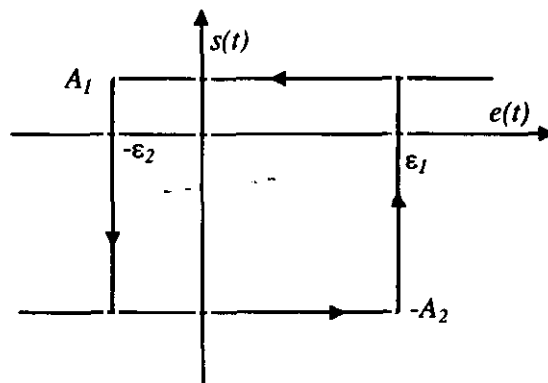


Figura 5.10a - Relé asimétrico Tipo 3

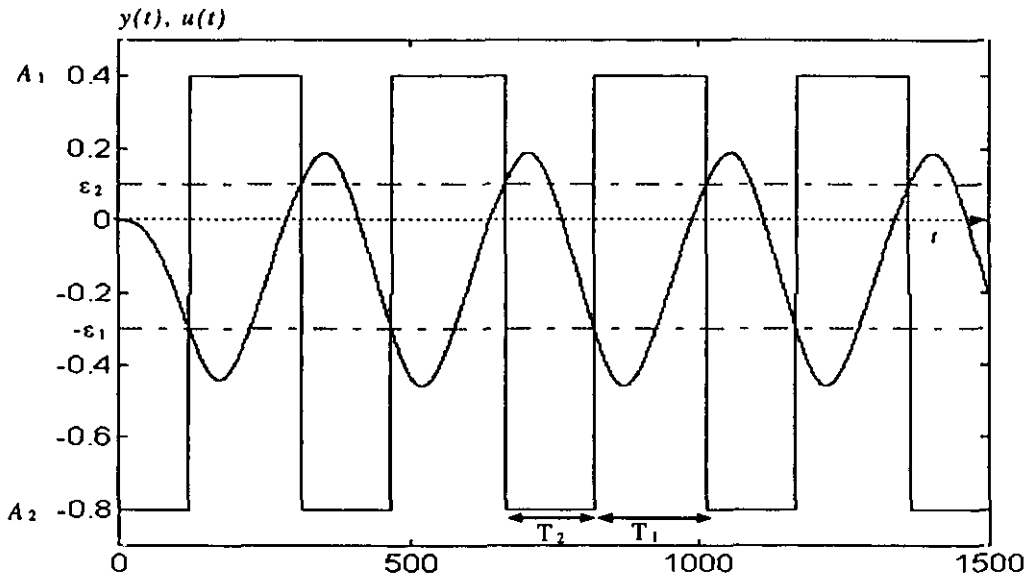


Figura 5.10b - Respuesta temporal con un Relé Tipo 3 ( $\epsilon_1 = 0.3$ ;  $\epsilon_2 = -0.1$ ;  $A_1 = 0.4$ ;  $A_2 = -0.8$ )

Este último tipo es el que logra las oscilaciones más simétricas, y al mismo tiempo maximiza la integral de la entrada. Un razonamiento intuitivo que avala estas conclusiones es el siguiente. Se supone la relación entre las amplitudes  $A_2 > A_1$ , hipótesis realizable con los tres tipos de relés, y las histéresis iguales. Cuando el sistema se encuentra en el ciclo límite, la duración durante la cual la entrada será igual a  $-A_2$  será más corta que cuando la entrada sea igual a  $A_1$ , ya que  $T_2 < T_1$  (el periodo depende inversamente de la amplitud del relé). Cuando la histéresis del relé no es simétrica, si se observa que la entrada pasa de  $-A_2$  a  $A_1$  cuando la salida se hace inferior a  $-\epsilon_2$ , se puede suponer que cuanto mayor sea  $\epsilon_1$  más se retardará el instante de paso de  $-A_2$  a  $A_1$ , y por lo tanto las oscilaciones serán más simétricas en el dominio temporal (se va acortando la diferencia entre los periodos  $T_2$  y  $T_1$ , ya que son directamente proporcionales a la histéresis).

Este razonamiento intuitivo se puede establecer de forma analítica para el caso de un proceso de primer orden con retardo, representado por la siguiente función de transferencia:

$$Gp(s) = \frac{K \cdot e^{-sT_0}}{1 + s \cdot T_p} \tag{5.14}$$

para el que se va a calcular su periodo y ganancia críticos, parámetros necesarios para el ajuste del controlador.

En el caso de un relé simétrico,  $R_s(d, \epsilon)$ , Tsykin [Tsy 58] estableció que el periodo de oscilación  $T_c$  es:

$$T_c = 2T_p \cdot \ln \frac{K \cdot d \cdot (2e^{T_o/T_p} - 1) + \epsilon}{K \cdot d - \epsilon} \quad (5.15)$$

Si el retardo es nulo ( $T_o = 0$ ), de esta expresión se deduce:

$$T_c = 2T_p \cdot \ln \frac{K \cdot d + \epsilon}{K \cdot d - \epsilon} \approx \frac{4\epsilon \cdot T_p}{K \cdot d} \quad (5.16)$$

*Cálculo del periodo para un relé asimétrico  $R_a(A_1, A_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$ :*

Como el proceso es de primer orden, la ecuación de la salida entre dos variaciones de la entrada (respuesta constante a tramos) se puede expresar como:

$$y(t) = C \cdot e^{-\frac{t-t_v}{T_p}} + K \cdot u(t_v) \quad (5.17)$$

donde  $t_v$  es el último instante asociado a un cambio de la entrada, que precede al instante actual  $t$ .  $C$  es una constante a determinar.

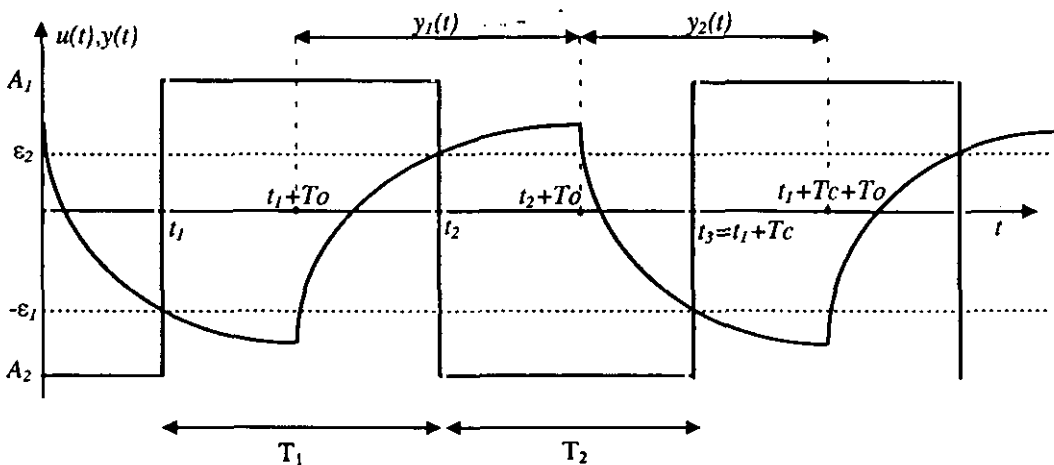


Figura 5.11 - Ejemplo de oscilación obtenida con un relé asimétrico en un proceso de primer orden con retardo.



Sean  $t_1$  y  $t_2$  los instantes asociados respectivamente a los cambios de la entrada (Figura 5.11). La ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$$y_1(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{t-t_1}{T_p}} + K \cdot A_1 \quad \text{para } t_1 + T_o \leq t \leq t_2 + T_o \quad (5.18a)$$

$$y_2(t) = C_2 \cdot e^{-\frac{t-t_2}{T_p}} + K \cdot A_2 \quad \text{para } t_2 + T_o \leq t \leq t_1 + T_c + T_o \quad (5.18b)$$

Denominando  $T_1 = t_2 - t_1$ , y  $T_2 = t_1 + T_c - t_2$ , y calculando las condiciones límites, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1(t_2) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow C_1 \cdot e^{-\frac{T_1}{T_p}} + K \cdot A_1 = \varepsilon_2 \quad (5.19a)$$

$$y_2(t_2 + T_2) = -\varepsilon_1 \Leftrightarrow C_2 \cdot e^{-\frac{T_2}{T_p}} - K \cdot A_2 = -\varepsilon_1 \quad (5.19b)$$

$$y_1(t_2 + T_o) = y_2(t_2 + T_o) \Leftrightarrow C_1 \cdot e^{-\frac{T_1}{T_p}} \cdot e^{-\frac{T_o}{T_p}} + K \cdot A_1 = C_2 \cdot e^{-\frac{T_o}{T_p}} - K \cdot A_2 \quad (5.19c)$$

$$y_2(t_1 + T_c + T_o) = y_1(t_1 + T_o) \Leftrightarrow C_2 \cdot e^{-\frac{T_2}{T_p}} \cdot e^{-\frac{T_o}{T_p}} - K \cdot A_2 = C_1 \cdot e^{-\frac{T_o}{T_p}} + K \cdot A_1 \quad (5.19d)$$

La resolución de este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $T_1$  y  $T_2$ ) permite deducir:

$$T_1 = T_p \cdot \ln \frac{e^{-\frac{T_o}{T_p}} (k \cdot (A_1 + A_2) + (\varepsilon_1 - K \cdot A_2))}{K \cdot A_1 - \varepsilon_2} \quad (5.20a)$$

$$T_2 = T_p \cdot \ln \frac{e^{-\frac{T_o}{T_p}} (k \cdot (A_1 + A_2) + (\varepsilon_2 - K \cdot A_1))}{K \cdot A_2 - \varepsilon_1} \quad (5.20b)$$

de donde el periodo de oscilación  $T_c$  del ciclo límite es:

$$T_c = T_1 + T_2 = T_p \ln \frac{\left( \frac{T_0}{k \cdot e^{T_p(A_1 + A_2)} + (\epsilon_2 - K \cdot A_1)} \right) \left( \frac{T_0}{k \cdot e^{T_p(A_1 + A_2)} + (\epsilon_1 - K \cdot A_2)} \right)}{(K \cdot A_2 - \epsilon_1) \cdot (K \cdot A_1 - \epsilon_2)} \quad (5.21)$$

Si el retardo es pequeño, se puede hacer un desarrollo de la expresión tomando los primeros términos, y del logaritmo alrededor de  $T_0 = 0$ , del que resulta:

$$T_1 \approx \frac{T_p \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{K \cdot A_1} + \frac{T_0 \cdot (A_1 + A_2)}{A_1} \quad (5.22a)$$

$$T_2 \approx \frac{T_p \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{K \cdot A_2} + \frac{T_0 \cdot (A_1 + A_2)}{A_2} \quad (5.22b)$$

de donde:

$$T_c \approx \frac{T_p \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot (A_1 + A_2)}{K \cdot A_2 \cdot A_1} + \frac{T_0 \cdot (A_1 + A_2)^2}{A_1 \cdot A_2} \quad (5.23)$$

Se observa entonces en este caso que los periodos difieren a causa de las diferentes amplitudes del relé, pero se obtendrían los mismos resultados utilizando una histéresis simétrica.

Cuando  $A_1 = A_2 = d$ , y  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ , las fórmulas obtenidas son idénticas a las obtenidas para el caso simétrico.

*Equivalencia entre un relé asimétrico y un relé simétrico:*

La relación entre el relé simétrico y los asimétricos, que se ha puesto de manifiesto al calcular sus respectivos periodos de oscilación, también se puede mostrar desde su

estructura. Para ello, se especifican la entradas correspondiente al relé asimétrico que le equiparan con el simétrico, como se observa en la Figura 5.12.

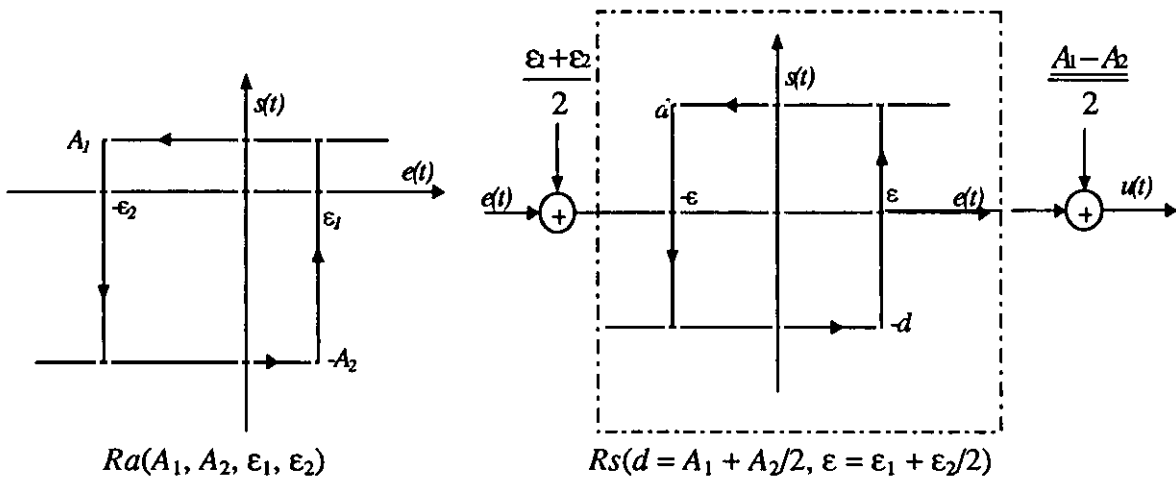


Figura 5.12 - Equivalencia entre un relé asimétrico  $Ra$  y un relé simétrico  $Rs$

*Cálculo de la ganancia crítica  $Ku$  para un relé asimétrico  $Ra(A_1, A_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$*

De forma análoga a como se ha calculado el periodo crítico del proceso para el caso de un relé asimétrico, se calcula la ganancia crítica; son los dos parámetros necesarios para el ajuste del controlador PID mediante las fórmulas de Ziegler-Nichols (Tabla 5.3).

Esta ganancia  $Ku$  se puede obtener a partir de la función descriptiva de la no linealidad (Apéndice C.2) y de forma directa, a partir de la entrada y salida del proceso. Si se representan éstas de forma aproximada por:

$$u(t) \approx u_0 + a_1 \cos w_n t + b_1 \sin w_n t \tag{5.24a}$$

$$y(t) \approx y_0 + a_2 \cos w_n t + b_2 \sin w_n t \tag{5.24b}$$

la estimación de los seis parámetros  $(u_0, a_1, b_1, y_0, a_2, b_2)$  que intervienen en esas ecuaciones se actualiza con cada cambio en la entrada. Para calcularlos, se denominan  $t_1, t_2$  y  $t_3$  los instantes de tiempo asociados con los tres últimos cambios de la entrada (Figura 5.11);  $t_1$  representa asimismo el instante actual  $t$ .

Se define la pulsación  $w_n$  como:

$$w_n = \frac{2\pi}{t_1 - t_3} \quad (5.25)$$

Los tres primeros parámetros se pueden estimar entonces por:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{t_1 - t_3} \int_{t_3}^{t_1} u(t).dt = \frac{1}{t_1 - t_3} [A_1(t_2 - t_3) - A_2(t_1 - t_2)] \text{ si } u > 0, \text{ para } t \geq t_1 \\ &= \frac{1}{t_1 - t_3} [A_1(t_1 - t_2) - A_2(t_2 - t_3)] \text{ si } u < 0, \text{ para } t \leq t_1 \end{aligned} \quad (5.26a)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos w_n t. dw_n t = \frac{2}{w_n(t_1 - t_3)} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos w_n t. dw_n t = \frac{2}{t_1 - t_3} \int_{t_3}^{t_1} u(t) \cos w_n t. dt \\ &= \frac{1}{\pi} [A_1(\text{sen } w_n t_2 - \text{sen } w_n t_3) - A_2(\text{sen } w_n t_1 - \text{sen } w_n t_2)] \text{ si } u > 0 \text{ para } t \geq t_1 \\ &= \frac{1}{\pi} [A_1(\text{sen } w_n t_1 - \text{sen } w_n t_2) - A_2(\text{sen } w_n t_2 - \text{sen } w_n t_3)] \text{ si } u < 0 \text{ para } t \leq t_1 \end{aligned} \quad (5.26b)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{t_1 - t_3} \int_{t_3}^{t_1} u(t) \text{sen } w_n t. dt \\ &= \frac{1}{\pi} [-A_1(\cos w_n t_2 - \cos w_n t_3) + A_2(\cos w_n t_1 - \cos w_n t_2)] \text{ si } u > 0 \text{ para } t \geq t_1 \\ &= \frac{1}{\pi} [-A_1(\cos w_n t_1 - \cos w_n t_2) + A_2(\cos w_n t_2 - \cos w_n t_3)] \text{ si } u < 0 \text{ para } t \leq t_1 \end{aligned} \quad (5.26c)$$

Estos tres coeficientes definen la entrada del proceso (5.24a). Para calcular los tres parámetros de la salida hay diversas posibilidades. Por ejemplo, se puede aproximar la salida oscilatoria del proceso mediante la expresión:

$$y(t) = y_0 + A \text{sen}(w_n t + \varphi) \quad (5.27)$$

donde  $A$  representa la amplitud estimada de las oscilaciones de salida, y  $\varphi$  es un parámetro a estimar. Este desfase se calcula sabiendo que en el último cambio de la entrada la salida vale, o bien  $\epsilon_1$ , en el caso de que la entrada sea positiva para  $t > t_1$ , o bien  $\epsilon_2$  en el caso contrario.

El signo de la derivada en el instante  $t_1$  permite escoger entre las dos soluciones posibles que existen por la resolución de las ecuaciones. La ventaja de esta alternativa es que respeta la amplitud medida de las oscilaciones, lo que no ocurre cuando se utilizan como ecuaciones los valores de la salida en los dos últimos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ .

Los tres coeficientes relativos a la salida vienen entonces definidos por:

$$y_0 = \frac{1}{t_1 - t_3} \int_{t_3}^{t_1} y(t).dt \quad (5.28a)$$

$$a_2 = A \text{ sen } \varphi \quad b_2 = A \text{ cos } \varphi \quad (5.28b)$$

siendo  $A$  la amplitud cresta a cresta de las oscilaciones.

Operando con los distintos valores posibles de la salida para obtener el desfase, resulta:

$$-\varepsilon_1 = y_0 + A \text{ sen}(w_n t + \varphi) \text{ si } u > 0 \text{ para } t \geq t_1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(w_n t + \varphi - \pi) = \frac{\varepsilon_1 + y_0}{A}$$

$$\varphi = \pi - w_n t_1 + \arcsen\left(\frac{\varepsilon_1 + y_0}{A}\right) \text{ si } u > 0 \text{ para } t \geq t_1 \quad (5.29a)$$

y análogamente:

$$\varphi = -w_n t_1 + \arcsen\left(\frac{\varepsilon_2 - y_0}{A}\right) \text{ si } u < 0 \text{ para } t \geq t_1 \quad (5.29b)$$

Los parámetros de la función de transferencia buscada vienen dados por las ecuaciones:

$$G(0) \approx \frac{y_0}{u_0} \quad G(iw_u) \approx \frac{b_2 + ia_2}{b_1 + ia_1} \quad (5.30)$$

Las estimaciones de la ganancia crítica  $K_u$  y de la fase  $\varphi_u$  de ese punto estimado (comprendido entre  $-\pi$  y  $0$ ) sobre el lugar de Nyquist son:

$$K_u = \frac{1}{|G(i\omega_n)|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5.31)$$

$$\varphi_u = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{b_2} - \operatorname{arctg} \frac{a_1}{b_1} = -\pi + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \quad (5.32)$$

Para cada tipo de relé asimétrico se puede hacer un desarrollo similar al realizado para el caso simétrico, para calcular tanto las condiciones de oscilación (**Apéndice C.2**) como la ecuación que permiten calcular los valores críticos del proceso para su utilización en el ajuste del controlador.

### **Características del método del Relé**

Este es un método excelente en la mayoría de los casos, aunque algunas cuestiones permanecen todavía abiertas. La primera, que hay muy poca ayuda para decidir si la histéresis debe emplearse o no. Una solución posible es usarla en cualquier caso, pero es necesario determinar cual debe ser su amplitud, y su presencia puede deteriorar fuertemente el transitorio de  $y(t)$  en la fase de sintonía, especialmente si el retardo del proceso es significativo en comparación con la dinámica principal, tal como se discute en [Åst 92]. Finalmente, el procedimiento de sintonía se vuelve bastante complicado. Por eso, la decisión de usar un relé con histéresis es crítica: en muchos casos sería deseable evitarla.

Cuando comienza la oscilación, es necesario reconocerla y determinar sus parámetros característicos. Se consideran estabilizadas las oscilaciones cuando la variación de su amplitud es inferior al 10%. El problema de su reconocimiento no es fácil. Incluso asumiendo que está perfectamente resuelto, debe recordarse que las medidas están siempre afectadas por ruido, por lo que hay que tener cuidado al medir la frecuencia de la oscilación. El algoritmo debería ser insensible a pequeñas correcciones en los resultados de identificación.

Finalmente, una vez que ha sido determinado un punto de  $G(i\omega)$ , se calculan los parámetros del controlador para mover ese punto a otro en el círculo unidad, con el margen de fase requerido. De todas formas, esto no da información de cómo el diagrama de Nyquist cruza el círculo unidad; el punto puede estar en cualquier región de la respuesta en frecuencia del proceso, incluso, por ejemplo, cerca del pico de resonancia. Es más, no hay predicción sobre cuál de los parámetros del controlador debe moverse si solamente se moviera uno a la posición deseada, o cómo puede influenciar a la anchura de banda. De hecho, la frecuencia de oscilación llega a ser la de cruce en lazo cerrado, y es fácil encontrar muchos ejemplos en los que esta frecuencia es demasiado alta. Antes de mover el punto identificado sobre el círculo, el algoritmo debería asegurarse de que es un buen punto.

Para evitar estos problemas, las fórmulas de sintonía empleadas no mueven solamente el punto identificado sobre el círculo. Hay muchas versiones de estas fórmulas, cada una orientada a una clase particular de procesos. Pero todas ellas, como se derivan de casos particulares, no son capaces de predecir dónde debe ir exactamente el punto y, lo que es peor para el usuario, requieren cierto conocimiento sobre el proceso.

Una extensión de éste método se presenta en Leva [Lev 93], que reduce el conocimiento necesario sobre la dinámica del proceso. Se basa en la exploración de más de un punto de la respuesta en frecuencia del proceso antes de sintonizar el regulador, hasta que se consiguen algunas condiciones definidas por los requerimientos del control. Solamente entonces se calculan los parámetros del PID. Esta búsqueda se realiza añadiendo al lazo de control un retardo variable, calculado por el mismo algoritmo cada paso del procedimiento.

### **5.3.3 Conversión a modelos temporales de modelos en el dominio de la frecuencia**

Del modelo estimado en el dominio de la frecuencia, en términos de la respuesta en frecuencia completa o al menos de dos puntos de la curva de Nyquist, se obtiene el correspondiente modelo en el dominio del tiempo. Esto es útil si el controlador va a ser diseñado en el dominio temporal (asignación de polos, respuesta a un salto de Ziegler-Nichols, etc.). Las siguientes fórmulas de conversión [Ho 92] se utilizan para obtener un modelo temporal a partir del conocimiento de la ganancia crítica ( $K_u$ ), el periodo crítico ( $T_u$ ) y la ganancia estática ( $K$ ).

$$Gm(s) = \frac{K}{1 + s.T_1} e^{-sL_1} \quad (5.33a)$$

$$Gm(s) = \frac{K}{(1 + s.T_2)^2} e^{-sL_2} \quad (5.33b)$$

donde:

$$T_1 = \frac{Tu}{2\pi} \sqrt{(Ku.K)^2 - 1} \quad L_1 = \frac{Tu}{2\pi} \left( \pi - \text{tg}^{-1} \frac{2\pi.T_1}{Tu} \right) \quad (5.34a)$$

y

$$T_2 = \frac{Tu}{2\pi} \sqrt{Ku.K - 1} \quad L_2 = \frac{Tu}{2\pi} \left( \pi - 2 \text{tg}^{-1} \frac{2\pi.T_2}{Tu} \right) \quad (5.13b)$$

#### 5.4 DISEÑO DEL CONTROLADOR

Un controlador PID convencional es aquel elemento del sistema de control realimentado que produce tres acciones de control: una, proporcional al error ( $u_p$ ), otra proporcional a la suma o integral del error ( $u_i$ ), y una tercera acción en función de la derivada del error, que es la derivativa ( $u_d$ ). Su algoritmo de control viene dado por:

$$u(t) = Kp \cdot \left[ e(t) + \frac{1}{Ti} \int_0^t e(\tau) d\tau + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (5.35a)$$

donde  $u(t)$  es la señal de control o variable manipulada en el instante  $t$ , y  $e(t) = r(t) - y(t)$  es la señal de error o desviación entre la señal de referencia o de consigna  $r(t)$  y la salida del proceso, que es la variable medida  $y(t)$ .

Este algoritmo es el considerado estándar por ISA ("Instrument Society of America"), y en función de él se definen los siguientes términos básicos y parámetros:

**Acción de control proporcional ( $u_p$ ):** es la acción que produce una señal de control proporcional a la desviación de la salida del proceso respecto al punto de consigna. Varía instantáneamente con la señal de error y alcanza un valor estacionario cuando lo alcanza ésta.



$$\text{Acción proporcional: } u_p(t) = K_p \cdot e(t) \quad (5.35b)$$

**Acción de control integral ( $u_i$ ):** es la acción que produce una señal de control proporcional al tiempo que la salida del proceso ha sido diferente del punto de consigna. Tiene en cuenta la historia pasada de la señal del error y sólo alcanza el estacionario cuando ésta se hace cero.

$$\text{Acción integral: } u_i(t) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau \quad (5.35c)$$

**Acción de control derivativa ( $u_d$ ):** es la acción de control que produce una señal de control proporcional a la velocidad con que la salida del proceso está cambiando respecto al punto de consigna. Predice los cambios en la señal del error y se anula cuando ésta alcanza un valor estacionario.

$$\text{Acción derivativa: } u_d(t) = K_p \cdot T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (5.35d)$$

#### **Parámetros de ajuste del controlador PID:**

- **Ganancias proporcional ( $K_p$ ), integral ( $K_i = K_p/T_i$ ) y derivativa ( $K_d = K_p \cdot T_d$ ):** son las constantes de proporcionalidad en las acciones de control proporcional, integral y derivativa respectivamente.
- **Constante de tiempo integral ( $T_i$ ):** es el tiempo, generalmente expresado en minutos, que debe transcurrir para que la acción integral alcance (iguale o repita) a la acción proporcional.
- **Constante de tiempo derivativa ( $T_d$ ):** es el intervalo de tiempo, generalmente expresado en minutos, en el que la acción derivativa adelanta a la acción proporcional.
- **Frecuencia de reposición ( $1/T_i$ ):** expresada en repeticiones por unidad de tiempo, indica el número de veces que la acción integral duplica a la acción proporcional en una unidad de tiempo.

En algunos casos no es necesario utilizar las tres acciones para conseguir las especificaciones de diseño, sino que basta con la acción proporcional o con la combinación de ésta y la acción integral o derivativa. Para anular la acción integral se elige un valor muy grande de la constante de tiempo  $T_i$ , y para anular la acción derivativa se hace cero la constante  $T_d$ . Existe una extensa bibliografía sobre la elección del tipo de controlador P, PI, PD o PID más adecuado en un sistema de control. Las recomendaciones más conocidas son las recogidas en Shinskey [Shi 89]. Åström [Åst 92] ha desarrollado una herramienta de control para estudiar qué tipo de controlador es el más conveniente según el sistema a controlar y automatizar la elección.

**Parámetros de configuración del controlador PID:**

- *Estructuras de control lineales:* el algoritmo clásico de control del PID (5.16) es el más utilizado; se denomina también PID *no interactivo* en el sentido de que se pueden variar sus parámetros independientemente, aunque uno de sus parámetros, la ganancia proporcional  $K_p$ , afecta a las tres acciones.

Dentro de esta estructura estándar, existe una gran flexibilidad en lo que se refiere al tratamiento de la señal de referencia, permitiendo elegir entre diferentes configuraciones de control [Mor 90a], como las de PI-D (la acción derivativa actúa únicamente sobre la salida del proceso), y I-PD (se eliminan además los cambios bruscos en la señal de control debidos a la acción proporcional, ya que sólo la acción integral actúa sobre la señal de error). Su elección no afecta a la estabilidad del sistema en lazo cerrado pues la ecuación característica es la misma en los tres casos, ni influye en la respuesta del sistema a los cambios en la carga, pero sí afecta a la respuesta del sistema para cambios en el punto de consigna.

La ley de control del PID se puede implementar en *serie* (donde los parámetros no son independientes, interaccionan entre sí), y en *paralelo* (cuando las tres acciones de control están totalmente desacopladas). La más extendida es la forma no interactiva (5.35), que en el dominio de Laplace es:

$$G_c(s) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d \right) \tag{5.36}$$

Del estudio de los tipos de algoritmos de control se deducen unas relaciones de equivalencia entre ellos, y en definitiva, de sus parámetros característicos.

- *Estrategias de control no lineales:* surgen ante problemas que se derivan de la utilización de controladores PID, cuya solución exigen una acción no lineal.

\* Eliminación de la saturación de la acción integral (“antiwind-up”): en las aplicaciones reales de control, es normal que los elementos actuadores tengan un rango dinámico limitado. Cuando la acción de control supera los límites del actuador, éste deja de comportarse linealmente, permaneciendo en uno de sus valores límites independientemente de la señal de control, y en definitiva, independientemente de la salida del proceso. Durante el tiempo que dura esta situación existe una señal de error finita —positiva o negativa—, que se va acumulando en el término integral, por lo que la acción integral se hace muy grande en valor absoluto. Como consecuencia, puede dar una respuesta con excesiva sobrelongación y tiempo de asentamiento grande, con un gran esfuerzo en la señal de control.

Aunque existen varias soluciones, la más completa se denomina *seguimiento integral* [Ast 88]. Recalcula el término integral cada vez que se satura el control, con un lazo extra de realimentación que modifica la acción integral para que la salida del controlador se iguale a la máxima o mínima señal que interpreta el actuador. La velocidad con que la acción integral se modifica para evitar la saturación depende de un parámetro adicional  $Tr$  de ese lazo extra. Este problema no existe en la formulación incremental del controlador.

\* Transferencias suaves (“bumpless”): en ciertas condiciones, el operador de planta puede desear inhibir el modo automático normal de operar de los controladores y controlar manualmente el proceso. Si no se adoptan las medidas oportunas, la salida del regulador puede cambiar de forma brusca durante dicha transferencia, y provocar saltos no deseados en la variable controlada. Este efecto tiene más repercusión en la formulación incremental.

Para evitarlo, el algoritmo de control actualiza su término integral de forma que para la señal de error actual la suma de las acciones proporcional, integral y derivativa den como resultado la misma señal de control.

## **5.5 MÉTODOS DE SINTONÍA**

Una vez elegido el tipo de controlador hay que ajustar sus parámetros (sintonía) para que cumpla unas especificaciones (características de la respuesta). Este proceso de ajuste es necesario no sólo para calibrarlos en su puesta en marcha, sino también cuando se detectan cambios en el proceso controlado. En términos generales, se puede distinguir entre métodos directos e indirectos.

En los métodos directos, los parámetros del controlador se ajustan directamente de los datos de operación en lazo cerrado. A partir de las propiedades relevantes que caracterizan el comportamiento de un sistema, se trata de modificar los parámetros del controlador para obtener las especificaciones deseadas.

En los métodos indirectos primero se halla un modelo del proceso, y los parámetros del controlador se determinan a partir de este modelo. Es necesario, por lo tanto, un estimador de parámetros, que calcula los parámetros del modelo en base a observaciones de las entradas y salidas del proceso; hay también un bloque de diseño que calcula los parámetros del controlador a partir de los parámetros del modelo (Figura 5.6). Si el sistema opera en modo de sintonía, el proceso se excita con una señal de entrada; se estiman los parámetros recursivamente o por lotes, y se actualiza el controlador. Si el sistema opera en modo adaptativo, los parámetros del sistema se calculan recursivamente y los parámetros del controlador se actualizan con los nuevos valores obtenidos.

Hay un elevado número de técnicas disponibles para ambos métodos, directo e indirecto.

### **5.5.1 Métodos directos: sintonía cualitativa**

Los métodos directos son simples prescripciones sobre qué parámetros del PID tienen que cambiar y cómo, para conseguir unas determinadas especificaciones. Estos métodos cualitativos de ajuste están especialmente orientados al mundo industrial, donde existe a veces una gran dificultad para obtener una descripción analítica de los procesos.

La mayoría de los PID en la industria son sintonizados manualmente por los ingenieros de control y operadores. El ajuste se basa en las experiencias pasadas y en

procedimientos heurísticos. Observando las características de la respuesta en lazo cerrado ante un cambio significativo en la referencia o frente a perturbaciones en la carga, se estiman características de la respuesta del sistema tales como amortiguamiento, sobreelongación, periodo de oscilación y ganancia estática, y se ajustan directamente los parámetros del controlador. Este conocimiento empírico ha sido condensado en tablas de sintonía, que muestran la respuesta del sistema para diferentes valores de los parámetros. También estas reglas heurísticas se han incorporado a bases de conocimiento, tanto concretas como borrosas; las reglas cambian los parámetros del controlador para conseguir las especificaciones.

Los efectos cualitativos de variar los parámetros del controlador sobre la respuesta de un sistema en lazo cerrado se pueden resumir de la forma siguiente:

- *Ganancia proporcional  $K_p$* : aumentarla hace al sistema más rápido, reduciendo el tiempo de subida. Sin embargo, es más sensible a perturbaciones, y el sistema es menos estable. En general, mejora el estacionario.
- *Tiempo integral  $T_i$* : su presencia elimina el error en estado estacionario, siempre que el sistema siga siendo estable. Para sistemas de segundo orden, existe siempre un  $T_i$  a partir del cual el sistema es inestable. Disminuirlo —aumentar  $K_i$ — tiene un efecto desestabilizador; aumenta la acción integral, alargando el transitorio.
- *Tiempo derivativo  $T_d$* : lleva asociada generalmente una mejora de la estabilidad, lo que permite valores más elevados de la ganancia proporcional con la consiguiente mejora del estacionario. Esta acción no es recomendable cuando la salida del proceso está afectada de ruido, ya que ese ruido sería amplificado por la acción derivativa.

### 5.5.2 Métodos indirectos: sintonía cuantitativa

El diseño indirecto calcula los parámetros del controlador en función de los parámetros de un modelo. Consta habitualmente de dos pasos:

- 1- Estimación de ciertas características de la dinámica del proceso. Esta estimación puede realizarse en lazo abierto o en lazo cerrado (apartado 5.3); estos métodos también se clasifican según se basen en la respuesta temporal o frecuencial.

- 2- Cálculo de los parámetros del controlador aplicando fórmulas de sintonía, que son relaciones empíricas entre los parámetros del controlador elegido y las características del proceso estimadas.

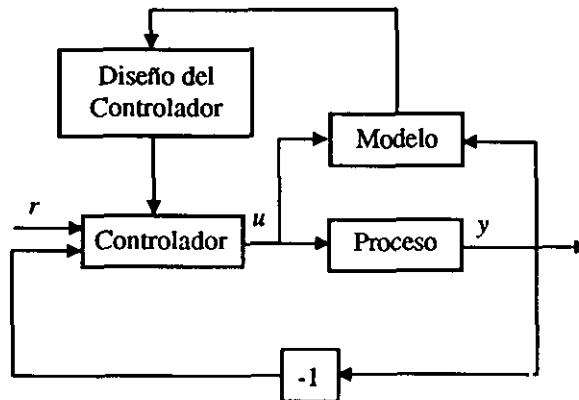


Figura 5.13 - Método indirecto de sintonía

Las fórmulas que se van a describir son empíricas, ya que se han obtenido de forma experimental como resultado de experiencias reales o simuladas con diversos procesos industriales típicos. Este carácter empírico hace que tengan un rango limitado de aplicación.

El hecho de que estos métodos den sólo valores aproximados para los parámetros del controlador hace generalmente necesario un tercer paso, de ajuste fino, mediante la observación de la respuesta del sistema en lazo cerrado (sintonía cualitativa).

#### 5.5.2.1 Método de Ziegler-Nichols de respuesta a un salto

Este método se basa en el registro de la respuesta de un sistema en lazo abierto a un salto, que se caracteriza por dos parámetros: el punto donde la pendiente de la respuesta alcanza su máximo, y la tangente a este punto. La intersección entre esta tangente y los ejes de coordenadas dan los dos parámetros  $a$  y  $T_0$  (Figura 5.2a), que permiten obtener un modelo simple del proceso, dado por la función de transferencia de un integrador con retardo:

$$G_m(s) = \frac{a}{s \cdot T_o} e^{-sT_o} \quad (5.37)$$

Ziegler y Nichols [Zie 42] calculan los parámetros del PID directamente en función de  $a$  y  $T_o$  (Tabla 5.1). También se incluye una estimación del periodo  $T$  de la dinámica dominante del sistema en lazo cerrado. Estas fórmulas dan aproximadamente una razón de amortiguamiento de  $\frac{1}{4}$  de la amplitud de la oscilación para perturbaciones en la carga. En la práctica, existen además otras fórmulas de sintonía más fina.

Controlador	$K$	$T_i$	$T_d$	$T$
P	$1/a$			$4T_o$
PI	$0.9/a$	$3T_o$		$5.7T_o$
PID	$1.2/a$	$2T_o$	$T_o/2$	$3.4T_o$

Tabla 5.1 - Parámetros del PID mediante las fórmulas de sintonía de Ziegler-Nichols

Esta aproximación presenta la ventaja de que el modelo descrito por (5.37) se puede obtener para procesos estables o inestables, con respuesta monótona creciente. Sin embargo, no da una buena descripción del comportamiento estático del sistema (a bajas frecuencias).

El criterio tradicional de razón de amortiguamiento  $\frac{1}{4}$  tiene la ventaja de que es fácil de medir, pues se basa sólo en dos puntos de la respuesta del sistema en lazo cerrado; supone un buen compromiso entre el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento para cambios en el punto de consigna y previene grandes desviaciones respecto a la referencia cuando se producen cambios en la carga o perturbaciones sobre el sistema. Además, como depende sólo de las raíces de la ecuación característica del sistema, es independiente del tipo de entrada.

### 5.5.2.2 Técnicas de optimización de criterios integrales

Hay varios métodos de diseño similares al anterior, en el sentido de que se basan en el experimento de la respuesta a un salto, combinado con una tabla que relaciona los parámetros del controlador con las características de la respuesta; pero las fórmulas de sintonía están derivadas de distintos criterios integrales de optimización, como el de

minimizar la integral del valor absoluto del error (IAE), la integral del valor absoluto del error ponderada en el tiempo (ITAE), o la integral del cuadrado del error (ISE), etc.

$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| \cdot dt \quad (5.38a)$$

$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t \cdot |e(t)| \cdot dt \quad (5.38b)$$

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (5.38c)$$

Estos criterios integrales son más precisos que el de razón de amortiguamiento  $\frac{1}{4}$ , ya que evitan la multiplicidad de soluciones; pero los parámetros del PID que se obtienen con ellos no son sólo función del criterio utilizado, sino también del tipo de entrada y del cambio en el punto de consigna o cambio en la carga.

Los métodos más conocidos son:

- *Método de Cohen y Coon (1953)*: variación del método anterior que trata de eliminar la no unicidad en la determinación de los parámetros del controlador implícita en el criterio de razón de amortiguamiento  $\frac{1}{4}$ . Para ello, en controladores PI utiliza como criterio de sintonía razón de amortiguamiento  $\frac{1}{4}$  y mínima integral del error, y en control PID razón de amortiguamiento  $\frac{1}{4}$ , mínima integral del error y cierta condición entre los parámetros de control [Coh 53].
- *Fórmulas de López, Murrill y Smith (1967)*: para sintonía de controladores PI y PID (no interactivo) con criterios integrales IAE, ISE y ITAE para cambios en la carga [Lóp 67].
- *Fórmulas de Rovira, Murrill y Smith (1969)*: para sintonía de controladores PI y PID con criterios integrales IAE, ISE y ITAE para cambios en el punto de consigna [Rov 69].
- *Fórmulas de Kaya y Scheib (1988)*: sintonía para PID's interactivos o paralelos, con criterios integrales IAE, ISE y ITAE para cambios en el punto de consigna y en la carga [Kay 88].



