

Simetrías y constantes del movimiento  
de sistemas lagrangianos.  
Sistemas lagrangianos con ligaduras  
no-holonómicas

por

David Martín de Diego

Licenciado en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad Complutense de Madrid

Presentada al Departamento de Geometría y Topología  
para optar al grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Firma del autor .....  
Departamento de Geometría y Topología  
Octubre de 1995



Dirigida por .....  
Prof. Manuel de León Rodríguez  
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental  
Investigador Científico

Aceptada por .....  
Prof. Enrique Outerelo Domínguez  
Director del Departamento de Geometría y Topología

**Simetrías y constantes del movimiento  
de sistemas lagrangianos.  
Sistemas lagrangianos con ligaduras  
no-holonómicas**

David Martín de Diego

A Mónica

## Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Profesor Manuel de León, director de esta memoria. Su constancia, conocimientos y confianza en mí han permitido terminar este trabajo. La formación académica que de él he recibido, así como su amistad durante estos años, es algo que nunca podré apreciar suficientemente.

También, he de agradecer la colaboración encontrada, de alguna u otra manera, en los profesores F. Cantrijn, J. F. Cariñena, A. Ibort, M. Gotay, J. C. Marrero, P. Pitanga, P. Rodrigues, M. Saralegui, A. Vondra . . . . La ayuda y apoyo de mi amigo y compañero A. Valdés ha sido también fundamental.

Agradezco la ayuda que siempre he contado de todos mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa de la U. N. E. D . Agradecer también la ayuda financiera para la realización de este estudio que me han proporcionado siempre amablemente en mi Departamento.

En el plano personal, quisiera agradecer a todos mis amigos (Luis, Jose Carlos, etc) el haber conseguido aguantarme durante estos años.

Agradezco a mis padres y a mi hermano su apoyo desinteresado.

Quiero dedicar este trabajo a mi esposa Mónica por su confianza y comprensión.

# Índice

<b>I</b>	<b>SISTEMAS LAGRANGIANOS DE ORDEN SUPERIOR</b>	<b>22</b>
<b>1</b>	<b>Sistemas lagrangianos autónomos</b>	<b>23</b>
1.1	Fibrados tangentes de orden superior . . . . .	24
1.2	Sistemas lagrangianos de orden superior . . . . .	28
1.3	Simetrías y simetrías infinitesimales . . . . .	29
1.4	Grupos de Lie de simetrías . . . . .	39
1.5	Simetrías de sistemas hamiltonianos . . . . .	40
1.6	Relación entre las simetrías de sistemas lagrangianos y sistemas hamiltonianos . . . . .	43
1.7	Ejemplos . . . . .	45
1.7.1	Partícula con spin clásica . . . . .	47
1.7.2	Vigas elásticas . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Simetrías y constantes del movimiento de sistemas lagrangianos no-autónomos</b>	<b>52</b>
2.1	Simetrías de sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo . . . . .	53
2.2	Espacios de evolución de orden superior . . . . .	62
2.3	Sistemas lagrangianos no-autónomos de orden superior . . . . .	65
2.4	Simetrías de sistemas lagrangianos dependientes del tiempo de orden superior . . . . .	66
2.5	Relación entre las simetrías infinitesimales del sistema lagrangiano con las de su contrapartida hamiltoniana . . . . .	72
2.6	Ejemplo: Partícula con spin sujeta a un potencial . . . . .	75

<b>3</b>	<b>Simetrías y constantes del movimiento de sistemas lagrangianos degenerados</b>	<b>80</b>
3.1	El algoritmo de ligaduras . . . . .	81
3.2	Simetrías y constantes del movimiento de sistemas presimplécticos con dinámica global . . . . .	83
3.3	Simetrías y constantes del movimiento para sistemas presimplécticos arbitrarios .	86
3.4	Simetrías y constantes del movimiento para sistemas lagrangianos singulares . .	91
3.5	Relación con la formulación hamiltoniana . . . . .	94
3.6	El problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden . . . . .	102
3.7	Dinámica hamiltoniana generalizada . . . . .	104
3.8	Lagrangianos afines en las velocidades . . . . .	109
3.9	Reducción de sistemas lagrangianos degenerados . . . . .	112
3.10	Sistemas lagrangianos degenerados con un grupo de Lie de simetrías . . . . .	118
3.11	Simetrías y constantes del movimiento para sistema precosimplécticos . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Estructuras casi-producto asociadas a sistemas presimplécticos</b>	<b>126</b>
4.1	Estructuras casi-producto adaptadas a estructuras presimplécticas . . . . .	127
4.2	Simetrías y contantes del movimiento . . . . .	131
4.3	Reducción de Poisson . . . . .	136
4.4	Reducción presimpléctica . . . . .	138
4.5	Reducción de la dinámica . . . . .	142
4.6	Reconstrucción de la dinámica . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Sistemas lagrangianos degenerados y estructuras casi-producto</b>	<b>144</b>
5.1	El algoritmo de Dirac-Bergmann . . . . .	145
5.2	Sistemas lagrangianos con dinámica global . . . . .	147
5.2.1	Todas las ligaduras primarias son de segunda clase . . . . .	147
5.2.2	Todas las ligaduras primarias son de primera clase . . . . .	150
5.2.3	Existen ligaduras primarias de primera y segunda clase . . . . .	154
5.3	Sistemas lagrangianos con ligaduras secundarias . . . . .	155
5.4	Estructuras casi-producto Legendre proyectables . . . . .	158

5.5	El problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden . . . . .	162
5.6	Lagrangianos afines en las velocidades . . . . .	165
<b>III SISTEMAS LAGRANGIANOS NO-HOLONÓMICOS</b>		<b>169</b>
<b>6</b>	<b>Sistemas lagrangianos no-holonómicos y estructuras casi-producto</b>	<b>170</b>
6.1	Sistema lagrangianos no-holonómicos . . . . .	172
6.2	El caso singular . . . . .	181
6.3	Ligaduras holonómicas . . . . .	187
6.4	Sistemas lagrangianos con ligaduras no-holonómicas definidas globalmente . . .	192
6.5	Ligaduras definidas por una conexión . . . . .	195
6.6	Aplicación: ecuaciones de las geodésicas con ligaduras . . . . .	196
6.7	Simetrías y constantes del movimiento . . . . .	200
6.8	Formalismo hamiltoniano . . . . .	202
6.9	Sistemas lagrangianos no-autónomos con ligaduras no-holonómicas . . . . .	208
<b>7</b>	<b>Un algoritmo de ligaduras para sistemas lagrangianos singulares sujetos a ligaduras no-holónomicas</b>	<b>211</b>
7.1	Lagrangianos singulares con ligaduras no-holonómicas . . . . .	212
7.2	Simetrías y constantes del movimiento . . . . .	216
7.3	El formalismo hamiltoniano . . . . .	219
7.4	Sistemas lagrangianos degenerados sujetos a ligaduras y estructuras casi-producto	222
7.5	El problema de la ecuación diferencial de segundo orden . . . . .	224

# Introducción

*Espero que mis conferencias puedan interesar a ingenieros, físicos y astrónomos así como a los matemáticos. Si uno acusase a los matemáticos de ser una clase que ignora los problemas matemáticos de la física moderna y la astronomía, se podría quizás, con no menos justicia, acusar a físicos y astrónomos de ignorar a los departamentos de matemática pura los cuáles han alcanzado un alto grado de desarrollo y están preparados para ofrecer un valioso servicio a la física y a la astronomía. La mayor necesidad del presente de la ciencia matemática es que la ciencia pura y aquellos departamentos de ciencias físicas, en los que ésta encuentre su más importante aplicación, deben ser conducidos una vez más en la más íntima unión como se probó en el fructífero trabajo de Lagrange y Gauss. Felix Klein, 1896.*

En la sección V de la “*Mécanique Analytique*” (1788) de J. L. Lagrange aparece descrita la diferencia entre la energía cinética y potencial,  $L = T - V$ , que hoy día es conocida como la función lagrangiana o, de forma abreviada, el lagrangiano. También aparecen las ecuaciones del movimiento en la forma que conocemos como ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0 .$$

Resaltamos, para destacar esta fundamental contribución de Lagrange, el siguiente párrafo de su libro:

*No se encontrarán figuras en esta obra. Los métodos que expongo no necesitan construcciones, ni razonamientos geométricos o mecánicos, solamente operaciones algebraicas, sujetas a un proceso regular y uniforme. Aquellos a quienes les guste el*

*Análisis, verán con agrado como la Mecánica se convierte en una nueva rama suya, y me estarán agradecidos por haber extendido así esta materia. J. L. Lagrange, 1811.*

La formulación actual tiene su punto de partida en Poincaré. Él imaginó un sistema dinámico como un campo de vectores en un espacio de fases, cuya solución es una curva tangente en cada uno de sus puntos al vector basado en el punto. Se asoció de un modo natural una estructura de variedad diferenciable a este espacio de fases  $T^*Q$  que además estaba dotado de una estructura geométrica muy especial, llamada estructura simpléctica. Puesto que una variedad diferenciable no admite, en principio, un sistema global de coordenadas, se hacía evidente la necesidad de encontrar un análisis intrínseco para describir un sistema dinámico. Ya en las lecciones de Cartan aparece, por primera vez, una formulación intrínseca, y no variacional, de las ecuaciones de la dinámica. Más recientemente los trabajos de Lichnerowicz, Gallisot y J. Klein evidenciaron que la geometría diferencial es el marco adecuado para la formulación de la mecánica.

De este modo, el marco geométrico natural para el estudio de la mecánica clásica es, sin lugar a dudas, la geometría simpléctica. Generalizaciones posteriores hacen también uso de la geometría cosimpléctica, geometría presimpléctica y geometría multisimpléctica.

Existen dos aproximaciones principales a los sistemas dinámicos que serán usadas con profusión en esta memoria:

1. la aproximación lagrangiana,
2. la aproximación hamiltoniana.

El estudio se inicia partiendo de un espacio de configuración  $Q$  que es una variedad diferenciable con dimensión finita  $n$  y con coordenadas locales  $(q^A)$ .

Si elegimos la formulación lagrangiana debemos considerar una función  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  en el fibrado tangente  $TQ$  (espacio de fases de las velocidades) llamada función lagrangiana o, más brevemente, lagrangiano. En el caso más favorable (el regular), una vez elegido el lagrangiano y haciendo uso de la geometría casi-tangente del fibrado tangente, podemos construir una estructura simpléctica en  $TQ$ , a partir de la cual definimos un campo de vectores en  $TQ$ ,  $\xi_L$ , que determina la solución de la dinámica. De hecho, este campo de vectores es una ecuación diferencial de segundo orden (abreviadamente una SODE).

Si elegimos la aproximación hamiltoniana, la formulación se hace en el fibrado cotangente  $T^*Q$  (espacio de fase de momentos) que tiene la ventaja de contar con una forma simpléctica canónica. Utilizando las técnicas de cálculo diferencial sobre variedades se obtiene una formulación intrínseca de las ecuaciones de Hamilton.

Estas aproximaciones se pueden estudiar independientemente pero ambas están relacionadas por la transformación de Legendre  $Leg : TQ \longrightarrow T^*Q$ .

En esta memoria se hará un estudio de los sistemas lagrangianos de orden superior, sistemas lagrangianos degenerados y sistemas lagrangianos sujetos a ligaduras no-holonómicas.

Uno de los aspectos que serán tratados con mayor detalle es el estudio de las simetrías de la solución de la dinámica, que como ya hemos dicho es un campo en el espacio de fases correspondiente. Una simetría es una transformación que deja invariante este campo solución. Para nosotros será más interesante el estudio de las simetrías infinitesimales, es decir, aquellos campos de vectores cuyo flujo está formado por simetrías. Clasificaremos las simetrías en dos clases principales: simetrías infinitesimales puntuales (campos de vectores definidos en  $Q$ ) y simetrías infinitesimales de tipo no puntual u "ocultas" (campos definidos en  $TQ$ ).

Uno de los aspectos fundamentales del estudio de las simetrías es obtener la relación con las constantes del movimiento. Este tipo de relaciones se conocen como teoremas de Noether:

*"... tratando con grupos arbitrarios de dimensión finita - o infinita - en el sentido de Lie, y revelando las consecuencias de cuando un principio variacional es invariante por este grupo. El resultado general contiene, como casos especiales, los teoremas de primeras integrales como son conocidos en mecánica y, además, los teoremas de conservación y las dependencias entre las ecuaciones de campo en la teoría de la relatividad -mientras por otro lado, el recíproco de estos teoremas es dado. E. Noether, 1919.*

A lo largo de esta memoria obtendremos varios teoremas de Noether, entendiéndolos como relaciones entre las simetrías infinitesimales y las constantes del movimiento (funciones que son constantes a lo largo de las curvas integrales del campo solución de la dinámica).

Otro de los aspectos más interesantes de esta memoria reside en resaltar el interés de las estructuras casi-producto en el estudio de los sistemas dinámicos. Usaremos las estructuras casi-producto en dos aplicaciones en principio muy diferentes. Por una parte, se estudia la

teoría de ligaduras de Dirac y Bergmann [38] (globalizada por Gotay y Nester [49, 51])) para sistemas lagrangianos degenerados utilizando ciertas estructuras casi-producto adaptadas a la forma presimpléctica obtenida a partir del lagrangiano. Por otra parte, usando las estructuras casi-producto, obtenemos resultados de gran interés para el estudio de sistemas dinámicos sujetos a ligaduras no-holonómicas.

El contenido de la memoria se divide en tres partes.

I. En la primera parte se obtiene una clasificación completa de las simetrías de un sistema lagrangiano regular de orden superior, y se encuentran diferentes relaciones entre simetrías y constantes del movimiento (Teoremas de Noether). Una de las dificultades para obtener esta generalización reside en que el lagrangiano, en el caso autónomo, es una función definida en el fibrado tangente de orden  $k$  mientras que el campo de vectores que determina la dinámica está definido en el fibrado tangente de orden  $2k - 1$ . Esta clasificación extiende la obtenida por G. Prince ([116, 117]) para sistemas lagrangianos de orden 1.

Distinguimos dos casos:

1. **Caso autónomo.**

Un lagrangiano autónomo de orden  $k$  es una función  $L = L(q_0^A, q_1^A, \dots, q_k^A)$  que depende de las coordenadas  $q_0^A$  y de sus derivadas hasta el orden  $k$ . De hecho usando fibrados tangentes de orden superior se puede considerar  $L$  como una función  $L : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Además, decimos que  $L$  es regular si la matriz hessiana  $(\frac{\partial^2 L}{\partial q_k^A \partial q_k^B})$  tiene rango máximo. Denotamos por  $E_L$  la energía asociada al lagrangiano  $L$  (función en  $T^{2k-1}Q$ ),  $\alpha_L$  la 1-forma de Poincaré-Cartan y  $\omega_L = -d\alpha_L$  la 2-forma de Poincaré-Cartan (formas en  $T^{2k-1}Q$ ). La ecuación del movimiento es:

$$i_X \omega_L = dE_L .$$

Como  $\omega_L$  es simpléctica, existe un único campo de vectores  $\xi_L$  en  $T^{2k-1}Q$ , que satisface esta ecuación.  $\xi_L$  es el campo de vectores de Euler-Lagrange. Además,  $\xi_L$  es una ecuación diferencial de orden  $2k$  y sus soluciones son precisamente las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L$ .

Se dice que una función  $f : T^{2k-1}Q \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  si  $\xi_L f = 0$ . Si  $X$  es un campo de vectores en  $Q$ , denotamos por  $X^{(\tau, \tau)}$  su elevación natural a  $T^\tau Q$  (véanse [107, 153]).

Distinguimos los siguientes tipos de simetrías infinitesimales puntuales del sistema lagrangiano definido por  $L$ . Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ .

1. Se dice que  $X$  es una simetría de Lie si  $[\xi_L, X^{(2k-1, 2k-1)}] = 0$ .
2. Se dice que  $X$  es una simetría de Noether si  $L_{X^{(2k-1, 2k-1)}}\alpha_L$  es exacta (de otra manera,  $L_{X^{(2k-1, 2k-1)}}\alpha_L = df$ ) y  $X^{(2k-1, 2k-1)}E_L = 0$ .
3. Se dice que  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si  $X^{(k, k)}L = 0$ .

Obtenemos también una clasificación de las simetrías infinitesimales de tipo no puntual. Sea  $\tilde{X}$  un campo de vectores en  $T^{2k-1}Q$ .

1. Se dice que  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica si  $[\xi_L, \tilde{X}] = 0$ .
2. Se dice que  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan si  $L_{\tilde{X}}\alpha_L$  es exacta, es decir,  $L_{\tilde{X}}\alpha_L = df$  y  $\tilde{X}E_L = 0$ .

También se obtiene las siguientes relaciones entre ellas:

1. Una simetría de Noether es una simetría de Lie.
2. Una simetría infinitesimal de  $L$  es una simetría de Noether.
3. Una simetría de Cartan es una simetría dinámica.
4. Si  $X$  es una simetría de Noether, entonces  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  es una simetría de Cartan.
5. Si  $X$  es una simetría de Lie, entonces  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  es una simetría dinámica.

Como principal resultado obtenemos el siguiente teorema de Noether:

**Teorema de Noether:** *Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan, con  $L_{\tilde{X}}\alpha_L = df$ , entonces  $f - \alpha_L(\tilde{X})$  es una constante del movimiento. Recíprocamente, si  $f$  es una constante del movimiento y  $Z$  es su campo de vectores hamiltoniano en  $T^{2k-1}Q$ ,  $i_Z\omega_L = df$ , entonces  $Z$  es una simetría de Cartan.*

También se estudian detalladamente las simetrías de un sistema hamiltoniano para encontrar definiciones similares para la contrapartida hamiltoniana del sistema lagrangiano dado y la relación entre ellas.

## 2. Caso no-autónomo (o dependiente del tiempo).

En primer lugar, estudiamos la simetrías de los sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo. Comenzamos considerando una variedad cosimpléctica  $(M, \Omega, \eta)$  en la que introducimos la dinámica a partir de una función hamiltoniana  $H \in C^\infty(M)$ . Basándonos en este análisis podemos estudiar las simetrías de un sistema lagrangiano dependiente del tiempo.

El espacio de evolución de una variedad diferenciable  $Q$  es la variedad diferenciable  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  de todos los  $k$ -jets,  $j_t^k \sigma$ , de aplicaciones  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow Q$ . Un lagrangiano dependiente del tiempo de orden  $k$  es una función  $L : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotamos por  $E_L$  la energía asociada a  $L$  y por  $\Theta_L$  y  $\Omega_L = -d\Theta_L$  las correspondientes formas de Poincaré-Cartan. Todas ellas están definidas en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . Las ecuaciones globales del movimiento son:

$$i_X \Omega_L = 0 \quad , \quad i_X dt = 1 \quad .$$

Como  $(\Omega_L, dt)$  define una estructura cosimpléctica en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ , existe un único campo de vectores  $\xi_L$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  satisfaciendo la ecuación anterior. Llamaremos a  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange.  $\xi_L$  es una ecuación diferencial de orden  $2k$  y las soluciones de  $\xi_L$  son las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Se dice que una función  $f : J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  si  $\xi_L f = 0$ .

Si  $X$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$  denotamos por  $X^{(\tau, \tau)}$  la elevación completa de  $X$  a  $J^r(\mathbb{R}, Q)$  (véase [124]). Sea  $X$  un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$  y  $d_T$  el operador de Tulczyjew. Obtenemos la siguiente clasificación de las simetrías puntuales:

1. Se dice que  $X$  es una simetría de Lie si

$$[\xi_L, X^{(2k-1, 2k-1)}] = d_T(\tau)\xi \quad ,$$

con  $\tau = dt(X)$ .

2. Se dice que  $X$  es una simetría de Noether si

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L = df \quad ,$$

para alguna función  $f$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ .

3. Se dice que  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si

$$X^{(k,k)}(L) = -d_T(\tau)L,$$

con  $\tau = dt(X)$ .

Clasificamos también las simetrías no necesariamente puntuales. Sea  $\tilde{X}$  un campo de vectores en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ .

1.  $\tilde{X}$  se dice que es simetría dinámica de  $\xi_L$  si

$$[\xi_L, \tilde{X}] = \xi_L(\tau)\xi_L,$$

con  $\tau = dt(\tilde{X})$ .

2.  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan si

$$L_{\tilde{X}}\Theta_L = df,$$

para alguna función  $f$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ .

Se obtienen las mismas relaciones que en el caso autónomo entre todas estas simetrías del sistema lagrangiano.

Asimismo, se encuentra el siguiente teorema de Noether:

**Teorema de Noether:** Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan (como en la definición anterior) entonces  $F = f - \Omega_L(\tilde{X})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ . Recíprocamente, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  existe un campo de vectores  $Z$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  de modo que

$$i_Z\Omega_L = dF.$$

Así,  $Z$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $Z + g\xi_L$  con  $g : J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  es también una simetría de Cartan.

También estudiamos las simetrías de la contrapartida hamiltoniana y la relación entre ellas a través de la aplicación de Legendre  $Leg : J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(T^{k-1}Q)$ .

II. La segunda parte de la memoria está dedicada al estudio de los sistemas lagrangianos degenerados. Como antes, obtenemos una clasificación completa de las simetrías y se demuestran varios Teoremas de Noether. La herramienta matemática fundamental será en este caso la geometría presimpléctica. Introducimos además un concepto que será fundamental en los capítulos sucesivos: el de estructura casi-producto. A grosso modo, una estructura casi-producto en una variedad distingue dos distribuciones complementarias.

### 1. Clasificación de simetrías para sistemas lagrangianos degenerados.

Consideremos un sistema presimpléctico  $(M, \omega, \alpha)$  siendo  $\omega$  una 2-forma cerrada de rango constante y  $\alpha$  una 1-forma cerrada. Cuando se estudian las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega = \alpha,$$

es posible que éstas no estén bien definidas más que en una subvariedad  $M_f$  (variedad final de ligaduras) de  $M$ . La subvariedad  $M_f$  es el resultado de aplicar el algoritmo de Gotay y Nester a la ecuación anterior. Nuestro estudio de las simetrías y constantes del movimiento siempre estará referido a esta subvariedad  $M_f$ .

Empecemos, primero, considerando una estructura presimpléctica  $(M_f, j_f^* \omega, j_f^* \alpha)$  donde  $j_f : M_f \rightarrow M$  es la inclusión de  $M_f$  en  $M$ . Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f) &= \{X \in \mathfrak{X}(M_f) / i_X \omega_{M_f} = \alpha_{M_f}\}, \\ \mathfrak{X}^{\omega}(M_f) &= \{X \in \mathfrak{X}(M_f) / (i_X \omega = \alpha)_{/M_f}\}. \end{aligned}$$

Introducimos las siguientes definiciones de constantes del movimiento:

1. Una función  $F : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de una solución  $\xi \in \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  si  $\xi F = 0$ .
2. Una función  $F : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  si verifica que  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f) F = 0$ .
3. Una función  $F : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega}(M_f)$  si  $\mathfrak{X}^{\omega}(M_f) F = 0$ .

Sea  $X$  un campo de vectores en  $M_f$ . Se obtiene los siguientes tipos de simetrías infinitesimales:

1.  $X$  es una simetría dinámica de  $\xi$  si  $[X, \xi] = 0$ .
2.  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  si

$$[X, \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)] \subset \ker \omega_{M_f} .$$

3.  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega}(M_f)$  si

$$[X, \mathfrak{X}^{\omega}(M_f)] \subset \ker \omega \cap TM_f .$$

4.  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  si

$$i_X \omega_{M_f} = dG \quad \text{e} \quad i_X \alpha_{M_f} = 0 .$$

Encontramos también el siguiente teorema de Noether:

**Teorema de Noether:** *Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$ , entonces  $G$  (de la definición anterior) es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ , entonces existe un campo de vectores  $X$  en  $M_f$  tal que*

$$i_X \omega_{M_f} = dG ,$$

*y, además,  $X$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $X + Z$ , con  $Z \in \ker \omega_{M_f}$ , es también una simetría de Cartan.*

A continuación, consideramos un lagrangiano degenerado  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  y estudiamos las simetrías infinitesimales del sistema presimpléctico particular  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ . En este caso, introducimos también las definiciones de simetrías de Noether y del lagrangiano como en el caso regular.

Suponemos que el lagrangiano es casi regular para estudiar la parte hamiltoniana. En este caso,  $Leg(TQ) = M_1$  es una subvariedad diferenciable y  $Leg$  es una submersión sobre  $M_1$ . Estudiamos como en los dos capítulos anteriores la relación entre las simetrías de ambas formulaciones: lagrangiana y hamiltoniana. Por otro lado cuando se estudia un sistema lagrangiano

degenerado no es posible garantizar que en la subvariedad  $M_f$  las soluciones de la dinámica verifiquen la condición de ecuación diferencial de segundo orden  $((JX)(x) = C(x), x \in M_f$ , siendo  $J$  y  $C$  la estructura casi-tangente canónica y el campo de Liouville de  $TQ$ , respectivamente). Para resolver este problema, nos restringiremos a una subvariedad  $S$  de  $M_f$  donde se garantiza la existencia de al menos una solución de la dinámica que verifica la condición de ecuación diferencial de segundo orden. Estudiamos también la simetrías y constantes del movimiento en la subvariedad  $S$  de  $M_f$ .

El resto del capítulo se dedica a aplicar estos resultados a distintos casos particulares:

1. Dinámica hamiltoniana generalizada. Dado un lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es posible definir una estructura presimpléctica en la suma de Whitney  $T^*Q \oplus TQ$ . Esta construcción es también conocida como formulación de Skinner y Rusk [133, 134]. Encontramos relaciones entre las simetrías de este sistema presimpléctico y las obtenidas a partir del lagrangiano  $L$  en  $TQ$ .
2. Lagrangianos afines en las velocidades. Si en  $Q$  tenemos una 1-forma  $\mu$  y una función  $h$  de modo que  $d\mu$  sea simpléctica es posible definir un lagrangiano degenerado  $L = \hat{\mu} + h^V$ . Relacionamos las simetrías de ambos sistemas: simpléctico en  $Q$  y presimpléctico en  $TQ$ .
3. Reducción de sistemas lagrangianos degenerados. Dado un lagrangiano degenerado  $L$  es posible definir, bajo condiciones adecuadas, la variedad cociente  $TQ/\ker\omega_L$  que es simpléctica. En esta sección se relacionan las simetrías infinitesimales de ambos sistemas.
4. Grupos de Lie de simetrías. Dada una acción presimpléctica de un grupo  $G$  sobre  $Q$  de modo que su levantamiento completo deje al lagrangiano degenerado  $L$  invariante, es posible encontrar constantes del movimiento para el sistema presimpléctico a partir de la aplicación momento.

Finalmente, se obtiene la clasificación de las simetrías infinitesimales para sistemas presimplécticos. A partir de estos resultados se puede obtener de un modo muy sencillo la clasificación de las simetrías para el caso de lagrangianos degenerados dependientes del tiempo.

## 2. Estructuras casi-producto asociadas a sistemas presimplécticos

Se introducen las estructuras casi-producto  $F$ , con proyectores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  adaptadas a una variedad presimpléctica  $(M, \omega)$  (una de las distribuciones  $\text{Im}\mathcal{B}$  es la distribución característica de la forma presimpléctica). Si esta estructura es integrable la variedad presimpléctica estará dotada, de un modo natural, de un corchete de Poisson. Aprovechamos este hecho para obtener un proceso de reducción de Poisson de variedades presimplécticas. Para hacer esto, supondremos que existe una estructura casi-producto integrable que está adaptada a  $\omega$  y es invariante por un grupo de Lie de simetrías  $G$  que actúa presimplécticamente en  $M$ . Si todos los campos de vectores  $\xi_M$  pertenecen a la distribución regular y  $\mu$  es un valor regular de la aplicación momento  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , entonces el espacio reducido  $M_\mu = \frac{J^{-1}(\mu)}{G_\mu}$  está dotado de una forma presimpléctica reducida y de una estructura casi-producto reducida que definen precisamente el corchete de Poisson reducido obtenido a partir del corchete de Poisson inducido en  $M$ . En definitiva, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema de reducción presimpléctica:** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica dotada de una estructura casi-producto integrable  $F$  adaptada a  $\omega$  y sea  $G$  un grupo de Lie actuando presimplécticamente en  $M$ . Sea  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  una aplicación momento equivariante para esta acción. Supondremos también que  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es  $G$ -invariante y  $\xi_M \in \text{Im}\mathcal{A}$ ,  $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ . Supongamos que  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  es un valor regular de  $J$  y que el grupo de isotropía  $G_\mu$  actúa libre y propiamente en  $J^{-1}(\mu)$ . Entonces, la variedad cociente  $M_\mu$  está provista de una única forma presimpléctica  $\omega_\mu$  tal que  $\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega$ , y una única estructura casi-producto  $F_\mu$  adaptada a  $\omega_\mu$  de modo que el corchete de Poisson inducido  $\{ , \}_{\mathcal{A}_\mu}$  coincide con el corchete de Poisson  $\{ , \}_\mu$  obtenido a partir de la reducción de Poisson.*

Para introducir la dinámica en este estudio, suponemos primero que existe una función hamiltoniana  $H$  que es  $G$ -invariante de tal modo que el sistema presimpléctico  $(M, \omega, H)$  admite una dinámica global, o, en otras palabras, no existen ligaduras secundarias. Entonces, obtenemos la dinámica reducida. Si hay ligaduras secundarias, desarrollamos el algoritmo de ligaduras y así obtenemos una variedad presimpléctica con dinámica global.

## 3. Sistemas lagrangianos degenerados y estructuras casi-producto.

Se reformula la teoría clásica de Dirac-Bergmann (véase [38]) en términos de estructuras

casi-producto. Dado un lagrangiano degenerado  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  casi regular, podemos definir una estructura presimpléctica  $(M_1, \omega_1, dh_1)$  en  $M_1$  donde  $\omega_1$  es la restricción a  $M_1$  de la forma simpléctica canónica de  $T^*Q$  y  $h_1$  la proyección de la energía. Sea  $H$  una extensión arbitraria de  $h_1$  a  $T^*Q$  y  $X_H$  su campo hamiltoniano respecto de la estructura casi-producto canónica de  $T^*Q$ . Si  $M_1$  es la variedad final de ligaduras, es decir, solamente hay ligaduras primarias, aprovechando la clasificación de las ligaduras en primera o segunda clase, obtenemos el siguiente resultado:

1. Si únicamente hay ligaduras de segunda clase podemos construir una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $T^*Q$  de modo que:  $(\mathcal{P}(X_H))_{/M_1}$  es la única solución de la ecuación  $i_X \omega_1 = dh_1$ .
2. Si únicamente hay ligaduras de primera clase se fija el “gauge” considerando una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_1$ . Una solución de la dinámica es  $\mathcal{A}_1(X_{H/M_1})$ .
3. Si  $M_1$  tiene ligaduras de primera y segunda clase se puede construir la estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $T^*Q$  y se fija el “gauge” eligiendo una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$ . Una solución de la dinámica es  $\mathcal{A}_1((\mathcal{P}(X_H))_{/M_1})$ .

De un modo similar se construyen estructuras casi-producto adecuadas en el caso en el que aparecen ligaduras secundarias.

Caracterizamos también las estructuras casi-producto en  $TQ$  que son Legendre-proyectables y estudiamos el problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden. Retomamos el ejemplo de los lagrangianos  $L$  afines en las velocidades. En este caso, una estructura casi-producto adaptada a  $\omega_L$  no es nada más que una conexión en el sentido de Ehresmann.

III. En la tercera parte de la memoria, se introducen ligaduras o restricciones en los sistemas lagrangianos. Este tipo de ligaduras ha sido estudiadas ampliamente en el contexto del Cálculo de Variaciones (véanse [44, 119, 123]). Nosotros seguimos el procedimiento clásico de introducir estas ligaduras en las ecuaciones del movimiento del sistema a través de multiplicadores de Lagrange, siguiendo a Cariñena y Rañada [25, 118].

### 1. Sistemas lagrangianos no-holonómicos y estructuras casi-producto.

Consideremos un lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  sujeto a un sistema de ligaduras no-holonómicas  $\{\phi_i\}$ :

$$\phi_i = \hat{\mu}_i + h_i^V, \quad \text{localmente} \quad \phi_i = (\mu_i)_A(q)\dot{q}^A + h_i(q),$$

donde  $\mu_i$  y  $h_i$  son 1-formas y funciones en  $Q$ , respectivamente. Las ecuaciones del movimiento del sistema sujeto a las ligaduras son:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \\ d\phi_i(X) = 0, \end{cases}$$

donde  $\mu_i^V = \tau_Q^* \mu_i$  ( $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  es la proyección canónica) y las funciones  $\lambda^i$  son los multiplicadores de Lagrange. Considérense los campos  $i_{Z_i} \omega_L = \mu_i^V$  y la matriz  $C$  con elementos  $C_{ij} = Z_i(\phi_j)$ .

Si la matriz  $C$  es regular construimos una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $TQ$  de modo que la proyección del campo de vectores de Euler-Lagrange,  $\mathcal{P}(\xi_L)$ , determina la solución de la dinámica del sistema sujeto a las ligaduras  $\{\phi_i\}$ . Esta estructura casi-producto es:

$$\mathcal{Q} = C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i,$$

y  $\mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q}$ , donde  $C^{ij}$  son los elementos de la matriz inversa de  $C$ .

En el caso de que la matriz  $C$  no sea regular encontramos un algoritmo similar al de Dirac-Bergmann que nos permite obtener una subvariedad final de ligaduras donde existen soluciones consistentes de la dinámica constreñida. Asimismo, construimos una estructura casi-producto que nos permite obtener por proyección la solución de la dinámica.

El caso de un sistema sujeto a ligaduras holonómicas  $h_i \in C^\infty(Q)$ , ( $1 \leq i \leq m$ ), con  $m < n$  se estudia como un caso particular del caso no-holonómico, donde las ecuaciones del movimiento son ahora:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i dh_i^V, \\ dh_i^c(X) = 0, \\ dh_i^V(X) = 0. \end{cases}$$

Obtenemos una globalización de los resultados anteriores para sistemas lagrangianos con ligaduras no-holonómicas lineales en las velocidades. Consideramos una distribución  $D$  en  $Q$  localmente generada por la anulación de las 1-formas  $\mu_i$  y sus levantamientos  $D^V$  y  $D^T$  a  $TQ$ . En este caso las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} (i_X \omega_L - dE_L) \in \mathcal{I}(D^V), \\ X \in D^T. \end{cases}$$

donde denotamos por  $\mathcal{I}(D^V)$  el anulador de  $D^V$ . En el caso regular se construye una estructura casi-producto que nos permite obtener por proyección la solución de la dinámica. Como aplicación estudiamos un problema clásico de Synge y Vranceanu (véanse [138, 147]). Consideremos una variedad de Riemann  $Q$  con métrica  $g$  y conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Sea  $D$  una distribución en  $Q$ . Se trata de obtener una nueva conexión lineal  $\nabla^*$  en  $Q$  de modo que las geodésicas de  $\nabla^*$  sean las soluciones del problema variacional sujeto a las ligaduras lineales determinadas por la distribución  $D$ .

Se estudia también la formulación hamiltoniana y la equivalencia de ambos formalismos cuando los sistemas están sujetos a ligaduras. Por, último generalizamos esta técnica para el caso dependiente del tiempo.

Aplicamos las técnicas desarrolladas en este capítulo a cuatro interesantes ejemplos:

1. Disco rodando sin deslizamiento,
2. Trineo de Čaplygin,
3. Movimiento de dos partículas de masa idéntica, unidas por un segmento de longitud fija, en un plano vertical en la que la velocidad del punto medio está dirigida en la dirección del segmento.
4. Sistema de  $N$ -partículas.

## 2. Un algoritmo de ligaduras para sistemas lagrangianos degenerados sujetos a ligaduras no-holonómicas.

En el último capítulo de la memoria estudiamos el caso de sistemas lagrangianos singulares con ligaduras no-holonómicas. Se obtiene un algoritmo similar al de Gotay-Nester para sistemas

libres. Si llamamos  $P_1$  a  $TQ$  entonces construimos la sucesión de subvariedades:

$$\dots \rightarrow \bar{P}_k \rightarrow \dots \rightarrow \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_1 \rightarrow P_1 = TQ ,$$

donde,  $\bar{P}_1$  es

$$\bar{P}_1 = \{x \in TQ / \langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \ker \omega_L \rangle(x) = 0, \phi_i(x) = 0\} ,$$

para algunos valores de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$ . Para todo  $k > 1$ , se obtiene

$$\bar{P}_{k+1} = \{x \in \bar{P}_k / \langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, T\bar{P}_k^\perp \rangle(x) = 0\} ,$$

donde

$$T_x \bar{P}_k^\perp = \{v \in T_x TQ / \omega_L(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x \bar{P}_k\} .$$

Si este algoritmo se estabiliza, esto es, si existe un entero  $k$  tal que  $\bar{P}_k = \bar{P}_{k+1}$ , y  $\dim \bar{P}_k > 0$ , obtenemos una variedad final de ligaduras  $\bar{P}_k$  donde existen soluciones completamente consistentes de la dinámica. Analizamos también las simetrías y constantes del movimiento, el formalismo hamiltoniano y el problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden.

Se construyen estructuras casi-producto adecuadas, que nos permiten fijar la dinámica del sistema sujeto a ligaduras, en el caso de que el sistema libre admita una dinámica global.

**Parte I**

**SISTEMAS LAGRANGIANOS DE  
ORDEN SUPERIOR**

# Capítulo 1

## Sistemas lagrangianos autónomos

Existen varios ejemplos clásicos en los que aparecen sistemas mecánicos definidos por una función lagrangiana de orden superior. Por ejemplo, un lagrangiano de segundo orden aparece en la teoría de vigas elásticas [1, 5, 62] y en el movimiento de una partícula rotando alrededor de un punto que se traslada a su vez (véanse [31, 120]). El último ejemplo puede ser generalizado a una partícula relativista clásica con spin (véase [121]). Todos estos sistemas lagrangianos son regulares y, en ellos, van a aparecer simetrías infinitesimales.

En este capítulo obtenemos una clasificación de las simetrías infinitesimales de un sistema mecánico de orden superior y derivamos, de un modo natural, a partir de ellas, las correspondientes constantes del movimiento por el procedimiento usual en los Teoremas de Noether [72]. Dividimos este estudio en dos partes. En la primera parte de este capítulo, estudiamos los sistemas lagrangianos autónomos (véase [69]), y el segundo capítulo lo dedicaremos al caso no autónomo o dependiente del tiempo (véase [70]).

Usaremos la formulación simpléctica para mecánica de orden superior establecida por de León y Rodrigues en [81, 82] (véanse también [35, 144]). La teoría de levantamientos de funciones y campos de vectores a fibrados tangentes de orden superior, desarrollada por Morimoto, Yano, Ishihara y otros (véanse [107, 153]), será utilizada con profusión.

Se obtiene una clasificación de las simetrías infinitesimales. Las dividimos en dos categorías: simetrías puntuales (simetrías infinitesimales del lagrangiano, simetrías de Noether y simetrías de Lie) y simetrías infinitesimales no puntuales (simetrías de Cartan y dinámicas). Se estudian las relaciones entre ellas y se obtienen las correspondientes constantes del movimiento a partir

de las simetrías infinitesimales del lagrangiano, simetrías de Noether y simetrías de Cartan. Esta clasificación es la extensión natural de la obtenida por Prince [116, 117] (véanse también Crampin [32] y de León y Rodrigues [90]). Probamos, además, que las simetrías de Cartan son precisamente los campos hamiltonianos correspondientes a las constantes del movimiento (véanse [30, 35]). Por otro lado, mostramos como se obtienen lagrangianos alternativos para la dinámica a partir de un lagrangiano y una simetría de Lie.

El primer capítulo está organizado del siguiente modo. Las Secciones 1.1 y 1.2 están dedicadas a una breve introducción de la formulación geométrica de la mecánica lagrangiana de orden superior. La clasificación de simetrías infinitesimales para sistemas lagrangianos de orden superior es estudiada en la Sección 1.3. En la Sección 1.4 mostramos como la existencia de un grupo de Lie de simetrías del lagrangiano induce constantes del movimiento. De este modo, nuestros resultados están relacionados con el procedimiento de reducción simpléctica de sistemas lagrangianos de orden superior desarrollado en [80]. En las secciones 1.5 y 1.6 se estudian las simetrías de un sistema hamiltoniano arbitrario, y se establece la relación entre las simetrías del sistema lagrangiano y las de su contrapartida hamiltoniana a través de la transformación de Legendre-Ostrogradskii. Finalmente aplicamos estos resultados a varios ejemplos.

## 1.1 Fibrados tangentes de orden superior

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y sea  $T^k Q$  su fibrado tangente de orden  $k$ . Denotaremos por  $\tau^k : T^k Q \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por  $\tau^k(j_0^k \sigma) = \sigma(0)$ .  $T^k Q$  es también un fibrado sobre  $T^r Q$ ,  $0 \leq r < k$ , siendo  $\tau_r^k : T^k Q \rightarrow T^r Q$  la proyección canónica definida por  $\tau_r^k(j_0^k \sigma) = j_0^r \sigma$ . Identificaremos  $T^0 Q$  con  $Q$ , y  $T^1 Q$  es el fibrado tangente  $TQ$  de  $Q$ . Se verifica que  $\tau_s^k = \tau_r^k \circ \tau_s^r$ ,  $0 \leq s < r < k$ , con  $\tau_0^k = \tau^k$ .

Si  $(q^A)$ ,  $1 \leq A \leq n$  son coordenadas locales en un entorno  $U$  de  $Q$ , denotamos por  $(q_0^A, q_1^A, \dots, q_k^A)$ ,  $1 \leq A \leq n$ , las coordenadas inducidas en  $T^k U = (\tau^k)^{-1}(U)$ , donde  $q_0^A = q^A$ . Así,  $T^k Q$  es una variedad diferenciable de dimensión  $(k+1)n$ . Si  $\phi : Q \rightarrow Q'$  es una aplicación diferenciable, la  $k$ -jet prolongación canónica se denotará por  $T^k \phi : T^k Q \rightarrow T^k Q'$ .

Definimos la aplicación  $T_{k+1,k} : T^{k+1} Q \rightarrow T(T^k Q)$  del siguiente modo:  $T_{k+1,k}(j_0^{k+1} \sigma) = j_0^1 z$ , donde  $z : \mathbb{R} \rightarrow T^k Q$ ,  $z(t) = j_0^k \sigma_t$  y  $\sigma_t(s) = \sigma(t+s)$ . En coordenadas locales,  $T_{k+1,k}$

está definida por  $T_{k+1,k} : (q^A, q_1^A, \dots, q_{k+1}^A) \longrightarrow (q^A, q_1^A, \dots, q_k^A; q_1^A, q_2^A, \dots, q_{k+1}^A)$ . Se deduce que  $\tau_{T^k Q} \circ T_{k+1,k} = \tau_k^{k+1}$ , donde  $\tau_{T^k Q} : T(T^k Q) \longrightarrow T^k Q$  es la proyección canónica del fibrado tangente. Usaremos la aplicación  $T_{k+1,k}$  para construir el operador diferencial  $d_T$  que envía cada función  $f$  en  $T^k Q$  en una función  $d_T f$  en  $T^{k+1} Q$  definida por  $d_T f(j_0^{k+1} \sigma) = T_{k+1,k}(j_0^{k+1} \sigma)(f)$ . Este operador está localmente definido por la siguiente expresión:

$$d_T f = \sum_{i=0}^k q_{i+1}^A \frac{\partial f}{\partial q_i^A}$$

y, así,  $d_T(q_i^A) = q_{i+1}^A$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Puesto que  $d_T(fg) = (d_T f)((\tau_k^{k+1})^* g) + ((\tau_k^{k+1})^* f) d_T g$ , podemos extender el operador  $d_T$  a un operador que envía una  $p$ -forma en  $T^k Q$  en una  $p$ -forma en  $T^{k+1} Q$  y conmuta con la derivada exterior, es decir,  $d_T \circ d = d \circ d_T$  [139, 82, 35].

Denotaremos por  $J_1$  la estructura casi tangente canónica de orden  $k$  en  $T^k Q$ .  $J_1$  es un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  en  $T^k Q$  expresado localmente por:

$$J_1\left(\frac{\partial}{\partial q_r^A}\right) = (r+1) \left(\frac{\partial}{\partial q_{r+1}^A}\right), \quad 0 \leq r \leq k-1,$$

$$J_1\left(\frac{\partial}{\partial q_k^A}\right) = 0.$$

Si definimos  $J_r = (J_1)^r$ , obtenemos  $k-1$  campo de tensores de tipo  $(1, 1)$ . Podemos, entonces, definir los operadores diferenciales  $i_{J_r}$  y  $d_{J_r}$  como sigue:

$$(i_{J_r} \alpha)(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \alpha(X_1, \dots, J_r X_i, \dots, X_p), \quad \alpha \in \bigwedge^p(T^k Q)$$

$$d_{J_r} = [i_{J_r}, d] = i_{J_r} d - d i_{J_r}.$$

Denotaremos por  $C_1$  el campo de vectores de Liouville en  $T^k Q$ , el cual se describe localmente por

$$C_1 = \sum_{r=1}^k r q_r^A \left(\frac{\partial}{\partial q_r^A}\right).$$

Se definen  $C_r = J_{r-1} C_1$ ,  $2 \leq r \leq k$ .

Recordaremos brevemente los diferentes tipos de levantamientos de funciones y campos de vectores en  $Q$  a  $T^k Q$  (véanse [107, 153]).

**Definición 1.1.1** Para  $\lambda = 0, 1, \dots, k$ , se define la  $\lambda$ -elevación  $f^{(\lambda,k)}$  de una función  $f$  en  $Q$  a  $T^k Q$  como la función

$$f^{(\lambda,k)}(j_0^k \sigma) = \left[ \frac{d^\lambda (f \circ \sigma)}{dt^\lambda} \right]_0,$$

donde  $j_0^k \sigma \in T^k Q$ .

Así, se deduce  $f^{(0,k)} = (\tau^k)^* f$  y  $f^{(\lambda,k)} = (\tau_r^k)^* f^{(\lambda,r)}$ ,  $0 \leq \lambda \leq r < k$ .

**Proposición 1.1.1** Si  $f$  es una función en  $Q$ , se verifica que  $d_T f^{(\lambda,k)} = f^{(\lambda+1,k+1)}$ .

En coordenadas locales se obtiene

$$\sum_{i=0}^k q_{i+1}^A \frac{\partial f^{(\lambda,k)}}{\partial q_i^A} = f^{(\lambda+1,k+1)}.$$

**Definición 1.1.2** Sea  $X$  un campo de vectores en una variedad diferenciable  $Q$  y sean  $X^A$  las componentes de  $X$  en un entorno coordinado  $U$  de  $Q$  con coordenadas locales  $(q^A)$ . Se define la  $k$ -elevación ó  $k$ -levantamiento de  $X$  a  $T^k Q$ , como el campo de vectores  $X^{(k,k)}$  cuya expresión en coordenadas locales es:

$$X^{(k,k)} = \sum_{i=0}^k (X^A)^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial q_i^A}.$$

Si  $0 \leq \lambda < k$ , se define la  $\lambda$ -elevación de  $X$  a  $T^k Q$  como el campo de vectores  $X^{(\lambda,k)} = J_{k-\lambda} X^{(k,k)}$ .

La relación entre las elevaciones de funciones y campos de vectores se obtiene en la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.2** Si  $f$  es una función en  $Q$  y  $X$  un campo de vectores en  $Q$ , se verifica que:

$$X^{(\lambda,k)}(f^{(\mu,k)}) = (Xf)^{(\lambda+\mu-k,k)},$$

para  $\mu = 1, \dots, k$ .

De este modo, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial q_r^A} = \left( \frac{\partial}{\partial q^A} \right)^{(k-r,k)}$$

para  $r = 1, \dots, k$ .

**Proposición 1.1.3** Sean  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores en  $Q$ . Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} [X^{(\lambda,k)}, Y^{(\mu,k)}] &= [X, Y]^{(\lambda+\mu-k,k)}, \\ [X^{(\lambda,k)}, Y^{(\mu,k)}] &= 0, \text{ si } \lambda + \mu < k, \\ X^{(k,k)} \left( (\tau_{r+s}^k)^* (d_T^s f) \right) &= (\tau_{r+s}^k)^* \left( d_T^s (X^{(r,r)} f) \right), \end{aligned}$$

para cada función  $f$  en  $T^r Q$ ,  $r + s \leq k$ .

**Demostración:** Se sigue por un cálculo directo en coordenadas locales. ■

**Definición 1.1.3** Un campo de vectores  $\xi$  en  $T^k Q$  se dice que es una ecuación diferencial de orden  $(k + 1)$  ( $(k + 1)$ -ODE para simplificar) si  $J_1 \xi = C_1$ .

Así,  $\xi$  puede ser localmente escrito como

$$\xi = \sum_{\substack{A=1,\dots,n \\ j=0,\dots,k-1}} \left( q_{j+1}^A \frac{\partial}{\partial q_j^A} + \xi^A \frac{\partial}{\partial q_k^A} \right),$$

con  $\xi^A = \xi^A(q_0^B, q_1^B, \dots, q_k^B)$ . Se dice que una curva  $\sigma$  en  $Q$  es una solución de  $\xi$  si su  $k$ -jet prolongación  $j^k \sigma$  es una curva integral de  $\xi$ . Entonces,  $\sigma(t) = (q^A(t))$  es una solución de  $\xi$  si y sólo si es una solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden  $k + 1$ :

$$\frac{d^{k+1} q^A}{dt^{k+1}} = \xi^A \left( q^B(t), \frac{dq^B}{dt}, \dots, \frac{d^k q^B}{dt^k} \right), \quad 1 \leq A \leq n.$$

Finalmente, definiremos la elevación de un álgebra de Lie de campos de vectores. Sea  $\mathfrak{a}$  un álgebra de Lie de campos de vectores en  $Q$ , es decir,  $\mathfrak{a}$  es un subálgebra de Lie del álgebra de Lie,  $\mathfrak{X}(Q)$ , de todos los campos de vectores en  $Q$ . Definimos la elevación completa  $\mathfrak{a}^C$  de  $\mathfrak{a}$  a  $T^k Q$  como sigue:  $\mathfrak{a}^C = \{X^{(k,k)} \mid X \in \mathfrak{a}\}$ . De la Proposición 1.1.3, se sigue que  $\mathfrak{a}^C$  es un subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(T^k Q)$ .

## 1.2 Sistemas lagrangianos de orden superior

Sea  $L : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana de orden  $k$ . Se define la función energía de la siguiente forma:

$$E_L = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1}(C_r L)) - (\tau_k^{2k-1})^* L .$$

La 1-forma de Poincaré-Cartan asociada a  $L$  está definida como

$$\alpha_L = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1}(d_{J_r})L ,$$

y la 2-forma de Poincaré-Cartan es  $\omega_L = -d\alpha_L$ .

En coordenadas locales obtenemos que

$$\begin{aligned} E_L &= \sum_{r=0}^{k-1} \hat{p}_{r/A} q_{r+1}^A - L(q_0^A, \dots, q_k^A), \\ \alpha_L &= \sum_{r=0}^{k-1} \hat{p}_{r/A} dq_r^A , \\ \omega_L &= \sum_{r=0}^{k-1} dq_r^A \wedge d\hat{p}_{r/A} , \end{aligned}$$

donde las funciones  $\hat{p}_{r/A}$ ,  $0 \leq r \leq k-1$ , son los momentos generalizados de Jacobi-Ostrogradskii definidos por

$$\hat{p}_{r/A} = \sum_{s=0}^{k-r-1} (-1)^r d_T^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_{r+s+1}^A} \right)$$

(véase Whittaker [152]). El lagrangiano  $L$  se dice que es **regular** si la matriz hessiana

$$(\partial^2 L / \partial q_k^A \partial q_k^B)$$

es regular. De otro modo,  $L$  se dice que es **singular** o **degenerado**. Un simple cálculo en coordenadas locales muestra que  $L$  es regular si y solamente si  $\omega_L$  es simpléctica. La ecuación global del movimiento es

$$i_X \omega_L = dE_L , \tag{1.2.1}$$

y, al ser  $L$  regular, se verifica que  $\omega_L$  es simpléctica y, entonces, existe un campo de vectores  $\xi_L$ , llamado el campo de vectores de Euler-Lagrange en  $T^{2k-1}Q$  que satisface la ecuación (1.2.1). Además,  $\xi_L$  es una ecuación diferencial de orden  $2k$  y sus soluciones son precisamente las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $L$ :

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \left( \frac{\partial L}{\partial q_r^i} \right) = 0. \quad (1.2.2)$$

Si se calcula el corchete de Poisson definido por  $\omega_L$  obtenemos:

$$\{q_r^A, q_s^B\} = 0, \quad \{\hat{p}_{r/A}, \hat{p}_{s/B}\} = 0, \quad \{q_r^A, \hat{p}_{s/B}\} = \delta_B^A \delta_{rs}, \quad 0 \leq r < s \leq k-1.$$

La proposición siguiente será útil en la próxima sección.

**Proposición 1.2.1** *Si  $Y$  es un campo de vectores en  $Q$  y  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange asociado con un lagrangiano  $L$  de orden  $k$ , entonces:*

1.  $\left( (\tau_{k+s}^{2k-1})^* (d_T^s (d_{J_r} L)) \right) (Y^{(2k-1, 2k-1)}) = (\tau_{k+s}^{2k-1})^* (d_T^s ((d_{J_r} L)(Y^{(k,k)})))$ ,
2.  $\left( (\tau_{k+s}^{2k-1})^* (d_T^s (d_{J_r} L)) \right) (\xi_L) = (\tau_{k+s}^{2k-1})^* (d_T^s (C_r L))$ ,

para  $0 \leq r \leq k$  y  $0 \leq s < k$ .

**Demostración:** Cálculo directo en coordenadas locales. ■

### 1.3 Simetrías y simetrías infinitesimales

Sea  $\xi$  una ecuación diferencial de orden  $r+1$  en  $T^r Q$  (véase [97]).

**Definición 1.3.1** *Una función diferenciable  $f : T^r Q \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una constante del movimiento de  $\xi$  si  $\xi f = 0$ .*

En otras palabras, si  $\gamma : I \rightarrow T^r Q$  es una curva integral de  $\xi$ , entonces,  $f \circ \gamma$  es una función constante.

**Definición 1.3.2** *Un difeomorfismo  $\phi : T^r Q \rightarrow T^r Q$  se dice que es una simetría de  $\xi$  si  $T\phi(\xi) = \xi$ .*

De la definición, se sigue que, si  $\gamma$  es una curva integral de  $\xi$ , entonces,  $\phi \circ \gamma$  es también una curva integral de  $\xi$ .

**Definición 1.3.3** Un difeomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow Q$  se dice que es una simetría puntual de  $\xi$  si  $T^r\varphi$  es una simetría de  $\xi$ .

Es evidente que una simetría puntual envía soluciones de  $\xi$  en soluciones de  $\xi$ .

**Definición 1.3.4** Una simetría de Lie de  $\xi$  es un campo de vectores  $X$  en  $Q$  tal que  $[\xi, X^{(r,r)}] = 0$ . Una simetría dinámica de  $\xi$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $T^rQ$  tal que  $[\xi, \tilde{X}] = 0$ . Por supuesto, si  $X$  es una simetría de Lie, entonces,  $X^{(r,r)}$  es una simetría dinámica de  $\xi$ .

Entonces,  $X$  (respectivamente,  $\tilde{X}$ ) es una simetría de Lie (respectivamente, dinámica) de  $\xi$  si y solamente si su flujo está formado por simetrías puntuales (respectivamente, simetrías).

Sea  $L(\xi)$  (resp.,  $D(\xi)$ ) un conjunto de simetrías de Lie (resp., dinámicas) de  $\xi$ .  $L(\xi)$  y  $D(\xi)$  son subálgebras de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$  y  $\mathfrak{X}(T^rQ)$ , respectivamente. Además, se verifica que  $L(\xi)^C \subset D(\xi)$ .

Si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi$  y  $f$  es una constante del movimiento de  $\xi$ , entonces  $\tilde{X}f$  es una nueva constante del movimiento, puesto que

$$0 = [\xi, \tilde{X}]f = \xi(\tilde{X}f) - \tilde{X}(\xi f) = \xi(\tilde{X}f).$$

**Observación 1.3.1** Supongamos que  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi$  que es proyectable a  $Q$ . Entonces, existe un campo de vectores  $X$  en  $Q$  tal que  $\tilde{X}$  y  $X$  están  $r^r$ -relacionados, es decir,  $T^r\tilde{X} = X$ . De este modo,  $J_r\tilde{X} = X^{(0,r)}$  y  $\tilde{X} - X^{(r,r)} \in \text{Ker } J_r$ . De  $[\tilde{X}, \xi] = 0$  y  $J_1[X^{(r,r)}, \xi] = 0$  deducimos, por un cálculo en coordenadas locales, que  $\tilde{X} = X^{(r,r)}$ . Entonces las simetrías dinámicas proyectables son precisamente los levantamientos completos de las simetrías de Lie. ♠

Ahora estudiaremos las simetrías infinitesimales de los campos de vectores de Euler-Lagrange. Consideremos una función lagrangiana regular  $L : T^kQ \rightarrow \mathbb{R}$  de orden  $k$  con campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_L$ . Si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi_L$ ,  $\tilde{X}E_L$  es una constante del movimiento.

**Definición 1.3.5** 1. Un difeomorfismo  $\phi : Q \rightarrow Q$  se dice que es una simetría de  $L$  si  $L \circ T^k \phi = L$ . En este caso,  $E_L$ ,  $\alpha_L$  y  $\omega_L$  son invariantes por  $T^{2k-1} \phi$ .

2. Se dice que es un campo de vectores  $X$  en  $Q$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si  $X^{(k,k)} L = 0$ . En este caso,  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L = 0$ ,  $L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L = 0$  y  $L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \omega_L = 0$ .

En otras palabras,  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si su flujo está formado por simetrías de  $L$ .

**Proposición 1.3.1** Sea  $X$  una simetría infinitesimal de  $L$ . Entonces  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ .

**Demostración:** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  con flujo  $\{\phi_t\}$ , entonces  $\alpha_L$ ,  $\omega_L$  y  $E_L$  son  $T^{2k-1} \phi_t$ -invariantes. Consecuentemente,  $\xi_L$  es también invariante. Así  $[\xi_L, X^{(2k-1,2k-1)}] = 0$ , es decir,  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ . ■

De la Definición 1.3.5, se sigue que el conjunto  $I(L)$  de todas las simetrías infinitesimales de  $L$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$ . De la Proposición 1.3.1 deducimos que  $I(L)$  es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie  $L(\xi_L)$  de simetrías de  $\xi_L$ .

Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  la constante del movimiento  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L$  es trivial, es decir  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L = 0$ . Sin embargo, podemos obtener una nueva constante del movimiento a partir de  $X$ .

**Lema 1.3.1** Sea  $W$  un campo de vectores en  $T^{2k-1} Q$ . Se verifica que

$$\xi_L(\alpha_L(W)) = \alpha_L([\xi_L, W]) + W((\tau_k^{2k-1})^* L).$$

**Demostración:** De  $i_{\xi_L} \omega_L = dE_L$  y de la Proposición 1.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (i_{\xi_L} \omega_L - dE_L)(W) \\ &= -i_{\xi_L} d\alpha_L(W) - dE_L(W) \\ &= W(\alpha_L(\xi_L)) - \xi_L(\alpha_L(W)) - \alpha_L([W, \xi_L]) - W(E_L) \\ &= W\left(\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1} d_{J_r} L)(\xi_L)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\xi_L(\alpha_L(W)) - \alpha_L([W, \xi_L]) - W(E_L) \\
= & W \left( \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1}(C_r L)) \right) \\
& -\xi_L(\alpha_L(W)) - \alpha_L([W, \xi_L]) - W(E_L) \\
= & -\xi_L(\alpha_L(W)) - \alpha_L([W, \xi_L]) + W((\tau_k^{2k-1})^* L). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposición 1.3.2** (Teorema de Noether) Sea  $X$  una simetría infinitesimal de  $L$ . Entonces

$$\sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1}(X^{(k-r,k)} L))$$

es una constante del movimiento de  $\xi_L$ .

**Demostración:** De la Proposición 1.3.1 y como  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , se deduce que

$$\xi_L \left( \alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)}) \right) = \alpha_L \left( [\xi_L, X^{(2k-1,2k-1)}] \right) + X^{(2k-1,2k-1)}((\tau_k^{2k-1})^* L) = 0.$$

Así,  $\alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)})$  es una constante del movimiento. De la Proposición 1.2.1 se deduce que

$$\begin{aligned}
\alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)}) &= \left( \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} d_{J_r} L \right) (X^{(2k-1,2k-1)}) \\
&= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} \left( d_{J_r} L(X^{(k,k)}) \right) \\
&= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} (X^{(k-r,k)} L). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposición 1.3.3** Sea  $L : T^k Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular de orden  $k$  con campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_L$ . Si  $X$  es un campo de vectores en  $Q$  tal que

$$L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L \quad y \quad X^{(2k-1,2k-1)} E_L$$

son cerradas, entonces  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ .

**Demostración:** En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
i_{[X^{(2k-1,2k-1)}, \xi_L]} \omega_L &= L_{X^{(2k-1,2k-1)}} i_{\xi_L} \omega_L - i_{\xi_L} L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \omega_L \\
&= L_{X^{(2k-1,2k-1)}} dE_L - i_{\xi_L} (L_{X^{(2k-1,2k-1)}} (-d\alpha_L)) \\
&= L_{X^{(2k-1,2k-1)}} dE_L + i_{\xi_L} d(L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L) \\
&= d(X^{(2k-1,2k-1)} E_L) + i_{\xi_L} d(L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ . ■

Bajo las hipótesis de la Proposición 1.3.3, se deduce que  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L$  es una constante del movimiento. Sin embargo, en algunos casos, esta constante del movimiento es trivial, es decir,  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L = 0$ . Este caso particular, más la condición de que  $L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L$  sea exacta, nos lleva a la noción de simetría de Noether.

