

21.125

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

**MATRICES DE GRAM Y  
ESPACIOS DE ANGULOS DIEDRICOS  
DE POLIEDROS**



\* 5 3 0 9 6 4 7 5 6 9 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Memoria dirigida por el profesor Enrique Arrondo  
de la Universidad Complutense de Madrid  
y presentada por

**RAQUEL DIAZ SANCHEZ**

para optar al grado de Doctor en Matemáticas  
por la Universidad Complutense de Madrid

**21.125**

Madrid, junio de 1996



ARCHIVO

Me gustaría en primer lugar agradecer a José-María Montesinos por haberme introducido en el ámbito de la Geometría Hiperbólica, y por haberme propuesto diversos problemas entre ellos el tema de esta memoria.

Agradezco a Jean-Pierre Otal, a Riccardo Benedetti y a Igor Rivin por sus valiosas conversaciones y sugerencias. Al Departamento de Matemática de Pisa, al MSRI y al IHP por su hospitalidad durante mi estancia en estos centros.

Agradezco a Jesús Ruiz por sus acertados comentarios para mejorar la claridad de lo que aquí se ha escrito.

Muy especialmente, quiero agradecer a Enrique Arrondo por su inestimable ayuda, por las maratónicas jornadas y discusiones, pero sobre todo por su confianza en mí hasta llegar a convencerme a mí misma (buen trabajo le ha costado . . .)

Agradezco a mi familia y amigos por el cariño y la paciencia con que me han tratado a lo largo de todos estos años.

Quisiera agradecer profundamente a todos mis compañeros y amigos de los departamentos de Álgebra y Geometría y Topología (no puedo nombrar a tantos), por el ánimo que me han dado y por tantos entrañables ratos dentro y fuera de la facultad, las comidas diarias, los encuentros científicos, gastronómicos y deportivos. A todos ellos les dedico ahora esta tesis.

## INDICE

INTRODUCCION . . . . .	1
1. PRELIMINARES	
1.1. Espacios geométricos . . . . .	5
1.2. Politopos afines . . . . .	12
1.3. Conos poliedrales . . . . .	15
1.4. Productos exteriores . . . . .	21
Apéndice A: Notaciones sobre matrices e identidad de Sylvester . . . . .	24
Apéndice B: Teorema de Andreev . . . . .	25
2. SIMPLICES ESFERICOS, EUCLIDEOS E HIPERBOLICOS	
2.1. Caracterización de la matriz de Gram de símlices . . . . .	27
2.2. Espacio de ángulos de tetraedros compactos hiperbólicos. . . . .	34
2.3. Coordenadas para símlices. . . . .	50
3. CARACTERIZACION DE MATRICES DE GRAM DE POLITOPOS DADO . . . . .	57
3.1. Herramientas combinatorias . . . . .	59
3.2. Tipo combinatorio . . . . .	65
3.3. Orientaciones . . . . .	68
3.4. Caracterización de matrices de Gram de politopos . . . . .	76
Apéndice C: Descripción del tipo combinatorio de conos poliedrales . . . . .	85
4. TEOREMA DE ANDREEV PARA ALGUNOS TIPOS DE POLIEDROS . . . . .	90
4.1. Lemas técnicos y significados geométricos . . . . .	91
4.2. Prismas triangulares . . . . .	96
4.3. Descendientes de tetraedros . . . . .	117
4.4. Ejemplos y comentarios sobre el cubo. . . . .	124
BIBLIOGRAFIA . . . . .	129

# Introducción

Un poliedro en un espacio geométrico (espacio euclídeo, esférico o hiperbólico) es un objeto combinatorio con unas propiedades métricas inducidas por la métrica del espacio.

Por una parte, la superficie del poliedro hereda una métrica que es localmente de curvatura constante salvo en los vértices (los ángulos de las caras y las longitudes de aristas son propiedades de esta métrica “intrínseca”). Se puede considerar el problema recíproco: dada una métrica en la superficie de la esfera que es localmente de curvatura constante, salvo en un conjunto finito de puntos, ¿existe un poliedro en el espacio euclídeo, esférico o hiperbólico tal que su borde sea isométrico a la superficie dada? los Teoremas de Alexandrow ([A1]) dan respuesta afirmativa a estos problemas, supuestas ciertas condiciones sobre los “ángulos cónicos” de los puntos singulares. Más recientemente, los trabajos de Rivin ([HR], [Ri3]) responden a este tipo de problema para el poliedro dual de un poliedro hiperbólico (en este caso se necesitan además ciertas condiciones sobre las longitudes de las geodésicas). Se tiene además que el poliedro que realiza la superficie dada es único salvo isometría. Sin embargo, no se sabe determinar el tipo combinatorio de este poliedro.

Por otra parte, los ángulos diédricos son las principales propiedades “extrínsecas” de un poliedro. Fijado un tipo combinatorio de poliedro, podemos plantearnos dos tipos de preguntas análogas a las anteriores: dados unos ciertos ángulos diédricos, ¿existe un poliedro con estos ángulos y del tipo combinatorio dado? (*existencia*). Y, si existe, ¿es único? (*unicidad*). Si pensamos en una aplicación tal que a cada poliedro, salvo isometría, le asigna sus ángulos diédricos, las preguntas anteriores corresponden a describir la imagen de esta aplicación, a la que llamaremos *espacio de ángulos*, y a describir las fibras (es decir, la preimagen de cada punto de la imagen).

Por supuesto, podemos hacernos las mismas preguntas para dimensiones distintas de 3. Así, en dimensión 2, el espacio de ángulos es fácil de describir, en los casos euclídeo e hiperbólico: la única condición es que los ángulos exteriores debe sumar  $2\pi$ , en el caso euclídeo, y más que  $2\pi$  en el caso hiperbólico. Por otra parte, no hay unicidad, es

decir, los ángulos no determinan el polígono; los lemas geométricos de Cauchy ([Ca]) comparan las longitudes de aristas entre polígonos con los mismos ángulos (en los casos esférico e hiperbólico). El espacio de polígonos euclídeos con ángulos dados se puede ver como un poliedro convexo en algún espacio hiperbólico ([Th],[BG]).

En dimensión mayor que 2, en el caso euclídeo tampoco hay unicidad, pues dado un politopo euclídeo de cualquier dimensión, si se traslada una cara y se mantiene el tipo combinatorio, los ángulos diédricos no varían.

Hay una diferencia esencial entre los espacios de ángulos de poliedros (dimensión 3) y de politopos de dimensión mayor que 3: del Teorema de Steinitz se deduce que el espacio de ángulos de poliedros es contractible (ver [Zi]), mientras que para dimensión 4 y mayor que 4, los trabajos de Mnëv ([Mn]) y Richter ([Ric]) prueban que los espacios de politopos pueden tener el mismo tipo de homotopía que cualquier conjunto semialgebraico prefijado.

En dimensión 3, en el caso hiperbólico, el Teorema de Andreev ([An1], [An2]) resuelve completamente la existencia y la unicidad para el caso, en el que todos los ángulos diédricos sean menores o iguales que  $\pi/2$  (ver Apéndice B). Esta restricción en los ángulos da en primer lugar una restricción combinatoria, pues todos los poliedros compactos hiperbólicos con ángulos menores o iguales que  $\pi/2$  son trivalentes (es decir, en cada vértice inciden 3 caras). Estos poliedros son, por otra parte, dominio de discontinuidad del grupo de isometrías hiperbólicas generado por las reflexiones en sus caras. Por tanto, a partir del Teorema de Andreev se pueden describir también todos estos grupos. Las condiciones del Teorema de Andreev para la existencia son muy sencillas, pues son condiciones lineales sobre los ángulos diédricos, que dependen de la combinatoria del poliedro dado. Se han dado otras demostraciones del Teorema de Andreev: Thurston ([Th]), Bowers y Stephenson ([BS]), Colin de Verdière ([CV]), Hodgson ([Ho]), Marden y Rodin ([MR]). Rivin ([Ri1], [Ri2]) generaliza el Teorema de Andreev para poliedros hiperbólicos ideales (con todos los vértices en la esfera del infinito de  $\mathbf{H}^3$ ), es decir, describe el espacio de ángulos de estos poliedros.

La unicidad para poliedros hiperbólicos trivalentes (no sólo para aquéllos en las condiciones del Teorema de Andreev) se deduce de los lemas topológico y geométricos de Cauchy ([Ca], [HR]).

La presente memoria está motivada por el que sería el “Teorema de Andreev generalizado”, esto es, el mismo problema resuelto por Andreev, pero sin restricciones en los ángulos diédricos.

El enfoque que damos al problema es por medio de matrices de Gram. La matriz de Gram de un poliedro hiperbólico es la matriz de productos escalares de los vectores

normales unitarias exteriores a las caras del poliedro. En la matriz de Gram están reflejados todos los ángulos diédricos del poliedro, pero además están reflejados todos los posibles ángulos o distancias entre los planos que contienen a las caras del poliedro.

Utilizando matrices de Gram, podríamos tratar de resolver el problema en dos pasos:

1. Caracterizar las matrices que son matrices de Gram de un poliedro compacto hiperbólico del tipo combinatorio que hemos fijado; con esto estamos describiendo un conjunto en un cierto  $\mathbf{R}^N$ . Para el caso en que todos los ángulos diédricos del poliedro sean menores o iguales que  $\pi/2$ , Vinberg hace este estudio en ([Vi2]).
2. Caracterizar los valores que toman las entradas de la matriz de Gram correspondientes a ángulos diédricos. Podemos pensar en esto como que estamos proyectando el conjunto que hemos obtenido en el primer paso sobre un determinado  $\mathbf{R}^{N_1}$ .

En esta memoria conseguimos resolver el primero de estos dos pasos (Capítulo 3); el segundo paso lo hemos visto sólo para un grupo de poliedros, los descendientes de tetraedros, en los que resulta fácil el cálculo que se indica (Capítulo 4). Este método se complica ya para otros poliedros como el cubo.

En concreto los resultados que obtenemos son

- Un teorema de caracterización de matrices de Gram de  $d$ -politopos de un tipo combinatorio fijado, en un espacio  $(\mathbf{R}^{d+1}, f)$ , donde  $f$  es una forma bilineal simétrica no degenerada (Teorema 3.4.1).
- Del teorema anterior se obtienen fácilmente teoremas de caracterización de matrices de Gram de  $d$ -politopos esféricos e hiperbólicos, y en este último caso, se puede también fijar un subconjunto de vértices que queremos que sean finitos (Teoremas 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4).
- Teorema de Andreev generalizado para prismas triangulares hiperbólicos (compactos y no necesariamente compactos) y esféricos (Teoremas 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5), con una presentación explícita del espacio de ángulos mediante expresiones polinómicas en los cosenos de los ángulos diédricos; también obtenemos un Teorema de Andreev generalizado para descendientes de tetraedros (Teorema 4.3.6). En todos estos teoremas se obtiene también unicidad, salvo isometrías del espacio en que estemos.
- Estudiamos una descripción geométrica del espacio de ángulos de tetraedros compactos hiperbólicos (Sección 2.2). Vemos por ejemplo que este espacio no es convexo. Se estudian también otras coordenadas para los símlices, como las longitudes y unas coordenadas mixtas (Sección 2.3).

La memoria está estructurada de la siguiente manera: Un primer capítulo dedicado a preliminares donde se revisan los conceptos que aparecerán en adelante. El Capítulo 2 está dedicado a los símlices. En el Capítulo 3 se da la demostración de los teoremas de caracterización de las matrices de Gram de politopos. Finalmente, en el Capítulo 4, se utilizan los resultados anteriores para describir el espacio de ángulos de algunos poliedros.

# Capítulo 1:

## Preliminares

La geometría hiperbólica fue descubierta independientemente por Bolyai, Gauss y Lobachevsky cuando trataban de deducir por reducción al absurdo el axioma de las paralelas de los axiomas anteriores de la geometría euclídea. Se han dado varios modelos para estudiar esta geometría, como el modelo del hiperboloide o de Lobachevsky, el modelo proyectivo o de Beltrami-Klein y los modelos del disco y del semiespacio de Poincaré. Para un estudio de la geometría hiperbólica se puede ver [Ra], [Iv], [Sa], [Th], [Be], [Mil]. Vamos a revisar algunos aspectos de estos modelos, principalmente aquéllos que utilizaremos en esta memoria.

Nosotros utilizaremos principalmente el modelo del hiperboloide. Este modelo se define como una cierta subvariedad Riemanniana del espacio de Minkowski  $\mathbf{E}^{3,1}$  (que es  $\mathbf{R}^4$  con una forma cuadrática infinitesimal de signatura  $(3, 1)$  en cada punto). Las fórmulas para las distancias y los ángulos se expresan fácilmente a partir de la forma cuadrática. Este modelo tiene además la ventaja de ofrecer una analogía con la geometría esférica si cambiamos la signatura de la forma cuadrática. Así, trabajaremos en el contexto más general de una forma cuadrática no degenerada sobre un espacio vectorial de dimensión arbitraria.

### 1.1 Espacios Geométricos

A lo largo de la memoria, utilizaremos el término de *producto escalar* para referirnos a formas bilineales reales, simétricas y no degeneradas, aunque no necesariamente definidas positivas. Haciendo abuso de notación, denotaremos por  $f$  tanto a un producto escalar como a su forma cuadrática asociada, y llamaremos *espacio geométrico* al par  $E_f := (\mathbf{R}^m, f)$ .

Para un producto escalar se tienen los conceptos usuales de ortogonalidad, norma, transformaciones ortogonales, etc., de los productos escalares euclídeos (i.e. con  $f$  definida positiva). Recordamos algunas definiciones con las notaciones que vamos a utilizar. Así, la *norma* de un vector  $v \in \mathbf{R}^m$  es el valor  $f(v)$ ; la norma de un vector puede ser positiva, negativa o nula. Llamaremos *vector luz* a un vector de norma 0 y *cono de luz* al conjunto de los vectores luz. Cualquier vector  $v$  de norma no nula se puede normalizar y nos referiremos a su *normalizado* como al único vector de norma  $\pm 1$  que está en el *rayo* vectorial  $\hat{v} = \{\lambda v \mid \lambda > 0\}$  generado por  $v$ .

Utilizaremos la notación  $\hat{H}$  para designar a hiperplanos de  $\mathbf{R}^m$ , y  $\hat{H}^-$  para designar a uno de los semiespacios cerrados determinados por  $\hat{H}$ . Si la forma cuadrática es no degenerada, las dimensiones de un subespacio y de su subespacio ortogonal son complementarias. Esto nos servirá para dar una biyección entre el conjunto de semiespacios y el conjunto de rayos vectoriales de  $\mathbf{R}^m$ : a un vector  $e \in \mathbf{R}^m$  le hacemos corresponder el semiespacio

$$\hat{H}_e^- = \{v \in \mathbf{R}^{d+1} \mid f(e, v) \leq 0\},$$

al que llamaremos semiespacio *ortogonal exterior* al vector  $e$  (observamos que si  $e' = \lambda e$  con  $\lambda > 0$ , entonces  $\hat{H}_{e'}^- = \hat{H}_e^-$ ). Denotamos también por  $\hat{H}_e$  al *hiperplano ortogonal* al vector  $e$ , es decir,

$$\hat{H}_e = \{v \in \mathbf{R}^{d+1} \mid f(e, v) = 0\}$$

Recíprocamente, dado un semiespacio  $\hat{H}^-$  de  $\mathbf{R}^m$ , le podemos asignar un *vector ortogonal exterior*, que es un vector  $e$  tal que  $\hat{H}^- = \hat{H}_e^-$ . Si el vector  $e$  tiene norma no nula, entonces el semiespacio  $\hat{H}^-$  tiene un único vector *normal exterior*.

Observemos que si un vector tiene norma nula, entonces está contenido en su subespacio ortogonal, y la forma cuadrática restringida a este subespacio es degenerada.

Llamaremos *amplitud* o *ángulo generalizado* entre vectores no luz a la expresión

$$\text{Am}(u, v) = \frac{f(u, v)}{\sqrt{|f(u)|} \sqrt{|f(v)|}}, \quad \text{con } u, v \in \mathbf{R}^m$$

(observemos que  $\text{Am}(u, v) = \text{Am}(\lambda u, \lambda v)$ , para todo  $\lambda > 0$ , es decir, la amplitud está definida para los rayos vectoriales generados por  $u$  y  $v$ ).

Denotamos la *signatura* de un producto escalar  $f$  en  $\mathbf{R}^m$  como  $(p, q)$ , donde  $p$  es el número de vectores de norma 1 de una base ortonormal, y  $q$  el número de vectores de norma  $-1$ . Utilizamos la misma notación para la *signatura* de una matriz. Un método de cálculo de la *signatura* de una matriz simétrica  $G$  consiste en estudiar los signos de los menores principales  $G_1, G_{12}, \dots, G_{12\dots n}$  (donde  $G_{1\dots i}$  es el determinante de la

submatriz de  $G$  formada por las  $i$  primeras filas y columnas), siempre que estos menores sean todos no nulos. Así por ejemplo una matriz es definida positiva si y sólo si todos los menores principales anteriores son estrictamente positivos.

**Definición.** Dado un conjunto de vectores  $e_1, \dots, e_n \in \mathbf{R}^m$ , llamamos *matriz de Gram* de este conjunto a la matriz  $G[e_1, \dots, e_n]$  de sus productos escalares.

Toda matriz simétrica de orden  $n$ , rango  $m$  y signatura igual a la signatura de  $f$ , podemos interpretarla como la matriz de Gram de  $n$  vectores en el espacio geométrico  $(\mathbf{R}^m, f)$ .

Finalmente, denotamos por  $O(f)$  al *grupo ortogonal* de  $f$ , es decir, los isomorfismos lineales que preservan la forma cuadrática. En coordenadas, las aplicaciones ortogonales son las matrices  $P$  tales que  $P^t F P = F$  (donde  $F$  y  $P$  son las matrices de  $f$  y de la aplicación en una misma base).

El siguiente lema sencillo dará la prueba de la unicidad (salvo isometrías) de poliedros a partir de la matriz de Gram (Teoremas 2.1.1, 3.4.1)

**Lema 1.1.1.** Sea  $f$  un producto escalar en  $\mathbf{R}^m$ . Sean  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  dos conjuntos de vectores que tienen la misma matriz de Gram  $G = (g_{ij})$ , de rango  $m$ . Entonces existe una aplicación ortogonal  $\varphi \in O(f)$  tal que  $\varphi(e_i) = e'_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración:*

Como la matriz  $G$  tiene rango  $m$ , cada uno de los conjuntos de vectores del enunciado contiene una base. Supongamos por ejemplo que  $e_1, \dots, e_m$  forman una base; entonces el menor principal de  $G$  correspondiente a estos índices,  $G_{1\dots m}$  es no nulo y por tanto también los vectores  $e'_1, \dots, e'_m$  forman una base. Puesto que la matriz de productos escalares de estas dos bases es la misma, la aplicación  $\varphi$  que aplica una en la otra es una aplicación ortogonal.

Falta ver que  $\varphi(e_j) = e'_j$  para  $j > m$ . Para ello, vemos que las coordenadas de  $e_j$  respecto de la base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  son  $(g_{j1}, \dots, g_{jm})G_{1\dots m}^{-1}$ . Estas son las mismas coordenadas que las de  $e'_j$  respecto de  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ , de donde se tiene el resultado. □

Vamos a estudiar dos casos particulares importantes de producto escalar, cuando  $f$  es definida positiva y cuando  $f$  tiene signatura  $(m-1, 1)$ . La importancia de estos casos es que permiten definir la geometría esférica y la hiperbólica. Puesto que queremos obtener resultados para espacios hiperbólicos o esféricos de dimensión  $d$ , utilizaremos espacios vectoriales de dimensión  $m = d + 1$ .

## Espacio esférico

Sea  $f$  una forma cuadrática definida positiva en  $\mathbf{R}^{d+1}$ ; para fijar ideas, tomamos la forma cuadrática más sencilla, es decir  $f(\bar{x}) = x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2$ , donde  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{d+1})$  son las coordenadas de un vector respecto de la base canónica de  $\mathbf{R}^{d+1}$ . Llamamos *espacio afín euclídeo* de dimensión  $d + 1$  a la variedad Riemanniana que consiste en  $\mathbf{R}^{d+1}$  visto como espacio afín y con una forma cuadrática infinitesimal en cada punto dada por  $f$ .

Entonces la esfera,  $\mathbf{S}^d = f^{-1}(1)$ , tiene una métrica Riemanniana inducida de la anterior y se puede ver, por ejemplo, que tiene curvatura constante igual a 1 en cada punto. Los *planos* esféricos, es decir, subespacios totalmente geodésicos, son las intersecciones de subespacios vectoriales de  $\mathbf{R}^{d+1}$  con  $\mathbf{S}^d$ ; en particular, las geodésicas son los círculos máximos de  $\mathbf{S}^d$ .

La distancia entre dos puntos  $x, y \in \mathbf{S}^d$  se calcula a partir del producto escalar como  $\cos d(x, y) = f(x, y)$ . Igualmente para los ángulos entre hiperplanos esféricos: si  $x, y \in \mathbf{S}^d$  y  $\hat{H}_x^-$  y  $\hat{H}_y^-$  son los semiespacios de  $\mathbf{R}^{d+1}$  ortogonales exteriores, entonces  $f(x, y) = -\cos(H_x^- \cap H_y^-)$ , donde  $H_x^- = \hat{H}_x^- \cap \mathbf{S}^d$ .

## Espacio hiperbólico

### A. Modelo del hiperboloide

Sea ahora la forma cuadrática  $f$  definida como

$$f(\bar{x}) = x_1^2 + \dots + x_d^2 - x_{d+1}^2$$

donde  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$  son las coordenadas de un vector respecto de la base canónica de  $\mathbf{R}^{d+1}$  (por supuesto podríamos tomar una forma cuadrática cualquiera de signatura  $(d, 1)$ ).

La línea de nivel  $f^{-1}(-1)$  es un hiperboloide de dos hojas. Llamamos espacio hiperbólico a una de estas dos hojas, concretamente,

$$\mathbf{H}^d = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mid f(\bar{x}) = -1, x_{d+1} > 0\}.$$

Se llama *espacio afín de Minkowski* de dimensión  $d + 1$  a la variedad semi-Riemanniana que consiste en  $\mathbf{R}^{d+1}$  visto como espacio afín y con una forma cuadrática infinitesimal en cada punto dada por  $f$ .

Ocurre que la métrica infinitesimal inducida por el ambiente en cada punto de  $\mathbf{H}^d$  es definida positiva, y por tanto  $\mathbf{H}^d$  es una variedad Riemanniana, que además tiene curvatura constante igual a  $-1$ .

Se llama *esfera de De Sitter* al conjunto  $\mathbf{S}^{d-1,1}$  de vectores de norma 1. La esfera de De Sitter es una variedad semi-Riemanniana con curvatura constante igual a 1 (para detalles sobre geometría semi-Riemanniana, puede verse [O'N]).

Las geodésicas y los espacios totalmente geodésicos de  $\mathbf{H}^d$  son las intersecciones de  $\mathbf{H}^d$  con subespacios vectoriales de  $\mathbf{R}^{d+1}$ .

Llamaremos puntos *finitos* a los vectores  $\bar{x} \in \mathbf{R}^{d+1}$  tales que el rayo  $\hat{v}$  que generan corta a  $\mathbf{H}^d$ ; llamaremos puntos *infinitos* a los vectores luz y con la última coordenada positiva; y llamaremos puntos *ultrafinitos* a los vectores de norma positiva.

Recordamos ahora el significado del producto escalar de dos vectores  $x, y \in \mathbf{R}^{d+1}$  (o bien su amplitud, si los vectores no están normalizados); recordamos que  $\hat{H}_x$  es el hiperplano de  $\mathbf{R}^{d+1}$  ortogonal a  $x$  y denotamos  $H_x := \hat{H}_x \cap \mathbf{H}^d$  y  $H_x^- := \hat{H}_x^- \cap \mathbf{H}^d$  (ver *Figura 1.1*)

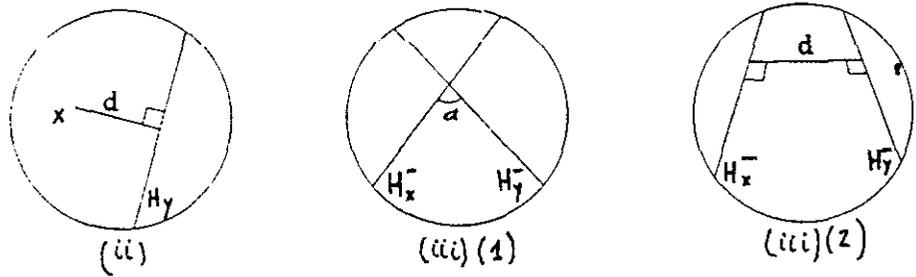


Figura 1.1

- (i) Si  $x, y \in \mathbf{H}^d$ , entonces  $f(x, y) = -\cosh d(x, y)$ ;
- (ii) Si  $x \in \mathbf{H}^d, y \in \mathbf{S}^{d-1,1}$ , entonces  $|f(x, y)| = \sinh d(x, H_y)$ . El signo de  $f(x, y)$  sirve para distinguir si  $x$  está o no en el semiespacio ortogonal exterior a  $y$ , en concreto,  $f(x, y) < 0$  equivale a que  $x \in \hat{H}_y^-$ .
- (iii) Sean ahora  $x, y \in \mathbf{S}^{d-1,1}$ . Se dan los siguientes casos:
  - (1) Si  $|f(x, y)| < 1$ , significa que  $H_x \cap H_y \neq \emptyset$  y se tiene  $f(x, y) = -\cos(H_x^- \cap H_y^-)$ .
  - (2) Si  $|f(x, y)| > 1$ , entonces  $\hat{H}_x$  y  $\hat{H}_y$  se cortan en el ultrafinito y se dice que  $H_x$  y  $H_y$  son *ultraparalelos*. En este caso  $|f(x, y)| = \cosh d(H_x, H_y)$ . El signo de  $f(x, y)$  determina la posición relativa de los semiespacios; en concreto,

$f(x, y) < 0$  si y sólo si ninguno de los dos semiespacios  $H_x^-, H_y^-$  está contenido en el otro.

- (3) Finalmente el caso  $|f(x, y)| = 1$  significa que  $H_x \cap H_y = \emptyset$  y  $\hat{H}_x \cap \hat{H}_y$  contiene un punto infinito. En este caso, se dice que los hiperplanos  $H_x$  y  $H_y$  son *paralelos*.

Las isometrías hiperbólicas son las aplicaciones ortogonales que dejan invariante  $\mathbf{H}^d$ . Por ejemplo la aplicación lineal de expresión matricial (respecto de la base canónica)

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \dots & 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

define una isometría  $\varphi_t$  de  $\mathbf{H}^d$ ; esta isometría deja invariante la recta hiperbólica  $r = \{x_1 = \dots = x_{d-1} = 0\} \cap \mathbf{H}^d$ , y la distancia entre un punto de  $r$  y su transformado es igual a  $t$ . Llamaremos a  $\varphi_t$  *traslación hiperbólica* de módulo  $t$  a lo largo de la recta  $r$ .

Finalmente enunciamos las *fórmulas del coseno y del seno* para triángulos hiperbólicos. Si  $\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos de un triángulo hiperbólico y  $a, b, c$  son las longitudes de las aristas opuestas, se verifican las relaciones:

$$\begin{aligned} \cosh c &= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ \cos \gamma &= \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \\ \frac{\sinh a}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{\sinh b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\sinh c}{\operatorname{sen} \gamma} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Observamos que la primera fórmula del coseno implica que un triángulo hiperbólico está determinado unívocamente, salvo isometría, por sus ángulos.

## B. Modelo proyectivo

El modelo proyectivo se obtiene del modelo del hiperboloide proyectando desde el origen de  $\mathbf{R}^{d+1}$  sobre el hiperplano  $x_{d+1} = 1$ : el espacio hiperbólico es entonces el interior de la bola unidad  $B^d$ , el borde de esta bola son los puntos del infinito, las rectas hiperbólicas son cuerdas de esta bola, y la ortogonalidad respecto del producto escalar  $f$  es la polaridad respecto de esta bola. Recordamos la fórmula para la distancia entre dos puntos en este modelo. Sean  $A, B$  dos puntos del espacio hiperbólico  $B^d$ ; sea  $r$  la

cuerda (recta hiperbólica) de  $B^d$  que los contiene; sea  $U$  el extremo de  $r$  más próximo a  $A$  y  $V$  el otro extremo de  $r$  ( $U, V$  son los puntos del infinito de la recta  $r$ , ver Figura 1.2). Sea  $\hat{r}$  la recta proyectiva que contiene a  $r$ . Entonces  $A, B, U, V$  son 4 puntos de una recta proyectiva y podemos hablar de su *razón doble*,  $[U, V, B, A]$ , cuyo significado geométrico es la coordenada afín del punto  $A$  en el sistema de referencia proyectivo  $U = \infty, V = 0, B = 1$ . Entonces, la distancia entre  $A$  y  $B$  viene dada por la fórmula

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \log([U, V, B, A]) \quad (1.1.4)$$

(observemos que la razón doble  $[U, V, B, A]$  es mayor que 1).

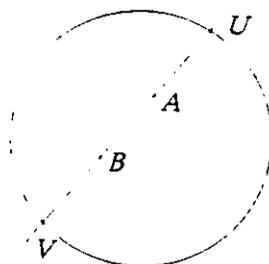


Figura 1.2

### C. Modelo de Poincaré

Los modelos de Poincaré tienen la importante propiedad de que son conformes, es decir, los ángulos se ven como en la geometría euclídea. Así, el *modelo del semiespacio* de Poincaré es el conjunto

$$E^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

junto con la métrica Riemanniana definida por la forma cuadrática infinitesimal

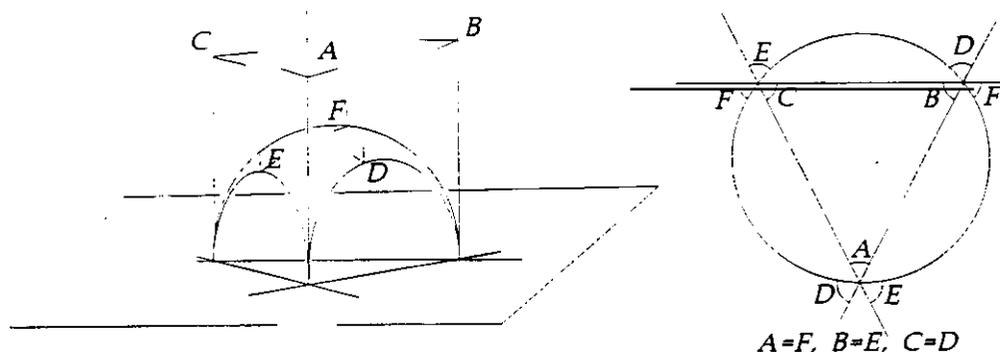
$$ds^2 = \frac{1}{x_3} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

Los puntos del infinito del espacio hiperbólico en este modelo forman el conjunto  $\partial E^+ \cup \{\infty\}$ , que se puede identificar con la esfera de Riemann considerando  $\partial E^+$  como el plano complejo.

Las rectas en este modelo son, o bien rectas verticales, o bien arcos de circunferencias ortogonales al borde,  $\partial E^+$ ; análogamente, los planos son, o bien planos verticales o

bien semiesferas ortogonales al borde. Todos los planos hiperbólicos están pues determinados por sus "bordes", rectas o circunferencias de  $\partial E^+$ , con lo que un poliedro en este modelo se puede dibujar también como una familia de rectas y circunferencias en el plano  $\partial E^+$ . Por ser este modelo conforme, se verifica además que el ángulo diédrico entre dos planos hiperbólicos es igual al ángulo euclídeo entre los bordes de estos planos.

Como ejemplo, la *Figura 1.3* muestra un *tetraedro ideal*, es decir, con todos los vértices en el infinito, y prueba que para estos tetraedros los ángulos diédricos en las aristas opuestas son iguales.



*Figura 1.3*

## 1.2. Politopos afines

En esta sección recordamos términos sobre politopos en el espacio afín  $\mathbf{R}^d$ . Algunas referencias sobre el tema son por ejemplo [Gr], [Zi], [Al], [RS], [Vi3].

Un *politopo* en  $\mathbf{R}^d$  es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos. Equivalentemente, un politopo es un conjunto compacto no vacío de  $\mathbf{R}^d$  determinado por la intersección de un conjunto finito de semiespacios. La dimensión del politopo es la dimensión del subespacio afín que genera y se denota por  $r$ -politopo a un politopo de dimensión  $r$ .

Un *hiperplano soporte* de un politopo  $P$  es un hiperplano  $H$  que tiene intersección no vacía con  $P$  y tal que  $P$  está contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por  $H$ . Una *cara*  $C$  de un politopo  $P$  es la intersección de  $P$  con un hiperplano soporte. Consideraremos también caras (impropias) de  $P$  al conjunto vacío y al propio politopo. Usaremos la notación  $C < P$  para indicar que  $C$  es una cara de  $P$ .

Un politopo afín lleva consigo una estructura combinatoria, dada por el conjunto de todas sus caras. Podemos expresar esto en términos de complejos celulares (en este contexto a un politopo se le llama *celda* o *célula*).

Recordemos que un *complejo celular*  $K$  es una colección finita de células (o politopos) en algún  $\mathbf{R}^d$  que satisface:

- (i) si una célula  $C$  está en  $K$  entonces todas las caras de  $C$  también están en  $K$ ;
- (ii) si  $C$  y  $D$  son dos células de  $K$ , entonces  $C \cap D$  es una cara de ambas.

Dos complejos celulares  $K$  y  $L$  son *abstractamente isomorfos* si existe una biyección  $j : K \rightarrow L$  tal que preserva incidencias entre las caras, es decir, si  $A < B \in K$ , entonces  $j(A) < j(B) \in L$ . A la aplicación  $j$  se la llama *isomorfismo abstracto* o *isomorfismo combinatorio*.

Se llama *espacio subyacente* de  $K$  a la unión de todas las celdas de  $K$ , y se denota por  $|K|$ .

Dado un  $d$ -politopo,  $P$ , hay de forma natural dos complejos celulares asociados: uno, el formado por todas sus caras, que tiene por espacio subyacente el propio politopo, y otro formado por todas sus caras de dimensión estrictamente menor que  $d$ , y que tiene como espacio subyacente el borde del politopo. Denotamos a este último complejo por  $\mathcal{P}$ .

**Definición.** (Tipo combinatorio de politopo)

- (1) Llamaremos *politopo abstracto* (con las caras sin numerar) al complejo  $\mathcal{P}$  anterior, cuyo espacio subyacente es el borde de un politopo. Dos politopos  $P$  y  $P'$  se dice que son *del mismo tipo combinatorio* (con las caras sin numerar) si sus politopos abstractos asociados son abstractamente isomorfos.
- (2) Llamaremos *politopo abstracto con las caras numeradas* al complejo  $\mathcal{P}$  en el que hemos numerado las caras de codimensión 1. Dos politopos  $P$  y  $P'$ , con las caras de codimensión 1 numeradas  $(C_1, \dots, C_n$  y  $C'_1, \dots, C'_n$ , respectivamente) se dice que son *del mismo tipo combinatorio con las caras numeradas* si la aplicación  $C_i \rightarrow C'_i$  induce un isomorfismo combinatorio.

**Nota.** En la memoria, cuando hablemos de *tipo combinatorio*, siempre será con las caras numeradas.

La *Figura 1.4* muestra ejemplos de dos prismas triangulares con las caras numeradas que tienen distinto tipo combinatorio (por supuesto, si nos olvidamos de la numeración de las caras, los dos poliedros tienen el mismo tipo combinatorio).

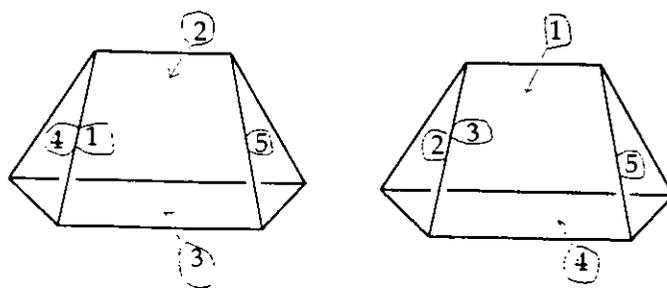


Figura 1.4

**Notación.** A lo largo de toda la memoria vamos a utilizar letras caligráficas  $\mathcal{P}, \mathcal{C}, \dots$  para designar aspectos combinatorios, y letras mayúsculas usuales  $P, C, \dots$  para designar realizaciones concretas de los politopos (es decir, politopos  $P \subset \mathbf{R}^d$  con el mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ ).

El tipo combinatorio de un politopo queda determinado por el conjunto de caras de codimensión 1 (en inglés *facets*), el conjunto de vértices, y la relación de incidencia entre estas caras y vértices. Esta información queda recogida en la *matriz del tipo combinatorio* del politopo (ver sección 3.2.). El tipo combinatorio de un politopo se preserva por transformaciones afines y por transformaciones proyectivas tales que la preimagen del hiperplano del infinito no corte al politopo. Reservaremos el término *poliedro* para politopos de dimensión 3.

Sea  $\mathcal{V}$  un vértice de un  $d$ -politopo  $\mathcal{P}$ ; la *figura verticilar* de  $\mathcal{V}$  es el politopo abstracto de dimensión  $d - 1$  cuyas caras son todas las caras de  $\mathcal{P}$  que inciden en  $\mathcal{V}$ .

Enunciamos dos propiedades sencillas de los politopos que utilizaremos con frecuencia:

- 1.2.1. Dadas dos caras,  $C, C'$  de codimensión 1, siempre hay una sucesión de caras  $C_1, \dots, C_r$  de codimensión 1 tales que cada una es adyacente con la siguiente,  $C = C_1$  y  $C' = C_r$ . Llamaremos a esta sucesión *cadena* de caras que conecta  $C$  y  $C'$ .
- 1.2.2. Dada una cara de codimensión 2 de un  $d$ -politopo  $P$  (con  $d \geq 1$ ), existen exactamente dos caras de codimensión 1 que la contienen (se dice que estas dos caras son adyacentes). El *ángulo diédrico* en una cara de codimensión 2 de  $P$  es el ángulo formado por las dos caras de codimensión 1 que inciden en ella.

Recordamos ahora el método de trincar vértices para construir poliedros a partir de otros dados. En el Capítulo 4 se estudia la familia de poliedros que se obtienen del

tetraedro aplicando sucesivas veces este método. Llamaremos a esta familia *descendientes de tetraedros*.

Sea  $P \subset \mathbf{R}^3$  un poliedro y  $V$  un vértice de  $P$ . Consideremos un plano  $\Pi$  tal que uno de los dos semiespacios,  $\Pi^+$ , que determina contiene al vértice  $V$  y el otro semiespacio,  $\Pi^-$ , contiene a todos los demás vértices del poliedro. Entonces  $\Pi$  divide al poliedro  $P$  en dos poliedros:  $P_0 := P \cap \Pi^+$  es una pirámide con vértice  $V$  y base  $P \cap \Pi$  y  $P_1 := P \cap \Pi^-$  es un poliedro que diremos que se ha obtenido de  $P$  *truncando el vértice  $V$* .

Si tomamos otro poliedro  $P'$  del mismo tipo combinatorio que  $P$  y un plano cualquiera  $\Pi'$  que verifique las condiciones que le hemos pedido a  $\Pi$ , entonces el poliedro  $P'_1 = P' \cap \Pi'^-$  es del mismo tipo combinatorio que  $P_1$ . Es decir, podemos considerar la operación de truncar vértices desde el punto de vista combinatorio, y así hablaremos, por ejemplo, de “truncar un vértice del poliedro abstracto  $\mathcal{P}$ ”.

### 1.3 Conos poliedrales

Estamos principalmente interesados en politopos hiperbólicos. Un politopo en  $\mathbf{H}^d$  se define de la misma forma que en  $\mathbf{R}^d$ , como envoltura convexa de una cantidad finita de puntos o como conjuntos compactos no vacíos que son intersección finita de semiespacios:

$$P = \bigcap_{i=1}^n H_i^-,$$

donde  $H_i^-$  es uno de los dos semiespacios cerrados determinados por un hiperplano de  $\mathbf{H}^d$ . El politopo  $P$  tiene dimensión  $d$  si la intersección anterior tiene interior no vacío.

En el modelo del hiperboloide, un politopo se ve como la intersección con  $\mathbf{H}^d$  de un cono poliedral de  $\mathbf{R}^{d+1}$ , es decir, si  $\hat{H}_i$  es el hiperplano de  $\mathbf{R}^{d+1}$  tal que  $H_i = \hat{H}_i \cap \mathbf{H}^d$  y  $\hat{H}_i^-$  es el semiespacio bordeado por este hiperplano tal que  $H_i^- = \hat{H}_i^- \cap \mathbf{H}^d$ , entonces

$$P = \hat{P} \cap \mathbf{H}^d, \quad \text{donde} \quad \hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$$

#### Conos poliedrales vectoriales

Un cono poliedral vectorial será entonces simplemente la intersección de un conjunto de semiespacios de un espacio vectorial. En contraste con la distinción entre poliedro y politopo, utilizaremos un solo término, “cono poliedral”, para referirnos a cualquier dimensión. Damos la definición de cono poliedral de la forma más general (en [Vi3], se toma en la definición la condición de que el interior sea no vacío).

**Definición.** Un *cono poliedral* en  $\mathbf{R}^{d+1}$  es un conjunto de la forma

$$\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-,$$

donde los  $\hat{H}_i^-$  son semiespacios vectoriales cerrados bordeados por el hiperplano vectorial  $\hat{H}_i$ . Un hiperplano  $\hat{H}_i$  es *superfluo* si el semiespacio correspondiente contiene a la intersección de todos los demás semiespacios, es decir,

$$\hat{H}_i^- \supseteq \bigcap_{j \neq i} \hat{H}_j^-.$$

Esta definición amplia da cabida a los dos tipos de situaciones siguientes:

- (i) (Cono poliedral degenerado) Un cono poliedral  $\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  es *r-degenerado*, con  $r \geq 0$ , si los hiperplanos  $\hat{H}_i$  se cortan en un subespacio de  $\mathbf{R}^{d+1}$  de dimensión  $r$ . Si  $r = 0$ , decimos que el cono poliedral es *no degenerado*.
- (ii) (Cono poliedral con interior vacío) Si un cono poliedral  $\hat{P}$  tiene interior vacío, diremos que  $\hat{P}$  está *reducido a una r-cara* si  $\hat{P}$  está contenido en un subespacio vectorial de dimensión  $r + 1$  y en este espacio  $\hat{P}$  tiene interior no vacío.

Estaremos más interesados en conos poliedrales no degenerados y con interior no vacío.

**Nota.** Si un cono poliedral  $\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  tiene interior no vacío, cada subespacio  $\hat{H}_i$  no superfluo está determinado unívocamente por el cono poliedral y se dice que  $\hat{H}_i$  *bordea*  $\hat{P}$ .

**Lema 1.3.1.** *Un cono poliedral  $\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  tiene interior vacío si y sólo si existe algún  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\hat{P} \subset \hat{H}_i$ .*

*Demostración:*

El borde de un cono poliedral (respecto de la topología usual) está contenido en la unión de los hiperplanos  $\hat{H}_i$ ; entonces  $\hat{P}$  tiene interior vacío si y sólo si  $\hat{P} \subset \bigcup_{i=1}^n \hat{H}_i$ . Por la convexidad de los conos poliedrales, lo anterior equivale a que  $\hat{P}$  está contenido en uno de los hiperplanos  $\hat{H}_i$ .  $\square$

**Definición.** Si  $X \subset \mathbf{R}^{d+1}$ , el *cono positivo* sobre  $X$  es el conjunto  $\{\lambda x \mid x \in X, \lambda \geq 0\}$ .

**Lema 1.3.2.** *Sea  $\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  un cono poliedral no degenerado; entonces existe un hiperplano afín  $A \subset \mathbf{R}^{d+1}$ , que no pasa por el origen, tal que  $\tilde{P} = A \cap \hat{P}$  es compacto y  $\hat{P}$  es el cono positivo sobre  $\tilde{P}$ .*

*Demostración:*

Supongamos que los semiespacios  $\hat{H}_i^-$  están dados por las inecuaciones

$$\hat{H}_i^- : a_{i1}x_1 + \dots + a_{id+1}x_{d+1} \geq 0$$

o, abreviadamente,

$$\hat{H}_i^- : \alpha_i \cdot x \geq 0,$$

donde estamos denotando por  $\alpha_i$  y  $x$  a los vectores de coordenadas  $(a_{i1}, \dots, a_{id+1})$  y  $(x_1, \dots, x_{d+1})$ , respectivamente, y por  $\alpha_i \cdot x$  al producto escalar ordinario en  $\mathbf{R}^{d+1}$ .

Puesto que  $\hat{P}$  es no degenerado, entre los hiperplanos  $\hat{H}_i$  hay  $d + 1$ , que podemos suponer  $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_{d+1}$ , tales que  $\hat{H}_1 \cap \dots \cap \hat{H}_{d+1} = \{0\}$ ; equivalentemente, los vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$  son linealmente independientes.

Consideramos el semiespacio  $\hat{H}_0^-$  definido como

$$\hat{H}_0^- : (\alpha_1 + \dots + \alpha_{d+1}) \cdot x \geq 0$$

Este semiespacio verifica que  $\hat{P} \subset \hat{H}_1^- \cap \dots \cap \hat{H}_{d+1}^- \subset \hat{H}_0^-$  y  $\hat{P} \cap \hat{H}_0 \subset (\hat{H}_1^- \cap \dots \cap \hat{H}_{d+1}^-) \cap \hat{H}_0 = \{0\}$  (por ser  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}$  independientes).

Sea  $A$  el hiperplano de ecuación

$$A : (\alpha_1 + \dots + \alpha_{d+1}) \cdot x = \epsilon,$$

para algún  $\epsilon > 0$ . Veamos que  $\tilde{P} = A \cap \hat{P}$  es compacto. En efecto, si  $\tilde{P}$  no es compacto, entonces contiene una semirrecta afín,  $r$  (ver *Figura 1.5*). Por ser  $\hat{P}$  convexo y cerrado, la clausura,  $F$ , del cono positivo sobre  $r$  desde el origen de  $\mathbf{R}^{d+1}$  está contenida en  $\hat{P}$ . Ahora bien,  $F \cap \hat{H}_0$  es una semirrecta, con lo que  $\{0\} \subsetneq F \cap \hat{H}_0 \subset \hat{P} \cap \hat{H}_0$ , y llegamos a una contradicción.

Finalmente, veamos que  $\hat{P}$  es el cono positivo sobre  $\tilde{P} = \hat{P} \cap A$ . Para ello, sea  $v \in \hat{P}$ ,  $v \neq 0$ ; como  $\hat{P} \subset \hat{H}_0^-$  y  $\hat{P} \cap \hat{H}_0 = \{0\}$ , se tiene que  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_{d+1}) \cdot v > 0$ , y por tanto existe un  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda v \in A$ . Por tanto  $\hat{P}$  está contenido en el cono positivo de  $\hat{P} \cap A$ . El otro contenido es trivial porque  $\hat{P}$  es un cono positivo, es decir, está formado por rayos vectoriales.  $\square$

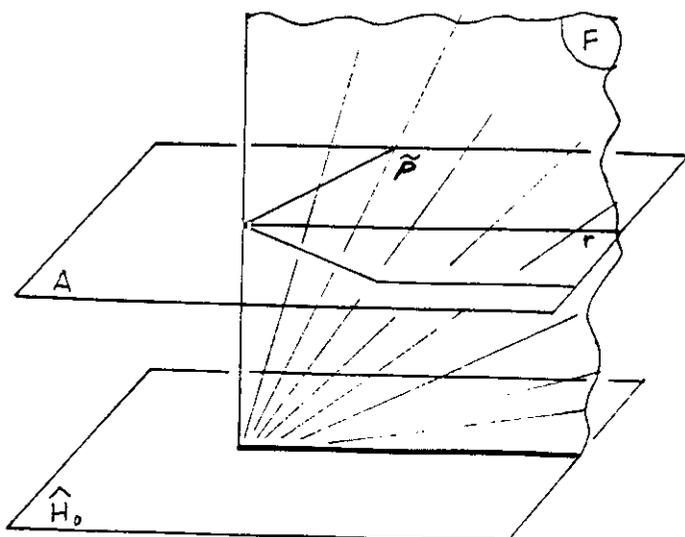


Figura 1.5

**Observación.** Si los hiperplanos  $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_{d+1}$  de la demostración del lema anterior son no superfluos, entonces el semiespacio

$$\hat{H}_\lambda^- : (\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_{d+1} \alpha_{d+1}) \cdot x \geq 0$$

verifica

$$\hat{P} \subset \hat{H}_\lambda^- \quad \text{y} \quad \hat{P} \cap \hat{H}_\lambda = \{0\}$$

si y sólo si  $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$  son todos estrictamente positivos.

**Lema 1.3.3.** Sea  $\hat{P}$  un cono poliedral  $r$ -degenerado,  $r > 0$ . Entonces existe un subespacio vectorial  $K$  de dimensión  $d - r + 1$  en el que  $\hat{P}_0 := \hat{P} \cap K$  es un cono poliedral no degenerado y  $\hat{P} = \hat{P}_0 + (\cap_{i=1}^n \hat{H}_i)$ .

*Demostración:*

Para probar el lema basta considerar un subespacio  $K$  suplementario de  $\cap_{i=1}^n \hat{H}_i$ ; como  $\hat{P}$  es  $r$ -degenerado, la dimensión de  $\cap_{i=1}^n \hat{H}_i$  es  $r$  y por tanto la dimensión de  $K$  es  $d - r + 1$ . Es evidente entonces que  $\hat{P}_0 = \hat{P} \cap K$  es un cono poliedral en  $K$  no degenerado. Sea  $v \in \hat{P}$ ;  $v$  se puede escribir de forma única como  $v = u + w$  con  $u \in K$  y  $w \in \cap_{i=1}^n \hat{H}_i$ . Entonces  $u = v + (-w) \in \hat{P}$  porque  $\hat{P}$  es un cono positivo convexo y  $-w \in \cap_{i=1}^n \hat{H}_i \subset \hat{P}$ ; por tanto  $u \in \hat{P}_0$ , y se deduce entonces que  $\hat{P}$  se puede expresar como suma de  $\hat{P}_0$  y  $\cap_{i=1}^n \hat{H}_i$ .  $\square$

**Definición:** (Tipo combinatorio de un cono poliedral) Sea  $\hat{P}$  un cono poliedral.

- Si  $\hat{P}$  es no degenerado, llamamos *tipo combinatorio* de  $\hat{P}$  al tipo combinatorio del politopo afín  $\tilde{P} = \hat{P} \cap A$  obtenido en el lema 1.3.2. ( $\tilde{P}$  no tiene por qué ser un politopo de dimensión  $d$ , puede tener interior vacío).

- Si  $\hat{P}$  es  $r$ -degenerado, el *tipo combinatorio* de  $\hat{P}$  será el tipo combinatorio del cono poliedral no degenerado  $\hat{P}_0$  obtenido en el lema 1.3.3 (se puede ver fácilmente que el tipo combinatorio no depende del subespacio suplementario  $K$  elegido).