- **Método de Dahlin (1968):** considera como objetivo de control que la salida del sistema siga perfectamente a la señal de referencia con una cierta constante de tiempo. Si el proceso tiene asociado un retardo la respuesta del sistema debe tener el mismo retardo.

Un resumen de estos métodos se ha condensado en la Tabla 5.2, donde se especifican los coeficientes *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* de las siguientes fórmulas generales de los parámetros del PID (5.39), recomendados cuando  $T_p.T_o > 0.4$ :

$$K_p = \frac{A.(T_p.T_o)^{-B}}{K}; \quad T_i = \frac{C.(T_p.T_o)^D}{T_p}; \quad T_d = \frac{E.(T_p.T_o)^F}{T_p} \quad (5.39)$$

Criterio	Modo	A	B	C	D	E	F
IAE	P	0.902	0.985				
ISE	P	1.411	0.917				
ITAE	P	0.490	1.084				
IAE	PI	0.984	0.986	1.644	0.707		
ISE	PI	1.305	0.959	2.033	0.739		
ITAE	PI	0.859	0.977	1.484	0.680		
IAE	PID	1.435	0.921	1.139	0.749	0.482	1.137
ISE	PID	1.495	0.945	0.917	0.711	0.560	1.006
ITAE	PID	1.357	0.947	1.176	0.738	0.381	0.995

Tabla 5.2 - Parámetros del PID recomendados para los criterios integrales

No existen grandes diferencias, una vez elegido el tipo de controlador, entre la utilización de uno u otro criterio integral de sintonía [Mor 90b]. La mayoría de las veces están aplicados a modelos de primer orden con retardo de la forma de la ecuación (5.1), por lo que pueden no dar buenos resultados para sistemas de orden más alto.

### 5.5.2.3 Método de asignación de polos

Una vez obtenido el modelo del proceso, se considera un determinado controlador y se ajustan sus parámetros de tal forma que las raíces de la ecuación característica se sitúen en ciertos lugares prefijados por las especificaciones de diseño [Ást 88].

Si el proceso está descrito por una función de transferencia de orden bajo, se puede llevar a cabo un diseño completo por asignación de polos. Un ejemplo de este desarrollo analítico se puede realizar si se considera un sistema descrito por un modelo de segundo orden:

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s.T_1)(1 + s.T_2)} \quad (5.40)$$

Este modelo tiene tres parámetros. Con un controlador PID, que también tiene tres parámetros, es posible colocar arbitrariamente los tres polos del sistema en lazo cerrado. La función de transferencia del PID paralelo es:

$$G_c(s) = \frac{K(1 + s.T_i + s^2.T_i.T_d)}{s.T_i} \quad (5.41)$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado será entonces:

$$s^3 + s^2 \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{K.K_p.T_d}{T_1.T_2} \right) + s \left( \frac{1}{T_1.T_2} + \frac{K.K_p}{T_1.T_2} \right) + \frac{K.K_p}{T_i.T_1.T_2} = 0 \quad (5.42a)$$

La ecuación característica de un sistema de tercer orden se puede expresar de forma más compacta como:

$$(s + \alpha.\omega).(s + 2\zeta.\omega.s + \omega^2) = 0 \quad (5.42b)$$

que contiene dos raíces complejas correspondientes a los dos polos dominantes del sistema en lazo cerrado, con coeficiente de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y frecuencia natural  $\omega$ , y un polo real situado en  $-\alpha.\omega$ . Identificando los coeficientes de estas dos ecuaciones características:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{K.K_p.T_d}{T_1.T_2} = \omega.(\alpha + 2\zeta) \quad (5.43a)$$

$$\frac{1}{T_1 T_2} + \frac{K \cdot K_p}{T_1 T_2} = \omega^2 (1 + 2\zeta\alpha) \quad (5.43b)$$

$$\frac{K \cdot K_p}{T_i T_1 T_2} = \alpha \cdot \omega^3 \quad (5.43c)$$

Estas tres ecuaciones determinan los parámetros del PID, cuya solución es:

$$K_p = \frac{T_1 T_2 \cdot \omega^2 \cdot (1 + 2\zeta\alpha) - 1}{K} \quad (5.44a)$$

$$T_i = \frac{T_1 T_2 \cdot \omega^2 \cdot (1 + 2\zeta\alpha) - 1}{T_1 T_2 \cdot \alpha \cdot \omega^3} \quad (5.44b)$$

$$T_d = \frac{T_1 T_2 \cdot \omega \cdot (\alpha + 2\zeta) - T_1 - T_2}{T_1 T_2 \cdot \omega^2 (1 + 2\zeta\alpha) - 1} \quad (5.44c)$$

Se puede reducir a un PI haciendo  $T_d = 0$ , es decir, eligiendo:

$$\omega' = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 \cdot (\alpha + 2\zeta)} \quad (5.45)$$

La elección de la frecuencia  $\omega$  es crítica. El tiempo derivativo es negativo para  $\omega \leq \omega'$ . La frecuencia  $\omega'$  da el límite inferior de la anchura de banda. También cabe destacar que la ganancia crece rápidamente con  $\omega$ . El límite superior de la anchura de banda viene dada por la validez del modelo simplificado (5.40).

#### 5.5.2.4 Método de cancelación de los polos del proceso

El controlador PID tiene dos ceros (5.41). Este método de diseño consiste en elegir estos dos ceros de tal forma que cancelen los dos polos dominantes del proceso, y permitan reducir el orden del sistema; o también se sitúan de forma que uno de ellos cancele el polo

dominante y el otro ayude a mejorar la estabilidad. Se considera un caso particular del método anterior de asignación de polos.

Es una estrategia simple que da una buena respuesta a cambios en la referencia, pero produce una respuesta pobre a variaciones en la carga. Una excepción a esto es el caso de grandes retardos, donde el tiempo de asentamiento es bastante largo en relación a la constante de tiempo que va a ser cancelada. Para un proceso con retardo dominante, la cancelación de polos y ceros no es recomendable.

### 5.5.2.5 Método de Ziegler-Nichols de respuesta en frecuencia

El diseño se basa en el conocimiento del punto de la curva de Nyquist de la función de transferencia del proceso donde dicha curva intersecciona con el eje real negativo (Figura 5.4). Por razones históricas, este punto se caracteriza por los parámetros  $K_u$  y  $T_u$ , ganancia y periodo críticos. Estas dos cantidades pueden obtenerse por el método de la oscilación mantenida, usando una realimentación con relé o por el método de correlación (apartado 5.3.2).

Las fórmulas de Ziegler-Nichols para determinar los parámetros del PID en base a estas características de frecuencia se describen en la Tabla 5.3 [Zie 42], donde también se muestra una estimación del periodo  $T$  de la dinámica dominante del proceso en lazo cerrado.

Estas fórmulas dan un amortiguamiento de  $\frac{1}{4}$  de la amplitud de la oscilación para perturbaciones en la carga. Ambos,  $T$  y el amortiguamiento obtenido con la reglas de Ziegler-Nichols, pueden diferir significativamente de los valores esperados, por lo que existen fórmulas refinadas de Ziegler-Nichols, que reducen estas discrepancias y mejoran la sintonía [Han 91a].

Controlador	$K$	$T_i$	$T_d$	$T$
P	$0.5 K_u$			$T_u$
PI	$0.4 K_u$	$0.8 T_u$		$1.4 T_u$
PID	$0.6 K_u$	$0.5 T_u$	$0.12 T_u$	$0.85 T_u$

Tabla 5.3 - Parámetros del PID con el método de Ziegler-Nichols en el dominio de frecuencia



Para un sistema descrito por una función de transferencia  $G$ , su margen de fase viene dado por:

$$\Phi_m = \pi + \arg G(i\omega_g).Gc(i\omega_g) \quad (5.46a)$$

donde  $|G(i\omega_g).Gc(i\omega_g)| = 1$ , y  $\omega_g$  es la frecuencia de corte de la ganancia. El margen de amplitud o margen de ganancia es:

$$Am = \frac{1}{|G(i\omega_c).Gc(i\omega_c)|} \quad (5.46b)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia crítica o la frecuencia de cruce de fase.

Si se conocen la ganancia crítica  $Ku$  y el periodo crítico  $Tu$ , se pueden usar las siguientes fórmulas [Ast 88] para un diseño sencillo con un margen de fase  $\Phi_m$  pre-especificado:

$$Kp = Ku. \cos \Phi_m \quad (5.47a)$$

$$Ti = \frac{Tu}{4\pi} \left( \tan \Phi_m + \sqrt{1 + \tan^2 \Phi_m} \right) \quad (5.47b)$$

$$Td = Ti/4 \quad (5.47c)$$

Este diseño funciona bien para procesos con retardos relativamente pequeños. Sin embargo, especialmente cuando el retardo es dominante, el margen de ganancia puede ser muy pobre aunque se consiga el margen preestablecido de fase. Si se ha obtenido el modelo de un primer orden con retardo (5.1), se puede utilizar la siguiente relación [Ho 92] para conseguir un margen de amplitud determinado  $Am$ :

$$Kp = \frac{\pi.Tp}{2Am.K.To} \quad (5.48a)$$

$$Ti = Tp \quad (5.48b)$$

Por este último método, el margen de fase es consistente con el margen de ganancia, como se ve por la siguiente relación:

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} (1 - 1 / A_m) \quad (5.49)$$

Esta simplificación se consigue utilizando la cancelación de polos y ceros para un sistema de primer orden con retardo. También se puede obtener el conjunto de fórmulas correspondientes a un proceso de segundo orden con retardo.

### 5.5.3 Métodos de sintonía para sistemas discretos

Puesto que al muestrear un proceso se pierde parte de la información, es inevitable que la versión discreta del algoritmo de control PID no de tan buenos resultados como la continua, aunque el periodo de muestreo se elija muy pequeño. Sin embargo, los reguladores PID discretos permiten facilidades en la modificación de los parámetros, en la visualización de las variables, en los cambios de modo de funcionamiento, etc., que hacen que sus desventajas iniciales se vean compensadas.

Se suele aplicar la transformación rectangular (5.50) para obtener un sistema digital que aproxime la ley continua:

$$s = \frac{z-1}{z \cdot T} \quad (5.50)$$

donde T es el periodo de muestreo, s el operador derivador en la transformada de Laplace y z el operador adelanto en la transformada Z.

La ley de control del PID discreto, al aplicar esta transformación a la ecuación (5.35), resulta:

$$G_c(z) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right) \quad (5.51)$$

Para controladores PID discretos se pueden aplicar la mayoría de los métodos descritos anteriormente, pero con ciertas restricciones:

- Si el periodo de muestreo es muy pequeño con respecto a las constantes de tiempo del proceso, se considera como si fuera el caso continuo.
- Para estimar en lazo cerrado  $K_u$  y  $T_u$ , debe considerarse el mismo periodo de muestreo que va a tener el controlador.
- Se utiliza como retardo el retardo corregido (sumar medio periodo de muestreo al retardo estimado).

Los más comúnmente utilizados, porque ya tienen en cuenta que se trabaja con sistemas discretos, son:

- *Método de Moore, Smith y Murrill (1969)*: permite aplicar el método de Ziegler-Nichols, y los que se derivan de él, en el caso de sistemas muestreados, cuando el periodo de muestreo es tal que afecta a la respuesta del sistema, sustituyendo el retardo estimado por otro corregido [Moo 69].
- *Método de Takahashi y col. (1969)*: las fórmulas de sintonía se obtienen para el caso discreto a partir de las características dinámicas del proceso y del periodo de muestreo. Utiliza como criterio de sintonía la minimización de la integral de cuadrado del error (ISE).

## 5.6 CONCLUSIONES

Hay diversos métodos para determinar las características de un proceso, y hay también distintas formas de configurar un sistema de control y de ajustar sus parámetros. Esto hace que una revisión exhaustiva de todas las combinaciones sean una tarea prácticamente inabarcable. *Por eso se ha pretendido en este capítulo aportar una visión con cierta perspectiva de las estrategias que se utilizan más comúnmente.*



Para procesos con dinámicas simples, se ha demostrado que es posible encontrar métodos sencillos tanto de estimación del modelo como de ajuste del controlador, que dan buenos resultados. Estas dos fases de la sintonía están fuertemente relacionadas. Esto ha permitido también observar otros aspectos que envuelve el diseño de control, como la dinámica del proceso, perturbaciones en la carga, ruido, no linealidades, etc.

Se ha aplicado a la estructura de control PID porque es la más utilizada desde hace varias décadas. Su consolidación y desarrollo, a pesar de que las nuevas tecnologías permiten otros tipos de control más avanzado, se debe a numerosas razones. Una de ellas, primordial, es que *existen para este tipo de controladores variadas técnicas de sintonía, métodos útiles y sistemáticos de ajuste, que son bien conocidos*. Esta característica es la que se pretende conseguir con este trabajo para los controladores basados en lógica borrosa, lo que facilitaría su incursión en el mundo industrial.

Por último, se ha estudiado en profundidad el *método del relé*, ampliándolo al caso asimétrico, ya que *es una estructura que permite la autosintonía de distintas configuraciones de control*, como por ejemplo, realimentación en cascada, que se expone en el Capítulo 7.

## CAPÍTULO 6

# ***TÉCNICAS CLÁSICAS DE SINTONÍA EN CONTROLADORES BORROSOS***

### ***6.1 INTRODUCCIÓN***

Las técnicas clásicas de sintonía expuestas anteriormente (Capítulo 5), abren un amplio abanico de posibilidades para el ajuste de los reguladores PID. Están avaladas por numerosas aplicaciones reales y muchos años de investigación.

Hasta el momento, los controladores convencionales son los más utilizados en el área industrial, lo que ha permitido que los operarios de planta tengan un conocimiento bastante generalizado de lo que significa el comportamiento de los diferentes parámetros del regulador, desde el punto de vista de su sintonía con el proceso.

De ahí que una forma razonable de abordar el estudio de cualquier otro procedimiento de control y de su sintonía sea la de analizarlos comparándolos con los reguladores clásicos, que han sido ampliamente tratados y de los que se tiene un profundo conocimiento. Esto permite a las nuevas técnicas de control beneficiarse de los avances que se han dado en este sentido, cuando es posible su aplicabilidad.

En el caso de los controladores borrosos, se están realizando numerosos estudios sobre su comportamiento; pero es un campo todavía abierto a la investigación, donde gran parte del conocimiento aplicado es heurístico y aún no está sistematizado. En concreto, respecto a la etapa de sintonía de los controladores borrosos, no hay demasiados avances en el tema, ya que no hay una correlación tan directa entre los parámetros del controlador y la respuesta del proceso como en otros sistemas.

Por esta razón se ha considerado interesante plantear, en este capítulo de la Memoria, para una determinada clase de controladores borrosos de complejidad creciente, procedimientos de sintonía que provienen de las técnicas clásicas del control.

Por otro lado, este planteamiento permite simular con el controlador borroso el comportamiento de un PID, lo que hace que el punto de partida sea conocido, y facilita su incursión en el mundo del control, donde algunos usuarios se muestran reticentes a la hora de sustituir los controladores convencionales por otras técnicas más avanzadas.

## **6.2 ESTUDIO ANALÍTICO DE CONTROLADORES BORROSOS**

El desarrollo analítico de los controladores basados en la lógica borrosa permite establecer, de forma rigurosa, la influencia de algunos de sus parámetros de ajuste sobre la respuesta, así como compararlos —para ciertos casos particulares— a los clásicos y generalizar los resultados. Aunque ha habido alguna propuesta en este sentido [Yin 90], este análisis no se había realizado de forma general, ni se han obtenido las conclusiones que se van a exponer en este trabajo.

El controlador denominado PID Borroso realiza una función análoga a la de su homónimo clásico, pero tanto las variables de entrada como la acción de control resultante vienen expresadas en términos lingüísticos.

La Figura 6.1 muestra el esquema básico de un regulador borroso del tipo PID, en su formulación incremental. Como variables de entrada al controlador borroso se han tomado el error ( $e$ ), la primera derivada o cambio en el error ( $ce$ ), y la derivada segunda o aceleración del error ( $ac$ ). La variable de salida del controlador es el cambio en la acción de control  $\Delta u$ .

Se han definido estas variables del controlador, para el caso discreto, como:

$$e(kT) = r(kT) - y(kT) \quad (6.1a)$$

$$ce(kT) = [e(kT) - e((k-1)T)]/T \quad (6.1b)$$

$$ac(kT) = [ce(kT) - ce((k-1)T)]/T = [e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-2)T)]/T^2 \quad (6.1c)$$

$$u(kT) = u((k-1)T) + du(kT) \quad (6.1d)$$

siendo  $T > 0$  el periodo de muestreo, y  $k$  entero  $> 0$

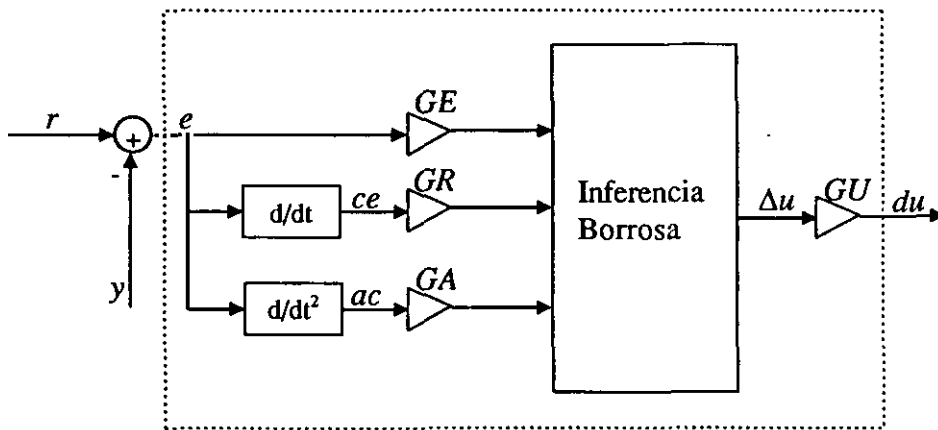


Figura 6.1 - Controlador Borroso PID incremental

Las ganancias del error, del cambio en el error, de la aceleración del error y de la acción de control — $GE$ ,  $GR$ ,  $GA$  y  $GU$  respectivamente—, se consideran los parámetros de sintonía del controlador borroso.

Como se ha expuesto en el Capítulo 3, un sistema borroso admite cierta variedad de especificaciones en su implementación. La elección de unas u otras tiene una influencia significativa en la conclusión que se obtiene, y constituyen las posibles fuentes de la no linealidad del controlador. Se van a establecer, por ello, algunas de estas especificaciones generales para su formulación analítica.

Tratamiento de la información de entrada

Para las variables de entrada y salida del controlador se determinan los intervalos de variación de éstas, definiendo sus respectivos universos de discurso para cubrir ese rango de valores. Una apreciación del rango de las variables puede ser (Figura 6.2):

$$\text{Universo de Discurso de la variable error: } U_e = [E_{\text{mín}}, E_{\text{máx}}] \quad (6.2a)$$

$$\text{Universo de Discurso de la variable cambio en el error: } U_{ce} = [CE_{\text{mín}}, CE_{\text{máx}}] \quad (6.2b)$$

$$\text{Universo de Discurso de la variable aceleración: } U_{ac} = [AC_{\text{mín}}, AC_{\text{máx}}] \quad (6.2c)$$

$$\text{Universo de Discurso de la variable de control: } U_{\Delta u} = [Lu_{\text{mín}}, Lu_{\text{máx}}] \quad (6.2d)$$

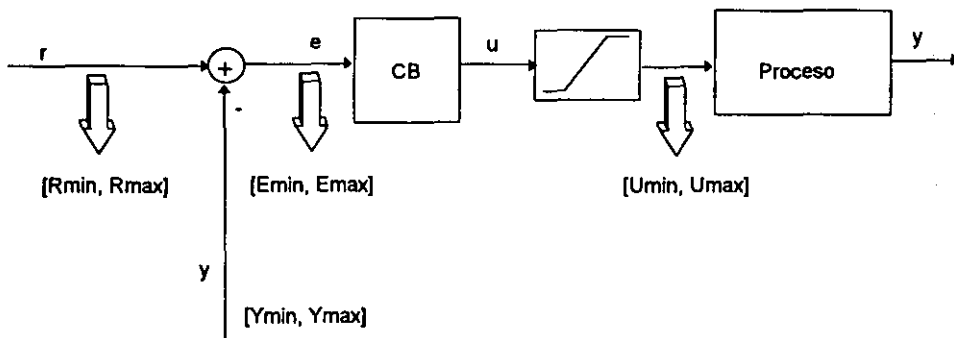


Figura 6.2 - Rango de variación de las variables

donde  $E_{\text{mín}} = R_{\text{mín}} - Y_{\text{máx}}$  (6.3a)

$$E_{\text{máx}} = R_{\text{máx}} - Y_{\text{mín}} \quad (6.3b)$$

$$CE_{\text{máx}} = [E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}]/T = -CE_{\text{mín}} \quad (6.3c)$$

$$AC_{\text{máx}} = [CE_{\text{máx}} - CE_{\text{mín}}]/T = -AC_{\text{mín}} \quad (6.3d)$$

Para mayor simplicidad, se denominan los intervalos de los universos de discurso —que se definen simétricos— como:

$$U_e = [-E_{\text{máx}}, E_{\text{máx}}] = [-L_e, L_e] \quad (6.4a)$$

$$U_{ce} = [-CE_{\text{máx}}, CE_{\text{máx}}] = [-L_{ce}, L_{ce}] \quad (6.4b)$$

$$U_{ac} = [-AC_{\text{máx}}, AC_{\text{máx}}] = [-L_{ac}, L_{ac}] \quad (6.4c)$$

Es necesario hacer este análisis previo ya que, si los universos de discurso no cubren completamente el rango de variación de las variables, se producen acciones de control particulares, en el sentido de que no son contempladas en la formulación general que se va a obtener. Por ejemplo, si las variables no pertenecen al intervalo donde el algoritmo de borrosificación se ha definido de forma lineal, se está añadiendo esa nueva saturación al controlador, lo que equivale a ampliar su espacio de respuesta no lineal.

En general, para todas las variables, hay que considerar las restricciones de la saturación de los sensores, límites físicos, de seguridad, regulaciones ambientales, etc., que se incorporan de una forma u otra al sistema.

No hay que confundir la saturación del actuador que limita el control  $[U_{mín}, U_{máx}]$  (Figura 6.2), con los centros de las etiquetas extremas de la variable de salida del controlador borroso  $[Lu_{mín}, Lu_{máx}]$ . Estas últimas tienen una gran influencia en el control que se obtiene, y por lo tanto en la respuesta. Conviene delimitarlos en función de la aplicación, y sobre todo, en función del método de desborrosificación empleado, ya que pueden incrementar o disminuir notablemente el valor de la salida. Para tener en cuenta las restricciones del actuador, se constriñe la salida mediante el factor de escala  $GU$ , que normaliza la salida a los valores adecuados. Se exponen en el apartado 6.3.1 algunos criterios para su selección.

Estos valores (6.3) son extremos, y contemplan el rango posible de variación. Junto con una asignación correcta de los demás parámetros del regulador borroso, producen una acción de control que proporciona una respuesta del sistema que puede ser excesivamente lenta. En algunas situaciones, es conveniente permitir un control más fuerte, del que resulte una respuesta más rápida. Esto se consigue disminuyendo el intervalo de definición de las variables de entrada, lo que equivale a aumentar la resolución del sistema para valores pequeños de éstas. Unos márgenes adecuados para el caso discreto, por ejemplo, vienen dados por las expresiones siguientes:

$$CE_{mín} = E_{mín}/T \qquad CE_{máx} = E_{máx}/T \qquad (6.5)$$

que suelen ser suficientes para cubrir los valores que se obtienen, ya que el error no oscila habitualmente entre sus posibles valores máximos y mínimos, como se ha comprobado en el apartado 6.3.1.2.

*Base de conocimiento: Base de datos*

Se eligen, en esos universos de discurso, las etiquetas lingüísticas o conjuntos borrosos primarios para cada variable. La opción más sencilla, que por otro lado es bastante aplicada porque permite obtener resultados satisfactorios, es considerar dos etiquetas para cada una de las variables de entrada:

N: Negativo  
P: Positivo

y tres para la variable de salida:

N: Negativo  
Z: Cero  
P: Positivo

Para cada una de ellas se determina su función de pertenencia, de acuerdo con el conocimiento disponible, y se calcula el grado de pertenencia de las entradas a cada etiqueta, mediante una estrategia de borrosificación (Capítulo 2, apartado 2.3.2). Las entradas son previamente ponderadas por sus factores de escala correspondientes, es decir, se calculan los valores borrosos del error, del cambio en el error y de la aceleración modificados por sus ganancias respectivas.

Se denotan  $\mu_{Ei}$ ,  $\mu_{CEj}$  y  $\mu_{ACh}$  las funciones de pertenencia asociadas a cada variable de entrada, donde  $i$ ,  $j$  y  $k$  pueden tomar cada una los valores de las posibles etiquetas lingüísticas P, Z ó N para cada caso.

Para trabajar con una notación más compacta, se va a designar como  $E_i$ ,  $CE_j$  y  $ACh$  el resultado de evaluar estas funciones para una entrada dada; es decir, el grado de pertenencia de la variable a una etiqueta determinada. Por ejemplo, al borrosificar un valor de entrada del error ponderado por su ganancia correspondiente  $GE.e(t)$  se obtiene su grado de pertenencia al conjunto  $\mu_{Ep}$  que se representa  $E_p$  y de forma análoga su pertenencia a  $\mu_{En}$  denominada  $E_n$ , y de la misma manera se hace para las demás variables de entrada.

Se han considerado funciones de pertenencia trapezoidales para las variables de entrada (dos etiquetas, Figura 6.3) y para el control (tres etiquetas, Figura 6.4), ya que producen una buena aproximación de las variables y son las más sencillas de manejar analíticamente. Utilizando la siguiente notación general:

$$\begin{aligned} x(t) &= e(t), ce(t), ac(t) \text{ ó } \Delta u(t) \\ GX &= GE, GR, GA \text{ ó } GU \\ Lx &= Le, Lce, Lac \text{ ó } Lu \end{aligned}$$

las funciones de pertenencia triangulares para *dos etiquetas* en la zona lineal —dentro del intervalo que contiene al universo de discurso de las variables— vienen definidas por (Figura 6.3):

$$Xp = 0.5\left(1 + \frac{GX \cdot x(t)}{Lx}\right) \quad Xn = 0.5\left(1 - \frac{GX \cdot x(t)}{Lx}\right) \quad (6.7)$$

y en la zona no lineal,

$$Xp = 1 \quad Xn = 0 \quad (6.8a)$$

$$Xp = 0 \quad Xn = 1 \quad (6.8b)$$

que verifican la siguiente relación:

$$Xp + Xn = 1 \quad (6.9)$$

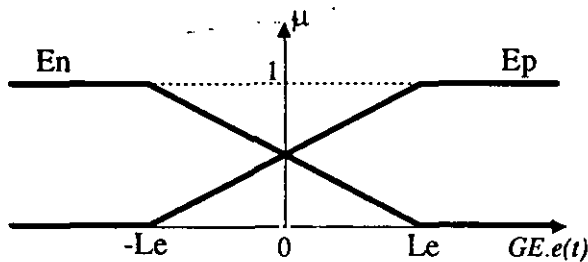


Figura 6.3 - Conjuntos borrosos del error

Se definen así los términos borrosos correspondientes al error (Ep, En), al cambio en el error (CEp, CEn) y a la aceleración del error (ACp, ACn).



Para definir las funciones de pertenencia que corresponden a los *tres términos* lingüísticos de la salida (Figura 6.4), o si fuera el caso, de las entradas, se utilizan las siguientes expresiones, dentro del intervalo comprendido en el universo de discurso, según las zonas:

$-Lx \leq GX.x(t) \leq 0$	$0 \leq GX.x(t) \leq Lx$
$Xp = 0$	$Xp = \frac{GX.x(t)}{Lx} \quad (6.10a)$
$Xz = 1 + \frac{GX.x(t)}{Lx}$	$Xz = 1 - \frac{GX.x(t)}{Lx} \quad (6.10b)$
$Xn = \frac{-GX.x(t)}{Lx}$	$Xn = 0 \quad (6.10c)$
$Xz + Xn = 1$	$Xz + Xp = 1 \quad (6.10d)$

y para el resto de los valores de las variables,

$$Xp = 1 \quad Xz = 0 \quad Xn = 0 \quad (6.11a)$$

$$Xp = 0 \quad Xz = 0 \quad Xn = 1 \quad (6.11b)$$

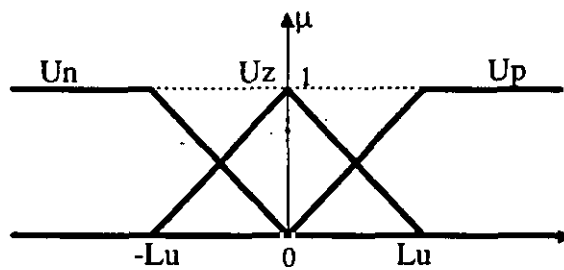


Figura 6.4 - Conjuntos borrosos del control

Por lo tanto, si las funciones de pertenencia son triangulares, con discontinuidad en la primera derivada y verifican las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^{Nc} Ei(e(t)) = 1 \quad \sum_{j=1}^{Ncc} CEj(ce(t)) = 1 \quad \sum_{h=1}^{Nac} ACh(ac(t)) = 1 \quad (6.12)$$

la acción de control se puede aproximar por tramos lineales [Mat 92], como se va a comprobar para los algoritmos de desborrosificación empleados (Figura 6.5).

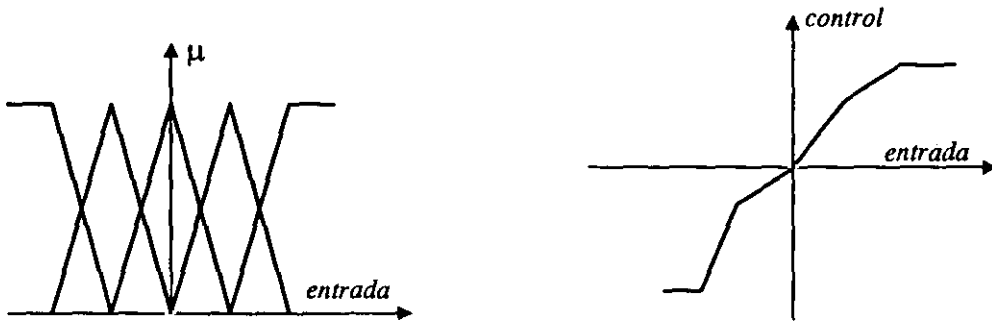


Figura 6.5 - Forma de la función de control con funciones de pertenencia triangulares

Aunque se parte de funciones de pertenencia triangulares para las variables de entrada, con media en  $\pm Lx$ , la variación de las ganancias ( $Gx$ ) se traduce en una modificación de las funciones de pertenencia (Figura 6.6a):

$$E_i (GE.e(t)) = (E_i.GE)(e(t)) \quad (6.13a)$$

$$CE_j (GR.ce(t)) = (CE_j.GR)(ce(t)) \quad (6.13b)$$

$$ACh (GA.ac(t)) = (ACh.GA)(ac(t)) \quad (6.13c)$$

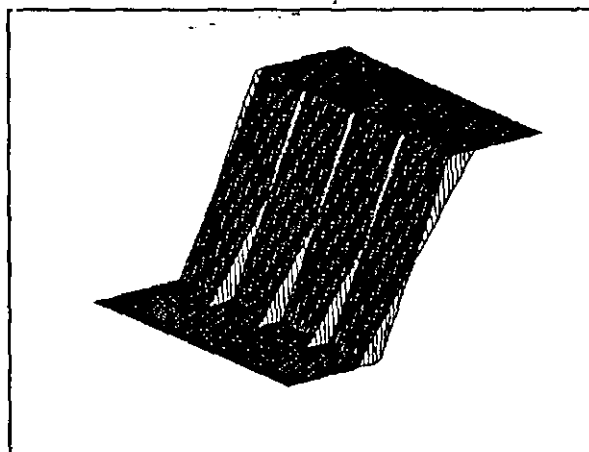


Figura 6.6a - Variación de  $E_p$  con  $GE(t)$

Esta variación de  $GE$ ,  $GR$  ó  $GA$  es equivalente a desplazar la media de las etiquetas; por lo tanto, al calibrar el controlador, se puede fijar uno u otro parámetro, ya que la función de pertenencia resultante tendrá una media  $Lx\_real$  que verifica:

$$Le\_real = Le / GE \quad (6.14a)$$

$$Lce\_real = Lce / GR \quad (6.14b)$$

$$Lac\_real = Lac / GA \quad (6.14c)$$

en el sentido de que corresponden a los **valores reales** de los límites lineales del universo de discurso [Dor 93]. El valor de esta relación es el que determina la resolución del control.

Por eso, aumentar los factores de escala implica disminuir los universos de discurso reales de las variables, con lo que aumenta la no linealidad del controlador borroso (Figura 6.6b).

$$\frac{Le}{GE} = \frac{Le'}{GE'} = Le\_real$$

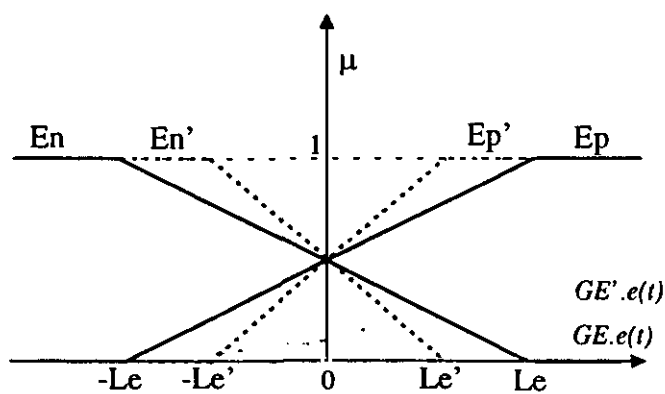


Figura 6.6b - Variación de los universos de discurso con los factores de escala

*Base de conocimiento: Base de reglas*

A partir de las variables lingüísticas de entrada y salida del controlador se enuncian las reglas que describen su actuación. Estas reglas se determinan de forma heurística, basándose en el conocimiento suministrado por el operario de control. Como las reglas dependen tanto del número de variables de entrada como de los términos lingüísticos asignados a cada una, se establecen posteriormente para cada caso estudiado.

### Mecanismo de inferencia

Para obtener la conclusión se aplica un método de inferencia determinado a las variables de entrada ya borrosificadas, con lo que se obtiene un valor borroso de la acción de control. En las aplicaciones a control de procesos se suele trabajar con el mecanismo de inferencia basado en la Regla Composicional de Inferencia RCI max-\*, utilizando distintas funciones de implicación.

A la hora de interpretar tanto las conectivas que unen las premisas de cada una de las reglas (**and**) como la relación entre ellas (**or**), se pueden adoptar diferentes tipos de lógicas, según las t-normas y t-conormas, respectivamente, que se especifiquen para estos operadores (Apéndice A). En los siguientes desarrollos, se analizan los resultados para las dos interpretaciones más comunes en control, la de Zadeh y la de Lukasiewicz.

\* Lógica de Zadeh:

$$\text{and}(E_i, CE_j) = \text{mín}(E_i, CE_j) \quad (6.15a)$$

$$\text{or}(U_i, U_j) = \text{máx}(U_i, U_j) \quad (6.15b)$$

\* Lógica de Lukasiewicz:

$$\text{and}(E_i, CE_j) = \text{máx}(0, E_i + CE_j - 1) \quad (6.16a)$$

$$\text{or}(U_i, U_j) = \text{mín}(1, U_i + U_j) \quad (6.16b)$$

Los operadores propuestos por Zadeh, mínimo y máximo, se utilizan cuando no existe dependencia de las variables ya que, por ejemplo, cuando la función con grado de pertenencia menor disminuye, el resultado de la operación máximo no varía. Esto confiere cierta robustez a los resultados, que no requieren funciones de pertenencia muy precisas. Sin embargo, también suponen en parte pérdida de información. Las normas propuestas por Lukasiewicz presentan la máxima interacción [Ped 93], por lo que también se utilizan a menudo.

Para construir la matriz de inferencia, se ha operado con la función **and** tal como ha sido definida por Zadeh, por lo que el grado de cumplimiento de la conclusión de cada regla es el menor de cada una de sus condiciones. Es decir, cada término de la matriz de

inferencia tiene como peso  $p_{ijh}$  el menor de los respectivos grados de pertenencia de las variables de entrada a las etiquetas correspondientes a esas filas y columnas:

$$p_{ijh} = \text{mín}(E_i(e(t)), CE_j(ce(t)), ACh(ac(t))) \quad (6.17)$$

Una vez obtenida la conclusión de cada regla, existen diversas estrategias para calcular la contribución final sobre cada término lingüístico del control, cuando más de una proporcionan la misma salida. Las más utilizadas son las que corresponden a aplicar la función *or* según las lógicas descritas anteriormente.

Utilizar la *or* propuesta por Zadeh significa considerar sólo las reglas que tengan un peso máximo para ese término lingüístico de la salida, mientras que el resultado de adoptar la función *or* de Lukasiewicz es aplicar todas las reglas de acuerdo con su peso, excepto cuando esta suma es mayor que uno, ya que entonces se acota a este valor.

#### Tratamiento de la información de salida

La salida borrosa que se obtiene de la inferencia hay que transformarla en un valor concreto, de acuerdo con las necesidades del control. Para ello se aplica cualquiera de los métodos de desborrosificación descritos anteriormente (Capítulo 3, 3.6.1). Se van a estudiar dos métodos distintos, analizando su influencia:

$$\text{Desborrosificación lineal: } \Delta u(t) = \sum_{k=1}^{Nu} U_k \cdot p_k \quad (6.18)$$

$$\text{Desborrosificación no lineal (centro de gravedad): } \Delta u(t) = \frac{\sum_{k=1}^{Nu} U_k \cdot p_k}{\sum_{k=1}^{Nu} U_k} \quad (6.19)$$

donde  $U_k$  es el peso final asociado a cada etiqueta de control,  $Nu$  el número de términos asignados a esa variable, y  $p_k$  es el centro de la función de pertenencia asociada a la etiqueta lingüística  $k$  de la variable de salida. En este caso, (Figura 6.4):

$$\begin{array}{ll} k = N, & pk = - Lu \\ k = Z, & pk = 0 \\ k = P, & pk = Lu \end{array}$$

Una vez obtenido el valor numérico del incremento del control, éste se multiplica por su factor de escala  $GU$  antes de ser enviado como entrada al proceso:

$$du(t) = GU.\Delta u(t) \tag{6.20}$$

Se van a considerar, basados en este esquema, distintos controladores borrosos de complejidad creciente, partiendo del caso más sencillo de un PI borroso con método de desborrosificación lineal, hasta el PID con ambas estrategias de desborrosificación, aumentando la partición de entrada.

De las distintas fuentes de no linealidad del controlador borroso se estudia la originada por el método de desborrosificación, y en algunos casos se ha considerado también la borrosificación de las entradas mediante un algoritmo no lineal.

### 6.3 ANÁLISIS DEL CONTROLADOR BORROSO PI

Para que el controlador borroso produzca una acción de control proporcional e integral (5.1), se seleccionan como variables de entrada el error y el cambio en el error, y como salida el cambio o incremento del control; esta configuración es equivalente a considerar como entradas el error y la suma del error si la salida es la acción de control en términos no incrementales.

Se les asignan dos etiquetas a cada una de las entradas, y se toman tres términos para la variable de salida:

$$i = N, P \qquad j = N, P \qquad k = N, Z, P$$

Las reglas borrosas que constituyen la base de reglas de un controlador borroso PI incremental son de la forma:

$$R_i: \text{ si } e \text{ es } A_i \text{ y } ce \text{ es } B_i \text{ entonces } U \text{ es } U_i \tag{6.21}$$

Representan una relación borrosa R:

$$U = R[GE.e(t), GR.ce(t)] \tag{6.22}$$

que viene explicitada en cuatro reglas de control:

$$R_1: \text{si } GE.e \text{ es P y } GR.ce \text{ es P entonces U es P} \tag{6.23a}$$

$$R_2: \text{si } GE.e \text{ es P y } GR.ce \text{ es N entonces U es Z} \tag{6.23b}$$

$$R_3: \text{si } GE.e \text{ es N y } GR.ce \text{ es P entonces U es Z} \tag{6.23c}$$

$$R_4: \text{si } GE.e \text{ es N y } GR.ce \text{ es N entonces U es N} \tag{6.23d}$$

		<i>GE.e(t)</i>	
		P	N
<i>GR.ce(t)</i>	U	P	N
	P	P	Z
	N	Z	N

Tabla 6.1 - Reglas del controlador borroso PI incremental

Como se va a comprobar, un controlador borroso así definido, con un método de desborrosificación lineal para calcular su salida, se comporta como un regulador PI lineal, y utilizando un algoritmo de desborrosificación no lineal equivale a un PI lineal a tramos. En ambos casos se explicitan las ecuaciones tanto para la lógica de Zadeh como para la de Lukasiewicz.