**Definición 1.3.6** *Un campo de vectores  $X$  en  $Q$  se dice que es una simetría de Noether si  $L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L$  es exacta (es decir,  $L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L = df$ ) y  $X^{(2k-1,2k-1)} E_L = 0$ .*

De este modo,  $\omega_L$  y  $E_L$  son invariantes por la elevación  $X^{(2k-1,2k-1)}$  de una simetría de Noether  $X$ .

Se sigue de la Proposición 1.3.3 que una simetría de Noether es también una simetría de Lie de  $\xi_L$ . El resultado siguiente nos muestra como una simetría de Noether define una constante del movimiento (de ahí su nombre).

**Proposición 1.3.4** *Si  $X$  es una simetría de Noether, entonces*

$$f - \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} (X^{(k-r,k)} L)$$

*es una constante del movimiento de  $\xi_L$ .*

**Demostración:** En efecto, se verifica que

$$df = L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L$$

$$\begin{aligned}
&= i_{X^{(2k-1,2k-1)}} d\alpha_L + di_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L \\
&= -i_{X^{(2k-1,2k-1)}} \omega_L + d\left(\alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)})\right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$d\left(f - \alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)})\right) = -i_{X^{(2k-1,2k-1)}} \omega_L.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\xi_L\left(f - \alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)})\right) &= d\left(f - \alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)})\right)(\xi_L) \\
&= -i_{X^{(2k-1,2k-1)}} \omega_L(\xi_L) \\
&= X^{(2k-1,2k-1)} E_L \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\alpha_L(X^{(2k-1,2k-1)}) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1}(X^{(k-r,k)} L),$$

hemos obtenido el resultado requerido. ■

**Proposición 1.3.5** *Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces  $X$  es una simetría de Noether.*

**Demostración:** Sea  $Y$  un campo de vectores en  $Q$ . Como  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  y de las Proposiciones 1.1.3 y 1.2.1, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \alpha_L(Y^{(2k-1,2k-1)}) &= X^{(2k-1,2k-1)} \left( \alpha_L(Y^{(2k-1,2k-1)}) \right) - \alpha_L([X, Y]^{(2k-1,2k-1)}) \\
&= X^{(2k-1,2k-1)} \left( \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* \frac{1}{r!} d_T^{r-1}(Y^{(k-r,k)} L) \right) \\
&\quad - \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1}([X, Y]^{(k-r,k)} L) \\
&= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} \left( X^{(k,k)} Y^{(k-r,k)} L \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[X, Y]^{(k-r, k)} L) \\
= & \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} (X^{(k, k)} Y^{(k-r, k)} L \\
& - Y^{(k-r, k)} X^{(k, k)} L - [X, Y]^{(k-r, k)} L).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se verifica que  $[X^{(k, k)}, Y^{(k-r, k)}] = [X, Y]^{(k+k-r-k, k)} = [X, Y]^{(k-r, k)}$  y, por lo tanto,

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \alpha_L = 0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
0 & = L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \alpha_L(\xi_L) \\
& = X^{(2k-1, 2k-1)}(\alpha_L(\xi_L)) - \alpha_L([X^{(2k-1, 2k-1)}, \xi_L]) \\
& = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\tau_{k+r-1}^{2k-1})^* d_T^{r-1} (C_r L) \\
& = X^{(2k-1, 2k-1)}(E_L),
\end{aligned}$$

puesto que  $X^{(2k-1, 2k-1)}((\tau_k^{2k-1})^* L) = 0$ . Así,  $L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \alpha_L = 0$  y  $X^{(2k-1, 2k-1)} E_L = 0$ . Entonces  $X$  es una simetría de Noether. ■

El siguiente resultado relaciona las simetrías de Noether y las simetrías infinitesimales de  $L$ .

**Proposición 1.3.6** *Si  $X$  es una simetría de Noether tal que*

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \alpha_L = 0,$$

*entonces  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ .*

**Demostración:** De la Proposición 1.3.3, se deduce que  $X$  es una simetría de Lie. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 & = (L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \alpha_L)(\xi_L) \\
& = X^{(2k-1, 2k-1)}(\alpha_L(\xi_L)) - \alpha_L([X^{(2k-1, 2k-1)}, \xi_L])
\end{aligned}$$

$$= X^{(2k-1, 2k-1)}(\alpha_L(\xi_L)).$$

En consecuencia, se verifica que

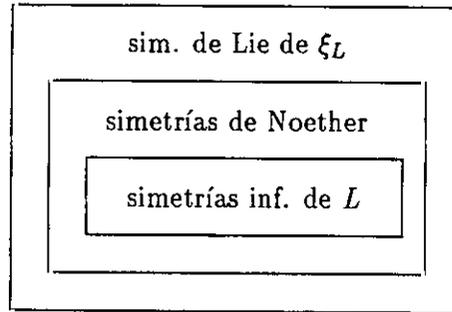
$$\begin{aligned} X^{(2k-1, 2k-1)}((\tau_k^{2k-1})^* L) &= X^{(2k-1, 2k-1)}(\alpha_L(\xi_L)) - X^{(2k-1, 2k-1)}(E_L) \\ &= X^{(2k-1, 2k-1)}(\alpha_L(\xi_L)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y, así,  $X$  es una simetría infinitesimal del lagrangiano  $L$ . ■

Por lo tanto, las simetrías infinitesimales de  $L$  verifican que  $\alpha_L$  y  $E_L$  son invariantes por  $X^{(2k-1, 2k-1)}$ .

De la Definición 1.3.6, deducimos que el conjunto  $N(\xi_L)$  de todas las simetrías de Noether de  $\xi_L$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$  y, de la Proposición 1.3.3, que  $N(\xi_L)$  es una subálgebra de Lie de  $L(\xi_L)$ .

El siguiente diagrama resume las relaciones entre todas las clases de simetrías infinitesimales:



**Observación 1.3.2** A partir de una simetría de Lie se puede obtener un lagrangiano alternativo al lagrangiano regular de partida. Sea  $\phi$  una simetría puntual de  $\xi_L$ . Se deduce que  $\xi_L$  está  $T^{2k-1}\phi$ -relacionado consigo mismo, es decir,  $T(T^{2k-1}\phi)\xi_L = \xi_L$ . Un cálculo directo muestra que  $L$  y  $L \circ T^k\phi$  son equivalentes. Además,

$$\begin{aligned} i_{\xi_L}\omega_{L \circ T^k\phi} &= i_{T(T^{2k-1}\phi)\xi_L}\omega_{L \circ T^k\phi} \\ &= (T^{2k-1}\phi)^*(i_{\xi_L}\omega_L) = (T^{2k-1}\phi)^*(dE_L) \\ &= d(E_L \circ T^{2k-1}\phi) = dE_L, \end{aligned}$$

puesto que  $E_L \circ T^{2k-1}\phi = E_L$ . Esto implica que  $L \circ T^k\phi$  es un lagrangiano equivalente a  $L$  porque su campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_{L \circ T^k\phi}$  coincide con  $\xi_L$  (véase [88] para el estudio de la equivalencia de lagrangianos de orden superior). La versión infinitesimal de este resultado es la siguiente: si  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ , entonces  $X^{(k,k)}L$  es un lagrangiano (quizás singular) con una dinámica global  $\xi_L$ . Repitiendo este argumento, obtenemos una familia de nuevos lagrangianos  $(X^{(k,k)})^r L$ ,  $0 \leq r$ , tales que cada uno de ellos está subordinado al precedente,

$$(X^{(k,k)})^r L < (X^{(k,k)})^{r-1} L < \dots < X^{(k,k)} L < L$$

(véase [100] para la definición de lagrangiano subordinado). ♠

En lo sucesivo, estudiaremos simetrías infinitesimales que no son necesariamente de tipo puntual. La definición de simetría de Noether puede ser generalizada del siguiente modo.

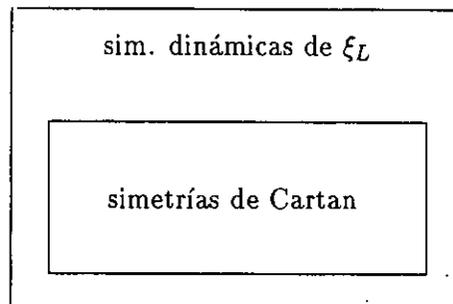
**Definición 1.3.7** Una simetría de Cartan en  $T^{2k-1}Q$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  tal que  $L_{\tilde{X}}\alpha_L$  es exacta, es decir,  $L_{\tilde{X}}\alpha_L = df$  y  $\tilde{X}E_L = 0$ .

Entonces  $\omega_L$  y  $E_L$  son invariantes por  $\tilde{X}$ .

Si  $X$  es una simetría de Noether,  $X^{(2k-1,2k-1)}$  es una simetría de Cartan. Usando el mismo argumento al de la demostración de la Proposición 1.3.3, podemos probar que una simetría de Cartan es una simetría dinámica. Los conjuntos  $D(\xi_L)$  y  $C(\xi_L)$  de simetrías dinámicas y de Cartan, respectivamente, son subálgebras de Lie de  $\mathfrak{X}(T^{2k-1}Q)$  y, además, se verifica que  $C(\xi_L) \subset D(\xi_L)$ . También se deduce

$$I(L)^C \subset L(\xi_L)^C \subset D(\xi_L), \quad N(\xi_L)^C \subset C(\xi_L).$$

De este modo, se obtiene el siguiente diagrama:



El siguiente resultado da una correspondencia biyectiva entre simetrías de Cartan y constantes del movimiento.

**Teorema 1.3.1** (*Teorema de Noether y su recíproco*) Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan entonces  $f - \alpha_L(\tilde{X})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ , donde  $f$  es la función que aparece en la Definición 1.3.7. Recíprocamente, si  $f$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  y  $Z$  es un campo de vectores hamiltoniano en  $T^{2k-1}Q$  tal que  $i_Z\omega_L = df$ , entonces  $Z$  es una simetría de Cartan.

**Demostración:** Se verifica

$$df = L_{\tilde{X}}\alpha_L = i_{\tilde{X}}d\alpha_L + di_{\tilde{X}}\alpha_L = -i_{\tilde{X}}\omega_L + d(\alpha_L(\tilde{X})).$$

Por lo tanto,  $d(f - \alpha_L(\tilde{X})) = -i_{\tilde{X}}\omega_L$  y, así, obtenemos

$$\xi_L(f - \alpha_L(\tilde{X})) = -i_{\tilde{X}}\omega_L(\xi_L) = \tilde{X}E_L = 0.$$

Recíprocamente, si  $i_Z\omega_L = df$ , donde  $f$  es una constante del movimiento, se obtiene que

$$i_Z\omega_L = -i_Zd\alpha_L = di_Z\alpha_L - L_Z\alpha_L$$

y, por lo tanto,

$$L_Z\alpha_L = d(\alpha_L(Z) - f).$$

De este modo

$$0 = \xi(f) = df(\xi) = i_{\xi}i_Z\omega_L = i_Zi_{\xi}\omega_L = Z(E_L). \quad \blacksquare$$

**Observación 1.3.3** El Teorema 1.3.1 es una generalización de un resultado de Marmo y Mukunda [98]. Esta generalización fue obtenida por Crampin *et al.* [35] y más recientemente por Cariñena *et al.* [30] siguiendo un procedimiento diferente (véase también [21]). Nótese, además, que el Teorema 1.3.1 se verifica para toda simetría de Cartan. En efecto, una simetría de Cartan  $\tilde{X}$  es, precisamente, un campo de vectores hamiltoniano para la variedad simpléctica  $(T^{2k-1}Q, \omega_L)$ , es decir,  $\tilde{X} = Z_g$ , donde  $g$  es una constante del movimiento. Nótese, además, que el propio campo de vectores  $\xi_L$  es una simetría de Cartan. En efecto, se tiene que

$$L_{\xi_L} \alpha_L = d(\alpha_L(\xi_L) - E_L), \quad \xi_L(E_L) = 0.$$

$\xi_L$  es una simetría de Cartan que no es proyectable. Siguiendo lo anteriormente dicho,  $\xi_L$  es una simetría de Cartan cuya correspondiente constante del movimiento es justamente la energía. También, las simetrías de Noether de  $\xi_L$  son precisamente las proyecciones de las simetrías de Cartan proyectables, como ya vimos en la Observación 1.3.1.♠

La siguiente tabla muestra la clasificación de las simetrías infinitesimales para un sistema lagrangiano de orden superior:

<p>Simetrías puntuales</p> <p><math>Q</math></p>	<p><math>X^{(k,k)}L = 0</math></p> <p>simetrías infinitesimales de <math>L</math></p>	<p><math>L_{X^{(2k-1,2k-1)}}\alpha_L = df</math></p> <p><math>X^{(2k-1,2k-1)}E_L = 0</math></p> <p>simetrías de Noether</p>	<p><math>[X^{(2k-1,2k-1)}, \xi_L] = 0</math></p> <p>simetrías de Lie</p>
<p>Simetrías no puntuales</p> <p><math>T^{2k-1}Q</math></p>		<p><math>L_{\tilde{X}}\alpha_L = df</math></p> <p><math>\tilde{X}E_L = 0</math></p> <p>simetrías de Cartan</p>	<p><math>[\tilde{X}, \xi_L] = 0</math></p> <p>simetrías dinámicas</p>

Sistemas lagrangianos de orden superior

## 1.4 Grupos de Lie de simetrías

En esta sección, describiremos un tipo particular de simetrías infinitesimales que aparecen por la acción de un grupo de Lie  $G$  en  $Q$ .

Sea  $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$  una acción de un grupo de Lie  $G$  en una variedad diferenciable  $Q$ . Entonces  $\Phi$  se eleva a una acción  $\Phi^r : G \times T^r Q \rightarrow T^r Q$  de  $G$  en  $T^r Q$  definida como sigue:

$$(\Phi^r)_a : T^r Q \rightarrow T^r Q, \quad (\Phi^r)_a = T^r(\Phi_a), \quad a \in G.$$

Denótese por  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ . Si  $\gamma \in \mathfrak{g}$ , entonces  $\gamma_{T^r Q}$  denota el campo de vectores

en  $T^rQ$  generado por la acción levantada, es decir  $\gamma_{T^rQ}$  es el generador infinitesimal del flujo  $T^r(\Phi_{\exp t\gamma})$ . De la definición deducimos que  $\gamma_{T^rQ}$  y  $\gamma_{T^sQ}$  están  $\tau_s^r$ -relacionados, es decir,  $T\tau_s^r(\gamma_{T^rQ}) = \gamma_{T^sQ}$ . Supongamos que el lagrangiano  $L : T^kQ \rightarrow \mathbb{R}$  es invariante por  $G$ , o de otro modo,  $L$  es invariante por la acción  $\Phi^k$ , es decir  $L \circ T^k\Phi_a = L, \forall a \in G$ . En este caso, se dice que  $G$  es un grupo de simetrías de  $L$ . Se deduce que (véase [80])  $\alpha_L$  y  $E_L$  son  $G$ -invariantes:  $(T^{2k-1}\Phi_a)^*\alpha_L = \alpha_L$ , y  $E_L \circ T^{2k-1}\Phi_a = E_L$ , para todo  $a \in G$ . Así, si  $G$  es un grupo de simetrías de  $L$  entonces  $\omega_L$  es  $G$ -invariante, es decir, la acción  $\Phi^{2k-1} : G \times T^{2k-1}Q \rightarrow T^{2k-1}Q$  es simpléctica. Usando estos resultados se puede describir un procedimiento de reducción simpléctica para sistemas lagrangianos de orden superior ([80]). Desde otro punto de vista, se deduce que  $\gamma_Q$  es una simetría infinitesimal de  $L$ . Las correspondientes constantes del movimiento son precisamente las obtenidas a través de la aplicación momento (véase [80] para más detalles).

## 1.5 Simetrías de sistemas hamiltonianos

Sea  $(S, \omega, H)$  un sistema hamiltoniano, esto es,  $(S, \omega)$  es una variedad simpléctica y  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función hamiltoniana. Entonces, existe un único campo de vectores  $X_H$  en  $S$  tal que satisface la siguiente ecuación:

$$i_{X_H}\omega = dH.$$

Llamaremos a  $X_H$  el campo de vectores hamiltoniano con energía  $H$ .

Esta sección está dedicada al estudio de las simetrías de un sistema hamiltoniano.

**Definición 1.5.1** Una constante del movimiento es una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X_H f = 0$ .

Entonces, si  $\gamma : I \rightarrow S$  es una curva integral de  $X_H$ , se deduce que  $f \circ \gamma$  es una función constante. En otras palabras,  $f$  es constante a lo largo del movimiento.

**Definición 1.5.2** Un difeomorfismo  $\phi : S \rightarrow S$  se dice que es una simetría de  $X_H$  si se verifica que  $T\phi(X_H) = X_H$ .

Se sigue que, si  $\gamma$  es una curva integral de  $X_H$ , entonces  $\phi \circ \gamma$  es también una curva integral de  $X_H$ .

**Definición 1.5.3** Una simetría dinámica de  $X_H$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $S$  tal que  $[X_H, \tilde{X}] = 0$ .

Por lo tanto,  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $X_H$  si y solamente si su flujo está formado por simetrías.

Sea  $D(X_H)$  el conjunto de simetrías dinámicas de  $X_H$ . Entonces  $D(X_H)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(S)$ .

Si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $X_H$  y  $f$  es una constante del movimiento,  $X_H f$  es una nueva constante del movimiento, puesto que

$$0 = [X_H, \tilde{X}]f = X_H(\tilde{X}f) - \tilde{X}(X_H f) = X_H(\tilde{X}f).$$

**Definición 1.5.4** Una simetría de Cartan de  $X_H$  es un campo de vectores hamiltoniano  $\tilde{X}$  en  $S$  tal que  $\tilde{X}H = 0$ .

El conjunto  $C(X_H)$  de simetrías de Cartan de  $X_H$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(S)$  y  $C(X_H) \subset D(X_H)$ .

**Observación 1.5.1** Las Definiciones 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4 y 1.3.7 son casos particulares de las Definiciones 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3 y 1.5.4 cuando se considera el sistema hamiltoniano particular  $(T^{2k-1}Q, \omega_L, E_L)$ . ♠

Si  $\tilde{X} = X_f$  es una simetría de Cartan, deducimos que  $f$  es una constante del movimiento.

La tabla de la página siguiente resume la clasificación de simetrías infinitesimales para un sistema hamiltoniano.

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $T^*Q$  su fibrado cotangente,  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$  la proyección canónica,  $\lambda_Q$  la 1-forma de Liouville y  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$ . Definimos el operador  $\iota$  que transforma campos de vectores en  $Q$  en funciones en  $T^*Q$  como sigue:

$$(\iota X)(\alpha) = \alpha(X(x)),$$

para toda  $\alpha \in T_x^*Q$ . Localmente, si  $X = X^A \partial/\partial q^A$ , se deduce que

$$(\iota X)(q^A, p_A) = p_A X^A,$$

<p>Simetrías</p> <p><math>S</math></p>	$\tilde{X}H = 0$ $\tilde{X} = X_f$ simetrías de Cartan	$[\tilde{X}, X_H] = 0$ simetrías dinámicas
--	--	--

Sistema hamiltoniano  $(S, \omega, H)$

donde  $(q^A, p_A)$  son las coordenadas inducidas en  $T^*Q$ .

La elevación completa de  $X$  a  $T^*Q$  es el campo de vectores  $X^{c^*}$  definido por

$$i_{X^{c^*}}\omega_Q = d(\iota X); \quad (1.5.3)$$

es decir,  $X^{c^*}$  es el campo de vectores hamiltoniano  $X_{\iota X}$ . En coordenadas locales, se obtiene

$$X^{c^*} = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} - p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial p_A}.$$

Puesto que  $[X^{c^*}, Y^{c^*}] = [X, Y]^{c^*}$  podemos definir la elevación completa  $\mathfrak{a}^{c^*}$  de una álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$  de campos de vectores en  $Q$  a  $T^*Q$  como sigue:

$$\mathfrak{a}^{c^*} = \{X^{c^*} / X \in \mathfrak{a}\}.$$

Consideremos el sistema dinámico  $(T^*Q, \omega_Q, H)$  donde  $H$  es una función en  $T^*Q$ . De (1.5.3) se deduce que  $X^{c^*}$  es un campo de vectores hamiltoniano, es decir,  $X^{c^*} = X_{\iota(X)}$ . Así,  $X^{c^*}$  es una simetría de Cartan si y solamente si  $X^{c^*}H = 0$ .

**Definición 1.5.5** Dada una función hamiltoniana  $H$  en  $T^*Q$  una simetría de Noether es un campo de vectores  $X$  en  $Q$  que verifica la condición  $X^{c^*}H = 0$ .

Si  $X$  es una simetría de Noether,  $\iota(X)$  es una constante del movimiento.

El conjunto de simetrías de Noether,  $N(X_H)$ , es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie  $\mathfrak{X}(Q)$  y, además,  $N(X_H)^{c^*} \subset C(X_H)$ .

La siguiente tabla muestra la clasificación de las simetrías infinitesimales para un sistema hamiltoniano clásico:

simetrías puntuales $Q$	$X^c H = 0$ simetrías de Noether	
simetrías no puntuales $T^*Q$	$\tilde{X}H = 0$ $\tilde{X} = X_f$ simetrías de Cartan	$[\tilde{X}, X_H] = 0$ simetrías dinámicas

Sistema hamiltoniano clásico  $(T^*Q, \omega_Q, H)$

## 1.6 Relación entre las simetrías de sistemas lagrangianos y sistemas hamiltonianos

Sea  $L : T^kQ \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana y

$$Leg : T^{2k-1}Q \rightarrow T^*(T^{k-1}Q)$$

la transformación de Legendre-Ostrogradskii. Esta aplicación se puede describir localmente del siguiente modo:

$$Leg : (q^A, q_1^A, \dots, q_{2k-1}^A) \rightarrow (q^A, \dots, q_{k-1}^A; \hat{p}_{0/A}, \dots, \hat{p}_{k-1/A}).$$

Si  $\lambda_{T^{k-1}Q}$  es la forma de Liouville en  $T^*(T^{k-1}Q)$ , entonces,

$$Leg^* \lambda_{T^{k-1}Q} = \alpha_L,$$

y

$$Leg^* \omega_{T^{k-1}Q} = \omega_L.$$

En general, la transformación de Legendre-Ostrogradskii definida por un lagrangiano regular no es un difeomorfismo global. Únicamente podemos asegurar que es un difeomorfismo local. Si  $Leg$  es un difeomorfismo global entonces se dice que  $L$  es hiperregular. Para simplificar, supondremos que el lagrangiano  $L$  es hiperregular.

Sea  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange en  $T^{2k-1}Q$  y  $E_L$  la energía. Entonces el campo de vectores dado por  $X_H = (T Leg)\xi_L$  es un campo de vectores hamiltoniano en  $T^*(T^{k-1}Q)$  con energía hamiltoniana  $H = E_L \circ Leg^{-1}$ . Es decir,  $(T^*(T^{k-1}Q), \omega_{T^{k-1}Q}, H)$  es un sistema hamiltoniano.

**Proposición 1.6.1** *Sea  $\tilde{X}$  un campo de vectores en  $T^{2k-1}Q$  e  $\tilde{Y}$  el campo de vectores  $Leg$ -relacionado en  $T^*(T^{k-1}Q)$ . Entonces*

1.  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi_L$  si y solamente si  $\tilde{Y}$  es una simetría dinámica de  $X_H$ .
2.  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan para el sistema  $(T^{2k-1}Q, \omega_L, E_L)$  si y solamente si  $\tilde{Y}$  es una simetría de Cartan para el sistema  $(T^*(T^{k-1}Q), \omega_{T^{k-1}Q}, H)$ .

Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$  y  $X^{(k-1, k-1)}$  su elevación completa a  $T^{k-1}Q$ . Si  $(X^{(k-1, k-1)})^{c^*}$  es una simetría de Cartan de  $X_H$ , entonces  $\iota(X^{(k-1, k-1)})$  es una constante del movimiento, cuya expresión local es

$$\iota(X^{(k-1, k-1)}) = \sum_{\substack{A=1, \dots, n \\ i=0, \dots, k-1}} d_T^i(X^A) p_i^A.$$

Sea  $X$  una simetría infinitesimal de  $L$ . Entonces  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  y  $(X^{(k-1, k-1)})^{c^*}$  están  $Leg$ -relacionados (véase [80]). Deducimos, por lo tanto, que  $X^{(k-1, k-1)}$  es una simetría de Noether para el sistema  $(T^*(T^{k-1}Q), \omega_{T^{k-1}Q}, H)$ . Ahora, estableceremos el resultado recíproco.

**Lema 1.6.1** *Si  $X$  es un campo de vectores en  $Q$ , entonces  $\alpha_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$  e  $\iota(X^{(k-1, k-1)})$  están  $Leg$ -relacionados, es decir,  $\iota(X^{(k-1, k-1)}) \circ Leg = \alpha_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$ .*

**Demostración:** Se sigue por un cálculo directo en coordenadas locales. ■

**Proposición 1.6.2** *Sea  $Y$  un campo de vectores en  $T^{k-1}Q$  que es una simetría de Noether para el sistema  $(T^*(T^{k-1}Q), \omega_{T^{k-1}Q}, H)$ , y sea  $X$  una simetría de Noether para el sistema  $(T^{2k-1}Q, \omega_L, E_L)$ . Si  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  e  $Y^{c^*}$  están  $Leg$ -relacionados entonces*

1.  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ .

2.  $Y = X^{(k-1, k-1)}$

**Demostración:** Del Lema 1.6.1, deducimos que  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  es un campo de vectores hamiltoniano con energía hamiltoniana  $\alpha_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$  y, entonces,

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}}\alpha_L = 0.$$

De la Proposición 1.3.6 deducimos que  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ .

El Lema 1.6.1 también implica que  $(X^{(k-1, k-1)})^{c^*}$  e  $Y^{c^*}$  son campos hamiltonianos con la misma energía  $\iota(X^{(k-1, k-1)})$ . Por lo tanto,

$$(X^{(k-1, k-1)})^{c^*} = Y^{c^*},$$

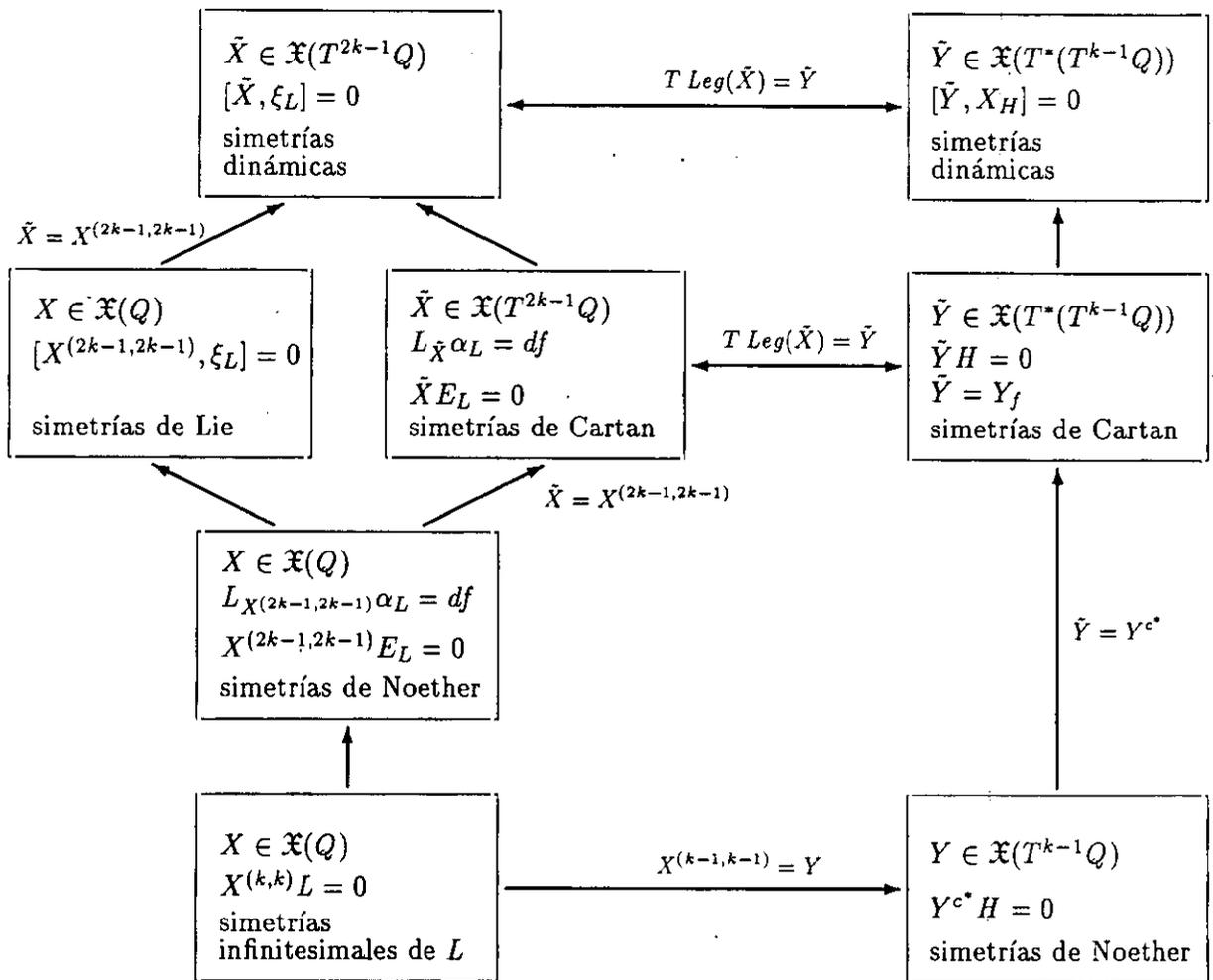
y, entonces,  $Y = X^{(k-1, k-1)}$ . ■

**Observación 1.6.1** Supongamos que  $k = 1$  y sea  $\tilde{Y}$  una simetría de Cartan proyectable de  $(T^*Q, \omega_Q, H)$ . Entonces,  $\tilde{Y}$  está *Leg*-relacionado con un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $TQ$  y, así,  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan proyectable del sistema  $(TQ, \omega_L, E_L)$ . Por lo tanto,  $\tilde{X} = X^c$  y,  $X$  es una simetría de Noether. De la Proposición 1.6.2, deducimos que  $X$  es, de hecho, una simetría infinitesimal de  $L$ . Este comentario nos demuestra que, en general, la proyección de una simetría de Cartan proyectable de un sistema hamiltoniano  $(T^*Q, \omega_Q, H)$  no es una simetría de Noether. ♠

La tabla de la página siguiente muestra la relación entre las simetrías de un sistema lagrangiano y las de su contrapartida hamiltoniana.

## 1.7 Ejemplos

Consideraremos dos ejemplos de sistemas lagrangianos de orden dos.



Relación entre las simetrías de sistemas lagrangianos y hamiltonianos

### 1.7.1 Partícula con spin clásica

Sea  $L : T^2\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función lagrangiana de orden 2:

$$L(q^A, q_1^A, q_2^A) = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_1^A)^2 - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2,$$

donde  $(q^A) = (q^1, q^2, q^3)$  son las coordenadas canónicas de  $\mathbb{R}^3$ . Como sabemos,  $L$  es el lagrangiano de una partícula rotando alrededor de un centro que se traslada [5, 31, 120, 121]. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{0/A} &= q_1^A + q_3^A, \quad \hat{p}_{1/A} = -q_2^A, \\ \alpha_L &= (q_1^A + q_3^A) dq_0^A - (q_2^A) dq_1^A, \\ \omega_L &= dq^A \wedge dq_1^A + dq^A \wedge dq_3^A - dq_1^A \wedge dq_2^A, \\ E_L &= \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_1^A)^2 - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2 + \sum_{A=1}^3 (q_1^A) q_3^A. \end{aligned}$$

De la ecuación  $i_{\xi_L} \omega_L = dE_L$  en  $T^3\mathbb{R}^3$ , se deduce que el campo de Euler-Lagrange es:

$$\xi_L = q_1^A \frac{\partial}{\partial q^A} + q_2^A \frac{\partial}{\partial q_1^A} + q_3^A \frac{\partial}{\partial q_2^A} - q_2^A \frac{\partial}{\partial q_3^A},$$

y, entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d^4 q^A}{dt^4} + \frac{d^2 q^A}{dt^2} = 0, \quad 1 \leq A \leq 3.$$

Nótese que  $\xi_L$  es una simetría de Cartan no-proyectable. Puesto que las traslaciones  $T_A = \frac{\partial}{\partial q^A}$ ,  $1 \leq A \leq 3$  son simetrías infinitesimales de  $L$ , entonces, de la Proposición 1.3.2, deducimos que

$$\alpha_L \left( \frac{\partial}{\partial q^A} \right)^{(3,3)} = \alpha_L \left( \frac{\partial}{\partial q^A} \right) = \hat{p}_{0/A}$$

son constantes del movimiento. En efecto,  $(q^A)$ ,  $1 \leq A \leq 3$  son coordenadas ignorables (o cíclicas) y, así pues, los correspondientes momentos son constantes del movimiento. En efecto, son las componentes del momento lineal [80]. Además,  $L$  es invariante por traslaciones en

$\mathbb{R}^3$ , o, en otras palabras,  $\mathbb{R}^3$  es un grupo de Lie de simetrías y  $\{T_A\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q^A} \right\}$  son simetrías infinitesimales de  $L$ .

También sabemos que  $L$  es invariante por el grupo de Lie  $SO(3)$ . El álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  de  $SO(3)$  puede ser identificada con  $\mathbb{R}^3$  dotado con el producto vectorial, es decir, si  $A \in \mathfrak{so}(3)$  es una matriz antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$A$  se identifica con el vector  $\vec{a} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$  de modo que  $[A, B] = AB - BA$  se corresponde con  $\vec{a} \times \vec{b}$ . La acción, después de esta identificación, es  $Aq = \vec{a} \times \vec{q}$ , es decir,  $SO(3)$  actúa en  $\mathbb{R}^3$  por rotaciones. El generador infinitesimal de  $\xi \in \mathbb{R}^3$  es  $\xi_{\mathbb{R}^3}(q) = \vec{\xi} \times \vec{q}$ . Ahora, podemos considerar los siguientes campos de vectores:

$$R_{32} = q^3 \frac{\partial}{\partial q^2} - q^2 \frac{\partial}{\partial q^3}, \quad R_{31} = q^3 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^1 \frac{\partial}{\partial q^3}, \quad R_{21} = q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^1 \frac{\partial}{\partial q^2},$$

que son precisamente los generadores infinitesimales obtenidos a partir de la base canónica de  $\mathfrak{so}(3)$ . Son simetrías infinitesimales de  $L$  y, por tanto, podemos calcular una constante del movimiento para cada uno de ellos:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_L(R_{32}^{(3,3)}) = (q_1^2 + q_3^2)q_0^3 - (q_1^3 + q_3^3)q_0^2 - q_2^2 q_1^3 + q_2^3 q_1^2, \\ \gamma_2 &= \alpha_L(R_{31}^{(3,3)}) = (q_1^1 + q_3^1)q_0^3 - (q_1^3 + q_3^3)q_0^1 - q_2^1 q_1^3 + q_1^1 q_2^3, \\ \gamma_3 &= \alpha_L(R_{21}^{(3,3)}) = (q_1^1 + q_3^1)q_0^2 - (q_1^2 + q_3^2)q_0^1 - q_2^1 q_1^2 + q_1^1 q_2^2. \end{aligned}$$

Las funciones  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  son las componentes del momento angular de  $L$  (ver [80]).

Un campo de vectores  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$  si  $[\xi_L, X^{(3,3)}] = 0$ . Podemos escribir esta condición de un modo equivalente como:

$$\xi(d_T^3(dq^A(X))) + d_T^2(dq^A(X)) = 0, \quad 1 \leq A \leq 3.$$

En consecuencia, los siguientes campos de vectores en  $\mathbb{R}^3$ :

$$X_A = q^A \frac{\partial}{\partial q^A}, \quad 1 \leq A \leq 3, \quad (A \text{ no suma}),$$

son simetrías de Lie de  $\xi_L$ . Sabemos que si para cada simetría de Lie  $X$  de  $\xi_L$ ,  $X^{(3,3)}E_L$  es una constante del movimiento. En nuestro caso, obtenemos tres constantes del movimiento:

$$\mu_A = (X_A^{(3,3)})E_L = (q_1^A)^2 - (q_2^A)^2 + 2q_1^A q_3^A, \quad 1 \leq A \leq 3,$$

Así,  $2E_L = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  y puesto que  $X_A^{(3,3)}E_L \neq 0$ , deducimos que los campos de vectores  $X_A$  no son simetrías de Noether. Por el Teorema 1.3.1, se obtiene que para cada constante del movimiento  $\mu_A$ , existe una simetría de Cartan  $Z_A$  tal que

$$i_{Z_A}\omega_L = d\mu_A, \quad 1 \leq A \leq 3.$$

Estas simetrías de Cartan son:

$$Z_A = 2 \left( q_1^A \frac{\partial}{\partial q^A} + q_2^A \frac{\partial}{\partial q_1^A} + q_3^A \frac{\partial}{\partial q_2^A} - q_2^A \frac{\partial}{\partial q_3^A} \right), \quad 1 \leq A \leq 3.$$

Las tres simetrías de Cartan  $Z_1, Z_2, Z_3$  no son proyectables, y, entonces, no son simetrías de Noether.

Obtuvimos seis constantes del movimiento  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \hat{p}_{0/1}, \hat{p}_{0/2}, \hat{p}_{0/3})$  que son linealmente independientes y están en involución. Por supuesto, podemos elegir  $(f_1 = E_L, f_2 = \mu_2, f_3 = \mu_3, f_4 = \hat{p}_{0/1}, f_5 = \hat{p}_{0/2}, f_6 = \hat{p}_{0/3})$ . Así, el sistema lagrangiano  $(T^3\mathbb{R}^3, \omega_L, E_L)$  es completamente integrable (véanse [1, 115]).

### 1.7.2 Vigas elásticas

Sea  $L : T^2\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano regular de orden 2:

$$L(q^A, q_1^A, q_2^A) = -\frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2.$$

Como sabemos,  $L$  describe la dinámica de una viga elástica en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  (véanse [1, 5, 140]). Se deduce:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{0/A} &= q_3^A, \hat{p}_{1/A} = -q_2^A, \\ \alpha_L &= (q_3^A)dq^A - (q_2^A)dq_1^A, \\ \omega_L &= dq^A \wedge dq_3^A - dq_1^A \wedge dq_2^A, \\ E_L &= \sum_{A=1}^3 q_1^A q_3^A - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2.\end{aligned}$$

El campo de vectores de Euler-Lagrange se expresa por:

$$\xi_L = q_1^A \frac{\partial}{\partial q^A} + q_2^A \frac{\partial}{\partial q_1^A} + q_3^A \frac{\partial}{\partial q_2^A},$$

y, entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d^4 q^A}{dt^4} = 0, \quad 1 \leq A \leq 3.$$

Como en el primer ejemplo,  $T_A = \frac{\partial}{\partial q^A}$ ,  $1 \leq A \leq 3$  son simetrías infinitesimales de  $L$ . Así, deducimos que

$$\alpha_L \left( \frac{\partial}{\partial q^A} \right)^{(3,3)} = \alpha_L \left( \frac{\partial}{\partial q^A} \right) = \hat{p}_{0/A}$$

son constantes del movimiento. En efecto,  $(q^A)$  son coordenadas ignorables y, por tanto, los correspondientes momentos son constantes del movimiento.

Como en el ejemplo anterior, un campo de vectores  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$  si y solamente si

$$\xi(d_T^3(dq^A(X))) = 0, \quad 1 \leq A \leq 3.$$

En consecuencia, los siguientes campos de vectores en  $\mathbb{R}^3$ :

$$X_A = q^A \frac{\partial}{\partial q^A}, \quad 1 \leq A \leq 3, \quad (A \text{ no suma}),$$

son simetrías de Lie de  $\xi_L$ . Las correspondientes constantes del movimiento son:

$$\mu_A = (X_A^{(3,3)})E_L = 2q_3^A q_1^A - (q_2^A)^2, 1 \leq A \leq 3.$$

Obviamente,  $2E_L = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ , y, puesto que  $X_A^{(3,3)}E_L \neq 0$ ,  $1 \leq A \leq 3$ , entonces  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  no son simetrías de Noether. Del Teorema 1.3.1, se deduce que, para cada constante del movimiento  $\mu_A$ , existe una simetría de Cartan  $Z_A$  tal que

$$i_{Z_A}\omega_L = d\mu_A, 1 \leq A \leq 3.$$

Así, se llega a que

$$Z_A = 2 \left( q_1^A \frac{\partial}{\partial q^A} + q_2^A \frac{\partial}{\partial q_1^A} + q_3^A \frac{\partial}{\partial q_2^A} \right), 1 \leq A \leq 3.$$

Hemos obtenido tres simetrías de Cartan que no son proyectables y, por lo tanto, no son simetrías de Noether. Las seis constantes del movimiento  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \hat{p}_{0/1}, \hat{p}_{0/2}, \hat{p}_{0/3})$  son linealmente independientes y están en involución. Podemos considerar, así,  $(g_1 = E_L, g_2 = \mu_2, g_3 = \mu_3, g_4 = \hat{p}_{0/1}, g_5 = \hat{p}_{0/2}, g_6 = \hat{p}_{0/3})$ . Entonces, el sistema lagrangiano  $(T^3\mathbb{R}^3, \omega_L, E_L)$  es completamente integrable.

## Capítulo 2

# Simetrías y constantes del movimiento de sistemas lagrangianos no-autónomos

En este capítulo, obtenemos una clasificación de las simetrías infinitesimales de un sistema lagrangiano no autónomo (dependiente del tiempo) y derivamos de ellas las correspondientes constantes del movimiento.

Como en el caso autónomo, obtenemos simetrías infinitesimales de dos clases: simetrías puntuales (simetrías infinitesimales del lagrangiano; simetrías de Noether y simetrías de Lie) y, también, simetrías de tipo no necesariamente puntual (simetrías dinámicas y de Cartan). Aquí, usamos la formulación cosimpléctica para mecánica de orden superior establecida por de León y Rodrigues en [84] (véanse también [1, 34, 90]). De hecho, nuestros primeros resultados se obtienen primero para el caso general de un sistema hamiltoniano en una variedad cosimpléctica. También adaptamos la teoría de elevaciones de funciones y campos de vectores a fibrados de jets (véase [124]) al caso particular de espacios de evolución de orden superior. Una clasificación para sistemas lagrangianos no-autónomos aparece en primer lugar en los artículos de Prince [116, 117] (véanse también, Sarlet y Cantrijn [128]; Sarlet [125] para la relación entre lagrangianos equivalentes y clases de equivalencia de simetrías dinámicas; y Cariñena y Martínez [23] para un teorema de Noether). En lo que respecta a los sistemas lagrangianos no-autónomos de orden

superior, algunos resultados fueron previamente obtenidos por Crampin, Sarlet y Cantrijn [35] y Cariñena, López y Martínez [21] (véanse también Sarlet [126, 129]). Las simetrías de sistemas lagrangianos de orden superior fueron también estudiadas por Grigore [57, 58, 59] pero en estos artículos se usa una formulación diferente de la mecánica lagrangiana, basada en los trabajos de Souriau [135].

Este segundo Capítulo está organizado como sigue. La sección 2.1 está dedicada al estudio de las simetrías infinitesimales de un sistema hamiltoniano dependiente del tiempo en el marco de las variedades cosimplécticas. Algunos resultados de esta sección serán aplicados en lo sucesivo. En las secciones 2.2 y 2.3 recordamos la formulación geométrica de los sistemas lagrangianos de orden superior en los espacios de evolución. La clasificación de simetrías para un sistema lagrangiano no-autónomo de orden superior se obtiene en la sección 2.4 y, en la sección 2.5, obtenemos la relación entre estas simetrías infinitesimales y las obtenidas en su contrapartida hamiltoniana a través de la transformación de Legendre. En la sección 2.6 se estudia un ejemplo para ilustrar esta clasificación.

## 2.1 Simetrías de sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo

Sea  $(M, \Omega, \eta)$  una variedad cosimpléctica de dimensión  $2m + 1$ , es decir,  $\Omega$  es una 2-forma cerrada,  $\eta$  es una 1-forma cerrada y  $\Omega^m \wedge \eta \neq 0$ . Considérese el isomorfismo de fibrados vectoriales:

$$b : TM \longrightarrow T^*M, \quad X \in T_x M \mapsto b(X) = i_X \Omega(x) + (i_X \eta(x)) \eta(x).$$

(nos referiremos a [90] para algunas definiciones y resultados sobre variedades cosimplécticas). Se denotará por  $R$  el campo de vectores de Reeb definido por  $R = b^{-1}(\eta)$ , es decir,

$$i_R \Omega = 0 \quad \text{e} \quad i_R \eta = 1.$$

Existen, en un entorno de cada punto, coordenadas canónicas  $(t, q^i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tales que

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i, \quad \eta = dt, \quad R = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Estas coordenadas son llamadas **coordenadas de Darboux**. Para cada función  $f \in C^\infty(M)$  podemos asociar los siguientes campos de vectores en  $M$  (véanse [14, 2]):

1. El campo de vectores **gradiente**,  $\text{grad } f$ , definido por

$$\text{grad } f = b^{-1}(df),$$

o, equivalentemente,

$$i_{\text{grad } f} \Omega = df - R(f)\eta, \quad i_{\text{grad } f} \eta = R(f).$$

En coordenadas de Darboux:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

2. El campo de vectores **hamiltoniano**  $X_f$  definido por

$$X_f = b^{-1}(df - R(f)\eta),$$

o, equivalentemente,

$$i_{X_f} \Omega = df - R(f)\eta, \quad i_{X_f} \eta = 0.$$

En coordenadas de Darboux:

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

3. El campo de vectores **evolución**  $E_f = R + X_f$ , cuya expresión en coordenadas de Darboux es:

$$E_f = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (2.1.1)$$

El corchete de Poisson de dos funciones  $f, g \in C^\infty(M)$  está definido por

$$\{f, g\} = \Omega(\text{grad } f, \text{grad } g) = \Omega(X_f, X_g) = \Omega(E_f, E_g).$$

La dinámica en una variedad cosimpléctica  $(M, \Omega, \eta)$  se introduce fijando una función hamiltoniana  $H \in C^\infty(M)$ . Las curvas integrales del campo de vectores de evolución  $E_H$  satisfacen las ecuaciones del movimiento de  $H$ :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Nosotros seguiremos un camino alternativo. Si modificamos la estructura cosimpléctica  $(\Omega, \eta)$  obtenemos otra estructura cosimpléctica  $(\Omega_H = \Omega + dH \wedge \eta, \eta)$ . Entonces, el campo de vectores de Reeb de esta estructura cosimpléctica es, precisamente,  $E_H$ , y se obtiene que

$$E_H f = X_H f + Rf = \{f, H\} + Rf, \quad (2.1.2)$$

para cada  $f \in C^\infty(M)$ . Aquí  $X_H$  es un campo de vectores hamiltonianos con respecto a  $(\Omega, \eta)$ .

**Definición 2.1.1** *Una constante del movimiento de  $E_H$  es una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $E_H f = 0$ .*

De (2.1.1) o de (2.1.2) deducimos que, si  $f$  es una constante del movimiento de  $E_H$ , entonces, en coordenadas de Darboux, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

Si  $f$  y  $g$  son constantes del movimiento de  $E_H$ ,  $\{f, g\}$  es también una constante del movimiento de  $E_H$ . Ahora, estudiaremos las simetrías infinitesimales del campo de vectores de Reeb  $E_H$  de la estructura cosimpléctica  $(\Omega_H, \eta)$ .

**Definición 2.1.2** *Una simetría dinámica de  $E_H$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $M$  tal que*

$$[E_H, \tilde{X}] = E_H \left( \eta(\tilde{X}) \right) E_H.$$

Puesto que

$$0 = d\eta(E_H, \tilde{X}) = E_H(\eta(\tilde{X})) - \tilde{X}(\eta(E_H)) - \eta([E_H, \tilde{X}]),$$

se deduce que  $\eta([E_H, \tilde{X}]) = E_H(\eta(\tilde{X}))$  y, por lo tanto, si el campo de vectores  $[E_H, \tilde{X}]$  es un múltiplo de  $E_H$ , necesariamente  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica.

Si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $E_H$  y  $f$  es una constante del movimiento de  $E_H$ , entonces  $\tilde{X}f$  es también una constante del movimiento de  $E_H$ , puesto que

$$\begin{aligned} 0 &= E_H(\eta(\tilde{X})) (E_H f) = [E_H, \tilde{X}]f \\ &= E_H(\tilde{X}f) - \tilde{X}(E_H f) = E_H(\tilde{X}f). \end{aligned}$$

**Observación 2.1.1** Si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica entonces  $\tilde{X} + gE_H$  también es una simetría dinámica para todo  $g \in C^\infty(M)$ . En efecto se obtiene que

$$\begin{aligned} [E_H, \tilde{X} + gE_H] &= [E_H, \tilde{X}] + [E_H, gE_H] \\ &= E_H(\eta(\tilde{X}) + g) E_H. \end{aligned}$$

Dos simetrías dinámicas se dicen equivalentes si y sólo si difieren por un múltiplo de  $E_H$ . Cada clase de equivalencia contiene un único representante  $\tilde{Y}$  tal que

$$[E_H, \tilde{Y}] = 0, \quad \eta(\tilde{Y}) = 0.$$

Si  $\tilde{Z}$  es un representante arbitrario de la clase de equivalencia entonces  $\tilde{Y} = \tilde{Z} - \eta(\tilde{Z})E_H$ . ♠

**Observación 2.1.2** Sea  $D(E_H)$  el conjunto de todas las simetrías dinámicas de  $E_H$ . Es fácil deducir que si  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  son simetrías dinámicas entonces  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  es también una simetría dinámica. Por lo tanto,  $D(E_H)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ . ♠

**Definición 2.1.3** Una simetría de Cartan es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $M$  tal que

$$i_{\tilde{X}}\Omega_H = df,$$

para alguna función  $f \in C^\infty(M)$ .

**Proposición 2.1.1** Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan entonces  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $E_H$ .

**Demostración:** En efecto,

$$\begin{aligned} i_{[E_H, \tilde{X}]} \Omega_H &= L_{E_H} i_{\tilde{X}} \Omega_H - i_{\tilde{X}} L_{E_H} \Omega_H \\ &= L_{E_H} df = d(E_H f) = 0 . \end{aligned}$$

Así,  $[E_H, \tilde{X}]$  es un múltiplo de  $E_H$  y  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica. ■

**Proposición 2.1.2** Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan entonces  $f$  es una constante del movimiento de  $E_H$ . Recíprocamente, si  $f$  es una constante del movimiento de  $E_H$  entonces existe un campo de vectores  $Z$  tal que

$$i_Z \Omega_H = df .$$

Por lo tanto,  $Z$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $Z + gE_H$  con  $g \in C^\infty(M)$  es también una simetría de Cartan.

**Demostración:** En efecto, si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan, se obtiene

$$0 = i_{E_H} (i_{\tilde{X}} \Omega_H) = i_{E_H} df = E_H f ,$$

y, por lo tanto,  $f$  es una constante del movimiento.

Recíprocamente, si  $f$  es una constante del movimiento, entonces el campo de vectores  $\text{grad } f$  con respecto a la estructura cosimpléctica  $(\Omega_H, \eta)$  verifica

$$i_{\text{grad } f} \Omega_H = df - E_H(f)\eta = df , \quad i_{\text{grad } f} \eta = E_H f = 0 .$$

Así,  $\text{grad } f$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $\text{grad } f + gE_H$  es también una simetría de Cartan. ■

**Observación 2.1.3** Si  $f$  es una constante del movimiento de  $E_H$  entonces, de la Proposición 2.1.2, deducimos que existe una familia de campos de vectores  $\{\text{grad } f + gE_H\}_{g \in C^\infty(M)}$  tales

que

$$i_{\text{grad } f + g E_H} \Omega_H = df,$$

es decir, la familia está compuesta por simetrías de Cartan. Además, si para una función  $f \in C^\infty(M)$   $\text{grad } f = X_f$ , entonces deducimos que  $\text{grad } f$  es una simetría de Cartan y  $f$  es una constante del movimiento. ♠

**Observación 2.1.4** Puesto que  $[X_f, X_g] = X_{\{g, f\}}$ , entonces, si  $\tilde{X} = X_f + \eta(\tilde{X})E_H$  e  $\tilde{Y} = X_g + \eta(\tilde{Y})E_H$  son dos simetrías de Cartan de  $E_H$ , se deduce que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = X_{\{g, f\}} + dt([\tilde{X}, \tilde{Y}])E_H.$$

Así,  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  es también una simetría de Cartan. Por lo tanto, el conjunto  $C(E_H)$  de simetrías de Cartan de  $E_H$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ . De la Proposición 2.1.1, deducimos que  $C(E_H) \subset D(E_H)$ . ♠

La siguiente tabla resume la clasificación de simetrías infinitesimales para un sistema hamiltoniano  $(S, \Omega_H, \eta)$ :

simetrías infinitesimales  $S$	$i_{\tilde{X}} \Omega_H = df$  simetrías de Cartan	$[E_H, \tilde{X}] = E_H(\eta(\tilde{X}))E_H$  simetrías dinámicas
---	--	---

Sistema hamiltoniano  $(S, \Omega_H, \eta)$ .

**Observación 2.1.5** Probaremos que las definiciones anteriores son consistentes con las previamente introducidas para el caso autónomo. Sea  $(S, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H$  una función hamiltoniana. Definimos una estructura cosimpléctica  $(\Omega = pr_2^* \omega, dt)$  en  $\mathbb{R} \times S$ , donde  $pr_2 : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  es la proyección en el segundo factor. Así, la función hamiltoniana  $H$  puede ser considerada como una función  $\tilde{H} : \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , definiendo  $\tilde{H} = pr_2^* H$ . Si definimos la

estructura cosimpléctica  $(\Omega_{\tilde{H}} = \Omega + d\tilde{H} \wedge dt, dt)$  en  $\mathbb{R} \times S$  y denotamos por  $E_{\tilde{H}}$  su campo de vectores de Reeb, obtenemos que  $E_{\tilde{H}} = \frac{\partial}{\partial t} + X_H$ . Para un campo de vectores  $Y$  en  $S$  definimos un campo de vectores  $\tilde{Y}$  en  $\mathbb{R} \times S$  del siguiente modo:

$$\forall x \in S, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{Y}(t, x) = Y(x)$$

Supongamos que  $Y$  es una simetría de Cartan, es decir,

$$i_Y \omega = df \quad \text{e} \quad Y(H) = 0,$$

donde  $f \in C^\infty(S)$ . Obtenemos

$$i_{\tilde{Y}} (\Omega + d\tilde{H} \wedge dt) = i_{\tilde{Y}} \Omega + \tilde{Y}(\tilde{H})dt = i_{\tilde{Y}} \Omega = d(pr_2^* f).$$

Así pues,  $\tilde{Y}$  es una simetría de Cartan. Recíprocamente, si  $\tilde{Y}$  es una simetría de Cartan, entonces

$$dg = i_{\tilde{Y}} \Omega_{\tilde{H}} = i_{\tilde{Y}} \Omega + \tilde{Y}(\tilde{H})dt.$$

Así,  $Y$  es una simetría de Cartan si y solamente si  $\partial g / \partial t = 0$ .

Supongamos que  $Y$  es una simetría dinámica de  $X_H$ , es decir,  $[X_H, Y] = 0$ . Por lo tanto, el campo de vectores  $\tilde{Y}$  es una simetría dinámica de  $E_{\tilde{H}}$ , puesto que

$$[E_{\tilde{H}}, \tilde{Y}] = \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \tilde{Y} \right] + [X_H, \tilde{Y}] = 0.$$

Recíprocamente, si  $\tilde{Y}$  es una simetría dinámica de  $E_{\tilde{H}}$ , entonces  $Y$  es también una simetría dinámica de  $X_H$ , puesto que

$$0 = [E_{\tilde{H}}, \tilde{Y}] = [X_H, \tilde{Y}]. \spadesuit$$

Sea  $Q$  una variedad diferenciable,  $T^*Q$  su fibrado cotangente,  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$  la proyección canónica,  $\lambda_Q$  la 1-forma de Liouville y  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  la forma simpléctica canónica de  $T^*Q$ . Sea  $H$  una función hamiltoniana en  $\mathbb{R} \times T^*Q$ . Definiremos una estructura cosimpléctica  $(\Omega_H = \omega_Q + dH \wedge dt, dt)$ , donde, ahora,  $\lambda_Q$  y  $\omega_Q$  están consideradas como formas en  $\mathbb{R} \times T^*Q$ . Sea

$E_H$  el campo de vectores de Reeb de  $(\Omega_H, dt)$ .

Definimos el operador  $\iota_H$  que envía campos de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$  en funciones en  $\mathbb{R} \times T^*Q$  de la siguiente forma:

$$(\iota_H X)(t, \alpha) = (pr_2^* \alpha)(X_{(t,x)}) - (dt_{(t,x)}(X_{(t,x)})) H_{(t,\alpha)},$$

para todo  $(t, \alpha) \in \mathbb{R} \times T_x^*Q$ . Si  $X = \tau \partial/\partial t + X^A \partial/\partial q^A$ , obtenemos

$$(\iota_H X)(t, q^A, p_A) = p_A X^A - \tau H.$$

Sea  $X$  un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$ . Para cada función  $H$ , existe un único campo de vectores  $X^{(c^*, H)}$  en  $\mathbb{R} \times T^*Q$  tal que

$$i_{X^{(c^*, H)}} \Omega_H = d(\iota_H X) - E_H(\iota_H X) dt, \quad i_{X^{(c^*, H)}} dt = \tau,$$

donde  $\tau = dt(X)$ .  $X^{(c^*, H)}$  será llamado el  $H$ -levantamiento de  $X$  a  $\mathbb{R} \times T^*Q$ . Un cálculo directo muestra que  $X^{(c^*, H)}$  puede ser localmente escrito como sigue:

$$X^{(c^*, H)} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \left( \frac{\partial \tau}{\partial q^A} H - p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \right) \frac{\partial}{\partial p_A}.$$

Nótese que si  $X$  es un campo de vectores tal que  $dt(X) = 0$  entonces  $X^{(c^*, H)}$  no depende de la elección de la función  $H$ , es decir,

$$X^{(c^*, H)} = X^{(c^*, H')},$$

para cada  $H, H' \in C^\infty(\mathbb{R} \times Q)$  (compárese con la definición de Saunders [124]).

Ahora, definiremos los dos siguientes tipos de simetrías de tipo puntual.

**Definición 2.1.4** Una simetría de Lie de  $E_H$  es un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  tal que

$$[E_H, X^{(c^*, H)}] = E_H(dt(X^{(c^*, H)}))E_H.$$

En otras palabras, un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  es una simetría de Lie si y solamente si  $X^{(c^*,H)}$  es una simetría dinámica de  $E_H$ .

**Definición 2.1.5** Una simetría de Noether en  $\mathbb{R} \times T^*Q$  es un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  tal que

$$i_{X^{(c^*,H)}}\Omega_H = df,$$

para alguna función  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times T^*Q)$ . En otras palabras, un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  es una simetría de Noether si y solamente si  $X^{(c^*,H)}$  es una simetría de Cartan.

Es evidente que si  $X$  es una simetría de Noether entonces  $X$  es una simetría de Lie. Nótese, además, que si  $\iota_H X$  es una constante del movimiento de  $E_H$ , se deduce que

$$i_{X^{(c^*,H)}}\Omega_H = d(\iota_H X),$$

y, entonces,  $X^{(c^*,H)}$  es una simetría de Noether cuya constante del movimiento asociada es precisamente  $\iota_H X$ .

El siguiente cuadro resume la clasificación de las simetrías para el sistema hamiltoniano no-autónomo  $(\mathbb{R} \times T^*Q, \Omega_H, dt)$  anteriormente descrito.

simetrías infinitesimales puntuales $\mathbb{R} \times Q$	$i_{X^{(c^*,H)}}\Omega_H = df$ simetrías de Noether	$[E_H, X^{(c^*,H)}] = E_H(dt(X^{(c^*,H)}))E_H$ simetrías de Lie
simetrías infinitesimales $\mathbb{R} \times T^*Q$	$i_{\tilde{X}}\Omega_H = df$ simetrías de Cartan	$[E_H, \tilde{X}] = E_H(dt(\tilde{X}))E_H$ simetrías dinámicas

Sistema hamiltoniano  $(\mathbb{R} \times T^*Q, \Omega_H, dt)$

## 2.2 Espacios de evolución de orden superior

Sea  $Q$  un variedad diferenciable de dimensión  $n$  y denótese por  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  la variedad diferenciable de  $k$ -jets de todas las aplicaciones de  $\mathbb{R}$  a  $Q$ .  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  será llamado el **espacio de evolución** de orden  $k$ . Denotamos por  $\beta^k : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow Q$  y por  $\pi^k : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  las proyecciones canónicas definidas, respectivamente, por  $\beta^k(j_t^k \sigma) = \sigma(t)$  y  $\pi^k(j_t^k \sigma) = t$ .  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  es, también, un fibrado sobre  $J^r(\mathbb{R}, Q)$ ,  $0 \leq r \leq k$ , siendo  $\beta_r^k : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow J^r(\mathbb{R}, Q)$  la proyección definida por  $\beta_r^k(j_t^k \sigma) = j_t^r \sigma$ .