Según lo anterior, definimos una  $r$ -cara de un cono poliedral no degenerado,  $\hat{P}$ , como el cono positivo sobre una  $r$ -cara de  $\tilde{P}$ . Así, un *vértice* de  $\hat{P}$  es el rayo vectorial sobre un vértice de  $\tilde{P}$ ; denotaremos por  $\hat{v}$  al rayo sobre el vector  $v$  y a veces haremos abuso de notación y llamaremos vértice de  $\hat{P}$  a cualquier vector no nulo de este rayo vectorial. En general, denotaremos por  $\hat{C}$  a las caras de  $\hat{P}$ , es decir, si  $C$  es una cara de  $\tilde{P} \cap A$ ,  $\hat{C}$  es el cono positivo sobre esta cara. Más en general utilizaremos los mismos términos de politopos afines para conos poliedrales.

Sea  $f$  un producto escalar en  $\mathbf{R}^{d+1}$ , y sean  $e_i$  vectores ortogonales exteriores a los semiespacios  $\hat{H}_i^-$ . El cono poliedral  $\hat{P}$  está determinado entonces por los vectores  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\hat{P} = \hat{P}(e_1, \dots, e_n) = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$$

Si estos vectores no son luz, podemos considerarlos normalizados, con lo que están unívocamente determinados a partir de  $\hat{P}$ .

**Definición.** Sea  $\hat{P} \subset (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  un cono poliedral tal que ningún vector ortogonal a las caras tiene norma nula. Llamaremos *matriz de Gram* de  $\hat{P}$  a la matriz de Gram de los vectores  $e_1, \dots, e_n$  normales exteriores a las caras, es decir,

$$G(\hat{P}) = (f(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

Observamos que la matriz de Gram de un cono poliedral, según la definición anterior, tiene todas las entradas de la diagonal iguales a  $\pm 1$ .

Los siguientes lemas caracterizan los vértices y las  $r$ -caras de un cono poliedral.

**Lema 1.3.4.** (Caracterización de vértices de conos poliedrales) Sea  $\hat{P} = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  un cono poliedral no degenerado en  $\mathbf{R}^{d+1}$ ,  $f$  un producto escalar y  $e_1, \dots, e_n$  vectores ortogonales exteriores a los semiespacios  $\hat{H}_i^-$ ; un vector no nulo  $v \in \mathbf{R}^{d+1}$  es vértice de  $\hat{P}$  si y sólo si se verifica:

- (i) existen  $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d} = L(v)$ , o equivalentemente, existen  $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  son linealmente independientes y  $f(v, e_{i_j}) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, d$ ;
- (ii)  $f(v, e_i) \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración:*

Claramente las condiciones (i) y (ii) son necesarias; veamos que también son suficientes. Igual que en la demostración del Lema 1.3.2, supongamos que los semiespacios  $\hat{H}_{i_j}^-$  están definidos como

$$\hat{H}_{i_j}^- = \{x \in \mathbf{R}^{d+1} \mid \alpha_{i_j} \cdot x \geq 0\},$$

donde  $\alpha_{i_j} \in \mathbf{R}^{d+1}$  y  $\alpha_{i_j} \cdot x$  es el producto escalar ordinario en  $\mathbf{R}^{d+1}$ . Consideramos el semiespacio  $\hat{H}_0^-$  definido como

$$\hat{H}_0^- : (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_d}) \cdot x \geq 0$$

Este semiespacio verifica que

$$\begin{aligned} \hat{P} &\subset (\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}^-) \subset \hat{H}_0^- \quad \text{y} \\ \hat{P} \cap \hat{H}_0^- &= \hat{P} \cap (\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}^-) \cap \hat{H}_0^- = \hat{P} \cap (\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}^-) \end{aligned}$$

Puesto que  $v \in \hat{P}$  (por la condición (ii)), y  $\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}^- = L(v)$  (por la condición (i)), se sigue entonces que

$$\hat{P} \cap \hat{H}_0^- = \hat{v}$$

Esto significa que  $\hat{H}_0^-$  es un hiperplano soporte de  $\hat{P}$  y la cara que define es el vértice  $\hat{v}$ . □

**Lema 1.3.5.** *Sea  $\hat{P} = \hat{H}_1^- \cap \dots \cap \hat{H}_n^-$  un cono poliedral no degenerado. Entonces,  $\hat{F}_r := (\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}}^-) \cap \hat{P}$  es una  $r$ -cara de  $\hat{P}$  si y sólo si*

- (i)  $\dim(\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}}^-) = r + 1$ ;
- (ii)  $\hat{F}_r$  contiene  $r + 1$  vértices de  $\hat{P}$  linealmente independientes.

*Demostración:*

Con las mismas notaciones que en el lema anterior, el semiespacio

$$\hat{H}_0^- : (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{d-r}}) \cdot x \geq 0$$

verifica que  $\hat{P} \subset \hat{H}_0^-$  y

$$\hat{P} \cap \hat{H}_0^- = \hat{P} \cap (\hat{H}_{i_1}^- \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}}^-) = \hat{F}_r.$$

Por la condición (ii), la intersección anterior genera un subespacio de dimensión  $r + 1$ . Se deduce entonces que la cara  $\hat{F}_r$  determinada por el hiperplano soporte  $\hat{H}_0^-$  tiene dimensión  $r$ . □

**Nota.** (Las figuras verticales son politopos esféricos) Sea  $P = \hat{P} \cap \mathbf{H}^d$  un politopo compacto hiperbólico y sea  $v$  un vértice de  $P$ . Puesto que el vector  $v$  tiene norma negativa, la forma cuadrática  $f$  restringida al subespacio ortogonal  $\hat{H}_v$  es definida positiva. Por otra parte, los vectores ortogonales a las caras de  $P$  que inciden en  $v$  (i.e., la figura vertical) están contenidos en  $\hat{H}_v$ ; por lo que su matriz de Gram es semidefinida positiva y esto significa que la figura vertical de  $v$  es un  $(d - 1)$ -politopo esférico. Análogamente, las figuras verticales de los vértices de politopos euclídeos o esféricos son politopos esféricos (esto es un caso particular del hecho de que en cualquiera de los espacios euclídeo, esférico o hiperbólico, la geometría inducida en una esfera centrada en un punto es esférica, es decir, tiene curvatura constante positiva).

## 1.4 Productos exteriores

Consideramos el espacio  $E_f = (W, f)$ , con  $W$  un espacio vectorial real de dimensión  $d + 1$  (recordamos que  $f$  es no degenerada). Revisamos aquí el producto escalar  $\wedge^m f$  inducido por  $f$  en las potencias exteriores  $\wedge^m W$  (ver [Iv]). Estaremos interesados sobre todo en los espacios  $\wedge^{d+1} W$ , que tiene dimensión 1, y  $\wedge^d W$ , que tiene dimensión  $d + 1$ . Para este último caso, el operador de Hodge da un isomorfismo con  $W$ , que es una generalización del producto vectorial de dos vectores en  $\mathbf{R}^3$ . Utilizaremos este isomorfismo para calcular el vértice en el que inciden  $d$  hiperplanos de  $W$ .

El producto escalar  $\wedge^m f$  se define, para elementos irreducibles (es decir aquéllos que son de la forma  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ , con  $u_i \in W$ ) como

$$(\wedge^m f)(u_1 \wedge \dots \wedge u_m, v_1 \wedge \dots \wedge v_m) := \det(f(u_i, v_j))_{i,j=1,\dots,m}$$

Utilizando coordenadas, se tiene que  $(\wedge^m f)(u_1 \wedge \dots \wedge u_m, v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \det(U^t F V)$ , donde  $U$  y  $V$  son las matrices de coordenadas de los  $u_i$  y  $v_i$  en la base  $\mathcal{E}$  y  $F$  es la matriz del producto escalar  $f$  en la misma base.

Si  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{d+1}\}$  es una base de  $W$ , denotamos por  $\wedge^m \mathcal{E}$  a la base de  $\wedge^m W$  dada por los  $\binom{d+1}{m}$  vectores  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ , con  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq d + 1$ .

Se puede ver que un vector irreducible se expresa como

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_m = \sum U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ 1 & \dots & m \end{pmatrix} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m},$$

donde  $U = (u_{ij})$  es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores  $u_i$  respecto de la base  $\mathcal{E}$  y  $U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ 1 & \dots & m \end{pmatrix}$  es el menor de  $U$  formado por las filas de índices

$i_1 \dots i_m$  y columnas de índices  $1 \dots m$  (las notaciones referentes a matrices se pueden ver en el Apéndice A); es decir, las coordenadas de  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$  respecto de la base  $\wedge^m \mathcal{E}$  son todos los menores de orden  $m$  (de orden máximo) de la matriz  $U$ . Por otra parte, es claro que la expresión matricial del producto escalar  $\wedge^m f$  respecto de la base  $\wedge^m \mathcal{E}$  es la matriz  $\wedge^m F$  de menores de orden  $m$  de  $F$  (en particular, tomando la base  $\mathcal{E}$  ortonormal, se observa que  $\wedge^m f$  es no degenerada si y sólo si  $f$  es no degenerada).

Observamos también que la asignación a cada elemento irreducible  $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \in \wedge^m W$  del subespacio  $L(u_1, \dots, u_m)$  da una biyección entre las rectas vectoriales de  $\wedge^m W$  generadas por elementos irreducibles y los  $m$ -subespacios vectoriales de  $W$ . Además, las dos orientaciones de un  $m$ -subespacio  $L < W$  se corresponden con los dos rayos vectoriales de la correspondiente recta  $R$  de  $\wedge^m W$  (la constante de proporcionalidad de dos vectores de  $R$  es el determinante de la matriz de cambio de base de las dos bases de  $L$  correspondientes a estos vectores).

Fijemos una orientación en  $W$ ; para cada  $m$ , el *operador de Hodge* determina entonces un isomorfismo  $\Phi_m$  entre el espacio  $\wedge^m W$  y  $\wedge^{d+1-m} W$ .

Para  $m = d + 1$ , el isomorfismo  $\Phi_{d+1}$  queda determinado por la condición de que para una base ortonormal de  $W$ ,  $e_1, \dots, e_{d+1}$ , orientada positivamente, se tiene  $\Phi_{d+1}(e_1 \wedge \dots \wedge e_{d+1}) = 1$ . Observamos que  $\Phi_{d+1}(u_1 \wedge \dots \wedge u_{d+1})$  es el determinante de la matriz de coordenadas de los vectores  $u_i$  respecto de una base ortonormal y positivamente orientada de  $W$ .

Para  $m \leq d$ , se define ahora  $\Phi_m : \wedge^m W \rightarrow \wedge^{d+1-m} W$  de la siguiente manera:

- sea  $\psi : \wedge^m W \rightarrow (\wedge^{d+1-m} W)^*$  (donde denotamos por  $V^*$  al espacio dual de un espacio vectorial  $V$ ) el isomorfismo definido como  $\psi(u)(w) = \Phi_{d+1}(u \wedge w)$ , donde  $u \in \wedge^m W$ ,  $w \in \wedge^{d+1-m} W$ ;
- sea  $\tau : \wedge^{d+1-m} W \rightarrow (\wedge^{d+1-m} W)^*$  la polaridad inducida por el producto escalar  $\wedge^{d+1-m} f$ , es decir,  $\tau(v)(w) = (\wedge^{d+1-m} f)(v, w)$ , donde  $v, w \in \wedge^{d+1-m} W$ .

Entonces se define

$$\Phi_m(u) := \tau^{-1}(\psi(u)).$$

Expresamos en coordenadas el isomorfismo  $\Phi_d$ . Sea entonces  $\mathcal{E}$  una base ortonormal para  $f$  (por tanto también  $\wedge^d \mathcal{E}$  es ortonormal). Siempre que tomemos coordenadas será respecto de estas bases; denotamos por  $F$  a la expresión matricial de  $f$  en esta base y llamamos  $\det f := \det F$  (si la signatura de  $f$  es  $(p, q)$ , entonces  $\det f = (-1)^q$ ). Entonces, haciendo el cálculo según la definición, se tiene

$$\Phi_d(e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_{d+1}) = (-1)^{d+1-i} f(e_i, e_i) e_i,$$

y para un vector cualquiera de  $\wedge^d W$  (todos son irreducibles), se tiene

$$\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{d+1-i} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} f(e_i, e_i) e_i \quad (1)$$

(donde  $U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d}$  son menores de la matriz  $U$  de coordenadas de los vectores  $u_i$  respecto de la base  $\mathcal{E}$ ).

Las principales propiedades del isomorfismo  $\Phi_d$  son las siguientes.

**Lema 1.4.1.** Sean  $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d \in W$ ; se verifica:

- (a)  $f(\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d), v) = \Phi_{d+1}(u_1 \wedge \dots \wedge u_d \wedge v)$
- (b)  $(\wedge^d f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_d, u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = (\det f) \Phi_{d+1}(v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge \Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d))$
- (c)  $(\wedge^d f)(u_1 \wedge \dots \wedge u_d, v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = (\det f) f(\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d), \Phi_d(v_1 \wedge \dots \wedge v_d))$

*Demostración:*

(a) Utilizamos la expresión (1) para calcular el producto escalar de  $\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$  y  $v = \sum v_j e_j$ :

$$\begin{aligned} f(\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d), v) &= \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{d+1-i} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} f(e_i, e_i) f(e_i, v) = \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{d+1-i} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} f(e_i, e_i)^2 v_i = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{d+1-i} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} v_i = \det U', \end{aligned}$$

donde  $U'$  es la matriz de coordenadas de los vectores  $u_1, \dots, u_d, v$ , es decir  $\det U' = \Phi_{d+1}(u_1 \wedge \dots \wedge u_d \wedge v)$ .

(b) Recordemos que  $\Phi_{d+1}(v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge \Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d))$  es el determinante de las coordenadas de los vectores  $v_1, \dots, v_d, \Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$ . Desarrollando este determinante por la última columna, se tiene entonces

$$\Phi_{d+1}(v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge \Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)) = \sum_{i=1}^{d+1} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} V \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} f(e_i, e_i),$$

donde  $V$  es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de  $v_i$  respecto de la base  $\mathcal{E}$ .

Por otra parte, por la definición de  $\wedge^d f$ , se tiene

$$(\wedge^d f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_d, u_1 \wedge \dots \wedge u_d) = \det(V^t F U) = \sum_{i=1}^{d+1} V \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} U \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} F \binom{1 \dots \hat{i} \dots d+1}{1 \dots \dots d} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{d+1} V\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\dots d} U\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\dots d} F\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\hat{i}\dots d+1} f(e_i, e_i)^2 = \\
&= (\det f) \sum_{i=1}^{d+1} V\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\dots d} U\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\dots d} f(e_i, e_i),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $f(e_i, e_i) = f(e_i) = \pm 1$  y que  $f(e_i, e_i)F\binom{1\dots\hat{i}\dots d+1}{1\dots\hat{i}\dots d+1} = \det F = \det f$ . Comparando las dos expresiones que hemos obtenido se tiene el resultado.

Finalmente, la parte (c) se obtiene a partir de (a) y (b). □

**Nota.** Las tres fórmulas dadas en el lema anterior son casos particulares de propiedades generales del operador de Hodge, según se pueden ver en [Iv]: si (para simplificar la notación) llamamos  $*$  a todos los isomorfismos anteriores y denotamos por  $\langle, \rangle$  al producto escalar en cualquiera de las potencias exteriores de  $W$ , se tiene entonces

- I.  $\langle *u, v \rangle = *(u \wedge v)$ , para  $u \in \wedge^m W$  y  $v \in \wedge^{d+1-m}$
- II.  $\langle u, v \rangle = (\det f) * (u \wedge *v)$ , para  $u, v \in \wedge^m W$
- III.  $\langle u, v \rangle = (\det f) \langle *u, *v \rangle$ , para  $u, v \in \wedge^m W$ .

Como consecuencia inmediata del Lema 1.4.1 se tiene:

- Del apartado (a) se deduce que el vector  $\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$  es ortogonal a los vectores  $u_1, \dots, u_d$ .
- Entonces, si  $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$  tiene norma no nula, los vectores  $u_1, \dots, u_d, \Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$  forman una base de  $W$ ; utilizando el apartado (b) se ve que la orientación de esta base depende de  $\det f$  y del signo de la norma de  $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$  (por ejemplo, en el caso hiperbólico y tomando la base canónica para orientar el espacio, la base anterior está positivamente orientada si y sólo si  $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$  tiene norma negativa).
- Finalmente, de (c) se deduce que la norma de  $\Phi_d(u_1 \wedge \dots \wedge u_d)$  coincide con la norma de  $u_1 \wedge \dots \wedge u_d$  salvo el signo de  $\det f$ .

## Apéndice A: Notaciones sobre matrices e identidad de Sylvester para el cálculo de determinantes

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Utilizaremos las siguientes notaciones para matrices y determinantes que se obtienen a partir de  $A$ :

$$A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ k_1 & k_2 \dots k_q \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_q} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_q} \end{pmatrix}$$

$$A \binom{i_1 \ i_2 \dots i_p}{k_1 \ k_2 \dots k_p} := \det A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ k_1 & k_2 \dots k_p \end{bmatrix}$$

Los índices no tienen por qué estar ordenados; si lo están, es decir, si  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  y  $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n$ , entonces  $A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ k_1 & k_2 \dots k_q \end{bmatrix}$  y  $A \binom{i_1 \ i_2 \dots i_p}{k_1 \ k_2 \dots k_p}$  son submatrices y menores de la matriz  $A$ .

Para simplificar la notación, a veces denotaremos a las submatrices principales de  $A$  como  $A[i_1, \dots, i_r]$ , en vez de  $A \begin{bmatrix} i_1 \dots i_r \\ i_1 \dots i_r \end{bmatrix}$  y a los menores principales de  $A$  como  $A_{i_1, \dots, i_r}$ , en vez de  $A \binom{i_1 \dots i_r}{i_1 \dots i_r}$ .

Fijamos un menor de orden  $p$  de  $A$ , por ejemplo,  $A \binom{1 \ 2 \dots p}{1 \ 2 \dots p}$ , y sea  $s$  un número tal que  $p + s \leq n$ . Construimos la matriz  $B = A \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \dots p \\ 1 & 2 \dots p \end{smallmatrix} \right\|$  “orlando” el menor fijado con  $s$  filas y  $s$  columnas de las restantes de  $A$ , es decir, las entradas de  $B$  son de la siguiente forma:

$$b_{hk} = A \binom{1 \ 2 \dots p \ i_1 \dots i_s}{1 \ 2 \dots p \ j_1 \dots j_s},$$

donde  $p + 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$  y  $p + 1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ , y  $h, k$  ordenan lexicográficamente las  $s$ -uplas  $(i_1, \dots, i_s)$  y  $(j_1, \dots, j_s)$ , respectivamente.

La matriz  $B$  es cuadrada de orden  $\binom{n-p}{s}$ . Con estas notaciones se tiene la siguiente fórmula que relaciona el determinante de  $B$  con el determinante de  $A$  y el menor fijado, y es conocida como *identidad de Sylvester* (referencias: [Ga], [Mo])

**Teorema.** (Identidad de Sylvester) *Con las notaciones anteriores, se tiene:*

$$\det A \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \dots p \\ 1 & 2 \dots p \end{smallmatrix} \right\| = A \binom{1 \ 2 \dots p}{1 \ 2 \dots p} \binom{n-p-1}{s} \det A \binom{n-p-1}{s-1}$$

Como caso particular, si tomamos  $s = 1$  se tiene la identidad

$$\det A \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \dots p \\ 1 & 2 \dots p \end{smallmatrix} \right\| = A \binom{1 \ 2 \dots p}{1 \ 2 \dots p}^{n-p-1} \det A$$

## Apéndice B: Teorema de Andreev

Fijado un poliedro abstracto,  $\mathcal{P}$ , el Teorema de Andreev caracteriza los ángulos diédricos de las realizaciones compactas de ese poliedro en el espacio hiperbólico que tengan todos

los ángulos menores o iguales que  $\pi/2$ . Estas condiciones sobre los ángulos implican, en primer lugar, que el poliedro es trivalente, es decir, en cada vértice inciden 3 caras. Las condiciones que da el Teorema de Andreev son muy sencillas: son condiciones lineales en los ángulos diédricos, que dependen de la combinatoria del poliedro.

Una familia  $C_1, \dots, C_k$  de caras de un poliedro forma un  $k$ -elemento prismático (elemento prismático triangular o cuadrangular, si  $k = 3, 4$ , respectivamente) si  $C_i$  y  $C_{i+1}$  son adyacentes cíclicamente y ninguna terna de estas caras inciden en un vértice del poliedro.

**Teorema de Andreev.** ([An1]) Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro abstracto distinto de un tetraedro y sean  $\alpha_{ij} \in (0, \pi/2]$  ángulos asociados a sus aristas  $e_{ij} = C_i \cap C_j$ . Entonces existe un poliedro compacto  $P \subset \mathbf{H}^3$  del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  y con los ángulos dados en las correspondientes aristas si y sólo si

- (0)  $\mathcal{P}$  es trivalente;
- (1) si tres caras  $C_1, C_2, C_3$  inciden en un vértice, entonces  $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} > \pi$ ;
- (2) si las caras  $C_1, C_2, C_3$  forman un elemento prismático triangular, entonces  $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} < \pi$ ;
- (3) si las caras  $C_1, C_2, C_3, C_4$  forman un elemento prismático cuadrangular, entonces  $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{41} < 2\pi$ .
- (4) si  $C_1$  es una cara cuadrangular y  $C_2, \dots, C_5$  son las caras adyacentes, entonces  $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{25} + \alpha_{14} + \alpha_{34} + \alpha_{45} < 3\pi$  y  $\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{15} + \alpha_{25} + \alpha_{45} < 3\pi$ .

Además, si se dan las condiciones anteriores, el poliedro  $P$  es único salvo isometría hiperbólica.

La condición (4) se deduce de las condiciones anteriores cuando  $\mathcal{P}$  no es un prisma triangular.

# Capítulo 2:

## Símplices esféricos, euclídeos e hiperbólicos

Este Capítulo está dedicado a los poliedros más sencillos en cada dimensión, los símlices. El hecho de que los símlices tengan el mínimo número posible de caras de codimensión 1 se traduce en que dar su matriz de Gram equivale a dar todos los ángulos diédricos.

La caracterización de matrices de Gram de símlices es conocida (Coxeter ([Co]), Lanner ([La]), Vinberg ([Vi2], Milnor ([Mi2])); el enunciado y la demostración (que también daremos aquí) de este teorema es la motivación de los teoremas que se verán en el Capítulo 3 para  $d$ -politopos. En la Sección 2.2 estudiamos el espacio de ángulos diédricos de los tetraedros compactos hiperbólicos; veremos algunas propiedades geométricas, como que no es convexo. En la Sección 2.3 estudiamos otras coordenadas para los símlices, como las longitudes y unas coordenadas mixtas.

### 2.1 Caracterización de matrices de Gram de símlices

El siguiente teorema caracterizará los símlices compactos euclídeos, esféricos e hiperbólicos en función de sus ángulos diédricos. Un símplex es un poliedro definido por  $n + 1$  hiperplanos en posición general.

#### Observación.

- (a) Dados  $n + 1$  hiperplanos  $\hat{H}_0, \dots, \hat{H}_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  en posición general, y dados  $\hat{H}_i^-$  semiespacios bordeados por estos hiperplanos, entonces  $\hat{T} = \bigcap_{i=0}^n \hat{H}_i^-$  es un cono poliedral que tiene el tipo combinatorio de un símplex. La intersección  $\hat{T} \cap \mathbf{S}^n$  es siempre compacta (no vacía), luego es un símplex esférico. Por otra parte, para el caso hiperbólico, se tiene que  $\hat{T} \cap \mathbf{H}^n$  es compacto si y sólo si todos los vértices

de  $\hat{T}$  (que son rayos vectoriales de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ) cortan a  $\mathbf{H}^n$ , es decir, corresponden a puntos finitos de  $\mathbf{H}^n$ .

- (b) La intersección de  $n+1$  semiespacios, bordeados por hiperplanos de  $\mathbf{R}^n$  en posición general, es un símplex compacto euclídeo si y sólo si al trasladar cualquiera de los semiespacios hasta hacerlo pasar por el vértice que determinan los demás, la intersección se reduce entonces a un punto. Esto equivale a que la normal exterior a cada cara es combinación lineal con todos los coeficientes negativos de las normales unitarias de las demás caras (comparar con la observación que sigue al Lema 1.3.2).

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $T$  un  $n$ -símplex abstracto, de caras de codimensión 1  $C_0, \dots, C_n$ ; asignamos a cada cara  $C_{ij} = C_i \cap C_j$  un número  $\alpha_{ij} \in (0, \pi)$ . Sea  $G = (g_{ij})$  la matriz con  $g_{ii} = 1$ ,  $g_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ . Entonces:*

- (I) *Existe un símplex  $T \subset \mathbf{S}^n$  con ángulos  $\alpha_{ij}$  (es decir, la matriz de Gram de  $T$  es  $G(T) = G$ ) si y sólo si*
- (1)  $\det(G) > 0$ ;
  - (2) todos los menores principales de  $G$  son positivos.
- (II) *Existe un símplex compacto  $T \subset \mathbf{H}^n$  con ángulos  $\alpha_{ij}$  (y por tanto matriz de Gram  $G$ ) si y sólo si*
- (1)  $\det(G) < 0$ ;
  - (2) todos los menores principales propios de  $G$  son positivos;
  - (3) todos los adjuntos,  $c_{ij}$ , de  $G$  son positivos.
- (III) *Existe un símplex compacto  $T \subset \mathbf{E}^n$  con ángulos  $\alpha_{ij}$  si y sólo si*
- (1)  $\det(G) = 0$ ;
  - (2) todos los menores principales de  $G$  son positivos;
  - (3) todos los adjuntos,  $c_{ij}$ , de  $G$  son positivos.

Además, en los dos primeros casos, el símplex  $T$  es único salvo isometría del espacio; en el caso euclídeo, el símplex  $T$  es único salvo semejanza.

*Demostración:*

Siempre que aparezcan expresiones en coordenadas serán respecto de la base canónica, que es ortonormal para la forma cuadrática elegida en cada caso.

(I)  $\Rightarrow$ ) Si existe un símplex  $T \subset \mathbf{S}^n$ ,  $G(T) = G$  es definida positiva; por tanto  $\det(G) > 0$ , y todos sus menores principales son positivos (restricción de una forma cuadrática definida positiva a un subespacio).

$\Leftrightarrow$ ) Si se dan las condiciones (1), (2), la matriz  $G$  es definida positiva, luego existe una base  $e_0, \dots, e_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  tal que  $G = (f(e_i, e_j))$ ; sean  $H_i^- = \{x \in \mathbf{S}^n \mid f(x, e_i) \leq 0\}$ , y  $T = \bigcap_{i=0}^n H_i^-$ . Los  $H_i$  son hiperplanos en posición general (porque  $e_0, \dots, e_n$  son linealmente independientes), luego  $T$  es un símplex de  $\mathbf{S}^n$ .

(II)  $\Rightarrow$ ) Sea  $T \subset \mathbf{H}^n$  compacto con  $G(T) = G$ . Por definición de matriz de Gram,  $G(T)$  es una matriz simétrica de signatura  $(n, 1)$ ; en particular,  $\det(G) < 0$ .

Por ser  $T$  compacto, la figura verticilar de cada uno de sus vértices (todos finitos) es un  $(n-1)$ -símplex esférico. Se deduce de aquí que las submatrices de  $G$  correspondientes a las caras que determinan los vértices son todas definidas positivas. Como consecuencia, todos los menores principales propios de  $G$  son positivos. Sean  $v_0, \dots, v_n \in \mathbf{R}^{n+1}$  los vértices de  $T$ ,  $V$  la matriz cuyas columnas son los  $v_i$ ; sean  $e_0, \dots, e_n$  las normales unitarias exteriores de los semiespacios  $H_i^-$  que determinan el símplex y  $E$  la matriz cuyas columnas son los  $e_i$ . Se tiene  $G = E^t F E$  (donde  $F$  es la expresión matricial del producto escalar  $f$ ). Como  $v_i, v_j \in \mathbf{H}^n$ , es  $f(v_i, v_j) < 0$ ; por tanto la matriz  $K = V^t F V$  es totalmente negativa.

Por otra parte,  $f(e_i, v_j) = 0$  si  $i \neq j$  y  $f(e_i, v_i) < 0$  para todo  $i$ ; por tanto tenemos

$$E^t F V = L = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_i = f(e_i, v_i) < 0 \quad \text{para todo } i.$$

De aquí deducimos  $V = F(E^t)^{-1}L$ , y sustituyendo en la expresión para  $K$ , tenemos

$$K = L E^{-1} F F F (E^t)^{-1} L = L E^{-1} F (E^t)^{-1} L = L G^{-1} L.$$

Como  $K$  es totalmente negativa, y su entrada  $(i, j)$  es  $\lambda_i \lambda_j c_{ij} / \det(G)$  se tiene que  $c_{ij} > 0$  para cualesquiera  $i, j$ .

$\Leftrightarrow$ ) Las condiciones (1) y (2) implican que la matriz  $G$  tiene signatura  $(n, 1)$ . Por tanto existe una base  $e_0, \dots, e_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  tal que  $G$  es la expresión de la forma cuadrática  $f$  en esa base, es decir,  $G = E^t F E$ , donde  $E$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $e_i$ . Sea

$$\hat{H}_i^- = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid f(x, e_i) \leq 0\}, \quad H_i^- = \hat{H}_i^- \cap \mathbf{H}^n$$

$$\hat{T} = \bigcap_{i=0}^n \hat{H}_i^- \quad \text{y} \quad T = \hat{T} \cap \mathbf{H}^n$$

Puesto que los vectores  $e_0, \dots, e_n$  son linealmente independientes,  $\hat{T}$  es un cono poliedral del tipo combinatorio de un símplex. Sean  $v_0, \dots, v_n$  los vértices de  $\hat{T}$ , es

decir,  $v_i \in L(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)^\perp$  y  $f(v_i, e_i) \leq 0$ . Para ver que  $T$  es un simplex compacto hay que ver que todos los vértices de  $\hat{P}$  son finitos.

Por la hipótesis (2), la submatriz  $G \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{bmatrix}$  es definida positiva; esto equivale a que  $f$  restringida a  $L(e_1, \dots, e_n)$  es definida positiva, y por tanto  $v_0$  tiene norma negativa. De la misma forma, los demás vértices tienen también norma negativa.

Veamos que  $f(v_i, v_j) < 0$ : para ello, utilizando las mismas notaciones y siguiendo los mismos cálculos que en la demostración de la condición necesaria, tenemos que  $K = LG^{-1}L$ . La entrada  $(i, j)$  de  $K$  es

$$f(v_i, v_j) = \lambda_i \lambda_j \frac{c_{ij}}{\det G}$$

Por la hipótesis (3),  $c_{ij}/\det G < 0$ ; como  $\lambda_i \lambda_j > 0$ , se tiene que  $f(v_i, v_j) < 0$ . Esto significa que todos los vértices  $v_i$  están en la misma componente del conjunto de vectores de norma negativa, es decir, la última coordenada de los  $v_i$  tiene el mismo signo para todo  $i$ ; si esta coordenada es negativa, entonces cambiamos los vectores  $e_i$  por  $-e_i$ , y con éstos se tiene ya el resultado.

(III)  $\Rightarrow$ ) Sea  $T \subset \mathbf{E}^n$  un simplex compacto con  $G(T) = G$ ,  $T = \bigcap_{i=0}^n H_i^-$ . Sean  $e_0, \dots, e_n \in \mathbf{R}^n$  los vectores normales unitarios exteriores a  $H_0^-, \dots, H_n^-$ . Por definición,  $G(T) = E^t F E$ , donde  $E$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $e_i$  y  $F$  es ahora la matriz identidad de orden  $n$ . Se deduce que  $G$  es semidefinida positiva de rango  $n$  y por tanto  $\det(G) = 0$ . Por ser  $T$  compacto, la figura verticilar de cada uno de sus vértices es un  $(n-1)$ -simplex esférico; por tanto todos los menores principales son positivos.

Si consideramos  $G$  como la matriz de un endomorfismo  $g$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , entonces el núcleo de  $g$  tiene dimensión 1. Sea  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$  un generador de  $\ker(g)$ . Si para algún  $i$ ,  $\beta_i = 0$ , el menor principal de  $G$  que resulta de quitar la fila y columna  $i$ -ésimas tendría determinante igual a 0. Esto es imposible porque todos los menores principales son positivos; por tanto  $\beta_0 \neq 0, \dots, \beta_n \neq 0$ . El vector  $\beta_0 e_0 + \dots + \beta_n e_n$  es ortogonal a todos los vectores  $e_i$ , pues

$$f(\beta_0 e_0 + \dots + \beta_n e_n, e_i) = \beta_0 g_{0i} + \dots + \beta_n g_{ni} = 0$$

( $g_{ij}$  son las entradas de la matriz  $G$ ). Por tanto  $\beta_0 e_0 + \dots + \beta_n e_n = 0$ . Expresamos uno de los  $e_i$  como combinación lineal de los demás  $e_0 = \frac{\beta_1}{\beta_0}(-e_1) + \dots + \frac{\beta_n}{\beta_0}(-e_n)$ . Como  $T$  es un simplex compacto, por la Observación al comienzo de esta sección se tiene que  $\beta_1/\beta_0 > 0, \dots, \beta_n/\beta_0 > 0$ , es decir,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  tienen el mismo signo.

Sea  $C = (c_{ij})$  la matriz de los adjuntos de  $G$ . Por ser  $\det(G) = 0$ , se tiene que  $GC = 0$ , de donde se deduce que los vectores columna de  $C$  están en  $\ker(g)$ . Así, la

matriz  $C$  es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} a_0\beta_0 & \dots & a_n\beta_0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0\beta_n & \dots & a_n\beta_n \end{pmatrix}$$

Como  $G$  es simétrica, también  $C$  es simétrica, y entonces es  $a_0\beta_i = a_i\beta_0$ , es decir,  $a_i = (a_0/\beta_0)\beta_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Llamando  $a = a_0/\beta_0$ , podemos escribir

$$C = \begin{pmatrix} a\beta_0\beta_0 & a\beta_1\beta_0 & \dots & a\beta_n\beta_0 \\ a\beta_0\beta_1 & a\beta_1\beta_1 & \dots & a\beta_n\beta_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a\beta_0\beta_n & a\beta_1\beta_n & \dots & a\beta_n\beta_n \end{pmatrix} = a(\beta_i\beta_j),$$

es decir,  $C$  es un múltiplo de una matriz totalmente positiva. Las entradas de la diagonal de  $C$  son determinantes de menores principales de  $G$ , por tanto son positivas. Se deduce que  $a > 0$  y entonces  $C$  es totalmente positiva.

$\Leftrightarrow$ ) Las condiciones (1) y (2) implican que la matriz  $G$  tiene rango  $n$  y es semidefinida positiva; por tanto existe una base  $e'_0, \dots, e'_n \in \mathbf{R}^{n+1}$  tal que  $G = E'^t F' E'$ , donde  $E'$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $e'_0, \dots, e'_n$  y  $F'$  es diagonal con todas las entradas de la diagonal iguales a 1 menos la última que es nula. Sea  $e_i \in \mathbf{R}^n$  el vector de coordenadas las  $n$  primeras coordenadas de  $e'_i$  y  $E$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $e_i$ . Se tiene entonces que  $G = E^t F E$ , con  $F$  la matriz identidad.  $G$  es por tanto la matriz de Gram del poliedro  $T = \bigcap_{i=0}^n H_i^-$ , donde  $H_i$  son hiperplanos de  $\mathbf{E}^n$  ortogonales a  $e_i$ , elegidos de forma que su intersección sea vacía y que la intersección de los semiespacios no lo sea (basta trasladar uno de los hiperplanos).

Como tenemos  $n + 1$  vectores en  $\mathbf{R}^n$ , existe una relación lineal  $\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n = 0$ , única salvo multiplicación por constante. Por la Observación al comienzo de esta sección, para ver que  $T$  es compacto hay que ver que todos los  $\beta_i$  tienen el mismo signo.

Multiplicando escalarmente el vector  $\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$  por  $e_i$ , obtenemos que  $G \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , es decir,  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \ker(g)$ , siendo  $g$  el endomorfismo de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de matriz  $G$ . Como antes, por ser los menores principales de orden  $n$  de  $G$  definidos positivos, resulta que  $\beta_0 \neq 0, \dots, \beta_n \neq 0$ . Por otra parte, si  $C$  es la matriz de adjuntos de  $G$ , tenemos  $GC = 0$ , con lo que las columnas de  $C$  son múltiplos de  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ .

Por ser simétrica,  $C$  es de la forma (igual que en la otra implicación):

$$C = \begin{pmatrix} a\beta_0\beta_0 & a\beta_1\beta_0 & \dots & a\beta_n\beta_0 \\ a\beta_0\beta_1 & a\beta_1\beta_1 & \dots & a\beta_n\beta_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a\beta_0\beta_n & a\beta_1\beta_n & \dots & a\beta_n\beta_n \end{pmatrix} = a(\beta_i\beta_j).$$

La entrada  $a\beta_0^2$  es positiva por ser el determinante de un menor principal, y se tiene que  $a > 0$ . Además, por la condición (3) de las hipótesis, todas las entradas de  $C$  son positivas ; se deduce por tanto que  $\beta_i\beta_j > 0 \forall i, j$ , luego  $\beta_0, \dots, \beta_n$  tienen todos el mismo signo.

Supongamos dada una matriz de Gram  $G$ . La unicidad (salvo isometría) del simplex que realiza esta matriz, se obtiene directamente del Lema 1.1.1 en los caso esférico e hiperbólico. En el caso euclídeo, por este lema, están determinados los vectores ortogonales a las caras del simplex, por tanto está determinado el simplex salvo semejanza.  $\square$

**Nota.** Las condiciones (1), (2) del teorema en los casos hiperbólico y euclídeo, implican que la matriz de adjuntos de  $G$  tiene todas las entradas no nulas. En efecto, en el caso hiperbólico, las condiciones (1), (2) permiten construir las matrices  $K$ , totalmente negativa (por tanto con ninguna entrada nula) y  $L$  diagonal con los elementos de la diagonal no nulos. Teníamos la relación  $K = LG^{-1}L$ . Entonces  $c_{ij} = \det(G)\lambda_i\lambda_jk_{ij} \neq 0$  ( $k_{ij}$  es la entrada  $i, j$  de  $K$ ). En el caso euclídeo, a partir de las condiciones (1) y (2) encontramos el vector  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ , con todas las entradas no nulas; la matriz de adjuntos es  $C = a(\beta_i\beta_j)$  y la condición (2) implica que  $a \neq 0$ . por tanto la matriz de adjuntos tiene todas las entradas no nulas.

**Nota.** La demostración que hemos dado para el caso hiperbólico motiva la demostración del Teorema 3.4.1. La matriz  $L$  que aparece aquí, se cambiará para polítopos arbitrarios por la matriz de incidencias.

**Definición.** Sea  $T$  un  $n$ -simplex abstracto. Denotamos por  $X$  a uno de los tres espacios  $\mathbf{H}^n$ ,  $\mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{S}^n$ . Sea  $\mathcal{A}_X(T)$  el conjunto de puntos  $(\alpha_{01}, \dots, \alpha_{n-1n}) \in \mathbf{R}^{\binom{n+1}{2}}$  tales que existe un  $n$ -simplex compacto  $T \subset X$  con ángulos  $\alpha_{01}, \dots, \alpha_{n-1n}$ ; llamamos a este conjunto *espacio de ángulos del simplex  $T$*  en el espacio  $X$ .

**Nota.** A veces es más conveniente o sencillo considerar el espacio de *cosenos* de ángulos diédricos en vez del propio espacio de ángulos, por ejemplo para caracterizar este espacio (ver Capítulo 4); utilizaremos la misma notación para ambos espacios.

El Teorema 2.1.1 determina las inequaciones del conjunto  $\mathcal{A}_X(\mathcal{T})$ , que son polinomios en las variables  $g_{ij} = -\cos(\alpha_{ij})$ . Se puede ver que  $\mathcal{A}_X(\mathcal{T})$  es conexo. La primera de las notas anteriores tiene la siguiente consecuencia: en cada uno de los casos euclídeo o hiperbólico,  $\mathcal{A}_X(\mathcal{T})$  es una componente conexa de la región determinada por las condiciones (1) y (2). Es decir, la condición (3) interviene sólo para determinar una componente conexa entre (quizás) varias. En efecto, si repasamos la parte recíproca de la demostración del teorema en el caso hiperbólico, vemos que a partir de las condiciones (1) y (2) se obtiene la relación  $G^{-1} = L^{-1}KL^{-1}$ , donde  $K$  es una matriz totalmente negativa y  $L$  es diagonal con las entradas de la diagonal no nulas, con lo que  $G^{-1}$  tiene todas las entradas no nulas. Por tanto, un punto de la región determinada por las condiciones (1) y (2) no puede anular ningún adjunto de  $G$ .

Análogamente, en el caso euclídeo, a partir de las condiciones (1) y (2) se tiene para la matriz  $C$  de adjuntos la relación  $C = a(\beta_i\beta_j)$ , con  $a > 0$  y  $\beta_i \neq 0$  para todo  $i$ , con lo que todos los adjuntos de  $G$  son no nulos.

Es también consecuencia inmediata del teorema que los símlices euclídeos están en el borde de los símlices hiperbólicos y de los símlices esféricos, es decir,

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}^n}(\mathcal{T}) \subset \partial\mathcal{A}_{\mathbb{H}^n}(\mathcal{T}) \cap \partial\mathcal{A}_{\mathbb{S}^n}(\mathcal{T}).$$

**Ejemplo.** Triángulos (caso  $n = 2$ )

Aplicamos el teorema al caso de triángulos; por cálculo directo y utilizando las relaciones trigonométricas, podemos calcular el determinante de la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B \\ -\cos A & 1 & -\cos C \\ -\cos B & -\cos C & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $(A, B, C) \in [0, \pi]^3$ , se tiene:

- $\det(G) > 0$  si y sólo si  $(A, B, C)$  es un punto del interior del tetraedro  $T_0 \subset \mathbb{R}^3$  de vértices  $(\pi, 0, 0)$ ,  $(0, \pi, 0)$ ,  $(0, 0, \pi)$  y  $(\pi, \pi, \pi)$ ;
- $\det(G) = 0$  si y sólo si  $(A, B, C)$  está en el borde de  $T_0$  y
- $\det(G) < 0$  en otro caso.

Utilizando este cálculo en el teorema 2.1.1, obtenemos la caracterización de los triángulos esféricos, euclídeos o hiperbólicos:

**Corolario 2.1.2.** Sean  $A, B, C \in (0, \pi)$ .

(I) Existe un triángulo esférico con ángulos  $A, B, C$  si y sólo si

$$\begin{aligned} A + B + C &> \pi \\ -A + B + C &< \pi \\ A - B + C &< \pi \\ A + B - C &< \pi \end{aligned}$$

(II) Existe un triángulo compacto hiperbólico con ángulos  $A, B, C$  si y sólo si  $A + B + C < \pi$ .

(III) Existe un triángulo compacto euclídeo con ángulos  $A, B, C$  si y sólo si  $A + B + C = \pi$ . □

## 2.2 Espacio de ángulos de tetraedros compactos hiperbólicos

Vamos a estudiar ahora el espacio de ángulos de los tetraedros compactos hiperbólicos,  $\mathcal{A}_{\mathbf{H}^3}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}$ . El Teorema 2.1.1 da las ecuaciones de este espacio. Veremos que este espacio está contenido en el interior de un símplex de  $\mathbf{R}^6$  y el borde contiene algunas de las caras de este símplex. También veremos cómo varía un tetraedro cuando variamos uno de sus ángulos diédricos.

En todo lo que sigue, aunque no se diga explícitamente, la notación para las caras, vértices y ángulos diédricos de los tetraedros será la de la *Figura 2.1*.

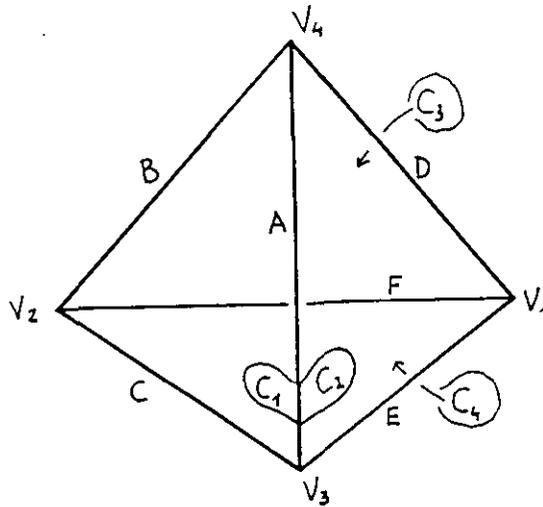


Figura 2.1

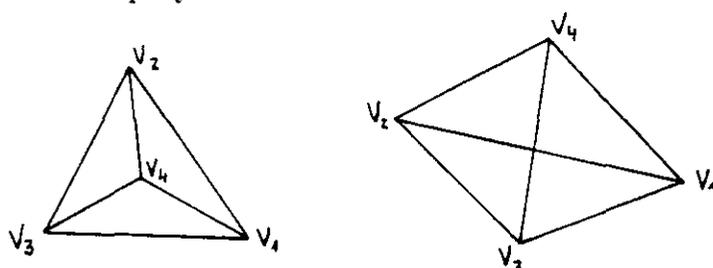
**Proposición 2.2.1.** El espacio de ángulos de tetraedros,  $\mathcal{A}$ , está contenido estrictamente en el interior del símplex  $S$  de  $\mathbf{R}^6$  de vértices

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0, \pi, \pi, \pi) & S_5 &= (\pi, 0, 0, 0, 0, \pi) \\ S_2 &= (0, \pi, \pi, 0, 0, \pi) & S_6 &= (0, \pi, 0, 0, \pi, 0) \\ S_3 &= (\pi, 0, \pi, 0, \pi, 0) & S_7 &= (0, 0, \pi, \pi, 0, 0) \\ S_4 &= (\pi, \pi, 0, \pi, 0, 0) & & \end{aligned}$$

Además, todos los vértices están en el borde de  $\mathcal{A}$ .

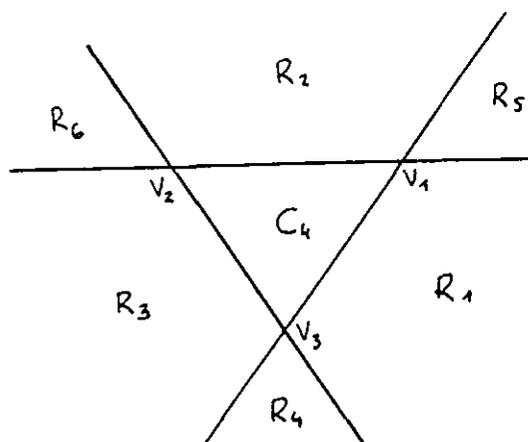
*Demostración:*

Los vértices  $S_1, \dots, S_7$  se corresponden con las distintas formas de proyectar un tetraedro (con las caras numeradas) en el plano. Hay dos grupos de vértices distintos:  $S_1, S_2, S_3, S_4$  por un lado, y  $S_5, S_6, S_7$  por otro: los 4 primeros corresponden a proyecciones en las que uno de los vértices, y por tanto las tres aristas que inciden en él, cae en el interior de la cara opuesta (ver *Figura 2.2*); los 3 restantes corresponden a proyecciones sobre dos caras adyacentes, con lo que un par de aristas opuestas queda en el interior de la proyección.



*Figura 2.2*

El comentario anterior da idea de que los siete vértices están en el borde, es decir, son límite de los ángulos diédricos de alguna sucesión de tetraedros compactos hiperbólicos. Veámoslo para un punto de cada uno de los dos grupos de vértices. Partimos de un tetraedro compacto cualquiera  $T \subset \mathbf{H}^3$ , con la notación de la *Figura 2.1*; consideramos el segmento que une el vértice  $V_4$  con un punto del interior de la cara opuesta,  $C_4$ , y consideramos los tetraedros que tienen la cara  $C_4$  común y cuyo cuarto vértice se mueve en el segmento anterior desde  $V_4$  hasta  $C_4$ . El límite de los ángulos de estos tetraedros es el punto  $S_4 = (\pi, \pi, 0, \pi, 0, 0)$ . El plano que contiene a la cara  $C_4$  queda dividido en 7 regiones por las rectas que contienen a las aristas de esta cara (ver *Figura 2.3*). Si consideramos ahora el segmento que une el vértice  $V_4$  con un punto del interior de la región  $R_2$  y consideramos los tetraedros que tienen la cara  $C_4$  común y cuyo cuarto vértice se mueve en este segmento desde  $V_4$  hasta  $R_2$ , entonces el límite de los ángulos de estos tetraedros es el punto  $S_5 = (\pi, 0, 0, 0, 0, \pi)$ . De la misma forma se obtienen los demás vértices de  $\mathcal{S}$  como límite de tetraedros compactos.



*Figura 2.3*

Como  $S_1, \dots, S_7$  son siete puntos de  $\mathbf{R}^6$  en posición general, determinan un símplex  $S$ . Este símplex está definido por

$$\begin{aligned} A + B + D &\geq \pi & B + C + E + D &\leq 2\pi \\ A + C + E &\geq \pi & A + D + F + C &\leq 2\pi \\ B + C + F &\geq \pi & A + B + F + E &\leq 2\pi \\ D + E + F &\geq \pi & & \end{aligned}$$

El espacio de ángulos  $A$  verifica las 4 primeras condiciones (porque las figuras verticales son triángulos esféricos).

Por otra parte, si  $T$  es un tetraedro compacto hiperbólico, las figuras verticales de los vértices  $V_1$  y  $V_2$  tienen el ángulo  $F$  en común, por lo que podemos dibujar estos dos triángulos sobre un bigono esférico de ángulo  $F$  (Figura 2.4). Los ángulos planos  $\theta_B$  y  $\theta_D$  son ángulos del triángulo compacto hiperbólico  $V_1V_2V_3$ ; por tanto  $\theta_B + \theta_D < \pi$ , y análogamente  $\theta_C + \theta_E < \pi$ . De aquí deducimos que los dos triángulos no cubren el bigono, y comparando las áreas se tiene que  $2F > F + B + C - \pi + D + E + F - \pi$ , es decir,  $B + C + D + E < 2\pi$ . De la misma forma se prueba que  $A + D + F + C < 2\pi$  y  $A + B + F + E < 2\pi$ , con lo que se concluye que  $A$  está en el interior de  $S$ .