### 6.3.1 Método de desborrosificación lineal

Para este estudio, se analizan las reglas descritas por (6.23) junto con la expresión del *algoritmo de desborrosificación lineal* que se va a emplear (6.18). La contribución de las reglas a la salida viene resumida por la expresión:

$$\Delta u = U_p \cdot L_u - U_n \cdot L_u \tag{6.24}$$

$$U_p = \text{mín}(E_p, CE_p) \tag{6.25a}$$

$$U_n = \text{mín}(E_n, CE_n) \tag{6.25b}$$

que se obtiene al aplicar el algoritmo de desborrosificación al resultado de cada regla, donde  $U_k$  es el valor de la conclusión correspondiente a la etiqueta de salida  $k$ , y  $E_i$ ,  $CE_j$  son los grados de pertenencia a cada etiqueta al aplicar el algoritmo de borrosificación a los valores de entrada.

Al evaluar cada una de las reglas (6.23) que describen el comportamiento del PI borroso interpretando la conectiva **and** como el mínimo, se obtienen distintas conclusiones posibles, dos por cada regla: una cuando el error es menor que el cambio en el error, y otra cuando el cambio en el error es menor que el error. Según esto, para las dos únicas reglas que influyen en el control (6.25a, 6.25d), resultan cuatro zonas. Al estar relacionadas entre sí, se reducen a dos, definidas por las siguientes condiciones (Figura 6.7):

$$z1: \text{si } \min(E_p, CE_p) = CE_p \Rightarrow \min(E_n, CE_n) = E_n$$

$$z2: \text{si } \min(E_p, CE_p) = E_p \Rightarrow \min(E_n, CE_n) = CE_n$$

Al sustituir el grado de pertenencia de cada entrada a cada etiqueta lingüística (6.7) en la ecuación de control (6.24), evaluando su valor en cada zona, resulta una única ley de control que define el comportamiento del CB:

$$\Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \left( \frac{GE.e(t)}{Le} + \frac{GR.ce(t)}{Lce} \right) \tag{6.26a}$$

$$z2: \frac{GE.e(t)}{Le} < \frac{GR.ce(t)}{Lce}$$

$$z1: \frac{GE.e(t)}{Le} \geq \frac{GR.ce(t)}{Lce}$$

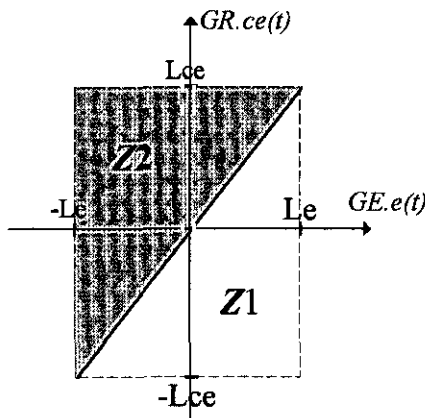


Figura 6.8 - Representación de las zonas de evaluación de las reglas



De estas expresiones se deduce:

- a) Que la contribución de las variables de entrada sólo tiene peso en la salida cuando se disparan las reglas  $R_1$  y  $R_4$ , ya que el peso obtenido al aplicar las otras dos reglas vendrá multiplicado por el centro de la etiqueta correspondiente, que en ese caso es  $Z$  (centro 0; Figura 6.4).
- b) Que al evaluar todas las reglas se obtiene el mismo resultado al aplicar la or propuesta por Zadeh (6.15b) que la de Lukasiewicz (6.16b), puesto que los diferentes grados de pertenencia obtenidos para la misma etiqueta de salida corresponden a la variable lingüística  $Z$ , y por lo tanto van a ser multiplicados por el centro de dicha etiqueta para obtener la conclusión, con lo que su contribución va ser nula.
- c) Que si el método de desborrosificación empleado es lineal, dentro del intervalo donde se ha definido el algoritmo de borrosificación lineal (6.7), la ley de control del sistema borroso debe ser también lineal, como se comprueba (6.26), y verifica además que es equivalente a la de un PI convencional.
- d) Otro resultado interesante que se obtiene de la formulación general del control es su dependencia del universo de discurso de la variable de salida, o si éste se ha normalizado, del factor de escala  $GU$ .

El aumento del universo de discurso, expandiendo los centros de sus etiquetas extremas  $Lu$ , proporciona un valor de la acción de control mayor cuando el error o el cambio del error toman valores altos; es decir, produce una reacción más fuerte ante los cambios en la señal de referencia, con lo que el seguimiento de la consigna es más rápido.

$$\Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \cdot \left( \frac{1}{Le\_real} e(t) + \frac{1}{Lce\_real} ce(t) \right) \quad (6.26b)$$

Este caso sencillo permite hallar el fundamento analítico de la variación cualitativa descrita anteriormente, en la que se basan numerosos ajustes, y sirve para ver de una forma rigurosa y más clara la influencia de los parámetros de sintonía en la respuesta del sistema.

### 6.3.1.1 Parámetros de sintonía

De la ley general de control obtenida en (6.26) y ponderada mediante un factor de escala (6.20), se obtiene una equivalencia con la de un controlador PI incremental clásico, identificando los parámetros de sintonía:

$$PI: du_{PI}(t) = K_p \cdot ce(t) + K_i \cdot e(t) \quad (6.27)$$

$$K_p = \frac{GR \cdot GU \cdot Lu}{2Lce} = \frac{GU \cdot Lu}{2Lce\_real} \quad (6.28a)$$

$$K_i = \frac{GE \cdot GU \cdot Lu}{2Le} = \frac{GU \cdot Lu}{2Le\_real} \quad (6.28b)$$

que están claramente relacionados por la constante de tiempo integral:

$$Ti = \frac{GR \cdot Le}{GE \cdot Lce} = \frac{Le\_real}{Lce\_real} \quad (6.29)$$

de donde se demuestra que, manteniendo  $Le\_real$  constante se cumple que:

- a) un aumento de  $Lce\_real$  frente a  $Le\_real$  ocasiona una disminución de la constante de tiempo integral (y de la ganancia proporcional equivalente), alargando el transitorio, pudiendo desestabilizar el sistema ya que incrementa la oscilación.
- b) una disminución de  $Lce\_real$  frente a  $Le\_real$  ocasiona un aumento de la constante de tiempo integral, por lo que la salida es más lenta, aunque también incrementa la ganancia proporcional.

En las aplicaciones reales, se parte de unos valores dados para  $Le$  y  $Lce$  que se obtienen por introspección de las variables de entrada. Por lo tanto, la sintonía se aplica a los factores de escala. Esto explica el ajuste cualitativo que se basa en aumentar la ganancia del error frente a la del cambio en el error para producir una respuesta más rápida.

Puesto que la ecuación que describe el comportamiento de este CB se asemeja a la de un PI, los parámetros de sintonía del sistema borroso se calculan en función de éstos, de forma que se comporte como un PI determinado, alcanzando las especificaciones dadas para el cálculo de  $K_p$  y  $K_i$ . Como se ve en la Figura 6.8, donde se han superpuesto las gráficas del CB y del PI, con esas condiciones las respuestas de *ambos controladores son indistinguibles*.

$$GR = \frac{2 \cdot K_p \cdot Lce}{GU \cdot Lu} \qquad GE = \frac{2 \cdot K_i \cdot Le}{GU \cdot Lu} \qquad (6.30a)$$

La sintonía de la ganancia de la salida se delimita a partir de la expresión (6.20). Para el controlador borroso definido por las reglas expuestas en la Tabla 6.1, aplicando el método de desborrosificación lineal, el incremento de la acción de control verifica:

$$|du(t)| \leq GU \cdot Lu \qquad (6.30b)$$

Luego  $GU$  se especifica de tal forma que constriña la salida para acoplarla a los valores que se puedan aplicar.

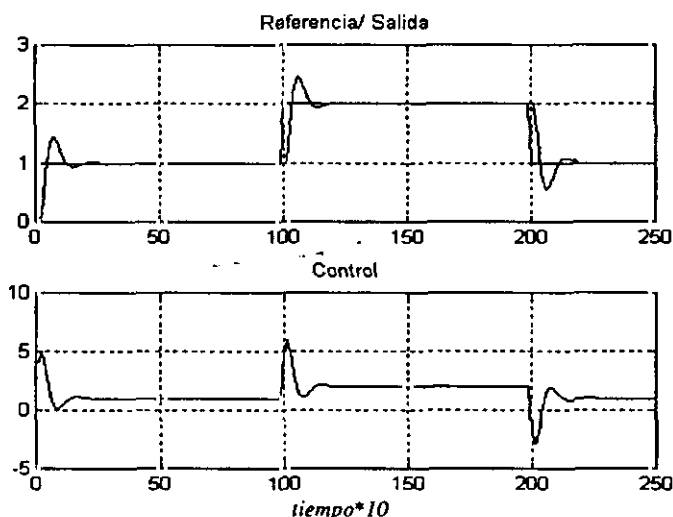


Figura 6.8 - Respuesta del sistema con un controlador PI clásico y con un controlador borroso. Las respuestas son indistinguibles

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.2; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.3; K_i = 1.0$	CB: $GE = 2; GR = 0.6; GU = 1;$ $Le = Lce = Lu = 10$
Características de la Respuesta	máxima sobrelongación = 0.4463	

Por lo tanto, se establece un modo indirecto de ajuste, basado en las técnicas clásicas de sintonía, lo que permite automatizar este proceso de calibración.

Como se ha trabajado con un controlador incremental, no se ha considerado el problema de la saturación del control (“wind-up”). Cuando se produce este fenómeno al trabajar con valores de control no incrementales, una posible forma de tenerlo en cuenta es restringir la expresión analítica del control que se obtiene mediante el factor de escala  $GU$  (análogo a 6.30b), para limitarlo a los posibles valores del actuador.

### 6.3.1.2 Particularizaciones

Como el sistema borroso está sobreparametrizado (Capítulo 3), a algunos de sus parámetros se les suelen asignar los valores empleados más frecuentemente en la práctica. Estas particularizaciones permiten establecer una relación más directa entre los factores de escala del CB y los parámetros del PI, lo que facilita el estudio de su influencia en el control. Las expresiones anteriores se simplifican entonces notablemente. Así, posibles formas de fijar los universos de discurso de las variables de entrada  $Le$  y  $Lce$ , son:

	<b>Control <math>\Delta u(t)</math></b>	<b>Parámetros del CB</b>
<b>Caso 1: <math>Le = Lce = L</math></b>	$\frac{Lu}{2L} [GE.e(t) + GR.ce(t)]$ <p style="text-align: right;">(6.31a)</p>	$GR = \frac{2Kp.L}{GU.Lu} \quad GE = \frac{2Ki.L}{GU.Lu}$ <p style="text-align: right;">(6.31b)</p>
<b>Caso 2: <math>Lce = Le/T</math></b>	$\frac{Lu}{2Le} [GE.e(kT) + T.GR.ce(kT)]$ <p style="text-align: right;">(6.32a)</p>	$GR = \frac{2Kp.Le}{T.GU.Lu} \quad GE = \frac{2Ki.Le}{GU.Lu}$ <p style="text-align: right;">(6.32b)</p>
<b>Caso 3: <math>Lu = L</math></b>	$\frac{1}{2} [GE.e(t) + GR.ce(t)]$ <p style="text-align: right;">(6.33a)</p>	$GR = \frac{2Kp}{GU} \quad GE = \frac{2Ki}{GU}$ <p style="text-align: right;">(6.33b)</p>

Caso 1. Para el caso más habitual, en el que se eligen  $Le = Lce = L$ , la expresión (6.26) se convierte en (6.31a), donde se comprueba que (Capítulo 4, 3.1):

- a) Una disminución de los universos de discurso de las variables de entrada (aumentando las ganancias o reduciendo la media de las etiquetas  $L_x$ ) produce un control más brusco, lo que mejora la respuesta del transitorio del sistema, pero puede provocar oscilaciones.

Por el contrario, disminuir estos factores de entrada o aumentar el parámetro  $L_x$  hace más lenta la respuesta, puesto que supone disminuir los valores equivalentes tanto de  $K_p$  como de  $K_i$ . Estos efectos se pueden ver en la Figura 6.9 para el mismo proceso del ejemplo anterior (Figura 6.8).

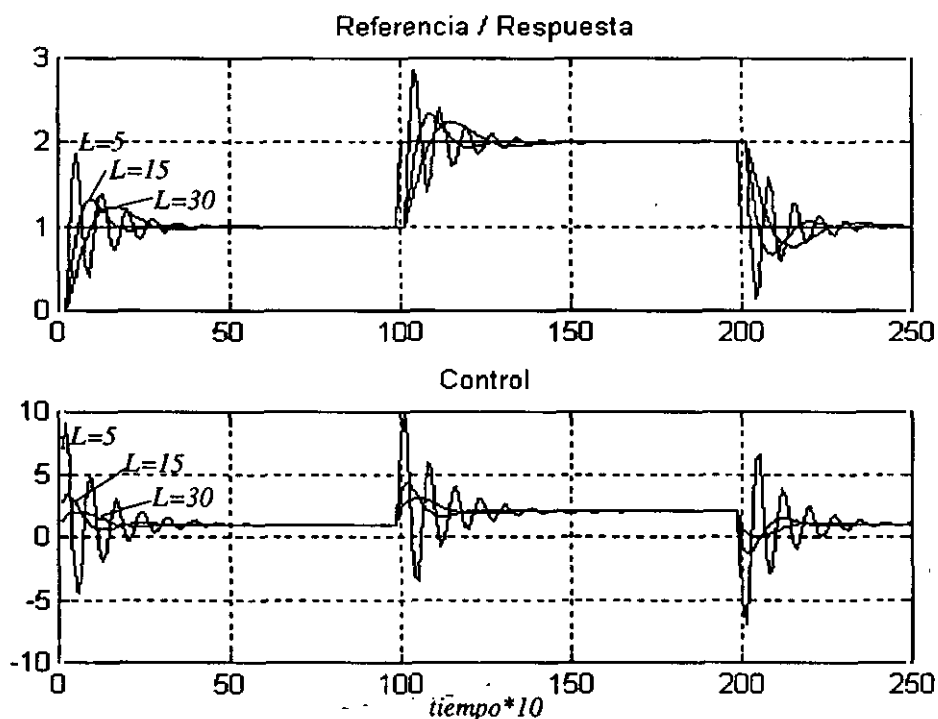


Figura 6.9 - Respuesta del controlador borroso variando los puntos de saturación de los universos del error  $L_e$  y del cambio en el error  $L_{ce}$

Características del Controlador					$GU = 1; GE = 0.667, 1.33, 4; GR = 0.2, 0.4, 1.2$ $Lu = 10; L = L_e = L_{ce} = 30, 15, 5$
L	$K_p$	$K_i$	$T_i$	ov (*)	Efectos en la respuesta
1	3	10	0.3	1.03	oscilatoria
5	0.6	2	0.3	0.86	con oscilaciones, muy rápida, gran sobrelongación
10	0.3	1	0.3	0.44	sobrelongación, rápida, menos oscilatoria
15	0.2	0.6667	0.3	0.32	mayor sobrelongación, más rápida, menos oscilatoria
20	0.15	0.5	0.3	0.28	lenta, con sobrelongación
40	0.075	0.25	0.3	0.20	muy lenta, con sobrelongación

(\*) Se ha denominado ov el máximo valor que alcanza la sobrelongación de la respuesta.

- b) Si se quiere que el controlador borroso actúe con un tiempo integral  $T_i$  determinado y constante, la relación que define este parámetro (6.34) debe ser constante. Esto elimina un grado de libertad del sistema borroso, ya que permite especificar una restricción respecto a sus parámetros de sintonía, de manera que al fijar uno de ellos se determina en cierto modo el otro.

$$T_i = \frac{GR}{GE} \quad (6.34a)$$

$$GR = T_i \cdot GE \quad (6.34b)$$

Caso 2: Para sistemas discretos (6.1), si se fija  $L_{ce} = L_e/T$  (6.4), siendo  $T$  el periodo de muestreo, el resultado es similar al anterior, pero en los casos en los que  $T$  es menor que 1, aumenta notablemente la constante de tiempo integral  $T_i$ , produciendo una respuesta rápida, que fácilmente se hace oscilatoria e inestable.

Caso 3: En el caso particular de que el universo de discurso de la salida verifique  $L_u = L$ , la ley de control general (6.26) se reduce a la expresión (6.33a), con lo que, equiparándolo a un controlador PI clásico, los parámetros de sintonía de éste resultan:

$$K_p = GU \cdot GR/2 \quad (6.35a)$$

$$K_i = GU \cdot GE/2 \quad (6.35b)$$

### 6.3.1.3 Algoritmo de borrosificación no lineal: Zonas saturadas

Fuera del intervalo que abarcan los universos de discurso de las variables de entrada quedan otras zonas en las cuales hay que estudiar el controlador de forma particular. Son las zonas del algoritmo de borrosificación no lineal.

Cuando el valor de alguna de las variables de entrada no pertenece al intervalo fijado para su universo de discurso  $[-L_x, L_x]$ , el resultado de evaluar las reglas en esas zonas se calcula aplicando las correspondientes definiciones (6.8), obteniéndose las expresiones:

- z1. Si  $GE.e(t) \geq Le$ , se satura a  $GE.e(t)/Le = 1$
- z2. Si  $GE.e(t) \geq -Le$ , se satura a  $GE.e(t)/Le = -1$
- z3. Si  $GR.ce(t) \geq Lce$ , se satura a  $GR.ce(t)/Lce = 1$
- z4. Si  $GR.ce(t) \geq -Lce$ , se satura a  $GR.ce(t)/Lce = -1$

que se aplican a la ecuación general del control 6.26, de donde resulta la acción en cada zona.

$$z1: \quad \Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \left( \frac{GR.ce(t)}{Lce} + 1 \right) \quad (6.36a)$$

$$z2: \quad \Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \left( \frac{GR.ce(t)}{Lce} - 1 \right) \quad (6.36b)$$

$$z3: \quad \Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \left( \frac{GE.e(t)}{Le} + 1 \right) \quad (6.36c)$$

$$z4: \quad \Delta u(t) = \frac{Lu}{2} \left( \frac{GE.e(t)}{Le} - 1 \right) \quad (6.36d)$$

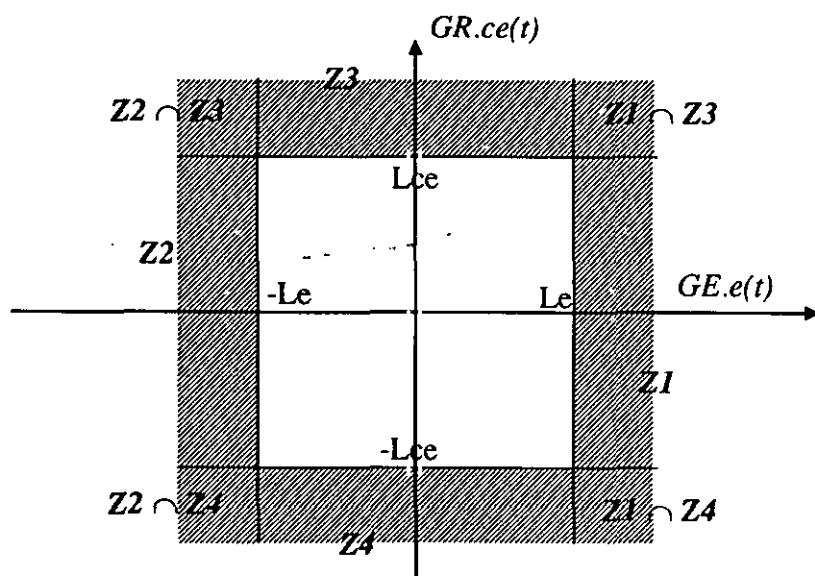


Figura 6.10 - Zonas de saturación del controlador borroso PI

y admiten los siguientes casos particulares en las zonas de intersección (Figura 6.10):

$$z1 \cap z3 \quad \Delta u(t) = Lu \quad (6.37a)$$

$$z1 \cap z4 \quad \Delta u(t) = 0 \quad (6.37b)$$

$$z2 \cap z3 \quad \Delta u(t) = 0 \quad (6.37c)$$

$$z2 \cap z4 \quad \Delta u(t) = -Lu \quad (6.37d)$$

Como se observa, al pertenecer a la zona saturada de las funciones de pertenencia, se ha introducido otra no-linealidad que afecta al control. Ésta puede resumirse en una mayor acción de control para valores muy grandes en términos absolutos del error y del cambio en el error, mientras que para valores pequeños de éstos —cuando tiende al estacionario—, se sigue comportando como un PI lineal. La acción de control en estas zonas sólo depende de una variable de entrada (la que no está saturada), por lo que el sistema produce la misma respuesta para distintos valores de la entrada cuando ésta supera el umbral. Se está perdiendo información, y con ella pierde resolución el control.

Un resumen de la dependencia de la función de control con respecto a las variables de entrada del controlador borroso se muestra en la Figura 6.10.

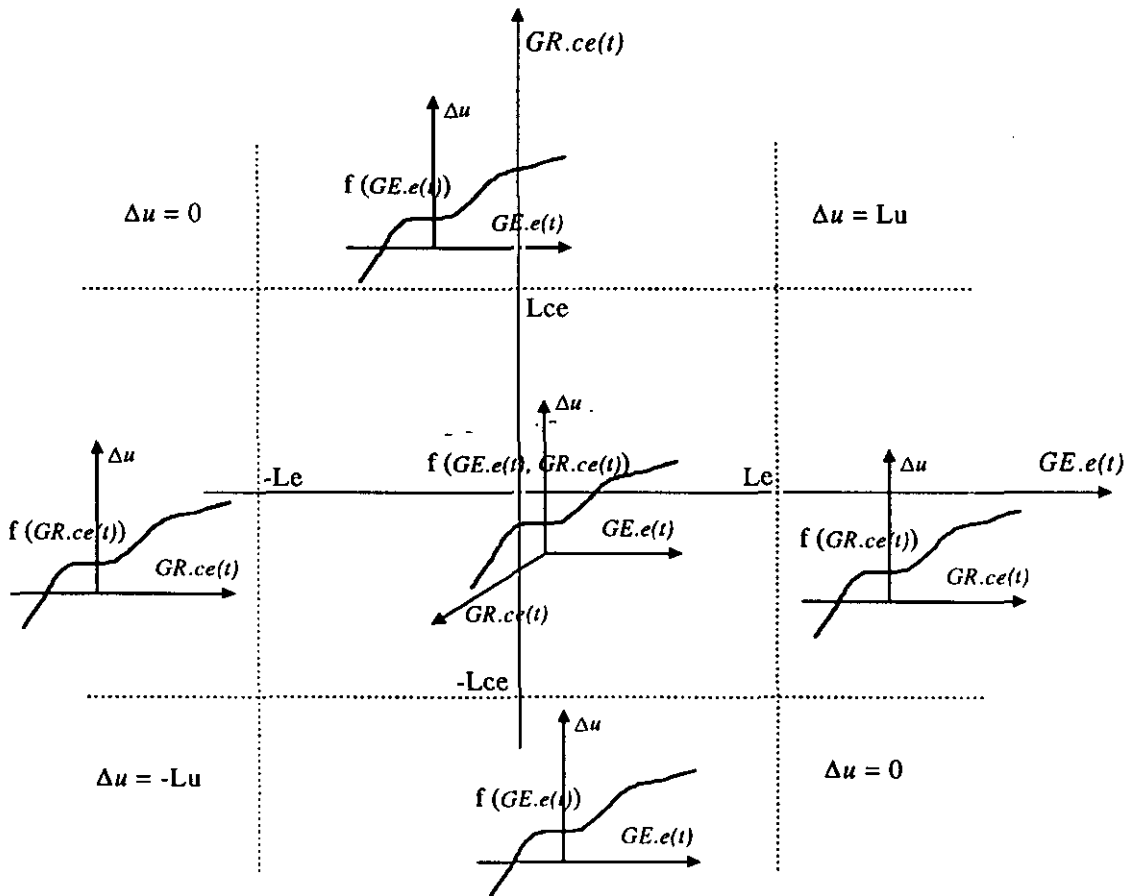


Figura 6.10 - Funciones de control por zonas



### 6.3.1.4 Propuesta de métodos de sintonía

Para este primer caso, el controlador borroso produce una acción de control que es función lineal del error y del cambio en el error. Es decir, eligiendo adecuadamente sus parámetros de sintonía, se comporta como un PI convencional determinado.

Por lo tanto, un método para establecer las ganancias iniciales del CB consiste en calcularlas en función de los parámetros del PI elegido de partida, con el que se consiguen unas especificaciones prescritas.

*Haciendo transparente esta relación, se están aplicando de un modo indirecto técnicas clásicas de sintonía para calcular los factores de escala del controlador borroso. Los pasos a seguir son:*

- 1- Fijar los universos de discurso de las variables de entrada  $Le$  y  $Lce$  examinando el rango de variación de éstas.
- 2- Asignar un valor al factor de escala  $GU$  y al universo de discurso de la salida  $Lu$ , teniendo en cuenta (6.30b).
- 3- Calcular, basándose en unos parámetros del PI determinados, los factores de escala del CB (6.30a):

$$GR = \frac{2Kp \cdot Lce}{GU \cdot Lu} \quad \quad GE = \frac{2Ki \cdot Le}{GU \cdot Lu}$$

Las ganancias del PI se calculan mediante alguna técnica clásica de sintonía para que la respuesta verifique ciertas características (en los ejemplos, se han obtenido mediante las técnicas de Ziegler-Nichols [Zie 42]).

- 4- A partir del comportamiento del controlador borroso como un PI, con  $Kp$  y  $Ki$  determinados, mejorar la respuesta del sistema variando los parámetros según se especifica en el apartado siguiente (donde  $\Delta$  significa un ligero incremento) para conseguir mejorar la especificación deseada.

De esta forma, se evita el problema de asignar de forma aleatoria los parámetros iniciales del sistema borroso, por lo que se ahorra tiempo en el proceso de sintonía y se puede automatizar este procedimiento.

Efecto de la variación de los factores de escala:

$GE$	$GR$	$GU$	$Kp$	$Ki$	$Ti$	Efecto en la respuesta
$\Delta$	$\Delta$	cte.	$\uparrow$	$\uparrow$	cte.	Control más brusco: respuesta menos estable
$\nabla$	$\nabla$	cte.	$\downarrow$	$\downarrow$	cte.	Respuesta más lenta, menos oscilatoria
$\Delta$	cte.	cte.	cte.	$\uparrow$	$\downarrow$	Al aumentarlo, más oscilatoria y más rápida
$\nabla$	cte.	cte.	cte.	$\downarrow$	$\uparrow$	Menos oscilatoria, más lenta
cte.	$\Delta$	cte.	$\uparrow$	cte.	$\uparrow$	Menos oscilatoria, con menor sobrelongación
cte.	$\nabla$	cte.	$\downarrow$	cte.	$\downarrow$	Respuesta oscilatoria, alarga el transitorio
cte.	cte.	$\Delta$	$\uparrow$	$\uparrow$	cte.	Control más fuerte: respuesta más oscilatoria
cte.	cte.	$\nabla$	$\downarrow$	$\downarrow$	cte.	Respuesta más lenta; menos oscilatoria

Estos resultados se ilustran en las Figuras 6.9, 6.12, 6.13 y 6.14 respectivamente, obtenidas de los datos que se resumen en las tablas que acompañan a cada una. Se observan las distintas características de la respuesta al ir variando cada uno de esos parámetros de sintonía del controlador borroso.

En resumen, un controlador borroso así definido, para esas variables de entrada y las reglas y etiquetas anteriormente enunciadas, y con un método de desborrosificación lineal, se comporta como un PI lineal, cuyas ganancias proporcional e integral son las definidas por (6.28).

Un estudio de la estabilidad de este regulador borroso, en el área lineal, se reduce al de un controlador PI clásico. En el caso borroso, el cero introducido por el controlador está situado en  $-GE/GR$ , como se deduce de la expresión (6.26).

**Variación de la respuesta al variar el factor de escala GE**

El aumento del factor de escala del error GE alarga el transitorio, haciendo la respuesta más oscilatoria. La reducción del tiempo de subida es pequeña frente al peligro de inestabilidad que le acompaña.

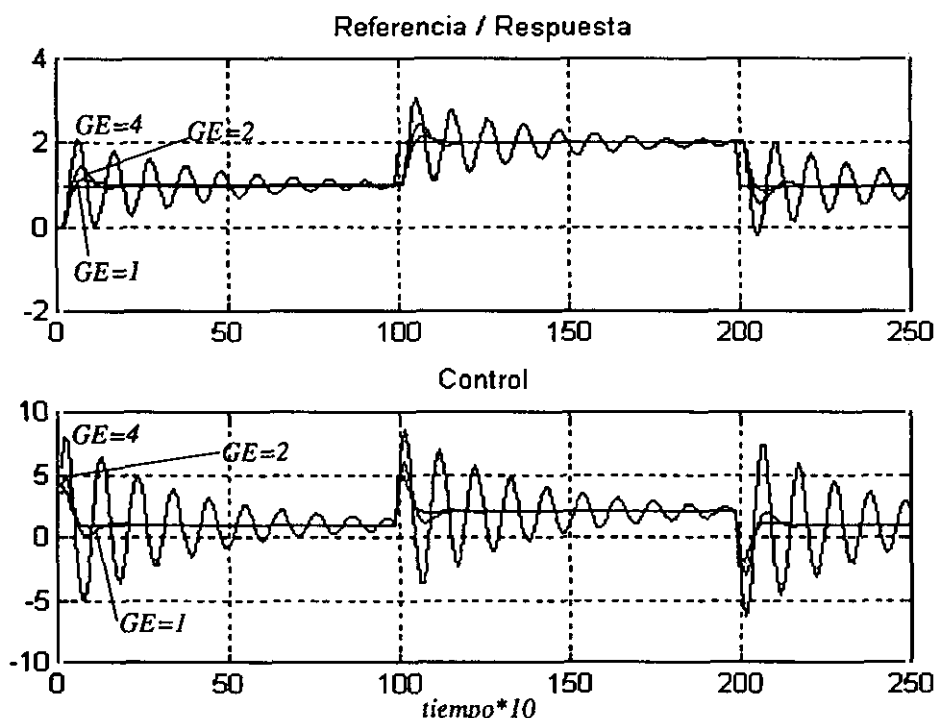


Figura 6.12 - Respuesta del controlador borroso al variar el factor de escala del error (GE)

Características del Controlador						GR = 0.6; GU = 1; GE = 4, 2, 1 Lu = Lce = Le = 10
GE	Le	Le real	Kp	Ki	Ti	Efectos en la respuesta
0.5	10	20	0.3	0.25	1.2	sobreamortiguada
1	10	10	0.3	0.5	0.6	muy suave, con sobrelongación
1.33	10	7.5	0.3	0.6667	0.45	suave, con sobrelongación
2	10	5	0.3	1	0.3	ligeras oscilaciones, alarga el transitorio
4	10	2.5	0.3	2	0.15	muy oscilatoria, transitorio muy largo
5	10	2	0.3	2.5	0.12	oscilatoria crítica

**Variación de la respuesta al variar el factor de escala GR**

Un aumento de la ganancia del cambio en el error GR disminuye el transitorio, ya que hace la respuesta menos oscilatoria y disminuye la sobrelongación. A partir de un valor dado, vuelve a oscilar en torno a la referencia. Valores bajos de este parámetro producen un tiempo de subida pequeño.

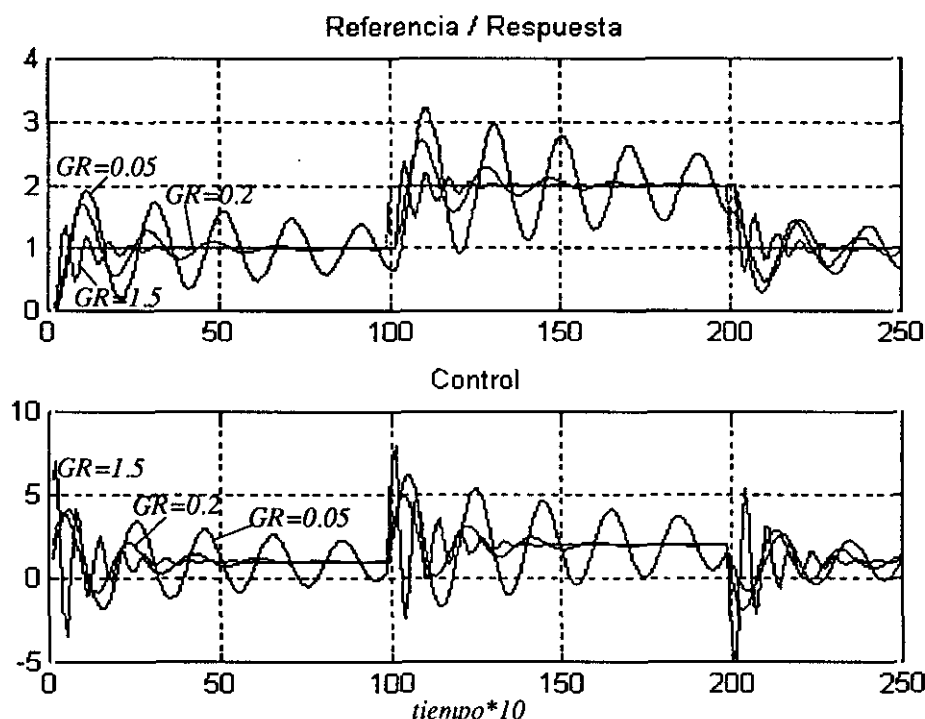


Figura 6.13 - Respuesta del controlador borroso al variar el factor de escala del cambio en el error (GR)

Características del Controlador						GE = 2; GU = 1; GR = 0.05, 0.2, 1.5; Lu = Le = Lce = 10
GR	Lce	Lce real	Kp	Ki	Ti	Efectos en la respuesta
0.05	10	200	0.025	1	0.025	transitorio largo, oscila
0.2	10	50	0.10	1	0.10	menos oscilatoria, transitorio largo
0.4	10	25	0.2	1	0.2	más rápida, sobrelongación
1	10	10	0.5	1	0.5	con sobrelongación menor, rápida
1.2	10	8.33	0.6	1	0.6	menos oscilatoria, mayor sobrelongación
2	10	5	1	1	1	oscilatoria

Variación de la respuesta al variar el factor de escala  $GU$

El aumento de la ganancia de la salida del controlador  $GU$  produce oscilaciones en la respuesta, alargando el transitorio, si bien reduce notablemente el tiempo de respuesta del sistema.

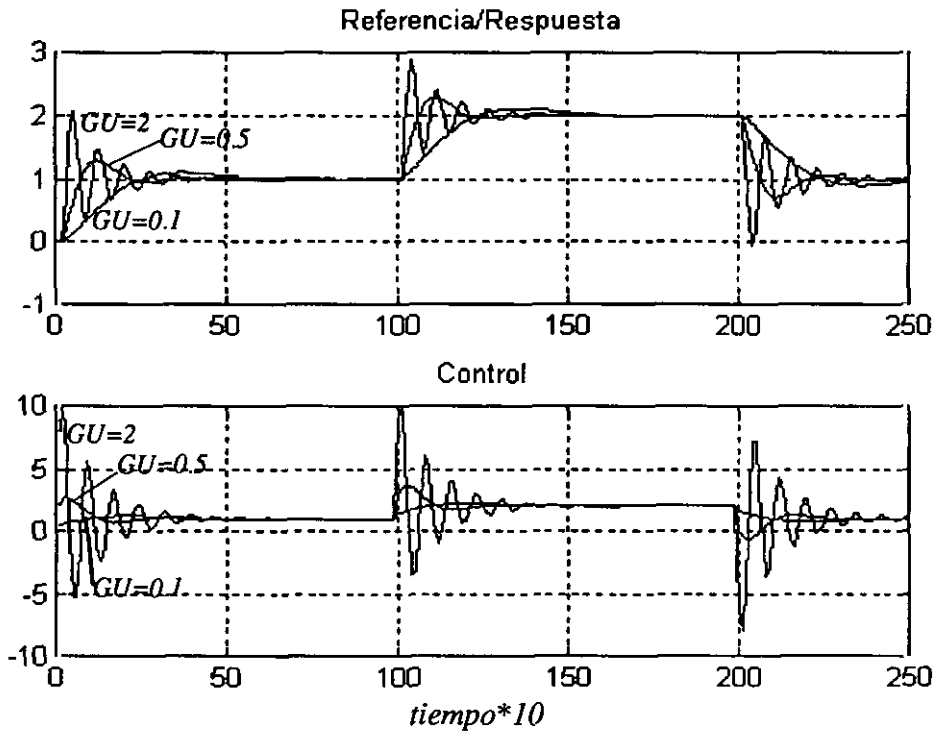


Figura 6.14 - Respuesta del controlador borroso PI al variar el factor de escala de la salida  $GU$

Características del Controlador						$GE = 2; GR = 0.6; GU = 2, 0.5, 0.1;$ $Le = Lce = Lu = 10$
$GU$	$Lu$	$Kp$	$Ki$	$Ti$	$ov (*)$	Efectos en la respuesta
0.1	10	0.03	0.1	0.3	0.95	lenta, sobrelongación muy pequeña
0.5	10	0.15	0.5	0.3	0.28	aumenta la sobrelongación, menos lenta
1	10	0.3	1	0.3	0.44	algo oscilatoria, más rápida, más sobrelongación
2	10	0.6	2	0.3	0.86	más oscilatoria, muy rápida, más sobrelongación
3	10	0.9	3	0.3	0.89	oscilatoria
5	10	1.5	5	0.3		oscilatoria

### 6.3.2 Método de desborrosificación no lineal

Introduciendo ahora la no linealidad del algoritmo de desborrosificación (6.19) en el controlador borroso, se realiza un estudio similar al anterior para obtener su desarrollo analítico con esta estrategia de salida. Aplicando este método no lineal (6.19) al conjunto de reglas que describen el controlador borroso PI incremental (6.23), la expresión general del control que resulta es:

$$\Delta u = U_p \cdot L_u - U_n \cdot L_u / U_p + U_z + U_n \quad (6.38)$$

$$U_p = \text{mín}(E_p, C E_p) \quad (6.39a)$$

$$U_n = \text{mín}(E_n, C E_n) \quad (6.39b)$$

$$\text{Lukasiewicz: } U_z = \text{mín}(1, \text{mín}(E_p, C E_n) + \text{mín}(E_n, C E_p)) \quad (6.39c)$$

$$\text{Zadeh: } U_z = \text{máx}(\text{mín}(E_p, C E_n), \text{mín}(E_n, C E_p)) \quad (6.39d)$$

Al evaluar cada una de las reglas, aplicando la conectiva **and** como el mínimo, se obtienen dos posibles conclusiones distintas para cada regla. Las ocho zonas resultantes se reducen a cuatro (Figura 6.15):

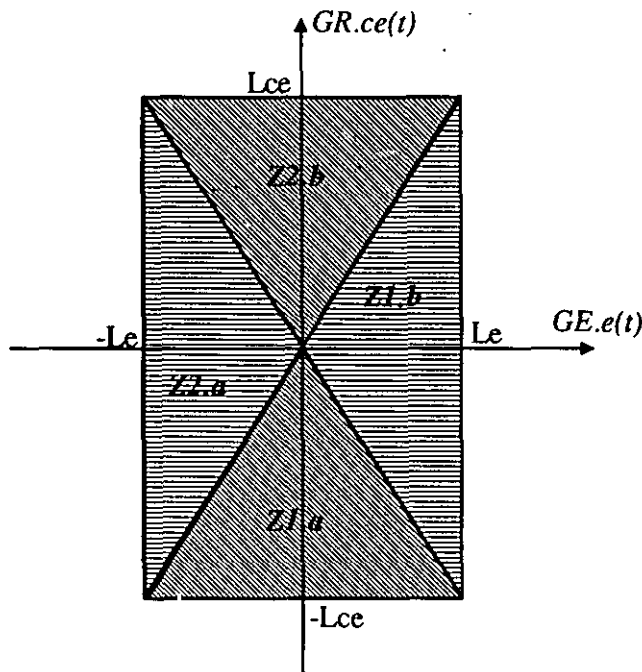


Figura 6.15 - Representación de las zonas de evaluación de las reglas

**z1:** si  $\text{mín}(E_p, CE_p) = CE_p \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_n) = E_n$

**z 1.a)**  $\text{mín}(E_p, CE_n) = E_p \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_p) = CE_p$

**z 1.b)**  $\text{mín}(E_p, CE_n) = CE_n \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_p) = E_n$

**z2:** si  $\text{mín}(E_p, CE_p) = E_p \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_n) = CE_n$

**z 2.a)**  $\text{mín}(E_p, CE_n) = E_p \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_p) = CE_p$

**z 2.b)**  $\text{mín}(E_p, CE_n) = CE_n \Rightarrow \text{mín}(E_n, CE_p) = E_n$

Para calcular la ecuación del control, se sustituyen las expresiones que definen los grados de pertenencia a cada etiqueta en (6.38).