Sean  $(t, q^A, q_1^A, \dots, q_k^A)$ ,  $1 \leq A \leq n$ , coordenadas inducidas en  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  a partir de coordenadas locales,  $(q^A)$ ,  $1 \leq A \leq n$ , en  $Q$ , es decir,

$$q_i^A(j_t^k \sigma) = \frac{d^i}{dt^i}(q^A \circ \sigma(t)), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Sea  $d_T$  un operador diferenciable que envía cada función  $f : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  en una función  $d_T f$  en  $J^{k+1}(\mathbb{R}, Q)$ , localmente definida por

$$d_T f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^k q_{i+1}^A \frac{\partial f}{\partial q_i^A}.$$

$d_T$  puede ser extendida, de la forma usual, a un operador sobre formas diferenciables (véase [84]).

Las variedades diferenciables  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  y  $\mathbb{R} \times T^k Q$  pueden ser canónicamente identificadas. Por lo tanto, los objetos geométricos en  $T^k Q$  pueden ser transportados a  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  a través de esta identificación. Si  $J_1$  es la estructura casi tangente y  $C_1$  el campo de Liouville en  $T^k Q$  (véase [82]) denotaremos con los mismos símbolos los inducidos en  $J^k(\mathbb{R}, Q)$ . Definamos

$$\bar{J}_1 = J_1 - C_1 \otimes dt.$$

En coordenadas locales, se obtiene:

$$\bar{J}_1 = \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) \frac{\partial}{\partial q_{i+1}^A} \otimes (dq_i^A - q_{i+1}^A dt).$$

Si definimos  $J_r = (J_1)^r$  y  $C_r = J_{r-1}C_1$ , obtenemos  $k - 1$  tensores de tipo (1,1) como sigue:

$$\bar{J}_r = J_r - C_r \otimes dt, \quad 1 \leq r \leq k.$$

Recordaremos, ahora, los diferentes tipos de elevaciones de funciones y campos de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$  a  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  (véase Saunders [124]).

**Definición 2.2.1** Para  $\lambda = 0, 1, \dots, k$ , definimos la  $\lambda$ -elevación  $f^{(\lambda, k)}$  de una función  $f$  en  $\mathbb{R} \times Q$  a  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  como la función

$$f^{(\lambda, k)} = (\beta_\lambda^k)^* d_T^\lambda f.$$

Se obtiene que  $f^{(0, k)} = (\beta_0^k)^* f$  y  $f^{(\lambda, k)} = (\beta_r^k)^* f^{(\lambda, r)}$ , si  $0 \leq \lambda \leq r \leq k$ . Es evidente que  $d_T f^{(\lambda, k)} = f^{(\lambda+1, k+1)}$ . En coordenadas locales, obtenemos

$$f^{(\lambda+1, k+1)} = \frac{\partial f^{(\lambda, k)}}{\partial t} + \sum_{i=0}^k q_{i+1}^A \frac{\partial f^{(\lambda, k)}}{\partial q_i^A}.$$

Denotamos por  $\Omega^k(\mathbb{R}, Q)$  el sistema de contacto localmente generado por las formas de contacto (véase [11]):

$$\theta_i^A = dq_i^A - q_{i+1}^A dt, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

**Proposición 2.2.1** Sea  $X$  un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$ . Entonces existe un único campo de vectores  $X^{(k, k)}$  en  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  tal que

1.  $(\beta_0^k)_* X^{(k, k)} = X$ ,
2.  $L_{X^{(k, k)}} \theta_i^A$  es una combinación lineal de las 1-formas de contacto o, equivalentemente,  $\Omega^k(\mathbb{R}, Q)$  es invariante por  $X^{(k, k)}$ .

$X^{(k, k)}$  es llamado la  $k$ -elevación de  $X$  a  $J^k(\mathbb{R}, Q)$ . Si  $X$  se escribe localmente de la siguiente forma:

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + X^A \frac{\partial}{\partial q^A},$$

entonces, la expresión local de  $X^{(k,k)}$  es (véase [124]):

$$X^{(k,k)} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \sum_{i=1}^k \left( (X^A)^{(i,k)} - \sum_{\substack{j+h=i \\ j \neq 0}} \frac{i!}{j!h!} (\tau)^{(j,k)} q_{h+1}^A \right) \frac{\partial}{\partial q_i^A}.$$

**Observación 2.2.1** Si denotamos por

$$X_i^A = dq_i^A(X^{(k,k)}), \quad 0 \leq i \leq k,$$

se obtiene

$$d_T(X_i^A) - q_{i+1}^A d_T(\tau) = X_{i+1}^A,$$

donde  $\tau = dt(X)$ . ♠

**Observación 2.2.2** De la Proposición 2.2.1, se sigue que

$$[X^{(k,k)}, Y^{(k,k)}] = [X, Y]^{(k,k)},$$

para cualesquiera campos de vectores  $X, Y$  en  $\mathbb{R} \times Q$ . ♠

**Definición 2.2.2** Un campo de vectores  $\xi$  en  $J^k(\mathbb{R}, Q)$  se dice que es una ecuación diferencial de orden  $(k+1)$  no-autónoma ( $(k+1)$ -NODE, para simplificar), si  $J_1 \xi = C_1$  y  $\bar{J}_1 \xi = 0$ .

La ecuación diferencial de orden  $(k+1)$   $\xi$  se expresa localmente por

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1}^A \frac{\partial}{\partial q_i^A} + \xi^A \frac{\partial}{\partial q_k^A},$$

donde  $\xi^A = \xi^A(t, q^A, q_1^A, \dots, q_k^A)$ . Una curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow Q$  se dice que es una solución de  $\xi$  si  $j^k \sigma : \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}, Q)$  es una curva integral de  $\xi$ . Así,  $\sigma(t) = (q^A(t))$  es una solución de  $\xi$  si y solamente si es una solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no-autónomas de orden  $k+1$ :

$$\frac{d^{k+1} q^A}{dt^{k+1}} = \xi^A \left( t, q^B(t), \frac{dq^B}{dt}, \dots, \frac{d^k q^B}{dt^k} \right), \quad 1 \leq A \leq n.$$

## 2.3 Sistemas lagrangianos no-autónomos de orden superior

Sea  $L : J^k(\mathbb{R}, Q) \longrightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano no-autónomo (o dependiente del tiempo) de orden  $k$  con energía

$$E_L = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\beta_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1}(C_r L)) - (\beta_k^{2k-1})^* L .$$

La 1-forma de Poincaré-Cartan está definida por

$$\Theta_L = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} (\beta_{k+r-1}^{2k-1})^* (d_T^{r-1}(d_{J_r} L)) - (\beta_k^{2k-1})^* L dt ,$$

y la 2-forma Poincaré-Cartan por

$$\Omega_L = -d\Theta_L .$$

$E_L$  es una función definida en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ , y  $\Theta_L$  y  $\Omega_L$  son formas en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . El fibrado de jets  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  es precisamente el espacio de evolución del sistema lagrangiano definido por  $L$ . En coordenadas locales, obtenemos

$$\begin{aligned} E_L &= \sum_{i=0}^{k-1} q_{i+1}^A \hat{p}_{i/A} - L(q_0^A, \dots, q_k^A) , \\ \Theta_L &= \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}_{i/A} dq_i^A - E_L dt , \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\Theta_L = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}_{i/A} \theta_i^A + L dt , \quad (2.3.3)$$

donde  $\{\hat{p}_{i/A}; 0 \leq i \leq k-1\}$  son las coordenadas generalizadas de los momentos de Jacobi-Ostrogradskii definidas por

$$\hat{p}_{i/A} = \sum_{j=0}^{k-i-1} (-1)^j d_T^j \left( \frac{\partial L}{\partial q_{i+j+1}^A} \right) , \quad 0 \leq i \leq k-1 .$$

El lagrangiano  $L$  se dice que es regular si la matriz hessiana  $(\partial^2 L / \partial q_k^A \partial q_k^B)$  es regular. Entonces,

$$(\Omega_L)^{kn} \wedge dt \neq 0 ,$$

y así  $(\Omega_L, dt)$  define una estructura cosimpléctica en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . Por lo tanto, existe un único campo de vectores  $\xi_L$  (el campo de vectores de Reeb para  $(\Omega_L, dt)$ ) en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  tal que

$$i_{\xi_L} \Omega_L = 0, \quad dt(\xi_L) = 1.$$

Además  $\xi_L$  es una  $2k$ -NODE en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  que se denomina el campo de vectores de Euler-Lagrange. Las soluciones de  $\xi_L$  son precisamente las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^A} \right) = 0.$$

Si calculamos los corchetes de Poisson definidos por  $(\Omega_L, dt)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \{q_r^A, q_s^B\} &= 0, \quad \{\hat{p}_{r/A}, \hat{p}_{s/B}\} = 0, \quad \{q_r^A, \hat{p}_{s/B}\} = \delta_B^A \delta_{rs}, \\ \{q_r^A, t\} &= 0, \quad \{\hat{p}_{r/A}, t\} = 0, \quad 0 \leq r, s \leq k-1. \end{aligned}$$

## 2.4 Simetrías de sistemas lagrangianos dependientes del tiempo de orden superior

Sea  $\xi$  una  $(r+1)$ -NODE en  $J^r(\mathbb{R}, Q)$ .

**Definición 2.4.1** *Se dice que una función  $f : J^r(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\xi$  si  $\xi f = 0$ .*

Entonces, si  $\gamma : I \rightarrow J^r(\mathbb{R}, Q)$  es una curva integral de  $\xi$ ,  $f \circ \gamma$  es una función constante.

**Definición 2.4.2**

1. Una simetría de Lie de  $\xi$  es un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  tal que

$$[\xi, X^{(r,r)}] = d_T((\beta_0^{r-1})^* \tau) \xi,$$

donde  $\tau = dt(X)$ .

2. Una simetría dinámica de  $\xi$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $J^r(\mathbb{R}, Q)$  tal que

$$[\xi, \tilde{X}] = \xi(\tau)\xi,$$

donde  $\tau = dt(\tilde{X})$ .

**Observación 2.4.1** Denótese por  $D(\xi)$  el conjunto de todas las simetrías dinámicas de  $\xi$ . De la Observación 2.1.2, deducimos que  $D(\xi)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(J^r(\mathbb{R}, Q))$ . Por la Observación 2.2.2 se obtiene que el conjunto  $L(\xi)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R} \times Q)$ . ♠

Por supuesto, si  $X$  es una simetría de Lie, entonces  $X^{(r,r)}$  es una simetría dinámica de  $\xi$ . Es evidente que si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica, entonces  $\tilde{X} + g\xi$ , con  $g \in C^\infty(J^r(\mathbb{R}, Q))$ , es también una simetría dinámica. De la misma manera que en la Observación 2.1.1, se dice que dos simetrías son equivalentes si difieren en un múltiplo de  $\xi$ . Cada clase de equivalencia contiene un único representante  $\tilde{Y}$  tal que

$$[\xi, \tilde{Y}] = 0, \quad dt(\tilde{Y}) = 0.$$

Este representante es, precisamente,  $\tilde{Y} = \tilde{X} - dt(\tilde{X})\xi$ , donde  $\tilde{X}$  es un representante arbitrario de la clase de equivalencia.

**Observación 2.4.2** Un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $J^r(\mathbb{R}, Q)$  es una simetría dinámica si se verifican las siguientes identidades:

$$X_{j+1}^B = \xi(X_j^B) - q_{j+1}^B \xi(\tau), \quad 0 \leq j \leq r-1, \quad (2.4.4)$$

y

$$\xi^B \xi(\tau) = \xi(X_r^B) - \tilde{X}(\xi^B),$$

donde  $X_i^B = dq_i^B(\tilde{X})$ ,  $\tau = dt(\tilde{X})$  y  $\xi^B = dq_r^B(\xi)$ . Obviamente, una simetría de Lie siempre verifica la igualdad (2.4.4). ♠

**Observación 2.4.3** Supongamos que  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi$  que es proyectable a un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$ . Como  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica, entonces se verifica (2.4.4), y, por lo tanto,  $\tilde{X} = X^{(r,r)}$ . ♠

Sea  $L : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange.

**Definición 2.4.3**

1. Un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  es una simetría de Noether de  $\xi_L$  si

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L = df ,$$

para alguna función  $f$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ .

2. Un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  es una simetría de Cartan si

$$L_{\tilde{X}} \Theta_L = df ,$$

para alguna función  $f$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ .

La definición de simetría de Cartan es consistente con la de la Definición 2.1.3. En efecto,

$$\begin{aligned} df &= L_{\tilde{X}} \Theta_L = i_{\tilde{X}} d\Theta_L + di_{\tilde{X}} \Theta_L \\ &= -i_{\tilde{X}} \Omega_L + d(\Theta_L(\tilde{X})) , \end{aligned}$$

y, entonces,  $i_{\tilde{X}} \Omega_L = d(\Theta_L(\tilde{X}) - f)$ .

**Observación 2.4.4** Si  $X$  es una simetría de Noether de  $\xi_L$ , entonces

$$\begin{aligned} df &= L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} ((L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \hat{p}_{A/i}) \theta_i^A + \hat{p}_{A/i} L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \theta_i^A) + X^{(2k-1, 2k-1)} L dt + L d\tau , \end{aligned}$$

donde  $\tau = dt(X^{(2k-1, 2k-1)})$ . De la Proposición 2.2.1 deducimos que  $f = (\beta_{k-1}^{2k-1})^* g$ , con  $g \in J^{k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . ♠

**Proposición 2.4.1** Si  $X$  es una simetría de Noether, entonces  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ .

**Demostración:** Supongamos que  $X$  es una simetría de Noether. Entonces,  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  es una simetría de Cartan. De la Proposición 2.1.1 se deduce que  $X$  es una simetría de Lie. ■

Si  $X$  es una simetría de Noether, se obtiene

$$\begin{aligned} df &= L_{X^{(2k-1,2k-1)}} \Theta_L \\ &= i_{X^{(2k-1,2k-1)}} d\Theta_L + di_{X^{(2k-1,2k-1)}} \Theta_L, \end{aligned}$$

y, así,

$$d\left(f - \Theta_L(X^{(2k-1,2k-1)})\right) = -i_{X^{(2k-1,2k-1)}} \Omega_L.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \xi_L \left( f - \Theta_L(X^{(2k-1,2k-1)}) \right) &= d\left( f - \Theta_L(X^{(2k-1,2k-1)}) \right) (\xi_L) \\ &= -i_{X^{(2k-1,2k-1)}} \Omega_L(\xi_L) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces,  $g = f - \Theta_L(X^{(2k-1,2k-1)})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  y, también se verifica que  $X^{(2k-1,2k-1)}g = 0$ .

De la Observación 2.1.4 se deduce que el conjunto  $C(\xi_L)$  de simetrías de Cartan de  $\xi_L$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q))$ . También,  $N(\xi_L)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R} \times Q)$ . De las Proposiciones 2.1.2 y 2.4.1, se deduce que

$$N(\xi_L) \subset L(\xi_L), \quad C(\xi_L) \subset D(\xi_L).$$

Ahora, obtendremos una correspondencia entre las simetrías de Cartan y las constantes del movimiento.

**Teorema 2.4.1 (Teorema de Noether y su recíproco)** *Si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan entonces  $F = f - \Omega_L(\tilde{X})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ . Recíprocamente, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  entonces existe un campo de vectores  $Z$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  tal que*

$$i_Z \Omega_L = dF.$$

Entonces,  $Z$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $Z + g\xi_L$  es también una simetría de Cartan siendo  $g : J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Demostración:** Véase la demostración de la Proposición 2.1.2. ■

**Corolario 2.4.1**  $F$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  si y solamente si existe un único campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  tal que  $dt(\tilde{X}) = 0$  y  $L_{\tilde{X}}\Theta_L = d(\Theta_L(\tilde{X}) - F)$ .

**Demostración:** Se sigue del Teorema 2.4.1. ■

**Definición 2.4.4** Un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  se dice que es una simetría infinitesimal de  $L$  si

$$X^{(k,k)}(L) = -d_T((\beta_0^{k-1})^*\tau)L,$$

donde  $\tau = dt(X)$ .

Por un cálculo directo, deducimos que el conjunto  $I(L)$  de todas las simetrías infinitesimales de  $L$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R} \times Q)$ .

**Lema 2.4.1** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}}(Ldt) = L \frac{\partial \tau}{\partial q^A} \theta_0^A,$$

donde  $\tau = dt(X)$ .

**Demostración:** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , se deduce que

$$\begin{aligned} L_{X^{(2k-1, 2k-1)}}Ldt &= (X^{(2k-1, 2k-1)}L)dt + Ld\tau \\ &= -d_T\tau L dt + Ld\tau \\ &= L \left( -\frac{\partial \tau}{\partial t} dt - q_1^A \frac{\partial \tau}{\partial q^A} dt + \frac{\partial \tau}{\partial t} dt + \frac{\partial \tau}{\partial q^A} dq^A \right) \\ &= L \frac{\partial \tau}{\partial q^A} \theta_0^A. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición 2.4.2** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ ,  $\Theta_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ .

**Demostración:** Sabemos que la 1-forma de Poincaré-Cartan puede ser localmente escrita como:

$$\Theta_L = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}_{A/i} \theta_i^A + L dt .$$

Del Lema 2.4.1 y de la Proposición 2.2.1, se obtiene que

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L = \lambda_A^i \theta_i^A ,$$

para algún  $\lambda_A^i \in C^\infty(J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q))$ . Entonces

$${}^i_{\xi_L} L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L = \lambda_A^i \theta_i^A(\xi_L) = 0 ,$$

y, por lo tanto, obtenemos  $\xi_L(\Theta_L(X^{(2k-1, 2k-1)})) = 0$ . ■

**Proposición 2.4.3** *Si  $X$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$  tal que*

$$L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L = 0 ,$$

*entonces  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ .*

**Demostración:** Obviamente,  $X$  es una simetría de Noether. De la Proposición 2.4.1, se deduce que  $X$  es una simetría de Lie y, entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{X^{(2k-1, 2k-1)}} \Theta_L)(\xi_L) \\ &= X^{(2k-1, 2k-1)}(\Theta_L(\xi_L)) - \Theta_L([X^{(2k-1, 2k-1)}, \xi_L]) \\ &= X^{(2k-1, 2k-1)}((\beta_k^{2k-1})^* L) + d_T((\beta_0^{2k-2})^* \tau)(\beta_k^{2k-1})^* L , \end{aligned}$$

donde  $\tau = dt(X)$ . Así,  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ . ■

Resumimos los resultados anteriores en la tabla siguiente:

simetrías puntuales $\mathbb{R} \times Q$	$X^{(k,k)}L = -d_T((\beta_0^{k-1})^* \tau)L$ simetrías infinitesimales de $L$	$L_{X^{(2k-1,2k-1)}\Theta_L} = df$ simetrías de Noether	$[\xi_L, X^{(2k-1,2k-1)}] = d_T((\beta_0^{2k-2})^* \tau)\xi_L$ simetrías de Lie
simetrías no puntuales $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$		$L_{\tilde{X}}\Theta_L = df$ simetrías de Cartan	$[\xi_L, \tilde{X}] = \xi_L(\tau)\xi_L$ simetrías dinámicas

Sistemas lagrangianos no-autónomos de orden superior.

## 2.5 Relación entre las simetrías infinitesimales del sistema lagrangiano con las de su contrapartida hamiltoniana

Sea  $L : J^k(\mathbb{R}, Q) \rightarrow R$  un lagrangiano regular. La transformación de Legendre-Ostrogradskii es la aplicación fibrada

$$Leg : J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q) \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(J^{k-1}(\mathbb{R}, Q)),$$

localmente definida por

$$Leg(t, q^A, q_1^A, \dots, q_{2k-1}^A) = (t, q^A, \dots, q_{k-1}^A; \hat{p}_{A/0}, \dots, \hat{p}_{A/k-1}).$$

Como sabemos,  $L$  es regular si y solamente si  $Leg$  es un difeomorfismo global. Si  $Leg$  es un difeomorfismo global, entonces se dice que  $L$  es hiperregular. Como en el caso autónomo y para simplificar, supondremos en adelante que el lagrangiano  $L$  es hiperregular.

Sea  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . Definiendo  $H = E_L \circ Leg^{-1}$  obtenemos

$$E_H = (T Leg)\xi_L,$$

$$Leg^*(\lambda_{T^{k-1}Q} - H dt) = \Theta_L,$$

$$Leg^*(\Omega_H) = \Omega_L.$$

Se deduce que  $Leg$  es un isomorfismo que transforma entre si las dos estructuras cosimplécticas  $(\Omega_L, dt)$  y  $(\Omega_H, dt)$  en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  y  $\mathbb{R} \times T^*(T^{k-1}Q)$ , respectivamente. De este modo se obtienen los siguientes resultados.

**Proposición 2.5.1** Sean  $\tilde{X}$  un campo de vectores en  $J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q)$  e  $\tilde{Y}$  un campo de vectores  $Leg$ -relacionado en  $\mathbb{R} \times T^*(J^{k-1}(\mathbb{R}, Q))$ , es decir,  $(TLeg)(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ . Entonces

1.  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\xi_L$  si y solamente si  $\tilde{Y}$  es una simetría dinámica de  $E_H$ .
2.  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan si y solamente si  $\tilde{Y}$  es una simetría de Cartan.

Nótese que existe una correspondencia uno a uno entre las constantes del movimiento de  $\xi_L$  y  $E_H$ .

**Proposición 2.5.2** Sea  $X$  un campo de vectores en  $\mathbb{R} \times Q$ .

1. Si  $X^{(k-1, k-1)}$  es una simetría de Lie de  $E_H$  entonces  $X$  es una simetría de Lie de  $\xi_L$ .
2. Si  $X^{(k-1, k-1)}$  es una simetría de Noether para el sistema  $(\mathbb{R} \times T^*(J^{k-1}(\mathbb{R}, Q)), \Omega_H, dt)$  entonces  $X$  es una simetría de Noether para el sistema  $(J^{2k-1}(\mathbb{R}, Q), \Omega_L, dt)$ .

**Proposición 2.5.3** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces  $X$  es una simetría de Noether.

**Demostración:** Usando la Proposición 2.4.2, deducimos que si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces  $\Theta_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ . En coordenadas locales,

$$\Theta_L(X^{(2k-1, 2k-1)}) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{p}_{A/i} X_i^A - E_L \tau,$$

donde  $X_i^A = dq_i^A(X^{(2k-1, 2k-1)})$  y  $\tau = dt(X)$ .

Puesto que

$$(\iota_H X^{(k-1, k-1)})(t, q_i^A, p_{A/i}) = X_i^A p_{A/i} - H \tau, \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

deducimos que  $\Theta_L(X^{(2k-1, 2k-1)})$  e  $\iota_H X^{(k-1, k-1)}$  están  $Leg$ -relacionados. En consecuencia,  $\iota_H X^{(k-1, k-1)}$  es una constante del movimiento de  $E_H$ . Así,  $(X^{(k-1, k-1)})^{(c^*, H)}$  es una simetría

de Cartan (de hecho una simetría de Noether) de  $E_H$  y, entonces, existe una simetría de Cartan  $\tilde{X}$  de  $\xi_L$  que está *Leg*-relacionada con  $(X^{(k-1,k-1)})^{(c^*,H)}$ . Por lo tanto,  $\tilde{X}$  es proyectable y, teniendo en cuenta, la Observación 2.4.3, se deduce que  $\tilde{X} = X^{(2k-1,2k-1)}$ . ■

La siguiente proposición es el resultado recíproco del obtenido en la Proposición 2.4.3.

**Proposición 2.5.4** *Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces*

$$L_{X^{(2k-1,2k-1)}}\Theta_L = 0 .$$

**Demostración:** De la Proposición 2.5.3 se obtiene que si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces  $\iota_H X^{(k-1,k-1)}$  es una constante del movimiento de  $E_H$ . En consecuencia, deducimos que

$$L_{(X^{(k-1,k-1)})^{(c^*,H)}}(\lambda_{T^{k-1}Q} - H dt) = 0 .$$

Como  $X^{(2k-1,2k-1)}$  y  $(X^{(k-1,k-1)})^{(c^*,H)}$  están *Leg*-relacionados, obtenemos que

$$L_{X^{(2k-1,2k-1)}}\Theta_L = 0 . \quad \blacksquare$$

**Observación 2.5.1** Obtendremos una caracterización alternativa de las simetrías de Noether que es similar a la de las simetrías infinitesimales de  $L$ . En efecto, no es difícil probar que un campo de vectores  $X$  en  $\mathbb{R} \times Q$  es una simetría de Noether si y solamente si

$$X^{(k,k)}L = -d_T((\beta_0^{k-1})^* \tau)L + d_T g , \quad (2.5.5)$$

donde  $g$  es una función en  $J^{k-1}(\mathbb{R}, Q)$ . Si

$$L_{X^{(2k-1,2k-1)}}\Theta_L = df ,$$

deducimos que  $f = (\beta_{k-1}^{2k-1})^* g$ . Este resultado se prueba siguiendo un método similar al usado en las Proposiciones 2.4.3 y 2.5.4. La prueba de la Proposición 2.5.4 debería ser ligeramente modificada. En efecto, si  $X$  es un campo de vectores que satisface (2.5.5) entonces  $f - \Theta_L(X^{(2k-1,2k-1)})$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$ . Se deduce que  $F = f - \iota_H(X^{(k-1,k-1)})$  es una constante del movimiento de  $E_H$ . Por lo tanto, el campo de vectores  $X_f - X^{(c^*,H)}$  es una simetría de

Cartan con constante del movimiento asociada  $F$ , y, además, es proyectable sobre  $J^{k-1}(\mathbb{R}, Q)$  en el campo de vectores  $X^{(k-1, k-1)}$ . Así, deducimos que  $X^{(2k-1, 2k-1)}$  y  $X_f - X^{(c^*, H)}$  están *Leg*-relacionados, lo que implica que  $X$  es una simetría de Noether. ♠

El cuadro de la siguiente página muestra las relaciones entre las simetrías de sistemas lagrangianos y hamiltonianos.

## 2.6 Ejemplo: Partícula con spin sujeta a un potencial

Sea  $L : \mathbb{R} \times T^2\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano no-autónomo regular de orden 2:

$$L(t, q^A, q_1^A, q_2^A) = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_1^A)^2 - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2 - V(t, q^A, q_1^A),$$

donde  $(q^A) = (q^1, q^2, q^3)$  son las coordenadas canónicas de  $\mathbb{R}^3$ .  $L$  describe el movimiento de una partícula con spin sujeta a un potencial  $V(t, q^A, q_1^A)$ . Se deduce

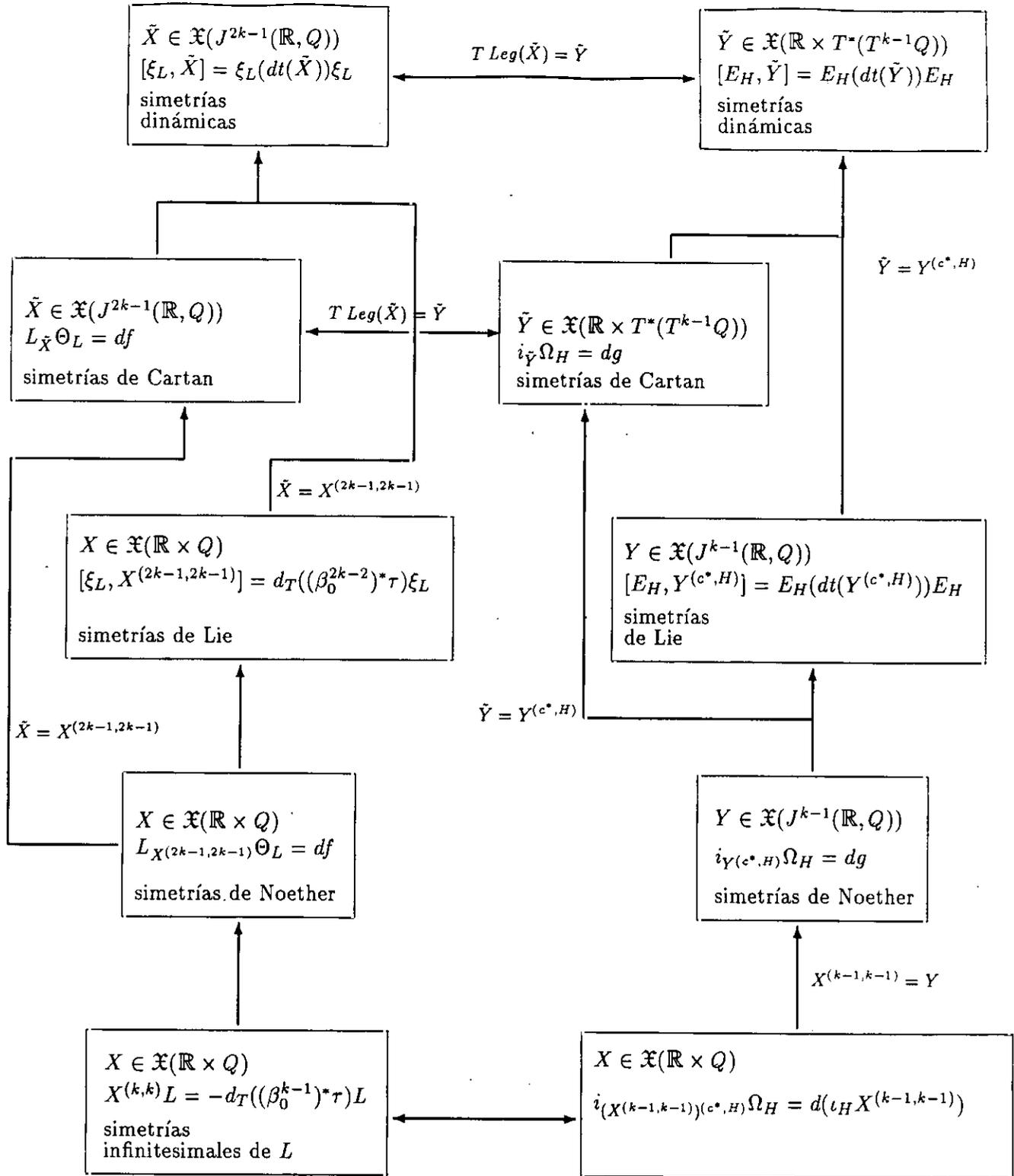
$$\begin{aligned} \hat{p}_{0/A} &= q_1^A + q_3^A - \frac{\partial V}{\partial q_1^A}, \quad \hat{p}_{1/A} = -q_2^A, \\ \Theta_L &= \hat{p}_{0/A} \theta_0^A + \hat{p}_{1/A} \theta_1^A + L dt \\ &= (q_1^A + q_3^A - \frac{\partial V}{\partial q_1^A}) dq_0^A - q_2^A dq_1^A \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_1^A)^2 - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2 - q_1^A \frac{\partial V}{\partial q_1^A} + \sum_{A=1}^3 q_1^A q_3^A + V(t, q^A, q_1^A) \right) dt. \end{aligned}$$

De las ecuaciones  $i_X d\Theta_L = 0$  e  $i_X dt = 0$ , obtenemos el campo de vectores de Reeb

$$\begin{aligned} \xi_L &= \frac{\partial}{\partial t} + q_1^A \frac{\partial}{\partial q^A} + q_2^A \frac{\partial}{\partial q_1^A} + q_3^A \frac{\partial}{\partial q_2^A} \\ &\quad - \left( \frac{\partial V}{\partial q_0^A} + q_2^A - \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_1^A} - q_1^B \frac{\partial^2 V}{\partial q_0^B \partial q_1^A} + q_2^B \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^B \partial q_1^A} \right) \frac{\partial}{\partial q_3^A}. \end{aligned}$$

Sabemos que el lagrangiano regular autónomo

$$\tilde{L}(t, q^A, q_1^A, q_2^A) = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_1^A)^2 - \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (q_2^A)^2,$$



Relación entre las simetrías de sistemas lagrangianos y hamiltonianos.

admite las siguientes simetrías infinitesimales de  $L$

$$T_A = \frac{\partial}{\partial q^A}, 1 \leq A \leq 3,$$

$$R_{AB} = q^B \frac{\partial}{\partial q^A} - q^A \frac{\partial}{\partial q^B}, 1 \leq A < B \leq 3.$$

$T_A$  son las traslaciones y  $R_{AB}$  las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Queremos estudiar cuando estas simetrías infinitesimales de  $\tilde{L}$  son también simetrías infinitesimales de  $L$ .

Es evidente que  $T_A$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si y solamente si la función  $V : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$  verifica que

$$(T_A)^{(1,1)}V = 0,$$

es decir, si la función  $V$  no depende de  $q^A$  (por ejemplo, si  $V = V(t, q^2, q^3, q_1^1, q_1^2, q_3^2)$ , entonces  $T_1$  es una simetría infinitesimal de  $L$ ). Por lo tanto, por la Proposición 2.4.2, la función

$$\theta_L((T_A)^{(3,3)}) = \hat{p}_{0/A} = q_1^A + q_3^A - \frac{\partial V}{\partial q_1^A},$$

es una constante del movimiento de  $\xi_L$ . Si, además, la función  $V$  no depende de  $q_1^A$ , entonces el campo de vectores

$$X_A = q^A \frac{\partial}{\partial q^A},$$

es una simetría de Lie de  $\xi_L$ , es decir,  $[(X_A)^{(3,3)}, \xi_L] = 0$ , pero no es una simetría de Noether.

Ahora, la rotación  $R_{AB}$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si y solamente si

$$(R_{AB})^{(1,1)}V = 0.$$

Por ejemplo, si

$$V = f(t, q^C, q_1^C)g((q^A)^2 + (q^B)^2, (q_1^A)^2 + (q_1^B)^2), C \neq A, B,$$

para cada una de las funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $R_{AB}$  es una simetría

infinitesimal de  $L$  y la constante del movimiento asociada es

$$\gamma_{AB} = \Theta_L((R_{AB})^{(3,3)}) = (q_1^A + q_3^A - \frac{\partial V}{\partial q_1^A})q_0^B - (q_1^B + q_3^B - \frac{\partial V}{\partial q_1^B})q_0^A - q_2^A q_1^B + q_2^B q_1^A .$$

Consideramos ahora el campo de vectores:

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^A} + \frac{\partial}{\partial q^B} .$$

$X$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si  $X^{(2,2)}L = 0$ , lo cual es equivalente a  $X^{(1,1)}V = 0$ . Por lo tanto, si  $V$  es de la siguiente forma:

$$V = f_1 e^{-tf_2} \left( f_3 e^{f_4 q^A + (f_2 - f_4)q^B} + f_5 e^{f_2 q^A} + f_6 e^{f_2 q^B} \right) ,$$

entonces se verifica esta condición, donde las funciones  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , dependen solamente de  $q^C, q_1^A, q_2^B$  y  $q_2^C$ , con  $C \neq A, B$ . La constante del movimiento asociada a esta simetría infinitesimal de  $L$  es

$$\mu = \hat{p}_{0/A} + \hat{p}_{0/B} + E_L .$$

De un modo sencillo es posible obtener también las simetrías infinitesimales y constantes del movimiento para la formulación hamiltoniana del sistema usando los resultados obtenidos en la sección anterior.

**Parte II**

**SISTEMAS LAGRANGIANOS  
DEGENERADOS**

## Capítulo 3

# Simetrías y constantes del movimiento de sistemas lagrangianos degenerados

Los estudios sobre sistemas lagrangianos degenerados comenzaron con los trabajos de Dirac y Bergmann (véanse [38, 136, 137, 9]). Su algoritmo fué mas tarde globalizado por Gotay y Nester [49, 51, 52], introduciendo en el estudio de estos sistemas la estructura casi tangente que aparece de un modo natural en el espacio de fases de las velocidades (véanse también los artículos de J. Klein [63] y J. Grifone [56]). Además, aunque existe una clara ambigüedad de la dinámica, las ecuaciones del movimiento han de ser de segundo orden.

Como ya hemos visto, es interesante obtener simetrías para integrar las ecuaciones del movimiento (véanse Binz, Sniatycki & Fisher [9], de León y Rodrigues [82], Olver [109] y Marmo [96]). Nuestra intención en este capítulo es obtener una clasificación de las simetrías infinitesimales de un sistema presimpléctico y derivar de ellas las correspondientes constantes del movimiento. Asimismo, se prueban varios Teoremas de Noether. Los resultados se aplican para el caso de sistemas lagrangianos singulares o degenerados, con definiciones compatibles con el caso regular. Nuestro método es el siguiente. Primero, consideramos el caso de sistemas presimplécticos admitiendo una dinámica global. Esta restricción simplifica bastante el problema y, como veremos, es el caso más significativo. Después, consideraremos el caso general y apli-

caremos los resultados anteriormente obtenidos a la variedad final de ligaduras que admite una dinámica global. Un procedimiento similar también funciona para el caso no-autónomo y para sistemas precosimpléticos. También, se estudia la contrapartida hamiltoniana relacionando las dos partes por la transformación de Legendre.

Estos resultados son la extensión natural de los trabajos de Crampin [32] y Prince [116, 117] (véase también [82]) y completan los resultados de Cariñena y Rañada [24], Marmo, Mukunda y Samuel [99] y Ferrario y Passerini [42]. El caso independiente del tiempo fue estudiado por Cariñena, Fernández y Martínez [19, 18, 17], usando la técnica de secciones a lo largo de aplicaciones.

El capítulo está organizado del siguiente modo. En la Sección 3.1, recordamos el algoritmo de ligaduras desarrollado por Gotay y Nester ([49, 51, 52]). La Sección 3.2 está dedicada al estudio de las simetrías infinitesimales de un sistema presimplético con dinámica global. En la Sección 3.3, extendemos estos resultados al caso de un sistema presimplético cualquiera. La clasificación de las simetrías infinitesimales se obtiene en la Sección 3.4 y, se obtienen las correspondientes constantes del movimiento para los sistemas lagrangianos degenerados. En la Sección 3.5, se estudia la relación entre los formalismos lagrangiano y hamiltoniano. En la Sección 3.6 se considera el problema de encontrar una solución que verifique la condición de ecuación diferencial de segundo orden. Las secciones 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 se dedican a aplicar estos resultados a los siguientes casos particulares: dinámica hamiltoniana generalizada, lagrangianos afines en las velocidades, sistemas lagrangianos degenerados de tipo II y sistemas lagrangianos degenerados con un grupo de Lie de simetrías. El caso de sistemas lagrangianos no autónomos degenerados es estudiado en la Sección 3.11 como una aplicación de los resultados obtenidos para un sistema precosimplético arbitrario.

### 3.1 El algoritmo de ligaduras

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $\omega$  una 2-forma cerrada con rango constante y  $\alpha$  una 1-forma cerrada. En este caso diremos que  $(M, \omega, \alpha)$  es un sistema presimplético.

La dinámica se determina encontrando las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega = \alpha . \tag{3.1.1}$$

Como  $\omega$  no es simpléctica, (3.1.1) no tiene solución en general, e incluso si existe no será única. Sea  $b : TM \rightarrow T^*M$  la aplicación definida del siguiente modo:  $b(X) = i_X\omega$ . Al no ser  $\omega$  simpléctica puede suceder que  $b$  no sea sobreyectiva o que tenga un núcleo no trivial, o ambas cosas a la vez. Denotamos por  $\ker\omega$  el núcleo de  $b$ , es decir,  $\ker b = \ker\omega$ .

En [49, 51], Gotay y Nester desarrollaron un algoritmo de ligaduras para sistemas presimplécticos. Resumiremos, a continuación, lo mas esencial de esta construcción. Primero, se consideran los puntos de  $M$  donde (3.1.1) tiene una solución y se supone que este conjunto  $M_2$  es una subvariedad de  $M$ . Desafortunadamente, puede ocurrir que estas soluciones en  $M_2$  no sean tangentes a  $M_2$ . Entonces, debemos restringir  $M_2$  a una subvariedad donde las soluciones de (3.1.1) sean tangentes a  $M_2$ . Procediendo de este modo obtenemos una sucesión de subvariedades:

$$\dots \rightarrow M_k \rightarrow \dots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 = M .$$

Alternativamente, estas subvariedades de ligaduras pueden ser descritas como sigue:

$$M_i = \{x \in M / \alpha(x)(v) = 0, \forall v \in T_x M_{i-1}^\perp\},$$

donde

$$T_x M_{i-1}^\perp = \{v \in T_x M / \omega(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x M_{i-1}\} .$$

Llamaremos a  $M_2$  la subvariedad de ligaduras secundarias,  $M_3$  la subvariedad de ligaduras terciarias, y, en general,  $M_i$  es la subvariedad de ligaduras  $i$ -arias.

Pueden ocurrir tres posibilidades: la primera que exista un entero  $k$  tal que  $M_k = \emptyset$  y entonces la ecuación (3.1.1) no tiene solución; la segunda es que exista una subvariedad  $M_k \neq \emptyset$  pero  $\dim M_k = 0$ , en este caso la ecuación (3.1.1) es consistente pero sólo admite la solución  $X = 0$ ; y el tercer caso, que es el que nosotros consideraremos, es que el algoritmo se estabiliza, es decir, existe un entero positivo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $M_k = M_{k+1}$  y  $\dim M_k > 0$ . Entonces obtenemos una subvariedad final de ligaduras  $M_f = M_k$ , en la cual existe un campo de vectores  $X$  tal que

$$(i_X\omega = \alpha)_{/M_f} . \tag{3.1.2}$$

Si  $\xi$  es una solución de (3.1.2) entonces cada solución arbitraria en  $M_f$  es de la forma

$\xi' = \xi + Y$ , donde  $Y \in (\ker \omega \cap TM_f)$ .

### 3.2 Simetrías y constantes del movimiento de sistemas pre-simplécticos con dinámica global

En esta sección, haremos una clasificación de simetrías y constantes del movimiento para el caso particular de sistemas presimplécticos que admiten una dinámica global (véase [24]).

Decimos que un sistema presimpléctico  $(M, \omega, \alpha)$  admite una dinámica global si existe un campo de vectores  $\xi$  en  $M$  tal que  $\xi$  satisface (3.1.1). Esta condición se puede expresar también de la siguiente forma:

$$\alpha(\ker \omega)(x) = 0, \forall x \in M.$$

**Definición 3.2.1** Una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una constante del movimiento de  $\xi$  si  $\xi F = 0$ .

Así, si  $\gamma$  es una curva integral de  $\xi$ ,  $F \circ \gamma$  es una función constante.

**Definición 3.2.2** Se dice que un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  es una simetría de  $\xi$  si  $\phi$  transforma curvas integrales de  $\xi$  en curvas integrales de  $\xi$ , es decir,  $T\phi(\xi) = \xi$ .

**Definición 3.2.3** Una simetría dinámica de  $\xi$  es un campo de vectores  $X$  de  $M$  de modo que su flujo está formado por simetrías de  $\xi$ , o, alternativamente, si se verifica que  $[X, \xi] = 0$ .

Denotamos por  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  el conjunto de todas las soluciones de (3.1.1):

$$\mathfrak{X}^\omega(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) / i_X \omega = \alpha\}.$$

**Definición 3.2.4** Se dice que una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  si  $F$  es constante a lo largo de las curvas integrales de cualquier solución de (3.1.1). Es decir, si  $F$  verifica que

$$\mathfrak{X}^\omega(M)F = 0.$$

De esta manera, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ , se verifica

$$(\ker \omega)F = 0.$$

**Definición 3.2.5** Se dice que un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  es una simetría de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  si  $\phi$  verifica que

$$T\phi(\xi) \in \mathfrak{X}^\omega(M),$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(M)$ .

**Definición 3.2.6** Una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  es un campo de vectores tal que

$$[X, \mathfrak{X}^\omega(M)] \subset \ker \omega.$$

**Observación 3.2.1** Si la foliación definida por  $\ker \omega$  es una fibración, entonces la variedad cociente  $\tilde{M} = M / \ker \omega$  admite una estructura de variedad diferenciable y la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow \tilde{M}$  es una submersión sobreyectiva. En este caso, existe una única forma simpléctica  $\tilde{\omega}$  en  $\tilde{M}$  tal que  $\pi^*\tilde{\omega} = \omega$ . Como habíamos supuesto que el sistema presimpléctico admitía una dinámica global, la 1-forma  $\alpha$  proyecta en una 1-forma  $\tilde{\alpha}$  en  $\tilde{M}$  de modo que  $\pi^*\tilde{\alpha} = \alpha$ . Como  $\tilde{\omega}$  es simpléctica, existe un único campo de vectores  $\tilde{\xi}$  en  $\tilde{M}$  de tal que

$$i_{\tilde{\xi}}\tilde{\omega} = \tilde{\alpha}.$$

Es fácil probar que todas las soluciones de (3.1.1) son proyectables y, de hecho, todas ellas proyectan al campo de vectores  $\tilde{\xi}$ . De la Definición 3.2.6, se deduce que

$$[X, \ker \omega] \subset \ker \omega.$$

Así,  $X$  proyecta en un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $\tilde{M}$  tal que

$$[\tilde{X}, \tilde{\xi}] = 0.$$

En otras palabras,  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\tilde{\xi}$ . Este hecho justifica la Definición 3.2.6. ♠

**Observación 3.2.2** Si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ , entonces  $X F$  es también una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . En efecto, como  $(\ker \omega)F = 0$ , se obtiene

$$[X, \xi]F = X(\xi F) - \xi(X F) = -\xi(X F) = 0,$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(M)$ . ♠

Denotamos por  $D(\mathfrak{X}^\omega(M))$  el conjunto de las simetrías dinámicas de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . Sean  $X$  e  $Y$  dos simetrías dinámicas de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . Entonces  $[X, Y]$  es también una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . Así,

$$\begin{aligned} [[X, Y], \mathfrak{X}^\omega(M)] &= [X, [Y, \mathfrak{X}^\omega(M)]] + [Y, [\mathfrak{X}^\omega(M), X]] \\ &\subset [X, \ker \omega] + [Y, \ker \omega] \subset \ker \omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $D(\mathfrak{X}^\omega(M))$  es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ , el álgebra de Lie de campos de vectores en  $M$ .

**Definición 3.2.7** Una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$  es un campo de vectores  $X$  en  $M$  tal que

1.  $i_X \omega = dG$ , para alguna función  $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ , e
2.  $i_X \alpha = 0$ .

**Proposición 3.2.1** Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$  entonces  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ .

**Demostración:** Si  $X$  es una simetría de Cartan, entonces, para cada solución  $\xi$  de (3.1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} i_{[X, \xi]} \omega &= L_X i_\xi \omega - i_\xi L_X \omega \\ &= L_X \alpha = d(i_X \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Así,  $[X, \xi] \in \ker \omega$ , y, por lo tanto,  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . ■

Sea  $C(\omega, \alpha)$  el conjunto de todas las simetrías de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$ . Mediante un sencillo cálculo se comprueba que si  $X$  e  $Y$  son simetrías de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$ ,  $[X, Y]$  es también una simetría de Cartan. Así,  $C(\omega, \alpha)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ . De la Proposición 3.2.1 obtenemos que

$$C(\omega, \alpha) \subset D(\mathfrak{X}^\omega(M)).$$

**Teorema 3.2.1 (Teorema de Noether)** *Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$  entonces la función  $G$  (como en la Definición 3.2.7) es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ , entonces existe un campo de vectores  $X$  tal que*

$$i_X \omega = dG ,$$

*y, además,  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$  y, cada campo de vectores  $X + Z$  con  $Z \in \ker \omega$ , es también una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$ .*

**Demostración:** En efecto, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ , se verifica que  $(\ker \omega)G = 0$ . Por lo tanto, la ecuación

$$i_Y \omega = dG ,$$

tiene una solución globalmente definida  $X$  en  $M$  y, puesto que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi G = i_\xi dG = i_\xi i_X \omega \\ &= -i_X i_\xi \omega = -i_X \alpha , \end{aligned}$$

deducimos que  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$  y que cada campo de vectores  $X + Z$ , con  $Z \in \ker \omega$ , es una simetría de Cartan.

Recíprocamente, si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, \alpha)$ , entonces, para cada solución  $\xi$  de (3.1.1), obtenemos

$$0 = i_X \alpha = i_X i_\xi \omega = -i_\xi i_X \omega = -\xi(G) .$$

En consecuencia,  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . ■

### 3.3 Simetrías y constantes del movimiento para sistemas presimplécticos arbitrarios

Sea  $(M, \omega, \alpha)$  un sistema presimpléctico genérico. En general, (3.1.1) no tiene una solución globalmente definida como en la Sección 3.2. El algoritmo de ligaduras nos permite obtener (si

esto es posible) una subvariedad final de ligaduras  $M_f$ .

Empecemos, primero, considerando una estructura presimpléctica  $(M_f, j_f^* \omega, j_f^* \alpha)$  donde  $j_f : M_f \rightarrow M$  es la inclusión de  $M_f$  en  $M$ . Sabemos que cada solución de (3.1.1) es un campo de vectores  $X$  en  $M_f$  tal que

$$(i_X \omega = \alpha)_{/M_f}. \quad (3.3.3)$$

Si  $\omega_{M_f} = j_f^* \omega$  y  $\alpha_{M_f} = j_f^* \alpha$ , es fácil probar que si  $\xi$  es una solución de (3.1.1), entonces  $\xi$  es también una solución de la siguiente ecuación:

$$i_X \omega_{M_f} = \alpha_{M_f} \quad (3.3.4)$$

Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f) &= \{X \in \mathfrak{X}(M_f) / i_X \omega_{M_f} = \alpha_{M_f}\}, \\ \mathfrak{X}^{\omega}(M_f) &= \{X \in \mathfrak{X}(M_f) / (i_X \omega = \alpha)_{/M_f}\}. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\mathfrak{X}^{\omega}(M_f) \subset \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ .

Si suponemos que el rango de  $\omega_{M_f}$  es constante, entonces  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  es un sistema presimpléctico con una dinámica global. Podemos, por lo tanto, aplicar todas las definiciones y resultados de la Sección 3.2 a este sistema presimpléctico.

Obtenemos que  $D(\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f))$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M_f)$  y  $C(\omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M_f)$ . Como cada simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ , deducimos que

$$C(\omega_{M_f}, \alpha_{M_f}) \subset D(\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)).$$

El Teorema 2.1 se reescribe ahora del siguiente modo:

**Teorema 3.3.1 (Teorema de Noether)** *Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$ , entonces  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ , entonces existe un campo de vectores  $X$  en  $M_f$  tal*

que

$$i_X \omega_{M_f} = dG ,$$

y, además,  $X$  es una simetría de Cartan y cada campo de vectores  $X + Z$ , con  $Z \in \ker \omega_{M_f}$ , es también una simetría de Cartan.

Como  $\mathfrak{X}^\omega(M_f) \subset \mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ , podemos distinguir otros tipos de simetrías y constantes del movimiento.

### Definición 3.3.1

1. Se dice que una función  $F : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$  si  $F$  es una constante del movimiento a lo largo de las curvas integrales de las soluciones de (3.3.3), es decir,

$$\mathfrak{X}^\omega(M_f)F = 0 .$$

2. Se dice que un difeomorfismo  $\phi : M_f \rightarrow M_f$  es una simetría de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$  si  $\phi$  transforma curvas integrales de soluciones de (3.3.3) en curvas integrales de soluciones de (3.3.3).
3. Una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$  es un campo de vectores en  $M_f$  tal que,

$$[X, \mathfrak{X}^\omega(M_f)] \subset \ker \omega \cap TM_f .$$

Ahora consideraremos difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow M$  que preservan la 2-forma  $\omega$  y la 1-forma  $\alpha$ , (es decir, preservan la estructura presimpléctica):

$$\phi^* \omega = \omega , \quad \phi^* \alpha = \alpha .$$

**Proposición 3.3.1** Si el difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  preserva la estructura presimpléctica, entonces, restringe a un difeomorfismo  $\phi_i : M_i \rightarrow M_i$ , donde  $M_i$  es la subvariedad de ligaduras  $i$ -aria. En particular,  $\phi$  restringe a un difeomorfismo  $\phi_f : M_f \rightarrow M_f$ .

**Demostración:** Si  $i = 1$ , la Proposición es trivialmente cierta. Ahora, supongamos que la Proposición es cierta para  $i = m$  y probemos que también es cierta para  $i = m + 1$ .

Probaremos que si  $v \in T_x M_m^\perp$ , entonces  $T_x \phi(v) \in T_{\phi(x)} M_m^\perp$ . En efecto, para cada  $u \in T_{\phi(x)} M_m$ , obtenemos

$$\omega(\phi(x))(T_x \phi(v), u) = \omega(x)(v, T_{\phi(x)} \phi^{-1}(u)) = 0,$$

puesto que  $\omega$  es  $\phi$ -invariante y  $T_{\phi(x)} \phi^{-1}(u) \in T_x M_m$  por la hipótesis de inducción. Se deduce así que

$$T_x \phi(T_x M_m^\perp) = T_{\phi(x)} M_m^\perp.$$

Ya es solamente necesario probar que si  $x \in M_{m+1}$ , entonces  $\phi(x) \in M_{m+1}$ , es decir, para cada  $v \in T_{\phi(x)} M_m^\perp$ ,  $\alpha(\phi(x))(v) = 0$ . Pero, como  $\alpha$  es también  $\phi$ -invariante obtenemos

$$\alpha(\phi(x))(v) = \alpha(x)(T_{\phi(x)} \phi^{-1}(v)) = 0. \quad \blacksquare$$

**Corolario 3.3.1** *Sea  $X$  un campo de vectores en  $M$  tal que*

1.  $i_X \omega = dG$ , para cada función  $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,
2.  $i_X \alpha = 0$ .

*Entonces,  $X_{/M_f}$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$ .*

**Demostración:** Como el flujo de  $X$  está formado por difeomorfismos que preservan la estructura presimpléctica, entonces, por la Proposición 3.3.1,  $X$  es tangente a  $M_f$ . Además, como  $X$  verifica que

$$i_X \omega = dG,$$

la restricción de  $X$  a  $M_f$  también verifica que

$$i_{X_{/M_f}} \omega_{M_f} = d(G_{/M_f}).$$

Finalmente,

$$i_{X_{/M_f}} \alpha_{M_f} = 0.$$

En consecuencia,  $X_{/M_f}$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  y  $G_{/M_f}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ .  $\blacksquare$

**Ejemplo 3.3.1** Sea el sistema presimpléctico  $(\mathbb{R}^6, \omega, \alpha)$  definido por:

$$\begin{aligned}\omega &= dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3 \\ \alpha &= x_4 dx_4 - x_3 dx_5 - x_5 dx_3 ,\end{aligned}$$

donde  $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$  son las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^6$ . Es fácil probar que  $\ker \omega$  está generado por  $\partial/\partial x_5$  y  $\partial/\partial x_6$ . La única ligadura secundaria es  $\phi_1 = x_3 = 0$ . Como no hay ligaduras terciarias, el algoritmo de ligaduras termina en  $M_2$ , es decir,

$$M_f = M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 / x_3 = 0\} .$$

Las soluciones de la ecuación

$$(i_X \omega = \alpha)_{/M_f}$$

son

$$\mathfrak{X}^\omega(M_f) = x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ker \omega .$$

Si denotamos por  $j : M_f \rightarrow \mathbb{R}^6$  la inclusión canónica de  $M_f$  en  $\mathbb{R}^6$ , entonces

$$j^* \omega = \omega_{M_f} = dx_1 \wedge dx_4 .$$

Así pues,  $\ker \omega_{M_f}$  está generado por  $\partial/\partial x_2$ ,  $\partial/\partial x_5$  y  $\partial/\partial x_6$ . Las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega_{M_f} = j^* \alpha$$

son

$$\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f) = x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ker \omega_{M_f} .$$

Entonces,  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$  está estrictamente contenido en  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ . Estudiaremos las simetrías y constantes del movimiento del sistema presimpléctico  $(M, \omega, \alpha)$ .

Una función  $F : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$  si verifica las siguientes condiciones:

$$x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_5} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_6} = 0.$$

Por lo tanto, cada función  $F$  que dependa solamente de  $x_2$  y  $x_4$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$ . Por ejemplo,  $F_1(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = x_4$  y  $F_2(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = x_2$  son constantes del movimiento.

Una función  $F : M_f \longrightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  si se verifica que

$$x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_5} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_6} = 0.$$

Las funciones  $F$  que son constantes del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  son aquellas que dependen únicamente de  $x_4$ , por ejemplo:

$$F_1(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) = x_4.$$

Obviamente, todas las constantes del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  son también constantes del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M_f)$ .

El campo de vectores  $X = \partial/\partial x_1$  on  $\mathbb{R}^6$  verifica que

$$i_X \omega = dG, \text{ donde } G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_4, \quad i_X \alpha = 0.$$

Del Corolario 3.3.1, deducimos que  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, \alpha_{M_f})$  y  $G/M_f$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ .

### 3.4 Simetrías y constantes del movimiento para sistemas lagrangianos singulares

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Considérese un lagrangiano  $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que la matriz hessiana

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)$$

sea singular. A este tipo de lagrangiano se le llama **lagrangiano singular** o **degenerado**. Sea  $E_L$  la energía asociada con  $L$ , definida por  $E_L = CL - L$ , donde  $C$  es el campo de vectores de Liouville en  $TQ$ . Denotamos por  $\alpha_L$  la 1-forma de Poincaré-Cartan definida por  $\alpha_L = J^*(dL)$  y, por  $\omega_L$  la 2-forma de Poincaré-Cartan definida por  $\omega_L = -d\alpha_L$ , donde  $J$  es la estructura casi tangente canónica en  $TQ$ .

Si  $(q^A, \dot{q}^A)$  son coordenadas fibradas en  $TQ$ , se obtiene

$$\begin{aligned} E_L &= \sum_{A=1}^n \dot{q}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} - L(q^A, \dot{q}^A), \\ \alpha_L &= \sum_{A=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} dq^A, \\ \omega_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} dq^A \wedge dq^B + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} dq^A \wedge d\dot{q}^B. \end{aligned}$$

Supongamos que la 2-forma  $\omega_L$  tiene rango constante. Aplicamos el algoritmo de ligaduras al sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ . Se obtiene la siguiente sucesión de subvariedades de ligaduras:

$$\dots \rightarrow P_k \rightarrow \dots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 = TQ.$$

Si el algoritmo se estabiliza, entonces existe un entero  $k$  tal que  $P_{k+1} = P_k = P_f$  y  $P_f$  es la variedad final de ligaduras. Así, podemos trasladar todas las definiciones y resultados de la Sección 3.3 a este caso particular.

Denotamos por  $X^c$  la elevación completa y por  $X^v$  la elevación vertical a  $TQ$  de un campo de vectores  $X$  en  $Q$ .

**Definición 3.4.1** *Se dice que un campo de vectores  $X$  en  $Q$  es una simetría de Lie de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$  si*

1.  $X^c$  es tangente a  $P_f$ ,
2.  $[X^c_{/P_f}, \mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)] \subset \ker \omega_{P_f}$ .

El conjunto  $\mathcal{L}(\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f))$  formado por todas las simetrías de Lie de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$  es una subálgebra

de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$ . Además,

$$(\mathcal{L}(\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)))^c_{/P_f} \subset D(\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)).$$

**Definición 3.4.2** Se dice que un difeomorfismo  $\Phi : Q \rightarrow Q$  es una simetría de  $L$  si  $L \circ T\Phi = L$ .

Se dice que un campo de vectores  $X$  en  $Q$  es una simetría infinitesimal de  $L$  si

$$X^c L = 0,$$

es decir, si su flujo está formado por simetrías de  $L$ .

Si denotamos por  $I(L)$  el conjunto de todas las simetrías infinitesimales de  $L$ , entonces  $I(L)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$ .

**Proposición 3.4.1** Si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ , entonces  $\theta(X^c)_{/P_f} = (X^v L)_{/P_f}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$ .

**Demostración:** En coordenadas locales, se obtiene

$$X^c L = X^A \frac{\partial L}{\partial q^A} + \dot{q}^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} = 0$$

y

$$\begin{aligned} L_{X^c} \alpha_L &= X^c \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^B} \right) dq^B + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \frac{\partial X^A}{\partial q^B} dq^B \\ &= \left( X^A \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial \dot{q}^B} + \dot{q}^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \right) dq^B \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^B} (X^c L) \right) dq^B \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pero, si  $L_{X^c} \alpha_L = 0$ , entonces

$$i_{X^c} \omega_L = d(\alpha_L(X^c)).$$

Además,  $X^c E_L = 0$ . Obtenemos el resultado requerido aplicando el Corolario 3.3.1. ■

Procediendo como en la prueba de la Proposición 3.4.1 deducimos que  $I(L) \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f))$ .

**Definición 3.4.3** Se dice que un campo de vectores  $X$  en  $Q$  es una simetría de Noether si

$$X^c L = G^c ,$$

para alguna función  $G$  en  $Q$ , donde  $G^c$  denota la elevación completa de  $G$  a  $TQ$ .

Siguiendo un procedimiento similar al usado en la Proposición 3.4.1, podemos caracterizar una simetría de Noether como sigue:

1.  $i_{X^c} \omega_L = dF$ , para alguna función  $F$ ,
2.  $X^c E_L = 0$ .

En efecto, podemos elegir  $F = \alpha_L(X^c) - G^v$ , donde  $G^v$  la elevación vertical de  $G$ .

**Proposición 3.4.2** Si  $X$  es una simetría de Noether, entonces  $\alpha_L(X^c) - G^v$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$ .

**Demostración:** Véase la prueba de la Proposición 3.4.1. ■

Denotamos por  $N(L)$  el conjunto de todas las simetrías de Noether. Entonces,  $N(L)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(Q)$  y se obtienen las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} I(L) &\subset N(L) \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)) , \\ (N(L))_{P_f}^c &\subset C(\omega_{P_f}, \alpha_{P_f}) . \end{aligned}$$

### 3.5 Relación con la formulación hamiltoniana

Sea  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano arbitrario. La aplicación de Legendre  $Leg : TQ \rightarrow T^*Q$  se escribe localmente

$$Leg : (q^A, \dot{q}^A) \rightsquigarrow (q^A, p_A) ,$$

siendo  $p_A$  los momentos definidos por  $p_A = \partial L / \partial \dot{q}^A$ . Si  $L$  es singular,  $Leg$  no es un difeomorfismo. Sin embargo, supondremos que  $L$  es casi regular, es decir,  $M_1 = Leg(TQ)$  es una subvariedad de  $T^*Q$  y  $Leg$  es una submersión sobre  $M_1$  con fibras conexas. La subvariedad  $M_1$  será llamada la subvariedad de ligaduras primarias.