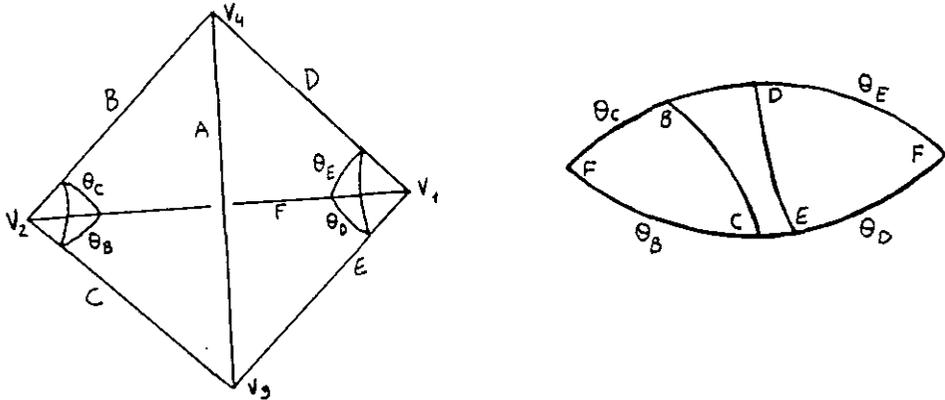


Figura 2.4

Finalmente, para ver que el contenido es estricto, basta comprobar, por ejemplo, el caso en que  $A = B = C = D = E = F$ . Vemos que por una parte  $(A, \dots, A)$  está en el interior de  $S$  si  $A \in (\pi/3, \pi/2)$ ; por otra parte, se deduce del Teorema 2.1.1 aplicado a tetraedros que  $(A, \dots, A)$  está en  $A$  si  $A \in (\pi/3, \arccos(1/3))$ .  $\square$

**Nota.** En la demostración anterior hemos probado que un tetraedro compacto hiperbólico, con la notación de la Figura 2.1, verifica  $B + C + D + E < 2\pi$ . Observamos además que si  $B + C + D + E$  tiende a  $2\pi$  entonces  $B + D$  y  $C + E$  tienden a  $\pi$ ; aplicando el mismo razonamiento a las figuras verticales de los vértices  $V_3$  y  $V_4$ , tenemos que si  $B + C + D + E$  tiende a  $2\pi$  entonces  $B + C$  y  $D + E$  tienden a  $\pi$ . Como consecuencia se tiene que en el límite es  $B = E = \pi - D = \pi - C$ .

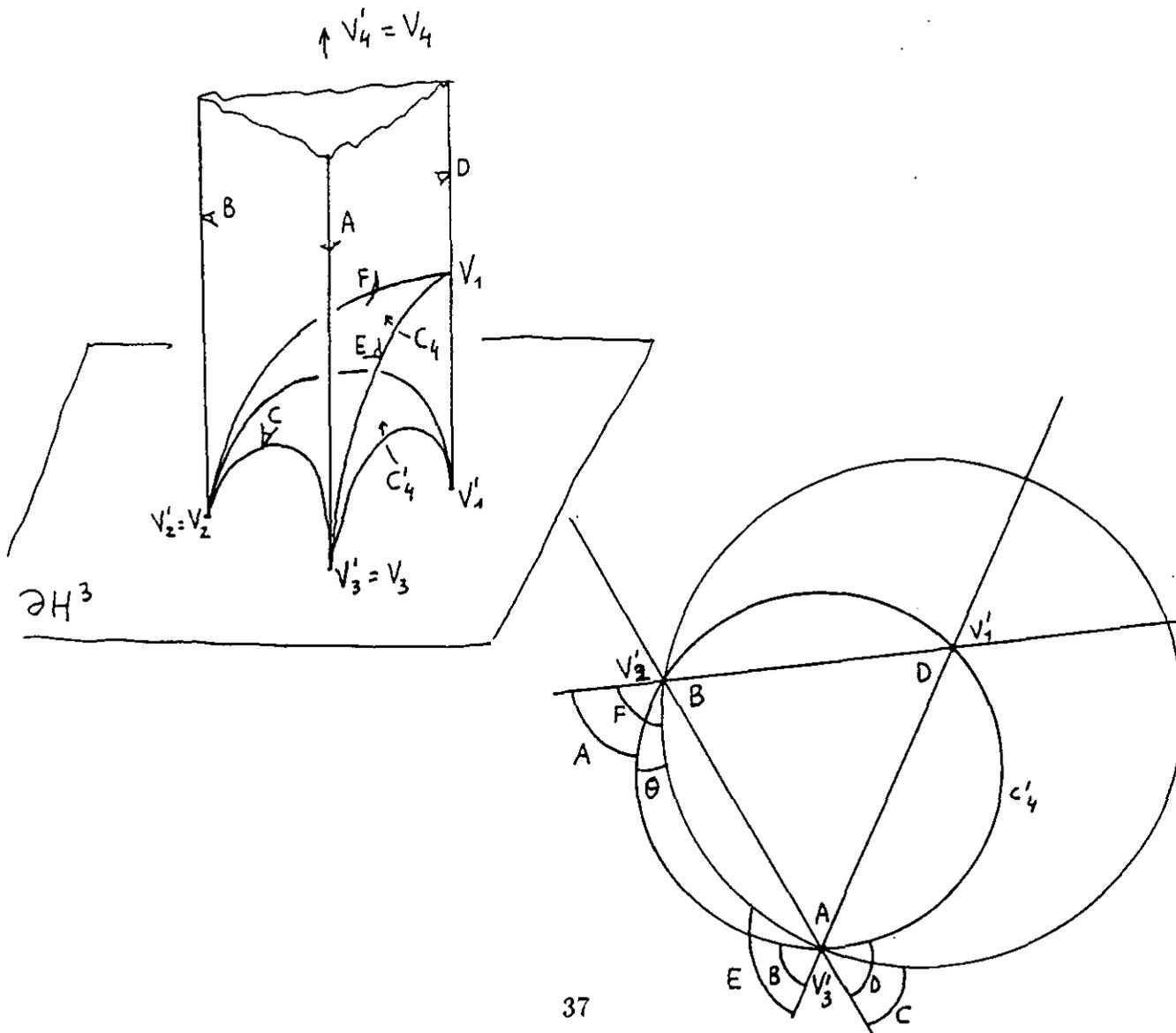
De la proposición anterior se deduce trivialmente el siguiente

**Corolario 2.2.2.** *El espacio de ángulos diédricos del tetraedro,  $\mathcal{A}(T)$ , no es convexo.*  
 $\square$

Vamos a ver ahora cuáles de las caras del simplex  $\mathcal{S}$  están contenidas en el borde del espacio de ángulos  $\mathcal{A}$ . Recordemos que las caras de un simplex vienen dadas por cualquier subconjunto del conjunto de vértices del simplex. Así, un simplex de dimensión 6 tiene 7 vértices, 21 aristas, 35 triángulos, 35 tetraedros, 21 simplexes de dimensión 4 y 7 simplexes de dimensión 5. Hemos denotado por  $S_1, \dots, S_7$  a los vértices de  $\mathcal{S}$ ; denotamos por  $[i_0 \dots i_k]$  a la cara de dimensión  $k$  de  $\mathcal{S}$  dada por los vértices  $S_{i_0}, \dots, S_{i_k}$ .

Necesitaremos el siguiente lema.

Figura 2.5



**Lema 2.2.3.** *Sea  $T \subset \mathbf{H}^3$  un tetraedro con ángulos  $(A, B, C, D, E, F)$  y los vértices  $V_2, V_3$  y  $V_4$  en el infinito. Entonces se verifica  $A < F, B < E, C < D, F - A = E - B = D - C$ . Recíprocamente, si  $A + B + D = \pi$ , para todo  $\theta \in (0, D)$  existe un tetraedro con  $V_2, V_3, V_4$  en el infinito y ángulos  $(A, B, C, D, E, F) = (A, B, D - \theta, D, B + \theta, A + \theta)$ .*

*Demostración:*

Comparamos el tetraedro  $T$  (de caras  $C_1, \dots, C_4$ ) con el único tetraedro ideal  $T'$  (de caras  $C'_1, \dots, C'_4$ ) de ángulos  $(A, B, D, D, B, A)$ , que existe porque  $A + B + D = \pi$ . La *Figura 2.5* muestra estos dos tetraedros en el modelo del semiespacio de Poincaré así como la intersección de sus caras con  $\partial\mathbf{H}^3$  en este modelo. Los vértices  $V'_1, V'_2, V'_3$  de  $T'$  están en  $\partial\mathbf{H}^3$ ; la circunferencia  $c'_4 = C'_4 \cap \partial\mathbf{H}^3$  pasa por estos tres puntos, y la circunferencia  $c_4 = C_4 \cap \partial\mathbf{H}^3$  pasa por  $V'_2 = V_2, V'_3 = V_3$  y contiene a  $V'_1$  en su interior. Según esto es claro que  $F = A + \theta, E = B + \theta$  y  $C = D - \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre las circunferencias  $c_4$  y  $c'_4$ .

Para el recíproco vale la misma figura: dados  $A, B, D$  con  $A + B + D = \pi$ , existe un tetraedro ideal  $T'$  con estos ángulos, y en  $\partial\mathbf{H}^3$  (del modelo del semiespacio) tenemos los vértices  $V'_1, V'_2, V'_3$  y la circunferencia  $c'_4 = C'_4 \cap \partial\mathbf{H}^3$ . Para todo  $\theta \in (0, D)$ , existe una circunferencia  $c_4$  que pasa por  $V'_2, V'_3$  y que contiene a  $V'_1$  en su interior y que forma ángulo  $\theta$  con  $c'_4$ . El tetraedro  $T$  que buscamos es el de caras  $C'_1, C'_2, C'_3$  y el plano  $C_4$  sobre la circunferencia  $c_4$ .  $\square$

**Observación.** Es inmediato que los ángulos de tetraedros hiperbólicos con 1, 2, 3 ó 4 vértices en el infinito están en el borde del espacio de ángulos  $\mathcal{A}$ . En efecto, dado un tetraedro con algún vértice en el infinito, existe una sucesión de tetraedros compactos que lo aproximan (pensar por ejemplo en el modelo proyectivo y considerar sucesiones de tetraedros compactos cuyos vértices tiendan a los vértices del tetraedro dado); los ángulos diédricos de los tetraedros de esta sucesión tienden a los ángulos diédricos del tetraedro inicial.

**Proposición 2.2.4.** (Células de  $\mathcal{S}$  que están en el borde de  $\mathcal{A}$ ) *El borde de la variedad de ángulos del tetraedro,  $\partial\mathcal{A}$ , contiene exactamente:*

- todos los vértices y aristas de  $\mathcal{S}$ ;
- todas las células de dimensión 2 salvo las células  $[123], [124], [134]$  y  $[234]$ ;
- diez células de dimensión 3:  $[1567], [2567], [3567], [4567]$ , correspondientes a tetraedros con tres vértices en el infinito; y  $[1267], [3467], [1456], [2356], [1357], [2457]$ , correspondientes a límites de tetraedros en los que dos vértices se hacen iguales;
- ninguna célula de dimensión 4 ó 5.

*Demostración:*

Ya hemos visto en la Proposición 2.2.1 que los vértices de  $\mathcal{S}$  están en  $\partial\mathcal{A}$ .

La 3-célula [1267], de vértices  $S_1 = (0, 0, 0, \pi, \pi, \pi)$ ,  $S_2 = (0, \pi, \pi, 0, 0, \pi)$ ,  $S_6 = (0, \pi, 0, 0, \pi, 0)$ ,  $S_7 = (0, 0, \pi, \pi, 0, 0)$ , está contenida en el 3-plano  $A = 0$ ,  $B + D = \pi$ ,  $C + E = \pi$ , y está definida por las desigualdades  $D + E + F \geq \pi$ ,  $D + E - F \leq \pi$ ,  $D - E + F \leq \pi$  y  $-D + E + F \leq \pi$ . Notemos que estas desigualdades equivalen (ver Corolario 2.1.2) a que existe un triángulo esférico, posiblemente degenerado, con ángulos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Dado un punto  $(A, \dots, F) \in [1267]$ , consideramos un tetraedro compacto hiperbólico  $T$  con ángulos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y movemos el vértice  $V_2$  (ver *Figura 2.1*) a lo largo de la arista  $C_3 \cap C_4$  hasta  $V_1$ . Con esto obtenemos que el punto  $(A, \dots, F)$  está en  $\partial\mathcal{A}$ .

De la misma forma obtenemos que las células [3467], [1456], [2356], [1357] y [2457] están en  $\partial\mathcal{A}$ .

Puesto que  $\partial\mathcal{A}$  es cerrado, todas las caras de estas células están en  $\partial\mathcal{A}$ ; en concreto, todas las aristas y todas las células de dimensión 2 excepto [123], [124], [134], [234], [125], [136], [147], [237], [246], [345], [567].

A continuación vemos que las 3-células [1567], [2567], [3567] y [4567] corresponden a los tetraedros que tienen tres vértices en el infinito, y por tanto están contenidas en  $\partial\mathcal{A}$ . En efecto, un punto de la 3-célula [1567] es de la forma

$$(A, B, C, D, E, F) = (\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi, (\lambda_3 + \lambda_4)\pi, (\lambda_2 + \lambda_4)\pi, (\lambda_1 + \lambda_4)\pi),$$

con  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ . Entonces, utilizando el Lema 2.2.3, vemos que estos ángulos corresponden a un tetraedro con los vértices  $V_2$ ,  $V_3$ , y  $V_4$  en el infinito (para aplicar el lema, hay que tomar  $\theta = \lambda_4\pi$ ).

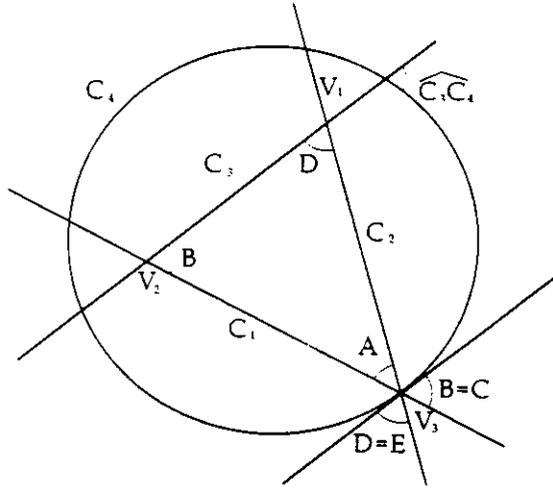
La célula [567] es la única 2-célula que es cara de alguna de las cuatro 3-células anteriores y no lo es de ninguna de las 6 primeras. Por tanto [567]  $\subset \partial\mathcal{A}$ . Esta célula está definida por  $A = F$ ,  $B = E$ ,  $C = D$ ,  $A + B + D = \pi$ , y  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $D > 0$ , por lo que se ve que corresponde a los tetraedros ideales.

Queda por ver que las 2-células [125], [136], [147], [237], [246] y [345] están contenidas en  $\partial\mathcal{A}$  (estas células no son caras de ninguna de las diez 3-células que hemos estudiado hasta ahora). Tomamos un punto de la 2-célula [125],

$$(A, B, C, D, E, F) = (\lambda_3\pi, \lambda_1\pi, \lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_2\pi, \pi),$$

con  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ , y lo aproximamos por tetraedros con dos vértices en el infinito, de la siguiente manera: como  $A + B + D = \pi$ , existe un triángulo euclídeo con

ángulos  $A, B, E$ , que podemos dibujar en el borde de  $\mathbf{H}^3$  del modelo del semiespacio de Poincaré. Sobre este triángulo consideramos planos hiperbólicos  $C_1, C_2, C_3$  (ver *Figura 2.6*): consideramos en  $\partial\mathbf{H}^3$  una circunferencia que pasa por  $V_3$  con tangente paralela a  $C_3 \cap \partial\mathbf{H}^3$ , y sea  $C_4$  el plano hiperbólico sobre esta circunferencia. El tetraedro de caras  $C_1, C_2, C_3, C_4$  tiene dos vértices en el infinito: sus cinco primeros ángulos diédricos son  $A, B, C, D, E$ , y si el radio de la circunferencia  $C_4 \cap \partial\mathbf{H}^3$  tiende a infinito, el sexto ángulo,  $\widehat{C_3 C_4}$ , tiende a  $\pi$ .



*Figura 2.6*

Con esto se deduce que la célula  $[125] \subset \partial\mathcal{A}$  y de forma análoga se hace con las otras cinco células.

Probamos ahora que la 2-célula  $[234] \not\subset \partial\mathcal{A}$ . Tomamos el baricentro de esta célula:

$$(2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3) \in [123].$$

La matriz de Gram asociada a este punto es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 0 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene entradas positivas, por lo que no puede estar en  $\partial\mathcal{A}$ . De la misma forma se prueba que las 2-células  $[124]$ ,  $[134]$  y  $[234]$  no están contenidas en  $\partial\mathcal{A}$ .

Consideramos la 3-célula [2367] y su baricentro,

$$(A, B, C, D, E, F) = (\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4).$$

Observamos que  $B + C + D + E = 2\pi$  y sin embargo  $C \neq D$ ; por la nota anterior al Corolario 2.2.2, este punto no puede estar en  $\partial\mathcal{A}$ , y por tanto  $[2367] \not\subset \partial\mathcal{A}$ .

Las once células de dimensión 3 que quedan por estudiar se reducen, por simetría, al caso anterior.

Con esto hemos terminado, pues toda célula de dimensión 4 ó 5 contiene alguna célula de dimensión 2 ó 3 no contenida en  $\partial\mathcal{A}$ .  $\square$

**Observación** Hemos visto en la demostración anterior que el punto de coordenadas  $(A, B, C, D, E, F) = (\pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/4) \in [2367]$  no está en  $\partial\mathcal{A}$ . Sin embargo, su matriz de Gram

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 1 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, por lo que este punto anula todos los menores de  $G$  de orden mayor que 2, que por otra parte son los que aparecen en las desigualdades que definen el conjunto  $\mathcal{A}$ .

**Observación** Ninguna célula de dimensión 5 está contenida en  $\partial\mathcal{A}$ . Sin embargo,  $\partial\mathcal{A}$  contiene abiertos de las caras [123567], [124567], [134567] y [234567], correspondientes a los tetraedros con un vértice en el infinito.

### Comparación de tetraedros

Dado un tetraedro compacto hiperbólico, variamos un ángulo diédrico  $A$  manteniendo fijos los demás y estudiamos cómo varía el tetraedro (Proposición 2.2.8). Obtenemos una familia uniparamétrica de tetraedros que están, salvo isometría, unos contenidos en otros; si el ángulo  $A$  crece, el tetraedro se hace más pequeño, todas sus aristas y el volumen decrecen. El hecho de que el volumen decrezca se deduce por otra parte, de forma inmediata, de la fórmula de Schläfli ([Vi1], [Mi2]). Vemos también que el ángulo  $A$  varía de forma monótona: en un sentido, cuando  $A$  decrece, el tetraedro tiende a un tetraedro con uno o dos vértices en el infinito, y en el otro sentido, cuando  $A$  crece, el tetraedro tiende a un tetraedro euclídeo.

Damos primero dos lemas técnicos que se utilizan en la Proposición 2.2.8. El Lema 2.2.5 estudia cómo varía el ángulo diédrico (o la distancia) entre dos planos de  $\mathbf{H}^3$  cuando uno de ellos se traslada a lo largo de una recta que lo corta (este lema es una generalización de un lema para triángulos hiperbólicos en [HR]). El Lema 2.2.7 compara las longitudes de dos segmentos comprendidos entre dos rectas hiperbólicas que se cortan en un punto finito o infinito.

Consideramos en  $\mathbf{H}^d$  los siguientes elementos:

- una recta  $r$ ;
- un hiperplano  $E$  que corta a  $r$  en un punto  $Q$  (finito); sea  $E^-$  uno de los dos semiespacios determinados por  $E$ ;
- otro hiperplano  $E'$  tal que no contiene al punto  $Q$ ; sea  $E'^-$  el semiespacio determinado por  $E'$  que contiene al punto  $Q$ .

Sean  $v$  y  $v'$  los vectores normales exteriores (unitarios) a los semiespacios  $E^-$  y  $E'^-$ . Dado  $t \in \mathbf{R}$ , sea  $\varphi_t$  la traslación hiperbólica a lo largo de la recta  $r$ , de módulo  $|t|$  y sentido dado por la condición de que  $\varphi_t(E^-) \subset E^-$ , para  $t > 0$ . Sea  $E_t^- := \varphi_t(E^-)$  y  $v_t$  la normal exterior de  $E_t^-$ . Consideramos la función  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida como  $h(t) = f(v_t, v')$  (donde  $f$  es, como siempre, el producto escalar de  $\mathbf{H}^d$ );  $h(t)$  estudia cómo varía el ángulo o la distancia entre los hiperplanos  $E_t$  y  $E'$ . Estudiamos el comportamiento de la función  $h$  según la posición relativa de  $r, E, E'$  (ver Figura 2.7(a)).

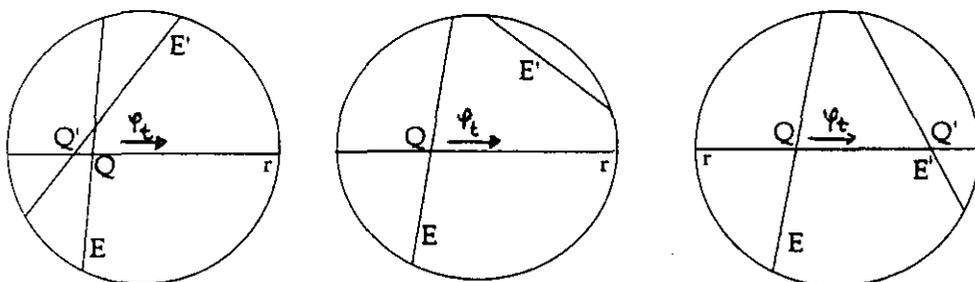


Figura 2.7(a)

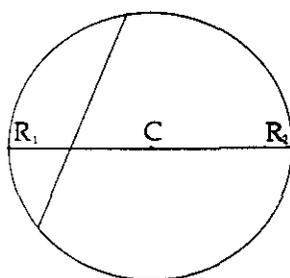


Figura 2.7(b): Normalización

**Lema 2.2.5.** En las condiciones anteriores, se tiene *Caso 1.* Si  $E' \cap r = Q'$  y el segmento  $QQ'$  no está contenido en  $E^- \cap E'^-$ , entonces  $h$  es convexa, con un mínimo global que se alcanza cuando  $\varphi_t(E)$  corta a  $r$  en el punto  $Q'$ , y tiende a  $+\infty$  cuando  $t$  tiende a  $\pm\infty$ ; *Caso 2.* Si  $E' \cap r = \emptyset$ , entonces  $h$  crece estrictamente desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ ; *Caso 3.* Si  $E' \cap r = Q'$  y el segmento  $QQ'$  está contenido en  $E^- \cap E'^-$ , entonces  $h$  es cóncava, con un máximo global que se alcanza cuando  $\varphi_t(E)$  corta a  $r$  en el punto  $Q'$ , y tiende a  $-\infty$  cuando  $t$  tiende a  $\pm\infty$ .

*Demostración:*

Trabajamos en el modelo del hiperboloide del espacio hiperbólico. Componiendo con una isometría hiperbólica, podemos suponer que (ver *Figura 2.7(b)*):

- (i) la recta  $r$  es la recta determinada por el plano vectorial  $x_1 = \dots = x_{d-1} = 0$ ; llamamos  $R_1 := (0, \dots, 0, -1, 1)$  y  $R_2 := (0, \dots, 0, 1, 1)$  a los puntos del infinito de esta recta;
- (ii)  $R_2 \in E^-$ ;
- (iii)  $C := (0, \dots, 0, 1) \in E^- \cap E'^-$  (podemos suponer esto porque  $E \cap E' \cap r = \emptyset$ ).

La hipótesis (iii) equivale a que  $f(C, v) < 0$  y  $f(C, v') < 0$ ; si  $v = (v_1, \dots, v_{d+1})$  y  $v' = (v'_1, \dots, v'_{d+1})$ , se tiene entonces que

$$v_{d+1} > 0 \quad \text{y} \quad v'_{d+1} > 0 \quad (1)$$

La hipótesis (ii) equivale a que  $f(v, R_2) < 0$ . Además, como  $E \cap r \neq \emptyset$ , se tiene que  $R_1 \notin E^-$ , es decir,  $f(v, R_1) > 0$ . Todo esto equivale a que

$$v_d - v_{d+1} < 0 \quad \text{y} \quad v_d + v_{d+1} < 0 \quad (2)$$

Por la elección de la recta  $r$ , según (i), la traslación  $\varphi_t$  tiene como expresión matricial (ver Preliminares, 1.1.2)

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \dots & 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene

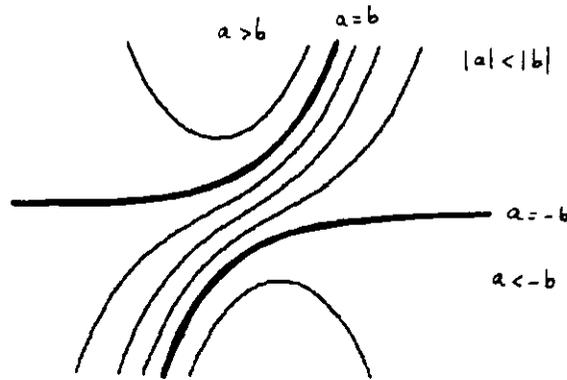
$$v_t = \varphi_t(v) = (v_1, \dots, v_{d-1}, v_d \cosh t + v_{d+1} \sinh t, v_d \sinh t + v_{d+1} \cosh t) \quad \text{y}$$

$$h(t) = f(v_t, v') = v_1 v'_1 + \dots + v_{d-1} v'_{d-1} + (v_d v'_d - v_{d+1} v'_{d+1}) \cosh t + (v_{d+1} v'_d - v_d v'_{d+1}) \sinh t$$

La función  $h$  es, pues, de la forma  $h(t) = a \cosh t + b \sinh t + c$ , con  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Analizando estas funciones se tiene que:

- si  $|a| > |b|$ , la función tiene un extremo local en  $t = \operatorname{arctgh}(-b/a)$ ; además, si  $b > 0$  y  $a > b$ , entonces  $h$  es convexa (y el extremo es un mínimo local) y si  $b > 0$  y  $a < -b$ , entonces  $h$  es cóncava;
- si  $|a| < |b|$ , la función tiene un punto de inflexión en  $t = \operatorname{arctgh}(-a/b)$ ; si  $b > 0$ , entonces  $h$  es creciente.

La *Figura 2.8* muestra el aspecto de la función  $h$  cuando  $b > 0$  (si  $|a| = |b|$ , la función no tiene extremos ni puntos de inflexión).



*Figura 2.8:*  $h(t) = a \cosh t + b \sinh t$

En nuestro caso, los coeficientes son  $a = v_d v'_d - v_{d+1} v'_{d+1}$  y  $b = v_{d+1} v'_d - v_d v'_{d+1}$ . La hipótesis  $Q \in E'^-$  implica que  $b > 0$ . En efecto, como  $Q \in r$ , se tiene que  $Q = (0, \dots, 0, q_d, q_{d+1})$ , y como  $Q \in E$ , se tiene que  $q_d v_d - q_{d+1} v_{d+1} = 0$ ; finalmente, imponiendo la condición de que  $Q \in \mathbf{H}^d$  (es decir, la norma de  $Q$  es negativa y su última coordenada positiva), se tiene que

$$Q = (0, \dots, 0, \frac{-v_{d+1}}{\sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2}}, \frac{-v_d}{\sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2}})$$

(observemos que  $v_d < 0$  por (1) y (2), y  $v_d^2 - v_{d+1}^2 > 0$  por (2)). Por tanto,  $f(v', Q) < 0$  equivale a que  $v_{d+1} v'_d - v_d v'_{d+1} > 0$ , es decir,  $b > 0$ .

Para probar el lema debemos ver que:

- en el Caso 1 se verifica  $a > b$ , es decir  $a - b > 0$ ;
- en el Caso 2 se verifica  $|a| < |b|$ , es decir,  $a + b > 0$  y  $a - b < 0$ ;
- en el Caso 3 se verifica  $a < -b$ , es decir,  $a + b < 0$ .

Calculamos  $a + b$  y  $a - b$ , se tiene

$$\begin{aligned} a + b &= (v'_d - v'_{d+1})(v_d + v_{d+1}) \\ a - b &= (v'_d + v'_{d+1})(v_d - v_{d+1}) \end{aligned}$$

En el Caso 1  $E'$  corta a  $r$  en un punto finito; utilizando (iii) se tiene que  $R_1 \notin E'$ , lo que equivale a que  $f(R_1, v') > 0$ , y por tanto,  $v'_d + v'_{d+1} < 0$ . Por otra parte, por (2), también se tiene que  $v_d - v_{d+1} < 0$ . Tenemos por tanto en este caso  $a - b > 0$ .

De forma análoga, en el Caso 3 se tiene que  $R_2 \notin E'$ , lo que equivale a que  $f(R_2, v') > 0$ , y por tanto,  $v'_d - v'_{d+1} > 0$ . Por (2), se tiene además que  $v_d + v_{d+1} < 0$ . Por tanto, en este caso es  $a + b < 0$ .

Ahora, en el Caso 2, puesto que  $E' \cap r = \emptyset$ , y  $Q \in E'^-$ , se tiene también que  $R_1, R_2 \in E'^-$ . Estas condiciones nos dicen que  $v'_d + v'_{d+1} > 0$ , y  $v'_d - v'_{d+1} < 0$ . Entonces el primer factor de  $a + b$  (en la expresión calculada arriba) es negativo, y el segundo es negativo por (2); por tanto se tiene que  $a + b > 0$ . Por otra parte, para  $a - b$ , se tiene que el primer factor es positivo y el segundo es negativo por (2), con lo que  $a - b < 0$ .

Finalmente, para los Casos 1 y 3, vamos a ver que si  $Q_t := \varphi_t(Q)$  coincide con  $Q'$  entonces  $h$  tiene en  $t$  un extremo local, es decir,  $t = \operatorname{arctgh}(-b/a)$ . Calculamos  $Q_t$  y  $Q'$ :

$$Q_t = (0, \dots, 0, \frac{-v_{d+1} \cosh t - v_d \sinh t}{\sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2}}, \frac{-v_{d+1} \sinh t - v_d \cosh t}{\sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2}})$$

$$Q' = (0, \dots, 0, \frac{\epsilon v'_{d+1}}{\sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2}}, \frac{\epsilon v'_d}{\sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2}}),$$

donde  $\epsilon = 1$  si  $v'_d > 0$ , es decir, en el Caso 3 (porque hemos visto que en este caso  $v'_d - v'_{d+1} > 0$ , y  $v'_{d+1} > 0$  por (1)), y  $\epsilon = -1$  si  $v'_d < 0$ , es decir, en el Caso 1 (en el que  $v'_d + v'_{d+1} < 0$  y  $v'_{d+1} > 0$ ).

Por ser  $Q_t = Q'$ ,  $t$  es solución del sistema

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (-v_{d+1} \cosh t - v_d \sinh t) \sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2} = \epsilon v'_{d+1} \sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2} \\ (-v_{d+1} \sinh t - v_d \cosh t) \sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2} = \epsilon v'_d \sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2} \end{cases}$$

Manipulando el sistema  $\mathcal{S}$  se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$\mathcal{S}' : \begin{cases} (v_d^2 - v_{d+1}^2) \sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2} \sinh t = \epsilon \sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2} (v'_d v_{d+1} - v'_{d+1} v_d) \\ -(v_d^2 - v_{d+1}^2) \sqrt{v_d'^2 - v_{d+1}'^2} \cosh t = \epsilon \sqrt{v_d^2 - v_{d+1}^2} (v'_d v_d - v'_{d+1} v_{d+1}) \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación de  $S'$  por la segunda, se tiene

$$-\frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{v'_d v_{d+1} - v'_{d+1} v_d}{v'_d v_d - v'_{d+1} v_{d+1}} = \frac{b}{a}.$$

de donde se deduce que  $t = \operatorname{arctgh}(-b/a)$ . □

Como consecuencia inmediata del Lema 2.2.5. se tiene el siguiente lema, que será útil para comparar poliedros con algunos ángulos diédricos iguales. Denotamos por  $l(e)$  la longitud de un segmento  $e$ .

**Lema 2.2.6.** *Sea  $P$  un poliedro.  $e$  una arista.  $C$  una cara que corta a  $e$  en un único vértice  $V$  y  $C'$  una cara adyacente a  $C$  que no contiene al vértice  $V$  (ver Figura 2.9). Dado  $t \in (0, l(e))$ , sea  $\varphi_t$  la traslación de módulo  $t$  a lo largo de  $e$ , en el sentido que va desde  $V$  hasta el otro vértice de  $e$ . Entonces, si  $t$  crece el ángulo  $(\widehat{\varphi_t(C), C'})$  crece.*

*Demostración:*

Aplicamos el Lema 2.2.5. tomando como  $r$  la recta que contiene a la arista  $e$ ,  $E$  el plano que contiene a la cara  $C$ , y  $E'$  el plano que contiene a la cara  $C'$ , y los semiespacios  $E^-$  y  $E'^-$  que contienen al poliedro. Por las hipótesis, el vértice  $V$  está en  $E'^-$ . Se comprueba sin dificultad que en los tres casos del Lema 2.2.5. la función  $h$  es creciente en el intervalo  $(0, l(e))$ , por lo que se concluye el resultado. □

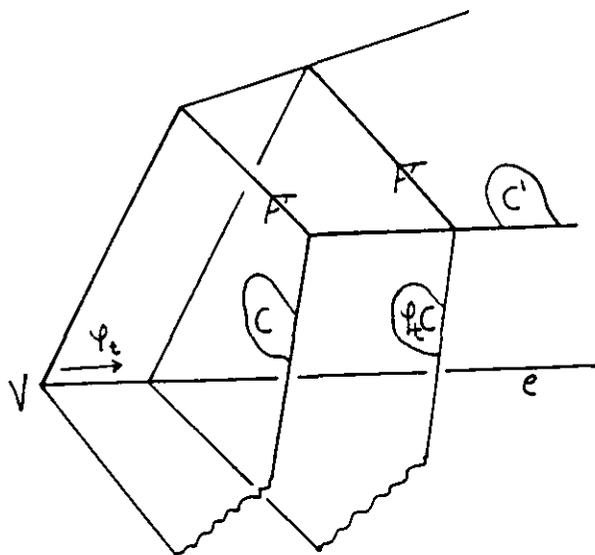


Figura 2.9

**Lema 2.2.7.** *Sean  $r, s$  semirrectas en  $\mathbf{H}^2$  que forman un ángulo con vértice  $O$  finito o infinito. Sean  $m_1, m_2$  rectas ultraparalelas distintas que cortan a  $r, s$  en los puntos  $A_1,$*

$B_1, A_2, B_2$ , distintos todos de  $O$  (ver Figura 2.10(a)). Sean  $m_1^-, m_2^-$  los semiplanos determinados por  $m_1, m_2$  que contienen el punto  $O$ . Si  $m_1^- \subset m_2^-$ , entonces  $l(A_1 B_1) < l(A_2 B_2)$ .

*Demostración:*

Utilizamos la fórmula proyectiva para calcular distancias en el plano hiperbólico, que utiliza razones dobles (expresión (1.1.4)). Si  $U_1, V_1, U_2, V_2$ , son los puntos del infinito de las rectas  $m_1, m_2$ , entonces

$$l(A_1 B_1) = d(A_1, B_1) = \frac{1}{2} \log([U_1, V_1, B_1, A_1])$$

$$l(A_2 B_2) = d(A_2, B_2) = \frac{1}{2} \log([U_2, V_2, B_2, A_2])$$

Puesto que la función logaritmo es creciente, se tiene que

$$l(A_1 B_1) < l(A_2, B_2) \quad \text{si y sólo si} \quad [U_1, V_1, B_1, A_1] < [U_2, V_2, B_2, A_2]$$

Para ver la segunda desigualdad, proyectamos los puntos  $U_2, V_2, A_2, B_2$  desde  $O$  sobre  $m_1$ . Obtenemos los puntos  $U'_2, V'_2, A'_2 = A_1, B'_2 = B_1$  (ver Figura 2.10(b)). Por ser  $m_1, m_2$  ultraparalelas y  $O$  un punto finito o infinito, el punto  $U'_2$  está comprendido entre  $U_1$  y  $A_1$ , y  $V'_2$  está comprendido entre  $B_1$  y  $V_1$ .

Pensando en la razón doble  $[U, V, B, A]$  como la coordenada afín del punto  $A$  en el sistema de referencia  $U = \infty, V = 0, B = 1$ , tenemos las siguientes desigualdades

$$[U_1, V_1, B_1, A_1] < [U'_2, V_1, B_1, A_1] < [U'_2, V'_2, B_1, A_1] = [U_2, V_2, B_2, A_2],$$

que prueban el lema. □

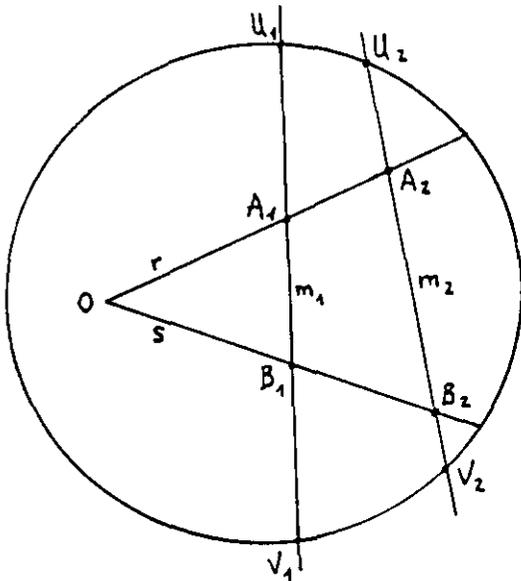


Figura 2.10(a)

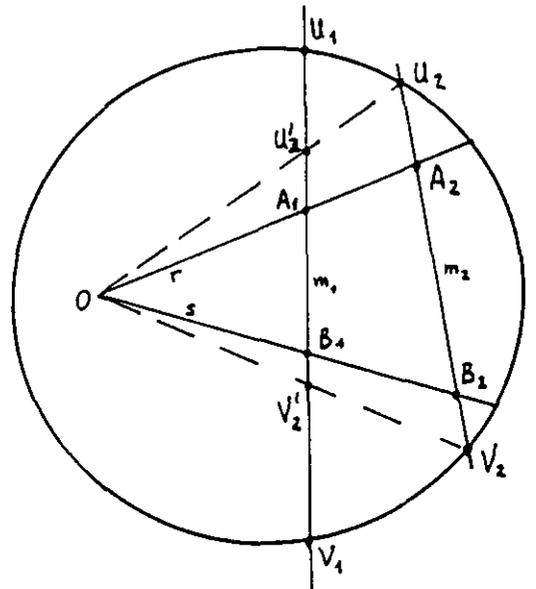


Figura 2.10(b)

Utilizaremos la notación  $(T, e, w)$ , donde  $T$  es un tetraedro (compacto hiperbólico),  $e$  es una arista de  $T$  y  $w = (\theta_1, \dots, \theta_5)$  son ángulos diédricos en las aristas distintas de  $e$ . Cuando comparemos dos tetraedros,  $(T, e, w)$ ,  $(T', e', w)$  querrá decir: existe un isomorfismo simplicial entre  $T$  y  $T'$  tal que las aristas  $e, e'$  se corresponden mediante este isomorfismo, y las aristas correspondientes distintas de  $e, e'$  tienen el mismo ángulo diédrico, dado por  $w$ .

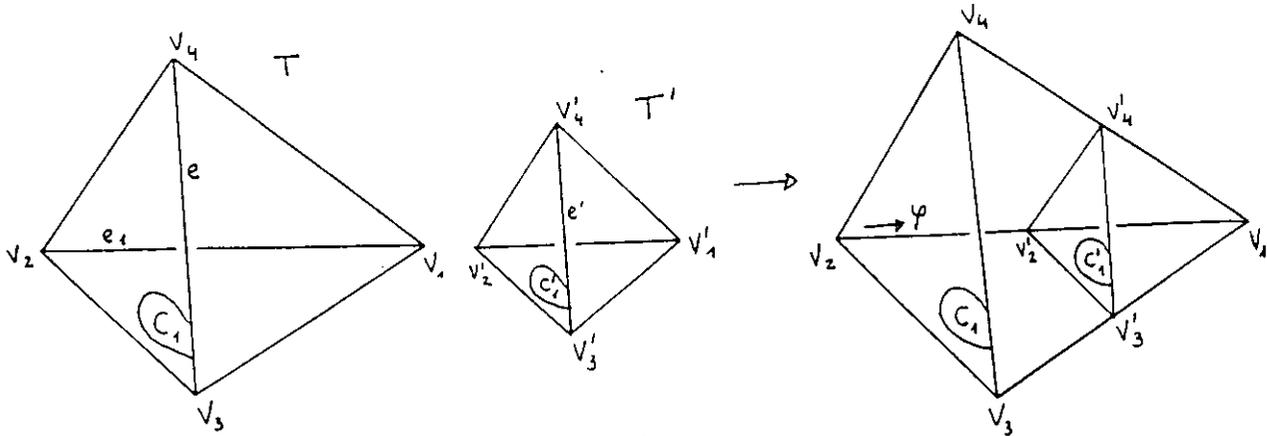


Figura 2.11

**Proposición 2.2.8.** (Comparación de tetraedros compactos hiperbólicos) Sean  $(T, e, w)$  y  $(T', e', w)$  dos tetraedros compactos hiperbólicos con todos los ángulos diédricos iguales salvo en  $e, e'$  y supongamos  $\hat{e} < \hat{e}'$  ( $\hat{a}$  es el ángulo diédrico en una arista  $a$ ). Entonces:

- (i) Existe una traslación  $\varphi$  a lo largo de la arista  $e_1$  opuesta a la arista  $e$  (ver Figura 2.11) tal que el tetraedro limitado por  $\varphi(C_1), C_2, C_3, C_4$  es isométrico a  $T'$ .
- (ii)  $T' \subset T$ , salvo isometría.
- (iii) Todas las aristas de  $T'$  son menores que las correspondientes de  $T$ .

*Demostración:*

(i) Como las figuras verticales de  $V_1, V'_1$  son iguales, podemos suponer que los ángulos sólidos en  $V_1$  y  $V'_1$  coinciden (ángulo sólido: caras de un poliedro que inciden en un vértice y la región que acotan). Como las figuras verticales de  $V_2, V'_2$  son iguales, se puede trasladar la cara  $C_1$  a lo largo de la arista  $e_1$ , mediante una traslación  $\varphi$  hasta hacerla coincidir con la cara  $C'_1$  (esto se puede hacer porque los ángulos diédricos  $\widehat{C_1, C_3}$  y  $\widehat{C_1, C_4}$  no varían con la traslación  $\varphi$ ).

(ii) El plano que contiene a la cara  $C_1$  corta a la arista  $e_1$  por lo que se transforma en un plano ultraparalelo al trasladarlo a lo largo de esta arista. Así, las caras  $C_1$  y  $C'_1$  no se cortan y uno de los tetraedros está contenido en el otro. Si  $T \subset T'$ , el Lema 2.2.6 implicaría que, al aplicar  $\varphi$ , el ángulo diédrico en la arista  $e$  crecería, es decir,  $\hat{e}' < \hat{e}$ ,

en contra de la hipótesis. Por tanto,  $T' \subset T$ .

(iii) De lo anterior es claro que  $l(V_1'V_2') < l(V_1V_2)$ ,  $l(V_1'V_3') < l(V_1V_3)$  y  $l(V_1'V_4') < l(V_1V_4)$ . Las rectas que contienen a los segmentos  $V_2V_3$  y  $V_2'V_3'$  son ultraparalelas, por estar contenidas en planos ultraparalelos; entonces el Lema 2.2.7 implica que  $l(V_2'V_3') < l(V_2V_3)$ . De la misma forma se comparan las restantes aristas.  $\square$

**Corolario 2.2.9.** Sean  $(T, \epsilon, w)$ ,  $(T', \epsilon', w)$  tetraedros con  $\hat{\epsilon} < \hat{\epsilon}'$  y sea  $\alpha \in (\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}')$ ; entonces existe un tetraedro  $(T'', \epsilon'', w)$  tal que  $\hat{\epsilon}'' = \alpha$ .

*Demostración:*

Por la Proposición 2.2.8, sabemos que  $T' \subset T$ . Construimos  $T''$  de la siguiente manera: para  $t > 0$ , consideramos la traslación  $\varphi_t$  a lo largo de la arista  $e_1$ , de módulo  $t$  y en sentido que va de  $V_2$  a  $V_1$  (ver Figura 2.11). Por el Lema 2.2.5, el ángulo  $\varphi_t(\widehat{C_1}), C_3$  crece continuamente desde  $\hat{\epsilon}$  hasta  $\hat{\epsilon}'$ , cuando  $\varphi_t(C_1) = C_1'$ . Por tanto existe un  $t_0$  tal que  $\varphi_{t_0}(\widehat{C_1}), C_3 = \alpha$ . El tetraedro  $T''$  es el determinado por las caras  $C_1'' = \varphi_{t_0}(C_1)$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , y se verifica  $T' \subset T'' \subset T$ .

$\square$

**Observación.** Si pensamos en la forma geométrica de la variedad de ángulos  $\mathcal{A}(T)$ , el corolario anterior significa que la intersección de este conjunto con rectas paralelas a ejes coordenados es conexa (por tanto un intervalo abierto).

De la Proposición 2.2.8 se deduce también el siguiente corolario

**Corolario 2.2.10.** (Intervalo de variación de un ángulo) Dado un tetraedro compacto hiperbólico, con la notación de la Figura 2.1, el ángulo  $A$  varía desde el  $\max\{\pi - B - D, \pi - C - E\}$ , valor para el que el tetraedro tendría uno o dos vértices en el infinito, y el valor  $A_0$  para el que el tetraedro sería euclídeo. Este valor se puede calcular utilizando la figura esférica de la Figura 2.12.

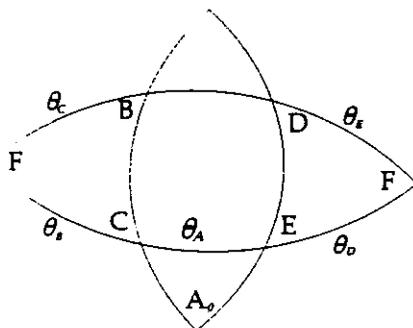


Figura 2.12

$\square$

## 2.3 Coordenadas para símplices

Vamos a estudiar distintos tipos de coordenadas que parametrizan el espacio de símplices compactos en los espacios esferic, euclídeo e hiperbólico. Definimos sistemas de coordenadas mediante aplicaciones inyectivas de estos espacios en ciertos subconjuntos de  $\mathbf{R}^m$ . Definido un sistema de coordenadas, llamaremos espacio de coordenadas a la imagen de esta aplicación. Ya hemos visto que los ángulos diédricos forman un sistema de coordenadas para los símplices. Para los símplices esféricos e hiperbólicos, vamos a ver que las longitudes de las aristas forman también un sistema de coordenadas; obtendremos un resultado dual al Teorema 2.1.1. Daremos luego unas coordenadas mixtas, para las cuales el espacio de estos símplices es un conjunto muy sencillo, simplemente un producto de intervalos; con esto vemos de una vez que el espacio de símplices compactos en cada dimensión y en cada geometría es homeomorfo a una bola abierta. De hecho, por el Teorema de Steinitz, se sabe que para cualquier poliedro su espacio de realizaciones es una bola abierta (ver [Zi]). El “espacio de realizaciones” de un poliedro en [Zi] es el conjunto de poliedros salvo afinidades, mientras que nosotros estamos pensando siempre en el conjunto de poliedros salvo isometrías; luego estos dos espacios no son homeomorfos, pero se puede demostrar que son del mismo tipo de homotopía).

**Notación.** Recordamos que siempre estamos consideraremos los símplices con las caras numeradas. Dada una numeración de las caras de un símplex,  $C_0, \dots, C_n$ , denotamos por  $V_i$  al vértice opuesto a la cara  $C_i$ . Un subconjunto de  $k + 1$  vértices,  $V_{i_0}, \dots, V_{i_k}$ , determina una cara de dimensión  $k$ , que denotamos por  $E_{i_0 \dots i_k}$ . Esta cara está también determinada como la intersección de las  $n - k$  caras (de codimensión 1)  $C_{i_{k+1}}, \dots, C_{i_n}$ , por lo que podemos, alternativamente, denotarla como  $C_{i_{k+1}, \dots, i_n}$ , donde  $\{i_{k+1} \dots i_n\} = \{0, \dots, n\} \setminus \{i_0, \dots, i_k\}$ . Denotamos por  $T_i$  a la figura verticilar del vértice  $V_i$ , es decir, el símplex esferic de dimensión  $n - 1$  que resulta de intersecar una pequeña esfera centrada en el vértice  $V_i$  con  $T$ , y reescalando esta esfera de modo que su radio sea 1. Denotamos por  $V_j(T_i)$  (o simplemente  $V_j$ , haciendo abuso de notación) al vértice de  $T_i$  determinado por la arista  $E_{ij}$  de  $T$ .

Utilizamos la siguiente notación para los espacios de símplices:

- $S_{\mathbf{S}}^n$ , para el espacio de símplices esféricos de dimensión  $n$ , con las caras numeradas, salvo isometría esferic (que preserve las orientaciones).
- $S_{\mathbf{H}}^n$ , para el espacio de símplices compactos hiperbólicos de dimensión  $n$ , con las caras numeradas, salvo isometría hiperbólica;
- $S_{\mathbf{E}}^n$ , para el espacio de símplices euclídeos de dimensión  $n$ , con las caras numeradas, salvo isometría euclídea.

## Longitudes de aristas como coordenadas

Si cada dos caras de codimensión 1 de un símplex son adyacentes, y por tanto determinan un ángulo diédrico, también se verifica que cada dos vértices de un símplex están unidos por una arista; vamos a ver que las longitudes de las aristas también son un sistema de coordenadas para los símplexes (salvo isometría). Lo vemos de forma análoga a como lo hicimos para los ángulos diédricos, utilizando la matriz de productos escalares de los vértices del símplex.

**Definición.** Sea  $T$  un símplex esférico o un símplex compacto hiperbólico, de vértices  $V_0, \dots, V_n$ . Llamamos *matriz de longitudes* de  $T$  a la matriz de productos escalares de sus vértices, es decir,  $K(T) := (f(V_i, V_j))_{i,j=0,\dots,n}$ . Denotamos por  $l_{ij}$  a la longitud de la arista  $E_{ij}$  de  $T$ . Entonces, si  $T$  es esférico,  $f(V_i, V_j) = \cos(l_{ij})$ , y si  $T$  es hiperbólico,  $f(V_i, V_j) = -\cosh(l_{ij})$ . Es decir, la matriz  $K(T)$  está determinada por las longitudes de las aristas de  $T$ .

Caracterizamos la matriz de longitudes de símplexes esféricos o hiperbólicos.

**Proposición 2.3.1.** Sea  $T$  un  $n$ -símplex (abstracto) de vértices  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n$ . Asignamos a la arista  $\mathcal{E}_{ij}$  un número  $l_{ij} \in (0, \pi)$ . Sea  $K = (k_{ij})$  la matriz con  $k_{ii} = 1$  y  $k_{ij} = \cos(l_{ij})$ . Entonces existe un símplex  $T \subset \mathbf{S}^n$  con longitudes de aristas  $l_{ij}$  si y sólo si  $K$  es definida positiva. Además, el símplex  $T$  es único salvo isometrías esféricas.

*Demostración:*

Si existe un símplex  $T \subset \mathbf{S}^n$  con longitudes de aristas  $l_{ij}$ , entonces la matriz de productos escalares de sus vértices es precisamente la matriz  $K$ , por tanto  $K$  es definida positiva.

Recíprocamente, si  $K$  es definida positiva, existe una matriz  $V$  tal que  $V^t F V = K$ , donde  $F$  es aquí la matriz identidad. Los vectores columna,  $V_i$ , de  $V$  determinan un símplex  $T \subset \mathbf{S}^n$  cuyas longitudes son los  $l_{ij}$ .  $\square$

**Proposición 2.3.2.** Sea  $T$  un  $n$ -símplex (abstracto) de vértices  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n$ ; asignamos a la arista  $\mathcal{E}_{ij}$  un número real positivo  $l_{ij}$ . Sea  $K = (k_{ij})$  la matriz con  $k_{ii} = -1$  y  $k_{ij} = -\cosh(l_{ij})$ . Entonces existe un símplex compacto  $T \subset \mathbf{H}^n$ , único salvo isometría, con longitudes de aristas  $l_{ij}$ , (es decir, la matriz de longitudes de  $T$  es  $K$ ) si y sólo si

- (1)  $\det(K) < 0$ ;
- (2) todos los menores principales (de cualquier orden) de  $K$  son negativos.