Si se expresa el incremento del control como:

$$\Delta u(t) = \frac{\text{num}(\Delta u(t))}{\text{den}(\Delta u(t))} \quad (6.40)$$

el numerador es el mismo para todos los casos, y coincide con el calculado anteriormente para el método de desborrosificación lineal (6.26). El denominador es distinto para cada zona, y varía al aplicar para la unión entre las reglas la *or* de Zadeh ( $OR_Z$ ) o la de Lukasiewicz ( $OR_L$ ).

Se comprueba que al aplicar la  $OR_L$  el valor obtenido para el denominador es mayor, como se puede deducir de (6.39c) y (6.39d).

Operando se obtienen estas cuatro ecuaciones de control (6.41), que se pueden expresar en función del valor absoluto del error y del cambio del error, dentro del intervalo donde las funciones de pertenencia se han definido de forma lineal.

	Lukasiewicz	Zadeh
<i>z 1.a</i>	$\text{den}(\Delta u) = \text{CEp} + \text{mín}(1, \text{Ep} + \text{CEp}) + \text{En}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 2 + \frac{\text{GR}.ce(t)}{\text{Lce}}$	$\text{den}(\Delta u) = \text{CEp} + \text{máx}(\text{Ep}, \text{CEp}) + \text{En}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 1.5 + \frac{\text{GR}.ce(t)}{2\text{Lce}}$
<i>z 1.b</i>	$\text{den}(\Delta u) = \text{CEp} + \text{mín}(1, \text{En} + \text{CEn}) + \text{En}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 2 - \frac{\text{GE}.e(t)}{\text{Le}}$	$\text{den}(\Delta u) = \text{CEp} + \text{máx}(\text{En}, \text{CEn}) + \text{En}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 1.5 - \frac{\text{GE}.e(t)}{2\text{Le}}$
<i>z 2.a</i>	$\text{den}(\Delta u) = \text{Ep} + \text{mín}(1, \text{Ep} + \text{CEp}) + \text{CEn}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 2 + \frac{\text{GE}.e(t)}{\text{Le}}$	$\text{den}(\Delta u) = \text{Ep} + \text{máx}(\text{Ep}, \text{CEp}) + \text{Cen}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 1.5 + \frac{\text{GE}.e(t)}{2\text{Le}}$
<i>z 2.b</i>	$\text{den}(\Delta u) = \text{Ep} + \text{mín}(1, \text{En} + \text{CEn}) + \text{CEn}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 2 - \frac{\text{GR}.ce(t)}{\text{Lce}}$	$\text{den}(\Delta u) = \text{Ep} + \text{máx}(\text{En}, \text{CEn}) + \text{Cen}$ $\text{den}(\Delta u(t)) = 1.5 - \frac{\text{GR}.ce(t)}{2\text{Lce}}$

(6.41)

Las leyes de control se reducen entonces a dos ecuaciones distintas, según la relación entre las variables de entrada, ya que resulta lo mismo para las zonas *z1.a* y *z2.b*, y para *z1.b* y *z2.a*.

**Zona I:**  $\text{GR}.|ce(t)|/\text{Lce} \leq \text{GE}.|e(t)|/\text{Le}$

$$\Delta u(t) = \frac{0.5\text{Lu}}{2\text{Le} - \text{GE}.|e(t)|} \quad \text{GE}.e(t) + \frac{0.5\text{Lu}. \text{Le}}{\text{Lce}(2\text{Le} - \text{GE}.|e(t)|)} \text{GR}.ce(t) \quad (6.42a)$$

**Zona II:**  $\text{GE}.|e(t)|/\text{Le} \leq \text{GR}.|ce(t)|/\text{Lce}$

$$\Delta u(t) = \frac{0.5\text{Lu}. \text{Lce}}{\text{Le}(2\text{Lce} - \text{GR}.|ce(t)|)} \quad \text{GE}.e(t) + \frac{0.5\text{Lu}}{2\text{Lce} - \text{GR}.|ce(t)|} \text{GR}.ce(t) \quad (6.42b)$$

Análogamente se calcularían para el operador  $\text{OR}_Z$ .



De estas expresiones se pueden deducir las siguientes conclusiones:

- a) En contraposición al caso anterior, todas las reglas contribuyen al resultado final, también aquellas cuya conclusión corresponde al peso de la etiqueta Z de la salida. El numerador de la expresión (6.19) corresponde a la ecuación empleada en el caso lineal (6.18), pero el denominador incorpora la no linealidad del método de desborrosificación.
- b) Por lo tanto, si bien para calcular el numerador se puede aplicar todo lo dicho al respecto anteriormente, se obtienen ahora distintos resultados al evaluar el conjunto de reglas con el operador *or* según la lógica de Zadeh (6.15b) o la de Lukasiewicz (6.16b). La primera sólo considera el máximo de los grados de pertenencia a las etiquetas comunes (salida Z), y la segunda considera todos. La interpretación de Zadeh da un denominador menor, ya que los grados de pertenencia son siempre valores positivos comprendidos entre 0 y 1; luego resultará un valor absoluto de control mayor.
- c) El resultado es una ley de control que es *función no lineal de las entradas* (error y cambio en el error). Por eso el controlador borroso es no lineal, y se puede obtener de forma analítica su mapa de inferencias. Su salida es ponderada por el factor de escala *GU* (6.20).

### 6.3.2.1 Parámetros de sintonía

Se puede establecer una correlación entre este controlador borroso y un PI clásico, en este caso lineal a tramos, donde  $K_p$  y  $K_i$  son funciones del error y del cambio en el error.

$$K_p = f(e(t), ce(t)) \qquad K_i = f(e(t), ce(t)) \qquad (6.43)$$

Las fórmulas de los parámetros del PI no lineal en función de los factores de escala y las variables del controlador borroso vienen dadas por las siguientes expresiones —obtenidas para la lógica de Lukasiewicz, y de forma análoga se hace para la de Zadeh—:

**Zona I:**  $GR./ce(t)/Lce \leq GE./e(t)/Le$

$$K_{pI} = \frac{0.5Lu.Lc.GR.GU}{Lce(2Le - GE.|e(t)|)} \quad K_{iI} = \frac{0.5Lu.GE.GU}{2Le - GE.|e(t)|} \quad (6.44a)$$

**Zona II:**  $GE./e(t)/Le \leq GR./ce(t)/Lce$

$$K_{pII} = \frac{0.5Lu.GR.GU}{2Lce - GR.|ce(t)|} \quad K_{iII} = \frac{0.5Lu.Lce.GE.GU}{Le(2Lce - GR.|ce(t)|)} \quad (6.44b)$$

de donde:

$$Ti = \frac{GR.Lc}{GE.Lce} = \frac{Le\_real}{Lce\_real} \quad (6.45)$$

Evidentemente, la solución no está determinada unívocamente, porque el sistema está sobrep parametrizado. Existen distintas combinaciones de  $GU$ ,  $GE$  y  $GR$  para lograr que el controlador borroso se comporte como un PI lineal a tramos con esos valores  $Kp$  y  $Ki$  para cada zona (6.44); resulta interesante observar que para diferentes valores de esos factores se cambia el grado de no linealidad del controlador borroso.

Estos coeficientes (6.44) se denominan parámetros dinámicos cuando  $e$  y  $ce$  no son cero. La constante de tiempo integral  $Ti$  no depende de la zona de trabajo. Así pues, siempre es posible conseguir que un controlador borroso así definido se comporte como un PI lineal a tramos, con un parámetro  $Ti$  igual para las dos zonas.

Por lo tanto, para especificar los factores de escala del regulador borroso, se puede establecer esa ligadura entre ellos: mantener constante  $Ti$ . Se elimina así un grado de libertad del controlador borroso. Algunas soluciones para determinar los factores de escala en función de los otros parámetros del PI ( $K_{pI}$  y  $K_{pII}$ ) se comentan en el apartado 6.3.2.4 para casos particulares.

### 6.3.2.2 Particularizaciones

Se han estudiado los siguientes casos particulares:

	$\Delta u(t) = X.[GE.e(t)+GR.ce(t)]$	Lukasiewicz	Zadeh
<b>Caso 1:</b>  $Le = Lce = L$	Zona I: $GR. ce(t)  \leq GE. e(t) $	$X = \frac{0.5Lu}{2L - GE e(t) }$ (6.46a)	$X = \frac{Lu}{3L - GE e(t) }$ (6.47a)
	Zona II: $GE. e(t)  \leq GR. ce(t) $	$X = \frac{0.5Lu}{2L - GR ce(t) }$ (6.46b)	$X = \frac{Lu}{3L - GE e(t) }$ (6.47b)
<b>Caso 2:</b> estacionario	$Le = Lce = L$ $e(t) \rightarrow 0, ce(t) \rightarrow 0$	$X = \frac{Lu.GU}{4L}$ (6.48a)	$X = \frac{Lu.GU}{3L}$ (6.48b)
<b>Caso 3:</b> $GE. e(t)  = GR. ce(t) $	$ e(t)  = Ti. ce(t) $ (6.49)	$X = \frac{0.5Lu}{2L - GE e(t) }$ (6.50a)	$X = \frac{0.5Lu}{2L - GE e(t) }$ (6.50b)
<b>Caso 4:</b>	$f = \max (GE. e(t) , GR. ce(t) )$ $f \leq L$ (6.51c)	$X = \frac{0.5Lu.GU}{2L - f}$ (6.51a)	$X = \frac{Lu.GU}{3L - f}$ (6.51b)

Caso 1: Cuando  $Le = Lce = L$ , el CB se comporta como un PI lineal a tramos, donde la restricción sobre los factores de escala viene dada por la relación simplificada siguiente:

$$GR = Ti.GE \tag{6.52}$$

Caso 2: Para el caso estacionario, cuando ambas variables de entrada, el error y el cambio en el error son cero, el controlador opera como un PI lineal, de parámetros  $Kp_s$  y  $Ki_s$  (ganancia proporcional estática y ganancia integral estática). Por lo tanto, los valores de  $Kp$  constante y  $Ki$  constante del controlador PI se deben utilizar como condición al estado estacionario en el controlador borroso.

Aplicando la lógica de Zadeh al evaluar las reglas, los valores estacionarios obtenidos difieren de los que se calculan con la de Lukasiewicz; como los de Zadeh (6.48b) dan un resultado mayor para las ganancias equivalentes, el comportamiento del controlador con éstos valores produce una respuesta ligeramente inferior en cuanto que produce un pequeño aumento de la sobrelongación y del tiempo de subida respecto al que se obtiene con la lógica de Luckasiewicz.

**Caso 3:** También en los puntos limítrofes entre una y otra zona el controlador borroso se comporta como un regulador lineal. Si  $T_i$  es la constante de tiempo integral con la que se comportaría el PI equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & |e(t)| \geq T_i \cdot |ce(t)| & \text{zona I} \\ \text{Si} & |e(t)| \leq T_i \cdot |ce(t)| & \text{zona II} \end{array}$$

Es decir, puede existir una  $T_i$  variable que haga cada instante de tiempo el controlador borroso lineal.

**Caso 4:** Introduciendo la no linealidad del PI como una función  $f$  (6.51c), se evita trabajar con distintas zonas. Esto permite “linealizar” el controlador borroso —al hacer variable la  $T_i$  equivalente del CB— y trabajar con una notación más compacta.

### 6.3.2.3 Algoritmo de borrosificación no lineal: Zonas saturadas

Para las zonas donde el valor de alguna de las variables de entrada no pertenece al intervalo  $[-L_x, L_x]$  de su correspondiente universo de discurso, las funciones que describen la salida del controlador son distintas de (6.42), y coinciden con las calculadas para esas zonas no lineales para el controlador borroso con algoritmo lineal (Figura 6.10). Son, por lo tanto, las descritas por las expresiones (6.36) y (6.37). Se obtiene el mismo resultado al aplicar la lógica de Zadeh que la de Lukasiewicz en esas zonas saturadas.

### 6.3.2.4 Propuesta de métodos de sintonía

Existen diversos objetivos a la hora de establecer los criterios de comportamiento del controlador borroso, y por lo tanto, para determinar los parámetros de éste. Es difícil llegar a una solución óptima, ya que el sistema borroso tiene muchos grados de libertad que, aunque se van reduciendo al especificar su estructura y componentes, se siguen manteniendo en menor grado por los parámetros de sintonía. Además existe una fuerte interrelación entre ellos, que le hace dependientes unos de otros.

Se aportan aquí distintas soluciones que pretenden ser un acercamiento al problema de la sintonía, y sirven en algunos casos para alcanzar un comportamiento adecuado a los requisitos de la aplicación.

**MÉTODO 1 : CB equivalente a un PI lineal a tramos**

El objetivo de este método es calcular  $GE$ ,  $GR$  y  $GU$  de forma que el CB actúe como un PI lineal a tramos, con  $Ti$ ,  $Kp_I$  y  $Kp_{II}$  determinadas.

Partiendo de la ley de control que refleja cómo un controlador borroso se comporta como un PI no lineal (6.42), se pretende optimizar el comportamiento de este PI, especificando los parámetros de sintonía con los que se busca que actúe en cada tramo.

Puesto que los factores de escala del controlador borroso están relacionados entre sí, la ganancia proporcional del PI en cada tramo se puede expresar en función de uno de ellos, para estudiarlos:

$$Kp_I = \frac{0.5L.GE.Ti.GU}{2L - GE.|e(t)|} \qquad Kp_{II} = \frac{0.5L.GE.Ti.GU}{2L - GE.Ti.|ce(t)|} \qquad (6.53)$$

La influencia de los parámetros de ajuste del controlador borroso,  $GE$ ,  $GR$  y  $GU$  sobre estas ganancias equivalentes del PI se traduce en su rango de variación, que es para ambos casos:

$$0.25GU.GR \leq Kp \leq 0.5GU.GR \qquad (6.54a)$$

Es decir, que el máximo y mínimo valor de la ganancia proporcional equivalente que se puede conseguir está delimitado por los factores de escala del controlador borroso. Por lo tanto, una vez determinado  $Ti$ , dado un intervalo de valores de  $Kp$  convenientes, las ganancias del sistema borroso están restringidas al intervalo:

$$2Kp_{min} \leq GR.GU \leq 4Kp_{máx} \qquad (6.54b)$$

*Estudio de la sensibilidad*

Otra forma de ver cómo afecta la variación de  $GE$  y  $GR$  al comportamiento del controlador es analizar la sensibilidad de la función de control respecto a éstos parámetros.

Además, como para los controladores convencionales es conocida la influencia de los parámetros  $Kp$  y  $Ki$  sobre la respuesta, al estudiar la sensibilidad de éstos respecto a las ganancias del controlador borroso se pone de manifiesto cuál es su influencia sobre el sistema.

Para medir la sensibilidad de una función  $F$  respecto a cada uno de sus parámetros  $\alpha$ , se estudia la relación:

$$S_{\alpha}^F = \frac{\% \text{ variación de } F}{\% \text{ variación de } \alpha} = \frac{\partial F / F}{\partial \alpha / \alpha} = \frac{\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad (6.55)$$

Cuanto menor sea el valor  $S$ , más insensible es la función a variaciones de ese factor  $\alpha$ .

Los parámetros del controlador borroso que afectan al control son  $L$ ,  $GU$ ,  $GE$ ,  $GR$ ,  $e(t)$  y  $ce(t)$ . Para cada uno de los tramos definidos para el regulador (6.53) se calcula:

	<b>Zona I</b>	<b>Zona II</b>	
$S_L^{Kp} = \frac{L}{Kp} \frac{\partial Kp}{\partial L}$	$\frac{-GE \cdot  e(t) }{2L - GE \cdot  e(t) }$	$\frac{-GE \cdot Ti \cdot  ce(t) }{2L - GE \cdot Ti \cdot  ce(t) }$	(6.56a)
$S_{GE}^{Kp} = \frac{GE}{Kp} \frac{\partial Kp}{\partial GE}$	$\frac{2L}{2L - GE \cdot  e(t) }$	$\frac{2L}{2L - GE \cdot Ti \cdot  ce(t) }$	(6.56b)
$S_{GU}^{Kp} = \frac{GU}{Kp} \frac{\partial Kp}{\partial GU}$	1	1	(6.56c)
$S_{e(t)}^{Kp(t)} = \frac{e(t)}{Kp(t)} \frac{\partial Kp(t)}{\partial e(t)}$	$\frac{GE \cdot  e(t) }{2L - GE \cdot  e(t) }$		(6.56d)
$S_{ce(t)}^{Kp(t)} = \frac{ce(t)}{Kp(t)} \frac{\partial Kp(t)}{\partial ce(t)}$		$\frac{GE \cdot Ti \cdot  ce(t) }{2L - GE \cdot Ti \cdot  ce(t) }$	(6.56e)

Estos resultados se resumen en las siguientes conclusiones:

- a) La sensibilidad de las ganancias proporcionales del PI no lineal equivalente se ve afectada de forma directa por el factor de escala de la salida  $GU$ .
- b) La variación de la sensibilidad con el rango de los universos de discurso es inversa. En este sentido conviene aumentarlos, ya que así la sensibilidad disminuye y el controlador resulta más robusto. Esto equivale a ampliar las funciones de pertenencia, con lo que el control que se produce es más suave.
- c) Respecto al error o al cambio en el error, para valores grandes de éstos la sensibilidad es 1, mientras que para valores pequeños aumenta proporcionalmente al aumentarlos.
- d) La sensibilidad de las ganancias se ve afectada por los factores de escala del controlador borroso de forma que disminuye al aumentar éstos. Es decir, al aumentar la no linealidad del controlador borroso se hace más insensible a éstos parámetros.

### *Ajuste de los parámetros*

El primer paso es determinar la constante de tiempo integral,  $T_i$ , con la que va a funcionar el controlador. Por lo tanto, se establece esa ligadura (6.45) entre los factores de escala del CB.

Los otros parámetros del PI son  $Kp_I$  y  $Kp_{II}$  (6.44), que se pueden fijar para que el sistema cumpla unas especificaciones determinadas en cada zona. Por ejemplo, para penalizar valores altos del cambio en el error, se reduce el valor de su coeficiente de ajuste  $Kp_{II}$  (6.44b) en la zona en la que esa entrada es mayor, y así producirá menos efecto sobre la ecuación del control.

Para conseguir que el controlador borroso actúe como un PI lineal a tramos, con unas ganancias proporcionales  $Kp_I$  y  $Kp_{II}$  constantes, los parámetros de ajuste del controlador borroso varían con el tiempo, en función del error y del cambio del error (Gráfica 6.7), según las expresiones:

Zona I:  $GR \cdot |ce(t)| \leq GE \cdot |e(t)| \leq L$

$$GE = \frac{2L \cdot Kp_I}{0.5L \cdot GU \cdot Ti + Kp_I \cdot |e(t)|} \quad GR = \frac{2L \cdot Kp_I}{0.5L \cdot GU + Kp_I \cdot |e(t)| / Ti} \quad (6.57a)$$

Zona II:  $GE \cdot |e(t)| \leq GR \cdot |ce(t)| \leq L$

$$GE = \frac{2L \cdot Kp_{II}}{0.5L \cdot GU \cdot Ti + Kp_{II} \cdot Ti \cdot |ce(t)|} \quad GR = \frac{2L \cdot Kp_{II}}{0.5L \cdot GU + Kp_{II} \cdot |ce(t)|} \quad (6.57b)$$

y de forma similar se obtienen para las ecuaciones que resultan de aplicar el operador  $OR_Z$ .

En la Figura 6.16 se muestra el funcionamiento del método, aplicado a un sistema con retardo. En el controlador borroso se mantienen las ganancias proporcionales  $Kp_I$  y  $Kp_{II}$  constantes según las zonas, penalizando el cambio en el error.

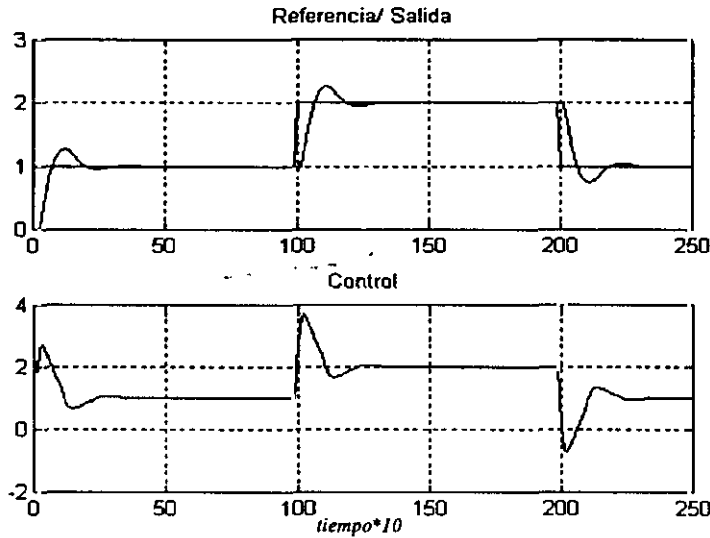


Figura 6.16 - Respuesta de un sistema con un CB con  $Kp_I$  y  $Kp_{II}$  constantes según las zonas.  
 $Kp_I = 0.3; Kp_{II} = 0.15$



Las Figuras 6.17 ilustran algunas características del método. Se puede observar la variación e los factores de escala del CB para mantener constantes las ganancias equivalentes de un PI no lineal, que según la zona oscilan entre los valores predefinidos de:

$$Kp_I = 0.30 \text{ (GR.lce(t) } \leq \text{ GE.le(t))}$$

$$Kp_{II} = 0.15 \text{ (GR.lce(t) } \geq \text{ GE.le(t))}$$

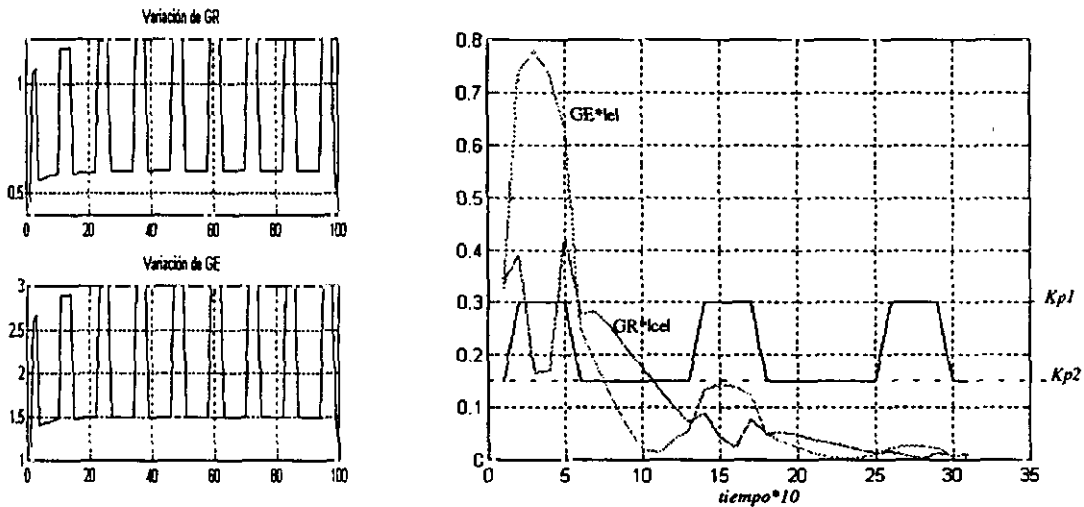


Figura 6.17 - Variación de los factores de escala del controlador borroso (GR y GE) para mantener constantes las ganancias proporcionales según las zonas.

*Se puede concluir que esta técnica resulta adecuada en casos selectivos, donde es bien conocida la no linealidad que se quiere introducir para aprovechar sus ventajas.*

**MÉTODO 2 : Controlador Borroso con parámetros estacionarios**

*El objetivo de este método es asignar a los factores de escala GE, GR y GU los valores estacionarios y estudiar el comportamiento del CB.*

Se estudia ahora el funcionamiento del controlador borroso cuando se fijan sus ganancias a los valores estacionarios (6.58), sustituyendo esos valores en la ecuación de control borroso (6.42) para la lógica de Lukasiewicz y la de Zadeh respectivamente. Para la ganancia integral se obtienen las mismas desigualdades.

	Lukasiewicz	Zadeh
<b>Valores estacionarios:</b>	$GR = \frac{4Kp_s \cdot Lce}{Lu \cdot GU};$	$GR = \frac{3Kp_s \cdot Lce}{Lu \cdot GU}$
	$GE = \frac{4Ki_s \cdot Le}{Lu \cdot GU};$	$GE = \frac{4Ki_s \cdot Le}{Lu \cdot GU}$
		(6.58)

**Zona I:**  $GR \cdot |ce(t)| / Lce \leq GE \cdot |e(t)| / Le$

$$\frac{2Le \cdot Kp_s}{2Le - GE \cdot |e(t)|} \geq Kp_s \qquad \frac{3Le \cdot Kp_s}{3Le - GE \cdot |e(t)|} \geq Kp_s$$

**Zona II:**  $GE \cdot |e(t)| / Le \leq GR \cdot |ce(t)| / Lce$

$$\frac{2Lce \cdot Kp_s}{2Lce - GR \cdot |ce(t)|} \geq Kp_s \qquad \frac{3Lce \cdot Kp_s}{3Lce - GR \cdot |ce(t)|} \geq Kp_s$$

(6.59)

De donde se deducen las siguientes conclusiones sobre el comportamiento del controlador borroso, cuando se le asignan estos parámetros iniciales de sintonía:

- Las ganancias del controlador borroso resultan con un valor mayor o igual que las de un PI convencional con esos parámetros estacionarios. La diferencia entre una acción de control y otra viene dada por la condición que fuerza la no linealidad del CB, que es:

$$GE \cdot |e(t)| \neq GR \cdot |ce(t)| \qquad (6.60)$$

Marca la diferencia entre las distintas zonas. Por lo tanto, cuanto más grandes sean  $|e(t)|$  o  $|ce(t)|$ , mayor es la diferencia entre  $du(t)$  del CB y  $du_{PI}(t)$ .

Este aumento de los parámetros de control respecto al regulador convencional no es demasiado fuerte. Si se denomina  $Kp_B$  la ganancia que proporciona el controlador borroso con sus parámetros de sintonía fijados a los valores estacionarios, y  $Kp_s$  la del PI, se cumplen las relaciones siguientes:

$$\text{OR}_L: 2Kp_S \geq Kp_B \geq Kp_S \quad (6.61a)$$

$$\text{OR}_Z: 1.5Kp_S \geq Kp_B \geq Kp_S \quad (6.61b)$$

La comparación entre el control obtenido por el CB y el PI depende tanto de los signos de las variables de entrada como de la condición que fuerza la no linealidad del controlador borroso. En la mayoría de los casos, es mayor en valores absolutos la del CB, pero, por ejemplo, puede ser menor cuando las variables de entrada tienen distinto signo (Figura 6.18).

- En el estado estacionario, cuando el proceso está cerca de la referencia:  $e(t) = 0$ , y el cambio del error tiende a cero:  $ce(t) = 0$ , la acción de control del sistema borroso es la misma que la del PI. Esto asegura que el error estacionario será nulo.
- Otra forma de cambiar el grado de no linealidad del controlador borroso es ajustar los factores de escala  $GE$  y/o  $GR$ . Cuanto mayores sean  $GE$  ( $GR$ ), aumenta la no linealidad del controlador borroso, puesto que aumenta la desigualdad de la expresión (6.60).
- Estas deducciones son aplicables tanto para la lógica de Zadeh como para la de Lukasiewicz, siempre y cuando se actualicen las ganancias a los valores estacionarios correspondientes (6.58). Como se ha visto, la acción de control proporcionada por Lukasiewicz es igual que la de Zadeh en el estado estacionario, pero mayor en los otros casos, aunque las características del control son las mismas.
- Se debe tener presente la saturación de las variables de entrada ya que, en ese caso, el comportamiento del controlador es diferente del previsto por las ecuaciones generales.

En la Figura 6.18 se muestran, junto con la respuesta comparativa entre el CB y un PI, algunas características de este método. En concreto, cabe destacar la diferencia entre los incrementos de control proporcionados por el controlador borroso y el PI.

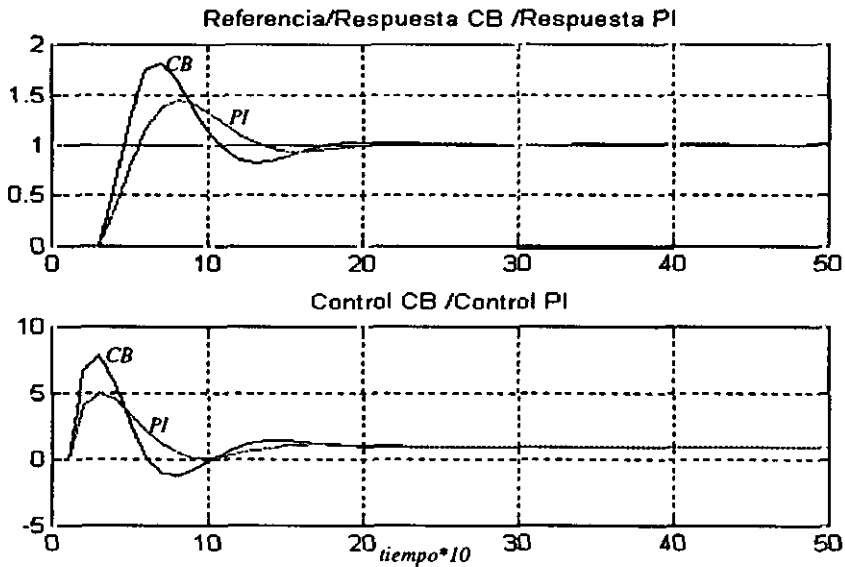


Figura 6.18a - Comparación de la respuesta de un sistema con un controlador borroso y un regulador PI con los mismos valores estacionarios

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.2; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.3; T_i = 0.3$	CB: $GE = 4; GR = 1.2; GU = 1;$ $Le = Lce = Lu = 10$
Características de la Respuesta	sobreelongación = 0.44 tiempo de subida: 5.5	sobreelongación = 0.81 tiempo de subida: 4.5

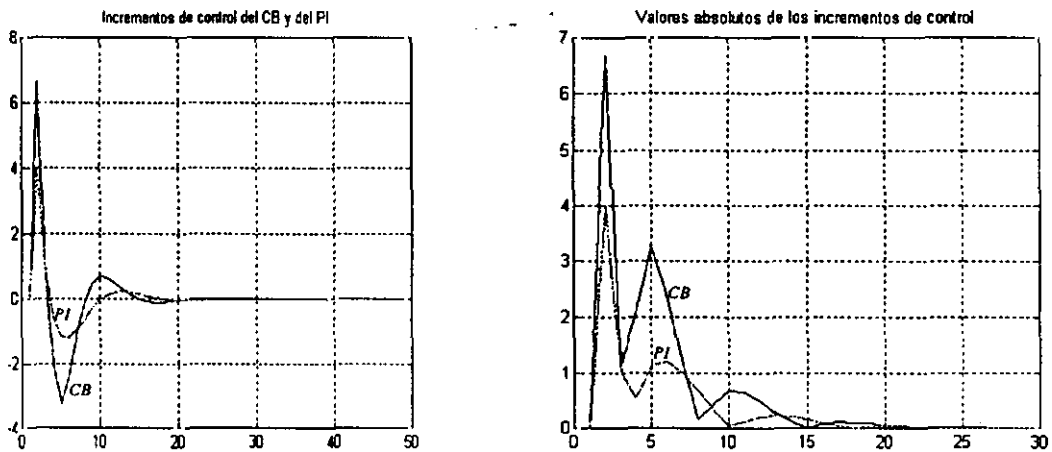
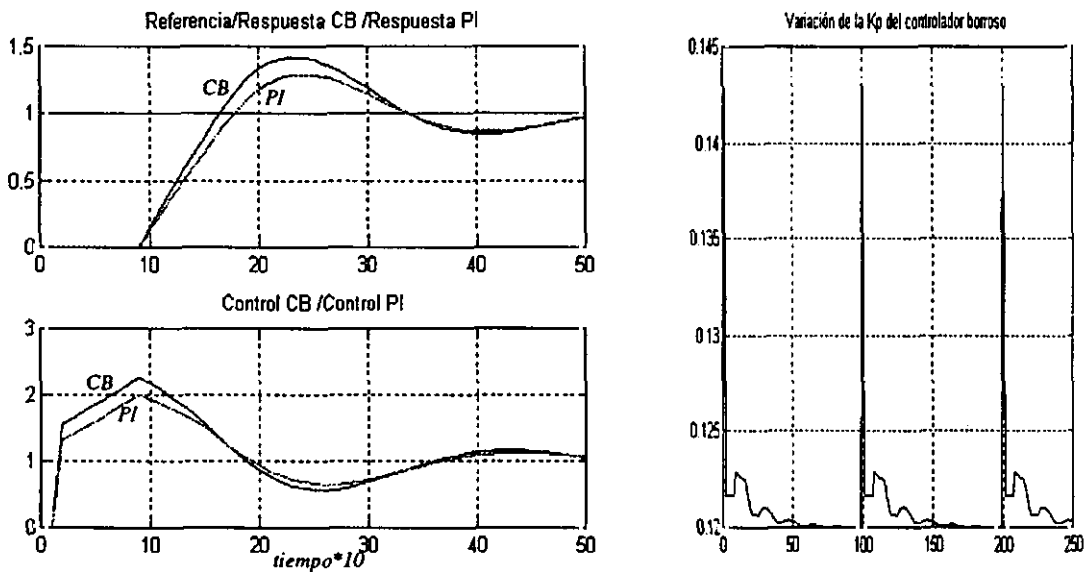


Figura 6.18b - Características del control

En la Figura 6.19 se observa cómo al aumentar el retardo de un sistema la acción del controlador borroso se asemeja en mayor grado a la del PI, decrementando la sobrelongación que suele producir pero manteniendo menor el tiempo de subida. Para sistemas de orden mayor (Figuras 6.20 y 6.21), la respuesta del controlador borroso sigue manteniendo el tiempo de respuesta menor aunque alarga ligeramente el transitorio.



Gráfica 6.19 - Comparación de la respuesta de un sistema al aumentar su retardo con un controlador borroso y un PI con los mismos valores estacionarios.

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.8; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.12; T_i = 1.2$	CB: $GE = 0.4; GR = 0.48; GU = 1;$ $Le = Lce = Lu = 10$

La variación de la ganancia proporcional del controlador borroso es función de los valores absolutos del error y del cambio en el error, pero siempre es mayor o igual que la del PI (Figura 6.19b) y verifica (6.61a).

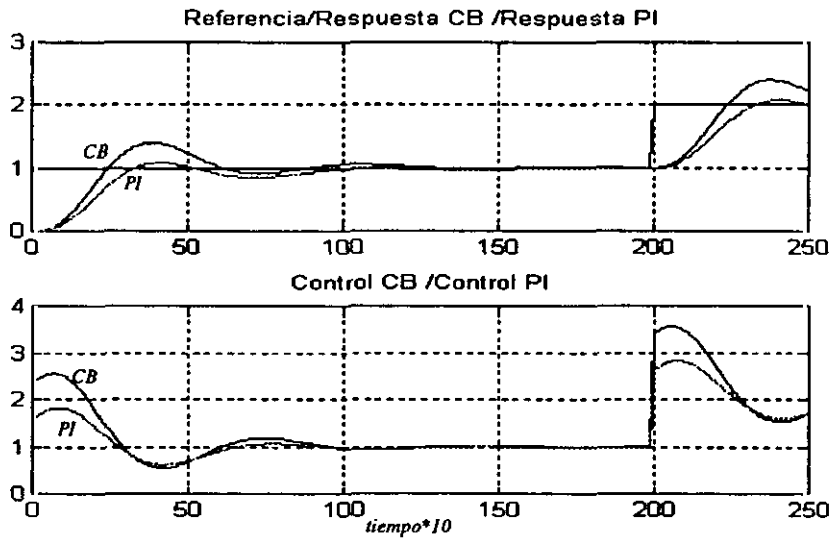


Figura 6.20 - Comparación de la respuesta de un sistema de tercer orden con un controlador borroso y un PI con los mismos valores estacionarios.

Características del proceso	$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.16; T_i = 0.04$	CB: $GE = 0.16; GR = 0.64; GU = 1;$ $Le = Lce = Lu = 10$

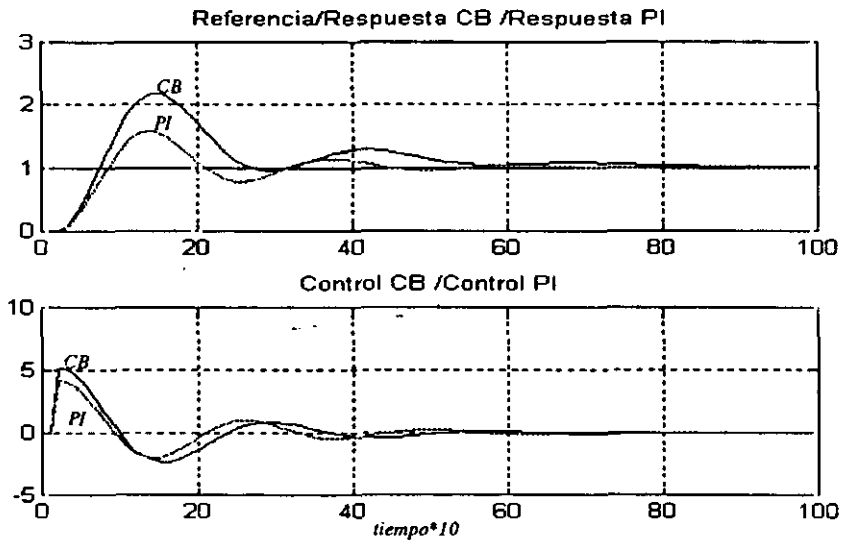


Figura 6.21 - Comparación de la respuesta de un sistema con integrador con un controlador borroso y un PI con los mismos valores estacionarios.

Características del proceso	$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.3; T_i = 0.3$	CB: $GE = 0.53; GR = 1.6; GU = 1;$ $Le = Lce = Lu = 10$

Este método proporciona una acción del controlador borroso, en general, más enérgica, que permite un seguimiento más rápido de la referencia —consecuencia de una ganancia proporcional equivalente mayor— aunque con mayor sobrelongación y con un transitorio ligeramente más largo, al aumentar la ganancia integral. Sin embargo, aunque la no linealidad puede ser deseable para controlar un proceso con menor tiempo de subida, puede también provocar oscilaciones en torno al punto de consigna, haciendo al sistema menos estable.

En resumen, seleccionar los parámetros iniciales del controlador borroso como sus valores estacionarios (6.58), en función de los parámetros de un regulador convencional  $K_p$ ,  $T_i$ , resulta una técnica apropiada, teniendo en cuenta los efectos que produce esta elección para mejorar luego cualitativamente la acción de control.

**MÉTODO 3 : Controlador borroso equivalente a un regulador PI**

El objetivo de este método es determinar los factores de escala  $GE$ ,  $GR$  y  $GU$  para que el CB se comporte linealmente, y aplicar las técnicas clásicas de sintonía.

Este método consiste en equiparar el controlador borroso a un PI, al que se pueden aplicar las técnicas clásicas de sintonía. Sobre todo por parte de los operarios, resulta bien conocida la influencia de los parámetros de sintonía de los reguladores convencionales sobre la respuesta del sistema, lo que facilita su ajuste.