Sea  $\lambda_Q$  la 1-forma de Liouville y  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  la forma simpléctica canónica de  $T^*Q$ .

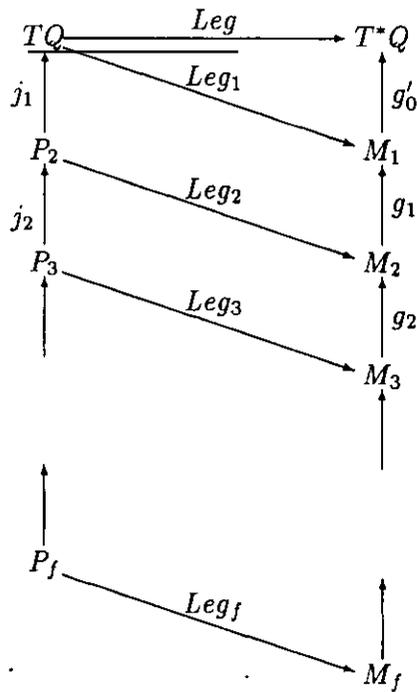
Como el lagrangiano es casi regular, la energía  $E_L$  es constante a lo largo de las fibras de  $Leg$ . Por tanto,  $E_L$  proyecta en una función  $h_1$  en  $M_1$ :

$$h_1(Leg(x)) = E_L(x), \forall x \in TQ.$$

Si denotamos por  $g'_0 : M_1 \rightarrow T^*Q$  la inclusión canónica de  $M_1$  en  $T^*Q$ , obtenemos un sistema presimpléctico  $(M_1, (g'_0)^*\Omega_Q, dh_1)$ . Si aplicamos ahora el algoritmo de ligaduras, obtenemos una sucesión de subvariedades de ligaduras:

$$\dots \rightarrow M_k \rightarrow \dots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1.$$

Denotaremos por  $M_f$  la subvariedad final de ligaduras (si existe) para este sistema presimpléctico. La transformación de Legendre restringe a cada subvariedad  $P_i$ ,  $i \geq 1$ , de  $TQ$  y entonces obtenemos una familia de submersiones sobreyectivas  $Leg_i : P_i \rightarrow M_i$  que relacionan las subvariedades de ligaduras  $P_i$  y  $M_i$ . De hecho,  $Leg_i$  es una fibración, para todo  $i$ . Además, la variedad cociente  $P_i / \ker Leg_i$  es difeomorfa a  $M_i$ . El siguiente diagrama conmutativo ilustra esta discusión:



Considérense las ecuaciones

$$(i_X \omega_L = dE_L)_{/P_f} \quad (3.5.5)$$

e

$$(i_X \omega_1 = dh_1)_{/M_f} \quad (3.5.6)$$

Gotay y Nester (véase [51]) han probado que la formulación lagrangiana y hamiltoniana son equivalentes en el siguiente sentido. Dado un campo de vectores  $\xi \in \mathfrak{X}(P_f)$  que es una solución de (3.5.5) y  $Leg_f$ -proyectable, entonces su proyección  $Z = TLeg_f(\xi)$  es una solución de (3.5.6). Recíprocamente, si  $Z \in \mathfrak{X}(M_f)$  es una solución de (3.5.6), entonces cada campo de vectores en  $P_f$  proyectable en  $Z$  es una solución de (3.5.5).

Sean  $j_{i-1} : P_i \longrightarrow TQ$  y  $g_{i-1} : M_i \longrightarrow M_1$ ,  $1 \leq i$ , (donde  $g_0$  es la identidad) las inclusiones canónicas, y  $g'_{i-1} = g'_0 \circ g_{i-1}$ ,  $1 \leq i$ . Denotemos por

$$\omega_{P_i} = j_i^* \omega_L, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\omega_{M_i} = (g'_i)^*(\Omega_Q), \quad 1 \leq i \leq k$$

las restricciones de  $\omega_L$  y  $\omega_Q$  a  $P_i$  y  $M_i$ , respectivamente. Es fácil probar que

$$\omega_{P_i} = Leg_i^* \omega_{M_i} \text{ y } j_i^* E_L = (Leg_i)^* g_i^* h_1.$$

**Proposición 3.5.1** *Si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$  entonces  $F$  es proyectable en  $M_f$  y su proyección  $\tilde{F}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ .*

**Demostración:** En efecto, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$  entonces

$$(\ker \omega_{P_f})F = 0.$$

Pero, puesto que  $\ker \omega_L \cap TP_f \subset \ker \omega_{P_f}$ , deducimos que  $(\ker \omega_L \cap TP_f)F = 0$ . Ahora, como  $\ker TLeg_f \subset \ker \omega_L \cap TP_f$ ,  $F$  es proyectable. Si  $Z_{\omega_{M_f}}$  es una solución de la ecuación

$$i_X \omega_{M_f} = g_f^*(dh_1),$$

entonces cada campo de vectores  $\xi$  en  $P_f$  proyectable en  $Z_{\omega_{M_f}}$ , es una solución de la ecuación

$$i_X \omega_{P_f} = dj_f^* E_L, \quad (3.5.7)$$

puesto que

$$\begin{aligned} i_\xi \omega_{P_f} - j_f^*(dE_L) &= i_\xi(\text{Leg}_f^* \omega_{M_f}) - \text{Leg}_f^* g_f^*(dh_1) \\ &= \text{Leg}_f^* (i_{Z_{\omega_{M_f}}} \omega_{M_f} - g_f^*(dh_1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\xi$  es una solución de (3.5.7). Como  $\xi F = 0$ , obtenemos que  $Z_{\omega_{M_f}}(\tilde{F}) = 0$ . ■

**Proposición 3.5.2** *Si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(P_f)$ , entonces  $F$  es proyectable en  $M_f$  y su proyección  $\tilde{F}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_1}}(M_f)$ .*

**Demostración:** En efecto, si  $Z_{\omega_{M_1}}$  es una solución de la ecuación

$$(i_X \omega_{M_1} = dh_1)_{/M_f},$$

entonces cada campo de vectores  $\xi$  en  $P_f$  proyectable en  $Z_{\omega_{M_1}}$ , es una solución de (3.5.5). Así, como  $\xi F = 0$ , deducimos que  $Z_{\omega_{M_1}} \tilde{F} = 0$ . ■

**Proposición 3.5.3** *Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M_f, \omega_{M_f}, g_f^*(dh_1))$ , entonces cada campo de vectores  $X'$  en  $P_f$  tal que  $T\text{Leg}_f(X') = X$  es una simetría de Cartan de  $(P_f, \omega_{P_f}, j_f^*(dE_L))$ .*

**Demostración:** Si un campo de vectores  $X$  en  $M_f$  verifica que

1.  $i_X \omega_{M_f} = dG$ , con  $G : M_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,
2.  $X(h_{1/M_f}) = 0$ ,

entonces para cada  $X' \in \mathfrak{X}(P_f)$ , con  $T\text{Leg}_f(X') = X$ , obtenemos

1.  $i_{X'} \omega_{P_f} = dG'$ , con  $G' = \text{Leg}_f^* G$ ,
2.  $X'(E_{L/P_f}) = 0$ .

En consecuencia,  $X'$  es una simetría de Cartan de  $(P_f, \omega_{P_f}, j_f^*(dE_L))$ . ■

**Proposición 3.5.4** Si  $F$  es una constante del movimiento de  $Z_{\omega_{M_1}}$ , donde este campo de vectores es una solución de la ecuación

$$(i_X \omega_{M_1} = dh_1)_{/M_f},$$

entonces  $(Leg_f)^* F$  es una constante del movimiento para cada  $\xi_{\omega_L}$  tal que  $TLeg_f(\xi_{\omega_L}) = Z_{\omega_L}$ .

Si  $F$  es una constante del movimiento de  $Z_{\omega_{M_f}}$ , donde este campo es una solución de la ecuación

$$i_X \omega_{M_f} = g_f^*(dh_1),$$

entonces  $(Leg_f)^* F$  es una constante del movimiento para cada  $\xi_{\omega_{P_f}}$  tal que  $TLeg_f(\xi_{\omega_{P_f}}) = Z_{\omega_{M_f}}$ .

**Demostración:** Se sigue directamente de la equivalencia de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana. ■

Consideremos el operador  $\iota$  definido en los capítulos anteriores. Recordemos que la elevación completa de un campo de vectores  $X$  en  $Q$  a  $T^*Q$  es un campo de vectores  $X^{c^*}$  definido como sigue:

$$i_{X^{c^*}} \omega_Q = d(\iota X). \quad (3.5.8)$$

Localmente, obtenemos

$$X^{c^*} = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} - p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial p_A}.$$

(véase de León y Rodrigues [82])

**Proposición 3.5.5** Sea  $X$  un campo de vectores en  $M$  tal que  $X^c L = 0$ , es decir,  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ . Entonces  $X^c$  es  $Leg_1$ -proyectable y su proyección es  $X^c_{/M_1}$ . Además,  $(g_f')^* \iota(X)$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$ .

**Demostración:** Primero probaremos que  $X^c$  es proyectable en  $M_1$ , es decir,  $X^c$  verifica que

$$[X^c, \ker TLeg] \subset \ker TLeg.$$

Como  $\ker TLeg = \ker \omega_L \cap V(TQ)$ , entonces, si  $Z \in \ker \omega_L$ , se deduce que

$$\begin{aligned} i_{[X^c, Z]} \omega_L &= L_{X^c} i_Z \omega_L - i_Z L_{X^c} \omega_L \\ &= -i_Z d i_{X^c} \omega_L - i_Z i_{X^c} d \omega_L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $[X^c, \ker \omega_L] \subset \ker \omega_L$ . Si recordamos que  $J[X^c, V] = 0$  para cada campo de vectores vertical en  $TQ$ , deducimos que  $X$  es proyectable.

En coordenadas locales, se obtiene

$$X^c = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \dot{q}^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

Entonces,

$$TLeg_1(X^c) = \left( X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \dot{q}^C \frac{\partial X^B}{\partial q^C} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^B \partial \dot{q}^A} \frac{\partial}{\partial p_A} + X^B \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial \dot{q}^B} \frac{\partial}{\partial p_A} \right) /_{M_1}$$

Pero, como  $X^c L = 0$ , se obtiene

$$TLeg_1 X^c = \left( X^A \frac{\partial}{\partial q^A} - p_B \frac{\partial X^B}{\partial \dot{q}^A} \frac{\partial}{\partial p_A} \right) /_{M_1} = X_{/M_1}^{c*}.$$

Además

$$i_{X_{/M_1}^{c*}} \omega_1 \doteq d(g_1')^* \iota X$$

y

$$Leg_1^*(X_{/M_1}^{c*} h_1) = X^c(E_L).$$

Así,  $X_{/M_1}^{c*} h_1 = 0$ . Ahora, del Corolario 3.3.1 y del Teorema de Noether, se obtiene el resultado.

■

**Ejemplo 3.5.1** Considérese la función lagrangiana  $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2.$$

(véase Krupková [66]). Aquí,  $(q^1, q^2, q^3)$  son las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^3$  que inducen coordenadas  $(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$  en  $T\mathbb{R}^3$ .

La energía, la 1-forma y la 2-forma de Poincaré-Cartan son, respectivamente:

$$\begin{aligned} E_L &= CL - L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 = L, \\ \alpha_L &= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)dq_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)dq_2, \\ \omega_L &= dq_1 \wedge d\dot{q}_1 + dq_1 \wedge d\dot{q}_2 + dq_2 \wedge d\dot{q}_1 + dq_2 \wedge d\dot{q}_2. \end{aligned}$$

Es fácil probar que  $\ker \omega_L$  está generado por

$$\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}.$$

No hay ligaduras secundarias, es decir, existe una solución global de la dinámica. Las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega_L = dE_L,$$

están determinadas por

$$\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ) = \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \ker \omega_L.$$

Una función  $F : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$  si se verifican las siguientes condiciones:

$$\dot{q}_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_3} = 0.$$

De este modo, cada función  $F(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$  tal que  $\partial F / \partial \dot{q}_1 = \partial F / \partial \dot{q}_2$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ . Por ejemplo,

$$F(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \dot{q}_1 + \dot{q}_2,$$

es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ . Por el Teorema de Noether, obtenemos simetrías de Cartan para la constante del movimiento  $F$ , que son, precisamente, las soluciones de la

ecuación

$$i_X \omega_L = dF .$$

Entonces,

$$X = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} + Z ,$$

donde  $Z \in \ker \omega_L$ . De hecho,  $\partial/\partial q_1$  y  $\partial/\partial q_2$  son simetrías infinitesimales de  $L$ . Por la Proposición 3.4.1 se deduce que

$$\alpha_L\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right) = \alpha_L\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\right) = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

es una constante del movimiento, precisamente,  $F$ .

Ahora, estableceremos la formulación hamiltoniana para este ejemplo. Puesto que

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 , \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 , \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} = 0 ,$$

deducimos que la subvariedad  $M_1$  de  $T^*Q$  está definida por las siguientes ligaduras primarias:

$$\phi_1 = p_1 - p_2 = 0 \text{ y } \phi_2 = p_3 = 0 .$$

Si elegimos coordenadas  $(q^1, q^2, q^3, p_1)$  en  $M_1$ , obtenemos que

$$\omega_{M_1} = (g'_1)^* \omega_Q = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_1 ,$$

donde

$$g'_1(q^1, q^2, q^3, p_1) = (q^1, q^2, q^3, p_1, p_1, 0) .$$

La energía hamiltoniana  $h_1$  es

$$h_1 = \frac{1}{2} p_1^2 .$$

Así,  $\ker \omega_{M_1}$  está generado por

$$\frac{\partial}{\partial q^3} , \quad \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{\partial}{\partial q^2} ,$$

y todas las soluciones de la ecuación

$$i_X \omega_{M_1} = dh_1 ,$$

son

$$\mathfrak{X}^{\omega_{M_1}}(M_1) = p_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \ker \omega_{M_1} .$$

Como sabemos, una función  $F : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_1}}(M_1)$  si y solamente si

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial q^1} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial q^3} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial q^1} - \frac{\partial F}{\partial q^2} = 0 ,$$

por lo que  $F$  ha de ser de la forma  $F = F(p_1)$ .

### 3.6 El problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden

Sea  $Z$  un campo de vectores en  $M_f$  tal que

$$(i_Z \omega_1 = dh_1)_{/M_f} .$$

Sabemos que

$$P_f / \ker TLeg_f \cong M_f .$$

Dado un campo de vectores  $X$  en  $P_f$  que proyecta en  $Z$ , podemos encontrar un único punto  $y$  en cada fibra de  $Leg_f$  tal que  $X$  verifica en  $y$  la condición de ecuación diferencial de segundo orden, es decir,  $(JX)_y = C_y$  (véanse [49, 52]).

En coordenadas locales, si  $X$  se escribe localmente como

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \tilde{X}^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} ,$$

y si  $z = Leg_f(y) \in M_f$ , e identificamos a  $z$  con la fibra que contiene a  $y$ , deducimos que  $X^A$  es

constante en la fibra. Además,

$$U = JX - C = (X^A - \dot{q}^A) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

es tangente a las fibras. Sea  $\sigma(t) = (q^A(t), \dot{q}^A(t))$  la curva integral de  $U$  que contiene al punto  $y$  con coordenadas  $(q_0^A, \dot{q}_0^A)$ . Deducimos que

$$\sigma(t) = (q_0^A, X^A - e^{-t}(X^A - \dot{q}_0^A)).$$

Pasando al límite obtenemos:

$$\bar{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = (q_0^A, X^A).$$

Así, el punto  $\bar{y}$  con coordenadas  $(q_0^A, X^A)$  está en la misma fibra que  $y$ , puesto que las fibras son cerradas. Además,  $U(\bar{y}) = 0$ , y así,  $X$  verifica la condición de segundo orden en el punto  $\bar{y}$ .

Hemos obtenido una sección diferenciable  $\alpha : M_f \rightarrow P_f$  de  $Leg_f$ . Su imagen  $S = \alpha(M_f)$  es, por lo tanto, una subvariedad de  $P_f$ , en la cual  $X$  verifica la condición de segundo orden. En general,  $X$  no es tangente a  $S$ , pero el campo de vectores  $\xi' = T\alpha(Z)$  si que es tangente a  $S$ . Además,  $\xi'$  es una solución de la ecuación

$$(i_X \omega_L = dE_L)_{/S},$$

y también verifica la condición de segundo orden.

Ahora, estudiaremos la relación entre las simetrías y las constantes del movimiento en  $S$  con las definidas en  $P_f$ .

**Proposición 3.6.1** *Si  $Z_{\omega_{M_f}}$  es una solución de la ecuación*

$$i_X \omega_{M_f} = dh_{1/M_f}, \quad (3.6.9)$$

*entonces el campo de vectores  $\xi' = T\alpha(Z_{\omega_{M_f}})$  en  $S$  es una solución de la ecuación*

$$i_X \omega_S = dE_L / S, \quad (3.6.10)$$

donde  $\omega_S = j^*\omega_L$ , siendo  $j$  la inclusión canónica de  $S$  en  $TQ$ .

Recíprocamente, si  $\xi'$  es una solución de (3.6.9), entonces  $Z = T\alpha^{-1}(\xi')$  es una solución de (3.6.10).

**Demostración:** De hecho,

$$\begin{aligned} i_{\xi'}\omega_S &= i_{T\alpha Z}(\alpha^*\omega_{M_f}) \\ &= (\alpha^{-1})^*(i_Z\omega_{M_f}), \end{aligned}$$

y, como

$$dE_{L|_S} = (\alpha^{-1})^*(dh_{1|M_f}),$$

obtenemos el resultado requerido. ■

Puesto que  $S$  y  $M_f$  son difeomorfos y la dinámica en ellos es equivalente, existe una equivalencia completa entre las simetrías y constantes del movimiento via  $\alpha$ , y, también, via  $Leg_f/S : S \rightarrow M_f$ .

### 3.7 Dinámica hamiltoniana generalizada

En esta sección estudiaremos la relación entre las simetrías y constantes del movimiento para un sistema lagrangiano en  $TQ$  y las simetrías y constantes del movimiento para el sistema presimpléctico definido en  $T^*Q \oplus TQ$ . Esta formulación usando el espacio  $T^*Q \oplus TQ$  fue establecida por Skinner y Rusk [133, 134] (véanse también Cariñena y López [22, 93], de León y Rodrigues [82]).

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Considérese la suma de Whitney de  $T^*Q$  con  $TQ$ , que denotaremos por

$$W_0 = T^*Q \oplus TQ.$$

Sean

$$\begin{aligned} \pi_1 : T^*Q \oplus TQ &\rightarrow T^*Q, \\ \pi_2 : T^*Q \oplus TQ &\rightarrow TQ, \end{aligned}$$

las proyecciones sobre el primer y segundo factores, respectivamente.

Sea  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular con energía  $E_L$ . La 2-forma de Poincaré-Cartan  $\omega_L$  es, en este caso, una forma simpléctica y la transformación de Legendre un difeomorfismo local. Si suponemos, además, que el lagrangiano  $L$  es hiperregular, la transformación de Legendre  $Leg : TQ \rightarrow T^*Q$  es un difeomorfismo. Denotamos por  $\xi_L$  el campo de vectores de Euler-Lagrange, por  $\omega_Q$  la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$  y por  $X_H$  el campo de vectores hamiltoniano con energía  $H$ . Se verifica:

$$\begin{aligned} (Leg^{-1})^* E_L &= H, \\ TLeg(\xi_L) &= X_H, \\ (Leg^{-1})^* \omega_L &= \omega_Q. \end{aligned}$$

Definimos en  $W_0 = T^*Q \oplus TQ$  una 2-forma presimpléctica  $\omega = \pi_1^* \omega_Q$  y una función  $D : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$D = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle - \pi_2^* L.$$

Si  $(q^A)$  son coordenadas locales en un entorno de  $U$  de  $Q$ ,  $(q^A, \dot{q}^A)$  las coordenadas inducidas en  $TU$  y  $(q^A, p_A)$  las coordenadas inducidas en  $T^*U$ , entonces denotamos por  $(q^A, p_A, \dot{q}^A)$  las coordenadas inducidas en  $T^*U \oplus TU$ . Localmente, expresamos  $D$  como sigue:

$$D(q^A, p_A, \dot{q}^A) = p_A \dot{q}^A - L(q^A, \dot{q}^A).$$

Hemos obtenido un sistema presimpléctico  $(W_0, \omega, dD)$  y podemos aplicar el algoritmo de ligaduras a este sistema (véanse [93, 22]). La subvariedad de ligaduras  $W_1$  de  $W_0$  es precisamente  $W_1 = \text{Grafo}(Leg)$ . Denotemos por  $j_1$  la inclusión canónica:

$$W_1 \xrightarrow{j_1} W_0.$$

$W_1$  estará localmente caracterizado por las siguientes ligaduras:

$$\phi_A = p_A - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}, \quad A = 1, \dots, n.$$

Si consideramos la 2-forma  $j_1^*\omega = \omega_{W_1}$  en  $W_1$ , obtenemos que

$$\ker \omega_{W_1} = TW_1^\perp \cap TW_1.$$

Como  $TW_1^\perp$  está localmente generado por  $\{\partial/\partial\dot{q}^A\}$ ,  $A = 1, \dots, n$ , entonces un campo de vectores  $X$  es tangente a  $W_1$  si y solamente si  $X(\phi_A)_{/W_1} = 0$ , para todo  $A$ . Como  $L$  es regular,  $\partial/\partial\dot{q}^A$ ,  $A = 1, \dots, n$  no es tangente a  $W_1$  y, por tanto,  $\ker \omega_{W_1} = 0$ . Luego,  $(W_1, \omega_{W_1})$  es una variedad simpléctica.

Puesto que  $\pi_1/W_1$  y  $\pi_2/W_1$  son difeomorfismos, podemos considerar las aplicaciones inversas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de estas proyecciones. Están definidas como sigue:

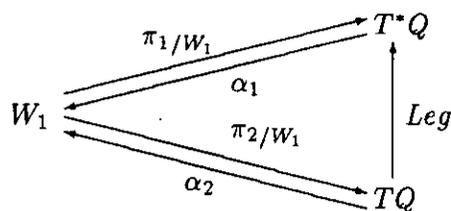
$$\alpha_1: T^*Q \longrightarrow W_1$$

$$(q^A, \dot{q}^A) \longmapsto (q^A, \frac{\partial H}{\partial p_A}, p_A)$$

$$\alpha_2: TQ \longrightarrow W_1$$

$$(q^A, \dot{q}^A) \longmapsto (q^A, \dot{q}^A, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A})$$

Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:



La condición de que un campo de vectores  $X$  sea tangente a  $W_1$  puede ser escrita de la

siguiente manera:

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + X'_A \frac{\partial}{\partial p_A} + X''^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

Entonces,  $X$  es tangente a  $W_1$  si y solamente si

$$X^A \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial \dot{q}^k} + X''^A \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^k} = X'_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Puesto que  $\alpha_2$  es un difeomorfismo, el campo de vectores  $X = T\alpha_2(\xi_L)$  está bien definido.

Localmente, si

$$\xi_L = \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \xi^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A},$$

obtenemos

$$X = \left( \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \xi^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} + \left( \dot{q}^B \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^B \partial q^A} + \xi^B \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^B \partial \dot{q}^A} \right) \frac{\partial}{\partial p_A} \right) /_{W_1}$$

Además,  $X$  es la solución de la ecuación

$$i_X \omega_{W_1} = dj_1^* D,$$

es decir,  $X$  es el campo de vectores hamiltoniano  $X_{j_1^* D}$ .

Ahora estudiaremos la relación entre las simetrías y constantes del movimiento de estos sistemas.

**Proposición 3.7.1** *Una función  $g : TM \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  si y solamente si  $(\pi_{2/W_1})^* g$  es una constante del movimiento de  $X_{j_1^* D}$ .*

**Demostración:** Puesto que  $X_{j_1^* D} = (\alpha_2)_*(\xi_L)$ , se obtiene

$$X_{j_1^* D}((\pi_{2/W_1})^* g) = (\pi_{2/W_1})^*(\xi_L g) = 0.$$

El recíproco es trivial, al ser  $\pi_{2/W_1}$  un difeomorfismo. ■

**Corolario 3.7.1** *Una función  $g : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $X_H$  si y solamente si  $(\pi_{1/W_1})^* g$  es una constante del movimiento de  $X_{j_1^* D}$ .*

**Proposición 3.7.2** *Un campo de vectores  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $X_{j_1^* D}$  si y solamente si  $(\pi_{1/W_1})_* \tilde{X}$  y  $(\pi_{2/W_1})_* \tilde{X}$  son simetrías dinámicas de  $X_H$  y de  $\xi_L$ , respectivamente.*

**Demostración:** En efecto, se deducen las siguientes equivalencias:

$$[\tilde{X}, X_{j_1^* D}] = 0 \Leftrightarrow [(\pi_{1/W_1})_* \tilde{X}, X_H] = 0 \Leftrightarrow [(\pi_{2/W_1})_* \tilde{X}, \xi_L] = 0. \blacksquare$$

**Proposición 3.7.3** *Un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $W_1$  es una simetría de Cartan para el sistema presimpléctico  $(W_1, \omega_{W_1}, dj_1^* D)$  si y solamente si  $(\pi_{1/W_1})_* \tilde{X}$  es una simetría de Cartan de  $(T^*Q, \omega_Q, dH)$  o, equivalentemente, si  $(\pi_{2/W_1})_* \tilde{X}$  es una simetría de Cartan de  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ .*

**Demostración:** Si

$$i_{\tilde{X}} \omega_{W_1} = dF \text{ con } F : W_1 \longrightarrow \mathbb{R},$$

entonces

$$\alpha_1^*(i_{\tilde{X}} \omega_{W_1}) = i_{(\pi_{1/W_1})_* \tilde{X}} \omega_Q = d(\alpha_1^* f).$$

Si aplicamos  $\alpha_2$  y seguimos un procedimiento similar obtenemos que:

$$i_{(\pi_{2/W_1})_* \tilde{X}} \omega_L = d(\alpha_2^* f).$$

Además,

$$\tilde{X}(j_1^* D) = 0 \Leftrightarrow ((\pi_{1/W_1})_* \tilde{X})H = 0 \Leftrightarrow ((\pi_{2/W_1})_* \tilde{X})E_L = 0. \blacksquare$$

Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ . Existe un único campo de vectores  $X^{(c, c^*)}$  en  $W_0$  tal que

$$(\pi_1)_* X^{(c, c^*)} = X^{c^*} \text{ y } (\pi_2)_* X^{(c, c^*)} = X^c.$$

En coordenadas locales, si

$$\begin{aligned} X^c &= X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \dot{q}^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}, \\ X^{c^*} &= X^A \frac{\partial}{\partial q^A} - p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial p_A}, \end{aligned}$$

entonces

$$X^{(c, c^*)} \doteq X^A \frac{\partial}{\partial q^A} - p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial p_A} + \dot{q}^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

Así,  $X^{(c,c^*)}$  es tangente a  $W_1$  si y solamente si

$$\left( X^A \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial q^B} + \dot{q}^A \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)_{/W_1} = \left( -p_B \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \right)_{/W_1}, \quad (3.7.11)$$

es decir, si y solamente si  $X^c$  y  $X^{c^*}$  están *Leg*-relacionados. Por lo tanto, si  $X$  es una simetría infinitesimal de  $L$ ,  $X$  verifica (3.7.11).

**Proposición 3.7.4** *Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ . Entonces,*

$$X^c L = 0 \Leftrightarrow X^{c^*} H = 0 \Leftrightarrow (X^{(c,c^*)} D)_{/W_1} = 0.$$

### 3.8 Lagrangianos afines en las velocidades

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Consideremos una función  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  y una 1-forma  $\mu$  en  $Q$ . Obtenemos un lagrangiano afín en las velocidades en  $TQ$  como sigue:

$$L = \hat{\mu} + h^v,$$

donde  $\hat{\mu} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por  $\hat{\mu}(x, u) = \langle \mu(x), u \rangle$  y  $h^v(x, u) = h(x)$  con  $u \in T_x Q$ . Si  $\mu = a_A(q) dq^A$ , obtenemos

$$L = a_A(q) \dot{q}^A + h.$$

Por lo tanto,

$$E_L = -h^v,$$

$$\alpha_L = -\mu^v,$$

$$\omega_L = d\mu^v.$$

Como  $V(TQ) \subset \ker \omega_L$ , se deduce que

$$\dim \ker \omega_L \leq 2 \dim(V \ker \omega_L).$$

Así,  $L$  es un lagrangiano de tipo III de acuerdo con la clasificación de Cantrijn *et al* ([13]).

Aplicamos el algoritmo de ligaduras al sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ .

Para simplificar, supondremos que la 2-forma  $d\mu$  es simpléctica. Por supuesto, se podría haber analizado el caso general cuando  $\mu$  es degenerada, pero no habríamos obtenido nada nuevo especialmente interesante. En el caso simpléctico, existe un campo de vectores  $X_h$  tal que

$$i_{X_h} d\mu = dh ;$$

$X_h$  es el campo de vectores hamiltoniano con energía  $h$ . Así, el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, dE_L)$  admite una dinámica global, puesto que la elevación completa  $X_h^c$  de  $X_h$  es una solución de la ecuación

$$i_{X_h}(-\omega_L) = dE_L . \quad (3.8.12)$$

El conjunto de soluciones de (3.8.12) es

$$\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ) = X_h^c + V(TQ) .$$

Como el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, E_L)$  tiene una dinámica global, todas las definiciones y resultados obtenidos en la Sección 2.2 son aplicables a este caso.

La transformación de Legendre está definida por

$$\begin{aligned} \text{Leg} : \quad TQ &\longrightarrow T^*Q \\ (q^A, \dot{q}^A) &\longmapsto (q^A, a_A) \end{aligned}$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \quad Q &\longrightarrow \text{Leg}(TQ) = M_1 \\ (q^A) &\longmapsto (q^A, a_A) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo e  $\text{Im}\mu = M_1$ ,  $\text{Leg} = \tau_Q \circ \phi$ . Deducimos que  $\text{Leg}$  es una submersión con fibras conexas. Entonces,  $L$  es casi regular. Si denotamos por  $j_1 : M_1 \longrightarrow T^*Q$  la inclusión canónica, como  $\phi$  es un difeomorfismo, obtenemos que la 2-forma  $j_1^* \omega_Q = \omega_{M_1}$  es simpléctica. Si definimos  $h_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$  por  $h_1 \circ \text{Leg} = E_L$ , se obtiene que  $\phi^* h_1 = -h$  y, además,  $\phi^* \omega_{M_1} = d\mu$ . Entonces, los campos de vectores hamiltonianos  $X_H$  y  $X_h$  están  $\phi$ -relacionados puesto que las

estructuras simplécticas  $(d\mu, -dh)$  y  $(\omega_{M_1}, dh_1)$  son simplectomorfas. Así, el estudio de las simetrías y constantes del movimiento de ambos sistemas es equivalente.

Nuestro propósito es encontrar la relación entre las simetrías y constantes del movimiento para el sistema simpléctico  $(Q, d\mu, dh)$  y el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ .

**Proposición 3.8.1** *Si  $F$  es una constante del movimiento de  $X_h$ , entonces  $F^v$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ , entonces  $G$  es proyectable en  $Q$  y su proyección es una constante del movimiento de  $X_h$ .*

**Demostración:** Si  $X_h F = 0$ , entonces  $V(TQ)F^v = 0$  y, también,  $X_h^c F^v = 0$ . Por lo tanto,  $F^v$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ , puesto que  $V(TQ)G = 0$ , obtenemos que  $G$  es proyectable. Si denotamos por  $g$  la proyección de  $G$  en  $Q$ , entonces, como  $X_h^c G = 0$ , deducimos que  $X_h g = 0$ . ■

**Proposición 3.8.2** *Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ . Si  $X$  es una simetría dinámica de  $X_h$  entonces  $X^c$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ .*

**Demostración:** Si  $[X, X_h] = 0$ , entonces  $[X^c, X_h^c] = 0$ . También,  $[X^c, V] \in V(TQ), \forall V \in V(TQ)$ . Entonces, se deduce que

$$[X^c, \mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)] \subset V(TQ) = \ker \omega_L. \quad \blacksquare$$

**Proposición 3.8.3** *Si  $X$  es una simetría de Cartan del sistema presimpléctico  $(Q, d\mu, dh)$  entonces  $X^c$  es una simetría de Cartan de  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ , y recíprocamente.*

**Demostración:** De hecho, si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(Q, d\mu, dh)$ , obtenemos

$$i_X d\mu = df \text{ y } Xh = 0.$$

donde  $f$  es una función en  $Q$ . Pero esto se verifica si y solamente si

$$i_{X^c} d\mu^v = df^v \text{ y } X^c h^v = 0,$$

es decir, si  $X^c$  es una simetría de Cartan del sistema presimpléctico

$$(TQ, \omega_L = d\mu^v, dE_L = -dh^v). \quad \blacksquare$$

De la Proposición 3.8.3 obtenemos, como corolario, el Teorema 2 de la referencia [22]. Este Teorema asegura que si  $L$  es un lagrangiano regular y  $\xi_L$  es el campo de vectores de Euler-Lagrange, existe una correspondencia biyectiva entre las constantes del movimiento de  $\xi_L$  y las simetrías de Noether del sistema presimpléctico  $(TTQ, d\alpha_L^v, dE_L^v)$ .

### 3.9 Reducción de sistemas lagrangianos degenerados

Sea  $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano degenerado. Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis (véase [13]):

1. la 2-forma de Poincaré-Cartan  $\omega_L$  es presimpléctica, es decir, tiene rango constante,
2. el lagrangiano  $L$  admite una dinámica global,
3. la foliación definida por  $\ker \omega_L$  es una fibración. En este caso, el espacio  $TQ/\ker \omega_L = (TQ)_0$  admite una estructura de variedad diferenciable.

Suponiendo estas hipótesis, existe una única forma simpléctica  $\widetilde{\omega}_L$  en la variedad diferenciable  $(TQ)_0$  tal que  $\omega_L = (\pi_L)^*(\widetilde{\omega}_L)$ , donde  $\pi_L$  es la proyección  $\pi_L : TQ \longrightarrow (TQ)_0$ . Además, la función energía  $E_L$  es también proyectable puesto que  $(\ker \omega_L)E_L = 0$ . Denotamos por  $\widetilde{E}_L$  su proyección. Como  $((TQ)_0, \widetilde{\omega}_L)$  es una variedad simpléctica, entonces existe un único campo de vectores  $\widetilde{\xi}$  tal que verifica la ecuación:

$$i_{\widetilde{\xi}}\widetilde{\omega}_L = d\widetilde{E}_L,$$

y cada campo de vectores  $\xi \in \mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$  proyecta en  $\widetilde{\xi}$ , es decir,  $T\pi_L(\xi) = \widetilde{\xi}$ .

El siguiente resultado da la relación entre las constantes del movimiento y simetrías para el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, dE_L)$  y el sistema simpléctico  $((TQ)_0, \widetilde{\omega}_L, d\widetilde{E}_L)$ .

**Proposición 3.9.1** *Si  $f : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$  entonces  $f$  es proyectable en una función  $\widetilde{f}$  que es, a su vez, una constante del movimiento*

de  $\tilde{\xi}$ . Recíprocamente, si  $\tilde{f} : (TM)_0 \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\tilde{\xi}$ , entonces  $(\pi_L)^* \tilde{f}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ .

**Proposición 3.9.2** Si  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$  entonces  $X$  es proyectable y su proyección  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\tilde{\xi}$ . Recíprocamente, si  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\tilde{\xi}$ , entonces cualquier campo de vectores en  $TQ$  que es proyectable en  $\tilde{X}$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$ .

**Proposición 3.9.3** Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ , entonces  $X$  es proyectable y su proyección  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan de  $((TQ)_0, \tilde{\omega}_L, d\tilde{E}_L)$ . Recíprocamente, si  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan de  $((TQ)_0, \tilde{\omega}_L, d\tilde{E}_L)$ , entonces cualquier campo de vectores en  $TQ$  que sea proyectable en  $\tilde{X}$  es una simetría de Cartan de  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ .

Si suponemos, además, que  $\ker \omega_L$  es una distribución tangente (es decir,  $\ker \omega_L$  es la elevación natural de una distribución  $D$  en  $Q$ , véase [13]), entonces la estructura casi tangente canónica  $J$  y el campo de vectores de Liouville  $C$  en  $TQ$  proyectan en una estructura casi tangente integrable  $J_0$  en  $(TQ)_0$  y sobre un campo de vectores  $C_0$  tal que:

$$J_0 C_0 = 0, L_{C_0} J_0 = -J_0,$$

respectivamente. De León et al [78] probaron que  $(TQ)_0$  admite una única estructura de fibrado vectorial que es isomorfa al fibrado tangente  $TS$  de la variedad de singularidades de  $C_0$  y este isomorfismo transporta la estructura casi tangente canónica y el campo de vectores de Liouville de  $TS$  a  $J_0$  y a  $C_0$ , respectivamente (véase, también, [43]). Denotemos por  $\phi$  el isomorfismo

$$\phi : TS \rightarrow (TM)_0.$$

**Proposición 3.9.4** Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ . Si  $X^c$  es  $\pi_L$ -proyectable entonces existe un campo de vectores  $Y$  en  $S$  tal que

$$T\phi(Y^c) = T\pi_L(X^c).$$

**Demostración:** Como  $\ker \omega_L$  es una distribución tangente involutiva, se deduce que  $\ker \omega_L = D^c$ , donde  $D$  es una distribución involutiva en  $Q$ . Por el Teorema de Frobenius, sabemos que

existen coordenadas locales  $(x^A, x^B)$ ,  $1 \leq A \leq k$  y  $k+1 \leq B \leq n$ , para cada punto  $Q$  de modo que

$$D = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^B} \right\rangle.$$

Por lo tanto

$$\ker \omega_L = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^B}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^B} \right\rangle.$$

Así, en estas coordenadas, podemos escribir la proyección  $\pi_L$  como

$$\pi_L(x^A, x^B, \dot{x}^A, \dot{x}^B) = (x^A, \dot{x}^A).$$

De la definición de  $S$ , podemos encontrar coordenadas locales  $(y^A, \dot{y}^A)$  tales que el isomorfismo  $\phi$  se expresa localmente como sigue

$$\phi(y^A, \dot{y}^A) = (x^A, \dot{x}^A).$$

Usando estas coordenadas, la Proposición se demuestra trivialmente. ■

Además, si  $Y$  es un campo de vectores en  $S$ , entonces existe un campo de vectores  $X$  en  $Q$  tal que

$$T\pi_L(X^c) = T\phi(Y^c).$$

De hecho, para cada campo de vectores  $X'$  en  $Q$ , con  $X' = X + Z$ , donde  $Z$  pertenece a  $D$ , obtenemos

$$T\pi_L((X')^c) = T\phi(Y^c).$$

Denotamos por  $\omega_S = \phi^* \widetilde{\omega}_L$  y por  $g = \phi^* \widetilde{E}_L$ , los “pull-backs” de  $\widetilde{\omega}_L$  y  $\widetilde{E}_L$ , respectivamente. De este modo,  $(TS, \omega_S, dg)$  es un sistema hamiltoniano, y existe un único campo de vectores  $\xi_S$  tal que

$$i_{\xi_S} \omega_S = dg.$$

Obviamente,  $\xi_S = (T\phi)^{-1}(\tilde{\xi})$ . De la Proposición 3.9.4, se deduce el siguiente resultado.

**Proposición 3.9.5** *Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ .*

1. Si  $X$  es una simetría de Lie de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(TQ)$  entonces existe un campo de vectores  $Y$  en  $S$  tal que  $Y^c$  es una simetría dinámica de  $\xi_S$ .
2. Si  $X$  es una simetría de Noether entonces existe un campo de vectores  $Y$  en  $S$  tal que  $Y^c$  es una simetría de Cartan del sistema simpléctico  $(TS, \omega_S, dg)$ .

**Ejemplo 3.9.1** Aplicaremos los anteriores resultados al sistema llamado del electrón-monopolo (véanse [96, 43, 78]). Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = \frac{n}{r^3} \epsilon_{jk}^i x^j v^k \end{cases} \quad (3.9.13)$$

donde  $r$  es la distancia de un punto al origen  $0 \in \mathbb{R}^3$  y  $n = eg/4\pi m$  es el producto de la carga eléctrica y magnética dividida por  $4\pi$  veces la masa del electrón y

$$\epsilon_{jk}^i = \begin{cases} 1 & ijk \text{ si es una permutación par de } \{1, 2, 3\} \\ -1 & ijk \text{ si es una permutación impar de } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{si dos de los índices son iguales} \end{cases}$$

Este sistema no admite una descripción lagrangiana global. Podemos evitar este problema aumentando el espacio de configuración al espacio  $\mathbb{R} \times SU(2)$ . En este caso, podemos definir un lagrangiano global  $L$  de modo que sus ecuaciones del movimiento proyectan en las ecuaciones (3.9.13). De hecho, considerando la fibración de Hopf:

$$\pi_H : SU(2) \longrightarrow S^2,$$

y la proyección inducida

$$T(\text{id}_{\mathbb{R}} \times \pi_H) : T(\mathbb{R} \times SU(2)) \longrightarrow T(\mathbb{R} \times S^2),$$

definimos un lagrangiano global en  $T(\mathbb{R} \times SU(2))$  de la siguiente manera:

$$L(r, s) = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \sum_{j=1}^3 \dot{x}^j \dot{x}^j \right) + ni \operatorname{tr} \sigma^3 s^{-1} \dot{s}.$$

Aquí,  $r$  denota la coordenada en  $\mathbb{R}$  y  $s$  un elemento de  $SU(2)$ ,  $x^i$  es la  $i$ -coordenada de  $\pi_H(s)$  y  $\sigma^3$  es una matriz de Pauli.

Ahora, consideramos el sistema presimpléctico:

$$(T(\mathbb{R} \times SU(2)), \omega_L, dE_L),$$

con  $\omega_L$  la 2-forma de Poincaré-Cartan y  $E_L$  la función energía;  $\ker \omega_L$  está generado por

$$\{X_3^v, X_3^c\},$$

donde  $X_3$  es el campo de vectores fundamental de  $U(1) \cong S^1$  de la fibración de Hopf

$$\pi_H : SU(2) \longrightarrow S^2.$$

Además, tenemos que el sistema presimpléctico admite una dinámica global y la foliación definida por  $\ker \omega_L$  es una fibración. Entonces, la variedad cociente admite una única estructura de fibrado vectorial que es isomorfa a un fibrado tangente. Así, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 T(\mathbb{R} \times SU(2)) & \xrightarrow{\pi} & \frac{T(\mathbb{R} \times SU(2))}{\ker \omega_L} \cong T(\mathbb{R} \times \frac{SU(2)}{U(1)}) \\
 \downarrow \tau_{R \times SU(2)} & & \downarrow \phi \\
 \mathbb{R} \times SU(2) & & T(\mathbb{R} \times S^2) \\
 \swarrow \operatorname{id}_R \times \pi_H & & \searrow \tau_{R \times S^2} \\
 & \mathbb{R} \times S^2 &
 \end{array}$$

Sistema electrón-monopolo

Entonces, por las Proposiciones 3.9.4 y 3.9.5, podemos relacionar las simetrías y constantes del movimiento del sistema presimpléctico

$$(T(\mathbb{R} \times SU(2)), \omega_L, dE_L),$$

con las correspondientes del sistema simpléctico

$$(T(\mathbb{R} \times S^2), (\phi^{-1})^* \widetilde{\omega}_L, (\phi^{-1})^* d\widetilde{E}_L),$$

donde  $\widetilde{\omega}_L$  y  $\widetilde{E}_L$  son las proyecciones de  $\omega_L$  y  $E_L$ , respectivamente.

Si consideramos las coordenadas  $(y^0, y^1, y^2, y^3)$  en  $SU(2)$ , entonces, un elemento genérico  $s$  de  $SU(2)$  se puede representar por:

$$s = y^0 I + \sum_{k=1}^3 i y^k \sigma^k,$$

donde  $\sigma^1, \sigma^2$  y  $\sigma^3$  son las matrices de Pauli y estas coordenadas satisfacen la ligadura  $(y^0)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1$ . Ahora, sea  $\{Y^1, Y^2, Y^3\}$  la base de campos de vectores invariantes a la derecha del grupo de Lie,  $SU(2)$ :

$$Y^i = y^0 \frac{\partial}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial y^0} - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jk}^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si denotamos por las mismas letras los campos inducidos en  $\mathbb{R} \times SU(2)$ , es fácil probar que

$$(Y^i)^c L = 0;$$

es decir,  $(Y^i)$  son simetrías infinitesimales de  $L$ . Por la Proposición 3.4.1, obtenemos que  $(Y^i)^v L$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_L}(T(\mathbb{R} \times SU(2)))$ . También, de la Proposición 3.9.5 se deduce que el campo de vectores  $\phi_*(\widetilde{Y}^i)$  es una simetría de Cartan del sistema simpléctico

$$(T(\mathbb{R} \times S^2), (\phi^{-1})^* d\widetilde{\omega}_L, (\phi^{-1})^* \widetilde{E}_L),$$

y las constantes del movimiento  $(Y^i)^v L$  proyectan en tres constantes del movimiento  $f^i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , de  $\xi_S$ , donde  $\xi_S$  es el campo de vectores hamiltoniano de la función  $(\phi^{-1})^* \widetilde{E}_L$ . De hecho, obtenemos:

$$(Y^i)^v L = \epsilon_{jk}^i x^j \dot{x}^k + \frac{nx^i}{r},$$

lo que demuestra que es proyectable y su proyección es una constante del movimiento del sistema simpléctico proyectado. Como  $f^i$  es una constante del movimiento de  $\xi_S$ , por el Teorema de Noether sabemos que existen campos de vectores  $X^i$  (el campo de vectores hamiltoniano de  $f^i$ ) que son simetrías de Cartan del sistema presimpléctico. Un sencillo cálculo muestra que estos campos de vectores  $X^i$  son, precisamente, las elevaciones completas de los generadores infinitesimales:

$$X^i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jk}^i x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

obtenidos a partir de la base canónica de  $\mathfrak{so}(3)$ , el álgebra de Lie de  $SO(3)$ , es decir, las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Aquí, hemos utilizado una notación diferente a la de los ejemplos de los dos capítulos anteriores. En efecto,  $X^1 = R_{23}$ ,  $X^2 = R_{31}$  y  $X^3 = R_{12}$ .

### 3.10 Sistemas lagrangianos degenerados con un grupo de Lie de simetrías

Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica, es decir,  $\omega$  es una 2-forma cerrada con rango constante. Supongamos que existe una acción presimpléctica de un grupo de Lie  $G$  en  $M$ :

$$\phi : G \times M \longrightarrow M,$$

es decir,  $\phi_g^* \omega = \omega$ ,  $\forall g \in G$  (véase [9]). Si denotamos por  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$ , una aplicación momento es una aplicación  $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  de modo que para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$  el campo de vectores  $\xi_M$  (el generador infinitesimal del flujo  $\phi_{\exp t \xi}$ ) es el campo de vectores

hamiltoniano de la función  $J\xi = \langle J, \xi \rangle$ , es decir,

$$i_{\xi_M} \omega = d(J\xi).$$

**Proposición 3.10.1** *Sea  $(M, \omega, dF)$  un sistema presimpléctico. Consideremos una acción presimpléctica  $\phi : G \times M \rightarrow M$  de un grupo de Lie  $G$  que admita una aplicación momento y tal que  $F$  es  $G$ -invariante. Si el algoritmo de ligaduras para el sistema presimpléctico  $(M, \omega, dF)$  termina en una subvariedad final de ligaduras  $M_f$  y  $j : M_f \rightarrow M$  es la inclusión canónica de  $M_f$  en  $M$ , entonces, para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la aplicación  $j^*(J\xi) : M_f \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{M_f}}(M_f)$  y, por lo tanto, es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega}(M_f)$ .*

**Demostración:** Sea  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  una aplicación momento. Entonces

$$i_{\xi_M} \omega = d(J\xi),$$

y, además, como  $\phi_g^* F = F, \forall g \in G$ , obtenemos

$$L_{\xi_M} F = \xi_M F = 0.$$

Es suficiente, entonces, aplicar el Corolario 3.3.1. ■

Consideramos ahora la acción de un grupo de Lie  $G$  en una variedad diferenciable  $Q$ :

$$\phi : G \times Q \rightarrow Q,$$

y levantamos esta acción a una acción en  $TQ$ :

$$\phi^T : G \times TQ \rightarrow TQ,$$

de la siguiente manera:

$$(\phi^T)_g : TQ \rightarrow TQ, \quad (\phi^T)_g = T\phi_g.$$

Supongamos que  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es un lagrangiano  $G$ -invariante, es decir,  $L \circ \phi_g^T = L, \forall g \in G$ . Deducimos que  $E_L, \alpha_L$  y  $\omega_L$  son invariantes por  $\phi^T$  y, así,  $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ , el campo de vectores  $\xi_Q$  es una simetría infinitesimal de  $L$ . De la Proposición 3.4.1, se deduce que  $((\xi_Q)^v L)_{/P_f}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{\omega_{P_f}}(P_f)$  (aquí,  $P_f$  es la subvariedad final de ligaduras para la variedad presimpléctica  $(TQ, \omega_L, dE_L)$ ).

### 3.11 Simetrías y constantes del movimiento para sistema pre-cosimplécticos

Sea  $(M, \Omega, \eta)$  una variedad precosimpléctica, es decir,  $\Omega$  es una 2-forma cerrada con rango constante  $2r$  y  $\eta$  una 1-forma cerrada con  $\Omega^r \wedge \eta \neq 0$  y  $\Omega^{r+1} = 0$  (véase [30]).

La dinámica para este sistema precosimpléctico  $(M, \Omega, \eta)$  se obtiene introduciendo una función hamiltoniana  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos el sistema precosimpléctico modificado  $(M, \Omega_H = \Omega + dH \wedge \eta, \eta)$ . La 2-forma  $\Omega_H$  es obviamente cerrada aunque puede que no tenga rango constante. De hecho, lo que obtenemos es

$$2r \leq \text{rango } \Omega_H \leq 2r + 2.$$

Distinguiremos dos casos:

1. **Primer caso:**  $\Omega_H$  tiene rango constante  $2r$ , esto es,  $(\Omega_H, dt)$  es una estructura pre-cosimpléctica. Así, las ecuaciones:

$$i_X \Omega_H = 0, \quad i_X \eta = 1 \tag{3.11.14}$$

admiten soluciones globalmente definidas, es decir, existe un campo de vectores  $\xi$  en  $M$  de modo que  $\xi$  verifica (3.11.14). Es evidente que cualquier campo de vectores

$$\xi + \ker \Omega_H \cap \ker \eta,$$

es una solución de (3.11.14). Denotamos por  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  el conjunto de todas las soluciones de

(3.11.14); es decir,

$$\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M) = \{\xi + Z / Z \in \ker \Omega_H \cap \ker \eta\} .$$

**Definición 3.11.1** Una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  es una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)F = 0$ .

**Observación 3.11.1** Una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  verifica que  $(\ker \Omega_H \cap \ker \eta)F = 0$ . ♣

El siguiente lema nos permite caracterizar las constantes del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  de una manera mucho más simple.

**Lema 3.11.1** Si una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  entonces:

$$(\ker \Omega_H)F = 0 .$$

**Demostración:** En efecto, si  $Z \in \ker \Omega_H$ , obtenemos

$$Z = (Z - \eta(Z)\xi) + \eta(Z)\xi ,$$

para cada solución  $\xi$  de (3.11.14). Como  $Z - \eta(Z)\xi \in \ker \Omega_H \cap \ker \eta$ , de la Observación 3.11.1, deducimos que, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ , entonces

$$ZF = (Z - \eta(Z)\xi)F + \eta(Z)(\xi F) = 0 . \blacksquare$$

Así, podemos caracterizar las constantes del movimiento como las funciones  $F$  que satisfacen la siguiente propiedad:

$$(\ker \Omega_H)F = 0 .$$

**Definición 3.11.2** Un campo de vectores  $X$  en  $M$  se dice que es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  si

$$[X, \ker \Omega_H] \subset \ker \Omega_H .$$

**Observación 3.11.2** Si  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ , entonces cualquier campo de vectores  $Y$  tal que  $Y = X + fZ$ , con  $Z \in \ker \Omega_H$ , es también una simetría dinámica de

$\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ . De hecho, para cada  $Z' \in \ker \Omega_H$  obtenemos que

$$\begin{aligned} i_{[Z, Z']} \Omega_H &= L_Z i_{Z'} \Omega_H - i_{Z'} L_Z \Omega_H \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así,  $[Z, Z'] \in \ker \Omega_H$ . Por lo tanto, deducimos que

$$[Y, \ker \Omega_H] = [X, \ker \Omega_H] + [\ker \Omega_H, \ker \Omega_H] \subset \ker \Omega_H. \spadesuit$$

**Observación 3.11.3** Denotamos por  $D(\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M))$  el conjunto de todas las simetrías dinámicas de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ . Es fácil probar que si  $X$  y  $Y$  son dos simetrías dinámicas de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$  entonces  $[X, Y]$  es también una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ . En consecuencia,  $D(\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M))$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ .  $\spadesuit$

**Definición 3.11.3** Una simetría de Cartan de un sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$  es un campo de vectores  $X$  en  $M$  tal que

$$i_X \Omega_H = dG,$$

donde  $G \in C^\infty(M)$ .

**Proposición 3.11.1** Si  $X$  es una simetría de Cartan del sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$ , entonces  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ .

**Demostración:** En efecto, si  $Z \in \ker \Omega_H$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} i_{[X, Z]} \Omega_H &= L_X i_Z \Omega_H - i_Z L_X \Omega_H \\ &= -i_Z d i_X \Omega_H = 0. \end{aligned}$$

Entonces,  $[X, \ker \Omega_H] \subset \ker \Omega_H$  y, por lo tanto  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ .  $\blacksquare$

**Observación 3.11.4** Denotamos por  $C(\Omega_H, \eta)$  el conjunto de todas las simetrías de Cartan del sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$ . Si  $X$  e  $Y$  son simetrías de Cartan tales que

$$i_X \Omega_H = dG \quad \text{e} \quad i_Y \Omega_H = dG',$$

$[X, Y]$  es una simetría de Cartan de  $(M, \Omega_H, \eta)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} i_{[X, Y]} \Omega_H &= L_X i_Y \Omega_H - i_Y L_X \Omega_H \\ &= L_X dG' - i_Y ddG \\ &= d(XG'). \end{aligned}$$

El conjunto  $C(\Omega_H, \eta)$  es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(M)$ . Además, por la Proposición 6.1.2 sabemos que  $C(\Omega_H, \eta) \subset D(\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M))$ .

**Teorema 3.11.1 (Teorema de Noether)** *Si un campo de vectores  $X$  es una simetría de Cartan del sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$  entonces  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ , la ecuación*

$$i_X \Omega_H = dG,$$

*tiene una solución, y cada solución de dicha ecuación es una simetría de Cartan del sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$ .*

**Demostración:** En efecto, si  $X$  es una simetría de Cartan del sistema precosimpléctico  $(M, \Omega_H, \eta)$ , entonces, para todo  $Z \in \ker \Omega_H$ , obtenemos que

$$i_Z i_X \Omega_H = ZG = 0.$$

Así pues,  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ . Recíprocamente, si  $G$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^{(\Omega_H, \eta)}(M)$ , la ecuación

$$i_X \Omega_H = dG,$$

tiene una solución puesto que  $(\ker \Omega_H)G = 0$  y, así, cada solución es una simetría de Cartan del sistema  $(M, \Omega_H, \eta)$ . ■

**2. Segundo caso:**  $\Omega_H$  no tiene rango constante.

Sabemos que (3.11.14) tiene solución en los puntos  $x$  de  $M$  en los que el rango  $(\Omega_H)_x = 2r$ .

Definimos

$$M_2 = \{x \in M / \text{rango}(\Omega_H)_x = 2r\},$$

que supondremos que es una subvariedad. En  $M_2$ , (3.11.14) tiene solución para todo  $x \in M_2$ , es decir, existe un vector  $v \in T_x M$  tal que

$$i_v (\Omega_H)_x = 0 \text{ e } i_v \eta_x = 1.$$

Así, existe un campo de vectores  $X$  en  $M_2$  tangente a  $M_1$  tal que  $X$  satisface (3.11.14). Pero, en general,  $X$  no será tangente a  $M_2$ . Entonces, consideramos la subvariedad  $M_3$  donde existe una solución de (3.11.14) tangente a  $M_2$ . Siguiendo este proceso, obtenemos una sucesión de subvariedades  $M_l$ ,  $l = 1, \dots$ , llamadas subvariedades de ligaduras  $l$ -arias. Alternativamente, podemos definir las subvariedades  $M_l$  como sigue:

$$M_l = \{x \in M_{l-1} / \eta_x \in b_x(T_x M_{l-1})\},$$

donde

$$\begin{aligned} b: TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto i_X \Omega_H + (i_X \eta) \eta. \end{aligned}$$

Si este algoritmo se estabiliza encontramos una subvariedad  $M_f$  donde las ecuaciones

$$(i_X \Omega_H = 0, i_X \eta = 1)_{/M_f}$$

admiten como solución un campo de vectores  $\xi$  en  $M_f$ .  $M_f$  es llamada la subvariedad final de ligaduras.

Si denotamos por  $j_f: M_f \longrightarrow M$  la inclusión canónica de  $M_f$  en  $M$ , entonces podemos considerar el sistema precosimpléctico  $(M_f, j_f^* \Omega_H, j_f^* \eta)$  y estudiar las simetrías y constantes del movimiento para el sistema precosimpléctico  $\mathfrak{X}^{(j_f^* \Omega_H, j_f^* \eta)}(M_f)$  como en el primer caso.

Podemos aplicar estos resultados para clasificar las simetrías y constantes del movimiento para un lagrangiano singular no-autónomo (o dependiente del tiempo). En efecto, si suponemos que  $L: \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \mathbb{R}$  es un lagrangiano no-autónomo de modo que  $\omega_{L_t}$  es una 2-forma presimpléctica de rango  $2r$  en  $\{t\} \times TQ \equiv TQ$ , donde  $L_t(x) = L(t, x)$ ,  $\forall x \in TQ$ , entonces, si

definimos:

$$\Theta_L = d_J L + E_L dt ,$$

$$\Omega_L = -d\Theta_L ,$$

obtenemos que  $2r \leq \text{rango } \Omega_L \leq 2r + 2$ . Las ecuaciones intrínsecas del movimiento son:

$$i_X \Omega_L = 0 , i_X dt = 1 .$$

Como antes, podemos distinguir dos casos: cuando  $\text{rango } (\Omega_L) = 2r$  y el caso de rango distinto de  $2r$ . Por otro lado, un análisis más fino se puede hacer considerando las simetrías infinitesimales en el espacio de configuración  $\mathbb{R} \times Q$ . De un modo sencillo se pueden obtener estos resultados teniendo en cuenta los obtenidos para el caso regular y el estudio previamente hecho ([117, 72]).

## Capítulo 4

# Estructuras casi-producto asociadas a sistemas presimplécticos

Es posible generalizar las variedades simplécticas de dos modos. Primero, considerando el corchete de Poisson definido por la forma simpléctica, obtenemos la definición de variedad de Poisson [92; 141]. La segunda generalización se obtiene debilitando la condición de maximalidad del rango de la forma simpléctica, lo que nos lleva a la definición de variedad presimpléctica [92]. Las variedades presimplécticas son útiles cuando se quiere obtener una globalización del formalismo de Dirac-Bergmann para sistemas lagrangianos degenerados [38, 49, 51, 52, 9, 8]. Así, si  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es un lagrangiano singular, entonces  $M_1 = \text{Leg}(TQ) \subset T^*Q$  es una subvariedad de la variedad simpléctica  $T^*Q$ . Además, bajo condiciones adecuadas,  $M_1$  es una variedad presimpléctica.

Para la cuantización es necesario disponer de un corchete de Poisson en el espacio ambiente del sistema dinámico que queremos estudiar. Sin embargo, no es posible definir de un modo natural un corchete de Poisson en una variedad presimpléctica arbitraria  $(M, \omega)$ . En [39] Dubrovin *et al* usan una conexión generalizada en la variedad presimpléctica para definir un corchete de Poisson en ella. Esta conexión generalizada es, de hecho, una estructura casi-producto adaptada a la forma presimpléctica  $\omega$ ; es decir, una de las distribuciones complementarias es la distribución característica, y la otra es la “parte regular” donde la dinámica tiene lugar. Esta técnica ya fue usada por León y Rodrigues para obtener la dinámica de un sistema lagrangiano

singular [82, 88, 90] e, independientemente, por Pitanga y Mundin [113, 111] (véanse también [94, 8]).