*Demostración:*

$\Rightarrow$ ) Sea  $T \subset \mathbf{H}^n$  compacto con  $K(T) = K$ . Por definición de matriz de longitudes, la matriz  $K(T)$  es una matriz simétrica de signatura  $(n, 1)$ . En particular, se tiene que  $\det(K) < 0$ . Por otra parte, cada cara de  $T$  de cualquier dimensión genera un subespacio de  $E_f$  en el que la restricción de  $f$  es indefinida y no degenerada, y cada menor principal de  $K$  es la matriz de longitudes de una cara de  $T$ . Se deduce por tanto que todos los menores principales son negativos.

$\Leftarrow$ ) De (2), tomando cualquier sucesión de menores principales encajados, se deduce que la matriz  $K$  tiene signatura  $(n, 1)$ . Por tanto existe una base  $V_0, \dots, V_n$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  tal que  $K$  es la expresión de la forma cuadrática  $f$  en esta base, es decir,  $K = V^t F V$ , donde  $V$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $V_i$ . Se tiene  $f(V_i, V_i) = -1$ , luego los vectores  $V_i$  están en el hiperboloide  $f^{-1}(-1)$ . Además  $f(V_i, V_j) < 0$ , porque las entradas de  $K$  son negativas, luego los  $V_i$  están en la misma hoja del hiperboloide. Cambiándolos todos de signo si fuera preciso, tenemos que los vectores  $V_i$  determinan  $n + 1$  puntos en  $\mathbf{H}^n$ , que están en posición general porque  $\det V \neq 0$  (si fuera cero, también lo sería  $\det K$ ). Por tanto determinan un simplex compacto  $T \subset \mathbf{H}^n$  cuyas longitudes de aristas son los  $l_{ij}$  dados. □

Aplicando las proposiciones anteriores al caso de triángulos, la única condición que hay que poner es que el determinante de  $K$  sea negativo, en el caso hiperbólico, y positivo, en el caso esférico. Utilizando las relaciones trigonométricas (hiperbólicas o esféricas), esta condición se traduce en

- Caso hiperbólico: las desigualdades triangulares, es decir,  $a + b - c > 0$ ,  $a - b + c > 0$ ,  $-a + b + c > 0$ , donde  $a, b, c$  son las longitudes de los lados.
- Caso esférico: las desigualdades triangulares más la desigualdad  $a + b + c < 2\pi$ .

### Coordenadas mixtas

En primer lugar tenemos el siguiente lema sencillo para triángulos esféricos:

**Lema 2.3.3.** *Las longitudes de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos forman un sistema de coordenadas para los triángulos esféricos, euclídeos o hiperbólicos. El espacio de estas coordenadas es  $(0, \pi)^3$  para el caso esférico y  $(0, \pi) \times (0, \infty)^2$  para los otros casos.*

*Demostración:*

Si dos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido también igual, entonces los triángulos son isométricos; por tanto la aplicación que asigna a cada triángulo estos tres valores es inyectiva. La segunda parte es igualmente clara.  $\square$

Definimos ahora un sistema de coordenadas para  $S_X^n$ , donde  $X$  es uno de los tres subíndices **S**, **H** ó **E**. Para ello definimos por inducción sobre la dimensión  $n$  las aplicaciones  $p_n$  (para simplificar, no aludimos a  $X$  en esta notación):

- Si  $n = 2$ , definimos  $p_2 : S_S^2 \rightarrow (0, \pi)^3$  ó, si  $X = \mathbf{H}, \mathbf{E}$ ,  $p_2 : S_X^2 \rightarrow (0, \pi) \times (0, \infty)^2$  como

$$p_2(T) = (\hat{V}_2, l(E_{20}), l(E_{21})),$$

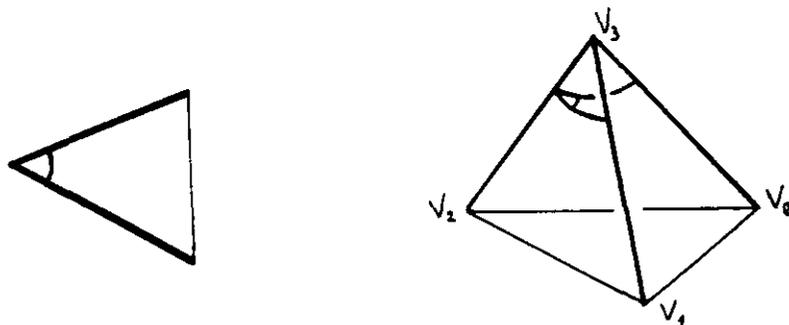
donde  $\hat{V}_2$  es el ángulo de  $T$  en el vértice  $V_2$  y  $l(E_{ij})$  es la longitud de la arista  $E_{ij}$ .

- Si  $n > 2$ , definimos  $p_n : S_S^n \rightarrow (0, \pi)^{\binom{n+1}{2}}$  ó, si  $X = \mathbf{H}, \mathbf{E}$ ,  $p_n : S_X^n \rightarrow (0, \pi)^{\binom{n}{2}} \times (0, \infty)^n$  como

$$p_n(T) = (p_{n-1}(T_n), l(E_{n0}), \dots, l(E_{nn-1})),$$

donde recordamos que  $T_n$  es la figura verticilar del vértice  $V_n$ , es decir, un simplex esférico de dimensión  $n - 1$ .

Para la dimensión tres, las coordenadas anteriores son un ángulo diédrico, dos ángulos planos y tres longitudes (ver *Figura 2.13*).



*Figura 2.13*

Se prueba fácilmente la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.4.** *La aplicación  $p_n$  define un sistema de coordenadas para el espacio  $S_X^n$ : el espacio de coordenadas es  $(0, \pi)^{\binom{n+1}{2}}$ , en el caso esférico y  $(0, \pi)^{\binom{n}{2}} \times (0, \infty)^n$ , para los casos hiperbólico y euclídeo.*

*Demostración:*

Lo haremos por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 2$  es el lema 2.3.3. Supongamos ahora  $n > 2$ . Si  $T, T' \in S_X^n$  y  $p_n(T) = p_n(T')$ , entonces  $p_{n-1}(T_n) = p_{n-1}(T'_n)$  y por

la hipótesis de inducción, las figuras verticales  $T_n$  y  $T'_n$  son isométricas. Por tanto podemos mover  $T'$  mediante una isometría del espacio correspondiente hasta hacer coincidir el vértice  $V_n$ , de  $T$ , y las caras que inciden en él, con el vértice  $V'_n$ , de  $T'$ . Ahora, por la igualdad de las  $n$  longitudes de las aristas que inciden en  $V_n$ , se tiene que los símplexes  $T$  y  $T'$  son iguales. Se tiene por tanto que  $p_n$  es inyectiva.

Veamos ahora que el espacio de coordenadas mixtas para símplexes esféricos es  $(0, \pi)^m$ , con  $m = \binom{n+1}{2}$ . Ya hemos visto en el Lema 2.3.3 que el espacio de estas coordenadas para triángulos esféricos es  $(0, \pi)^3$ . Sea  $(x_1, \dots, x_m) \in (0, \pi)^m$ ; por inducción, podemos suponer que existe un símplex esférico  $T_n$  tal que  $p_n(T_n) = (x_1, \dots, x_{\binom{n}{2}})$ . Consideramos un punto  $V$  en la esfera  $\mathbf{S}^n$  y  $n$  hiperplanos que incidan en  $V$  y cuya figura vertical sea  $T_n$ . En las  $n$  aristas que determinan estos hiperplanos tomamos puntos cuyas distancias a  $V$  sean las longitudes  $x_{\binom{n}{2}+1}, \dots, x_{\binom{n+1}{2}}$ . Estos  $n$  puntos están en posición general en  $\mathbf{S}^n$ , por tanto existe un único hiperplano en  $\mathbf{S}^n$  que los contiene. Así tenemos determinado un símplex  $T$  en  $\mathbf{S}^n$  con  $p_n(T) = (x_1, \dots, x_m)$ .

Para los casos hiperbólico y euclídeo, dado un punto  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in (0, \pi)^m \times (0, \infty)^n$ , con  $m = \binom{n}{2}$ , por lo anterior, existe un símplex esférico  $T_n$  con  $p_{n-1}(T_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Consideramos ahora un punto  $V$  en  $\mathbf{H}^n$  ó  $\mathbf{E}^n$  y  $n$  hiperplanos que incidan en  $V$  y cuya figura vertical sea  $T_n$ . Elegimos  $n$  puntos en las aristas que determinan estos hiperplanos cuyas distancias al punto  $V$  sean las longitudes  $y_1, \dots, y_n$ . Igual que antes, existe un único hiperplano en  $\mathbf{H}^n$  ó  $\mathbf{E}^n$  que contiene estos  $n$  puntos, por tanto tenemos determinado un símplex  $T$  en  $\mathbf{H}^n$  ó  $\mathbf{E}^n$  con  $p_n(T) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ . □

Para terminar, damos una fórmula que relaciona estos dos tipos de coordenadas (mixtas y longitudes).

**Proposición 2.3.5.**

(a) Sea  $T \subset \mathbf{H}^n$  un símplex compacto,  $m = \binom{n}{2}$  y sean  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, l_1, \dots, l_n)$  las coordenadas mixtas de  $T$ . Se tiene

$$\sqrt{-\det K} = \text{sen } \alpha_1 \dots \text{sen } \alpha_m \sinh l_1 \dots \sinh l_n.$$

(b) Sea  $T \subset \mathbf{S}^n$  un símplex  $m = \binom{n+1}{2}$  y sean  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  las coordenadas mixtas de  $T$ . Se tiene

$$\sqrt{\det K} = \text{sen } \alpha_1 \dots \text{sen } \alpha_m.$$

*Demostración:*

Consideramos el caso hiperbólico, el esférico se obtendría de forma análoga. Hacemos la demostración por inducción en la dimensión de  $T$ . Para el caso de triángulos, si llamamos  $A, B, C$  a los ángulos y  $a, b, c$  a las longitudes de las aristas opuestas, se tiene

$$\begin{aligned}
 -\det K &= - \begin{vmatrix} -1 & -\cosh a & -\cosh b \\ -\cosh a & -1 & -\cosh c \\ -\cosh b & -\cosh c & -1 \end{vmatrix} = \\
 &= 1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c = \\
 &= (1 - \cosh^2 b)(1 - \cosh^2 c) - (-\cosh a + \cosh b \cosh c)^2 = \\
 &= \sinh^2 b \sinh^2 c - (-\cosh a + \cosh b \cosh c)^2 = \\
 &= \left( 1 - \frac{(-\cosh a + \cosh b \cosh c)^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c} \right) \sinh^2 b \sinh^2 c = \\
 &= (1 - \cos^2 A) \sinh^2 b \sinh^2 c = \sin^2 A \sinh^2 b \sinh^2 c,
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de las fórmulas del coseno (1.1.3) para triángulos hiperbólicos.

Denotamos por  $h_{C_i}^i$  a la altura desde el vértice  $V_i$  a la cara opuesta  $C_i$ . La longitud de esta altura es la distancia entre el vértice  $V_i$  y la cara  $C_i$ . El vector  $e_i$ , normal exterior a la cara  $C_i$ , es ortogonal a todos los vértices  $V_j$ , con  $j \neq i$ , por tanto es proporcional al vector

$$e_{0\dots i-1 \ i+1\dots n} = \Phi_n(V_0 \wedge \dots \wedge V_{i-1} \wedge V_{i+1} \wedge \dots \wedge V_n)$$

(donde  $\Phi_n$  es el operador de Hodge). Por el Lema 1.4.1(c), la norma de  $e_{0\dots i-1 \ i+1\dots n}$  es igual a  $-\det K(C_i)$ , donde  $K(C_i)$  es la matriz de longitudes del simplex  $C_i$ . Por tanto,  $e_i = \epsilon \frac{e_{0\dots i-1 \ i+1\dots n}}{\sqrt{-\det K(C_i)}}$ , con  $\epsilon = \pm 1$ . Por el Lema 1.4.1(a), se tiene que

$$|f(e_{0\dots i-1 \ i+1\dots n}, V_i)| = |\det V| = \sqrt{-\det K(T)}$$

donde  $V$  es la matriz de coordenadas de los vértices  $V_j$ . Por tanto se tiene finalmente que

$$\sinh(h_{C_i}^i) = |f(V_i, e_i)| = \frac{\sqrt{-\det K(T)}}{\sqrt{-\det K(C_i)}},$$

o equivalentemente,

$$\sqrt{-\det K(T)} = \sinh(h_{C_i}^i) \sqrt{-\det K(C_i)} \quad (1)$$

Por otra parte, el 2-plano que contiene a las alturas  $h_{C_i}^i$  y  $h_{C_{ij}}^i$  es perpendicular a la  $(n-2)$ -cara  $C_{ij}$ . Entonces en el triángulo que contiene estas dos alturas, el ángulo

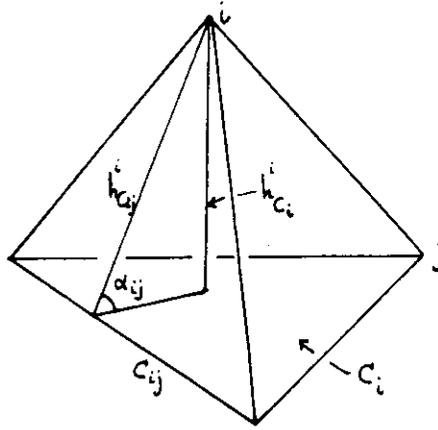
opuesto a la altura  $h_{C_i}^i$ , es el ángulo diédrico  $\alpha_{ij} = \widehat{C_i C_j}$  (ver *Figura 2.14*). Aplicando el teorema de los senos (1.1.3) a este triángulo, tenemos

$$\sinh h_{C_i}^i = \sin \alpha_{ij} \sinh h_{C_{ij}}^i \quad (2)$$

Utilizando (1) y (2), y tomando  $i = 0, j = 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{-\det K(T)} &= \sinh h_{C_0}^0 \sqrt{-\det K(C_0)} = \sin \alpha_{01} \sinh h_{C_{01}}^0 \sqrt{-\det K(C_0)} = \\ &= \sin \alpha_{01} \frac{\sqrt{-\det K(C_1)}}{\sqrt{-\det K(C_{01})}} \sqrt{-\det K(C_0)}. \end{aligned}$$

Ahora,  $C_0, C_1$  y  $C_{01}$  son símplexes de dimensión menor que  $n$ , por lo que, por inducción, se tiene que  $\sqrt{-\det K(C_0)}, \sqrt{-\det K(C_1)}$  y  $\sqrt{-\det K(C_{01})}$  factorizan según las coordenadas mixtas de estos símplexes. Haciendo estas factorizaciones, y cancelando los factores correspondientes a  $\sqrt{-\det K(C_{01})}$ , se obtiene el resultado.



*Figura 2.14*

□

Observamos que aplicando inducción en la expresión (1), también se obtiene una factorización de  $\sqrt{-\det K}$  en término de alturas y de una arista del símplex. Así, para cualquier orden  $V_{i_0}, \dots, V_{i_n}$  de los vértices de  $T$ , se tiene:

$$\sqrt{-\det K} = \sinh h_{C_0}^{i_0} \sinh h_{C_{i_0 i_1}}^{i_1} \dots \sinh h_{C_{i_0 \dots i_{n-2}}}^{i_{n-2}} \sinh(V_{i_{n-1}} V_{i_n}).$$

De la misma forma, para símplexes esféricos, se tiene

$$\sqrt{\det K} = \sin h_{C_0}^{i_0} \sin h_{C_{i_0 i_1}}^{i_1} \dots \sin h_{C_{i_0 \dots i_{n-2}}}^{i_{n-2}} \sin(V_{i_{n-1}} V_{i_n}).$$

## Capítulo 3:

# Caracterización de matrices de Gram de politopos

En el Capítulo 2 hemos visto (Teorema 2.1.1) una caracterización de las matrices que son matrices de Gram de símlices hiperbólicos (resp. esféricos o euclídeos). Para el caso de símlices, conocer la matriz de Gram equivale a conocer los ángulos diédricos; por tanto conocemos también una caracterización de los ángulos de símlices hiperbólicos.

En el caso de un politopo cualquiera, distinto de un símplex, la matriz de Gram da siempre más información que los ángulos diédricos. En este capítulo vamos a caracterizar las matrices que son matrices de Gram de politopos hiperbólicos de un tipo combinatorio fijado de antemano.

Trabajamos con el modelo del hiperboloide del espacio hiperbólico, esto es (ver Sección 1.1), un espacio vectorial de dimensión una unidad mayor que la dimensión del espacio hiperbólico en el que trabajamos, con un producto escalar (no degenerado) y de una cierta signatura. El poliedro hiperbólico determina en este espacio vectorial un cono poliedral no degenerado. Aprovechamos este contexto para plantearnos el problema más general, para conos poliedrales no degenerados en un espacio vectorial en el que hay definido un producto escalar.

En concreto: dado un espacio vectorial geométrico,  $E_f = (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  y un  $d$ -politopo abstracto  $\mathcal{P}$  con  $n$  caras de codimensión 1, caracterizamos las matrices simétricas de orden  $n$  que son matrices de Gram, respecto del producto escalar  $f$ , de un cono poliedral en  $\mathbf{R}^{d+1}$  del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  (Teorema 3.4.1).

Vamos a explicar las ideas principales del Teorema 3.4.1.

Consideramos un  $d$ -politopo abstracto  $\mathcal{P}$  con  $n$  caras de codimensión 1, y una familia de  $n$  semiespacios en  $E_f$ . La intersección de estos  $n$  semiespacios determina

un cono poliedral  $\hat{P}$ . Nuestro deseo es ver qué condiciones debe verificar la matriz de Gram de  $\hat{P}$  para que su tipo combinatorio (ver Sección 1.3 para definiciones de términos referidos a conos poliedrales) sea el de  $\mathcal{P}$ .

Para ello, debe haber una biyección entre las caras de  $\mathcal{P}$  y los  $n$  semiespacios dados tal que se verifique:

- (i) para cada vértice de  $\mathcal{P}$ , si consideramos todas las caras de  $\mathcal{P}$  que inciden en este vértice, entonces los hiperplanos correspondientes a todas estas caras (esto es, los hiperplanos que bordean a los semiespacios correspondientes a estas caras) deben cortarse en una recta vectorial de  $\mathbf{R}^{d+1}$ ;
- (ii) cada una de las rectas vectoriales que hemos encontrado arriba debe contener un vector no nulo que esté contenido en todos los  $n$  semiespacios dados.

Esto es suficiente, pues los vértices y las caras de codimensión 1 de un politopo, junto con sus relaciones de incidencia, determinan el tipo combinatorio del mismo (ver Sección 1.2).

La condición (i) es fácil de describir, en términos del rango de ciertos conjuntos de vectores.

Supuesto que se verifica (i), tenemos una recta vectorial para cada vértice de  $\mathcal{P}$ . Elegimos un vector no nulo en cada una de estas rectas de la siguiente manera: dado un vértice de  $\mathcal{P}$ , se consideran  $d$  caras (de codimensión 1) que incidan en él y se ordenan de forma conveniente. Se consideran los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  ortogonales a las  $d$  caras elegidas y ordenados de la misma forma y se toma el vector  $v_i$  que resulta de aplicar el operador de Hodge a los vectores  $e_i$ , (esta operación es una generalización del producto vectorial).

El cono poliedral  $\hat{P}$  tiene el mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  si y sólo si los vectores  $v_i$  que hemos conseguido de esta forma tienen la propiedad de que, o bien todos son vértices (i.e., cada  $v_i$  está en todos los semiespacios), o bien todos los  $-v_i$  son vértices.

Las condiciones sobre cómo ordenar las  $d$  caras que inciden en un vértice dan condiciones sobre orientaciones de ciertas bases de  $\mathbf{R}^{d+1}$ , que se traducen en signos de menores mixtos de la matriz de Gram de  $\hat{P}$ .

En la Sección 3.1 se explican herramientas combinatorias con el objetivo de ordenar de forma adecuada las caras que inciden en un vértice del politopo. Se observa que dar una ordenación de estas caras equivale a dar una orientación del borde del politopo (que es una esfera de dimensión  $d - 1$ ). En la Sección 3.2, se da un criterio para ver cuándo dos conjuntos de vectores  $\{e_i\}$  y  $\{v_j\}$  de  $\mathbf{R}^{d+1}$  son las caras y los vértices de un cono poliedral de un tipo combinatorio dado (Proposición 3.2.1, que se utilizará

en la demostración de la parte suficiente del Teorema 3.4.1). En la Sección 3.3 se da una propiedad en términos de orientaciones de bases de  $\mathbf{R}^{d+1}$  que verifican los conos poliedrales de un tipo combinatorio dado (Proposición 3.3.7, que se utiliza en la parte necesaria del Teorema 3.4.1). Con estos elementos, se prueba en la Sección 3.4 el Teorema 3.4.1, que, recordamos, es cierto para un espacio geométrico  $(\mathbf{R}^{d+1}, f)$ .

Para dar las versiones hiperbólica o esférica del teorema anterior, únicamente hay que poner la condición de que la matriz de Gram tenga la signatura adecuada. Finalmente, para el caso hiperbólico, queremos saber si el cono poliedral que estamos estudiando es compacto o no. Esto no es más que estudiar la posición relativa entre el cono poliedral y la hoja del hiperboloide que define el espacio hiperbólico. Es fácil, en términos de la matriz de Gram, expresar que los vértices (rayos vectoriales) del cono poliedral están dentro del cono de luz. Ahora bien, todos esos rayos vectoriales deben cortar a la misma hoja del hiperboloide  $f^{-1}(-1)$ . Para expresar esto en términos de la matriz de Gram, se utilizan los menores mixtos de orden  $d$ . La idea de esto es muy sencilla: para ver que dos vectores, con norma negativa, están en la misma componente de  $f^{-1}(-\infty, 0)$ , basta ver que su producto escalar es negativo. Ahora bien, los vértices del cono poliedral podemos verlos como vectores en el espacio  $(\wedge^d \mathbf{R}^{d+1}, \wedge^d f)$ , de signatura  $(1, d)$  (ver Sección 1.4); estos vectores tienen ahora norma positiva, y su producto escalar es precisamente un menor mixto de orden  $d$  de la matriz de Gram.

Por último, en el Apéndice C, explicamos un método para describir el tipo combinatorio de un cono poliedral cuando conocemos, o bien los vectores ortogonales a sus caras, o bien la matriz de Gram. Este método consiste esencialmente en encontrar todos los “posibles vértices” (todas las posibles intersecciones entre  $d$  hiperplanos independientes), y para cada uno de ellos ver si está en todos los semiespacios.

### 3.1. Herramientas combinatorias

Vamos a definir aquí algunos términos combinatorios que utilizaremos en adelante. Las definiciones de bandera completa y base de vértices son las usuales.

**Definición.** Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto. Una *bandera completa*,  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$  es una familia  $\emptyset = \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{F}_d = \mathcal{P}$ , de caras del politopo tal que hay una cara de cada dimensión y la cara  $\mathcal{F}_i$  de dimensión  $i$  está contenida en la cara  $\mathcal{F}_{i+1}$  de dimensión  $i + 1$ .

**Definición.** Una *base de un  $d$ -politopo*  $\mathcal{P}$  es un conjunto de  $d + 1$  vértices  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_d$  tal que en cualquier realización de  $\mathcal{P}$  los vértices correspondientes son afinmente independientes.

Sea  $\mathcal{B} : \emptyset = \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{F}_d = \mathcal{P}$  una bandera completa. Tomamos  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}_0$ ; para cada  $i = 1, \dots, d$  tomamos un vértice  $\mathcal{V}_i \in \mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$ . Entonces se ve fácilmente que  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_d$  es una base de  $\mathcal{P}$ , pues para cada  $r$ , los vértices  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_r$  generan, en cualquier realización, el  $r$ -plano afín que contiene a la cara  $\mathcal{F}_r$ . Llamaremos a una base obtenida de esta forma *base asociada a la bandera  $\mathcal{B}$* .

**Definición.**

- (a) Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo. Un *ciclo orientado* de  $\mathcal{P}$  (ver *Figura 3.1*), es una familia ordenada,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$ , de  $d$  caras (de codimensión 1) de  $\mathcal{P}$  tal que existe una bandera completa  $\mathcal{B} : \emptyset \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P}$  que verifica:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{F}_{d-1} \\ \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 &= \mathcal{F}_{d-2} \\ &\dots \\ \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_i &= \mathcal{F}_{d-i} \\ &\dots \\ \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \dots \cap \mathcal{C}_d &= \mathcal{F}_0 \end{aligned}$$

También diremos que  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$  es un ciclo orientado que *incide en la bandera completa  $\mathcal{B}$*  ó que *incide en el vértice  $\mathcal{F}_0$* . Otra forma de dar la definición anterior es la siguiente: un *ciclo orientado* asociado a una bandera completa  $\mathcal{B} : \emptyset \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P}$  es una familia  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$  de  $d$  caras de codimensión 1 de  $\mathcal{P}$  tal que para cada  $i = 1, \dots, d$ , la cara  $\mathcal{C}_i$  incide en  $\mathcal{F}_{d-i}$  pero no incide en  $\mathcal{F}_{d-i+1}$ .

- (b) Un *ciclo orientado ampliado*  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d, \mathcal{C}_{d+1}$  es una familia ordenada de  $d+1$  caras de codimensión 1 de  $\mathcal{P}$  tal que

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d\} &\text{ es un ciclo orientado} \\ \mathcal{C}_1 \cap \dots \cap \mathcal{C}_d \cap \mathcal{C}_{d+1} &= \mathcal{F}_{-1} = \emptyset. \end{aligned}$$

- (c) Un *ciclo orientado truncado* que incide en una  $r$ -cara  $\mathcal{F}_r$  es una familia  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{d-r}$  formada por las  $d-r$  primeras caras de un ciclo orientado que incide en una bandera completa que contiene a la cara  $\mathcal{F}_r$ ,  $\mathcal{B} : \dots \subset \mathcal{F}_r \subset \dots$ .

Observamos que un ciclo orientado y un ciclo orientado ampliado determinan unívocamente una bandera completa.

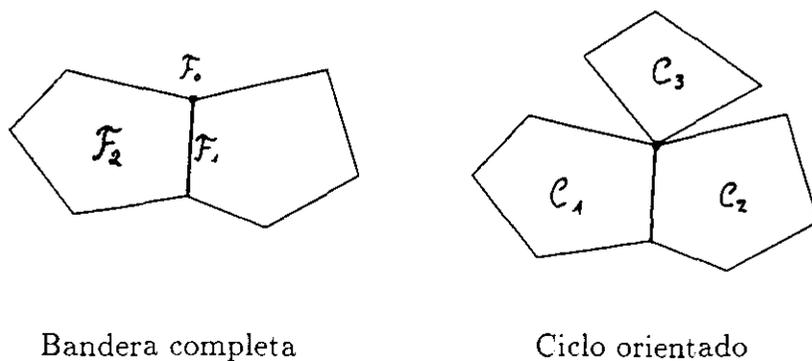


Figura 3.1

**Lema 3.1.1.** Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo y  $C_1, C_2, \dots, C_{d+1}$  un ciclo orientado ampliado. Si  $P$  es una realización cualquiera de  $\mathcal{P}$ , los hiperplanos que contienen a las caras correspondientes  $C_1, \dots, C_{d+1}$  están en posición general (es decir, su intersección es el vacío, y en particular  $C_1 \cap \dots \cap C_d$  es un punto).

La demostración es clara, pues (por definición de ciclo orientado y de realización de un poliedro abstracto) la intersección  $C_1 \cap \dots \cap C_r$  es una cara  $F_{d-r}$  de dimensión  $d-r$ .  $\square$

**Definición.**

- (a) Dos banderas completas  $\mathcal{B} : \emptyset \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P}$  y  $\mathcal{B}' : \emptyset \subset \mathcal{F}'_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}'_{d-1} \subset \mathcal{P}$  de un  $d$ -politopo  $\mathcal{P}$  se diferencian en un *paso elemental* si sólo se diferencian en una cara, es decir, existe un índice  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  tal que  $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}'_i$  y  $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}'_j$  para todo  $j \neq i$ .
- (b) Una *cadena* de banderas completas es una sucesión finita de banderas completas,  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$  tal que cada dos banderas consecutivas se diferencian en un paso elemental. Decimos que la cadena  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$  une las banderas  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_m$ , y que tiene *longitud*  $m$ .

**Lema 3.1.2.** Un paso elemental entre dos banderas completas está totalmente determinado por la dimensión de la cara en la que difieren las dos banderas.

*Demostración:*

Sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  las banderas completas

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \emptyset \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_i \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{B}' : \emptyset \subset \mathcal{F}'_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}'_i \subset \dots \subset \mathcal{F}'_{d-1} \subset \mathcal{P} \end{aligned}$$

y supongamos que  $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}'_i$ , (para algún  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ ) y  $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}'_j$  para todo  $j \neq i$ . En particular, se tiene

- (a)  $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}'_{i+1}$ , con lo que  $\mathcal{F}_i$  y  $\mathcal{F}'_i$  son caras de codimensión 1 de  $\mathcal{F}_{i+1}$
- (b)  $\mathcal{F}_{i-1} = \mathcal{F}'_{i-1} \subset \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}'_i$

Es decir,  $\mathcal{F}_i$  y  $\mathcal{F}'_i$  son las dos únicas caras de codimensión 1 de  $\mathcal{F}_{i+1}$  que se cortan en la cara  $\mathcal{F}_{i-1}$ , de codimensión 2 en  $\mathcal{F}_{i+1}$  (ver 1.2.2). Se deduce por tanto que la cara  $\mathcal{F}'_i$  está determinada a partir de la cara  $\mathcal{F}_i$  y de la bandera  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Lema 3.1.3.** (Conexión de banderas completas) *Sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  dos banderas completas de un  $d$ -politopo  $\mathcal{P}$ . Entonces existe una cadena  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_m$  de banderas completas de  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}'$ .*

*Demostración:*

Este resultado es intuitivamente claro, aunque complicado de formalizar; lo probamos por inducción sobre la dimensión  $d$  del politopo. Si  $d = 1$ , sólo hay dos banderas completas, que se diferencian en el vértice que elijamos, por tanto se diferencian en un paso elemental.

Supongamos que el enunciado es cierto para todos los politopos con dimensión menor que  $d$ , y veámoslo para un  $d$ -politopo  $\mathcal{P}$ . Consideremos dos banderas completas de  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \emptyset = \mathcal{F}_{-1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_i \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{B}' : \emptyset = \mathcal{F}'_{-1} \subset \dots \subset \mathcal{F}'_i \subset \dots \subset \mathcal{F}'_{d-1} \subset \mathcal{P} \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, en lo que queda de demostración vamos a designar por  $\mathcal{M}^i$  a politopos de dimensión  $d - 1$  y por  $\mathcal{N}^j$  a politopos de dimensión  $d - 2$ .

Sea  $\mathcal{M}^0, \dots, \mathcal{M}^m$  una cadena de caras de codimensión 1 de  $\mathcal{P}$  que conectan las caras  $\mathcal{F}_{d-1}$  y  $\mathcal{F}'_{d-1}$  (es decir,  $\mathcal{M}^i$  y  $\mathcal{M}^{i+1}$  son adyacentes,  $\mathcal{M}^0 = \mathcal{F}_{d-1}$  y  $\mathcal{M}^m = \mathcal{F}'_{d-1}$ ; una cadena así siempre existe por 1.2.1). Para  $i = 1, \dots, m$ , llamamos  $\mathcal{N}^i$  a la cara intersección  $\mathcal{M}^{i-1} \cap \mathcal{M}^i$  y llamamos  $\mathcal{N}^0 := \mathcal{F}_{d-2}$  y  $\mathcal{N}^{m+1} := \mathcal{F}'_{d-2}$  (puede ser que  $\mathcal{N}^0 = \mathcal{N}^1$  ó  $\mathcal{N}^m = \mathcal{N}^{m+1}$ ; ver *Figura 3.2*). Para cada  $i = 1, \dots, m$ , consideramos una bandera completa  $\mathcal{B}^i$  en  $\mathcal{N}^i$ ; para  $i = 0$ , tomamos  $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}|_{\mathcal{N}^0}$  y para  $i = m+1$ , tomamos  $\mathcal{B}^{m+1} = \mathcal{B}'|_{\mathcal{N}^{m+1}}$ . Ampliamos la bandera completa  $\mathcal{B}^i$  a una bandera completa  $\mathcal{B}_b^i$  en  $\mathcal{M}^i$  y a una bandera completa  $\mathcal{B}_a^i$  en  $\mathcal{M}^{i-1}$  de la forma obvia. A su vez,  $\mathcal{B}_a^i$  y  $\mathcal{B}_b^i$  podemos ampliarlas a banderas completas de  $\mathcal{P}$  (seguimos llamando  $\mathcal{B}_a^i$  y  $\mathcal{B}_b^i$  a las ampliadas).

En  $\mathcal{M}^i$  tenemos, pues, dos banderas completas,  $\mathcal{B}_b^i$  y  $\mathcal{B}_a^{i+1}$ . Por la hipótesis de inducción, estas banderas completas se pueden conectar por una cadena de banderas completas de  $\mathcal{M}^i$ . Ampliando cada bandera de esta cadena a una bandera de  $\mathcal{P}$  se tiene una cadena de banderas completas que conectan las banderas  $\mathcal{B}_b^i$  y  $\mathcal{B}_a^{i+1}$  de  $\mathcal{P}$ . Procedemos de la misma manera con cada  $i = 0, \dots, m$ . Por otra parte, por construcción,

las banderas  $B_a^i$  y  $B_b^i$  de  $\mathcal{P}$  se diferencian en un paso elemental. Combinando todo lo anterior, se tiene finalmente una cadena de banderas completas de  $\mathcal{P}$  que conectan  $B$  y  $B'$  □

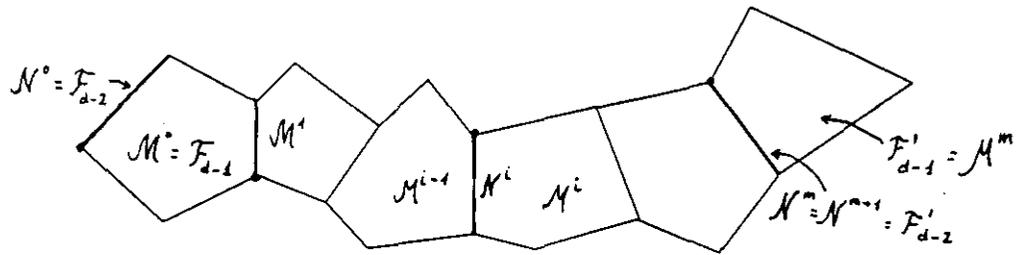


Figura 3.2

En el resto de esta sección vamos a probar dos lemas, que se utilizarán en la demostración de la Proposición 3.2.1. En esa proposición tendremos dos politopos (o conos poliedrales) y queremos ver que son del mismo tipo combinatorio. El Lema 3.1.5 da unas condiciones suficientes para que dos politopos abstractos sean del mismo tipo combinatorio.

Recordemos que un *subcomplejo celular* de un complejo celular  $K$  es un subconjunto  $L$  de  $K$  que también es complejo celular (observemos que para ver si un subconjunto  $L$  de  $K$  es subcomplejo, sólo hay que comprobar que si una célula está en  $L$ , entonces todas sus caras también están en  $L$ ).

**Lema 3.1.4.** Sean  $K$  y  $K'$  complejos celulares y sea  $\varphi : K \rightarrow K'$  una aplicación inyectiva, que preserve las dimensiones de las caras y que preserve incidencia en ambos sentidos (es decir,  $C_s < C_m$  si y sólo si  $\varphi(C_s) < \varphi(C_m)$ ). Entonces  $\varphi(K)$  es un subcomplejo celular de  $K'$ .

*Demostración:*

Sea  $C'_m$  una  $m$ -celda de  $K'$  tal que  $C'_m \in \varphi(K)$ , y sea  $C'_s < C'_m$ ; hay que probar que  $C'_s \in \varphi(K)$ . Lo hacemos por inducción en la dimensión  $m$ .

Si  $m = 1$ , sea  $C'_1$  una arista de  $K'$  tal que  $C'_1 \in \text{Im}\varphi$ ; sea  $C_1$  la (única, por ser  $\varphi$  inyectiva) celda de  $K$  tal que  $\varphi(C_1) = C'_1$ ; como  $\varphi$  preserve dimensiones, se tiene que  $C_1$  también es una 1-celda. Sean  $V_1, V_2$  los dos vértices de  $C_1$ . Entonces,  $\varphi(V_1), \varphi(V_2)$  son vértices distintos de  $C'_1$  porque  $\varphi$  preserve incidencias y dimensiones y es inyectiva. Luego  $\varphi(V_1), \varphi(V_2)$  son los dos vértices de  $C'_1$ , por lo que todas las caras de  $C'_1$  están en  $\text{Im}\varphi$ .

Supongamos que el resultado es cierto para todo  $k < m$ ; veamos para  $m$ . Sea  $C'_m$  una  $m$ -célula de  $K'$  tal que  $C'_m \in \text{Im}\varphi$ ; es suficiente ver que todas las caras de

codimensión 1 de  $C'_m$  están contenidas en  $\varphi(K)$ , pues si  $C'_s < C'_m$  y  $s < m - 1$ , entonces existe  $C'_{m-1}$  tal que  $C'_s < C'_{m-1} < C'_m$  y aplicamos la hipótesis de inducción a  $C'_{m-1}$ .

Así pues, sea  $C'_{m-1}$  una cara de codimensión 1 de  $C'_m$ . Como  $C'_m \in \text{Im}\varphi$ , y  $\varphi$  preserva las dimensiones de las células, existe una (única)  $m$ -célula  $C_m$  de  $K$  tal que  $\varphi(C_m) = C'_m$ . Sea  $C_{m-1,0} < C_m$  una cara cualquiera de  $C_m$  de codimensión 1. Como  $\varphi$  preserva incidencias y dimensiones, se tiene que  $\varphi(C_{m-1,0}) = C'_{m-1,0}$  es una cara de codimensión 1 de  $C'_m$ . Consideramos en  $C'_m$  una cadena de caras

$$C'_{m-1,0}, C'_{m-1,1}, \dots, C'_{m-1,k} = C'_{m-1}$$

tal que  $C'_{m-1,i}$  y  $C'_{m-1,i+1}$  son adyacentes, es decir, se cortan en una cara  $C'_{m-2,i+1}$  de codimensión 2 de  $C'_m$ . Tenemos entonces la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} C'_{m-1,0} & C'_{m-1,1} & \cdots & C'_{m-1,i} & C'_{m-1,i+1} & \cdots & C'_{m-1,k-1} & C'_{m-1,k} = C'_{m-1} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ C'_{m-2,1} & & \cdots & C'_{m-2,i+1} & & \cdots & C'_{m-2,k} & \end{array}$$

Vamos a probar que, si  $C'_{m-1,i} \in \text{Im}\varphi$ , entonces  $C'_{m-2,i+1} \in \text{Im}\varphi$  y  $C'_{m-1,i+1} \in \text{Im}\varphi$ ; como  $C'_{m-1,0} \in \text{Im}\varphi$ , se tendrá finalmente que  $C'_{m-1} \in \text{Im}\varphi$ .

En primer lugar, si  $C'_{m-1,i} \in \text{Im}\varphi$ , como  $C'_{m-2,i+1}$  es una cara de  $C'_{m-1,i}$  se tiene por la hipótesis de inducción que  $C'_{m-2,i+1} \in \text{Im}\varphi$ .

Entonces en  $K$  tenemos  $C_{m-2,i+1} < C_{m-1,i} < C_m$  tales que  $\varphi(C_{m-2,i+1}) = C'_{m-2,i+1}$ ,  $\varphi(C_{m-1,i}) = C'_{m-1,i}$  y  $\varphi(C_m) = C'_m$ . Puesto que  $C_{m-2,i+1}$  es una cara de codimensión 2 de  $C_m$ , existe una única cara  $C_{m-1,i+1}$  de codimensión 1 de  $C_m$  tal que  $C_{m-1,i+1} \neq C_{m-1,i}$  y  $C_{m-1,i+1} \cap C_{m-1,i} = C_{m-2,i+1}$ . La imagen de  $C_{m-1,i+1}$  es una  $m - 1$  cara de  $C'_m$  porque  $\varphi$  preserva dimensiones; además,  $\varphi(C_{m-1,i+1}) \neq \varphi(C_{m-1,i}) = C'_{m-1,i}$ , porque  $\varphi$  es inyectiva, y

$$C'_{m-2,i+1} = \varphi(C_{m-2,i+1}) < \varphi(C_{m-1,i+1}) < \varphi(C_m) = C'_m.$$

Puesto que  $C'_m$  es un  $m$ -politopo y  $C'_{m-2,i+1}$  una cara de codimensión 2 de  $C'_m$ , se tiene que  $C'_{m-1,i}$  y  $C'_{m-1,i+1}$  son las únicas caras de codimensión 1 que contienen a  $C'_{m-2,i+1}$ . Se deduce entonces que  $\varphi(C_{m-1,i+1}) = C'_{m-1,i+1}$ , y así  $C'_{m-1,i+1} \in \text{Im}\varphi$

□

El siguiente lema es cierto para dos complejos celulares  $K$  y  $K'$  que verifiquen que toda célula está contenida en una célula de dimensión máxima. Damos el enunciado para complejos celulares que son politopos abstractos, por ser la forma en la que lo utilizaremos.

**Lema 3.1.5.** Sean  $K, K'$  dos politopos abstractos y  $\varphi : K \rightarrow K'$  una aplicación inyectiva, que preserva las dimensiones de las caras y que preserva incidencias en ambos sentidos. Supongamos que  $K$  y  $K'$  tienen el mismo número de caras de codimensión 1. Entonces  $\varphi$  es biyectiva ( y por tanto un isomorfismo combinatorio).

*Demostración:*

Como  $K$  y  $K'$  tienen el mismo número de caras de codimensión 1 y  $\varphi$  es inyectiva y preserva las dimensiones de las caras, se tiene que todas las caras de codimensión 1 de  $K'$  están en la imagen de  $\varphi$ . Por otra parte, por el lema anterior,  $\varphi(K)$  es un subcomplejo celular de  $K'$ . Como todas las caras de codimensión mayor que 1 son también caras de alguna cara de codimensión 1, se deduce entonces que todas las caras de  $K'$  están en la imagen de  $\varphi$ . □

### 3.2. Tipo combinatorio

El objetivo de esta sección es demostrar la Proposición 3.2.1 que se utilizará en la demostración de la condición suficiente del Teorema 3.4.1. En concreto esta proposición da condiciones suficientes para que un conjunto de vectores  $e_i$  y otro conjunto de vectores  $v_j$  sean, respectivamente, los vectores ortogonales a las caras y los vértices de algún cono poliedral de un tipo combinatorio fijado de antemano.

#### Definición.

- (a) Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto con  $n$  caras de codimensión 1 (numeradas)  $C_1, \dots, C_n$  y  $r$  vértices  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$ . Llamamos *matriz del tipo combinatorio* de  $\mathcal{P}$  o *matriz de incidencias* de  $\mathcal{P}$  a la matriz  $\mathcal{L}(\mathcal{P}) = (l_{ij})$  de  $n$  filas y  $r$  columnas definida como

$$l_{ij} = 0 \text{ si } \mathcal{V}_j \text{ es un vértice de la cara } C_i;$$

$$l_{ij} = 1 \text{ si } \mathcal{V}_j \text{ no es vértice de } C_i.$$

- (b) Decimos que una matriz real  $H = (h_{ij})$  es *del mismo tipo combinatorio* que  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  si se verifica que  $h_{ij} = 0$  si y sólo si  $l_{ij} = 0$ .

**Nota.** Recordamos que estamos pensando siempre en el tipo combinatorio de un politopo con las caras numeradas.

El tipo combinatorio de un  $d$ -politopo queda determinado por las caras de codimensión 1 del politopo, los vértices, y las relaciones de incidencia entre ambos ([Gr]); ésta es la información que da la matriz de incidencias, luego esta matriz determina el tipo combinatorio del  $d$ -politopo.

**Proposición 3.2.1.** Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto con  $n$  caras de codimensión 1,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  y  $r$  vértices,  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$ , y  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  su matriz de incidencias; sea  $(\mathbf{R}^{d+1}, f)$  un espacio vectorial geométrico y sean  $e_1, \dots, e_n \in \mathbf{R}^{d+1}$  y  $v_1, \dots, v_r \in \mathbf{R}^{d+1}$  tales que

- (a) si  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  es un ciclo orientado de  $\mathcal{P}$  entonces  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$ ;
- (b) la matriz  $L_1 = (f(e_i, v_j))$  de productos escalares de los vectores  $e_i$  y  $v_j$  es del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ ;
- (c)  $L_1$  es totalmente no positiva (es decir, todas las entradas no nulas de  $L_1$  son negativas).

Entonces el cono poliedral  $\hat{P} := \hat{P}(e_1, \dots, e_n) = \hat{H}_1^- \cap \dots \cap \hat{H}_n^-$  es no degenerado, con interior no vacío y del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ . Además,  $v_1, \dots, v_r$  son todos los vértices de  $\hat{P}(e_1, \dots, e_n)$  y  $\hat{H}_i \cap \hat{P}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) son todas las caras.

*Demostración:*

(I) En primer lugar, veamos que  $\hat{P}$  es no degenerado, es decir,  $\text{rg}\{e_1, \dots, e_n\} = d+1$ . En efecto, sea  $\mathcal{V}_i$  un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y sea  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  un ciclo orientado que incide en  $\mathcal{V}_i$  y  $\mathcal{C}_j$  una cara de codimensión 1 que no incide en  $\mathcal{V}_i$ . Por la hipótesis (a), se tiene que  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$ , es decir,  $\dim(\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}) = 1$ . Por la hipótesis (b) se tiene que  $f(e_{i_k}, v_i) = 0$  para todo  $k = 1, \dots, d$ , lo que equivale a que  $v_i \in \hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$ . Además,  $v_i$  es no nulo, pues como  $\mathcal{V}_i \notin \mathcal{C}_j$ , se tiene que  $f(e_j, v_i) \neq 0$  (por la hipótesis (b)); entonces el vector  $v_i$  genera la recta vectorial  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$ . Finalmente, de  $f(e_j, v_i) \neq 0$  se deduce también que  $v_i \notin \hat{H}_j$ , con lo que  $\hat{H}_j \cap \hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d} = \{0\}$ ; por tanto se tiene que  $\hat{P}$  es no degenerado y  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_j\} = d+1$ . Además, si  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}, \mathcal{C}_{i_{d+1}}, \dots, \mathcal{C}_{i_m}$  son todas las caras que inciden en el vértice  $\mathcal{V}_i$ , entonces el conjunto de vectores  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_{d+1}}, \dots, e_{i_m}\}$  tiene rango  $d$ . En efecto, por lo anterior sabemos que  $\bigcap_{j=1}^d \hat{H}_{i_j} = L(v_i)$ , y por la hipótesis (b) se tiene que  $f(e_{i_{d+k}}, v_i) = 0$ , para todo  $k = 1, \dots, m$ ; por tanto, se deduce que  $\bigcap_{j=1}^m \hat{H}_{i_j} = L(v_i)$ , es decir,  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\} = d$

(II) Veamos ahora que todos los vectores  $v_1, \dots, v_r$  son vértices de  $\hat{P}(e_1, \dots, e_n)$ . Sea  $v_i$  uno de estos vectores. Consideramos un ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  de  $\mathcal{P}$  que incide en  $\mathcal{V}_i$ ; hemos visto que  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d} = L(v_i)$ ; además, por (c), es  $f(v_i, e_j) \leq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Por el Lema 1.3.4, estas condiciones son suficientes para probar que  $v_i$  es vértice del cono poliedral no degenerado  $\hat{P}$ .

(III) Para ver que  $\hat{P}$  tiene interior no vacío, por el Lema 1.3.1 es suficiente ver que  $\hat{P}$  no está contenido en ningún hiperplano  $\hat{H}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sea  $i \in \{1, \dots, n\}$  y consideremos la cara  $\mathcal{C}_i$  de  $\mathcal{P}$ . Existe un vértice  $\mathcal{V}_j$  de  $\mathcal{P}$  tal que  $\mathcal{V}_j \notin \mathcal{C}_i$ . Entonces la entrada  $(i, j)$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  es no nula. Por (b), se tiene que  $L_1(i, j) \neq 0$ , con lo que  $v_j \notin \hat{H}_i$ ;

como  $v_j \in \hat{P}$ , se deduce que  $\hat{P} \not\subset \hat{H}_i$ .

(IV) Sea ahora  $\mathcal{V}_{j_0}, \dots, \mathcal{V}_{j_d}$  una base de vértices de  $\mathcal{P}$  asociada a una bandera completa  $\mathcal{B} : \emptyset \subset \mathcal{F}_0 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{d-1} \subset \mathcal{P}$ . Vamos a probar que los correspondientes vértices  $v_{j_0}, \dots, v_{j_d}$  son linealmente independientes.

Para ello, tomamos un ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1} \dots \mathcal{C}_{i_d}$  de  $\mathcal{P}$  que incide en  $\mathcal{B}$ , es decir,  $\mathcal{F}_{d-k} = \mathcal{C}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{C}_{i_k}$ . Por la hipótesis (a),  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$ , y si llamamos

$$\hat{G}_{d-k} := \hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_k},$$

tenemos la cadena de subespacios vectoriales  $\hat{G}_0 \subset \dots \subset \hat{G}_{d-1}$ , con  $\dim \hat{G}_{d-k} = d-k+1$ . Por otra parte, la relación del ciclo orientado con la base de vértices es

$$\mathcal{V}_{j_k} \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-1} = (\mathcal{C}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{C}_{i_{d-k}}) \setminus (\mathcal{C}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{C}_{i_{d-k+1}}),$$

para todo  $k = 0, \dots, d-1$ , y

$$\mathcal{V}_{j_d} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{C}_{i_1}.$$

La hipótesis (b) implica entonces que  $v_{j_k} \in \hat{G}_k \setminus \hat{G}_{k-1}$ , para todo  $k = 0, \dots, d-1$ , y  $v_{j_d} \in \mathbf{R}^{d+1} \setminus \hat{G}_{d-1} = \mathbf{R}^{d+1} \setminus \hat{H}_{i_1}$ . Se deduce por tanto que  $v_{j_0}, \dots, v_{j_d}$  son linealmente independientes.

(V) Sea  $\mathcal{F}_r$  una  $r$ -cara de  $\mathcal{P}$  y sea  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_{d-r}}$  un ciclo orientado truncado que incide en  $\mathcal{F}_r$ . Veamos que entonces

$$\hat{F}_r := \hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}} \cap \hat{P}$$

es una  $r$ -cara de  $\hat{P}(e_1, \dots, e_n)$ ; en particular,  $\hat{H}_i \cap \hat{P}$  será cara de  $\hat{P}$ , es decir, ninguno de los hiperplanos  $\hat{H}_i$  es superfluo. Para ver esto, por el Lema 1.3.5, hay que probar que  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}}$  tiene dimensión  $r+1$  y que  $\hat{F}_r$  contiene  $r+1$  vértices de  $\hat{P}$  linealmente independientes. En efecto, ampliamos el ciclo  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_{d-r}}$  a un ciclo orientado que incide en una bandera completa (esta bandera, por tanto, contiene a la cara  $\mathcal{F}_r$ ); sea  $\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_d$  una base asociada a esta bandera. Entonces, por lo que ya hemos visto, se tiene que  $\dim(\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_{d-r}}) = r+1$ , que  $v_0, \dots, v_r \in \hat{F}_r$ , y que estos vectores son linealmente independientes.