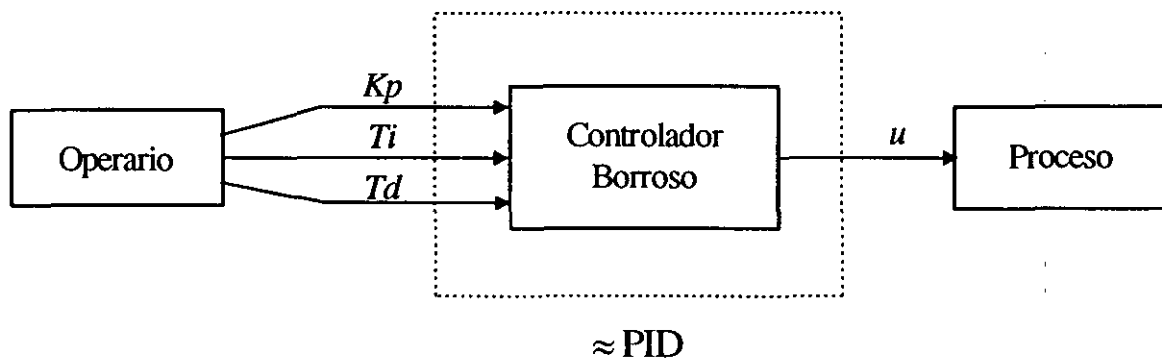


Figura 6.22 - Controlador Borroso visto como un PID

Por eso, una buena medida consiste en enmascarar los parámetros del sistema borroso con los de un controlador clásico, de forma que la variación sobre éstos se traduzca en un cambio de las ganancias  $GE$ ,  $GR$  y  $GU$ , con lo que se sintoniza el controlador borroso para conseguir unas especificaciones determinadas (Figura 6.22).

A partir de la expresión (6.51), se determinan los parámetros del controlador borroso, que varían cada instante de tiempo, de forma que en todo momento el CB se comporte como un PI equivalente de ganancias  $Kp$  y  $Ki$ .

Si se han fijado  $GU$  y  $L$ , y se han obtenido para el proceso o para un modelo de éste los parámetros de sintonía del PI mediante cualquier técnica clásica, se calculan:

$$GR = GR(GU, L, Kp, Ki, e(t), ce(t)) \quad GE = GE(GU, L, Kp, Ki, e(t), ce(t))$$

$$GR = \frac{Kp \cdot (2L - f)}{0.5Lu \cdot GU} \quad GE = \frac{Ki \cdot (2L - f)}{0.5Lü \cdot GU} \quad (6.62)$$

$$f = \max (GE \cdot |e(t)|, GR \cdot |ce(t)|) \leq L$$

Esto permite establecer unos parámetros iniciales para el controlador borroso con los que se sabe cómo se va a comportar, y que están directamente relacionados con la respuesta del sistema a través de las ganancias del PI. A partir de éstos valores, se puede mejorar el comportamiento del controlador de dos formas:

1. Aplicando los efectos de la variación de estos factores o de los universos de discurso de las variables sobre la respuesta. Estos efectos corresponden a los que se expusieron en el apartado 6.3.1.4, ya que coinciden con los del CB lineal.
2. Introduciendo la no linealidad del controlador borroso dando valores distintos a  $Kp$  y  $Ki$  para cada zona.

Para su simulación se trabaja actualizando estas ecuaciones con el valor anterior obtenido para cada parámetro de sintonía, lo que da un buen resultado. La diferencia entre un factor de escala y su valor en el instante anterior es pequeña (Figura 6.24), excepto cuando el error o el cambio en el error son muy grandes.



Aún así, como se comprueba en las Figuras 6.23 y 6.25, la linealización es buena.

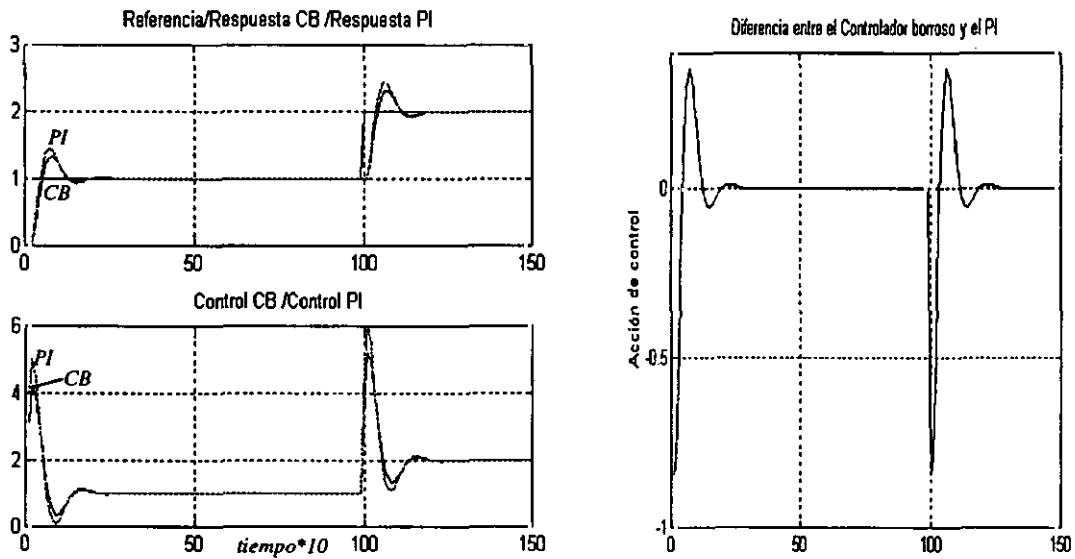


Figura 6.23 - Respuesta de un sistema con un CB linealizado para que actúe como el PI de la figura

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.2; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI: $K_p = 0.3; K_i = 1.0$	CB: $GU = 1; L_e = L_{ce} = L_u = 15$
Características de la Respuesta	sobrelongación = 0.4463	sobrelongación = 0.3166

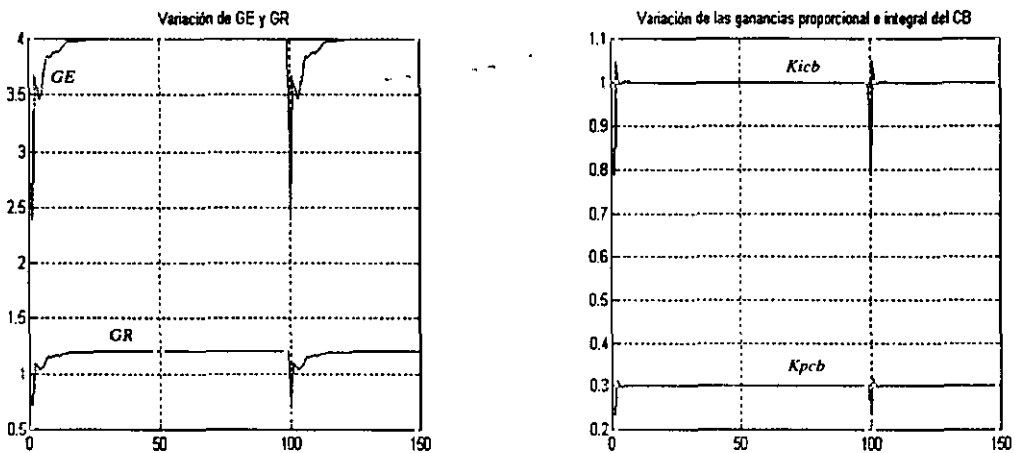


Figura 6.24 - Características del Método 3 de sintonía.

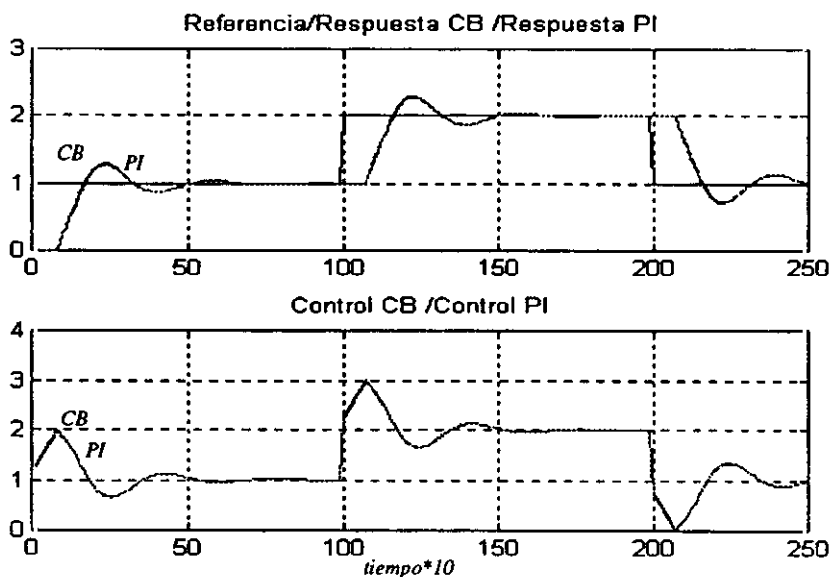


Figura 6.25 - Respuesta de un sistema de primer orden al aumentar su retardo, con un controlador borroso linealizado para que actúe como el PI de la figura. Son prácticamente indistinguibles

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.8; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI: $K_p = 0.12; K_i = 0.1$	CB: $GU = 1; L_e = L_{ce} = L_u = 15$
Características de la Respuesta	sobrelongación = 0.2929	sobrelongación = 0.2733

Este método es apropiado para establecer una configuración inicial del CB, cuando se dispone de información del proceso o de un regulador que esté funcionando adecuadamente. Su principal ventaja es cara al operario de la planta, ante quien se mantiene la apariencia de un elemento de control que sabe manejar y sintonizar con su experiencia y conocimiento. Por eso, este método indirecto de sintonía se ha demostrado eficaz en estos casos sencillos, y abre una vía de introducción de esta nueva técnica de control en el mundo industrial.

### 6.3.3 Conclusiones para el controlador borroso PI

Los factores de escala son parámetros críticos en el desarrollo de un controlador borroso, ya que tienen una influencia decisiva sobre la respuesta del sistema.

Con estos primeros ajustes analíticos, obtenidos por cualquiera de los métodos anteriores, se obtienen unos parámetros próximos a los óptimos. Una comprensión a nivel

cualitativo de la influencia de estos factores permite afinar la elección para mejorar la respuesta del sistema.

Los resultados resumidos en el apartado 6.3.1.4 sobre la variación de la respuesta con los factores de escala se confirman para el CB con algoritmo de desborrosificación no lineal, como se observa en las Figuras 6.26 (influencia del factor de escala del error  $GE$ ), 6.27 (influencia del factor de escala del cambio en el error  $GR$ ) y 6.28 (variación de la ganancia de la salida  $GU$ ) dadas para un sistema con retardo.

Para los casos estudiados, tanto aplicando el método de desborrosificación lineal como el no lineal, estas variaciones se apuntaban en la sección 4.3 del capítulo 4, que junto con estos resultados, pueden resumirse en:

*\* Un aumento de la ganancia de la variable de entrada error hace al sistema más oscilatorio, aumentando generalmente el tiempo de asentamiento y aumentando la sobreelongación, con el peligro de inestabilizarlo Sin embargo, produce una respuesta más rápida, como resultado de una acción de control más enérgica, al aumentar la ganancia equivalente  $K_i$ .*

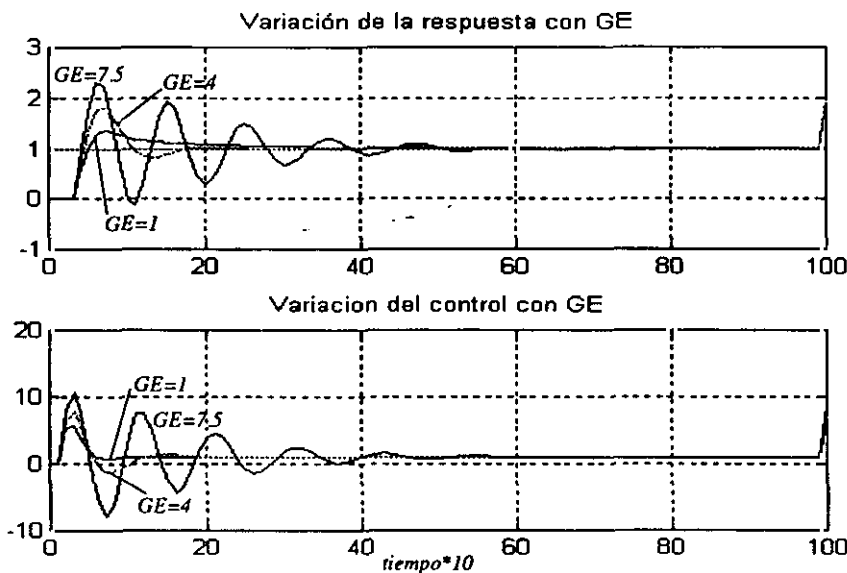


Figura 6.26 - Variación de la respuesta al variar la ganancia del error  $GE$  del controlador borroso

Características del Controlador							$GR = 1.2; GU = 1; GE = 1, 4 \text{ y } 7.5$ $Le = Lce = Lu = 15$
$GE$	$Le$	$Le \text{ real}$	$Kp^*$	$Ki^*$	$Ti^*$	$ov (\#)$	Efectos en la respuesta
0.25	15	60	0.3	0.0625	4.8	0.2492	no oscila, sobrelongación
0.5	15	30	0.3	0.125	2.4	0.2735	no oscila, sobrelongación
1	15	15	0.3	0.25	1.2	0.3529	algo oscilatoria, aumenta sobrelongación
2	15	7.5	0.3	0.5	0.6	0.5163	algo oscilatoria, aumenta sobrelongación
4**	15	3.75	0.3	1	0.3	0.8130	mayor sobrelongación, acorta transitorio
7.5	15	2	0.3	1.875	0.16	1.2984	más sobrelongación, transitorio largo, oscila
10	15	1.5	0.3				oscilatoria

(\*) Estos valores son los mínimos (\*\*) Se han recuadrado en todas las tablas los resultados correspondientes a fijar los valores estacionarios  
 (#) Se ha denominado  $ov$  el máximo valor que alcanza la sobrelongación de la respuesta.

\* Un aumento de la ganancia de la variable de entrada cambio en el error puede decrementar la sobrelongación, hasta que a partir de un valor dado vuelve a aumentarla, produciendo una respuesta mas rápida.

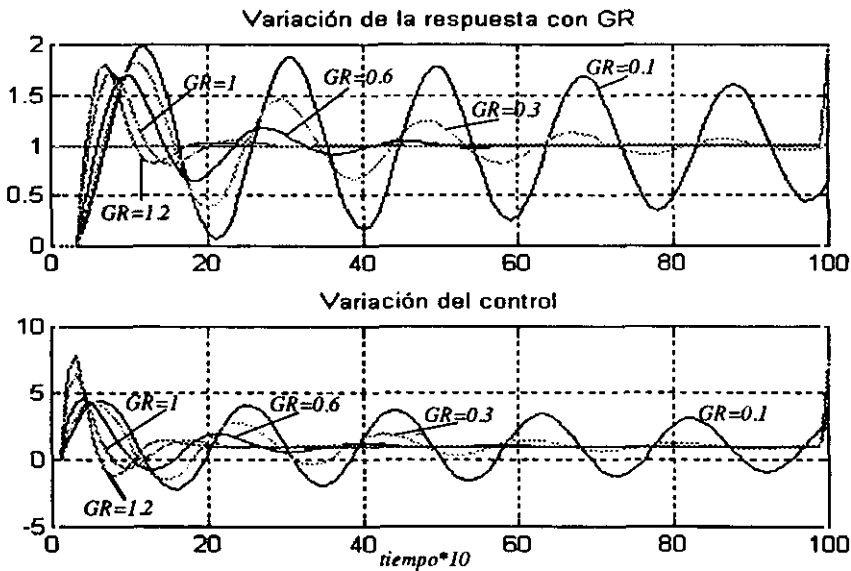


Figura 6.27 - Variación de la respuesta al incrementar la ganancia del cambio en el error  $GR$  del CB

Características del Controlador							$GE = 4; GU = 1; GR = 0.1, 0.3, 0.6, 1, 1.2$ $Le = Lce = Lu = 15$
$GR$	$Lce$	$Lce \text{ real}$	$Kp^*$	$Ki^*$	$Ti^*$	$ov (\#)$	Efectos en la respuesta
0.05	15	300					oscilatoria
0.1	15	150	0.025	1	0.025	0.9772	oscila, transitorio largo
0.3	15	50	0.075	1	0.075	0.8333	menos sobrelongación, menor transitorio
0.6	15	25	0.15	1	0.15	0.6986	acorta transitorio, oscilaciones pequeñas
1.2**	15	12.5	0.3	1	0.3	0.8130	mayor sobrelongación, acorta transitorio
2	15	7.5					oscilatoria

\* Un aumento de la ganancia de la variable de salida aumenta la inestabilidad del sistema al producir oscilaciones, pero acorta notablemente el tiempo de subida y en algunos casos el transitorio.

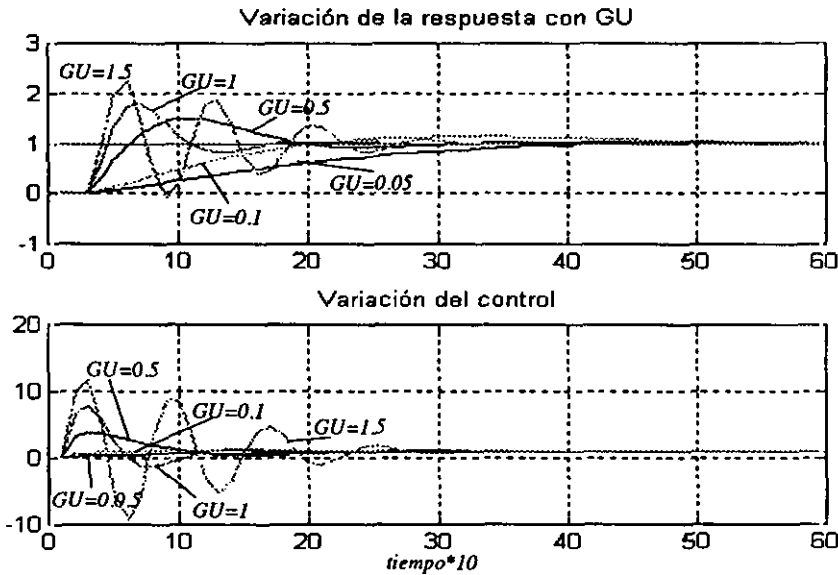


Figura 6.28 - Variación de la respuesta al incrementar la ganancia de la variable de salida  $GU$  del CB.

Características del Controlador						$GE = 4; GR = 1.2; GU = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 1.5$ $Le = Lce = Lu = 15$
$GU$	$Lu$	$Kp^*$	$Ki^*$	$Ti^*$	ov (#)	Efectos en la respuesta
0.05	15	0.015	0.05	0.3	0.028	sobreamortiguada
0.1	15	0.03	0.10	0.3	0.1309	amortiguada, con ligera sobrelongación
0.5	15	0.15	0.5	0.3	0.5014	con sobrelongación
1**	15	0.3	1	0.3	0.8130	algo oscilatoria, aumenta la sobrelongación
1.5	15	0.45	1.5	0.3	1.2587	oscila, mayor sobrelongación
2	15					oscilatoria

Muchas de las técnicas de ajuste propuestas en la literatura se basan en estas variaciones cualitativas. En algunos casos, se llevan a cabo siguiendo las pautas de la lógica borrosa, ajustando mediante reglas la variación de las ganancias. Sin embargo, el problema de los valores iniciales no se aborda, por lo que la convergencia de los factores suele ser lenta, y no siempre consigue alcanzar unos valores óptimos.

#### 6.4 INFLUENCIA DE LA PARTICIÓN DE ENTRADA

Por último, se va a ampliar el estudio de los CB tipo PI analizando su comportamiento cuando se incrementa la partición borrosa del espacio de entrada, con los que se introduce una nueva fuente de no linealidad en el controlador: la debida al algoritmo de borrosificación.

La influencia de la partición de los universos de discurso de las variables se ha comentado brevemente en la sección 4.2.1.2 del capítulo 4. Sin embargo, el desarrollo analítico de un controlador borroso en el que se aumenta su número de etiquetas lingüísticas para las entradas, permite compararlo con el caso anterior, y formalizar esta influencia.

La estructura del CB es similar a la definida en el punto 3, pero ahora los conjuntos borrosos primarios elegidos para las variables son tres, definidos tanto para las entradas como para la salida por las etiquetas:

N: Negativo  
 Z: Cero  
 P: Positivo

La primera variación respecto al caso anterior se da en la dimensionalidad de la tabla de reglas (Tabla 4.1). Aunque las variables de entrada son las mismas, al aumentar el espacio de entrada es necesario reformular la base de reglas del controlador, que en este caso son 9, descritas en la Tabla 6.2.

R<sub>1</sub>: si *GE.e* es P y *GR.ce* es P entonces U es P (6.63a)

R<sub>2</sub>: si *GE.e* es P y *GR.ce* es Z entonces U es P (6.63b)

R<sub>3</sub>: si *GE.e* es P y *GR.ce* es N entonces U es Z (6.63c)

R<sub>4</sub>: si *GE.e* es Z y *GR.ce* es P entonces U es P (6.63d)

R<sub>5</sub>: si *GE.e* es Z y *GR.ce* es Z entonces U es Z (6.63e)

R<sub>6</sub>: si *GE.e* es Z y *GR.ce* es N entonces U es N (6.63 f)

R<sub>7</sub>: si *GE.e* es N y *GR.ce* es P entonces U es Z (6.63g)

R<sub>8</sub>: si *GE.e* es N y *GR.ce* es Z entonces U es N (6.63h)

R<sub>9</sub>: si *GE.e* es N y *GR.ce* es N entonces U es N (6.63i)

		<i>GE.e(t)</i>		
		<b>U</b>	<b>P</b>	<b>Z</b>
<i>GR.ce(t)</i>	<b>P</b>	P	P	Z
	<b>Z</b>	P	Z	N
	<b>N</b>	Z	N	N

Tabla 6. 3 - Reglas del controlador borroso PI incremental

La ecuación que describe simbólicamente el control es (6.38):

$$\Delta u = (U_p - U_n) \cdot L_u / U_p + U_z + U_n$$

$$U_p = \text{or} (\text{mín} (E_p, CE_p), \text{mín} (E_p, CE_z), \text{mín} (E_z, CE_p)) \tag{6.64a}$$

$$U_z = \text{or} (\text{mín} (E_p, CE_n), \text{mín} (E_z, CE_z), \text{mín} (E_n, CE_p)) \tag{6.64b}$$

$$U_n = \text{or} (\text{mín} (E_z, CE_n), \text{mín} (E_n, CE_z), \text{mín} (E_n, CE_n)) \tag{6.64c}$$

que en el caso del método de desborrosificación lineal se reduciría al numerador. Se va a aplicar la conectiva *or* propuesta por Lukasiewicz, pero de forma análoga se hace para la de Zadeh.

Se consideran funciones de pertenencia triangulares para los conjuntos borroso del error, cambio en el error y control, como las descritas en la Figura 6.4, cuya definición corresponden a las expresiones 6.11, que siguen manteniendo un grado de completitud de 0.5.

Teniendo en cuenta estas ecuaciones, al aplicarlas a la ecuación de salida, se establecen ocho zonas de control según las relaciones entre las variables de entrada, resumidas en la Tabla 6.3. El numerador de las expresiones del control corresponde a los resultados de aplicar el método de desborrosificación lineal para este caso.

La función de control que se obtiene es claramente no lineal, tanto para el método de desborrosificación lineal como para el no lineal, como consecuencia de introducir la no linealidad en el algoritmo de borrosificación de las entradas.

Por lo tanto, el método más apropiado para establecer unos parámetros iniciales de sintonía válidos va a ser el de estudiar el controlador borroso en el estacionario.

*Método de desborrosificación lineal*

Se observa que las ganancias del controlador borroso tienen distintos valores, pero en la mayoría de las zonas son mayores que las establecidas para el caso anterior de una partición menor. Por lo tanto, observando los coeficientes de la ecuación del control (Tabla 6.3), una buena propuesta de parámetros iniciales será tomar como valores estacionarios:

$$GR = Kp.L/GU.Lu \qquad GE = Ki.L/GU.Lu \qquad (6.65)$$

Así se consigue que en los tramos donde las variables de entrada tienen distinto signo, se comporte como un PI lineal con ganancias  $Kp$  y  $Ki$ , y en las zonas donde tienen distinto signo, incorpora la no linealidad haciendo más fuerte la acción de control, ya que las ganancias alcanzan un valor absoluto mayor (Figura 6.29).

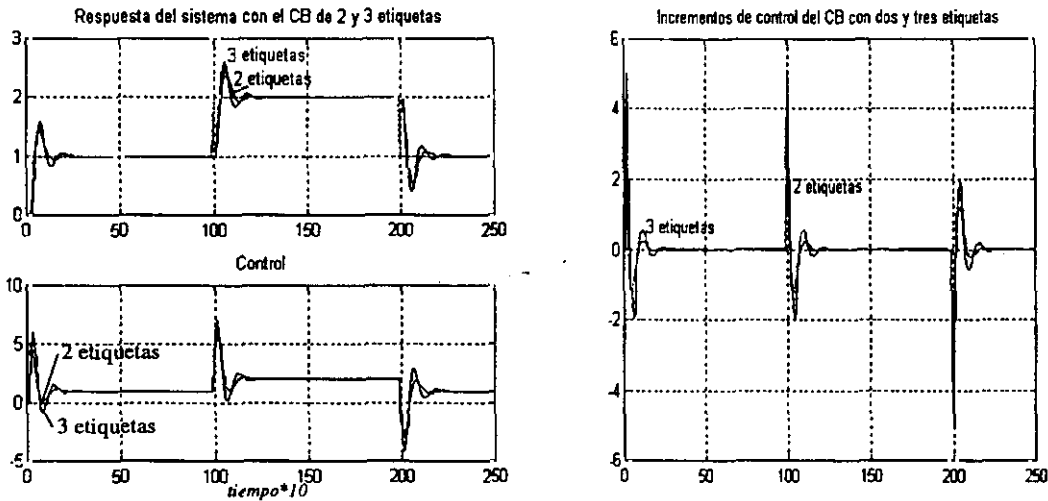


Figura 6.29 - Respuesta de un sistema con un controlador borroso con método de desborrosificación lineal, con particiones de dos y tres etiquetas para las variables de entrada.

Características del proceso	$K = 1; Tp = 1; To = 0.2; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI : $Kp = 0.3; Ki = 1.0$	CB: $GU = 1; Le = Lce = Lu = 15$
Características de la Respuesta	máxima sobreelongación = 0.59 (3 etiquetas)	



Por eso, para los mismos parámetros, aumentar la partición supone aumentar la resolución del control, ya que la salida del controlador es más precisa cuando los valores de entrada cambian, siendo más sensible a éstos cambios, y sin embargo mantiene un comportamiento lineal en el estacionario.

*Método de desborrosificación no lineal*

Para el algoritmo de salida no lineal, aplicando el mismo razonamiento, los parámetros del controlador borroso varían entre los valores absolutos de:

$$0.5K_p \leq GR.GU \leq 3K_p \qquad 0.5K_i \leq GE.GU \leq 3K_i \qquad (6.66)$$

Por lo tanto, si se asignan unos valores iniciales como los anteriores, la respuesta (Figura 6.30) es ahora igual o menor que la que correspondería a un PI con esos parámetros, ya que en la mayoría de las zonas las ganancias del CB son inferiores a las del PI. Pero si toman los valores superiores extremos, existen zonas en las que el controlador puede hacer al sistema oscilatorio o inestable.

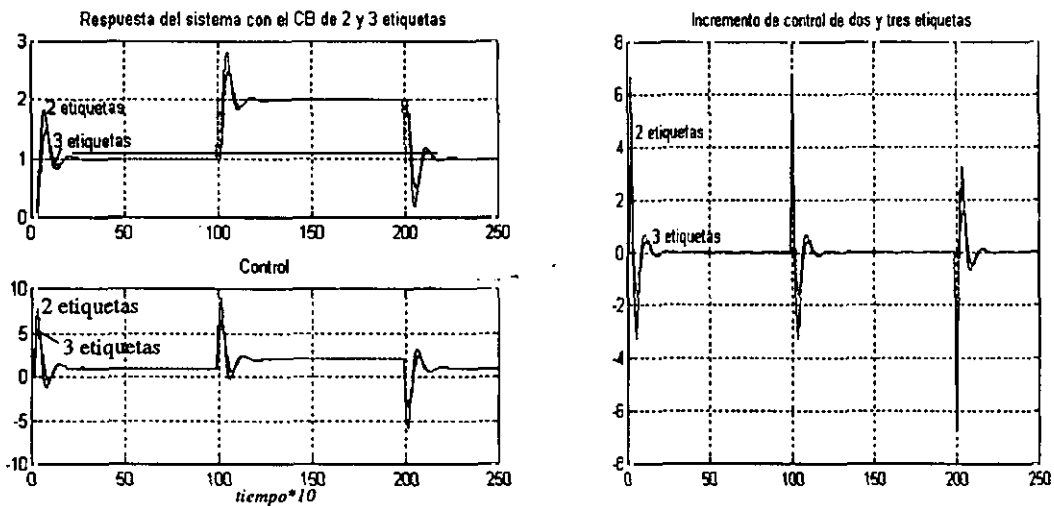


Figura 6.30 - Respuesta de un sistema con un controlador borroso con método de desborrosificación no lineal, con particiones de dos y tres etiquetas para las variables de entrada.

Características del proceso	$K = 1; T_p = 1; T_o = 0.2; T = 0.1$	
Características del Controlador	PI : $K_p = 0.3; K_i = 1.0$	CB: $GU = 1; Le = Lce = Lu = 15$
Características de la Respuesta	sobrelongación = 0.81 (2 etiq.); sobrelongación = 0.51 (3 etiq.)	

Zonas	Condiciones		$\Delta u(t)$
$GR.lce(t) \leq GE.le(t)$	$sg(e) = sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[GE.e(t) + 2GR.ce(t)]}{L + 2GR. ce(t) }$
		$GR.lce(t) \geq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[2L - GE.e(t)]}{3L - 2GE. e(t) }$
	$sg(e) \neq sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[GE.e(t) + GR.ce(t)]}{L + 2GR. ce(t) }$
		$GR.lce(t) \geq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[GE.e(t) + GR.ce(t)]}{3L - 2GE. e(t) }$
$GE.le(t) \leq GR.lce(t)$	$sg(e) = sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[2GE.e(t) + GR.ce(t)]}{L + 2GE. e(t) }$
		$GR.lce(t) \geq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[2L - GR.ce(t)]}{3L - 2GR. ce(t) }$
	$sg(e) \neq sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[GE.e(t) - GR.ce(t)]}{L + 2GE. e(t) }$
		$GR.lce(t) \geq L - GE.le(t)$	$\frac{Lu.[GE.e(t) + GR.ce(t)]}{3L - 2GR. ce(t) }$

Tabla 6.3 - Zonas de control del Controlador Borroso PI con tres etiquetas para cada variable de entrada

Variación de la tabla de reglas

Para esta misma partición de las variables de entrada, existen distintas tablas de reglas que reflejan también el comportamiento del controlador borroso. Por ejemplo, para la dada en la Tabla 6.4, el control se hace más enérgico, como se observa en la Figura 6.31, frente a las dadas en las Tablas 6.1 y 6.2.

		<i>GE.e(t)</i>		
		U	P	Z
<i>GR.ce(t)</i>	P	P	P	N
	Z	P	Z	N
	N	P	N	N

Tabla 6.4 - Reglas del controlador borroso PI incremental

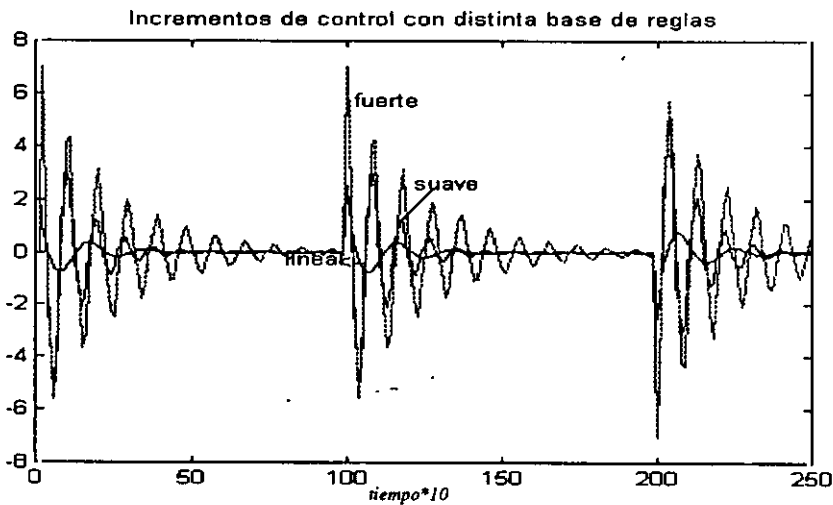


Figura 6.31 - Distintas acciones de control según la tabla de reglas.

6.5 CONCLUSIONES

El desarrollo analítico de los controladores borrosos permite sistematizar su estudio y exponer de forma general y rigurosa el tema de la sintonía de sus parámetros.

Se ha partido de una configuración general, en la que se han ido delimitando los diversos elementos del CB para asemejarlo a un controlador PI. Una vez obtenidas las distintas ecuaciones que definen la salida del sistema de control, para distintos algoritmos de desborrosificación, se han estudiado en profundidad, examinando sus propiedades para casos particulares. Se han podido extraer conclusiones de su comportamiento comparándolo a los controladores convencionales, lo que facilita la argumentación de la influencia de sus parámetros de sintonía sobre la respuesta del sistema. Estos resultados teóricos se han confirmado mediante ejemplos significativos.

Se han introducido entonces diversas propuestas de métodos de sintonía, explicando su aplicabilidad y las ventajas e inconvenientes que se pueden seguir de su aplicación. Las características de cada método se deducen de los desarrollos correspondientes, y se han ilustrado mediante gráficas que resumen su funcionamiento.

Por último, se estudia la influencia de aumentar la complejidad del controlador incrementando su partición de entrada, lo que incorpora otra nueva no linealidad al sistema. Se verifican así algunos de los resultados cualitativos que se dan en otros estudios teóricos.

## CAPÍTULO 7

# ***OTRAS CONFIGURACIONES DE CONTROL BORROSO***

### ***7.1 INTRODUCCIÓN***

Los controladores borrosos propuestos en el capítulo anterior son bastante sencillos aunque son los que más comúnmente se vienen utilizando en la práctica, y dan resultados comparables a los de los reguladores convencionales, como se ha podido comprobar. Sirven de base además para plantear otras estrategias. Pero puede resultar conveniente aumentar la complejidad de éstos para mejorar su funcionamiento, y si es posible, extender los resultados a un espectro más amplio de este tipo de reguladores.

Por eso, la primera generalización que cabe añadir es la de considerar el caso del controlador borroso PID. Aunque el término derivativo no se incluye habitualmente —tampoco en el caso convencional—, esto permite completar el desarrollo de los CB de manera análoga a como se ha venido realizando el estudio de los reguladores clásicos.

Con esta aplicación se pretende exponer también el problema de los parámetros iniciales, que en la mayoría de los métodos de ajuste no se aborda, así como dar algunos resultados para el término derivativo, del que tampoco se trata habitualmente.

Respecto a las configuraciones del sistema de control, también se puede ampliar el abanico de posibilidades, para permitir otras estructuras que se acoplen mejor a ciertas aplicaciones. Una vez establecida una configuración general y un modo automático de sintonía, se pueden establecer distintos esquemas de funcionamiento.

## 7.2 DESARROLLO DE UN CONTROLADOR BORROSO PID

Incorporar la aceleración del error (*ac*) supone dotar al controlador borroso de una nueva acción de control, la derivativa. Se reconstruye entonces la configuración general dada en la Figura 6.1 para el CB incremental tipo PID.

Sin embargo, el hecho de aumentar el número de variables de entrada incrementa la dimensión de la tabla de reglas y la complejidad del sistema, lo que dificulta su realización y en algunos casos hace inabordable un estudio analítico. Por eso, la mayoría de las aplicaciones de control borroso utilizan un PI en vez de un PID.

Sin embargo, el término derivativo puede ser una gran ayuda para mejorar la estabilidad, que es uno de los principales problemas de los controladores borrosos. Permite además ampliar el rango de variación de los otros factores de escala dentro de unos márgenes, incrementando la flexibilidad del sistema, con lo que se facilita en algunos casos la consecución de las especificaciones o mejorar el comportamiento del CB.

Para no complicar excesivamente los cálculos del desarrollo, se definen para cada una de las tres variables de entrada dos conjuntos borrosos primarios, que corresponden a las etiquetas P y N, con lo que el número de reglas va ser como máximo 8 (Tabla 4.1). Como funciones de pertenencia se han tomado las descritas por la Figura 6.3 para las entradas, y Figura 6.4 para la salida, definiéndolas de la misma manera para la nueva variable *ac* (6.1c), en función de sus valores extremos del universo de discurso *Lac*. Verifican, por lo tanto, las relaciones allí expuestas (6.7-6.11) y alcanza los mismos valores en las zonas saturadas, fuera de su intervalo de definición. De nuevo la acción de control se puede aproximar por tramos lineales.

Las reglas borrosas que describen el comportamiento del PID incremental tienen tres antecedentes y un consecuente; son de la forma:

$$R_i: \text{si } x \text{ es } A_i \text{ y } y \text{ es } B_i \text{ y } z \text{ es } C_i \text{ entonces } u \text{ es } Z_i \quad (7.1)$$

donde  $x$  es la variable lingüística error ( $e$ ),  $y$  es la derivada del error ( $ce$ ) y  $z$  la derivada segunda del error ( $ac$ ). La salida  $u$  corresponde a la acción de control  $\Delta u$ . Se han definido como:

$GE.e(t)$		<b>P</b>		<b>N</b>	
		<b>P</b>	<b>N</b>	<b>P</b>	<b>N</b>
$GR.ce(t)$	<b>P</b>	<b>P</b>	<b>P</b>	<b>Z</b>	<b>N</b>
	<b>N</b>	<b>P</b>	<b>Z</b>	<b>N</b>	<b>N</b>

Tabla 7.1 - Reglas del controlador borroso PID

- R<sub>1</sub>: si  $GE.e$  es P y  $GR.ce$  es P y  $GA.ac$  es P entonces U es P (7.2a)
- R<sub>2</sub>: si  $GE.e$  es P y  $GR.ce$  es P y  $GA.ac$  es N entonces U es P (7.2b)
- R<sub>3</sub>: si  $GE.e$  es P y  $GR.ce$  es N y  $GA.ac$  es P entonces U es P (7.2c)
- R<sub>4</sub>: si  $GE.e$  es P y  $GR.ce$  es N y  $GA.ac$  es N entonces U es Z (7.2d)
- R<sub>5</sub>: si  $GE.e$  es N y  $GR.ce$  es P y  $GA.ac$  es P entonces U es Z (7.2e)
- R<sub>6</sub>: si  $GE.e$  es N y  $GR.ce$  es P y  $GA.ac$  es N entonces U es N (7.2 f)
- R<sub>7</sub>: si  $GE.e$  es N y  $GR.ce$  es N y  $GA.ac$  es P entonces U es N (7.2g)
- R<sub>8</sub>: si  $GE.e$  es N y  $GR.ce$  es N y  $GA.ac$  es N entonces U es N (7.2h)

La acción de control que produce este controlador borroso PID se puede especificar para cada algoritmo de desborrosificación (lineal (6.18), o no lineal (6.19)) mediante las siguientes expresiones:

$$\Delta u_L = (U_p - U_n) \cdot L_u \tag{7.3a}$$

$$\Delta u_{NL} = (U_p - U_n) \cdot L_u / (U_p + U_z + U_n) \tag{7.3b}$$

$$U_p = \text{or} (\text{mín} (E_p, CE_p, A_p), \text{mín} (E_p, CE_p, A_n), \text{mín} (E_p, CE_n, A_p)) \tag{7.4a}$$

$$U_n = \text{or} (\text{mín} (E_n, CE_p, A_n), \text{mín} (E_n, CE_n, A_p), \text{mín} (E_n, CE_n, A_n)) \tag{7.4b}$$

$$U_z = \text{or} (\text{mín} (E_p, CE_n, A_n), \text{mín} (E_n, CE_p, A_p)) \tag{7.4c}$$

donde  $U_k$  es el valor de la conclusión correspondiente a la etiqueta de salida P, Z ó N, y  $E_i$ ,  $CE_j$ ,  $ACh$  son los grados de pertenencia a cada etiqueta al aplicar el algoritmo de borrosificación a las entradas.