El propósito de este capítulo es aplicar este método para obtener una reducción de Poisson de un sistema presimpléctico y, además, hacer un estudio de las simetrías y constantes del movimiento cuando introducimos esta nueva estructura en la variedad presimpléctica. Para hacer esto, supondremos que existe una estructura casi-producto integrable que está adaptada a  $\omega$  y es invariante por un grupo de Lie de simetrías  $G$  que actúa presimplécticamente en  $M$ . Si todos los campos de vectores  $\xi_M$  pertenecen a la distribución regular y  $\mu$  es un valor regular de la aplicación momento  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , entonces el espacio reducido  $M_\mu = \frac{J^{-1}(\mu)}{G_\mu}$  está dotado de una forma presimpléctica reducida y de una estructura casi-producto reducida que definen precisamente el corchete de Poisson reducido obtenido a partir del corchete de Poisson inducido en  $M$ . Para introducir la dinámica en este estudio, suponemos primero que existe una función hamiltoniana  $H$  que es  $G$ -invariante de tal modo que el sistema presimpléctico  $(M, \omega, H)$  admite una dinámica global, o, en otras palabras, no existen ligaduras secundarias. Entonces, obtenemos la dinámica reducida. Si hay ligaduras secundarias, desarrollamos el algoritmo de ligaduras, nos quedamos en la subvariedad final de ligaduras, y así obtenemos una variedad presimpléctica con dinámica global.

## 4.1 Estructuras casi-producto adaptadas a estructuras presimplécticas

Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica de rango constante  $r$ , es decir,  $\omega$  es una 2-forma cerrada satisfaciendo  $\omega^r \neq 0$  y  $\omega^{r+1} = 0$ . Así,  $M$  tiene dimensión  $2r+s$ , donde  $s \geq 0$ . Si  $s = 0$ , entonces,  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica.

Una **estructura casi-producto** en  $M$  es un campo de tensores  $F$  de tipo  $(1,1)$  en  $M$  tal que  $F^2 = \text{Id}$ . La variedad diferenciable  $M$  se denomina una variedad casi-producto (véase [86, 82]).

Definimos:

$$A = \frac{1}{2}(\text{id} + F) \quad , \quad B = \frac{1}{2}(\text{id} - F) .$$

Entonces  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son proyectores complementarios, es decir,  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \text{id}$ ,  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$ .

Denotamos por

$$\text{Im}\mathcal{A} \text{ e } \text{Im}\mathcal{B},$$

las correspondientes distribuciones complementarias. Es decir,  $TM = \text{Im}\mathcal{A} \oplus \text{Im}\mathcal{B}$ . Denotamos por  $\mathcal{A}^*$  y  $\mathcal{B}^*$  los operadores transpuestos y por  $\text{Im}\mathcal{A}^*$  y  $\text{Im}\mathcal{B}^*$  sus imágenes.

**Definición 4.1.1** *Decimos que la estructura casi-producto  $F$  está adaptada a la forma presimpléctica  $\omega$  si*

$$\ker \omega = \ker \mathcal{A}.$$

Definamos la aplicación lineal  $\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \wedge^1(M)$  por  $\flat(X) = i_X \omega$ . Si  $F$  está adaptada a  $\omega$ , la restricción de  $\flat$  a la distribución  $\mathcal{A}$ ,  $\flat : \text{Im}\mathcal{A} \rightarrow \text{Im}\mathcal{A}^*$ , induce un isomorfismo de  $C^\infty(M)$ -módulos.

Así, para cada 1-forma arbitraria  $\alpha$  la ecuación

$$i_X \omega = \mathcal{A}^* \alpha, \tag{4.1.1}$$

admite una única solución  $X_{\alpha, \mathcal{A}}$  de modo que  $X_{\alpha, \mathcal{A}} \in \text{Im}\mathcal{A}$ . Para una función  $f$  en  $M$  definimos  $X_{f, \mathcal{A}} = X_{df, \mathcal{A}}$ . De este modo, podemos definir un corchete de funciones como sigue:

$$\{f, g\}_{\mathcal{A}} = \omega(X_{f, \mathcal{A}}, X_{g, \mathcal{A}}),$$

donde  $f, g \in C^\infty(M)$ .

$\{ , \}_{\mathcal{A}}$  satisface todas las propiedades de un corchete de Poisson excepto la identidad de Jacobi, es decir,

1.  $\{af, g\}_{\mathcal{A}} = a\{f, g\}_{\mathcal{A}}$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,
2.  $\{f + g, h\}_{\mathcal{A}} = \{f, h\}_{\mathcal{A}} + \{g, h\}_{\mathcal{A}}$ ,
3.  $\{f, g\}_{\mathcal{A}} = -\{g, f\}_{\mathcal{A}}$ ,

$$4. \{f, gh\}_{\mathcal{A}} = \{f, g\}_{\mathcal{A}}h + g\{f, h\}_{\mathcal{A}},$$

para cualesquiera funciones  $f, g, h \in C^\infty(M)$ .

Probaremos que la identidad de Jacobi es equivalente a la integrabilidad de la estructura casi-producto  $F$ . Primero, demosntremos el siguiente lema:

**Lema 4.1.1**

$$i_{[X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}]} \omega(Z) + i_{X_{\{f,g\}_{\mathcal{A}}}} \omega(Z) = B^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ] - B^*(df)[X_{g,\mathcal{A}}, AZ],$$

$$\forall Z \in \mathfrak{X}(M), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

**Demostración:** En efecto, se verifica

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}, AZ) \\ &= X_{f,\mathcal{A}}(\omega(X_{g,\mathcal{A}}, AZ)) - X_{g,\mathcal{A}}(\omega(X_{f,\mathcal{A}}, AZ)) + AZ(\omega(X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}})) \\ &\quad - \omega([X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}], AZ) - \omega([X_{g,\mathcal{A}}, AZ], X_{f,\mathcal{A}}) + \omega([X_{f,\mathcal{A}}, AZ], X_{g,\mathcal{A}}) \\ &= L_{X_{f,\mathcal{A}}} i_{AZ} i_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega - L_{X_{g,\mathcal{A}}} i_{AZ} i_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega + i_{X_{\{f,g\}_{\mathcal{A}}}} \omega(Z) - i_{[X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}]} \omega(Z) \\ &\quad + i_{[X_{g,\mathcal{A}}, AZ]} i_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega - i_{[X_{f,\mathcal{A}}, AZ]} i_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega \\ &= i_{X_{\{f,g\}_{\mathcal{A}}}} \omega(Z) - i_{[X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}]} \omega(Z) - i_{AZ} L_{X_{g,\mathcal{A}}} i_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega + i_{AZ} L_{X_{f,\mathcal{A}}} i_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega, \end{aligned}$$

para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Ahora, deducimos que:

$$\begin{aligned} i_{AZ} L_{X_{f,\mathcal{A}}} i_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega - i_{AZ} L_{X_{g,\mathcal{A}}} i_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega &= i_{AZ} di_{X_{f,\mathcal{A}}} i_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega + i_{AZ} i_{X_{f,\mathcal{A}}} di_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega \\ &\quad - i_{AZ} di_{X_{g,\mathcal{A}}} i_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega - i_{AZ} i_{X_{g,\mathcal{A}}} di_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega \\ &= i_{AZ} i_{X_{f,\mathcal{A}}} di_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega - i_{AZ} i_{X_{g,\mathcal{A}}} di_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega \\ &\quad - 2AZ(\omega(X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}})), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i_{AZ} i_{X_{f,\mathcal{A}}} di_{X_{g,\mathcal{A}}} \omega - i_{AZ} i_{X_{g,\mathcal{A}}} di_{X_{f,\mathcal{A}}} \omega &= i_{AZ} i_{X_{f,\mathcal{A}}} dA^*(dg) - i_{AZ} i_{X_{g,\mathcal{A}}} dA^*(df) \\ &= dA^*(dg)(X_{f,\mathcal{A}}, AZ) - dA^*(df)(X_{g,\mathcal{A}}, AZ) \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{A}^*(dg))(X_{f,\mathcal{A}}, AZ) &= X_{f,\mathcal{A}}(\mathcal{A}^*(dg))(AZ) - AZ(\mathcal{A}^*(dg))(X_{f,\mathcal{A}}) \\
&\quad - \mathcal{A}^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ] \\
&= X_{f,\mathcal{A}}(dg)(AZ) - AZ(dg)(X_{f,\mathcal{A}}) \\
&\quad - \mathcal{A}^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ] \\
&= dg[X_{f,\mathcal{A}}, AZ] - \mathcal{A}^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ] \\
&= \mathcal{B}^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ].
\end{aligned}$$

Siguiendo un método similar, deducimos que  $d(\mathcal{A}^*(df))(X_{g,\mathcal{A}}, AZ) = \mathcal{B}^*(df)[X_{g,\mathcal{A}}, AZ]$ . Por lo tanto, se concluye que

$$i_{X_{\{f,g\}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}}}\omega(AZ) = AZ(\omega(X_{f,\mathcal{A}}, X_{g,\mathcal{A}}) + \mathcal{B}^*(df)[X_{g,\mathcal{A}}, AZ] - \mathcal{B}^*(dg)[X_{f,\mathcal{A}}, AZ]).$$

Esto completa la demostración del lema. ■

**Proposición 4.1.1** *El corchete  $\{ , \}_{\mathcal{A}}$  definido por la estructura casi-producto  $F$  satisface la identidad de Jacobi si y solamente si la estructura casi-producto  $F$  es integrable.*

**Demostración:** Si  $\{ , \}_{\mathcal{A}}$  satisface la identidad de Jacobi, entonces

$$X_{\{f,g\}_{\mathcal{A}}} = [X_{g,\mathcal{A}}, X_{f,\mathcal{A}}],$$

para funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  en  $M$ . Como los campos de vectores  $X_{f,\mathcal{A}}$  generan  $\text{Im}\mathcal{A}$ , entonces  $\text{Im}\mathcal{A}$  es integrable. Así pues, la estructura casi-producto  $F$  es integrable (véase [82]).

Recíprocamente, si  $F$  es integrable entonces, del Lema 4.1.1, se deduce que:

$$i_{X_{\{f,g\}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}}}\omega(Z) = i_{[X_{g,\mathcal{A}}, X_{f,\mathcal{A}}]}\omega(Z).$$

Por lo tanto, los campos de vectores  $X_{\{f,g\}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}}$  y  $[X_{g,\mathcal{A}}, X_{f,\mathcal{A}}]$  difieren en un elemento de  $\ker\omega$ . Pero, como la estructura casi-producto  $F$  es integrable, deducimos que  $[X_{g,\mathcal{A}}, X_{f,\mathcal{A}}] \in \text{Im}\mathcal{A}$ . Así,  $X_{\{f,g\}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}} = [X_{g,\mathcal{A}}, X_{f,\mathcal{A}}]$ . ■

Como consecuencia, si se supone que  $F$  es integrable, obtenemos que  $(M, \{, \}_A)$  es una variedad de Poisson cuya foliación simpléctica es precisamente  $\text{Im}A$ . Además, la forma simpléctica en cada hoja  $\mathcal{L}$  es precisamente la restricción de la forma presimpléctica a  $\mathcal{L}$ . Si se denota por  $\flat_A : T^*M \rightarrow TM$  la aplicación lineal definida por  $\langle \flat_A(df), dg \rangle = \{g, f\}_A$ , entonces  $X_{f,A} = \flat_A(df)$ . Por lo tanto,  $X_{H,A}f = \{f, H\}_A$ , para cada función  $f$ , donde  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función hamiltoniana.

**Observación 4.1.1** En la referencia [39] se llaman conexiones generalizadas a lo que nosotros hemos llamado estructuras casi-producto. La justificación de este nombre es la siguiente. Supongamos que  $\ker\omega$  define una distribución foliada regular, esto es, la variedad cociente  $\bar{M} = M/\ker\omega$  está bien definida y se obtiene una variedad fibrada  $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ . Entonces  $\text{Im}A$  define una conexión en  $\pi$  en el sentido de Ehresmann.♠

## 4.2 Simetrías y contantes del movimiento

**Definición 4.2.1** Sea  $(S, \{, \}_H)$  una variedad de Poisson y  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $M$ . A  $(S, \{, \}_H, H)$  le llamaremos un sistema hamiltoniano y al único campo de vectores  $X_H$  tal que  $X_H(f) = \{H, f\}$  para cualquier  $f \in C^\infty(S)$  le llamaremos el campo de vectores hamiltoniano con energía (o energía hamiltoniana)  $H$ .

**Definición 4.2.2** Se dice que una función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de un sistema hamiltoniano  $(S, \{, \}_H, H)$  si  $\{H, F\} = 0$ .

**Definición 4.2.3** Se dice que un campo de vectores  $X$  es una simetría infinitesimal del sistema  $(S, \{, \}_H, H)$  si  $[X, X_H] = 0$ .

Por lo tanto, las curvas integrales de  $X$  y  $X_H$  conmutan.

Además, el campo de vectores hamiltoniano  $X_f$  de una constante del movimiento  $f$  de  $(S, \{, \}_H, H)$  es una simetría infinitesimal del sistema hamiltoniano (véase [109] para más detalles). En efecto,

$$[X_f, X_H] = X_{\{H, f\}} = 0,$$

si  $f$  es una constante del movimiento.

Consideremos, ahora, el sistema presimpléctico  $(S, \omega, H)$ . Supongamos que el sistema presimpléctico  $(S, \omega, H)$  admite una dinámica global, es decir,  $dH(\ker \omega)(x) = 0, \forall x \in S$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^\omega(S)$  el conjunto de todas las soluciones de la ecuación  $i_X \omega = dH$ .

$$\mathfrak{X}^\omega(S) = \{X \in \mathfrak{X}(S) / i_X \omega = dH\}.$$

Así, si  $\xi$  y  $\xi' \in \mathfrak{X}^\omega(S)$ , entonces existe un  $Z \in \ker \omega$  tal que  $\xi = \xi' + Z$ .

En el capítulo anterior, hemos clasificado las simetrías infinitesimales de los sistemas presimplécticos. Reescribiremos para el sistema presimpléctico  $(S, \omega, H)$  las definiciones de constantes del movimiento y simetrías.

Primero, fijamos una solución particular  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(S)$ .

**Definición 4.2.4** *Se dice que una función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\xi$  si  $\xi F = 0$ .*

**Definición 4.2.5** *Una simetría dinámica de  $\xi$  es un campo de vectores  $X$  en  $S$  tal que  $[X, \xi] = 0$ .*

Ahora, consideremos todas las soluciones de la ecuación  $i_X \omega = dH$ .

**Definición 4.2.6** *Se dice que una función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$  si  $F$  verifica que  $\mathfrak{X}^\omega(S)F = 0$ .*

Obviamente, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$  entonces  $F$  es una constante del movimiento de  $\xi$ , para todo  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(S)$ .

**Definición 4.2.7** *Una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$  es un campo de vectores tal que*

$$[X, \mathfrak{X}^\omega(S)] \subset \ker \omega.$$

**Definición 4.2.8** *Una simetría de Cartan de  $(S, \omega, H)$  es un campo de vectores  $X$  en  $S$  tal que*

1.  $i_X \omega = dF$ , para alguna función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ , e
2.  $i_X dH = 0$ .

Como sabemos, toda simetría de Cartan de  $(S, \omega, H)$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$ . Además, probamos el siguiente teorema de Noether.

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Noether)** *Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(S, \omega, H)$  entonces la función  $F$  (como en la Definición 4.2.8) es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$ . Recíprocamente, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(S)$  entonces existe un campo de vectores  $X$  tal que*

$$i_X \omega = dF ,$$

*y, además,  $X$  es una simetría de Cartan de  $(S, \omega, H)$  y, cada campo de vectores  $X + Z$  con  $Z \in \ker \omega$ , es también una simetría de Cartan de  $(S, \omega, H)$ .*

Ahora consideramos un sistema presimpléctico  $(M, \omega, H)$  con una estructura casi-producto integrable  $F$  adaptada a  $\omega$ . En la Sección 4.1.1, hemos probado que  $(M, \{ , \}_A)$  es una variedad de Poisson. Queremos estudiar la relación entre las simetrías del sistema hamiltoniano  $(M, \{ , \}_A, H)$  y las simetrías del sistema presimpléctico  $(M, \omega, H)$ .

Obviamente, las definiciones de constante del movimiento del sistema hamiltoniano  $(M, \{ , \}_A, H)$  y constante del movimiento de  $X_{H,A}$  son las mismas, puesto que

$$\{f, H\}_A = X_{H,A} f .$$

**Proposición 4.2.1** *Una constante del movimiento  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  del sistema hamiltoniano  $(M, \{ , \}_A, H)$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  si y solamente si  $df \in \text{Im } \mathcal{A}^*$ .*

**Demostración:** De hecho, podemos caracterizar las constantes del movimiento de  $\mathfrak{X}(M)$  como las funciones  $F$  tales que:

1.  $\xi F = 0$ , para una solución arbitraria  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(M)$ ,
2.  $\ker \omega(F) = 0$ .

Si escogemos  $\xi = X_{H,A}$ , la equivalencia es trivial. ■

Análogamente, las definiciones de simetría infinitesimal de  $(M, \{ , \}_A, H)$  y simetría dinámica de  $X_{H,A}$  son las mismas.

**Proposición 4.2.2** Si una simetría infinitesimal  $X$  del sistema hamiltoniano  $(M, \{ , \}_A, H)$  es un campo de vectores hamiltoniano con energía  $F$ , es decir,  $X = X_{F,A}$ , entonces  $\{F, H\}_A$  es una constante del movimiento del sistema hamiltoniano (o de  $X_{H,A}$ ). Además, si  $df \in \text{Im}\mathcal{A}^*$  entonces  $\{F, H\}_A$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ .

**Demostración:** Si  $X_{F,A}$  es una simetría infinitesimal de  $(M, \{ , \}_A, H)$ , entonces

$$0 = [X_{F,A}, X_{H,A}]H = X_{\{F,H\}_A, A}H = \{\{F, H\}_A, H\}_A .$$

Por lo tanto,  $\{F, H\}_A$  es una constante del movimiento de  $(M, \{ , \}_A, H)$ . Si  $dF \in \text{Im}\mathcal{A}^*$ , por la Proposición 4.2.1 deducimos que  $\{F, H\}_A$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ . ■

**Proposición 4.2.3** Si  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  entonces  $\mathcal{A}X$  es una simetría infinitesimal de  $(M, \{ , \}_A, H)$ .

**Demostración:** Si  $X$  es una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$  entonces  $[X, \mathfrak{X}^\omega(M)] \subset \ker \omega_L$ . Como

$$[X, \mathfrak{X}^\omega(M)] = [\mathcal{A}X + \mathcal{B}X, \mathfrak{X}^\omega(M)] = [\mathcal{A}X, \mathfrak{X}^\omega(M)] + [\mathcal{B}X, \mathfrak{X}^\omega(M)]$$

y  $[\xi, Z] \in \ker \omega$  para todo  $\xi \in \mathfrak{X}^\omega(M)$  y  $Z \in \ker \omega$ , deducimos que  $\mathcal{A}X$  es también una simetría dinámica de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ .

En consecuencia, para la solución particular  $X_{H,A}$  obtenemos que

$$[\mathcal{A}X, X_{H,A}] \subset \ker \omega_L .$$

Usando la involutividad de la distribución  $\text{Im}\mathcal{A}$ , obtenemos  $[\mathcal{A}X, X_{H,A}] = 0$ . Así  $\mathcal{A}X$  es una simetría infinitesimal del sistema hamiltoniano  $(M, \{ , \}_A, H)$ . ■

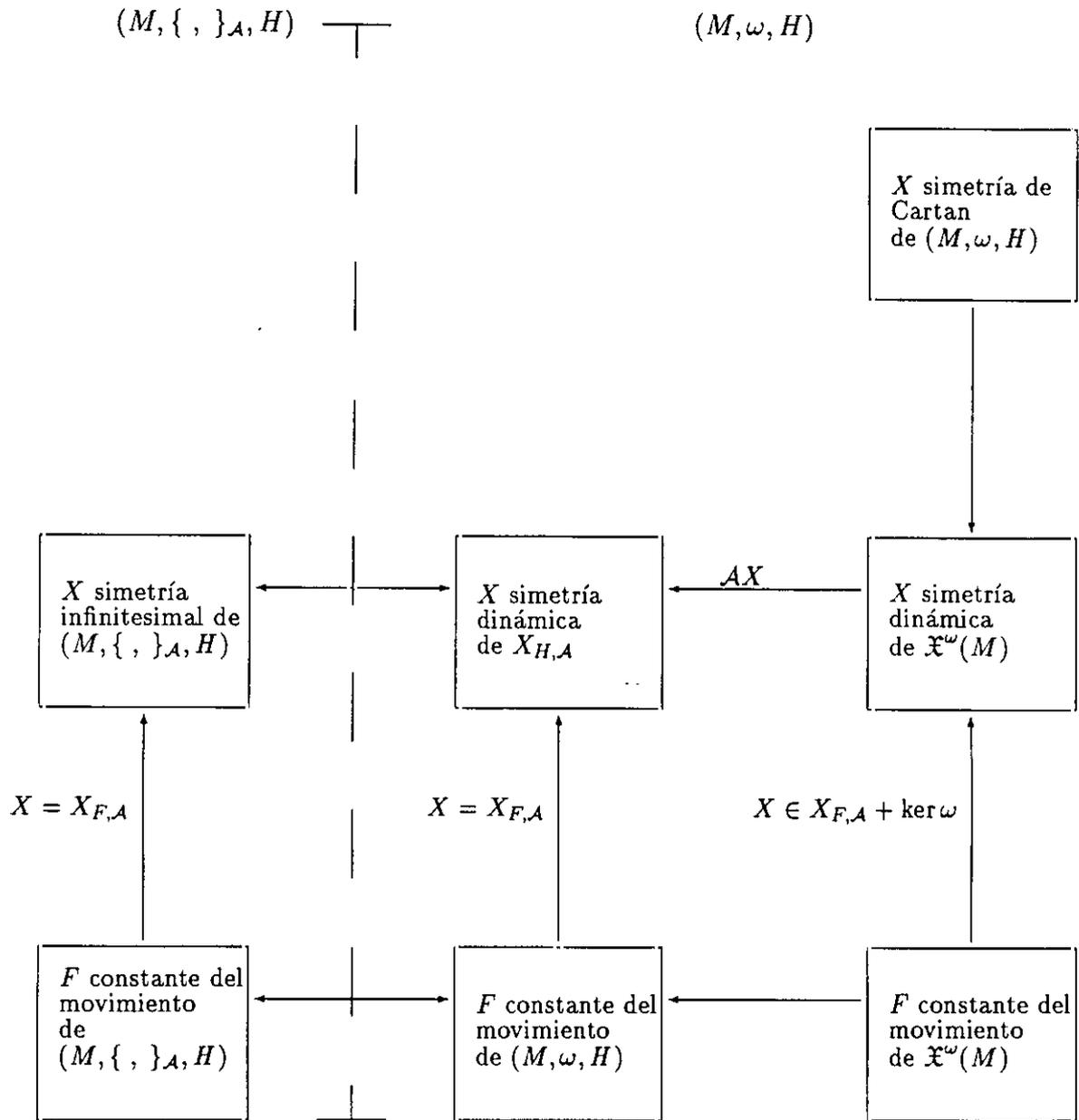
**Corolario 4.2.1** Si  $X$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, H)$  (como en la Definición 4.2.8) entonces  $X_{F,A}$  es una simetría infinitesimal de  $(M, \{ , \}_A, H)$ .

Si la ecuación  $i_X \omega = dF$  tiene soluciones globalmente definidas, podemos distinguir una única solución  $X_{F,A}$  de modo que  $X_{F,A} \in \text{Im}\mathcal{A}$ .

**Teorema 4.2.2 (Teorema de Noether)**  $X_{f,A}$  es una simetría de Cartan de  $(M, \omega, H)$  si y solamente si  $f$  es una constante del movimiento de  $\mathfrak{X}^\omega(M)$ .

**Demostración:** Se sigue directamente del Teorema 4.2.1. ■

El siguiente diagrama resume los resultados de esta sección:



### 4.3 Reducción de Poisson

**Definición 4.3.1** Sea  $(M, \{, \})$  una variedad de Poisson y  $G$  un grupo de Lie. Diremos que  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  es una acción de Poisson si  $\Phi$  preserva el corchete de Poisson  $\{, \}$ , es decir,

$$\{f, h\} \circ \Phi_g = \{f \circ \Phi_g, h \circ \Phi_g\}, \quad \forall f, h \in C^\infty(M), \forall g \in G.$$

Si  $G$  actúa libre y propiamente, entonces la variedad cociente  $M/G$  es una variedad diferenciable y  $\pi : M \rightarrow M/G$  es un fibrado principal con fibra tipo  $G$ , donde  $\pi$  denota la proyección canónica. Como sabemos,  $M/G$  es una variedad de Poisson con corchete de Poisson definido como sigue:

$$\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_{M/G} = \widetilde{\{F, H\}}_M,$$

para todo  $\tilde{F}, \tilde{H} \in C^\infty(M/G)$  donde denotamos por  $F$  y  $H$  cualquier función en  $M$  proyectable en  $\tilde{F}$  y  $\tilde{H}$ , respectivamente [109].

Para cada  $\xi \in \mathfrak{g}$ , el álgebra de Lie de  $G$ , podemos asociar un campo de vectores  $\xi_M$  en  $M$  definido como sigue:

$$\xi_M(x) = \left. \frac{d}{dt} (\exp(-t\xi)x) \right|_{t=0}.$$

Decimos que una aplicación  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  tal que cualquier campo de vectores  $\xi_M$  es un campo de vectores hamiltoniano para  $\widehat{J\xi}$ , es una aplicación momento para la acción de Poisson, donde  $\widehat{J\xi}$  es la función definida por  $\widehat{J\xi}(x) = \langle J(x), \xi \rangle$ .

Diremos que una aplicación momento es  $G$ -equivariante si se verifica que

$$J(\Phi_g(p)) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* J(p), \quad \forall g \in G, \forall p \in M.$$

Es fácil probar que una aplicación momento para una acción de Poisson es  $G$ -equivariante si  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  es una aplicación de Poisson, donde consideramos en  $\mathfrak{g}^*$  el corchete de Lie-Poisson. También, la  $G$ -equivarianza para una aplicación momento de una acción de Poisson

es equivalente a la siguiente condición:

$$\widehat{J[\xi, \nu]} = \{\widehat{J\xi}, \widehat{J\nu}\}, \forall \xi, \nu \in \mathfrak{g}.$$

Supongamos ahora que  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  es un valor regular para  $J$ . Denótese por  $G_\mu$  el grupo de isotropía de  $G$  por la representación coadjunta, es decir,

$$G_\mu = \{g \in G / \text{Ad}_g^* \mu = \mu\}.$$

En este caso,  $J^{-1}(\mu)$  es una subvariedad regular cerrada de  $M$  que es invariante por  $G_\mu$ . Si la acción de  $G_\mu$  es libre y propia entonces  $J^{-1}(\mu)$  es un fibrado principal con fibra tipo  $G_\mu$  sobre la variedad cociente  $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ . Denotamos por  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$  la proyección canónica. Ahora, aplicamos el Teorema 6.48 de la referencia [109].

**Teorema 4.3.1** *Sea  $M$  una variedad de Poisson y sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción de Poisson con aplicación momento  $G$ -equivariante  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Sea  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  un valor regular de  $J$ . Si  $G_\mu$  actúa libre y propiamente en la subvariedad  $J^{-1}(\mu)$  entonces el espacio reducido  $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$  tiene una única estructura de variedad de Poisson con corchete de Poisson  $\{, \}_\mu$  y existe una inmersión*

$$\phi : M_\mu = \frac{J^{-1}(\mu)}{G_\mu} \rightarrow \frac{M}{G}$$

tal que  $\phi(M_\mu)$  es una subvariedad de Poisson de  $M/G$ . Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{i_\mu} & M \\ \pi_\mu \downarrow & & \downarrow \pi \\ J^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{\phi} & M/G \end{array}$$

donde  $i_\mu$  es la inclusión canónica de  $J^{-1}(\mu)$  en  $M$ .

**Observación 4.3.1** Si  $G$  es conexo, entonces la acción de  $G$  preserva no sólo la foliación simpléctica si no también las hojas de la foliación. Así, si  $\mathcal{L}$  es una hoja simpléctica, la restricción

de  $J$  a  $\mathcal{L}$  es una aplicación momento para la acción restringida. Si  $\mu$  es también un valor regular de la aplicación momento restringida, se obtiene una reducción simpléctica de  $\mathcal{L}$  con momento  $\mu$ . Si se verifican condiciones de “intersección limpia”, podemos relacionar esta reducción simpléctica con la reducción de Poisson. Entonces, en cierto modo, la reducción de Poisson recolecta todas las reducciones simplécticas hoja a hoja (véase Vaisman [141] para más detalles).♠

#### 4.4 Reducción presimpléctica

Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica y sea  $G$  un grupo de Lie que actúa presimplécticamente en  $M$ , es decir,  $\phi_g^* \omega = \omega$ ,  $\forall g \in G$ , donde  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  es la acción de  $G$ . Sea  $F$  una estructura casi-producto  $F$  adaptada a  $\omega$ .

**Proposición 4.4.1** *Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción presimpléctica de modo que preserve la estructura casi-producto  $F$ , es decir,  $T\Phi_g \mathcal{A} = \mathcal{A}T\Phi_g$ ,  $\forall g \in G$ . En este caso,  $\Phi$  es una acción de Poisson para el corchete de Poisson  $\{, \}_\mathcal{A}$ .*

**Demostración:** De la definición de corchete de Poisson  $\{, \}_\mathcal{A}$  y la  $G$ -invarianza de  $\omega$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \{f, h\}_\mathcal{A} \circ \Phi_g &= (\omega(X_{f, \mathcal{A}}, X_{h, \mathcal{A}})) \circ \Phi_g = \Phi_g^*(\omega(X_{f, \mathcal{A}}, X_{h, \mathcal{A}})) \\ &= \Phi_g^*(\omega(T\Phi_g X_{f, \mathcal{A}}, T\Phi_g X_{h, \mathcal{A}})) = \omega(T\Phi_g X_{f, \mathcal{A}}, T\Phi_g X_{h, \mathcal{A}}), \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} i_{T\Phi_g X_{f, \mathcal{A}}} \omega &= i_{T\Phi_g X_{f, \mathcal{A}}} \Phi_g^* \omega = \Phi_g^*(i_{X_{f, \mathcal{A}}} \omega) \\ &= \Phi_g^*(\mathcal{A}^* df) = \mathcal{A}^* \Phi_g^* df = \mathcal{A}^* d\Phi_g^* f \\ &= i_{X_{\Phi_g^* f, \mathcal{A}}} \omega. \end{aligned}$$

y

$$\Phi_g^* X_{f,\mathcal{A}} = \Phi_g^* \mathcal{A} X_{f,\mathcal{A}} = \mathcal{A} \Phi_g^* X_{f,\mathcal{A}},$$

entonces  $\Phi_g^* X_{f,\mathcal{A}} \in \text{Im} \mathcal{A}$  y, en consecuencia,  $\Phi_g^* X_{f,\mathcal{A}} = X_{\Phi \circ f, \mathcal{A}}$ .

Deducimos que

$$\{f, h\}_{\mathcal{A}} \circ \Phi_g = \omega(X_{\Phi \circ f, \mathcal{A}}, X_{\Phi \circ h, \mathcal{A}}) = \{f \circ \Phi_g, h \circ \Phi_g\}_{\mathcal{A}}. \quad \blacksquare$$

Una aplicación  $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  tal que cualquier campo de vectores  $\xi_M$  es un campo hamiltoniano de  $\widehat{J\xi} = \langle J, \xi \rangle$ , es decir,

$$i_{\xi_M} \omega = d\widehat{J\xi},$$

será llamada un aplicación momento para la acción presimpléctica (véase [9]).

**Proposición 4.4.2** *Si  $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  es una aplicación momento para la acción presimpléctica  $\Phi$  tal que*

1.  $\Phi$  preserva la estructura casi-producto  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,
2.  $\xi_M \in \text{Im} \mathcal{A}$ ,  $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ ,

entonces  $J$  es una aplicación momento para la acción de Poisson  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  donde, aquí, consideramos  $M$  como una variedad de Poisson con corchete de Poisson  $\{, \}_{\mathcal{A}}$ .

**Demostración:**

Como  $i_{\xi_M} \omega = d\widehat{J\xi}$  y  $\xi_M \in \text{Im} \mathcal{A}$  entonces  $\xi_M = X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}}$ . Ahora,

$$\begin{aligned} \xi_M f &= X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}} f = df(X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}}) = \mathcal{A}^* df(X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}}) \\ &= i_{X_{f, \mathcal{A}}} \omega(X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}}) = \omega(X_{\widehat{J\xi}, \mathcal{A}}, X_{f, \mathcal{A}}) = \{\widehat{J\xi}, f\}_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

y, así,  $J$  es una aplicación momento para la acción de Poisson  $\Phi$ .  $\blacksquare$

**Teorema 4.4.1** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica dotada de una estructura casi-producto integrable  $F$  adaptada a  $\omega$  y sea  $G$  un grupo de Lie actuando presimplécticamente en  $M$ . Sea*

$J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  una aplicación momento equivariante para esta acción. Supondremos también que  $(A, B)$  es  $G$ -invariante y  $\xi_M \in \text{Im}A, \forall \xi \in \mathfrak{g}$ . Supongamos que  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  es un valor regular de  $J$  y que el grupo de isotropía  $G_\mu$  actúa libre y propiamente en  $J^{-1}(\mu)$ . Entonces, la variedad cociente  $M_\mu$  está provista de una única forma presimpléctica  $\omega_\mu$  tal que  $\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega$ , y una única estructura casi-producto  $F_\mu$  adaptada a  $\omega_\mu$  de modo que el corchete de Poisson inducido  $\{ , \}_{\mathcal{A}_\mu}$  coincide con el corchete de Poisson  $\{ , \}_\mu$  obtenido a partir del Teorema 4.3.1.

**Demostración:** Sea  $\bar{p} = \pi_\mu(p)$  con  $p \in J^{-1}(\mu)$ . Para  $u_p, v_p \in T_p(J^{-1}(\mu))$ , consideremos las correspondientes clases de equivalencia en  $M_\mu$ ,  $\bar{u}_{\bar{p}} = \pi_{\mu*}(u_p)$  y  $\bar{v}_{\bar{p}} = \pi_{\mu*}(v_p)$ . Definimos

$$\omega_\mu(\bar{u}_{\bar{p}}, \bar{v}_{\bar{p}}) = \omega(u_p, v_p).$$

Esta forma es única puesto que  $\pi_\mu$  es una submersión. Ahora, necesitamos probar que  $\omega_\mu$  está bien definida, es cerrada y tiene rango constante.

Sabemos que (véase [1])

$$T_p(O_\mu(p)) = T_p(O(p)) \cap T_p(J^{-1}(\mu)), \forall p \in J^{-1}(\mu)$$

donde  $O_\mu(p)$  y  $O(p)$  denotan las órbitas de  $p$  bajo la acción de  $G_\mu$  y  $G$ , respectivamente. Además, el complemento  $\omega$ -ortogonal de  $T_p O(p) = \{\xi_M / \xi \in \mathfrak{g}\}$  es precisamente  $T_p J^{-1}(\mu)$ . Entonces, es evidente que la 2-forma  $\omega_\mu$  está bien definida.

La 2-forma  $\omega$  es cerrada puesto que  $d\pi_\mu^* \omega_\mu = d i_\mu^* \omega = i_\mu^* d\omega = 0$  y  $\pi_\mu$  es una submersión.

Supongamos que un vector tangente  $\bar{u}_{\bar{p}}$  verifica que

$$\omega_\mu(\bar{u}_{\bar{p}}, \bar{v}_{\bar{p}}) = 0, \forall \bar{v}_{\bar{p}} \in T_{\bar{p}} M_\mu.$$

Entonces  $\omega(u_p, v_p) = 0, \forall v_p \in T_p J^{-1}(\mu)$ . Así, deducimos que  $u_p \in T_p O_\mu(p)$  y, entonces,  $\bar{u}_{\bar{p}} = 0$  o, la otra posibilidad,  $u_p \in \ker \omega(p)$ . Como  $\ker \omega(p) \subset T_p J^{-1}(\mu)$ , cualquier vector  $u_p \in \ker \omega(p)$  proyecta en un vector  $\bar{u}_{\bar{p}} \in \ker \omega_\mu(\bar{p})$ . En efecto, si  $\{(v_1)_p, (v_2)_p, \dots, (v_k)_p\}$  es una base de  $\ker \omega(p)$ , también,  $\{(\bar{v}_1)_{\bar{p}}, (\bar{v}_2)_{\bar{p}}, \dots, (\bar{v}_k)_{\bar{p}}\}$  es una base de  $\ker \omega_\mu(\bar{p})$ . Así pues,

$$\dim \ker \omega(p) = \dim \ker \omega_\mu(\bar{p}), \forall p \in J^{-1}(\mu).$$

Ahora, probaremos que una estructura casi-producto  $F$  restringe a una estructura casi-producto  $F/J^{-1}(\mu)$ . De hecho, solamente necesitamos probar que si  $v_p \in T_p J^{-1}(\mu)$  entonces, también,  $\mathcal{A}_p(v_p) \in T_p J^{-1}(\mu)$ . Pero,  $v_p \in T_p J^{-1}(\mu)$  si y solamente si  $d\widehat{J\xi}(v_p) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$ , por lo tanto

$$d\widehat{J\xi}(\mathcal{A}_p v_p) = \mathcal{A}_p^* d\widehat{J\xi}(v_p) = d\widehat{J\xi}(v_p) = 0 .$$

Una condición necesaria y suficiente para que el tensor  $F/J^{-1}(\mu)$  proyecte en  $M_\mu$  es que  $F$  verifique para todo  $p \in J^{-1}(\mu)$  que (véase [13]):

1.  $\mathcal{A}_p(\xi_M(p)) \in T_p O_\mu(p), \forall \xi \in G_\mu ,$
2.  $\text{Im}(L_{\xi_M(p)} \mathcal{A}) \subset T_p O_\mu(p), \forall \xi \in G_\mu .$

Como  $\xi_M \in \text{Im} \mathcal{A}$  entonces  $\mathcal{A}_p(\xi_M(p)) = \xi_M(p)$  y, así, la primera condición es trivial. Además  $L_{\xi_M} \mathcal{A} = 0$  y la segunda condición se verifica también. En consecuencia, existe una estructura casi-producto  $F_\mu$  en la variedad diferenciable  $M_\mu$ .

Ahora, estudiaremos si esta estructura casi producto está adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_\mu$ , es decir, si  $\ker \mathcal{A}_\mu = \ker \omega_\mu$ . Consideremos  $\tilde{u}_{\bar{p}} \in \ker \mathcal{A}_\mu(\bar{p})$ . Como  $\mathcal{A}_\mu(\tilde{u}_{\bar{p}}) = 0$  se deduce que  $\mathcal{A}(u_p) = 0$ . Entonces,  $u_p \in \ker \omega(p)$  puesto que la estructura casi-producto  $F$  está adaptada a  $\omega$ . Por lo tanto,  $\tilde{u}_{\bar{p}} \in \ker \omega_\mu$ .

La estructura casi-producto  $F_\mu$  es integrable (el tensor de Nijenhuis  $N_{\mathcal{A}}$  proyecta en el tensor de Nijenhuis  $N_{\mathcal{A}_\mu}$ ) y, así obtenemos una estructura de Poisson en  $M_\mu$  con corchete de Poisson  $\{ , \}_{\mathcal{A}_\mu}$ .

Para terminar la prueba del Teorema necesitamos asegurar que el corchete de Poisson  $\{ , \}_{\mathcal{A}_\mu}$  es el mismo que el corchete  $\{ , \}_\mu$  definido a partir del Teorema 4.3.1. Para cada  $\tilde{f}, \tilde{h} \in C^\infty(M_\mu)$  el corchete de Poisson  $\{ , \}_\mu$  está definido como sigue:

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_\mu = \phi^* \{(\phi^{-1})^* f, (\phi^{-1})^* h\}_{\phi(M_\mu)} .$$

y si denotamos por  $j : \phi(M_\mu) \longrightarrow M/G$  la inclusión canónica entonces  $\{(\phi^{-1})^* f, (\phi^{-1})^* h\}_{\phi(M_\mu)} = j^* \{\tilde{F}, \tilde{H}\}_{M/G}$ , donde  $\tilde{F}$  y  $\tilde{H}$  son funciones arbitrarias en  $C^\infty(M/G)$  tales que  $j^* \tilde{F} = (\phi^{-1})^* f$  y  $j^* \tilde{H} = (\phi^{-1})^* h$ . Ahora,  $\{\tilde{F}, \tilde{H}\}_{M/G} = \{\widetilde{F}, \widetilde{H}\}_{\mathcal{A}}$  con  $F, H \in C^\infty(M)$  funciones  $G$ -invariantes

proyectables en  $\tilde{F}$  y  $\tilde{H}$ , respectivamente. Como  $F$  y  $H$  son  $G$ -invariantes entonces también  $\{F, G\}_{\mathcal{A}}$  es  $G$ -invariante. Por lo tanto,  $\{F, G\}_{\mathcal{A}}$  es proyectable en  $M_{\mu}$ , precisamente sobre  $\{\tilde{f}, \tilde{h}\}_{\mathcal{A}_{\mu}}$ . De la conmutatividad del diagrama del Teorema 4.3.1, se deduce que:

$$\{\tilde{f}, \tilde{h}\}_{\mathcal{A}_{\mu}} = \{\tilde{f}, \tilde{h}\}_{M_{\mu}}, \forall \tilde{f}, \tilde{h} \in C^{\infty}(M_{\mu}). \quad \blacksquare$$

## 4.5 Reducción de la dinámica

Sea  $(M, \omega)$  una variedad presimpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función. En este caso, diremos que  $(M, \omega, H)$  es un sistema presimpléctico con función hamiltoniana  $H$ . Buscamos una solución de la ecuación

$$i_X \omega = dH. \quad (4.5.2)$$

Sabemos que como  $\omega$  no es simpléctica, (4.5.2) no tiene solución en general e incluso si existe ésta no es única.

Supondremos primero que  $(M, \omega, H)$  no tiene ligaduras secundarias. Así,

$$dH(x)(\ker \omega)(x) = 0, \forall x \in M.$$

En este caso, si  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es una estructura casi-producto adaptada a  $\omega$ ,  $\mathcal{A}^*(dH) = dH$ , y existe un único campo de vectores  $X$  en  $M$  tal que  $X \in \text{Im } \mathcal{A}$  e  $i_X \omega = dH$ .

Consideremos un grupo de Lie  $G$  actuando presimplécticamente en  $M$  de modo que se verifiquen las hipótesis del Teorema 4.4.1. Supongamos también que  $H$  es  $G$ -invariante. Bajo estas hipótesis deducimos que  $X$  es  $G$ -invariante. Como  $H$  es  $G$ -invariante, entonces  $H \circ i_{\mu}$  es  $G_{\mu}$ -invariante y proyecta en una función  $H_{\mu}$  en  $M_{\mu}$ . El campo de vectores  $X$  es tangente a  $J^{-1}(\mu)$  y proyecta en un campo de vectores  $X_{\mu}$  en  $M_{\mu}$ . Se obtiene que

$$i_{X_{\mu}} \omega_{\mu} = dH_{\mu}.$$

Así, el sistema presimpléctico reducido  $(M_{\mu}, \omega_{\mu}, H_{\mu})$  no tiene ligaduras secundarias y su dinámica está determinada por las curvas integrales de  $X_{\mu}$ , es decir,  $X_{\mu} f = \{H_{\mu}, f\}, \forall f \in C^{\infty}(M_{\mu})$ .

Si  $(M, \omega, H)$  tiene ligaduras secundarias, y existe una variedad final de ligaduras  $M_f$ , pode-

mos aplicar el método anterior en la variedad presimpléctica  $(M_f, \omega_f, H_f)$ , donde  $\omega_f = \omega|_{M_f}$  y  $H_f = H|_{M_f}$  son las restricciones canónicas. Nótese que el algoritmo preserva la acción de  $G$  y, así, obtenemos una acción presimpléctica de  $G$  en  $M_f$ . Este caso necesita un análisis más profundo, puesto que hay dos ecuaciones del movimiento,  $(i_Z \omega = dH)|_{M_f}$  e  $i_Z \omega_f = dH_f$ , y las soluciones de la primera ecuación son soluciones de la segunda, pero el recíproco no es cierto.

## 4.6 Reconstrucción de la dinámica

Para reconstruir la dinámica a partir de la dinámica reducida podemos usar una conexión  $\gamma$  en el fibrado principal con fibra tipo  $G_\mu$ ,  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \longrightarrow M_\mu$  [101]. Sea  $c_\mu(t)$  una curva integral de  $X_\mu$  pasando por el punto  $x_0 = c_\mu(0)$  y consideremos su elevación horizontal  $d(t)$  pasando por el punto  $z_0$ ; es decir,  $z_0 = d(0)$ ,  $\pi_\mu(z_0) = x_0$ . Entonces,

$$\gamma(X(d(t)) - d'(t)) = \gamma(X(d(t))) = \xi(t),$$

donde  $\xi(t)$  es una curva en  $\mathfrak{g}_\mu$ , el álgebra de Lie de  $G_\mu$ . Escogemos ahora  $c(t) = g(t)d(t)$ , donde  $g(t)$  es una curva en  $G_\mu$  determinada de tal modo que  $c(t)$  es una curva integral de  $X$ . De la  $G_\mu$ -invarianza de  $X$  deducimos que

$$X(d(t)) - d'(t) = [T_{g(t)}L_{g(t)^{-1}}(g'(t))]_{J^{-1}(\mu)}(d(t)),$$

lo que implica que

$$\xi(t) = T_{g(t)}L_{g(t)^{-1}}(g'(t)),$$

o, equivalentemente,

$$g'(t) = T_e L_{g(t)}(\xi(t)), \quad (4.6.3)$$

con  $g(0) = e$ . Ahora, solamente tenemos que resolver (4.6.3), lo cual se puede hacer por cuadraturas.

## Capítulo 5

# Sistemas lagrangianos degenerados y estructuras casi-producto

En este capítulo revisaremos la teoría de sistemas lagrangianos degenerados desde el punto de vista de las estructuras casi-producto introducidas en el capítulo anterior. Por lo tanto, si  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es un lagrangiano singular, es natural elegir una estructura casi-producto en  $TQ$  de modo que una de las dos distribuciones complementarias sea precisamente la distribución singular  $\ker \omega_L$ . La “proyección” del sistema en la distribución regular debería darnos un sistema “regular” con una dinámica completamente determinada. Esta aproximación es un camino alternativo a considerar el espacio cociente por la distribución característica  $\ker \omega_L$  como estudiaron Cantrijn *et al.* ([13])

En este capítulo, nuestra aproximación es la siguiente. Consideremos una función lagrangiana singular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  con forma presimpléctica  $\omega_L$  y denótese por  $M_1$  la variedad de ligaduras primarias. Supondremos primero, para simplificar, que no existen ligaduras secundarias. Si todas las ligaduras primarias son de segunda clase, entonces se puede definir una estructura casi-producto en  $T^*Q$  y la proyección del campo de vectores hamiltoniano correspondiente a cualquier función hamiltoniana extendida nos da la dinámica. Además, veremos que esta estructura casi-producto está relacionada con el corchete de Dirac. Por otro lado, si todas las ligaduras son de primera clase, la dinámica está determinada si elegimos una estructura casi-producto en  $M_1$  adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_1$ , donde  $\omega_1$  es la restricción de la

forma simpléctica canónica  $\omega_Q$  de  $T^*Q$ . Por supuesto, si hay ligaduras de primera y segunda clase, podemos combinar ambos procedimientos. En este caso mixto, tendremos dos estructuras casi-producto, una definida en  $T^*Q$  y la otra en  $M_1$ . Si hay ligaduras secundarias, se puede aplicar una técnica similar sin cambios importantes.

Este capítulo está estructurado del siguiente modo. En la Sección 5.1 recordaremos el algoritmo de Dirac-Bergmann. El caso de sistemas lagrangianos admitiendo una dinámica global es considerado en la Sección 5.2. Aquí, se definirán estructuras casi-producto “adecuadas” para fijar la dinámica y, también, compararemos nuestro procedimiento con el método “clásico”. El caso de sistemas lagrangianos con ligaduras secundarias se estudia en la Sección 5.3. Relacionaremos los formalismos lagrangiano y hamiltoniano usando estructuras casi-producto *Leg*-proyectables en la Sección 5.4, y el problema de existencia de una solución verificando la condición de segundo orden será tratado en la Sección 5.5. Analizaremos el caso especial de lagrangianos afines en las velocidades en la Sección 5.6. Este tipo de lagrangianos da lugar a un caso especialmente interesante puesto que las estructuras casi-producto coinciden con las conexiones en el sentido de Ehresmann. Ilustramos con varios ejemplos todas las secciones.

## 5.1 El algoritmo de Dirac-Bergmann

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Consideremos un lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  singular; es decir, la matriz hessiana

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)$$

es singular. Sea  $\lambda_Q$  la 1-forma de Liouville y  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$ . Como  $\omega_Q$  es simpléctica, se define un corchete de Poisson en  $T^*Q$  por  $\{F, G\} = \omega_Q(X_F, X_G)$ ,  $\forall F, G \in C^\infty(T^*Q)$ . Si denotamos por  $i : M_1 \rightarrow T^*Q$  la inclusión canónica de  $M_1$  en  $T^*Q$ , obtenemos un sistema presimpléctico  $(M_1, \omega_1, h_1)$ , donde  $\omega_1 = i^*\omega_Q$ .

Así, aparecen  $m - k$  ligaduras independientes  $\phi^a$  que describen  $M_1$ , que serán llamadas ligaduras primarias según la terminología de Dirac (véase [38]). Si  $H$  es una extensión arbitraria de  $h_1$  a  $T^*Q$ , entonces todas las funciones hamiltonianas de la forma

$$\tilde{H} = H + \lambda_a \phi^a, \tag{5.1.1}$$

donde  $\lambda_a$  son multiplicadores de Lagrange, son débilmente iguales, esto es,  $\tilde{H}/_{M_1} = H/_{M_1} = h_1$ . Las ecuaciones hamiltonianas se escriben en términos del corchete de Poisson de  $T^*Q$  como sigue:

$$\frac{dq^A}{dt} = \{q^A, \tilde{H}\}, \quad \frac{dp_A}{dt} = \{p_A, \tilde{H}\}, \quad \phi^a = 0.$$

Esto muestra que existe una ambigüedad en la descripción de la dinámica. Como  $\omega_Q$  es simpléctica siempre existirá una solución de la ecuación  $i_X \omega_Q = dH$ . Pero, se debe verificar además que las ligaduras se preserven en el tiempo o, equivalentemente, que la solución  $X$  sea tangente a  $M_1$ . Así, se llega a

$$\left( \{\phi^b, \tilde{H}\} + \lambda_a \{\phi^b, \phi^a\} \right) /_{M_1} = 0.$$

La anulación de estas expresiones puede dar lugar a dos clases de consecuencias: algunas de las funciones arbitrarias  $\lambda_a$  pueden ser determinadas o nuevas ligaduras pueden surgir. Llamaremos a estas nuevas restricciones ligaduras secundarias. Las ligaduras primarias y secundarias definen la subvariedad  $M_2$

Ahora, podemos proceder de un modo similar con las ligaduras secundarias, pues ellas, también, deben conservarse en el tiempo. Si el problema tiene solución llegaremos a una variedad final de ligaduras  $M_f$  donde existen soluciones "consistentes". A este procedimiento para hallar las subvariedades de ligaduras cuando tratamos con lagrangianos singulares se le conoce como el algoritmo de Dirac-Bergmann.

Es posible dar una clasificación de las ligaduras generadas por este algoritmo para clarificar la ambigüedad de la dinámica. Una ligadura  $\phi$  de  $M_i$  (la subvariedad de ligaduras  $i$ -aria) se dice que es de primera clase si  $\{\phi, \phi^a\} /_{M_1} = 0$  para cada ligadura  $\phi^a$  de  $M_i$ , y de segunda clase en otro caso. Por lo tanto, los coeficientes de las ligaduras primarias de primera clase de  $M_f$  en (5.1.1) están completamente indeterminados, mientras que los coeficientes de las ligaduras primarias de segunda clase están completamente fijados. Desde un punto de vista más geométrico el algoritmo de Gotay-Nester es una globalización del algoritmo de Dirac-Bergmann (véanse [49, 15]).

## 5.2 Sistemas lagrangianos con dinámica global

Primero, supondremos que el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, E_L)$  admite una dinámica global, es decir, existe al menos un campo de vectores  $\xi$  en  $TQ$  tal que  $\xi$  satisface la ecuación del movimiento  $i_\xi \omega_L = dE_L$ . En tal caso, la subvariedad  $M_1 = \text{Leg}(TQ)$  de  $T^*Q$  es la subvariedad final de ligaduras o, en otras palabras, no hay ligaduras secundarias.

Distinguiremos tres casos particulares:

1. todas las ligaduras primarias son de segunda clase,
2. todas ellas son de primera clase, y
3. existen ligaduras de primera y de segunda clase.

### 5.2.1 Todas las ligaduras primarias son de segunda clase

Denotaremos por  $\Phi^a$ ,  $1 \leq a \leq s$ , las ligaduras de  $M_1$ . La matriz con elementos  $C^{ab} = \{\Phi^a, \Phi^b\}$  es regular en  $M_1$  y, en lo sucesivo, supondremos que esta matriz es regular en todo el espacio de fases  $T^*Q$ . Esta matriz es también antisimétrica y, entonces, el número de ligaduras de segunda clase es par. Denotaremos por  $(C_{ab})$  la matriz inversa.

Como en la referencia [8], consideraremos la distribución diferenciable  $D$  generada por los campos de vectores  $X_{\Phi^a}$ . Un cálculo directo muestra que

$$D^\perp(x) = \{v \in T_x T^*Q / \omega_Q(x)(v, w) = 0 \ \forall w \in D(x)\} = T_x M_1, \ \forall x \in M_1.$$

Sea  $\mathcal{Q} : D \oplus D^\perp \longrightarrow D$  la proyección en  $D$  a lo largo de  $D^\perp$  y  $\mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q}$ . El proyector  $\mathcal{Q}$  viene dado por

$$\mathcal{Q} = C_{ab} X_{\Phi^a} \otimes d\Phi^b.$$

Definimos la 2-forma  $\Omega_D = \mathcal{P}^* \omega_Q$  (es decir,  $\mathcal{P}^* \omega_Q(X, Y) = \omega_Q(\mathcal{P}X, \mathcal{P}Y)$ ).  $\Omega_D$  es una 2-forma de rango  $2m - s$ . Además, la estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  está adaptada a  $\Omega_D$ , es decir,  $\ker \mathcal{P} = \ker \Omega_D = D$ . Así, podemos definir un corchete  $\{F, G\}_D$ , llamado el corchete de Dirac, en  $T^*Q$  como sigue:

$$\{F, G\}_D = \Omega_D(X_F, X_G) = \omega_Q(\mathcal{P}X_F, \mathcal{P}X_G)$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_Q(X_F - C_{ab}\{\Phi^b, F\}X_{\Phi^a}, X_G - C_{a'b'}\{\Phi^{b'}, G\}X_{\Phi^{a'}}) \\
&= \{F, G\} - \{F, \Phi^a\}C_{ab}\{\Phi^b, G\}.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la función hamiltoniana  $h_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h_1 \circ Leg = E_L$ . Podemos extender  $h_1$  a una función  $H$  en un entorno  $U$  de  $T^*Q$  y, aquí, la teoría de Dirac dice que estos hamiltonianos en  $U$  deben ser de la forma:

$$\tilde{H} = H + \lambda_a \Phi^a.$$

Consideraremos el campo de vectores hamiltoniano  $X_{\tilde{H}}$ . Para que sea la teoría consistente, debemos exigir que las ligaduras  $\Phi_a$  se preserven por  $X_{\tilde{H}}$ ; geoméricamente esto significa que el campo de vectores  $X_{\tilde{H}}$  debe ser tangente a  $M_1$ . Consideramos el campo de vectores:

$$\mathcal{P}X_H = X_H - C_{ab}\{\Phi^b, H\}X_{\Phi^a}.$$

Por las definiciones de estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ,  $\mathcal{P}X_H$  es tangente a  $M_1$  y su restricción a  $M_1$ ,  $\mathcal{P}X_{H/M_1}$ , es la única solución de las ecuaciones del movimiento, esto es,

$$i_{\mathcal{P}X_{H/M_1}} \omega_1 = dh_1,$$

puesto que  $\omega_1$  es simpléctica. Además, si la distribución  $D$  es integrable, el corchete de Dirac  $\{ , \}_D$  es de hecho un corchete de Poisson. En este caso, cuando consideramos en  $M_1$  el corchete de Poisson  $\{ , \}_1$  definido por la estructura simpléctica  $\omega_1$  y en  $T^*Q$  el corchete de Dirac  $\{ , \}_D$ , obtenemos que la inclusión canónica  $i : M_1 \rightarrow T^*Q$  es un morfismo de Poisson, es decir,

$$i^*\{F, G\}_D = \{i^*F, i^*G\}, \forall F, G \in C^\infty(T^*Q).$$

La siguiente tabla resume los resultados anteriores:

**Ejemplo 5.2.1** Sea  $L : T\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano definido por (véase [6])

$$L(q^A, \dot{q}^A) = (q^2 + q^3)\dot{q}^1 + q^4\dot{q}^3 + \frac{1}{2}((q^4)^2 - 2q^2q^3 - (q^3)^2).$$

$T^*Q$	$T^*Q$	$M_1$
$\omega_Q$	$\Omega_D$	$\omega_1$
$\{, \}$	$\{, \}_D$	$\{, \}_1$
	$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	

Ligaduras primarias de segunda clase

Como

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = q^2 + q^3, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} = q^4, \quad p_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^4} = 0,$$

obtenemos las siguientes ligaduras primarias:

$$\Phi_1 = p_1 - q^2 - q^3, \quad \Phi_2 = p_2, \quad \Phi_3 = p_3 - q^4, \quad \Phi_4 = p_4.$$

Todas ellas son ligaduras de segunda clase. Sea  $C$  la matriz

$$(C^{ab}) = (\{\Phi^a, \Phi^b\}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, obtenemos una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  definido por:

$$\mathcal{Q} = C_{ab} X_{\Phi^a} \otimes d\Phi^b.$$

o, en coordenadas canónicas en  $T^*Q$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & \frac{\partial}{\partial q^2} \otimes dq^2 + \frac{\partial}{\partial q^2} \otimes dq^3 + \frac{\partial}{\partial q^4} \otimes dq^4 - \frac{\partial}{\partial q^2} \otimes dp_1 \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^4} + \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_3} \right) \otimes dp_1 - \frac{\partial}{\partial q^4} \otimes dp_3 + \left( \frac{\partial}{\partial q^3} - \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial p_4} \right) \otimes dp_4 . \end{aligned}$$

La 2-forma presimpléctica  $\Omega_D$  es:

$$\Omega_D = dq^1 \wedge dp_1 - dq^3 \wedge dp_2 + dq^3 \wedge dp_3 + dp_1 \wedge dp_2 - dp_2 \wedge dp_4 + dp_3 \wedge dp_4 .$$

La 2-forma  $\omega_1$  se expresa en coordenadas locales  $(q^A)$  en  $M_1$  por

$$\omega_1 = dq^1 \wedge dq^2 + dq^1 \wedge dq^3 + dq^3 \wedge dq^4 ,$$

la cual es una forma simpléctica. La única solución  $\xi_{M_1}$  de la ecuación  $i_X \omega_1 = dh_1$  es precisamente:

$$\xi_{M_1} = q^3 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^4 \frac{\partial}{\partial q^2} + q^4 \frac{\partial}{\partial q^3} - q^2 \frac{\partial}{\partial q^4} .$$

Por lo tanto, si  $H$  es una extensión arbitraria de  $h_1$  a  $T^*Q$  se obtiene que  $\mathcal{P}(X_H)_{/M_1} = \xi_{M_1}$ . El lagrangiano  $L$  es afín en las velocidades. El caso general será estudiado en la Sección 5.5.

### 5.2.2 Todas las ligaduras primarias son de primera clase

Denotamos por  $\phi^i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , las ligaduras de primera clase. Como  $\{\phi^i, \phi^j\}_{/M_1} = 0$ , entonces  $X_{\phi^i}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , el campo de vectores hamiltoniano de  $\phi^i$ , es tangente a  $M_1$ . En este caso la subvariedad  $M_1$  es coisotrópica en  $T^*Q$ .

Como  $\ker \omega_1$  está generado por las restricciones de los campos de vectores hamiltonianos  $X_{\phi^i}$  de las ligaduras de primera clase, para fijar el "gauge", consideramos una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  adaptada a  $\ker \omega_1$ . Además, si la estructura casi-producto es integrable podemos definir un corchete de Poisson en  $M_1$  como sigue:

$$\{f, g\}_{\mathcal{A}_1} = \omega_1(X_{f, \mathcal{A}_1}, X_{g, \mathcal{A}_1}), \quad \forall f, g \in C^\infty(M_1),$$

donde  $X_{f, \mathcal{A}_1}$  y  $X_{g, \mathcal{A}_1}$  son los únicos campos de vectores en  $M_1$  que pertenecen a  $\text{Im} \mathcal{A}_1$  y verifican

que  $i_{X_f, \mathcal{A}_1} \omega_1 = \mathcal{A}_1^* df$  e  $i_{X_g, \mathcal{A}_1} \omega_1 = \mathcal{A}_1^* dg$ , respectivamente. Así pues, si  $\xi$  es una solución de las ecuaciones del movimiento, es decir,  $i_\xi \omega_1 = dh_1$ , podemos seleccionar una única solución  $\mathcal{A}_1 \xi$  tal que  $\mathcal{A}_1 \xi \in \text{Im} \mathcal{A}$ . De este modo, hemos conseguido fijar el “gauge”.

La siguiente tabla resume los resultados de esta sección:

$T^*Q$	$M_1$
$\omega_Q$	$\omega_1$
$\{ , \}$	$\{ , \}_{\mathcal{A}_1}$
	$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

Ligaduras primarias de primera clase

Ahora, consideraremos una extensión arbitraria  $H$  a  $T^*Q$  del hamiltoniano  $h_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Como existe dinámica global, el campo de vectores hamiltoniano  $X_H$  es tangente a  $M_1$ , es decir,  $X_{H/M_1} \in \mathfrak{X}(M_1)$  e

$$i_{X_{H/M_1}} \omega_1 = dh_1 .$$

Fijamos el “gauge” considerando  $\mathcal{A}_1(X_{H/M_1})$ .