Con todo esto hemos llegado a la siguiente situación:  $\mathcal{P}$  es un politopo abstracto y  $\hat{P}$  es un cono poliedral del tipo combinatorio de un  $d$ -politopo abstracto  $\mathcal{P}'$ ; los dos politopos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  tienen  $n$  caras de codimensión 1, y por (V), podemos construir una aplicación  $\varphi$  entre el conjunto de caras de  $\mathcal{P}$  y el conjunto de caras de  $\mathcal{P}'$  que verifica

- (i)  $\varphi$  preserva las dimensiones de las caras;
- (ii)  $\varphi$  preserva las incidencias entre las caras, en el siguiente doble sentido:  $\mathcal{F}_r < \mathcal{F}_s$  si y sólo si  $\varphi(\mathcal{F}_r) < \varphi(\mathcal{F}_s)$ ;
- (iii)  $\varphi$  es inyectiva.

(Las dos últimas propiedades se deducen fácilmente de que las matrices  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  y  $L_1$  del mismo tipo combinatorio).

Entonces, por la Proposición 3.1.5,  $\varphi$  es un isomorfismo combinatorio entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$ . Con esto terminamos la demostración de la proposición. □

### 3.3 Orientaciones

El objetivo de esta sección es demostrar la Proposición 3.3.7, que se utilizará en la demostración de la condición necesaria del Teorema 3.4.1. Esta proposición dice que si tenemos un politopo concreto (cono poliedral  $\hat{P} \subset \mathbf{R}^{d+1}$ ), y tomamos dos ciclos orientados ampliados con la “misma orientación”, entonces estos ciclos determinan dos bases en  $\mathbf{R}^{d+1}$  que tienen la misma orientación.

¿Qué significa que dos ciclos ampliados tengan la misma orientación? En la Sección 3.1 hemos definido ciclo orientado sólo por el orden de sus caras. Aquí vamos a ver que uno de estos ciclos induce una orientación (topológica) en el borde del politopo. Puesto que el borde de un politopo es una esfera, luego una variedad orientable, tiene sentido decir que dos ciclos tienen la misma orientación.

Damos también un criterio combinatorio para ver si dos ciclos tienen o no la misma orientación: tienen la misma orientación cuando las banderas en las que inciden se diferencian en un número par de pasos elementales.

#### Orientación topológica

Vamos a utilizar una definición geométrica de orientación, en concreto seguiremos la definición dada por [RS] para variedades p.l. (por supuesto tanto los politopos como sus bordes son variedades p.l.). Dados dos encajes (*embeddings*)  $h_1, h_2$  del disco  $I^d = [-1, 1]^d$  ( $d \geq 1$ ) en una variedad  $M$  de dimensión  $d$ , el Teorema del disco asegura que o bien  $h_1$  y  $h_2$  son isótopos ambiente, o bien  $h_2$  es isótopo ambiente a  $h_1 \circ r$ , donde  $r$  es una reflexión del cubo  $I^d$  (por ejemplo  $r(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d)$ , o bien, si  $d > 1$ ,  $r'(x_1, \dots, x_{d-2}, x_{d-1}, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-2}, x_d, x_{d-1})$ ). En el conjunto de todos los encajes del disco en una variedad tenemos, pues, una relación de equivalencia

(isotopía ambiente), y el teorema anterior dice que hay una o dos clases de equivalencia. Una variedad será *orientable* si el conjunto cociente por la relación anterior tiene dos elementos, y no orientable si tiene un elemento. Si la variedad es orientable, a cada uno de los dos elementos se le llama *orientación*. Dar una orientación a una variedad es pues elegir un encaje del disco en esa variedad y tomar su clase de isotopía ambiente. Por convenio, una orientación en una variedad de dimensión 0 es atribuir signos + ó - a cada uno de sus puntos. Es bien conocido que las bolas (o discos),  $B^d$ , y las esferas,  $S^d$ , son variedades orientables. Y también es conocido que un  $d$ -politopo  $P \subset \mathbf{R}^d$  es p.l.-homeomorfo a una bola, y su borde  $\partial P$  es p.l.-homeomorfo a la esfera  $S^{d-1}$ .

Vamos a ver cómo se puede determinar una orientación de un  $d$ -politopo  $P$  (o de  $\partial P$ ) a partir de unos datos combinatorios, en concreto, de una bandera completa de  $P$ .

Para ver esto, basta tener en cuenta las dos propiedades siguientes bien conocidas sobre orientaciones:

- (1) Sean  $M^d$  y  $N^d$  variedades de dimensión  $d$  con  $N^d \subset M^d$ ; entonces si  $M^d$  es orientable, también lo es  $N^d$ , y la orientación de  $M^d$  induce una orientación en  $N^d$ , al considerar los encajes cuyas imágenes estén contenidos en  $N^d$ .
- (2) Si  $M$  es una variedad orientable, entonces su borde también lo es, y dar una orientación a  $M$  equivale a dar una orientación a su borde. Un encaje  $h : I^{d-1} \rightarrow \partial M$  se puede extender a un encaje  $\bar{h} : I^d \rightarrow M$  (utilizando un "collar" para  $\partial M$  en  $M$ ). Supongamos que  $M$  está orientada; entonces diremos que un encaje  $h : I^{d-1} \rightarrow \partial M$  determina la orientación *inducida* en  $\partial M$  si su encaje extendido  $\bar{h}$  determina la orientación dada en  $M$ . Si  $d = 1$  y  $\bar{h} : I \rightarrow M$  es un encaje tal que  $\bar{h}(1) \in \partial M$ , entonces la orientación inducida por  $\bar{h}$  en  $\bar{h}(1)$  será por convenio atribuirle el signo +.

Aplicado esto a politopos se tiene que: dar una orientación a un  $d$ -politopo  $P$  equivale (por (2)) a dar una orientación a su borde; dar una orientación a  $\partial P$  equivale (por (1)) a dar una orientación a una cara  $C$  de codimensión 1; ahora,  $C$  es un  $(d-1)$ -politopo, y dar una orientación en  $C$  equivale (por (2)) a dar una orientación de  $\partial C$ . Procediendo de esta manera, se tiene finalmente que dar una orientación a  $\partial P$  equivale a elegir un vértice  $V$ , una arista  $E$  que contenga a  $V$ , una 2-cara que contenga a  $E$ , etc., es decir, elegir una bandera completa. Hemos visto pues:

**Lema 3.3.1.** *Una bandera completa  $B$  de un  $d$ -politopo  $P \subset \mathbf{R}^d$  induce una orientación en  $\partial P$ . □*

Siguiendo los comentarios anteriores, diremos que la orientación inducida en  $P$  a partir de una bandera completa  $B : \emptyset \subset F_0 \subset \dots \subset F_{d-1} \subset P$ , es la orientación que

se obtiene asignando signo  $+$  al vértice  $F_0$ . Veamos cómo es un encaje  $h$  que define esta orientación. Tomamos la bandera completa de  $I^d$  siguiente,  $K : \emptyset \subset K_0 \subset \dots \subset K_{d-1} \subset K_d = I^d$ , con

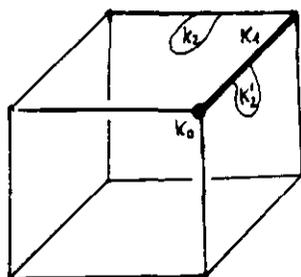
$$K_0 = \{(1, \dots, 1, 1)\}$$

$$K_1 = \{(t_1, 1, \dots, 1) \mid t_1 \in [-1, 1]\}$$

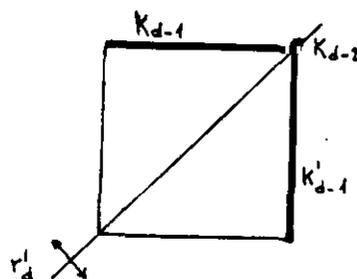
...

$$K_{d-1} = \{(t_1, \dots, t_{d-1}, 1) \mid t_i \in [-1, 1]\}$$

(ver *Figura 3.3(a)*). Entonces un encaje  $h$  que verifique que  $h(K_0) = F_0$ , y  $h(K_i) \subset F_i$ , para  $i = 2, \dots, d$  induce la orientación deseada. Llamamos a un encaje que verifique esta condición *encaje asociado* a la bandera  $B$ .



*Figura 3.3(a)*



*Figura 3.3(b)*

**Definición.** Diremos que dos banderas completas  $B, B'$  de un  $d$ -politopo  $P$  tienen la *misma orientación* si ambas inducen la misma orientación en  $\partial P$ . Dos ciclos orientados (o ciclos orientados ampliados) de  $P \subset \mathbf{R}^d$  tienen la *misma orientación* si las banderas completas en las que inciden tienen la misma orientación.

**Lema 3.3.2.** Si dos banderas completas  $B^0$  y  $B^1$  de  $P$  se diferencian en un paso elemental, las orientaciones que inducen son distintas.

*Demostración:*

Sean  $B : \dots \subset F_s \subset \dots$  y  $B' : \dots \subset F'_s \subset \dots$  dos banderas completas de  $P$  que se diferencian en una cara, que podemos suponer que es la cara  $F_{d-1}$  de codimensión 1 (si la cara en la que se diferencian es la de dimensión  $s$ , consideraremos entonces las dos banderas contenidas en el politopo  $F_{s+1}$ ).

Consideramos un encaje  $h : I^d \rightarrow P$  asociado a la bandera  $B$  y tal que  $h(K'_{d-1}) \subset F'_{d-1}$ , donde  $K'_{d-1}$  es la cara de  $I^d$  definida como  $K'_{d-1} = \{(t_1, \dots, t_{d-2}, 1, t_{d-1})\}$ , si  $d > 1$  y  $K'_{d-1} = \{(0)\}$ , si  $d = 1$  (un encaje así siempre existe).

Entonces, si consideramos la reflexión de  $I^d$  (ver *Figura 3.3(b)*)

$$r'(x_1, \dots, x_{d-2}, x_{d-1}, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-2}, x_d, x_{d-1})$$

(o bien  $r(t) = -t$  si  $d = 1$ ), se tiene que el encaje  $h \circ r'$  (o bien  $h \circ r$ ) está asociado a la bandera  $B'$ . Se tiene entonces que las banderas  $B$  y  $B'$  inducen distinta orientación en  $P$ .  $\square$

**Corolario 3.3.3.** *Dos banderas completas  $B$  y  $B'$  tienen la misma orientación si y sólo si se pueden conectar por una cadena de longitud par (recordemos que, por el Lema 3.1.3, dos banderas siempre se pueden conectar).*  $\square$

Si  $B_1, B_2$  son dos banderas completas de un  $d$ -politopo  $P \subset \mathbf{R}^d$  que inducen la misma orientación en  $\partial P$ , y  $P'$  es un politopo del mismo tipo combinatorio que  $P$ , entonces las correspondientes banderas  $B'_1$  y  $B'_2$  de  $P'$  inducen también la misma orientación en  $\partial P'$ . Esto es claro, pues si  $B_1$  y  $B_2$  tienen la misma orientación, por el Corolario 3.3.3, hay una cadena de longitud par que las une; pero como  $P'$  es del mismo tipo combinatorio que  $P$ , también hay una cadena de longitud par que une las banderas  $B'_1$  y  $B'_2$ , con lo que estas banderas tienen la misma orientación.

Como consecuencia de esto, podemos hablar de que dos banderas completas  $B_1$  y  $B_2$  de un politopo abstracto  $\mathcal{P}$  inducen la misma orientación, o de que dos ciclos orientados tienen la misma orientación. Tenemos pues un concepto de orientación en un  $d$ -politopo abstracto, que se apoya sólo en los datos combinatorios del politopo.

### Orientación vectorial

Recordamos que, dado un cono poliedral no degenerado, también podemos hablar de banderas, ciclos orientados, etc., a través de los mismos conceptos del politopo que determina su tipo combinatorio. En lo que queda de sección cuando hablemos de cono poliedral estaremos pensando siempre en la siguiente situación:  $\hat{P} = \hat{P}(e_1, \dots, e_n) \subset (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  será un cono poliedral no degenerado y con ninguno de los hiperplanos  $\hat{H}_i (= \hat{H}_{e_i})$  superfluo. La cara  $\hat{H}_i \cap \hat{P}$ , correspondiente al vector  $e_i$  la llamaremos  $\hat{C}_i$ . Si tenemos un ciclo ampliado de  $\hat{P}$ , los vectores correspondientes forman una base de  $\mathbf{R}^{d+1}$ .

**Proposición 3.3.4.** *Sea  $\hat{P} \subset \mathbf{R}^{d+1}$  un cono poliedral no degenerado con interior no vacío. Sea  $\hat{B}$  una bandera completa de  $\hat{P}$  y sean  $\hat{C}_{i_1}, \dots, \hat{C}_{i_d}, \hat{C}_{i_{d+1}}$  y  $\hat{C}_{j_1}, \dots, \hat{C}_{j_d}, \hat{C}_{j_{d+1}}$  ciclos ampliados que inciden en  $\hat{B}$  (por tanto estos ciclos tienen la misma orientación). Entonces las bases de  $\mathbf{R}^{d+1}$  correspondientes a estos ciclos tienen la misma orientación.*

*Demostración:*

En primer lugar, vamos a ver que para todo  $k = 1, \dots, d + 1$ , el subespacio lineal generado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$  es igual al subespacio lineal generado por  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ .

Probaremos que ambos espacios son iguales al subespacio  $L(\hat{F}_{d-k})^\perp$ , donde  $\hat{F}_{d-k}$  es la cara de dimensión  $d-k$  de la bandera  $\hat{B}$ . En efecto, como los dos ciclos inciden en esta bandera se verifica que

$$\hat{C}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{C}_{i_k} = \hat{F}_{d-k} = \hat{C}_{j_1} \cap \dots \cap \hat{C}_{j_k}$$

Por una parte, es trivial que  $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \subset L(\hat{F}_{d-k})^\perp$ . Los dos espacios tienen dimensión  $k$  por el Lema 3.1.1 y porque la forma cuadrática  $f$  es no degenerada.

Llamamos  $E_k := L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = L(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ ;  $E_k$  es un subespacio de dimensión  $k$ , y se tiene  $E_1 \subset \dots \subset E_{d+1} = \mathbf{R}^{d+1}$ . Para cada  $k = 1, \dots, d$ ,  $E_k$  es un hiperplano de  $E_{k+1}$ ; vamos a probar que  $e_{i_{k+1}}$  y  $e_{j_{k+1}}$  están en el mismo semiespacio de  $E_{k+1}$  determinado por  $E_k$ . Para ello elegimos una base  $v_0, \dots, v_d$  de  $\hat{P}$  asociada a la bandera completa  $\hat{B}$ , es decir,  $v_h \in \hat{F}_h \setminus \hat{F}_{h-1}$  (para todo  $h = 0, \dots, d$ ). Como los vectores  $v_0, \dots, v_d$  son linealmente independientes, se tiene que  $L(v_0, \dots, v_k) = L(\hat{F}_k)$ . En particular, podemos escribir

$$\begin{aligned} E_k &= L(\hat{F}_{d-k})^\perp = L(v_0, \dots, v_{d-k-1}, v_{d-k})^\perp = L(v_0, \dots, v_{d-k-1})^\perp \cap L(v_{d-k})^\perp = \\ &= E_{k+1} \cap \{w \in \mathbf{R}^{d+1} \mid f(w, v_{d-k}) = 0\} = \{w \in E_{k+1} \mid f(w, v_{d-k}) = 0\}. \end{aligned}$$

Entonces los semiespacios de  $E_{k+1}$  determinados por  $E_k$  son los conjuntos

$$\{w \in E_{k+1} \mid f(w, v_{d-k}) \geq 0\} \text{ y } \{w \in E_{k+1} \mid f(w, v_{d-k}) \leq 0\}.$$

Ahora,  $e_{i_{k+1}} \in E_{k+1} \setminus E_k$ , y  $f(e_{i_{k+1}}, v_{d-k}) < 0$ , porque  $v_{d-k}$  es un vértice del cono poliedral  $\hat{P}$ . De la misma forma,  $f(e_{j_{k+1}}, v_{d-k}) < 0$ , por lo que  $e_{i_{k+1}}$  y  $e_{j_{k+1}}$  están en el mismo semiespacio de  $E_{k+1}$  determinado por  $E_k$ .

En resumen, tenemos

- $e_{i_1} = e_{j_1}$ , porque  $\hat{C}_{i_1} = \hat{C}_{j_1} = \hat{F}_{d-1}$ ; por tanto,  $\{e_{i_1}\}$  y  $\{e_{j_1}\}$  son bases de  $E_1$  con la misma orientación; también es  $e_{i_2} = e_{j_2}$ , porque  $\hat{C}_{i_2} = \hat{C}_{j_2}$  ya que en  $\hat{F}_{d-2}$  sólo inciden dos caras de codimensión 1 y una de ellas es ya  $\hat{F}_{d-1}$ .
- por un resultado meramente algebraico (Lema 3.3.5, que demostramos a continuación),  $\{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}\}$  y  $\{e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}\}$  son bases de  $E_3$  con la misma orientación;
- aplicando sucesivas veces el Lema 3.3.5, tenemos que las dos bases  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{d+1}}\}$  y  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_{d+1}}\}$  de  $\mathbf{R}^{d+1}$  tienen la misma orientación.

□

**Lema 3.3.5.** Sean  $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}\}$  y  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$  dos bases de un espacio vectorial real  $W$  de dimensión  $m + 1$  tales que

- (i)  $L(\{u_1, \dots, u_m\}) = L(\{v_1, \dots, v_m\}) = L$ , y  $\{u_1, \dots, u_m\}$  y  $\{v_1, \dots, v_m\}$  son bases de  $L$  con la misma orientación;
- (ii)  $u_{m+1}$  y  $v_{m+1}$  están en el mismo semiespacio de  $W$  determinado por  $L$ .

Entonces  $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}\}$  y  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$  tienen la misma orientación.

*Demostración:*

Sea  $M$  la matriz del cambio de base de  $\{v_i\}$  y  $\{u_i\}$ , es decir, la matriz cuyas columnas son las coordenadas de  $v_1, \dots, v_{m+1}$  en función de la base  $\{u_1, \dots, u_{m+1}\}$ . Entonces  $M$  es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & A \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

donde  $M_0$  es una matriz  $m \times m$ ,  $A$  es una matriz  $m \times 1$  y  $\alpha \in \mathbf{R}$ .  $M_0$  es la matriz del cambio de las bases  $\{u_1, \dots, u_m\}$  y  $\{v_1, \dots, v_m\}$  de  $L$ ; como estas bases tienen la misma orientación,  $\det M_0 > 0$ . Por otra parte,  $\alpha > 0$  porque  $v_{m+1}$  está en el mismo semiespacio que  $u_{m+1}$  determinado por  $L$ . Entonces se tiene que  $\det M > 0$ , con lo que las dos bases de  $W$  tienen la misma orientación.  $\square$

**Proposición 3.3.6.** Sea  $\hat{P} \subset \mathbf{R}^{d+1}$  un cono poliedral no degenerado, con interior no vacío y sean  $\hat{B}$  y  $\hat{B}'$  banderas completas de  $\hat{P}$  que se diferencian en un paso elemental. Entonces existen ciclos orientados ampliados  $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_{d+1}$  y  $\hat{C}'_1, \dots, \hat{C}'_{d+1}$  que inciden en  $\hat{B}$  y  $\hat{B}'$  respectivamente (luego estos dos ciclos tienen distinta orientación) tales que las bases correspondientes  $\{e_1, \dots, e_{d+1}\}$  y  $\{e'_1, \dots, e'_{d+1}\}$  de  $\mathbf{R}^{d+1}$  tienen distinta orientación.

*Demostración:*

Sean  $\hat{B} : \hat{F}_0 \subset \dots \subset \hat{F}_{d-1}$  y  $\hat{B}' : \hat{F}'_0 \subset \dots \subset \hat{F}'_{d-1}$  y supongamos que  $\hat{F}_r \neq \hat{F}'_r$  (por tanto todas las demás caras son iguales); entonces la cara  $\hat{F}'_r$  está unívocamente determinada a partir de la bandera  $\hat{B}$  (Lema 3.1.2). Elegimos un ciclo ampliado  $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_{d+1}$  que incida en la bandera completa  $\hat{B}$  y con la condición de que  $\hat{C}_{d-r+1}$  contenga a la cara  $\hat{F}'_r$  (para que sea ciclo asociado a  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}_{d-r+1}$  debe contener a la cara  $\hat{F}_{r-1}$ , y no contener a la cara  $\hat{F}_r$ ; la condición que le ponemos es posible porque  $\hat{F}'_r$  contiene a la cara  $\hat{F}_{r-1}$ ).

Consideramos ahora  $\hat{C}'_{d-r} = \hat{C}_{d-r+1}$ ,  $\hat{C}'_{d-r+1} = \hat{C}_{d-r}$  y  $\hat{C}'_i = \hat{C}_i$  para todo  $i \neq d-r, d-r+1$ . Entonces  $\hat{C}'_1, \dots, \hat{C}'_{d+1}$  es un ciclo ampliado que incide en  $\hat{B}'$ . En efecto,  $\hat{C}'_{d-r} = \hat{C}_{d-r+1}$  contiene a la cara  $\hat{F}'_r$  y no contiene a  $\hat{F}'_{r+1} = \hat{F}_{r+1}$  (de hecho no

contiene a  $\hat{F}_r$ ); y por otra parte,  $\hat{C}'_{d-r+1} = \hat{C}_{d-r}$  contiene a la cara  $\hat{F}'_{r-1} = \hat{F}_{r-1}$  (de hecho contiene a  $\hat{F}_r$ ) y no contiene a  $\hat{F}_{r+1}$ , por tanto tampoco contiene a  $\hat{F}'_r$  (ya que  $\hat{F}_r$  y  $\hat{F}'_r$  generan  $\hat{F}_{r+1}$ ).

Estos dos ciclos ampliados se diferencian sólo en la trasposición de dos de sus caras; se deduce por tanto que sus bases correspondientes (de vectores ortogonales exteriores) tienen distinta orientación. □

**Proposición 3.3.7.** (Orientación) *Sea  $\hat{P} \subset \mathbf{R}^{d+1}$  un cono poliedral no degenerado (con interior no vacío). Sean  $\hat{C}_{i_1}, \dots, \hat{C}_{i_d}, \hat{C}_{i_{d+1}}$  y  $\hat{C}_{j_1}, \dots, \hat{C}_{j_d}, \hat{C}_{j_{d+1}}$  dos ciclos ampliados con la misma orientación. Entonces las bases  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_{d+1}}\}$  y  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_{j_{d+1}}\}$  de  $\mathbf{R}^{d+1}$  tienen la misma orientación.*

*Demostración:*

Sean  $\hat{B}'$  y  $\hat{B}''$  las banderas en las que inciden los dos ciclos del enunciado. Puesto que los dos ciclos tienen la misma orientación, estas dos banderas tienen la misma orientación, y así, por el Corolario 3.3.3, hay una cadena  $\hat{B}' = \hat{B}^0, \hat{B}^1, \dots, \hat{B}^{2s} = \hat{B}''$  de longitud par. Por la Proposición 3.3.6, para cada  $k = 1, \dots, 2s$  existen ciclos orientados ampliados

$$\hat{C}_{a,1}^{k-1}, \dots, \hat{C}_{a,d}^{k-1}, \hat{C}_{a,d+1}^{k-1} \quad \text{y} \quad \hat{C}_{b,1}^k, \dots, \hat{C}_{b,d}^k, \hat{C}_{b,d+1}^k,$$

que inciden respectivamente en las banderas  $\hat{B}^{k-1}$  y  $\hat{B}^k$ , y tales que las bases correspondientes  $\{e_{a,1}^{k-1}, \dots, e_{a,d}^{k-1}, e_{a,d+1}^{k-1}\}$  y  $\{e_{b,1}^k, \dots, e_{b,d}^k, e_{b,d+1}^k\}$  tienen distinta orientación.

Tenemos así dos ciclos ampliados incidentes en cada bandera completa de la cadena: si  $k = 1, \dots, 2s - 1$ , en  $\hat{B}^k$  inciden los ciclos

$$\hat{C}_{b,1}^k, \dots, \hat{C}_{b,d}^k, \hat{C}_{b,d+1}^k \quad \text{y} \quad \hat{C}_{a,1}^k, \dots, \hat{C}_{a,d}^k, \hat{C}_{a,d+1}^k;$$

por otra parte, en la primera bandera inciden los ciclos

$$\hat{C}_{i_1}, \dots, \hat{C}_{i_d}, \hat{C}_{i_{d+1}} \quad \text{y} \quad \hat{C}_{a,1}^0, \dots, \hat{C}_{a,d}^0, \hat{C}_{a,d+1}^0;$$

y en la última bandera inciden los ciclos

$$\hat{C}_{b,1}^{2s}, \dots, \hat{C}_{b,d}^{2s}, \hat{C}_{b,d+1}^{2s} \quad \text{y} \quad \hat{C}_{j_1}, \dots, \hat{C}_{j_d}, \hat{C}_{j_{d+1}};$$

Por la Proposición 3.3.4, las bases correspondientes a los dos ciclos que inciden en cada bandera completa tienen la misma orientación. Por la Proposición 3.3.6, los ciclos que inciden en banderas consecutivas de la cadena tienen distinta orientación; como la cadena tiene longitud par, se tiene finalmente que los ciclos que inciden en las banderas  $\hat{B}^0$  y  $\hat{B}^{2s}$  tienen la misma orientación. Se tiene por tanto que las bases  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_{d+1}}\}$  y  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_{j_{d+1}}\}$  tienen la misma orientación. □

**Corolario 3.3.8.** Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto de vértices  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$ ; sea  $\hat{P}$  un cono poliedral no degenerado del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ , y sean  $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_r$  los correspondientes vértices de  $\hat{P}$  (recordemos que un vértice  $\hat{V}_i$  es el rayo vectorial sobre el vector  $V_i$ ). Para cada vértice  $\mathcal{V}_i$  de  $\mathcal{P}$  elegimos un ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  que incida en  $\mathcal{V}_i$ , y con la condición además de que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Sea  $v_i := \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})$ , (donde  $\Phi_d$  es el operador de Hodge, ver Sección 1.4). Entonces, existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  positivos tales que

- (a) o bien  $\lambda_i V_i := v_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ ;
- (b) o bien  $\lambda_i V_i := -v_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$

**Nota.** Según el corolario anterior, podemos decir, que los vértices de  $\hat{P}$  son, o bien todos los vectores  $v_i$  (obtenidos con el operador de Hodge, después de orientar convenientemente los ciclos), o bien todos los vectores  $-v_i$  (por otra parte, si los vértices fueran los vectores  $-v_i$  entonces podemos cambiar los ciclos orientados por otros con la orientación contraria, y entonces obtendríamos que los vértices son la imagen por el operador de Hodge de estos nuevos ciclos orientados).

*Demostración:*

Por las propiedades del operador de Hodge, el vector  $v_i := \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})$  es ortogonal a los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$ ; para ver que  $v_i = \lambda_i V_i$ , con  $\lambda_i > 0$ , es suficiente ver que  $f(v_i, e_h) < 0$  para todo  $h$  tal que  $\mathcal{V}_i \notin \mathcal{C}_h$ .

Sea  $\mathcal{V}_j$  otro vértice de  $\mathcal{P}$  y sea  $\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_d}$  un ciclo orientado que incide en  $\mathcal{V}_j$  con la misma orientación que  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  y  $v_j = \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d})$  ( $\mathcal{V}_j$  puede ser igual a  $\mathcal{V}_i$ ). Sean  $\mathcal{C}_h$  no incidente en  $\mathcal{V}_i$  y  $\mathcal{C}_k$  no incidente en  $\mathcal{V}_j$ . Entonces, por las propiedades del operador  $\Phi$ , se tiene

$$f(v_i, e_h) = f(\Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}), e_h) = \Phi_{d+1}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_h) = \det E[i_1 \dots i_d h],$$

donde  $E[i_1 \dots i_d h]$  es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_h$ .

De la misma forma,

$$f(v_j, e_k) = \det E[j_1 \dots j_d k].$$

Por la Proposición 3.3.7, las bases  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_h\}$  y  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_k\}$  tienen la misma orientación; por tanto se deduce que  $f(v_i, e_h)f(v_j, e_k) > 0$ . Como consecuencia se tiene que, si  $f(v_i, e_h) < 0$ , entonces se verifica el apartado (a) del enunciado; y si  $f(v_i, e_h) > 0$ , se verifica (b).  $\square$

### 3.4. Caracterización de matrices de Gram de politopos

Recordemos que un cono poliedral  $\hat{P} \subset \mathbf{R}^{d+1}$  no degenerado es el cono sobre un politopo compacto  $P$ , y que entonces el tipo combinatorio de  $\hat{P}$  es por definición el tipo combinatorio de  $P$ .

Nos planteamos el siguiente problema: por una parte tenemos un politopo abstracto  $\mathcal{P}$ ; por otra, tenemos un espacio vectorial geométrico,  $\mathbf{E}_f := (\mathbf{R}^{d+1}, f)$ . Queremos caracterizar las matrices de Gram (respecto del producto escalar  $f$ ) de los conos poliedrales  $\hat{P} \subset \mathbf{E}_f$  del tipo combinatorio de  $\mathcal{P}$ . Denotamos por  $\det f$  al determinante de la matriz de  $f$  respecto de cualquier base ortonormal (este determinante es igual a  $(-1)^q$ , donde  $(p, q)$  es la signatura de  $f$ ). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la base canónica de  $\mathbf{R}^{d+1}$  es una base ortonormal para  $f$  (igual que hemos hecho para los casos esférico e hiperbólico). Como habitualmente, denotaremos por  $F$  a la expresión matricial de  $f$  respecto de esta base, con lo que  $F$  será una matriz diagonal con las entradas de la diagonal iguales a  $\pm 1$ . Cuando hablemos de coordenadas de vectores de  $\mathbf{R}^{d+1}$ , serán también respecto de esta base.

Recordamos la notación para submatrices y menores de una matriz: si  $G$  es una matriz, denotaremos por  $G \begin{bmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s \end{bmatrix}$  a la submatriz de  $G$  que se obtiene tomando las filas  $i_1 \dots i_r$  y las columnas  $j_1 \dots j_s$ , y, para submatrices cuadradas, denotaremos por  $G \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$  al determinante de dicha matriz. Para abreviar, denotaremos por  $G_{i_1, \dots, i_r}$  al determinante de la matriz  $G \begin{bmatrix} i_1 \dots i_r \\ i_1 \dots i_r \end{bmatrix}$ .

Diremos que un cono poliedral *realiza* un politopo abstracto  $\mathcal{P}$  y una matriz  $G$  si tiene el mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  y su matriz de Gram es  $G$ ,

**Teorema 3.4.1.** (Caracterización de matrices de Gram de politopos) *Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto con  $n$  caras (de codimensión 1) ordenadas,  $C_1, \dots, C_n$ . Sea  $G = (g_{ij})$  una matriz simétrica de orden  $n$ , con  $g_{ii} = \pm 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , de rango  $d + 1$  y signatura  $(p, d + 1 - p)$ . Entonces existe un cono poliedral  $\hat{P} \subset (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  no degenerado y con interior no vacío que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$  si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

- (R) (Rango) *Dados un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y todas las caras  $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$  que inciden en él, la submatriz  $G \begin{bmatrix} i_1 \dots i_m \\ i_1 \dots i_m \end{bmatrix}$  tiene rango menor o igual que  $d$ ;*
- ( $P_{d+1}$ ) (Menores principales de orden  $d + 1$ ) *Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d+1}}$  es un ciclo orientado ampliado de  $\mathcal{P}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_{d+1}} \det f > 0$ ;*
- ( $M_{d+1}$ ) (Menores mixtos de orden  $d + 1$ ) *Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}, C_{i_{d+1}}$  y  $C_{j_1}, \dots, C_{j_d}, C_{j_{d+1}}$  son dos ciclos ampliados con la misma orientación, entonces  $\det G \begin{pmatrix} i_1 \dots i_d i_{d+1} \\ j_1 \dots j_d j_{d+1} \end{pmatrix} \det f > 0$ .*

Además, si se dan estas condiciones, el cono poliedral  $\hat{P}$  es único salvo isometrías de  $E_f$ .

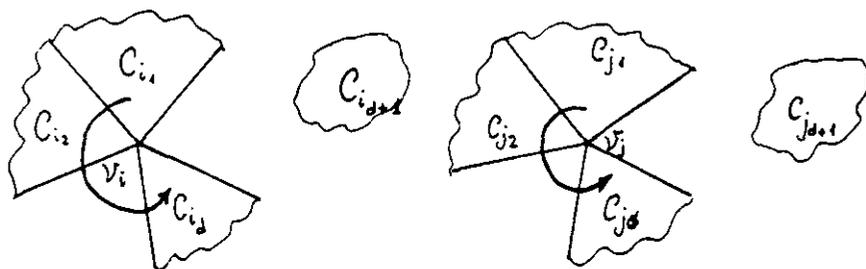


Figura 3.4

**Nota.** La condición de que  $g_{ii} = \pm 1$  se debe a lo siguiente: si una matriz  $G$  tiene alguna entrada de la diagonal nula, entonces corresponde a un cono poliedral en el que alguno de los hiperplanos que lo definen es luz. A un cono poliedral de este tipo no podemos asignarle de forma canónica una matriz de Gram, puesto que alguno de los vectores ortogonales a las caras tiene norma 0 y entonces no se puede normalizar. Por otra parte, dada una matriz simétrica con todas las entradas de la diagonal no nulas, se puede "normalizar", dividiendo la fila y la columna  $i$ -ésimas por  $\sqrt{|g_{ii}|}$ . En los casos en los que estamos más interesados, los politopos hiperbólicos y esféricos, se tiene que los vectores ortogonales a las caras tienen siempre norma positiva.

*Demostración:*

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\hat{P} \subset E_f$  un cono poliedral no degenerado que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$ . Para cada cara  $\hat{C}_i$  de  $\hat{P}$ , consideramos su vector normal exterior,  $e_i$ , de modo que  $G = G(\hat{P}) = (f(e_i, e_j))$ .

Consideremos un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y sean  $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$  todas las caras que inciden en él. Como  $\hat{P}$  es del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ , los hiperplanos  $\hat{H}_{i_1}, \dots, \hat{H}_{i_m}$  se cortan en una recta vectorial, o equivalentemente, los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ , ortogonales a estos hiperplanos generan un subespacio de dimensión  $d$ . Como consecuencia, la submatriz  $G \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ i_1 \dots i_m \end{smallmatrix}$ , que es la matriz de Gram de estos vectores, tiene rango menor o igual que  $d$ . Con esto hemos probado (R).

Veamos ahora ( $P_{d+1}$ ). Sea  $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d+1}}$  un ciclo orientado ampliado de  $\mathcal{P}$ . En este caso, los hiperplanos  $\hat{H}_{i_1}, \dots, \hat{H}_{i_{d+1}}$  se cortan en el origen de  $\mathbf{R}^{d+1}$ , lo que equivale a que sus vectores ortogonales,  $e_{i_1}, \dots, e_{i_{d+1}}$ , son linealmente independientes. Entonces, su matriz de productos escalares,  $G \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_{d+1} \\ i_1 \dots i_{d+1} \end{smallmatrix}$ , tiene signatura igual a la signatura de  $f$ , de donde se deduce en particular que su determinante tiene el mismo signo que el determinante de  $f$ . Por tanto es  $G \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_{d+1} \\ i_1 \dots i_{d+1} \end{smallmatrix} \det f > 0$ .

Finalmente, veamos ( $M_{d+1}$ ). Sean  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}, C_{i_{d+1}}$  y  $C_{j_1}, \dots, C_{j_d}, C_{j_{d+1}}$  dos ciclos

orientados ampliados de  $\mathcal{P}$ , con la misma orientación. Entonces los correspondientes conjuntos de vectores  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_{d+1}}\}$  y  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_{j_{d+1}}\}$  son dos bases de  $\mathbf{R}^{d+1}$ . Si llamamos  $E[i_1 \dots i_r]$  a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ , se tiene

$$\begin{aligned} G \begin{pmatrix} i_1 \dots i_d i_{d+1} \\ j_1 \dots j_d j_{d+1} \end{pmatrix} \det f &= \det(E[i_1 \dots i_d i_{d+1}]^t F E[j_1 \dots j_d j_{d+1}]) \det f = \\ &= (\det f)^2 \det(E[i_1 \dots i_d i_{d+1}]) \det(E[j_1 \dots j_d j_{d+1}]) \end{aligned}$$

Entonces  $\det G \begin{pmatrix} i_1 \dots i_d i_{d+1} \\ j_1 \dots j_d j_{d+1} \end{pmatrix} \det f > 0$  si y sólo si las dos bases anteriores tienen la misma orientación. Esto último es cierto por la Proposición 3.3.7.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora dados un poliedro abstracto  $\mathcal{P}$  y una matriz  $G$  simétrica de orden  $n$ , de rango  $d + 1$  y signatura igual a la signatura de  $f$ , con las entradas de la diagonal iguales a  $\pm 1$  y que verifica las condiciones  $(R)$ ,  $(P_{d+1})$ , y  $(M_{d+1})$ . Tenemos que encontrar un cono poliedral  $\hat{P} \subset \mathbf{E}_f$  que realice  $\mathcal{P}$  y  $G$ .

Como la matriz  $G$  tiene rango  $d + 1$  y la misma signatura que  $f$ , existe una matriz  $\hat{E} \in GL(\mathbf{R}, n)$  tal que  $\hat{E}^t \hat{F} \hat{E} = G$ , donde  $\hat{F}$  es la matriz cuadrada de orden  $n$  cuya primera submatriz principal de orden  $d + 1$  coincide con  $F$  y el resto de las entradas son nulas. Sea  $E$  la submatriz de  $\hat{E}$  formada por las  $d + 1$  primeras filas. Entonces se verifica que  $E^t F E = G$ .

Llamamos  $e_1, \dots, e_n$  a los vectores columna de  $E$ . Sea  $\hat{P} = \hat{P}(e_1, \dots, e_n)$ , es decir,  $\hat{P}$  es la intersección de los semiespacios  $\hat{H}_i^-$  ortogonales exteriores a los vectores  $e_i$ . Por la construcción,  $\hat{P}$  realiza la matriz  $G$ . Como  $\text{rg}(E^t F E) = d + 1$ , se tiene que  $\text{rg} E \geq d + 1$ , y por tanto,  $\text{rg} E = d + 1$ ; se deduce entonces que entre los vectores  $e_1, \dots, e_n$  hay  $d + 1$  linealmente independientes; esto implica que  $\hat{P}$  es no degenerado.

Veamos ahora que  $\hat{P}$  tiene interior no vacío y que es del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ . Utilizaremos para ello la Proposición 3.2.1. Así pues, vamos a ver que se verifican las hipótesis de esta proposición.

En primer lugar, para la hipótesis (a), sea  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  un ciclo orientado de  $\mathcal{P}$  incidente en un vértice  $\mathcal{V}$ . Elegimos una cara  $\mathcal{C}_j$  que no pase por  $\mathcal{V}$ ; por la hipótesis  $(P_{d+1})$ ,  $G_{i_1 \dots i_d j} \neq 0$  y esto implica que los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_j$  son linealmente independientes. Como consecuencia,  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$ .

Se verifica además que, si  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_m}$  son todas las caras que inciden en el vértice  $\mathcal{V}$ , entonces el conjunto de vectores  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$  también tiene rango  $d$ . En efecto, sea  $\mathcal{C}_{i_k}$  otra cara de  $\mathcal{P}$  incidente en  $\mathcal{V}$ ; si  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_k}$  fueran linealmente independientes, su matriz de productos escalares tendría rango  $d + 1$  (pues la forma cuadrática  $f$  es no

degenerada), en contradicción con la hipótesis (R). Por tanto  $e_{i_k} \in L(e_{i_1}, \dots, e_{i_d})$ , y se concluye finalmente que  $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = L(e_{i_1}, \dots, e_{i_d})$ .

Ahora vamos a escoger un vector  $v \in \mathbf{R}^{d+1}$  para cada vértice  $\mathcal{V}$ . Para ello, para cada vértice  $\mathcal{V}_i$  de  $\mathcal{P}$  elegimos un ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  que incida en el vértice  $\mathcal{V}_i$ , tal que todos estos ciclos orientados tengan la misma orientación. Consideramos ahora el vector  $v_i$  asociado al vértice  $\mathcal{V}_i$  definido como

$$v_i := \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}),$$

donde  $\Phi_d$  es el operador de Hodge (ver Sección 1.4). El vector  $v_i$  que hemos elegido es único, en el sentido de que si  $\mathcal{C}_{l_1}, \dots, \mathcal{C}_{l_d}$  es otro ciclo que incide en  $\mathcal{V}_i$  con la misma orientación que  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$ , entonces se tiene que

$$\Phi_d(e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_d}) = \lambda v_i, \quad \text{con } \lambda > 0 \quad (1)$$

La razón de esto es que los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  y  $e_{l_1}, \dots, e_{l_d}$  generan el mismo espacio vectorial (por el párrafo anterior) y además son bases con la misma orientación en este espacio, por corresponder a ciclos con la misma orientación (ver demostración de la Proposición 3.3.4). Esto quiere decir que  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} = \lambda e_{l_1} \wedge \dots \wedge e_{l_d}$ , con  $\lambda > 0$  ( $\lambda$  es igual al determinante del cambio de las dos bases). Por tanto se tiene (1). Por supuesto, por las propiedades de  $\Phi$ , el vector  $v_i$  es ortogonal a los vectores  $e_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, d$ , donde  $\mathcal{C}_{i_k}$  son todas las caras que inciden en  $\mathcal{V}_i$ .

Vamos a ver que los vectores  $v_i$  que hemos elegido verifican las hipótesis (b) y (c) de la Proposición 3.2.1. Así pues, sea  $L_1 = (f(e_h, v_i))$  la matriz de productos escalares de los vectores  $e_1, \dots, e_n$  y los vectores  $v_1, \dots, v_r$ , es decir, si  $V$  es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores  $v_i$ , entonces  $L_1 = E^t F V$ . Tenemos que ver que esta matriz es del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  y que es totalmente no positiva.

Supongamos primero que la entrada  $(h, i)$  de la matriz  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  es cero; esto equivale a que  $\mathcal{V}_i \in \mathcal{C}_h$ . Por lo que hemos visto arriba, se tiene que  $f(e_h, v_i) = 0$ , es decir, la entrada  $(h, i)$  de la matriz  $L_1$  es igual a 0.

Recíprocamente, supongamos que la entrada  $(h, i)$  de la matriz  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  es no nula; esto significa que  $\mathcal{V}_i \notin \mathcal{C}_h$ , y debemos probar que entonces es  $f(e_h, v_i) \neq 0$ . Para verlo, consideramos un ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  de  $\mathcal{P}$  que incida en  $\mathcal{V}_i$ . Puesto que  $\mathcal{C}_h$  no incide en el vértice anterior,  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}, \mathcal{C}_h$  es un ciclo orientado ampliado, y por la hipótesis ( $P_{d+1}$ ) se tiene que  $G_{i_1 \dots i_d h} \neq 0$ ; esto implica que los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_h$  son linealmente independientes; como además, por construcción,  $f(e_{i_k}, v_i) = 0$  ( $k = 1, \dots, d$ ), debe ocurrir que  $f(e_h, v_i) \neq 0$ . Con esto hemos visto que las matrices  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  y

$L_1$  son del mismo tipo combinatorio, es decir, se verifica la hipótesis (b) de la Proposición 3.2.1.

Finalmente, veamos que se verifica la hipótesis (c). Consideramos dos entradas  $L_1(h, i) = f(e_h, v_i)$  y  $L_1(k, j) = f(e_k, v_j)$  no nulas de  $L_1$  y vamos a probar que tienen el mismo signo, es decir,  $f(e_h, v_i)f(e_k, v_j) > 0$ .

Por las propiedades del operador de Hodge (Lema 1.4.1(a)) se tiene

$$\begin{aligned} f(e_h, v_i) &= f(e_h, \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})) = \Phi_{d+1}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_h) \\ f(e_k, v_j) &= f(e_k, \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d})) = \Phi_{d+1}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d} \wedge e_k) \end{aligned}$$

Además, también vimos que

$$\Phi_{d+1}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_h) = \det E[i_1 \dots i_d h],$$

donde  $E[i_1 \dots i_d h]$  es la matriz de coordenadas de los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_h$ . Análogamente, si  $E[j_1 \dots j_d k]$  es la matriz de coordenadas de los vectores  $e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_k$ , se tiene

$$\Phi_{d+1}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d} \wedge e_k) = \det E[j_1 \dots j_d k].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(e_h, v_i)f(e_k, v_j) &= \det E[i_1 \dots i_d h] \det E[j_1 \dots j_d k] = \\ &= \det E[i_1 \dots i_d h] (\det f) \det E[j_1 \dots j_d k] (\det f) = G_{\substack{i_1 \dots i_d h \\ j_1 \dots j_d k}} (\det f) \end{aligned}$$

Puesto que hemos elegido los ciclos  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  y  $\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_d}$  con la misma orientación, por la hipótesis  $(M_{d+1})$ , se tiene entonces que  $G_{\substack{i_1 \dots i_d h \\ j_1 \dots j_d k}} (\det f) > 0$ .

Finalmente, si ocurre que todas las entradas no nulas de  $L_1$  son positivas, los vectores  $-v_i$  son los que verifican las hipótesis de la Proposición 3.2.1.

La unicidad se obtiene del Lema 1.1.1. □

Como casos particulares del teorema anterior, obtenemos la caracterización de las matrices de Gram de polítopos de un tipo combinatorio dado, en el espacio esférico o hiperbólico. También se obtiene fácilmente una caracterización de las matrices de Gram de polítopos compactos hiperbólicos de un tipo combinatorio dado.

**Teorema 3.4.2.** (Caracterización de matrices de Gram de polítopos esféricos) *Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto con  $n$  caras (de codimensión 1) numeradas,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ . Sea*

$G = (g_{ij})$  una matriz simétrica de orden  $n$ , con  $g_{ii} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y de rango  $d + 1$ . Entonces existe un politopo  $P \subset \mathbf{S}^d$  que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$  si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- (R) (Rango) Dados un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y todas las caras  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_m}$  que inciden en él, la submatriz  $G \begin{bmatrix} i_1 \dots i_m \\ i_1 \dots i_m \end{bmatrix}$  tiene rango  $d$ ;
- ( $P_s$ ) (Menores principales de orden  $s$ ) Si  $2 \leq s \leq d$ ,  $\mathcal{F}_{d-s}$  una  $(d - s)$ -cara de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_s}$  es un ciclo orientado truncado que incide en  $\mathcal{F}_{d-s}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_s} > 0$ ;
- ( $P_{d+1}$ ) (Menores principales de orden  $d + 1$ ) Si  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_{d+1}}$  es un ciclo orientado ampliado de  $\mathcal{P}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_{d+1}} > 0$ ;
- ( $M_{d+1}$ ) (Menores mixtos de orden  $d + 1$ ) Si  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}, \mathcal{C}_{i_{d+1}}$  y  $\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_d}, \mathcal{C}_{j_{d+1}}$  son dos ciclos ampliados con la misma orientación, entonces  $G \begin{pmatrix} i_1 \dots i_d i_{d+1} \\ j_1 \dots j_d j_{d+1} \end{pmatrix} > 0$ .

Además el politopo  $P$  es único salvo isometría esférica.

**Observación.** En la demostración del teorema, quedará claro que la condición ( $P_s$ ) es equivalente a:

- ( $P_d$ ) Para todo ciclo orientado  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  de  $\mathcal{P}$  la submatriz  $G \begin{bmatrix} i_1 \dots i_d \\ i_1 \dots i_d \end{bmatrix}$  es definida positiva.

*Demostración:*

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe  $P \subset \mathbf{S}^d$  que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$ . Esto es lo mismo que decir que el cono poliedral  $\hat{P} \subset (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  verifica lo mismo, donde ahora  $f$  es el producto escalar euclídeo. La restricción de una forma cuadrática definida positiva a cualquier subespacio es también una forma definida positiva; por tanto se tienen trivialmente las condiciones ( $P_s$ ), ó ( $P_d$ ). La condición (R) se obtiene del Teorema 3.4.1 y de que  $f$  es definida; las condiciones ( $P_{d+1}$ ) y ( $M_{d+1}$ ) se obtienen del Teorema 3.4.1.

( $\Leftarrow$ ) Las condiciones ( $P_s$ ) (o bien ( $P_d$ )) y ( $P_{d+1}$ ) implican que la signatura de la matriz  $G$  es  $(d + 1, 0)$ . Entonces se verifican las condiciones del Teorema 3.4.1, y se tiene el resultado. □

**Teorema 3.4.3.** (Caracterización de matrices de Gram de politopos hiperbólicos) Sea  $\mathcal{P}$  un  $d$ -politopo abstracto con  $n$  caras (de codimensión 1) numeradas,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ . Sea  $G = (g_{ij})$  una matriz simétrica de orden  $n$ , con  $g_{ii} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y de rango  $d + 1$ . Sea  $\mathcal{W}$  un subconjunto no vacío del conjunto de vértices de  $\mathcal{P}$ . Entonces existe un politopo  $P \subset \mathbf{H}^d$  que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$ , y tal que los vértices correspondientes a los vértices de  $\mathcal{W}$  son finitos, si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- (R) (Rango) Dados un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y todas las caras  $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$  que inciden en él, la submatriz  $G_{[i_1 \dots i_m]}^{[i_1 \dots i_m]}$  tiene rango menor o igual que  $d$ ;
- ( $P_s$ ) (Menores principales de orden  $s$ ) Si  $2 \leq s \leq d$ ,  $\mathcal{F}_{d-s}$  es una  $(d-s)$ -cara de  $\mathcal{P}$  que incide en un vértice de  $\mathcal{W}$  y  $C_{i_1}, \dots, C_{i_s}$  es un ciclo orientado truncado que incide en  $\mathcal{F}_{d-s}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_s} > 0$ ;
- ( $P_{d+1}$ ) (Menores principales de orden  $d+1$ ) Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d+1}}$  es un ciclo orientado ampliado de  $\mathcal{P}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_{d+1}} < 0$ ;
- ( $M_d$ ) (Menores mixtos de orden  $d$ ) Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}$  y  $C_{j_1}, \dots, C_{j_d}$  son dos ciclos de caras de  $\mathcal{P}$  con la misma orientación que inciden en vértices de  $\mathcal{W}$ , entonces  $G_{i_1 \dots i_d} > 0$ ;
- ( $M_{d+1}$ ) (Menores mixtos de orden  $d+1$ ) Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}, C_{i_{d+1}}$  y  $C_{j_1}, \dots, C_{j_d}, C_{j_{d+1}}$  son dos ciclos ampliados con la misma orientación, entonces  $G_{\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_d i_{d+1} \\ j_1 \dots j_d j_{d+1} \end{smallmatrix}} < 0$ .

**Observación.** La condición ( $P_s$ ) es equivalente a la condición ( $P_d$ ) siguiente:

- ( $P_d$ ) Si  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}$  es un ciclo orientado que incide en un vértice de  $\mathcal{W}$ , entonces la submatriz  $G_{[i_1 \dots i_d]}^{[i_1 \dots i_d]}$  es definida positiva.