Las conclusiones deducidas para el caso del regulador borroso PI son aplicables aquí, en el mismo sentido, respecto a la contribución de las reglas según el algoritmo de desborrosificación empleado y a la utilización de la *or* propuesta por Zadeh o la de Lukasiewicz, así como para la dependencia del factor de escala de la salida o de su universo.

Al evaluar cada una de las 8 reglas (7.2) que describen el comportamiento del PID borroso aplicando la conectiva **and** como el mínimo, se pueden obtener distintas conclusiones, seis para cada regla. Según esto, resultan cuarenta y ocho zonas. La salida del controlador para esas zonas, en función de las variables de entrada, viene dada por las expresiones que se resumen en las Tablas 7.2 y 7.4.

#### *Método de desborrosificación lineal*

Aunque los parámetros equivalentes del controlador borroso son distintos para cada una de las siete zonas en las que el control es lineal (Tabla 7.2), el rango de variación de éstos es muy limitado (7.6). La Tabla 7.3 resume la equivalencia entre el CB y un PID lineal a tramos.

El rango de variación de cada parámetro del PID no lineal es:

$$\begin{aligned} 3GE.GU/2 &\geq K_i \geq GE.GU/2 \\ GR.GU &\geq K_p \geq -GR.GU/2 \\ GA.GU &\geq K_d \geq -GA.GU/2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

El rango de variación de las ganancias del CB es:

$$\begin{aligned} 2K_i/3 &\leq GE.GU \leq 2K_i \\ 0 &\leq GR.GU \leq 2K_p \\ 0 &\leq GA.GU \leq 2K_d \end{aligned} \quad (7.6)$$



Además, de hecho, al observar la respuesta del sistema, la relación entre las variables de entrada verifica casi siempre las condiciones de la última zona de la tabla, que da unos valores para las ganancias:

$$GR = 2Kp/GU \quad GE = Ki/GU \quad GA = 2Kd/GU \quad (7.7)$$

Se va a comprobar en el apartado 7.3 que, incluso para el caso de utilizar más etiquetas, dan una respuesta buena y son válidos como parámetros iniciales.

#### *Método de desborrosificación no lineal*

Analizando la Tabla 7.4, se delimitan doce tramos de control. En el estado estacionario, estas zonas se reducen a siete, como en el caso anterior, con el que guarda una clara similitud (como se puede observar); en este caso, los parámetros en cada zona se hallan modificados por un factor  $n$  constante ( $n = 4$ ). En la Tabla 7.5 se muestra la equivalencia entre el CB y un PID según la relación entre las variables de entrada y salida del controlador.

El rango de variación de cada parámetro del PID no lineal es:

$$\begin{aligned} 3GE.GU/8 &\geq Ki \geq GE.GU/8 \\ GR.GU/8 &\geq Kp \geq 0 \\ GA.GU/8 &\geq Kd \geq 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

El rango de variación de las ganancias del CB es:

$$\begin{aligned} 8Ki/3 &\leq GE.GU \leq 8Ki \\ 0 &\leq GR.GU \leq 8Kp \\ 0 &\leq GA.GU \leq 8Kd \end{aligned} \quad (7.9)$$

Por lo tanto, aplicando un razonamiento similar al anterior, una buena aproximación de los parámetros iniciales para el controlador borroso es asignarlos a un valor medio entre las zonas en las que se encuentra habitualmente la respuesta:

$$GR = 4Kp/GU \quad GE = 5.3Ki/GU \quad GA = 8Kd/GU \quad (7.10)$$

$\Delta u(t) = 0.5[GE.e(t) + GR.ce(t)]$	$\Delta u(t) = 0.5[GE.e(t) + GA.ac(t)]$	$\Delta u(t) = 0.5[3GE.e(t) - GR.ce(t)]$	$\Delta u(t) = 0.5[3GE.e(t) - GA.ac(t)]$
$GE.le(t) \leq GA.lac(t) \leq GR.lce(t)$ $sg(ce) = sg(ac)$	$GE.le(t) \leq GR.lce(t) \leq GA.lac(t)$ $sg(ce) = sg(ac)$	$GA.lac(t) \leq GR.lce(t) \leq GE.le(t)$ $sg(e) = sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq GA.lac(t) \leq GE.le(t)$ $sg(e) = sg(ac)$
$GA.lac(t) \leq GE.le(t) \leq GR.lce(t)$ $sg(e) = sg(ac)$	$GR.lce(t) \leq GE.le(t) \leq GA.lac(t)$ $sg(e) = sg(ac)$		
$\Delta u(t) = 0.5[3GE.e(t) + 2GR.ce(t) + GA.ac(t)]$	$\Delta u(t) = 0.5[3GE.e(t) + GR.ce(t) + 2GA.ac(t)]$	$\Delta u(t) = 0.5[2GE.e(t) + GR.ce(t) + GA.ac(t)]$	
$GA.lac(t) \leq GR.lce(t) \leq GE.le(t)$ $sg(e) \neq sg(ce)$	$GR.lce(t) \leq GA.lac(t) \leq GE.le(t)$ $sg(e) \neq sg(ac)$	$GA.lac(t) \leq GE.le(t) \leq GR.lce(t)$ $sg(e) \neq sg(ce)$  $GR.lce(t) \leq GE.le(t) \leq GA.lac(t)$ $sg(e) \neq sg(ac)$  $GE.le(t) \leq GR.lce(t) \leq GA.lac(t)$ $sg(ce) \neq sg(ac)$  $GE.le(t) \leq GA.lac(t) \leq GR.lce(t)$ $sg(ce) \neq sg(ac)$	

Tabla 7.2 - Función de control del controlador borroso PID por zonas (Método de desborrosificación lineal)

$\Delta u(t)$	$\frac{0.5Lu.[GE.e(t)+GR.ce(t)]}{4L-2GR. ce(t) -GA. ac(t) }$	$\frac{0.5Lu.[GE.e(t)+GR.ce(t)]}{4L-GE. e(t) -2GR. ce(t) }$	$\frac{0.5Lu.[GE.e(t)+GA.ac(t)]}{4L-GR. ce(t) -2GA. ac(t) }$	$\frac{0.5Lu.[GE.e(t)+GA.ac(t)]}{4L-GE. e(t) -2GA. ac(t) }$
	$GE. e(t)  \leq GA. ac(t)  \leq GR. ce(t) $ sg(ce) = sg(ac)	$GA. ac(t)  \leq GE. e(t)  \leq GR. ce(t) $ sg(e) = sg(ce)	$GE. e(t)  \leq GR. ce(t)  \leq GA. ac(t) $ sg(ce) = sg(ac)	$GR. ce(t)  \leq GE. e(t)  \leq GA. ac(t) $ sg(e) = sg(ac)
$\Delta u(t)$	$\frac{0.5Lu.[3GE.e(t)-GR.ce(t)]}{4L-2GE. e(t) -GR. ce(t) }$	$\frac{0.5Lu.[3GE.e(t)-GA.ac(t)]}{4L-2GE. e(t) -GA. ac(t) }$	$\frac{0.5Lu.[2GE.e(t)+GR.ce(t)+GA.ac(t)]}{4L-GR. ce(t) -2GA. ac(t) }$	$\frac{0.5Lu.[2GE.e(t)+GR.ce(t)+GA.ac(t)]}{4L-2GR. ce(t) -GA. ac(t) }$
	$GA. ac(t)  \leq GR. ce(t)  \leq GE. e(t) $ sg(e) = sg(ce)	$GR. ce(t)  \leq GA. ac(t)  \leq GE. e(t) $ sg(e) = sg(ac)	$GE. e(t)  \leq GR. ce(t)  \leq GA. ac(t) $ sg(ce) $\neq$ sg(ac)	$GE. e(t)  \leq GA. ac(t)  \leq GR. ce(t) $ sg(ce) $\neq$ sg(ac)
$\Delta u(t)$	$\frac{0.5Lu.[3GE.e(t)+2GR.ce(t)+GA.ac(t)]}{4L-2GE. e(t) -GR. ce(t) }$	$\frac{0.5Lu.[2GE.e(t)+GR.ce(t)+GA.ac(t)]}{4L-GE. e(t) -2GR. ce(t) }$	$\frac{0.5Lu.[3GE.e(t)+GR.ce(t)+2GA.ac(t)]}{4L-2GE. e(t) -GA. ac(t) }$	$\frac{0.5Lu.[2GE.e(t)+GR.ce(t)+GA.ac(t)]}{4L-GE. e(t) -2GA. ac(t) }$
	$GA. ac(t)  \leq GR. ce(t)  \leq GE. e(t) $ sg(e) $\neq$ sg(ce)	$GA. ac(t)  \leq GE. e(t)  \leq GR. ce(t) $ sg(e) $\neq$ sg(ce)	$GR. ce(t)  \leq GA. ac(t)  \leq GE. e(t) $ sg(e) $\neq$ sg(ac)	$GR. ce(t)  \leq GE. e(t)  \leq GA. ac(t) $ sg(e) $\neq$ sg(ac)

Tabla 7.4 - Función de control del controlador borroso PID por zonas (Método de desborrosificación no lineal)

<i>Parámetros del PID equivalente para cada zona</i>	<i>zona</i>	<i>Parámetros del CB para cada zona</i>
$K_i = GE.GU/2 \quad K_p = GR.GU/2 \quad K_d = 0$	z.1	$GE = 2K_i/GU \quad GR = 2K_p/GU \quad GA = 0$
$K_i = GE.GU/2 \quad K_p = 0 \quad K_d = GA.GU/2$	z.2	$GE = 2K_i/GU \quad GR = 0 \quad GA = 2K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/2 \quad K_p = -GR.GU/2 \quad K_d = 0$	z.3	$GE = 2K_i/3GU \quad GR = -2K_p/GU \quad GA = 0$
$K_i = 3GE.GU/2 \quad K_p = 0 \quad K_d = -GA.GU/2$	z.4	$GE = 2K_i/3GU \quad GR = 0 \quad GA = -2K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/2 \quad K_p = GR.GU \quad K_d = GA.GU/2$	z.5	$GE = 2K_i/3GU \quad GR = K_p/GU \quad GA = 2K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/2 \quad K_p = GR.GU/2 \quad K_d = GA.GU$	z.6	$GE = 2K_i/3GU \quad GR = 2K_p/GU \quad GA = K_d/GU$
$K_i = GE.GU \quad K_p = GR.GU/2 \quad K_d = GA.GU/2$	z.7	$GE = K_i/GU \quad GR = 2K_p/GU \quad GA = K_d/GU$

Tabla 7.3 - Parámetros de equivalencia entre el CB y el PID por zonas  
(Método de desborrosificación lineal)

<i>Parámetros del PID equivalente para cada zona</i>	<i>zona</i>	<i>Parámetros del CB para cada zona</i>
$K_i = GE.GU/8 \quad K_p = GR.GU/8 \quad K_d = 0$	z.1,2	$GE = 8K_i/GU \quad GR = 8K_p/GU \quad GA = 0$
$K_i = GE.GU/8 \quad K_p = 0 \quad K_d = GA.GU/8$	z.3,4	$GE = 8K_i/GU \quad GR = 0 \quad GA = 8K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/8 \quad K_p = -GR.GU/8 \quad K_d = 0$	z.5	$GE = 8K_i/3GU \quad GR = -8K_p/GU \quad GA = 0$
$K_i = 3GE.GU/8 \quad K_p = 0 \quad K_d = -GA.GU/8$	z.6	$GE = 8K_i/3GU \quad GR = 0 \quad GA = -8K_d/GU$
$K_i = GE.GU/4 \quad K_p = GR.GU/8 \quad K_d = GA.GU/8$	z.7,8, 10,12	$GE = 4K_i/GU \quad GR = 8K_p/GU \quad GA = 8K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/8 \quad K_p = GR.GU/4 \quad K_d = GA.GU/8$	z.9	$GE = 8K_i/3GU \quad GR = 4K_p/GU \quad GA = 8K_d/GU$
$K_i = 3GE.GU/8 \quad K_p = GR.GU/8 \quad K_d = GA.GU/4$	z.11	$GE = 8K_i/3GU \quad GR = 8K_p/GU \quad GA = 8K_d/GU$

Tabla 7.5 - Parámetros de equivalencia entre el CB y el PID por zonas  
(Método de desborrosificación no lineal)

### 7.2.1 Conclusiones sobre el controlador borroso PID

Este desarrollo está afectado por la configuración de las reglas de partida, ya que existen otros conjuntos de reglas similares al dado en (7.2) que también describen correctamente el comportamiento del CB, con una acción más suave o más fuerte de control.

Además, como se comprueba en las ecuaciones, *eliminar la acción derivativa en las ecuaciones de control (haciendo su coeficiente  $GA = 0$ ), no produce un resultado como el de un PI, ya que la relación entre las entradas y la salida es fuertemente no lineal*, a pesar de que la tabla de reglas del PID (Tabla 7.1) se reduce prácticamente a la del PI al eliminar la variable aceleración (Tabla 6.1). Este resultado se puede comprobar en la Figura 7.1, donde se compara la respuesta obtenida por un sistema controlado con un PI borroso y la resultante de un controlador borroso PID cuando sus tablas de reglas respectivas son similares excepto en el término de la aceleración, y donde la ganancia de la acción derivativa se ha anulado.

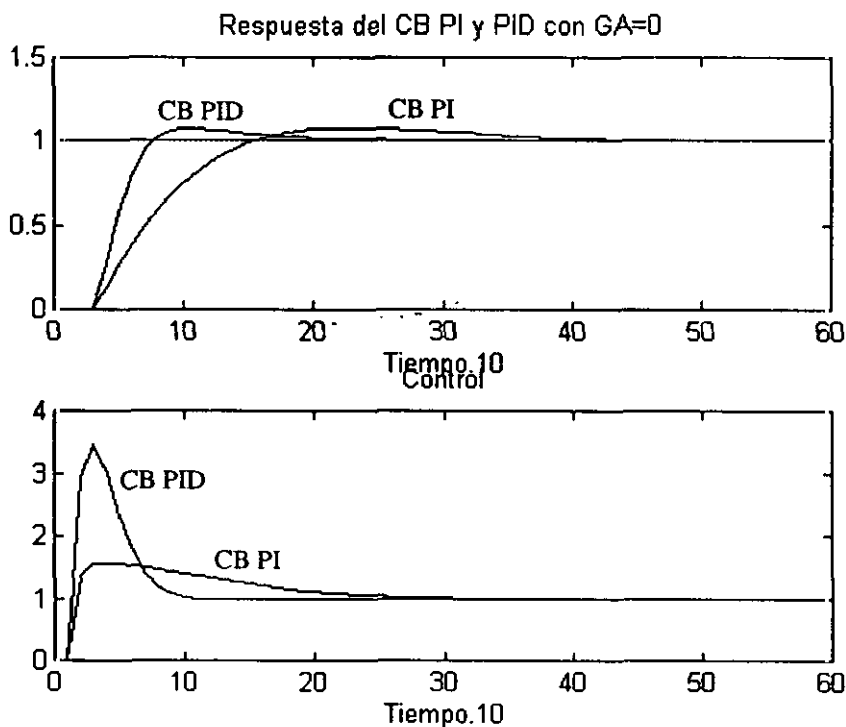


Figura 7.1 - Comparación de las respuesta de controladores borrosos PI y PID con  $GA = 0$

Por lo tanto, *el desarrollo analítico de un PID permite establecer, para los distintos métodos de desborrosificación empleados, unos parámetros iniciales de ajuste que, aunque se pueden mejorar cualitativamente, garantizan una respuesta dentro de unos rangos aceptables.*

### **7.3 SINTONÍA CUALITATIVA DE UN CONTROLADOR BORROSO PID**

Partiendo de la estructura del CB descrita en el apartado anterior, se va a analizar el comportamiento cualitativo del controlador borroso PID, viendo la influencia de la variación de las ganancias de cada una de las tres variables de entrada y de la salida sobre la dinámica del sistema. Este estudio empírico completa los resultados obtenidos anteriormente añadiendo la ganancia derivativa  $GA$ , y permite extraer un conjunto de conclusiones para que, junto con las propuestas de parámetros iniciales ya citadas, sirvan de guía en el ajuste del controlador.

Los sistemas borrosos sobre los que se ha estudiado la influencia de los factores de escala están compuestos por una planta, cuya función de transferencia se supone conocida o de la que se ha podido obtener un modelo, y un controlador borroso de tres entradas (error, cambio en el error y aceleración del error) y una salida (incremento de la acción de control). Los modelos utilizados se han procurado generalizar a las dinámicas más habituales (función de transferencia racional, que tiene esencialmente polos reales y estables, incorporando retardos y en algún caso un integrador). Se ha tomado como referencia  $r$  una función escalón, de valor 1.

El regulador se ha generalizado, aumentando el número de términos primarios para las variables, tanto de entrada (3 etiquetas) como de salida (7 etiquetas). Aunque esto hace bastante complicado un tratamiento analítico, se puede estudiar su comportamiento cualitativo con vistas a mejorar el control cuando la aplicación requiera un controlador más complejo. Se comprueba así también la validez de los parámetros iniciales para casos no contemplados en el estudio matemático.

Los conjuntos borrosos primarios definidos para las variables de entrada son Positivo (P), Cero (Z) y Negativo (N), y para la variable de salida: PG, PM, PP, Z, NP, NM, NG donde P, N y Z tienen los mismos significados y G, M y P son los calificativos de Grande, Mediano y Pequeño. La caracterización de las funciones de pertenencia se ha

hecho con funciones del tipo triangular y trapezoidal en sus extremos (Figura 7.2), definidas sobre sus universos correspondientes, que verifican la propiedad de completitud en grado 0.5.

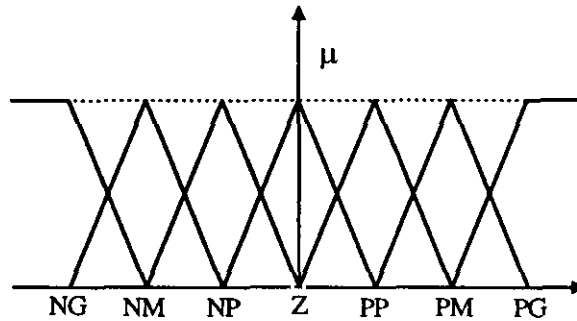


Figura 7.2 - Conjunto de términos primarios para la salida

La base de reglas consta de 27 reglas, de tres antecedentes y un consecuente, que describen el comportamiento del controlador. Por simplicidad se han condensado en la Tabla 7.6.

$GE.e(t)$		P			Z			N		
$GA.ac(t)$		N	Z	P	N	Z	P	N	Z	P
$GR.ce(t)$	P	PM	PG	PG	Z	PP	PM	NM	NP	Z
	Z	PP	PM	PG	NP	Z	PP	NG	NM	NP
	N	Z	PP	PM	NM	NP	Z	NG	NG	NM

Tabla 7.6 - Reglas del controlador borroso PID

Como ha aumentado el número de reglas, al ser mayor el número de etiquetas para cada variable (Tabla 4.1), la diferencia según la interpretación que se dé a las conectivas se hace más patente, ya que son varias las reglas que generan la misma salida. Esta diferencia se acentúa tanto con el método de desborrosificación lineal como con el no lineal.

En los resultados que se exponen a continuación, se ha optado por aplicar la función *or* tal como es interpretada por la lógica de Lukasiewicz.

### Índices de funcionamiento

El ajuste de los parámetros del controlador borroso se hará inspeccionando la respuesta del sistema en el dominio temporal. Por eso, además de hacer un análisis cualitativo de los resultados, se evalúan los siguientes índices de funcionamiento, que se vienen utilizando para estudios similares [Ped 93]:

$$I_1 = \int_0^t e(t)^2 \cdot dt \quad (7.11a)$$

$$I_2 = \frac{y_{max} - r}{r} \quad (7.11b)$$

$$I_3 = \text{mín } t / y(t) = 90\%r \quad (7.11c)$$

$$I_4 = \text{mín } t / y(t) \in [95\%r, 105\%r] \quad (7.11d)$$

donde  $I_1$  es el error cuadrático,  $I_2$  da una media normalizada de la sobrelongación,  $I_3$  es el tiempo de subida o de respuesta, e  $I_4$  es el tiempo de asentamiento de la respuesta dentro de una banda del 5% en torno a la señal de referencia. El error  $e(t)$  se ha definido como la diferencia entre la referencia y la salida del sistema (5.1).

#### 7.3.1 El problema de los parámetros iniciales

Para realizar un estudio de la variación de la respuesta con los factores de escala del CB es necesaria una fase previa en la que se establecen unos parámetros iniciales, para luego variarlos y observar el comportamiento del sistema.

$$y(t) = F(GE, GR, GA, GU, e(t), u(t)) \quad (7.12)$$

Esta elección se viene haciendo habitualmente por el método de prueba y error, como se referencia en algunos de los trabajos realizados en este sentido para el controlador borroso PI ó PD, o no se explicita su obtención. Esto dificulta enormemente la generalización de los resultados y sobre todo aumenta notablemente el tiempo de diseño.



Por lo tanto, partir de unos valores para esas ganancias calculados mediante un procedimiento sistemático facilita cualquier estudio sobre el comportamiento del CB, aunque quizás esos parámetros no sean los óptimos.

En el siguiente estudio, se han elegido como parámetros iniciales para cada proceso los correspondientes a (7.7):

$$GR = 2Kp/GU \quad GE = Ki/GU \quad GA = 2Kd/GU$$

para el método de desborrosificación lineal, y para el no lineal (7.10):

$$GR = 4Kp/GU \quad GE = 5.3Ki/GU \quad GA = 8Kd/GU$$

Aunque es una aproximación de los resultados obtenidos para un controlador borroso PID más sencillo, se van a demostrar válidos para distintos procesos.

### 7.3.1.1 Evaluación de los parámetros iniciales

Sea un sistema de 4º orden con una respuesta monótona creciente, que refleja el comportamiento de la mayoría de los sistemas industriales, del que se estima un modelo por alguno de los métodos referenciados en la literatura de control [Mor 90].

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad (7.13)$$

El modelo estimado es de la forma:

$$Gm(s) = \frac{K.e^{-To.s}}{1+Tp.s} \quad (7.14)$$

$$\text{con } K=1; Tp = 2.55; To = 1.85, \text{ para } T = 0.1 \text{ seg.} \quad (7.15)$$

Mediante cualquier técnica clásica de sintonía, se calculan los parámetros del PID ( $Kp$ ,  $Ti$ ,  $Td$ ) adecuados para controlar ese proceso con ciertas especificaciones; en este caso, con el método de Ziegler-Nichols [Zie 42] se han obtenido:

$$K_p = 1.6541; T_i = 3.7; T_d = 0.925 \quad (7.16)$$

Con estos parámetros, se recalculan los parámetros de sintonía del controlador borroso PID (7.7) con los que se va a trabajar:

$$GE = 0.0447; GR = 0.3308; GA = 0.3060; GU = 1 \quad (7.17)$$

La respuesta inicial del sistema que se obtiene con estos valores es la representada en la Figura 7.3, junto con la del PID correspondiente:

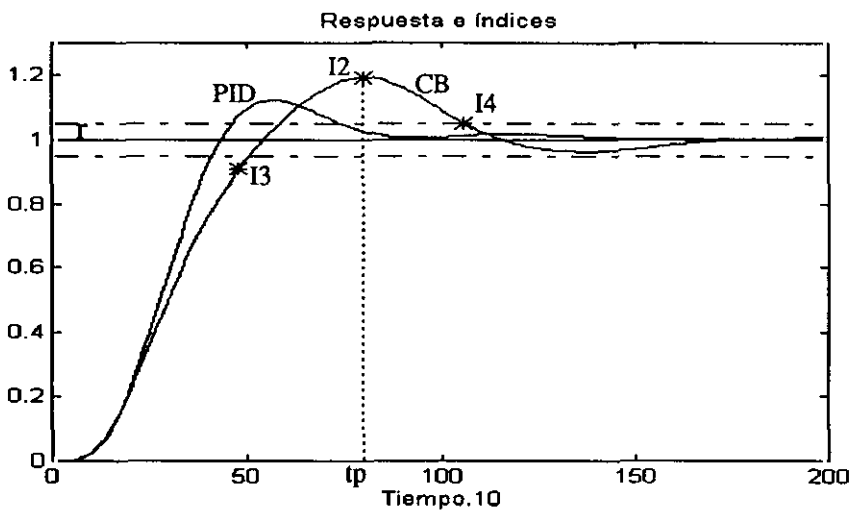


Figura 7.3 - Respuesta de un sistema de cuarto orden con un controlador borroso PID y un PID

Las características de la respuesta, evaluando los índices (7.11), son:

$$I_1 = 23.1875$$

$$I_2 = 0.1916 \text{ (} t_p = 8 \text{ seg.)}$$

$$I_3 = 4.8 \text{ seg.}$$

$$I_4 = 10.6 \text{ seg.}$$

Se denota  $t_p$  (tiempo de pico) al instante en el que la respuesta alcanza su máximo valor.

Se han comparado también los valores anteriores con los calculados al aplicar un controlador PID clásico y un controlador borroso PID con método de desborrosificación no lineal (7.10). En este último caso, la respuesta es claramente más oscilatoria y alarga por ello el transitorio.

Controlador	PID	CB con método de desborrosificación no lineal
Parámetros	$Kp = 1.6541$ $Ti = 3.7$ $Td = 0.925$	$GE = 0.237$ $GR = 0.661$ $GA = 0.612$
I1	22.0533	20.9341
I2	0.1227 (tp = 5.7)	0.4434 (tp = 4.4)
I3 (seg.)	4	2.9
I4 (seg.)	7.4	-

Para verificar la bondad de las fórmulas de los parámetros iniciales, se han obtenido los valores de los índices para distintos sistemas, algunos de los cuales se muestran como ejemplos en la Tabla 7.7. Aunque las ganancias halladas dependen del modelo estimado, lo que se busca no son unos valores precisos, sino unos parámetros a partir de los cuales se puedan conseguir las especificaciones buscadas en pocos pasos mediante una variación cualitativa.

Sistema	$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$	$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$G(s) = \frac{e^{-0.4s}}{s+1}$
Parámetros	$GE = 0.252$ $GR = 0.0875$ $GA = 0.42$	$GE = 0.3723$ $GR = 0.6$ $GA = 0.131$	$GE = 0.3720$ $GR = 0.5454$ $GA = 0.10$
I1	14.1656	5.9647	12.255
I2	0.2466 (tp = 4.9)	0.3840 (tp = 2)	1.5484 (tp = 0.9)
I3 (seg.)	3	1.2	0.6
I4 (seg.)	9.7	5	4.8

Tabla 7.7 - Parámetros de sintonía iniciales e índices obtenidos para distintos sistemas

A partir de esos valores iniciales, que dan una respuesta adecuada a las especificaciones de partida —como se puede concluir de la evaluación de los índices— se modifican uno a uno los distintos factores de escala del CB para ver la variación de la respuesta ante esos cambios.

Para el rango de variación de los factores de escala, hay que tener en cuenta los valores máximos estimados para las variables, que deben verificar la relación  $GX.lx(t) \leq L$ , para que no tomen valores fuera de los universos de discurso.

### 7.3.1.2 Influencia del factor de escala GE

El valor de partida de la ganancia del error es  $GE = 0.0447$ ; manteniendo fijos los demás parámetros del CB (7.17), se varía este parámetro. Se muestran a continuación los índices de funcionamiento en función de este factor de escala (Figuras 7.4).

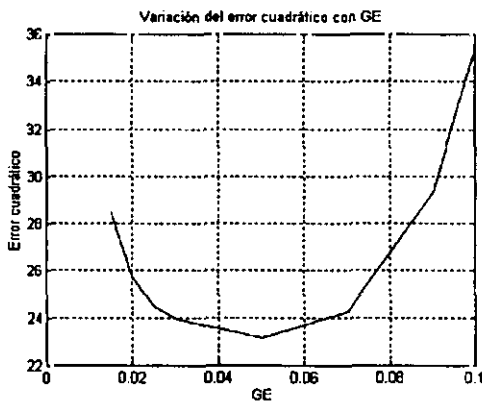


Figura 7.4a - Variación del error cuadrático

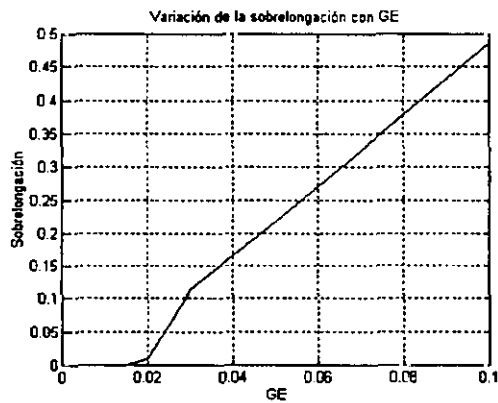


Figura 7.4b - Variación de la sobrelongación

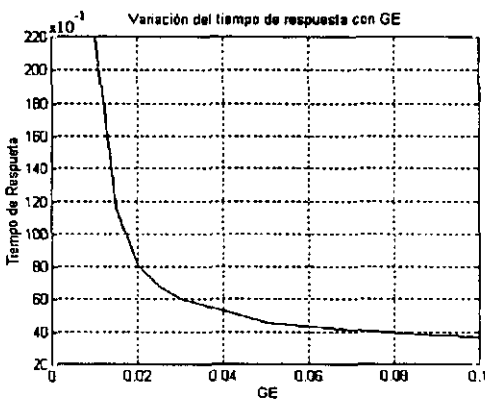


Figura 7.4c - Variación del tiempo de subida

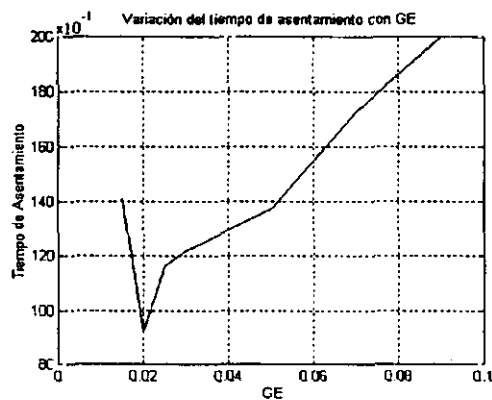


Figura 7.4d - Variación del tiempo de asentamiento

Los resultados presentados muestran que cuanto menor es el valor de  $GE$ , más lenta se hace la respuesta.

Un aumento de esta ganancia del error mejora el transitorio, ya que disminuye el tiempo de subida; aunque va aumentando el tiempo de asentamiento, en todos los casos alcanza el estacionario.

Para valores pequeños de este parámetro, la respuesta del sistema en lazo cerrado está sobreamortiguada, hasta que se empieza a detectar una ligera sobreelongación para valores de  $GE$  mayores de 0.02, y llega a hacerse oscilatoria para valores superiores a 0.12.

En torno a ese punto alcanza un comportamiento cercano al óptimo en cuanto que, además de no producir sobreelongación, su tiempo de asentamiento es mínimo y el tiempo de respuesta es bastante bajo, y deja de disminuir tan rápidamente a partir de él. Por lo tanto, el valor inicial estimado, al no alejarse de esa zona donde el comportamiento es óptimo, produce una respuesta aceptable.

En las Figuras 7.5a y 7.5b se observan estos resultados; la gráfica del control produce una acción acorde con las conclusiones anteriores. Se han tomado los siguientes valores de  $GE$ :

$$GE = 0.010, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09, 0.10, 0.12$$

La variación de este parámetro produce unos efectos sobre la respuesta similares a los que producía la modificación de esta ganancia en el caso de un regulador borroso PI (Figura 6.12).

### **7.3.1.3 Influencia del factor de escala $GR$**

El valor dado por la relación (7.17) para  $GR$  es de 0.0308. Manteniendo constantes los demás parámetros del CB, se ha variado éste en un intervalo de 0 a 1. En las Figuras 7.6 se muestra el comportamiento del sistema para distintos valores de esta ganancia.

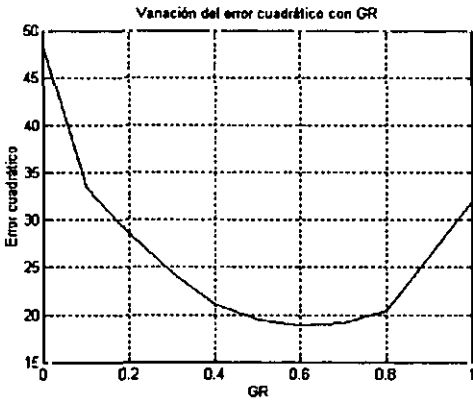


Figura 7.6a - Variación del error cuadrático

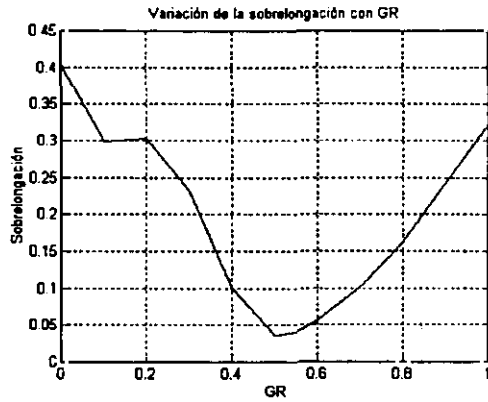


Figura 7.6b - Variación de la sobreelongación

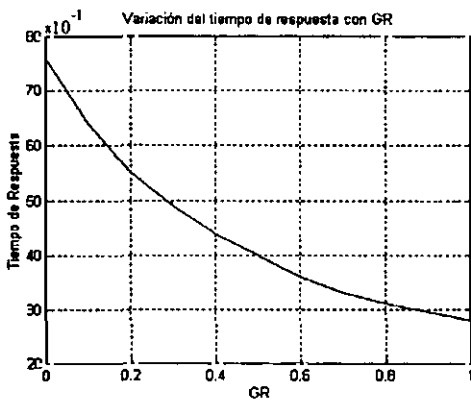


Figura 7.6c - Variación del tiempo de subida

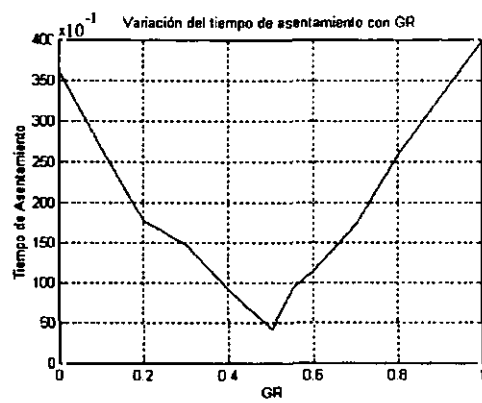


Figura 7.6d - Variación del tiempo de asentamiento

Un intervalo óptimo de valores para este factor de escala está comprendido entre los valores de 0.4 y 0.6, donde presenta un mínimo tanto para el tiempo de asentamiento como para la sobreelongación. En ese punto, también el tiempo de respuesta es aceptable, y en torno a él el error cuadrático alcanza sus valores más bajos.

Valores cercanos al cero dan una gran sobreelongación y un tiempo de subida alto, que se va reduciendo al aumentarlo, ya que es una función decreciente con  $GR$ . A partir de 0.5 vuelve a aumentar el tiempo de asentamiento debido a que se producen oscilaciones en torno al valor de referencia, lo que también se refleja en el error cuadrático medio. En general, el tiempo de subida y el tiempo de pico varían lentamente.

El valor seleccionado inicialmente está cerca del mínimo, luego se confirma que es un valor adecuado. El comportamiento es similar al reflejado por un CB tipo PI al variar

esta ganancia (Figura 6.13), como se puede observar en las Figuras 7.7. Se han tomado los siguientes valores de  $GR$ :

$$GR = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1$$

La respuesta se ha estudiado en dos intervalos para poder seguir con más detalle su variación, ya que presenta comportamientos dispares, como se ha mostrado con la evaluación de los índices; en la gráfica de control se han unificado todos los datos.

### 7.3.1.4 Influencia del factor de escala de la salida $GU$

La influencia de este factor de escala de la salida es más compleja. Para delimitar su rango de variación se establece un intervalo de valores posibles para el control. Como el controlador es del tipo incremental, no se ha acotado esta variación ni se ha penalizado.

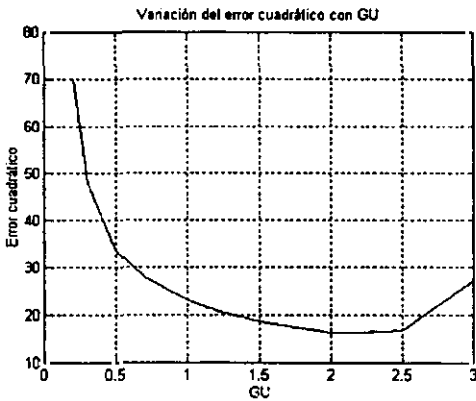


Figura 7.8a - Variación del error cuadrático

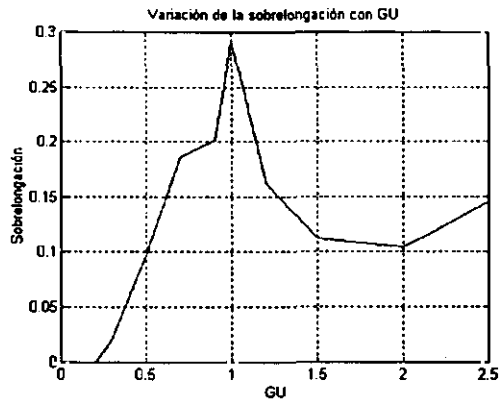


Figura 7.8b - Variación de la sobrelongación

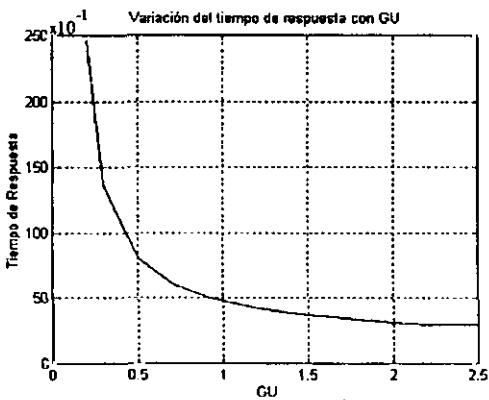


Figura 7.8c - Variación del tiempo de subida

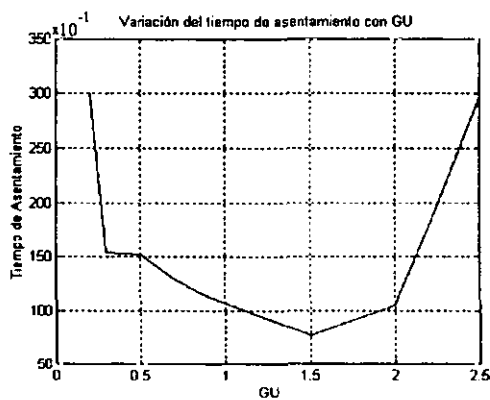


Figura 7.8d - Variación del tiempo de asentamiento

Se parte de un valor inicial normal de 1, para estudiar la variación de la respuesta del sistema.

En general se observa que el tiempo de respuesta decrece linealmente con  $GU$ ; por eso actúa como una ganancia a la salida, ya que su aumento hace más rápido al sistema, aunque produce sobrelongación. También disminuye el error cuadrático hasta que para valores altos la respuesta se hace oscilatoria. Tiene el peligro de inestabilizar el sistema, destruyendo la convergencia.

El tiempo de asentamiento disminuye en torno a valores cercanos al 1.5, donde la sobrelongación es además pequeña, por lo que son valores buenos. Aunque la sobrelongación tiene una variación irregular, no es muy grande en ningún caso, y alcanza el estacionario, excepto para aquellos que lo hacen inestable.

Esta variación es similar a la que se obtiene para el caso del controlador borroso PI (Figura 6.14).

Las Figuras 7.9 muestran la variación de la respuesta del sistema ante variaciones de este parámetros. El comportamiento para valores de esta ganancia inferiores a la unidad es bastante predecible; sin embargo, para valores mayores presenta un funcionamiento más complejo. Por eso las gráficas se han estudiado en dos intervalos, contemplando los siguientes valores de  $GU$ :

$$GU = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2, 2.2, 2.5, 3$$

### 7.3.2 El término derivativo

El término derivativo se utiliza muy poco, también en el control clásico debido a que aumenta la sensibilidad al ruido y en muchas ocasiones es suficiente un PI. Aunque viene incorporado en numerosas estructuras, los operadores suelen inhibir sus funciones. Sin embargo, puede ayudar a mejorar la estabilidad de un sistema de control, y permite ampliar el rango de variación de los otros parámetros de sintonía del controlador, lo que da una mayor flexibilidad a la hora de la consecución de las especificaciones.