El procedimiento clásico sería el siguiente (véase [151]). Se eligen funciones  $\{f^j, 1 \leq j \leq p\}$ , en  $T^*Q$  tales que la matriz  $(\{\phi^i, f^j\}) = (c^{ij})$  es regular. El determinante de esta matriz es conocido con el nombre del determinante de Faddeev-Popov. Si imponemos la condición de tangencia de los campos hamiltonianos de las funciones  $\tilde{H} = H + \lambda_i \phi^i$  a la subvariedad definida por las nuevas ligaduras  $\{f^j\}$ , conseguimos que

$$\lambda^i /_{M_1} = (c_{ij} \{H, \phi^j\}) /_{M_1} .$$

De esta manera se fija el “gauge”. Es fácil probar que fijar el “gauge” es equivalente a elegir

una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $T^*Q$  donde

$$\mathcal{Q} = c_{ij} X_{\phi^i} \otimes df^j .$$

La estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  restringe a  $M_1$  y su restricción  $(\mathcal{P}/_{M_1}, \mathcal{Q}/_{M_1})$  está adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_1$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{P}(X_H)/_{M_1} = X_{h_1, \mathcal{P}/_{M_1}} .$$

**Ejemplo 5.2.2** Consideremos el lagrangiano  $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 .$$

(véase Krupková [66]). Aquí  $(q^1, q^2, q^3)$  son las coordenadas canónicas en  $\mathbb{R}^3$  y  $(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$  las inducidas en  $T\mathbb{R}^3$ .

La energía y las formas de Poincaré-Cartan son:

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 = L , \\ \alpha_L &= (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)dq_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)dq_2 , \\ \omega_L &= dq_1 \wedge d\dot{q}_1 + dq_1 \wedge d\dot{q}_2 + dq_2 \wedge d\dot{q}_1 + dq_2 \wedge d\dot{q}_2 . \end{aligned}$$

No hay ligaduras secundarias, es decir, hay dinámica global. Como

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 , p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 , p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} = 0 ,$$

deducimos que la subvariedad  $M_1$  de  $T^*\mathbb{R}^3$  está definida por las siguientes ligaduras primarias:

$$\phi_1 = p_1 - p_2 = 0 , \phi_2 = p_3 = 0 .$$

Como  $\{\phi_1, \phi_2\} = 0$ , entonces ambas ligaduras son de primera clase. Si se eligen coordenadas

$(q^1, q^2, q^3, p_1)$  en  $M_1$ , obtenemos que

$$\omega_1 = i^* \omega_Q = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_1,$$

donde

$$i(q^1, q^2, q^3, p_1) = (q^1, q^2, q^3, p_1, 0).$$

En consecuencia,  $\ker \omega_1$  está generado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^3}, \frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{\partial}{\partial q^2} \right\},$$

Definimos la estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  por

$$\mathcal{A}_1\left(\frac{\partial}{\partial q^1}\right) = \frac{\partial}{\partial q^1}, \quad \mathcal{A}_1\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right) = \frac{\partial}{\partial q^1}, \quad \mathcal{A}_1\left(\frac{\partial}{\partial q^3}\right) = 0, \quad \mathcal{A}_1\left(\frac{\partial}{\partial p^1}\right) = \frac{\partial}{\partial p^1},$$

y  $\mathcal{B}_1 = \text{id} - \mathcal{A}_1$ .  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  es integrable y adaptada a  $\omega_1$ . Entonces, definimos un corchete de Poisson  $\{, \}_{M_1}$  en  $M_1$ . Como

$$\begin{aligned} X_{q^1, \mathcal{A}_1} &= -\frac{\partial}{\partial p^1}, & X_{q^2, \mathcal{A}_1} &= -\frac{\partial}{\partial p^1}, \\ X_{q^3, \mathcal{A}_1} &= 0, & X_{p^1, \mathcal{A}_1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right), \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \{q^1, q^2\}_{\mathcal{A}_1} &= 0, & \{q^1, q^3\}_{\mathcal{A}_1} &= 0, & \{q^2, q^3\}_{\mathcal{A}_1} &= 0, \\ \{q^1, p_1\}_{\mathcal{A}_1} &= -1, & \{q^2, p_1\}_{\mathcal{A}_1} &= -1, & \{q^3, p_1\}_{\mathcal{A}_1} &= 0. \end{aligned}$$

Si  $\xi$  es un campo de vectores en  $M_1$  de modo que es una solución de las ecuaciones del movimiento, es decir,  $i_\xi \omega_1 = dh_1$ , entonces fijamos la única solución  $\mathcal{A}_1(\xi) = X_{h_1, \mathcal{A}_1}$ . En este caso, obtenemos que

$$X_{h_1, \mathcal{A}_1} = p_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + p_1 \frac{\partial}{\partial q^2}.$$

### 5.2.3 Existen ligaduras primarias de primera y segunda clase

Denotamos por  $\Phi^a$ ,  $1 \leq a \leq s$  las ligaduras de segunda clase y por  $\phi^i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , las ligaduras de primera clase.

Como en el primer caso, podemos construir una estructura casi-producto  $(P, Q)$  en  $T^*Q$  con  $Q$  definida por

$$Q = C_{ab} X_{\Phi^a} \otimes d\Phi^b.$$

Aquí,  $(C_{ab})$  es la matriz inversa de  $(\{\Phi^a, \Phi^b\})$ . Definimos también la forma presimpléctica  $\Omega_D = P^* \omega_Q$  con rango constante  $2m - s$  y el corchete de Dirac

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \Phi^a\} C_{ab} \{\Phi^b, G\}.$$

Consideramos una extensión arbitraria  $H$  del hamiltoniano  $h_1$ . Como existe dinámica global, entonces el campo de vectores  $\mathcal{P}(X_H)$  es tangente a  $M_1$ . Ahora, fijamos el "gauge" eligiendo el campo de vectores  $\mathcal{A}_1(\mathcal{P}(X_H)|_{M_1})$ , donde  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  es alguna estructura casi-producto adaptada a  $\omega_1$ .

El diagrama de la siguiente página resume los resultados de esta sección.

$T^*Q$	$T^*Q$	$M_1$
$\omega_Q$	$\Omega_D$	$\omega_1$
$\{, \}$	$\{, \}_D$	$\{, \}_{\mathcal{A}_1}$
	$(P, Q)$	$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$

Ligaduras primarias de primera y segunda clase

### 5.3 Sistemas lagrangianos con ligaduras secundarias

Denotamos por  $\{\Phi^a, \phi^i; 1 \leq a \leq s, 1 \leq i \leq p\}$  el conjunto de las ligaduras de primarias de primera y segunda clase, respectivamente.

Aplicando el algoritmo de Gotay-Nester al sistema presimpléctico  $(M_1, \omega_1, h_1)$  obtenemos una sucesión de subvariedades

$$M_f \longrightarrow \dots \longrightarrow M_k \longrightarrow M_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow T^*Q .$$

Suponemos que el algoritmo estabiliza y denotamos por  $M_f$  la variedad final de ligaduras. La subvariedad final de ligaduras vendrá determinada por todas las ligaduras primarias y secundarias (para simplificar, llamaremos ligaduras secundarias a las que no son primarias). Ahora, podemos clasificar todas estas ligaduras de  $M_f$  en dos clases: ligaduras de primera clase y segunda clase. Denotamos por  $\{\bar{\Phi}^b, 1 \leq b \leq \bar{s}\}$  las ligaduras secundarias de segunda clase y por  $\{\bar{\phi}^j, 1 \leq j \leq \bar{p}\}$  las secundarias de primera clase. Las ligaduras primarias de segunda clase de  $M_1$  siguen siendo de segunda clase en  $M_f$  pero, por otro lado, las ligaduras primarias de primera clase pueden ser de primera o de segunda clase en  $M_f$ . Así, podemos suponer que  $\{\phi^{i'}, 1 \leq i' \leq p'\}$  son ligaduras de primera clase que son también de primera clase en  $M_f$  y  $\{\phi^{i''}, 1 \leq i'' \leq p''\}$  aquellas de primera clase que son de segunda clase en  $M_f$ , donde  $p' + p'' = p$ . Entonces se obtiene la siguiente clasificación de ligaduras en  $M_f$ :

$\{\phi^{i'}, \bar{\phi}^j, 1 \leq i' \leq p', 1 \leq j \leq \bar{p}\}$ , ligaduras de primera clase en  $M_f$ ,

$\{\phi^{i''}, \Phi^a, \bar{\Phi}^b, 1 \leq i'' \leq p'', 1 \leq a \leq s, 1 \leq b \leq \bar{s}\}$ , ligaduras de segunda clase en  $M_f$ .

Denotamos por  $\{\chi^\alpha\}$  todas las ligaduras de segunda clase en  $M_f$  que serán utilizadas para definir una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $T^*Q$ , donde el proyector  $\mathcal{Q}$  está definido como sigue:

$$\mathcal{Q} = C_{\alpha\beta} X_{\chi^\alpha} \otimes d\chi^\beta ,$$

siendo  $(C_{\alpha\beta})$  la matriz inversa de la matriz  $(\{\chi^\alpha, \chi^\beta\})$ . Como en la Sección 5.2.1, definimos el corchete de Dirac:

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\chi^\beta, G\} ,$$

para cualesquiera funciones  $F, G \in C^\infty(T^*Q)$ .

Ahora consideramos una extensión local  $H$  de  $h_1$  a  $T^*Q$ . Sea  $X_H$  el campo de vectores hamiltoniano y su proyección  $\mathcal{P}(X_H)$ . Entonces,  $\mathcal{P}(X_H)$  es tangente a  $M_f$ , y, además, es la solución de las ecuaciones del movimiento; es decir,

$$\left( i_{\mathcal{P}(X_H)/M_f} \omega_1 = dh_1 \right)_{/M_f}.$$

Para fijar el “gauge”, consideramos una estructura casi-producto  $((\mathcal{A}_1)_f, (\mathcal{B}_1)_f)$  en  $M_f$  tal que esté adaptada a la distribución  $\ker \omega_1 \cap TM_f$ , es decir,  $\ker(\mathcal{B}_1)_f = \ker \omega_1 \cap TM_f$ . Ahora, es suficiente considerar  $(\mathcal{A}_1)_f(\mathcal{P}(X_H)/M_f)$  para que el “gauge” quede fijado. Si consideramos el hamiltoniano “extendido” (una extensión del hamiltoniano  $h_1$  donde tenemos en cuenta todas las ligaduras de  $M_f$ , véase [54]), entonces es conveniente usar, para fijar el “gauge”, una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f)$  en  $M_f$  adaptada a  $\ker \omega_f$ , donde  $\omega_f = i_f^* \omega_Q$ . Aquí, denotamos por  $j_f : M_f \rightarrow T^*Q$  la inclusión canónica. Fijamos el “gauge” eligiendo  $\mathcal{A}_f(\mathcal{P}(X_H)/M_f)$ .

El diagrama siguiente resume los resultados de esta sección.

$T^*Q$	$T^*Q$	$M_f$
$\omega_Q$  $\{ , \}$	$\Omega_D$  $\{ , \}_D$  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	$((\mathcal{A}_1)_f, (\mathcal{B}_1)_f)$  $\ker(\mathcal{B}_1)_f = \ker \omega_1 \cap TM_f$

Caso general

**Ejemplo 5.3.1** Sea  $L : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano degenerado definido del siguiente modo (véase [15]):

$$L(q^A, \dot{q}^A) = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2.$$

La transformación de Legendre está definida por:

$$\text{Leg}(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = (q^1, q^2, \dot{q}^1, 0),$$

y, así obtenemos una ligadura primaria  $\phi^1 = p_2$ . La consistencia de esta ligadura da lugar a una ligadura secundaria:  $\Phi^2 = q^1$  y, a su vez, la consistencia de  $\Phi^1$  define una ligadura terciaria  $\Phi^3 = p_1$ . Como  $\Phi^2$  y  $\Phi^3$  son ligaduras de segunda clase, entonces, el proyector  $\mathcal{Q}$  se expresa por:

$$\mathcal{Q} = -X_{q^1} \otimes dp_1 + X_{p_1} \otimes dq^1 = \frac{\partial}{\partial q^1} \otimes dq^1 + \frac{\partial}{\partial p_1} \otimes dp_1,$$

y el corchete de Dirac  $\{ , \}_D$  está determinado por

$$\{q^1, q^2\}_D = 0, \{q^1, p_1\}_D = 0, \{q^1, p_2\}_D = 0, \{q^2, p_1\}_D = 0, \{q^2, p_2\}_D = 1, \{p_1, p_2\}_D = 0.$$

Sea  $h_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  el hamiltoniano

$$h_1 = \frac{1}{2}(p_1)^2 - \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2.$$

Una extensión arbitraria de  $T^*Q$  es  $H = \frac{1}{2}(p_1)^2 - \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2 + \lambda p_2$ , y el campo de vectores hamiltoniano es

$$X_H = \left( p_1 + p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \right) \frac{\partial}{\partial q^1} + \left( \lambda + p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \right) \frac{\partial}{\partial q^2} + \left( q^1 q^2 - p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial q^1} \right) \frac{\partial}{\partial p_1} + \left( \frac{1}{2}(q^1)^2 - p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial q^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}(X_H) = (\text{id} - \mathcal{Q})(X_H) = \left( \lambda + p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial p_2} \right) \frac{\partial}{\partial q^2} + \left( \frac{1}{2}(q^1)^2 - p_2 \frac{\partial \lambda}{\partial q^2} \right) \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

La restricción de  $\mathcal{P}(X_H)$  a  $M_3 = \{(q^1, q^2, p_1, p_2) \in T^*\mathbb{R}^2 / q^1 = 0, p_1 = 0, p_2 = 0\}$  es precisamente

$$\mathcal{P}(X_H)|_{M_3} = \lambda \frac{\partial}{\partial q^2},$$

y, así, la dinámica está completamente indeterminada.

## 5.4 Estructuras casi-producto Legendre proyectables

Ahora, queremos relacionar las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana cuando existe una estructura casi-producto que es *Leg*-proyectable en  $TQ$ . Para simplificar, podemos solamente considerar sistemas lagrangianos que admiten una dinámica global. Estos resultados se extienden al caso general considerando estructuras casi-producto en la subvariedad final de ligaduras.

La siguiente proposición nos permite obtener una condición necesaria y suficiente para que una estructura casi-producto en  $TQ$  sea proyectable en  $M_1$ .

**Proposición 5.4.1** *Sea  $\tilde{F}$  una estructura casi-producto que está adaptada a la 2-forma pre-simpléctica  $\omega_L$ . Entonces,  $\tilde{F}$  es  $Leg_1$ -proyectable en  $M_1$  si y solamente si*

$$\tilde{B}[Z, \tilde{A}X] \in V(TQ), \forall Z \in \ker TLeg, \forall X \in \mathfrak{X}(TQ),$$

donde  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son los proyectores asociados con  $\tilde{F}$ .

**Demostración:** La estructura casi-producto  $\tilde{F}$  es proyectable si y solamente si (véase [13])

1.  $\tilde{A}(\ker TLeg) \subset \ker TLeg$ ,
2.  $\text{Im}(L_Z \tilde{A}) \subset \ker TLeg, \forall Z \in \ker TLeg$ .

Como  $\ker TLeg = V(TQ) \cap \ker \omega_L$ , entonces  $\tilde{A}(\ker TLeg) = 0$ . Ahora, para todos los campos de vectores  $Y$  en  $TQ$  y  $Z \in \ker TLeg$ , se deduce que

$$\begin{aligned} L_Z \tilde{A}(Y) &= [Z, \tilde{A}Y] - \tilde{A}[Z, Y] = [Z, \tilde{A}Y] - \tilde{A}[Z, \tilde{A}Y] - \tilde{A}[Z, \tilde{B}Y] \\ &= [Z, \tilde{A}Y] - \tilde{A}[Z, \tilde{A}Y] = \tilde{B}[Z, \tilde{A}Y], \end{aligned}$$

puesto que  $\ker \omega_L$  es una distribución integrable. ■

**Corolario 5.4.1** *Si una estructura casi-producto integrable  $\tilde{F}$  adaptada a  $\omega_L$  conmuta con la estructura casi-tangente  $J$ , es decir,  $J\tilde{F} = \tilde{F}J$ , entonces  $\tilde{F}$  es proyectable en una estructura casi-producto en  $M_1$  si y solamente si*

$$J[Z, \tilde{A}Y] \in \text{Im} \tilde{A}, \forall Y \in \mathfrak{X}(TQ), \forall Z \in \ker TLeg.$$

Sea  $F$  una estructura casi-producto en el espacio de configuración  $Q$  y sea  $F^c$  la elevación completa de  $F$  a  $TQ$ . Recordemos que  $F^c$  está definida por:

$$F^c(X^c) = (F(X))^c, \quad F^c(X^v) = (F(X))^v, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(Q),$$

donde  $X^c$  y  $X^v$  denotan la elevación completa y vertical del campo de vectores  $X$ , respectivamente.  $F^c$  es una estructura casi-producto en  $TQ$  y  $F^c$  es integrable si y solamente si  $F$  es integrable. Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son los correspondientes proyectores de  $F$  entonces  $\mathcal{A}^c$  y  $\mathcal{B}^c$  son los correspondientes proyectores de  $F^c$ . Deducimos que  $\text{Im}\mathcal{A}^c$  es, de hecho, la elevación completa de la distribución  $\text{Im}\mathcal{A}$ . De un modo similar,  $(\text{Im}\mathcal{B})^c = \text{Im}\mathcal{B}^c$ . Esta clase de distribuciones es llamada tangente en [13].

**Corolario 5.4.2** *Si la estructura casi-producto  $F^c$  está adaptada a  $\omega_L$  entonces es proyectable a  $M_1$ .*

**Demostración:** Como  $JF^c = F^cJ$ , por el Corolario 5.4.1, solamente necesitamos probar que

$$J[Z, \mathcal{A}^c Y] \in \text{Im}\mathcal{A}^c, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(TQ), \quad \forall Z \in \ker TLeg.$$

Si  $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  es una base local de  $\text{Im}\mathcal{A}$ , entonces  $\{X_1^c, X_2^c, \dots, X_r^c, X_1^v, X_2^v, \dots, X_r^v\}$  es una base local de  $\text{Im}\mathcal{A}^c$ . Así, como  $[Z, X_i^v]$  y  $[Z, X_i^c]$  son campos de vectores verticales, para todo  $1 \leq i \leq r$ , se deduce que  $F^c$  es proyectable. ■

**Proposición 5.4.2** *Sea  $\tilde{F}$  una estructura casi-producto integrable adaptada a  $\omega_L$  y proyectable en  $M_1$ . Entonces, su proyección  $F_1$  es también integrable y adaptada a  $\omega_1$ .*

**Demostración:** La integrabilidad de  $\tilde{F}$  es trivial puesto que el tensor de Nijenhuis  $N_{\tilde{F}}$  de  $\tilde{F}$ , proyecta en el tensor de Nijenhuis  $N_{F_1}$  de la proyección  $F_1$ .

Como  $Leg_1^* \omega_1 = \omega_L$  y  $\ker \tilde{A} = \ker \omega_L$ , entonces para todo  $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M_1)$  tal que  $i_{\tilde{Z}} \omega_1 = 0$  y para todo campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(TQ)$  que sea  $Leg_1$ -proyectable en  $\tilde{Z}$ , es decir,  $TLeg_1(Z) = \tilde{Z}$ , obtenemos que

$$0 = Leg_1^*(i_{\tilde{Z}} \omega_1) = i_Z Leg_1^* \omega_1 = i_Z \omega_L.$$

Por lo tanto,  $Z \in \ker \omega_L = \ker \tilde{\mathcal{A}}$ . Así, su proyección  $\tilde{Z} \in \ker \mathcal{A}_1$ . Hemos probado entonces que  $\ker \omega_1 \subset \ker \mathcal{A}_1$ . De un modo similar, se prueba que,  $\ker \mathcal{A}_1 \subset \ker \omega_1$ . ■

Ahora, supongamos que  $\tilde{F}$  es una estructura casi-producto integrable en  $TQ$  la cual está adaptada a  $\omega_L$  y es proyectable a  $M_1$ . Denotemos por  $\{ , \}_{\tilde{\mathcal{A}}}$  el corchete de Poisson definido en  $TQ$ . Si  $F_1$  es la estructura casi-producto integrable proyectada en  $M_1$ , entonces sabemos que  $F_1$  está adaptada a  $\omega_1$ . Denótese por  $\{ , \}_{\mathcal{A}_1}$  el correspondiente corchete de Poisson en  $M_1$ . Lo que pretendemos es relacionar ambos corchetes de Poisson.

**Lema 5.4.1** *Sea una función  $\tilde{f}$  en  $M_1$ . Entonces  $X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}$  es proyectable a  $X_{\tilde{f}, \mathcal{A}_1}$ .*

**Demostración:** Primero, probaremos que  $X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}$  es  $Leg_1$ -proyectable; es decir,

$$[X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}, \tilde{Z}] \in \ker TLeg, \forall \tilde{Z} \in \ker TLeg.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i_{[X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}, \tilde{Z}]} \omega_L &= L_{X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}} i_{\tilde{Z}} \omega_L - i_{\tilde{Z}} L_{X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}} \omega_L \\ &= -i_{\tilde{Z}} d \left( i_{X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}} \omega_L \right) \\ &= -i_{\tilde{Z}} d \left( \tilde{\mathcal{A}}^* d(\tilde{f} \circ Leg_1) \right) \\ &= -i_{\tilde{Z}} Leg_1^* d \left( \tilde{\mathcal{A}}_1^* d(\tilde{f}) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y así, deducimos que  $[X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}, \tilde{Z}] \in \ker \omega_L$ . De la Proposición 5.4.1, deducimos que

$$[X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}, \tilde{Z}] \in V(TQ),$$

y, así,  $X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}$  es proyectable. Además, como

$$i_{X_{\tilde{f} \circ Leg_1, \tilde{\mathcal{A}}}} \omega_L = \tilde{\mathcal{A}}^* d(\tilde{f} \circ Leg_1),$$

su proyección  $TLeg(X_{\bar{f} \circ Leg_1, \bar{\mathcal{A}}})$  verifica que

$$i_{TLeg(X_{\bar{f} \circ Leg_1, \bar{\mathcal{A}}})} \omega_{M_1} = \mathcal{A}_1^* d(\bar{f}).$$

Se obtiene  $TLeg(X_{\bar{f} \circ Leg_1, \bar{\mathcal{A}}}) = TLeg(X_{\bar{f}, \mathcal{A}_1})$ . ■

**Proposición 5.4.3** La aplicación  $Leg_1 : TQ \longrightarrow M_1$  es un morfismo de Poisson, es decir,

$$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}_{\mathcal{A}_1} \circ Leg_1 = \{\bar{f}_1 \circ Leg_1, \bar{f}_2 \circ Leg_1\}_{\bar{\mathcal{A}}}, \forall \bar{f}_1, \bar{f}_2 \in C^\infty(M_1).$$

**Demostración:** Del Lema 5.4.1, se deduce que

$$\begin{aligned} \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}_{\mathcal{A}_1} \circ Leg_1 &= Leg_1^* (\omega_{M_1}(X_{\bar{f}_1, \mathcal{A}_1}, X_{\bar{f}_2, \mathcal{A}_1})) \\ &= \omega_L(X_{\bar{f}_1 \circ Leg_1, \bar{\mathcal{A}}}, X_{\bar{f}_2 \circ Leg_1, \bar{\mathcal{A}}}) \\ &= \{\bar{f}_1 \circ Leg_1, \bar{f}_2 \circ Leg_1\}_{\bar{\mathcal{A}}}, \end{aligned}$$

para cada función  $\bar{f}_1$  y  $\bar{f}_2$  en  $M_1$ . ■

**Ejemplo 5.4.1** Consideramos el lagrangiano definido en el Ejemplo 5.2.2. Un cálculo directo muestra que  $\ker \omega_L$  está generado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \right\}.$$

Sea  $F$  la siguiente estructura casi-producto en  $Q$ :

$$F\left(\frac{\partial}{\partial q^1}\right) = \frac{\partial}{\partial q^1}, F\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right) = 2\frac{\partial}{\partial q^1} - \frac{\partial}{\partial q^2}, F\left(\frac{\partial}{\partial q^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial q^3}.$$

La representación matricial de los correspondientes proyectores,  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ , son, respectivamente:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La elevación completa del tensor  $(1, 1)$   $\mathcal{A}^c$  y  $\mathcal{B}^c$  son:

$$\mathcal{A}^c = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^c = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

La estructura casi-producto  $F^c$  es integrable y adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_L$ . Como

$$\begin{aligned} X_{q^1, \mathcal{A}^c} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} \right), & X_{q^2, \mathcal{A}^c} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} \right), \\ X_{q^3, \mathcal{A}^c} &= 0, & X_{\dot{q}^1, \mathcal{A}^c} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right), \\ X_{\dot{q}^2, \mathcal{A}^c} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right), & X_{\dot{q}^3, \mathcal{A}^c} &= 0, \end{aligned}$$

el corchete de Poisson en  $TQ$  está determinado por

$$\begin{aligned} \{q^1, q^2\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{q^1, q^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{q^2, q^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, \\ \{\dot{q}^1, \dot{q}^2\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{\dot{q}^1, \dot{q}^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{\dot{q}^2, \dot{q}^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, \\ \{q^1, \dot{q}^1\}_{\mathcal{A}^c} &= -1, & \{q^1, \dot{q}^2\}_{\mathcal{A}^c} &= -1, & \{q^1, \dot{q}^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, \\ \{q^2, \dot{q}^1\}_{\mathcal{A}^c} &= -1, & \{q^2, \dot{q}^2\}_{\mathcal{A}^c} &= -1, & \{q^2, \dot{q}^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, \\ \{q^3, \dot{q}^1\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{q^3, \dot{q}^2\}_{\mathcal{A}^c} &= 0, & \{q^3, \dot{q}^3\}_{\mathcal{A}^c} &= 0. \end{aligned}$$

Del Corolario 5.4.2 y de la Proposición 5.4.2, deducimos que  $F^c$  es *Legi*-proyectable. Además, proyecta en la estructura casi-producto integrable  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  definida en el Ejemplo 5.2.2.

## 5.5 El problema de la condición de ecuación diferencial de segundo orden

Como sabemos, una solución de la ecuación  $i_X \omega_L = dE_L$  (si existe) no es necesariamente una ecuación diferencial de segundo orden, esto es un campo de vectores  $X$  en  $TQ$  tal que  $JX = C$ . Si  $L$  es casi-regular, entonces, en [49, 52], Gotay y Nester construyen una subvariedad  $S$  de la variedad final de ligaduras  $P_f$  en la cual existe un campo de vectores  $\xi$  de modo que:

$$(i_\xi \omega_L = dE_L)_{/S}, \quad (J\xi = C)_{/S}. \quad (5.5.2)$$

Introduciendo una adecuada estructura casi-producto en  $P_f$  podemos construir una subvariedad  $S$  de  $P_f$  en la cual existe una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$  y un campo de vectores  $\xi$  que verifica la ecuación (5.5.2) y, además,  $\xi \in \text{Im}\mathcal{A}_S$ .

Supondremos primero que el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, E_L)$  admite una dinámica global. Consideramos una estructura casi-producto  $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$  adaptada a  $\ker \omega_L$  que es proyectable a una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$ .

**Observación 5.5.1** Si  $\xi$  es una solución de las ecuaciones del movimiento  $i_X \omega_L = dE_L$  entonces  $\tilde{\mathcal{A}}(\xi)$  es también una solución de esta ecuación. Además, si la estructura casi-producto es *Leg*-proyectable entonces  $\tilde{\mathcal{A}}(\xi)$  es proyectable a  $\mathcal{A}_1 Z$ , donde  $Z$  es una solución arbitraria de la ecuación  $i_X \omega_1 = dh_1$ . ♠

De la Observación 5.5.1, deducimos que dado un campo de vectores  $\xi$  en  $TQ$  que es una solución de la ecuación del movimiento

$$i_\xi \omega_L = dE_L,$$

entonces el campo de vectores  $\tilde{\mathcal{A}}(\xi)$  es proyectable en  $\mathcal{A}_1(Z)$  y ambos campos de vectores son soluciones de sus respectivas ecuaciones del movimiento. Como en [49, 52], existe un único punto  $x$  en cada fibra de  $\text{Leg}_1 : TQ \rightarrow M_1$  (donde  $\text{Leg} = i_1 \circ \text{Leg}$ ), tal que  $\tilde{\mathcal{A}}(\xi)$  verifica la condición de ecuación diferencial de segundo orden (SODE) en  $x$ , es decir,  $(J(\tilde{\mathcal{A}}(\xi)))_x = C_x$ . Considérese ahora el subconjunto

$$S = \{x \in TQ / (J(\tilde{\mathcal{A}}(\xi)))_x = C_x\}. \quad (5.5.3)$$

En coordenadas locales,  $\tilde{\mathcal{A}}(\xi)$  se escribe localmente como

$$\tilde{\mathcal{A}}(\xi) = \Xi^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \tilde{\Xi}^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

Entonces, si  $z = \text{Leg}_1(x) \in M_1$ , e identificamos  $z$  con la fibra que contiene a  $x$ , deducimos que  $\Xi^A$  es constante a lo largo de esta fibra. Además,

$$U = J(\mathcal{A}\xi) - C = (\Xi^A - \dot{q}^A) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}$$

es tangente a las fibras. Sea  $\sigma(t) = (q^A(t), \dot{q}^A(t))$  una curva integral de  $U$  que contiene al punto  $x$  con coordenadas  $(q_0^A, \dot{q}_0^A)$ . Deducimos que

$$\sigma(t) = (q_0^A, \Xi^A - e^{-t}(\Xi^A - \dot{q}_0^A)) .$$

En consecuencia, se obtiene que

$$\bar{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = (q_0^A, \Xi^A) .$$

Así pues, el punto  $\bar{x}$  con coordenadas  $(q_0^A, \Xi^A)$  está en la misma fibra que  $x$ , puesto que las fibras son cerradas. Además,  $U(\bar{x}) = 0$ , y, por tanto,  $\tilde{A}(\xi)$  verifica la condición SODE en el punto  $\bar{x}$ .

Hemos obtenido una sección diferenciable  $\sigma : M_1 \rightarrow TQ$  de  $Leg_1$  y su imagen  $S = \sigma(M_1)$  es una subvariedad de  $TQ$ , en la cual  $\tilde{A}(\xi)$  verifica la condición SODE. En general,  $\tilde{A}(\xi)$  no es tangente a  $S$ , pero el campo de vectores  $T\sigma(\mathcal{A}_1(Z))$  si es tangente a  $S$  y es una solución de la ecuación

$$(i_X \omega_L = dE_L)_{/S} ,$$

y verifica la condición SODE. Por otro lado, como  $\sigma : M_1 \rightarrow S$  es un difeomorfismo, la estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  induce una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$  en  $S$  de modo que para cada solución  $\xi_S$  de la ecuación

$$(i_X \omega_L = dE_L)_{/S} , \tag{5.5.4}$$

se verifica que

$$\mathcal{A}_S(\xi_S) = T\sigma(\mathcal{A}_1(Z)) .$$

Resumiendo, hemos obtenido el siguiente resultado:

**Proposición 5.5.1** *Sea  $\xi$  una solución de la ecuación del movimiento*

$$i_\xi \omega_L = dE_L ,$$

*y  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  una estructura casi-producto adaptada a  $\omega_L$  que es Leg-proyectable a una estructura*

*casi-producto en  $M_1$  y sea  $S$  la subvariedad definida en (5.5.3). Entonces:*

1. *Existe una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$  adaptada a la restricción de  $\omega_L$  a  $S$ .*
2. *Si  $\xi_S$  es cualquier solución de (5.5.4) entonces  $\mathcal{A}_S(\xi_S)$  es una solución que verifica la condición SODE.*

En el caso general, podemos aplicar el algoritmo de Gotay-Nester al sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, E_L)$ . Si el algoritmo se estabiliza, denotamos por  $P_f$ , la subvariedad final de ligaduras. Consideremos en  $P_f$  una estructura casi-producto adaptada a  $\ker \omega_L \cap TP_f$  que sea proyectable en  $M_f$ . Entonces, usando un procedimiento similar al usado en la Proposición 5.5.1, obtenemos una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_S, \mathcal{B}_S)$  en  $S$  adaptada a  $\ker \omega_L \cap TS$  y una única solución de la ecuación del movimiento  $i_X \omega_L = dE_L$  tangente a  $S$  que también verifica la condición de ecuación diferencial de segundo orden. Además, esta solución pertenece a  $\text{Im} \mathcal{A}_S$ . Podemos entonces considerar la ecuación:

$$i_X \omega_{P_f} = d(E_L)|_{P_f},$$

donde  $\omega_{M_f} = j_f^* \omega_L$ , siendo  $j_f : P_f \rightarrow TQ$  la inclusión canónica. Sea  $(\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f)$  una estructura casi-producto adaptada a  $\ker \omega_{P_f}$  que es proyectable en  $M_f$  (la variedad final de ligaduras en el lado hamiltoniano). Entonces, por la Proposición 5.5.1 obtenemos una estructura casi-producto adaptada a  $\omega_S$  donde  $\omega_S = j_S^* \omega_L$ , siendo  $j_S : S \rightarrow P_f$  la inclusión canónica. Además, si  $\xi$  es una solución de la ecuación

$$i_X \omega_S = j_S^* dE_L,$$

entonces  $\mathcal{A}_S(\xi_S)$  es también una solución y verifica la condición SODE.

## 5.6 Lagrangianos afines en las velocidades

En esta sección, consideramos un caso particular de lagrangianos degenerados: los lagrangianos afines en las velocidades.

Se estudian las estructuras casi-producto adaptadas a  $\omega_L$  que, de hecho, son conexiones de Ehresmann en  $TQ$ . Como en la Sección 5.2.1, a partir de las ligaduras de segunda clase, construimos una estructura casi-producto en  $T^*Q$  que determina una dinámica "admisibles" en

el lado hamiltoniano. Se estudia también el problema de la ecuación diferencial de segundo orden.

Un lagrangiano afín en las velocidades  $L$  en  $TQ$

$$L(q^A, \dot{q}^A) = \mu_A(q)\dot{q}^A + f(q^A),$$

puede ser globalmente definido como sigue:

$$L = \hat{\mu} + f^V,$$

donde  $\mu = \mu_A(q) dq^A$  es una 1-forma en  $Q$  y  $f^V = f \circ \tau_Q$ .

La energía y las formas de Poincaré-Cartan son, respectivamente:

$$E_L = -f^V, \quad \alpha_L = -\mu^V, \quad \omega_L = d\mu^V.$$

Tenemos que  $V(TQ) \subset \ker \omega_L$  y

$$\dim \ker \omega_L \leq 2 \dim(V(\ker \omega_L)).$$

Supongamos que la 2-forma  $d\mu$  es simpléctica. En este caso, se tiene que  $\ker \omega_L = V(TQ)$  y, por lo tanto,  $(TQ, d\mu^V, -f^V)$  es un sistema presimpléctico con dinámica global. Considérese una estructura casi-producto adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_L$ . Es decir, una distribución complementaria a la distribución vertical, o en otras palabras, una conexión en el fibrado tangente  $TQ$  (véase [90]). Para una conexión  $\Gamma$  en  $TQ$ , denotamos por  $h$  el proyector horizontal y por  $v$  el proyector vertical.

Como  $d\mu$  es simpléctica, existe un único campo de vectores  $X_f$  tal que

$$i_{X_f}(-d\mu) = df;$$

es decir,  $X_f$  es el campo de vectores hamiltoniano con energía  $f$ . La elevación completa  $X_f^c$  de  $X_f$  verifica que

$$i_{X_f^c} \omega_L = dE_L. \quad (5.6.5)$$

Entonces, dada una conexión  $\Gamma$ , fijamos una solución de (5.6.5) eligiendo  $h(X_f^C) = X_f^C|_{E_L, h} = X_f^H$ , que es, precisamente, la elevación horizontal de  $X_f$  con respecto a  $\Gamma$ .

La estructura casi-producto definida por los proyectores  $(h, v)$  de la conexión definirá un corchete de Poisson en  $TQ$  si y solamente si la distribución horizontal  $\text{Im}h$  es integrable, esto es, si la conexión es llana.

La transformación de Legendre está definida por

$$\begin{aligned} \text{Leg} : \quad TQ &\longrightarrow T^*Q \\ (q^A, \dot{q}^A) &\longmapsto (q^A, \mu_A), \end{aligned}$$

y, así,  $M_1 = \text{Im}\mu$ . De la Proposición 5.4.1, deducimos que la estructura casi-producto definida por  $(h, v)$  es proyectable a  $\text{Leg}(TQ) = M_1$  puesto que  $\ker\omega_L = \text{Im}v = V(TQ)$ . Se obtiene que  $\omega_1$  es simpléctica. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \quad Q &\longrightarrow \text{Leg}(TQ) = M_1 \\ (q^A) &\longmapsto (q^A, \mu_A) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo y  $\text{Leg} = \tau_Q \circ \phi$ . Como  $(\phi^{-1})^*d\mu = \omega_1$  deducimos que  $\phi$  es un simplectomorfismo. Por la Proposición 5.4.3, para una conexión llana en  $TQ$ , la proyección  $\tau_Q : TQ \longrightarrow Q$  es una aplicación de Poisson, donde hemos considerado el corchete de Poisson  $\{ , \}_h$  en  $TQ$  y el corchete de Poisson  $\{ , \}_{d\mu}$  definido por la forma simpléctica  $d\mu$  en  $Q$ .

Todas las ligaduras primarias  $\Phi_A = p_A - \mu_A$ ,  $1 \leq A \leq n$ , son de segunda clase puesto que

$$\{\Phi_A, \Phi_B\} = \frac{\partial \mu_B}{\partial q^A} - \frac{\partial \mu_A}{\partial q^B}$$

y la matriz  $(C_{AB}) = (\{\Phi_A, \Phi_B\})$  es regular puesto que  $d\mu$  es simpléctica. Como en la Sección 5.2.1. consideramos la estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $T^*Q$  definida por el proyector

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= C^{AB} X_{\Phi_A} \otimes d\Phi_B, \\ &= C^{AB} \left( \frac{\partial}{\partial q^A} - \frac{\partial \mu_A}{\partial q^C} \frac{\partial}{\partial p^C} \right) \otimes \left( dp_B - \frac{\partial \mu_B}{\partial q^D} dq^D \right). \end{aligned}$$

Entonces,  $\text{Im } \mathcal{P} = \ker \mathcal{Q}$  está generado por los campos de vectores

$$X_A = \frac{\partial}{\partial q^A} + \frac{\partial \mu_B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial p^B}, \quad 1 \leq A \leq n,$$

y, además, estos campos de vectores son tangentes a  $M_1$ .

Por la Proposición 5.5.1 deducimos que dada una conexión  $\Gamma$  en  $TQ$  construimos una variedad diferenciable  $S$  de dimensión  $n$  en  $TQ$  donde existe una solución de la ecuación

$$(i_X \omega_L = dE_L)|_S,$$

que verifica la condición SODE. Como  $(M_1, \omega_1)$  es simpléctica entonces  $(S, \omega_S)$  es también simpléctica y fácilmente se deduce que  $S = \text{Im}(X^c)$  y la única solución es precisamente  $\xi_S = X^c|_S$  que, por supuesto, verifica la condición SODE. El campo de vectores  $X_H$  satisface la condición SODE en  $S$  pero, en general, no es tangente a  $S$ .

**Parte III**

**SISTEMAS LAGRANGIANOS  
NO-HOLONÓMICOS**

## Capítulo 6

# Sistemas lagrangianos no-holonómicos y estructuras casi-producto

La teoría clásica de sistemas mecánicos con ligaduras apareció ya en el siglo pasado, pero, actualmente, mantiene una atención continuada dada su importancia para resolver problemas prácticos como los que aparecen en la teoría del control.

Podemos encontrar dos acepciones diferentes del significado de un sistema mecánico con ligaduras. Así, tendremos ligaduras “internas” impuestas por la singularidad del lagrangiano, o ligaduras “externas” impuestas por las fuerzas de ligadura actuando en un sistema regular. El primer tipo de ligaduras ha sido estudiado en los capítulos anteriores.

Recientemente, han aparecido varios artículos desarrollando el marco geométrico para el estudio de estos sistemas: Weber [148, 149], Marle [95], Bates y Śniatycki [7], Koiller [64], Dazord [36] y otros. Otros artículos relacionados con una formulación en términos de la geometría casi tangente son los siguientes: Cariñena y Rañada [25], Rañada [118], Cariñena y Rañada [26], Sarlet, Cantrijn y Saunders [130] y Sarlet [127] (también nos referiremos a Massa y Pagani [103] y Giachetta [47] para una formulación en términos de fibrados de jets.)

Las ligaduras externas consideradas en este capítulo se llamarán ligaduras no-holonómicas.

Esto significa que existe una familia de  $m$  funciones afines en las velocidades

$$\phi_i(q, \dot{q}) = (\mu_i)_A(q) \dot{q}^A + h_i(q), \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq A \leq n, m < n),$$

que restringen el movimiento permitiéndole únicamente tomar algunos valores determinados de las posiciones y velocidades. En otras palabras, las soluciones (entendidas como campos de vectores) de las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas tienen que ser tangentes a la subvariedad  $\bar{P}_1$  definida por anulación de las ligaduras. Una ligadura holonómica  $g(q)$  es una función en la variedad de configuración que puede ser interpretada como un par de ligaduras no-holonómicas definidas por la función  $g(q)$  y su diferencial, es decir,  $\phi_1 = \frac{\partial g}{\partial q} \dot{q}$  y  $\phi_2 = g$ . La distinción entre ligaduras holonómicas (integrables o geométricas) y no-holonómicas (no-integrables o cinemáticas) es debida a H. R. Hertz [60] (véase también [108]).

La forma clásica de enfrentarse con los problemas de ligaduras no-holonómicas es usando multiplicadores de Lagrange. En [25, 118] esta técnica fue utilizada siguiendo un punto de vista geométrico.

En este capítulo, éste será también nuestro objetivo. De este modo, construimos una estructura casi-producto en  $TQ$ , de modo que la proyección del campo de vectores de Euler-Lagrange para el sistema libre nos dará las ecuaciones del movimiento para el problema con ligaduras.

En nuestro análisis obtenemos dos tipos diferentes de comportamientos. De las condiciones de tangencia, se llega a un sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas (los multiplicadores de Lagrange) cuyas soluciones dan los valores que pueden tomar los multiplicadores de Lagrange. Un estudio de estas ecuaciones nos da dos posibilidades. El sistema tiene una única solución (cuando la matriz  $C$  de los coeficientes del sistema de ecuaciones que nos permite obtener los multiplicadores de Lagrange tiene rango máximo  $k = m$ ). En este caso, obtenemos una solución bien definida en  $TQ$  (al menos en  $\bar{P}_1$ ); o la matriz  $C$  tiene rango  $k < m$ . En este último caso, asumiendo la compatibilidad del sistema de ecuaciones, llegamos a la determinación de la dinámica salvo elección de  $m - k$  multiplicadores de Lagrange. Si el sistema de ecuaciones es incompatible, elegimos los puntos de  $\bar{P}_1$  donde el sistema tiene solución, y así obtenemos nuevas ligaduras que definen la subvariedad  $\bar{P}_2$  de  $\bar{P}_1$ . Si  $\bar{P}_2$  tiene dimensión cero o  $\bar{P}_2 = \emptyset$ , entonces no hay dinámica. En otro caso, incorporaremos las nuevas ligaduras al análisis anterior y obtendremos, a partir de las condiciones de tangencia adicionales, una nueva subvariedad

de ligaduras  $\bar{P}_3$ , y así sucesivamente. Este algoritmo produce una sucesión de subvariedades  $\dots \bar{P}_3 \subset \bar{P}_2 \subset \bar{P}_1 \subset TQ$ . Si el algoritmo se estabiliza en alguna subvariedad final de ligaduras, podremos determinar una solución completamente consistente de la dinámica, o, en el peor de los casos, la dinámica está completamente indeterminada. Es evidente la similitud de este algoritmo con el algoritmo de Dirac-Bergmann-Gotay-Nester ([51, 52]).

El capítulo se estructura del siguiente modo. En la Sección 6.1 recordaremos algunos aspectos de la formulación geométrica de los sistemas lagrangianos sometidos a ligaduras no-holonómicas y, además, construiremos una estructura casi-producto en el espacio de fases que nos permitirá obtener la solución de la mecánica proyectando el campo de vectores de Euler-Lagrange correspondiente al problema libre o sin ligaduras. Desarrollamos un algoritmo de ligaduras en la Sección 6.2 para el caso no regular. En el caso en que el algoritmo se estabilice en alguna subvariedad final de ligaduras, construiremos una estructura casi-producto adecuada en ella. Se considera el caso holonómico en la Sección 6.3 y, en la Sección 6.4, encontramos una formulación global para los sistemas no-holonómicos. En la sección 6.5 analizamos un caso particular cuando la distribución está definida por un conexión y en 6.6 estudiamos, un ejemplo clásico, el de las ecuaciones de las geodésicas sujetas a ligaduras.

En la Sección 6.7 se estudian las simetrías y constantes del movimiento de un sistema lagrangiano no-holonómico. Se analiza la contrapartida hamiltoniana en la Sección 6.8. Finalmente, en la Sección 6.9, extendemos estos resultados al caso dependiente del tiempo.

## 6.1 Sistema lagrangianos no-holonómicos

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $TQ$  su fibrado tangente, y  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  la proyección canónica. Denotaremos por  $\{q^A; 1 \leq A \leq n\}$  las coordenadas locales en  $Q$  y por  $\{q^A, \dot{q}^A; 1 \leq A \leq n\}$  las coordenadas inducidas en  $TQ$ .

Sea  $J$  la estructura casi tangente canónica y  $C$  el campo de vectores de Liouville en  $TQ$ .

Sea  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular, es decir, la matriz hessiana

$$(W_{AB}) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)$$

es regular. Recordemos, que como  $L$  es regular,  $\omega_L$  es simpléctica y, en este caso, existe una

única solución de la ecuación del movimiento  $i_X \omega_L = dE_L$  que, además, es una SODE. Por otro lado, como  $\omega_L$  es simpléctica se define un corchete de Poisson en  $C^\infty(TQ)$  definido por:

$$\{f, g\}_L = \omega_L(X_f, X_g), \quad \forall f, g \in C^\infty(TQ),$$

donde  $X_f$  denota el campo de vectores hamiltoniano con energía hamiltoniana  $f$  (es decir,  $i_{X_f} \omega_L = df$ ). Así,  $\xi_L = X_{E_L}$  y  $\{f, E_L\}_L = \xi_L(f)$ .

Supongamos que  $L$  está sometido a un sistema de  $m$  ligaduras no-holonómicas  $\{\phi_i; 1 \leq i \leq m\}$ , con  $m < n$ , que son afines en las velocidades; o lo que es lo mismo,  $\phi_i : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que puede ser localmente expresada como sigue:

$$\phi_i = (\mu_i)_A(q) \dot{q}^A + h_i(q), \quad (6.1.1)$$

donde  $(\mu_i)_A$  y  $h_i$  son funciones en  $Q$ . Aquí, solamente un tipo de movimientos están permitidos: aquellos que satisfacen las relaciones (6.1.1).

Entonces, existen  $m$  1-formas  $\{\mu_i\}$  y  $m$  funciones  $\{h_i\}$  definidas en  $Q$  tales que

$$\phi_i = \hat{\mu}_i + h_i^V, \quad (1 \leq i \leq m),$$

con  $\mu_i = (\mu_i)_A dq^A$ .

Debemos, además, restringir la dinámica a la subvariedad  $\bar{P}_1$  de  $TQ$  definida por la anulación de las funciones  $\phi_i$ . El campo de Euler-Lagrange  $\xi_L$  es el única solución del sistema lagrangiano libre, pero, en general,  $\xi_L$  no es tangente a la subvariedad  $\bar{P}_1$ . Sin embargo, la dinámica del sistema con ligaduras debe ser representada por un campo de vectores que sea tangente a  $\bar{P}_1$ . Por otro lado, debemos modificar las ecuaciones del movimiento para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \\ d\phi_i(X) = 0, \end{cases} \quad (6.1.2)$$

donde  $\mu_i^V = \tau_Q^* \mu_i$ . Las funciones  $\lambda^i$  son los multiplicadores de Lagrange.

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = -\lambda^i (\mu_i)_A, \\ \dot{q}^A = \frac{dq^A}{dt}, \quad (1 \leq A \leq n). \end{array} \right.$$

Para una  $m$ -upla  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ , consideramos el campo de vectores  $Y_\lambda$  dado por

$$Y_\lambda = \xi_L + \lambda^i Z_i,$$

donde  $Z_i$  son los campos verticales (véase [25]) definidos por:

$$i_{Z_i} \omega_L = \mu_i^V.$$

Nótese que  $Y_\lambda$  verifica la primera ecuación del sistema (6.1.2). También, impondremos que  $Y_\lambda$  satisfaga la segunda condición y, así,  $Y_\lambda$  tiene que ser tangente a  $\bar{P}_1$ . Por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 = d\phi_j(Y_\lambda) &= d\phi_j(\xi_L + \lambda^i Z_i) \\ &= \{\phi_j, E_L\}_L + \lambda^i Z_i(\phi_j). \end{aligned}$$

Denotamos por  $C$  la matriz de orden  $m$  cuyos elementos son  $C_{ij} = Z_i(\phi_j)$ . Si  $C$  es regular, entonces, los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$  están unívocamente determinados en  $TQ$ . Por ejemplo, si  $L$  es un lagrangiano de tipo mecánico (es decir,  $L = T - V$ , donde  $T = \frac{1}{2} g_{AB} dq^A dq^B$  es la energía cinética obtenida a partir de una métrica riemanniana  $g$  en  $Q$  y  $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía potencial) entonces la matriz  $C$  es regular (véanse [7, 25]).

Primero, supondremos que la matriz  $C$  es regular en  $TQ$ . Nuestra intención es construir una estructura casi-producto en  $TQ$  tal que la proyección del campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_L$  nos permita obtener la dinámica del sistema. Para hacer esto, consideremos el campo de tensores de tipo (1,1)  $Q$ :

$$Q = C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i,$$

donde  $C^{ij}$  son las componentes de la matriz inversa de  $C$ , esto es,  $C^{ij} C_{jk} = \delta_k^i$ . Un cálculo

directo muestra que  $Q^2 = Q$ . Si definimos  $\mathcal{P} = id - Q$ , entonces  $(\mathcal{P}, Q)$  es una estructura casi-producto en el espacio de fases  $TQ$ . Además, el campo de vectores  $\mathcal{P}(\xi_L)$  es la única solución de las ecuaciones (6.1.2). En efecto,

$$\mathcal{P}(\xi_L) = \xi_L - C^{ij}\xi_L(\phi_i)Z_j,$$

lo que implica que  $\mathcal{P}(\xi_L)$  verifica la ecuación (6.1.2) para  $\lambda^i = -C^{ji}\xi_L(\phi_j)$ . Además, para todo  $\phi_l$ , ( $1 \leq l \leq m$ ), se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L)(\phi_l) &= \xi_L(\phi_l) - C^{ij}\xi_L(\phi_i)Z_j(\phi_l) \\ &= \xi_L(\phi_l) - \delta_l^i\xi_L(\phi_i) = 0. \end{aligned}$$

**Observación 6.1.1** El estudio anteriormente realizado, en principio, podría generalizarse para el caso de un sistema lagrangiano sujeto a ligaduras no-lineales verificando las condiciones de Chetaev (véanse [110, 122, 148]). En este caso, las ligaduras son relaciones de la forma:

$$f_i(q, \dot{q}) = 0,$$

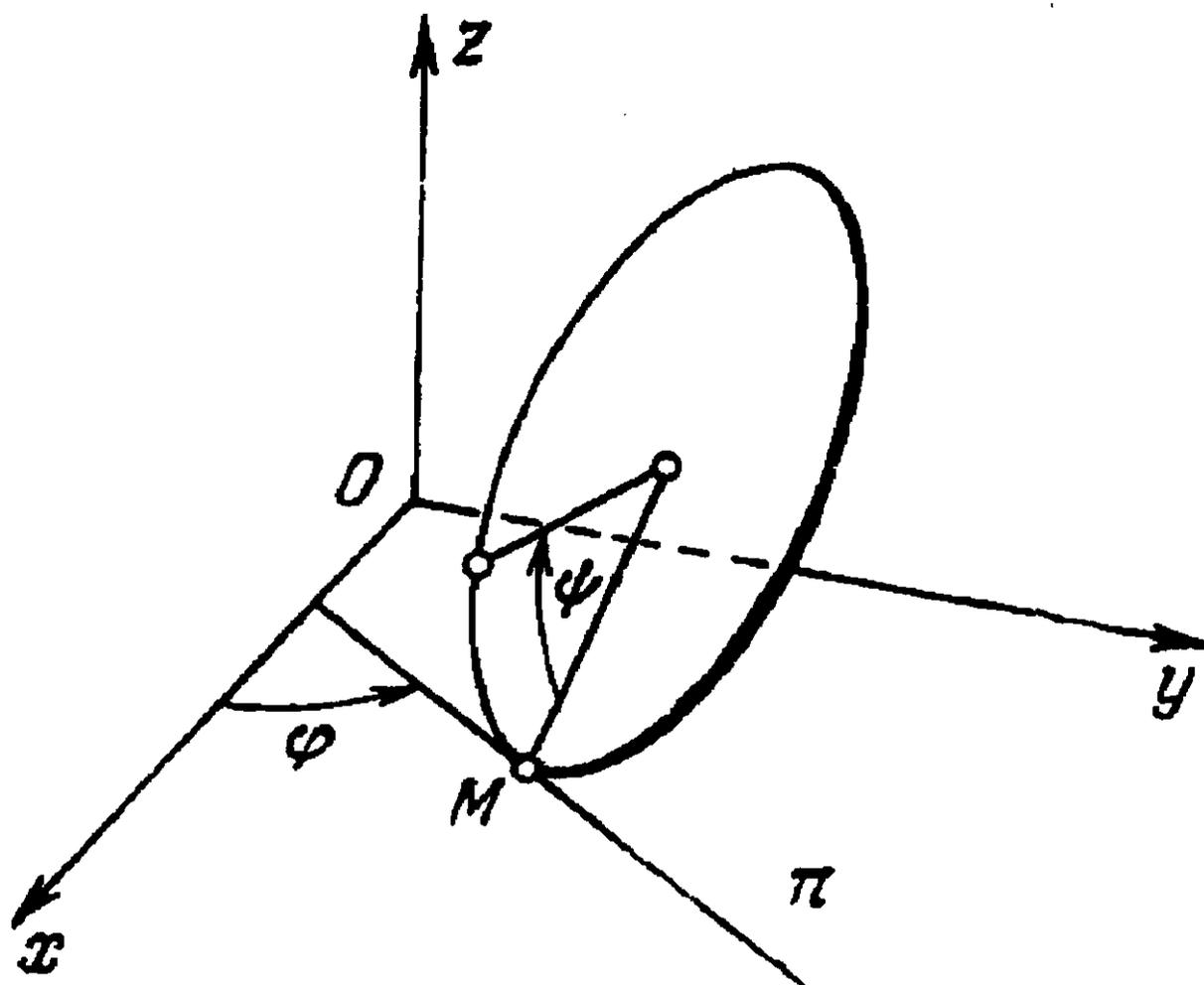
y las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} i_X\omega_L = dE_L + \lambda^i J^*(df_i), \\ df_i(X) = 0. \end{cases}$$

El problema que se encuentra es que las 1-formas  $J^*(df_i)$  no son en general linealmente independientes. ♠

**Ejemplo 6.1.1** (Véanse, por ejemplo, [108, 123, 25, 130]) Consideremos un disco de radio  $R$  rodando sin deslizamiento de modo que se mantiene vertical en el plano  $\pi$  (véase figura de la página siguiente). Las coordenadas usuales del espacio de configuración  $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$  son:  $x, y$  las coordenadas cartesianas del centro de masas,  $\varphi$  el ángulo que forma la recta tangente al disco en el punto de contacto y el eje de las  $x$  y  $\psi$  el ángulo formado por algún diámetro y la vertical.

La dinámica de este sistema está descrita por:



1. el lagrangiano regular:

$$L = \frac{1}{2} \left( m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + J\dot{\varphi}^2 + I\dot{\psi}^2 \right),$$

donde  $m$  es la masa, e  $I$  y  $J$  son momentos de inercia;

2. dos ligaduras no-holonómicas:

$$\phi_1 = \dot{x} - (R \cos \varphi)\dot{\psi} = 0,$$

$$\phi_2 = \dot{y} - (R \sin \varphi)\dot{\psi} = 0.$$

La 2-forma de Poincaré-Cartan del lagrangiano  $L$  es:

$$\omega_L = m dx \wedge \dot{x} + m dy \wedge \dot{y} + J d\varphi \wedge \dot{\varphi} + I d\psi \wedge \dot{\psi},$$

y el campo de vectores de Euler-Lagrange es:

$$\xi_L = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

Se deduce que

$$Z_1 = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{R}{I} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}},$$

$$Z_2 = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \frac{R}{I} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}},$$

donde  $\mu_1 = dx - (R \cos \varphi)d\psi$  y  $\mu_2 = dy - (R \sin \varphi)d\psi$  son 1-formas de modo que  $\hat{\mu}_i = \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Construimos una estructura casi-producto considerando la matriz  $C$  definida por

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} Z_1(\phi_1) & Z_1(\phi_2) \\ Z_2(\phi_1) & Z_2(\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m} - \frac{R^2}{I}(\cos \varphi)^2 & -\frac{R^2}{I} \cos \varphi \sin \varphi \\ -\frac{R^2}{I} \cos \varphi \sin \varphi & -\frac{1}{m} - \frac{R^2}{I}(\sin \varphi)^2 \end{pmatrix}$$

y el proyector  $Q$  es:

$$Q = C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i.$$

(Obsérvese que  $C$  es regular en todo punto de  $T(\mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1)$ ). Finalmente, calculamos  $\mathcal{P}(\xi_L)$  con  $\mathcal{P} = id - \mathcal{Q}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\xi_L) &= \xi_L - \mathcal{Q}(\xi_L) \\ &= \xi_L + (mR\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \varphi)Z_1 - (mR\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi)Z_2 . \spadesuit\end{aligned}$$

**Ejemplo 6.1.2** El trineo de Čaplygin es un cuerpo que tiene tres puntos de contacto con un plano  $\pi$ ; dos de ellos se deslizan libremente, pero el tercero es una cuchilla sujeta a una fuerza que no le permite velocidades transversales. El espacio de configuración es  $Q = \mathbb{R} \times S^1$ . Elegimos coordenadas  $(x, y)$  para el punto de contacto de la cuchilla y  $\varphi$  es el ángulo entre el eje de abscisas y la tangente a la cuchilla (véase figura de la página siguiente).

El sistema viene descrito por:

1. El lagrangiano

$$L(x, y, \varphi) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - gy$$

donde  $J$  es un momento de inercia.