Estas condiciones nos están diciendo que la matriz correspondiente a la figura verticilar de un vértice de  $\mathcal{W}$  es definida positiva, y por tanto esta figura verticilar es un simplex esférico, como corresponde a los puntos finitos del espacio hiperbólico.

**Observación.** Por el hecho de que el conjunto  $\mathcal{W}$  del enunciado sea no vacío no necesitamos la hipótesis general del Teorema 3.4.1 de que la signatura de  $G$  sea  $(d, 1)$ , ya que esto lo deducimos de la nueva hipótesis  $P_s$ . Si  $\mathcal{W}$  es vacío, aplicamos directamente el Teorema 3.4.1. Si el conjunto  $\mathcal{W}$  es el conjunto de todos los vértices de  $\mathcal{P}$ , estamos dando un enunciado para politopos compactos.

*Demostración:*

( $\Rightarrow$ ) Sea  $P \subset \mathbf{H}^d$  un  $d$ -politopo que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$  y con los vértices correspondientes a los vértices de  $\mathcal{W}$  finitos. Para cada cara  $C_i$  de  $P$ , consideramos su vector ortogonal unitario exterior,  $e_i$  (que está en la esfera de De Sitter). Por el Teorema 3.4.1, se verifican ( $R$ ), ( $P_{d+1}$ ) y ( $M_{d+1}$ ).

Veamos ahora ( $P_s$ ). Sea  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}$  un ciclo orientado que incide en un vértice  $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$ . Por el Lema 3.1.1, los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  son linealmente independientes. Como el correspondiente vértice  $V$  de  $P$  es finito (por hipótesis), la forma cuadrática  $f$  restringida al hiperplano ortogonal de  $V$  es definida positiva, y por tanto también se tiene que la submatriz  $G_{[i_1 \dots i_d]}^{[i_1 \dots i_d]}$  es definida positiva (por tanto tenemos ( $P_d$ )). Como consecuencia, todos sus menores principales son positivos, con lo que tenemos ( $P_s$ ).

Finalmente, veamos que se verifica ( $M_d$ ). Sean entonces  $C_{i_1}, \dots, C_{i_d}$  y  $C_{j_1}, \dots, C_{j_d}$  dos ciclos de caras de  $\mathcal{P}$  con la misma orientación que inciden en dos vértices  $\mathcal{V}_i$  y  $\mathcal{V}_j$

de  $\mathcal{W}$ . Sean  $V_i$  y  $V_j$  los vértices de  $\hat{P}$  correspondientes a  $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$ . Por el Corolario 3.3.8, se tiene que existen  $\lambda_i > 0$  y  $\lambda_j > 0$  tales que

$$\text{o bien } V_i = \lambda_i \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}) \text{ y } V_j = \lambda_j \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d})$$

$$\text{o bien } V_i = -\lambda_i \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}) \text{ y } V_j = -\lambda_j \Phi_d(e_{j_1}, \dots, e_{j_d}).$$

En cualquier caso, aplicando el Lema 1.4.1(c),

$$\begin{aligned} f(V_i, V_j) &= \lambda_i \lambda_j f(\Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}), \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d})) = \\ &= \lambda_i \lambda_j (\det f) (\wedge^d f)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d}) = \\ &= \lambda_i \lambda_j (\det f) G_{\substack{i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d}} = -\lambda_i \lambda_j G_{\substack{i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d}} \end{aligned}$$

Ahora bien, por hipótesis,  $V_i$  y  $V_j$  son finitos, luego  $f(V_i, V_j) < 0$ . Como  $\lambda_i \lambda_j > 0$ , se tiene que  $G_{\substack{i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d}} > 0$ , con lo que probamos  $(M_d)$ .

( $\Leftarrow$ ) Veamos primero que la matriz  $G$  tiene signatura  $(d, 1)$ . Sea  $\mathcal{V}$  un vértice de  $\mathcal{W}$  y sea  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}, \mathcal{C}_{i_{d+1}}$  un ciclo orientado que incide en  $\mathcal{V}$ . Estudiando los signos de los menores principales encajados de  $G$  tenemos:

- $G_{i_1} = 1 > 0$ ;
- $G_{i_1 \dots i_s} > 0$ , para todo  $s = 2, \dots, d$ , por la hipótesis  $(P_s)$ ;
- $G_{i_1 \dots i_d i_{d+1}} < 0$ , por la hipótesis  $(P_{d+1})$ ;

Como el rango de  $G$  es  $d + 1$ , se deduce que la signatura de  $G$ , es la deseada. Entonces, por el Teorema 3.4.1, existe un cono poliedral no degenerado y con interior no vacío  $\hat{P} \subset (\mathbf{R}^{d+1}, f)$ , con el mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  y cuya matriz de Gram es  $G$ . En esta demostración encontrábamos vectores  $v_1, \dots, v_r$ , que eran los vértices de  $\hat{P}$ , y por tanto verificaban que la matriz  $L_1 = (f(e_j, v_i))$  era del mismo tipo combinatorio que la matriz del tipo combinatorio de  $\mathcal{P}$  y totalmente no positiva. Para terminar la demostración debemos ver que los vértices  $v_i$  correspondientes a todos los vértices  $\mathcal{V}_i \in \mathcal{W}$  tienen norma negativa y cortan todos a la misma hoja del hiperboloide; es decir, hay que ver que  $f(v_i, v_j) < 0$  para todos los  $i, j$  tales que  $\mathcal{V}_i$  y  $\mathcal{V}_j$  estén en  $\mathcal{W}$  (considerando también  $i = j$ ).

Sean pues  $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j \in \mathcal{W}$  y sean como siempre  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_d}$  y  $\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_d}$  dos ciclos con la misma orientación que inciden en estos vértices. Por el Corolario 3.3.8, se tiene que

$$\text{o bien } v_i = \lambda_i \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}) \text{ y } v_j = \lambda_j \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d}), \text{ con } \lambda_i, \lambda_j > 0;$$

$$\text{o bien } v_i = -\lambda_i \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}) \text{ y } -v_j = \lambda_j \Phi_d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d}), \text{ con } \lambda_i, \lambda_j > 0.$$

En cualquier caso, e igual que en la demostración de la condición necesaria, se tiene que

$$f(v_i, v_j) = -\lambda_i \lambda_j G_{\substack{i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d}}$$

Ahora, por la hipótesis  $(M_d)$  (esta hipótesis equivale a  $(P_d)$  si hemos tomado los dos vértices y los ciclos que inciden en ellos iguales) se tiene que  $G_{\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d \end{smallmatrix}} > 0$ . Como  $\lambda_i \lambda_j > 0$ , se tiene por tanto  $f(v_i, v_j) < 0$ , de donde se deduce que los vectores  $v_i$  y  $v_j$  generan rayos vectoriales que cortan a la misma hoja del hiperboloide  $f^{-1}(-1)$ , con lo que terminamos la demostración. □

**Nota.** Se puede ver que el teorema para símplexes (2.1.1) es un caso particular de este teorema, pues las condiciones sobre los signos de los adjuntos de la matriz de Gram de un símplex conciden con las condiciones  $(M_d)$ .

Finalmente, vamos a dar el enunciado explícito para poliedros (es decir, dimensión 3) compactos hiperbólicos. Utilizaremos este teorema para los ejemplos del Capítulo 4.

**Teorema 3.4.4.** (Caracterización de matrices de Gram de poliedros compactos hiperbólicos) *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro abstracto con  $n$  caras ordenadas  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ . Sea  $G = (g_{ij})$  una matriz simétrica de orden  $n$ , de rango 4, y tal que  $g_{ii} = 1$  y si  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$  son caras adyacentes de  $\mathcal{P}$ , entonces  $-1 < g_{ij} < 1$ . Entonces existe un poliedro  $P \in \mathbf{H}^3$  compacto que realiza  $\mathcal{P}$  y  $G$  si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

- (R) *Dados un vértice cualquiera de  $\mathcal{P}$  y las caras  $\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_m}$  que inciden en él, la submatriz  $G_{\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ i_1 \dots i_m \end{smallmatrix}}$  tiene rango 3;*
- (P<sub>3</sub>) *Si  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$  son caras de  $\mathcal{P}$  que inciden en un vértice, entonces  $G_{ijk} > 0$ ;*
- (P<sub>4</sub>) *Si  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$  son caras de  $\mathcal{P}$  incidentes en un vértice, y  $\mathcal{C}_l$  otra cara que no incide en ese vértice, entonces  $G_{ijkl} < 0$ ;*
- (M<sub>3</sub>) *si  $\mathcal{C}_{i_1}, \mathcal{C}_{i_2}, \mathcal{C}_{i_3}$  y  $\mathcal{C}_{j_1}, \mathcal{C}_{j_2}, \mathcal{C}_{j_3}$  son dos ciclos de caras de  $\mathcal{P}$  con la misma orientación, entonces  $G_{\begin{smallmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ j_1 j_2 j_3 \end{smallmatrix}} > 0$ ;*
- (M<sub>4</sub>) *Si  $\mathcal{C}_{i_1}, \mathcal{C}_{i_2}, \mathcal{C}_{i_3}$  y  $\mathcal{C}_{j_1}, \mathcal{C}_{j_2}, \mathcal{C}_{j_3}$  son dos ciclos con la misma orientación,  $\mathcal{C}_{i_4}$  es una cara que no incide con el primer ciclo, y  $\mathcal{C}_{j_4}$  una cara que no incide con el segundo, entonces  $G_{\begin{smallmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 \\ j_1 j_2 j_3 j_4 \end{smallmatrix}} < 0$ .*

## Apéndice C: Descripción del tipo combinatorio de conos polidrales

Sea  $E_f = (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  un espacio geométrico. En esta sección vamos a considerar un cono polidral  $\hat{P}$ , definido a partir de los vectores ortogonales a sus caras, es decir  $\hat{P} = \hat{P}(e_1, \dots, e_n)$ , o bien definido a partir de su matriz de Gram, es decir,  $\hat{P} = \hat{P}(G)$ .

En ambos casos vamos a estudiar el tipo combinatorio de  $\hat{P}$ . La forma de describir el tipo combinatorio será:

- (I) dar todos los vértices;
- (II) dar todas las caras de codimensión 1;
- (III) dar las relaciones de incidencia entre vértices y caras de codimensión 1 (por ejemplo la matriz del tipo combinatorio de  $\hat{P}$ ).

### Descripción de un cono poliedral a partir de sus caras

Sean  $e_1, \dots, e_n \in \mathbf{R}^{d+1}$ . Consideramos el cono poliedral

$$\hat{P} = \hat{P}(e_1, \dots, e_n) = \bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$$

donde recordamos que los semiespacios  $\hat{H}_i^-$  vienen dados como

$$\hat{H}_i^- = \{v \in \mathbf{R}^{d+1} \mid f(v, e_i) \leq 0\}.$$

Supondremos siempre que el cono poliedral  $\hat{P}$  es no degenerado, es decir, el conjunto de vectores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tiene rango  $d + 1$  (si  $\hat{P}$  es degenerado, entonces, por el Lema 1.3.3, podemos considerar el cono poliedral  $\tilde{P} = \hat{P} \cap K$  donde  $K$  es un subespacio de  $\mathbf{R}^{d+1}$  complementario a  $\bigcap_{i=1}^n \hat{H}_i^-$  y  $\tilde{P}$  es ya no degenerado).

Para abreviar, en lo que sigue de esta sección, denotaremos  $W := \mathbf{R}^{d+1}$ . Denotaremos por  $E$  a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores  $e_1, \dots, e_n$  (en la base canónica de  $\mathbf{R}^{d+1}$ ) y por  $E[i_1 \dots i_{d+1}]$  a la submatriz cuadrada de  $E$  formada por las filas  $i_1 \dots i_{d+1}$  de  $E$ .

#### (I) Vértices

Consideramos todas las posibles combinaciones de  $d$  elementos entre los  $n$  vectores  $e_1, \dots, e_n$ . Para cada elección de  $d$  vectores,  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  (fijado un orden cualquiera entre ellos) consideramos el vector  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \in \wedge^d W$  y su imagen por el operador de Hodge

$$v_{i_1 \dots i_d} := \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}).$$

Sea  $M$  la matriz de dimensión  $n \times \binom{n}{d}$  de productos escalares de los vectores  $e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) y los vectores  $v_{i_1 \dots i_d}$ , es decir,

$$M = (f(e_j, v_{i_1 \dots i_d})).$$

Las entradas de  $M$  son de la forma (utilizando las propiedades de  $\Phi$ )

$$\begin{aligned} f(e_j, v_{i_1 \dots i_d}) &= f(e_j, \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})) = \\ &= \Phi_{d+1}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \wedge e_j) = \det E[i_1 \dots i_d j] \end{aligned}$$

Por ser  $\hat{P}$  no degenerado, la matriz  $M$  tiene alguna entrada no nula.

Observamos que  $v_{i_1 \dots i_d} = 0$  si y sólo si  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} = 0$  si y sólo si los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$  son linealmente dependientes. Esto equivale también a que la columna de  $M$  correspondiente al vector  $v_{i_1 \dots i_d}$  sea idénticamente nula.

Se puede ver fácilmente cuáles de estos vectores van a ser vértices de  $\hat{P}$ :

**Lema C.1.** (Vértices) *La columna  $M_{i_1 \dots i_d}$  correspondiente al vector  $v_{i_1 \dots i_d}$  determina un vértice de  $\hat{P}(e_1, \dots, e_n)$  si y sólo si no es idénticamente nula y todas las entradas no nulas tienen el mismo signo. Si el signo de las entradas no nulas es negativo, el vértice es  $v_{i_1 \dots i_d}$ , y si este signo es positivo, el vértice es  $-v_{i_1 \dots i_d}$ .*

*Demostración:*

Podemos suponer que  $v_{i_1 \dots i_d} \neq 0$ . El vector  $v_{i_1 \dots i_d}$  es ortogonal a  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$ , y como estos vectores son linealmente independientes, se tiene que  $L(v_{i_1 \dots i_d}) = \hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$ . Entonces, por el Lema 1.3.4, el vector  $v_{i_1 \dots i_d}$  es un vértice de  $\hat{P}$  si y sólo si  $f(e_j, v_{i_1 \dots i_d}) \leq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , equivalentemente, si todas las entradas no nulas de la fila  $M_{i_1 \dots i_d}$  son negativas. Si el signo de todas estas entradas es positivo, entonces  $-v_{i_1 \dots i_d}$  es vértice de  $\hat{P}$ . □

Puede ocurrir que dos vectores  $v_{i_1 \dots i_d}$  y  $v_{j_1 \dots j_d}$  verifiquen las condiciones del lema anterior (y por tanto sean vértices), pero sean vectores proporcionales, es decir, definan el mismo vértice de  $\hat{P}$  (recordamos que un vértice de un cono poliedral no degenerado es un rayo vectorial, y que, con abuso de notación, estamos llamando también *vértice* a cualquiera de los vectores que generan este rayo). Esto se detecta fácilmente, pues  $v_{i_1 \dots i_d}$  y  $v_{j_1 \dots j_d}$  definen el mismo vértice si y sólo si las dos columnas correspondientes de la matriz  $M$  tienen las mismas entradas nulas.

De esta forma hemos encontrado todos los vértices de  $\hat{P}$ ; si una columna  $M_{i_1 \dots i_d}$  tenía todas las entradas no nulas positivas, en vez de tomar el vector  $-v_{i_1 \dots i_d}$ , cambiamos la orientación del ciclo, es decir, tomamos por ejemplo el vector  $v_{i_2 i_1 \dots i_d}$ .

**Notación.** Sea  $M_0$  la submatriz que consiste en elegir una columna de  $M$  por cada vértice distinto de  $\hat{P}$ .

Una vez conocidos los vértices, podemos estudiar si el cono poliedral tiene interior vacío y en ese caso para qué valor de  $s$  se reduce a una  $s$ -cara. Utilizando el Lema 1.3.1, se obtiene trivialmente el siguiente resultado:

**Lema C.2.** (Conos poliedrales con interior vacío)

- (a) *El cono poliedral  $\hat{P}$  tiene interior vacío si y sólo si alguna fila de  $M_0$  tiene todas las entradas nulas (esta fila corresponde a un hiperplano que contiene a todos los vértices).*
- (b) *Supongamos que  $i_1, \dots, i_t$  son todas las filas de  $M_0$  que tienen todas las entradas nulas. Entonces  $\hat{P}$  se reduce a una  $s$ -cara donde  $s = d - \text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ .  $\square$*

### (II) Caras de codimensión 1

Supongamos que  $\hat{P}$  tiene interior no vacío. Queremos ver cuáles de los hiperplanos  $\hat{H}_i$  definen una cara de codimensión 1, es decir, cuáles de estos hiperplanos no son superfluos. Esto es fácil, ahora que ya conocemos todos los vértices del cono poliedral; en concreto, un hiperplano  $\hat{H}_i$  determina una cara de codimensión 1 si y sólo si los vértices contenidos en  $\hat{H}_i$  no están contenidos en ningún  $\hat{H}_j$  con  $j \neq i$ . Esta información se puede ver mirando las entradas nulas de cada fila de  $M_0$ .

### (III) Incidencias

**Notación.** Sea  $M_1$  la submatriz de  $M_0$  que consiste en elegir una fila por cada cara de codimensión 1 de  $\hat{P}$ .

Entonces la matriz  $M_1$  determina las incidencias entre los vértices y las caras de codimensión 1 de  $\hat{P}$ .

### Descripción de un cono poliedral a partir de su matriz de Gram

Consideremos ahora dada una matriz  $G$  simétrica de orden  $n$ , rango  $d+1$  y signatura la de  $f$ . Entonces existen  $n$  vectores  $e_1, \dots, e_n \in E_f = (\mathbf{R}^{d+1}, f)$  cuya matriz de Gram es la matriz  $G$ ; es decir,  $G = (f(e_i, e_j)) = G(e_1, \dots, e_n)$ . Queremos describir el tipo combinatorio del cono poliedral  $\hat{P} = \hat{P}(G) = \hat{P}(e_1, \dots, e_n)$ , en términos de la matriz  $G$ . Supondremos que la base canónica de  $\mathbf{R}^{d+1}$  es ortonormal para  $f$ , y denotamos por  $F$  a la expresión matricial de  $f$  en esta base.

En primer lugar observamos que el cono poliedral  $\hat{P}$  es no degenerado por ser la matriz  $G$  de rango  $d+1$ .

### (I) Vértices de $\hat{P}(G)$

Dados  $d$  índices  $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ , estudiamos si la intersección  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$  determina un vértice de  $\hat{P}(G)$ . Para ello, utilizamos la matriz  $G\|i_1 \dots i_d\|$  de orden  $n \times n$  que se forma orlando el menor principal  $G\begin{pmatrix} i_1 \dots i_d \\ i_1 \dots i_d \end{pmatrix}$  con una fila y columna de  $G$ , es decir,

$$G\|i_1 \dots i_d\| := \left( G\begin{pmatrix} i_1 \dots i_d j \\ i_1 \dots i_d k \end{pmatrix} \right)_{j,k}$$

La entrada  $(j, k)$  de la matriz anterior es

$$G\begin{pmatrix} i_1 \dots i_d j \\ i_1 \dots i_d k \end{pmatrix} = \det(E[i_1 \dots i_d j]^t F E[i_1 \dots i_d k])$$

**Lema C.3.** (Vértices) Sea  $\{i_1, \dots, i_d\} \subset X$ . Entonces

- (a)  $\dim(\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}) = 1$  si y sólo si  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$  si y sólo si la matriz  $G\|i_1 \dots i_d\|$  tiene alguna entrada no nula;
- (b) Supongamos que se verifica (a); entonces  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$  determina un vértice de  $\hat{P}(G)$  si y sólo si todas las entradas no nulas de  $G\|i_1 \dots i_d\|$  tienen el mismo signo.

*Demostración:*

Si  $\text{rg}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_d}\} = d$ , como  $\text{rg}\{e_1, \dots, e_n\} = d + 1$ , existe  $j \in X$  tal que los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_j$  son linealmente independientes. En este caso, la entrada  $(j, j)$  de la matriz  $G\|i_1 \dots i_d\|$  es no nula. Recíprocamente, si la entrada  $(j, k)$  de  $G\|i_1 \dots i_d\|$  es no nula, entonces los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_j$  son linealmente independientes, y también lo son los vectores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_k$ . Con esto tenemos (a).

Veamos ahora (b). Consideramos el vector  $v_{i_1 \dots i_d} = \Phi_d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})$ . Por las propiedades de  $\Phi$  (Lema 1.4.1(a)),  $v_{i_1 \dots i_d}$  es ortogonal a  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$ ; como consecuencia,  $v_{i_1 \dots i_d}$  genera la recta vectorial  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$ .

Supongamos que esta recta vectorial contiene un vértice de  $\hat{P}$ ; esto quiere decir que  $f(v_{i_1 \dots i_d}, e_j)f(v_{i_1 \dots i_d}, e_k) > 0$  (para todos los  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $e_j$  y  $e_k$  no dependen linealmente de  $e_{i_1}, \dots, e_{i_d}$ ). Como consecuencia,  $\det E[i_1 \dots i_d j]^t \det E[i_1 \dots i_d k] > 0$  (aplicando de nuevo el Lema 1.4.1(a)), y por tanto la entrada  $(j, k)$  de la matriz  $G\|i_1, \dots, i_d\|$  tiene signo igual al signo de  $\det F$ . Se deduce por tanto que todas las entradas no nulas de esta matriz tienen el mismo signo.

Recíprocamente, si todas las entradas de  $G\|i_1 \dots i_d\|$  tienen el mismo signo, entonces, comparando dos entradas  $(j, k)$  y  $(j, l)$  no nulas, se tiene que  $f(v_{i_1 \dots i_d}, e_k)$  y  $f(v_{i_1 \dots i_d}, e_l)$  tienen el mismo signo. Como consecuencia, por el Lema 1.3.4 se tiene que o bien  $v_{i_1 \dots i_d}$  o bien  $-v_{i_1 \dots i_d}$  es vértice de  $\hat{P}(G)$ .

□

La matriz  $G\|i_1 \dots i_d\|$  es “casi” una submatriz de la matriz de menores de orden  $d + 1$  de  $G$ ; en concreto, si llamamos  $G^*$  a la matriz cuyas entradas son los menores de orden  $d + 1$  de  $G$  que contienen las filas y las columnas  $i_1, \dots, i_d$ , entonces  $G\|i_1 \dots i_d\|$  y  $G^*$  se diferencian en

- el signo de algunas filas y las correspondientes columnas,
- una permutación de las filas y la misma permutación de las columnas.

Como consecuencia, y como el rango de  $G$  es  $d + 1$ , se tiene que  $\text{rg}G^* = 1$ , y también  $\text{rg}G\|i_1 \dots i_d\| = 1$ . Esto nos permite en particular conocer el signo de todas las entradas de  $G\|i_1 \dots i_d\|$  a partir del signo de unas pocas.

## (II) y (III) Caras de codimensión 1 y relaciones de incidencia

Sean  $i_1, \dots, i_d$  tales que  $\hat{H}_{i_1} \cap \dots \cap \hat{H}_{i_d}$  contiene un vértice de  $\hat{P}(G)$ ; es decir, la matriz  $G\|i_1, \dots, i_d\|$  tiene todas las entradas no nulas del mismo signo. Entonces un hiperplano  $\hat{H}_i$  pasa por este vértice si y sólo si la columna  $i$ -ésima de  $G\|i_1, \dots, i_d\|$  es idénticamente nula.

Esto nos da las relaciones de incidencia entre vértices y caras. Finalmente, observamos que  $\hat{H}_i \cap \hat{P}$  es una cara de codimensión 1 si y sólo si el conjunto de vértices que contiene no está estrictamente contenido en ningún otro hiperplano  $\hat{H}_j$ , con  $j \neq i$ .

Con esto hemos descrito el tipo combinatorio del cono poliedral  $\hat{P}(G)$ .

## Capítulo 4:

# Teorema de Andreev para algunos tipos de poliedros

Fijado un tipo combinatorio de politopo,  $\mathcal{P}$ , en el Capítulo 3 hemos descrito el conjunto de matrices que son matrices de Gram de politopos de este tipo combinatorio (en un espacio que pensaremos que es esférico o hiperbólico). Todas estas matrices forman un conjunto  $\mathcal{G}$  en el espacio  $\mathbf{R}^N$  (con  $N = \binom{n}{2}$ , y  $n$  el número de caras del politopo). La matriz de Gram refleja datos métricos del politopo: ángulo (o distancia) entre cada dos hiperplanos que contienen caras del politopo. Si dos caras son adyacentes, este dato es menos el coseno del ángulo diédrico. Por tanto, las coordenadas de  $\mathbf{R}^N$  son de dos tipos:  $N_1$  coordenadas correspondientes a ángulos diédricos, y  $N_2$  correspondientes a pares de caras no adyacentes del politopo.

Dado un punto  $A \in \mathbf{R}^{N_1}$ , existe un politopo con estos ángulos (y del tipo combinatorio dado) si el punto  $A$  está en la proyección del conjunto  $\mathcal{G}$ . Por tanto, el espacio de (cosenos de) ángulos diédricos de politopos de un tipo combinatorio dado es la proyección del conjunto  $\mathcal{G}$  de matrices de Gram sobre el espacio de coordenadas que representan los ángulos diédricos.

El capítulo se desarrolla en torno a dos hechos principales:

(1) Las condiciones del Teorema 3.4.1 (y los siguientes) son igualdades y desigualdades polinómicas en las entradas de la matriz de Gram. Como consecuencia, el conjunto  $\mathcal{G}$  de matrices de Gram es un conjunto semialgebraico real. Entonces, por el Teorema de Tarski-Seidenberg (ver por ejemplo [BR]), su proyección es también un conjunto semialgebraico real. Esto quiere decir que esta proyección, el espacio de ángulos, se puede expresar por medio de igualdades y desigualdades polinómicas en los cosenos de los ángulos diédricos. Para los prismas triangulares damos explícitamente una des-

cripción de este tipo (Sección 4.2). El método de proyección que utilizamos para los ejemplos que hemos estudiado es el de eliminación directa de las incógnitas, despejando y sustituyendo.

(2) Unicidad de la solución. Supongamos dados unos ángulos diédricos tales que existe un politopo con esos ángulos; una pregunta importante es saber si este politopo es único (manteniendo por supuesto el tipo combinatorio). Esto equivale, en el lenguaje anterior, a que el conjunto  $\mathcal{G}$  se proyecte de forma inyectiva. En dimensión 3, por los resultados de Cauchy ([Ca], ver también [HR]), la unicidad es cierta para poliedros trivalentes. Con el estudio que hacemos para descendientes de tetraedros se da en este caso una demostración alternativa de este resultado de unicidad (Proposición 4.3.6).

En los cálculos que haremos utilizamos frecuentemente las identidades de Sylvester. En la Sección 4.1 explicamos algunas relaciones que se obtienen de éstas, y sus significados geométricos. En la Sección 4.2, describimos el espacio de ángulos de prismas triangulares hiperbólicos (compactos o no) y esféricos. Este es un caso sencillo porque se proyecta a un espacio de dimensión una unidad menor. Con esto vemos entonces el teorema de Andreev generalizado para prismas triangulares. En la Sección 4.3, se establece el teorema de Andreev generalizado para descendientes de tetraedros. Damos un método para eliminar las entradas de la matriz de Gram que no corresponden a ángulos diédricos. En estos casos este proceso es sencillo, pues las incógnitas se pueden eliminar sucesivamente mediante polinomios cuadráticos. Finalmente, en la Sección 4.4, se trata el ejemplo del cubo. La combinatoria del cubo, para el problema que estamos tratando, es de naturaleza bien distinta a la de los ejemplos anteriores, ya que las tres entradas de la matriz de Gram que no corresponden a ángulos diédricos ya no se pueden eliminar sucesivamente como en el caso de descendientes de tetraedros. Para este caso mostramos algunos ejemplos.

## 4.1 Lemas técnicos y significados geométricos

Damos aquí algunos lemas que se utilizarán en el resto del capítulo. Estos lemas se deducen principalmente de los productos exteriores del espacio  $(\mathbf{R}^{d+1}, f)$  (ver Sección 1.4) y de las identidades de Sylvester (ver Apéndice A, en el Capítulo 1).

**Nota 4.1.1.** (Interpretación de las condiciones  $(M_d)$  y  $(M_{d+1})$  de los teoremas de caracterización de matrices de Gram del Capítulo 3). Sea  $G$  una matriz simétrica de rango  $d+1$ ; según hemos venido haciendo en el Capítulo 3, podemos interpretar  $G$  como la matriz de productos escalares de  $n$  vectores en un espacio geométrico  $(\mathbf{R}^{d+1}, f)$ , con  $f$  no degenerada.

(a) Los menores de orden  $d+1$  de  $G$  se pueden interpretar como productos escalares de vectores en  $(\wedge^{d+1}\mathbf{R}^{d+1}, \wedge^{d+1}f)$ :

$$G_{\substack{i_1 \dots i_{d+1} \\ j_1 \dots j_{d+1}}} = (\wedge^{d+1}f)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d+1}}, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{d+1}})$$

(ver Sección 1.4). El espacio  $\wedge^{d+1}\mathbf{R}^{d+1}$  tiene dimensión 1 y  $\wedge^{d+1}f$  es no degenerada. Por tanto, el producto escalar de dos vectores es nulo si y sólo si alguno de los dos vectores es el vector 0. Es decir,

$$G_{\substack{i_1 \dots i_{d+1} \\ j_1 \dots j_{d+1}}} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad G_{i_1 \dots i_{d+1}} = 0 \quad \text{ó} \quad G_{j_1 \dots j_{d+1}} = 0$$

Observemos que, para algunos menores particulares, esto también se deduce de la identidad de Sylvester

$$G_{i_1 \dots i_d} G_{i_1 \dots i_d j k} = G_{i_1 \dots i_d j} G_{i_1 \dots i_d k} - G_{\substack{i_1 \dots i_d j \\ i_1 \dots i_d k}}^2$$

pues si  $\text{rg}G = d+1$ , se tiene que  $G_{i_1 \dots i_d j k} = 0$ .

Si pensamos en el caso hiperbólico, el producto escalar  $\wedge^{d+1}f$  es definido negativo. Entonces, la condición  $(M_{d+1})$  del Teorema 3.4.1,  $G_{\substack{i_1 \dots i_{d+1} \\ j_1 \dots j_{d+1}}} < 0$  dice entonces que los vectores  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{d+1}}$  y  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{d+1}}$  tienen norma del mismo signo, es decir, son proporcionales con constante de proporcionalidad positiva. Es decir, la condición  $(M_{d+1})$  equivale a que todos los vectores de  $\wedge^{d+1}\mathbf{R}^{d+1}$  correspondientes a ciclos ampliados con la misma orientación tengan norma del mismo signo. Como consecuencia inmediata, se puede reducir la condición  $(M_{d+1})$ : si en un politopo hay  $R$  ciclos orientados ampliados, entonces para tener  $(M_{d+1})$  es suficiente con calcular  $R-1$  menores mixtos adecuados.

(b) Los menores de orden  $d$  de  $G$  se pueden interpretar como productos escalares de vectores en  $(\wedge^d\mathbf{R}^{d+1}, \wedge^d f)$ :

$$G_{\substack{i_1 \dots i_d \\ j_1 \dots j_d}} = (\wedge^d f)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d})$$

El espacio  $\wedge^d\mathbf{R}^{d+1}$  tiene dimensión  $d$ ; para el caso hiperbólico,  $\wedge^d f$  tiene signatura  $(1, d)$ , es decir, la opuesta del espacio hiperbólico. Podemos entonces pensar en este espacio de forma totalmente análoga a como lo hacíamos con el espacio hiperbólico; por ejemplo, ahora la línea de nivel 1 es un hiperboloide de dos hojas. Si estamos estudiando el caso compacto (Teoremas 3.4.3 y 3.4.4), es decir, queremos que todos los vértices sean finitos, la condición  $(P_d)$  impone la condición de que ciertos vectores de  $\wedge^d\mathbf{R}^{d+1}$  tengan norma positiva, es decir, estén en el hiperboloide de dos hojas. Y la condición  $(M_d)$  impone la condición de que todos estos vectores estén en la misma hoja de este hiperboloide. Como consecuencia inmediata, también podemos reducir la condición  $(M_d)$ , y así, si

el politopo tiene  $S$  ciclos orientados, basta calcular  $S - 1$  menores mixtos adecuados para tener  $(M_d)$ . También utilizaremos este espacio principalmente para probar: si dos menores  $G_{i_1 \dots i_d}$  y  $G_{j_1 \dots j_d}$  de  $G$  son positivos y existe otro menor principal  $G_{k_1 \dots k_d}$  no negativo, entonces se verifica  $G_{i_1 \dots i_d} G_{j_1 \dots j_d} > 0$  (esto se utilizará en el Teorema 4.2.3, aunque daremos también una demostración algebraica).

**Lema 4.1.2.** *Sea  $G$  una matriz real simétrica de orden  $n$ .*

- (a) *Supongamos  $\text{rg}G = d+1$  y supongamos que el menor  $G_{i_1 \dots i_{d+1}}$  es igual a 0. Entonces  $G_{j_1 \dots j_{d+1}} = 0$ , para todo  $j_1, \dots, j_{d+1} \in \{1, \dots, n\}$ .*
- (b) *Si  $\text{rg}G = d + 1$  entonces  $\text{rg}(\wedge^r G) = \binom{d+1}{r}$ , donde  $\wedge^r G$  es la matriz de menores de orden  $r$  de  $G$ .*
- (c) *Si  $\text{rg}G \leq d + 1$  y todos los menores principales de orden  $d + 1$  son iguales a cero, entonces  $\text{rg}G < d + 1$ .*
- (d)  *$\text{rg}G = d + 1$  si y sólo si todos los menores principales de orden mayor que  $d + 1$  son iguales a cero y hay algún menor principal de orden  $d + 1$  distinto de cero.*

*Demostración:*

Si  $G$  tiene rango  $d + 1$ , podemos ver  $G$  como la matriz de productos escalares de  $n$  vectores  $u_1, \dots, u_n$  en el espacio vectorial  $\mathbf{R}^{d+1}$  respecto de un producto escalar  $f$  no degenerado, y tal que entre los  $u_1, \dots, u_n$  hay  $d + 1$  linealmente independientes. Entonces (a) es inmediata, utilizando la Nota 4.1.1(a), porque  $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_{d+1}} = 0$ .

Para (b), se tiene que  $\wedge^r f$  es un producto escalar no degenerado en  $\wedge^r \mathbf{R}^{d+1}$ , y  $\wedge^r G$  es la matriz de productos escalares de los vectores  $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_r}$ , para todo  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ . Puesto que entre los vectores  $u_1, \dots, u_n$  hay una base de  $\mathbf{R}^{d+1}$ , se verifica que entre los vectores  $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_r}$  hay una base de  $\wedge^r \mathbf{R}^{d+1}$ . Entonces el rango de  $\wedge^r G$  es igual a la dimensión de  $\wedge^r \mathbf{R}^{d+1}$ , con lo que se tiene el resultado.

El apartado (c) se obtiene fácilmente a partir de (a) y el (d) a partir de (c).  $\square$

Vamos a utilizar frecuentemente las identidades de Sylvester para obtener relaciones determinantaes entre los menores de las matrices de Gram de poliedros. Utilizaremos esta fórmula principalmente para orlar menores de orden 2 y 3.

Así por ejemplo, si  $G$  es una matriz simétrica de orden 5 (como es la matriz de Gram de un prisma triangular), obtenemos las siguientes fórmulas, que aparecerán en la Sección 4.2 y que resumimos aquí para conveniencia del lector.

**Lema 4.1.3.** *Sea  $G$  una matriz simétrica de orden 5.*

(a) (Identidades de tipo estándar) Orlar un menor de orden 2 en una matriz de orden 4:

$$\begin{aligned} G_{12}G_{1245} &= G_{124}G_{125} - G_{\begin{pmatrix} 124 \\ 125 \end{pmatrix}}^2 \\ G_{12}G_{\begin{pmatrix} 1235 \\ 1234 \end{pmatrix}} &= G_{123}G_{\begin{pmatrix} 125 \\ 124 \end{pmatrix}} - G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 125 \\ 123 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Orlar un menor de orden 3 en una matriz de orden 5:

$$G_{123}G_{12345} = G_{1234}G_{1235} - G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}}^2$$

(b) Sea  $u$  la entrada (4, 5) de la matriz  $G$ ; entonces el discriminante de  $\det G$  respecto de  $u$  es

$$G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}}^2 \Big|_{u=0} + G_{123}(G_{12345}) \Big|_{u=0} = G_{1234}G_{1235}.$$

(c) Modificaciones de una identidad de tipo estándar:

$$-G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{12345} = -G_{1234}G_{\begin{pmatrix} 1235 \\ 1245 \end{pmatrix}} + G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1235 \\ 1234 \end{pmatrix}}$$

(d) Orlar un menor de orden 2 en una matriz de orden 5:

$$\begin{aligned} G_{12}G_{12345} &= G_{123}G_{1245} - G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1235 \\ 1245 \end{pmatrix}} + G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \end{pmatrix}} \\ G_{12}G_{12345} &= -G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1245 \\ 1235 \end{pmatrix}} + G_{124}G_{1235} - G_{\begin{pmatrix} 124 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Si  $\det G = 0$ , entonces

$$2G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 124 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 125 \\ 123 \end{pmatrix}} = -G_{12}G_{123}G_{1245} + G_{125}G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}^2 + G_{124}G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix}}^2$$

(e) Orlar un menor de orden 2 en una matriz de orden 5 con dos filas iguales:

$$G_{123}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \end{pmatrix}} - G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}} + G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{1234} = 0$$

*Demostración:*

(a) Demostramos la tercera igualdad, las otras dos son análogas. Orlando el menor  $G_{123}$  con una fila y una columna de  $G$ , obtenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} G_{1234} & G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}} \\ G_{\begin{pmatrix} 1235 \\ 1234 \end{pmatrix}} & G_{1235} \end{pmatrix}$$

Por la identidad de Sylvester, se tiene que  $\det B = G_{123}\det G$ . Calculando el determinante de  $G$  se tiene la tercera fórmula.

(b) Evaluando la expresión anterior en  $u = 0$ , se obtiene una factorización del discriminante del polinomio en  $u$

$$\det G = -G_{123}u^2 - 2G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1235 \end{smallmatrix}}|_{u=0}u + (G_{12345})|_{u=0}$$

(c) Orlando el menor  $G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}$  en la matriz  $G_{\begin{smallmatrix} 12345 \\ 12435 \end{smallmatrix}}$  (es la matriz  $G$  con algunas columnas cambiadas de orden), por la identidad de Sylvester se tiene

$$G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 12345 \\ 12435 \end{smallmatrix}} = G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1243 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 1235 \\ 1245 \end{smallmatrix}} - G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1245 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 1235 \\ 1243 \end{smallmatrix}}$$

Ahora, cambiando de orden filas y columnas en los menores que aparecen en la expresión anterior, se obtiene la identidad del enunciado.

(d) Si orlamos el menor  $G_{12}$  con una fila y una columna de  $G$ , obtenemos la matriz  $B$

$$B = \begin{pmatrix} G_{123} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}} \\ G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 123 \end{smallmatrix}} & G_{124} & G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 125 \end{smallmatrix}} \\ G_{\begin{smallmatrix} 125 \\ 123 \end{smallmatrix}} & G_{\begin{smallmatrix} 125 \\ 124 \end{smallmatrix}} & G_{125} \end{pmatrix}$$

Por la identidad de Sylvester, se tiene que  $\det B = G_{12}^2 \det G$ . Desarrollando el determinante de  $B$  por la primera columna y aplicando una identidad de Sylvester de tipo estándar a cada adjunto, se tiene

$$G_{12}^2 G_{12345} = G_{123}G_{12}G_{1245} - G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}G_{12}G_{\begin{smallmatrix} 1235 \\ 1245 \end{smallmatrix}} + G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}}G_{12}G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1245 \end{smallmatrix}}$$

Dividiendo por  $G_{12}$  se tiene entonces el resultado.

La segunda igualdad es análoga, desarrollando el determinante de la matriz  $B$  por la segunda columna.

Para la tercera igualdad, desarrollamos el determinante de la matriz  $B$  por la primera fila

$$\begin{aligned} G_{12}^2 G_{12345} &= G_{123}G_{12}G_{1245} - G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 123 \end{smallmatrix}} [G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}G_{125} - G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 125 \\ 124 \end{smallmatrix}}] + \\ &+ G_{\begin{smallmatrix} 125 \\ 123 \end{smallmatrix}} [G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 125 \end{smallmatrix}} - G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}}G_{124}] = \\ &= G_{123}G_{12}G_{1245} - G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}^2 G_{125} + 2G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 123 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}}G_{\begin{smallmatrix} 125 \\ 124 \end{smallmatrix}} - G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}}^2 G_{124} \end{aligned}$$

Como  $G_{12345} = \det G = 0$ , se tiene el resultado.

(e) Consideramos la matriz  $G_{\begin{smallmatrix} 12334 \\ 12345 \end{smallmatrix}}$  (que resulta de sustituir la fila quinta de  $G$  por la fila tercera, con lo que esta matriz tiene dos filas repetidas), y orlamos el menor  $G_{12}$ , con lo que obtenemos de nuevo una matriz con dos filas iguales:

$$B = \begin{pmatrix} G_{123} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}} \\ G_{123} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} & G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 125 \end{smallmatrix}} \\ G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 123 \end{smallmatrix}} & G_{124} & G_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 125 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$$

La matriz  $B$  tiene entonces determinante nulo. Si desarrollamos este determinante por la primera fila, y aplicamos identidades de Sylvester de tipo estándar a los adjuntos de  $B$ , se tiene

$$0 = \det B = G_{123}G_{12}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \end{pmatrix}} - G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{12}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}} + G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{12}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}},$$

y dividiendo por  $G_{12}$ , nos queda

$$0 = G_{123}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \end{pmatrix}} - G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix}}G_{\begin{pmatrix} 1234 \\ 1235 \end{pmatrix}} + G_{\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix}}G_{1234}$$

□

## 4.2 Prismas triangulares

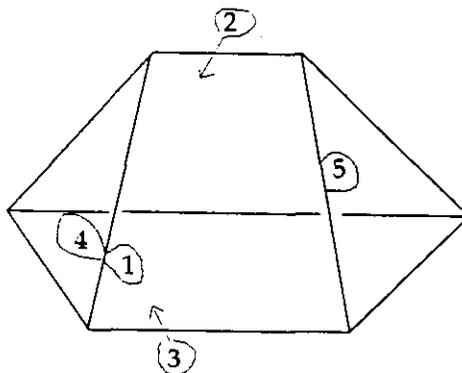
En esta sección vamos a estudiar el espacio de ángulos de los prismas triangulares compactos hiperbólicos, de los prismas triangulares hiperbólicos (no necesariamente compactos) y de los prismas triangulares esféricos.

Consideramos un prisma abstracto  $\mathcal{P}$  con las caras numeradas según la *Figura 4.1*. La numeración de las caras induce una numeración en las aristas: si las caras  $C_i$  y  $C_j$  son adyacentes, denotamos por  $\mathcal{E}_{ij}$  a la arista común.

La matriz de Gram de un prisma triangular en un espacio  $(\mathbf{R}^4, f)$  es de la forma

$$G = G(P) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & u \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & u & 1 \end{pmatrix},$$

*Figura 4.1*



donde  $a_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ , siendo  $\alpha_{ij}$  el ángulo diédrico en la arista  $\mathcal{E}_{ij}$ ; y la entrada  $u$  es el producto escalar de los vectores normales unitarios exteriores a las caras  $C_4$  y  $C_5$  del prisma.

La forma de calcular el espacio de ángulos será: en primer lugar, calcular la entrada  $u$  en función de las demás entradas de la matriz, utilizando para ello la condición de que la matriz  $G$  debe tener rango 4; aplicarle a esta matriz (que ya sólo depende de los ángulos diédricos) el teorema de caracterización de matrices de Gram que corresponda. Las condiciones de los Teoremas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 y 3.4.4 son desigualdades polinómicas en las variables  $a_{ij}$  y  $u$ ; al sustituir  $u$  por su valor en términos de los  $a_{ij}$  ya no tendremos expresiones polinómicas, sino que tendrán cocientes y raíces cuadradas. Finalmente eliminamos los cocientes y las raíces cuadradas, teniendo cuidado con el sentido de las desigualdades.

En los dos lemas siguientes vamos a estudiar los polinomios resultantes de sustituir la incógnita  $u$  por su valor en función de las demás entradas de la matriz en los menores  $G_{125}^{(124)}$  y  $G_{1245}^{(1243)}$ . Estas resultantes se pueden obtener por el método estándar mediante el determinante de la llamada *matriz de Sylvester*. Calcularemos las resultantes de esta forma, y también vamos a hacerlo de forma directa, para ir siguiendo el sentido de las desigualdades. Estos dos lemas son la parte fundamental de los teoremas de esta sección.

**Lema 4.2.1.** (Resultante de  $G_{125}^{(124)}$  y  $\det G$  respecto de  $u$ )

(a) La resultante de  $G_{125}^{(124)}$  y  $\det G$  respecto de  $u$  es el polinomio

$$R_1 := -G_{123}G_{124}G_{125} + G_{12}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{125}G_{1234}$$

(b) Si  $G_{124} > 0$ ,  $G_{125} > 0$  y  $G_{123} < 0$ , entonces  $R_1 < 0$

(c) Si llamamos  $F_1 := G_{12}^2 G_{1234} G_{1235} - G_{125}^{(123)} G_{124}^{(123)^2}$ , entonces  $F_1 = G_{123} R_1$

*Demostración:*

(a) Si expresamos  $G_{125}^{(124)}$  y  $\det G$  como polinomios en  $u$  se tiene

$$\begin{aligned} G_{125}^{(124)} &= G_{12}u + G_{125}^{(124)}|_{u=0} \\ \det G &= -G_{123}u^2 - 2G_{1234}^{(1234)}|_{u=0}u + \det G|_{u=0} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$R_1 = \text{res}(G_{125}^{(124)}, \det G, u) = \begin{vmatrix} G_{12} & G_{125}^{(124)}|_{u=0} & 0 \\ 0 & G_{12} & G_{125}^{(124)}|_{u=0} \\ -G_{123} & -2G_{1234}^{(1234)}|_{u=0} & \det G|_{u=0} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= G_{12}^2 \det G|_{u=0} + 2G_{12}G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} - G_{123}G_{(125)}^{(124)}|_{u=0}^2 \stackrel{(i)}{=} \\
&= G_{12}^2 \det G|_{u=0} + G_{12}G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} - G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(123)} \stackrel{(ii)}{=} \\
&= G_{12}G_{124}G_{1235} - G_{12}G_{(124)}^{(123)}G_{(1235)}^{(1245)}|_{u=0} - G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(123)} \stackrel{(iii)}{=} \\
&= G_{12}G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{(124)}^{(123)}^2 \stackrel{(iv)}{=} \\
&= G_{12}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{125}G_{1234} - G_{123}G_{124}G_{125},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las siguientes identidades de Sylvester: para (i), la segunda identidad del Lema 4.1.3(a), evaluada en  $u = 0$ ; para (ii), utilizamos la segunda identidad que aparece en el Lema 4.1.3(d), evaluada en  $u = 0$ ; para (iii), se utiliza la siguiente identidad, análoga a la segunda del Lema 4.1.3(a) evaluada en  $u = 0$

$$G_{12}G_{(1235)}^{(1245)}|_{u=0} = G_{125}G_{(123)}^{(124)} - G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} G_{(125)}^{(123)};$$

finalmente, para (iv) se utiliza la identidad de Sylvester de tipo estándar

$$G_{12}G_{1234} = G_{123}G_{124} - G_{(124)}^{(123)}^2$$

(b) Por las hipótesis, se tiene que  $G_{123}G_{124}G_{125} < 0$ ; por tanto,

$$\begin{aligned}
R_1 &= -G_{123}G_{124}G_{125} + G_{12}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{125}G_{1234} < \\
&< -G_{123}G_{124}G_{125} + G_{12}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{125}G_{1234} - G_{123}G_{124}G_{125} = \\
&= G_{124}(G_{12}G_{1235} - G_{123}G_{125}) + G_{125}(G_{12}G_{1234} - G_{123}G_{124}) = \\
&= -G_{124}G_{(125)}^{(123)}^2 - G_{125}G_{(124)}^{(123)}^2,
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos utilizado dos identidades de Sylvester de tipo estándar (una de ellas es la (iv) del apartado anterior).

Por las hipótesis que tenemos, se deduce que  $R_1 < 0$ .

(c) Utilizando identidades de Sylvester de tipo estándar (sólo en la primera igualdad), sustituimos los menores mixtos por menores principales:

$$\begin{aligned}
F_1 &= G_{12}^2 G_{1234} G_{1235} - G_{(125)}^{(123)}^2 G_{(123)}^{(124)}^2 = \\
&= G_{12}^2 G_{1234} G_{1235} - (G_{123}G_{124} - G_{12}G_{1234})(G_{123}G_{125} - G_{12}G_{1235}) = \\
&= -G_{123}^2 G_{124}G_{125} + G_{12}G_{123}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{123}G_{125}G_{1234} = \\
&= G_{123}(-G_{123}G_{124}G_{125} + G_{12}G_{124}G_{1235} + G_{12}G_{125}G_{1234}) = G_{123}R_1
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.2.2.** (Resultante de  $G_{1245}^{(1243)}$  y  $\det G$  respecto de  $u$ )

(a) Sea  $F_2 := G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{1234}$ . Se verifica que

$$F_2 = G_{125}^{(123)}G_{1245}^{(1234)} + G_{124}^{(123)}G_{1245}^{(1235)},$$

y la resultante de los polinomios  $\det G$  y  $G_{1245}^{(1243)}$ , respecto de la variable  $u$  es igual a  $R_2 := G_{1234}F_2$ .

(b) Supongamos que  $G_{123} \neq 0$ ,  $G_{1234} < 0$ ,  $G_{1235} < 0$ , y  $u = \frac{G_{1234}^{(1234)}|_{u=0} - \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$  entonces

(i) Si  $G_{123} > 0$ , entonces  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  si y sólo si se verifica  $S_{12}$  ó  $S''_{12}$ , donde

$$S_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0 \\ G_{124}^{(123)}F_2 < 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad S''_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)} \geq 0, \quad G_{152}^{(123)} \leq 0 \\ G_{124}^{(123)2} + G_{152}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\}$$

(ii) Si  $G_{123} < 0$ , entonces  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  si y sólo si se verifica  $S_{12}$  ó  $S'_{12}$ , donde

$$S_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0 \\ G_{124}^{(123)}F_2 < 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad S'_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)} \leq 0, \quad G_{152}^{(123)} \geq 0 \\ G_{124}^{(123)2} + G_{152}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\}$$

(c) Supongamos que  $G_{12} > 0$ ,  $G_{123} = 0$ ,  $G_{1234} < 0$ ,  $G_{1235} < 0$ ,  $G_{12345}^{(1234)} > 0$  y  $u = \frac{\det G|_{u=0}}{2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0}}$ . Entonces  $G_{1245}^{(1243)}$  es negativo si y sólo si se verifica  $S_{12}$ .