Por eso se ha considerado conveniente no sólo incluirlo en el estudio analítico de los controladores borrosos, sino también estudiar los efectos cualitativos de la variación de su ganancia correspondiente, para aportar esa facilidad cuando sea necesaria.

El valor inicial calculado para  $GA$  es de 0.0306 (7.17) que, como se va a comprobar, es un valor muy cercano al óptimo según las gráficas que muestran el comportamiento del sistema al variar este parámetro en un intervalo entre 0 y 3.

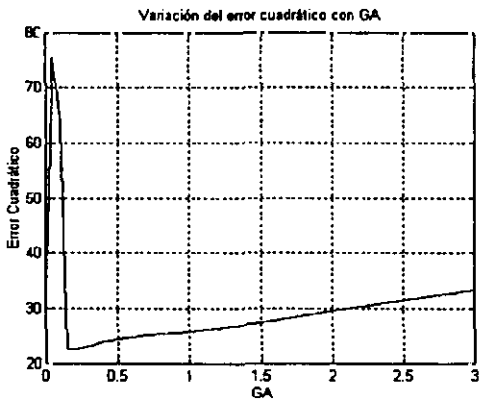


Figura 7.10a - Variación del error cuadrático

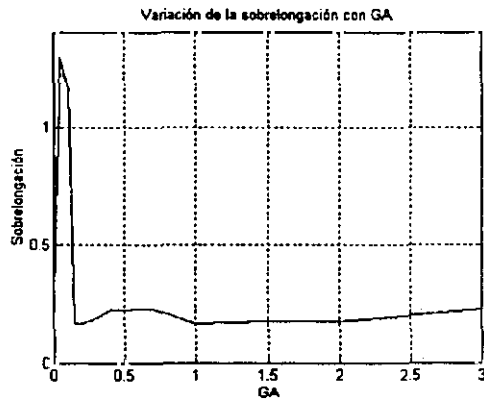


Figura 7.10b - Variación de la sobrelongación

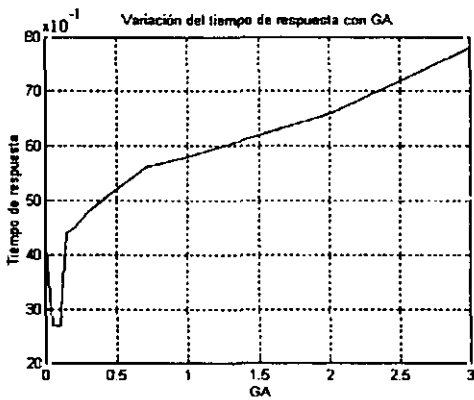


Figura 7.10c - Variación del tiempo de subida

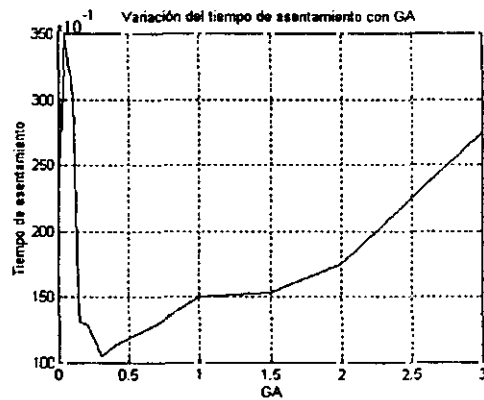


Figura 7.10d - Variación del tiempo de asentamiento

Los índices de la respuesta del sistema muestran un reacción más compleja. En general, todos ellos son funciones crecientes de  $GA$ , pero esto ocurre a partir de un valor en torno al punto 0.2. Cabe resaltar la poca dependencia de la sobrelongación y del error cuadrático con respecto a este factor frente a la gran variación que sufre el tiempo de respuesta. La respuesta apenas es oscilatoria, excepto para valores muy bajos de esta ganancia o superiores a 2, con lo que amplía el margen de estabilidad del sistema.

Por lo tanto, valores bajos de  $GA$  (pero no tan bajos que anulen esta acción), dan una respuesta dentro de las especificaciones más usuales, pero al ir aumentándolo ésta se hace mucho más lenta.

En las Figuras 7.11 se muestra la respuesta del sistema para distintos valores de esta ganancia y la variación del control. Se han representado los valores:

$$GA = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.7, 1, 2, 3$$

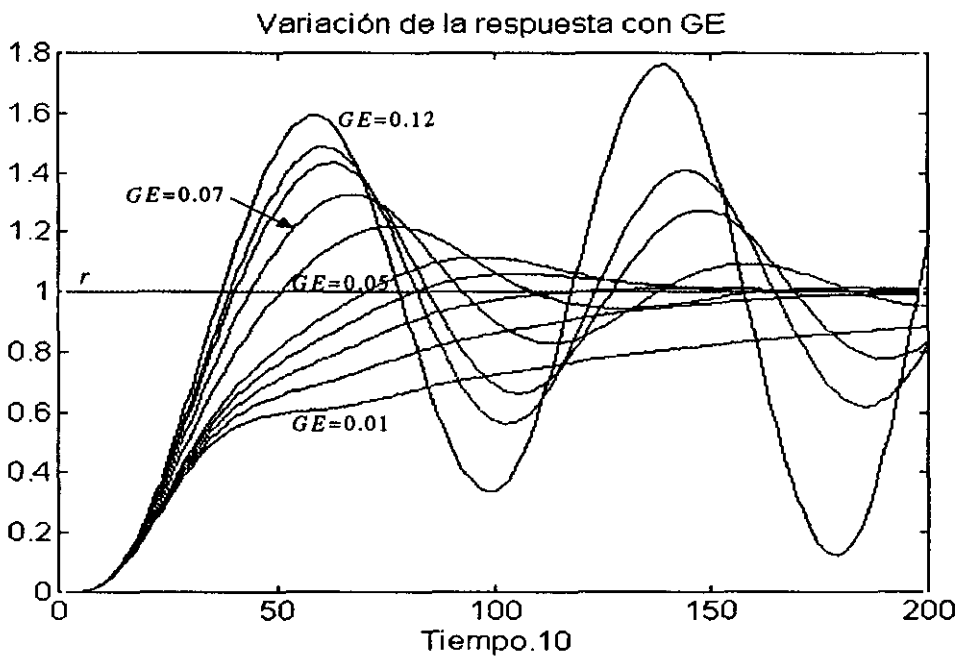


Figura 7.5a - Variación de la respuesta con el factor de escala del error

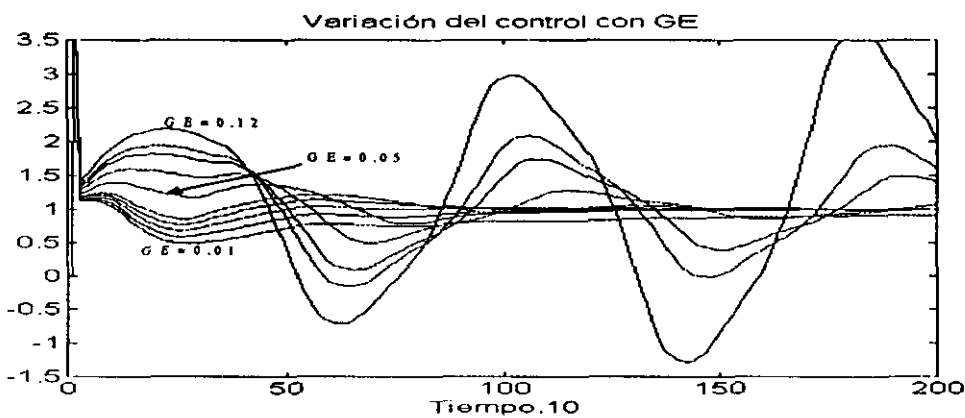


Figura 7.5b - Variación del control con el factor de escala del error

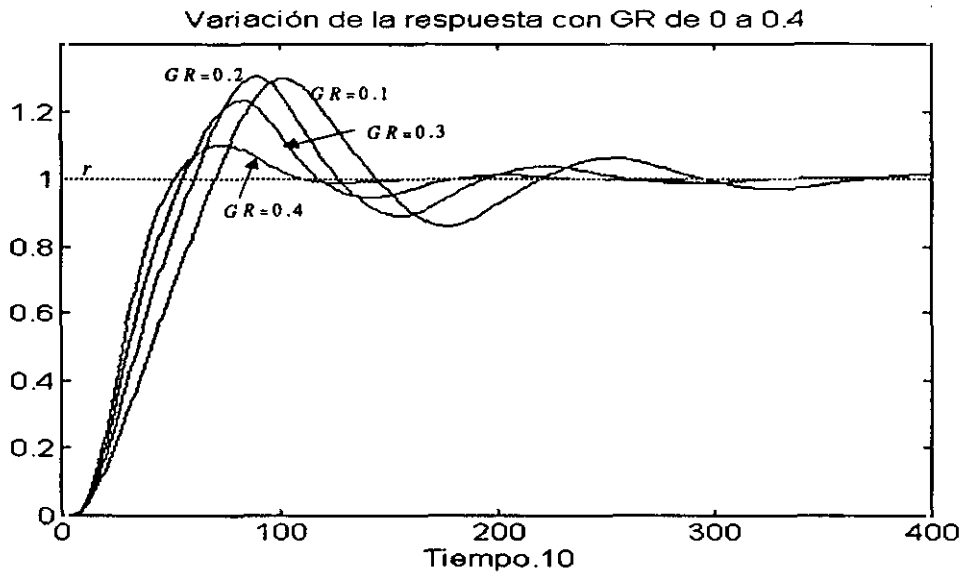


Figura 7.7a - Variación de la respuesta con el factor de escala del cambio en el error

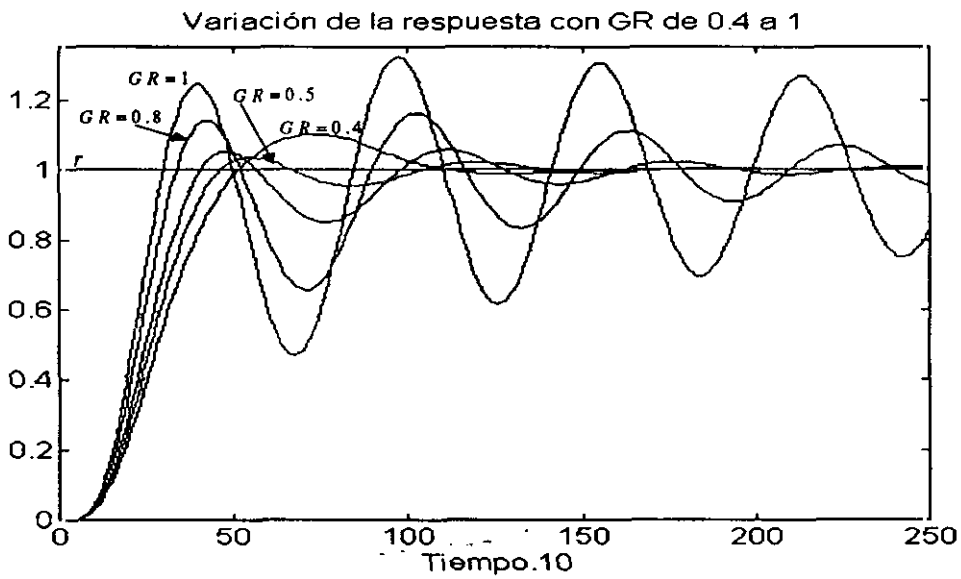


Figura 7.7a - Variación de la respuesta con el factor de escala del cambio en el error

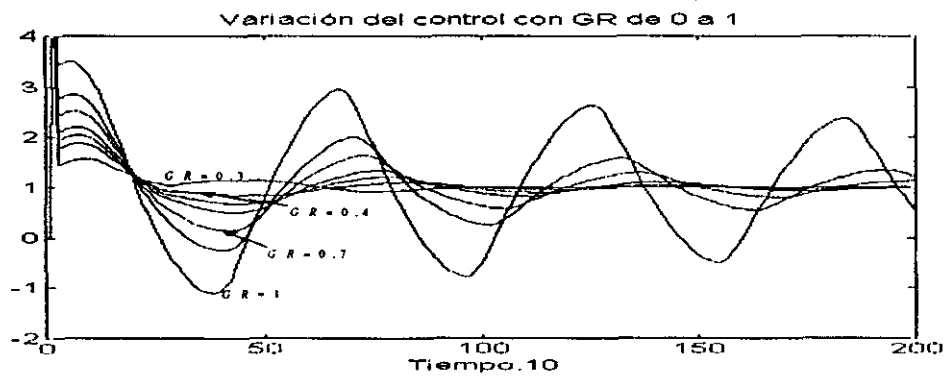
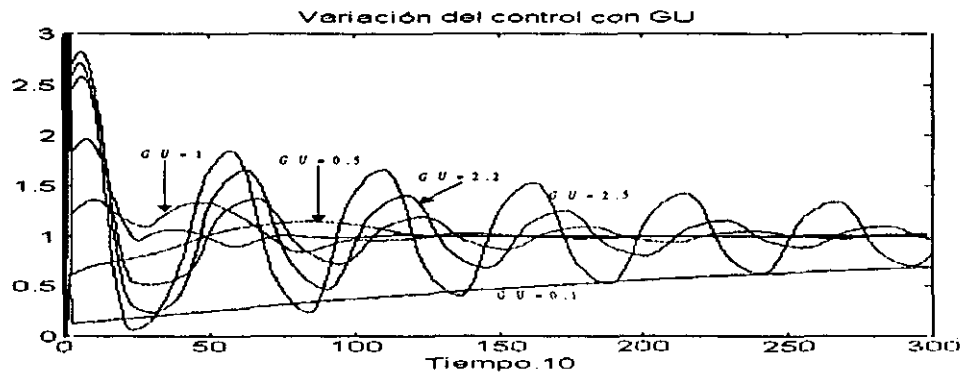
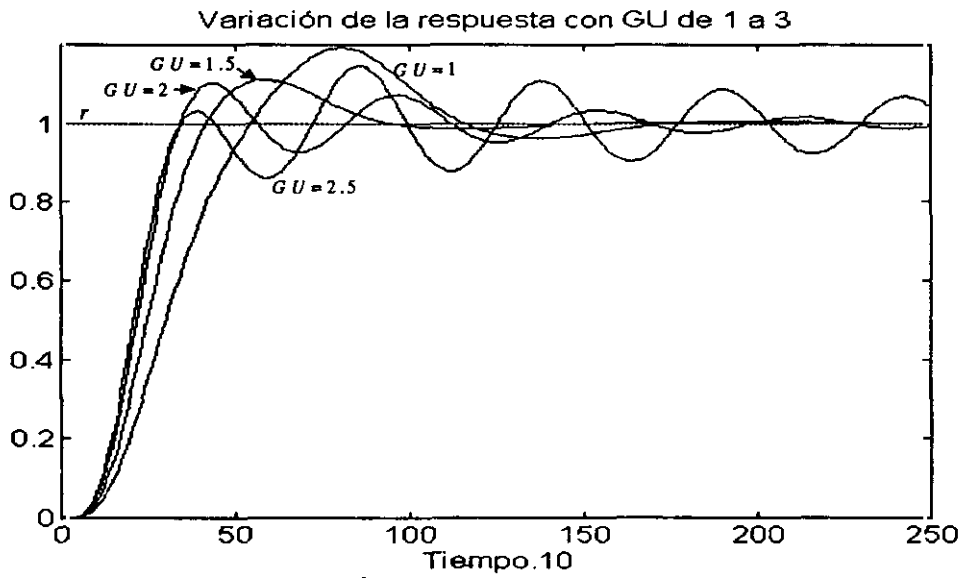
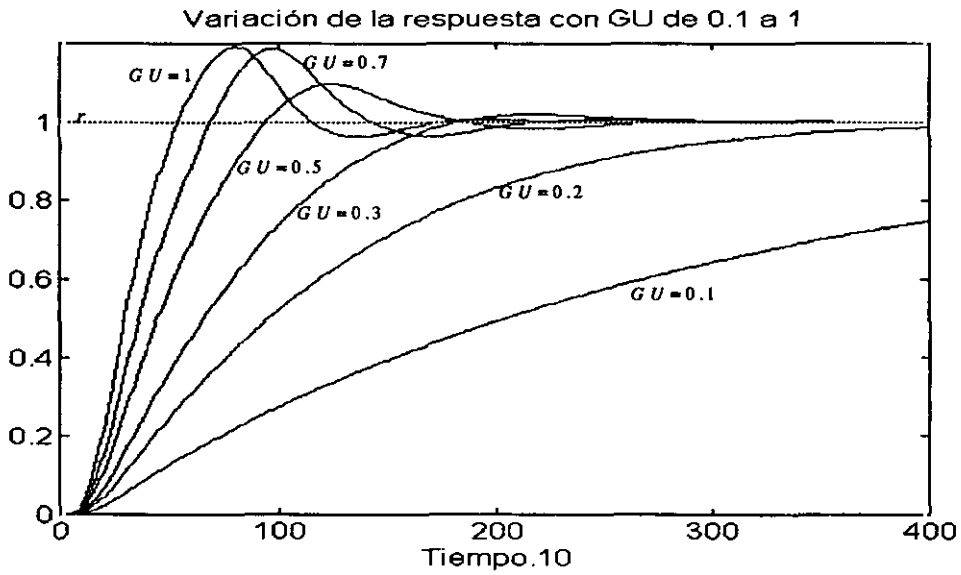


Figura 7.7b - Variación del control con el factor de escala del cambio en el error



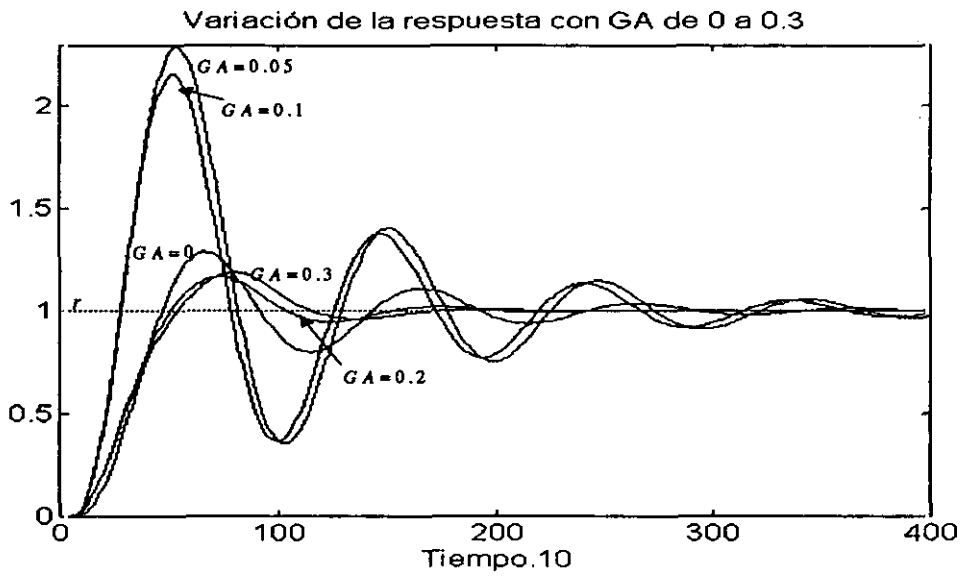


Figura 7.11a - Variación de la respuesta con el factor de escala de la aceleración del error

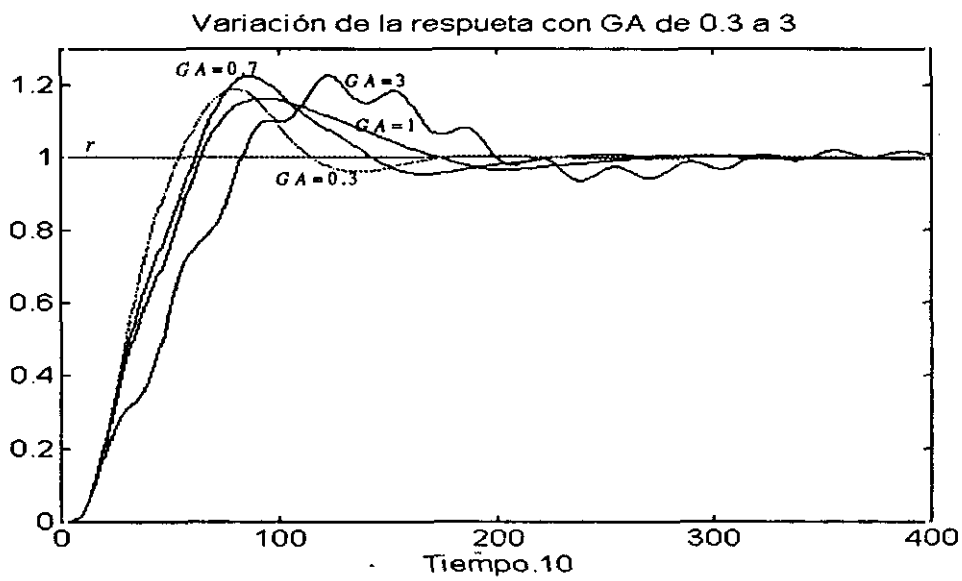


Figura 7.11a - Variación de la respuesta con el factor de escala de la aceleración del error

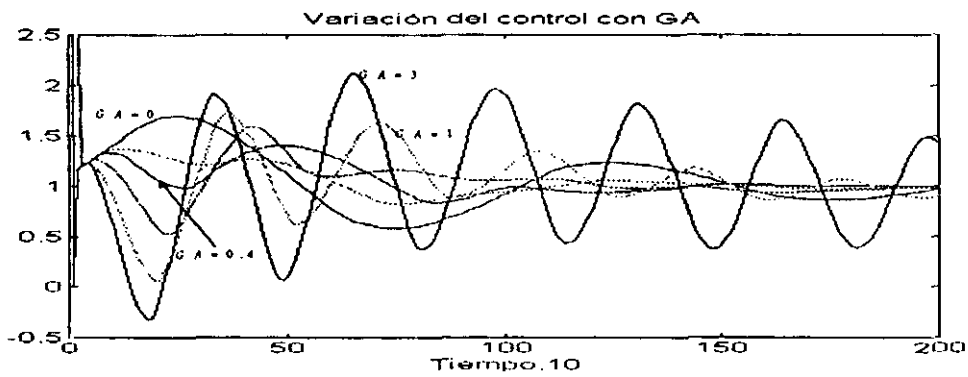


Figura 7.11b - Variación del control con el factor de escala de la aceleración del error

La no linealidad del CB se manifiesta todavía más claramente, ya que la variación de sus factores de escala no responde a un comportamiento similar al de la variación de los parámetros de un PID.

*Esta sintonía cualitativa, como se ha indicado al estudiar los métodos analíticos de ajuste, no sólo se puede aplicar en un primer paso para obtener unos parámetros adecuados, sino que se combina con las estrategias descritas anteriormente para mejorar los resultados, cuando éstas se hayan podido aplicar.*

*No conviene olvidar que, aunque en algunos se puede establecer una similitud con la variación de los parámetros de un regulador PID clásico, se está trabajando con un controlador no lineal. Por lo tanto, los cambios en los factores de escala afectan a la función de control, y pueden producir saturaciones, inestabilidades, etc. Sin embargo, permiten ampliar la región de control.*

#### **7.4 OTRAS CONFIGURACIONES DE CONTROL BORROSO**

En el capítulo 3 se han expuesto algunas configuraciones de controladores borrosos. Sin embargo, los controladores pueden además encontrarse en las aplicaciones formando ciertas estructuras que facilitan un modo de funcionamiento adecuado a los requerimientos del proceso.

Se van a comentar someramente alguna otra configuración usual en la industria, pero todavía poco estudiada, en la que la inclusión del control borroso puede suponer un avance.

##### **7.4.1 Controladores borrosos en cascada**

El control en cascada es un esquema de control usado frecuentemente en los procesos químicos. Está compuesto de múltiples lazos, como se muestra la Figura 7.12. Este sistema es muy efectivo cuando con un único controlador es difícil regular la salida ante perturbaciones en la carga que provienen de las variables secundarias.

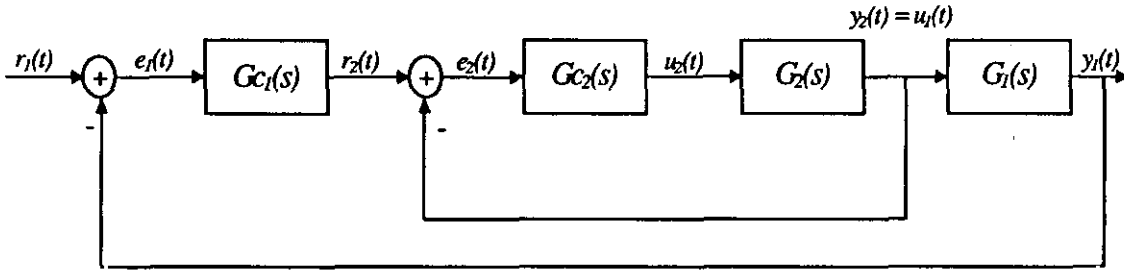


Figura 7.12 - Control en cascada

La sintonía de los controladores en cascada es en sí misma tediosa y lenta. Aunque se está empezando a utilizar la lógica borrosa para autosintonizar controladores en cascada, en esta sección simplemente se va a desarrollar esta estructura, mediante controladores borrosos y relés para sintonizarlos.

Por simplicidad, se van a aplicar relés ordinarios, sin histéresis; esto no supone una pérdida de generalidad aunque, como se ha visto, en la práctica se utilizan normalmente relés con histéresis. Estos relés se utilizan para sintonizar tanto el lazo primario como el secundario simultáneamente.

Para aplicar las fórmulas de Ziegler y Nichols de respuesta en frecuencia (Tabla 5.3) y sintonizar los controladores borrosos son únicamente necesarios dos parámetros. Para obtenerlos, se observa la oscilación que se produce en la salida de un sistema al introducir un relé en el lazo; tiene forma de ciclo límite, con un periodo que es el periodo crítico  $T_u$  y una amplitud  $a$  que permite calcular la ganancia crítica  $K_u = 4d/\pi a$ . La ganancia estática se calcula mediante un cambio en la carga o en la referencia, si se quieren aplicar las fórmulas refinadas de Ziegler-Nichols para mejorar la respuesta a cambios en la consigna o en la carga.

En este caso, tanto el lazo primario como el secundario se han realimentado con un relé (Figura 7.13). Se supone que las condiciones de la planta para que se produzca una oscilación en forma de ciclo límite se cumplen (Capítulo 5, apartado 5.6.1). La sintonía de los controladores borrosos en cascada se lleva a cabo primero en el lazo secundario, y luego en el primario. Si es necesario, se resintoniza el lazo secundario cuando el primario se cierra con los valores de sintonía obtenidos.

7.4.1.1 Autosintonía del lazo secundario

En el esquema de la Figura 7.13 se cierra el lazo primario en la posición de funcionamiento manual. La realimentación con el relé en torno al lazo secundario  $G_2(s)$  provoca una oscilación controlada en forma de ciclo límite, con una frecuencia de cruce denominada  $\omega u_2$ .

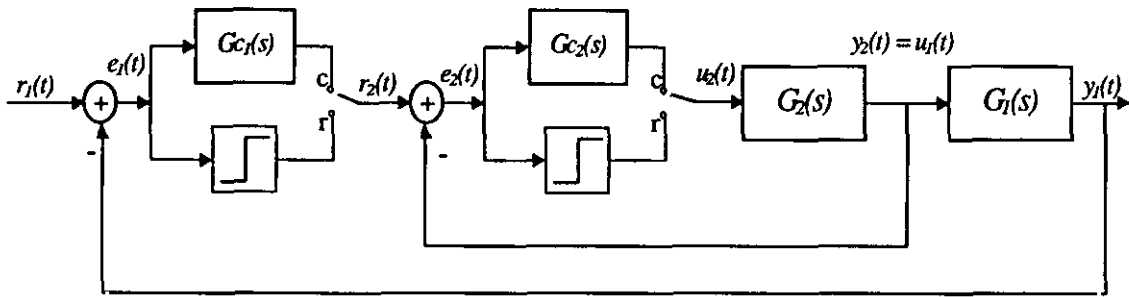


Figura 7.13 - Autosintonía de controladores en cascada utilizando relés

La función descriptiva del relé  $N_2(a)$  viene dada por  $4d_2/\pi.a_2$ , donde  $a_2$  es la amplitud de la oscilación a la salida del proceso secundario  $G_2(s)$  y  $d_2$  la amplitud del relé utilizado. Con este valor de la función descriptiva de la no linealidad se calcula la ganancia crítica  $Ku_2$  requerida para la sintonía. El periodo de la oscilación es el periodo crítico  $Tu_2$ . Para el control del lazo secundario, generalmente un regulador borroso P o un PI suelen ser suficientes, porque no se precisa un control exacto en esta parte del sistema.

En algunos casos es necesario volver a sintonizar el lazo secundario, una vez que se ha cerrado el lazo primario  $G_1(s)$  con un controlador  $Gc_1(s)$  ya sintonizado. Esto puede ocurrir cuando la dinámica del proceso secundario cambia después de haber calibrado su controlador borroso correspondiente. En otros casos, los controladores pueden mantener su sintonía durante la fase puesta en marcha del sistema, aunque luego se aconseja un ajuste más fino del regulador para proporcionar un control más preciso.

Para esta parte del sistema, si se denomina  $a_e$  la amplitud de la oscilación observada a la entrada del relé y  $d_2$  la amplitud del relé, la función descriptiva que relaciona su entrada  $e_2$  con su salida  $u_2$  a la frecuencia de oscilación  $\omega u_2$  viene dada por:

$$\frac{4d_2}{\pi.a_e} \approx \left| \frac{-1}{G_2(i\omega)(1 + Gc_1(i\omega))G_1(i\omega)} \right|_{\omega=\omega_{u_2}} \tag{7.18}$$



Formulando la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, de la que forman parte los dos controladores, tanto  $G_{c1}(s)$  como  $G_{c2}(s)$ , resulta:

$$H_1 = \frac{G_1(s)G_2(s)G_{c2}(s)G_{c1}(s)}{1 + G_{c1}(s)G_2(s)(1 + G_{c1}(s)G_1(s))} \quad (7.19)$$

De donde se puede deducir que la función descriptiva del relé es aproximadamente la magnitud de  $G_{c2}$  en la frecuencia de cruce, y por lo tanto es la ganancia crítica requerida para la sintonía. El periodo de la oscilación es el periodo crítico. Con estas cantidades, los parámetros de  $G_{c2}(s)$  se sintonizan usando las reglas de Ziegler-Nichols.

#### 7.4.1.2 Autosintonía del lazo primario

Una vez que el lazo secundario ha sido diseñado y calibrado, el lazo primario se realimenta con un relé. Se observan entonces oscilaciones en forma de ciclo límite a la salida, y de una forma similar al punto anterior, la planta opera ahora en su punto de fase crítica.

Si se denota  $a_1$  la amplitud de las oscilaciones observadas a la salida del proceso primario  $G_1(s)$ , y  $d_1$  la amplitud del relé de ese lazo, la función descriptiva del relé  $N_1(a)$  a la frecuencia de oscilación,  $\omega_{u1}$ , se puede escribir como:

$$\frac{4d_1}{\pi \cdot a_1} \approx \frac{1}{\left| \frac{G_2(i\omega)G_{c2}(i\omega)}{1 + G_2(i\omega)G_{c2}(i\omega)} G_1(i\omega) \right|_{\omega=\omega_{u1}}} \quad (7.20)$$

Reescribiendo la función de transferencia en lazo cerrado del sistema como:

$$H_1 = \frac{G_{c1}(s)G_1(s) \left( \frac{G_2(s)G_{c2}(s)}{1 + G_2(s)G_{c2}(s)} \right)}{1 + G_{c1}(s)G_1(s) \left( \frac{G_2(s)G_{c2}(s)}{1 + G_2(s)G_{c2}(s)} \right)} \quad (7.21)$$

se puede ver que la función descriptiva del relé dada es la ganancia crítica requerida para sintonizar el controlador  $G_{c_I}(s)$ . El periodo crítico viene dado por el periodo del ciclo límite. Las fórmulas de Ziegler-Nichols pueden utilizarse inicialmente para sintonizar  $G_{c_I}(s)$ . Con ambos lazos cerrados, un cambio en la referencia permite determinar la ganancia en el estacionario del sistema y se puede mejorar el funcionamiento del sistema con las fórmulas refinadas de Ziegler-Nichols.

Para determinar cuándo es necesario volver a sintonizar el lazo secundario se puede hacer un estudio de la sensibilidad de sus parámetros críticos.

Cabe destacar que el método del relé proporciona los datos necesarios para sintonizar o resintonizar los controladores en cascada sin necesidad de colocar los lazos en sintonía manual.

## 7.5 CONCLUSIONES

El estudio completo de los controladores borrosos debe incluir todos los términos que caracterizan a los reguladores convencionales. Por eso se ha considerado conveniente añadir el término derivativo a los desarrollos anteriores.

*Esto ha permitido poner claramente de manifiesto la no-linealidad del controlador borroso, así como ampliar el rango de variación de las otras variables de entrada mediante sus factores de escala y mejorar algunas propiedades del regulador.*

Por otro lado, su estudio cualitativo ha ayudado a concluir unas pautas para la sintonía de estos elementos de control, y a predecir en cierto modo los efectos de la variación de sus parámetros.

También se ha abordado el tema de los parámetros iniciales, para analizar la validez de los métodos propuestos, con resultados satisfactorios.

Por último, se ha contemplado un tipo de estructura específica donde resulta ventajosa la combinación de los controladores borrosos y el método de autosintonía del relé, expuesto anteriormente.

# CONCLUSIONES

A continuación se resumen las principales conclusiones y aportaciones de este trabajo.

- Se muestra la aplicabilidad de la Lógica Borrosa en situaciones de control donde no es suficiente un control clásico, o en las que se puede integrar con él para mejorar los requerimientos.
- Se ha hecho un estudio sistemático de los diversos elementos que configuran un controlador borroso, describiendo su forma y métodos de obtención, y analizando los efectos de las distintas especificaciones posibles para cada uno. Esto permite establecer una base de conocimiento para determinar la configuración más adecuada para una aplicación dada.
- Puesto que son muy variados los elementos en los que centrar el ajuste, los controladores borrosos presentan el problema de que no existen métodos generales de sintonía para sus parámetros, lo que ha dado lugar a distintas propuestas de sintonía. Se ha hecho una revisión exhaustiva de los métodos propuestos con este fin, analizando sus ventajas e inconvenientes, de modo que este estudio pueda servir de consulta y referencia para saber *a priori* las consecuencias de una determinada elección o para seleccionar el método de ajuste más apropiado para una configuración determinada.
- Se han revisado someramente las principales técnicas clásicas de sintonía para su aplicación al control borroso, ampliándose el Método del Relé propuesto por Åström al caso asimétrico, ya que su estructura permite la autosintonía de distintas configuraciones de control. Esto ha permitido también considerar otros aspectos que incluye el diseño de control, como la dinámica del proceso, perturbaciones en la carga, ruido, no linealidades, etc.

- El estudio analítico de los controladores borrosos ha permitido sistematizar su estudio y exponer de forma general y rigurosa el tema de la sintonía de sus parámetros.

Se ha partido de una configuración general, donde se han ido delimitando los diversos elementos de los controladores borrosos para equiparlos a los clásicos, con el fin de facilitar el punto de partida. Una vez obtenidas las distintas ecuaciones que definen la salida del sistema de control para distintos algoritmos de desborrosificación, se han estudiado en profundidad examinando sus propiedades para los casos particulares que se utilizan más comúnmente. Se han incluido las no linealidades debidas tanto al método de desborrosificación como al de borrosificación al incrementar la partición borrosa del espacio de entrada.

Se pueden justificar así, de forma analítica, algunos ajustes cualitativos propuestos en otros estudios teóricos. Se han podido extraer conclusiones de su comportamiento comparándolos con los controladores convencionales, lo que facilita la argumentación de la influencia de sus parámetros de sintonía sobre la respuesta del sistema. Estos resultados teóricos se han confirmado mediante ejemplos significativos.

- Se han introducido tres propuestas de métodos de sintonía, explicando su viabilidad y las ventajas e inconvenientes que se pueden seguir de su aplicación. Las características de cada método se deducen de los desarrollos correspondientes, y se han ilustrado mediante gráficas que resumen su funcionamiento.
- Se han aplicado también técnicas cualitativas a controladores borrosos generales no equiparables a los clásicos, en los que se ha incluido el término derivativo, estudiando la influencia de algunos de sus parámetros de sintonía sobre el control. Como conclusión de este estudio cualitativo se han obtenido unas pautas para la sintonía de estos elementos de control, y a predecir en cierto modo los efectos de la variación de sus parámetros.

Por otro lado, la inclusión del término derivativo ha permitido poner claramente de manifiesto la no linealidad del controlador borroso, así como ampliar el rango de variación de las otras variables de entrada mediante sus factores de escala y mejorar algunas propiedades del regulador.

- El obtener las fórmulas analíticas de sintonía para controladores borrosos tipo PI y PID ha hecho posible que se sugieran unos parámetros iniciales para controladores borrosos generales, evaluando su validez mediante índices, con resultados satisfactorios.

Sin embargo, quedan todavía algunos aspectos sin resolver de forma general en los temas tanto del diseño como de la sintonía de los controladores borrosos. Al revisar los diversos métodos de ajuste referenciados en la literatura sobre control, la primera conclusión que salta a la vista es la falta de un procedimiento sistemático de sintonía para este tipo de controladores; tarea que parece inabordable, ya que para cada aplicación se parte de una configuración seguramente distinta del regulador. Las técnicas propuestas son válidas en situaciones específicas, por lo que el problema de su resolución general sigue aún abierto.

Otros posibles objetivos de futuros desarrollos son el estudio de la aplicabilidad de este tipo de controladores de forma sistemática, así como la evaluación de sus márgenes de resolución y la obtención de unas relaciones más directas entre sus parámetros de sintonía y las especificaciones de la respuesta. Cabe también la posibilidad de examinar las distintas relaciones de reglas que describen los controladores borroso, para ver si es factible obtener de un controlador borroso PID uno tipo PI al eliminar su coeficiente derivativo, de forma análoga a los reguladores convencionales.

# APÉNDICES

# APÉNDICE A

## OPERADORES TRIANGULARES

Una clase de modelos para las conectivas lógicas unión e intersección son los *operadores triangulares*, denominados **t-normas** y **s-normas**.

**Conorma triangular (t-conorma o s-norma)**: se define como la clase de funciones de dos argumentos,  $f:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que verifican los siguientes axiomas:

- a.1* Satisface las condiciones en los límites:  $f(x,0) = x$ ,  $f(x,1) = 1$
- a.2* Conmutatividad:  $f(x,y) = f(y,x)$
- a.3* Es una función no decreciente en cada argumento: si  $x \leq x'$  y  $y \leq y'$ , entonces se verifica  $f(x,y) \leq f(x',y')$  —monotonicidad estricta—.
- a.4* Asociatividad:  $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$

Si además verifica:

- a.5*  $f(x,y)$  continua, la s-norma es *arquimediana estricta*.

Corresponde a las propiedades de la unión o disyuntivas (“or” lógica). Algunas funciones que son t-conormas o s-normas son:

$$\text{Máximo: } \mu_A \vee_B = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Suma algebraica: } \mu_A + \mu_B = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in U \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Suma acotada: } \mu_A \oplus_B = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x)), \forall x \in U \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Suma drástica: } \mu_A \cup_B = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{si } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & \text{si } \mu_A(x) = 0 \\ 1 & \text{en el resto de los } x \in U \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

**Norma triangular (t-norma):** es una función de dos argumentos,  $g:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que verifica los siguientes axiomas:

- a.1 Satisface las condiciones en los límites:  $g(x,0) = 0$ ,  $g(x,1) = 1$
- a.2 Conmutatividad:  $g(x,y) = g(y,x)$
- a.3 Es una función no decreciente en cada argumento: si  $x \leq x'$  y  $y \leq y'$ , entonces verifica  $g(x,y) \leq g(x',y')$  —monotonicidad estricta—.
- a.4 Asociatividad:  $g(g(x,y),z) = g(x, g(y,z))$
- a.5 Es una función continua

Las propiedades a.3 y a.5 las configuran como *t-normas de Arquímedes estrictas*.