2. y la ligadura no-holonómica

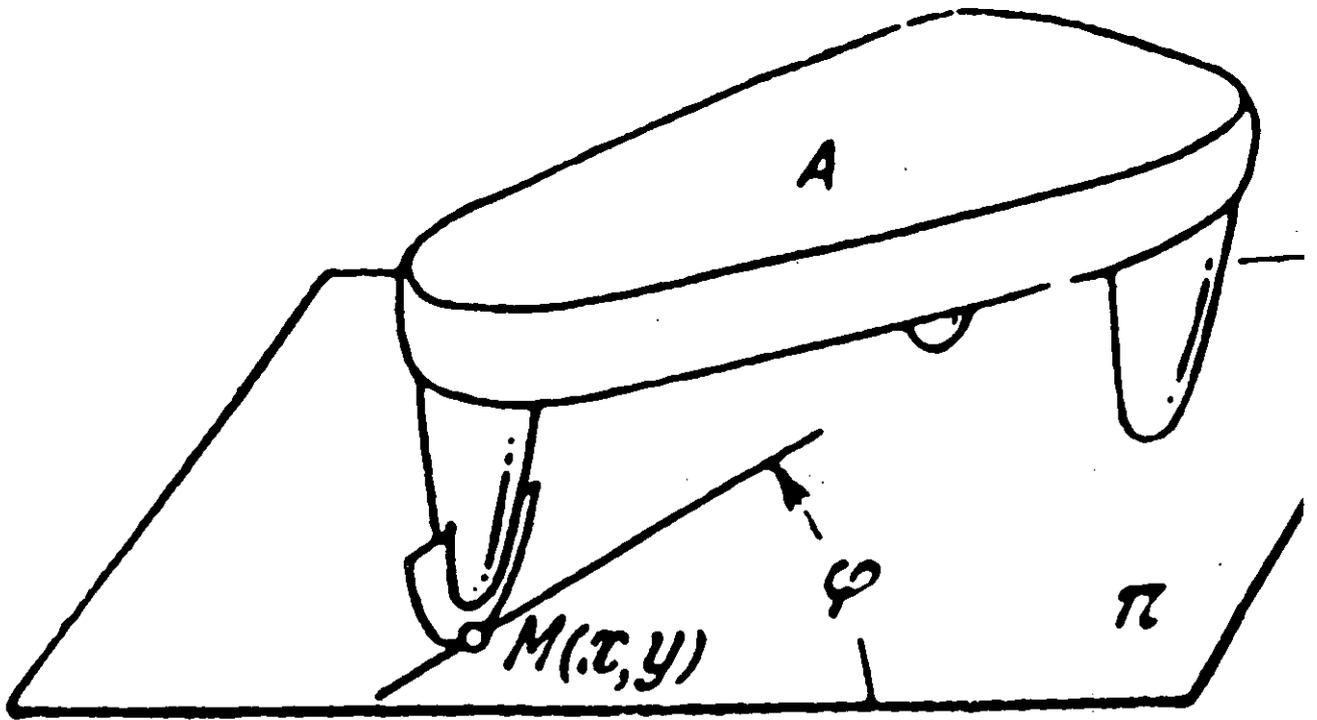
$$\phi = \dot{y} - \dot{x} \operatorname{tg} \varphi .$$

Del lagrangiano  $L$  obtenemos

$$\begin{aligned}E_L &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - gy , \\ \omega_L &= dx \wedge d\dot{x} + dy \wedge d\dot{y} + Jd\varphi \wedge d\dot{\varphi} , \\ \xi_L &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - g \frac{\partial}{\partial \dot{y}} .\end{aligned}$$

Consideremos la 1-forma  $\mu = dy - \operatorname{tg} \varphi dx$ . El campo de vectores  $Z$  tal que  $i_Z \omega_L = \mu^V$  es

$$Z = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} .$$



Calculamos la matriz  $1 \times 1$   $C = (Z(\phi)) = -(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$ . El proyector  $\mathcal{Q}$  está definido por la expresión:

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \left( \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \otimes (d\dot{y} - (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\dot{x}d\varphi - \operatorname{tg} \varphi d\dot{x}),$$

y

$$\mathcal{Q}(\xi_L) = \frac{g + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\dot{x}\dot{\varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \left( \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right).$$

La solución de la dinámica sujeta a la ligadura  $\phi$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L) &= \xi_L - \mathcal{Q}(\xi_L) \\ &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad - \operatorname{tg} \varphi \frac{g + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\dot{x}\dot{\varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - g(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{\dot{x}\dot{\varphi} - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}. \spadesuit \end{aligned}$$

Si únicamente podemos asegurar que la matriz  $C = (Z_i(\phi_j))$  es regular en  $\bar{P}_1$  entonces construimos un campo de tensores  $(1,1)$  a lo largo de  $\bar{P}_1$ ; es decir,

$$\mathcal{P}(x) : T_x(TQ) \longrightarrow T_x(TQ), \quad \forall x \in \bar{P}_1,$$

definido como sigue:

$$\mathcal{P} = (id - C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i)_{/\bar{P}_1}.$$

En este caso, podemos determinar los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$  solamente para puntos  $x$  en  $\bar{P}_1$ . La proyección  $\mathcal{P}((\xi_L)_{/\bar{P}_1})$  nos define un campo de vectores tangente a  $\bar{P}_1$  que va a determinar unívocamente la dinámica del sistema lagrangiano sometido a las ligaduras  $\phi_i$ . Es evidente que si  $C$  es regular en  $\bar{P}_1$  también lo es en un entorno abierto de  $\bar{P}_1$ .

## 6.2 El caso singular

Ahora, estudiaremos el caso restante: la matriz  $C$  es singular. Supondremos que sobre  $\bar{P}_1$  la matriz  $C$  tiene rango constante  $k$ , con  $k < m$ . Examinemos las ecuaciones:

$$0 = \{\phi_j, E_L\}_L + \lambda^i Z_i(\phi_j), \quad (1 \leq j \leq m). \quad (6.2.3)$$

Es posible que las ecuaciones (6.2.3) nos lleven a un resultado absurdo (tipo  $0 = 1$ ); en este caso, diremos que las ecuaciones (6.1.2) son inconsistentes. Para evitar este problema, impondremos, como en el algoritmo de Dirac-Bergmann [38] desarrollado en el Capítulo 4 (véanse también [51, 52]), la condición de que estas ecuaciones no den lugar a una inconsistencia. En tal caso, el número de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$  determinados por las ecuaciones (6.1.2) es  $k$ . Además, pueden surgir nuevas ligaduras  $\psi_{i'}$ , ( $1 \leq i' \leq m'$ ), con  $m' \leq m - k$ . Así, obtenemos una nueva subvariedad de ligaduras  $\bar{P}_2$  determinado por la anulación de las ligaduras  $\phi_i$  y  $\psi_{i'}$ . Además, debemos incorporar estas nuevas ligaduras  $\psi_{i'}$  a las ecuaciones (6.1.2) y, así, obtenemos un nuevo conjunto de ecuaciones del movimiento:

$$\begin{cases} (i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^Y)_{/\bar{P}_2}, \\ (d\phi_i(X) = 0)_{/\bar{P}_2}, \\ (d\psi_{i'}(X) = 0)_{/\bar{P}_2}. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

La tangencia de  $X$  a  $\bar{P}_2$  determina las nuevas ecuaciones:

$$0 = \{\psi_{i'}, E_L\}_L + \lambda^i Z_i(\psi_{i'}).$$

Incorporamos estas ecuaciones a (6.2.3) y este sistema de ecuaciones tiene que ser tratado de la misma manera a como se hizo con el sistema (6.2.3) y, probablemente, se determinarán nuevos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^i$  y aparecerán nuevas ligaduras. Este procedimiento finaliza cuando hayamos acabado con todas las condiciones de consistencia. Si el problema inicial tiene solución, llegamos a alguna subvariedad final de ligaduras  $\bar{P}_f$ , determinada por la anulación de todas las ligaduras, donde van a existir soluciones consistentes. En este proceso, algunos multiplicadores de Lagrange pueden permanecer indeterminados, en tal caso diremos que existe

una ambigüedad en la descripción de la dinámica.

Para ilustrar el método anterior, vamos a considerar el caso de un sistema lagrangiano sometido a una única ligadura:  $\phi = \hat{\mu} + h^V$ , donde  $\mu$  es una 1-forma en  $Q$  y  $h \in C^\infty(Q)$ . Las ecuaciones modificadas del movimiento son:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda \mu^V, \\ d\phi(X) = 0. \end{cases}$$

Como  $X\phi = 0$  se obtiene que:

$$0 = \{\phi, E_L\}_L + \lambda Z(\phi). \quad (6.2.5)$$

Si  $Z(\phi) \neq 0$  deducimos que el valor del multiplicador de Lagrange es

$$\lambda = -\frac{\{\phi, E_L\}_L}{Z(\phi)},$$

y la dinámica está determinada por la SODE

$$Y_\lambda = \xi_L - \frac{\{\phi, E_L\}_L}{Z(\phi)} Z.$$

Si  $Z(\phi) = 0$  y  $\{\phi, E_L\}_L = 0$  en  $\bar{P}_1$  entonces obtenemos que la dinámica del sistema está determinada en  $\bar{P}_1$  por

$$Y_\lambda = \xi_L + \lambda Z,$$

para cualquier valor arbitrario de  $\lambda$ . Sin embargo, si  $Z(\phi) = 0$  y  $\{\phi, E_L\}_L \neq 0$  en  $\bar{P}_2$ , entonces la ecuación (6.2.5) se satisface únicamente en la subvariedad  $\bar{P}_2$  de  $\bar{P}_1$  definida por las ligaduras  $\psi = \{\phi, E_L\}_L$ . La preservación en el tiempo de la ligadura  $\psi$  requiere que  $X(\psi) = 0$ . Así, obtenemos la ecuación:

$$0 = \{\psi, E_L\}_L + \lambda Z(\psi).$$

Como antes, si  $Z(\psi) \neq 0$ , entonces los multiplicadores de Lagrange quedan fijados y la dinámica está determinada en  $\bar{P}_2$  por

$$Y_\lambda = \xi_L - \frac{\{\psi, E_L\}_L}{Z(\psi)} Z.$$

Por otro lado, si  $Z(\psi) = 0$  y  $\{\psi, E_L\}_L = 0$  en  $\bar{P}_2$  entonces la dinámica está completamente indeterminada. En otro caso, obtenemos una nueva ligadura. Así, procedemos iterativamente aplicando este procedimiento, llegando a alguna subvariedad final de ligaduras  $\bar{P}_f$  (si el problema tiene solución) donde existe al menos una solución del problema inicial.

**Ejemplo 6.2.1** Sea  $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  el lagrangiano regular dado por

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 - (\dot{q}^3)^2) .$$

Supongamos que está sometido a la siguiente ligadura lineal:

$$\phi(q, \dot{q}) = \dot{q}^2 + \dot{q}^3 .$$

Aquí,  $\{q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\}$  denotan las coordenadas fibradas en  $T\mathbb{R}^3$ . Se obtiene que

$$\begin{aligned} E_L &= (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 - (\dot{q}^3)^2 = L , \\ \omega_L &= dq^1 \wedge d\dot{q}^1 + dq^2 \wedge d\dot{q}^2 - dq^3 \wedge d\dot{q}^3 , \\ \xi_L &= \dot{q}^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \dot{q}^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \dot{q}^3 \frac{\partial}{\partial q^3} = C . \end{aligned}$$

La 1-forma en  $\mathbb{R}^3$   $\mu = dq^2 + dq^3$  verifica que  $\hat{\mu} = \phi$  y, el campo de vectores  $Z$  tal que

$$i_Z \omega_L = \mu^V ,$$

es:

$$Z = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^3} .$$

Como  $Z(\phi) = 0$  debemos considerar la nueva ligadura  $\psi = \xi_L(\phi)$ . Pero  $\psi$  se anula en todo punto por lo que concluimos que no es posible determinar el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Nótese que para cada  $\lambda$  obtenemos una solución  $Y_\lambda = \xi_L + \lambda Z$  de las ecuaciones del movimiento. En consecuencia, la dinámica está completamente indeterminada. ♠

**Ejemplo 6.2.2** Considérese el lagrangiano regular en  $T\mathbb{R}^3$  dado por

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 - (\dot{q}^3)^2 + (q^1)^2) ,$$

y sometido a la ligadura

$$\phi(q, \dot{q}) = \dot{q}^1 + \dot{q}^3 .$$

Entonces  $\phi = \hat{\mu}$ , con  $\mu = dq^1 + dq^3$ .

Un cálculo directo nos muestra que:

$$\begin{aligned} E_L &= (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 - (\dot{q}^3)^2 - (q^1)^2 , \\ \omega_L &= dq^1 \wedge d\dot{q}^1 + dq^2 \wedge d\dot{q}^2 - dq^3 \wedge d\dot{q}^3 , \\ \xi_L &= \dot{q}^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \dot{q}^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \dot{q}^3 \frac{\partial}{\partial q^3} + q^1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} . \end{aligned}$$

El campo de vectores  $Z$ , tal que  $i_Z \omega_L = \mu^V$  es

$$Z = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^3} .$$

Como  $Z(\phi) = 0$  obtenemos una nueva ligadura  $\psi = \xi_L(\phi) = \dot{q}^1$ . Así, se obtiene una subvariedad:

$$\bar{P}_2 = \{(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \mid \dot{q}^1 + \dot{q}^3 = 0, q^1 = 0\} .$$

Como  $Z(\psi) = 0$ , surgen nuevas ligaduras;  $\psi' = \xi_L(\psi) = \dot{q}^1$ , y obtenemos la subvariedad  $\bar{P}_3$  definida por

$$\bar{P}_3 = \{(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \mid q^1 = 0, \dot{q}^1 = 0, \dot{q}^3 = 0\} .$$

Además  $Z(\psi') = -1$ , y el algoritmo se estabiliza en la subvariedad  $\bar{P}_3$ . Ahora, determinamos el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ :

$$\lambda = -\frac{\xi_L(\psi')}{Z(\psi')} = q^1 .$$

Por tanto, tenemos que el campo de vectores  $\xi_L + q^1 Z$  determina la dinámica en la subvariedad  $\bar{P}_3$ . ♠

Como ya hemos visto, si la matriz  $C$  es regular en  $TQ$ , podemos construir una estructura casi producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $TQ$  de modo que nos permita obtener, por proyección, la dinámica del sistema lagrangiano sometido a las ligaduras. Nuestra intención es generalizar esta técnica al caso singular usando el algoritmo anterior.

Supondremos que la matriz  $C = (Z_i(\phi_j))$ ,  $(1 \leq i, j \leq m)$ , es singular y  $\text{rango } C = k < m$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la submatriz  $C_1 = (C_{ij}) = (Z_i(\phi_j))$ ,  $(1 \leq i, j \leq k)$ , de  $C$  es regular.

El problema tiene solución en  $\bar{P}_1$  si

$$\left( \text{rango } (Z_i(\phi_j)) = \text{rango } (Z_i(\phi_j); \{E_L, \phi_j\}_L) \right) /_{\bar{P}_1} \quad (6.2.6)$$

En este caso, podemos construir la estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  definida por

$$\mathcal{Q} = C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i, \quad (1 \leq i, j \leq k),$$

y  $\mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q}$ , donde  $C^{ij}$  es la componente  $ij$  de la matriz inversa de  $C_1$ . Probemos que la proyección  $\mathcal{P}(\xi_L)$  da lugar a una solución de la dinámica con ligaduras. En efecto, es únicamente necesario probar que  $\mathcal{P}(\xi_L)(\phi_i) = 0$ , para cada  $1 \leq i \leq m$ . Primero, para cada  $1 \leq l \leq k$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L)(\phi_l) &= \xi_L(\phi_l) - C^{ij} \xi_L(\phi_i) Z_j(\phi_l) \\ &= \xi_L(\phi_l) - C^{ij} C_{jl} \xi_L(\phi_i) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos  $\phi_\alpha$ ,  $(k+1 \leq \alpha \leq m)$ , obtenemos

$$\mathcal{P}(\xi_L)(\phi_\alpha) = \xi_L(\phi_\alpha) - C^{ij} \xi_L(\phi_i) Z_j(\phi_\alpha).$$

De (6.2.6) deducimos que  $Z_j(\phi_\alpha) = f_\alpha^l Z_j(\phi_l)$ ,  $(1 \leq l \leq k)$ , para algunas funciones  $f_\alpha^l \in C^\infty(TQ)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L)(\phi_\alpha) &= \xi_L(\phi_\alpha) - C^{ij} \xi_L(\phi_i) f_\alpha^l Z_j(\phi_l) \\ &= \xi_L(\phi_\alpha) - C^{ij} \xi_L(\phi_i) f_\alpha^l C_{jl} \end{aligned}$$

$$= \xi_L(\phi_\alpha) - f_\alpha^l \xi_L(\phi_l) = 0,$$

pues hemos supuesto que  $\text{rango } (Z_i(\phi_j); \{E_L, \phi_j\}_L)_{/P_1} = k$ .

Por otro lado,

$$\left( \text{rango } (Z_i(\phi_j)) \leq \text{rango } (Z_i(\phi_j); \{E_L, \phi_j\}_L) \right)_{/P_1}, \quad (6.2.7)$$

y, entonces, obtenemos un conjunto de ligaduras adicionales. Aplicando el algoritmo, llegamos a una variedad final de ligaduras  $\bar{P}_f$  (si el problema tiene solución) definida por la anulación de las ligaduras  $\chi_{i'}$ , ( $1 \leq i' \leq m'$ ), donde  $m' \geq m$ . En  $\bar{P}_f$  se obtiene:

$$\left( \text{rango } (Z_{i'}(\chi_{j'})) = \text{rango } (Z_{i'}(\chi_{j'}); \{E_L, \chi_{j'}\}_L) \right)_{/P_f}. \quad (6.2.8)$$

Supondremos que el rango de la submatriz  $C' = (Z_{i'}(\chi_{j'}))$ , ( $1 \leq i' \leq m$ ), ( $1 \leq j' \leq m'$ ), es constante, es decir,  $\text{rango } C' = k' < m$  ( $k \leq k'$ ). Para simplificar, supondremos que la matriz  $C'_1 = (C'_{i'j'}) = (Z_{i'}(\chi_{j'}))$ , ( $1 \leq i', j' \leq k'$ ) es regular. Como antes, construimos una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  definiendo

$$\mathcal{Q} = (C')^{i'j'} Z_{j'} \otimes d\chi_{i'}, \quad (1 \leq i', j' \leq k' < m),$$

y  $\mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q}$ , donde  $(C')^{i'j'}$  es el elemento  $i'j'$  de la matriz inversa de  $C'$ . Para cada solución  $X = \xi_L + \lambda^l Z_l + \lambda^\alpha Z_\alpha$ , ( $1 \leq l \leq k'$ ,  $k' + 1 \leq \alpha \leq m$ ) de la ecuación

$$i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \quad (1 \leq i \leq m),$$

obtenemos que  $\mathcal{P}(X)$  es una solución del sistema de ecuaciones. En efecto, se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &= \xi_L + \lambda^l Z_l + \lambda^\alpha Z_\alpha - (C')^{i'j'} \xi_L(\chi_{i'}) Z_{j'} \\ &\quad - \lambda^l (C')^{i'j'} Z_l(\chi_{i'}) Z_{j'} - \lambda^\beta (C')^{i'j'} Z_\beta(\chi_{i'}) Z_{j'} \\ &= \xi_L - (C')^{i'j'} \left( \xi_L(\chi_{i'}) + \lambda^\beta Z_\beta(\chi_{i'}) \right) Z_{j'} + \lambda^\alpha Z_\alpha, \end{aligned}$$

con  $k' + 1 \leq \beta \leq m$ . Concluimos entonces que

$$\begin{cases} i_{\mathcal{P}(X)}\omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \\ ((\mathcal{P}(X))(X_i^r) = 0)_{/P_i}. \end{cases}$$

### 6.3 Ligaduras holonómicas

Supongamos que un sistema lagrangiano está sujeto a ligaduras holonómicas  $h_i \in C^\infty(Q)$ , ( $1 \leq i \leq m$ ), con  $m < n$ . Esto es, las velocidades no aparecen las ligaduras. En términos geométricos las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} i_X\omega_L = dE_L + \lambda^i dh_i^V, \\ dh_i^c(X) = 0, \\ dh_i^V(X) = 0. \end{cases} \quad (6.3.9)$$

Como  $dh_i^V(X) = h_i^c$  puesto que  $X$  es una SODE, podemos primero estudiar el sistema lagrangiano sujeto a las ligaduras no-holonómicas  $h_i^c$  y resolver las ecuaciones del movimiento

$$\begin{cases} i_X\omega_L = dE_L + \lambda^i dh_i^V, \\ dh_i^c(X) = 0, \end{cases} \quad (6.3.10)$$

y más tarde, imponer las ligaduras  $h_i^V = 0$ . De esta manera, un sistema no-holonómico es, de alguna forma, un caso especial de sistema no-holonómico.

Mostraremos como un sistema holonómico es, en cierto sentido, un caso especial de sistema libre.

Primero, nótese que  $M_1 = TQ_1$ , donde  $Q_1$  denota la subvariedad de  $Q$  definida por la anulación de las funciones  $h_i$ . Ahora supongamos que la matriz  $\mathcal{C}$  de elementos  $\mathcal{C}_{ij} = Z_i(h_j^c)$  es regular en  $M_1$  (y entonces, en un entorno abierto suyo). La dinámica estará así representada por un campo de vectores en  $M_1$

$$\mathcal{P}(\xi_L) = \xi_L - C^{ji} \xi_L(h_j^c) Z_i.$$

Sea

$$\Lambda^i = -C^{ji} \xi_L(h_j^c),$$

y  $L$  la función lagrangiana

$$L = L - \sum_i \Lambda^i h_i^v.$$

Un cálculo directo demuestra que

$$\begin{aligned} E_L &= E_L - h_i^v E_{\Lambda^i} \\ \omega_L &= \omega_L - \alpha_{\Lambda^i} \wedge dh_i^v - h_i^v \omega_{\Lambda^i}. \end{aligned}$$

Llegamos a que

$$i_{\mathcal{P}(\xi_L)} \omega_L = dE_L - h_i^v (i_{\mathcal{P}(\xi_L)} \omega_{\Lambda^i} - dE_{\Lambda^i}) + h_i^c \alpha_{\Lambda^i}.$$

Como  $M_1 = TQ_1$  está definida por la anulación de  $h_i^v$  y  $h_i^c$  se deduce que

$$i_{\mathcal{P}(\xi_L)} \omega_L = dE_L$$

en  $TQ_1$ . Este resultado nos dice que este sistema puede ser considerado como un sistema lagrangiano libre de ligaduras con lagrangiano  $L$  y siendo  $\mathcal{P}(\xi_L)$  una solución de la dinámica.

**Ejemplo 6.3.1** Considérese el sistema definido por dos partículas  $P_1$  y  $P_2$  de idéntica masa  $m = 1$  que están unidas por un segmento de longitud invariable  $l$  y masa despreciable. Además, el sistema está costreñido a moverse en un plano vertical de modo que la velocidad del punto medio está dirigida en la dirección del segmento (véase [44]).

Sean  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  las coordenadas de  $P_1$  y de  $P_2$ , respectivamente. Entonces el movimiento de este sistema está descrito por

1. el lagrangiano regular:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - g(y_1 + y_2);$$

2. la ligadura holónoma:

$$h_1 = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] ;$$

3. y la ligadura no-holónómica:

$$\phi_2 = (x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) .$$

La ligadura holónoma  $h_1$  da lugar a la ligadura no holónómica:

$$\phi_2 = \widehat{dh_1} = (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) .$$

Del lagrangiano  $L$  obtenemos

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + g(y_1 + y_2) , \\ \omega_L &= dx_1 \wedge d\dot{x}_1 + dx_2 \wedge d\dot{x}_2 + dy_1 \wedge d\dot{y}_1 + dy_2 \wedge d\dot{y}_2 , \\ \xi_L &= \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{y}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dot{y}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - g \frac{\partial}{\partial \dot{y}_1} - g \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} . \end{aligned}$$

Los campos de vectores  $Z_1$  y  $Z_2$  tales que  $i_{Z_i} \omega_L = \mu_i^V$  donde  $\mu_i^V = J^* d\phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (x_2 - x_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - (x_2 - x_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + (y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} - (y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial y_2} , \\ Z_2 &= (y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + (y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} - (x_2 - x_1) \frac{\partial}{\partial y_1} - (x_2 - x_1) \frac{\partial}{\partial y_2} . \end{aligned}$$

Ahora, si evaluamos la matriz  $C = (C_{ij})$  en  $\bar{P}_1 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) / h_1 = 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0\}$  obtenemos

$$C_{/P_1} = \begin{pmatrix} Z_1(\phi_1) & Z_1(\phi_2) \\ Z_2(\phi_1) & Z_2(\phi_2) \end{pmatrix}_{/P_1} = \begin{pmatrix} -2l^2 & 0 \\ 0 & -2l^2 \end{pmatrix} .$$

Después de simples cálculos, deducimos que el proyector  $\mathcal{P}$  está definido en  $\bar{P}_1$  por la matriz  $P$

(véase la página siguiente). La proyección  $\mathcal{P}(\xi_L)$  de  $\xi_L$  determina la dinámica del sistema en  $\bar{P}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L) = & \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{y}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dot{y}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ & - \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \\ & - \left( \frac{g}{2} - \frac{g}{l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{y}_1} - \left( \frac{g}{2} - \frac{g}{l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} . \spadesuit \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l^2}\dot{y}_1(y_2 - y_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{y}_2(y_2 - y_1) & \frac{1}{l^2}\dot{x}_1(y_2 - y_1) & \frac{1}{l^2}\dot{x}_2(y_2 - y_1) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) & 0 & \frac{1}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ \frac{1}{l^2}\dot{y}_1(y_2 - y_1) & \frac{1}{l^2}\dot{y}_2(y_2 - y_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{x}_1(y_2 - y_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{x}_2(y_2 - y_1) & \frac{1}{2l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) & \frac{1}{2} & \frac{1}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & 0 \\ \frac{1}{l^2}\dot{y}_1(x_2 - x_1) & \frac{1}{l^2}\dot{y}_2(x_2 - x_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{x}_1(x_2 - x_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{x}_2(x_2 - x_1) & 0 & \frac{1}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) \\ -\frac{1}{l^2}\dot{y}_1(x_2 - x_1) & -\frac{1}{l^2}\dot{y}_2(x_2 - x_1) & \frac{1}{l^2}\dot{x}_1(x_2 - x_1) & \frac{1}{l^2}\dot{x}_2(x_2 - x_1) & \frac{1}{l^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & 0 & -\frac{1}{2l^2}(2(x_2 - x_1)^2 - l^2) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 6.4 Sistemas lagrangianos con ligaduras no-holonómicas definidas globalmente

En esta sección obtenemos una globalización de los resultados obtenidos anteriormente.

Sea  $D$  una distribución de dimensión  $n - m$ . Definimos dos distribuciones  $D^T$  y  $D^V$  en  $TQ$  como sigue. Si  $D$  está localmente generado por la anulación de las  $m$  1-formas  $\mu_i, (1 \leq i \leq m)$  entonces  $D^T$  está definida por la anulación de las 1-formas  $\mu_i^V$  y  $\mu_i, (1 \leq i \leq m)$  y  $D^V$  está definida por la anulación de las 1-formas  $\mu_i^V, (1 \leq i \leq m)$ . Es evidente que  $D^T \subset D^V$  y  $\dim D^V = 2n - m$  y  $\dim D^T = 2(n - m)$ .

Si  $\{\bar{\mu}_i\}$  es otra base local de  $D$  tenemos que

$$\bar{\mu}_i = \Lambda_i^j \mu_j,$$

donde  $(\Lambda_i^j)$  es una matriz regular definida en la intersección de los dos entornos locales donde están definidas las 1-formas. Como

$$\begin{cases} \bar{\mu}_i^C = (\Lambda_i^j)^C \mu_j^V + \Lambda_i^j \mu_j^C, \\ \bar{\mu}_i^V = \Lambda_i^j \mu_j^V, \end{cases} \quad (6.4.11)$$

deducimos que  $D^T$  y  $D^V$  están bien definidas. Aquí  $f^C$  denota la elevación completa de una función  $f$  en  $Q$  a  $TQ$ .

Consideremos un lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que el sistema lagrangiano está sometido a fuerzas de ligadura inducidas por la distribución  $D$ . En este caso se han de verificar las siguientes ecuaciones del movimiento globales:

$$\begin{cases} (i_X \omega_L - dE_L) \in \mathcal{I}(D^V), \\ X \in D^T. \end{cases} \quad (6.4.12)$$

donde denotamos por  $\mathcal{I}(D^V)$  el anulador de  $D^V$ .

La condición primera se puede traducir localmente en la formulación clásica de multiplicadores de Lagrange. Si

$$(i_X \omega_L - dE_L) \in \mathcal{I}(D^V),$$

entonces existirán funciones  $\lambda^i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) tales que

$$i_X \omega_L - dE_L = \lambda^i \mu_i^V.$$

Además, deducimos que  $X$  es una SODE.

Examinemos la segunda condición  $X \in D^T$ . Como  $X$  es una SODE se verifica que

$$\begin{aligned} \mu_i^V(X) &= \hat{\mu}_i, \quad (1 \leq i \leq m) \\ \mu_i^c(X) &= X(\hat{\mu}_i), \quad (1 \leq i \leq m). \end{aligned}$$

Las funciones  $\hat{\mu}_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) definen localmente la subvariedad  $D$  de  $TQ$  (aquí, estamos considerando la distribución  $D$  como una subvariedad de  $TQ$  pues  $D$  es un subfibrado vectorial de  $TQ$ ). Por lo tanto, debemos restringirnos a los puntos de  $D \subset TQ$ . Por otro lado, también tiene que verificarse que  $\mu_i^c(X) = X(\hat{\mu}_i)$ , por lo que  $X$  ha de ser tangente a  $D$ .

Como en el capítulo anterior, construimos una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  de modo que la proyección del campo de vectores de Euler-Lagrange determine la solución de las ecuaciones (6.4.12). Consideremos los campos de vectores  $Z_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) definidos localmente por:

$$i_{Z_i} \omega_L = \mu_i^V,$$

y el proyector definido por:

$$\mathcal{Q} = C^{ij} Z_j \otimes d\hat{\mu}_i.$$

donde  $C^{ij}$  es el elemento  $ij$  de la matriz inversa de  $(Z_i(\hat{\mu}_j))$ . Aquí, suponemos que la matriz  $C = (C_{ij})$  es regular en  $TQ$ , para simplificar. En el caso, en que no lo fuera, aplicaremos el algoritmo desarrollado en la Sección 6.2.

Si elegimos otra base local de 1-formas  $\bar{\mu}_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ), que anulen la distribución  $D$ , podemos construir otro proyector

$$\bar{\mathcal{Q}} = \bar{C}^{ij} \bar{Z}_j \otimes d\bar{\mu}_i,$$

donde aquí  $\bar{C}^{ij}$  es el elemento  $ij$  de la matriz inversa de  $(\bar{Z}_i(\bar{\mu}_j))$ , siendo  $\bar{Z}_j$  el único campo de

vectores tal que

$$i_{Z_i} \omega_L = \bar{\mu}_i^V .$$

Si suponemos que  $\bar{\mu}_i = \Lambda_i^j \mu_j$ , se obtiene que:

$$\begin{cases} \bar{Z}_i = \Lambda_i^j Z_j , \\ \bar{\mu}_i = \Lambda_i^j \mu_j , \\ \bar{C}_{ij} = \Lambda_i^r \Lambda_j^s C_{rs} , \end{cases}$$

puesto que  $Z_i$  es un campo de vectores vertical. Así, la inversa de  $(\bar{C}_{ij})$  tiene como elementos:

$$\bar{C}^{ij} = C^{rs} (\Lambda^{-1})_r^i (\Lambda^{-1})_s^j .$$

Se deduce que:

$$\bar{Q} = \bar{Q} + C^{rk} (\Lambda^{-1})_r^i \hat{\mu}_i (Z_k \otimes d\Lambda_i^l) ,$$

Luego, ambos proyectores coinciden en los puntos de  $D$ . Por lo tanto, obtenemos un proyector definido en los puntos de  $D$ :

$$Q(x) : T_x TQ \longrightarrow T_x TQ , \forall x \in D$$

y el proyector complementario  $\mathcal{P} = \text{Id} - Q$ .

El campo de vectores  $\Lambda$  en  $D$  definido por

$$\Lambda(x) = \mathcal{P}(x)(\xi_L(x)) , \forall x \in D$$

es la solución de la dinámica.

**Observación 6.4.1** Los resultados de esta sección son una versión global del caso anterior para ligaduras lineales en las velocidades. Para obtener la globalización del caso de ligaduras afines, haríamos la formulación en la fibración  $\mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ . ♠

**Observación 6.4.2** Supongamos que el sistema lagrangiano está sujeto a ligaduras holonómicas  $h_\alpha \in C^\infty(Q)$ ,  $(1 \leq \alpha \leq s)$ . Esta situación puede considerarse como un caso particular del esquema general. En efecto, consideremos la distribución  $D'$  en  $Q$  determinada por la anulaci3n

de las 1-formas  $dh_\alpha$ . Además, se deben considerar nuevas ligaduras, puesto que el espacio de configuración  $Q$  está también constreñido, es decir, no todas las posiciones son posibles, solamente lo son las de la subvariedad  $Q_0$  de  $Q$  definida por la anulación de las funciones  $h_\alpha$ . La construcción anterior sigue siendo válida restringiéndonos a la subvariedad  $Q_0$ .

Si además el sistema está sujeto a ligaduras no-holonómicas dadas por una distribución  $D$  en  $Q$ , definimos la nueva distribución

$$D_{ext} = D \oplus D',$$

con la condición de que las ligaduras sean independientes. Así, si  $\{\mu_i, 1 \leq i \leq m\}$  es una base local de  $D$ , obtenemos la base local de  $D_{ext}$

$$\{\mu_i, dh_\alpha\}.$$

Como antes, debemos restringirnos a la subvariedad  $Q_0$ . ♠

**Observación 6.4.3** Si la distribución  $D$  de un sistema lagrangiano sujeto a ligaduras no-holonómicas es involutiva, entonces define una foliación en  $Q$ . Si tomamos la hoja  $\mathcal{L}$  de esta foliación, entonces el sistema lagrangiano restringe a un sistema lagrangiano holonómico en  $\mathcal{L}$ .

♠

## 6.5 Ligaduras definidas por una conexión

Supongamos que  $Q$  es una variedad fibrada sobre una variedad diferenciable  $M$ . Es decir, existe una submersión sobreyectiva  $\pi : Q \rightarrow M$ .

Supongamos que hay una conexión  $\Gamma$  en la fibrición  $\pi : Q \rightarrow M$  de modo que los movimientos admisibles son las curvas horizontales con respecto a la conexión. En otras palabras, los vectores de la distribución horizontal son las únicas velocidades admitidas. Entonces,  $D$  es precisamente la distribución horizontal  $H$  tal que

$$TQ = H \oplus V\pi.$$

Si escogemos coordenadas fibradas  $(q^A) = (q^a, q^i)$ , la distribución horizontal estará localmente generada por los campos de vectores

$$\begin{cases} X_a = \left(\frac{\partial}{\partial q^a}\right)^H = \frac{\partial}{\partial q^a} - \Gamma_a^i(q^A) \frac{\partial}{\partial q^i}, \\ X_i = \frac{\partial}{\partial v^a}, \end{cases}$$

donde  $X^H$  denota la elevación horizontal a  $Q$  de un campo de vectores  $X$  en  $M$  y  $\Gamma_a^i$  son las componentes de Christoffel. La base dual de 1-formas está definida por

$$\begin{cases} \mu_a = dq^a \\ \mu_i = \Gamma_a^i dq^a + dq^i. \end{cases}$$

**Observación 6.5.1** Este tipo de sistemas con ligaduras fueron estudiados por Sarlet, Cantrijn y Saunders [130, 127]) en una situación más general usando fibrados sobre  $\mathbb{R}$ . Nuestro procedimiento puede ser extendido a este caso.♣

Como caso particular se puede considerar un fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow M$  con grupo  $G$  donde  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es  $G$ -invariante. Este tipo de sistemas no-holonómicos son conocidos como sistemas de Caplygin y fueron recientemente estudiados por Koiller [64] (véase también [82]).

## 6.6 Aplicación: ecuaciones de las geodésicas con ligaduras

Sea  $Q$  una variedad riemanniana con métrica  $g$  y conexión de Levi-Civita  $\nabla$  y una distribución  $D$  en  $Q$ . Un problema antiguo en la literatura matemática es el de obtener una nueva conexión lineal  $\nabla^*$  en  $Q$  de modo que las geodésicas de  $\nabla^*$  sean las soluciones del problema variacional sujeto a las ligaduras lineales determinadas por  $D$  (véase Synge [138] y Vranceanu [147]). Aplicaremos nuestro método a este caso particular.

La función lagrangiana es

$$L(q^A, \dot{q}^A) = \frac{1}{2} g_{AB} \dot{q}^A \dot{q}^B,$$

es decir,  $L$  es la energía cinética de  $g$ . Consideremos una base ortonormal  $\{\mu_i\}$  de  $D$ . Como  $E_L = L$ , obtenemos

$$\xi_L = \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} - \Gamma_{AB}^C \dot{q}^A \dot{q}^B \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C},$$

donde  $\Gamma_{AB}^C$  son los símbolos de Christoffel de  $\nabla$ .

Se deduce que

$$\begin{aligned} Z_i &= -g^{AB}(\mu_i)_B \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}, \\ \hat{\mu}_i &= (\mu_i)_A \dot{q}^A \\ C_{ij} &= Z_i(\hat{\mu}_j) = -g^{AB}(\mu_i)_A(\mu_j)_B = -\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Denótese por  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  la estructura casi-producto definida a lo largo de  $D$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi_L) &= \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} - \dot{q}^A \dot{q}^B \left( \Gamma_{AB}^C + \frac{\partial(\mu_i)_B}{\partial q^A} g^{CR}(\mu_i)_R - \Gamma_{AB}^E(\mu_i)_E g^{CR}(\mu_i)_R \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C} \\ &= \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} - \dot{q}^A \dot{q}^B \left( \Gamma_{AB}^C + \left( \frac{\partial(\mu_i)_B}{\partial q^A} - \Gamma_{AB}^E(\mu_i)_E \right) g^{CR}(\mu_i)_R \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C} \\ &= \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} - \dot{q}^A \dot{q}^B \left( \Gamma_{AB}^C + (\mu_i)_{A;B}(\mu_i)^C \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C}, \end{aligned}$$

donde

$$(\mu_i)_{A;B} = \frac{\partial(\mu_i)_A}{\partial q^B} - \Gamma_{AB}^E(\mu_i)_E$$

denotan las componentes de la derivada covariante de  $\mu_i$  y  $(\mu_i)^C = g^{CR}(\mu_i)_R$ .

Como  $\mathcal{P}(\xi_L)$  es una SODE y es tangente a  $D$ , sabemos que para cada vector tangente  $z \in D$  existe una curva  $\sigma$  en  $Q$  que es solución de  $\mathcal{P}(\xi_L)$  con valores iniciales  $\sigma(0) = x$ ,  $\dot{\sigma}(0) = z$  y  $\dot{\sigma}$  es una curva integral de  $\mathcal{P}(\xi_L)$ . En efecto, las soluciones de  $\mathcal{P}(\xi_L)$  son precisamente las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 q^A}{dt^2} + (\Gamma^*)_{BC}^A \frac{dq^B}{dt} \frac{dq^C}{dt} = 0, \quad (6.6.13)$$

donde

$$(\Gamma^*)_{BC}^A = \Gamma_{AB}^C + (\mu_i)_{A;B}(\mu_i)^C.$$

Nótese que las ecuaciones (6.6.13) son las ecuaciones obtenidas por Syngé en [138]). Por supuesto, esta ecuación no tiene soluciones para valores iniciales arbitrarios, solamente velocidades en  $D$  son admisibles.

Nótese que  $(\Gamma^*)_{BC}^A$  no son los símbolos de Christoffel de una conexión  $\nabla^*$ . Definen un

objeto geométrico más general: un spray definido en una subvariedad  $D$  de  $TQ$ . Recordemos que existe una correspondencia biyectiva entre sprays en  $TQ$  y conexiones lineales en  $Q$  (véase [82]). En efecto, si  $\xi$  es un spray,  $\Gamma = -L_\xi J$  es una conexión lineal en  $Q$  y, recíprocamente, si  $\Gamma$  es una conexión lineal en  $Q$  entonces la SODE asociada canónicamente a  $\Gamma$  es un spray.

El campo de vectores  $\mathcal{P}(\xi_L)$  está definido en  $D$  pero se puede extender a un campo de vectores de un entorno abierto de  $D$  (obviamente, de distintas maneras). Elegimos una extensión y definimos:

$$\Gamma^* = -L_{\mathcal{P}(\xi_L)} J .$$

$\Gamma^*$  es un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  en el entorno abierto cuya expresión en coordenadas locales es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma^*\left(\frac{\partial}{\partial q^A}\right) &= \frac{\partial}{\partial q^A} - 2(\Gamma^*)_{AB}^C \dot{q}^B \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C} , \\ \Gamma^*\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}\right) &= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} . \end{aligned}$$

Un cálculo directo prueba que  $(\Gamma^*)^2 = \text{id}$ , y que los espacios vectoriales propios correspondientes al valor propio  $-1$  son los subespacios verticales en cada punto del entorno abierto. Además elegida otra extensión de  $\mathcal{P}(\xi_L)$  obtenemos que el nuevo campo de tensores  $\Gamma^*$  coincide con la anterior en  $D$ .

Así,  $\Gamma^*$  define una conexión en el entorno abierto de  $D$  y todas estas conexiones coinciden al restringirlas a  $D$ .

Se definen los proyectores vertical y horizontal del modo usual:

$$h^* = \frac{1}{2}(\text{id} + \Gamma^*) , \quad v^* = \frac{1}{2}(\text{id} - \Gamma^*)$$

con expresiones locales

$$\begin{cases} h^*\left(\frac{\partial}{\partial q^A}\right) = \frac{\partial}{\partial q^A} - (\Gamma^*)_{BA}^C \dot{q}^B \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C} \\ h^*\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^*\left(\frac{\partial}{\partial q^A}\right) = (\Gamma^*)_{BA}^C \dot{q}^B \frac{\partial}{\partial \dot{q}^C} \\ v^*\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} \end{cases}$$

Usando los procedimientos usuales para conexiones en  $TQ$  (véanse Grifone [56], de León y Rodrigues [90]) definimos un operador derivada covariante como sigue. Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$  e  $Y$  un campo de vectores tangente a la distribución; en otras palabras,  $X$  es una sección de  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  e  $Y$  una sección de  $\tau_{Q/D} : D \rightarrow Q$ . Definimos

$$(\nabla_X^* Y)(x) = \phi_{Y(x)}(v^*(dY(x))(X(x))), \quad \forall x \in Q,$$

donde  $\phi_{Y(x)}$  denota el isomorfismo lineal

$$\phi_{Y(x)} : V_{Y(x)}\tau_Q \rightarrow T_x Q$$

entre el subespacio vertical de  $TQ$  en  $Y(x)$  y  $T_x Q$ .

Si  $X = X^A \partial / \partial q^A$  e  $Y = Y^A \partial / \partial q^A$ , se obtiene que:

$$\nabla_X^* Y = X^A \left[ \frac{\partial Y^C}{\partial q^A} + (\Gamma^*)_{AB}^C Y^B \right] \frac{\partial}{\partial q^C}$$

Busquemos ahora la condición para que  $\nabla_X^* Y \in D$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu_i(\nabla_X^* Y) &= (\mu_i)_D dq^D \left[ X^A \frac{\partial Y^C}{\partial q^A} + X^A (\Gamma^*)_{AB}^C Y^B \right] \\ &= X^A \left[ (\mu_i)_C \frac{\partial Y^C}{\partial q^A} + (\mu_i)_C (\Gamma^*)_{AB}^C Y^B \right]. \end{aligned}$$

Como

$$(\Gamma^*)_{BC}^A = \Gamma_{AB}^C + (\mu_i)_{A;B} (\mu_i)^C,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} (\mu_i)_C (\Gamma^*)_{AB}^C &= (\mu_i)_C \Gamma_{AB}^C + (\mu_i)_C \frac{\partial (\mu_j)_A}{\partial q^B} (\mu_j)^C - (\mu_i)^C \Gamma_{AB}^E (\mu_i)_E (\mu_j)^C \\ &= \frac{\partial (\mu_i)_A}{\partial q^B}. \end{aligned}$$

Así, se obtiene que

$$\mu_i(\nabla_X^* Y) = X^A \left[ (\mu_i)_B \frac{\partial Y^B}{\partial q^A} + \frac{\partial (\mu_i)_A}{\partial q^B} Y^B \right]. \quad (6.6.14)$$

Pero  $Y \in D$  y, en consecuencia,

$$0 = \mu_i(Y) = (\mu_i)_B Y^B .$$

Derivando esta última expresión, se deduce:

$$(\mu_i)_B \frac{\partial Y^B}{\partial q^A} + \frac{\partial (\mu_i)_B}{\partial q^A} Y^B = 0 . \quad (6.6.15)$$

De las expresiones 6.6.14 y 6.6.15 se deduce el siguiente resultado.

**Proposición 6.6.1**  $\nabla^*$  define una conexión en  $\tau_Q : D \rightarrow Q$  si y solamente si  $D$  es involutiva.

En conclusión, si el sistema es holonómico,  $\nabla^*$  es una ley de derivación en el fibrado vectorial  $D \rightarrow Q$ .

En el caso general, lo único que obtenemos es que

$$\nabla^* : \mathfrak{X}(Q) \times \text{Secc}(D) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$$

se comporta como una ley de derivación.

## 6.7 Simetrías y constantes del movimiento

En el estudio de las simetrías y constantes del movimiento de un sistema lagrangiano sujeto a ligaduras no-holonómicas, seguiremos la clasificación de Prince [116, 117] (véase también [32]).

Primero supondremos que la matriz  $C = (Z_i(\phi_j))$  es regular. Entonces, existe una única solución  $\Lambda$  de la dinámica con ligaduras en  $\bar{P}_1$  donde

$$\Lambda = (\mathcal{P}(\xi_L))_{/P_1} .$$

Así, introducimos las siguientes definiciones:

**Definición 6.7.1** Se dice que una función  $f$  en  $C^\infty(\bar{P}_1)$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$  si  $\Lambda f = 0$ .

**Definición 6.7.2** Una simetría dinámica de  $\Lambda$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $\bar{P}_1$  de modo que  $[\tilde{X}, \Lambda] = 0$ .

Es evidente que si  $f$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$ , entonces  $\tilde{X}f$  es también una constante del movimiento de  $\Lambda$  para cada simetría dinámica  $\tilde{X}$ .

Si denotamos por  $X^c$  la elevación completa a  $TQ$  de un campo de vectores  $X$  en  $Q$ , entonces obtenemos la noción de simetría de Lie.

**Definición 6.7.3** Una simetría de Lie de  $\Lambda$  es un campo de vectores  $X$  en  $Q$  tal que  $X^c$  es tangente a  $\bar{P}_1$  y  $(X^c)_{/P_1}$  es una simetría dinámica de  $\Lambda$ .

Como sabemos, existe una relación biyectiva entre las constantes del movimiento del campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_L$  del lagrangiano libre  $L$  y cierta clase de simetrías dinámicas, las simetrías de Cartan. Recordemos que las simetrías de Cartan para un lagrangiano libre son campos hamiltonianos  $X_F$  tales que  $X_F E_L = 0$  y, en este caso,  $F$  es una constante del movimiento.

Consideramos ahora una constante del movimiento  $F : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\xi_L$ , es decir,  $\xi_L F = 0$ . Se puede probar sin dificultad que, si  $(Z_i F)_{/P_1} = 0$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) entonces, como

$$\Lambda = (\xi_L - C^{ij} \xi_L(\phi_i) Z_j)_{/P_1} ,$$

se obtiene que  $\Lambda(F_{/P_1}) = 0$  y, así,  $F_{/P_1}$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$  (véase [25]). Se sigue que

$$Z_i F = -\mu_i^V(X_F) = -(J^* d\phi_i)(X_F) = -d\phi_i(JX_F) = -L_{JX_F} \phi_i .$$

Por lo tanto, si  $(L_{JX_F} \phi_i)_{/P_1} = 0$  concluimos que  $F_{/P_1}$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$ . Nótese que, en general,  $(X_F)_{/P_1}$  no es una simetría dinámica de  $\Lambda$  y, de hecho, no podemos asegurar que  $X_F$  sea tangente a  $\bar{P}_1$  (véase [10]).

Nuestro próximo objetivo es estudiar el caso degenerado, es decir,  $C$  es singular. Si aplicamos el algoritmo desarrollado en la sección anterior, obtenemos una variedad final de ligaduras  $\bar{P}_f$  donde existen soluciones de la dinámica. Entonces, para cada  $\lambda_\alpha$ , ( $k' + 1 \leq \alpha \leq m$ ), los campos

de vectores  $X$  tales que

$$X = \left( \xi_L - (C')^{i'j'} \left( \xi_L(\chi_{i'}) + \lambda^\beta Z_\beta(\chi_{i'}) \right) Z_{j'} + \lambda^\alpha Z_\alpha \right) /_{P_1} ,$$

son soluciones de las ecuaciones del movimiento. Como en el caso regular, si  $F$  es una constante del movimiento de  $\xi_L$  y  $(L_{JX_j} \phi_i) /_{P_j} = 0$ ,  $(1 \leq i \leq m)$ , entonces  $F /_{P_j}$  es una constante del movimiento de cualquier solución  $X$ .

## 6.8 Formalismo hamiltoniano

Sea  $T^*Q$  el fibrado cotangente de  $Q$  con proyección canónica  $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ . Consideremos un lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $L$  es regular,  $Leg$  es un difeomorfismo local. Para simplificar, supondremos que  $L$  es hiperregular, esto es,  $Leg$  es un difeomorfismo global.

Sea  $\phi_i = \hat{\alpha}_i + h_i^V$  un conjunto de ligaduras no-holónicas independientes y supongamos que el lagrangiano  $L$  está sometido a estas ligaduras. Ahora, analizaremos la contrapartida hamiltoniana del sistema lagrangiano.

Si definimos la 1-forma  $\tilde{\alpha}_i = (\pi)^* \alpha_i$  en  $T^*Q$ , obtenemos que

$$Leg^* \tilde{\alpha}_i = \alpha_i^V ,$$

y, así, los campos de vectores  $Z_i$  y  $\tilde{Z}_i$  están  $Leg$ -relacionados, donde

$$i_{\tilde{Z}_i} \omega_Q = \tilde{\alpha}_i , \quad (1 \leq i \leq m) .$$

Además, las funciones  $\tilde{\phi}_i$  definidas por:

$$\tilde{\phi}_i = \tilde{\alpha}_i(X_H) - \pi^* h_i ,$$

están  $Leg$ -relacionadas con las ligaduras no-holónicas  $\phi_i$ ,  $(1 \leq i \leq m)$ .

Por lo tanto, concluimos de los anteriores resultados que las soluciones  $X$  de las ecuaciones

del movimiento:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \alpha_i^V, \\ d\phi_i(X) = 0, \end{cases}$$

están *Leg*-relacionadas con las soluciones de la ecuaciones:

$$\begin{cases} i_{\tilde{X}} \omega_Q = dH + \tilde{\lambda}^i \tilde{\alpha}_i, \\ d\tilde{\phi}_i(\tilde{X}) = 0. \end{cases} \quad (6.8.16)$$

La estructura casi-producto definida por el proyector  $\mathcal{P}$  induce un proyector  $\tilde{\mathcal{P}}$  en  $T^*Q$  definido como sigue:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{X}) = TLeg \mathcal{P}(TLeg^{-1}(\tilde{X})), \forall \tilde{X} \in \mathfrak{X}(T^*Q),$$

o, explícitamente,

$$\tilde{\mathcal{P}} = \text{id}_{TT^*Q} - \tilde{C}^{ij} \tilde{Z}_j \otimes d\tilde{\phi}_i \quad (1 \leq i, j \leq m),$$

donde  $(\tilde{C}^{ij})$  es la matriz inversa de  $\tilde{C} = (\tilde{Z}_i(\tilde{\phi}_j))$ .

Es muy sencillo comprobar que si aplicamos el algoritmo desarrollado en la Sección 6.2 a las ecuaciones del movimiento (6.8.16), obtenemos una sucesión de subvariedades de ligaduras  $\bar{M}_i$  de  $T^*Q$ . Estas subvariedades  $\bar{M}_i$  son precisamente  $\bar{M}_i = Leg(\tilde{\mathcal{P}}_i)$ . Así, ambos algoritmos están conectados por medio de la transformación de Legendre. Si uno de ellos se estabiliza, también lo hace el otro. En este caso es posible definir una estructura casi-producto adecuada en cada lado de tal modo que estén *Leg*-relacionadas.

**Observación 6.8.1** Como  $(TQ, \omega_L)$  y  $(T^*Q, \omega_Q)$  son variedades simplécticas, obtendremos dos corchetes de Poisson  $\{ , \}_L$  y  $\{ , \}_Q$  en  $TQ$  y  $T^*Q$ , respectivamente. Además, como  $Leg^* \omega_Q = \omega_L$ , la transformación de Legendre es una variedad de Poisson, es decir,

$$Leg^* \{f, g\} = \{Leg^* f, Leg^* g\}_L, \forall f, g \in C^\infty(T^*Q).$$

Supongamos ahora que  $\bar{P}_f$  viene dado por la anulación de las ligaduras  $\chi_{i'}$ ,  $(1 \leq i' \leq m')$ . Podemos clasificar estas ligaduras en dos tipos diferentes. Se dice que una ligadura  $\chi$  de  $\bar{P}_f$  es de primera clase si  $\{\chi, \chi_{i'}\}_{/\bar{P}_f} = 0$  para cada ligadura  $\chi_{i'}$  de  $\bar{P}_f$ , y de segunda clase en otro

caso. De un modo similar, obtenemos una clasificación de las ligaduras de  $\bar{M}_i$ , la subvariedad final de ligaduras en el lado hamiltoniano.

Denótense por  $\omega_{\bar{P}_f}$  y  $\omega_{\bar{M}_f}$  las restricciones de  $\omega_L$  y  $\omega_Q$  a  $\bar{P}_f$  y  $\bar{M}_f$ . Así, si todas las ligaduras de  $\bar{P}_f$  (resp.  $\bar{M}_f$ ) son de primera clase entonces  $\bar{P}_f$  (resp.  $\bar{M}_f$ ) es una subvariedad coisotrópica de  $TQ$  (resp.  $T^*Q$ ). También, si todas las ligaduras de  $\bar{P}_f$  (resp.  $\bar{M}_f$ ) son de segunda clase entonces  $(\bar{P}_f, \omega_{\bar{P}_f})$  (resp.  $(\bar{M}_f, \omega_{\bar{M}_f})$ ) es una subvariedad simpléctica. ♠

**Observación 6.8.2** Consideremos un lagrangiano  $L$  de tipo cinético, es decir, en coordenadas tiene la forma:

$$L = \frac{1}{2}g_{AB}\dot{q}^A\dot{q}^B - V(q).$$

En este caso, la transformación de Legendre es:

$$Leg(q^A, \dot{q}^A) = (q^A, g_{AB}\dot{q}^B),$$

que tiene como inversa:

$$Leg^{-1}(q^A, p_A) = (q^A, p_B g^{BA}).$$

La proyección de una ligadura no-holonómica

$$\phi = \mu_A \dot{q}^A + h_A$$

es la ligadura en  $T^*Q$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(q^A, p_A) &= \phi(Leg^{-1}(q^A, p_A)) = \phi(q^A, p_B g^{BA}) \\ &= \mu_A g^{BA} p_B + h_A \end{aligned}$$

que es afín en los momentos. ♠

**Ejemplo 6.8.1** Consideremos un sistema de  $N$ -partículas con masa unidad (véanse [114]). El espacio de configuración es  $Q = \mathbb{R}^{3N}$  con coordenadas  $(r^{ia})$ ,  $(1 \leq i \leq N)$ ,  $(a = x, y, z)$ , siendo  $r^{ia}$  para un  $i$  fijo las coordenadas que describen el movimiento de la partícula  $i$ .

Sea  $L$  el lagrangiano

$$L(r^{ia}, \dot{r}^{ia}) = \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ a=x, y, z}} \frac{(\dot{r}^{ia})^2}{2} - V(r^{1x}, r^{1y}, r^{1z}, \dots, r^{Nx}, r^{Ny}, r^{Nz}),$$

sujeto a las ligaduras holonómicas

$$\phi_a^1 = \sum_{i=1}^N r^{ia}, \quad a = x, y, z,$$

que dan lugar a las ligaduras no-holonómicas

$$\phi_a^2 = \left( \sum_{i=1}^N r^{ia} \right) (X_H) = \sum_{i=1}^N p_{ia}, \quad a = x, y, z.$$

$T\mathbb{R}^{3N}$  y  $T^*\mathbb{R}^{3N}$  se identifican de modo canónico con  $\mathbb{R}^{6N}$  y, usando estas identificaciones la transformación de Legendre  $Leg : \mathbb{R}^{6N} \rightarrow \mathbb{R}^{6N}$  es la identidad. Así, estudiaremos el sistema hamiltoniano asociado pues los resultados serán los mismos que para el sistema lagrangiano. La forma simpléctica es

$$\omega = dr^{ia} \wedge dp_{ia}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad a = x, y, z.$$

La dinámica viene determinada por el hamiltoniano:

$$H = (Leg^{-1})^* E_L = \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ a=x, y, z}} \frac{p_{ia}^2}{2} + V(r^{1x}, r^{1y}, r^{1z}, \dots, r^{Nx}, r^{Ny}, r^{Nz}),$$

y el campo hamiltoniano  $X_H$  es

$$X_H = p_{ia} \frac{\partial}{\partial r^{ia}} - \frac{\partial V}{\partial r^{ia}} \frac{\partial}{\partial p_{ia}}.$$

Las ligaduras a las que está sujeto el sistema son las funciones

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_a^1 &= \sum_{i=1}^N r^{ia}, \quad a = x, y, z \\ \tilde{\phi}_a^2 &= (\text{Leg}^{-1})^* \phi_a^2 = \left( \sum_{i=1}^N dr^{ia} \right) (X_H) = \sum_{i=1}^N p_{ia}, \quad a = x, y, z.\end{aligned}$$

Para encontrar la solución del sistema con ligaduras debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} i_X \omega = dH + \lambda^a (d\phi_a^1)^V, \\ X(\phi_a^1) = 0, \\ X(\phi_a^2) = 0. \end{cases}$$

Vamos a buscar una estructura casi-producto en  $\mathbb{R}^{6N}$  de tal modo que la proyección de la dinámica libre,  $X_H$ , es la solución del problema con ligaduras. Para ello, primero encontremos los campos de vectores  $Z_a$  definidos por:

$$i_{Z_a} \omega = (d\phi_a^1)^V.$$

Estos campos de vectores son precisamente:

$$Z_a = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_{ia}}, \quad a = x, y, z.$$

Ahora, consideremos la matriz  $3 \times 3$ :

$$C = (C_{ab}) = (Z_a(\phi_b^2)) = \begin{pmatrix} -N & 0 & 0 \\ 0 & -N & 0 \\ 0 & 0 & -N \end{pmatrix}.$$

Uno de los proyectores de la estructura casi-producto es:

$$\begin{aligned}Q &= C^{ab} Z_b \otimes (d\phi_a^2)^V, \\ &= \frac{1}{N} \sum_a \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial p_{ia}} \otimes dp_{ja} \right),\end{aligned}$$

y el otro  $\mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{P} = \sum_a \sum_{i,j=1}^N (\delta_i^j - \frac{1}{N}) \left( \frac{\partial}{\partial p_{ia}} \otimes dp_{ja} \right).$$

La proyección de la solución de la dinámica libre  $X_H$  es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_H) = & p_{ia} \frac{\partial}{\partial r^{ia}} + \left( -\frac{N-1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{1a}} + \frac{1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{2a}} + \dots + \frac{1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{Na}} \right) \frac{\partial}{\partial p_{1a}} \\ & + \dots + \left( \frac{1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{1a}} + \frac{1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{2a}} + \dots - \frac{N-1}{N} \frac{\partial V}{\partial r^{Na}} \right) \frac{\partial}{\partial p_{Na}}. \spadesuit \end{aligned}$$

**Observación 6.8.3** Consideremos nuevamente el lagrangiano regular  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  sujeto a las ligaduras no-holónicas definidas por una distribución  $D$  en  $Q$ . Como  $L$  es regular, la transformación de Legendre

$$\text{Leg} : TQ \rightarrow T^*Q$$

es un difeomorfismo local. Por lo tanto, podemos transportar las distribuciones  $D^T$  y  $D^V$  de  $TQ$  a  $T^*Q$ . Las distribuciones inducidas serán denotada por  $\tilde{D}^T$  y  $\tilde{D}^V$ , respectivamente. Consideremos la función hamiltoniana  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $H \circ \text{Leg} = E_L$ . Las ecuaciones del movimiento en  $T^*Q$  para el sistema con ligaduras son

$$\begin{cases} (i_X \omega_Q - dH) \in (\tilde{D}^V)^0, \\ X \in \tilde{D}^T. \end{cases} \quad (6.8.17)$$

Como en el caso regular construimos una estructura casi-producto  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{Q}})$  en  $T^*Q$  a lo largo de  $\tilde{D} = \text{Leg}(D)$ . Como  $\text{Leg}^* \omega_Q = \omega_L$  y  $E_L = H \circ \text{Leg}$ , deducimos que  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  y  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{Q}})$  están *Leg*-relacionados. Además, como  $\xi_L$  y  $X_H$  están *Leg*-relacionados, se deduce que  $\mathcal{P}(\xi_L)$  y  $\tilde{\mathcal{P}}(X_H)$  están *Leg*-relacionados. Nótese que como *Leg* es una aplicación fibrada, entonces  $\tilde{D}$  es también un fibrado sobre  $Q$ , pero no necesariamente un subfibrado vectorial de  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ . De hecho, *Leg* no es en general un morfismo de fibrados vectoriales. ♠

## 6.9 Sistemas lagrangianos no-autónomos con ligaduras no-holónicas

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . El espacio de evolución asociado con  $Q$  es la variedad diferenciable  $\mathbb{R} \times TQ$ . Denotemos por  $\pi : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R} \times Q$  la proyección canónica. Sean  $(t, q^A, \dot{q}^A)$ ,  $(1 \leq A \leq n)$  las coordenadas fibradas en  $\mathbb{R} \times TQ$  siendo  $(q^A)$ ,  $(1 \leq A \leq n)$  coordenadas locales en  $Q$ .

Consideremos una función  $L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, un lagrangiano no-autónomo (o dependiente del tiempo). Diremos que  $L$  es regular si la matriz hessiana  $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B})$  es de rango máximo. Denotamos por  $E_L$  la energía asociada a  $L$  y por  $\Theta_L$  y  $\Omega_L = -d\Theta_L$  la 1-forma y la 2-forma de Poincaré-Cartan, respectivamente. Las expresiones intrínsecas de  $E_L$  y  $\Theta_L$  son:

$$E_L = CL - L, \quad \Theta_L = \tilde{J}^*(dL - L dt),$$

donde  $\tilde{J} = J - C \otimes dt$ . Aquí  $J$  denota la estructura casi-tangente canónica y  $C$  el campo de vectores de Liouville en  $TQ$  que pueden ser transportados a  $\mathbb{R} \times TQ$  de la manera obvia.