(d) Supongamos que  $G_{12} > 0$ ,  $G_{124} > 0$ ,  $G_{1234} > 0$ ,  $G_{1235} > 0$ , y sea  $u = \frac{G_{1234}^{(1234)}|_{u=0} + \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$ ; entonces  $G_{1245}^{(1243)} > 0$  equivale a que se verifica  $S'''_{12}$  ó  $S''_{12}$ , donde

$$S'''_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0 \\ G_{124}^{(123)}F_2 > 0 \end{array} \right\}$$

*Demostración:*

(a) La resultante  $R_2$  de los polinomios

$$\begin{aligned} \det G &= -G_{123}u^2 - 2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0}u + \det G|_{u=0} \\ G_{1245}^{(1243)} &= -G_{124}^{(123)}u + G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} \end{aligned}$$

es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -G_{123} & -2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} & \det G|_{u=0} \\ -G_{124}^{(123)} & G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} & 0 \\ 0 & -G_{124}^{(123)} & G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
R_2 &= -G_{123}G_{(1245)}^{(1243)}\Big|_{u=0} + G_{(124)}^{(123)} \left( -2G_{(1235)}^{(1234)}\Big|_{u=0} G_{(1245)}^{(1243)}\Big|_{u=0} + G_{(124)}^{(123)} \det G\Big|_{u=0} \right) =^{(i)} \\
&= -G_{123} \left( G_{1234}G_{1245}\Big|_{u=0} - G_{124} \det G\Big|_{u=0} \right) + \\
&+ G_{(124)}^{(123)} \left( 2G_{1234}G_{(1245)}^{(1235)}\Big|_{u=0} - G_{(124)}^{(123)} \det G\Big|_{u=0} \right) = \\
&= G_{1234} \left( -G_{123}G_{1245}\Big|_{u=0} + 2G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}\Big|_{u=0} \right) + \\
&+ \det G\Big|_{u=0} \left( G_{123}G_{124} - G_{(124)}^{(123)} \right)^2 =^{(ii)} \\
&= G_{1234} \left( G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)}\Big|_{u=0} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}\Big|_{u=0} - G_{12} \det G\Big|_{u=0} \right) + \\
&+ \det G\Big|_{u=0} G_{12}G_{1234} = G_{1234} \left( G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)}\Big|_{u=0} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}\Big|_{u=0} \right),
\end{aligned}$$

donde para (i) utilizamos la identidad estándar  $G_{124} \det G = G_{1234}G_{1245} - G_{(1245)}^{(1243)}^2$ , evaluada en  $u = 0$ , y la identidad del Lema 4.1.3(c); y para (ii) se utiliza la primera igualdad del Lema 4.1.3(d), evaluada en  $u = 0$ , y la identidad estándar  $G_{12}G_{1234} = G_{123}G_{124} - G_{(124)}^{(123)}^2$ .

Finalmente, para probar el resultado, vemos que

$$G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)}\Big|_{u=0} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}\Big|_{u=0} = G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}$$

(es decir, la misma expresión pero sin evaluar en  $u = 0$ ). Para ello, operamos en la expresión  $G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)}$  hasta ver que es igual a  $F_2$ , que no depende de  $u$  (utilizaremos identidades de Sylvester de tipo estándar en la primera y última igualdades):

$$\begin{aligned}
&G_{(125)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1234)} + G_{(124)}^{(123)}G_{(1245)}^{(1235)} = \\
&= G_{(125)}^{(123)} \frac{G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(124)} - G_{(125)}^{(123)}G_{(124)}^{(124)}}{G_{12}} + G_{(124)}^{(123)} \frac{G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(125)} - G_{(125)}^{(123)}G_{(124)}^{(125)}}{G_{12}} = \\
&= \frac{-G_{(125)}^{(123)}^2 G_{124} + G_{(124)}^{(123)}^2 G_{125}}{G_{12}} = \\
&= \frac{G_{123}G_{124}G_{125} - G_{(125)}^{(123)}^2 G_{124} - G_{123}G_{124}G_{125} + G_{(124)}^{(123)}^2 G_{125}}{G_{12}} = \\
&G_{124} \frac{G_{123}G_{125} - G_{(125)}^{(123)}^2}{G_{12}} + G_{125} \frac{G_{(124)}^{(123)}^2 - G_{123}G_{124}}{G_{12}} = G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{1234} = F_2
\end{aligned}$$

(b) Supongamos que  $G_{123} \neq 0$  y  $u = \frac{G_{(1234)}^{(1234)}\Big|_{u=0} - \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$ . Desarrollamos el menor

$G_{1245}^{(1243)}$  como polinomio en  $u$  y sustituimos  $u$  por su valor:

$$\begin{aligned} G_{1245}^{(1243)} &= -G_{124}^{(123)}u + G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} = \\ &= \frac{-G_{124}^{(123)}G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} + G_{124}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} - G_{123}G_{1245}^{(1243)}|_{u=0}}{-G_{123}} = \\ &= \frac{G_{152}^{(123)}G_{1234} + G_{124}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del Lema 4.1.3(e), cambiando de orden filas y columnas y evaluando en  $u = 0$ .

(b)(i) Consideremos primero el caso en que  $G_{123} > 0$ ; en este caso,  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  si y sólo si el numerador es positivo, es decir, si y sólo si

$$G_{124}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} > -G_{152}^{(123)}G_{1234} \quad (1)$$

Si se verifica  $\mathcal{S}_{12}''$ , es decir,  $G_{124}^{(123)} \geq 0$ ,  $G_{152}^{(123)} \leq 0$  y alguno de los dos no nulo, entonces es inmediato que se verifica la desigualdad (1). Supongamos ahora que se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ , es decir,  $G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0$  y  $G_{124}^{(123)}F_2 < 0$ . Tenemos dos casos:

(A)  $G_{124}^{(123)} > 0$  y  $G_{152}^{(123)} > 0$ ; en este caso la desigualdad (1) es equivalente a

$$G_{124}^{(123)2}G_{1234}G_{1235} > G_{152}^{(123)2}G_{1234}^2,$$

y por ser  $G_{1234} < 0$ , esto equivale a

$$G_{124}^{(123)2}G_{1235} < G_{152}^{(123)2}G_{1234}$$

Sustituyendo los menores mixtos por menores principales (mediante identidades de Sylvester estándar) y operando, obtenemos:

$$\begin{aligned} (1) &\iff G_{124}^{(123)2}G_{1235} - G_{152}^{(123)2}G_{1234} < 0 \\ &\iff (G_{123}G_{124} - G_{12}G_{1234})G_{1235} - (G_{123}G_{152} - G_{12}G_{1235})G_{1234} < 0 \\ &\iff G_{123}(G_{124}G_{1235} - G_{152}G_{1234}) < 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $G_{124}^{(123)} > 0$  y estamos en  $\mathcal{S}_{12}$ , se verifica  $F_2 = G_{124}G_{1235} - G_{152}G_{1234} < 0$ , y como  $G_{123} > 0$ , tenemos finalmente que la última desigualdad es cierta.

(B)  $G_{124}^{(123)} < 0$  y  $G_{152}^{(123)} < 0$ ; en este caso, siguiendo los mismos pasos que antes aunque con el sentido contrario de las desigualdades, se tiene que (1) es equivalente a  $G_{123}F_2 > 0$ . Ahora tenemos que  $G_{124}^{(123)} < 0$ , por tanto (por estar en

$\mathcal{S}_{12}$ ),  $F_2 > 0$ ; como también es  $G_{123} > 0$ , se tiene que la última desigualdad es cierta.

Recíprocamente, supongamos ahora que es  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  (o equivalentemente, se verifica la desigualdad (1), ya que estamos en el caso  $G_{123} > 0$ ), y probemos que entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$  ó  $\mathcal{S}_{12}''$ .

En primer lugar, si  $G_{124}^{(123)} = 0$ , entonces, como  $G_{1234} < 0$  debe ocurrir que  $G_{152}^{(123)} < 0$ ; por tanto se verifica  $\mathcal{S}_{12}''$ . De la misma forma, si  $G_{152}^{(123)} = 0$ , entonces debe ser  $G_{124}^{(123)} > 0$  y también se verifica  $\mathcal{S}_{12}''$ .

Supongamos ahora que  $G_{124}^{(123)}$  y  $G_{152}^{(123)}$  son ambos no nulos.

- Si  $G_{124}^{(123)} < 0$ , entonces debe ser  $G_{152}^{(123)} < 0$ , y además, en este caso la desigualdad (1) es equivalente a  $G_{123}F_2 > 0$ . Como es  $G_{123} > 0$ , se verifica  $F_2 > 0$ , y por tanto  $G_{124}^{(123)}F_2 < 0$ . Por tanto, se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ .
- En segundo lugar, si  $G_{124}^{(123)} > 0$  y  $G_{152}^{(123)} < 0$ , entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}''$ .
- Finalmente, si  $G_{124}^{(123)} > 0$  y  $G_{152}^{(123)} > 0$ , entonces la desigualdad (1) equivale a  $G_{123}F_2 < 0$ ; por tanto es  $F_2 < 0$ , y entonces  $G_{124}^{(123)}F_2 < 0$ , con lo que se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ .

(b)(ii) Consideremos ahora el caso en que  $G_{123} < 0$ . En este caso  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  si y sólo si el numerador es negativo, es decir, si y sólo si

$$G_{124}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} < -G_{152}^{(123)}G_{1234} \quad (2)$$

En primer lugar, si se verifican las condiciones de  $\mathcal{S}'_{12}$ , entonces la desigualdad (2) se verifica automáticamente. Supongamos ahora que se verifican las condiciones de  $\mathcal{S}_{12}$ . Siguiendo los mismos pasos que en el caso (b)(i), tenemos que:

- (A) si  $G_{124}^{(123)} > 0$ , entonces  $G_{152}^{(123)} > 0$  y  $F_2 < 0$ ; por tanto la desigualdad (2) es ahora equivalente a  $G_{123}F_2 > 0$ , que es cierta en el caso en el que estamos;
- (B) por el contrario, si  $G_{124}^{(123)} < 0$ , entonces  $G_{152}^{(123)} < 0$  y  $F_2 > 0$ , y la desigualdad (2) es equivalente a  $G_{123}F_2 < 0$ , que también es cierta.

Recíprocamente, supongamos que se verifica la desigualdad (2). En primer lugar, si  $G_{124}^{(123)} = 0$ , entonces  $G_{152}^{(123)} > 0$ , y si  $G_{152}^{(123)} = 0$ , entonces  $G_{124}^{(123)} < 0$ . Por tanto en estos casos se verifican las condiciones de  $\mathcal{S}'_{12}$ . Supongamos ahora que ninguno de los dos menores es igual a 0; veamos que entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ . Tenemos tres casos:

- Si  $G_{124}^{(123)} < 0$  y  $G_{152}^{(123)} < 0$ , entonces la desigualdad (2) es equivalente a  $G_{123}F_2 < 0$ ; por tanto,  $F_2 > 0$  (porque  $G_{123} < 0$ ), y entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ .

- Si  $G_{124}^{(123)} < 0$  y  $G_{152}^{(123)} > 0$ , entonces se verifican las condiciones de  $\mathcal{S}'_{12}$ .
- Finalmente, si  $G_{124}^{(123)} > 0$ , entonces es  $G_{152}^{(123)} > 0$ , y la desigualdad (2) es equivalente a  $G_{123}F_2 > 0$ ; por tanto,  $F_2 < 0$  (porque  $G_{123} < 0$ ), y entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ .

(c) Supongamos que  $G_{123} = 0$ ,  $u = \frac{\det G|_{u=0}}{2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0}}$  y que tenemos las demás hipótesis del apartado (c) del enunciado. Por ser  $G_{123} = 0$  se tiene

$$G_{1235}^{(1234)} = G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} = \frac{G_{152}^{(123)}G_{123}^{(124)}}{G_{12}} \quad (3)$$

(la primera igualdad se obtiene desarrollando  $G_{1235}^{(1234)}$  como polinomio en  $u$ , y para la segunda igualdad se utiliza la segunda identidad de Sylvester del Lema 4.1.3(a), evaluada en  $u = 0$ . Como  $G_{1235}^{(1234)} > 0$  y  $G_{12} > 0$ , se deduce entonces que  $G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} > 0$  (en particular,  $u$  está bien definido) y además se tiene que  $G_{152}^{(123)}G_{123}^{(124)} > 0$ .

En este caso, al sustituir  $u$  por su valor en  $G_{1245}^{(1243)} = -G_{124}^{(123)}u + G_{1245}^{(1243)}|_{u=0}$ , se tiene que  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  equivale a

$$-G_{124}^{(123)} \frac{\det G|_{u=0}}{2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0}} + G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} < 0 \quad (4)$$

Como  $G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} > 0$ , entonces la desigualdad (4) es equivalente a

$$-G_{124}^{(123)} \det G|_{u=0} + 2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} < 0, \quad (5)$$

Sea  $r$  la resultante, respecto de la variable  $u$  de los polinomios  $H$  y  $G_{1245}^{(1243)}$ , donde  $H = -2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0}u + \det G|_{u=0}$  (es decir,  $H$  es el determinante de  $G$  cuando  $G_{123}$  es 0).

Vamos ahora a comparar  $r$  con la resultante,  $R_2$ , de  $\det G$  (cuando  $G_{123} \neq 0$ ) y  $G_{1245}^{(1243)}$ , respecto de  $u$ . Recordemos que la matriz de Sylvester que se utiliza para calcular  $R_2$  es

$$\begin{pmatrix} -G_{123} & -2G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} & \det G|_{u=0} \\ -G_{124}^{(123)} & G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} & 0 \\ 0 & -G_{124}^{(123)} & G_{1245}^{(1243)}|_{u=0} \end{pmatrix}$$

Observando esta matriz, es claro que la relación entre  $r$  y  $R_2$  es

$$R_2 = -G_{123}G_{1245}^{(1243)}|_{u=0}^2 + G_{124}^{(123)}r$$

Teniendo en cuenta que  $G_{123} = 0$  y utilizando la igualdad  $R_2 = G_{1234}F_2$  obtenida en el apartado (a), tenemos que

$$G_{1234}F_2 = G_{(124)}^{(123)}r \quad (6)$$

La expresión (5) es igual a  $-r$ ; por tanto se tiene que  $G_{(1245)}^{(1243)} < 0$  equivale a  $r > 0$ .

En resumen, hemos visto que las hipótesis generales de (c) implican  $G_{(152)}^{(123)}G_{(123)}^{(124)} > 0$ ; por otra parte hemos visto que  $G_{(1245)}^{(1243)} < 0$  equivale a  $r > 0$ . Para probar (c), tenemos entonces que ver que  $r > 0$  si y sólo si  $G_{(124)}^{(123)}F_2 < 0$ . Ahora bien, de (6) se deduce que  $G_{(124)}^{(123)}F_2 = \frac{G_{(124)}^{(123)^2}}{G_{1234}}r$ . Como  $G_{1234} < 0$ , se tiene lo que queremos probar.

(d) Supongamos ahora que  $G_{12} > 0$ ,  $G_{124} > 0$ ,  $G_{1234} > 0$  y  $G_{1235} > 0$ . Observamos que  $G_{123} > 0$ , puesto que la submatriz  $G_{[1234]}^{[1234]}$  es definida positiva. Sustituyendo  $u$  por su valor en  $G_{(1245)}^{(1243)}$ , nos queda (igual que hemos hecho en el apartado (b)), que

$$G_{(1245)}^{(1243)} = \frac{G_{(152)}^{(123)}G_{1234} - G_{(124)}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$$

Por ser  $G_{123} > 0$ , se tiene que  $G_{(1245)}^{(1243)} > 0$  si y sólo si el numerador es negativo, es decir, si y sólo si

$$G_{(124)}^{(123)}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} > G_{(152)}^{(123)}G_{1234} \quad (7)$$

Hacemos la demostración siguiendo los pasos de (b)(i). Supongamos en primer lugar que se verifica  $S''_{12}$ . En este caso es inmediato que se verifica (7). Supongamos que se verifica  $S'''_{12}$ . Ahora tenemos que distinguir dos casos: si  $G_{(124)}^{(123)} > 0$ , entonces  $F_2 > 0$  (por hipótesis); por otra parte, en este caso la desigualdad (7) equivale a que  $G_{123}F_2 > 0$  (ver la demostración del apartado (b)), que es cierto en las condiciones que tenemos. Por el contrario, si  $G_{(124)}^{(123)} < 0$ , entonces  $F_2 < 0$ , y  $G_{123}F_2 < 0$ , y esta última desigualdad es equivalente, en este caso, a la desigualdad (7).

Recíprocamente, supongamos que se verifica la desigualdad (7). Tenemos varios casos. Si  $G_{(124)}^{(123)}G_{(152)}^{(123)} > 0$ , entonces  $G_{(124)}^{(123)}F_2 > 0$ , con lo que se verifica  $S'''_{12}$ . Si alguno de los dos menores es nulo o si  $G_{(124)}^{(123)} > 0$  y  $G_{(152)}^{(123)} < 0$ , entonces (7) implica que se verifica  $S''_{12}$ . Finalmente, (7) implica que el caso  $G_{(124)}^{(123)} < 0$  y  $G_{(152)}^{(123)} > 0$  nunca puede darse.

Con esto terminamos la demostración del lema. □

**Teorema 4.2.3.** (Teorema de Andreev para prismas triangulares compactos hiperbólicos: espacio de ángulos) *Sea  $\mathcal{P}$  un prisma triangular abstracto con las caras numeradas. Sean  $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{35} \in (0, \pi)$  ángulos asociados a sus aristas, o equivalentemente*

$a_{12}, \dots, a_{35} \in (-1, 1)$ , con  $a_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ . Entonces existe un prisma triangular  $P \subset \mathbf{H}^3$  compacto con ángulos  $\alpha_{ij}$  en las correspondientes aristas si y sólo si el punto de  $A \in \mathbf{R}^9$  de coordenadas  $(a_{12}, \dots, a_{35})$  está en la región  $\mathcal{R}$  descrita por las siguientes desigualdades polinómicas:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{CH} = & (\mathcal{R}_1 = \{S_0^{CH}, G_{123} \geq 0, S_{12}, S_{13}, S_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_2 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S_{12}, S_{13}, S_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_3 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S_{12}, S_{13}, S'_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_4 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S_{12}, S'_{13}, S_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_5 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S'_{12}, S_{13}, S_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_6 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S'_{12}, S_{13}, S'_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_7 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S_{12}, S'_{13}, S'_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_8 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S'_{12}, S'_{13}, S_{23}\}) \\ & \cup (\mathcal{R}_9 = \{S_0^{CH}, G_{123} < 0, S'_{12}, S'_{13}, S'_{23}\}), \end{aligned}$$

donde hemos denotado por  $S_0^{CH}$ ,  $S_{12}$ , etc., los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$S_0^{CH} = \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, 9 \\ G_{124} > 0, G_{134} > 0, G_{234} > 0, G_{125} > 0, G_{235} > 0, G_{135} > 0 \\ G_{1234} < 0, G_{1235} < 0 \\ G_{(234)}^{(124)} > 0, G_{(143)}^{(124)} > 0, G_{(135)}^{(152)} > 0, G_{(253)}^{(152)} > 0 \end{array} \right\},$$

$$S_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(124)}^{(123)} G_{(152)}^{(123)} > 0 \\ G_{(124)}^{(123)} (G_{124} G_{1235} - G_{125} G_{1234}) < 0 \end{array} \right\} \quad S'_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(124)}^{(123)} \leq 0, G_{(152)}^{(123)} \geq 0 \\ G_{(124)}^{(123)2} + G_{(152)}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{13} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(143)}^{(123)} G_{(135)}^{(123)} > 0 \\ G_{(143)}^{(123)} (G_{143} G_{1235} - G_{135} G_{1234}) < 0 \end{array} \right\} \quad S'_{13} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(143)}^{(123)} \leq 0, G_{(135)}^{(123)} \geq 0 \\ G_{(143)}^{(123)2} + G_{(135)}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{23} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(234)}^{(123)} G_{(253)}^{(123)} > 0 \\ G_{(234)}^{(123)} (G_{234} G_{1235} - G_{253} G_{1234}) < 0 \end{array} \right\} \quad S'_{23} = \left\{ \begin{array}{l} G_{(234)}^{(123)} \leq 0, G_{(253)}^{(123)} \geq 0 \\ G_{(234)}^{(123)2} + G_{(253)}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\}$$

*Demostración:*

( $\Rightarrow$ ) Supongamos en primer lugar que  $P \subset \mathbf{H}^3$  es un prisma triangular compacto. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_9$  sus ángulos y  $a_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ ; vamos a ver que  $A = (a_{12}, \dots, a_{35}) \in \mathcal{R}^{CH}$ . La matriz de Gram de  $P$ ,  $G = G(P)$ , verifica las condiciones del Teorema 3.4.4.

La entrada  $u$  se puede calcular a partir de los  $a_{ij}$ , pues como el determinante de  $G$  es 0,  $u$  es raíz de un polinomio de segundo grado cuyos coeficientes son polinomios en  $a_{12}, \dots, a_{35}$ :

$$\det G = -G_{123} u^2 - 2G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} u + \det G|_{u=0};$$

de aquí se deduce entonces que (la factorización del discriminante se debe al Lema 4.1.3(b))

$$u = \frac{G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} \pm \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}, \quad \text{si } G_{123} \neq 0$$

Para ver cuál de las dos soluciones es el valor de  $u$ , observamos que por la condición  $(M_4)$  del Teorema 3.4.4, se verifica que  $G_{(1523)}^{(1243)} < 0$ , puesto que los ciclos  $C_1, C_2, C_4$  y  $C_1, C_5, C_2$  tienen la misma orientación. Cambiando de orden filas y columnas, se tiene que  $G_{(1235)}^{(1234)} > 0$ ; por otra parte, se tiene que

$$G_{(1235)}^{(1234)} = G_{123}u + G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0},$$

con lo que  $G_{(1235)}^{(1234)} > 0$  si y sólo si  $-G_{123}u < G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0}$ . Tenemos entonces que

$$u < \frac{G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0}}{-G_{123}} \quad \text{si } G_{123} < 0 \quad \text{y} \quad u > \frac{G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0}}{-G_{123}} \quad \text{si } G_{123} > 0,$$

con lo que se tiene finalmente que

$$u = \frac{G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} - \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}.$$

Si  $G_{123} = 0$ , entonces, de nuevo por  $(M_4)$ , es  $G_{(1235)}^{(1234)} > 0$ , y desarrollando esta expresión como polinomio en  $u$ , también es  $G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} > 0$  (o sea, distinto de 0), por lo que en este caso

$$u = \frac{\det G|_{u=0}}{2G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0}}.$$

**Paso I.** Veamos en primer lugar que  $A$  verifica todas las desigualdades de  $\mathcal{S}_0^{CH}$ . En efecto,

- (i) por ser  $P$  compacto, los menores principales de orden 3 correspondientes a los vértices del prisma son todos positivos (por  $(P_3)$  del teorema);
- (ii)  $G_{1234} < 0$  y  $G_{1235} < 0$  por las condiciones  $(P_4)$ ;
- (iii) finalmente, los menores mixtos de orden 3 que aparecen en  $\mathcal{R}_0$  son positivos por las condiciones  $(M_3)$ .

**Paso II.** Supongamos que  $G_{123} \geq 0$ ; vamos a ver que en este caso  $A \in \mathcal{R}_1$ . Para esto, por las simetrías del prisma, basta probar que  $A$  verifica  $\mathcal{S}_{12}$ .

- (i) Veamos primero que  $G_{(124)}^{(123)}G_{(152)}^{(123)} > 0$ . Si pensamos en el significado de los menores de orden 3 como los productos escalares en  $(\wedge^3 \mathbf{R}^4, \wedge^3 f)$  de los vectores  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ ,  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$ ,  $e_1 \wedge e_5 \wedge e_2$ , entonces por ser  $G_{124} > 0, G_{152} > 0$

y  $G_{123} \geq 0$ , y tener  $\wedge^3 f$  signatura  $(1, 3)$ , se tiene que  $G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0$  (ver 4.1.1(b)). También podemos verlo utilizando la segunda identidad de Sylvester del Lema 4.1.3(a), y cambiando de orden algunas filas y columnas; se tiene

$$G_{152}^{(123)}G_{123}^{(124)} = -G_{12}G_{1523}^{(1243)} + G_{123}G_{152}^{(124)}$$

Examinando los signos del segundo miembro de la igualdad anterior, tenemos que

- $G_{12} = 1 - a_{12}^2 = \text{sen}^2 \alpha_{12} > 0$ ;
- $G_{1523}^{(1243)} < 0$ , por  $(M_4)$ , y  $G_{152}^{(124)} > 0$ , por  $(M_3)$ ;
- estamos en el caso en que  $G_{123}$  es mayor o igual que 0.

Se tiene por tanto que  $G_{152}^{(123)}G_{123}^{(124)}$  es estrictamente positivo.

- (ii) Veamos ahora que  $G_{124}^{(123)}(G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{1234}) < 0$ . Por el Lema 4.2.2(a), y cambiando de orden filas y columnas, esta expresión se puede escribir en términos de menores mixtos como:

$$G_{124}^{(123)}(G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{1234}) = G_{124}^{(123)^2}G_{1245}^{(1523)} + G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)}G_{1245}^{(1243)} \quad (8)$$

Ahora, en cuanto a los signos de los términos que aparecen en la última expresión, sabemos que  $G_{1245}^{(1523)}$  y  $G_{1245}^{(1243)}$  son negativos por la condición  $(M_4)$  del Teorema 3.4.4, y  $G_{124}^{(123)}G_{152}^{(123)} > 0$  por (i), y por tanto se deduce el resultado.

Con esto hemos visto que si  $G_{123} \geq 0$ , entonces  $A \in \mathcal{R}_1$ .

Paso III. Finalmente, supongamos que  $G_{123} < 0$ . Se tiene que  $G_{1234} < 0$  y  $G_{1235} < 0$  por la condición  $(P_4)$ ; además,  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  por  $(M_4)$ . Entonces, por el Lema 4.2.2(b)(ii), se tiene que el punto  $A$  verifica las condiciones de  $\mathcal{S}_{12}$  o de  $\mathcal{S}'_{12}$ . De forma análoga, por ser  $G_{1435}^{(1432)} < 0$ ,  $A$  verifica  $\mathcal{S}_{13}$  ó  $\mathcal{S}'_{13}$ , y como  $G_{2345}^{(2341)} < 0$ ,  $A$  verifica  $\mathcal{S}_{23}$  ó  $\mathcal{S}'_{23}$ . Por tanto se deduce que  $A$  está en alguna de las regiones  $\mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_9$ .

( $\Leftarrow$ ) Consideremos ahora un punto  $A = (a_{12}, \dots, a_{35}) \in \mathcal{R}$ . Tenemos que probar que existe un prisma triangular compacto  $P \subset \mathbf{H}^3$  con ángulos  $\alpha_{ij} = \arccos(-a_{ij})$ .

En primer lugar construimos una matriz

$$G = G(A) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 1 & u \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & u & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $u$  tiene el siguiente valor:

- (a) Si  $G_{123} \neq 0$ , tomamos  $u = \frac{G_{(1234)}^{(1234)}|_{u=0} - \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$ . Como  $A$  verifica las desigualdades de  $S_0^{CH}$ , en particular  $G_{1234}G_{1235} > 0$ , por lo que  $u$  es un número real.
- (b) Si  $G_{123} = 0$ , tomamos  $u = \frac{\det G|_{u=0}}{2G_{(1234)}^{(1234)}|_{u=0}}$ ; aquí hay que comprobar que el denominador es distinto de 0. En efecto, orlando el menor  $G_{123}$  en  $G$  se tiene la identidad de Sylvester (Lema 4.1.3(a))

$$G_{123}G_{12345} = G_{1234}G_{1235} - G_{(1234)}^{(1234)}|_{(1235)}^2$$

Como  $G_{123} = 0$ , y  $G_{1234}, G_{1235} \neq 0$ , se tiene que  $G_{(1234)}^{(1234)}|_{(1235)} \neq 0$ . Por otra parte, desarrollando  $G_{(1234)}^{(1234)}|_{(1235)}$  como polinomio en  $u$  se tiene

$$G_{(1234)}^{(1234)}|_{(1235)} = G_{123}u + G_{(1234)}^{(1234)}|_{u=0},$$

y de nuevo por ser  $G_{123} = 0$ , es  $G_{(1234)}^{(1234)}|_{u=0} = G_{(1234)}^{(1234)}|_{(1235)} \neq 0$ .

Veremos ahora que la matriz  $G$  verifica todas las condiciones del Teorema 3.4.4, con lo que habremos demostrado la existencia del prisma triangular que estamos buscando.

- (I) En primer lugar, el rango de  $G$  es 4 y su signatura es  $(3, 1)$ . En efecto:  $G$  tiene los siguientes menores principales encajados:  $1 = G_1$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{124}$ ,  $G_{1234}$ , cuyos signos son  $G_1 > 0$ ,  $G_{12} > 0$ ,  $G_{124} > 0$  y  $G_{1234} < 0$ , porque  $A$  verifica las desigualdades de  $S_0^{CH}$ . Además,  $\det G = 0$  por la elección de  $u$ . Se deduce por tanto que la signatura de  $G$  es  $(3, 1)$ . La condición  $(R)$  se reduce a la condición  $(P_3)$ , por ser el prisma un poliedro trivalente.
- (II) La condición  $(P_3)$  del Teorema 3.4.4 se verifica porque  $A \in S_0^{CH}$ , y por lo mismo se tiene que  $G_{1234}$  y  $G_{1235}$  son estrictamente negativos. Para ver  $(P_4)$ , faltaría comprobar todavía que los menores principales de orden 4  $G_{1245}$ ,  $G_{1345}$ ,  $G_{2345}$  son estrictamente negativos. Teniendo en cuenta la Nota 4.1.1(a), automáticamente obtendremos que estos menores son no nulos cuando probemos las condiciones  $(M_4)$ . Por la signatura de  $G$  (que ya hemos obtenido en (I)) deduciremos entonces que son negativos.
- (III) Para ver que se verifica la condición  $(M_3)$  del Teorema 3.4.4, puesto que todos los menores principales correspondientes a los vértices del prisma triangular son positivos, es suficiente (por la Nota 4.1.1(b)) ver que los menores  $G_{(234)}^{(124)}$ ,  $G_{(143)}^{(124)}$ ,  $G_{(135)}^{(152)}$ ,  $G_{(253)}^{(152)}$  y  $G_{(152)}^{(124)}$  son todos positivos. Como  $A \in \mathcal{R}_0$ , los cuatro primeros menores son ya positivos, luego falta comprobar el signo de  $G_{(152)}^{(124)}$ .
- (III.i) Supongamos en primer lugar que  $G_{123} \geq 0$ , es decir, que  $A \in \mathcal{R}_1$ ; por la identidad de Sylvester (tercera igualdad del Lema 4.1.3(d)) tenemos

$$2G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(124)}G_{(123)}^{(125)} = -G_{12}G_{123}G_{1245} + G_{125}G_{(124)}^{(123)}^2 + G_{124}G_{(125)}^{(123)}^2$$

Como  $G_{12}$ ,  $G_{125}$ ,  $G_{124}$ , son estrictamente positivos (porque  $A$  verifica  $\mathcal{S}_0^{CH}$ ),  $G_{1245} \leq 0$  (por la signatura de  $G$ ),  $G_{(124)}^{(123)}$  y  $G_{(125)}^{(123)}$  son no nulos porque  $A$  verifica  $\mathcal{S}_1$ , y  $G_{123} \geq 0$ , se deduce entonces que el segundo miembro de la igualdad anterior es estrictamente positivo. Por tanto también  $2G_{(124)}^{(123)}G_{(125)}^{(124)}G_{(123)}^{(125)} > 0$ . Por otra parte,  $G_{(124)}^{(123)}G_{(152)}^{(123)} > 0$  porque  $A \in \mathcal{R}_1$ . Como  $G_{(124)}^{(123)}G_{(123)}^{(125)} = -G_{(124)}^{(123)}G_{(152)}^{(123)} < 0$ , se deduce entonces que  $G_{(124)}^{(124)}$  es negativo, y (cambiando el orden de columnas) que  $G_{(152)}^{(124)}$  es positivo.

(III.ii) Supongamos por el contrario que  $G_{123} < 0$ , es decir, que  $A \in \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_9$ . Desarrollamos  $G_{(125)}^{(124)} = -G_{(152)}^{(124)}$  como polinomio en  $u$  y sustituimos  $u$  por su valor:

$$\begin{aligned} G_{(125)}^{(124)} &= G_{12}u + G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} = \\ &= \frac{G_{12}G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} - G_{12}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} - G_{123}G_{(125)}^{(124)}|_{u=0}}{-G_{123}} \end{aligned}$$

Puesto que  $-G_{123}$  es positivo, para ver que  $G_{(125)}^{(124)} < 0$  debemos ver que el numerador de la expresión anterior es negativo, es decir,

$$G_{12}G_{(1235)}^{(1234)}|_{u=0} - G_{123}G_{(125)}^{(124)}|_{u=0} < G_{12}\sqrt{G_{1234}G_{1235}},$$

que es equivalente, aplicando una identidad de Sylvester de tipo estándar, a

$$-G_{(125)}^{(123)}G_{(123)}^{(124)} < G_{12}\sqrt{G_{1234}G_{1235}} \quad (9)$$

El segundo miembro de la desigualdad anterior es positivo. En cuanto al signo del primero, como el punto  $A$  está en alguna de las regiones  $\mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_9$ ; en particular  $A$  verifica  $\mathcal{S}_{12}$  o  $\mathcal{S}'_{12}$ .

- (i) Si  $A$  verifica  $\mathcal{S}'_{12}$ , entonces  $G_{(124)}^{(123)} \leq 0$  y  $G_{(125)}^{(123)} = -G_{(152)}^{(123)} \leq 0$ , por lo que  $-G_{(125)}^{(123)}G_{(123)}^{(124)} \leq 0$ , y (9) se verifica automáticamente.
- (ii) Si  $A$  verifica  $\mathcal{S}_{12}$ , entonces  $G_{(124)}^{(123)}G_{(152)}^{(123)} > 0$ , es decir,  $-G_{(125)}^{(123)}G_{(123)}^{(124)} > 0$ , por lo que (9) es equivalente a

$$G_{(125)}^{(123)2}G_{(123)}^{(124)2} < G_{12}^2G_{1234}G_{1235}.$$

Llamamos  $F_1$  al polinomio  $G_{12}^2G_{1234}G_{1235} - G_{(125)}^{(123)2}G_{(123)}^{(124)2}$ . Por el Lema 4.2.1(c),  $F_1 = G_{123}R_1$ , donde  $R_1$  es una expresión que (por el apartado (b) del mismo lema) es negativa. Por tanto,  $F_1 > 0$ , con lo que se verifica la desigualdad (9).

(IV) Finalmente debemos ver que se verifica la condición  $(M_4)$  del Teorema 3.4.4. Las condiciones  $(M_4)$  y  $(P_4)$  equivalen a que la matriz  $\wedge^4 G$  de menores de orden 4 de

$G$  tenga los siguientes signos (ver *Figura 4.1* y comparar las orientaciones de los ciclos ampliados):

	1234	1235	1245	1345	2345
1234	-	+	+	-	+
1235	+	-	-	+	-
1245	+	-	-	+	-
1345	-	+	+	-	+
2345	+	-	-	+	-

Como  $A$  verifica  $S_0^{CH}$ , ya sabemos que  $G_{1234} < 0$  y  $G_{1235} < 0$ ; por otra parte, como  $\det G = 0$ , esta matriz  $\wedge^4 G$  tiene rango 1 (Lema 4.1.2(b)). Esto nos permite conocer el signo de todos los menores de orden 4 a partir del signo de unos pocos, por ejemplo es suficiente probar que

$$\begin{aligned}
 G_{1245}^{(1243)} &< 0 \quad (\text{o equivalentemente } G_{1245}^{(1234)} > 0) \\
 G_{2345}^{(2341)} &< 0 \quad (\text{ó } G_{2345}^{(1234)} > 0) \\
 G_{1432}^{(1435)} &< 0 \quad (\text{ó } G_{1234}^{(1345)} < 0) \\
 G_{1524}^{(1523)} &< 0 \quad (\text{ó } G_{1245}^{(1235)} < 0)
 \end{aligned}$$

Por las simetrías del prisma triangular bastará con probar una de las desigualdades. Vamos a probar, por ejemplo, que  $G_{1245}^{(1243)} < 0$ . Consideramos distintos casos (correspondientes a las distintas regiones que componen  $\mathcal{R}$ ):

- (i) Supongamos que  $G_{123} < 0$ , es decir, estamos en una de las regiones  $\mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_9$ ; en particular,  $A$  verifica las ecuaciones de  $S_{12}$  o las de  $S'_{12}$ . Por tanto, por el Lema 4.2.2 (b)(ii), se tiene que  $G_{1245}^{(1243)}$  es negativo.
- (ii) Supongamos que  $G_{123} > 0$ , es decir, estamos en la región  $\mathcal{R}_1$ , es decir, se verifica  $S_{12}$ . Entonces, de nuevo por el Lema 4.2.2 (b)(i), se tiene que  $G_{1245}^{(1243)}$  es negativo.
- (iii) Finalmente supongamos que  $G_{123} = 0$  (también estamos en la región  $\mathcal{R}_1$ ). Por ser  $G_{123} = 0$  se tiene (por (3))

$$G_{1235}^{(1234)} = G_{1235}^{(1234)}|_{u=0} = \frac{G_{152}^{(123)} G_{123}^{(124)}}{G_{12}}$$

Como estamos en  $\mathcal{R}_1$ , se tiene entonces que  $G_{1235}^{(1234)} > 0$ , y podemos aplicar el Lema 4.2.2(c); como  $A$  verifica las ecuaciones de  $S_{12}$ , concluimos que  $G_{1245}^{(1243)} < 0$ .

□

A la región  $\mathcal{R}^{CH}$  que hemos obtenido en el Teorema 4.2.3 la llamamos *espacio de (cosenos de) ángulos* de los prismas triangulares compactos hiperbólicos. Vamos a ver ahora descripciones similares de los espacios de ángulos de los prismas triangulares hiperbólicos, no necesariamente compactos, y de los prismas triangulares esféricos. Las demostraciones serán análogas a la del Teorema 4.2.3, y se utilizará esencialmente el Lema 4.2.2. Observemos que el conjunto  $\mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_9$  del Teorema 4.2.3 podemos expresarlo, utilizando intersecciones, como

$$\{\mathcal{S}_0^{CH}\} \cap \{G_{123} < 0\} \cap (\{\mathcal{S}_{12}\} \cup \{\mathcal{S}'_{12}\}) \cap (\{\mathcal{S}_{13}\} \cup \{\mathcal{S}'_{13}\}) \cap (\{\mathcal{S}_{23}\} \cup \{\mathcal{S}'_{23}\})$$

Expresamos de esta forma los espacios de ángulos en los casos siguientes.

**Teorema 4.2.4.** (Teorema de Andreev para prismas triangulares hiperbólicos, no necesariamente compactos) *El espacio de (cosenos) de ángulos de los prismas triangulares hiperbólicos (no necesariamente compactos) es el conjunto  $\mathcal{R}^H$  definido por las siguientes desigualdades polinómicas:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^H = & \{\mathcal{S}_0^H, G_{123} = 0, \mathcal{S}_{12}, \mathcal{S}_{13}, \mathcal{S}_{23}\} \\ & \cup \left( \{\mathcal{S}_0^H\} \cap \{G_{123} < 0\} \cap (\{\mathcal{S}_{12}\} \cup \{\mathcal{S}'_{12}\}) \cap (\{\mathcal{S}_{13}\} \cap \{\mathcal{S}'_{13}\}) \cup (\{\mathcal{S}_{23}\} \cup \{\mathcal{S}'_{23}\}) \right) \\ & \cup \left( \{\mathcal{S}_0^H\} \cap \{G_{123} > 0\} \cap (\{\mathcal{S}_{12}\} \cup \{\mathcal{S}''_{12}\}) \cap (\{\mathcal{S}_{13}\} \cup \{\mathcal{S}''_{13}\}) \cap (\{\mathcal{S}_{23}\} \cup \{\mathcal{S}''_{23}\}) \right) \end{aligned}$$

donde hemos denotado por  $\mathcal{S}_0^H$ ,  $\mathcal{S}_{12}$ , etc., los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^H = & \left\{ a_{ij} \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, 9 \right\} & \mathcal{S}_{12} = & \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)} G_{152}^{(123)} > 0 \\ G_{124}^{(123)} (G_{124} G_{1235} - G_{125} G_{1234}) < 0 \end{array} \right\} \\ \mathcal{S}'_{12} = & \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)} \leq 0, \quad G_{152}^{(123)} \geq 0 \\ G_{124}^{(123)2} + G_{152}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\} & \mathcal{S}''_{12} = & \left\{ \begin{array}{l} G_{124}^{(123)} \geq 0, \quad G_{152}^{(123)} \leq 0 \\ G_{124}^{(123)2} + G_{152}^{(123)2} > 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

y los demás conjuntos de forma análoga.

*Demostración:* (análoga a la demostración del Teorema 4.2.3)

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe un prisma triangular  $P \subset \mathbf{H}^3$  con los ángulos dados. Su matriz de Gram  $G(P)$  verifica el Teorema 3.4.3, y la entrada  $u$  se expresa en función de las demás entradas de la matriz exactamente de la misma forma que para el caso compacto. Por este teorema, se verifica  $G_{12} > 0$ ,  $G_{1234} < 0$ ,  $G_{1235} < 0$ ,  $G_{1245}^{(1243)} < 0$  y  $G_{1235}^{(1234)} > 0$ . Por tanto, aplicando el Lema 4.2.2(b) y (c), se tiene:

- (I) si  $G_{123} = 0$ , entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$ ;
- (II) si  $G_{123} > 0$ , entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$  ó  $\mathcal{S}'_{12}$ ;

(III) si  $G_{123} < 0$ , entonces se verifica  $\mathcal{S}_{12}$  ó  $\mathcal{S}''_{12}$ .

De forma análoga se procede con  $\mathcal{S}_{13}$ ,  $\mathcal{S}_{23}$ , etc.

( $\Leftarrow$ ) Dado ahora un punto  $A \in \mathcal{R}^H$ , construimos una matriz  $G = G(A)$  exactamente de la misma forma a como lo hicimos en la demostración de 4.2.3. Tenemos que ver que esta matriz verifica las condiciones del Teorema 3.4.3. En primer lugar, el rango de  $G$  es 4 (pues hemos elegido  $u$  para que  $\det G = 0$ ). Puesto que  $A$  verifica las condiciones de  $\mathcal{S}_0^H$ , se verifica  $G_{12} > 0$  y  $G_{1234} < 0$ , con lo que la signatura de  $G$  es  $(3, 1)$ . Ya sólo falta probar  $(M_4)$ , pues  $(P_4)$  se deducirá de  $(M_4)$  y de la signatura de  $G$ . Para ver  $(M_4)$ , es suficiente ver (por las simetrías del prisma triangular, igual que en 4.2.3) que el menor mixto  $G_{\begin{smallmatrix} 1243 \\ 1245 \end{smallmatrix}}$  es estrictamente negativo. Esto se deduce de nuevo del Lema 4.2.2(b) y (c).  $\square$

**Teorema 4.2.5.** (Teorema de Andreev para prismas triangulares esféricos) *El espacio de (cosenos) de ángulos de los prismas triangulares esféricos es el conjunto  $\mathcal{R}^S$  definido por las siguientes desigualdades polinómicas:*

$$\mathcal{R}^S = \{\mathcal{S}_0^S\} \cap (\{\mathcal{S}''_{12}\} \cup \{\mathcal{S}'''_{12}\}) \cap (\{\mathcal{S}''_{13}\} \cup \{\mathcal{S}'''_{13}\}) \cup (\{\mathcal{S}''_{23}\} \cup \{\mathcal{S}'''_{23}\})$$

donde hemos denotado por  $\mathcal{S}_0^S$ ,  $\mathcal{S}''_{12}$ , etc., los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$\mathcal{S}_0^S = \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, 9 \\ G_{124} > 0, G_{1234} > 0, G_{1235} > 0 \end{array} \right\} \quad \mathcal{S}''_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} \geq 0, \quad G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 152 \end{smallmatrix}} \leq 0 \\ G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}}^2 + G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 152 \end{smallmatrix}}^2 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{S}'''_{12} = \left\{ \begin{array}{l} G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 152 \end{smallmatrix}} > 0 \\ G_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 124 \end{smallmatrix}} (G_{124} G_{1235} - G_{125} G_{1234}) > 0 \end{array} \right\}$$

y los demás conjuntos de forma análoga.

*Demostración:*

( $\Rightarrow$ ) Sea  $P$  un prisma triangular de la esfera  $\mathbf{S}^3$ . Su matriz de Gram,  $G = G(P)$  verifica las condiciones del Teorema 3.4.2. Por  $(P_4)$  y  $(P_2)$  de este teorema, se verifican las desigualdades de  $\mathcal{S}_0^S$ . La entrada  $u$  de  $G$  se puede calcular a partir de las demás entradas, utilizando que el determinante de  $G$  es 0. Por ser  $G_{12} > 0$  y  $G_{1234} > 0$ , la submatriz  $G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1234 \end{smallmatrix}}$  es definida positiva; en particular  $G_{123} > 0$  y entonces  $\det G$  es un polinomio en  $u$  de grado 2. Para saber cuál de las dos raíces es el valor de  $u$ , observamos que se verifica  $G_{\begin{smallmatrix} 1243 \\ 1523 \end{smallmatrix}} > 0$ , por la condición  $(M_4)$  del Teorema 3.4.2. Procediendo de forma análoga a como lo hicimos en la demostración del Teorema 4.2.3, se tiene que  $u = \frac{G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1235 \end{smallmatrix}}|_{u=0} + \sqrt{G_{1234} G_{1235}}}{-G_{123}}$ . Ahora, por el Lema 4.2.2(d), se tiene que se verifica  $\mathcal{S}''_{12}$  ó  $\mathcal{S}'''_{12}$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos ahora  $A \in \mathcal{R}^S$ ; construimos una matriz  $G = G(A)$ , con  $u = \frac{G_{(1234)}^{(1234)} + \sqrt{G_{1234}G_{1235}}}{-G_{123}}$ . Puesto que  $A$  verifica  $S_0^S$  y  $\det G = 0$  (por la elección de  $u$ ), se tiene que  $G$  es de rango 4 y semidefinida positiva. Por otra parte, por el Lema 4.2.2(d), se tiene que  $G_{(1243)}^{(1243)} > 0$ , por lo que (haciendo las mismas consideraciones que hemos hecho en los teoremas anteriores) se tiene que la matriz  $G$  verifica la condición  $(M_4)$ ; como consecuencia de esto y de la signatura de  $G$ , también verifica la condición  $(P_4)$ . Por tanto se verifica el Teorema 3.4.2, y entonces existe un prisma triangular esférico con los ángulos dados.  $\square$

### Lectura geométrica

Vamos a ver el significado geométrico de las ecuaciones que describen el espacio de ángulos de prismas triangulares.

(I) (Menores principales de orden 3) En el caso hiperbólico, los menores principales de orden 3,  $G_{ijk}$ , indican dónde se cortan las caras  $C_i, C_j, C_k$ :  $G_{ijk}$  es positivo, cero o negativo si y sólo si las tres caras se cortan en un punto finito, infinito o ultrainfinito, respectivamente. Puesto que estamos en el caso compacto, todos los vértices tienen que ser finitos, y es por esto por lo que aparecen las condiciones  $G_{124} > 0$ , etc. en  $S_0^{CH}$ . Observemos que estas condiciones no aparecen en el caso de prismas hiperbólicos no necesariamente compactos. Si algún vértice del poliedro tiende a un vértice infinito, entonces el menor principal correspondiente tiende a 0. Así, las condiciones  $G_{ijk} = 0$  (cuando  $C_i, C_j, C_k$  inciden en un vértice) son ecuaciones del borde del espacio de ángulos (en codimensión 1).

En el caso esférico, los menores principales de orden 3 son siempre positivos (en correspondencia con que siempre hay compacidad en este espacio).

(II) El signo de los menores principales de orden 4 refleja la signatura del espacio.

(III) En el caso hiperbólico compacto, ya hemos comentado el significado de los menores mixtos de orden 3 (Nota 4.1.1(b)).

(IV) Finalmente, estudiamos el polinomio  $F_2 = G_{124}G_{1235} - G_{125}G_{1234}$ . Estudiamos el caso hiperbólico. Supongamos entonces un prisma triangular compacto  $P \subset \mathbf{H}^3$  y sea  $G$  su matriz de Gram y  $e_1, \dots, e_5$  los vectores normales exteriores a sus caras. Denotando como habitualmente  $v_{ijk} := \Phi_3(e_i \wedge e_j \wedge e_k)$ , y  $E[1234]$  a la matriz de coordenadas de los vectores  $e_1, \dots, e_4$ , y utilizando las propiedades del operador de Hodge (Lema 1.4.1) se tiene

$$\frac{G_{1234}}{G_{124}} = \frac{G_{1243}}{G_{124}} = \frac{(\det f)\det E[1243]^2}{G_{124}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\det f) \Phi_4(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_3)^2}{(\wedge^3 f)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4)} = \frac{(\det f) f(\Phi_3(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4), e_3)^2}{(\det f) f(v_{124})} = \\
&= \frac{f(v_{124}, e_3)^2}{f(v_{124})} = -\sinh^2 d(v_{124}, e_3^\perp)
\end{aligned}$$

(para el caso esférico, se tendría  $\frac{f(v_{124}, e_3)^2}{f(v_{124})} = \sin^2(d(v_{124}, e_3^\perp))$ ). Es decir,  $\frac{G_{1243}}{G_{124}}$  mide la altura  $h_1$  desde el vértice  $v_{124}$  hasta la cara  $C_3$  (ver *Figura 4.2(a)*). De la misma forma,  $\frac{G_{1253}}{G_{125}}$  mide la altura  $h_2$  desde el vértice  $v_{125}$  hasta la cara  $C_3$ . Teniendo esto en cuenta, la condición  $F_2 < 0$  equivale (ya que  $G_{125}$  y  $G_{124}$  son positivos) a que

$$\frac{G_{1235}}{G_{125}} < \frac{G_{1234}}{G_{124}},$$

es decir, a que la altura  $h_1$  es menor que la altura  $h_2$ .

Por otra parte, supongamos por ejemplo que nuestro prisma  $P$  verifica las ecuaciones de la región  $\mathcal{R}_1$ , es decir, las prolongaciones de las caras  $C_1, C_2, C_3$  se cortan en un punto  $V$  finito. Hay dos posibilidades, que este punto  $V$  esté más cercano de la cara  $C_4$  o que esté más cercano de la cara  $C_5$  (ver *Figura 4.2(b)*). Comparando las orientaciones de los ciclos  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_1, C_2, C_4$  en ambos casos, vemos que el primer caso posible equivale a la condición  $G_{124}^{(123)} > 0$ , y el segundo equivale a que  $G_{124}^{(123)} < 0$ . Geométricamente, puede verse que en el primer caso la altura  $h_1$  es menor que  $h_2$ , por tanto, por lo anterior, es  $F_2 < 0$ . Con esto hemos visto (geométricamente) que  $P$  verifica la condición  $G_{124}^{(123)} F_2 < 0$ , que aparece en el espacio de ángulos  $\mathcal{R}^{CH}$ .