Estas características pueden ser identificadas con las propiedades de la operación de intersección o conjuntivas (“and” lógica). Funciones que cumplen los requisitos de las t-normas son:

$$\text{Mínimo: } \mu_A \wedge \mu_B = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in U \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Producto algebraico: } \mu_A \cdot \mu_B = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in U \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Producto acotado: } \mu_A \bullet \mu_B = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1), \forall x \in U \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Producto drástico: } \mu_A \circ \mu_B = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{si } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x) & \text{si } \mu_A(x) = 1 \\ 0 & \text{en el resto de los } x \in U \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

La definición A.5 para ambos operadores es la utilizada por Zadeh, mientras que la A.6 corresponde a la interpretación probabilística y la A.7 a las conectivas empleadas en la lógica de Lukasiewicz.



Dada una familia infinita de normas triangulares, se derivan un amplio repertorio de modelos formales para las conectivas lógicas. La elección de ciertos operadores “*and*” y “*or*” depende del problema a resolver. El carácter local de las operaciones realizadas en conjuntos borrosos hace que no esté perfectamente definida la expresión más adecuada.

# APÉNDICE B

## ADQUISICIÓN DEL CONOCIMIENTO EN SISTEMAS BORROSOS

Los sistemas borrosos, aunque con las diferencias mencionadas anteriormente, se suelen incluir dentro de la amplia familia de los *Sistemas Expertos*, participando con ellos del problema de la adquisición y representación del conocimiento que incorporan este tipo de sistemas.

El proceso de adquisición e interpretación de la experiencia que utiliza un experto para realizar tareas de su profesión, en algún dominio concreto, con el fin de diseñar, construir, adaptar o modificar un sistema experto se denomina *educación del conocimiento*. Es una actividad **permanente y crucial**, y todavía queda mucho que avanzar en este campo experimental.

Como la filosofía de un sistema borroso es actuar como lo haría un experto humano en ese dominio, el conocimiento que incorporan estos sistemas es el núcleo de su estructura; está compuesto de datos, experiencias y razonamientos. Por eso, este conocimiento no se reduce sólo a formas de argumentar, sino también a la interpretación de cada uno de los elementos del proceso cognoscitivo del operario. Es decir, en un sistema borroso es fundamental la identificación de los términos utilizados, para asociarlos a etiquetas y funciones que los reflejen adecuadamente, y la calibración de los cuantificadores o modificadores que emplea en sus argumentaciones, para darles el peso correspondiente correcto.

El conocimiento contenido en un sistema basado en conocimiento puede proceder de muchas y variadas fuentes, pero la fuente dominante suele ser el experto en el dominio. Este conocimiento puede ser teórico o empírico, lo que es difícil de delimitar, ya que está extraordinariamente interconectado. Ésto lo hace una de las tareas más arduas y complejas, aunque es esencial.

A veces el experto es incapaz de formalizar un saber que para él es "evidente", y no siempre es fácil determinar cómo efectúa tareas complejas de toma de decisión. La tarea a realizar se puede desarrollar en dos pasos:

1. Analizar el saber del experto humano para codificarlo en un lenguaje informático.
2. Realizar una síntesis artificial y mecánica de los razonamientos, de manera que se parezcan a los que efectúa una metodología de intercambio con los expertos humanos.

Para realizar esa labor, hay que entrevistar a los expertos o analizar sus protocolos: proponer y estudiar los problemas habituales, situaciones típicas, ejemplos específicos de prueba, etc. Luego habrá que identificar los conceptos utilizados por el operario, establecer distintos niveles de formalización de ese conocimiento, y además, hay que estructurar lo antes posible todo ese conocimiento en forma de prototipo para verificar su consistencia lógica, eliminando contradicciones, redundancias y ambigüedades, con el fin de hacer el sistema accesible y creíble para el experto. Este proceso se suele realizar mediante una interacción directa con el operario, generalmente lenta y laboriosa.

Hay dos métodos para revelar lo que saben los expertos. Los primeros, denominados directos, preguntan directamente al experto, que reporta el conocimiento que él puede articular también de forma directa. Dentro de este apartado están las entrevistas (abiertas o estructuradas), cuestionarios, observación paralela, análisis de la tarea y del protocolo, digitalización y estudio de resultados, etc.

También son necesarios los métodos indirectos, ya que muchas veces los expertos no siempre pueden acceder a los detalles de su conocimiento o procesos mentales. En algunos casos perciben relaciones complejas o alcanzan conclusiones perfectas sin saber exactamente cómo lo hicieron. En estos casos se le proporcionan otras tareas similares para inferir la estructura subyacente. Los métodos indirectos más conocidos son las redes ponderadas, árboles ordenados de recuerdo y los emparrillados.

Los expertos tienen tendencia a establecer sus conclusiones y el razonamiento que usan en términos generales, que son demasiado amplios para obtener un análisis efectivo para la máquina. El experto raras veces trabaja a nivel básico. Puede achacarlo a la intuición o etiquetar como una repentinización lo que es resultado de un proceso de razonamiento complejo, basado en una gran cantidad de datos y experiencias recordados. En las explicaciones de sus conclusiones, sólo tratan los pasos principales, dejando de lado frecuentemente la mayoría de los aspectos secundarios, que les parecen obvios. Saber lo que es básico y relevante es lo que hace a una persona experta.

Dé hecho, se denomina "**paradoja de la experiencia**" a la enunciada como: "*los expertos más competentes son incapaces de describir el conocimiento que usan para resolver los problemas*". Estudios reales muestran, además, que cuando intentan explicar cómo alcanzan una conclusión, con frecuencia construyen líneas plausibles de razonamiento que se parecen poco a su actividad real para solucionar problemas.

Este efecto sugiere al menos dos implicaciones importantes. La primera, que los expertos necesitan una ayuda externa para clasificar y explicar su pensamiento y la forma en que resuelven los problemas. La segunda aconseja trabajar con hipótesis, basadas en lo que dicen los expertos, pero que hay que verificar y confirmar, comprobando su consistencia en la actuación real.

Aunque existen muchas y muy recientes tentativas de modelización, hasta el momento no hay ningún método automático para hacerlo. Solo han podido entresacarse algunas orientaciones y ayudas, pero particularizadas para cada caso o área; en la práctica, el diseñador debe guiarse sobre todo por la experiencia y el buen juicio personal.

## APÉNDICE C

### C.1 CONDICIONES DE OSCILACIÓN: ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA

El método de la función descriptiva es un método aproximado que se puede utilizar para determinar si habrá o no oscilación cuando se introduce en el lazo de control una función no lineal. Para determinar las condiciones de oscilación, el bloque no lineal se describe por su ganancia,  $N(a)$ , denominada *función descriptiva*, que depende de la amplitud  $a$  de la señal a la entrada de la no linealidad.

Si el proceso tiene una función de transferencia  $G(i\omega)$ , la condición para que oscile es simplemente:

$$N(a) \cdot G(i\omega) = -1 \quad (\text{C1.1})$$

Como tanto  $N$  como  $G$  son expresiones complejas, se obtienen dos ecuaciones para determinar  $a$  y  $\omega$ , que se pueden resolver gráficamente dibujando la función descriptiva negativa inversa  $-1/N(a)$  en el diagrama de Nyquist. Si cruza la curva de Nyquist, puede oscilar, y la amplitud y la frecuencia de la oscilación son los mismos que esos parámetros de las dos curvas en su punto de intersección. Por lo tanto, de la medida de la amplitud y el periodo de la oscilación se puede determinar un punto P de la curva de Nyquist (Figura C1.1).

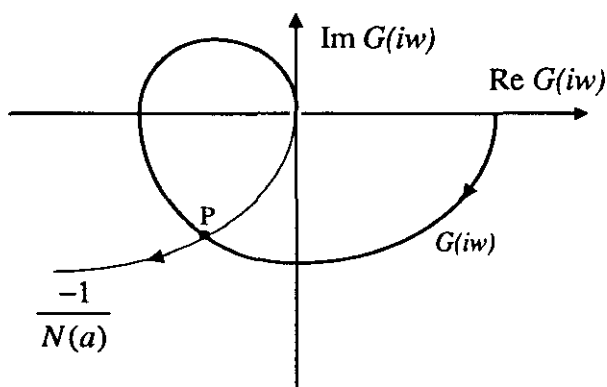


Figura C1.1 - Intersección de la función descriptiva y la curva de Nyquist

Si el bloque no lineal es un relé de amplitud  $d$ , su función descriptiva  $N(a)$  es:

$$N(a) = \frac{4d}{\pi \cdot a} \quad (\text{C1.2})$$

Como es una función real, la oscilación sólo puede ocurrir cuando la curva de Nyquist corta el eje real negativo. El punto donde la función descriptiva negativa inversa cruza la curva de frecuencia del proceso es por lo tanto el punto crítico, y viene dado por:

$$G(i\omega) = -\frac{1}{N(a)} \quad (\text{C1.3})$$

Como  $N(a)$  es conocida,  $G(i\omega)$  se puede determinar a partir de la amplitud  $a$  y la frecuencia  $\omega$  de la oscilación. Es decir, la ganancia de la función de transferencia a esta frecuencia  $K_u$  y el periodo crítico  $T_u$  son fáciles de obtener introduciendo un relé ideal.

## C.2 CONDICIÓN DE CICLO LÍMITE PARA RELÉS CON HISTÉRESIS

Para la determinación de la existencia de un ciclo límite al introducir un bloque no lineal en el lazo de control, se va a emplear el método de la *función descriptiva*.

### C2.1 Relé Simétrico $R_s(d, \varepsilon)$

Al introducir un relé simétrico  $R_s(d, \varepsilon)$  en el lazo (Figura 5.5), se supone que el sistema bajo control se encuentra en un ciclo límite de amplitud  $A$  y frecuencia  $w_n$ . Una aproximación de la salida del proceso puede ser:

$$y(t) = -A \cdot \text{sen } w_n \cdot t \quad (\text{C2.1a})$$

que en forma compleja se expresa como:

$$Y = -A \cdot e^{i w_n \cdot t} \quad (\text{C2.1b})$$

Si la señal de referencia es ahora nula,  $r(t) = 0$ , la entrada  $e(t)$  al relé se calcula como:

$$e(t) = -y(t) = A \cdot \text{sen } w_n \cdot t \quad (\text{C2.2})$$

La salida del relé  $u(t)$  se puede obtener de forma aproximada mediante los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Fourier:

$$u(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos w_n t + b_1 \text{sen } w_n t = \frac{a_0}{2} + M \text{sen}(w_n t + \varphi) \quad (\text{C2.3})$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cdot d(w \cdot t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{\pi}{w}}^{\frac{\pi}{w}} u(t) \cdot dt \quad (\text{C2.4a})$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cdot \cos wt \cdot d(wt) \quad (\text{C2.4b})$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cdot \text{sen } \omega t \cdot d(\omega t) \quad (\text{C2.4c})$$

La simetría del relé implica que  $a_0$  es nulo. Un cálculo de los parámetros  $a_1$  y  $b_1$  muestra que son respectivamente:

$$a_1 = -\frac{4d \cdot \varepsilon}{\pi \cdot A}; \quad b_1 = \frac{4d}{\pi \cdot A} \sqrt{A^2 - \varepsilon^2} \quad (\text{C2.5})$$

La salida del relé  $u(t)$  es la entrada al proceso  $G(s)$ . Esta función de transferencia  $G(s)$  relaciona esta señal de control con la salida del sistema:

$$\begin{aligned} \text{entrada al proceso:} \quad u(t) &= M \text{sen}(\omega_n t + \varphi) & U &= M \cdot e^{i\omega_n t} \cdot e^{i\varphi} \\ \text{salida del proceso:} \quad y(t) &= -A \text{sen } \omega_n t & Y &= -A \cdot e^{i\omega_n t} \end{aligned}$$

$$Y = -A \cdot e^{i\omega_n t} = G(i\omega_n) \cdot U = G(i\omega_n) \cdot M \cdot e^{i\omega_n t} \cdot e^{i\varphi} \quad (\text{C2.6})$$

La función descriptiva de una no linealidad se define como:

$$N(A) = \frac{\text{componente fundamental de la salida de la no linealidad}}{\text{componente fundamental de la entrada de la no linealidad}}$$

$$N(A) = \frac{M \cdot e^{i\omega_n t} \cdot e^{i\varphi}}{-A \cdot e^{i\omega_n t}} = \frac{M}{A} e^{i\varphi} \quad (\text{C2.7})$$

Sustituyendo esta última expresión en (C2.6) se obtiene:

$$1 + G(i\omega_n) \cdot N(A) = 0 \quad (\text{C2.8a})$$

La condición de existencia de ciclo límite se reduce a verificar si existe solución a la ecuación:



$$G(iw_n) = -\frac{1}{N(A)} \quad (C2.8b)$$

Lo que equivale a que exista un punto de intersección entre el lugar de Nyquist del proceso y el lugar característico de la no linealidad.

### C2.2 Relé Asimétrico $Ra(A_1, A_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$

La condición de existencia de ciclo límite para un relé asimétrico, con amplitudes  $A_1$  y  $A_2$ , e histéresis  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  se establece con un razonamiento similar al anterior.

Se considera el caso en el que  $A_1 < A_2$  y  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (Relé tipo 3). La salida oscila alrededor de un valor negativo, a causa del carácter no simétrico de la no linealidad); se supone que el sistema alcanza un ciclo límite, de forma que su salida oscilatoria se puede representar por:

$$y(t) = -c - A \cdot \text{sen } w_n t \quad (C2.9a)$$

donde  $c$  es una constante positiva a determinar.

La variable compleja asociada a  $y(t)$  es:

$$Y = -c - A \cdot e^{iw_n t} \quad (C2.9b)$$

luego la entrada la relé, tomando  $r(t) = 0$ , será:

$$e(t) = -y(t) = c + A \cdot e^{iw_n t} \quad (C2.10)$$

La aproximación de la salida del relé  $u(t)$  para los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Fourier es:

$$u(t) \approx \frac{a_0}{2} + b_1 \text{sen } w_n t + a_1 \text{cos } w_n t \quad (C2.11a)$$

que en notación compleja se representa como:

$$U = \frac{a_0}{2} + (b_1 + ia_1).e^{iw_n t} \quad (\text{C2.11b})$$

de donde:

$$Y = G(0)\frac{a_0}{2} + G(iw)(b_1 + ia_1).e^{iw_n t} = -c - A.e^{iw_n t} \quad (\text{C2.12})$$

La condición de existencia de un ciclo límite a la salida, cuando se utiliza un relé asimétrico, se reduce a que el siguiente sistema de ecuaciones (tres ecuaciones con tres incógnitas  $w$ ,  $A$  y  $c$ ), admita una solución:

$$G(0)\frac{a_0}{2} = -c \quad (\text{C2.13a})$$

$$[b_1(A, c) + ia_1(A)]G(iw) = -A \quad (\text{C2.13b})$$

Los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $b_1$  está definidos respectivamente por las ecuaciones dadas anteriormente (C2.4a), (C2.4b) y (C2.4c).

La ecuación (C2.13b) es idéntica a la obtenida para el caso del relé simétrico. Sin embargo, se va a demostrar que los coeficientes son distintos que en ese caso. Para ello, se emplea la siguiente notación (ver Figura C2.1).

Se definen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de la siguiente forma:

$$c + A \operatorname{sen} \alpha_1 = \varepsilon_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arcsen\left(\frac{\varepsilon_1 - c}{A}\right) \quad (\text{C2.14a})$$

$$c + A \operatorname{sen} \alpha_2 = -\varepsilon_2 \Rightarrow \alpha_2 = -\arcsen\left(\frac{\varepsilon_2 - c}{A}\right) \quad (\text{C2.14b})$$

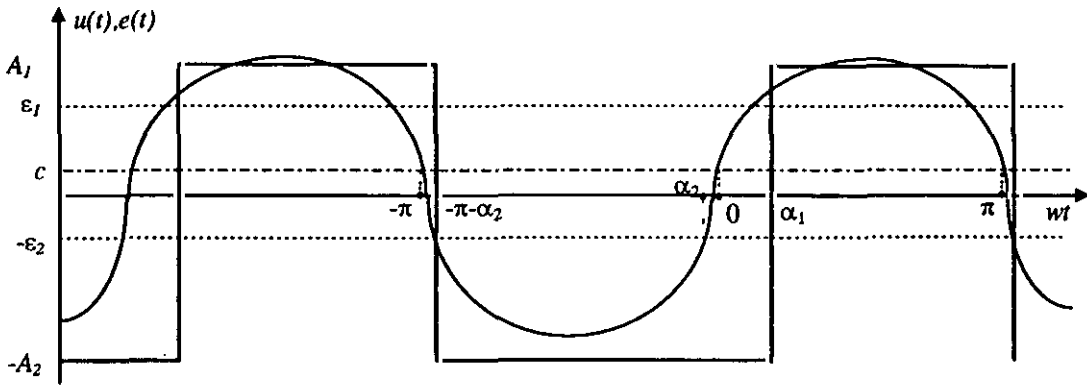


Figura C2.1 - Cálculo de la función descriptiva de un relé asimétrico con entrada senoide de media  $c$

De la definición de  $a_0$  se deduce que:

$$\pi \cdot a_0 = A_1 [(-\pi - \alpha_2 + \pi) + (\pi - \alpha_1)] - A_2 [\alpha_1 - (-\pi - \alpha_2)] \quad (C2.15a)$$

$$a_0 = \frac{(A_1 + A_2)}{\pi} \left( \arcsen\left(\frac{\epsilon_2 + c}{A}\right) - \arcsen\left(\frac{\epsilon_1 - c}{A}\right) \right) + (A_1 - A_2) \quad (C2.15b)$$

De la misma forma se tiene para  $a_1$  y  $b_1$ :

$$\pi a_1 = (A_1 + A_2) \cdot (\sen \alpha_2 - \sen \alpha_1) \Rightarrow a_1 = -\frac{A_1 + A_2}{\pi A} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (C2.16)$$

$$\pi b_1 = (A_1 + A_2) \cdot (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) \Rightarrow b_1 = \frac{A_1 + A_2}{\pi A} \left( \sqrt{A_1^2 - (\epsilon_1 - c)^2} + \sqrt{A_2^2 - (\epsilon_2 + c)^2} \right) \quad (C2.17)$$

En el caso particular del relé simétrico,  $c$  vale 0 y se obtienen las fórmulas correspondientes de  $a_1$  y  $b_1$  ( $a_0 = 0$ ). Un análisis del ciclo límite demuestra que la amplitud  $A$  de las oscilaciones es tal que

$$A > \epsilon_1 - c \quad \text{y} \quad A > \epsilon_2 + c$$

para que la expresión (C2.17) de  $b_1$  tenga un valor definido.

**C2.3 Estimación de la ganancia crítica  $K_u$  del proceso**

La ecuación (C2.13b) permite también deducir la ganancia crítica del proceso  $K_u$ :

$$|G(i\omega_n)| \approx \frac{A}{|b_1 + ia_1|} \approx \frac{1}{K_u} \tag{C2.18}$$

que se puede hacer igual a:

$$K_u \approx \frac{|b_1 + ia_1|}{A} = \frac{\sqrt{b_1^2 + a_1^2}}{A} \tag{C2.19}$$

Sustituyendo las expresiones (C2.16) y (C2.17) de  $a_1$  y  $b_1$ , y después de una serie de cálculos se obtiene:

$$K_u \approx \frac{(A_1 + A_2)}{\pi A^2} \sqrt{2} \sqrt{A^2 + \sqrt{A^2 - (\epsilon_1 - c)^2} \cdot \sqrt{A^2 - (\epsilon_2 + c)^2} - c^2 + c(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_1 \epsilon_2} \tag{C2.20}$$

y donde  $c$  se puede estimar de dos formas diferentes:

$$c = -\frac{1}{T_u} \int_{t_0}^{t_0+T_u} y(t).dt \quad \text{ó} \quad c = -\frac{|y_{max}| + |y_{min}|}{2} \tag{C2.21}$$

La fase  $\phi_u$  del punto estimado está definida por:

$$\begin{aligned} \phi_u &= -\pi + \arcsen \frac{a_1}{|b_1 + ia_1|} \\ &= -\pi + \arcsen \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{2} \sqrt{A^2 + \sqrt{A^2 - (\epsilon_1 - c)^2} \cdot \sqrt{A^2 - (\epsilon_2 + c)^2} - c^2 + c(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_1 \epsilon_2}} \end{aligned} \tag{C2.22}$$

Con estas dos últimas fórmulas se han obtenido la ganancia crítica del proceso y la fase del punto estimado, que junto con el conocimiento de la ganancia estática  $K$ , permiten sintonizar el controlador.

## BIBLIOGRAFÍA

- [Abd 91] G. M. Abdelnour, Ch. Chang, F. Huang y J. Y. Cheung, "Design of a fuzzy controller using input y output mapping factors", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 21, nº 5, 952-960, 1991.
- [Agu 93] J. Aguilar-Martín, "Grado de recubrimiento de particiones borrosas", en *Proc. III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Santiago de Compostela, España, 1993, 137-144.
- [Ara 93] J. Aranda, J. L. Fernández y F. Morilla, "Lógica Matemática", Ed. Sanz y Torres, 1993.
- [Ass 74] S. Assilian, "Artificial intelligence of real dynamic systems", Ph. D. Thesis, QMC, London, 1974.
- [Åst 73] K. J. Åström y B. J. Wittenmark, "On self-tuning regulators", *Automática*, vol. 9, 185-199, 1973.
- [Åst 84] K. J. Åström y T. Hägglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins", *Automática*, vol. 20, 645-651, 1984.
- [Åst 86] K. J. Åström, J. J. Anton y K. E. Arzen, "Expert Control", *Automática*, vol. 22, 277-286, 1986.
- [Åst 88] K. J. Åström y T. Hägglund, *Automatic tuning of PID controllers*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina, 1988.
- [Åst 92] K. J. Åström, C. C. Hang, P. Persson y W. K. Ho, "Towards intelligent PID control", *Automática*, vol. 28, nº 1, 1-9, 1992.
- [Åst 93] K. J. Åström, T. Hägglund, C. C. Hang y W. K. Ho, "Automatic tuning and adaptation for PID controllers - a survey", *Control Eng. Practice*, vol. 1, nº 4, 699-714, 1993.
- [Ath 93] A. Athalye, D. Edwards, V.S. Manorajan, y A. de Sam Lazaro, "On designing a fuzzy control system using an optimization algorithm", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 56, 281-290, 1993.
- [Bar 90] W. H. Bare, R. J. Mulholland y S. S. Sofer, "Design of a self-tuning rule based controller for a gasoline refinery catalytic reformer", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, nº 2, 156-164, 1990.

- [Brr 93] A. Barreiro y R. Sanz, "Control y supervisión de procesos industriales con lógica borrosa", en *Estudios sobre lógica borrosa y sus aplicaciones*, Ed. Universidad Santiago de Compostela, 1993, 69-94.
- [Bat 91] C. Batur y K. Kasparian, "Adaptive expert control", *Int. J. Control*, vol. 54, nº 4, 867-881, 1991.
- [Bos 93] A. Boscoio y F. Drius, "Computer aided tuning tool for fuzzy controllers", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 291-296.
- [Bra 78] M. Braae y D. A. Rutherford, "Fuzzy relations in a control setting", *Kybernetes*, vol. 7, nº 3, 185-188, 1978.
- [Bra 79a] M. Braae y D. A. Rutherford, "Selection of parameters for a fuzzy logic controller", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 2, nº 3, 185-199, 1979.
- [Bra 79b] M. Braae y D. A. Rutherford, "Theoretical and linguistic aspects of the fuzzy logic controller", *Automatica*, vol. 15, nº5, 553-577, 1979.
- [Buc 89] J. J. Buckley y H. Ying, "Fuzzy controller theory: limit theorems for linear fuzzy control rules", *Automática*, vol. 25, 469-472, 1989.
- [Buc 91] J. J. Buckley y H. Ying, "Expert fuzzy controller", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 44, 373-390, 1991.
- [Cam 92] I. del Campo, J. R. González de Mendivil, J. R. Garitagoitia y J. M. Tarela, "Realización de un Controlador Fuzzy sobre un Procesador Digital de Señal", en *Proc. II Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Madrid, España, 1992, 267-281.
- [Cár 93] E. Cárdenas, J. C. Castillo, O. Cordón y A. Peregrín, "Estudio comparativo de sistemas de inferencia y métodos de defuzzificación aplicados al control difuso del péndulo invertido", en *Proc. III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Santiago de Compostela, España, 1993, 259-266.
- [Car 94] A. Carli, P. Liguori y A. Marroni, "A fuzzy-PI control strategy", *Control Eng. Pract.*, vol. 2, nº1, 147-153, 1994.
- [Cip 93] A. Cipriano, J. Tancara, M. Quezada y A. Guesalaga, "Control difuso de un motor de corriente continua de velocidad variable", en *Actas del X Congreso Chileno de Ingeniería Eléctrica*, Valdivia, Chile, 22-26 Nov., 1993, 19-24.
- [Coh 53] G. H. Cohen y G. A. Coon, "Theoretical consideration of retarded control", *Trans. ASME*, vol. 75, 827-834, 1953.

- [Dor 93] S. Dormido, M. Santos, A. P. de Madrid y F. Morilla, "Autosintonía de controladores borrosos utilizando técnicas clásicas basadas en reguladores PID", en *Proc. III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Santiago de Compostela, España, 1993, 217-225.
- [Fer 87] G. Fernández y F. Sáez Vacas, "Fundamentos de Informática", *Alianza Informática*, Alianza Editorial, 146-162, 1987.
- [Fou 93] L. Foulloy, "Qualitative control y fuzzy control: towards a writing methodology", *AICOM*, vol. 6, nº 3/4, Sept./Dec., 147-154, 1993.
- [Gar 93] A. J. García-Cerezo y A. Ollero, "Aplicaciones de la lógica borrosa en control de procesos y robótica", en *Estudios sobre lógica borrosa y sus aplicaciones*, Ed. Universidad Santiago de Compostela, 1993, 51-67.
- [Gra 88] B. P. Graham y R. B. Newell, "Fuzzy identification and control of a liquid level rig", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 26, 255-273, 1988.
- [Gué 93] F. Guély y P. Siarry, "Gradient descent method for optimizing various fuzzy rule bases", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 1241-1246.
- [Han 91a] C. C. Hang, K. J. Åström y W. K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula", *IEE Proc.*, Part D, vol. 138, nº 2, 111-118, March 1991.
- [Han 91b] C. C. Hang y K. K. Sin, "An on-line auto-tuning method based on cross-correlation", *IEEE Trans. on Industrial electronics*, vol. 38, nº 6, 428-437, 1991.
- [Han 94] A. Hansson, P. Gruber y J. Tödli, "Fuzzy anti-reset windup for PID controllers", *Control Eng. Practice*, vol. 2, nº 3, 389-396, 1994.
- [Hay 91] S. Hayashi, "Auto-tuning fuzzy-PI controller", en *Proc. 4th. IFSA Cong.*, vol. Engineering, Brussels, 1991, 41-44.
- [He 93] S. He, S. Tna, C. C. Hang y P. Wang, "Control of dynamical processes using an on-line rule adaptive fuzzy control system", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 54, 11-22, 1993.
- [Her 93] F. Herrera, M. Lozano y J. L. Verdegay, "Un algoritmo genético para el ajuste de controladores difusos", en *Proc. III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Santiago de Compostela, España, 1993, 251-258.
- [Ho 92] W. K. Ho, C. C. Hang y L. S. Cao, "Tuning of PI controllers based on gain and phase margin specifications", en *Preprints IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics*, P. R. China, 1992.

- [Jim 91] A. Jiménez y F. Matía, "Aplicaciones de fuzzy logic en tiempo real", en *La Inteligencia Artificial y el Control en Tiempo Real.*, Colección Ensayo, REPSOL-UIMP Ed., 1991, 189-239.
- [Kay 88] A. Kaya y T. J. Scheib, "Tuning of PID Controls of Different structures", *Control Engineering*, 62-65, July 1988.
- [Kin 77] P. J. King y E. H. Mamdani, "The application of fuzzy control systems to industrial processes", *Automática*, vol. 13, 235-242, 1977.
- [Kis 85] J. B. Kiszka, M. E. Kochanska y D. S. Sliwinska, "The influence of some parameters on the accuracy of a fuzzy model", en *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1985, 187-230.
- [Kle 52] S. Kleene, "Introduction to metamathematics", North-Holland, Amsterdam, 1952 (Traducción de M. Garrido, "Introducción a la metamatemática", Tecnos, Madrid, 1974).
- [Kos 91] B. Kosko, "Neural Networks and Fuzzy Systems: A dynamical Systems Approach to Machine Intelligence", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1991.
- [Lak 85] L. J. Larkin, "A fuzzy logic controller for aircraft flight control", en *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1985, 87-104.
- [Lar 80] P. M. Larsen, "Industrial application of fuzzy logic controller", *Int. J. Man Mach. Studies*, vol. 12, 3-10, 1980.
- [Lee 90a] C. C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller - Part I", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 20, nº 2, 404-418, Mar./Apr., 1990.
- [Lee 90b] C. C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller - Part II", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 20, nº 2, 419-435, Mar./Apr., 1990.
- [Lee 91] C. C. Lee, "A self-learning rule-based controller employing approximate reasoning and neural net concepts", *Internat. Intelligent Systems*, vol. 6 (1), 71-92, 1991.
- [Lev 93] A. Leva, "PID autotuning algorithm based on relay feedback", *IEE Proc. D*, vol. 140, nº 5, 328-338, Sept. 1993.
- [Lew 32] C. I. Lewis y C. H. Langford, "Symbolic logic", The Century Comp., N.Y. 1932 (2ª ed., Dover Publ., N. Y., 1959).
- [Li 89] Y. F. Li y C. Lau, "Development of fuzzy algorithms for servo systems", *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 9, nº 3, 65-72, 1989.



- [Liu 94] Z. Liu y R. de Keyser, "Self-tuning fuzzy logic controller", 3rd IFAC Symp. on Artificial Intelligence in Real-Time Control, 1994.
- [Lóp 67] A. M. López, J. A. Miller, C. L. Smith y P. W. Murrill, "Tuning controllers with error-integral criteria", *Instrumentation Technology*, vol. 14, nº 11, 1967.
- [Luk 20] J. Lukasiewicz, "On 3-valued logic" (1920). Reproducido en McCall, S. (ed.): *Polish logic*. Oxford University Press, 1967.
- [Luk 30] J. Lukasiewicz, "Many-valued systems of propositional logic" (1930). Reproducido en McCall, S. (ed.): *Polish logic*. Oxford University Press, 1967.
- [Mac 76] P. J. Macvicar-Whelan, "Fuzzy sets for man-machine interaction", *Int. J. Man Mach. Studies*, vol. 8, 687-697, 1976.
- [Mae 91] M. Maeda, R. Someya y M. Funabashi, "A self-tuning algorithm for fuzzy membership functions using computational flow network", en *Proc. 4th. IFSA Cong.*, vol. Artificial Intelligence, Brussels, 1991, 129-132.
- [Mae 92] M. Maeda y S. Murakami, "A self-tuning fuzzy controller", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 51, 29-40, 1992.
- [Mam 74] E. H. Mamdani, "Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant", *Proc. IEE*, vol. 121, n. 12, 1585-1588, 1974.
- [Mam 75a] E. H. Mamdani y S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", *Int. J. Man Mach. Studies*, vol. 7, nº 1, 1-13, 1975.
- [Mam 75b] E. H. Mamdani y N. Baaklini, "Prescriptive method for deriving control policy in a fuzzy logic controller", *Electron Lett.*, vol. 11, 25/6, Dec., 625-626, 1975.
- [Mat 92] F. Matía, A. Jiménez, R. Sanz y R. Galán, "Fuzzy controllers: Lifting the linear-nonlinear frontier", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 52, 113-128, 1992.
- [Mat 93a] F. Matía, A. Jiménez, R. Sanz, R. Galán y G. Martínez, "Fuzziness measures for fuzzy control systems: an introduction", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, vol. II.
- [Mat 93b] F. Matía, A. Jiménez, R. Sanz y R. Galán, "Fuzzy adaptive control environment using Lyapunov functions: FACE", en *Proc. Fifth IFSA Cong.*, Brussels, 1993, 765-768.
- [Miz 82] M. Mizumoto y H. J. Zimmermann, "Comparison of fuzzy reasoning methods", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 8, 253-283, 1982.

- [Miz 88] M. Mizumoto, "Fuzzy control under various reasoning method", *Informat. Sci.*, vol. 45, 129-151, 1988.
- [Miz 91] M. Mizumoto, "Min-Max-Gravity method versus Product-Sum-Gravity method for fuzzy controls", en *Proc. 4th. IFSA Cong.*, vol. Engineering, Brussels, 1991, 155-158.
- [Moo 69] C. F. Moore, C. L. Smith y P. W. Murrill, "Simplifying digital control dynamics for controller tuning and hardware lag effects", *Instrument Practice*, vol. 23, nº 1, 45, 1969.
- [Mor 89] F. Morilla, S. Dormido, J. L. Fernández y M. A. Canto, "A systematic study of PID controllers tuning methods", *Proc. IASTED Modeling Identification and Control*, 383-386, 1989.
- [Mor 90a] F. Morilla, "Controladores PID: algoritmos y estructuras", *Automática e Instrumentación*, nº 204, 131-136, 1990.
- [Mor 90b] F. Morilla, "Controladores PID: ajuste de parámetros", *Automática e Instrumentación*, nº 207, 155-160, 1990.
- [Mor 92] F. Morilla y L. Lechuga, "Automation of open-loop and closed-loop experiments", *Preprints of SICICA'92*, 813-817, 1992.
- [Mur 85] Y. Murayama, T. Terano, S. Masui y N. Akiyama, "Optimizing control of a diesel engine", en *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1985, 63-71.
- [Nom 91] H. Nomura, I. Hayashi y N. Wakami, "A self-Tuning method of fuzzy control by descent method", en *Proc. 4th. IFSA Cong.*, vol. Engineering, Brussels, 1991, 155-158.
- [Oll 89] A. Ollero y A. J. García-Cerezo, "Direct digital control, auto-tuning and supervision using fuzzy logic", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 30, 135-153, 1989.
- [Pal 93] R. Palm, "Tuning of scaling factors in fuzzy controllers using correlation functions", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 691-696.
- [Ped 93] W. Pedrycz, "Fuzzy Control and Fuzzy Systems", Research Studies Press, England, 1993.
- [Pen 90] X. T. Peng, "Generating rules for fuzzy logic controllers by functions", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 36, 83-89, 1990.

- [Pro 79] T. J. Procyk y E. H. Mamdani, "A linguistic self-organizing process controller", *Automática*, vol. 15, nº 1, 15-30, 1979.
- [Qia 92] W. Z. Qiao, W. P. Zhuang, T. H. Heng y S. S. Song, "A rule self-regulating fuzzy controller", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 47, 13-21, 1992.
- [Rov 69] A. A. Rovira, P. W. Murrill y C. L. Smith, "Tuning controllers for set-points changes", *Instruments and Control Systems*, Dec. 1969.
- [Rut 76] D. A. Rutherford y G. C. Bloore, "The implementation of fuzzy algorithms for control", en *Proc. IEEE*, vol. 64, nº 4, 572-573, 1976.
- [San 94] M. Santos, S. Dormido, A. P. de Madrid, F. Morilla, y J. M. de la Cruz, "Tuning fuzzy logic controllers by classical techniques", *CAST'94*, Ottawa, Canada, 1994.
- [Seb 89] D. E. Seborg, T. F. Edgar y D. A. Mellichamp, *Process Dynamics and Control*, Wiley, New York, 1989.
- [Sha 88] S. Shao, "Fuzzy self-organizing controller and its application for dynamic processes", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 26, 151-164, 1988.
- [Shi 89] F. G. Shinskey, *Process-Control Systems: Application/Design/Adjustment*. 3rd edition. McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [Smi 91] S. M. Smith y D. J. Comer, "Automated calibration of a fuzzy logic controller using a Cell-State-Space algorithm", *IEEE Contr. Syst. Mag.*, Aug., 18-28, 1991.
- [Sob 93] A. Sobrino, J. A. Olivas y C. Adán, "Temas de lógica borrosa y razonamiento aproximado: pasado, presente y proyecciones futuras", en *Estudios de lógica borrosa y sus aplicaciones*, A. Sobrino y S. Barro (ed.), Universidad de Santiago de Compostela, España, 1993.
- [Sug 85] M. Sugeno y K. Murakami, "An experimental study on fuzzy parking control using a model car", en *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno, Ed. Amsterdam: North-Holland, 1985, 125-138.
- [Tak 85] . Takagi y M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. SMC-15, Jan., 116-132, 1985.
- [Tan 92] K. Tanaka y M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 45, 135-156, 1992.

- [Tan 93] K. Tanaka y M. Sano, "Design of Fuzzy Controllers Based on Frequency and Transient Characteristics", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 111-116.
- [Tag 87] K. L. Tang y R. J. Mulholland, "Comparing fuzzy logic with classical controller design", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. SMC-17, n° 6, 1085-1087, 1987.
- [Tog 87] M. Togai y S. Chiu, "A fuzzy logic chip and a fuzzy inference accelerator for real-time approximate reasoning", *Proc. of 17th International Symposium on Multiple-valued Logic*, 25-29, Boston, May, 1987.
- [Tor 93] V. Torra, "Consenso de funciones de pertenencia triangulares", en *Proc. III Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Santiago de Compostela, España, 1993, 161-168.
- [Tsy 58] Tsytkin, J. A., "*Theorie der Relais Systeme der Automatischen Regelung*", R. Oldenburg, Munich, 1958.
- [Tza 90] S. Tzafestas y N. Papanikolopoulos, "Incremental fuzzy expert PID control", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 37, n° 5, 365-371, 1990.
- [Vil 93] P. Viljamaa y H. N. Koivo, "Tuning of multivariable fuzzy logic controller", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 697-701.
- [Wat 90] H. Watanabe, W. Dettloff y K. Yount, "A VLSI fuzzy logic controller with reconfigurable, cascadable architecture", *IEEE J. of Solid-State Circuits*, vol. 25, n° 2, 376-382, 1990.
- [Yam 88] T. Yamakawa, "Fuzzy microprocessors - how it works-", *Proc. Internat. Fuzzy System Applications*, Iizuka, Japan, 79-87, August 1988.
- [Yas 85] S. Yasunobu y S. Miyamoto, "Automatic train operation by predictive fuzzy control", *Industrial Applications of Fuzzy Control*, M. Sugeno (ed.), North-Holland, 1-18, 1985.
- [Yin 90] H. Ying, W. Siler y J. J. Buckley, "Fuzzy control theory: A nonlinear case", *Automática*, vol. 26, n° 3, 513-520, 1990.
- [Zad 65] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", *Informat. Control*, vol. 8, 338-353, 1965.
- [Zad 68a] L. A. Zadeh, "Fuzzy algorithm", *Informat. Control*, vol. 12, 94-102, 1968.
- [Zad 68b] L. A. Zadeh, "Probability measures of fuzzy events", *J. Math. Anal. and Appl.*, vol. 23, 421-427, 1968.

- [Zad 69] L. A. Zadeh, "Biological applications of the theory of fuzzy sets and systems", L. D. Procor (ed.): *Biocybernetics of the central nervous system*. Little, Brown and Co., Boston, Mass., 199-212, 1969.
- [Zad 72] L. A. Zadeh, "A rationale for fuzzy control", *Trans. ASME, J. Dynam. Syst. Measur. Control*, vol. 94, 3-4, 1972.
- [Zad 73b] L. A. Zadeh, "Quantitative fuzzy semantics", *Information Sciences*, vol. 3, 159-176, 1973.
- [Zad 73a] L. A. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", *IEEE Trans. SMC*, vol. SMC-3, Jan., 28-44, 1973.
- [Zad 75] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", *Information Sciences*, vol. 8, 199-251, 301-357, vol. 9, 43-80, 1975.
- [Zad 78] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, 3-28, 1978.
- [Zad 88] L. A. Zadeh, "Fuzzy Logic", *Computer IEEE*, vol. 18, nº 4, 83-93, 1988.
- [Zad 92] L. A. Zadeh, "Representación del conocimiento en lógica borrosa", en *Aplicaciones de la Lógica Borrosa*, 51-73, E. Trillas y J. Gutiérrez Rios (eds), CSIC, Madrid, 1992.
- [Zha 91] R. Zhao y R. Govid, "Defuzzification of fuzzy intervals", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 43, 45-55, 1991.
- [Zhe 93] L. Zheng, "A practical computer-aided tuning technique for fuzzy control", en *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Francisco, 1993, 702-707.
- [Zie 42] J. G. Ziegler y N. B. Nichols, "Optimum setting for automatic controller", *Trans. ASME*, vol. 64, 759-768, 1942.