Las ecuaciones globales del movimiento pueden ser escritas como sigue:

$$i_X \Omega_L = 0, \quad i_X dt = 1. \quad (6.9.18)$$

Como  $(\Omega_L, dt)$  define una estructura cosimpléctica en  $\mathbb{R} \times TQ$ , existe un único campo de vectores  $\xi_L$  (el campo de vectores de Reeb) en  $\mathbb{R} \times TQ$  satisfaciendo (6.9.18). Este campo de vectores  $\xi_L$  es llamado el campo de vectores de Euler-Lagrange. Se deduce que:

1.  $\xi_L$  es una ecuación diferencial no-autónoma de orden 2, (una NSODE, para simplificar);
2. las soluciones de  $\xi_L$  son precisamente las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \\ \frac{dq^A}{dt} = \dot{q}^A. \end{array} \right.$$

El propósito de esta sección es extender el estudio geométrico anterior para sistemas lagrangianos con ligaduras no-holónicas en  $TQ$  (caso autónomo) al caso no-autónomo. Como

en el caso autónomo, comenzaremos con un lagrangiano regular en  $\mathbb{R} \times TQ$  sujeto a ligaduras independientes no-holonómicas  $\{\phi_i, 1 \leq i \leq m\}$  ( $m < n$ ) definidas por:

$$\phi_i = (\mu_i)_A(t, q)\dot{q}^A + h_i(t, q).$$

Podemos definir estas ligaduras intrínsecamente considerando  $m$  1-formas  $\mu_i = (\mu_i)_A dq^A + h_i dt$  en  $\mathbb{R} \times Q$  y entonces  $\phi_i = i_C(\mu_i)^V$ , donde  $(\mu_i)^V = \pi^*(\mu_i)$ . Además definimos las 1-formas

$$\bar{\mu}_i = (\mu_i)_A dq^A - \dot{q}^A (\mu_i)_A dt,$$

en  $\mathbb{R} \times TQ$  como sigue:  $\bar{\mu}_i = (\tilde{J})^*(\mu_i^c)$ , siendo  $\mu_i^c$  la restricción a  $\mathbb{R} \times TQ$  de la elevación completa de  $\mu_i$  a  $T(\mathbb{R} \times Q)$ . Aquí consideramos la inclusión canónica  $\mathbb{R} \times TQ \rightarrow T(\mathbb{R} \times Q)$ ,  $(t, q^A, \dot{q}^A) \rightsquigarrow (t, q^A, 1, \dot{q}^A)$ .

Las ecuaciones del movimiento de un sistema lagrangiano no-autónomo sometido a las ligaduras  $\phi_i$  son (véase [118])

$$\begin{cases} i_X \Omega_L = \lambda^i \bar{\mu}_i, \\ i_X dt = 1, \\ d\phi_i(X) = 0. \end{cases} \quad (6.9.19)$$

Definamos los campos de vectores  $Z_i$  por:

$$\begin{cases} i_{Z_i} \Omega_L = \bar{\mu}_i, \\ i_{Z_i} dt = 0. \end{cases}$$

Se deduce que  $JZ_i = 0$  lo que implica que los campos de vectores  $X = \xi_L + \lambda^i Z_i$  son NSODEs para cada  $\lambda^i \in C^\infty(\mathbb{R} \times TQ)$ . Como en la Sección 6.2, podemos estudiar el sistema lagrangiano con ligaduras dependiendo de si la matriz  $C = (Z_i(\phi_j))$  es o no singular y, así, construir una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $\mathbb{R} \times TQ$  tal que la proyección por  $\mathcal{P}$  del campo de vectores de Euler-Lagrange  $\xi_L$ ,  $\mathcal{P}(\xi_L)$ , nos proporciona la dinámica del sistema con ligaduras. Además, podemos desarrollar un algoritmo que permite obtener una familia de subvariedades de ligaduras  $\tilde{P}_i$ . Si existe una subvariedad final de ligaduras  $\tilde{P}_f$ , podemos encontrar una solución consistente en  $\tilde{P}_f$  de las ecuaciones del movimiento (6.9.19). Omitimos todos los detalles, puesto que la

obtención de los resultados es similar a los del caso autónomo.

**Observación 6.9.1** Aplicaremos los métodos desarrollados en la Sección 6.9 a un lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  considerado como no-autónomo; es decir,  $\tilde{L} : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{L}(t, q, \dot{q}) = L(q, \dot{q})$ . Las ligaduras no-holónicas  $\Phi = \hat{\mu}_i + \tilde{h}_i$  pueden ser definidas en  $\mathbb{R} \times TQ$ , y también, las 1-formas  $\mu_i$ , y las funciones  $h_i$  pueden ser consideradas como definidas en  $Q$  o  $\mathbb{R} \times Q$ , indistintamente. Nótese que

$$\Omega_{\tilde{L}} = \omega_L + dE_L \wedge dt,$$

con las identificaciones obvias. Por otro lado, deducimos que las ecuaciones del movimiento

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \\ d\phi_i(X) = 0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} i_Y \Omega_{\tilde{L}} = \lambda^i \tilde{\mu}_i, \\ i_Y dt = 1, \\ d\phi_i(Y) = 0, \end{cases}$$

son equivalentes. De hecho, las relaciones entre ambos conjuntos de ecuaciones están determinadas por la identidad  $Y = \frac{\partial}{\partial t} + X$ . Si aplicamos los algoritmos desarrollados en las secciones 6.2 y 6.7, llegamos a  $\tilde{P}_r = \mathbb{R} \times \bar{P}_r$ , donde  $\bar{P}_r$  (resp.  $\tilde{P}_r$ ) son subvariedades de  $TQ$  (resp.  $\mathbb{R} \times TQ$ ).

♠

## Capítulo 7

# Un algoritmo de ligaduras para sistemas lagrangianos singulares sujetos a ligaduras no-holónicas

En este último capítulo construimos un algoritmo de ligaduras para sistemas lagrangianos con ligaduras no-holónicas. Este algoritmo es de hecho una generalización del algoritmo de Gotay y Nester ya detallado en la Sección 3.1 del capítulo 3. Una combinación del algoritmo estudiado en el Capítulo anterior para sistemas lagrangianos regulares con ligaduras no-holónicas y el algoritmo de Gotay y Nester nos permitirá construir un algoritmo para sistemas lagrangianos con ligaduras no-holónicas. Así, obtenemos una sucesión de subvariedades que si se estabiliza define una subvariedad final de ligaduras donde existen soluciones completamente consistentes de la dinámica. Conviene observar, como veremos en los ejemplos, que este último algoritmo y el de Gotay-Nester son radicalmente diferentes aunque similares en su concepción. Esto se detallará en la Sección 7.1. En la Sección 7.2 estudiaremos las simetrías y constantes del movimiento y en la Sección 7.3, nos preocuparemos del formalismo hamiltoniano. Introduciremos las estructuras casi-producto en este estudio en la Sección 7.4. Como siempre ocurre, trabajando con lagrangianos singulares, tenemos el problema de que, en general, las soluciones de la dinámica no verifican la condición de ecuación diferencial de segundo orden; por ello, detallamos en la Sección 7.5 cómo encontrar una subvariedad donde esta condición se satisfaga.

## 7.1 Lagrangianos singulares con ligaduras no-holonómicas

Sea  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana definida en  $TQ$  de un espacio de configuración  $Q$  de dimensión  $n$ . Denotamos por  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  la proyección canónica. Consideramos coordenadas fibradas  $(q^A, \dot{q}^A)$ ,  $1 \leq A \leq n$  en  $TQ$ .

Si  $L$  es singular,  $\omega_L$  es presimpléctica y la ecuación  $i_X \omega_L = dE_L$  no tiene solución en general en  $TQ$ . Pero, podemos utilizar el algoritmo de Gotay-Nester [49, 51] y obtener así, una sucesión de subvariedades

$$\cdots \rightarrow P_k \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 = TQ .$$

Si el algoritmo se estabiliza en algún entero  $k$ , esto es,  $P_k = P_{k+1} = P_f$ , entonces obtenemos una solución  $X$  en la subvariedad final de ligaduras  $P_f$ . De este modo, existe un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(P_f)$  tal que

$$(i_X \omega_L = dE_L)_{/P_f} .$$

Ahora, supongamos que  $L$  está sujeto a un sistema de  $m$  ligaduras no-holonómicas  $\{\phi_i; 1 \leq i \leq m\}$ , (con  $m < n$ ) que son afines en las velocidades. Es decir,  $\phi_i : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que puede ser localmente expresada como sigue

$$\phi_i = (\mu_i)_A(q) \dot{q}^A + h_i(q) , \quad (7.1.1)$$

donde  $(\mu_i)_A$  y  $h_i$  son funciones en  $Q$ .

Siguiendo la notación del capítulo anterior, la dinámica del sistema está determinada por un campo de vectores que es tangente a la subvariedad definida por la anulación de todas las ligaduras. En definitiva, obtenemos las ecuaciones del movimiento modificadas:

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V , \\ d\phi_i(X) = 0 , \end{cases} \quad (7.1.2)$$

con  $\mu_i^V = \tau_Q^* \mu_i$ .

En este capítulo desarrollaremos un algoritmo que generalice el algoritmo de Gotay y Nester (véase [77]).

Denotemos por  $P_1 = TQ$  y definamos el subconjunto  $\bar{P}_1$  de  $P_1$  como sigue:

$$\bar{P}_1 = \{x \in TQ / \langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \ker \omega_L \rangle(x) = 0, \phi_i(x) = 0\},$$

para algún  $\lambda^i \in \mathbb{R}$ . Esto significa lo siguiente. Para cada punto  $x \in TQ$  elegimos una base local  $\langle W_1, W_2, \dots, W_r \rangle$  en un entorno  $U$  de  $x$ , donde  $\dim \ker \omega_L = r$ . Así, la condición

$$\langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \ker \omega_L \rangle(x) = 0$$

es equivalente a

$$W_j(E_L) + \lambda^i \mu_i(W_j) = 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r. \quad (7.1.3)$$

Supongamos que  $\bar{P}_1$  es una subvariedad de  $P_1$ . Si el rango de la matriz  $C_1 = (\mu_i(W_j))$  es constante y

$$\text{rango } (\mu_i(W_j)) = \text{rango } (\mu_i(W_j), W_j(E_L)),$$

entonces, la ecuación (7.1.3) tiene al menos una solución para algunos valores de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ . Es posible que (7.1.3) nos de lugar a una inconsistencia (tipo  $0 = 1$ ), y entonces diremos que las ecuaciones (7.1.3) son inconsistentes. En nuestro caso, supondremos que las ecuaciones no son inconsistentes, o en otras palabras que existe al menos una solución de la dinámica. Si el rango de la matriz  $C_1$  es igual a  $r_1$  con  $r_1 \leq \min(r, m)$ , el número de multiplicadores  $\lambda^i$  determinados por las ecuaciones (7.1.3) es  $m - r_1$ . En tal caso, existe al menos una solución  $X$  a lo largo  $\bar{P}_1$  que verifica (7.1.3), pero en general no es tangente a  $\bar{P}_1$ .

Por tanto, consideraremos la colección  $\bar{P}_2$  de puntos en  $\bar{P}_1$  en los que existe una solución que es tangente a  $\bar{P}_2$ . Esto es, elegimos los puntos  $x \in \bar{P}_1$  tales que

$$\omega_L(x)(X(x), v) = 0, \forall v \in T_x \bar{P}_1^\perp,$$

donde

$$T_x \bar{P}_1^\perp = \{v \in T_x(TQ) / \omega_L(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x \bar{P}_1\}.$$

Equivalentemente,

$$\bar{P}_2 = \{x \in \bar{P}_1 / \langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, T\bar{P}_1^\perp \rangle(x) = 0\}.$$

También supondremos que  $\bar{P}_2$  define una subvariedad de  $\bar{P}_1$ . Entonces, existe una solución  $X$  a lo largo  $\bar{P}_2$  que es tangente a  $\bar{P}_1$ . Sin embargo,  $X$  no es necesariamente tangente a  $\bar{P}_2$ . Procedemos como antes y obtenemos una sucesión de subvariedades de ligaduras

$$\cdots \rightarrow \bar{P}_k \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_1 \rightarrow P_1 = TQ ,$$

donde, para todo  $k > 1$ , se obtiene

$$\bar{P}_{k+1} = \{x \in \bar{P}_k / \langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, T\bar{P}_k^\perp \rangle(x) = 0 \} ,$$

donde

$$T_x \bar{P}_k^\perp = \{v \in T_x TQ / \omega_L(x)(u, v) = 0, \forall u \in T_x \bar{P}_k \} .$$

Si este algoritmo se estabiliza, esto es, si existe un entero  $k$  tal que  $\bar{P}_k = \bar{P}_{k+1}$ , y  $\dim \bar{P}_k > 0$ , obtenemos una variedad final de ligaduras  $\bar{P}_k$  donde existen soluciones consistentes de la dinámica. Denotamos a esta subvariedad por  $\bar{P}_f$  que será llamada la subvariedad final de ligaduras. Existe un campo de vectores  $\xi$  en  $\bar{P}_f$  el cual es una solución de la ecuación (7.1.2) (por supuesto,  $\xi + Z$ ,  $Z \in \ker \omega_L \cap T\bar{P}_f$  es también una solución). En este proceso, algunos multiplicadores de Lagrange pueden permanecer indeterminados y los restantes quedarán completamente fijados en  $\bar{P}_f$ .

**Ejemplo 7.1.1** Sea  $L : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$L(q^A, \dot{q}^A) = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2 .$$

Se obtiene que:

$$E_L = \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 - \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2, \quad \omega_L = dq^1 \wedge d\dot{q}^1 .$$

y, por lo tanto,

$$\ker \omega_L = \left\langle \frac{\partial}{\partial q^2}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} \right\rangle .$$

Si estudiamos la dinámica del problema libre obtenemos la siguiente sucesión de subvarie-

dades de ligaduras:

$$P_2 = \{(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in \mathbb{R}^4 / q^1 = 0\} \text{ y } P_3 = \{(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in \mathbb{R}^4 / q^1 = 0, \dot{q}^1 = 0\} .$$

En este caso, la dinámica está completamente indeterminada en la subvariedad final de ligaduras  $P_3$ .

Ahora, suponemos que el sistema lagrangiano está sujeto a la ligadura no-holonómica  $\phi = \dot{q}^1$ . Así, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda dq^1 , \\ d\dot{q}^1(X) = 0 . \end{cases}$$

En tal caso, si aplicamos el algoritmo de ligaduras, obtenemos que la sucesión se estabiliza en la subvariedad  $\bar{P}_1 = P_2$  definida por

$$\bar{P}_1 = \{(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in \mathbb{R}^4 / q^1 = 0, \dot{q}^1 = 0\} .$$

Eligiendo coordenadas  $(q^2, \dot{q}^2)$  en  $\bar{P}_1$  obtenemos que la dinámica está determinada por el campo de vectores

$$f \frac{\partial}{\partial q^2} + g \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} ,$$

donde  $f, g \in C^\infty(\bar{P}_1)$ .

Ahora, consideremos la siguiente ligadura no-holonómica:  $\phi = \dot{q}^2$ . Entonces, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} i_X \omega_L = dE_L + \lambda dq^2 , \\ d\dot{q}^2(X) = 0 . \end{cases}$$

Calculemos los puntos  $x$  tales que

$$\langle dE_L + \lambda dq^2, \ker \omega_L \rangle(x) = 0 .$$

Obtenemos que para todo  $x \in TQ$  se satisface la ecuación para el siguiente valor particular del

multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = \frac{1}{2}(q^1)^2.$$

Además, la subvariedad final de ligaduras es

$$\bar{P}_1 = \{(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) \in \mathbb{R}^4 / \dot{q}^2 = 0\}$$

y la dinámica está determinada por el campo de vectores:

$$X = \dot{q}^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 q^2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} + f \frac{\partial}{\partial q^2},$$

donde  $f \in C^\infty(\bar{P}_1)$  y consideramos coordenadas  $(q^1, q^2, \dot{q}^1)$  en  $\bar{P}_1$ .

**Observación 7.1.1** Nótese que el ejemplo muestra que el comportamiento de los algoritmos para un sistema lagrangiano singular libre y para un sistema lagrangiano ligado puede ser completamente diferente. ♠

## 7.2 Simetrías y constantes del movimiento

Estudiemos la relación entre las simetrías y constantes del movimiento de un sistema lagrangiano singular sujeto a ligaduras no-holonómicas.

Sea  $\Lambda$  una solución de la dinámica. Esto es, un campo de vectores  $\Lambda \in \mathfrak{X}(\bar{P}_f)$  de modo que verifica las ecuaciones del movimiento (7.1.2).

Introducimos, las siguientes definiciones:

**Definición 7.2.1** Se dice que una función  $f \in C^\infty(\bar{P}_f)$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$  si  $\Lambda f = 0$ .

**Definición 7.2.2** Una simetría dinámica de  $\Lambda$  es un campo de vectores  $\tilde{X}$  en  $\bar{P}_f$  de modo que  $[\tilde{X}, \Lambda] = 0$ .

Es evidente que si  $f$  es una constante del movimiento de  $\Lambda$ , entonces  $\tilde{X}f$  es también una constante del movimiento de  $\Lambda$  para cada simetría dinámica  $\tilde{X}$ .

Introducimos la siguiente definición.

**Definición 7.2.3** Una simetría de Lie de  $\Lambda$  es un campo de vectores  $X$  en  $TQ$  tal que  $X^c$  es tangente a  $\bar{P}_f$  y  $(X^c)_{/\bar{P}_f}$  es una simetría dinámica de  $\Lambda$ .

Ahora consideramos difeomorfismos  $\Psi : TQ \rightarrow TQ$  tales que preserven la 2-forma  $\omega_L$  y la función  $E_L$ , es decir, que preserven la estructura presimpléctica:

$$\Psi^* \omega_L = \omega_L, \quad \Psi^* E_L = E_L.$$

**Proposición 7.2.1** Si el difeomorfismo  $\Psi : TQ \rightarrow TQ$  preserva la estructura presimpléctica, y además,

$$\Psi^* \mu_i^V = \mu_i^V \text{ y } \Psi^* \phi_i = \phi_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

entonces restringe a un difeomorfismo  $\Psi_i : \bar{P}_k \rightarrow \bar{P}_k$ , donde  $\bar{P}_k$  es la subvariedad de ligaduras  $k$ -aria. Así,  $\Psi$  restringe a un difeomorfismo  $\Psi_f : \bar{P}_f \rightarrow \bar{P}_f$ .

**Demostración:** Primero probaremos la Proposición para  $k = 1$ . Para hacer esto, probaremos que, si  $v \in T_x TQ$  y  $v \in \ker \omega_L(x)$  entonces  $T_x \Psi(v) \in \ker \omega_L(\Psi(x))$ . En efecto, para cada  $u \in T_{\Psi(x)} TQ$

$$\omega_L(\Psi(x))(T_x \Psi(v), u) = \omega_L(x)(v, T_{\Psi(x)} \Psi^{-1}(u)) = 0,$$

puesto que  $\omega_L$  es  $\Psi$ -invariante.

Ahora probaremos que si  $x \in \bar{P}_1$ , entonces  $\Psi(x) \in \bar{P}_1$ , esto es,

$$\langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \ker \omega_L \rangle(\Psi(x)) = 0,$$

para ciertos valores  $\lambda^i \in \mathbb{R}$  y  $\phi_i(\Psi(x)) = 0, 1 \leq i \leq m$ . Como  $E_L$  y  $\mu_i^V$  son  $\Psi$ -invariantes, obtenemos que si  $w \in \ker \omega_L(\Psi(x))$  entonces

$$(dE_L + \lambda^i \mu_i^V)(w) = (dE_L + \lambda^i \mu_i^V)(T_{\Psi(x)} \Psi^{-1}(w)).$$

Además, como  $\Psi^* \phi_i = \phi_i, 1 \leq i \leq m$  obtenemos que  $x \in \bar{P}_1$ .

Supongamos ahora que la proposición es cierta para  $\bar{P}_k$  y probaremos que también es cierta para  $\bar{P}_{k+1}$ . Siguiendo un método similar, obtenemos que si  $v \in T_x \bar{P}_k^\perp$ , entonces  $T_x \Psi(v) \in$

$T_{\phi(x)}\bar{P}_k^\perp$ . También, de la  $\Psi$ -invarianza de  $E_L$  y  $\mu_i^V$ , obtenemos que  $\Psi(x) \in \bar{P}_{k+1}$  si  $x \in \bar{P}_{k+1}$ .

■

**Corolario 7.2.1** *Sea  $X$  un campo de vectores en  $TQ$  de modo que*

1.  $i_X\omega_L = dG$ , para alguna función  $F : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ,
2.  $XE_L = 0$ ,
3.  $L_X\phi_i = 0, L_{JX}\phi_i = 0$  y  $L_X\mu_i^V = 0$ .

Entonces,  $G_{/\bar{P}_f}$  es una constante del movimiento para cada solución  $\Lambda$  de la dinámica restringida.

**Demostración:** En primer lugar, el flujo de  $X$  está formado por difeomorfismos que preservan la estructura presimpléctica y, además,

$$\Psi^*\mu_i^V = \mu_i^V \text{ y } \Psi^*\phi_i = \phi_i, 1 \leq i \leq m.$$

Entonces, por la Proposición 7.2.1,  $X$  es tangente a  $\bar{P}_f$ . Además, como  $X$  verifica que

$$i_X\omega_L = dG,$$

la restricción de  $X$  a  $\bar{P}_f$  también verifica que

$$i_{X_{/\bar{P}_f}}\omega_{\bar{P}_f} = d(G_{/M_f}).$$

Deducimos que

$$\begin{aligned} \Lambda(G_{/\bar{P}_f}) &= d(G_{/\bar{P}_f})(\Lambda) \\ &= i_X\omega_{\bar{P}_f}(\Lambda) = -i_\Lambda\omega_{\bar{P}_f}(X) \\ &= -(dE_L + \lambda^i\mu_i^V)_{/\bar{P}_f}(X) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y, entonces,  $G/M_j$  es una constante del movimiento de cada solución de la dinámica restringida  $\Lambda$ . ■

### 7.3 El formalismo hamiltoniano

Sea  $T^*Q$  el fibrado cotangente con proyección canónica  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ . Denótese por  $Leg : TQ \rightarrow T^*Q$  la aplicación de Legendre definida por un lagrangiano  $L$ . Como ya sabemos,  $Leg$  se escribe localmente por  $Leg(q^A, \dot{q}^A) = (q^A, p_A = \partial L / \partial \dot{q}^A)$ . Si  $L$  es singular,  $Leg$  no es un difeomorfismo. Sin embargo, supongamos que  $L$  es casi regular. La subvariedad  $M_1$  se denomina la variedad de ligaduras primarias. Sea  $\lambda_Q$  la 1-forma de Liouville y  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$ . Como el lagrangiano es casi-regular, la energía es constante a lo largo de las fibras de  $Leg$ . Así,  $E_L$  proyecta en una función  $h_1$  en  $M_1$ :  $h_1(Leg(x)) = E_L(x)$ ,  $\forall x \in TQ$ . Si  $\omega_1$  es la restricción de  $\omega_Q$  a  $M_1$  entonces,  $(M_1, \omega_1)$  es una variedad presimpléctica.

Para obtener un formalismo hamiltoniano para el sistema lagrangiano singular sometido a las ligaduras no-holonómicas, supondremos que las ligaduras  $\{\phi_i; 1 \leq i \leq m\}$  son  $Leg$ -proyectables. Así,

$$V(\ker \omega_L)(\phi_i) = 0, 1 \leq i \leq m.$$

En este caso, obtenemos ligaduras  $\bar{\phi}_i$ ,  $(1 \leq i \leq m)$  en el lado hamiltoniano, definidas por  $\bar{\phi}_i(Leg(x)) = \phi_i(x)$ ,  $\forall x \in TQ$ . Además, si consideramos las 1-formas  $\bar{\mu}_i = \pi_Q^* \mu_i$ , obtenemos que  $Leg^* \bar{\mu}_i = \mu_i^V$ . Escribimos el siguiente sistema de ecuaciones en la subvariedad  $M_1$ :

$$\begin{cases} i_{\bar{X}} \omega_1 = dh_1 + \bar{\lambda}^i \bar{\mu}_i, \\ d\bar{\phi}_i(\bar{X}) = 0. \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Como en la sección anterior, desarrollamos un algoritmo de ligaduras para este sistema de ecuaciones y obtenemos la siguiente sucesión de subvariedades:

$$\bar{M}_1 = \{ \bar{x} \in M_1 / (dH_1 + \bar{\lambda}^i \bar{\mu}_i, \ker \omega_1)(\bar{x}) = 0, \bar{\phi}_i(\bar{x}) = 0 \},$$

y a partir de  $\bar{M}_k$ , obtenemos  $\bar{M}_{k+1}$  como sigue:

$$\bar{M}_{k+1} = \{ \bar{x} \in \bar{M}_k / \langle dH_1 + \bar{\lambda}^i \bar{\mu}_i, T\bar{M}_k^\perp \rangle(\bar{x}) = 0 \},$$

donde

$$T_{\bar{x}}\bar{M}_k^\perp = \{ \bar{v} \in T_{\bar{x}}\bar{M}_1 / \omega_1(\bar{x})(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \forall \bar{u} \in T_{\bar{x}}\bar{M}_k \}.$$

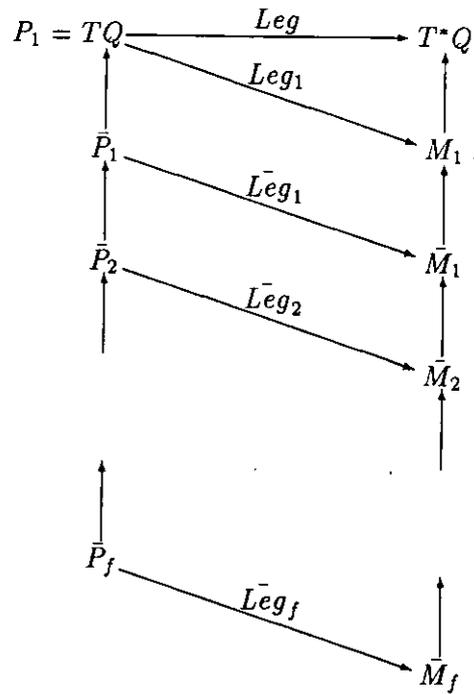
Comprobemos primero que  $Leg_1 : TQ \longrightarrow M_1$  satisface que  $Leg_1(\bar{P}_1) = \bar{M}_1$ , y la restricción  $\bar{Leg}_1 : \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{M}_1$  es también una fibración. En efecto, sea  $x \in \bar{P}_1$ . Se verificará que:

$$\langle dE_L + \lambda^i \mu_i^V, \ker \omega_L \rangle(x) = 0 \text{ y } \phi_i(x) = 0.$$

Pero esto implica que:

$$\langle dh_1(Leg_1(x) + \lambda^i(Leg_1(x))\bar{\mu}_i(Leg_1(x)), \ker \omega_1(Leg_1(x))) \rangle = 0,$$

y, además,  $\bar{\phi}_i(Leg_1(x)) = 0$ . Por lo tanto,  $Leg_1(\bar{P}_1) \subset \bar{M}_1$ . Pero, de un modo similar, se demuestra que para todo punto  $\bar{x} \in \bar{M}_1$  existe un punto  $x$  en  $\bar{P}_1$  de modo que  $Leg_1(x) = \bar{x}$ . De este modo, hemos probado que  $Leg_1(\bar{P}_1) = \bar{M}_1$ . Como consecuencia, se obtiene que  $Leg_1$  induce una aplicación diferenciable  $\bar{Leg}_1 : \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{M}_1$ , que es de hecho una submersión. Procediendo de un modo similar obtenemos una sucesión de fibraciones  $\bar{Leg}_k : \bar{P}_k \longrightarrow \bar{M}_k$  que relacionan ambas sucesiones, como puede verse en el diagrama de la página siguiente. En consecuencia, el comportamiento de los algoritmos es el mismo en ambos lados; es decir, si el algoritmo se estabiliza para algún  $k$  en la parte lagrangiana, lo mismo se verificará para la parte hamiltoniana y recíprocamente.



Se ha probado, entonces, que las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana son equivalentes. Esto es, dado un campo de vectores  $\xi \in \mathfrak{X}(\bar{P}_f)$  que es una solución de (7.1.2) y  $\bar{L}eg_f$ -proyectable, entonces su proyección  $\bar{\xi} = T\bar{L}eg_f(\xi)$  es una solución de (7.3.4). Recíprocamente, si  $\bar{\xi} \in \mathfrak{X}(\bar{M}_f)$  es una solución de (7.3.4), entonces cada campo de vectores en  $\bar{P}_f$  proyectable sobre  $\bar{\xi}$  es una solución de (7.1.2).

**Ejemplo 7.3.1 ((continuación))** Sea  $L$  la función lagrangiana definida en el ejemplo anterior y supongamos que está sujeto a la ligadura no-holonomica  $\phi = \dot{q}^1$ .

Como la transformación de Legendre es:

$$Leg(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = (q^1, q^2, \dot{q}^1, 0),$$

llegamos a que

$$M_1 = Leg(TQ) = \{(q^1, q^2, p_1, p_2) \in T^*Q / p_2 = 0\}$$

y

$$\omega_1 = dq^1 \wedge dp_1, \quad h_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(q^1)^2 q^2,$$

eligiendo coordenadas  $(q^1, q^2, p_1)$  en  $M_1$ .

Puesto que la ligadura  $\phi$  proyecta en la ligadura  $\bar{\phi} = p_1$ , se obtiene que las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} i_{\bar{X}}\omega_1 = dh_1 + \bar{\lambda}^i dq^1, \\ \bar{X}(p_1) = 0. \end{cases} \quad (7.3.5)$$

Aplicando el algoritmo, llegamos a la subvariedad final de ligaduras:

$$\bar{M}_1 = \{(q^1, q^2, p_1, p_2) \in T^*Q / q^1 = 0, p_1 = 0, p_2 = 0\}.$$

La dinámica está indeterminada o, de otro modo, cada campo de vectores  $g \frac{\partial}{\partial q_2}$  es una solución de la dinámica en el lado hamiltoniano para cualquier  $g \in C^\infty(\bar{M}_1)$ . ♠

## 7.4 Sistemas lagrangianos degenerados sujetos a ligaduras y estructuras casi-producto

Consideremos como en las secciones anteriores un lagrangiano degenerado  $L$  sujeto a las ligaduras  $\{\phi_i\}, (1 \leq i \leq m)$ .

Supongamos que el sistema presimpléctico  $(TQ, \omega_L, E_L)$  admite una dinámica global, esto es,  $\ker \omega_L(E_L) = 0$ . Supongamos también que las ligaduras son *Leg*-proyectables, es decir,  $V(\ker \omega_L)(\phi_i) = 0$ . Como consecuencia se obtiene que

$$\mu_i^V(\ker \omega_L) = 0, \quad (1 \leq i \leq m).$$

Además, si existe una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  adaptada a la forma presimpléctica  $\omega_L$  ( $\ker \omega_L = \ker \mathcal{A}$ ), entonces podemos fijar una única solución  $\xi$  del sistema lagrangiano libre, como ya hicimos en el Capítulo 5:

$$i_\xi \omega_L = dE_L \text{ y } \xi \in \text{Im} \mathcal{A}.$$

También, para cada  $i, 1 \leq i \leq m$ , existe un único campo de vectores  $Z_i$  de modo que

$$i_{Z_i} \omega_L = \mu_i^V \text{ y } Z_i \in \text{Im} \mathcal{A}.$$

Como en el Capítulo 6, si la matriz  $C = (C_{ij}) = (Z_i(\phi_j))$ ,  $(1 \leq i, j \leq m)$  es regular, podemos construir una estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  en  $TQ$  como sigue:

$$\mathcal{Q} = C^{ij} Z_j \otimes d\phi_i \text{ y } \mathcal{P} = \text{id} - \mathcal{Q} .$$

Si consideramos la subvariedad  $\bar{P}_1$  de  $TQ$  definida por la anulaci3n de todas las ligaduras. Entonces, deducimos que  $(\mathcal{P}(\xi))_{/\bar{P}_1}$  es una soluci3n de la din3mica del sistema con ligaduras.

Para obtener el formalismo hamiltoniano, consideramos el sistema presimpl3ctico  $(M_1, \omega_1, h_1)$  sujeto a las ligaduras  $\bar{\phi}_i$ ,  $(1 \leq i \leq m)$  donde  $\bar{\phi}_i$  est3n definidas como en la secci3n 7.3, es decir,  $\bar{\phi}_i(\text{Leg}(x)) = \phi_i(x)$ ,  $\forall x \in TQ$ .

Si la estructura casi-producto  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es proyectable sobre  $M_1$  (v3ase [74]) obtenemos una estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  adaptada a  $\omega_1$ . Adem3s, el campo de vectores  $\xi \in \text{Im}\mathcal{A}$  soluci3n de las ecuaciones del movimiento es proyectable sobre  $M_1$  en un campo de vectores  $\tilde{\xi}$  soluci3n de la ecuaci3n

$$i_{\tilde{\xi}}\omega_1 = dh_1 .$$

La estructura casi-producto  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  es tambi3n proyectable en una estructura casi-producto  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{Q}})$  en  $M_1$ .

Como en el Cap3tulo 5, podemos clasificar las ligaduras de  $M_1$  en ligaduras de primera y segunda clase. Aparecen tres situaciones diferentes:

**1. Todas las ligaduras primarias son de segunda clase.**

Como en la Secci3n 5.2.1, constru3mos una estructura casi-producto  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{Q}})$  en  $T^*Q$ . Adem3s, existe la estructura casi-producto  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{Q}})$  en  $M_1$ . Consideremos una extensi3n arbitraria  $H$  del hamiltoniano  $h_1$  en  $M_1$ . Encontramos la 3nica soluci3n (puesto que  $(M_1, \omega_1)$  es simpl3ctica) de la din3mica con ligaduras tomando el campo de vectores en  $\tilde{M}_1$ :

$$\left( \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\mathcal{P}}(X_H)_{/M_1}) \right)_{/M_1} .$$

De hecho,  $\tilde{\mathcal{P}}(X_H)_{/M_1} = \tilde{\xi}$ .

**2. Todas las ligaduras primarias son de primera clase.**

La estructura casi-producto  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  en  $M_1$  est3 adaptada a la forma presimpl3ctica  $\omega_1$ .

Ahora, fijamos la solución de la dinámica con ligaduras con

$$\left(\bar{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_1(X_{H/M_1}))\right)_{/M_1}.$$

Obtenemos que  $\tilde{\xi} = \mathcal{A}_1(X_{H/M_1})$ .

### 3. Existen ligaduras de primera y de segunda clase.

En este caso, existen tres estructuras casi-producto diferentes  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{Q}})$  en  $T^*Q$  y  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  y  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{Q}})$  en  $M_1$ . La solución de la dinámica es precisamente:

$$\left(\bar{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_1(\tilde{\mathcal{P}}(X_H)_{/M_1}))\right)_{/M_1}.$$

Aquí, obtenemos que  $\tilde{\xi} = \mathcal{A}_1(\tilde{\mathcal{A}}(X_H)_{/M_1})$ .

## 7.5 El problema de la ecuación diferencial de segundo orden

En la Sección 7.1 hemos encontrado una subvariedad final de ligaduras  $\bar{P}_f$  donde existen soluciones completamente consistentes  $\xi$  de la dinámica. Pero, en general, estas soluciones no verifican la condición de SODE, esto es,  $(J\xi = C)_{/\bar{P}_f}$ . Para resolver este problema procederemos como en el caso de los lagrangianos singulares libres de ligaduras (véase [52]).

Supongamos que  $\xi$  es *Leg*-proyectable en un campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\bar{M}_f)$  y localmente expresado por

$$\xi = \mathcal{A}^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \mathcal{B}^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}.$$

Como  $\xi$  verifica la ecuación (7.1.2) deducimos que  $\xi^* = J\xi - C \in \ker \omega_L \cap \text{Im} J = \ker T\text{Leg}$ . Como  $\xi$  es proyectable obtenemos que  $\mathcal{A}^A$  es constante a lo largo de las fibras de la fibrición  $\bar{L}eg_f : \bar{P}_f \rightarrow \bar{M}_f$ . Sea un punto arbitrario  $(q_0^A, v_0^A) \in \bar{P}_f$  y sea  $\text{Leg}(q_0^A, v_0^A) = z_0$ . La curva integral de  $\xi^*$  con ese valor inicial es  $\sigma(t) = (q_0^A, \mathcal{A}^A - e^{-t}(\mathcal{A}^A - \dot{q}_0^A))$ . Un cálculo directo muestra que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = (q_0^A, \mathcal{A}^A). \quad (7.5.6)$$

Por lo tanto el punto límite está en la fibra sobre  $z_0$ . Así, hemos obtenido una sección global

$s : \bar{M}_f \rightarrow \bar{P}_f$  de  $L\bar{e}g_f$  y, una subvariedad  $S = s(\bar{M}_f)$  de  $\bar{P}_f$ . Un cálculo directo a partir de (7.5.6) muestra que  $(\xi^*)|_S = 0$ . Así, si denotamos por  $\tilde{\xi}$  el campo de vectores  $Ts(Z) \in X(S)$ , obtenemos que

$$\begin{cases} (i_{\tilde{\xi}}\omega_L = dE_L + \lambda^i \mu_i^V)|_S, \\ (d\phi_i(\tilde{\xi}) = 0)|_S, \\ (J\tilde{\xi} = C)|_S. \end{cases} \quad (7.5.7)$$

**Ejemplo 7.5.1 ((continuación))** Sigamos con la función lagrangiana  $L$  y la ligadura  $\phi = \dot{q}^1$ . Ahora, queremos estudiar el problema de la ecuación diferencial de segundo orden en el lado hamiltoniano

Si elegimos una solución proyectable de las ecuaciones del movimiento en  $\bar{P}_f$

$$\xi = f(q^2) \frac{\partial}{\partial q^2},$$

obtenemos

$$S = \{(0, q^2, 0, f(q^2)) \in TQ / q^2 \in \mathbb{R}\},$$

y

$$\tilde{\xi} = \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial f}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2}.$$

# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of Mechanics, 2nd ed., Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts, 1978.*
- [2] C. Albert: *Le théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact*, *J. Geom. and Phys.*, 6, (4) (1989), 627-649.
- [3] M. Anastasiei: *The Geometry of Time-Dependent Lagrangians*, *Mathl. Comput. Modelling* 20 4/5 (1994), 67-81.
- [4] L. C. de Andrés, M. de León, P. R. Rodrigues: *Connections on tangent bundles of higher order*, *Demonstratio Mathematica*, XXII, 3 (1989), 607-632.
- [5] L. C. de Andrés, M. de León, P. R. Rodrigues: *Connections on tangent bundles of higher order associated to regular Lagrangians*, *Geometriae Dedicata*, 39 (1991), 17-28.
- [6] J. Barcelos-Neto, N. R. F. Braga: *Symplectic analysis of a Dirac constrained theory*, *J. Math. Phys.*, 35 (7) (1994), 3497-3503.
- [7] L. Bates, J. Śniatycki: *Nonholonomic reduction*, *Reports on Mathematical Physics*, 32 (1) (1992), 99-115.
- [8] K. H. Bhaskara, K. Viswanath: *Poisson algebras and Poisson manifolds*, *Longman Scientific & Technical, Essex, 1988.*
- [9] E. Binz, J. Śniatycki, H. Fischer: *Geometry of Classical Fields*, *North-Holland and Math. Studies*, 154, North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [10] M. Bregola, C. Ferrario: *Hamilton's principle for constrained systems*, Proceedings of the XXII International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Itxapa-Zihiatanejo, Sept. 20-24, 1993, Advances in Applied Clifford Algebras (Proc. Suppl.) 4 (S1) (1994), 341-348.
- [11] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P. A. Griffiths: *Exterior Differential Systems*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [12] N. Byers: *The Life and Times of Emmy Noether. Contributions of Emmy Noether to Particle Physics*, Proceeding of the Conference on the history of original ideas and basic discoveries in particle physics, Erice, Italy, 1994.
- [13] F. Cantrijn, J. F. Cariñena, M. Crampin, L. A. Ibort: *Reduction of Degenerate Lagrangian Systems*, J. Geom. and Phys., **3** (1986), 353-400.
- [14] F. Cantrijn, M. de León, E. A. Lacomba: *Gradient vector fields on cosymplectic manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen., **25** (1992), 175-188.
- [15] J. F. Cariñena: *Theory of singular Lagrangians*, Fortschr. Phys. **38** (9) (1990), 641-679.
- [16] J. F. Cariñena, J. Fernández-Núñez: *Generalized symmetry in time-dependent Lagrangian Mechanics*, J. Group Theory **1** (1993), 47-60
- [17] J. F. Cariñena, J. Fernández-Núñez, E. Martínez: *A Geometric Approach to Noether's Second Theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics*, Lett. Math. Phys., **23** (1991), 51-63.
- [18] J. F. Cariñena, J. Fernández-Núñez, E. Martínez: *Noether's Theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics*, Rep. Math. Phys., **31** (2) (1992), 189-203.
- [19] J. F. Cariñena, J. Fernández-Núñez, E. Martínez: *Geometric Theory of time-dependent singular Lagrangians*, Fortschr. Phys., **41** (6) (1993), 517-552.
- [20] J. F. Cariñena, C. López, E. Martínez: *A new approach to the converse of Noether's theorem*, J. Phys. A: Math. Gen., **22** (1989), 4777-4786.

- [21] J. F. Cariñena, C. López, E. Martínez: *Sections Along a Map Applied to higher-Order Lagrangian Mechanics. Noether's Theorem*, Acta Applicandae Mathematicae, **25** (1991), 127-151.
- [22] J. F. Cariñena, C. López, M. F. Rañada: *Geometric Lagrangian approach to first-order systems and applications*, J. Math. Phys., **29** (5) (1988), 1134-1142.
- [23] J. F. Cariñena, E. Martínez: *Symmetry theory and Lagrangian inverse problem for time-dependent second-order differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen., **22** (1989), 2659-2665.
- [24] J. F. Cariñena, M. F. Rañada: *Noether's Theorem for Singular Lagrangians*, Lett. Math. Phys., **15** (1988), 305-311.
- [25] J. F. Cariñena, M. F. Rañada: *Lagrangians systems with constraints: a geometric approach to the method of Lagrange multipliers*, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993), 1335-1351.
- [26] J. F. Cariñena, M. F. Rañada: *Comments on the presymplectic formalism and the theory of regular Lagrangians with constraints*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), L91-L97.
- [27] J. Casey: *Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles*, Am. J. Phys. **62** (9) (1994), 836-847.
- [28] L. Castellani: *Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems*, Annals of Physics **143** (1982), 357-371.
- [29] M. Chaichian, D. L. Martínez: *On the Noether identities for a class of systems with singular Lagrangians*, J. Math. Phys. **35** (12) (1994), 6536-6545.
- [30] D. Chinea, M. de León, J. C. Marrero: *The constraint algorithm for time-dependent Lagrangians*, J. Math. Phys., **35** (7) (1994), 3410-3447.
- [31] G. C. Constantelos: *On the Hamilton-Jacobi Theory with Derivatives of Higher Order*, II Nuovo Cimento, **84 B 1** (1984), 91-101.
- [32] M. Crampin: *Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen., **16** (1983), 3755-3772.

- [33] M. Crampin: Jet bundle techniques in analytical mechanics, *XIX Summer School on Mathematical Physics*, Ravello, 1994.
- [34] M. Crampin, G. E. Prince, G. Thompson: *A geometrical version of the Helmholtz conditions in time-dependent Lagrangian dynamics*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17** (1984), 1437-1447.
- [35] M. Crampin, W. Sarlet, F. Cantrijn: *Higher-order differential equations and higher-order Lagrangians mechanics*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **99** (1986), 565-587.
- [36] P. Dazord: *Mécanique Hamiltonienne en présence de contraintes*, *Illinois J. Math.* **38** (1) (1994), 148-175.
- [37] A. Dewisme, S. Bouquet: *First integrals and symmetries of time-dependent Hamiltonian systems*, *J. Math. Phys.* **34** (3) (1994), 997-1006.
- [38] P. A. M. Dirac: *Lecture on Quantum Mechanics*, *Belfer Graduate School of Science*, Yeshiva University, New York, 1964.
- [39] B. A. Dubrovin, M. Giordano, G. Marmo, A. Simoni: *Poissons Brackets on Presymplectic Manifolds*, *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 8, No. 21 (1993) 3747-3771.
- [40] A. Echevarría, M. C. Muñoz, N. Román: *Geometrical Setting of time-dependent regular systems. Alternative models*. *Reviews in Mathematical Physics* **3** (3) (1991), 301-330.
- [41] J. Fernández Núñez: *Teoría de Jets y Geometría de Sistemas Lagrangianos singulares dependientes del tiempo*, Tesis doctoral, Departamento de Física de la Universidad de Oviedo, 1991.
- [42] C. Ferrario, A. Passerini: *Symmetries and constants of motion for constrained Lagrangian systems: a presymplectic version of the Noether theorem*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23** (1990), 5061-5081.
- [43] S. de Filippo, G. Landi, G. Marmo, G. Vilasi: *Tensor fields defining a tangent bundle structure*, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **50** (2) (1989), 205-218.
- [44] F. Gantmacher: *Lectures in Analytical Mechanics*, *Mir Publishers*, Moscow, 1970.

- [45] P. L. García, J. Muñoz: *Higher order Analytical Dynamics*, Proceedings of the VII ELAM, Univ. Simón Bolívar, Caracas (1984), 19-48.
- [46] V. Gershkovich, A. Vershik: *Nonholonomic manifolds and nilpotent analysis*, J. G. P. **5** (3) (1988), 407-452.
- [47] G. Giachetta: *Jet methods in nonholonomic mechanics*, J. Math. Phys. **33** (5) (1992), 1652-1665.
- [48] A. Giraldo, M. de León, P. R. Rodrigues: *Sur la reduction de systèmes lagrangiens dégénérés d'ordre supérieur*, C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 309 (1989), 363-366.
- [49] M. J. Gotay: *Presymplectic Manifolds, Geometric Constraint Theory and the Dirac-Bergmann Theory of Constraints*, Dissertation, Center of Theoretical Physics, University of Maryland, 1979.
- [50] M. Gotay, J. Nester, G. Hinds: *Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints*, J. Math. Phys. **19**, 11 (1978), 2388-2399.
- [51] M. J. Gotay, J. M. Nester: *Presymplectic Lagrangian systems I: The Constraint Algorithm and the Equivalence Theorem*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **A30** (1979), 129-142.
- [52] M. J. Gotay, J. M. Nester: *Presymplectic Lagrangian systems II: The second order differential equation problem*, Ann. Inst. H. Poincaré, **A32** (1980), 1-13.
- [53] M. Gotay, J. Nester, G. Hinds: *Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints*, J. Math. Phys. **19**, 11 (1978), 2388-2399.
- [54] M. J. Gotay: *On the validity of the Dirac's conjecture regarding first-class secondary constraints*, J. Phys. A: Math. Gen, **16** (1983), 1141-1145.
- [55] X. Gràcia I Sabaté: *Sistemes lligats: estudi geomètric i transformations de simetria*, Tesis doctoral, Facultat de Física de la Universitat de Barcelona, 1991.
- [56] J. Grifone: *Structure Presque-Tangente et Connexions, I; II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **22**, 1 (1972), 287-334; *ibidem*, **32**, 1, 291-338.

- [57] D. R. Grigore: *Generalized Lagrangian dynamics and noetherian symmetries*, International Journal of Modern Physics A, **7** (28) (1992), 7153-7168.
- [58] D. R. Grigore: *Higher order Lagrangian theories and Noetherian symmetries*, Preprint Institute of Atomic Physics, Marinela Dumitriu, Bucharest (1992).
- [59] D. R. Grigore: *A Generalized Lagrangian Formalism in particle mechanics and Classical Field Theory*, Fortschr. Phys., **41** (7) (1993), 569-617.
- [60] H. R. Hertz: *Gesammelte Werke. Band III, Der Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Barth, Leipzig, 1894; English translation Dover, New York, 1956.
- [61] L. A. Ibort, J. Marín-Solano: *On the inverse problem of the calculus of variations for a class of coupled dynamical systems*, Inverse Problems, **7** (1991), 713-725.
- [62] Th. v. Kármán, M. A. Biot: *Mathematical Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1940.
- [63] Klein, J.: *Espaces variationnels et Mécanique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **12** (1962), 1-124.
- [64] J. Koiller: *Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry*, Arch. Rational Mech. Anal. **118** (1992), 113-148.
- [65] O. Krupková: *A geometric setting for higher-order Dirac-Bergmann theory of constraints*, J. Math. Phys. **35** (12) (1994), 6557-6576.
- [66] O. Krupková, A. Vondra: *On some integration methods for connections on fibered manifolds*, Proc. Conf. Diff. Geom. and Its Appl., Opava 1992, Silesian University, Opava, 89-101.
- [67] M. de León, J. C. Marrero: *Constrained time-dependent Lagrangian systems and Lagrangian submanifolds*, J. Math. Phys. **34** (2) (1993), 622-644.
- [68] M. de León, D. Martín de Diego: *Nonautonomous Submersive Second-Order Differential Equations and Lie Symmetries*, International Journal of Theoretical Physics **33** (8) (1994), 1759-1781.

- [69] M. de León, D. Martín de Diego: *Classification of Symmetries for Higher Order Lagrangian Systems*, *Extracta Mathematicae*, **9** (1) (1994), 32-36.
- [70] M. de León, D. Martín de Diego: *Classification of Symmetries for Higher Order Lagrangian Systems II: the Non-Autonomous Case*, *Extracta Mathematicae*, **9** (2) (1994), 1-4.
- [71] M. de León, D. Martín de Diego: *Symmetries and constants of the motion for singular Lagrangian systems*, Preprint IMAFF-CSIC, 1994.
- [72] M. de León, D. Martín de Diego: *Symmetries and constants of the motion for higher order Lagrangian systems*, *J. Math. Phys.*, **36** (8) (1995), 4138-4161.
- [73] M. de León, D. Martín de Diego: *Poisson reduction of presymplectic manifolds*, aparecerá en *Extracta Mathematicae*.
- [74] M. de León, D. Martín de Diego, P. Pitanga: *A new look at degenerate Lagrangian dynamics from the viewpoint of almost product structures*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28** (1995), 4951-4971.
- [75] M. de León, D. Martín de Diego: *Solving non-holonomic Lagrangian dynamics in terms of almost product structures*, Preprint IMAFF-CSIC, Madrid 1995.
- [76] M. de León, D. Martín de Diego: *Non-holonomic constraints in jet bundles and almost product structures*, *Proceedings Third Meeting on Current Ideas in Mechanics and Related Fields*, Segovia (Spain), June 19-23, 1995.
- [77] M. de León, D. Martín de Diego: *A constraint algorithm for singular Lagrangians submitted to non-holonomic constraints*, Preprint IMAFF-CSIC, Madrid 1995.
- [78] M. de León, E. Merino, J. A. Oubiña, M. Salgado: *A characterization of tangent and stable bundles*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, **61**, 1 (1994), 1-15.
- [79] M. de León, J. A. Oubiña y M. Salgado: *Characterization of higher-order tangent bundles*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **36**, 1 (1995), 73-87.
- [80] M. de León, P. Pitanga, P. R. Rodrigues: *Symplectic reduction of higher order Lagrangian systems with symmetry*, *J. Math. Phys.* **35** (12), (1994), 6546-6556.

- [81] M. de León, P. R. Rodrigues: *Formalisme hamiltonien symplectique sur les fibrés tangents d'ordre supérieur*, C. R. Acad. Sci. Paris, série. II **301** (1985), 103-106.
- [82] M. de León, P. R. Rodrigues: *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*, *North-Holland Mathematics Studies*, 112, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [83] M. de León, P. R. Rodrigues: *Almost tangent Geometry and higher order mechanical systems*, Proceedings of the Conference of Differential Geometry and its Applications, 1986, Brno, Czecholovakia, Reidel and J. E. Purkyně, Brno (1987), 179-195.
- [84] M. de León, P. R. Rodrigues: *Higher order almost tangent geometry and non-autonomous Lagrangian dynamics*, Supp. Rend. Circolo Mat. Palermo, ser. II, 16 (1987), 157-171.
- [85] M. de León, P. R. Rodrigues: *Dynamical connections and non-autonomous Lagrangian systems*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, IX, no. 2 (1988), 171-181.
- [86] M. de León, P. R. Rodrigues: *Degenerate Lagrangian Systems and their Associated Dynamics*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 8, Roma (1988), 105-130.
- [87] M. de León, P. R. Rodrigues: *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, *North-Holland Math.*, Ser. 152, Amsterdam, 1989.
- [88] M. de León, P. R. Rodrigues: *Equivalence of Degenerate Lagrangians of Higher Order*, Differential Geometry and its Applications. Proc. Conf., Aug. 27-Sept. 2, 1989, Brno, World Scientific, Singapore, 1990, 255-264.
- [89] M. de León, P. R. Rodrigues: *Almost contact structures and time-dependent Lagrangian systems*, Portugaliae Mathematica, **47** 2 (1990), 115-130.
- [90] M. de León, P. R. Rodrigues: *Second order differential equations and degenerate Lagrangians*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Ser. VII, vol. 11 (1991), 715-728.
- [91] M. de León, P. R. Rodrigues: *Higher order mechanical Systems with constraints*, International Journal of Theoretical Physics, **31** (7) (1992), 1303-1313.

- [92] P. Liberman, Ch. Marle: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [93] C. López: *Estudio Geométrico de Sistemas con Ligaduras*, Tesis doctoral, Departamento de Física Teórica, Universidad de Zaragoza, 1989.
- [94] Ch. Marle: *Sous-variétés de rang constant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectique*, C. R. Acad. Sc. Paris, **295** (1982), 119-122.
- [95] C. M. Marle: *Sur la géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **311**, sér. I (1990), 839-845.
- [96] G. Marmo: *Particle Dynamics on Fiber Bundles*, *Monographs and Textbooks in Physical Science*, Bibliopolis, Napoli, 1988.
- [97] G. Marmo, G. Mendella, W. M. Tulczyjew: *Symmetries and constants of the motion for dynamics in implicit form*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **57** 2, (1992), 147-166.
- [98] G. Marmo, N. Mukunda: *Symmetries and Constants of the Motion in the Lagrangian Formalism on  $TQ$ : beyond Point Transformations*, Il Nuovo Cimento, **92 B** 1 (1986), 1-12.
- [99] G. Marmo, N. Mukunda, J. Samuel: *Dynamics and Symmetry for Constrained Systems: a Geometrical Analysis*, Riv. Nuovo Cim., **6** (2) (1983), 2-62.
- [100] G. Marmo, E. J. Saletan: *Ambiguities in the Lagrangian and Hamiltonian Formalism: Transformations Properties*, Il Nuovo Cimento, **40 B** 1 (1977), 67-89.
- [101] J. E. Marsden, R. Montgomery, T. Ratiu: *Reduction, symmetry, and phases in mechanics*, *Memoirs of the A. M. S.*, **436**, 1990.
- [102] J. E. Marsden, T. Ratiu: *Reduction on Poisson Manifolds*, Letters in Mathematical Physics **11** (1986), 161-169.
- [103] E. Massa, E. Pagani: *Classical dynamics of non-holonomic systems: a geometric approach*, Ann. Inst. Henri Poincaré **55** (1) (1991), 511-544.
- [104] E. Martínez Fernández: *Geometría de las ecuaciones diferenciales aplicadas a la mecánica*, Tesis doctoral, Departamento de Física Teórica de la Facultad de Ciencias, Zaragoza, 1991.

- [105] R. Miron: *Lagrange Geometry*, Mathl. Comput. Modelling **20** 4/5 (1994), 25-40.
- [106] P. Morando, S. Pasquero: *The symmetry in the structure of dynamical and adjoint symmetries of second-order differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 1943-1955.
- [107] A. Morimoto: *Prolongations of Geometric Structures*, *Lecture Note*, Math. Inst. Nagoya Univ., Nagoya, 1969.
- [108] J. Neimark, N. Fufaev: *Dynamics of Nonholonomic Systems*, *Transactions of Mathematical Monographs*, Vol. 33, AMS, Providence, 1972.
- [109] P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, *Springer*, New York, 1986.
- [110] Y. Pironneau: *Sur les liaisons non linéaires déplacement virtuels à travail nul, conditions de Chetaev*, Proc. "Modern Developments in Analytical Mechanics" Vol. II, Torino (1982), 671-686.
- [111] P. Pitanga: *Symplectic Projector in Constrained Systems*, *Il Nuovo Cimento*, **103 A**, 11 (1990), 1529-1533.
- [112] P. Pitanga: *Projector method and constrained systems*, *Il Nuovo Cimento* **109B**, 2 (1994), 113-119.
- [113] P. Pitanga, K. C. Mundin: *Projector in Constrained Quantum Dynamics*, *Il Nuovo Cimento*, **101 A**, 2 (1989), 345-352.
- [114] P. Pitanga, P. R. Rodrigues: *Projectors on Poisson manifolds*, Preprint 1995.
- [115] E. Planchart: *Geometría Simpléctica*, *Fondo Editorial*, Caracas, 1984.
- [116] G. Prince: *Toward a classification of dynamical symmetries in classical mechanics*, Bull. Austral. Math. Soc., **27** (1983), 53-71.
- [117] G. Prince: *A complete classification of dynamical symmetries in Classical Mechanics*, Bull. Austral. Math. Soc., **32** (1985), 299-308.

- [118] M. F. Rañada: *Time-dependent Lagrangians systems: A geometric approach to the theory of systems with constraints*, J. Math. Phys. **35** (2) (1994), 748-758.
- [119] J. R. Ray: *Nonholonomic constraints*, Amer. J. Phys. **34** (1966), 406-408.
- [120] F. Riewe: *Generalized Mechanics of a Spinning Particle*, Lett. Nuovo Cimento, **1** 20 (1971), 807-808.
- [121] F. Riewe: *Relativistic Classical Spinning-Particle Mechanics*, Il Nuovo Cimento, **8 B** 1 (1972), 271-277.
- [122] V. V. Rumiantsev: *On Hamilton's Principle for Nonholonomic systems*, PMM, Vol. 42 (3) (1978), 387-399
- [123] E. J. Saletan, A. H. Cromer: *A Variational Principle for Non-holonomic Systems*, Amer. J. Phys. **38** (7) (1976), 892-897.
- [124] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles*, *London Math. Soc. Lect. Notes Series* **142**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [125] W. Sarlet: *Note on equivalent Lagrangians and symmetries*, J. Physics. A: Math. Gen., **16** (1983), L229-L223.
- [126] W. Sarlet: *Symmetries and alternative Lagrangians in higher-order mechanics*, Physics Letters, **108** A, 1 (1985), 14-18.
- [127] W. Sarlet: *A direct geometrical construction of the dynamics of non-holonomic Lagrangian systems*, Proceedings Third Meeting on Current Ideas in Mechanics and Related Fields, Segovia (Spain), June 19-23, 1995.
- [128] W. Sarlet, F. Cantrijn: *Higher-order Noether symmetries and constants of the motion*, J. Phys. A: Math. Gen., **14** (1981) 479-492.
- [129] W. Sarlet, F. Cantrijn, M. Crampin: *Pseudo-symmetries, Noether's theorem and the adjoint equation*, J. Phys. A: Math. Gen., **20** (1987) 1365-1376.
- [130] W. Sarlet, F. Cantrijn, D. J. Saunders: *A geometrical framework for the study of non-holonomic Lagrangian systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 3253-3268.

- [131] W. Sarlet, G. E. Prince, M. Crampin: *Adjoint symmetries for time-dependent second order equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 1335-1347.
- [132] J. Z. Simon: *Higher-derivative Lagrangians, nonlocality, problems, and solutions*, Phys. Rev. D **41** (12) (1990), 3720-3733.
- [133] R. Skinner, R. Rusk: *Generalized Hamiltonian dynamics. I. Formulation on  $T^*Q \oplus TQ$* , J. Math. Phys., **24** (11) (1983), 2589-2594.
- [134] R. Skinner, R. Rusk: *Generalized Hamiltonian dynamics. II. Gauge transformations*, J. Math. Phys., **24** (11) (1983), 2595-2601.
- [135] J. M. Souriau: *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [136] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda: *Classical Dynamics: A modern perspective*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [137] K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [138] J. L. Synge: *Geodesics in non-holonomic geometry*, Math. Ann. **99** (1928), 738-751.
- [139] W. Tulczyjew: *Sur la différentielle de Lagrange*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, **280** (1975), 1295-1298.
- [140] W. Tulczyjew: *Simple models of Lagrangian submanifolds of symplectic manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, **35** (1976-1977), 97-112.
- [141] I. Vaisman: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Math. 118, Birkhauser, Basel, 1994.
- [142] A. M. Vershik, L. D. Faddeev: *Differential Geometry and Lagrangian Mechanics with constraints*, Soviet Physics-Doklady **17** (1) (1972), 34-36.
- [143] A. Vondra: *Natural Dynamical Connections*, Czechoslovak Mathematical Journal **41** (116) (1990), 724-730.
- [144] A. Vondra: *Semisprays, connections and regular equations in higher-order mechanics*, Proc. Conf. Diff. Geom. and Its Appl., Brno 1989, World Scientific, Singapore, 1990, 276-287.

- [145] A. Vondra: *On some connections related to the geometry of regular higher-order dynamics*, Sborník VA, Rada B **2** (1992), 7-18.
- [146] A. Vondra: *Towards a geometry of higher-order partial differential equations represented by connections on fibered manifolds*, Preprint Brno 1995.
- [147] G. Vrănceanu: *Opera mathematică*, 3 vol, *Editura Academiei Republicii Socialiste România*, Bucharest 1969.
- [148] R. Weber: *Kanonische Theorie Nichtholonomer Systeme*, *Peter Lang*, Bern, Frankfurt am Main, 1981.
- [149] R. Weber: *Hamiltonian Systems with Constraints and their Meaning in Mechanics*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **91** (1985), 309-335.
- [150] A. Weinstein: *The local structure of Poisson manifolds*, *J. Differential Geometry* **18** (1983), 523-557.
- [151] A. Wipf: *Hamilton's Formalism for Systems with Constraints*, *Lecture Notes in Phys.* **434**, Springer, Berlin, 1994.
- [152] E. T. Whittaker: *A treatise on the Analytical Dynamics of Particle and Rigid Bodies*, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 1959.
- [153] K. Yano, S. Ishihara: *Tangent and Cotangent Bundles*, *Marcel Dekker*, New York, 1973.