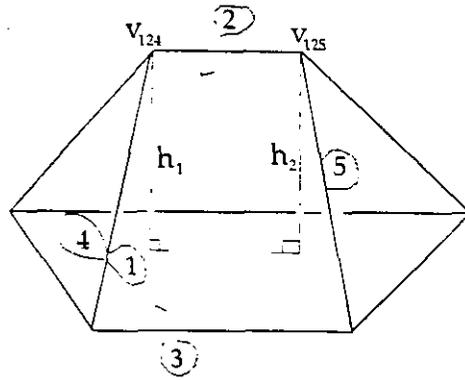
La condición  $F_2 = 0$  equivale a decir que las dos alturas  $h_1$  y  $h_2$  son iguales, es decir, que los vértices  $v_{124}$  y  $v_{125}$  son iguales. Notamos que esto es lo que cabía esperar. En efecto,  $F_2$  lo hemos obtenido al sustituir el valor correcto de  $u$  en el menor mixto  $G_{1245}^{(1243)}$  (Lema 4.2.2). Como, por hipótesis,  $G_{1243} \neq 0$ , este menor mixto es igual a 0 si y sólo si el menor  $G_{1245}$  es igual a 0; y esto último equivale a que las caras  $C_1, C_2, C_4, C_5$  inciden en un vértice.

Puesto que las pirámides cuadrangulares se pueden aproximar por prismas triangulares, la ecuación  $F_2 = 0$  define una hipersuperficie del borde del espacio de ángulos del prisma triangular.

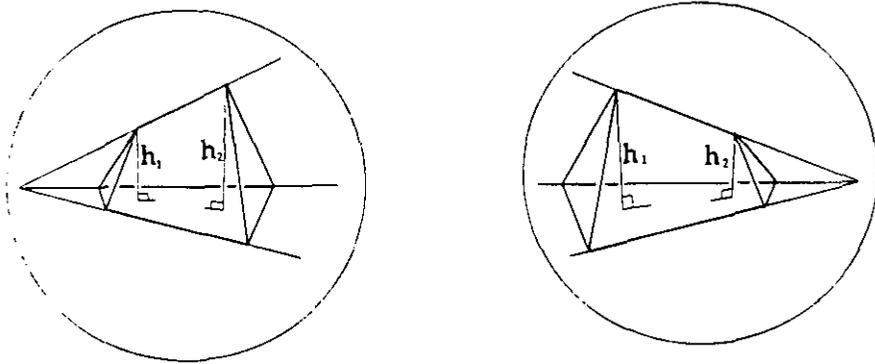
Otra forma importante en que una sucesión de prismas triangulares puede degenerar es que las caras  $C_1, C_2, C_3$  se aproximan entre sí y desarrollan un “tubo largo fino” (ver [HR]); en este caso, la suma de los ángulos  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$  tiende a  $\pi$ , es decir,  $G_{123}$  tiende a 0.

La *Figura 4.3* muestra el espacio de ángulos diédricos (realmente ángulos, no cosenos) cuando particularizamos en los ángulos  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha$ ,  $\alpha_{41} = \alpha_{42} =$

$\alpha_{43} = \beta$ .  $\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{53} = \gamma$ . En esta figura se puede apreciar una parte del borde contenida en el plano  $\gamma = \pi/3$ , que corresponde al último tipo de degeneración.

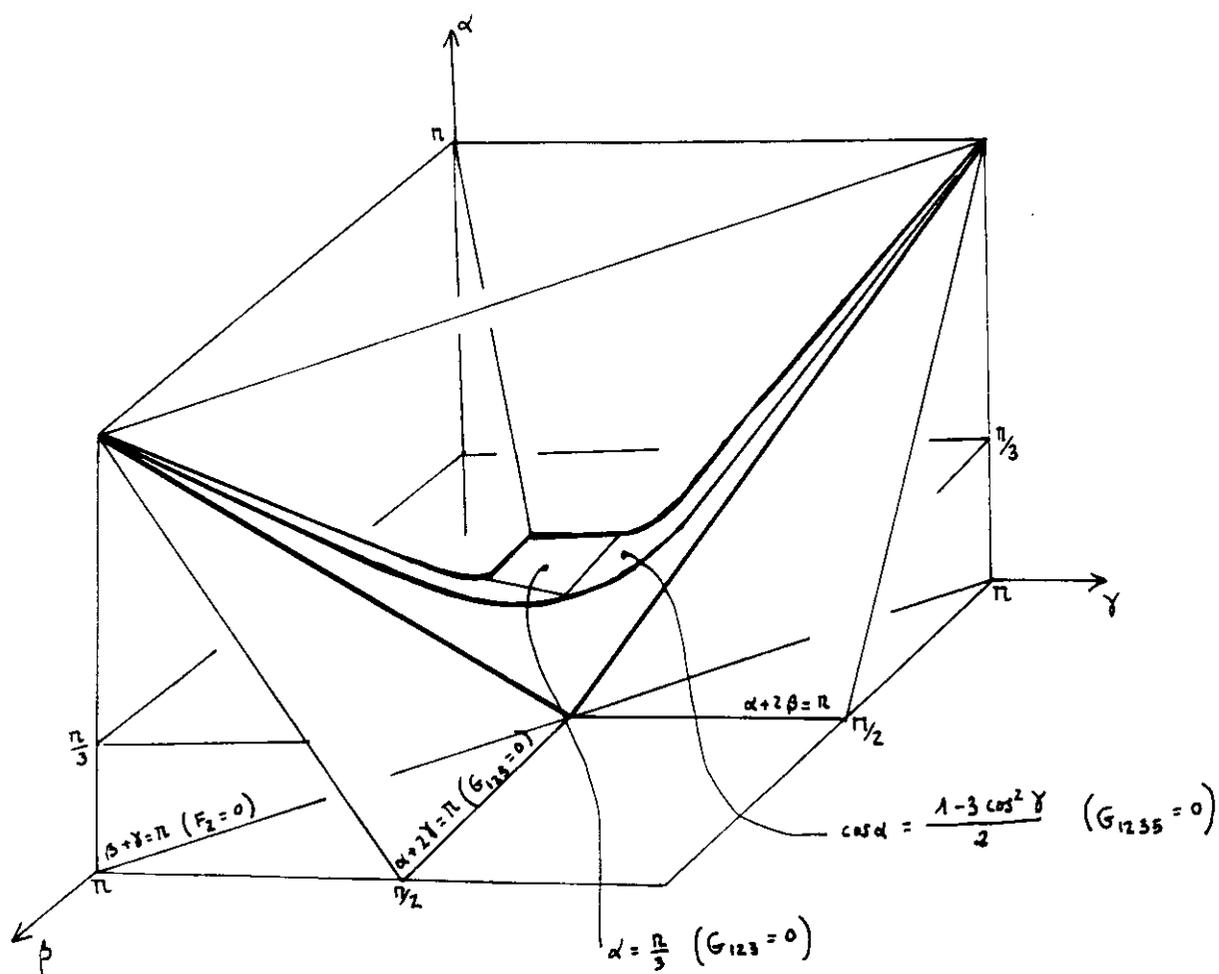


*Figura 4.2(a)*



*Figura 4.2(b)*

Figura 4.3



### 4.3 Descendientes de tetraedros hiperbólicos

En esta sección nos vamos a ocupar de la familia de poliedros que se obtiene del tetraedro truncando vértices sucesivamente; llamamos a estos poliedros *descendientes de tetraedros* y vamos a estudiar para ellos el teorema de Andreev generalizado. Consideremos uno cualquiera de estos tipos combinatorios de poliedros,  $\mathcal{P}$ , con las caras numeradas, y asignemos números  $\alpha_{ij} \in (0, \pi)$  a sus aristas; en primer lugar damos unas condiciones sobre los  $\alpha_{ij}$  para que se pueda construir una matriz  $G = (a_{ij})$  de rango 4 y signatura  $(3, 1)$ , y con  $a_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ . Esto significará que existe una configuración de planos, numerados, en  $\mathbf{H}^3$  tal que si dos caras de  $\mathcal{P}$  son adyacentes, entonces los dos planos con la misma numeración se cortan según el ángulo  $(\alpha_{ij})$  dado. Para ver si esta configuración de planos determina un poliedro del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$ , bastará ahora aplicar el Teorema 3.4.4.

Sea  $\mathcal{P}$  un descendiente del tetraedro, es decir, existe una sucesión de poliedros (abstractos)  $\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \dots, \mathcal{P}_n$  tal que  $\mathcal{P}_4$  es un tetraedro,  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ , y  $\mathcal{P}_r$  se obtiene truncando un vértice  $\mathcal{V}_{r-1}$  de  $\mathcal{P}_{r-1}$ . Llamamos a la sucesión  $\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \dots, \mathcal{P}_n$  un *camino generador* de  $\mathcal{P}$ . La numeración de las caras de  $\mathcal{P}$  induce, por restricción, una numeración en las caras de cada  $\mathcal{P}_r$ . La operación de truncar un vértice de un poliedro “preserva las adyacencias”, es decir, si dos caras son adyacentes en un poliedro, siguen siendo adyacentes en el poliedro que se obtiene después de truncar el vértice. En particular, dado un camino generador de  $\mathcal{P}$ , se verifica que dos caras de  $\mathcal{P}$  son adyacentes si y sólo si son adyacentes en todos los poliedros  $\mathcal{P}_r$  del camino que contienen ambas caras.

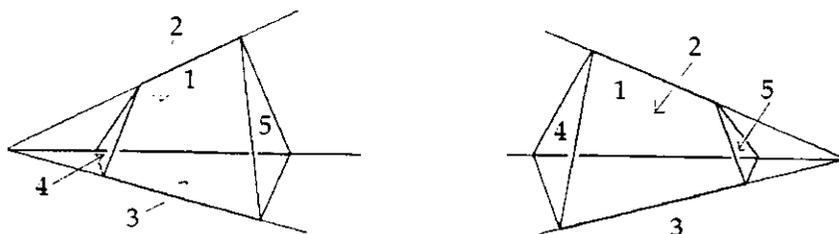
A partir de la numeración de las caras de los poliedros de un camino generador, obtenemos una sucesión de conjuntos de índices encajados,  $I_4 \subset I_5 \subset \dots \subset I_n = \{1, \dots, n\}$ , donde cada  $I_r$  es el conjunto de índices de las caras de  $\mathcal{P}_r$  (el subíndice del conjunto coincide con su cardinal; como siempre, llamamos  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  a las caras de  $\mathcal{P}$ ). Vamos a describir el camino generador  $\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \dots, \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$  a partir de la numeración de las caras de  $\mathcal{P}$ , utilizando la sucesión de subconjuntos  $\{i_r, j_r, k_r, l_r\} \subset I_r$  siguiente: los índices  $i_r, j_r, k_r$  corresponden a las tres caras de  $\mathcal{P}_{r-1}$  que inciden en el vértice que se va a truncar; el índice  $l_r$  corresponde a la nueva cara de  $\mathcal{P}_r$  (para  $r = 4$ , tomaremos  $\{i_4, j_4, k_4, l_4\} = I_4$ ). Esta sucesión de subconjuntos verifica las siguientes propiedades:

- para todo  $r$ , se tiene  $i_r, j_r, k_r \in I_{r-1}$  y  $l_r \notin I_{r-1}$ ;
- para cada subconjunto  $\{i_r, j_r, k_r, l_r\}$ , las caras  $\mathcal{C}_{i_r}, \mathcal{C}_{j_r}, \mathcal{C}_{k_r}, \mathcal{C}_{l_r}$ , de  $\mathcal{P}$  son totalmente adyacentes, es decir, cada una es adyacente a las otras tres.

**Notación.** Por abuso de notación llamaremos cuaterna a cada uno de los subconjuntos anteriores y lo escribiremos como  $[i_r, j_r, k_r, l_r]$ , si bien  $l_r$  es el único elemento de

este conjunto que está unívocamente determinado: los elementos  $i_r, j_r, k_r$  sólo están determinados salvo permutación.

**Ejemplo.** En el prisma triangular con las caras numeradas como en la *Figura 4.4*, un camino generador es el determinado por  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\} \subset I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Este camino se puede describir también mediante las cuaternas  $[1, 2, 3, 4], [1, 2, 3, l_5 = 5]$ . Otro camino generador para el mismo prisma (y con la misma numeración de las caras) es el determinado por  $I_4 = \{1, 2, 3, 5\}, I_5 = \{1, 2, 3, 5, 4\}$ , que también se puede describir con las cuaternas  $[1, 2, 3, 5], [1, 2, 3, l_5 = 4]$ .



*Figura 4.4*

Por la construcción, se tiene que los vértices de un descendiente del tetraedro, o bien son vértices del tetraedro inicial, o bien han aparecido al truncar un vértice. De aquí se deducen inmediatamente los siguientes lemas.

**Lema 4.3.1.** *Dadas las tres caras que inciden en un vértice cualquiera de un descendiente de tetraedro, existe una cuarta cara que es adyacente a las tres.*

*Demostración:*

Sea  $\mathcal{P}_r$  el primer poliedro (de un camino generador) en el que aparece el vértice. Entonces las tres caras que inciden en él son tres de entre  $C_{i_r}, C_{j_r}, C_{k_r}, C_{l_r}$ , y la cuarta de estas caras verifica la propiedad deseada.  $\square$

**Lema 4.3.2.** *Sea  $\mathcal{P}$  un descendiente de un tetraedro y sea  $[i_4, j_4, k_4, l_4], \dots, [i_n, j_n, k_n, l_n]$  un camino generador. Entonces para cada índice  $r = 5, \dots, n$  existe otro índice  $s < r$  de forma que  $i_r, j_r, k_r \in \{i_s, j_s, k_s, l_s\}$ ; en otras palabras, existe  $h \in I_s$  de forma que el conjunto  $\{i_r, j_r, k_r, h\}$  coincide con el conjunto  $\{i_s, j_s, k_s, l_s\}$  (además de la cara  $C_{l_r}$ , que es adyacente a las tres caras  $C_{i_r}, C_{j_r}, C_{k_r}$ , también la cara  $C_h$  es adyacente a las tres caras anteriores).*

*Demostración:* Consideramos el vértice de  $\mathcal{P}_{r-1}$  determinado por las caras  $C_{i_r}, C_{j_r}, C_{k_r}$ . Si este vértice era uno de los de  $\mathcal{P}_4$ , entonces  $\{i_r, j_r, k_r\} \subset \{i_4, j_4, k_4, l_4\}$ . Si el vértice se ha obtenido en el paso  $s$ , entonces  $\{i_r, j_r, k_r\} \subset \{i_s, j_s, k_s, l_s\}$ .  $\square$

Obsérvese que un descendiente de tetraedro es un poliedro trivalente, y por tanto, si tiene  $n$  caras, tiene  $3n - 6$  aristas. Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3n-6})$  ángulos asignados a sus aristas. Consideramos la matriz  $G(\alpha, \bar{x})$  simétrica, de orden  $n$ , con unos en la diagonal, tal que

- si  $C_i$  y  $C_j$  son caras adyacentes de  $\mathcal{P}$  entonces la entrada  $(i, j)$  de esta matriz es igual a  $-\cos \alpha_{ij}$ ;
- el resto de las entradas son indeterminadas,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ .

**Notaciones.** Puesto que los ángulos  $\alpha$  los fijamos desde el principio, no haremos alusión a ellos en la notación; así, denotaremos  $G_{\bar{x}} := G(\alpha, \bar{x})$ . Los menores principales o mixtos de esta matriz los denotaremos con la notación habitual,  $G_{\bar{x}} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix}$ ; si alguno de estos menores no contiene ninguna indeterminada, entonces, para simplificar notación, no pondremos el subíndice  $\bar{x}$ . También denotamos por  $G_{\bar{x}}(I_r)$  a la submatriz de  $G_{\bar{x}}$  formada por las filas y columnas con índices en el conjunto  $I_r$ . Finalmente, como no vamos a dar más que un valor  $\bar{x}_0$  a las indeterminadas  $\bar{x}$ , denotaremos  $G(I_r) := G_{\bar{x}_0}(I_r)$ .

Si  $[i_4, j_4, k_4, l_4], \dots, [i_n, j_n, k_n, l_n]$  es un camino generador de  $\mathcal{P}$ , entonces, para cada  $r$ , la submatriz de  $G_{\bar{x}}$  formada por las filas y columnas  $i_r, j_r, k_r, l_r$  no contiene ninguna indeterminada (puesto que las caras correspondientes a estos índices son totalmente adyacentes). Con el convenio que acabamos de hacer, denotamos por  $G_{i_r j_r k_r l_r}$  al determinante de esta matriz.

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $\mathcal{P}$  un poliedro abstracto de  $n$  caras que es descendiente de un tetraedro. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_{3n-6}$  ángulos asignados a sus aristas. Sea  $[i_4, j_4, k_4, l_4], \dots, [i_n, j_n, k_n, l_n]$  un camino generador de  $\mathcal{P}$  y supongamos que  $G_{i_r j_r k_r l_r} < 0$ , para todo  $r = 4, \dots, n$ . Entonces*

- existe un valor  $\bar{x}_0$  de las indeterminadas tal que la matriz  $G := G_{\bar{x}_0}$  tiene rango 4 y signatura  $(3, 1)$ ;
- existe como mucho un valor  $\bar{x}_0$  que verifique (i) y la siguiente propiedad: para cada  $r$  y para todo  $h \in I_{r-1}$ ,  $h \neq i_r, j_r, k_r$ , es  $G \begin{pmatrix} i_r j_r k_r l_r \\ i_r j_r k_r h \end{pmatrix} > 0$ .

*Demostración:*

(i) Las matrices  $G_{\bar{x}}(I_r)$  son submatrices encajadas de  $G_{\bar{x}} = G_{\bar{x}}(I_n)$ . Vamos a dar, por inducción sobre  $r$ , valores  $\bar{x}_0$  a las indeterminadas de  $G_{\bar{x}}(I_r)$ , de modo que la matriz  $G(I_r) = G_{\bar{x}_0}(I_r)$  tenga rango 4 y signatura  $(3, 1)$ .

Para el primer paso de la inducción, la submatriz  $G_{\bar{x}}(I_4)$  no tiene indeterminadas, pues las 4 caras de  $\mathcal{P}$  correspondientes a estos índices son totalmente adyacentes. Por otra parte, esta matriz tiene menores encajados positivos de orden 1 y 2 y su determinante,  $G_{i_4 j_4 k_4 l_4}$ , es negativo por hipótesis; por tanto se deduce que su signatura es  $(3, 1)$ .

Se tiene además del mismo modo que la signatura de la matriz  $G[i_r j_r k_r l_r]$  es  $(3,1)$ , para todo  $r$ .

Supongamos que hemos dado valores a todas las indeterminadas de la matriz  $G_{\bar{x}}(I_{r-1})$  y que, con estos valores, esta matriz tiene rango 4 y signatura  $(3,1)$ ; vamos ahora a dar valores al resto de las indeterminadas de la matriz  $G_{\bar{x}}(I_r)$ . Estas nuevas indeterminadas corresponden a las entradas de índices  $(l_r, t)$ , para todo  $t \in I_{r-1}$ ,  $t \neq i_r, j_r, k_r$ .

Para  $i_r, j_r, k_r$ , por el Lema 4.3.2, existe  $s < r$  y existe  $h \in I_s$  de forma que el conjunto  $\{i_r, j_r, k_r, h\}$  coincide con el conjunto  $\{i_s, j_s, k_s, l_s\}$ . De esta forma, por hipótesis, se tiene que el menor principal  $G_{i_r j_r k_r h} = G_{i_s j_s k_s l_s}$  es estrictamente negativo. Damos el siguiente valor a la entrada  $(l_r, h)$  de  $G = G_{\bar{x}_0}$ :

- si  $G_{i_r j_r k_r} \neq 0$ , entonces definimos

$$G(l_r, h) := \frac{G_{i_r j_r k_r l_r} \Big|_{G(l_r, h)=0} - \sqrt{G_{i_r j_r k_r l_r} G_{i_r j_r k_r h}}}{-G_{i_r j_r k_r}};$$

por hipótesis,  $G_{i_r j_r k_r l_r} < 0$ , luego el radicando de la expresión anterior es estrictamente positivo.

- si  $G_{i_r j_r k_r} = 0$ , definimos

$$G_0(l_r, h) := \frac{G_{i_r j_r k_r l_r h} \Big|_{G(l_r, h)=0}}{2G_{i_r j_r k_r l_r} \Big|_{G(l_r, h)=0}};$$

aquí hay que observar que el denominador es no nulo; en efecto: por una parte,  $G_{\bar{x}}(i_r j_r k_r l_r) = G_{i_r j_r k_r l_r} \Big|_{G(l_r, h)=0}$ , por ser  $G_{i_r j_r k_r} = 0$  (como no depende entonces de ninguna indeterminada, denotaremos  $G_{i_r j_r k_r l_r} := G_{\bar{x}}(i_r j_r k_r l_r)$ ); y por otra parte, de la identidad de Sylvester de tipo estándar, se tiene

$$G_{i_r j_r k_r} G_{i_r j_r k_r l_r h} = G_{i_r j_r k_r l_r} G_{i_r j_r k_r h} - G_{i_r j_r k_r l_r}^2,$$

con lo que

$$G_{i_r j_r k_r l_r}^2 = G_{i_r j_r k_r l_r} G_{i_r j_r k_r h} > 0.$$

Con esta definición se tiene que  $G_{i_r j_r k_r h l_r} = 0$ , pues si llamamos  $x$  a la entrada  $G(l_r, h)$ , entonces

$$G_{i_r j_r k_r l_r h} = -G_{i_r j_r k_r} x^2 - 2G_{i_r j_r k_r l_r} \Big|_{x=0} x + G_{i_r j_r k_r l_r h} \Big|_{x=0},$$

y hemos definido  $G(l_r, h)$  como una solución de esta ecuación. Se deduce de esto que la matriz  $G[i_r j_r k_r h l_r]$  tiene rango 4 y signatura (3,1) (puesto que, según hemos visto, la submatriz  $G[i_r j_r k_r h] = G[i_s j_s k_s l_s]$  tiene esta signatura). Esto significa que existen vectores  $e'_{i_r}, e'_{j_r}, e'_{k_r}, e'_{l_r}, e'_h \in \mathbf{E}^{3,1}$  cuya matriz de productos escalares es  $G[i_r j_r k_r l_r h]$ . Por otra parte, por la hipótesis de inducción,  $G(I_{r-1})$  tiene rango 4 y signatura (3,1). Esto equivale a que existen  $r - 1$  vectores  $e_1, \dots, e_{r-1} \in \mathbf{E}^{3,1}$  tales que su matriz de productos escalares es  $G(I_{r-1})$ . Ahora bien,  $i_r, j_r, k_r, h \in I_{r-1}$ ; esto significa que la matriz de Gram de los vectores  $e_{i_r}, e_{j_r}, e_{k_r}, e_h$  es también igual a  $G[i_r j_r k_r h]$ . Consideramos la aplicación lineal  $\varphi : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  que aplica  $e_{i_r}, e_{j_r}, e_{k_r}, e_h$  en  $e'_{i_r}, e'_{j_r}, e'_{k_r}, e'_h$ . Esta aplicación es un isomorfismo que preserva el producto escalar. La matriz de productos escalares de los vectores  $e_1, \dots, e_{r-1}, \varphi^{-1}(e'_{i_r})$  es entonces de rango 4, y signatura (3,1) y contiene a la submatriz  $G(I_{r-1})$ . Tomamos esta matriz como  $G(I_r)$ .

Como  $G(I_r)$  tiene rango 4, el menor mixto de orden 5,  $G\left(\begin{smallmatrix} i_r j_r k_r h l_r \\ i_r j_r k_r h t \end{smallmatrix}\right)$  es igual a 0. Con esto podemos encontrar las entradas de  $G(I_r)$  que no conocíamos: para todo  $t \in I_{r-1}$ ,  $t \neq h$ , se tiene

$$G(l_r, t) = \frac{-G\left(\begin{smallmatrix} i_r j_r k_r h l_r \\ i_r j_r k_r h t \end{smallmatrix}\right)_{|G(l_r, t)=0}}{G_{i_r j_r k_r h}}$$

y con esto hemos probado la primera parte de la proposición.

(ii) Observamos que para los casos en los que hay dos posibilidades de elección para las indeterminadas, las condiciones  $G\left(\begin{smallmatrix} i_r j_r k_r l_r \\ i_r j_r k_r h \end{smallmatrix}\right) > 0$  del enunciado fuerzan (de la misma forma que en el caso de prismas triangulares, ver el principio de la demostración del Teorema 4.2.4) a tomar el valor que hemos tomado.

□

Observamos que los menores mixtos de orden 4 que aparecen en la proposición anterior *no* tienen necesariamente que aparecer en la condición  $(M_4)$  del Teorema 3.4.4, puesto que las caras de  $\mathcal{P}$  correspondientes a los índices  $i_r, j_r, k_r$  no tienen por qué incidir en un vértice de  $\mathcal{P}$ , y por tanto no tenemos necesariamente un ciclo ampliado. Sin embargo, en cualquier realización de  $\mathcal{P}$ , se tiene también que los menores  $G\left(\begin{smallmatrix} i_r j_r k_r l_r \\ i_r j_r k_r h \end{smallmatrix}\right)$  del apartado (ii) de la proposición son positivos, según probaremos en el Lema 4.3.5.

Recordemos que un elemento prismático triangular de un poliedro  $\mathcal{P}$  es un conjunto de tres caras  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  de  $\mathcal{P}$  tales que son adyacentes dos a dos y no inciden en un vértice de  $\mathcal{P}$ . Un elemento prismático triangular divide el conjunto de caras de  $\mathcal{P}$  distintas de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  en dos conjuntos  $\{\mathcal{C}_{i_1}, \dots, \mathcal{C}_{i_r}\}$  y  $\{\mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_r}\}$ , dependiendo de la componente conexa de  $\partial\mathcal{P} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3)$  en la que estén. Decimos que dos caras están *separadas* por un elemento prismático triangular si están en distinta componente conexa. Estos dos conjuntos de caras se pueden caracterizar de forma geométrica: supongamos

una realización afín cualquiera  $P \subset \mathbf{R}^3$  de  $\mathcal{P}$  tal que los planos que contienen a las caras  $C_1, C_2, C_3$  se cortan en un punto  $V$  (finito); consideramos el conjunto de caras de  $P$  (distintas de  $C_1, C_2, C_3$ ) tales que los semiespacios correspondientes contienen el punto  $V$ . Entonces este conjunto coincide con uno de los dos conjuntos anteriores. La traducción de esta propiedad a conos poliedrales da el siguiente lema:

**Lema 4.3.4.** *Sea  $\hat{P} \subset E^{3,1}$  un cono poliedral no degenerado, con interior no vacío, y sea  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$  un elemento prismático triangular. Sean  $\hat{C}_{i_1}, \dots, \hat{C}_{i_r}$  y  $\hat{C}_{j_1}, \dots, \hat{C}_{j_s}$  los dos conjuntos de caras que hemos descrito arriba. Entonces  $\hat{P}_1 := \hat{H}_1^- \cap \hat{H}_2^- \cap \hat{H}_3^- \cap \left(\bigcap_{i=1}^r \hat{H}_{i_i}^-\right)$  y  $\hat{P}_2 := \hat{H}_1^- \cap \hat{H}_2^- \cap \hat{H}_3^- \cap \left(\bigcap_{i=1}^s \hat{H}_{j_i}^-\right)$  son conos poliedrales no degenerados, en los que las caras  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$  inciden en un vértice trivalente (es decir, ninguna otra cara del poliedro  $\hat{P}_i$  incide en este vértice).*

*Demostración:*

Como  $\hat{P}$  es no degenerado, podemos cortar con un hiperplano afín (Lema 1.3.2) para obtener un poliedro compacto  $P$  con un elemento prismático triangular. Sea  $\hat{H}_1 \cap \hat{H}_2 \cap \hat{H}_3 = L(v)$  (una recta vectorial); entonces, por el comentario anterior, el vector  $v$  está contenido en  $\bigcap_{i=1}^r \hat{H}_{i_i}^-$  y  $-v \in \bigcap_{i=1}^s \hat{H}_{j_i}^-$ , o a la inversa. Por consiguiente,  $v$  es vértice (trivalente) de  $\hat{P}_1$  y  $-v$  es vértice de  $\hat{P}_2$  (o al revés).  $\square$

**Lema 4.3.5.** *Sea  $\hat{P} \subset E^{3,1}$  un cono poliedral no degenerado con interior no vacío Sean  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$  un elemento prismático triangular. Sean  $\hat{C}_4$  y  $\hat{C}_5$  caras de  $\hat{P}$  distintas de  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$ . Entonces  $G_{1235}^{(1234)}$  es no nulo, y es positivo si y sólo si las caras  $\hat{C}_4$  y  $\hat{C}_5$  están separadas por  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$ .*

*Demostración:*

Por el lema anterior, los hiperplanos  $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3, \hat{H}_4$  sólo se cortan en el origen de  $\mathbf{R}^4$ , y lo mismo con  $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3, \hat{H}_4$ ; por tanto los vectores  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  y  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5$  de  $\wedge^4 \mathbf{R}^4$  son no nulos. Como este espacio tiene dimensión 1 y la forma cuadrática  $\wedge^4 f$  es no degenerada, se tiene que

$$G_{1235}^{(1234)} = (\wedge^4 f)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5) \neq 0$$

Supongamos que  $\hat{C}_4$  y  $\hat{C}_5$  están separadas por el elemento prismático; entonces el cono poliedral  $\bigcap_{i=1}^5 \hat{H}_i^-$  tiene el tipo combinatorio de un prisma triangular. Para este caso hemos visto ya (principio de la demostración del Teorema 4.2.4) que  $G_{1235}^{(1234)}$  es positivo.

Recíprocamente, supongamos que  $\hat{C}_4$  y  $\hat{C}_5$  no están separadas por el elemento prismático. Entonces, por el Lema 4.3.4,  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4$  y  $\hat{C}_5$  son caras de un cono

poliedral con las caras  $\hat{C}_1$ ,  $\hat{C}_2$  y  $\hat{C}_3$  incidentes en un vértice trivalente. Entonces  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4$  y  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_5$  son ciclos ampliados de este cono poliedral con la misma orientación, por lo que  $G_{\begin{smallmatrix} 1234 \\ 1235 \end{smallmatrix}}^{(1234)}$  es negativo, por el Teorema 3.4.4. □

En la Proposición 4.3.3, observamos que las caras de  $\mathcal{P}$  correspondientes a los índices  $i_r, j_r, k_r$  forman un elemento prismático triangular. Además las caras  $C_{i_r}$  y  $C_{k_r}$  están separadas por este elemento prismático, luego, por el lema anterior, se tiene que en cualquier realización de  $\mathcal{P}$  el menor mixto  $G_{\begin{smallmatrix} i_r j_r k_r i_r \\ i_r j_r k_r h \end{smallmatrix}}^{(i_r j_r k_r i_r)}$  es positivo.

A la vista de la Proposición 4.3.3 y del Lema 4.3.5, y utilizando el Teorema 3.4.4, tenemos una caracterización para la existencia de poliedros compactos hiperbólicos del tipo combinatorio de un descendiente de tetraedro, a partir de sus ángulos diédricos: dado un descendiente  $\mathcal{P}$  de tetraedro de  $n$  caras y asignados ángulos diédricos a sus aristas, en las hipótesis de la Proposición 4.3.3, por esta proposición construimos una matriz que es la matriz de Gram de un cierto poliedro en  $\mathbf{H}^3$ ; para ver si este poliedro es del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  basta ahora aplicar el Teorema 3.4.4 a la matriz que hemos construido. Finalmente, puesto que un descendiente de tetraedro es un poliedro trivalente, es conocido por los lemas de Cauchy (ver [HR]) que los ángulos diédricos determinan el poliedro salvo isometrías hiperbólicas. Alternativamente, de la Proposición 4.3.3 también se deduce este resultado de unicidad.

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.6.** (Existencia y unicidad de descendientes de tetraedros) *Sea  $\mathcal{P}$  un descendiente de tetraedro y asignamos ángulos  $\alpha_i$  a sus aristas. Entonces existe un poliedro  $P \subset \mathbf{H}^3$  (resp. poliedro compacto) del mismo tipo combinatorio que  $\mathcal{P}$  y con los ángulos dados en las correspondientes aristas, si y sólo si*

- (i) *los ángulos  $\alpha_i$  verifican las hipótesis de la Proposición 4.3.3; y*
- (ii) *la matriz  $G$  construida en esta proposición verifica las condiciones del Teorema 3.4.3 (resp. Teorema 3.4.4)*

*Además el poliedro  $P$  es único salvo isometrías hiperbólicas.* □

Se puede intentar dar, para los descendientes del tetraedro, una descripción del espacio de ángulos del estilo de la que hemos hecho para prismas triangulares en el Teorema 4.2.3, es decir, dada por desigualdades polinómicas en los cosenos de los ángulos diédricos.

En primer lugar, utilizando un camino generador del poliedro, se puede ver que es posible reducir bastante el número de condiciones  $(M_3)$  y  $(M_4)$  que hay que comprobar.

Aún así las ecuaciones que se obtienen al eliminar las incógnitas (ya en el ejemplo más sencillo después del prisma triangular), son demasiado complicadas para tratar con ellas.

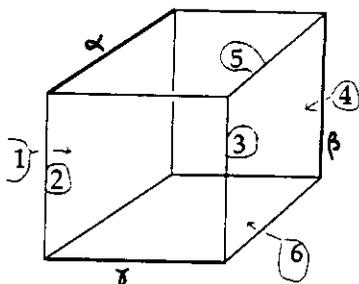
#### 4.4 Ejemplos y comentarios sobre el cubo

En esta sección vamos a ocuparnos de otro ejemplo de poliedro, el cubo. Consideraremos algunos casos particulares, es decir, fijaremos el valor de algunos ángulos, y para estos casos estudiaremos el espacio de ángulos, aplicando el Teorema 3.4.4.

Sea pues  $\mathcal{P}$  el cubo abstracto con las caras numeradas según la *Figura 4.5*. La matriz de Gram de  $\mathcal{P}$  en un espacio  $(\mathbf{R}^4, f)$  es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & u & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & 1 & a_{23} & v & a_{25} & a_{26} \\ u & a_{23} & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & v & a_{34} & 1 & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 1 & w \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & w & 1 \end{pmatrix},$$

donde los  $a_{ij}$  se corresponden con los pares de caras adyacentes del cubo ( $a_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$ ) y las entradas  $u, v, w$  corresponden a los tres pares de caras no adyacentes del cubo.



*Figura 4.5*

#### Cubo de Lambert

Supongamos que el cubo tiene todos los ángulos rectos menos 3, que corresponden a 3 aristas no adyacentes dos a dos (ver *Figura 4.5*). Este cubo se utiliza, por ejemplo, para dar estructura de caleidoscopio, y más general, de variedad hiperbólica cónica a  $\mathbf{S}^3$  con singularidad en los anillos de Borromeo ([Th], [HLMW]). La matriz de Gram de un cubo así es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v & 0 & c \\ u & 0 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & v & b & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & c & 0 & 0 & w & 1 \end{pmatrix}$$

Nos centramos en el caso compacto hiperbólico. Supongamos que existe un cubo compacto  $P \subset \mathbf{H}^3$  con ángulos  $\alpha = -\arccos a$ ,  $\beta = -\arccos b$ ,  $\gamma = -\arccos c$ . Se puede ver fácilmente que los ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  deben ser agudos. En efecto, si  $P$  es compacto, la cara  $C_2$  es un cuadrilátero compacto hiperbólico con ángulos  $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \alpha$ , y por tanto debe ser  $\alpha < \pi/2$ . Entonces, estamos en un caso en el que podemos aplicar el Teorema de Andreev (ver Apéndice B, Capítulo 1), con lo que obtenemos

**Proposición 4.4.1.** *Existe un cubo de Lambert compacto hiperbólico con ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  si y sólo si  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$ .*

*Demostración:*

Aplicando el teorema de Andreev,  $\alpha$  debe ser menor que  $\pi/2$ , porque forma parte del elemento prismático cuadrangular formado por las caras  $C_1, C_5, C_3, C_6$ , con ángulos  $\pi/2, \pi/2, \pi/2, \alpha$ ; de la misma forma,  $\beta, \gamma < \pi/2$ . Con esto se verifican ya todas las condiciones del Teorema de Andreev. □

Vamos a verlo también utilizando los métodos que hemos desarrollado. Supongamos que la matriz  $G$  tiene rango 4. Entonces, por el Teorema 3.4.4, existe un cubo de Lambert con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  si y sólo si:

- ( $P_3$ )  $G_{125} = 1 - a^2 > 0$ , es decir,  $a \in (-1, 1)$  (esto ya lo sabíamos porque  $a$  es el coseno de algún ángulo). Análogamente, los demás menores principales de orden 3 no imponen ninguna restricción.
- ( $M_3$ ) Esta condición es equivalente (por la Nota 4.1.1(b)) a que los 7 menores mixtos  $G_{(235)}^{(125)}$ ,  $G_{(345)}^{(235)}$ ,  $G_{(415)}^{(345)}$ ,  $G_{(263)}^{(235)}$ ,  $G_{(364)}^{(263)}$ ,  $G_{(461)}^{(364)}$ ,  $G_{(162)}^{(461)}$  sean positivos. Calculamos estos menores:

$$\begin{aligned} G_{(235)}^{(125)} &= G_{(415)}^{(345)} = G_{(461)}^{(364)} = -u \\ G_{(345)}^{(235)} &= G_{(364)}^{(263)} = G_{(162)}^{(461)} = -v \\ G_{(263)}^{(235)} &= -w \end{aligned}$$

Por tanto la condición ( $M_3$ ) equivale a que  $u, v, w < 0$ .

- ( $M_4$ ) La condición de menores mixtos de orden 4 es equivalente (por la Nota 4.1.1(a)) a que los 11 menores mixtos  $G_{(1254)}^{(1253)}$ ,  $G_{(1256)}^{(1253)}$ ,  $G_{(2354)}^{(2351)}$ ,  $G_{(2356)}^{(2354)}$ ,  $G_{(3451)}^{(3452)}$ ,  $G_{(3456)}^{(3451)}$ ,  $G_{(4156)}^{(4153)}$ ,  $G_{(1623)}^{(1625)}$ ,  $G_{(1624)}^{(1623)}$ ,  $G_{(2634)}^{(2635)}$ ,  $G_{(3641)}^{(3642)}$ , sean negativos. Calculamos estos menores:

$$\begin{aligned} G_{(1254)}^{(1253)} &= b(1 - a^2) & G_{(1256)}^{(1253)} &= G_{(4156)}^{(4153)} = auw & G_{(2354)}^{(2351)} &= -bu \\ G_{(2356)}^{(2354)} &= -cv & G_{(3451)}^{(3452)} &= G_{(3641)}^{(3642)} = buv & G_{(3456)}^{(3451)} &= -a(1 - b^2)w \\ G_{(4156)}^{(4153)} &= -a(1 - c^2)u & G_{(1624)}^{(1623)} &= b(1 - c^2) & G_{(2634)}^{(2635)} &= cvw \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo ya en cuenta la condición  $(M_3)$ , la condición  $(M_4)$  equivale a que  $a, b, c < 0$ .

$(P_4)$  La condición  $(M_4)$ , y  $\text{rg}G = 4$  implican que la condición  $(P_4)$  equivale simplemente a que un menor principal de orden 4 es negativo. Calculamos por ejemplo el menor  $G_{1245} = (1 - a^2)(1 - v^2)$ . Entonces  $G_{1245} < 0$  si y sólo si  $v^2 > 1$  (por las simetrías de la matriz  $G$ , se obtendrán también como condiciones necesarias para que los menores principales de orden 4 sean negativos que  $u^2 > 1$  y  $w^2 > 1$ ).

A la vista de los cálculos anteriores concluimos lo siguiente: si existe un cubo de Lambert compacto hiperbólico con ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$ , entonces  $\alpha, \beta, \gamma < \pi/2$  o equivalentemente  $a, b, c < 0$ . Recíprocamente, dados  $a, b, c \in (-1, 0)$ , entonces existe un cubo compacto hiperbólico con ángulos  $\alpha = -\cos a, \beta = -\cos b, \gamma = -\cos c$  si y sólo si existen  $u, v, w \in (-\infty, -1)$  tales que la matriz  $G$  tiene rango 4. Vamos a ver que para cualesquiera valores de  $a, b, c \in (-1, 0)$  existe una única terna  $(u, v, w)$  que verifica lo anterior.

Los valores de  $u, v, w$  deben ser, pues, raíces de los menores principales de orden 5 y del determinante de  $G$  (por el Lema 4.1.2, para estos valores el rango de la matriz  $G$  será 4). Calculamos estos determinantes:

$$\begin{aligned} G_{12345} &= u^2v^2 - u^2 - v^2 + a^2v^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\ G_{12346} &= u^2v^2 - v^2 - u^2 + c^2u^2 + c^2b^2 - c^2 - b^2 + 1 \\ G_{12356} &= u^2w^2 - u^2 - w^2 + c^2u^2 + a^2c^2 - a^2 - c^2 + 1 \\ G_{12456} &= v^2w^2 - v^2 - w^2 + a^2v^2 + a^2c^2 - a^2 - c^2 + 1 \\ G_{13456} &= u^2w^2 - u^2 - w^2 + b^2w^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \\ G_{23456} &= v^2w^2 - v^2 - w^2 + b^2w^2 + b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1 \\ \det G &= -u^2v^2w^2 + u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 - u^2 - v^2 - w^2 + a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - \\ &\quad - 2abcuvw - a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 1 \end{aligned}$$

Podemos calcular  $u$  y  $v$  a partir de  $G_{12345}$  y  $G_{12346}$ , despejando por ejemplo  $u$  en  $G_{12346}$  y sustituyendo en  $G_{12345}$ , con lo que se obtiene una expresión que depende sólo de  $v$ . Esto equivale a calcular la resultante de  $G_{12345}$  y  $G_{12346}$  respecto de  $u$ . De forma análoga se calcula  $w$ . Calculamos las resultantes:

$$\text{res}(G_{12345}, G_{12346}, u) = \text{res}(G_{12456}G_{23456}, w) = q(v)^2,$$

donde

$$q(v) = a^2v^4 + (a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2 - b^2c^2)v^2 + a^2(1 - c^2)(1 - b^2)$$

Si llamamos  $A = a^2$ ,  $B = a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2 - b^2c^2$  y  $C = a^2(1 - c^2)(1 - b^2) = a^2b^2c^2 + a^2 - a^2c^2 - a^2b^2$ , las 4 soluciones de  $q(v)$  son

$$v_1 = -\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

$$v_3 = -\sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad v_4 = \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

En primer lugar vamos a ver que las 4 raíces son números reales, y que  $v_3, v_4$  tienen valor absoluto menor que 1:

**Lema 4.4.2.** Supongamos  $a, b, c \in (-1, 0)$ ; entonces

- (a)  $B < 0$ ;
- (b)  $B^2 - 4AC$  es simétrico en  $a, b, c$  y es estrictamente positivo;  $-B - \sqrt{B^2 - 4AC} > 0$ ;
- (c)  $v_1^2 = v_2^2 > 1$ ,  $v_3^2 = v_4^2 < 1$

*Demostración:*

(a)  $B = a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2 - b^2c^2 = -a^2(1 - b^2) - a^2(1 - c^2) - b^2c^2 < 0$ ;

(b) Desarrollando  $B^2 - 4AC$  se tiene

$$B^2 - 4AC = a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4 - 2a^4b^2c^2 - 2a^2b^4c^2 - 2a^2b^2c^4 + 4a^2b^2c^2 =$$

$$= (a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)^2 + 4a^2b^2c^2(1 - c^2) > 0$$

(la primera expresión de  $B^2 - 4AC$  muestra su simetría). Por otra parte, por ser  $B < 0$ ,  $-B > \sqrt{B^2 - 4AC}$  equivale a  $B^2 > B^2 - 4AC$ , y esto es cierto por ser  $A$  y  $C$  no negativos; por tanto se tiene  $-B - \sqrt{B^2 - 4AC} > 0$ .

(c)  $v_1^2$  y  $v_3^2$  son las dos raíces del polinomio cuadrático  $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$ . Por ser  $A = a^2 > 0$ ,  $y = Q(x)$  es una parábola convexa; por otra parte, observemos que  $Q(1) = A + B + C = -b^2c^2(1 - a^2) < 0$ . Se deduce entonces que la menor de las dos raíces es menor que 1 y la mayor de ellas es mayor que 1. Por ser  $A > 0$ ,  $v_1^2$  es la raíz mayor; por tanto se tiene el resultado. □

Finalmente, como  $v_1 < 0$  y  $v_2 > 0$ , deducimos que el valor de  $v$  que debemos tomar es

$$v = v_1 = -\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A &= a^2 \\ B &= a^2b^2 + a^2c^2 - 2a^2 - b^2c^2 \\ C &= a^2(1 - c^2)(1 - b^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de  $v$  en el polinomio  $G_{12346}$ , y teniendo en cuenta que  $u$  debe ser negativo, se obtiene el valor para  $u$ :

$$u = -\sqrt{\frac{1 - c^2 - v^2 - b^2 + b^2 c^2}{1 - c^2 - v^2}}.$$

Aquí habría que comprobar que el radicando es positivo; en lugar de hacer esto, observamos que, mediante un cálculo directo, se puede ver que el valor anterior de  $u$  coincide con el siguiente:

$$u = u_1 = -\sqrt{\frac{-B' + \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}}, \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A' &= c^2 \\ B' &= c^2 b^2 + c^2 a^2 - 2c^2 - b^2 a^2, \\ C' &= c^2(1 - a^2)(1 - b^2) \end{aligned}$$

es decir,  $u_1$  se obtiene de la misma forma que  $v_1$ , teniendo en cuenta las simetrías de la matriz de Gram.

De la misma forma podemos calcular el valor de  $w$ :

$$w = w_1 = -\sqrt{\frac{-B'' + \sqrt{B''^2 - 4A''C''}}{2A''}}, \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} A'' &= b^2 \\ B'' &= b^2 a^2 + b^2 c^2 - 2b^2 - a^2 c^2 \\ C'' &= b^2(1 - a^2)(1 - b^2) \end{aligned}$$

Se comprueba (directamente con ordenador) que los valores  $u_1, v_1, w_1$  anulan todos los menores principales de orden 5 y también el determinante de  $G$ . Además, por lo que hemos visto antes, son los únicos valores en estas condiciones que son menores que  $-1$ .

El cubo de Lambert es un ejemplo ilustrativo de cómo utilizar el método que hemos dado para encontrar el espacio de ángulos. Este ejemplo, sin embargo, es muy sencillo, porque casi todos los ángulos son iguales a  $\pi/2$  (además de que el cubo es un poliedro regular); por ejemplo, hemos obtenido que la resultante de los menores  $G_{12345}$  y  $G_{12346}$  respecto de la variable  $u$  es un cuadrado perfecto,  $q(v)^2$ , donde además  $q(v)$  es un polinomio bicuadrático. De esta forma, hemos podido calcular  $v$  en función de los parámetros  $a, b, c$ . En el caso general, la resultante anterior es un polinomio en  $v$  de grado 8, que no hemos sabido cómo tratar.

# Bibliografía

- [Al] A.D. Alexandrow, *Konvexe Polyeder*, Berlin: Akademie Verlag, 1958 (original en ruso: GITTL, Moscow, 1950).
- [An1] E.M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskii spaces*, Math. USSR Sb. 10 (1970), 413-440.
- [An2] E.M. Andreev, *Convex polyhedra of finite volume in Lobachevskii space*, Math. USSR Sb. 12 (1970), 255-259.
- [Be] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [BG] C. Bavard, E. Ghys, *Polygones du plan et polyèdres hyperboliques*, Geometriae Dedicata 43 (1992), 207-224.
- [BR] R. Benedetti, J.J. Risler, *Real Algebraic and Semialgebraic Geometry* Actualités Mathématiques. Hermann, 1990.
- [BS] P. Bowers, K. Stephenson, *A branch Andreev-Thurston Theorem for circle packings of the sphere*, aparecerá en Proc. of the London Math. Soc.
- [Ca] A.L. Cauchy, *Sur les polygones et polyèdres*, J. Ec. Polytechnique 16, 87-99 (1813).
- [Cv] Y. Colin de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, Invent. Math. 104 (1991), 665-669.
- [Co] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3ª edición, Dover, New York, 1973.
- [Ga] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices* Vol. I. Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
- [Gr] B. Grünbaum, *Convex Polytopes* Pure and Applied Mathematics, Vol. XVI, Interscience publishers, 1967.
- [HLM] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, W.C. Whitten, *On universal groups and tree-manifolds*, Invent. Math. (1987), 87, 441-456.
- [Ho] C.D. Hodgson, *Deduction of Andreev's theorem from Rivin's characterization of convex hyperbolic polyhedra*, Topology 90, Proceedings of Research Semester in

Low Dimensional Topology at O.S.U., de Gruyter Verlag, New York.

- [HR] C.D. Hodgson, I. Rivin, *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math. 111 (1993), 77-111.
- [Iv] B. Iversen, *Hyperbolic Geometry*, Cambridge University Press, 1992.
- [La] F. Lanner, *On complexes with transitive groups of automorphisms*, Comm. Sem. Math. Univ. Lund 11 (1950), 1-71.
- [MR] A. Marden, B. Rodin, *On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem*, Computational Methods and Function Theory, Proceeding, Valparaiso 1989, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1435, Springer-Verlag, pp.103-115.
- [Mi1] J. Milnor, *Hyperbolic geometry, the first 150 years*, Bull.A.M.S. 6 (1982), 9-24.
- [Mi2] J. Milnor, *The Schläfli differential equality*, en *Collected papers Vol 1: Geometry*, Houston: Publish or Perish Inc., 1994.
- [Mn] N.E. Mnëv, *The universality theorems on the classification problem of cofiguration varieties and convex polytopes varieties*, Viro, O.Ya. (ed.): *Topology and Geometry - Rohlin Seminar*, Lectures Notes in Mathematics 1346, Springer, Heidelberg (1988), 527-544.
- [Moh] E. Mohr, *Einfacher Beweis des verallgemeinerten Determinantensatzes von Sylvester nebst einer Verschärfung*, Math. Nachr. 10 (1953), 257-260.
- [O'N] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, New York, Academic Press 1983.
- [Po] A.V. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, (Transl. Math. Monogr., vol 35) Am. Math. Soc. 1973.
- [Ra] J.G. Ratcliffe *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1994.
- [Ric] J. Richter-Gebert, *Realization spaces of 4-polytopes are universal*, preprint.
- [Ri1] I. Rivin, *On geometry of convex ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Topology Vol. 32, No. 1 (1993), 87-92.
- [Ri2] I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Annals of Mathematics, Vol. 143, No. 1 (1996), 51-70.
- [Ri3] I. Rivin, *Intrinsic Geometry of Convex Ideal Polyhedra in Hyperbolic 3-space*, en *Analysis, Algebra and Computers in Mathematics*, Proc. 21st Nordic Cong.Math., Marcel Dekker, New York-Basel-Hong-Kong, 1994.
- [RS] C.P. Rourke, B.J. Sandersosn, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag, 1972.
- [Sa] L. Santaló, *Geometrías no euclidianas*, Ed. Eudeba 1961.

- [Th] W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-manifolds*, preprint, Princeton University Notes.
- [Vi1] E.B. Vinberg, *Volumes of non-Euclidean Polyhedra*, Russian Math. Surveys 48:2 (1993), 15-45.
- [Vi2] E.B. Vinberg, Hyperbolic reflection groups, Russian Math. Surveys 40:1 (1985), 31-75.
- [Vi3] E.B. Vinberg (Ed.), *Geometry II*, Springer-Verlag, 1993.
- [Zi] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, 1985.